

Handbuch
der
Physikalischen Maassbestimmungen.

Von

Dr. B. Weinstein

Privat-Dozent an der Universität zu Berlin und Hilfsarbeiter
bei der Kaiserl. Normal-Aichungs-Commission.

Erster Band.

Die Beobachtungsfehler, ihre rechnerische Ausgleichung und Untersuchung.



Berlin.

Verlag von Julius Springer.

1886.

ISBN-13:978-3-642-90557-5
DOI: 10.1007/978-3-642-92414-9

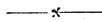
e-ISBN-13:978-3-642-92414-9

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1886

Berlin
Verlag von Julius Springer
1986

Druck von Eduard Krause in Berlin.

Vorwort.



Während für den beschreibenden Teil der Physik wie für den theoretischen eine erhebliche Anzahl von teils das Gesamtgebiet der Physik, teils einzelne Abschnitte derselben behandelnden Lehrbüchern existirt, ist der sich auf Maassbestimmungen beziehende Teil in Deutschland selbständig nur einmal, von Kohlrausch, bearbeitet worden, und hier auch nur insoweit, als er bei ersten physikalischen Arbeiten als Leitfaden dienen sollte. Allerdings enthalten die meisten Lehrbücher über Physik zugleich auch Anweisungen zu physikalischen Messungen, indessen sind solche Anweisungen nur selten eingehend entwickelt, meist wird dem Leser überlassen, aus den Beschreibungen der Versuche, die zu den betreffenden physikalischen Erfahrungen geführt haben, sich selbst Untersuchungsmethoden abzuleiten. Die Rechenmethoden werden fast gar nicht berührt, und doch bleiben für quantitative Bestimmungen die schönsten Arbeiten fruchtlos, wenn die Ergebnisse nicht nach richtigen und insbesondere nach festen und gemeinsamen, jeder subjectiven Willkür enthobenen Principien berechnet werden. Freilich ist die Lehre von den physikalischen Maassbestimmungen noch relativ jung, aber sie hat sich auf den Grundlagen, die ihr Gauss in so bewunderungswürdiger Weise verliehen hat, doch schon in ziemlicher Vollkommenheit entwickelt, ihre Methoden sind vielseitig ausgebildet, ihre Regeln haben sich in der Erfahrung als zweckmässig erwiesen, und die Genauigkeit der Resultate, die mit ihrer Hilfe abgeleitet werden können, darf bald mit der so viel und mit Recht bewunderten Genauigkeit astronomischer Maassbestimmungen wetteifern. Sie kann jetzt schon als selbständige Disciplin behandelt werden, und wenn sie auch ohne Kenntnis ihrer Schwesterwissenschaften, der beschreibenden und theoretischen Physik, und namentlich

auch der Analysis nicht verstanden und angewendet zu werden vermag, so beruht sie doch auf einer Anzahl ihr eigener Erfahrungen und entwickelt Begriffe und Sätze, die auch an sich von hohem Wert sind.

Nach dem Muster des „Leitfadens der praktischen Physik“ von Kohlrausch will ich es versuchen, diese neue Disciplin als ein selbständiges Ganze darzustellen; ich möchte aber über diesen trefflichen Leitfaden darin hinausgehen, dass ich einerseits die Beobachtungs- und Messungsmethoden in grösserer Vollständigkeit und Ausführlichkeit darlege, und andererseits der rechnerischen Verwertung der experimentell erlangten Ergebnisse, und namentlich den Regeln zur Beurteilung des Werts dieser Ergebnisse grössere Aufmerksamkeit zuwende.

In meiner langjährigen Tätigkeit als Hilfsarbeiter bei der Kaiserlichen Normal-Aichungs-Commission habe ich von einer grossen Anzahl schöner Untersuchungsmethoden Kenntnis erhalten und habe daselbst astronomische Schärfe sowohl im Beobachten wie im Rechnen auch auf physikalische Arbeiten übertragen sehen.

Unter der Leitung des frühern Chefs der genannten Behörde, des Herrn Professor Foerster, lernte ich:

Einrichtung der Beobachtungen nach Maassgabe der zu erreichenden Genauigkeit und unter tunlichster Ausschliessung der Fehlerquellen, sei es durch instrumentelle Vorsichtsmaassregeln, sei es durch geeignete Anordnung der Messungen
 Ausrechnung der Resultate der Messungen nach strengen Principien
 Deutung der erlangten Resultate und Befreiung derselben von Verfälschungen durch Discussion der vorgefallenen Fehler
 Beurteilung der in den einzelnen Messungen und im Resultat erreichten Genauigkeit

als Hauptmomente bei physikalischen Maassbestimmungen betrachten. Mein hochverehrter Lehrer hat mich auch jetzt, da ich die Erfahrungen, die ich so gesammelt, für das vorliegende Werk nutzbar machen wollte, in jeder Beziehung unterstützt. Seiner Anregung verdanken ganze Capitel ihre Entstehung, und wenn es mir gelungen sein sollte, etwas Zufriedenstellendes verfasst und zu dem Fortschreiten unserer Wissenschaft mit beigetragen zu haben, darf ich das Verdienst nicht mir beimessen, — ich habe es der liebevollen Leitung und Beratung meines Lehrers zu verdanken.

Das Werk zerfällt in zwei Bände; die eigentliche Lehre von den physikalischen Maassbestimmungen ist dem zweiten Bande vorbehalten.

Der erste Band beschäftigt sich lediglich mit den Rechenmethoden, die zur Ausgleichung und Untersuchung der Beobachtungsfehler dienen, also mit der Ausgleichsrechnung im weitern Sinne des Wortes, enthält aber ausserdem noch die Regeln zur numerischen Interpolation, Differentiation und Quadratur. Ich bin auf die Rechenmethoden mit ganz besonderer Sorgfalt eingegangen, einmal weil sie die Grundlage für alles folgende bilden, dann aber auch, weil für den Physiker in dieser Beziehung schlecht gesorgt ist.

Alle Lehrbücher über Ausgleichsrechnung berücksichtigen fast ausschliesslich die Bedürfnisse der rechnenden Astronomie und Feldmesskunst. Die Einteilung und Bezeichnung der Probleme, die Formulierung der Rechenregeln, namentlich aber die Beispiele, die doch die Aufgabe haben, die praktische Bedeutung der analytischen Ableitungen in volles Licht zu setzen, sind fast durchgängig mit Rücksicht auf die genannten Wissenszweige gewählt, und das macht die meisten Lehrbücher über Ausgleichung dem Physiker nur schwer verständlich. Dazu kommt noch, dass dem an sich schon mehr zum Philosophiren geneigten Naturforscher eine einfache Anführung von Rechenregeln nicht genügt, und aus eigener Erfahrung weiss ich, wie schwer es einem Nichtastronomen oder besser Nichtgeodäten wird, sich über die richtige Auffassung der Grundlagen und den Wert der Methode zu unterrichten. Hier vor allen Dingen kommt es aber darauf an, dass man genau weiss, was man an den Regeln eigentlich hat, damit diese nicht zu leeren Buchstabenformeln herabsinken, dass man den Wert der aus ihnen abgeleiteten Resultate übersieht. Formeln und Ergebnisse, beide müssen *interpretirt* werden können. Eine Ueberschätzung derselben ist ebenso verderblich wie eine Unterschätzung.

Ich habe daher geglaubt, gerade den Grundlagen der Ausgleichsrechnung besondere Aufmerksamkeit widmen zu müssen und sie in relativ breiter Ausführung dargestellt. Den Hauptwert habe ich auf sorgfältige methodische Entwicklung gelegt; ich habe mich bemüht, die einzelnen Sätze und Regeln in consequenter Schlussfolge an einander zu reihen und Sprünge in der Darstellung zu vermeiden. Dabei ist überall lediglich die Erfahrung in den Vordergrund gestellt, Auseinandersetzungen, die nicht zu neuen, auf einfachere Tatsachen sich

stützenden Gesichtspunkten führen, sind nur kurz erwähnt oder mit wenigen Worten skizzirt. Jeder der Begriffe, mit denen es die Ausgleichungsrechnung zu tun hat, ist von tunlichst vielen Seiten betrachtet, und für jede Formel ein entsprechender interpretirender Ausdruck gesucht worden.

Die Ausgleichungsrechnung zerfällt hier in 4 Abschnitte. Im ersten Abschnitt wird eine vorläufige kurze Uebersicht über die möglichen Fehler bei Messungen gegeben, dann folgt die allgemeine, von besonderen Voraussetzungen über das Verteilungsgesetz der Fehler noch freie Theorie der Fehler und ihrer Ausgleichung. Im zweiten wird das Gaussische Wahrscheinlichkeitsgesetz auf Grund einer Reihe von Erfahrungstatsachen, über die möglichen zufälligen Fehler, unter Zugrundelegung des Bernoullischen Principis der grossen Zahlen abgeleitet, und die Theorie der Ausgleichung einfacher Messungen auseinandergesetzt. Der dritte Abschnitt enthält die Theorie zusammengesetzter Messungen, der vierte endlich die Theorie der Untersuchungen, wie man sonst sagt, der vermittelnden Beobachtungen.

Jeder Abschnitt wird von einer allgemeinen Zusammenfassung der in ihm erreichten Resultate begleitet. Dem zweiten, dritten und vierten Abschnitt sind besondere Capitäl über die Kritik der betreffenden behandelten Messungen beigelegt.

Zahlenbeispiele für die einzelnen Formeln habe ich mitten in den analytischen Auseinandersetzungen nur selten vorgeführt, dafür aber am Schluss jedes Abschnitts ein ausgedehntes, die ganze dargelegte Theorie umfassendes Beispiel eingehend behandelt.

Ausserdem sind relativ viele analytische Aufgaben aus den einzelnen Gebieten der Physik eingestreut, und diese so gewählt, dass sie eine tunlichst vielseitige Untersuchung gestatten.

Wenn nun auch dieser Band eine selbständige Bedeutung haben dürfte, so ist er doch vornehmlich für Physiker geschrieben; die Anwendungen, die von den gegebenen Regeln gemacht werden, sind allein der Physik entnommen. Doch werden wol auch namentlich die Meteorologen manche für ihre Rechnungen nützliche Regeln und Formeln finden. Die Voraussetzungen beziehen sich auf den Wissensbesitz eines Physikers, der nach Absolvirung der grundlegenden mathematischen und physikalischen Vorlesungen sich den experimentellen Arbeiten zu widmen beginnt.

Nach den Arbeiten eines Gauss und Bessel und ihrer Nachfolger Encke und Hansen, muss man auf besondere Originalität verzichten, doch habe ich überall die Entwicklungen selbständig vorgenommen und erst die Schlussformeln mit den in den Handbüchern gegebenen verglichen. Es mag daher wol sein, dass dadurch in die analytischen Auseinandersetzungen eine gewisse Einförmigkeit hineingekommen ist, vielleicht lassen dieselben aber auch einige neue Gesichtspunkte und Entwicklungen erkennen.

Der Abschnitt über Interpolation und Quadratur ist vornehmlich nach den Entwicklungen von Gauss und Encke gearbeitet; die Astronomen machen von den hier gegebenen Rechenregeln den weitgehendsten Gebrauch; dass sie bei den Physikern noch keine besondere Anwendung gefunden haben, rührt wol daher, dass diese Regeln lediglich in astronomischen Handbüchern und Journalen sich vorfinden; ich hoffe, dass ihre Zusammenstellung meinen Fachgenossen dankenswert erscheinen wird.

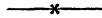
Bei dem Lesen der Correcturen haben mich mein Freund Herr Dr. Levy und mein College Herr Dr. Plato unterstützt. Beiden Herren spreche ich hier meinen Dank für die nicht unerhebliche Arbeit, der sie sich unterzogen haben, aus.

Berlin, im März 1886.

B. Weinstein.



Inhaltsverzeichniss.



Erster Abschnitt.

Die Beobachtungsfehler und die Theorie ihrer Ausgleichung.

Art.	Seite
Einleitung	1
I. Uebersicht über die möglichen Fehler bei Beobachtungen.	
1. Fehlerquellen	2
2. Fehler der Umgebung	2
3. Fehler der Instrumente	3
4. Fehler des Beobachters	5
5. Schätzungsfehler	6
6. Persönliche Fehler	6
7. Fehler der Voreingenommenheit	8
8. Allgemeine Regel über die Wiederholung von Beobachtungen. Constante Fehler	8
9. Controlirbare und nicht controlirbare Fehler	10
10. Zufällige Fehler	10
11. Unterschied zwischen Untersuchen und Verificiren	11
II. Problem der Ausgleichsrechnung; Messungen und Untersuchungen.	
12. Möglichkeit fehlerfreier Beobachtungen	12
13. Aufgabe der zu schaffenden Analyse	12
14. Wahre Resultate und wahrscheinlichste Resultate; wahre Fehler und wahrscheinlichste Fehler. Festsetzung über die Bezeichnungen	13
15. Klassificirung der physikalischen Arbeiten	14
16. Messungen und Untersuchungen	14
17. Stellung des Problems	15
18. Fehler der Beobachtungsgleichungen nach ihrem Ansatz, Fehler nach ihrer Ausgleichung	16
19. Der Darstellungsfehler	19
20. Die übrig bleibenden Fehler	19
21. Praktische Vereinfachung durch Abwälzung aller Fehler auf die zu bestimmende Grösse	20
22. Principielle Notwendigkeit die einzelnen Fehler aus einander zu halten	21
23. Kritische Bedeutung der übrig bleibenden Fehler	21
24. Fassung des Problems	23

Art.

Seite

III. Allgemeine Theorie der Ausgleichsrechnung.

a) *Fehlerwahrscheinlichkeit.*

25. Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 24
 26. Wahrscheinlichkeit für das Zusammenwirken mehrerer bestimmter Fehler 24
 27. Welches Fehlersystem am ehesten zu erwarten ist 25

b) *Ausgleichung von Messungen.*

28. Ausgleichungsformel für Messungen 25

c) *Ausgleichung von Untersuchungen.*

29. Ausgleichungsformeln für Untersuchungen 27
 30. Die Ausgleichungsformeln bestehen nur, wenn die Wahrscheinlichkeiten der Fehler von den bezüglichen Grössen dieser nicht unabhängig sind . 29
 31. Die Ausgleichungsformeln ersetzen die Beobachtungsgleichungen in jeder Hinsicht 30
 32. Vereinfachung der Ausgleichungsformeln durch Einführung von Näherungswerten 31

d) *Die Wahrscheinlichkeitsfunction für Fehler, die ihrer Grösse oder ihrer wahrscheinlichen Ursache nach bekannt sind.*

33. Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsfunction, wenn die in der Untersuchung wahrscheinlich vorgefallenen Fehler bekannt sind 33
 34. Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsfunction, wenn die wahrscheinliche Ursache der Fehler bekannt ist 35
 35. Beispiel 37
 36. Uncontrolirbare Fehler als zufällige aufgefasst 38

Zweiter Abschnitt.

Theorie der zufälligen Fehler; Ausgleichung einfacher Messungen.

IV. Theorie der zufälligen Fehler; Princip des arithmetischen Mittels.

a) *Messungen gleicher Schärfe.*

37. Zufällige Fehler können Resultate ebenso gut im Sinne des zu Viel als des zu Wenig verfälschen 40
 38. Das Bernouilli'sche „Gesetz der grossen Zahlen“ 41
 39. Die Häufigkeiten der einzelnen zufälligen Fehler stehen im Verhältnis zu den bezüglichen Wahrscheinlichkeiten 41
 40. Jeder zufällige Fehler darf ebenso oft als positive wie als negative Grösse erwartet werden 42
 41. Algebraische Summe aller Fehler von bestimmter Grösse 42
 42. Algebraische Summe aller möglichen Fehler 42
 43. Uebergang zum Princip des arithmetischen Mittels 43
 44. Verhältnis der algebraischen Summe aller Fehler zu der absoluten Summe derselben 43

Art.	Seite
45. Durchschnittlicher Fehler und Resultirender Fehler	43
46. Erfahrungsmässig fallen grosse Fehler sehr viel seltener vor als kleine	44
47. Der durchschnittliche Fehler nähert sich mit wachsender Anzahl der Messungen einem bestimmten endlichen Grenzwert, der resultirende convergirt gegen Null	44
48. Princip des arithmetischen Mittels	45
<i>b) Messungen ungleicher Schärfe.</i>	
49. Was einer Messmethode an Schärfe fehlt, kann durch Häufung der Einzelmessungen ersetzt werden	47
50. Ersetzung einer guten Einzelmessung durch mehrere weniger gute Einzelmessungen	48
51. Gewicht einer Messung; Bestimmung äquivalent dem Resultat wiederholter Messungen	49
52. Ausdehnung des Princip's vom arithmetischen Mittel auf Bestimmungen ungleicher Schärfe	51
53. Analogieen mit anderen Berechnungen	52
54. Die übrig bleibenden und der resultirende Fehler	53
<i>c) Die Wahrscheinlichkeitsfunction für Messungen gleicher Schärfe.</i>	
55. Unterschied zwischen der Ausgleichungsformel und dem Princip des arithmetischen Mittels	54
56. Wahrscheinlichkeitsgesetz für wahre Fehler	54
57. Beziehung zwischen den Constanten A und h	56
58. Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers in ihrer Abhängigkeit von der Präcision der Messung	59
59. Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers in ihrer Abhängigkeit von der Grösse desselben. Die Wahrscheinlichkeitscurve	60
<i>d) Die charakteristischen Fehler.</i>	
60. Einführung des mittleren Fehlers als desjenigen Fehlers, der bei der gerade benutzten Messmethode seine grösstmögliche Wahrscheinlichkeit besitzt	62
61. Der mittlere Fehler als Maass der Präcision einer Methode	63
62. Die Curve der mittleren Fehler, die Präcisionscurve, ist eine Hyperbel	63
63. Der resultirende und der durchschnittliche Fehler	64
64. Die Wahrscheinlichkeiten der charakteristischen Fehler	66
65. Der mittlere Fehler als Quadratwurzel des mittlern Fehlerquadrats	66
66.-67. Einführung des wahrscheinlichen Fehlers	67
68. Der wahrscheinliche Fehler als die mittlere Nullte Potenz der Fehler	69
69. Satz für die zahlenmässige Berechnung der Präcisionsconstante und der Anzahl der Fehler vom Betrage Null	70
<i>e) Andere Formen für das Wahrscheinlichkeitsgesetz; Theorie von Laplace.</i>	
70. Zwei neue Formen für das Wahrscheinlichkeitsgesetz	71
71. Die Laplace'sche Ableitung des Wahrscheinlichkeitsgesetzes	73
72. Notwendige Aenderung	74
73. Specialisirung der der Laplace'schen Theorie zu Grunde liegenden Hypothesen; Erweiterung durch Bessel	75

Art.	Seite
74. Die charakteristischen Fehler nach der Laplace'schen Theorie. Zusammenhang mit dem grösstmöglichen Fehler	75
<i>f) Verteilung der Fehler ihrer Grösse nach.</i>	
75. Das Verteilungsgesetz	77
76. Specielles Beispiel	78
77. Analogie aus der kinetischen Gastheorie	79
<i>g) Bestimmungen ungleicher Schärfe.</i>	
78. Zwei Kategorien	80
79. Wahrscheinlichkeitsfunction	81
80. Zusammenhang zwischen dem wahren mittlern Fehler einer Bestimmung und dem Gewicht derselben	82
81. Anwachsen der Genauigkeit einer Bestimmung mit dem Gewicht	83
82. Verteilung der Fehler in verschieden scharfen Bestimmungsreihen	83
83. Verhältnisse zwischen entsprechenden Fehlern zweier ungleich scharfer Methoden	85
84. Wie sich die zu erwartenden Fehler ändern, wenn das Gewicht einer Bestimmungsreihe geändert wird	86
85. Die wahrscheinlichsten Werte für die charakteristischen Fehler einer aus Bestimmungen ungleichen Gewichts zusammengesetzten Bestimmungsreihe	88
86. Messungen zu Gruppen zusammen zu fassen ist nur unter besondern Verhältnissen zu empfehlen	90
<i>h) Wahrscheinlichkeit für Fehlersysteme, Ursprung der Methode der kleinsten Quadrate.</i>	
87. Wahrscheinlichkeit eines Systems von Fehlern	91
88. Die Ausgleichsrechnung als Methode der kleinsten Quadrate	91
89. Das wahrscheinlichste System von Fehlern ist dasjenige, dessen mittlerer Fehler ein Minimum ist	92
90. Der mittlere Fehler als Fehler, der bei einer Messungsreihe im Ganzen zu erwarten steht. Andere Bedeutung des Axioms vom Minimum des mittleren Fehlers	93
V. Uebergang von den wahren Verhältnissen zu den wahrscheinlichsten. Praktische Ausgleichsrechnung.	
91. Die Praxis kann sich nicht mit wahren, sondern nur mit wahrscheinlichsten Fehlern beschäftigen	94
92. Zwei Gründe, aus denen die charakteristischen Fehler in der Wirklichkeit nicht genau berechnet werden können	95
93. Die wahrscheinlichsten Fehler weichen alle um eine und dieselbe Grösse, den resultirenden Fehler, von den wahren Fehlern ab	96
94. Berechnung der charakteristischen Fehler aus den wahrscheinlichsten Fehlern	97
95. Die Rechnungen liefern angenäherte wahre, nicht bloß wahrscheinlichste Werte für die charakteristischen Fehler	99
96. Berechnung der Präcision	99

Art.	Seite
97. Einfluss der Beschränktheit der Messungswiederholungen auf die Berechnung der Präcision und der charakteristischen Fehler. Die wahrscheinliche Unsicherheit dieser Berechnung. Relativ am geringsten ist dieselbe bei der des mittlern Fehlers	101
98. Zusammenfassung	103
99. Unterschied zwischen Theorie und Praxis hinsichtlich der Beurteilung des Resultats einer Messungsreihe	104
100. Die charakteristischen Fehler und die Präcision des Resultats	105
100a. Der mittlere Fehler des Resultats ist zugleich der wahrscheinlichste Fehler desselben	106
VI. Uebersicht über die erlangten Ergebnisse.	
101. Gegenstand, Resultate	107
<i>a) Theoretische Ergebnisse.</i>	
102. Messungen gleicher Schärfe	108
103. Messungen ungleicher Schärfe	112
<i>b) Ergebnisse für die praktische Anwendung.</i>	
104. Das wahrscheinlichste Resultat und die wahrscheinlichsten Fehler	115
105. Die charakteristischen Fehler und die Präcision der einzelnen Messungen	117
106. Charakteristische Fehler und Präcision des Resultats	118
107. Die Zeichen der charakteristischen Fehler und die Bedeutung der Hinzufügung dieser zu den Messungen und Resultaten	119
VII. Kritik von Beobachtungen und ihrer Ausgleichung.	
108. Zu discutirende Fragen	120
<i>a) Bemerkungen über systematische Fehler.</i>	
109. Systematische Fehler aus der Unkenntnis der Einflüsse, denen die zu messende Grösse unterliegt	121
110. Systematische Fehler in Einrichtung und Ausführung der Messung	122
111. Bedingungen zur Vermeidung und Auffindung systematischer Fehler	123
<i>b) Formale Kriterien für die Zufälligkeit übrig gebliebener Fehlerreihen.</i>	
112. Die übrig bleibenden systematischen Verfälschungen	124
113. Anordnung der Fehlerreihe	124
114. Die beiden Haupteigenschaften der zufälligen Fehler	126
115. Kritik der Grösse der einzelnen Fehler; auszuschliessende Beobachtungen	126
116. Kriterien aus den Zeichen, Zeichenwechsel und Zeichenfolgen	127
117. Seeliger's Formulirung der Zeichen-Kriterien	127
118. Das Abbe'sche Kriterium	129
119a. Kriterien für die Giltigkeit des Wahrscheinlichkeitsgesetzes	130
119b. Kriterien aus dem Verteilungsgesetz der Fehler	130
120. Kriterien aus den Beziehungen zwischen den charakteristischen Fehlern	131
121. Zeichenkriterian aus den Differenzenreihen der Fehler	132
122. Kriterien aus dem Verschwinden von Differenzenreihen	133
123. Neue Fassung des Abbe'schen Kriteriums als Satz von der mittlern ersten Fehlerdifferenz	134

Art.	Seite
124. Beispiel	134
125. Kriterium aus der Zu- und Abnahme der Fehlerbeträge	135
126. Der Wert der Kriterien und die Notwendigkeit eingehender Protokolle	136
127. Zusammenstellung der Kriterien für zufällige Fehlerreihen	137
<i>c) Praktischer Wert der charakteristischen Fehler.</i>	
128. Der mittlere Fehler des Resultats als Kriterium für das Erreichte	140
129. Die charakteristischen Fehler der Einzelmessungen als Kriterien für die Methode der Beobachtung	140
VIII. Zahlenbeispiel für die Anwendung der Theorie einfacher Messungen.	
130. Die gemessene Grösse	141
<i>a) Die Messungen werden lediglich als Zahlenbeispiel für die entwickelten Ausgleichungsformeln benutzt.</i>	
131. Bildung von Gruppenmitteln	142
132. Das wahrscheinlichste Resultat aller Messungen	145
133. Die charakteristischen Fehler der Einzelmessungen, wenn jede Gruppe für sich betrachtet wird	146
134. Die charakteristischen Fehler der Einzelmessungen und des Resultats berechnet aus allen Messungen	146
135. Bedeutung des Endergebnisses und seines mittlern Fehlers	148
136. Die charakteristischen Fehler berechnet aus den wahrscheinlichsten Fehlern der Gruppenmittel	149
137. Die Präcision; Berechnung und Erklärung	150
138. Das Wahrscheinlichkeitsgesetz	151
<i>b) Die Messungen werden nach ihren Fehlerquellen discutirt, die Fehler auf ihre Zufälligkeit geprüft.</i>	
139. Die Fehlerquellen	152
140. Notwendige Zusammenziehung mehrerer Einzelmessungen zu einer Einzelmessung, um wirklich gleichwertige Messungen zu gewinnen	154
141. Zerlegung der Messungsreihe in zwei Teile, Anordnung in jedem Teile	155
142. Discussion des ersten Teils der Messungen	157
143. Der zweite Teil der Messungen	160
144. Ergebnisse für die Methoden	164

Dritter Abschnitt.

Zusammengesetzte Messungen, Abschweifung über Determinanten und die Theorie linearer Gleichungen.

IX. Unbedingte zusammengesetzte Messungen.

a) Wahrscheinlichste Ergebnisse.

145. Begriff zusammengesetzter Messungen	167
146. Notwendigkeit, die Elemente unabhängig von einander zu messen	168
147. Ableitung des wahrscheinlichsten Resultats für einen Satz von Elementen	168

Art.	Seite
148. Wahrscheinlichstes Resultat bei mehreren Sätzen von Elementen	169
149. Problem der Gewichtsbestimmung einer Function unabhängiger Elemente	170
<i>b) Fehler und Präcision.</i>	
150. Fehlerrechnung. Notwendigkeit genaue Messungen vorauszusetzen	170
151. Unterschiede der Fehler zusammengesetzter Messungen gegen die einfacher	172
152. Annahmen über die Fehler zusammengesetzter Messungen	172
153. Wahrscheinlichkeitsfunction zusammengesetzter Fehler	173
154. Die Präcisionsconstante eines zusammengesetzten Fehlers	177
155. Präcision, charakteristischer Fehler und Gewicht zusammengesetzter Messungen	179
156. Giltigkeitsbereich des voraufgehenden Satzes	181
157. Strengerer Beweis für den Fall des mittlern Fehlers	181
158. Specielle Anwendungen	183
159. Principieller Unterschied zwischen einer mehrfach genommenen Messung und einer mehrfach zusammengesetzten Messung. Fortsetzung der Beispiele	184
X. Bedingte zusammengesetzte Messungen.	
<i>a) Ableitung der wahrscheinlichsten Resultate.</i>	
160. Art der Abhängigkeit der Elemente von einander	187
161. Methode der Elimination überschüssiger Elemente	187
162. Welche Beträge bedingter Elemente als die wahrscheinlichsten zu erachten sind	188
163. Einführung der Verbesserungen	189
164. Die Verbesserungen werden der Bedingung unterworfen, dass sie die grösste Wahrscheinlichkeit für sich haben	190
165. Maximum oder Minimum unter Nebenbedingungen	191
166. Aufstellung der Gleichungen für die Verbesserungen und Correlaten . .	192
167. Verbesserung der zusammengesetzten Grösse	194
<i>b) Fehlerrechnung.</i>	
168. Die beobachteten und ausgeglichenen mittlern Fehler der Elemente . .	195
169. Mittlerer Fehler der zusammengesetzten Grösse. Vorbereitende Schritte	197
170. Die Theorie der linearen Gleichungen. In welchem Sinne die Determinanten Verwendung finden sollen	201
XI. Abschweifung über Determinanten und lineare Gleichungen.	
<i>a) Determinanten.</i>	
171. Definition der Determinanten	201
172. Unveränderlichkeit des Betrages einer Determinante bei gewissen Operationen	203
173. Wann eine Determinante identisch Null ist	204
174. Zerlegung von Determinanten	205
175. Weitere Unveränderlicheigenschaften	205
176. Unterdeterminanten; Entwicklung nach denselben	206
177. Differentialquotienten einer Determinante, Entwicklung nach ihnen . .	207
178. Beispiele von Entwicklungen von Determinanten, Regeln zur Erleichterung der Entwicklung	208
179. Multiplicationstheorem für Determinanten	211

Art.		Seite
	<i>b) Theorie der linearen Gleichungen.</i>	
180.	Bedingung für die Existenz eines Systems homogener Gleichungen . . .	214
181.	Bedingung für die Existenz nicht homogener Gleichungen	216
182.	Auflösung linearer Gleichungen	216
183.	Allgemeine Reduction einer Determinante	220
184.	Schema für die Ausrechnung (Reduction) linearer Gleichungen	228
185.	Die Werte der Unbekannten, zwei Formen	231
186.	Verringerung der Operationen für symmetrische Gleichungen	232

XII. Bedingte zusammengesetzte Messungen.

Fortsetzung der Fehlerrechnung.

187a.	Mittlerer Fehler der zusammengesetzten Grösse. Bildung der diese ersetzenden Function	235
187b.	Mittlerer Fehler der zusammengesetzten Grösse. Einführung der Uebertragungsgrössen	236
188.	Mittlerer Fehler der zusammengesetzten Grösse. Darstellung der Differentialquotienten und definitive Formel	238
189.	Beispiel	240

XIII. Zusammengesetzte Messungen mit zum Teil zusammengesetzten Elementen.

c) Ersetzung von Elementen durch andere Elemente.

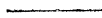
190.	Art der Abhängigkeit und Berechnung des wahrscheinlichsten Resultats	247
191.	Fehlerrechnung für eine Grösse, deren Elemente aus andern beobachteten Elementen zusammengesetzt sind	247
192.	Beispiel	249

XIV. Kritik zusammengesetzter Messungen.

193.	Beurteilung der Schlussergebnisse, Einführung des zu erwartenden mittlern Fehlers	253
194.	Kriterien für das Maass von Sorgfalt, welches den einzelnen Elementen zu widmen ist	253
195.	Kriterium für die Wahl des geeignetsten Elementensystems	254
196.	Beispiel zur Entscheidung für ein bestimmtes Elementensystem	255
197.	Kriterien für die Wahl der Beträge der Elemente	262
198.	Beispiel zur Entscheidung über die Beträge der Elemente	264

XV. Zusammenstellung der Ergebnisse.

199.	Unbedingte zusammengesetzte Messungen	266
200.	Bedingte zusammengesetzte Messungen	268
201.	Zusammengesetzte Messungen, bei denen ein Teil der Elemente selbst zusammengesetzte Grössen sind	278
202.	Kritik der Messungen und Resultate, Information über die zu wählende Messungsmethode und das zu wählende Elementensystem	281



Vierter Abschnitt.**Ausgleichung von Untersuchungen.****XVI. Ableitung der Normalgleichungen.**

203. Aufgabe des Physikers bei Untersuchungen	283
204. Festsetzung über die analytische Darstellung der auszugleichenden Beziehungen	284
205. Stellung der Aufgabe	285
206. Die allgemeinen Ausgleichungsformeln	287
207. Verhältnis der Ausgleichungsformeln zu den Beobachtungsgleichungen	287
208. Die Ausgleichungsformeln nach dem Gaussischen Fehlergesetz	289
209. Die Ausgleichungsformeln als Consequenz des Principis vom kleinsten mittlern Fehler	290
210. Allgemeine Fehlergleichungen	291
211a. Allgemeine Normalgleichungen	292
211b. Notwendigkeit eines Näherungsverfahrens bei der Behandlung der allgemeinen Normalgleichungen	292
212. Normalgleichungen für lineare Functionen	293
213. Ausgleichung homogener linearer Functionen	295
214. Zurückführung des allgemeinen Falls auf Ausgleichung linearer Functionen in successiver Näherung	296
215. Andere Methoden Ausgleichungen verwickelter Functionen auf die linearer zurückzuführen	298
216. Die praktischen Fehler- und Normalgleichungen	299

XVII. Fehlerrechnung.

a) <i>Beobachtete mittlere Fehler und Gewichte der Beobachtungsgleichungen.</i>	
217. Die beobachteten mittlern Fehler und Gewichte der Beobachtungsgleichungen	301
b) <i>Ausgeglichene mittlere Fehler und Gewichte der Beobachtungsgleichungen.</i>	
218a. Der wahre mittlere Fehler	302
218b. Der wahrscheinlichste mittlere Fehler	303
218c. Genäherter Wert für den wahren mittlern Fehler	303
219. Die mittlere Unsicherheit der charakteristischen Fehler	306
220. Uebergang zu den tatsächlichen Verhältnissen, Formeln	307
221. Ableitung einer besondern Formel für die Fehlerquadratsumme	309
222. Wert der Formel $[pv_2] = l_{h+1,h}$ zur summarischen Controle der numerischen Rechnungen	313
c) <i>Fehlerrechnung für die ausgeglichenen Grössen.</i>	
223. Die Fehler der Coefficienten als kritisches Hilfsmittel	315
224. Vereinfachung des Problems. Notwendigkeit der Rechnung durch Näherungen	316
225. Entwickelte Formeln für die mittlern Fehler der Coefficienten	318
226. Erste Entwicklung der mittlern Fehler der Coefficienten	318
227. Zweite Entwicklung, Darstellung durch die coordinirten Coefficienten	322
228. Dritte Entwicklung, explicite Formeln	327

Art.	Seite
229. Vierte Methode, Berechnung aus den Aequivalentgrößen. Die mittlern Fehler und Gewichte der Aequivalentgrößen	330
230. Fünfte Methode, Ableitung aus der Präcision. Die Normalgleichungen geben die wahrscheinlichsten Coefficienten	332
<i>d) Die charakteristischen Fehler von Functionen ausgeglichener Größen.</i>	
231. Frage nach den mittlern Fehlern von Functionen der Coefficienten	338
232. Darstellung durch die coordinirten Coefficienten	340
233. Entwicklung allgemeiner Formeln	343
234. Berechnung aus den Aequivalentgrößen	345
235. Benutzung der vorstehenden Formeln bei Transformationen	348
<i>e) Die Fehler des Endresultats.</i>	
236. Endresultat einer Ausgleichung	348

XVIII. Untersuchungen mit Nebenbedingungen.

237. Untersuchungen mit Nebenbedingungen. Stellung des Problems	350
238. Directe Lösung durch Elimination der überschüssigen Coefficienten	350
239. Ausgleichung nach Bessel. a) Grundlagen	352
239 b. Die Normalgleichungen	353
239 c. Fehler der Beobachtungsgleichungen, Controlformel	355
239 d. Die Fehler der Coefficienten und von Functionen der Coefficienten	357
240. Methode von Hansen und Andrä, Ausgleichung durch die Aequivalentgrößen	360

XIX. Ausgleichung von einander abhängiger Beobachtungen.

241. Unabhängige Beobachtungen und abhängige Beobachtungen	361
242. Fälle abhängiger Beobachtungen. Differenz- oder Nullpunktsbeobachtungen. Beispiele	362
243. Zwei Annahmen, um die Verbindung zwischen Beobachtungsgleichungen zu lösen	364
244 a. Normalgleichungen für verbundene Beobachtungsgleichungen. Erste Lösung	365
244 b. Zweite Auflösung	367
245. Streng zu erfüllende verbundene Gleichungen	371
246 a.-b. Beispiel für die Ausgleichung verbundener Beobachtungsgleichungen	374

XX. Ueber die Form, die man den Beobachtungsgleichungen zu geben hat.

247. Mit den Beobachtungsgleichungen dürfen vor ihrer Ausgleichung keinerlei Operationen vorgenommen werden, die ihre Gewichte beeinflussen	381
248. Wenn die Gleichungen abgeändert werden, müssen auch ihre Gewichte geändert werden, indessen wird das Resultat unsicherer	382
249. Beispiel 1	382
250. Beispiel 2	385
251. Form der auszugleichenden Beobachtungsgleichungen bei praktischen Rechnungen; Beispiel	390

Art.	Seite
252. Ausgleichen von Beobachtungsgleichungen, die nach der darzustellenden Grösse entwickelt sind	393
253. Aufstellung der Beobachtungsgleichungen nach theoretischen Gesichtspunkten	396

XXI. Ueber die Bestimmung der Gewichte der Beobachtungsgleichungen.

254. Berechnung der Gewichte aus den mittlern Fehlern der beobachteten Elemente	399
255. Befreiung von systematischen Verfälschungen, Ausgleichung der beobachteten mittlern Fehler der Gleichungen in sich zur Ableitung genauere Gewichte	401
256. Beispiel 1	401
257. Beispiel 2	404
258. Mittlere Unsicherheit der berechneten Gewichte	411
259. Wann die Gewichte noch aus den mittlern Fehlern der Elemente berechnet werden dürfen	413
260. Zuziehung anderweitig ausgeführter Untersuchungen zur Ableitung der mittlern Fehler	413
261. Ableitung der Gewichte aus den Messungsanzahlen	414
262. Beobachtungsgleichungen zu Mittelgleichungen zu vereinigen, ist im Allgemeinen nicht zu empfehlen	415

XXII. Verallgemeinerung und Zusammenfassung der Ergebnisse; Rechenschemata.

a) Verallgemeinerung der Bedeutung der Entwicklungen.

263. Die Entwicklungen gelten für irgend welche Formen der Beobachtungsgleichungen	416
264. Die Entwicklungen sind unabhängig davon, ob die Form der Beobachtungsgleichungen bestimmt oder hypothetisch ist	417

b) Beobachtungsgleichungen und Fehlergleichungen.

265.	418
--------------	-----

c) Die Gewichte.

266.	419
--------------	-----

d) Die Näherungsrechnungen.

267.	420
--------------	-----

e) Rechenschema für unabhängige und unbedingte Untersuchungen.

268. Bildung der Normalgleichungen	421
269. Reduction der Normalgleichungen	424
270. Regeln für die Ausführung der Ausgleichung	427
271. Rechenschema für die Ausgleichung	428
272. Controlformel	432

Art.	Seite
<i>f₁) Berücksichtigung von Bedingungsgleichungen zwischen den gesuchten Grössen.</i>	
273. Die Normalgleichungen	434
274. Die Reduction	435
<i>f₂) Beobachtete Grössen haben Bedingungsgleichungen, in welchen noch unbekannte Grössen enthalten sind, streng zu erfüllen (Erweiterung zu Art. 200).</i>	
275.	436
<i>g) Ausgleichung abhängiger Beobachtungen.</i>	
276.	438

XXIII. Kritik von Untersuchungen.

277. Kritische Arbeiten vor der Ausgleichung	441
278. Systematische Fehler in den einzelnen Beobachtungsgleichungen	441
279 a. Systematische Verfälschungen der Beobachtungsgleichungen gegen einander. Notwendigkeit von Nebenuntersuchungen	442
279 b. Beispiel	442
279 c. Aufhebung der systematischen Verfälschung durch Deutung der durch die Beobachtungsgleichungen erlangten Resultate	443
279 d. Fortführung des Beispiels	444
280. Die Trennung der einzelnen Verfälschungen von einander	445
281. Anordnung der Fehlerreihe nach den vermutlichen Ursachen der systematischen Verfälschungen	445
282. Einführung von Correctionsgliedern zur Berücksichtigung der systematischen Fehler bei den Messungen einzelner Elemente	446
283. Correctionsglieder für systematische Verfälschung der Beträge der Elemente	446
284. Beispiel	449
285. Correctionsglieder wegen allgemeiner systematischer Verfälschung der Beobachtungsgleichungen	456
286. Fälle, in denen systematische Verfälschungen sich nicht durch Correctionsglieder aufheben lassen	457
287. Systematische Verfälschung durch die analytische Form der Beobachtungsgleichungen	458
288. Kritik der Resultate einer Untersuchung	460

Fünfter Abschnitt.

Interpolation, Differentiation und Quadratur.

XXIV. Interpolation.

289. Aufgabe	461
290. Graphische Interpolation	461
291. Analytische Interpolation	463
291 a. Darstellung durch algebraische Functionen. Lagrange'sche Interpolationsformel	464

Art.	Seite
291 b. Darstellung durch periodische Reihen	467
291 c. Die Gaussischen Interpolationsformeln	467
291 d. Ausgleichung durch periodische Reihen	468
291 e. Beispiel. Schema für die Berechnung des täglichen Ganges einer Er- scheinung aus den 24 Stundenbeobachtungen	472
292. Numerische Interpolation	477
292 a. Interpolationsformel mit Diagonaldifferenzen	477
292 b. Interpolationsformeln mit Zeilen-Differenzen	480
292 c. Extrapolation	483
292 d. Interpolation für mehrere Argumente	484

XXV. Differentiation und Integration.

a) *Differentiation.*

293. Graphische Differentiation	485
294. Analytische Differentiation	485
295. Numerische Differentiation	485

b) *Integration.*

296. Graphisches Integriren. (Mechanische Quadratur.)	490
297. Analytische Integration	491
297 a. Integration durch die Lagrangesche Interpolationsformel	491
297 b. Die Newton-Cotes'schen Integralformeln	497
297 c. Die Gaussischen Integralformeln	498
297 d. Mehrfache Integration durch die Lagrangesche Interpolationsformel	500
297 e. Integration nach mehreren Variablen	500
297 f. Integration durch periodische Reihen	502
298. Numerische Integration, allgemeine Formel	502
298 a. Besondere Formeln für einfache Integration	504
298 b. Integration von Argument zu Argument	507
298 c. Integration von Intervallmitte zu Intervallmitte	508
298 d. Zweifache Integration	509



Erster Abschnitt.

Die Beobachtungsfehler und die Theorie ihrer Ausgleichung.



Einleitung.

Die Ausgleichsrechnung wurzelt in ihrem Ursprung wie in ihrer Begründung in der Erfahrung; in ihrem Ursprung insofern, als die Erfahrung, dass eine Erscheinung nicht bloß verschiedenen Personen, sondern selbst einem und demselben Beobachter sich nicht immer in derselben Weise darstellt, Veranlassung zu ihrer Entstehung gegeben hat; in ihrer Begründung, weil nur die Erfahrung darüber Auskunft giebt, in welchem Maße verschiedene Beobachtungen von einander abzuweichen vermögen. Ihr Name bezeichnet schon ihren Zweck, „sie soll wiederholte Beobachtungen einer bestimmten Erscheinung gegeneinander ausgleichen“, aus diesen Beobachtungen das wahrscheinlichste Ergebnis ableiten lehren und — dieses ist die wichtige Erweiterung ihrer Bedeutung — zeigen, welches Vertrauen man dem betreffenden wahrscheinlichsten Ergebnis entgegenbringen darf und welchen Wert die einzelnen Beobachtungen beanspruchen können. Da eine Beobachtung im allgemeinen nach mehreren verschiedenen Methoden ausgeführt werden kann, und es für die Praxis von der größten Wichtigkeit ist, die jeweilig beste Methode kennen zu lernen, so hat die Ausgleichsrechnung auch noch die Aufgabe bekommen, die einzelnen Methoden gegen einander abzuwägen, zu zeigen, worin die eine Methode vor der andern den Vorzug verdient, und welche Methode mit den relativ geringsten Mitteln ein verhältnismässig sicheres Resultat zu erreichen gestattet.

Die Ausgleichsrechnung beschäftigt sich mit den Fehlern, die unsern Beobachtungen anhaften, sie sucht die jeweiligen Gründe dieser Fehler aufzudecken und lehrt die nicht zu erklärenden Verfälschungen im Resultat tunlichst unschädlich zu machen.

Wir haben es hier, wie gesagt, mit einer reinen Erfahrungswissenschaft zu tun und müssen daher zunächst eine Uebersicht über das Material geben,

aus dem sie sich aufbaut, wir haben uns mit den möglichen Beobachtungsfehlern zu beschäftigen, und das tun wir am besten, wenn wir klarlegen, welche Fehler bei Beobachtungen vorkommen können und wie man sich gegen dieselben schützt.

I. Uebersicht über die möglichen Fehler bei Beobachtungen.

1. **Fehlerquellen.** Der Ausfall einer Beobachtung hängt von drei Factoren ab, der umgebenden Natur, den Einrichtungen, mit Hilfe deren die Beobachtung geschieht und der Person, die die Beobachtung ausführt. Die beiden ersten Factoren verfälschen die Erscheinungen objectiv. Einerseits ist fast keine Stelle des uns umgebenden Raumes von Naturvorgängen frei, fortwährend und überall spielen sich allerhand mehr oder weniger intensive Erscheinungen ab, die dann der Beobachter mit der zu studirenden Erscheinung zugleich, und oft ohne sie von derselben trennen zu können, auffasst. Andererseits sind weder die von der Natur uns verliehenen Organe so geartet, dass wir selbst bei ganz richtigem Urtheil die äusseren Vorgänge so wahrnehmen, wie sie wirklich erfolgen, noch vermögen wir unsere künstlichen Organe, die Apparate, so einzurichten, dass nicht in ihnen selbst störende Erscheinungen sich abspielen, und dass uns die Eindrücke der Aussenwelt durch sie unmodificirt zugeführt werden.

Der dritte Factor verfälscht die Erscheinungen subjectiv und objectiv, subjectiv insofern es von der Individualität und der jeweiligen körperlichen und geistigen Disposition des Beobachters abhängt, wie er die betreffenden Vorgänge auffasst und beurteilt, objectiv aber, weil er seinerseits durch Atmen, Wärmeausstrahlung, unwillkürliche Bewegung u. s. f. störende Erscheinungen hervorbringt.

Will man also eine Beobachtung so rein und fehlerfrei als möglich anstellen, so hat man

1. die Beobachtung in einem Raume auszuführen, der während derselben von fremden Erscheinungen so frei als möglich bleibt;
2. die Instrumente gegen alle Veränderungen tunlichst zu schützen und durch eine vorherige eingehende Prüfung derselben die Modificationen, die sie durch ihre besondere fehlerhafte Beschaffenheit in die Widergabe der Erscheinungen bringen, zu bestimmen;
3. sich selbst als Beobachter von dem Beobachtungsort möglichst fern zu halten, sich durch diesbezügliche vorherige Versuche die nötige Uebung und Routine im Beobachten zu verschaffen und durch anderweitige Messungen seine subjectiven (persönlichen) Fehler zu eruireu.

2. **Fehler der Umgebung.** Bei der Berücksichtigung der ersten Regel wird es natürlich darauf ankommen, was für eine Erscheinung man gerade

studirt; wenn man beispielsweise das Gewicht eines Körpers bestimmt, ist es nach unserem jetzigen Wissen gleichgiltig, ob die Waage von mehr oder weniger von Wärmestrahlen befreitem Licht gleichmässig getroffen wird, dagegen hat man die Waage gegen Luftströmungen und einseitige Erwärmungen zu schützen, man wird sie mit einem Gehäuse umgeben und sie so an einem von Wärmequellen, etwa geheizten Oefen oder von der Sonne beschienenen Stellen, tunlichst entfernten Orte aufstellen. Allgemein muss man bei jeder Beobachtung sich vorher überlegen, durch welche Vorgänge diese Beobachtung etwa verfälscht werden kann, und dann die Einrichtung so treffen, dass diese Vorgänge entweder gar nicht oder nur in tunlichst beschränkter Intensität zur Wirkung kommen. Es giebt freilich Phänomene, die ganz unvermeidbar scheinen. So kann man bei Beobachtung in luffterfüllten Räumen nur selten ein Spectrum, das von den bekannten *D*Linien frei ist, bekommen. In einem solchen Falle bleibt nichts übrig, als die störende Nebenerscheinung einer besondern Prüfung zu unterwerfen und ihre Ursache und ihren Einfluss zu studiren. Findet also ein Beobachter bei der Untersuchung der Spectra verschiedener Körper immer und immer wieder die so auffallenden *D*Linien, so muss er den Körper suchen, der gerade diese *D*Linien hervorbringt und zusehen, ob derselbe wirklich so allgegenwärtig ist, dass er ganz unausschliessbar erscheint. Andere anscheinend unvermeidliche Vorgänge sind geringe Temperaturschwankungen, kleine Erschütterungen, Luftströmungen u. a. m.

Ein sehr wirksames Mittel zur Eliminirung des Einflusses solcher störenden Nebenvorgänge hat man in der Anordnung und Ausführung der Versuche. Die Erfahrung lehrt nämlich, dass viele störende Vorgänge, wenn sie Beobachtungen in erheblicherem Maasse zu verfälschen im Stande sein sollen, eine verhältnismässig bedeutende Zeit zu ihrer Abspielung bedürfen, sie nehmen an Intensität relativ langsam zu oder ab. Man sorgt daher erstens dafür, dass die ganze Beobachtung tunlichst rasch erledigt werden kann, und macht zweitens die einzelnen Messungen derselben zweimal, und zwar das zweite Mal in umgekehrter Folge wie das erste Mal. Man beobachtet, wie man sich auch ausdrückt, „symmetrisch zur Mitte“. Haben wir zum Beispiel zwei Gewichte *P* und *N* mit einander zu vergleichen und wissen wir, dass bei der Wägung derselben ein störender Vorgang einen Arm der Waage fortwährend verlängert, so vergleichen wir bei einer Wägung mit Tara erst *P* mit dem Tarastück, dann *N* mit demselben, dann wieder *N* mit dem Tarastück und zuletzt *P* mit demselben. Natürlich ist man nicht immer sicher, durch diesen Kunstgriff jenen Einfluss wirklich eliminirt zu haben; da man sich aber auf die angeführte Erfahrung stützen kann, ist es Regel geworden, bei Beobachtungen die Symmetrie zur Mitte, wo es nur möglich ist, festzuhalten. Eingehenderes darüber soll bei der speciellen Behandlung der einzelnen Messungen vorgebracht werden.

3. Fehler der Instrumente. Die zweite Regel setzt zu ihrer Einhaltung bei dem Beobachter vielleicht die meisten Kenntnisse und Erfahrungen voraus, denn abgesehen davon, dass er mit den constructiven

Einzelheiten der von ihm verwendeten Apparate vertraut sein muss, hat er auf Methoden zu sinnen, wie er die Fehler derselben aufzufinden und auf bestimmtes Maass zurückzuführen vermag. Hier kann ihm zunächst der Mechaniker zu Hilfe kommen, dadurch, dass er den betreffenden Apparat in tunlichster Sorgfalt herstellt und dadurch, dass er ihm an demselben die Hilfsmittel giebt, die Beobachtungen so anzuordnen, dass die Fehler derselben nicht in Betracht kommen. Hat man zum Beispiel an einem Spectrometer den Winkel zu bestimmen, um welchen man das Fernrohr drehen muss, um von einer Spectrallinie zu einer andern zu gelangen, so wird man, falls der Kreis des Spectrometers nur eine Alhidade besitzt, weil die Drehungsaxe des Fernrohrs im allgemeinen nicht genau durch den Mittelpunkt des Kreises geht, diesen Winkel um eine bestimmte Grösse, man nennt sie die *Excentricität*, falsch erhalten; wenn jedoch der Mechaniker dem Kreise zwei in demselben Durchmesser des Kreises gelegene Alhidaden verliehen hat, kann man den betreffenden Winkel durch Ablesung jeder der Alhidaden bestimmen, und im Mittel der beiden für denselben so erhaltenen Werte besitzt man dann eine von dem Einfluss der Excentricität, falls diese eine gewisse ziemlich weite Grenze nicht überschreitet, befreite Grösse.

Natürlich wird man, falls man dem Mechaniker erst den Plan zu dem Apparat herzustellen hat, überlegen müssen, welche Fehler man durch besondere Einrichtung desselben zu vermeiden vermag. Inzwischen ist zu bemerken, dass man einen Apparat, auch abgesehen von den bedeutenden Kosten, nie zu complicirt anfertigen darf, denn je mehr Teile derselbe besitzt, um so weniger Gewähr bietet er für seine Unveränderlichkeit und es kann vorkommen, dass die zufälligen Fehler, die man mit einem complicirten Apparat macht, die systematischen eines gröbereren Instruments überwiegen. Es verhält sich hiermit ähnlich wie, um eine Analogie anzuführen, mit dem Abtragen einer gekrümmten Linie auf eine geradlinige Scala; man weiss, dass man bei der Ersetzung eines Bogens durch seine Sehne einen systematischen Fehler begeht, und wird daher geneigt sein, die krumme Linie in so vielen Stücken als möglich abzutragen, aber in je mehr Stücke man dieselbe zerschneidet, um so grösser wird die Gefahr, bei dem Aneinanderlegen derselben zufällige Fehler zu begehen, so dass schliesslich nach sehr grosser Mühe für die Länge der Curve ein unrichtigeres Resultat herauskommen kann, als wenn man lieber die systematischen Fehler mitgenommen und die Curve in grössern Stücken abgetragen hätte.

Im Laufe der Jahre ist in die Klassificirung der Instrumente System hineingekommen, so dass die anscheinend unübersehbare Menge von Apparaten sich in verhältnismässig wenige, durch besondere Merkmale gekennzeichnete Gruppen einordnen. Namentlich aber hat man gelernt, die wesentlichen Constructionsstücke der Apparate einerseits in hoher Vollendung herzustellen und andererseits auf das genaueste auf ihre Leistung zu untersuchen. So hat sich allmählich ein neuer Wissenszweig, die Instrumentenkunde, herausgebildet, die in ihrer weiteren Bedeutung die Be-

schreibung der Hauptformen der gebräuchlichen Apparate, eine Theorie ihrer Wirkungsweise und damit ihrer Untersuchung umfasst, und deren wichtigste Frucht die Anleitung zum Gebrauch der Apparate bildet.

Es ist nicht die Aufgabe dieses Buches auf die Instrumentenkunde einzugehen, wenn auch später bei der Auseinandersetzung über die einzelnen Maassbestimmungen eine kurze Charakterisirung der betreffenden Instrumente nicht wird vermieden werden können. Wer aber den Wert seiner Messungen und Bestimmungen übersehen will, kann nicht umhin sich mit derselben näher zu beschäftigen, um die etwaigen Mängel und Fehler der von ihm gebrauchten Apparate aufdecken zu können.

4. Fehler des Beobachters. In der dritten Regel wird zunächst verlangt, dass der Beobachter, um nicht durch seinen Lebensprocess selbst störende Nebenerscheinungen hervorzurufen, sich von dem Orte, wo die zu studirende Erscheinung vor sich geht, tunlichst fernhalte. Hierzu lässt sich nichts weiter sagen, als dass der Beobachter diesem Verlangen, wenn er es nur irgend kann, nachkommen muss, er wird aber selbst am besten ersehen können, ob bei einem Versuch seine unmittelbare Gegenwart notwendig ist, oder ob er den Verlauf desselben bezüglich die dabei nötigen Beurteilungen nicht auch aus einiger Ferne verfolgen bezüglich vornehmen kann. Muss er an dem Apparate bleiben, so hat er die von seinem freien Willen abhängenden störenden Lebensäusserungen einzuschränken und die unwillkürlich an ihm vor sich gehenden Prozesse, so namentlich die Wärmestrahlung seines Körpers, durch eingeschaltete Schutzmittel unschädlich zu machen. Es darf aber diese Vorsorge nicht so weit gehen, dass man dadurch während der Beobachtung körperlich und damit auch geistig leidet, weil man sonst an Beurteilungsschärfe mehr verliert als man durch Elimination der andern Fehlerquellen vielleicht zu gewinnen vermag.

Der zweite Teil der Regel bezieht sich auf die Uebung im Beobachten, und damit ist die Aneignung einer gewissen manuellen und geistigen Geschicklichkeit gemeint, denn einerseits gilt es die einzelnen Operationen des Versuchs schnell und sicher auszuführen, und andererseits soll man den Verlauf desselben rasch und richtig beurteilen können. Die ersten Versuche eines Experimentirenden fallen, selbst wenn sie mit guten Apparaten und unter günstigen Umständen angestellt sind, meist schlecht aus; man verrichtet die nötigen Arbeiten mit ungleichmässiger Hast und haftet mit seiner Aufmerksamkeit oft bei den Einzelheiten. So kommt man bei der Beobachtung mit Spiegel und Scale zuerst nicht dazu, den in einem bestimmten Zeitpunkt durch den Faden des Fernrohrs durchgehenden Scalenstrich zu registriren, weil man unwillkürlich jedem Striche wie er sich im Gesichtsfeld bewegt, mit dem Auge nachfolgt und dadurch den richtigen Moment verpasst. Es spielt hier eine gewisse durch die Erwartung hervorgerufene Aufregung mit, die sich erst verliert, wenn das Beobachten keine Neuheit bildet, und der Experimentirende, so sehr ihn auch das Resultat seiner Untersuchung interessiren mag, der Beobachtung selbst gelassen gegen-

übersteht. Dazu kommt noch, dass die Unruhe, in der man sich bei ersten Experimenten meist befindet, das Urtheil direct beeinflusst, sei es dass man sich nicht genügende Zeit zur Auffassung des Wahrgenommenen lässt, sei es dass man den betreffenden Vorgang wirklich falsch wahrnimmt.

5. Schätzungsfehler. Eine andere noch wesentlichere Fehlerquelle für erste Beobachtungen besteht in der unrichtigen Deutung des Wahrgenommenen, speciell in der unrichtigen Abschätzung von Quantitäten, die man nicht unmittelbar abmessen kann. Wer zum ersten Mal die Länge einer Strecke abschätzt, wird sich gar leicht um einen im Verhältnis zu dieser Strecke bedeutenden Betrag irren, ebenso wird er zuerst Bruchtheile der Strecke nach Augenmaass falsch angeben. Welche Bedeutung ein besonderer Schätzungsfehler hat, das hängt von der besonderen Untersuchung ab, die man gerade ausführt. Der Bademeister darf sich bei der Temperaturbestimmung eines Wannenbades getrost um einen halben Grad verschätzen, aber von dem Experimentator, der die Ausdehnung eines Körpers mit steigender Temperatur bestimmen soll, wird man oft verlangen, dass seine Thermometerablesungen um nicht viel mehr als ein Hunderttheil des Grades falsch ausfallen. Nun wird er allerdings ein Thermometer mit feinerer Theilung zur Verfügung haben als der Bademeister, aber was er vor diesem voraus hat, steht meist bei weitem nicht im Verhältniss zu dem, was von ihm mehr verlangt wird als von diesem. Der Studirende muss sich also im Schätzen, das heisst, im Vergleichen von Grössen mit einander ohne andere Hilfsmittel, als die Natur ihm verliehen, üben; wenn der Quecksilberfaden des Thermometers zwischen zwei Strichen der Scale stehen bleibt, so muss er (oft bis auf ein halbes Zehntel des von den Strichen begrenzten Intervalls) angeben können, um wie viel die Kuppe des Fadens den untern Strich überragt, er muss sagen können, wie viel Bruchtheile einer Secunde zwischen dem letzten Secundenschlage seiner Uhr und dem Eintritt eines bestimmten Ereignisses verflossen sind. Zwar hat man durch besondere Zusatzstücke zu den Apparaten, wie Nonien, Mikrometerschrauben u. a. m., sowie durch Construction neuer Hilfsmittel, wie der Registrirapparate, die Schätzungsarbeit des Beobachters auf das tunlich geringste Maass reducirt, so dass ihm nur noch obliegt Bruchtheile relativ kleiner Grössen abzuschätzen, aber einerseits steigen mit dem Fortschreiten der Wissenschaft die Anforderungen an die Genauigkeit der Beobachtungen rascher, als die Zuverlässigkeit der Apparate zunimmt, und andererseits findet man nicht, dass die Schätzungsfehler ebenso abnehmen wie die geschätzten Grössen, sie vermindern sich langsamer als diese und können dieselben zuletzt sogar übersteigen.

6. Persönliche Fehler. Wenn aber auch der Beobachter durch lange Uebung sich an das Schätzen von Grössen gewöhnt hat, so bleiben doch noch gewisse Schätzungsfehler übrig, die abzuschwächen nicht in seiner Macht liegt, weil sie in seiner natürlichen körperlichen oder geistigen Constitution begründet sind. Es sind das die eigentlich sogenannten *persönlichen Fehler*, die nicht blos von Beobachter zu Beobachter, sondern bei

demselben Beobachter von Zeit zu Zeit verschieden ausfallen. Ein bezeichnendes Beispiel für diese persönlichen Fehler bietet die Zweiteilung eines Intervalls. Es kommt vor, dass ein ausserordentlich geschulter Beobachter ein Intervall nach dem Augenmaass so falsch halbirt, dass die Ungleichheit der beiden gleich sein sollenden Teile sogar einem im Beobachten ganz Ungeübten auffällt. Von einem eigentlichen Versehen ist hier nicht die Rede, denn dem Beobachter, der die Halbiring ausgeführt hat, scheint diese völlig correct zu sein, und nicht eher, als bis er durch Anlegung eines Maassstabes sich von der Unrichtigkeit seiner Operation überzeugt hat, erkennt er den begangenen Fehler. Aehnliche persönliche Fehler kommen bei der Schätzung von Zeitintervallen, Helligkeitsunterschieden, Farbenempfindungen u. s. f. vor. Der Beobachter wird daher vor der Vornahme einer Untersuchung sich zu überzeugen haben, für welche der dabei nötigen Messungen er persönliche Fehler besitzt, er muss sich gewissermassen erst selbst untersuchen, und das nicht einmal, sondern weil die persönlichen Fehler, wie bemerkt, nicht unveränderlich bleiben, am besten vor und nach jeder Beobachtungsreihe. Wie er dabei zu verfahren hat, hängt von der Art des persönlichen Fehlers ab. Wenn er zum Beispiel bei der Einstellung des Striches eines Maassstabes zwischen die zwei Fäden eines Mikrometers einen gewissen persönlichen Fehler begeht, so findet er diesen Fehler und seine Grösse dadurch, dass er das Bild, welches er im Mikrometer sieht, etwa durch ein geeignet auf das Ocular gestecktes Prisma umlegt; was sich ihm früher zur Rechten befand, liegt ihm jetzt zur Linken, und daher erscheint ihm sein bei der Einstellung begangener Fehler in doppelter Grösse. Persönliche Fehler beim Schätzen von Intervallstücken findet man am leichtesten durch Ausmessung dieser Stücke mit Hilfe eines Maassstabes. Aber man kann auch hier aus dem bei Schätzung grösserer Teile begangenen persönlichen Fehler nicht auf den bei Schätzung kleiner zu erwartenden schliessen. Da wo es sich um Relativmessungen handelt, um Vergleichung zweier Grössen mit einander, spielen die persönlichen Fehler in den Resultaten keine Rolle, bei absoluten Messungen können sie die Ergebnisse stark verfälschen. Meist hat man es in der Gewalt ihren Einfluss durch besondere Anordnung der Messungen stark zu beschränken. Will man die Ausdehnung eines Maassstabes durch ansteigende Temperatur bestimmen, so wird man die Messung nicht dann vornehmen, wenn der Faden des Thermometers gerade in der Mitte zwischen zwei Strichen endet, weil da beim Ablesen der Temperatur der persönliche Schätzungsfehler meist am grössten ist, sondern dann, wenn seine Kuppe nahe bei einem Striche steht, weil er hier am kleinsten ausfällt. Ferner wird man bei mikrometrischen Einstellungen die Weite des Fadenintervalls nicht viel grösser als die Dicke des einzustellenden Striches wählen u. s. f. Manche persönliche Fehler, so namentlich die der Farbenverwechslungen, die man halb und halb als pathologisch bezeichnen kann, vermag der mit ihnen behaftete von selbst überhaupt nicht aufzufinden, hier kann ihn nur die Kritik anderer belehren.

7. Fehler der Voreingenommenheit. Endlich habe ich noch von einem subjectiven Fehler zu sprechen, den man wohl passend als den der Voreingenommenheit bezeichnen kann. Man ist im allgemeinen geneigt, Messungen, die entweder einem erwarteten Resultate oder andern anscheinend guten Messungen widersprechen, von vornherein als fehlerhaft zu ignoriren. Allerdings ist eine Nichtberücksichtigung solcher Messungen, sobald sie wirklich zu unmöglich richtigen Resultaten führen, gerechtfertigt, ein einfaches Widersprechen gegen andere Messungen oder gegen erwartete Ergebnisse giebt aber kein Recht sie auszuschliessen, es sei denn, dass man die Ursache ihrer Abweichung gefunden, und diese Ursache als die Reinheit der zu beobachtenden Erscheinung störend nachgewiesen hat. Hier ganz besonders kommt es auf die Interesselosigkeit des Beobachters gegenüber den von ihm gefundenen Zahlen an, oder besser auf das gleiche Interesse für alle von ihm erhaltenen Ergebnisse.

8. Allgemeine Regel über die Wiederholung von Beobachtungen. Constante Fehler. Ein Hauptgesetz für Beobachtungen kann aber nicht genug hervorgehoben werden:

Wenn man eine Erscheinung gründlich kennen lernen will, so darf man sie nicht ein Mal studiren, man muss sie so oft als man nur kann und unter so verschiedenen Umständen, als man sie zu schaffen vermag, verfolgen.

Den letzten Teil dieser Regel, in welcher auf tunlichste Variirung der Umstände, unter denen man die Beobachtungen ausführt, gedungen wird, hat namentlich Regnault hervorgehoben, und wenn je ein Physiker sich auf das Messen verstand, so war es der Verfasser der *Relation des Expériences*. Die Befolgung dieser Regel ist für Untersuchungen, die einen wirklichen Wert haben sollen, ganz unumgänglich. Es genügt in den meisten Fällen nicht, wenn man eine Grösse zu bestimmen hat, dieselbe hinter einander mehrfach auszumessen, obgleich auch das Häufen von Einzelbestimmungen nicht zu umgehen ist; denn wie aufmerksam man auch die Anordnung zur Ausführung der betreffenden Messungen getroffen haben mag, man wird nie sicher sein, nicht irgend eine kleine störende Ursache unbeachtet gelassen zu haben, man wird überhaupt nicht alle störenden Ursachen haben übersehen und entfernen können, und jede störende Ursache kann nicht bloß eine Messung, sondern alle in derselben Reihe ausgeführten Messungen verfälschen.

Ein auffallendes Beispiel hierfür bieten die Bestimmungen des Capillitätscoefficienten einer Flüssigkeit aus der Steighöhe dieser in einer in sie eingesenkten engen Röhre. Diese Steighöhe hängt bei einigen Flüssigkeiten, namentlich beim Wasser, ausserordentlich ab von dem Grade der Reinheit der inneren Fläche der Röhre; je unreiner diese Fläche ist, desto geringer fällt die Steighöhe aus, und dabei tritt noch der Umstand hinzu, dass die Steighöhe in einer und derselben Röhre, wenn man diese ungestört lässt, sich ziemlich constant hält, ja dass sie sogar meist, wie oft man auch die

Röhre herausnehmen und hineinsenken mag, vorausgesetzt, dass das Hineinsenken immer bis zu derselben Stelle geschieht, gleich gross gefunden wird. Wollte man sich hier mit den Messungen an einer Röhre begnügen, so würde man anscheinend recht gut übereinstimmende Werte für den Capillaritätscoefficienten erhalten, die doch grundfalsch sein könnten. Es reicht hier die Häufung der Messungen allein nicht aus, man muss die Röhre an verschiedenen Stellen benutzen, und noch besser mehrere Röhren verwenden, wenn man dem Resultat der Untersuchung verhältnismässige Realität will zusprechen können. Oder man darf nicht sagen: „Ich habe den Capillaritätscoefficienten des Wassers so und so gross gefunden“, sondern nur behaupten: „Mit der Röhre, die ich gerade benutzt habe, und an der Stelle ihrer innern Fläche, wo ich sie gerade verwendete, hat sich für den Capillaritätscoefficienten . . .“ Selbstredend ist das auch ein Resultat und dazu eines, das für einen bestimmten Zweck genügen und sogar unter Umständen allein maassgebend sein kann, aber es ist dann keine allgemeine physikalische Maassbestimmung.

Muss man sonach Beobachtungen unter tunlichst verschiedenen Verhältnissen wiederholen, so darf man doch nicht die verschiedenen Verhältnisse so benutzen, wie sie sich einem gerade darbieten, hat sie vielmehr so zu wählen, dass Fehler, die in der einen Messungsreihe nach der einen Richtung auf das Resultat gewirkt haben, in der andern nach der entgegengesetzten Richtung sich geltend machen. Bestimmt man also die thermische Ausdehnung eines Körpers, so wird man es einmal bei steigender, ein andermal bei fallender Temperatur tun, denn es ist möglich, dass der Körper nicht so schnell seine Temperatur zu variiren vermag wie das dabei liegende zur Ablesung der Temperatur dienende Thermometer, in der ersten Messungsreihe wird dann die für den Körper angenommene Temperatur zu gross, in der zweiten zu klein sein. Aus ähnlichen Gründen bestimmt man die magnetische Inclination nicht durch einmalige Ablesung der Stelle, nach der die Inclinationsnadel auf dem Inclinationskreis hinweist, sondern durch mehrfache Ablesungen, indem man nach der ersten Ablesung das Inclinatorium um 180° dreht, abliest, die Nadel umlegt, wieder abliest, das Inclinatorium zurückdreht, wieder abliest und diese Reihe von Operationen wiederholt, nachdem man die Nadel noch ummagnetisirt hat.

Soweit das allgemeine über die Erfordernisse bei guten Beobachtungen: im Einzelnen wird bei der Behandlung der besondern Maassbestimmungen noch manches zu erinnern sein.

Man sieht nun, dass der Beobachter, wenn er zu wertvollern Ergebnissen gelangen will, mit einer grossen Menge von Schwierigkeiten zu kämpfen hat; er muss den Ort, wo er die Untersuchung anstellt, die Apparate, mit denen er arbeitet, und endlich sich selbst eingehend studiren. Viele Fehlerquellen kann er so ganz eliminiren, andere vermag er durch geschickte Ausführung der Beobachtung unschädlich zu machen. Aber alle störenden Ursachen sind nicht so ohne weiteres aufzufinden, eine grosse Anzahl derselben muss

ihm wegen der Geringfügigkeit der Effecte, die jede von ihnen für sich ausübt, oder wegen ihres schnellen Ablaufs entgehen, gegen diese hat er keinen absoluten Schutz, und da er den Einfluss der unvermeidlichen Störungen nicht zu eliminiren und auch nicht zu schätzen vermag, weil er die Art dieser Störungen nicht kennt, darf er seinen Ergebnissen nie absolute Wahrheit zuschreiben.

9. Controlirbare und nicht controlirbare Fehler. Wir kommen so auf einen Hauptpunkt der in diesem Abschnitt zu führenden Untersuchungen, auf die Unterscheidung der Beobachtungsfehler in hinsichtlich ihrer Ursache controlirbare und nicht controlirbare. An sich wird jede Störung einer ganz bestimmten Ursache zuzuschreiben sein, könnte man alle möglichen Störungen auffinden und für jede die sie hervorrufende Ursache namhaft machen, so hätte man nur diese Ursachen zu entfernen, oder, falls das nicht geht, ihre Wirkung zu bestimmen und bei der rechnerischen Ermittlung der Endergebnisse mit zu berücksichtigen. Leider ist das, wie bemerkt, nicht der Fall; zwar hat man durch fortwährende Verbesserung der Beobachtungsinstrumente und Methoden die gröbern Fehlerquellen mehr und mehr weggeschafft. Die Erfahrungen vieler Hunderte von Beobachtern haben auch eine Reihe störender Ursachen aufgedeckt, aber ein grosser Teil derselben entzieht sich allen Nachforschungen. Man kann sich wol vorstellen, von welcher Art sie sind, da man ja mit den Naturkräften und ihrer Wirkungsweise genügend vertraut ist, aber man kann nicht während der Beobachtung sagen, jetzt wirkt diese oder jene Ursache auf die Messungen schädlich ein. Gerade aus der Tatsache, dass wir für viele Widersprüche in unsern Beobachtungen, obgleich dieselben oft so gross sind, dass wenn sie durch eine oder zwei störende Ursachen hervorgebracht wären, diese Ursachen sich bei gehöriger Aufmerksamkeit während der Beobachtung oder bei geeigneter Variirung der Untersuchungsart hätten verraten müssen, in den Beobachtungen und ihrer Anordnung absolut keine Erklärung finden können, führt zu der Einsicht, dass diese Widersprüche meist durch eine grosse Anzahl von störenden Ursachen hervorgebracht werden, deren jede für sich zwar geringfügige Wirkung ausübt, die aber in ihrer Gesamtheit zu ganz bedeutenden Verfälschungen Veranlassung geben können. Dazu kommt noch die Erfahrung, dass die uncontrolirbaren Widersprüche ziemlich regellos auftreten, sie können, ohne dass man den Grund dafür einzusehen vermag, bald bei dieser, bald bei jener Messung auftreten, bald wirken sie in dem einen, bald in dem andern Sinne, und das in ganz kurzen Zeitintervallen, so dass es den Anschein hat, als ob sie durch gewisse bald so, bald anders und in wenigen Momenten sich abspielende und erneuernde Naturprocesse hervorgebracht werden.

10. Zufällige Fehler. Man hat sich deshalb gewöhnt diejenigen Fehler, für die man in der Beobachtung keine Erklärung zu finden vermag, und die anscheinend regellos und bald in dem einen, bald in dem andern Sinne auftreten, als *zufällig* zu betrachten und zu behandeln. Wenn wir solche

Fehler als uncontrolirbar bezeichnen, so meinen wir damit nicht blos, dass sie in einer bestimmten Beobachtungsreihe ohne erkennbaren Grund aufgetreten sind, sondern dass sie auch nicht durch Häufung von Beobachtungsreihen, Variirung der Umstände, überhaupt durch kein übersehbares Mittel dem Verständnis und der Voraussicht näher gebracht werden können. Ihr Eintreten bezüglich Nichteintreten, ihre Grösse und der Sinn, in dem sie wirken, sind für uns so sehr Sache des Zufalls, dass wir nie zu sagen vermögen, warum solche Fehler gerade vorgekommen sind, noch wann sie in bestimmter Grösse und Richtung wieder vorkommen können.

Eine weitere Erörterung über das Zufällige und namentlich die Frage, ob dasselbe vielleicht auf die Vorkommnisse, bei denen der Mensch selbst tätig mitwirkt, beschränkt werden muss, ist zu transcendent und führt auch bei dem dormaligen Stande unseres Wissens zu keinen fruchtbringenden Erkenntnissen. Wir müssen uns mit der Erfahrung begnügen,

dass, wie bemerkt, nach Ausscheidung aller Fehler, für die wir durch sorgfältiges Studium der Umgebung, der Apparate und unserer selbst, sowie durch Abänderung der Umstände, unter denen wir operiren, Gründe zu finden vermögen, in unsern Beobachtungen immer noch Abweichungen zurückbleiben, die uns daran verhindern, denselben absolute Sicherheit zuzuschreiben.

11. Unterschied zwischen Untersuchen und Verificiren. Wo es nun darauf ankommt, bestimmte Messungen vorzunehmen oder aus Beobachtungen über den Verlauf einer gewissen Erscheinung die noch unbekanntes Gesetze derselben aufzufinden, lässt sich nichts weiter tun als die controlirbaren Fehler tunlichst zu bestimmen und die nicht controlirbaren durch geeignete Vorsichtsmassregeln einzuschränken. Hat man aber eine schon erkannte Regel zu verificiren, will man namentlich zusehen, wie weit man diese Regel als Gesetz proclamiren darf, so sucht man zuerst die Consequenzen dieser Regel auf, wählt von denselben diejenige aus, welche mit den geringsten Hilfsmitteln und der grössten Genauigkeit sich verfolgen lässt und sieht zu, in wie weit die directe Beobachtung sie zu bestätigen vermag. So kann man das Gesetz für die Abhängigkeit der Kraftwirkung zweier electricen Theilchen auf einander von ihrer Ladung und Entfernung zunächst durch directe Bestimmung dieser Wirkung unter verschiedenen Verhältnissen ableiten. Man bemerkt jedoch bald, dass man so zu einem wirklich befriedigenden Beweis für das in dieser Weise von Coulomb gefundene Gesetz nicht gelangt, weil einerseits die Versuche, mit der gehörigen Vorsicht angestellt, zu complicirt, also auch vielen Fehlern ausgesetzt sind, und andererseits selbst kleine vorgefallene Fehler auf das Schlussresultat einen bedeutenden Einfluss ausüben. Durch analytische Verfolgung des supponirten Coulomb'schen Gesetzes findet man aber unter anderen Consequenzen auch die, dass wenn es wirklich Geltung haben soll, Elektricität einem Leiter mitgeteilt, sich nur auf der Oberfläche dieses aufhalten kann. Diese Consequenz lässt sich sehr leicht prüfen und hat ohne bedeutende Mühe dem Coulomb'schen Gesetz eine ganz ausserordentlich viel sichrere

Unterlage verliehen, als es die eingehendsten und mühseligsten directen Kraftmessungen je tun könnten. Aehnlich ist es mit dem Beweise des Ohm'schen Gesetzes und anderer Gesetze gegangen.

Hier wie überall bei Messungen kann die einfache Ueberlegung dessen, was man zu erreichen sucht, viel Mühe und Enttäuschung sparen.

II. Problem der Ausgleichsrechnung; Messungen und Untersuchungen.

12. Möglichkeit fehlerfreier Beobachtungen. Sind wir so zu der Einsicht gelangt, dass man für keine Beobachtung absolute Sicherheit beanspruchen darf, so folgt daraus noch nicht, dass man überhaupt niemals ein völlig richtiges Resultat erreichen kann. Im Gegenteil muss man sogar erwarten, dass wenn nur eine Beobachtung genügend oft wiederholt wird, man sie wenigstens einmal ganz fehlerfrei macht. Wie gering nämlich auch die Wahrscheinlichkeit sein mag, bei einer Beobachtung alle Fehler zu umgehen, oder sie gegen einander sich compensiren zu lassen, geradezu gleich Null darf man sie nicht setzen, weil die störenden Ursachen, wenn auch in grosser, doch immerhin nur in endlicher Anzahl vorhanden sind und oft einander entgegen wirken. Wenn aber die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses von Null verschieden ist, so kann man mindestens nahezu 2 gegen 1 wetten, dass dieses Ereignis, wird der Versuch es herbeizuführen nur genügend oft wiederholt, wenigstens einmal eintritt. Die Erfahrung lehrt sogar ein noch viel günstigeres Resultat, denn wenn man die controlirbaren Fehler vermieden hat, zeigt sich, dass grössere Fehler sehr viel seltener vorkommen als kleinere, sie lehrt, dass ein Fehler um so leichter eintreten kann, je kleiner er ist, und daraus folgt, dass man unter einer Anzahl von Wiederholungen einer Beobachtung mehr ganz fehlerfreie als mit einem vorgeschriebenen Fehler behaftete Ergebnisse erwarten darf.

13. Aufgabe der zu schaffenden Analyse. Leider besitzen wir, wenn die Resultate ohne Voreingenommenheit studirt werden sollen, kein Erkennungsmittel für die fehlerfreien Beobachtungen, denn da, wie bemerkt, nach Ausscheidung aller controlirbaren Fehler, wie ebenfalls die Erfahrung lehrt, immer noch „zufällige“ Fehler übrig bleiben, von denen wir von vornherein weder sagen können, wie gross sie sind, noch wie und wo sie entstanden sind, so vermögen wir auch nicht von dieser oder von jener Beobachtung eines Ereignisses zu behaupten, sie sei die richtige.

Es erhebt sich nunmehr die Frage, was der Experimentator mit seinen Beobachtungen einer Erscheinung anzufangen hat, um aus ihnen die nötigen Resultate abzuleiten. Natürlich vermag keine Analyse ihm dazu zu verhelfen, die richtigen Resultate herauszufinden, denn mathematische Entwicklungen können nur auf die Consequenzen einer Reihe von Annahmen

aufmerksam machen — und dies ist auch einzig ihr Zweck — aber nie mehr lehren, als man in diese Annahmen schon hineingelegt hat. Man kann aber verlangen, dass sie an der Hand der Erfahrungen, die man im Laufe der Zeit über die Beobachtungsfehler gesammelt hat und der Erfahrungen, die sich dem Beobachter bei seinen diesbezüglichen Arbeiten ergeben haben, lehrt, wie man aus einer Reihe von Beobachtungen die verhältnismässig sichersten Resultate abzuleiten hat, und wie man den Grad der erreichten Genauigkeit zu schätzen vermag.

Da es sich dabei um eine Ausgleichung der Beobachtungen gegen einander handelt, bezeichnet man die charakterisirte Analyse als *Ausgleichungsrechnung*.

14. Wahre Resultate und wahrscheinlichste Resultate; wahre Fehler und wahrscheinlichste Fehler. Festsetzung über die Bezeichnungen. Es ist hier der Ort auf eine fundamentale Bemerkung einzugehen. Da man keine Mittel besitzt, eine Untersuchung so anzustellen, dass man dem Ergebnis derselben absolute Richtigkeit zuschreiben kann, noch auch, wenn man in einer Reihe von Wiederholungen der Untersuchung wirklich einmal ein fehlerfreies Resultat erlangt hat, dieses herauszuerkennen vermag, so lässt sich auch nicht angeben, mit welchen Fehlern die Einzelresultate in Wahrheit behaftet sind.

Demnach erfahren wir aus einer Untersuchung niemals mit Sicherheit das *wahre* Resultat, und in folge dessen auch niemals die *wahren* Fehler derselben. Alles, was wir zu erhalten vermögen, ist das aus den betreffenden Untersuchungen folgende *wahrscheinlichste* Resultat und die *wahrscheinlichsten* Werte der Fehler, mit denen die Bestimmungen in derselben behaftet sind.

Hier tritt der Unterschied der zu schaffenden Analyse gegen die gewöhnliche Mathematik deutlich hervor. Die Formeln dieser sind apodiktisch zu verstehen, sie geben die betreffenden Resultate mit absoluter Sicherheit, soll heissen, genau den Tatsachen entsprechend; die Gleichungen jener dagegen lehren zwar auch die Berechnungen absolut sicher ausführen, im Verhältnis zu den Tatsachen sind aber ihre Resultate nicht die gewissen, sondern nur die unter den gegebenen Umständen wahrscheinlichsten. Hieraus folgt schon, dass die gesuchte Analyse ihre Principien aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu entnehmen hat, sie ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung angewendet auf einen bestimmten Fall.

Um im Folgenden die Begriffe auch in ihrer Symbolisirung streng aus einander zu halten, werde ich bezeichnen:

mit grossen lateinischen Lettern den wahren Wert einer Grösse,

mit entsprechenden kleinen lateinischen Lettern den wahrscheinlichsten Wert derselben.

Beobachtete Werte einer Grösse werden von den wahrscheinlichsten durch zu den Symbolen dieser hinzugefügte Indices unterschieden.

15. Klassificirung der physikalischen Arbeiten. Weiter empfiehlt es sich, um unsere Aufgabe scharf fassen zu können, nicht von Untersuchungen, Beobachtungen u. s. f. im Allgemeinen zu sprechen, sondern diese Begriffe genau zu präzisiren.

Alle physikalischen Arbeiten lassen sich in zwei Kategorien einreihen. Entweder beobachtet der Experimentator eine ihm von der Natur dargebotene, bezüglich von ihm selbst hervorgerufene Erscheinung im engeren Sinne des Wortes, so dass er dieselbe durch seine Sinne lediglich auffasst.

Oder er beschäftigt sich dabei, eventuell unter Zuhilfenahme von Apparaten, mit Messungen.

Arbeiten der ersten Kategorie lehren uns den Verlauf, die Merkmale u. s. f. der betreffenden Erscheinungen kennen, ihre Resultate bestehen in Beschreibungen;

Arbeiten der zweiten Kategorie führen zu den Gesetzen der betreffenden Erscheinungen, ihre Resultate bestehen in einzelnen Zahlen oder mathematischen Formeln.

Die Beobachtungen und Untersuchungen, die uns hinfort allein beschäftigen sollen, gehören der zweiten Kategorie, der messenden Physik zu.

Es handelt sich also hier immer um Ausmittlung bestimmter physikalischer Grössen.

16. Messungen und Untersuchungen. Nun kann diese Ausmittlung Selbstzweck sein oder zur Verbindung von verschiedenen Grössen mit einander dienen, im ersten Fall hat man es meist mit einer praktischen, im letzteren meist mit einer theoretischen Frage zu tun. Da es aber nicht gut ist Praxis und Theorie einander gegenüberzustellen, sollen die Arbeiten der messenden Physik in die beiden Klassen der *Messungen* und *Untersuchungen* eingereiht werden.

Messungen haben zum Zweck das Ausmitteln einer oder mehrerer einfacher oder zusammengesetzter bestimmter Grössen.

Untersuchungen richten sich auf die Verbindung zwischen zwei oder mehreren physikalischen Grössen.

Die Bestimmung der Temperatur eines Körpers ist eine Messung, die Bestimmung der Ausdehnung eines Körpers durch eine vorgeschriebene Temperaturerhöhung bildet wiederum eine Messung, aber die Bestimmung des Anwachsens der Ausdehnung mit dem Anwachsen der Temperatur gehört einer Untersuchung an.

Eine Untersuchung erfordert nicht bloss die einmalige Messung mehrerer Grössen, sondern die mehrfache Wiederholung dieser Messung unter Abänderung der Quantität der betreffenden Grössen.

Halb zu den Messungen, halb zu den Untersuchungen gehört eine Reihe von physikalischen Arbeiten, bei denen es sich zwar auch um die Bestimmung einer gewissen Grösse handelt, wo aber diese Grösse nicht unmittelbar gemessen werden kann, sondern unter Vermittelung mehrerer

anderer Grössen, die ihrerseits gemessen werden, bestimmt wird. Solche Messungen nennen wir *zusammengesetzte Messungen*.

Ein Beispiel wäre die Bestimmung der Intensität eines Stromes aus der electromotorischen Kraft und dem Widerstand seines Kreises.

Man hat die herangezogenen Klassen von physikalischen Arbeiten auch als *einfache* Messungen und *vermittelnde* Messungen unterschieden, aber die Bezeichnung „vermittelnde Messungen“ scheint für den Gebrauch des Physikers zu farblos, wengleich sie manchmal treffender sein dürfte, als die etwas prätentiose „Untersuchung“.

17. Stellung des Problems. Wenn nun die wiederholte Messung einer und derselben Grösse, deren wahrer Betrag A ist, die Werte $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ergeben hat, so sind die *wahren Fehler* der einzelnen Messungen

$$V_1 = A - a_1, \quad V_2 = A - a_2, \quad \dots, \quad V_n = A - a_n.$$

Diese können wir nicht bestimmen, bezeichnet aber a den nach unsern Messungen mit der grössten Wahrscheinlichkeit der betreffenden Grösse zuzuschreibenden Betrag, so sind die *wahrscheinlichsten Fehler* der einzelnen Messungen

$$v_1 = a - a_1, \quad v_2 = a - a_2, \quad \dots, \quad v_n = a - a_n$$

und diese, sowie den wahrscheinlichsten Betrag a und die diesem Betrage zuzusprechende Sicherheit bestimmen zu lehren muss die Aufgabe unserer zu schaffenden Analyse sein.

Wir haben, wie man sagt, die Messungen auszugleichen.

Wo es sich ferner um eine Untersuchung oder zusammengesetzte Messung handelt, da verlangt man die Verbindung einer Grösse L mit mehreren andern A, B, \dots, R . Die Art dieser Verbindung, die Function von A, B, \dots, R , der L gleichzusetzen ist, kann der Form nach von vorn herein gegeben sein oder soll erst aus der Untersuchung erschlossen werden; in beiden Fällen hat man dann

$$L = F(A, B, \dots, R).$$

Eine solche Function hängt nicht allein von den Variablen A, B, \dots, R ab, sondern auch von einer Reihe von Zahlencoefficienten X, Y, Z, \dots, U , und sie ist, selbst wenn ihr analytischer Charakter als Function von A, B, \dots, R völlig klar liegt, so lange nicht verwendbar, als man die Zahlencoefficienten nicht kennt. Die Untersuchung geht darauf aus und muss immer so geführt werden, dass man die Möglichkeit hat die Zahlencoefficienten X, Y, Z, \dots, U zu berechnen. Wenn nun die Untersuchung so angestellt wird, dass man gerade soviel Bedingungen erhält als Zahlencoefficienten zu berechnen sind, so lässt sich über die bei der Klarstellung der Function für L erreichte Genauigkeit nichts aussagen. Im Allgemeinen werden die Messungen sowohl für L als für die Variablen A, B, C, \dots, R mit Fehlern behaftet

sein, so dass man ihre wahren Werte nicht kennt. Hat man daher entweder die Untersuchung mehrfach wiederholt oder sie so angestellt, dass man mehr Gleichungen bekommt, als die Berechnung der Zahlencoefficienten erfordert, so sind diese Gleichungen — wir nennen sie *Beobachtungsgleichungen* — im Allgemeinen nicht mit einander verträglich, und es handelt sich dann

bei gleichzeitiger Benutzung aller dieser Beobachtungsgleichungen die Zahlencoefficienten so zu berechnen, dass keine Gleichung vor der andern ohne Grund, das heisst, wenn es nicht gerade die ihr etwa zuzuschreibende grössere Genauigkeit verlangt, bevorzugt wird, mit andern Worten, es handelt sich darum, die nach allen Beobachtungen wahrscheinlichsten Werte der Zahlencoefficienten zu bestimmen, und weiter, den Grad ihrer Sicherheit und die Genauigkeit, mit der die Function L aus den Beobachtungen folgt, anzugeben.

Die wahre Beziehung zwischen L (etwa der Ausdehnung eines Gases) und den Variablen A, B, \dots, R (etwa Temperatur, Druck, Grad der Dissoziation u. s. f.) sei

$$L = F(A, B, \dots, R; X, Y, Z, \dots, U),$$

wo X, Y, Z, \dots, U gewisse Zahlencoefficienten bedeuten, deren wahre Beträge unbekannt sind. Jedem Wertsystem A_x, B_x, \dots, R_x der Variablen gehört dann ein Wert L_x von L zu. Da nun die Beobachtungen im allgemeinen nicht die wahren Werte finden lassen, so haben wir als Beobachtungsgleichungen

$$\begin{aligned} l_1 &= F(a_1, b_1, \dots, r_1; x, y, z, \dots, u), \\ l_2 &= F(a_2, b_2, \dots, r_2; x, y, z, \dots, u), \\ &\vdots \\ l_n &= F(a_n, b_n, \dots, r_n; x, y, z, \dots, u), \end{aligned}$$

wo n mindestens so gross ist, wie die Anzahl der Zahlencoefficienten, und aus diesen sind die wahrscheinlichsten Werte x, y, z, \dots, u dieser Coefficienten zu berechnen.

Wir haben *die Beobachtungsgleichungen*, wie man sagt, *auszugleichen*.

18. Fehler der Beobachtungsgleichungen nach ihrem Ansatz, Fehler nach ihrer Ausgleichung. Nun werden bei Untersuchungen nicht blos die Systeme der Variablen A_x, B_x, \dots, R_x gemessen, sondern ganz unabhängig davon im allgemeinen auch die zugehörigen Beträge L_1, L_2, \dots, L_n von L . Daher haben wir es hier mit wahren Fehlern der Variablen und mit von diesen unabhängigen Fehlern der Untersuchungsgrösse zu tun, und dadurch werden die Verhältnisse bei Untersuchungen viel weniger durchsichtig als bei einfachen Messungen.

Die wahren Fehler der Untersuchungsgrösse sind

$$\Delta L_1 = L_1 - l_1, \quad \Delta L_2 = L_2 - l_2, \quad \dots, \quad \Delta L_n = L_n - l_n$$

supponirt, macht man bei jeder Beobachtungsgleichung einen Fehler

$$\bar{V}_x = \frac{\partial F}{\partial a_x} \Delta A_x + \frac{\partial F}{\partial b_x} \Delta B_x + \dots + \frac{\partial F}{\partial r_x} \Delta R_x - \Delta L_x,$$

und dieses ist der Fehler der betreffenden Beobachtungsgleichung vor Ausrechnung der Zahlencoefficienten. Fehler der obigen Art bezeichnen wir als *Fehler der angesetzten Beobachtungsgleichungen*.

Wenn L eine zusammengesetzte Grösse ist und selbst nicht gemessen wird, so fällt ΔL_x fort und

$$V_x = \frac{\partial F}{\partial a_x} \Delta A_x + \frac{\partial F}{\partial b_x} \Delta B_x + \dots + \frac{\partial F}{\partial r_x} \Delta R_x$$

gibt den *wahren Fehler dieser zusammengesetzten Grösse*, wenn man sie aus den gemessenen Grössen berechnet.

Im allgemeinen Fall bewirken die bezeichneten Fehler, dass man die Zahlencoefficienten nicht ihren wahren Werten nach, sondern nur nach ihren den Beobachtungen gemäss wahrscheinlichsten Beträgen zu berechnen vermag.

Wir denken uns die Zahlencoefficienten aus den angesetzten Beobachtungsgleichungen nach irgend einem Verfahren ausgerechnet; x, y, z, \dots, u seien die so für sie erhaltenen Beträge, diese brauchen nicht die wahren Werte jener Grössen darzustellen, sie werden vielmehr im allgemeinen von diesen um gewisse, je nach der Art der Beobachtungen und je nach der Anzahl der Beobachtungsgleichungen verschiedene Beträge abweichen. Es seien diese Abweichungen, die Fehler der berechneten Zahlencoefficienten,

$$\Delta X = X - x, \quad \Delta Y = Y - y, \quad \Delta Z = Z - z, \quad \dots \quad \Delta U = U - u.$$

Natürlich sind die $\Delta X, \Delta Y, \dots, \Delta U$ selbst wieder Functionen der $\Delta A, \Delta B, \dots, \Delta R; \Delta L$.

Führen wir die Zahlencoefficienten x, y, z, \dots, u in die Beobachtungsgleichungen ein, so haben wir auf der rechten Seite dieser nicht einmal mehr die Functionen $F(a_x, b_x, \dots, r_x; X, Y, Z, \dots, U)$, sondern die noch weiter verfälschten $F(a_x, b_x, \dots, r_x; x, y, z, \dots, u)$. Da auch die Fehler der x, y, z, \dots, u im allgemeinen gegen die x, y, z, \dots, u klein sein werden, so geht jetzt \bar{V}_x über in

$$\begin{aligned} \bar{V}_x = & \frac{\partial F}{\partial a_x} \Delta A_x + \frac{\partial F}{\partial b_x} \Delta B_x + \dots + \frac{\partial F}{\partial r_x} \Delta R_x - \Delta L_x \\ & + \frac{\partial F}{\partial x} \Delta X + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta Y + \dots + \frac{\partial F}{\partial u} \Delta U \end{aligned}$$

und das ist der Fehler der x ten Beobachtungsgleichung nach Ausrechnung der Zahlencoefficienten. Wir bezeichnen ihn als den *wahren übrig bleibenden Fehler der betreffenden Beobachtungsgleichung*.

19. Der Darstellungsfehler. Was man nun durch eine Rechnung von der angegebenen Art erreichen will, ist vornehmlich die volle Kenntnis der darstellenden Function F ; so lange man von dieser Function die numerischen Beträge ihrer Coefficienten nicht in Händen hat, kennt man bis zu einem gewissen Grade ihre analytische Form, vermag sie aber nicht zu Zahlenrechnungen zu verwenden, man kann nicht sagen, welcher Wert der Grösse L zukommt, wenn das System der Variablen vorgeschrieben ist. Nachdem man aber für die Coefficienten bestimmte, wenn auch vielleicht nicht wahre, so doch wenigstens wahrscheinlichste Beträge erhalten hat, ist die Function F völlig bestimmt und aus der Gleichung

$$l = F(A, B, \dots, R; x, y, z, \dots, u)$$

zu jedem vorgeschriebenen System A, B, \dots, R der Variablen das zugehörige l berechenbar. Hier ist nun von Beobachtungsfehlern der Variablen A, B, \dots, R und der Grösse l keine Rede, ist der berechnete Wert von l trotzdem nicht als absolut sicher zu bezeichnen, so hat das seinen Grund darin, dass wir für die Zahlencoefficienten nicht wahre Beträge X, Y, Z, \dots, U , sondern nur wahrscheinlichste x, y, z, \dots, u ableiten konnten. Die wahre Unsicherheit der berechneten Grösse ist

$$V = L - l = F(A, B, \dots, R; X, Y, Z, \dots, U) - F(A, B, \dots, R; x, y, z, \dots, u)$$

oder meist mit hinlänglicher Genauigkeit

$$V = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta X + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta Y + \frac{\partial F}{\partial z} \Delta Z + \dots + \frac{\partial F}{\partial u} \Delta U.$$

Wir bezeichnen diesen, allein aus der Unsicherheit der Zahlencoefficienten in der darstellenden Function resultirenden Fehler als den *Darstellungsfehler*. Er ist der für die Anwendung eigentlich wichtige Fehler, die Fehler der Beobachtungsgleichungen haben eine mehr kritische Bedeutung, insofern sie über den Wert der Beobachtungen und die Sicherheit ihrer Ausgleichung Auskunft geben.

20. Die übrig bleibenden Fehler. Der übrigbleibende Fehler einer Beobachtungsgleichung setzt sich jetzt aus zwei Teilen zusammen, dem Fehler

$$\bar{V}_x = \frac{\partial F}{\partial a_x} \Delta A_x + \frac{\partial F}{\partial b_x} \Delta B_x + \dots + \frac{\partial F}{\partial r_x} \Delta R_x - \Delta L_x$$

des Ansatzes und dem Fehler

$$V_x = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta X + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta Y + \dots + \frac{\partial F}{\partial u} \Delta U$$

der Darstellung, und es ist

$$\bar{\bar{V}} = \bar{V}_x + V_x.$$

Der Ansatzfehler \bar{V}_x besteht aus einer Reihe von von einander unabhängigen Grössen, er wird durch den bezüglichen Fehler der Variablen und den Fehler der zugehörigen Untersuchungsgrösse bestimmt.

Im Darstellungsfehler sind die einzelnen Summanden von einander ebenfalls unabhängig, aber da die Zahlencoefficienten nicht direct beobachtete, sondern aus Gleichungen berechnete Grössen darstellen, so können ihre Fehler nur insofern einen Sinn haben, als sie durch die Fehler dieser Gleichungen bestimmt werden. Es hängen hiernach die Darstellungsfehler von den Fehlern der Variablen und denen der Untersuchungsgrösse ab, so dass wir etwa setzen könnten

$$V_x = \Phi_x(\Delta A_1, \Delta B_1, \dots, \Delta R_1; \Delta A_2, \dots, \Delta R_n; \Delta L_1, \Delta L_2, \dots, \Delta L_n),$$

und sie würden sich genau berechnen lassen, wenn man die einzelnen ΔA , ΔB , \dots ΔR ; ΔL kennte. In den Beobachtungsgleichungen sind nicht die einzelnen ΔA , \dots ΔL massgebend, sondern die Ansatzfehler, die \bar{V} ; genauer genommen ist also jeder der Darstellungsfehler als Function aller Ansatzfehler zu denken, etwa

$$V_x = X_x(\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_n).$$

Zur Berechnung der Darstellungsfehler der Bedingungsgleichungen würde also auch die Kenntnis der Ansatzfehler genügen, aber um diese zu erlangen, muss man mindestens eine angenäherte Kenntnis von den Zahlencoefficienten selbst schon haben.

Im Ganzen sind, wie man sieht, die übrig bleibenden Fehler recht zusammengesetzte Grössen.

21. Praktische Vereinfachung durch Abwälzung aller Fehler auf die zu bestimmende Grösse. Um sich wenigstens die Uebersicht zu erleichtern, ist man übereingekommen, in vielen Fällen von den Fehlern der Variablen ganz abzusehen, man wirft, wie wir uns populärer ausdrücken können, alle bei der betreffenden vollständigen Beobachtung gemachten Fehler auf die Untersuchungsgrösse,

fasst also die ganze Grösse $\frac{\partial F}{\partial a_x} \Delta A_x + \frac{\partial F}{\partial b_x} \Delta B_x + \dots + \frac{\partial F}{\partial r_x} \Delta R_x - \Delta L_x$

als Fehler der Beobachtung von L_x auf.

Wenn es sich nur darum handelt, aus dem System von Variablen die wahrscheinlichsten Beträge für die Zahlencoefficienten abzuleiten, ist ein solches Verfahren völlig gerechtfertigt, denn da die Grösse L in ihrem Betrage von den Variablen A , B , \dots , R abhängt, gehört jedem System der Variablen ein bestimmter Wert von L an; hat man also ein bestimmtes System beobachtet, so kann man diesem ein bestimmtes L zuschreiben. Wenn das beobachtete System nicht das gerade vorliegende wahre System ist, wird auch das zugeschriebene L nicht das gerade vorliegende wahre sein. Man beobachtet aber nicht das dem nach der Beobachtung angenommenen System von Variablen zugehörige L , sondern das wirklich vorliegende. Der Fehler von L würde sich so aus zwei Teilen zusammen-

setzen, aus der Abweichung des vorliegenden L von dem Betrage, der dem gerade angenommenen System von Variablen entspricht, und aus dem Fehler, der bei der Beobachtung des L selbst vorgefallen ist.

22. Principielle Notwendigkeit die einzelnen Fehler aus einander zu halten. Allein die Ausgleichsrechnung hat auch noch die andere Aufgabe, über die Fehler selbst Aufklärung zu bringen, sie soll auch zeigen, mit welcher Genauigkeit jede der in Frage kommenden Grössen gemessen ist, und sie giebt natürlich nur ein falsches Bild, wenn man ganze Systeme von Fehlern auf eine einzige Grösse abwälzt. Man vermag, wenn man so verfährt wie angegeben, die Fehler der einzelnen Grössen nicht von einander zu trennen, und deshalb ist jene Annahme über die Ansatzfehler principiell nicht zu billigen.

Wir fassen aber vorläufig in den einzelnen Beobachtungsgleichungen alle Fehler zusammen und nennen ihre Summe den übrig bleibenden Fehler der betreffenden Gleichung.

23. Kritische Bedeutung der übrig bleibenden Fehler. Sollen nun diese übrig bleibenden Fehler zur Kritik der Resultate und der Untersuchung dienen, so sind zunächst zwei Fälle von einander zu trennen.

1. Ist die Form der Function F von vornherein gegeben, so dass hinsichtlich derselben gar kein Zweifel besteht, und diese Form die wahre ist, so kann der Fehler der Darstellung nur von den Beobachtungsfehlern abhängen, von nichts weiter.

2. Wenn dagegen, was in der Praxis weitaus der gewöhnlichste Fall ist, die Form der Function F nicht von vornherein bekannt ist, sondern auch erst aus der Untersuchung erschlossen werden soll, so kann es kommen, dass man bei der Aufstellung der Beobachtungsgleichungen $l_x = F(a_x, b_x, \dots, r_x)$ der Function eine falsche Form gegeben hat. Hier hängt also der Fehler der Darstellung nicht blos von den Beobachtungsfehlern ab, er wird durch die Wahl der Function F mitbestimmt.

Im ersten Fall muss der Fehler der Darstellung mit den Beobachtungsfehlern zugleich verschwinden; wenn diese gleich Null sind, müssen die Beobachtungsgleichungen notwendig zu den wahren Beträgen der Zahlencoefficienten führen. Im zweiten Fall braucht das keineswegs zu geschehen, denn hier hängt die Darstellung auch noch von der richtigen Wahl der Function ab.

Ueber die Wahl der Function vermag natürlich die Analyse keine allgemeinen Regeln aufzustellen, sie muss sich ganz auf die analytische und geometrische Geschicklichkeit des Rechners verlassen, aber in den übrig bleibenden Fehlern giebt sie ihm ein Mittel, seine Wahl zu beurteilen. Wenn man nämlich auch die Fehler der Beobachtungen ihrer Grösse nach nicht anzugeben vermag, so weiss man doch in den meisten Fällen, welche Beträge sie nicht übersteigen können. Findet man also, dass nach Ausrechnung der Zahlencoefficienten die übrig bleibenden Fehler einzelner Beobachtungsgleichungen grösser sind als man durch die Beobachtungsfehler

derselben erklären kann, so ist das ein Zeichen, dass die Form der Function unrichtig gewählt worden ist, und der Rechner muss es mit einer andern Function versuchen. Widerspricht der restirende Fehler bei keiner der Beobachtungsgleichungen der Schärfe der Beobachtungen, so kann man die gewählte Form der Function als zweckentsprechend ansehen; die übrig bleibenden Fehler bieten dann zwar immer noch nicht ein sicheres Kriterium für die Güte der Beobachtungen, weil man nicht wissen kann, ob man nun die absolut richtige Function gewählt hat, aber da man einmal in anderer Weise nicht vorzudringen vermag, wird man sie als ein solches hinnehmen müssen. Ein anderes, noch viel mächtigeres Kriterium findet man in dem Gang der übrig bleibenden Fehler, wenn man diese in bestimmter, durch die Untersuchung selbst gegebener Weise ordnet. Ueber die hier zu befolgenden Regeln ist das Nötige am Schluss des zweiten und vierten Abschnittes eingehend auseinandergesetzt. Doch wird ein Physiker, der auch guter Mathematiker ist, nach einigem Nachdenken selten über die zu wählende Function in Zweifel sein.

Aber auch abgesehen von den Unsicherheiten in der Wahl der darstellenden Function, ist der Wert der übrig bleibenden Fehler für die Kritik der Beobachtungen und ihres Endergebnisses hier wie auch bei den einfachen Messungen immer nur ein relativer.

Zunächst sind die wahren Fehler der einzelnen beobachteten Grössen nicht bekannt und auch durch keine Methode zu entdecken, das einzige, was die Untersuchung liefert, ist eine Reihe von mit Fehlern behafteten Beobachtungsgleichungen

$$l_x = F(a_x, b_x, \dots, r_x), \\ x = 1, 2, 3, \dots, n;$$

rechnet man aus ihnen die Zahlencoefficienten aus, so kann man höchstens zu den Umständen nach wahrscheinlichsten Beträgen x, y, z, \dots, u gelangen, über deren wahre Fehler man wieder nichts weiss. Indem man dann nach Einsetzung der für die Zahlencoefficienten gefundenen Werte die Functionsbeträge für die verschiedenen Variabelnsysteme ableitet, bekommt man in den Differenzen der Berechnung gegen die Beobachtung, in

$$v_1 = F(a_1, b_1, \dots, r_1; x, y, z, \dots, u) - l_1, \\ v_2 = F(a_2, b_2, \dots, r_2; x, y, z, \dots, u) - l_2, \\ \vdots \\ v_n = F(a_n, b_n, \dots, r_n; x, y, z, \dots, u) - l_n,$$

die übrig bleibenden Fehler der Beobachtungsgleichungen, aber diese Fehler sind nicht die wahren, sondern nur so wahrscheinlich, als es die Umstände zulassen, ihre wahren Beträge bleiben unauffindbar.

Das ist eine nicht zu vermeidende Unsicherheit der übrig bleibenden Fehler, aber es ist klar, dass unter gleichbleibenden Verhältnissen die Un-

sicherheit mit Anwachsen der Anzahl von Beobachtungsgleichungen im allgemeinen abnehmen wird.

Zunächst muss die Untersuchung so geführt sein, dass aus ihr mindestens so viele Beobachtungsgleichungen folgen, als Coefficienten zu berechnen sind. Hat sie gerade die notwendige Anzahl von Beobachtungsgleichungen ergeben, so bleibt nichts weiter zu tun als diese mit den gewöhnlichen Methoden nach x, y, z, \dots, u aufzulösen. Nach Einsetzung der so gefundenen Werte für die Zahlencoefficienten in die Beobachtungsgleichungen werden diese identisch erfüllt, es bleiben keine Fehler übrig, oder viel mehr, die wahrscheinlichsten Fehler sind alle Null, und wir können, wenn wir keine andern Mittel dazu haben, absolut nichts über die Exactheit der Untersuchung aussagen.

Je mehr Gleichungen über der nötigen Anzahl zur Verfügung stehen, desto weniger wahrscheinlich wird es, dass ein System von Zahlencoefficienten allen genügend gerecht wird. Hat sich doch ein solches System gefunden, so dürfen wir mit einiger Wahrscheinlichkeit annehmen, dass dasselbe dem wahren System nahe kommt, und diese Wahrscheinlichkeit wird um so grösser, je mehr Beobachtungsgleichungen das betreffende System hinlänglich gerecht wird. In wie weit aber ein System von Zahlencoefficienten einer Beobachtungsgleichung genügt, ersehen wir aus dem nach Einsetzung dieses Systems für die Beobachtungsgleichung übrig bleibenden Fehler.

Daraus folgt:

Die übrig bleibenden Fehler sind zur Beurteilung der Exactheit einer Untersuchung ganz wertlos, wenn diese nicht mehr als die unumgänglich nötige Anzahl von Beobachtungsgleichungen geliefert hat, mit jeder neu hinzutretenden überschüssigen Beobachtungsgleichung gewinnen sie an Bedeutung und sie bieten ein um so schärferes Kriterium für die Exactheit der Untersuchung, je mehr überschüssige Beobachtungsgleichungen diese ergeben hat.

Man hat deshalb jede Untersuchung so zu führen, dass tunlichst viele Beobachtungsgleichungen herauskommen.

24. Fassung des Problems. Wir können jetzt die Aufgabe, die die Ausgleichsrechnung zu lösen hat, indem wir aus dem etwas zu engen Rahmen heraustreten, so fassen:

Aus einem System von Beobachtungsgleichungen — gleichgiltig, ob es eine oder mehrere Functionen betrifft — sind eine Reihe von Grössen so zu bestimmen, dass sie den Endergebnissen die grösste Wahrscheinlichkeit verleihen, die dieselben unter den besondern Umständen, unter denen die Untersuchung geführt ist, zu erlangen vermögen. Aus den dann übrig bleibenden Fehlern der Beobachtungsgleichungen sind Schlüsse auf die Exactheit der Endergebnisse sowie auf die Schärfe der Untersuchung zu ziehen und zugleich ist zu zeigen, welche Sicherheit diesen Schlüssen zugeschrieben werden darf.

III. Allgemeine Theorie der Ausgleichsrechnung.

a) Fehlerwahrscheinlichkeit.

Nachdem die Aufgaben präcisirt sind, gehe ich zur allgemeinen Lösung derselben über. Um aber eine bequemere Ausdrucksweise zu gewinnen, soll zunächst ganz allgemein von Untersuchungen gesprochen werden, indem wir darunter auch einfache Messungen verstehen.

25. Wahrscheinlichkeit eines Fehlers. Die Fehler einer Untersuchung entstehen dadurch, dass die vorgenommenen Messungen der betreffenden Grössen nicht notwendig zu den wahren Werten derselben führen. Man vermag aber nicht von vornherein zu sagen, mit was für Fehlern die Resultate der betreffenden Untersuchung behaftet sein werden, wenn man auch meist weiss, welche Beträge sie in den besondern Fällen nicht überschreiten. Daher kann man auch nur von der grössern oder geringern Sicherheit sprechen, mit der ein Fehler von bestimmter Grösse erwartet werden darf.

Als Maass der Sicherheit für das Eintreten eines Ereignisses dient die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses, wir werden daher auch bei Beobachtungen von der Wahrscheinlichkeit eines gewissen Fehlers sprechen können, indem wir darunter, zunächst unter Voraussetzung einer sehr grossen Anzahl von Beobachtungsgleichungen, verstehen: *Das Verhältnis der Anzahl der Fehler, die gerade so gross sind wie der von uns betrachtete zu der Anzahl aller bei der betreffenden Untersuchung vorgefallenen Fehler.*

In diesem Sinne kann man wol sagen, dass ein Fehler wahrscheinlicher ist als ein anderer, und es ist beispielweise schon bemerkt worden, dass grosse Fehler sehr viel unwahrscheinlicher sind als kleine, weil sie erfahrungsgemäss viel seltener vorkommen als diese.

Sei $\varphi(V)$ die Wahrscheinlichkeit eines wahren Fehlers von der Grösse V , die Wahrscheinlichkeit der wahren Fehler V_1, V_2, \dots sind dann im allgemeinsten Fall bezüglich durch

$$\varphi_1(V_1), \varphi_2(V_2), \dots, \varphi_x(V_x), \dots,$$

zu bezeichnen, und das bedeutet, dass man in einem Resultat der betreffenden Untersuchung einen Fehler von der Grösse V_1 mit der Wahrscheinlichkeit $\varphi_1(V_1)$, einen von der Grösse V_2 mit der $\varphi_2(V_2)$ u. s. f. zu erwarten hat.

26. Wahrscheinlichkeit für das Zusammenwirken mehrerer bestimmter Fehler. In zwei Resultaten der Untersuchung können die dabei vorkommenden Fehler gleich oder verschieden und im übrigen beliebig so gross wie irgend einer der überhaupt möglichen Fehler sein. Dass gerade die Fehler V_1 und V_2 und keine andern auftreten, ist die Wahrscheinlichkeit $\varphi_1(V_1) \varphi_2(V_2)$. Ganz allgemein ist die Wahrscheinlichkeit, dass in n von einander unabhängigen Resultaten der Untersuchung gerade die n Fehler $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ (in beliebiger Folge) vorkommen,

$$W = \varphi_1(V_1) \varphi_2(V_2) \varphi_3(V_3) \cdots \varphi_n(V_n).$$

27. Welches Fehlersystem am ehesten zu erwarten ist. Wenn nun bei der n maligen Ausführung der Untersuchung wirklich gerade diese Fehler aufgetreten sind, so muss offenbar unter den obwaltenden Umständen für das combinirte Erscheinen gerade dieser Fehler die Wahrscheinlichkeit am grössten gewesen sein. Aber da wir nicht wissen, ob diese Fehler auch die wahren sind, so haben wir an Stelle der zur Symbolisirung wahrer Grössen dienenden grossen Buchstaben, die der Bezeichnung wahrscheinlichster vorbehaltenen kleinen zu setzen und können jetzt sagen:

1. *Wenn bei einem Satz von n unabhängigen Beobachtungen aus der Anzahl aller möglichen Fehler gerade die v_1, v_2, \dots, v_n aufgetreten sind, so war die Wahrscheinlichkeit*

$$w = \varphi_1(v_1) \varphi_2(v_2) \cdots \varphi_n(v_n)$$

für das combinirte Auftreten derselben grösser, als wenn man an Stelle der v_1, v_2, \dots, v_n ganz oder zum Teil andere der möglichen Fehler substituirt hätte.

Wiederholt man jetzt die Untersuchung unter ganz genau denselben Umständen, so hat man offenbar ein Recht wieder dieselben Fehler v_1, v_2, \dots, v_n zu erwarten, ja wenn die Umstände wirklich in jeder Beziehung jetzt ganz genau so sind wie vordem, lässt es sich gar nicht denken, dass andere Fehler als die v_1, v_2, \dots, v_n auftreten könnten.

Daraus ergibt sich sofort:

2. *Von allen Fehlern, die die Resultate einer Untersuchung verfälschen können, hat man diejenigen v_1, v_2, \dots, v_n mit dem grössten Recht zu erwarten, für deren combinirtes Auftreten unter den besondern Verhältnissen der Untersuchung die Wahrscheinlichkeit*

$$w = \varphi_1(v_1) \varphi_2(v_2) \cdots \varphi_n(v_n)$$

ein Maximum ist.

Das Theorem ist überaus wichtig, denn es führt uns sofort zu einem andern Satze, der unmittelbar die Gleichungen zur Ausrechnung des wahrscheinlichsten Resultats liefert.

b) *Ausgleichung von Messungen.*

28. Ausgleichungsformel für Messungen. Der grössern Klarheit wegen betrachte ich zuerst die Messungen.

Der wahre Wert einer Grösse (etwa einer Länge) sei A , durch wiederholte von einander unabhängige Messungen seien aber für diese Grösse der Reihe nach die Beträge $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ gefunden, dann sind die wahren Fehler der Messungen bezüglich

$$V_1 = A - a_1, \quad V_2 = A - a_2, \quad \dots, \quad V_n = A - a_n.$$

Diese Fehler kennen wir nicht, und wir besitzen auch kein Mittel, sie zu bestimmen.

Soll nun aus den Messungen für die betreffende Grösse ein Wert a abgeleitet werden, dem wir nach diesen Messungen die grösste Sicherheit zuschreiben dürfen, so muss er nach Satz 2 so beschaffen sein, dass für das Eintreffen gerade der Fehler

$$v_1 = a - a_1, \quad v_2 = a - a_2, \quad \dots, \quad v_n = a - a_n$$

die grösste Wahrscheinlichkeit herauskommt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Messungen gerade mit den Fehlern v_1, v_2, \dots, v_n behaftet sind, ist, weil diese Messungen von einander unabhängig sein sollten,

$$w = \varphi_1(v_1) \varphi_2(v_2) \dots \varphi_n(v_n),$$

falls die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Fehlers v_x den Betrag $\varphi_x(v_x)$ besitzt.

Wir bekommen also den Satz:

3. Aus einer Reihe von, von einander unabhängigen Messungen a_1, a_2, \dots, a_n einer Grösse wird der wahrscheinlichste Wert a der betreffenden Grösse durch die Bedingung abgeleitet, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Messungen gerade durch die Fehler

$$v_1 = a - a_1, \quad v_2 = a - a_2, \quad \dots, \quad v_n = a - a_n$$

verfälscht sind, nämlich

$$w = \varphi_1(v_1) \varphi_2(v_2) \dots \varphi_n(v_n)$$

ein Maximum wird.

Die einzige Grösse, durch deren Wahl wir w zu einem Maximum machen können, ist a , und da w seinen grösstmöglichen Betrag erhält, wenn sein Logarithmus zu einem Maximum wird, so lautet unsere Bedingungsgleichung zur Bestimmung des wahrscheinlichsten Resultats a der n Messungen

$$0 = \frac{1}{\varphi_1(v_1)} \frac{\partial \varphi_1(v_1)}{\partial a} + \frac{1}{\varphi_2(v_2)} \frac{\partial \varphi_2(v_2)}{\partial a} + \dots + \frac{1}{\varphi_n(v_n)} \frac{\partial \varphi_n(v_n)}{\partial a}.$$

Es ist aber

$$\frac{\partial \varphi_x(v_x)}{\partial a} = \frac{d\varphi_x(v_x)}{dv_x} \frac{\partial v_x}{\partial a},$$

und weil man entsprechend den Gleichungen

$$v_x = a - a_x; \quad x = 1, 2, 3, \dots, n$$

hat

$$\frac{\partial v_1}{\partial a} = \frac{\partial v_2}{\partial a} = \frac{\partial v_3}{\partial a} = \dots = \frac{\partial v_n}{\partial a},$$

und jeder dieser Differentialquotienten von Null verschieden ist, so lautet die Ausführung des vorausgehenden Satzes:

4. Das wahrscheinlichste Resultat a einer Reihe von Messungen a_1, a_2, \dots, a_n einer und derselben Grösse berechnet sich aus der Gleichung

$$I) \quad 0 = \frac{1}{\varphi_1(v_1)} \frac{d\varphi_1(v_1)}{dv_1} + \frac{1}{\varphi_2(v_2)} \frac{d\varphi_2(v_2)}{dv_2} + \dots + \frac{1}{\varphi_n(v_n)} \frac{d\varphi_n(v_n)}{dv_n},$$

wo

$$v_1 = a - a_1, \quad v_2 = a - a_2, \quad \dots, \quad v_n = a - a_n$$

ist und $\varphi_x(v_x)$ die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der bei der x ten Messung ein Fehler von der Grösse v_x zu erwarten steht.

c) Ausgleichung von Untersuchungen.

Ich gehe gleich zu der Lösung unserer Aufgabe für Untersuchungen über.

29. Ausgleichsformeln für Untersuchungen. In einer Untersuchung bieten, wie oben bemerkt, die übrig bleibenden Fehler der Beobachtungsgleichungen ein Kriterium, sei es für die Exactheit der Gesamtheit der Beobachtungen, sei es für die Richtigkeit der gewählten Function.

Sei l die Grösse, die durch die Untersuchung in ihrer Abhängigkeit von dem System der Variablen a, b, c, \dots, r bestimmt werden soll; die Art dieser Abhängigkeit, die Form der Function

$$l = F(a, b, c, \dots, r)$$

oder wenn mehrere Functionen zugleich vertreten sind, die Formen aller dieser müssen entweder von vornherein gegeben sein, oder sich (durch Probiren) finden lassen, was also durch die Untersuchung eruiert werden soll, das sind die in der Function oder den Functionen vertretenen Coefficienten x, y, z, \dots, u .

Sollen nun die aus den durch die Untersuchung gelieferten Beobachtungsgleichungen

$$l_x = F(a_x, b_x, \dots, r_x; x, y, z, \dots, u); \quad x = 1, 2, \dots, n$$

ausgerechneten Werte von x, y, z, \dots, u die grösstmögliche Gewähr für ihre Richtigkeit haben, so müssen sie so beschaffen sein, dass sie, in die Beobachtungsgleichungen eingesetzt, Fehler übrig lassen, die in ihrer Gesamtheit für sich die grösste Wahrscheinlichkeit aufweisen.

Ich bezeichne mit l_x den durch directe Beobachtung erhaltenen und den, ebenfalls direct beobachteten Variablen a_x, b_x, \dots, r_x entsprechenden Wert von l , und mit \bar{l}_x den für l nach Bestimmung der Zahlencoefficienten x, y, z, \dots, u aus der Gleichung

$$\bar{l}_x = F(a_x, b_x, \dots, r_x; x, y, z, \dots, u)$$

berechneten Wert.

Dann sind die übrig bleibenden Fehler der Beobachtungsgleichungen

$$v_1 = \bar{l}_1 - l_1, v_2 = \bar{l}_2 - l_2, \dots, v_n = \bar{l}_n - l_n,$$

und wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für die x te Beobachtungsgleichung der Fehler v_x eintritt, gleich $\varphi_x(v_x)$ ist, so bekommt man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System der Beobachtungsgleichungen gerade mit dem System v_1, v_2, \dots, v_n der Fehler behaftet ist, wenn, wie wir stets voraussetzen, jede Beobachtungsgleichung unabhängig von allen andern gewonnen ist, und, wie wir vorläufig annehmen, zwischen den zu bestimmenden Coefficienten keine streng zu erfüllende analytische Beziehungen stattfinden,

$$w = \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2) \cdots \varphi_n(v_n).$$

Daher sind die Beträge für die Coefficienten die wahrscheinlichsten, für welche w ein Maximum wird, und es sind demnach die Coefficienten x, y, z, \dots, u aus den Gleichungen

$$\text{IIa)} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial w}{\partial u} = 0$$

zu berechnen.

Wir haben nun

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w \left(\frac{1}{\varphi_1(v_1)} \frac{\partial \varphi_1(v_1)}{\partial x} + \frac{1}{\varphi_2(v_2)} \frac{\partial \varphi_2(v_2)}{\partial x} + \dots + \frac{1}{\varphi_n(v_n)} \frac{\partial \varphi_n(v_n)}{\partial x} \right)$$

oder

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w \left(\frac{1}{\varphi_1(v_1)} \frac{d\varphi_1(v_1)}{dv_1} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{\varphi_2(v_2)} \frac{d\varphi_2(v_2)}{dv_2} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \dots + \frac{1}{\varphi_n(v_n)} \frac{d\varphi_n(v_n)}{dv_n} \frac{\partial v_n}{\partial x} \right).$$

Damit bekommen wir den Satz:

5. Aus einer Untersuchung, die zur Verbindung einer Grösse l mit andern Grössen a, b, c, \dots, r dienen soll, bekommt man für die Coefficienten x, y, z, \dots, u der die Verbindung bewerkstellenden Function oder Functionen, die nach der Untersuchung wahrscheinlichsten Werte durch Auflösung der Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\varphi_1(v_1)} \frac{d\varphi_1(v_1)}{dv_1} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{\varphi_2(v_2)} \frac{d\varphi_2(v_2)}{dv_2} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \dots + \frac{1}{\varphi_n(v_n)} \frac{d\varphi_n(v_n)}{dv_n} \frac{\partial v_n}{\partial x}, \\ 0 &= \frac{1}{\varphi_1(v_1)} \frac{d\varphi_1(v_1)}{dv_1} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{1}{\varphi_2(v_2)} \frac{d\varphi_2(v_2)}{dv_2} \frac{\partial v_2}{\partial y} + \dots + \frac{1}{\varphi_n(v_n)} \frac{d\varphi_n(v_n)}{dv_n} \frac{\partial v_n}{\partial y}, \\ \text{IIb)} \quad 0 &= \frac{1}{\varphi_1(v_1)} \frac{d\varphi_1(v_1)}{dv_1} \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{1}{\varphi_2(v_2)} \frac{d\varphi_2(v_2)}{dv_2} \frac{\partial v_2}{\partial z} + \dots + \frac{1}{\varphi_n(v_n)} \frac{d\varphi_n(v_n)}{dv_n} \frac{\partial v_n}{\partial z}, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ 0 &= \frac{1}{\varphi_1(v_1)} \frac{d\varphi_1(v_1)}{dv_1} \frac{\partial v_1}{\partial u} + \frac{1}{\varphi_2(v_2)} \frac{d\varphi_2(v_2)}{dv_2} \frac{\partial v_2}{\partial u} + \dots + \frac{1}{\varphi_n(v_n)} \frac{d\varphi_n(v_n)}{dv_n} \frac{\partial v_n}{\partial u}. \end{aligned}$$

31. Die Ausgleichungsformeln ersetzen die Beobachtungsgleichungen in jeder Hinsicht. Sei zunächst $h > n$, wir haben dann mehr Coefficienten als Beobachtungsgleichungen und somit mehr Gleichungen zur Berechnung der ξ als nötig sind. Diese lassen sich aber durch von Null verschiedene Werte der ξ nur dann befriedigen, wenn zwischen den Factoren

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial v_n}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial v_n}{\partial x_2}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_h}, & \frac{\partial v_2}{\partial x_h}, & \dots, & \frac{\partial v_n}{\partial x_h} \end{array}$$

gewisse Bedingungen erfüllt sind.

Da dann die Fehler nicht mehr von einander unabhängig sein würden, verliert unsere ganze Deduction, die gerade eine Unabhängigkeit der einzelnen Fehler von einander zur Grundlage hatte, ihren Halt, und die Ausgleichungsformeln werden wertlos. Wir müssen dann annehmen, dass sie dadurch identisch erfüllt werden, dass eben alle Fehler v gleich Null sind. Man kann in diesem Fall die Coefficienten nicht eindeutig berechnen.

Wenn ferner $h = n$ ist, so haben wir genau so viele Coefficienten, als Beobachtungsgleichungen vorhanden sind, und die Gleichungen für die ξ entsprechen in ihrer Anzahl der Anzahl der ξ . Da letztere homogen und linear in Bezug auf die ξ sind, so muss wieder, wenn nicht alle ξ der Null gleich sein sollen, zwischen dem System der Factoren $\partial v/\partial x$ eine Relation stattfinden, diese besagt dann aber nichts weiter, als dass wieder alle Fehler gleich Null zu setzen seien.

Wir können dann zur Berechnung der Coefficienten auf die Beobachtungsgleichungen zurückgehen, deren Zahl ja auch in diesem Falle genau so gross ist, wie die dieser Coefficienten.

Ueber den dritten und weitaus wichtigsten Fall, $h < n$, ist nichts besonderes hinzuzufügen, hier kann man immer den Gleichungen für die ξ durch von Null verschiedene Beträge dieser Grössen genügen, diese Gleichungen haben also stets ihre bestimmte Bedeutung, und sie geben für die Coefficienten stets ganz unzweideutige Werte, ohne dass zwischen den Fehlern irgend welche Beziehungen stattzufinden brauchen und ohne dass man diesen Fehlern von vornherein irgend welche Beträge zuzuschreiben hat. Hiernach spiegelt das System der wahrscheinlichsten Gleichungen alle Verhältnisse der Untersuchung genau wieder, so dass es in dieser Hinsicht den Beobachtungsgleichungen äquivalent ist. Eingehender wird die Discussion der Ausgleichungsformeln im vierten Abschnitt sein.

Die so berechneten Coefficienten sind die unter den gegebenen Umständen wahrscheinlichsten, aber es muss nochmals hervorgehoben werden, dass die durch sie mitbestimmten übrig bleibenden Fehler für eine Kritik der Exactheit der Untersuchung gar keinen Wert haben, wenn keine überschüssigen Bedingungsgleichungen da sind, dass ihre Bedeutung mit der Zahl der überschüssigen Beobachtungsgleichungen zunimmt, bis sie schliesslich, wenn die überschüssigen Beobachtungsgleichungen in sehr grosser Zahl vorhanden sind, wenigstens in Untersuchungen, wo die Form der zu bestimmenden Function von vornherein gegeben ist, die Stelle der wahren Fehler einzunehmen im Stande sind.

Damit ist unsere Aufgabe für die hervorragendsten Zwecke ideell gelöst. Um die Ausgleichungsformeln auch zu praktischen Rechnungen brauchbar zu machen, haben wir die einzelnen in ihnen vertretenen Grössen zu bestimmen.

32. Vereinfachung der Ausgleichungsformeln durch Einführung von Näherungswerten. Diese Grössen scheiden sich in zwei Gruppen, die eine enthält die Differentialquotienten der Fehler nach den zu berechnenden Coefficienten, die andere umfasst die Wahrscheinlichkeitsfunctionen der Fehler, oder vielmehr die Derivirten nach den Fehlern von den Logarithmen der Wahrscheinlichkeitsfunctionen.

Was nun zunächst die Grössen der ersten Gruppe anbetrifft, so hatten wir nach der Definition der wahrscheinlichsten Fehler

$$v_x = \bar{l}_x - F(a_x, b_x, \dots, r_x; x, y, z, \dots, u).$$

Hierin sind a_x, b_x, \dots, r_x durch directe Beobachtung gegeben und die Function F ist von vornherein ihrer Form nach vorgeschrieben; man kann also in jedem Falle, jeden beliebigen Differentialquotienten als bestimmte Function von x, y, z, \dots, u darstellen, und es ist allgemein

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{\partial F(a_x, b_x, \dots, r_x; x, y, z, \dots, u)}{\partial x}.$$

Die Function, die dann herauskommt, ist nach x, y, z, \dots, u zu ordnen, und ist je nach der Form von F mehr oder weniger complicirt. Hiernach würde die Berechnung der Coefficienten allen Schwierigkeiten unterliegen, mit denen die numerische Auflösung von Gleichungen im allgemeinen zu kämpfen hat. Aber man kann durch ein einfaches Verfahren die Differentialquotienten der v hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von x, y, z, \dots, u erheblich vereinfachen.

Wie nämlich auch die Beobachtungsgleichungen der Untersuchung beschaffen sein mögen, ist letztere überhaupt mit einiger Sorgfalt ausgeführt, so kann man, sei es durch Probiren oder dadurch, dass man aus der Zahl der Beobachtungsgleichungen soviel herausgreift, als zur Berechnung der Coefficienten gerade nötig sind, für diese Coefficienten sich ein System von Näherungswerten verschaffen.

Die aus ihnen zu berechnenden Unbekannten $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \dots, \upsilon_1$ sind nur noch in den φ und deren Differentialquotienten enthalten, bei denen man eventuell ein ähnliches Entwickelungsverfahren durch Einführung der Näherungswerte einschlagen wird.

Weil man bei der Entwickelung von F nach den Verbesserungen $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \dots, \upsilon_1$ nur die ersten Potenzen dieser berücksichtigt hat, bekommt man so nicht sofort die wahrscheinlichsten Werte der Verbesserungen, sondern nur genäherte; sieht man aber nach Ausrechnung der $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \dots, \upsilon_1$

$$x_1 + \xi_1 = x_2, \quad y_1 + \eta_1 = y_2, \quad z_1 + \zeta_1 = z_2, \quad \dots, \quad u_1 + \upsilon_1 = u_2$$

als zweite Näherungswerte von x, y, z, \dots, u an und setzt

$$x = x_2 + \xi_2, \quad y = y_2 + \eta_2, \quad z = z_2 + \zeta_2, \quad \dots, \quad u = u_2 + \upsilon_2,$$

so werden die $\xi_2, \eta_2, \zeta_2, \dots, \upsilon_2$ im allgemeinen kleiner als die $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \dots, \upsilon_1$ sein, und indem man sie aus einem Gleichungssystem berechnet, das aus dem für die $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \dots, \upsilon_1$ geltenden dadurch resultirt, dass man in F und seinen Derivirten an Stelle der ersten Näherungswerte $x_1, y_1, z_1, \dots, u_1$ die zweiten $x_2, y_2, z_2, \dots, u_2$ setzt, wodurch F übergeht in $F(x, 2)$, bekommt man in

$$x_2 + \xi_2 = x_3, \quad y_2 + \eta_2 = y_3, \quad z_2 + \zeta_2 = z_3, \quad \dots, \quad u_2 + \upsilon_2 = u_3$$

die dritten Näherungswerte für x, y, z, \dots, u . So fährt man fort, bis die successiven Näherungswerte sich von einander, soweit es die Genauigkeit der Untersuchung fordert, nicht mehr unterscheiden.

Dem strengen Mathematiker wird ein solches Verfahren successiver Annäherung vielleicht wenig behagen, aber es kann dasselbe dem rechnenden Physiker gar nicht genug empfohlen werden. In der Astronomie wird es im weitesten Umfange angewendet, und es führt nicht blos zu bequemen Rechnungen, sondern giebt häufig das einzige Mittel, complicirten Functionen beizukommen. Wo der Physiker es mit verwickelteren Gesetzen zu tun hat, suche er sich erst Näherungen für dieselben und entwickle nach Potenzen der noch notwendigen Verbesserungen. Er kommt so den betreffenden Gesetzen auf bequemem Wege näher, und gewinnt zugleich einen Ueberblick über den Einfluss, den etwaige Variationen der Coefficienten auf dieselben ausüben, und zugleich kann er besser über die verbürgbare Strenge derselben urtheilen.

Doch werden später auch noch andere, aber weit weniger allgemeine Erleichterungen vorgeführt werden.

d) *Die Wahrscheinlichkeitsfunction für Fehler, die ihrer Grösse oder ihrer wahrscheinlichen Ursache nach bekannt sind.*

33. Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsfunction, wenn die in der Untersuchung wahrscheinlich vorgefallenen Fehler bekannt sind. Die

zweite Gruppe von Grössen umfasst die Wahrscheinlichkeitsfunctionen der Fehler.

Da im allgemeinen in keiner Untersuchung die Fehler wirklich rein zufälliger Natur sind, so werden tatsächlich in jedem besondern Falle die Wahrscheinlichkeiten der Fehler auch in ganz besonderer Weise von der Grösse dieser abhängen, so dass man keine allgemein gültigen Regeln für die Berechnung derselben zu geben vermag. Weiss man, welche Fehler in einer Untersuchung wahrscheinlich vorgekommen sind, so ordnet man diese Fehler nach der Grösse, teilt die Amplitude, innerhalb deren die Beträge der Fehler liegen, in eine Anzahl gleicher Intervalle und zählt nach, wie viele Fehler jedem bezüglichen Intervall zukommen; das Verhältnis der Anzahl der einem bestimmten Intervall zugehörigen Fehler zu der Anzahl aller Fehler giebt dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fehler gerade in dieses Intervall fällt, doch setzt dieses Verfahren voraus, dass die Anzahl der Fehler jeder Klasse ebenso abnimmt wie die Anzahl aller Fehler.

Es seien die wahrscheinlich vorgefallenen Fehler ihrer Grösse nach geordnet

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_n,$$

$v_n - v_1$ ist dann die Amplitude der Beträge der Fehler, teilt man dieselbe in i gleiche Teile Δ , so ist

$$v_n - v_1 = i\Delta.$$

Ich bezeichne mit i_1 die Anzahl aller Fehler, die von v_1 um nicht mehr als Δ , mit i_2 die aller Fehler, welche von v_1 um nicht mehr als 2Δ , allgemein mit i_x die aller Fehler, die von v_1 um nicht mehr als $x\Delta$ abweichen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fehler zwischen den Grenzen v_1 und $v_1 + \Delta$ liegt,

$$w_1 = \frac{i_1}{n},$$

die dass ein Fehler zwischen den Grenzen $v_1 + \Delta$ und $v_1 + 2\Delta$ sich befindet,

$$w_2 = \frac{i_2 - i_1}{n},$$

allgemein die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler nicht kleiner als $v_1 + (x-1)\Delta$ und nicht grösser als $v_1 + x\Delta$ ist,

$$\text{III) } w_x = \frac{i_x - i_{x-1}}{n}.$$

Man kann nun in erster Näherung, wenn die Intervalle nicht zu weit sind, annehmen, dass die so berechneten Wahrscheinlichkeiten w_1, w_2, \dots, w_{n-1}

für die in den Mitten der bezüglichen Intervalle liegenden Fehler gelten, also w_1 die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers $v_1 + \frac{\Delta}{2}$, w_2 die eines Fehlers $v_1 + \frac{3\Delta}{2}$, allgemein w_x die eines Fehlers $v_1 + \frac{2x-1}{2}\Delta$ angiebt.

Indem man dann die Grössen

$$v_1 + \frac{\Delta}{2}, v_1 + \frac{3\Delta}{2}, v_1 + \frac{5\Delta}{2}, \dots, v_1 + \frac{(2x-1)\Delta}{2}, \dots$$

als Abscissen, die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten

$$w_1, w_2, w_3, \dots, w_x, \dots$$

als Ordinaten in einem rechtwinkligen Axensystem einträgt, erhält man eine Curve, die sich der durch die wirkliche Wahrscheinlichkeitsfunction

$$w = \varphi(v)$$

dargestellten um so näher anschliesst, je kleiner man das Intervall Δ gemacht hat und je grösser die Anzahl der zur Verfügung stehenden Fehler ist. Die Gleichung dieser Curve giebt dann, wenn nur Δ relativ klein ist, eine Näherungsformel für die gesuchte Wahrscheinlichkeitsfunction.

Die Kenntnis der Gleichung der Curve ist, weil in den wahrscheinlichsten Gleichungen die Differentialquotienten des Logarithmus der Wahrscheinlichkeitsfunction vorkommen, nicht zu umgehen, sie ist aber meist schwer zu erlangen.

Ein specielles Beispiel kann erst durchgeführt werden, wenn gezeigt ist, wie man die wahrscheinlichste analytische Darstellung einer Reihe von Zahlen berechnet.

34. Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsfunction, wenn die wahrscheintliche Ursache der Fehler bekannt ist. Noch in einem Fall vermag man, wie Bessel gelehrt hat*), die Wahrscheinlichkeitsfunction zu berechnen, nämlich dann, wenn man weiss, welche Ursache die vorgefallenen Fehler wahrscheinlich hervorgebracht hat.

Es sei die Ursache, welche zur Entstehung eines Fehlers v Veranlassung giebt, α , und es möge die Grösse des Fehlers von der der Ursache so abhängen wie die als bekannt anzusehende Function $f(\alpha)$ von α ; wir haben dann

$$v = f(\alpha).$$

Ist $\varphi(v)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler gerade die Grösse v besitzt, so giebt $\varphi(v) dv$ die Wahrscheinlichkeit, dass sein Betrag zwischen v und $v + dv$ liegt. Jedem Betrage des Fehlers entspricht eine bestimmte Grösse der Ursache, und da $d\alpha/dv$ die Aenderung bedeutet, die die Ursache erfährt, wenn der Fehler um eine Einheit anwächst, so giebt $(d\alpha/dv)dv$ die

*) Astronomische Nachrichten, Bd. XV, Seite 369 ff.

Anzahl der Einheiten, um welche der Betrag der Ursache sich ändert, wenn der Fehler von v auf $v + dv$ steigt, diese Grösse zeigt also auch an, wie viele, den verschiedenen Werten der Ursache entsprechende Fehler in dem Intervall $v + dv$ bis v liegen. Man bekommt daher, falls der Fehler v alle Beträge zwischen v_n und v_1 anzunehmen vermag, für die Wahrscheinlichkeit, dass sein Betrag sich zwischen v und $v + dv$ befindet,

$$\frac{\frac{d\alpha}{dv} dv}{v_n - v_1}.$$

Dieselbe Wahrscheinlichkeit war aber auch $\varphi(v)dv$, also wird die gesuchte Wahrscheinlichkeitsfunction

$$\text{IV)} \quad \varphi(v) = \frac{1}{v_n - v_1} \frac{d\alpha}{dv}.$$

In unsern wahrscheinlichsten Gleichungen kommt nicht $\varphi(v)$ selbst vor, sondern der Differentialquotient des Logarithmus dieser Function, für diesen hat man

$$\text{IV a)} \quad \xi = \frac{1}{\varphi(v)} \frac{d\varphi(v)}{dv} = \frac{dv d^2\alpha}{d\alpha dv^2},$$

wobei v und α durch die gegebene Beziehung

$$v = f(\alpha)$$

verbunden sind.

Zur Ausführung der Differentiationen von v nach α und von α nach v muss man sowohl die Function

$$f(\alpha) = v$$

als die Umkehrung derselben

$$\chi(v) = \alpha$$

kennen.

Schreibt man aber

$$\text{IV b)} \quad \xi = \frac{1}{\frac{d\alpha}{dv}} \frac{d^2\alpha}{dv^2},$$

und auch

$$\text{IV c)} \quad \xi = - \frac{1}{\left(\frac{dv}{d\alpha}\right)^2} \frac{d^2v}{d\alpha^2},$$

so braucht man im ersten Falle nur die Function $\alpha = \chi(v)$, im zweiten nur die $v = f(\alpha)$ zu kennen, und ist von den nicht immer ausführbaren Umkehrungen unabhängig.

Ich mache eine Anwendung der obigen Bessel'schen Formeln auf eine besondere Messung.

35. Beispiel. Eine Grösse λ soll n mal gemessen worden sein, und in allen Messungen mögen die wahrscheinlich vorgefallenen bezüglichen Fehler $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ durch Ursachen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ derselben Art hervorgerufen sein. Die Ausgleichungsformel zur Bestimmung der betreffenden Grösse ist dann nach I) und Va)

$$: 0 = \frac{dv_1}{d\alpha_1} \frac{d^2\alpha_1}{dv_1^2} + \frac{dv_2}{d\alpha_2} \frac{d^2\alpha_2}{dv_2^2} + \dots + \frac{dv_n}{d\alpha_n} \frac{d^2\alpha_n}{dv_n^2},$$

wobei

$$v_1 = \lambda - \lambda_1, v_2 = \lambda - \lambda_2, \dots, v_n = \lambda - \lambda_n$$

und

$$v = f(\alpha)$$

ist.

Die Grösse λ , um deren Bestimmung es sich handelt, sei die Temperatur einer Schneemasse. Wir wollen annehmen, dass die Schneemasse sich im Schmelzen befindet, also ihre Temperatur während der Beobachtung nicht ändert. Taucht man nun ein Quecksilberthermometer in die Schneemasse, so kühlt sich die Kugel desselben ab, und seine Temperatur θ fällt mit wachsender Zeit t annähernd gemäss dem Gesetze

$$\theta = \lambda - ae^{-bt},$$

wo a und b gewisse von der Temperatur des Thermometers im Augenblick seiner Eintauchung in die Schneemasse und von der substantiellen und constructiven Beschaffenheit desselben abhängende Constanten sind.

θ ändert sich mit wachsender Zeit, es ist für $t = \infty$ gleich der gesuchten Temperatur λ . Liest man also das Thermometer zu den Zeiten $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ ab, so bekommt man nicht die gesuchte Temperatur λ , sondern nacheinander die

$$\lambda_1 = \lambda - ae^{-bt_1}, \lambda_2 = \lambda - ae^{-bt_2}, \dots, \lambda_n = \lambda - ae^{-bt_n};$$

die n Temperaturmessungen sind daher wahrscheinlich mit den Fehlern

$$v_1 = +ae^{-bt_1}, v_2 = +ae^{-bt_2}, \dots, v_n = +ae^{-bt_n}$$

behaftet. Diese Fehler sind um so kleiner, je später man die Ablesungen des Thermometers vorgenommen hat; als Ursache, die zur Entstehung der Fehler Veranlassung geben kann, haben wir also das „Zufrüh“ des Ablesens anzusehen. Hiernach wird $\alpha = t$ und

$$v = f(t) = +ae^{-bt},$$

$$t = -\frac{1}{b}(\log v - \log a),$$

$$\varphi(v) = -\frac{1}{v_n - v_1} \frac{1}{bv},$$

$$\frac{1}{\varphi(v)} \frac{d\varphi(v)}{dv} = -\frac{1}{v}.$$

Die Ausgleichungsformel geht somit über in

$$0 = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \dots + \frac{1}{v_n}$$

oder, wenn die abgelesenen Temperaturen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ sind, in

$$0 = \frac{1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{1}{\lambda - \lambda_2} + \frac{1}{\lambda - \lambda_3} + \dots + \frac{1}{\lambda - \lambda_n},$$

als Gleichung $n - 1$ ten Grades zur Berechnung des wahrscheinlichsten Wertes von λ , wenn der wahrscheinliche Grund der Abweichungen der einzelnen Temperaturablesungen von einander in dem nach dem Gesetz

$$\Theta = \lambda - ae^{-bt}$$

vor sich gehenden allmöglichen Einstellen des Thermometers zu suchen ist.

Es muss aber hervorgehoben werden, dass die obige Berechnung den wahrscheinlichsten Wert für λ nur in dem Fall ergibt, wenn man den angeführten Grund lediglich als wahrscheinlich zu bezeichnen vermag; weiss man ganz bestimmt, dass dieser und kein anderer Grund die Ursache der Abweichung der einzelnen Ablesungen von einander ist, dann giebt natürlich die letzte Ablesung des Thermometers den wahrscheinlichsten Wert für die Temperatur der Schneemasse.

Es fällt hier auf, dass die Gleichung für λ von den Constanten a, b der Beziehung zwischen v und t ganz unabhängig ist, sie enthält nur direct beobachtete Grössen, das ist nicht immer der Fall.

Wenn $n = 2$ ist, wird

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Ablesungen.

Wir werden später, wenn wir es mit zufälligen Fehlern zu tun haben, dem arithmetischen Mittel als wahrscheinlichstes Resultat immer begegnen, hier sehen wir es auch in einem Falle wahrscheinlicher systematischer Verfälschung gelten.

Complicirter wird die Aufgabe, wenn es sich um die Temperaturbestimmung eines Körpers handelt, der während der Messung selbst seine Temperatur verändert, sie soll später bei der Theorie der Bestimmung der specifischen Wärme von Substanzen ihre Bearbeitung finden.

36. Uncontrolirbare Fehler als zufällige aufgefasst. Weitaus in den meisten Fällen weiss man weder, mit welchen Fehlern eine betreffende Untersuchung behaftet sein wird, noch vermag man anzugeben, aus welchen nicht schon anderweitig eliminirten Ursachen die Resultate derselben verfälscht sein können. Es bleibt dann nichts übrig als anzunehmen, dass die Untersuchung nur noch durch rein zufällige Fehler verfälscht ist.

Zu einer solchen Annahme hat man aber um so mehr Berechtigung, mit je grösserer Sorgfalt man alle controlirbaren, systematischen Fehler

durch eine voraufgehende Untersuchung der benutzten Apparate, sowie durch tunlichste Ausschliessung aller störenden Erscheinungen, bestimmt und unschädlich gemacht hat.

Es wird also nunmehr vorausgesetzt, dass eine Untersuchung so angestellt ist, dass die ihren Resultaten etwa noch anhaftenden Fehler rein zufälliger Natur sind. Und diese Voraussetzung ist darum so vorteilhaft, weil die Erfahrung uns viele Eigenheiten der zufälligen Erscheinungen kennen gelehrt hat.

Zweiter Abschnitt.

Theorie der zufälligen Fehler; Ausgleichung einfacher Messungen



IV. Theorie der zufälligen Fehler; Princip des arithmetischen Mittels.

a) *Messungen gleicher Schärfe.*

37. Zufällige Fehler können Resultate ebenso gut im Sinne des zu Viel als des zu Wenig verfälschen. Im folgenden soll zunächst nur von Messungen gesprochen werden, und zwar von solchen gleicher Schärfe. Wir nennen ein Vorkommnis zufällig, wenn wir nach eingehender Prüfung aller Umstände keinen Grund für das Eintreffen desselben anzugeben vermögen, und auch nicht sagen können, wann wir es wieder zu erwarten haben. In diesem Sinne ist von den zufälligen Fehlern früher als von den nicht controlirbaren gesprochen worden; aber da unser Vermögen Gründe für Vorkommnisse anzugeben von dem Stande abhängt, auf dem unser Wissen sich gerade befindet, so genügt jene Einsicht noch nicht zur Kennzeichnung und Definition der zufälligen Fehler.

Wenn nun ein Fehler eine Beobachtung verfälscht, so kann das so geschehen, dass er für die aus derselben abzuleitende Grösse einen zu grossen, oder so, dass er für sie einen zu kleinen Betrag finden lässt, und da wir nicht einzusehen vermögen, warum er, wenn er wirklich zufällig ist, eher in dem einen als in dem andern Sinne wirken sollte, so werden wir von zufälligen Fehlern erwarten, dass sie gleich häufig als positive wie als negative Grössen auftreten. Wir machen also die Hypothese:

6. *Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines zufälligen Fehlers von positivem Betrage ist ebenso gross wie die für das Eintreffen eines zufälligen Fehlers von absolut gleichem, aber negativem Betrage.*

Analytisch spricht sich diese Hypothese in der Gleichung aus

V a)

$$\varphi(+V) = \varphi(-V)$$

und sie drückt die besondere Eigenschaft der Wahrscheinlichkeitsfunction aus, dass dieselbe eine gerade Function ist, keine ungeraden Potenzen und Functionen von V enthalten kann, so dass die Wahrscheinlichkeit

$$Vb) \quad W = \varphi(V^2)$$

zu setzen ist.

Man wird also bei jeder Messung einer Grösse ebenso leicht einen positiven wie einen negativen zufälligen Fehler begehen können und, wenn man die Messung vielfach wiederholt, in der Reihe der zufälligen Fehler positive und negative Beträge zu erwarten haben.

38. Das Bernouilli'sche „Gesetz der grossen Zahlen.“ Nun lehrt das bekannte von Bernouilli entdeckte „Gesetz der grossen Zahlen“: —

7. Wenn ein Versuch, in welchem von einer Reihe von Ereignissen jedes mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zu erwarten steht, immer und immer wieder angestellt wird, so nähert sich das Verhältnis der Anzahl der Fälle, in denen eines der Ereignisse eingetreten ist, zu der Anzahl der Fälle, in denen ein anderes stattgefunden hat, mehr und mehr dem Verhältnis, in welchem die Wahrscheinlichkeit jenes Ereignisses zu der dieses steht, und es würde diesem Verhältnis der bezüglichen Wahrscheinlichkeiten vollständig gleich werden, wenn man die Wiederholungen des Versuchs ins Unendliche fortsetzen könnte.

39. Die Häufigkeiten der einzelnen zufälligen Fehler stehen im Verhältnis zu den bezüglichen Wahrscheinlichkeiten. Nehmen wir den fingirten Fall, dass eine Messung mit immer gleicher Schärfe unendlich oft wiederholt worden ist, so werden wir eine unendliche Reihe von Fehlern haben; von diesen Fehlern können und werden nicht alle verschiedene Grösse besitzen, es werden sich vielmehr die Fehler in Gruppen zerteilen, deren jede mehr oder weniger Fehler gleichen Betrages enthält. Jeder Fehler wird hiernach mehrmals vertreten sein. Bezeichnen wir aber die Anzahl der Fälle, in denen ein zufälliger Fehler von der Grösse V_x ($x = 1, 2, 3, \dots$) vorgefallen ist, mit Λ_x , so hat man nach dem obigen Princip

$$VI) \quad \Lambda_1 : \Lambda_2 : \Lambda_3 : \dots : \Lambda_x : \dots = \varphi(V_1) : \varphi(V_2) : \varphi(V_3) : \dots : \varphi(V_x) : \dots$$

Diese umfassende Gleichung gilt ganz streng nur, wenn die Anzahl der Wiederholungen wirklich jedes Maass überschreitet, bei einer begrenzten Anzahl von Wiederholungen hat man ihr um so grössere Berechtigung zuzuschreiben, je grösser diese Anzahl ist.

Ist also ein Fehler, etwa der V_1 , a_1 mal vorgefallen, so haben die andern V_2, V_3, \dots , falls $\varphi_x = \varphi(V_x)$ gesetzt wird, bezüglich

$$a_1 \frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \quad a_1 \frac{\varphi_3}{\varphi_1}, \quad a_1 \frac{\varphi_4}{\varphi_1}, \quad \dots \text{ mal}$$

stattgefunden, und das Bernouilli'sche Gesetz lehrt demgemäss sofort die Häufigkeit jedes Fehlers anzugeben, wenn man sie für nur einen Fehler

schon kennt, und es lehrt dieses mit um so grösserer Genauigkeit, je öfter man die Messung angestellt hat.

Aber dieses Gesetz führt noch zu einer andern weit wichtigeren Folgerung.

40. Jeder zufällige Fehler darf ebenso oft als positive wie als negative Grösse erwartet werden. Für die zwei Fehler V_1 , V_2 haben wir

$$\Lambda_1 : \Lambda_2 = \varphi(V_1) : \varphi(V_2);$$

nehmen wir jetzt an, dass V_2 sich von V_1 nicht dem numerischen Betrage, sondern nur dem Zeichen nach unterscheidet, dass also $V_2 = -V_1$ ist, so folgt aus der unter 6) aufgestellten Hypothese

$$\varphi(V_2) = \varphi(V_1),$$

damit wird

VII)

$$\Lambda_1 = \Lambda_2$$

und diese Gleichung giebt den Satz:

8. *Wenn eine und dieselbe Messung ins Unbegrenzte wiederholt ist, so ist in den vorgefallenen zufälligen Fehlern jede Fehlergrösse mit einem negativen Betrage genau so oft vertreten wie mit einem positiven; ist die Anzahl der Wiederholungen begrenzt, so braucht die obige Behauptung nicht mehr streng zu gelten, sie gewinnt aber an Berechtigung, je mehr diese Anzahl wächst.*

41. Algebraische Summe aller Fehler von bestimmter Grösse. Der Satz lässt sich noch anders, und zur unmittelbaren Anwendung bequemer, aussprechen. Versteht man nämlich unter *algebraische Summe* einer Reihe von Grössen, den Wert, den man bekommt, wenn man diese Grössen mit den Zeichen, die ihnen zugehören, zusammenaddirt, unter *absolute Summe* den Wert, den man erhält, wenn man die Grössen alle mit dem positiven Zeichen zusammenaddirt, so kann man auch sagen:

9. *Wenn man eine und dieselbe Messung ins Unbegrenzte wiederholt hat, so ist in den vorgefallenen zufälligen Fehlern für jeden Betrag, wie gross oder wie klein er auch sein mag, die algebraische Summe aller Fehler gleich Null; ist die Anzahl der Wiederholungen begrenzt, so findet das nicht notwendig statt, man darf aber um so mehr erwarten, auch hier für diese Summe Null zu finden, je öfter man die Messung wiederholt.*

In dieser Fassung ist der zweite Teil unseres Satzes absichtlich viel abgeschwächer gehalten, als in der ersten, denn man sieht leicht ein, dass jene Summe sich mit wachsender Anzahl der Messungen nicht stetig der Null nähern wird. Sie ist bald grösser, bald kleiner, bald gleich Null; der Satz sagt aber aus, dass man um so mehr erwarten kann, den betreffenden Fehler ebenso oft positiv wie negativ zu finden, je weiter man die Wiederholungen treibt.

42. Algebraische Summe aller möglichen Fehler. Was von der Summe der Fehler einer bestimmten Grössenklasse gilt, hat natürlich auch Bedeutung für die Summe aller Fehler, und wir erlangen den etwas allgemeiner gehaltenen Satz:

10. *Wenn man eine und dieselbe Grösse mehrfach misst, so wird man die vorgefallenen, zufälligen Fehler sich um so mehr compensiren sehen und für die algebraische Summe derselben um so eher Null erwarten dürfen, je mehr man die Anzahl der Einzelbestimmungen anwachsen lässt, und man würde für diese Summe geradezu Null erhalten, wenn man die Einzelbestimmungen ins Unendliche fortsetzte.*

43. Uebergang zum Princip des arithmetischen Mittels. Wie gross die Summe der zufälligen Fehler in einem besondern Falle tatsächlich ist, können wir nicht wissen, weil uns die wahren Beträge der Fehler nicht zugänglich sind, das aber dürfen wir auf Grund des Satzes 10) aussagen, dass man für diese Summe, wenn die Messungen nur genügend oft wiederholt sind, mit demselben Recht einen negativen, wie einen positiven Wert veranschlagen kann. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ihr Betrag positiv ist, ist ebenso gross wie die, dass er negativ ausfällt, und da die Fehler dem obigen zufolge sich auch vollständig compensiren können, so ist offenbar, so lange man von den Fehlern nichts näheres weiss, die wahrscheinlichste Annahme, die man machen kann, die, dass die Summe aller Fehler gleich Null ist. Man schliesst ja schon ganz ähnlich, wenn man eine Grösse nur einmal gemessen hat. In der Tat, wenn wir nur eine einzige Messung haben, so können wir nicht sagen, ob bei ihr ein Fehler vorgefallen ist oder nicht, wir wissen auch nicht, ob ein Fehler, wenn er wirklich vorhanden sein sollte, das Resultat zu gross oder zu klein hat finden lassen; und es ist die einzige Annahme, die wir machen können, die, dass die Messung fehlerfrei ausgefallen ist. In Verbindung mit dem voraufgehenden Satz bekommen wir also:

11. *Die wahrscheinlichste Annahme über die algebraische Summe der zufälligen Fehler von Einzelbestimmungen einer und derselben Grösse ist die, dass dieselbe gleich Null ist, und diese Annahme gewinnt um so mehr an Wahrscheinlichkeit, je mehr man die Einzelbestimmungen häuft.*

Damit sind wir eigentlich schon zu dem wichtigsten, hier abzuleitenden Ergebnis, zu dem Princip des arithmetischen Mittels gelangt.

44. Verhältnis der algebraischen Summe aller Fehler zu der absoluten Summe derselben. Es kommt aber noch darauf an, zuzusehen, wie viel wir in den einzelnen Fällen durch Anwendung des obigen Satzes erreichen können. Das arithmetische Mittel würde den wahren Betrag der gesuchten Grösse geben, wenn die Summe der zufälligen Fehler wirklich gleich Null wäre, wann das der Fall ist, wissen wir nicht; aus dem Satz 11) folgt aber jedenfalls:

12. *Man kann, indem man die Messung genügend oft wiederholt, immer dahin gelangen, dass die algebraische Summe aller vorgefallenen, zufälligen Fehler gegen die absolute Summe derselben kleiner als jede beliebig vorgelegte Grösse wird.*

45. Durchschnittlicher Fehler und Resultirender Fehler. Ich bezeichne jetzt die absolute Summe aller vorgefallenen Fehler dividirt durch die An-

zahl aller Messungen als *durchschnittlichen Fehler einer Messung*, und die algebraische Summe aller vorgefallenen Fehler dividirt durch die Anzahl aller Messungen als *resultirenden Fehler der Messungen*.

Der Satz lautet dann auch so:

13. *Durch genügende Wiederholung der Messung kann man es immer dahin bringen, dass der resultirende Fehler der Messungen gegen den durchschnittlichen Fehler derselben beliebig klein wird.*

46. Erfahrungsmässig fallen grosse Fehler sehr viel seltener vor als kleine. Nun wird man bemerken, und es soll das später noch genauer auseinandergesetzt werden, dass der durchschnittliche Fehler ein gewisses Maass zur Beurteilung der Schärfe der einzelnen Messungen, der resultirende Fehler ein solches zur Beurteilung der Richtigkeit des aus den Messungen abzuleitenden Resultats giebt; der Satz sagt daher auch aus, dass man durch genügende Häufung der Messungen immer ein Schlussresultat erlangen kann, das an Präcision dem aus einer einzelnen Messung abzuleitenden Ergebnis im allgemeinen ausserordentlich überlegen ist. Es kommt jetzt alles auf die Grösse der den einzelnen Messungen eventuell noch anhaftenden Fehler an. Hier hilft uns aber die Erfahrung aus, denn diese lehrt:

14. *Bei einer und derselben Messung ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines zufälligen Fehlers um so geringer, je grösser der Betrag des Fehlers sein soll.*

Niemand wird es für möglich halten, selbst bei einer ganz rohen Ausmessung einer Strecke von ein Meter Länge, einen Fehler von einem halben oder auch nur zehntel Meter zu begehen. Nun ist es zwar denkbar, dass trotzdem einmal ein solcher Fehler vorkommt, denn, wo der Zufall herrscht, da kann es zum Beispiel passiren, dass, während der Beobachter, nachdem er den Maassstab an die Strecke angelegt und sich überzeugt hat, dass das linke Ende desselben mit dem linken Ende der Strecke übereinstimmt, nach dem rechten Ende hingeht, um nachzusehen, wie weit der Stab die Strecke oder diese den Stab überragt, dieser letztere etwa durch inzwischen eingetretene Neigung seiner Unterlage sich verschoben hat, und der Beobachter das zufällig übersieht, aber man wird zugeben, dass ein solcher Zufall nur äusserst selten vorkommen wird. Geringe Verschiebungen des Maassstabes, wie sie etwa durch leichte Erschütterungen der Unterlage desselben hervorgerufen werden, können dem Beobachter wol entgehen, bedeutende jedoch müssen ihm gleich in die Augen fallen, und es kann nur ein besonderer Zufall sein, wenn sie ihm doch verdeckt bleiben.

47. Der durchschnittliche Fehler nähert sich mit wachsender Anzahl der Messungen einem bestimmten endlichen Grenzwert, der resultirende convergirt gegen Null. Haben wir demnach auch kein Recht, die Wahrscheinlichkeit für relativ grosse Fehler geradezu gleich Null zu setzen, so müssen wir doch diese Wahrscheinlichkeit als sehr klein ansehen und können den angeführten Satz wenigstens für grössere Fehler als in der Erfahrung wol begründet betrachten.

Wird nun eine Messung vielfach wiederholt, so kann es allerdings vorkommen, dass hin und wieder auch ein grosser zufälliger Fehler mit unterläuft, deshalb darf man auch nicht behaupten, dass der durchschnittliche Fehler mit wachsender Anzahl der Wiederholungen dem Betrage nach der Null gleich wird, im Gegenteil wird man sogar, weil der durchschnittliche Fehler seine Bedeutung für die einzelnen Beobachtungen hat, erwarten, dass er sich einem bestimmten endlichen, von Null verschiedenen Grenzwert nähert; aber man kann sagen, dass es

sehr wenig wahrscheinlich ist aus einer Anzahl von wiederholten Messungen einen grossen durchschnittlichen Fehler zu finden.

Nunmehr gewinnt unser Satz vom resultirenden Fehler die Gestalt.

15. *Durch genügende Wiederholung der Messung kann man immer eine sehr grosse Wahrscheinlichkeit dafür gewinnen, dass der resultirende Fehler fast ganz gleich Null ist.*

48. Princip des arithmetischen Mittels. Ich bezeichne jetzt mit X den wahren Wert der zu bestimmenden Grösse und nehme zunächst an, dass man diese Grösse unendlich oft mit derselben Schärfe und unter Ausschluss aller systematischen Fehler gemessen hat. Sind dann $x_1, x_2, x_3, \dots, x_x, \dots$ die Beträge, die man der Reihe nach in den einzelnen Messungen für sie erhalten hat, so geben

$$V_1 = X - x_1, V_2 = X - x_2, V_3 = X - x_3, \dots, V_x = X - x_x, \dots$$

die wahren zufälligen Fehler dieser einzelnen Messungen.

Nach dem Satz 8) ist aber

$$\text{VIII}_1) \quad V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_x + \dots = 0,$$

also bekommen wir, wenn mit n die unendliche Anzahl der Messungen bezeichnet wird,

$$nX - (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_x + \dots + x_n) = 0$$

oder

$$\text{IX}_1) \quad X = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_x + \dots + x_n}{n}, \quad n = \infty.$$

Hieraus folgt:

16. *Ist die Hypothese, dass negative zufällige Fehler unabhängig von ihrer Grösse ebenso leicht vorkommen können wie positive, berechtigt, so erhält man aus gleich genauen Messungen einer Grösse den wahren Wert derselben, wenn man diese Messungen ins Unbegrenzte wiederholt und aus den Resultaten derselben das arithmetische Mittel nimmt.*

Bei einer begrenzten Anzahl von Wiederholungen kann zwar die Summe der Fehler in einzelnen Fällen auch gleich Null sein, ist es jedoch nicht mehr notwendig; setzen wir aber

$$\text{VIII}_2) \quad V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = \lambda,$$

so bekommt man

$$\text{IX}_2) \quad X = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} + \frac{\lambda}{n}.$$

$\frac{\lambda}{n}$ ist der resultirende Fehler und seinem Betrage nach nicht bekannt, wir wissen aber aus dem Satz 15), dass man durch Vergrößerung von n diesen resultirenden Fehler mit bedeutender Wahrscheinlichkeit der Null so nahe bringen kann als man will, also wird man erwarten dürfen, dass der Wert

$$x = X - \frac{\lambda}{n},$$

wenn man nur n gross genug werden lässt, sich von dem wahren Betrage X der zu bestimmenden Grösse nur sehr wenig unterscheidet.

Nunmehr condensiren sich die Ergebnisse der ganzen Untersuchung in dem Satz:

17. *Wenn man von den Fehlern einer Reihe von zur Bestimmung einer und derselben Grösse angestellten gleich scharfen Einzelmessungen nichts weiter weiss, als dass sie rein zufälliger Natur gewesen sind, so giebt das arithmetische Mittel den wahrscheinlichsten Betrag der gesuchten Grösse, und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser „wahrscheinlichste Betrag“ von dem „wahren Betrage“ sich nur ganz unwesentlich unterscheidet, wird um so grösser, je bedeutender die Anzahl der angestellten Einzelbestimmungen ist.*

Das ist das Princip des arithmetischen Mittels. Gauss hat dasselbe als Axiom betrachtet, in der That scheint es auch so selbstverständlich zu sein, dass man es von jeher, ohne es bewusst als Princip hinzustellen, unbedenklich angewendet hat. Später hat man versucht, es aus einfachern Principien abzuleiten. So ist namentlich Schiaparelli*) von den drei Grundsätzen ausgegangen:

1. Dass das wahrscheinlichste Resultat einer Reihe von Einzelmessungen von allen Einzelmessungen in gleicher Weise abhängen muss (dass x eine homogene Function von $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ist);

2. Dass die Form der Abhängigkeit des wahrscheinlichsten Resultats von den Einzelmessungen nicht mit dem Betrage der zu bestimmenden Grösse variiren kann;

3. Dass, wenn man die zu bestimmende Grösse nicht gleich ganz, sondern in zwei Theilen misst und für jeden Teil eine Reihe von Einzelbestimmungen macht, das wahrscheinlichste Resultat davon unabhängig sein muss, welche zwei für die bezüglichen Teile vorgenommenen Einzelmessungen man mit einander verbindet.

Kann man auch den ersten Grundsatz unbedenklich zugestehen, so sind doch die beiden folgenden keineswegs so besonders selbstverständlich. Ausserdem erhellt aber nicht, dass das arithmetische Mittel das wahr-

*) Astronomische Nachrichten Bd. 87, pag. 55.

scheinlichste Resultat ergeben soll, denn man kann nicht von vornherein sagen, weshalb gerade die angeführten Grundsätze die wahrscheinlichsten sein sollen.*)

Auch die hier durchgeführten Betrachtungen sind nicht um das Princip des arithmetischen Mittels zu beweisen angestellt, sie sollen nur zeigen, wie man durch gewisse in der Erfahrung begründete Annahmen über die Natur der zufälligen Fehler zu dem Princip des arithmetischen Mittels geleitet wird, und vor allen Dingen klarlegen, in wie weit die Grundlagen der ganzen Theorie gesichert sind, damit nicht der Studirende — was bei mathematischen Ableitungen sehr leicht geschehen kann — der Theorie mehr Sicherheit zuschreibt als sie besitzt, damit er die Resultate, zu denen sie führt, in richtiger Weise beurteilen lernt, damit er von ihr nicht mehr verlangt, als sie zu leisten vermag. Wer sich über die Bedeutung des arithmetischen Mittels und über seinen Nutzen eingehend unterrichten will, sei auf die schon im vorigen Jahrhundert erschienene Abhandlung von Lagrange: *Mémoire sur l'utilité de la méthode, de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités et où l'on résoud différens problèmes relatifs à cette matière*: in den *Miscellanea Taurinensia 1773—1777*, V pag. 167 ff. verwiesen, und da sie nur wenigen zugänglich sein dürfte, auf die Analyse, die Encke von ihr in dem *Astronomischen Jahrbuch* von 1853 gegeben hat.

b) *Messungen ungleicher Schärfe.*

Nachdem wir durch das Princip des arithmetischen Mittels in den Stand gesetzt sind, für den Fall gleich scharfer Messungen das wahrscheinlichste Resultat abzuleiten, gehen wir dazu über, dasselbe auch für ungleich scharfe Messungen zu bestimmen.

49. Was einer Messmethode an Schärfe fehlt, kann durch Häufung der Einzelmessungen ersetzt werden. Wenn wir eine Messung schärfer als eine andere nennen, so meinen wir damit, dass jene Messung einerseits mit constanter Instrumenten und andererseits unter sorgfältigerer Ausschliessung aller grössern Fehlerursachen ausgeführt ist. Nun wissen wir, dass man durch genügende Wiederholung einer Messung immer dahin gelangen kann, den resultirenden Fehler mit grosser Wahrscheinlichkeit unter jede beliebig vorgelegte Grösse zu bringen. Man kann also schliessen:

18. *Je schärfer die Einzelmessung einer Grösse ausfällt, um so weniger oft wird dieselbe wiederholt werden müssen, um zu einem befriedigenden Re-*

*) Uebrigens folgt aus Schiaparellis Ableitungen nicht allgemein die Richtigkeit des arithmetischen Mittels, sondern nur, dass wenn in einem Falle das arithmetische Mittel den gesuchten Wert liefert, es auch noch in dem Falle, wenn auch nicht mehr so genau, zum Ziel führt, wo die zu bestimmende Grösse sich von der vorher eruirten nur sehr wenig unterscheidet.

sultat zu führen; und weiter: Sind zwei Messungsmethoden ungleich an Schärfe, so wird man im allgemeinen für die weniger scharfe die Messung öfter wiederholen müssen.

Genau so wie von der Schärfe einer Einzelmessung, können wir auch von der Schärfe eines Resultats sprechen. Praktische Kriterien für diese Schärfe werden wir später kennen lernen, von selbst versteht es sich, dass das Resultat einer Reihe von Einzelmessungen um so schärfer ist, je mehr es sich der Wahrheit nähert. Man sieht aber:

19. Das, was einer Messungsmethode einer andern gegenüber an Schärfe gebracht, kann im allgemeinen durch genügende Wiederholung der Messung soweit wieder eingebracht werden, dass das Resultat ebenso genau ist wie das der schärfern Methode.

Der Satz gilt aber nur, wenn systematische Fehler gänzlich ausgeschlossen sind.

50. Ersetzung einer guten Einzelmessung durch mehrere weniger gute Einzelmessungen. Wir messen jetzt eine und dieselbe Grösse nach zwei Methoden, nach der ersten Methode wiederholen wir die Messung α mal, nach der zweiten β mal, jene mag in den Einzelmessungen die Beträge

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_\alpha,$$

diese die

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_\beta$$

geliefert haben.

Die wahrscheinlichsten Resultate sind dann

$$a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_\alpha}{\alpha}$$

bezüglich

$$b = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_\beta}{\beta}$$

Sollen nun diese Resultate von gleicher Schärfe sein, so muss β so gewählt werden, dass

$$a = b$$

wird. Es sei zunächst β ein ganzes Vielfache von α ,

$$\beta = p\alpha,$$

wo p eine ganze Zahl bedeutet, wir können dann die b in α Gruppen von je p Elementen zerlegen, und da die b alle von gleicher Schärfe sein sollen, ist es gleichgiltig, wie man sie in die Gruppen verteilt. Wir können also auch schreiben

$$b = \frac{(b_1 + b_2 + \dots + b_p) + (b_{p+1} + b_{p+2} + \dots + b_{2p}) + \dots + (b_{(\alpha-1)p+1} + b_{(\alpha-1)p+2} + \dots + b_{\alpha p})}{\alpha p}$$

oder

$$b = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_p}{p} + \frac{b_{p+1} + b_{p+2} + \dots + b_{2p}}{p} + \dots + \frac{b_{(\alpha-1)p+1} + b_{(\alpha-1)p+2} + \dots + b_{\alpha p}}{p}.$$

Offenbar entsprechen die einzelnen Gruppen der b den einzelnen a , und wenn sie ihnen auch nicht geradezu in der angegebenen Reihenfolge gleich zu sein brauchen, so folgt doch:

Dass jede Einzelmessung nach einer scharfen Methode durch eine mehr oder weniger grosse Anzahl von Einzelmessungen nach einer weniger scharfen Methode ersetzt werden kann.

Die Einzelmessung

$$a_x$$

ist dann äquivalent den p Einzelmessungen

$$b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3}, \dots, b_{i_p},$$

so dass man, indem man sich des Symbols \sim als Aequivalentzeichen bedient, setzen kann

$$a_x \sim \frac{b_{i_1} + b_{i_2} + b_{i_3} + \dots + b_{i_p}}{p}.$$

51. Gewicht einer Messung; Bestimmung äquivalent dem Resultat wiederholter Messungen. Je schärfer die Messung a gegenüber einer Messung b ist, um so grösser muss im allgemeinen p werden, daher bedingt p in gewisser Weise das Verhältnis, in welchem die Schärfe der Messung a zu der einer Messung b steht.

Man nennt diese Zahl p , welche angiebt, mit wie vielen Messungen nach einer Methode man eine ähnliche Schärfe wie mit einer Messung nach einer andern Methode erreicht, das *Gewicht* dieser gegen jene. Gewichte sind also Relativzahlen.

Ein Resultat, welches aus wiederholten Messungen abgeleitet ist, nennen wir eine *Bestimmung*.

Ferner sagen wir von einer Bestimmungsreihe, sie sei überall gleich scharf, wenn irgend eine ihrer Bestimmungen irgend einer andern genau gleichwertig ist. Wenn man also aus einer überall gleich scharfen Bestimmungsreihe eine Anzahl Bestimmungen herausgreifen und zu einem Mittel vereinigen will, muss es zunächst völlig gleichgiltig sein, welche von den Bestimmungen man zu jener Anzahl zusammenstellt, das heisst, man muss keinen Grund finden können, warum die einen Bestimmungen ein weniger oder mehr verlässliches Resultat geben sollen als die andern.

Die grosse Bedeutung dieser Festsetzung wird dem Leser später an einem Beispiel, das am Schluss dieses Abschnitts behandelt ist, klar hervortreten.

Bestimmungen können aus zwei Gründen von ungleicher Schärfe sein.

Das Verhältnis der bezüglichen Anzahlen von Wiederholungen ist umgekehrt gleich dem Verhältnis der bezüglichen Gewichte der Methoden. Das praktisch Schwierige liegt in der Beurteilung der gleichen Schärfe; Kriterien und Anleitungen dazu werden, wie bemerkt, später gegeben werden. Einstweilen können wir das Gewicht als maassgebenden Factor für die Beurteilung der Schärfe einer Bestimmung ansehen, wenn wir dasselbe auch noch nicht in allen Fällen zu berechnen vermögen.

52. Ausdehnung des Principis vom arithmetischem Mittel auf Bestimmungen ungleicher Schärfe. Es handelt sich nunmehr um Ableitung des wahrscheinlichsten Resultats aus einer Reihe von Bestimmungen verschiedenen Gewichts.

Es seien die einzelnen Bestimmungen

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n,$$

ihre bezüglichen Gewichte

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n.$$

Der Bestimmung a_1 entsprechen dann dem obigen zufolge p_1 Einzelmessungen, deren jede das Gewicht 1 besitzt, und allgemein können wir eine Bestimmung a_x uns ersetzt denken durch p_x Einzelmessungen, deren jeder das Gewicht 1 zukommt.

Machen wir also

$$p_1 a_1 = \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \dots + \alpha_{1p_1}; \quad p_2 a_2 = \alpha_{21} + \alpha_{23} + \dots + \alpha_{2p_2}, \\ \dots, \quad p_n a_n = \alpha_{n1} + \alpha_{n2} + \alpha_{n3} + \dots + \alpha_{np_n},$$

so haben hierbei die α , an Zahl $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$, alle gleiches Gewicht, sie sind alle gleich scharfe Einzelmessungen. Nach dem Princip des arithmetischen Mittels ist nun das wahrscheinlichste Resultat der Einzelmessungen α

$$\alpha = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{12} + \dots + \alpha_{1p_1} + \alpha_{21} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{2p_2} + \dots + \alpha_{n1} + \alpha_{n2} + \dots + \alpha_{np_n}}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n}$$

also auch

$$\alpha = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 + \dots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n}.$$

Dieselbe Grösse muss aber auch das wahrscheinlichste Resultat der den Gruppen α äquivalenten Bestimmungen a_1, a_2, \dots, a_n sein. Daher bekommen wir den Satz:

22. Aus einer Reihe von Einzelbestimmungen a_1, a_2, \dots, a_n , denen die Gewichte p_1, p_2, \dots, p_n zukommen, ist das wahrscheinlichste Resultat

$$\text{XII)} \quad \alpha = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 + \dots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n}.$$

Das Gewicht dieses Resultats ist gleich der Summe der Gewichte aller Bestimmungen, also gleich

$$\text{XIII) } p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n.$$

53. Analogieen mit anderen Berechnungen. Es ist vielleicht, um dem Gedächtnis des Lesers zu Hilfe zu kommen, nützlich, auf eine Analogie hinzuweisen. Denkt man sich durch die a die Abscissen von Massenpunkten dargestellt, und diese mit den wirklichen Gewichten $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ begabt, so bedeutet a die Abscisse des Schwerpunkts der Massenpunkte und $p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$ das Gewicht, das man diesem Schwerpunkt zuzuteilen hat, wenn er die Gesamtheit der Massenpunkte vertreten soll.

Man findet also aus einer Reihe von Bestimmungen das wahrscheinlichste Resultat genau so wie aus den Abscissen einer gleichen Anzahl von Massenpunkten die Abscisse des Schwerpunkts; und das Gewicht des wahrscheinlichsten Resultats setzt sich aus den Gewichten der einzelnen Bestimmungen genau so zusammen, wie das dem Schwerpunkt zuzuteilende Gewicht aus den Gewichten der einzelnen Massenpunkte.

Ganz ebenso wird auch die resultirende Intensität des in einer von einzelnen Leitern gebildeten geschlossenen Bahn fließenden Stromes aus den Stärken der in den einzelnen Leitern fließenden Ströme und den Widerständen gefunden. Die Stromstärken in den einzelnen Leitern entsprechen den Einzelbestimmungen, die Widerstände der einzelnen Leiter den Gewichten der Einzelbestimmungen, der resultirende Strom dem wahrscheinlichsten Resultat und der resultirende Widerstand dem Gewicht des wahrscheinlichsten Resultats.

Um auch noch ein Zahlenbeispiel zu geben, seien 3 Einzelbestimmungen für eine gewisse Grösse, etwa den Capillaritätscoefficienten des Wassers bei 15° C. , vorhanden, alle nach ganz derselben Methode angestellt, aber die erste erschlossen aus 2, die zweite aus 3, die dritte aus 5 Messungen. Die Beträge dieser Einzelbestimmungen seien

$$\begin{aligned} &14,685 \text{ Gewicht } 2, \\ &14,640 \text{ Gewicht } 3, \\ &14,568 \text{ Gewicht } 5. \end{aligned}$$

Dann haben wir als wahrscheinlichstes Resultat

$$x = \frac{14,685 \cdot 2 + 14,640 \cdot 3 + 14,568 \cdot 5}{10}.$$

Indem wir die Zahl 14,600 abscheiden, erhalten wir

$$x = 14,600 + \frac{0,085 \cdot 2 + 0,040 \cdot 3 - 0,032 \cdot 5}{10}$$

oder

$$x = 14,613.$$

Das Gewicht dieser Zahl ist 10, also 5 mal so gross wie das der ersten, $3\frac{1}{3}$ mal so gross wie das der zweiten, 2 mal so gross wie das der dritten Bestimmung. Denkt man sich die drei Bestimmungen nach drei verschiedenen Methoden ausgeführt, so hätte man nach der ersten Methode 5, nach der zweiten mindestens 3, nach der dritten 2 Bestimmungen ausführen müssen, um in ihren bezüglichen Mitteln Zahlen zu erhalten, die ebenso genau sind wie die Zahl 14,613. Weiteres sagt die Gewichtsbestimmung nicht aus, namentlich darf man nicht schliessen, dass nun auch die Genauigkeit der Zahl 14,613 5mal so gross wie die der Zahl 14,685 der ersten Bestimmung, $3\frac{1}{3}$ mal so gross wie die der Zahl 14,640 der zweiten, 2mal so gross wie die der Zahl 14,568 der dritten ist. Wir werden später sehen, dass die Genauigkeit nicht wie das Gewicht, sondern nur wie die Quadratwurzel des Gewichts zunimmt.

54. Die übrig bleibenden und der resultirende Fehler. Von dem wahrscheinlichsten Resultat gehen wir zu den übrig bleibenden wahrscheinlichsten Fehlern über. Der übrig bleibende Fehler irgend einer Bestimmung a_x ist $v_x = a - a_x$, somit haben wir

$$v_1 = a - a_1, v_2 = a - a_2, \dots, v_n = a - a_n.$$

Die Summe der v ist hier nicht mehr gleich Null, multipliciren wir aber die einzelnen v mit den zugehörigen p und addiren, so folgt

$$p_1 v_1 + p_2 v_2 + \dots + p_n v_n = a(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n)$$

also

$$\text{XIV) } p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 + \dots + p_n v_n = 0,$$

und dieses ist die wahrscheinlichste Annahme, die wir über die Fehler der Bestimmungen zu machen vermögen.

Die wahren Fehler der Bestimmungen können natürlich von diesen wahrscheinlichsten Fehlern verschieden sein, bezeichnen wir sie mit V_1, V_2, \dots, V_n , so haben wir als resultirenden Fehler des Resultats

$$\text{XV) } R = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2 + \dots + p_n V_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}.$$

Es setzt sich dieser Fehler aus den wahren Fehlern genau so zusammen wie das wahrscheinlichste Resultat aus den einzelnen Bestimmungen. Bekannt sind diese wahren Fehler nicht, die Formel hat nur ideellen Wert.

Damit sind wir durch die Theorie der zufälligen Fehler zu allgemeinen Regeln über die Ausgleichung von Messungen, wenn diese nur durch zufällige Fehler verfälscht sein können, gelangt, auch ohne dass wir von der speciellen Bauart der Wahrscheinlichkeitsfunction Kenntniss zu haben brauchten. Die allgemeinen Eigenschaften dieser Function reichten hin. Unsere Auseinandersetzungen führen aber noch zu wichtigen Ergebnissen, wenn wir die jetzt für unser Problem erlangte Lösung mit der früher unter der Bezeichnung der Ausgleichungsformel eruirten zusammenhalten.

c) *Die Wahrscheinlichkeitsfunction für Messungen gleicher Schärfe.*

55. Unterschied zwischen der Ausgleichsformel und dem Princip des arithmetischen Mittels. Wir haben früher gesehen, dass die wahrscheinlichsten Fehler einer wiederholt ausgeführten Messung der Gleichung genügen müssen

$$0 = \frac{1}{\varphi_1(v_1)} \frac{d\varphi_1(v_1)}{dv_1} + \frac{1}{\varphi_2(v_2)} \frac{d\varphi_2(v_2)}{dv_2} + \dots + \frac{1}{\varphi_n(v_n)} \frac{d\varphi_n(v_n)}{dv_n}.$$

Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, dass alle Messungen gleich scharf sind, die φ stimmen dann sowohl rücksichtlich ihrer Form wie ihrer Zahlencoefficienten überein, und es wird

$$0 = \frac{1}{\varphi(v_1)} \frac{d\varphi(v_1)}{dv_1} + \frac{1}{\varphi(v_2)} \frac{d\varphi(v_2)}{dv_2} + \dots + \frac{1}{\varphi(v_n)} \frac{d\varphi(v_n)}{dv_n}.$$

Das ist die Ausgleichsformel für diesen Fall, jetzt aber wissen wir, dass das wahrscheinlichste Resultat auch aus der Gleichung

$$0 = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

abgeleitet werden kann. Aber diese beiden Gleichungen sind nicht gleichwertig, die erste Gleichung gilt ganz streng, sie ist nicht bloß wahrscheinlich, sondern gewiss richtig, denn sie drückt nichts weiter aus als dass, wenn v_1, v_2, \dots, v_n die wahrscheinlichsten Fehler angeben sollen, die Wahrscheinlichkeit für ihr gemeinsames Auftreten ein Maximum sein muss, sie ist eine analytische Beziehung zwischen den in ihrem combinirten Auftreten wirklich wahrscheinlichsten Fehlern. Die zweite dagegen findet zwischen den wahrscheinlichsten Fehlern nicht streng jedesmal statt, sie repräsentirt nur die wahrscheinlichste Annahme, die man über die vorgefallenen Fehler machen kann, und es folgt aus ihr nicht, dass die ihr genügenden v nun auch immer die wahrscheinlichsten Fehler repräsentiren müssen.

Wenn wir daher aus der Coexistenz zweier solcher Gleichungen Nutzen ziehen wollen, müssen wir auf den Fall zurückgehen, wo sie beide gleich streng erfüllt werden.

56. Wahrscheinlichkeitsgesetz für wahre Fehler. Nun wissen wir aus unsern Sätzen über die zufälligen Fehler, dass schon bei einer endlichen Anzahl von Messungen Wahrscheinlichkeit vorhanden ist, dass die Summe aller wahren, dabei vorgefallenen Fehler gleich Null ist, und dass man für diese Summe geradezu Null erhalten würde, wenn man die Wiederholungen ins Unbegrenzte fortsetzte.

Wir wollen also annehmen, dass es uns in einem concreten Fall gelungen sei, für eine Grösse wiederholte Messungen so auszuführen, dass die bezüglichen Fehler dieser Messungen sich vollständig compensiren. Wir haben

dann, da die wahren Fehler jedenfalls auch die wahrscheinlichsten sind,

$$\frac{1}{\varphi(V_1)} \frac{d\varphi(V_1)}{dV_1} + \frac{1}{\varphi(V_2)} \frac{d\varphi(V_2)}{dV_2} + \cdots + \frac{1}{\varphi(V_n)} \frac{d\varphi(V_n)}{dV_n} = 0,$$

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_n = 0,$$

und diesmal sind beide Gleichungen gleichwertig.

Nun hängt nach dem Satz 6) φ nicht sowohl von V als vielmehr von V^2 ab, also geht die erste Gleichung über in

$$V_1 \frac{1}{\varphi(V_1^2)} \frac{d\varphi(V_1^2)}{d(V_1^2)} + V_2 \frac{1}{\varphi(V_2^2)} \frac{d\varphi(V_2^2)}{d(V_2^2)} + \cdots + V_n \frac{1}{\varphi(V_n^2)} \frac{d\varphi(V_n^2)}{d(V_n^2)} = 0,$$

und diese ist mit der zweiten nur vereinbar, wenn alle Factoren der V einander gleich sind. Ich setze also

$$\frac{1}{\varphi(V^2)} \frac{d\varphi(V^2)}{d(V^2)} = \alpha,$$

dann kann α nur noch von allen V in gleicher Weise abhängen, aber da zufällige Fehler in ihrem Eintreffen sich gegenseitig nicht beeinflussen, darf α nur eine Constante sein. Setzt man $V^2 = \lambda$, so wird hiernach

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\lambda} = \alpha,$$

also

$$\varphi = Ae^{\alpha\lambda}$$

oder

$$\varphi = Ae^{+\alpha V^2}.$$

α ist, wie gesagt, eine von V unabhängige Grösse, eine Constante. Da φ seiner Natur nach nur eine absolute Zahl sein kann, also wie man sich jetzt ausdrückt, die Dimensionen Null haben muss, so darf auch αV^2 nur eine Zahl sein, daher ist zunächst α umgekehrt proportional dem Quadrate der Einheit ε zu setzen, in der die Fehler gerade ausgedrückt werden. Ferner wird φ mit wachsendem V der Erfahrung nach immer kleiner, also kann α nur negativen Betrag haben; ich mache

$$\alpha = -\frac{1}{h^2} \frac{1}{\varepsilon^2},$$

wo h eine absolute Zahl bedeutet, und bekomme

$$\text{XVI)} \quad \varphi = Ae^{-\frac{V^2}{\varepsilon^2} \frac{1}{h^2}}.$$

Das ist das berühmte Gaussische Wahrscheinlichkeitsgesetz für zufällige Fehler. Es ist zunächst nur für einen concreten Fall bewiesen; aber der

Ausdruck zur Rechten des Gleichheitszeichens hängt von der diesen Fall als besonderen hervorhebenden Anzahl n der Fehler, die zusammen gerade gleich Null werden, gar nicht ab. Da man nun durch genügende Häufung der Wiederholungen stets zu der Gleichung

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n = 0,$$

gelangen kann, so folgt:

23. *Für alle wirklich zufälligen Fehler ist die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Fehlers von der Grösse V*

$$\varphi = A e^{-\frac{V^2}{\epsilon^2 h^2}}.$$

Die Constante A bedeutet die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers von der Grösse 0.

Für ein bestimmtes V ist φ um so kleiner, je kleiner h ist, man wird also einen Fehler von gewisser Grösse mit um so geringerer Wahrscheinlichkeit zu erwarten haben, je kleiner h ausfällt. Nun nennen wir eine Methode schärfer als eine andere, wenn bei ihr die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Fehlers von vorgeschriebener Grösse geringer ist, als bei dieser. Die Constante h bestimmt also die Präcision der Methode, indem sie um so kleiner ausfällt, je schärfer die Methode ist, sie ist eine für jede Messmethode charakteristische Constante.

57. Beziehung zwischen den Constanten A und h . Da wir über die Präcision einer Methode schon unterrichtet sein müssen, wenn wir auch nur für einen Fehler die Häufigkeit seines Vorkommens sollen angeben können, so ist es klar, dass h und A nicht unabhängig von einander sind. In der That lässt sich auch leicht eine Gleichung zwischen diesen Constanten ableiten.

Wie gering nämlich auch die Wahrscheinlichkeit einen Fehler von bestimmter Grösse zu begehen sein mag, dass eine Messung überhaupt mit irgend einem Fehler, eventuell mit einem, der sehr klein oder Null ist, behaftet sein wird, muss geradezu als gewiss betrachtet werden. Nach einem bekannten Satz aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist aber die Wahrscheinlichkeit, dass aus einer Reihe von Ereignissen wenigstens ein Ereignis eintritt, gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller dieser Ereignisse. Sind also V_1, V_2, \dots alle überhaupt möglichen Fehler, so hat man dem zufolge

$$\sum \varphi(V_x) = 1.$$

Die linker Hand stehende Summe können wir leicht in ein Integral verwandeln, wenn wir, wozu die Erfahrung uns ein Recht giebt, voraussetzen, dass zwischen ihren Grenzwerten die zufälligen Fehler alle möglichen Beträge anzunehmen vermögen.

In der Tat sind V und $V + \Delta V$ zwei aus der Reihe der Fehler, so kann es zwischen ihnen noch eine Anzahl anderer geben; sei $n + 1$ die Anzahl von Fehlereinheiten, die sich in dem Intervall V bis $V + \Delta V$ (die Grenzen miteingeschlossen) befinden, dann ist die Reihe der Fehler zwischen V und $V + \Delta V$

$$V, V + \frac{1\Delta V}{n}, V + \frac{2\Delta V}{n}, \dots, V + \frac{n\Delta V}{n}.$$

Damit wird die Wahrscheinlichkeit, dass einer dieser Fehler eintritt, nach dem schon citirten Satz

$$dw = \varphi(V) + \varphi\left(V + \frac{1\Delta V}{n}\right) + \varphi\left(V + \frac{2\Delta V}{n}\right) + \dots + \varphi\left(V + \frac{n\Delta V}{n}\right).$$

Nun nehme ich ΔV sehr klein an und setze dafür dV . Wir bekommen dann bis auf kleine Grössen zweiter Ordnung

$$dw = (n + 1) \varphi(V) + \frac{(n + 1)}{2} \frac{d\varphi}{dV} dV,$$

oder, weil

$$\frac{d\varphi}{dV} dV = \varphi(V + dV) - \varphi(V)$$

ist,

$$dw = (n + 1) \frac{\varphi(V) + \varphi(V + dV)}{2}.$$

Der Factor von $n + 1$ ist die mittlere Wahrscheinlichkeit im Intervall V bis $V + dV$, also auch die Wahrscheinlichkeit des Fehlers, der mitten zwischen V und $V + dV$ liegt; bezeichnen wir diesen Fehler mit \bar{V} , so ist noch $n + 1 = \frac{d\bar{V}}{\varepsilon}$, weil ε die Fehlereinheit bedeuten sollte, und

$$dw = \varphi(\bar{V}) \frac{d\bar{V}}{\varepsilon}.$$

Wir können hier die Striche fortlassen und sagen:

24. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler im Intervall von $V - \frac{dV}{2}$ bis $V + \frac{dV}{2}$ liegt, ist

$$\text{XVII')} \quad dw = \varphi(V) \frac{dV}{\varepsilon}.$$

Hiernach wird die Wahrscheinlichkeit, dass der Betrag eines Fehlers nicht kleiner als $x - a$ und nicht grösser als $x + a$ ist,

$$w = \frac{1}{\varepsilon} \int_{x-a}^{x+a} \varphi(V) dV,$$

und indem man $x - a = \alpha$, $x + a = \beta$ setzt, bekommt man

25. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fehler seiner Grösse nach sich zwischen α und β befindet, ist

$$\text{XVII)} \quad w_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(V) dV.$$

Wenn nun $+a$ den grössten Wert angiebt, den ein zufälliger Fehler zu erreichen vermag, so muss der kleinste Wert $-a$ sein, und zwischen $-a$ und $+a$ liegen alle überhaupt möglichen Fehler, daher haben wir

$$\text{XVIII)} \quad \frac{1}{\varepsilon} \int_{-a}^{+a} \varphi(V) dV = 1.$$

Führt man hierin für $\varphi(V)$ seinen Wert ein, so resultirt

$$\frac{1}{\varepsilon} A \int_{-a}^{+a} e^{-\frac{V^2}{\varepsilon^2 h^2}} dV = 1,$$

und das ist die Gleichung, aus der A in jedem Falle als Function von h bestimmt werden kann.

Wie gross die grösstmöglichen Fehler sind, weiss man natürlich nicht, aber es ist schon früher bemerkt worden, dass sehr wohl Fälle denkbar sind, in denen zufällig selbst relativ sehr grosse Fehler vorkommen können, und da die V alle überhaupt möglichen Fehler umfassen, nicht blos die, welche in einer begrenzten Messungsreihe gerade vorgefallen sind, (denn nichts hindert uns die Messungsreihe noch weiter ins Unbegrenzte uns fortgesetzt zu denken) und zudem $\varphi(V)$ eine mit wachsendem V sehr stark abnehmende Function angiebt, so darf man, ohne sich von der Wahrheit zu stark zu entfernen, $a = \infty$ und

$$\frac{A}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{V^2}{\varepsilon^2 h^2}} dV = 1$$

setzen. Macht man die Substitution $V^2/(h^2\varepsilon^2) = q^2$ so wird

$$Ah \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} dq = 1.$$

Das Integral ist eine Zahl, und zwar hat man, wie in den Lehrbüchern über Integralrechnung abgeleitet wird,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} dq = \sqrt{\pi}.$$

Somit bekommen wir

$$A = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

und

$$\text{XVIa)} \quad \varphi(V) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-\frac{V^2}{\varepsilon^2} \frac{1}{h^2}}$$

oder auch, indem wir die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers von der Grösse 0, also des für uns günstigsten Fehlers, mit w_0 bezeichnen,

$$\text{XVIb)} \quad \varphi(V) = w_0 e^{-\pi w_0^2 \frac{V^2}{\varepsilon^2}}.$$

Diese Form führt zu einigen nicht uninteressanten Bemerkungen.

58. Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers in ihrer Abhängigkeit von der Präcision der Messung. Wenn

$$w_0 = 0$$

ist, haben wir unter allen Umständen $\varphi = 0$, und das bedeutet: wenn nicht einmal ein Fehler von so ausserordentlicher Kleinheit, dass er geradezu gleich Null gesetzt werden darf, zu erwarten steht, dann treffen sicher grössere Fehler auch nicht ein, die Messung ist absolut genau. Wächst w_0 von 0 ab, so nimmt zunächst $\varphi(V)$ für ein und dasselbe V zu. Das Maximum erreicht $\varphi(V)$, wenn w_0 so gross geworden ist, dass

$$\frac{d\varphi}{dw_0} = \varphi(V) \left(\frac{1}{w_0} - 2w_0\pi \frac{V^2}{\varepsilon^2} \right) = 0,$$

also indem wir uns blos an den absoluten Wert von V halten,

$$w_0 = \frac{\varepsilon}{V\sqrt{2\pi}} = \frac{0,39895 \varepsilon}{V}$$

wird. In der Tat ist für diesen Wert der zweite Differentialquotient negativ, der erste Null.

Für $\varphi(V)$ bekommt man dann

$$\varphi(V) = \frac{\varepsilon}{V} \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} = \frac{0,24197 \varepsilon}{V}.$$

Wächst w_0 über $\varepsilon/(V\sqrt{2\pi})$ hinaus, so nimmt $\varphi(V)$ wieder ab.

Alles zusammenfassend, können wir sagen:

26. *Die Wahrscheinlichkeit, in einer Messung einen bestimmten Fehler V zu begehen, ist gleich Null, wenn sie selbst für einen Fehler, der*

nur so gross wie Null ist, verschwindet. Jene Wahrscheinlichkeit wächst, wenn die Wahrscheinlichkeit für den Fehler Null zunimmt, und zwar so lange, bis diese gleich dem Reciproken aus $\sqrt{2\pi}$ und dem Fehler, um den es sich handelt, geworden ist. Wenn w_0 gerade gleich $0,39895\epsilon/V$ ist, wird die Wahrscheinlichkeit für den erwarteten Fehler ein Maximum und gleich $0,24197\epsilon/V$.

Sie bleibt aber immer unterhalb w_0 , und wird, wenn sie ihr Maximum erreicht, gleich dem $1/\sqrt{\epsilon}$ ten Teil oder gleich $0,60654$ von dem dann geltenden Werte für w_0 .

Wächst w_0 über das $0,39895$ fache vom Reciproken des erwarteten Fehlers hinaus, so nimmt die Wahrscheinlichkeit für diesen wieder ab.

Daraus folgt weiter:

27. Wenn eine Messung so scharf ist, dass ein Fehler von noch so geringer Grösse keine Wahrscheinlichkeit hat, so kann überhaupt kein Fehler vorkommen; neigt die Messung zu Fehlern, und zwar so, dass die Wahrscheinlichkeit gerade für sehr kleine Fehler erst sehr klein ist und dann bei stetiger Abänderung der Methode stetig zunimmt, so steigt zunächst für alle Fehler die Wahrscheinlichkeit an, bleibt jedoch stets unterhalb der für die sehr kleinen Fehler geltenden. Nach und nach erreicht ein Fehler nach dem andern das Maximum seiner Wahrscheinlichkeit, und wenn bei einem Fehler der Grenzwert seiner Wahrscheinlichkeit, der in umgekehrtem Verhältnis zu seiner Grösse steht, erreicht ist, nimmt die Wahrscheinlichkeit für ihn wieder ab. Am schnellsten gelangen die sehr grossen Fehler zu dem Maximum ihrer Wahrscheinlichkeit, diese verlieren daher auch zuerst an Wichtigkeit, sie können noch hin und wieder vorkommen, aber da selbst das Maximum ihrer Wahrscheinlichkeit in umgekehrtem Verhältnis zu ihrer Grösse steht, engt sich das Gebiet der zu befürchtenden Fehler, je mehr die Wahrscheinlichkeit für sehr kleine Fehler zunimmt, mehr und mehr ein.

Man hat daher bei der Anstellung von Messungen seine Bemühungen nicht sowohl auf tunlichste Ausmerzungen aller zufälligen Fehlerquellen zu richten, als vielmehr darauf zu achten, dass nur tunlichst kleine Fehler zu erwarten stehen.

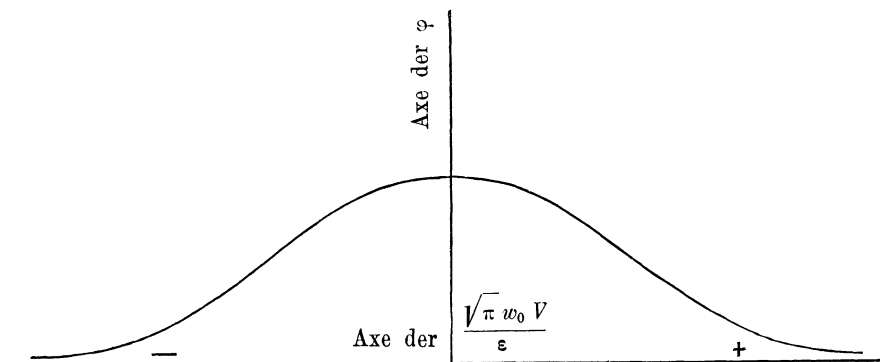
59. Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers in ihrer Abhängigkeit von der Grösse desselben. Die Wahrscheinlichkeitscurve. Die zweite Grösse, von der $\varphi(V)$ abhängt, ist V selber, und die Formel

$$\varphi = w_0 e^{-\pi w_0^2 \frac{V^2}{\epsilon^2}}$$

zeigt, dass φ mit wachsendem V sehr rasch abnimmt, für $V=0$ ist $\varphi=w_0$, für $V=\pm\infty$ ist $\varphi=0$. Die folgende kleine aus *Airy's Theory of Errors* entnommene Tafel giebt einen Begriff davon, wie φ zwischen diesen Grenzen variirt. Das Argument ist $\sqrt{\pi} w_0 \frac{V}{\epsilon}$, die Function ist $e^{-\pi w_0^2 \frac{V^2}{\epsilon^2}}$ oder $\frac{1}{w_0} \varphi$.

$\frac{\sqrt{\pi} w_0 V}{\varepsilon}$	$e^{-\frac{\pi w_0^2 V^2}{\varepsilon^2}}$	$\frac{\sqrt{\pi} w_0 V}{\varepsilon}$	$e^{-\frac{\pi w_0^2 V^2}{\varepsilon^2}}$
0,0	1	2,6	0,001159
0,1	0,9901	2,7	0,0006823
0,2	0,9608	2,8	0,0003937
0,3	0,9139	2,9	0,0002226
0,4	0,8521	3,0	0,0001234
0,5	0,7788	3,1	0,00006706
0,6	0,6977	3,2	0,00003571
0,7	0,6126	3,3	0,00001864
0,8	0,5273	3,4	0,000009540
0,9	0,4449	3,5	0,000004785
1,0	0,3679	3,6	0,000002353
1,1	0,2982	3,7	0,000001134
1,2	0,2369	3,8	0,0000005355
1,3	0,1845	3,9	0,0000002480
1,4	0,1409	4,0	0,0000001125
1,5	0,1054	4,1	0,00000005006
1,6	0,07731	4,2	0,00000002183
1,7	0,05558	4,3	0,000000009330
1,8	0,03916	4,4	0,000000003909
1,9	0,02705	4,5	0,000000001605
2,0	0,01832	4,6	0,0000000006461
2,1	0,01216	4,7	0,0000000002549
2,2	0,007907	4,8	0,00000000009860
2,3	0,005042	4,9	0,00000000003738
2,4	0,003151	5,0	0,00000000001389
2,5	0,001930	∞	0

Denken wir uns die V als Abscissen, die φ als Ordinaten in einem rechtwinkligen Coordinatensystem aufgetragen, so erhalten wir für die Curve, die



die Endpunkte der Ordinaten verbindet, eine Linie, wie sie etwa die vorstehende Figur verzeichnet. Umgedreht ähnelt sie dem Meridianschnitt durch einen herabhängenden Tropfen.

In der Axe liegt die dem Werte $V=0$ entsprechende Ordinate, hier ist φ am grössten, zu beiden Seiten davon nimmt φ erst langsam, dann sehr rasch und zuletzt wieder langsam ab, in der Unendlichkeit ist $\varphi=0$.

Bildet man die Differentialquotienten nach V , so wird

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{d\varphi}{dV} &= -2\pi w_0^2 \frac{V}{\varepsilon} \varphi \\ \varepsilon^2 \frac{d^2\varphi}{dV^2} &= -2\pi w_0^2 \varphi + 4\pi^2 w_0^4 \frac{V^2}{\varepsilon^2} \varphi.\end{aligned}$$

Der erste Differentialquotient verschwindet für $V=0$ und für $\varphi=0$, also für $V=0$ und für $V=\pm\infty$, daher schneidet die Curve die Ordinatenaxe senkrecht und hat die Abscissenaxe zur Asymptote. Andere Maxima und Minima als die durch $V=0$ und $V=\infty$ besitzt φ nicht.

Der zweite Differentialquotient ist auch gleich $2\pi w_0^2 \varphi \left(2\pi w_0^2 \frac{V^2}{\varepsilon^2} - 1 \right)$, also negativ solange $\frac{V}{\varepsilon} < 1/\sqrt{2\pi w_0^2}$, gleich 0 für $\frac{V}{\varepsilon} = 1/\sqrt{2\pi w_0^2}$ und positiv für $\frac{V}{\varepsilon} > 1/\sqrt{2\pi w_0^2}$. Die Curve kehrt demgemäss in der Nähe der Ordinatenaxe der Abscissenaxe ihre concave Seite zu, in zwei symmetrisch zur Ordinatenaxe gelegenen Stellen mit den Coordinaten

$$V = \pm \frac{0,39895\varepsilon}{w_0}, \quad \varphi = 0,60654w_0$$

hat sie Wendepunkte und von da ab ist sie von der Abscissenaxe gesehen stets convex.

d) Die charakteristischen Fehler.

60. Einführung des mittleren Fehlers als desjenigen Fehlers der bei der gerade benutzten Messmethode seine grösstmögliche Wahrscheinlichkeit besitzt. Beachtet man das, was oben über das Variiren von $\varphi(V)$ mit w_0 gesagt ist, so folgt, dass die Abscisse des Wendepunktes gerade den Fehler kennzeichnet, für welchen bei dem vorgeschriebenen Wert von w_0 die Wahrscheinlichkeit den grösstmöglichen Betrag erreicht, und dieser grösstmögliche Betrag ist die Ordinate des Wendepunktes.

28. Für jede vorgeschriebene Messmethode giebt es also einen und nur einen Fehler, der bei ihrer Anwendung öfter vorkommen kann als bei der irgend einer andern Messmethode. Man mag die Präcision der Messung variiren, wie man will, nie wird dieser Fehler eine höhere Wahrscheinlichkeit erreichen, als er sie bei dem gerade vorgeschriebenen Wert von w_0 besitzt.

Man bezeichnet diesen so ausgezeichneten Fehler als den *mittleren Fehler* der Messung bei der Präcision, die ihr gerade innewohnt; von ihm wird später noch viel die Rede sein. Als Symbol wähle ich, wenn es sich um den

wahren mittleren Fehler handelt, M , und wenn der wahrscheinlichste mittlere Fehler gekennzeichnet werden soll, m . Wir haben dann

$$\text{XIX)} \quad M = \frac{0,39895 \varepsilon}{w_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\varepsilon}{w_0}.$$

Ich weiss nicht, ob man schon früher auf die oben angeführte merkwürdige Eigenschaft des mittleren Fehlers aufmerksam gewesen ist, d'Arrest*) hat aber für denselben noch zwei andere Eigenschaften gefunden, die der Leser leicht an der Wahrscheinlichkeitscurve verificiren wird.

1. Der mittlere Fehler ist die mittlere Proportionale zwischen jedem andern Fehler und der diesem zugehörigen Subtangente.

2. Er repräsentirt diejenige Abscisse, für welche die Tangente an die Curve, begrenzt durch die Coordinatenaxen im Berührungspunkt, halbirt wird.

Ändert man w_0 ab, indem man es stetig wachsen lässt, so bekommt man immer neue Curven $w = \varphi$, die die Ordinatenaxe in immer höhern Stellen schneiden und deren Wendepunkte dieser Axe sich mehr und mehr nähern, von der Abscissenaxe sich mehr und mehr entfernen. Denkt man sich die Abscissenaxe als eine biegsame, dehbare, an den Enden festgemachte Feder, fasst sie an der Stelle, wo die Ordinatenaxe sie schneidet, und zieht sie längs dieser in die Höhe, so macht ihre Form annähernd ähnliche Verwandlungen durch wie unsere Curve, wenn man w_0 stetig vergrössert.

Es folgt aber, dass der mittlere Fehler vollkommen ausreichen muss zur Charakterisirung der Präcision einer Messung.

61. Der mittlere Fehler als Maass der Präcision einer Methode.

Jede Messungsmethode besitzt wie gesagt einen Fehler, den mittleren Fehler, der gerade bei ihrer Eigenart die grösste Wahrscheinlichkeit gewinnt, die er überhaupt je erreichen kann. Nun wissen wir aus dem Früheren, dass dieser besondere Fehler um so kleiner ausfällt, mit je grösserer Wahrscheinlichkeit man bei Anwendung der betreffenden Methode nur kleine Fehler zu erwarten hat. Aber eine Methode ist für die Praxis um so wertvoller, je mehr man bei ihr nur auf ganz kleine Fehler rechnen darf. Daher bietet der mittlere Fehler einer Methode ein Maass für die Güte derselben; je kleiner er ist, um so besser ist die Methode.

Wollen wir also zwischen zwei Methoden entscheiden, so können wir das dadurch tun, dass wir zusehen, welche von ihnen den geringern mittleren Fehler ergibt. Wie man diesen aber praktisch findet, wird sich bald zeigen.

62. Die Curve der mittleren Fehler, die Präcisioncurve, ist eine Hyperbel. Die Einhüllende aller Curven, die man aus der Gleichung

$$\varphi = w_0 e^{-\pi w_0^2 \frac{V^2}{\varepsilon^2}}$$

*) Astronomische Nachrichten Bd. 41, pag. 35 ff.

durch Variirung von w_0 erhält, ist die Hyperbel

$$\varphi M = 0,24197 \varepsilon,$$

sie berührt die Wahrscheinlichkeitscurven in ihren Wendepunkten, und hat die Coordinatenaxen zu Asymptoten. Die Abscissen dieser Hyperbel stellen alle möglichen mittlern Fehler M , die Ordinaten die diesen Fehlern zugehörigen Wahrscheinlichkeiten dar. Diese Hyperbel versinnbildlicht gewissermassen die Präcisionen aller Messmethoden.

Ich werde die Curve

$$\varphi = w_0 e^{-\pi w_0^2 \frac{V^2}{\varepsilon^2}}$$

als *Wahrscheinlichkeits-* oder *Fehlercurve*, die beschriebene Hyperbel

$$\varphi M = 0,24197 \varepsilon$$

als *Präcisionscurve* bezeichnen. Jene bezieht sich auf die Wahrscheinlichkeiten aller in einer und derselben Messungsmethode möglichen Fehler, diese auf die Wahrscheinlichkeiten der mittlern Fehler aller möglichen auf eine und dieselbe Grössenbestimmung sich beziehenden Messungsmethoden.

63. Der resultirende und der durchschnittliche Fehler. Wir haben bei frühern Gelegenheiten noch zwei andere Fehler hervorgehoben, den durchschnittlichen und den resultirenden Fehler; jener sollte gleich dem absoluten, dieser gleich dem algebraischen Mittel aller bei einer und derselben Messungsmethode möglichen Fehler sein. Sehen wir zu, was das Wahrscheinlichkeitsgesetz über diese Fehler lehrt.

Wenn irgend eine Grösse f von einer Variablen x , deren Wahrscheinlichkeit $\varphi(x)$ ist, abhängt, so ist, wie eine einfache Ueberlegung lehrt, der Mittelwert dieser Grösse f zwischen den Grenzen a und b von x gleich

$$a) \quad \bar{f} = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx.$$

Bilden wir jetzt das algebraische Mittel aller möglichen Fehler, so beginnt V mit $-\infty$ und durchläuft alle Beträge bis $V = +\infty$, somit wird der

$$\text{resultirende Fehler} = \frac{w_0}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} V e^{-\pi w_0^2 \frac{V^2}{\varepsilon^2}} dV.$$

Das rechts stehende bestimmte Integral ist gleich Null. Da wir noch öfter mit solchen Integralen zu tun haben werden, führe ich gleich die folgenden allgemeinen Formeln an

$$\beta_1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda q^2} q^{2x+1} dq = 0,$$

$$\beta_2) \quad 2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda q^2} q^{2x+1} dq = \frac{x!}{\lambda^{x+1}};$$

$$\beta_3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda q^2} q^{2x} dq = \frac{1}{\lambda^x \sqrt{\lambda}} \frac{(2x)!}{2^{2x} x!} \sqrt{\pi},$$

$$\beta_4) \quad 2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda q^2} q^{2x} dq = \frac{1}{\lambda^x \sqrt{\lambda}} \frac{(2x)!}{2^{2x} x!} \sqrt{\pi}.$$

Beweisen will ich diese Formeln nicht, ich merke aber an, dass die wichtige Theorie solcher und ähnlicher Integrale in Fouriers „Analytische Theorie der Wärme“ *) und in Riemanns „Theorie der partiellen Differentialgleichungen“ behandelt ist.

Wir haben also nach der Formel $\beta_1)$

$$\text{resultirender Fehler} = 0.$$

Um den durchschnittlichen Fehler zu erhalten, müssen wir das Mittel aller V so bilden, dass wir auch die negativen Fehler positiv rechnen, demnach ist

$$\text{durchschnittlicher Fehler} = 2 \int_0^{\infty} w_0 V e^{-\pi w_0^2 \frac{V^2}{\varepsilon^2}} \frac{dV}{\varepsilon}$$

und nach der Formel $\beta_2)$

$$\text{durchschnittlicher Fehler} = \frac{\varepsilon}{\pi w_0} = \frac{0,31831 \varepsilon}{w_0}.$$

Da beide Fehler wahre, nicht wahrscheinlichste sein sollen, bezeichne ich den ersten mit R , den zweiten mit D und erhalte

$$\text{XX)} \quad R = 0,$$

$$\text{XXI)} \quad D = \frac{0,31831 \varepsilon}{w_0}.$$

Vorhin haben wir abgeleitet für den mittlern Fehler

$$\text{XIX)} \quad M = \frac{0,39895 \varepsilon}{w_0}.$$

Der durchschnittliche Fehler ist also stets kleiner als der mittlere, und wir bekommen

$$\text{XXII)} \quad \frac{M}{D} = 1,25331 = 1\frac{1}{4} \text{ etwa.}$$

*) Deutsche Ausgabe, Berlin 1884, J. Springer, namentlich Art. 368.

64. Die Wahrscheinlichkeiten der charakteristischen Fehler. Offenbar müssen in der Reihe der Fehler V auch die Beträge R und D und M enthalten sein. Die Wahrscheinlichkeiten dieser Fehler, das heisst, die Wahrscheinlichkeit, mit der man sie bei einer einzelnen Messung erwarten darf, ist hiernach

$$\text{XXIII)} \quad \begin{cases} \varphi(R) = w_0 & = 1,00000 w_0, \\ \varphi(D) = w_0 e^{-\frac{1}{\pi}} & = 0,72338 w_0, \\ \varphi(M) = w_0 e^{-\frac{1}{2}} & = 0,60654 w_0. \end{cases}$$

Von den drei Fehlern kann man also bei einer einzelnen Messung mit der grössten Wahrscheinlichkeit den resultierenden Fehler, mit der geringsten den mittlern erwarten.

65. Der mittlere Fehler als Quadratwurzel des mittlern Fehlerquadrats. Es liegt nahe, die obigen Betrachtungen auf höhere Potenzen der Fehler als die erste auszudehnen. Ich bezeichne das algebraische Mittel aller m ten Fehlerpotenzen mit $\overline{V^m}$, das Mittel aller m ten absoluten Fehlerpotenzen mit $|\overline{V}|^m$, dann ist nach den Formeln β)

$$\begin{aligned} \overline{V^{2x+1}} &= 0, \\ \text{XXIV a)} \quad |\overline{V}|^{2x+1} &= \frac{x!}{\pi^{x+1}} \frac{\varepsilon^{2x+1}}{w_0^{2x+1}}, \\ \overline{V^{2x}} &= \frac{(2x)!}{2^{2x} x!} \frac{1}{\pi^x} \frac{\varepsilon^{2x}}{w_0^{2x}} \end{aligned}$$

oder, indem wir die schon eruirten Werte für R , D , M benutzen,

$$\begin{aligned} \overline{V^{2x+1}} &= 0, \\ \text{XXIV b)} \quad |\overline{V}|^{2x+1} &= x! \pi^x D^{2x+1} \\ \overline{V^{2x}} &= \frac{(2x)!}{2^x x!} M^{2x}. \end{aligned}$$

Diese Formeln bieten in ihrer allgemeinen Gestalt zunächst nichts bemerkenswertes, kehrt man sie aber um, so resultirt

$$\begin{aligned} \text{XXV)} \quad D &= \frac{1}{\sqrt[2x+1]{\frac{x!}{\pi^x}}} \sqrt[2x+1]{\overline{V^{2x+1}}}, \\ M &= \sqrt[2x]{\frac{2^x x!}{(2x)!}} \sqrt[2x]{\overline{V^{2x}}}, \end{aligned}$$

und diese Gleichungen können auch als allgemeine Definitionen für den durchschnittlichen, bezüglich mittlern Fehler angesehen werden. Für numerische Rechnungen wird man natürlich über x die einfachsten Annahmen machen, also es in D gleich 0, in M gleich 1 setzen, dann wird

$$\text{XXVI)} \quad D = |\bar{V}|,$$

$$\text{XXVII)} \quad M = \sqrt{\bar{V}^2}.$$

Die Gleichung für D ist die ursprüngliche Definitionsgleichung dieser Grösse, die Gleichung für M sagt aber eine neue Eigenschaft dieser wichtigen Grösse aus, nämlich

28. *Der mittlere Fehler einer Messung (error medius metuendus nach Gauss) ist gleich der Quadratwurzel aus dem Mittel der Fehlerquadrate, und gerade diese Definition ist für die Praxis von der höchsten Bedeutung.*

Wir haben nämlich schon gesehen, dass der mittlere Fehler in einer Messungsmethode uns ein Kriterium für die Präcision und Güte derselben bietet, wir können daher auch sagen, dass die Quadratwurzel aus dem Mittel aller Fehlerquadrate ein solches Kriterium an die Hand giebt.

66. Einführung des wahrscheinlichen Fehlers. Ausser diesen bereits behandelten zwei charakteristischen Fehlern hat man noch einen dritten, den wahrscheinlichen Fehler, eingeführt, der, trotzdem Gauss seine Bedeutung bei weitem nicht so hoch wie die des mittlern Fehlers schätzte, doch mit der Zeit zu grosser Bedeutung gelangt ist.

Seiner ursprünglichen Definition nach soll der wahrscheinliche Fehler derjenige Fehler der Fehlerreihe sein, der diese in zwei gleiche Hälften spaltet, so dass ebensoviele Fehler ihn an Grösse überragen als unter ihm bleiben. Aus dieser Definition können wir ihn leicht durch schon bekannte Grössen ausdrücken.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein positiver Fehler eintritt, dessen Grösse zwischen 0 und a liegt, ist

$$w_a = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^a \varphi(V) dV.$$

Für alle Fehler, die grösser als a sind, hat man die Wahrscheinlichkeit

$$w_b = 1 - w_a.$$

Denkt man sich die Reihe der Fehler in zwei Gruppen geteilt, deren eine alle Fehler, die unterhalb a liegen, enthält, zu deren anderer alle, welche oberhalb a sich befinden, zählen, so hat man einen Fehler aus der ersten Gruppe mit der Wahrscheinlichkeit w_a , einen aus der zweiten mit der Wahrscheinlichkeit $1 - w_a$ zu erwarten. Man kann nun danach fragen, durch welchen Fehler man die Gruppen gegen einander abzugrenzen hat, damit man einen Fehler aus der einen Gruppe mit derselben Wahrscheinlichkeit wie einen aus der andern erwarten darf.

Offenbar enthalten dann beide Gruppen gleich viel Fehler, und es ist $w_b = w_a$ somit $w_a = \frac{1}{2}$. Dasselbe gilt für die negativen Fehler, daher hat man, um alle Fehler einzubegreifen, den Fehler, wir wollen ihn P nennen, der die beiden Gruppen trennt, so zu bestimmen, dass

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\varepsilon} \int_0^P \varphi(V) dV.$$

Dieser Fehler P , der so beschaffen ist, dass er die Gesammtheit der Fehler in zwei gleiche Hälften teilt, derartig, dass man mit ganz derselben Wahrscheinlichkeit zu erwarten hat, dass ein Fehler seinem absoluten Betrage nach kleiner wie, dass er grösser sein wird als er, heisst der *wahrscheinliche Fehler* einer einzelnen Messung (*Error probabilis*).

67. Führt man für $\varphi(V)$ den Wert ein, so ist P zu berechnen aus der Gleichung

$$\frac{1}{4} = \frac{w_0}{\varepsilon} \int_0^P e^{-\pi w_0^2 \frac{V^2}{\varepsilon^2}} dV.$$

Ich ersetze $\frac{1}{\varepsilon} V \sqrt{\pi} w_0$ durch t und mache $\vartheta_1 = \sqrt{\pi} w_0 P \frac{1}{\varepsilon}$, dann bekommt man

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4} = \int_0^{\vartheta_1} e^{-t^2} dt,$$

d. h., wir müssen die obere Grenze ϑ_1 so bestimmen, dass der Betrag des Integrals gerade gleich $\sqrt{\pi}/4$ wird. Dazu berechnet man den Wert des Integrals

$$J = \int_0^{\vartheta} e^{-t^2} dt,$$

indem man ϑ der Reihe nach etwa gleich 0,00; 0,01; 0,02; ... setzt, und sieht dann zu, für welchen Wert von ϑ der Betrag des Integrals gerade gleich $\sqrt{\pi}/4$ herauskommt.

Solche Berechnungen sind für das obige Integral schon mehrfach ausgeführt worden. Namentlich hat Encke im Astronomischen Jahrbuch von 1834 eine ausgedehnte mit $\vartheta = 0,00$ anhebende, von 0,01 zu 0,01 fortschreitende und bis $\vartheta = 2,00$ reichende Tafel veröffentlicht. Doch ist die von ihm berechnete Grösse nicht geradezu das obige Integral J , sondern dieses Integral multiplicirt mit $2/\sqrt{\pi}$, also die Grösse

$$\Theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\vartheta} e^{-t^2} dt.$$

Ich habe diese Tafel, da das bezeichnete Integral für den Physiker noch in mehreren andern Gebieten von grosser Bedeutung ist, am Schluss dieses Bandes reproducirt (Tafel I).

Wir haben nun aus derselben das Argument ϑ_1 zu entnehmen, neben dem für θ die Zahl $\frac{1}{2}$ steht. Genau trifft das in dieser Tafel für kein Argument ein, aber bei

$$\begin{aligned} \vartheta = 0,47 & \text{ steht } \theta = 0,4937452, \\ \vartheta = 0,48 & \quad \quad \theta = 0,5027498. \end{aligned}$$

Die strengere, von Gauss ausgeführte Interpolation ergibt dann

$$\vartheta_1 = 0,47694.$$

Der wahrscheinliche Fehler wird also

$$\text{XXVIIIa)} \quad P = \frac{0,47694 \varepsilon}{\sqrt{\pi} w_0} = \frac{0,26909 \varepsilon}{w_0}.$$

Auch dieser Fehler ist umgekehrt proportional w_0 , man kann ihn deshalb durch D und M darstellen, in seiner Abhängigkeit von M ist er

$$\text{XXVIIIb)} \quad P = 0,67449 M,$$

oder

$$\text{XXVIIIc)} \quad P = 0,67449 \sqrt{V^2}.$$

In den meisten Fällen reicht es aus, statt des Decimalbruchs $\frac{2}{3}$ zu schreiben, also

$$\text{XXIX}_1) \quad P = \frac{2}{3} \sqrt{V^2}$$

zu setzen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer einzelnen Messung ein Fehler von der Grösse des wahrscheinlichen Fehlers eintreffen wird, ist

$$\varphi(P) = w_0 e^{- (0,47694)^2}$$

$$\text{XXX)} \quad = 0,79654 w_0.$$

Sie ist also noch grösser, als die für den durchschnittlichen Fehler.

68. Der wahrscheinliche Fehler als die mittlere Nullte Potenz der Fehler. Hätte nun der wahrscheinliche Fehler weiter keine Eigenschaften, als dass er gerade in der Mitte der ganzen Fehlerreihe steht, so würde kein Grund vorhanden sein, ihn besonders einzuführen, da er sich vollständig durch den mittlern ersetzen lässt, aber er gestattet noch eine andere Deutung.

Vermöge seiner hervorgehobenen Eigenschaft nimmt nämlich der wahrscheinliche Fehler in der Reihe der Fehler eine ganz ähnliche Stellung ein wie die Eins in der Reihe der rationalen positiven Zahlen, und wenn wir die Festsetzung treffen, dass alle Fehler in Einheiten des wahrscheinlichen Fehlers

gemessen werden sollen — was darauf hinauskommt, dass $P = 1$ gesetzt wird — so können wir sagen, es gäbe genau so viele Fehler, die kleiner sind als 1, als es Fehler giebt, die grösser sind als 1, der wahrscheinliche Fehler ist 1 selbst, und die ganze Fehlerreihe entspricht der rationalen Zahlenreihe.

Aber 1 bekommt man auch dann, wenn man irgend einen der Fehler zur Nullten Potenz erhebt, und nicht minder kommt 1 heraus, wenn man alle Fehler einzeln zur Nullten Potenz erhebt und aus den so erhaltenen Zahlen das Mittel bildet, das heisst, die mittlere Nullte Potenz der Fehler ausrechnet. Die Nullte Potenz jedes Fehlers und die mittlere Nullte Potenz aller Fehler sind also Fehler von der Grösse 1, stehen mithin ebenfalls in der Mitte der ganzen (in Einheiten des wahrscheinlichen Fehlers gemessenen) Fehlerreihe, und hieraus folgt, dass

29. *der wahrscheinliche Fehler auch als die Nullte Potenz irgend eines der Fehler oder als die mittlere Nullte Potenz aller Fehler betrachtet werden kann, vorausgesetzt, dass die Fehler in Einheiten seines Betrages ausgedrückt werden.*

Nun sehen wir, dass von den andern charakteristischen Fehlern der durchschnittliche Fehler durch die mittlere erste, der mittlere Fehler durch die mittlere zweite Potenz der Fehler bestimmt ist. Es reiht sich also der wahrscheinliche Fehler diesen beiden Fehlern genau an, indem er auch als mittlere Nullte Potenz der Fehler aufgefasst werden kann, und er kommt sogar an die Spitze der charakteristischen Fehler zu stehen, insofern er durch die einfachste Potenz der Fehler definiert ist.

69. Satz für die zahlenmässige Berechnung der Präzisionsconstante und der Anzahl der Fehler vom Betrage Null. Ich mache noch auf eine Interpretation des Zusammenhanges zwischen den charakteristischen Fehlern und der Präzisionsconstante aufmerksam.

All' diese Fehler sind der bezeichneten Constante umgekehrt proportional. Ist aber N die Anzahl aller Fehler, n_0 die derjenigen, welche gleich 0 sind, so hat man

$$w_0 = \frac{n_0}{N}$$

oder

$$n_0 = \frac{0,31835 N \varepsilon}{D} = \frac{0,39895 N \varepsilon}{M} = \frac{0,26909 N \varepsilon}{P},$$

und indem man mit n_D , n_M , n_P die Anzahl von Fehlereinheiten versteht, die der durchschnittliche, mittlere, wahrscheinliche Fehler enthält,

$$\text{XXXI)} \quad n_0 = 0,31831 \frac{N}{n_D} = 0,39895 \frac{N}{n_M} = 0,26909 \frac{N}{n_P}$$

oder etwa

$$\text{XXXI}_1) \quad n_0 = \frac{1}{3} \frac{N}{n_D} = \frac{2}{5} \frac{N}{n_M} = \frac{1}{4} \frac{N}{n_P}.$$

30. *Unter den unzähligen Fehlern einer Messungsreihe ist die Anzahl aller verschwindend kleinen Fehler*

$\frac{1}{3}$ *der Anzahl aller Fehler noch dividirt durch die Anzahl Fehler-einheiten, die der durchschnittliche Fehler enthält,*

$\frac{2}{5}$ *der Anzahl aller Fehler noch dividirt durch die Anzahl Fehler-einheiten, die der mittlere Fehler enthält,*

$\frac{1}{4}$ *der Anzahl aller Fehler noch dividirt durch die Anzahl Fehler-einheiten, die der wahrscheinliche Fehler enthält.*

Eine Fehlereinheit hat dabei derjenige Fehler, den wir nach 0 zuerst als zu berücksichtigenden Fehler ansehen.

Der Satz ist sehr nützlich, wenn wir für die Präzisionsconstante eine Zahlenangabe wünschen.

Ist zum Beispiel in irgend einem Fall der mittlere Fehler 10 und rechnen wir die Fehler nur von 1 zu 1, so ist $n_M = 10$, also für eine Fehlerreihe von 100 Fehlern

$$n_0 = 4, w_0 = \frac{1}{25};$$

wäre $M = 2$, so hätten wir

$$n_0 = 20, w_0 = \frac{1}{5}.$$

e) *Andere Formen für das Wahrscheinlichkeitsgesetz; Theorie von Laplace.*

Ich erwähne nun noch einiges mehr Formale, was aber dem Leser das Wesen des Wahrscheinlichkeitsgesetzes etwas klarer machen soll.

70. Zwei neue Formen für das Wahrscheinlichkeitsgesetz. Zunächst ist zu bemerken, dass die angeführte Form für das Wahrscheinlichkeitsgesetz — ich setze sie der Bequemlichkeit halber

$$\varphi = a e^{-\lambda V^2},$$

wo $a = w_0$, $\lambda = \pi w_0^2 \frac{1}{e^2}$ ist — nicht die einzige ist, die φ mit V verbindet.

Es giebt noch eine andere, die darum interessant ist, weil Laplace in seiner *Théorie des probabilités* von ihr erst zu der obigen Gaussischen Form des Wahrscheinlichkeitsgesetzes gelangt ist. Aus der Formel unter β_3) folgt nämlich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} dq = \sqrt{\pi}.$$

Addirt man zu q irgend eine Constante a , so bleibt das Integral ungeändert, weil $-\infty - a$ und $+\infty - a$ sich von $-\infty$ und $+\infty$ in keiner Weise unterscheiden, also ist auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(q+a)^2} dq = \sqrt{\pi},$$

oder man hat

$$\text{i)} \quad \sqrt{\pi} e^{-a^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2 - 2qa} dq.$$

Ich ersetze a durch ia , wo $i = \sqrt{-1}$, dann wird

$$\sqrt{\pi} e^{-a^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} [\cos(2qa) - i \sin(2qa)] dq.$$

Der imaginäre Teil muss verschwinden, in der That ist auch

$$\text{d)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} \sin(2qa) dq = 0,$$

und man bekommt

$$\text{e)} \quad \sqrt{\pi} e^{-a^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} \cos(2qa) dq.$$

Hierin hat man nur noch $a = \sqrt{\lambda} V$ zu setzen, und erhält für das Wahrscheinlichkeitsgesetz

$$\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} \cos(2q \sqrt{\lambda} V) dq$$

oder

$$\text{XVI e)} \quad \varphi = \frac{w_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} \cos\left(2q w_0 \sqrt{\pi} \frac{V}{\varepsilon}\right) dq.$$

Das ist im wesentlichen die Form, auf die Laplace zuerst gekommen ist. *)

*) l. c. p. 147.

Eine dritte Form, die ich nur erwähnen, nicht beweisen will, ist

$$\text{XVI d) } \varphi = \frac{w_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\left(q\pi w_0^2 \frac{V^2}{\epsilon^2}\right)}{1+q^2} dq.$$

Es liesse sich noch eine vierte, der vorausgehenden entsprechende mit \sin statt \cos aufstellen, doch hätte diese gerade für $V=0$ keine Geltung.

Jede der gegebenen Formen hat ihre Vorteile, die erste empfiehlt sich, wenn man φ für ein bestimmtes V berechnen will, die zweite da, wo es auf direct auszuführende Integrationen nach V ankommt, die dritte zur Ableitung von Reihenentwickelungen.

71. Die Laplace'sche Ableitung des Wahrscheinlichkeitsgesetzes.

Man hat vielfach versucht, das Wahrscheinlichkeitsgesetz auf Grund eingehender Annahmen über die Entstehung zufälliger Fehler abzuleiten, um damit auch einen Beweis für das Princip des arithmetischen Mittels, welches in der Gauss'schen Deduction als Axiom hingestellt wird, zu gewinnen. Doch ist allein das Verfahren von Laplace von grundlegender Bedeutung geworden.

Laplace*) geht von der Ansicht aus, dass ein zufälliger Fehler nicht einfachen Ursprungs ist, nicht durch eine einzige Ursache hervorgebracht wird, sondern durch das Uebereinanderlagern einer sehr grossen Anzahl von einander unabhängiger Elementarfehler entsteht, deren jeder dabei so oft vorkommt, als es seiner Wahrscheinlichkeit entspricht. Er nimmt also an, dass bei jeder Messung eine ganze Anzahl von Fehlerquellen wirksam ist, dass jede dieser Fehlerquellen eine Reihe von Elementarfehlern — gleich viele und gleich grosse positiven Zeichens wie negativen — verursachen kann, und dass alle Fehlerquellen in ihrem Zusammenwirken den ganzen zufälligen Fehler, mit dem die Messung behaftet ist, hervorbringen.

Sei s die Anzahl aller Fehlerquellen, ϵ die Einheit, in der man den Betrag eines Elementarfehlers ausdrückt. Die Fehler, die eine bestimmte Fehlerquelle zu verursachen vermag, können dann dargestellt werden durch $-\nu\epsilon, -\sqrt{-1}\epsilon, -\sqrt{-2}\epsilon, \dots, -1\epsilon, 0\epsilon, +1\epsilon, \dots, +\sqrt{-2}\epsilon, +\sqrt{-1}\epsilon, +\nu\epsilon$, so dass die Anzahl aller Elementarfehler $(2\nu+1)^s$ sein würde. Der ganze zufällige Fehler V entsteht dadurch, dass jede Fehlerquelle einen Elementarfehler hervorbringt, da aber die Anzahl aller Elementarfehler zusammengenommen grösser ist als die der Fehlerquellen, kann ein und derselbe Fehler durch sehr mannigfache Combinationen der Elementarfehler entstehen. Bezeichnet C die Anzahl aller Combinationen von s Elementarfehlern, die in ihrer algebraischen Summe den Fehler V ergeben, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass gerade der Fehler V die Messung verfälscht

$$\varphi = \frac{C}{(2\nu+1)^s}.$$

*) Théorie des Probabilités p. 304.

Für C findet Laplace nach einer nicht gerade einfachen Analyse, wegen deren auf das Original verwiesen werden muss,

$$C = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\vartheta \cos\left(\frac{V}{\varepsilon} \vartheta\right) \left(\frac{\sin \frac{2\nu+1}{2} \vartheta}{\sin \frac{\vartheta}{2}}\right)^s.$$

Indem er dann eine neue Variable t durch die Gleichung

$$\frac{\sin \frac{2\nu+1}{2} \vartheta}{\sin \frac{\vartheta}{2}} = (2\nu+1) e^{-\frac{q^2}{s}}$$

einführt, erhält er durch Reihenentwicklung

$$\vartheta = \frac{q\sqrt{6}}{\sqrt{s\nu(\nu+1)}} \left(1 + B \frac{q^2}{s} + \dots\right),$$

wo $B \dots$ Constanten bedeuten. Damit wird

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{s\nu(\nu+1)}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \cos\left\{\frac{V}{\varepsilon} \frac{q\sqrt{6}}{\sqrt{s\nu(\nu+1)}} \left(1 + B \frac{q^2}{s} + \dots\right)\right\} e^{-q^2} \left(1 + 3B \frac{q^2}{s} + \dots\right),$$

wo s eine sehr grosse Zahl bedeuten sollte. So lange nun q klein ist, darf man die Glieder $B \frac{q^2}{s} \dots$ fortlassen, wird aber q gross, dann ist e^{-q^2} sehr klein, und man begeht im Ganzen einen nur geringen Fehler, wenn man auch jetzt die bezeichneten Glieder vernachlässigt. Man kann also unter allen Umständen setzen

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{s\nu(\nu+1)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2} \cos\left(\frac{V}{\varepsilon} \frac{q\sqrt{6}}{\sqrt{s\nu(\nu+1)}}\right) dq.$$

Das ist genau die zweite Form des Gaussischen Wahrscheinlichkeitsgesetzes.

72. Notwendige Aenderung. Es ist aber noch eines zu bemerken: Die Grundeigenschaft aller zufälligen Fehler besteht darin, dass dieselben genau so leicht als positive wie als negative Grössen auftreten können. Dieser ist aber von Laplace, indem er die Elementarfehler, die eine Fehlerquelle verursachen kann, durch

$$-\nu\varepsilon, -\sqrt{\nu-1}\varepsilon, -\sqrt{\nu-2}\varepsilon, \dots, -1\varepsilon, 0\varepsilon, +1\varepsilon, \dots, +\sqrt{\nu-2}\varepsilon, +\sqrt{\nu-1}\varepsilon, +\nu\varepsilon$$

darstellt, für den Fehler 0 nicht Rechnung getragen, nun ist zwar $+0$ ebensoviel wie -0 , aber bei der Zählung darf nicht übersehen werden, dass man den Fehler 0 benachteiligen würde, wenn man ihn nur einmal zählte, die andern aber zweimal, einmal als negative, einmal als positive Grössen.

Eigentlich ist also die Reihe der Elementarfehler zu schreiben

$$-\nu\varepsilon, -\nu-1\varepsilon, \dots, -1\varepsilon, -0\varepsilon, +0\varepsilon, +1\varepsilon, \dots, +\nu-1\varepsilon, +\nu\varepsilon.$$

Bringt man diese geringe Aenderung in der Laplace'schen Ableitung an, so resultirt

$$\text{XVIe)} \quad \varphi = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{sv(2\nu+1)}} \int_{-x}^{+\infty} e^{-q^2} \cos\left(\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{sv(2\nu+1)}} \frac{V}{\varepsilon} q\right) dq.$$

73. Specialisirung der der Laplaceschen Theorie zu Grunde liegenden Hypothesen; Erweiterung durch Bessel. Die Annahmen, die diesem Gesetze zu Grunde liegen, sind aber:

1. Dass jeder Fehler V durch das Zusammenwirken einer sehr grossen Anzahl s von Fehlerquellen verursacht wird.

2. Dass jede Fehlerquelle genau so leicht einen positiven wie einen negativen Elementarfehler hervorzubringen vermag.

3. Dass das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Elementarfehler nicht von Fehlerquelle zu Fehlerquelle variirt, d. h. dass keine Fehlerquelle einen Elementarfehler von bestimmter Grösse leichter oder schwerer als eine andere entstehen lassen kann.

Die zweite Voraussetzung darf wol als zutreffend bezeichnet werden. Von der stark beschränkenden dritten Annahme ist Laplace's Analyse durch Bessel*) befreit worden, denn Bessel hat nachgewiesen,

dass das obige Wahrscheinlichkeitsgesetz gültig bleibt, wie auch die Wahrscheinlichkeitsfunction der Elementarfehler von Fehlerquelle zu Fehlerquelle variirt, wenn nur keine Fehlerquelle einen mittlern Elementarfehler hervorbringt, der die mittlern Elementarfehler aller andern Fehlerquellen stark übersteigt, oder populärer ausgedrückt, wenn nur alle Fehlerquellen relativ gleich viel zu der Entstehung des ganzen Fehlers beitragen können.

Bleibt also noch die erste Annahme, und diese bietet allerdings dem Verständnis einige Schwierigkeiten. Unzweifelhaft kann in einzelnen Fällen wirklich ein Fehler aus der combinirten Wirkung einer Anzahl von Fehlerursachen hervorgehen, aber man sieht nicht recht ein, warum das in jedem Falle geschehen soll, und namentlich nicht, warum die Anzahl der Fehlerquellen stets sehr gross sein soll.

74. Die charakteristischen Fehler nach der Laplaceschen Theorie. Zusammenhang mit dem grösstmöglichen Fehler. Vergleichen wir jetzt Laplace's zweite Form (mit der hier angebrachten Modification) des Wahrscheinlichkeitsgesetzes mit der unsrigen, so ergibt sich

$$\text{XXXII}_1\text{a)} \quad w_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{sv(2\nu+1)}} = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{sv(2\nu+1)}}.$$

*) Astronomische Nachrichten Bd. XV p. 369 ff.

Die von einer Fehlerquelle hervorgebrachten Elementarfehler haben die bezüglichen Beträge

$$-v\varepsilon, -\sqrt{v-1}\varepsilon, \dots, -1\varepsilon, -0\varepsilon, +0\varepsilon, +1\varepsilon, \dots, +\sqrt{v-1}\varepsilon, +v\varepsilon.$$

Der grösste Elementarfehler seinem absoluten Betrage nach ist $v\varepsilon$, und da s Fehlerquellen wirksam sein sollen, so ist der allergrösste Fehler, der eine Messung zufällig verfälschen kann, gleich $sv\varepsilon$.

Ich bezeichne diesen grösstmöglichen zufälligen Fehler einer Messung mit V_m , setze also

$$V_m = sv\varepsilon,$$

dann wird

$$\text{XXXII}_1 \text{b)} \quad w_0 = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2v+1}} \frac{1}{\sqrt{\frac{V_m}{\varepsilon}}}.$$

Damit bekommt man für den durchschnittlichen mittlern, und den wahrscheinlichen Fehler

$$\text{XXXIII}_1 \text{)} \left\{ \begin{array}{l} D = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2v+1}{3}} \sqrt{\frac{V_m}{\varepsilon}}, \\ M = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2v+1}{3}} \sqrt{\frac{V_m}{\varepsilon}}, \\ P = 0,47694\varepsilon \sqrt{\frac{2v+1}{3}} \sqrt{\frac{V_m}{\varepsilon}}. \end{array} \right.$$

Wollte man noch das nächste der in der Laplace'schen Ableitung vernachlässigten Glieder berücksichtigen, so hätte man

$$\text{XXXII)} \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{3}{2v+1}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{V_m}} \left\{ 1 - \frac{(4v^2 - v + 2)\varepsilon}{160V_m} \right\};$$

$$\text{XXXIII)} \left\{ \begin{array}{l} D = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2v+1}{3}} \sqrt{\frac{V_m}{\varepsilon}} \left\{ 1 + \frac{4v^2 - v + 2}{160V_m} \varepsilon \right\}, \\ M = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2v+1}{3}} \sqrt{\frac{V_m}{\varepsilon}} \left\{ 1 + \frac{4v^2 - v + 2}{160V_m} \varepsilon \right\}, \\ P = 0,47694\varepsilon \sqrt{\frac{2v+1}{3}} \sqrt{\frac{V_m}{\varepsilon}} \left\{ 1 + \frac{4v^2 - v + 2}{160V_m} \varepsilon \right\}. \end{array} \right.$$

Da aber V_m/ε stets eine ganze Zahl ist, wird man die Correctionsglieder in den seltensten Fällen zu berücksichtigen brauchen. Diese Beziehungen zwischen den charakteristischen Fehlern und dem Maximalfehler müssen wenigstens genähert stattfinden, wenn die Laplace'sche Theorie

in der Erfahrung nicht unbegründet sein soll. Namentlich muss, wenn man mit Hilfe einer der drei Gleichungen v berechnet, für diese Grösse eine positive Zahl herauskommen.

Was die Einheit ϵ betrifft, so ist sie immer so zu wählen, dass V_m/ϵ eine ganze Zahl wird; es ist also z. B. $\epsilon = \frac{1}{1000} mm$ zu setzen, wenn V_m gleich $0,104 mm$ gefunden ist, damit $\frac{V_m}{\epsilon} = s_v$ gleich der ganzen Zahl 104 wird.

Die obigen Formeln würden sich sehr dazu eignen, die Laplace'sche Theorie mit der Erfahrung zu vergleichen, indessen wenn wir auch im Stande sind, in jedem Falle die charakteristischen Fehler wenigstens angenähert zu bestimmen, weiss man doch fast nie, welchen Betrag man für den grösstmöglichen Fehler ansetzen soll, und naturgemäss braucht der grösste vorgefallene Fehler noch bei weitem nicht der unter den besonderen Umständen grösstmögliche zu sein. Rechnungen, die ich in dieser Hinsicht ausgeführt habe, scheinen darauf hinzudeuten, dass man $v = 1$ nehmen darf, es ist aber auch etwas zu viel, vorauszusetzen, dass zur Hervorbringung eines Messungsfehlers eine sehr grosse Anzahl von Fehlerquellen wirksam sein müssen, und dass ausserdem jede Fehlerquelle für sich noch eine grosse Mannigfaltigkeit in der Grösse der von ihr verursachten Elementarfehler aufweisen soll.

f) Verteilung der Fehler ihrer Grösse nach.

75. Das Verteilungsgesetz. Von den Wahrscheinlichkeiten der Fehler gehen wir zu den Zahlen über, die deren relative Häufigkeit ausdrücken.

Wir denken uns wie bisher eine Messung unendlich oft wiederholt und bezeichnen die Anzahl der Messungen, die sich dabei als mit einem zufälligen Fehler von der absoluten Grösse V_x behaftet herausstellen, durch N_{V_x} , dann ist nach dem Bernouilli'schen Princip der grossen Zahlen

$$N_{V_1} : N_{V_2} : N_{V_3} : \dots = \varphi(V_1) : \varphi(V_2) : \varphi(V_3) : \dots,$$

oder, indem man die (unendliche) Anzahl aller positiven Fehler mit N bezeichnet,

$$N_{V_1} = 2N\varphi(V_1), \quad N_{V_2} = 2N\varphi(V_2), \quad N_{V_3} = 2N\varphi(V_3), \quad \dots$$

Für numerische Anwendungen ist es vorteilhafter, nicht von Fehlern bestimmter Grösse zu reden, sondern von solchen, deren Betrag zwischen gewissen Grenzen eingeschlossen ist. Man bekommt dann für die Anzahl aller Fehler, die ihrem absoluten Betrage nach zwischen Δ_1 und Δ_2 liegen,

$$N_{\Delta_1}^{\Delta_2} = \frac{1}{\epsilon} 2N \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \varphi(V) dV = \frac{1}{\epsilon} 2N w_0 \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} e^{-\pi w_0^2 \frac{V^2}{\epsilon^2}} dV.$$

Ich setze, wie auf Seite 68,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\vartheta} e^{-t^2} dt = \Theta(\vartheta)$$

und erhalte

$$N_{\Delta_1}^{\Delta_2} = N \left\{ \Theta \left(\sqrt{\pi} w_0 \frac{\Delta_2}{\varepsilon} \right) - \Theta \left(\sqrt{\pi} w_0 \frac{\Delta_1}{\varepsilon} \right) \right\}.$$

Die Grösse w_0 kann man beliebig durch einen der charakteristischen Fehler eliminiren, dem allgemeinen Gebrauch gemäss ersetze ich sie durch den wahrscheinlichen Fehler

$$P = \frac{0,47694\varepsilon}{\sqrt{\pi}w_0}$$

und bekomme

$$\text{XXXIV)} \quad N_{\Delta_1}^{\Delta_2} = N \left\{ \Theta \left(0,47694 \frac{\Delta_2}{P} \right) - \Theta \left(0,47694 \frac{\Delta_1}{P} \right) \right\}.$$

Encke hat im Astronomischen Jahrbuch von 1834 für die Integrale $\Theta(0,47694\Delta/P)$ eine Tafel ausgerechnet, die gleichfalls in dieses Buch aufgenommen ist (Tafel II). Als Argument ist Δ/P angesehen und die Beträge dieses Arguments schreiten von 0,01 zu 0,01 bis zu 5,00 fort.

76. Specielles Beispiel. Streng gilt die obige Formel nur, wenn die Fehler einer unendlich oft wiederholten Messung angehören, man kann aber auch N gleich einer begrenzten grossen Zahl setzen. Sei zum Beispiel die Messung etwa des Widerstandes einer mit Quecksilber gefüllten Glasröhre 1000mal wiederholt, und dabei in irgend einer Weise gefunden, dass der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Bestimmung 0,0001 von dem Gesamtwert des Widerstandes beträgt. Wir setzen $\Delta_1 = 0$ und Δ_2 der Reihe nach gleich 0,00001; 0,00002; ... 0,0001; 0,0002; 0,0003; 0,0004; 0,0005 und haben nach der Tafel II dann:

Werte von $\frac{\Delta}{P}$	Werte von Θ
0,1	0,05378
0,2	0,10731
0,3	0,16035
0,4	0,21268
0,5	0,26407
0,6	0,31430
0,7	0,36317
0,8	0,41052
0,9	0,45619
1,0	0,50000
2,0	0,82266
3,0	0,95698
4,0	0,99302
5,0	0,99926

Der Betrag von N ist gleich 1000, somit wird die Anzahl der Fehler

zwischen 0,00000 und 0,00001	gleich	54	⁵⁴
" " " 0,00002	"	107	⁵³
" " " 0,00003	"	160	⁵³
" " " 0,00004	"	213	⁵²
" " " 0,00005	"	264	⁵¹
" " " 0,00006	"	314	⁵⁰
" " " 0,00007	"	363	⁴⁹
" " " 0,00008	"	411	⁴⁸
" " " 0,00009	"	457	⁴⁶
" " " 0,00010	"	500	⁴⁴
" " " 0,00020	"	823	³²³
" " " 0,00030	"	957	¹³³
" " " 0,00040	"	993	³⁷
" " " 0,00050	"	999	⁶
und noch übersichtlicher			¹

einen Betrag zwischen 0,00000 und 0,00001	haben	54	Fehler,
" " " 0,00001	" 0,00002	" 53	"
" " " 0,00002	" 0,00003	" 53	"
" " " 0,00003	" 0,00004	" 52	"
" " " 0,00004	" 0,00005	" 51	"
" " " 0,00005	" 0,00006	" 50	"
" " " 0,00006	" 0,00007	" 49	"
" " " 0,00007	" 0,00008	" 48	"
" " " 0,00008	" 0,00009	" 46	"
" " " 0,00009	" 0,00010	" 44	"
" " " 0,00010	" 0,00020	" 323	"
" " " 0,00020	" 0,00030	" 133	"
" " " 0,00030	" 0,00040	" 37	"
" " " 0,00040	" 0,00050	" 6	"
" " " 0,00050	" ∞	" 1	"

Man hat also zu erwarten, dass bei 1000 Wiederholungen die Hälfte aller Fehler kleiner sein wird als der wahrscheinliche Fehler, 323 das 1 bis 2fache des wahrscheinlichen Fehlers, 133 das 2 bis 3fache, 37 das 3 bis 4fache, 6 das 4 bis 5fache betragen werden, und nicht vielmehr als einer noch grösser sein wird als das 5fache desselben. Das Beispiel zeigt klar, wie ausserordentlich rasch die Häufigkeit der Fehler abnimmt, wenn ihre Grösse wächst, wie wenig wahrscheinlich also grosse Fehler kleinen gegenüber sind.

77. Analogie aus der kinetischen Gastheorie. Es sei hier noch auf eine zwar nicht wichtige, aber nicht uninteressante Analogie hingewiesen.

Nach der jetzt herrschenden Ansicht über die Constitution der Körper nimmt man an, dass ein ideales Gas aus einer unzähligen Menge von von einander ganz unabhängigen Molekeln besteht, die sich in fortwährender Bewegung befinden. Jedes Molekel kann nach jeder beliebigen Richtung mit jeder beliebigen Geschwindigkeit hinfliegen und wechselt auch, da es ausserordentlich oft mit anderen Molekeln zusammenstösst, seine Bewegungsrichtung selbst in kurzen Zeitintervallen unzählige Mal. Es sind in dem Gase in jedem Moment alle möglichen Geschwindigkeiten und alle möglichen Bewegungsrichtungen vertreten, und das Maxwell'sche Gesetz lehrt,

dass die Anzahl aller Molekel, die in Richtung einer bestimmten Axe, etwa der x Achse, gerade die Geschwindigkeit ξ besitzen, gleich ist

$$N \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{\alpha^2}},$$

wenn N die Anzahl aller Molekel angiebt. Schliessen wir hiernach ein Volumen eines idealen Gases so ab, dass in demselben genau so viele Molekel da sind, als bei einer Messungsmethode mögliche zufällige Fehler, so giebt es ebenso viele Fehler von der Grösse ξ , als Molekel vorhanden sind, die sich mit der Geschwindigkeit ξ bewegen. Die Beträge sind unter die Fehler genau so verteilt wie die Geschwindigkeiten nach bestimmten Axen unter die Molekel eines idealen Gases. Und da in der Gastheorie α proportional ist der Wurzel aus der absoluten Temperatur des Gases, so entspricht dem mittlern Fehler die Wurzel aus der absoluten Temperatur des Gases; mit einem Ansteigen der Temperatur correspondirt ein Ansteigen des mittlern Fehlers u. s. f

g) Bestimmungen ungleicher Schärfe.

78. Zwei Kategorien. Bestimmungen können (Art. 51) aus zwei Gründen ungleiche Schärfe besitzen. Einmal können sie zwar nach derselben Methode, aber aus ungleichen Anzahlen von Einzelmessungen gewonnen sein, dann aber vermag ihnen auch deshalb ungleiche Schärfe zuzukommen, weil die bezüglichen Methoden, die zu ihrer Ableitung dienten, nicht dieselbe Präcision aufweisen.

Im ersten Fall ist eine Bestimmung nichts weiter als das arithmetische Mittel aus einer gewissen Anzahl von gleich scharfen Einzelmessungen. Wir haben daher, um für Bestimmungen solcher Art eine Fehlertheorie zu gewinnen, nichts weiter zu tun, als jede Bestimmung in die Einzelmessungen, deren Resultat sie ist, wieder aufzulösen und auf die Gesamtheit der Einzelmessungen, die ja alle gleich scharf sind, die oben erlangten Ergebnisse anzuwenden. Die Fehlerwahrscheinlichkeiten und die charakteristischen Fehler beziehen sich dann auf die Einzelmessungen, und können auch in jedem Falle berechnet werden, weil man ja die Einzelmessungen kennt. Hier wäre es also nicht nötig, überhaupt sich mit den Bestimmungen zu beschäftigen, denn man braucht gar nicht von den Messungen zu Bestimmungen überzugehen. Im Gegenteil kann gar nicht genug hervorgehoben werden,

31. *dass man Beobachtungen, die wirklich in jeder Hinsicht gleichwertig sind, am besten so ausgleicht, wie man sie erhalten hat, ohne sie vorher in Vorrechnungen zu besondern Gruppen zu vereinigen, überhaupt ohne mit ihnen vorher besondere rechnerische Manipulationen, so weit sie nicht durch den Gang der Untersuchung geboten sind, vorzunehmen.*

Inzwischen ist es manchmal erwünscht und nicht selten auch geboten, die Rechnung selbst auf Kosten ihrer Genauigkeit zu vereinfachen, und dann bietet allerdings die gruppenweise Zusammenfassung von Einzelmessungen zu Bestimmungen ein gutes Mittel, um rascher ans Ziel zu kommen.

79. Wahrscheinlichkeitsfunction. Es seien also $\xi_{x_1}, \xi_{x_2}, \dots, \xi_{x_{p_x}}$ die für eine gewisse Grösse vom Betrage X in Einzelmessungen erhaltenen Werte, die als x te Gruppe zu einer Bestimmung x_x zusammengefasst sind, dann hat man

$$x_x = \frac{\xi_{x_1} + \xi_{x_2} + \dots + \xi_{x_{p_x}}}{p_x}$$

und p_x ist das Gewicht der Bestimmung x_x .

Die Fehler der ξ sind

$$V_{x_1} = X - \xi_{x_1}, \quad V_{x_2} = X - \xi_{x_2}, \quad \dots, \quad V_{x_{p_x}} = X - \xi_{x_{p_x}},$$

also der Fehler der Bestimmung x_x

$$V_x = \frac{V_{x_1} + V_{x_2} + \dots + V_{x_{p_x}}}{p_x}.$$

Hier bedeuten die V_{x_i} die wahren Fehler der ξ , die Fehler dieser Einzelmessungen in Bezug auf den wahren Wert X der gesuchten Grösse. Sie sind streng von den Fehlern v_{x_i} der ξ in Bezug auf die Bestimmung x_x zu trennen, denn diese besitzen die Beträge

$$v_{x_1} = x_x - \xi_{x_1}, \quad v_{x_2} = x_x - \xi_{x_2}, \quad \dots, \quad v_{x_{p_x}} = x_x - \xi_{x_{p_x}},$$

und deren arithmetisches Mittel ist Null, und braucht nicht den wahren Fehler der Bestimmung x_x zu geben. Für die gesuchte Grösse X erhalten wir

$$X = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} + \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2 + \dots + p_n V_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n},$$

das zweite Glied stellt den resultirenden Fehler dar.

Ich nehme an, dass dieser in einem concreten Fall verschwindet und habe dann wie in Art. 56

$$0 = \frac{V_1}{\varphi_1(V_1^2)} \frac{d\varphi_1(V_1^2)}{d(V_1^2)} + \frac{V_2}{\varphi_2(V_2^2)} \frac{d\varphi_2(V_2^2)}{d(V_2^2)} + \dots + \frac{V_n}{\varphi_n(V_n^2)} \frac{d\varphi_n(V_n^2)}{d(V_n^2)},$$

$$0 = V_1 p_1 \quad + \quad V_2 p_2 \quad + \quad \dots + \quad V_n p_n$$

woraus sich, ganz wie an der citirten Stelle, ergibt

$$\varphi_x = A_x e^{-\frac{V_x^2}{\xi^2} \frac{1}{h^2}}.$$

Die Formel ist von n , der Anzahl der Bestimmungen, unabhängig, und da man durch genügende Fortsetzung der Bestimmungen stets dahin gelangen kann, dass

$$p_1 V_1 + p_2 V_2 + \cdots + p_n V_n = 0$$

wird, gilt sie unter allen Umständen.

Jede der Bestimmungen kann mit allen möglichen Fehlern behaftet sein, und ist auch durch irgend einen Fehler (eventuell durch einen solchen, der gleich Null ist) verfälscht. Wir haben daher (Art. 57)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A_x e^{-p_x \frac{V_x^2}{\varepsilon^2} - \frac{1}{h^2}} d\left(\frac{V_x}{\varepsilon}\right) = 1,$$

also nach β_2) in Art. 58

$$A_x = \frac{\sqrt{p_x}}{h\sqrt{\pi}}$$

und

$$\text{XXXVa)} \quad \varphi_x = \frac{\sqrt{p_x}}{h\sqrt{\pi}} e^{-p_x \frac{V_x^2}{\varepsilon^2} - \frac{1}{h^2}}.$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Bestimmung x_x mit einem Fehler von der Grösse V_x verfälscht ist.

80. Zusammenhang zwischen dem wahren mittlern Fehler einer Bestimmung und dem Gewicht derselben. Für eine Bestimmung x_i haben wir entsprechend

$$\varphi_i = \frac{\sqrt{p_i}}{h\sqrt{\pi}} e^{-p_i \frac{V_i^2}{\varepsilon^2} - \frac{1}{h^2}}.$$

Daher ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Bestimmung x_x einen Fehler von der Grösse Null zu begehen,

$$\text{XXXVI)} \quad w_0^{(x)} = \frac{\sqrt{p_x}}{h\sqrt{\pi}}$$

und dieselbe Wahrscheinlichkeit für eine Bestimmung x_i

$$w_0^{(i)} = \frac{\sqrt{p_i}}{h\sqrt{\pi}}$$

und es wird wieder wie früher

$$\text{XXXVb)} \quad w = w_0 e^{-\pi w_0^2 \frac{V^2}{\varepsilon^2}},$$

wo jetzt in w_0 das Gewicht mit enthalten ist.

Wir denken uns die Bestimmungen x_x und x_i als zwei nach verschiedenen Methoden ausgeführte Einzelmessungen und denken uns ferner jede dieser Bestimmungen mit sich gleich bleibender Schärfe ins Unbeschränkte wiederholt, dann können wir bei jeder derselben von einem mittlern Fehler sprechen. Wir wollen die beiden Methoden durch die bezüglichen Symbole (x) , (i) bezeichnen. Der mittlere Fehler einer Einzelbestimmung in der Methode (x) ist

$$\text{XXXVII)} \quad M^{(x)} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi} a_0^{(x)}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \frac{h}{\sqrt{p_x}}$$

und der in der Methode (i)

$$M^{(i)} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi} a_0^{(i)}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \frac{h}{\sqrt{p_i}}$$

Wir bekommen also

$$M^{(x)} : M^{(i)} = \sqrt{p_i} : \sqrt{p_x}$$

Entsprechend ist auch

$$\text{XXXVIII)} \quad D^{(x)} : D^{(i)} = \sqrt{p_i} : \sqrt{p_x}$$

$$P^{(x)} : P^{(i)} = \sqrt{p_i} : \sqrt{p_x}$$

In Worten:

32. *Bei zwei ungleich scharfen Methoden verhalten sich die Gewichte entsprechender Einzelmessungen umgekehrt wie die Quadrate der mittlern oder durchschnittlichen oder wahrscheinlichen Fehler der bezüglichen Einzelmessungen.*

81. Anwachsen der Genauigkeit einer Bestimmung mit dem Gewicht. Nun haben wir gesehen (Art. 61 ff.), dass die hervorgehobenen Fehler die Präcision der Messungen bestimmen. Wir erfahren daher zur Ergänzung der Auseinandersetzungen in Art. 51:

33. *Die Genauigkeit einer Bestimmung steigt nicht direct wie deren Gewicht, sondern nur wie die Quadratwurzel des Gewichts.*

Haben wir z. B. eine Bestimmung aus 16 gleich scharfen Einzelmessungen abgeleitet, so ist zwar ihr Gewicht 16 mal so gross wie das einer der Einzelmessungen, aber ihre Genauigkeit beträgt nur das 4fache der einer der Einzelmessungen, das heisst, man hat bei ihr einen nur 4 mal so kleinen durchschnittlichen, mittlern oder wahrscheinlichen Fehler zu erwarten als bei einer der Einzelmessungen.

82. Verteilung der Fehler in verschiedenen scharfen Bestimmungsreihen. Von den Wahrscheinlichkeiten bestimmter Fehler gehen wir zu denen von Fehlern über, von denen wir nur wissen, dass sie zwischen gewissen Grenzen liegen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Bestimmung x_x mit einem Fehler behaftet ist, dessen absolute Grösse zwischen α_x und β_x liegt, wird

$$w_{\alpha_x}^{\beta_x} = 2 \int_{\alpha_x}^{\beta_x} \varphi_x d\left(\frac{V_x}{\varepsilon}\right) = \frac{2\sqrt{p_x}}{\varepsilon h \sqrt{\pi}} \int_{\alpha_x}^{\beta_x} e^{-p_x \frac{V_x^2}{\varepsilon^2} \frac{1}{h^2}} dV_x$$

oder, indem wir $\sqrt{p_x} \frac{V_x}{\varepsilon} \frac{1}{h} = t$ setzen,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} w_{\alpha_x}^{\beta_x} = \int_{\frac{\alpha_x}{\sqrt{p_x} \frac{1}{h \varepsilon}}}^{\frac{\beta_x}{\sqrt{p_x} \frac{1}{h \varepsilon}}} e^{-t^2} dt.$$

Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler der Bestimmung x_i zwischen den Grenzen α_i , β_i sich befindet, bestimmt durch

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} w_{\alpha_i}^{\beta_i} = \int_{\frac{\alpha_i}{\sqrt{p_i} \frac{1}{h \varepsilon}}}^{\frac{\beta_i}{\sqrt{p_i} \frac{1}{h \varepsilon}}} e^{-t^2} dt.$$

Macht man jetzt

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_i} = \frac{\sqrt{p_i}}{\sqrt{p_x}}, \quad \frac{\beta_x}{\beta_i} = \frac{\sqrt{p_i}}{\sqrt{p_x}},$$

so wird

$$\text{XXXIX)} \quad w_{\alpha_x}^{\beta_x} = w_{\alpha_i}^{\beta_i}, \quad \frac{\alpha_x - \beta_x}{\alpha_i - \beta_i} = \frac{\sqrt{p_i}}{\sqrt{p_x}} = \frac{M^{(x)}}{M^{(i)}} = \frac{D^{(x)}}{D^{(i)}} = \frac{P^{(x)}}{P^{(i)}},$$

also:

34₁. Bei zwei verschieden scharfen Messungsreihen hat man innerhalb gewisser bezüglicher Amplituden der Fehlerbeträge dann dieselbe Anzahl von Fehlern zu erwarten, wenn diese Amplituden und ihre entsprechenden Grenzen im umgekehrten Verhältnis der Quadratwurzeln aus den bezüglichen Gewichten oder im directen Verhältnis der bezüglichen charakteristischen Fehler der beiden Messungsreihen stehen;

oder:

34₂. In einer Messungsreihe vom Gewicht p_i giebt es ebenso viele Fehler, die ihrem Betrage nach zwischen α und β liegen, wie in einer Messungsreihe vom Gewicht p_x solche, die ihrem Betrage nach sich zwischen $\frac{\sqrt{p_i}}{\sqrt{p_x}} \alpha$ und $\frac{\sqrt{p_i}}{\sqrt{p_x}} \beta$ befinden.

Die Gewichte der Einzelmessungen einer Messungsreihe mögen sich gegen die Gewichte der Einzelmessungen einer andern Messungsreihe verhalten wie 16 zu 1, dann finden wir in der zweiten Messungsreihe ebenso viele Fehler, welche ihrem Betrage nach zwischen α und β liegen, wie in der ersten Messungsreihe solche, die ihrem Betrage nach sich zwischen $\alpha/4$ und $\beta/4$ befinden.

Je schärfer eine Messungsreihe ist, um so mehr kleine Fehler enthält sie im Verhältnis zu grossen Fehlern.

83. Verhältnisse zwischen entsprechenden Fehlern zweier ungleich scharfer Methoden. Ich mache nun die Intervalle $\beta_x - \alpha_x$ und $\beta_i - \alpha_i$ enger und enger, dann gelangt man zuletzt zu den Gleichungen

$$w_x = \frac{\sqrt{p_x}}{\varepsilon h \sqrt{\pi}} e^{-p_x \frac{V_x^2 - 1}{\varepsilon^2} \frac{1}{h^2}} dV_x,$$

$$w_i = \frac{\sqrt{p_i}}{\varepsilon h \sqrt{\pi}} e^{-p_i \frac{V_i^2 - 1}{\varepsilon^2} \frac{1}{h^2}} dV_i$$

und w bedeutet hier allgemein die Wahrscheinlichkeit einen Fehler zu begehen, dessen Betrag zwischen $V - \frac{dV}{2}$ und $V + \frac{dV}{2}$ liegt. Nimmt man an, dass dV so klein geworden ist, dass in dem Intervall $-dV/2$ bis $+dV/2$ nur mehr ein einziger Fehler V liegt, so wird offenbar, da die Grössendifferenz zwischen zwei benachbarten Fehlern eine Fehlereinheit beträgt, dV gleich einer Fehlereinheit (ε); wie wir auch sagen können, ein Fehler, der in den Maassen, die für die Grössenbestimmung der Fehler gerade benutzt werden, gleich 1 ist.

In diesem Falle ist also das Intervall gleich 1 und damit erfahren wir, dass für bestimmte Fehler dasselbe gilt, was oben für Fehler, die zwischen gewissen Grenzen eingeschlossen sind, abgeleitet worden ist.

Wir können also ganz allgemein sagen:

35. *Wenn in einer auf eine bestimmte Grösse sich beziehenden Messungsreihe, deren einzelnen Messungen ein und dasselbe Gewicht p_i zukommt, sich die Fehler*

$$V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$$

einstellen, so hat man in einer auf dieselbe Grösse gerichteten Messungsreihe, deren einzelne Messungen ein und dasselbe Gewicht p_x besitzen, die Fehler

$$\sqrt{\frac{p_i}{p_x}} V_1, \sqrt{\frac{p_i}{p_x}} V_2, \sqrt{\frac{p_i}{p_x}} V_3, \dots, \sqrt{\frac{p_i}{p_x}} V_n$$

in beliebiger Folge zu erwarten.

Die Beziehung also, in der zwei Messungsreihen in Bezug auf ihre charakteristischen Fehler stehen, gilt überhaupt für alle ihre Fehler, und der obige Satz bildet die Erweiterung des früheren Satzes 34.

84. Wie sich die zu erwartenden Fehler ändern, wenn das Gewicht einer Bestimmungsreihe geändert wird. Das Theorem bleibt auch noch richtig, wenn man anstatt „Messungsreihe“ ein Mal oder beide Mal setzt „Bestimmungsreihe“ und für „Messung“ „Bestimmung“ substituirt.

36. *Dieselbe Rolle, die in einer Bestimmungs- oder Messungsreihe vom Gewicht p_i die Fehler V_1, V_2, \dots, V_n spielen, kommt in einer Bestimmungs- oder Messungsreihe vom Gewicht p_x den Grössen $\sqrt{\frac{p_i}{p_x}} V_1, \sqrt{\frac{p_i}{p_x}} V_2, \dots, \sqrt{\frac{p_i}{p_x}} V_n$ zu. Da, wo in der ersten Messungsreihe ein Fehler von der Grösse V_α eintreten kann, hat man in der zweiten Messungsreihe einen Fehler von der Grösse $\sqrt{\frac{p_i}{p_x}} V_\alpha$ zu erwarten; umgekehrt entspricht einem Fehler $V^{(\alpha)}$ in der zweiten Messungsreihe ein solcher $\sqrt{\frac{p_x}{p_i}} V^{(\alpha)}$ in der ersten.*

Das gilt aber nur, solange die beiden Messungsreihen sich auf eine und dieselbe Grösse beziehen und jede für sich ins Unbegrenzte fortgesetzt gedacht wird.

Es wird aber jetzt klar, warum die Gewichte die Genauigkeiten der Messungen bestimmen, denn in der Tat zeigt sich, dass je grösser das Gewicht einer Messungsreihe gegenüber dem einer andern ist, um so kleinere Fehler da zu erwarten sind, wie diese grössere aufweist.

Wir wollen den besondern Fall annehmen, dass in einer Messungsreihe allen einzelnen Messungen das Gewicht 1 zukommt, in einer parallel mit dieser vor sich gehenden Bestimmungsreihe die einzelnen Bestimmungen das Gewicht p haben. Einer Messung ξ_x der erstern soll eine Bestimmung x_x der zweiten entsprechen. Sind die Fehler der einzelnen Messungen,

$$V_1, V_2, V_3, \dots, V_n,$$

bekannt, so findet man ohne weitere Untersuchung für die wahrscheinlich eintretenden Fehler der einzelnen Bestimmungen in beliebiger Folge

$$\frac{V_1}{\sqrt{p}}, \frac{V_2}{\sqrt{p}}, \frac{V_3}{\sqrt{p}}, \dots, \frac{V_n}{\sqrt{p}}.$$

Kennt man dagegen die Fehler der einzelnen Bestimmungen, und weiss, sie sind

$$V', V'', V''', \dots, V^{(n)},$$

so wird man schliessen, dass die Fehler der einzelnen Messungen in beliebiger Folge betragen

$$\sqrt{p} V', \sqrt{p} V'', \sqrt{p} V''', \dots, \sqrt{p} V^{(n)}.$$

Speziell ist also

$$\begin{aligned} D' &= \frac{D}{\sqrt{p}}, & D &= \sqrt{p} D', \\ \text{XL)} \quad M' &= \frac{M}{\sqrt{p}}, & M &= \sqrt{p} M', \\ P' &= \frac{P}{\sqrt{p}}, & P &= \sqrt{p} P'. \end{aligned}$$

Das erste dieser drei Gleichungspaare lasse ich ungeändert, es kann gewissermassen als analytischer Ausdruck des Satzes 36) stehen, denn was von den durchschnittlichen Fehlern gilt, hat man ein Recht, auch von den andern Fehlern zu erwarten. Die beiden folgenden ändere ich ab, indem ich sie quadriere, dadurch bekommt man

$$\begin{aligned} \text{XLI)} \quad M'^2 &= \frac{1}{p} M^2, & M^2 &= p M'^2; \\ P'^2 &= \frac{1}{p} P^2, & P^2 &= p P'^2, \end{aligned}$$

und diese Gleichungen bilden den analytischen Ausdruck für den schon citirten Satz:

37. *Die Gewichte zweier Messungsreihen stehen zu einander im umgekehrten Verhältnis der Quadrate der mittleren oder auch wahrscheinlichen Fehler.*

Sie sind auch die naturgemässern: Aus Art. 65, XXIV) wissen wir nämlich, dass

$$M^2 = \overline{V^2}$$

ist. Setzt man die (als unbeschränkt gross anzusehende) Anzahl aller Messungen gleich n , so wird hiernach

$$M^2 = \frac{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + \dots + V_n^2}{n}.$$

Da nun die V , wenn auch nicht in derselben Folge, den $\sqrt{p}V'$, $\sqrt{p}V''$, $\sqrt{p}V'''$, ..., $\sqrt{p}V^{(n)}$ entsprechen, so haben wir auch

$$M^2 = \frac{pV'^2 + pV''^2 + pV'''^2 + \dots + pV^{(n)2}}{n},$$

somit

$$M^2 = p M'^2,$$

und in ähnlicher Weise sind die folgenden Gleichungen abzuleiten.

Es sind somit die Gleichungen XLI), nicht die XL), als Folge des allgemeinen Satzes 36 anzusehen, wenn der mittlere Fehler durch die Wurzel aus dem mittleren Fehlerquadrat definiert wird.

85. Die wahrscheinlichsten Werte für die charakteristischen Fehler einer aus Bestimmungen ungleichen Gewichts zusammengesetzten Bestimmungsreihe. Von diesen Beziehungen, die zwischen verschiedenen scharfen Bestimmungs- oder Messungsreihen stattfinden, können wir leicht auf die charakteristischen Fehler in einer Bestimmungsreihe selbst übergehen, deren einzelne Bestimmungen ungleiches Gewicht haben.

Zunächst ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Bestimmung vom Gewicht p_x mit dem Fehler V_x behaftet ist, gleich

$$\varphi = \frac{\sqrt{p_x}}{h\sqrt{\pi}} e^{-\frac{p_x V_x^2}{h^2 \varepsilon^2}}.$$

Die Constante h bestimmt sich durch die Präcision der Bestimmungsreihe, specieller durch die Präcision der Bestimmung vom Gewicht 1.

Von einem charakteristischen Fehler einer einzelnen Bestimmung im allgemeinen kann natürlich jetzt nicht mehr gesprochen werden, denn da die Bestimmungen nicht gleichwertig sind, werden sie auch nicht gleiche charakteristische Fehler aufweisen. Man darf nur von den charakteristischen Fehlern einer vorgeschriebenen Bestimmung reden. Aber da die Präcision der Bestimmungsreihe völlig klar liegt, wenn man die Präcision auch nur einer Bestimmung kennt (die Gewichte sollten von vornherein gegeben sein), so genügt es allein, die charakteristischen Fehler einer besonderen Bestimmung zu untersuchen.

Nun kann eine Bestimmung vom Gewicht p_i als aus p_i gewissen Einzelmessungen hervorgegangen angesehen werden. Daher wird man von den charakteristischen Fehlern einer Bestimmung einmal insofern sprechen, als die Einzelmessungen, aus denen sie abgeleitet ist, mit Fehlern behaftet sind. In diesem Falle betrachtet man die Bestimmung für sich allein, losgelöst von der ganzen Reihe. Sieht man aber die Bestimmung als Glied der ganzen Bestimmungsreihe an, so kann man auch aus der Art, wie alle Bestimmungen zusammen ausgefallen sind, aus den Fehlern dieser Bestimmungen in Bezug auf das wahrscheinlichste Resultat der ganzen Reihe, auf die charakteristischen Fehler der betreffenden Bestimmung schliessen. Und dieses ist auch das weit genauere Verfahren, weil man es mit einer grössern Anzahl von Einzelergebnissen zu tun hat, ganz so wie man ja auch auf die charakteristischen Fehler einer Messung nicht aus dem wahrscheinlich vorgefallenen Fehler dieser besondern Messung, sondern aus den Fehlern auch aller andern noch angestellten Messungen schliesst.

Es sei p_x das Gewicht einer solchen besondern Bestimmung, D'_x der durchschnittliche Fehler einer Bestimmung vom Gewicht p_x , wenn sie für

sich, losgelöst von der Messungsreihe, betrachtet wird, n die (als sehr gross anzusehende) Anzahl von Bestimmungen, dann haben wir nach XI.) für diesen durchschnittlichen Fehler D_i der hervorgehobenen Bestimmung

$$\begin{aligned}\sqrt{p_i} D_i' &= \sqrt{p_1} D_1', \\ \sqrt{p_i} D_i' &= \sqrt{p_2} D_2', \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \sqrt{p_i} D_i' &= \sqrt{p_n} D_n' .\end{aligned}$$

Keine dieser Gleichungen findet mit absoluter Sicherheit statt, wenn man nicht die D' der einzelnen Bestimmungen dadurch eruiert, dass man jede der Bestimmungen für sich ins Unbegrenzte wiederholt, alle aber sind sie gleichberechtigt, daher ist der aus der ganzen Bestimmungsreihe folgende wahrscheinlichste Wert von D_i

$$\text{XLII}_1) \quad D_i = \frac{1}{\sqrt{p_i}} \frac{\sqrt{p_1} D_1' + \sqrt{p_2} D_2' + \cdots + \sqrt{p_n} D_n'}{n} .$$

Ganz entsprechend erhalten wir aus den Gleichungen XII) als die wahrscheinlichsten Werte von M_i^2 und P_i^2

$$\begin{aligned}\text{XLII}_2) \quad M_i^2 &= \frac{1}{p_i} \frac{p_1 M_1'^2 + p_2 M_2'^2 + \cdots + p_n M_n'^2}{n} , \\ P_i^2 &= \frac{1}{p_i} \frac{p_1 P_1'^2 + p_2 P_2'^2 + \cdots + p_n P_n'^2}{n} .\end{aligned}$$

Unter der hervorgehobenen Bestimmung wollen wir jetzt die verstehen, der das Gewicht 1 zukommt oder zukommen würde, es ist dann $p_i = 1$, markirt man noch die D , M , P dieser Bestimmung — nach unserer Nomenklatur ist sie mit einer Messung identisch — dadurch, dass man ihnen gar keinen Index anhängt, so hat man

$$\begin{aligned}\text{XLIII) } D &= \frac{\sqrt{p_1} D_1' + \sqrt{p_2} D_2' + \cdots + \sqrt{p_n} D_n'}{n} , \\ M &= \sqrt{\frac{p_1 M_1'^2 + p_2 M_2'^2 + \cdots + p_n M_n'^2}{n}} , \\ P &= \sqrt{\frac{p_1 P_1'^2 + p_2 P_2'^2 + \cdots + p_n P_n'^2}{n}} .\end{aligned}$$

Ich bezeichne jetzt mit V_x den wahren Fehler der x ten Bestimmung. Wenn wir von dieser Bestimmung weiter nichts wissen, ist V_x der wahrscheinlichste

Fehler derselben, also der absolute Betrag dieser Grösse der wahrscheinlichste durchschnittliche Fehler D'_x , das Quadrat gleich dem wahrscheinlichsten Quadrat seines mittlern Fehlers M'_x , dieses Quadrat multiplicirt mit der Zahl $(0,67449)^2$ gleich dem wahrscheinlichsten Quadrat des wahrscheinlichen Fehlers, so bekommen wir:

38. Wenn eine Bestimmungsreihe n Bestimmungen von den Gewichten p_1, p_2, \dots, p_n umfasst, und diese Bestimmungen mit den Fehlern V_1, V_2, \dots, V_n bezüglich behaftet sind, so geben die Formeln

$$\begin{aligned} D &= \frac{\sqrt{p_1} |V_1| + \sqrt{p_2} |V_2| + \dots + \sqrt{p_n} |V_n|}{n}, \\ \text{XLIII)} \quad M &= \sqrt{\frac{p_1 V_1^2 + p_2 V_2^2 + \dots + p_n V_n^2}{n}}, \\ P &= 0,67449 \sqrt{\frac{p_1 V_1^2 + p_2 V_2^2 + \dots + p_n V_n^2}{n}} \end{aligned}$$

die wahrscheinlichsten Beträge für den durchschnittlichen, mittlern und wahrscheinlichen Fehler der Bestimmung, der das Gewicht 1 zukommen würde.

Für eine Bestimmung vom Gewicht p hat man

$$\text{XLIV)} \quad D_p = \frac{1}{\sqrt{p}} D, \quad M_p = \frac{1}{\sqrt{p}} M, \quad P_p = \frac{1}{\sqrt{p}} P.$$

Die obigen Formeln gehen zwar für $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$ in die frühern Gleichungen für die charakteristischen Fehler von Messungen über, aber man darf sie doch nicht als Verallgemeinerungen dieser ansehen, denn sie können nicht abgeleitet werden ohne Kenntnis dieser. Jene frühern Formeln sind auch wahr, diese nur wahrscheinlichst, und wenn man aus den letzten Deductionen auf den frühern Fall kommen will, muss man zum System XLIII) zurückkehren, in diesem voraussetzen, dass alle D' aus unzählig vielen Einzelmessungen gewonnen sind, damit das System XLIII) ein wahres wird und dass alle p gleich sind. Alsdann werden alle D' und alle M' oder P einander gleich, und die obigen Deductionen führen lediglich zu Identitäten.

86. Messungen zu Gruppen zusammen zu fassen ist nur unter besondern Verhältnissen zu empfehlen. Es haben diese Formeln nur den Charakter von wahrscheinlichen Gleichungen, sie drücken von vielen Annahmen, die man über die charakteristischen Fehler von Bestimmungen machen kann, die wahrscheinlichsten aus, und man wird sie nur da anwenden, wo man von den Bestimmungen eben nichts weiter weiss, als dass man ihnen die bezüglichen Gewichte p_1, p_2, \dots, p_n zuzuschreiben hat. Man darf sich natürlich zur Abkürzung der Rechnung ihrer auch dann noch bedienen, wenn man weiss, aus welchen Einzelmessungen jede Bestimmung gewonnen ist. Kann man es aber

vermeiden, und erfordert es nicht geradezu der Gang der Untersuchung, so soll man lieber Einzelmessungen nicht gruppenweise zu Bestimmungen zusammenfassen, sondern die charakteristischen Fehler für sie nach den sicherern für Einzelmessungen geltenden Formeln ausrechnen. In einem später zu behandelnden Beispiel wird auch der Unterschied zwischen den beiden Rechnungsarten klar zur Erscheinung kommen.

h) *Wahrscheinlichkeit für Fehlersysteme, Ursprung der Methode der kleinsten Quadrate.*

87. Wahrscheinlichkeit eines Systems von Fehlern. Wir haben uns bisher mit den einzelnen Messungen beschäftigt und für diese die Wahrscheinlichkeiten und charakteristischen Fehler berechnet. Es liegt aber nahe, auch nach den Wahrscheinlichkeiten ganzer Fehlersysteme zu fragen.

Es sei n die Anzahl aller eine und dieselbe Grösse betreffenden gleich scharfen Messungen; die Wahrscheinlichkeit, dass eine dieser Messungen mit einem Fehler V_x behaftet ist, wird

$$\varphi(V_x) = w_0 e^{-\frac{\pi}{2} w_0^2 V_x^2},$$

also die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Messungen gerade die Fehler V_1 und V_2 haben,

$$\varphi(V_1)\varphi(V_2) = w_0^2 e^{-\frac{\pi}{2} w_0^2 (V_1^2 + V_2^2)}.$$

Allgemein ist die Wahrscheinlichkeit, dass das System der n Messungen gerade durch die bezüglichen Fehler V_1, V_2, \dots, V_n verfälscht wird,

$$\text{XLVa)} \quad W = w_0^n e^{-\frac{\pi}{2} w_0^2 (V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2)}.$$

und das ist auch die Wahrscheinlichkeit des Fehlersystems V_1, V_2, \dots, V_n .

88. Die Ausgleichsrechnung als Methode der kleinsten Quadrate. Nun lehrte der Satz 2 im Art. 24, dass von allen Fehlersystemen dasjenige mit dem grössten Recht zu erwarten ist, dessen Wahrscheinlichkeit den grösstmöglichen Betrag erreicht. Den grösstmöglichen Betrag besitzt aber W , wenn $V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2$ seinen geringstmöglichen Betrag hat, also erfahren wir:

391. *In einer Reihe von Messungen steht dasjenige System von Fehlern am meisten zu erwarten, für welches die Summe aller Fehlerquadrate am kleinsten ausfällt.*

Oder auch:

39₂. Das wahrscheinlichste Resultat einer Messungsreihe ist dasjenige, welches ein System von übrig bleibenden Fehlern hinterlässt, bei dem die Summe der Fehlerquadrate so klein als möglich ausfällt.

Offenbar enthält dieser Satz eine neue Auflösung unseres Ausgleichsproblems für Messungen. Es ist leicht zu zeigen, dass auch diese Auflösung zum Princip des arithmetischen Mittels führt, und mit unserer auseinandergesetzten Ausgleichsrechnung identisch ist.

Wenn x das wahrscheinlichste Resultat einer Reihe von Messungen x_1, x_2, \dots, x_n bedeutet, so sind die wahrscheinlichsten Fehler

$$v_1 = x - x_1, v_2 = x - x_2, \dots, v_n = x - x_n,$$

die x_1, x_2, \dots, x_n sind feste beobachtete Grössen, die Fehler v ändern' also ihre Beträge nur je nach der Annahme, die wir über x machen, so dass x die Variable von $v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$ darstellt. Soll x das wahrscheinlichste Ergebnis der Messungen sein, so haben wir nach dem obigen Satz

$$\frac{\partial}{\partial x} (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2) = 0,$$

somit

$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + \dots + v_n \frac{\partial v_n}{\partial x} = 0,$$

aber weil $v_x = x - x_x$ ist, hat man $\partial v_x / \partial x = 1$, also

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0.$$

Diese Gleichung spricht schon das Princip vom arithmetischen Mittel aus, ersetzt man die v durch ihre Beträge, so wird

$$x - x_1 + x - x_2 + \dots + x - x_n = 0$$

oder

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Es führt also der Satz vom Minimum der Fehlerquadratsumme unmittelbar zur Auflösung des Ausgleichsproblems, daher nennt man das ganze Ausgleichsverfahren, welches auf dem Princip des arithmetischen Mittels beruht, auch die *Methode der kleinsten Quadrate*.

89. Das wahrscheinlichste System von Fehlern ist dasjenige, dessen mittlerer Fehler ein Minimum ist. Wir können dem Satz 39 noch eine andere Tatsache abgewinnen. Multiplicirt man in dem Ausdruck für W den Exponenten von e mit n/n , so wird

$$W = w_0^n e^{-\frac{\pi}{\epsilon^2} w_0^2 n \frac{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2}{n}}.$$

Für den Fall, dass n unbeschränkt gross ist, hat man nach Satz 28

$$\frac{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2}{n} = \overline{V^2} = M^2$$

und damit

XLVb)
$$W = w_0^n e^{-\frac{\pi}{\varepsilon^2} w_0^2 n M^2};$$

wenn n nicht unendlich gross ist, ist auch die obige Gleichung nicht streng richtig, sie wird um so genauer, je grösser n ist. Wir können aber sagen:

40. *Das wahrscheinlichste Resultat einer aus nicht zu wenig Einzelbestimmungen bestehenden Messungsreihe ist dasjenige, welches übrig bleibende Fehler ergibt, aus denen der kleinstmögliche mittlere Fehler resultirt.*

Diesen Satz hat Gauss in seinen späteren Arbeiten über die Methode der kleinsten Quadrate als Axiom an die Spitze gestellt, seine Bedeutung ist auch weitgehender als die vom Princip des arithmetischen Mittels, denn er lässt sich, wie später gezeigt werden soll, unmittelbar auf alle Probleme der Ausgleichsrechnung anwenden.

Im wesentlichen geht aber die Vorschrift, der er Ausdruck verleiht, dahin, die Rechnung solle die Messungen so ausgleichen, dass der Fehler der bei der gerade befolgten Beobachtungsmethode wahrscheinlicher zu erwarten steht, als bei irgend einer andern anscheinend so klein als möglich ausfällt.

90. Der mittlere Fehler als Fehler, der bei einer Messungsreihe im Ganzen zu erwarten steht. Andere Bedeutung des Axioms vom Minimum des mittleren Fehlers. Die Gleichung XLV b) lehrt den mittlern Fehler und das Axiom von seinem Minimum noch von einer andern Seite kennen:

Nach XVI) ist

$$M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\varepsilon}{w_0}.$$

somit geht die Gleichung XLV b) über in

XLV c)
$$W = w_0^n e^{-\frac{n}{2}} = \left(w_0 e^{-\frac{1}{2}} \right)^n,$$

aber die dritte Gleichung im System XXIII, Art. 64, lehrt, dass $w_0 e^{-\frac{1}{2}} = \varphi(M)$ die Wahrscheinlichkeit des mittlern Fehlers angiebt, wir haben also auch

XLV d)
$$W = \{ \varphi(M) \}^n.$$

Nun ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle n Messungen mit Fehlern von der Grösse des mittlern Fehlers behaftet sind, gerade gleich $\{ \varphi(M) \}^n$. Die Gleichung XLV d) sagt also aus:

41. *Die Wahrscheinlichkeit für ein System von bestimmten Fehlern ist genau so gross wie die, dass alle diese Fehler den Betrag des aus ihnen resultirenden mittlern Fehlers besitzen.*

Der Satz gilt streng nur für den ideellen Fall eines unbeschränkt grossen n . Von einer unbeschränkt grossen Reihe von eine und dieselbe Grösse betreffenden Messungen hat man demnach im Ganzen zu erwarten, dass alle Messungen mit dem mittlern Fehler $1/(w_0\sqrt{2\pi})$ behaftet sein werden; und wenn man über die Fehler der Messungen nichts weiss, darf man annehmen, dass sie alle die Grösse $1/(w_0\sqrt{2\pi})$ besitzen. Der mittlere Fehler ist also im vollen Sinne des Wortes ein *error medius metuendus*, wie ihn Gauss genannt hat, es ist der Fehler, den man bei der betreffenden Schärfe der Messung in jeder Messung im Mittel befürchten muss. Früher sollte er nur ein Kriterium für die Schärfe der Methode bilden, jetzt sehen wir, dass er auch für die Genauigkeit der Messungen Entscheidung bringt, indem er ihre Verfälschung im Ganzen charakterisirt. Und daraus erhellt recht deutlich, wie dieser mittlere Fehler ganz besonders der eigentlich charakteristische Fehler einer Messungsreihe ist.

Das Axiom vom Minimum des mittlern Fehlers bezeichnet hiernach

42. *diejenige Ausgleichung von Messungen als die wahrscheinlichste und vorteilhafteste, welche Fehler hinterlässt, die im Ganzen so klein als möglich sind. Derjenige Fehler, der sie der Wahrscheinlichkeit nach alle, aber alle zugleich, vertreten kann, muss tunlichst gering werden.*

Und so dürfte das Zweckmässige jenes Axioms allerdings recht einleuchtend sein. Wenn n eine beschränkte Grösse hat, ist
$$\frac{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2}{n}$$

nicht mehr gleich $1/(w_0\sqrt{2\pi})$, doch muss dem letzten Satz immer noch eine genäherte Giltigkeit zugeschrieben werden.

Die vorstehenden Betrachtungen gelten ebenso gut für Messungen ungleicher Schärfe, insofern diese sich praktisch sehr oft, und ideell immer in Messungen gleicher Schärfe auflösen lassen.

V. Uebergang von den wahren Verhältnissen zu den wahrscheinlichsten. Praktische Ausgleichsrechnung.

91. Die Praxis kann sich nicht mit wahren, sondern nur mit wahrscheinlichsten Fehlern beschäftigen. Die Theorie der Messungen und ihrer zufälligen Fehler hat in den vorausgehenden Auseinandersetzungen ihre vollständige Erledigung für den idealen Fall gefunden, dass wir es mit den wahren Fehlern der Messungen zu tun haben. Es ist gezeigt worden, wie man durch genügende Häufung der Einzelbestimmungen in dem arithmetischen Mittel sich dem wahren Resultat der Messungen beliebig zu nähern vermag; wie man für jeden wahren Fehler die Wahrscheinlichkeit

seines Auftretens im Voraus berechnen kann, wenn man die Präcision, die den Einzelbestimmungen inne wohnt, kennt; wir haben gelernt, die wahren charakteristischen Fehler zu bestimmen, Beziehungen zwischen denselben unter einander und mit der Präcision der Messungen abgeleitet, und vor allen Dingen die grundlegenden Annahmen über die zufälligen Fehler klar gestellt.

Allein der Anwendung der erlangten Resultate stellt sich in der Praxis eine vollständig nicht zu überwindende Schwierigkeit entgegen. Die Präcision einer Messungsreihe kann offenbar nur aus den in derselben vorgefallenen Fehlern erschlossen werden, diese Fehler vermögen wir aber nur dann mit Sicherheit anzugeben, wenn wir das wahre Resultat der Messungen in Händen haben. Nun können wir allerdings durch das arithmetische Mittel aus den Messungen ein bestimmtes Resultat ableiten, da jedoch dieses Mittel zum wahren Resultat sicher nur dann führt, wenn die Messungen ins Unbeschränkte wiederholt sind, in der Wirklichkeit aber jede Messungsreihe ihre Grenze hat, so wissen wir nie, ob das aus dem arithmetischen Mittel berechnete Ergebnis den wahren Wert der gesuchten Grösse darstellt, wir können nur sagen, dass es den unter den obwaltenden Umständen wahrscheinlichsten Wert liefert. Bildet man dann zwischen dem so erlangten Ergebnis und den Einzelbestimmungen die Differenzen, so dürfen diese nicht als wahre, sondern nur als wahrscheinlichste Fehler angesehen werden.

In der Praxis haben wir es nicht mit wahren, sondern nur mit wahrscheinlichsten Fehlern zu tun, daraus folgt aber zunächst, dass wir über die Präcision der Messungen absolut Sicheres auch nicht aussagen können, sondern nur Wahrscheinlichstes.

92. Zwei Gründe, aus denen die charakteristischen Fehler in der Wirklichkeit nicht genau berechnet werden können. Es kommt noch ein beeinträchtigender Umstand hinzu: Die Präcision einer Messungsreihe leiten wir aus den charakteristischen Fehlern ab, die Definitionen dieser charakteristischen Fehler setzen aber, weil sie (Art. 65) auf bestimmten zwischen $-\infty$ und $+\infty$ genommenen Integrationen basirt sind, voraus, dass uns alle unzähligen vielen bei den betreffenden Messungen überhaupt möglichen, also nicht blos die wirklich vorgefallenen Fehler bekannt sind, was nicht der Fall ist. Die charakteristischen Fehler können daher aus zwei Gründen nicht genau berechnet werden. Einmal stehen uns nicht die wahren Fehler zu Gebote, sondern nur die wahrscheinlichsten, dann aber kennen wir nur eine beschränkte Anzahl von Fehlern, sind also nicht in der Lage den Definitionen der charakteristischen Fehler streng zu genügen.

Wir müssen nun zusehen, welchen Einfluss alle diese Umstände auf unsere Theorie haben, dann aber untersuchen, inwiefern sie der Erfahrung, die immer nur mit wahrscheinlichsten Ergebnissen zu rechnen vermag, entspricht.

Der Einfachheit wegen gehe ich von gleich scharfen Messungen aus.

93. Die wahrscheinlichsten Fehler weichen alle um eine und dieselbe Grösse, den resultirenden Fehler, von den wahren Fehlern ab. Für eine Grösse vom wahren Betrage X seien in n Messungen die n Werte $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ erlangt. Wir haben dann für die wahren Fehler dieser Messungen

$$V_1 = X - x_1, V_2 = X - x_2, V_3 = X - x_3, \dots, V_n = X - x_n.$$

Das wahrscheinlichste Resultat der Messungen ist

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n},$$

daher haben die wahrscheinlichsten Fehler die Beträge

$$v_1 = x - x_1, v_2 = x - x_2, v_3 = x - x_3, \dots, v_n = x - x_n.$$

wobei

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = 0$$

ist.

Nun bezeichne ich den wirklichen Fehler des wahrscheinlichsten Resultats mit R ; wir haben dann

$$\text{XLVI)} \quad X - x = R,$$

somit

$$\text{XLVII)} \quad v_1 = V_1 - R, v_2 = V_2 - R, v_3 = V_3 - R, \dots, v_n = V_n - R.$$

43. *Die wahrscheinlichsten Fehler weichen von den entsprechenden wahren Fehlern alle um eine und dieselbe Grösse R , um den Betrag des resultirenden Fehlers des Resultats ab.*

Umgekehrt haben wir

$$\text{XLVIII)} \quad V_1 = v_1 + R, V_2 = v_2 + R, V_3 = v_3 + R, \dots, V_n = v_n + R;$$

wie gross R ist, wissen wir nicht, daher sind wir nicht im Stande, aus den obigen Gleichungen die wahren Fehler abzuleiten. Man könnte nun eine Hypothese über R machen: zum Beispiel wäre es vielleicht einleuchtend, wenn man annehmen wollte, dass R als der Fehler eines Resultats von n Messungen nur $1/n$ so gross ist, wie der durchschnittliche Fehler einer Einzelmessung. Aber in den vorstehenden Gleichungen muss R mit dem Zeichen, das ihm zukommt, benutzt werden, über das Zeichen des resultirenden Fehlers aber kann keine Hypothese gemacht werden, denn die Wahrscheinlichkeitsrechnung sagt über Zeichen naturgemäss nichts aus. Unsere Formeln haben also zunächst nur einen idealen Wert, und ein solcher muss auch allen anderen Beziehungen zugeschrieben werden, in denen R in einer ungeraden Potenz vorkommt. Wenn wir daher irgend etwas über den Uebergang aus der Theorie in die Praxis erfahren wollen, müssen wir zu Beziehungen unsere Zuflucht nehmen, die R nur in geraden Potenzen enthalten.

Wir haben also vor allen Dingen uns mit dem mittlern Fehler zu beschäftigen.

94. Berechnung der charakteristischen Fehler aus den wahrscheinlichsten Fehlern. Der Definition durch die möglichen wahren Fehler nach ist das Quadrat des wahren mittlern Fehlers

$$M^2 = \overline{V^2}.$$

Sieht man zunächst von dem Umstände, dass die Anzahl n der Einzelmessungen tatsächlich nur eine beschränkte sein kann, ab, so wird man deshalb setzen

$$M^2 = \frac{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + \dots + V_n^2}{n}.$$

Ich führe an Stelle der wahren Fehler die wahrscheinlichsten ein, dann ist nach XLVIII)

$$M^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2 + 2R(v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n) + nR^2}{n},$$

aber man hat

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = 0,$$

somit unter Beachtung der in Art. 14 getroffenen Festsetzungen über das Verhältnis der Symbolisirungen von wahrscheinlichsten Grössen zu denen von wahren

$$M^2 = m^2 + R^2.$$

R ist auch der allgemeine Fehler der wahrscheinlichsten Fehler, setzen wir die Fehler dieser wahrscheinlichsten Fehler gleich $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$, so haben wir

XLVIII b)
$$R = \delta_1, = \delta_2, = \delta_3, \dots, = \delta_n,$$

also auch

XLIX)
$$R^2 = \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \dots + \delta_n^2}{n}.$$

Daher bedeutet R auch den wahren mittlern Fehler eines wahrscheinlichsten Fehlers, bezeichnen wir denselben mit M , so ist

L)
$$M^2 = m^2 + M^2.$$

Bei einer unbeschränkten Anzahl von Messungen ist $x = X$ und somit $M = 0$, im ungünstigsten Falle aber, wo uns nur eine Messung zu Gebote steht, ist $v_1 = 0$, somit $M = M$. Es schwankt M zwischen den beiden Werten 0 und M . Nun nimmt die Präcision einer Bestimmung, also das Reciproke des mittlern Fehlers derselben, nach Art. 80 mit wachsender Anzahl der Messungen so zu, wie die Quadratwurzel aus dieser Anzahl, die wahrscheinlichsten Fehler der einzelnen Messungen werden daher ganz ähnlich an Präcision zunehmen müssen. Sie werden sich, je grösser die Anzahl der Messungen wird, um so mehr den wahren Fehlern nähern, aber sie werden sich ihnen auch nicht proportional der Anzahl, sondern proportional der

Quadratwurzel aus der Anzahl nähern. Man wird daher in erster Näherung wol annehmen können, dass der mittlere Fehler der wahrscheinlichsten Fehler so abnimmt, wie die Quadratwurzel der Anzahl der Messungen zunimmt, also setzen dürfen

$$M = \frac{A}{\sqrt{n}},$$

wo A nicht mehr von n abhängt. Aber für $n = 1$ muss, wie wir gesehen, $M = M$ werden, daher ist die, wie es scheint, durchaus gerechtfertigte Annahme über M

$$M = \frac{M}{\sqrt{n}}.$$

Damit geht unsere Gleichung über in

$$M^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = m^2$$

oder

$$\text{LI)} \quad M = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2}{n-1}}.$$

In der Definition durch die wahren Fehler war

$$M = \sqrt{\frac{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + \dots + V_n^2}{n}}.$$

Die Formeln unterscheiden sich also namentlich darin, dass hier n , dort $n - 1$ als Divisor auftritt. Die Bedeutung unserer neuen Formel für M ist aber in dem Satz ausgesprochen:

44₁. *Aus den wahrscheinlichsten Fehlern einer Reihe von Messungen erhält man einen angenäherten Wert für den wahren mittlern Fehler derselben, also auch für die wahre Präcision der Messungen, indem man ihn so berechnet, wie wenn die Anzahl der Messungen um Eins verringert ist, die Anzahl der Fehler aber ungeändert bleibt.*

Nun gehört zur Bestimmung einer Grösse mindestens eine Messung derselben, haben wir n Messungen angestellt, so sind $n - 1$ davon überschüssig. Wir können daher auch sagen:

44₂. *Bei der Bildung des mittlern Fehlers aus den wahrscheinlichsten Fehlern kommt nicht die ganze Anzahl der Messungen in Betracht, sondern der Ueberschuss über der durchaus notwendigen.*

In dieser Form lässt sich der Satz sehr leicht verallgemeinern, wie wir später sehen werden. Der genäherte Wert für den wahrscheinlichen Fehler ist natürlich

$$\text{LII)} \quad P = 0,67449 \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2}{n-1}}.$$

Was den durchschnittlichen Fehler anbetrifft, so lässt sich für ihn eine solche Betrachtung nicht durchführen, weil in ihm R in der ersten Potenz und auch nicht als absolute Zahl enthalten ist. Wenn man aber bedenkt, dass nach Art. 63 der durchschnittliche Fehler ganz unabhängig von der Art der Messung und ihrer Präcision zu dem mittlern ein ganz bestimmtes Verhältnis hat, so müssen wir, um mit unsern obigen Annahmen in Einklang zu bleiben, sein Quadrat formell genau so modificiren, wie das Quadrat des mittlern Fehlers. Nun ist aber

$$D = \frac{|V_1| + |V_2| + |V_3| + \cdots + |V_n|}{n},$$

wo $|V|$ den absoluten Betrag der Grösse V angiebt, also haben wir bei dem Uebergang zu den wahrscheinlichsten Fehlern zu setzen

$$D^2 = \frac{\{|v_1| + |v_2| + |v_3| + \cdots + |v_n|\}^2}{n(n-1)}$$

oder

$$\text{LIII)} \quad D = \frac{|v_1| + |v_2| + |v_3| + \cdots + |v_n|}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

95. Die Rechnungen liefern angenäherte wahre, nicht blos wahrscheinlichste Werte für die charakteristischen Fehler. Ich werde fortan die Buchstaben D , M , P ausschliesslich für die wahren aus den wahren Fehlern berechneten charakteristischen Fehler benutzen, die wahren aus den wahrscheinlichsten Fehlern abgeleiteten bezeichne ich hinfort mit bezüglich δ , μ , r . Es sind, und darauf muss besonders hingewiesen werden, die δ , μ , r nicht blos wahrscheinlichste Werte der charakteristischen Fehler, sondern annähernd wahre; die wahrscheinlichsten Beträge der charakteristischen Fehler müssen wir nach unsern Festsetzungen mit d , m , ρ bezeichnen.

96. Berechnung der Präcision. Der Zweck der charakteristischen Fehler ist Aufschluss über die Präcision der Messungen zu geben. Als Maass der Präcision dient aber unsere Constante w_0 , das ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Messung mit einem Fehler Null behaftet sein wird, denn es ist klar, dass, je grösser diese Wahrscheinlichkeit ist, man um so mehr Aussicht hat, in den Messungen öfter kleine, als grosse Fehler anzutreffen.

Wir haben nun nach den Gleichungen XXI) XIX) und XXVIII)

$$D = \frac{0,31831\varepsilon}{w_0}, \quad M = \frac{0,39895\varepsilon}{w_0}, \quad P = \frac{0,26909\varepsilon}{w_0}$$

oder

$$w_0 = \frac{0,31831\varepsilon}{D}, \quad w_0 = \frac{0,39895\varepsilon}{M}, \quad w_0 = \frac{0,26909\varepsilon}{P}$$

und, indem wir den genäherten Wert von w_0 mit ω_0 bezeichnen,

$$\text{LIV)} \quad \omega_0 = \frac{0,31831\varepsilon}{\delta}, \quad \omega_0 = \frac{0,39895\varepsilon}{\mu}, \quad \omega_0 = \frac{0,26909\varepsilon}{r}.$$

Alle drei Gleichungen müssen, wenn n , die Anzahl der Messungen, unbeschränkt gross ist, dasselbe Resultat ergeben. Der wahrscheinliche Fehler r entspricht seiner Form nach genau dem mittlern Fehler μ , nur dass er den Factor 0,67449 vor dem Wurzelzeichen hat; die zweite und dritte Gleichung führen also unter allen Umständen zu demselben Betrage von ω_0 . Die erste Gleichung kann auch nichts anderes finden lassen, wenn n unendlich gross ist; wenn aber n einen beschränkten Betrag hat, braucht sie keineswegs dasselbe zu ergeben, wie die beiden andern.

Wir können aber noch weiter gehen, denn die obigen Formeln sind nicht die einzigen, aus denen ω_0 sich berechnen lässt. Aus dem Gleichungssystem XXIV a) folgt nämlich allgemein

$$\text{LV)} \quad \left\{ \begin{array}{l} w_0 = \left\{ \frac{x!}{\pi^{x+1}} \right\}^{\frac{1}{2x+1}} \cdot \left\{ \frac{\varepsilon}{|V|^{2x+1}} \right\}^{\frac{1}{2x+1}}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots \\ w_0 = \left\{ \frac{(2x)!}{2^{2x} x!} \frac{1}{\pi^x} \right\}^{\frac{1}{2x}} \cdot \left\{ \frac{\varepsilon}{V^{2x}} \right\}^{\frac{1}{2x}}, \quad x = 1, 2, 3, 4, \dots \end{array} \right.$$

Die Gleichungen bestehen streng für jedes x , wenn n unendlich gross ist, und man kann in diesem Falle, in dem man unter V stets seinen absoluten Betrag versteht, setzen:

$$\overline{V}^\alpha = \frac{V_1^\alpha + V_2^\alpha + V_3^\alpha + \dots + V_n^\alpha}{n}.$$

Speciell haben wir für $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

$$w_0 = \frac{0,31831}{\overline{V}^1},$$

$$w_0 = \frac{0,39895}{(\overline{V}^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$w_0 = \frac{0,46620}{(\overline{V}^3)^{\frac{1}{3}}},$$

$$w_0 = \frac{0,52504}{(\overline{V}^4)^{\frac{1}{4}}},$$

$$w_0 = \frac{0,58000}{(\overline{V}^5)^{\frac{1}{5}}},$$

$$w_0 = \frac{0,62618}{(\overline{V}^6)^{\frac{1}{6}}},$$

u. s. f.

97. Einfluss der Beschränktheit der Messungswiederholungen auf die Berechnung der Präzision und der charakteristischen Fehler. Die wahrscheinliche Unsicherheit dieser Berechnung. Relativ am geringsten ist dieselbe bei der des mittlern Fehlers. Bei begrenztem n führen natürlich die einzelnen Formeln nicht zu demselben Resultat, weil eben die allgemeinen Formeln, als aus Integrationen nach V zwischen $-\infty$ und $+\infty$ hervorgegangen, voraussetzen, dass die Mittelwerte der V aus allen überhaupt nur möglichen, nicht bloß den wirklich eingetroffenen Fehlern gebildet werden. Gauss hat untersucht, welche der obigen Formeln einen dem wahren Betrage von w_0 am nächsten kommenden Wert liefert. Hinsichtlich seines merkwürdigen Gedankenganges und seiner Entwicklungen verweise ich auf das Original,*) die Resultate, zu denen er gelangt ist, lasse ich folgen.

Bezeichnet man mit bezüglich $w_0^{(\kappa)}$ den aus dem Mittelwert der κ ten Potenz der Fehler berechneten Betrag von w_0 , so dass für $\kappa = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ die oben angegebenen Werte resultiren würden, so findet Gauss, dass die wahrscheinliche Unsicherheit für nicht zu kleine Werte von n absolut genommen beträgt bei

$$w_0^{(1)} : \frac{0,510}{\sqrt{n-1}} w_0^{(1)},$$

$$w_0^{(2)} : \frac{0,477}{\sqrt{n-1}} w_0^{(2)},$$

$$w_0^{(3)} : \frac{0,497}{\sqrt{n-1}} w_0^{(3)},$$

$$w_0^{(4)} : \frac{0,551}{\sqrt{n-1}} w_0^{(4)},$$

$$w_0^{(5)} : \frac{0,636}{\sqrt{n-1}} w_0^{(5)},$$

$$w_0^{(6)} : \frac{0,756}{\sqrt{n-1}} w_0^{(6)},$$

u. s. f.

Die wahrscheinliche Unsicherheit bei w_0 ist dabei ganz in demselben Sinne zu verstehen wie der wahrscheinliche Fehler bei einer Messung. Gauss findet also:

Man kann 1 gegen 1 wetten, dass der wahre Betrag der Präzision w_0 liegt zwischen

*) Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen. Werke Bd. IV, 109—117.

$$\begin{aligned}
 w_0^{(1)} - \frac{0,510}{\sqrt{n-1}} w_0^{(1)} & \text{ und } w_0^{(1)} + \frac{0,510}{\sqrt{n-1}} w_0^{(1)}, \\
 w_0^{(2)} - \frac{0,477}{\sqrt{n-1}} w_0^{(2)} & \text{ „ } w_0^{(2)} + \frac{0,477}{\sqrt{n-1}} w_0^{(2)}, \\
 w_0^{(3)} - \frac{0,497}{\sqrt{n-1}} w_0^{(3)} & \text{ „ } w_0^{(3)} + \frac{0,497}{\sqrt{n-1}} w_0^{(3)}, \\
 w_0^{(4)} - \frac{0,551}{\sqrt{n-1}} w_0^{(4)} & \text{ „ } w_0^{(4)} + \frac{0,551}{\sqrt{n-1}} w_0^{(4)}, \\
 w_0^{(5)} - \frac{0,636}{\sqrt{n-1}} w_0^{(5)} & \text{ „ } w_0^{(5)} + \frac{0,636}{\sqrt{n-1}} w_0^{(5)}, \\
 w_0^{(6)} - \frac{0,756}{\sqrt{n-1}} w_0^{(6)} & \text{ „ } w_0^{(6)} + \frac{0,756}{\sqrt{n-1}} w_0^{(6)},
 \end{aligned}$$

u. s. f.

Am geringsten ist hiernach die Unsicherheit, wenn man w_0 aus $w_0^{(2)}$ bestimmt, das heisst:

45. Bei einer unbeschränkten Reihe von Messungen kann der Mittelwert jeder beliebigen Potenz der absolut gerechneten zufälligen Fehler als Maass der Präcision benutzt werden; wenn jedoch die Messungsreihe beschränkt ist, tut man am besten das mittlere Fehlerquadrat, also den mittlern oder wahrscheinlichen Fehler, als solches anzusehen.

Damit ist eine neue praktisch sehr wichtige Eigenschaft des mittlern Fehlers gefunden.

Wenn die einzelnen Formeln für w_0 alle gleich sichere Resultate geben sollen, so muss man zur Auswertung jeder derselben eine besondere Anzahl von Versuchen verwenden, und zwar hat man unter Fortlassung der bei grossen n nicht in Betracht kommenden 1

$$\frac{0,510}{\sqrt{n_1}} = \frac{0,477}{\sqrt{n_2}} = \frac{0,497}{\sqrt{n_3}} = \frac{0,551}{\sqrt{n_4}} = \frac{0,636}{\sqrt{n_5}} = \frac{0,756}{\sqrt{n_6}} = \dots$$

Das von Gauss gewählte Beispiel ist:

Mit 100 Beobachtungen aus dem mittlern Fehlerquadrat berechnet, erhält man für die Präcision der Messungen ein ebenso sicheres Resultat wie mit

114	aus der mittlern	ersten Potenz der Fehler,
100	„ „ „	zweiten „ „ „
109	„ „ „	dritten „ „ „
133	„ „ „	vierten „ „ „
178	„ „ „	fünften „ „ „
251	„ „ „	sechsten „ „ „

u. s. f.

Nächst der mittlern zweiten Potenz ist also die mittlere dritte und dann erst die mittlere erste Potenz zur Ableitung der Präzision am geeignetsten.

Entsprechend der hier festgehaltenen Ansicht von dem Vorzug der mittlern Zahl gegenüber der wahrscheinlichen, werde ich im Folgenden statt der wahrscheinlichen Unsicherheit die mittlere, das ist das $(0,674)^{-1}$ fache jener einführen, diese ist dann zugleich die wahrscheinlichste Unsicherheit.

Ich fasse jetzt der leichtern Uebersichtlichkeit wegen alles zusammen.

98. Zusammenfassung. *Da in der Praxis eine Messung nur eine beschränkte Anzahl von Wiederholungen erfahren kann, so vermag man nie mit Sicherheit zu sagen, ob das aus den Messungen abgeleitete Resultat das wahre ist, man kann ihm nur grösste Wahrscheinlichkeit zusprechen, daher kennt man auch nicht die wahren Fehler der Messungen, sondern nur die wahrscheinlichsten.*

Der Umstand, dass nur die wahrscheinlichsten Fehler bekannt sind, bewirkt, dass man die wahren charakteristischen Fehler und die wahre Präzision der Messungen nicht genau zu berechnen vermag, sondern nur näherungsweise.

Der Umstand, dass die Anzahl der Messungen beschränkt ist, bewirkt, dass man auch für die Näherungswerte der charakteristischen Fehler und der Präzision keine genauen Zahlen angeben kann, sondern nur zu sagen vermag, zwischen welchen Grenzen ihre Beträge wahrscheinlich eingeschlossen sind; diese Grenzen sind am engsten bei dem mittlern Fehler, daher dieser sich am meisten zur Ausmittlung der Präzision eignet.

Wir haben aber

$$\text{LVI) } \left\{ \begin{array}{l} \delta = \frac{|v_1| + |v_2| + |v_3| + \dots + |v_n|}{\sqrt{n(n-1)}} \left(1 \pm \frac{0,756}{\sqrt{n-1}} \right), \\ \mu = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2}{n-1}} \left(1 \pm \frac{0,708}{\sqrt{n-1}} \right), \\ r = 0,674 \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2}{n-1}} \left(1 \pm \frac{0,708}{\sqrt{n-1}} \right), \\ \text{und am geeignetsten} \\ \omega_0 = 0,39895 \sqrt{\frac{n-1}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2}} \left(1 \pm \frac{0,708}{\sqrt{n-1}} \right). \end{array} \right.$$

Das gilt für Messungen gleicher Schärfe.

Für Messungen ungleicher Schärfe, für solche, denen die von einander verschiedenen Gewichte $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ zukommen, findet man in ganz derselben Weise mit hinreichender Annäherung, indem man

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$$

setzt und unter δ_x , μ_x , r_x die charakteristischen Fehler einer Messung, der das Gewicht p_x zukommt, versteht

$$\text{LV1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_x = \frac{\sqrt{p_1} |v_1| + \sqrt{p_2} |v_2| + \dots + \sqrt{p_n} |v_n|}{\sqrt{p_x} \sqrt{n(n-1)}} \left(1 \pm \frac{0,756}{\sqrt{n-1}} \right), \\ \mu_x = \sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2}{p_x (n-1)}} \left(1 \pm \frac{0,708}{\sqrt{n-1}} \right), \\ r_x = 0,67449 \sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2}{p_x (n-1)}} \left(1 \pm \frac{0,708}{\sqrt{n-1}} \right), \\ \omega_x = 0,39895 \sqrt{\frac{p_x (n-1)}{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2}} \left(1 \pm \frac{0,708}{\sqrt{n-1}} \right). \end{array} \right.$$

Das sind aber alles Näherungsformeln, die um so sichere Resultate ergeben, je grösser n ist.

Indessen wie ungünstig auch anscheinend die Beschränktheit der Messungswiederholungen auf die Eruirung der Schärfe der Messungen einwirken mag, so steht doch bei den Messungen selbst die Praxis mit der Theorie auf gleicher Stufe, denn für beide sind dieselben Grössen massgebend, und die bezüglichen Beträge der entscheidenden Grössen werden im allgemeinen bei beiden von derselben Ordnung sein.

99. Unterschied zwischen Theorie und Praxis hinsichtlich der Beurteilung des Resultats einer Messungsreihe. Ganz anders wird das Verhältnis zwischen Theorie und Praxis, wenn wir von den einzelnen Messungen zu ihrem Resultate übergehen.

Es ist klar, dass man da, wo man die wahren Fehler kennt, wol von Fehlern der einzelnen Messungen reden kann, nicht aber von einem Fehler des Resultats, das Resultat ist ganz fehlerfrei, es hat weder einen durchschnittlichen, noch einen mittlern, noch einen wahrscheinlichen, noch überhaupt irgend einen Fehler. Man kann in diesem Falle auch nicht von der besonderen Präcision des Resultats reden, diese ist immer gleich gross (nämlich unbeschränkt gross), die Präcision der einzelnen Messungen mag bedeutend oder gering sein.

Dagegen, wenn man, wie das in der Praxis immer der Fall ist, nicht die wahren, sondern nur die wahrscheinlichsten Fehler kennt, so besitzt man in dem Resultat der Messungen auch nicht das sichere Ergebnis derselben, sondern nur das wahrscheinlichste, und hier kann und muss man von einem Fehler des Resultats und von der Präcision desselben sprechen, denn wenn das Resultat sicher keinen Fehler hätte, wäre es eben nicht blos das wahrscheinlichste, sondern überhaupt das einzige richtige. Dazu kommt noch, dass in der Praxis der Betrag des Resultats von der Anzahl der zu

seiner Ausrechnung benutzten Messungen abhängt. Aus n Messungen würde zum Beispiel folgen

$$x' = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n},$$

aus m dagegen

$$x'' = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m}{m}.$$

x' ist das wahrscheinlichste Resultat für die betreffenden n Messungen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$; und x'' ist das wahrscheinlichste Resultat für die betreffenden Messungen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$, sie brauchen einander nicht gleich zu sein, keines von ihnen braucht absolut richtig zu sein, jedes ist nur in Bezug auf die Messungen, aus denen es abgeleitet ist, das wahrscheinlichste; jedes wird daher mit einem besondern Fehler behaftet sein, der sowol von der Schärfe der benutzten Messungen wie von der Anzahl derselben abhängen muss.

100. Die charakteristischen Fehler und die Präcision des Resultats.

Es ist nun sehr leicht zu den Fehlern des Resultats zu gelangen.

Da das Resultat das Mittel einer Anzahl, n , von Einzelmessungen ist, so kann man es nach Art. 50 wie eine Bestimmung betrachten, dessen Gewicht so gross ist wie die Gewichte der Einzelmessungen zusammengenommen.

Seien also die Gewichte der Einzelmessungen bezüglich $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, so haben wir für das Gewicht des Resultats nach Art. 52

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n$$

und wir können das Resultat als aus einer Einzelmessung vom Gewicht $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n$ hervorgegangen ansehen.

Das Resultat einer beschränkten Messungsreihe steht also mit dem Ergebnis einer einzelnen Messung principiell auf gleicher Stufe. Nun lehrt der Satz 37 in Art. 84, dass die Gewichte zweier Messungen sich zu einander umgekehrt verhalten wie die Quadrate ihrer mittlern Fehler. Bezeichnen wir also den mittlern Fehler des Resultats mit M_r , den einer Messung vom Gewicht p_x mit M_{p_x} , so haben wir

$$p : p_x = M_{p_x}^2 : M_r^2,$$

daraus das gesuchte

$$M_r = \sqrt{\frac{p_x}{p}} M_{p_x}.$$

Diese Formel gilt streng genommen freilich nur in dem Falle, wo wir es mit den wirklichen Beträgen der mittlern Fehler zu tun haben; man darf sie

aber auch, wenn n nicht gerade zu klein ist, unbedenklich auf unsern Fall ausdehnen, wo wir für M nur einen Näherungswert anzugeben im Stande sind und hat dann, indem man den Näherungswert von M_r mit μ_r bezeichnet,

$$\mu_r = \sqrt{\frac{p_x}{p}} \mu_{p_x}.$$

Es ist aber

$$\mu_{p_x} = \sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2}{p_x (n-1)}} \left(1 \pm \frac{0,708}{\sqrt{n-1}}\right),$$

also

$$\mu_r = \sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2}{p (n-1)}} \left(1 \pm \frac{0,708}{\sqrt{n-1}}\right).$$

Ich bezeichne jetzt allgemein mit δ , μ , r , ω charakteristische Fehler und Präcision einer Messung, der nach Art der wirklich ausgeführten Messungen das Gewicht 1 zukommen würde, setze also

$$\text{LVII) } \left\{ \begin{array}{l} \delta = \frac{\sqrt{p_1} |v_1| + \sqrt{p_2} |v_2| + \dots + \sqrt{p_n} |v_n|}{\sqrt{n(n-1)}} \left(1 \pm \frac{0,756}{\sqrt{n-1}}\right), \\ \mu = \sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2}{n-1}} \left(1 \pm \frac{0,708}{\sqrt{n-1}}\right), \\ r = 0,67449 \sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2}{n-1}} \left(1 \pm \frac{0,708}{\sqrt{n-1}}\right), \\ \omega = 0,39895 \sqrt{\frac{n-1}{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2}} \left(1 \pm \frac{0,708}{\sqrt{n-1}}\right), \end{array} \right.$$

und erhalte

$$\text{LVIII) } \delta_r = \frac{\delta}{\sqrt{p}}, \quad \mu_r = \frac{\mu}{\sqrt{p}}, \quad \lambda_r = \frac{\lambda}{\sqrt{p}}, \quad \omega_r = \sqrt{p} \omega,$$

$$\text{LIX) } p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n,$$

Formeln, die die charakteristischen Grössen des Resultats in sehr einfacher Weise mit denen der einzelnen Messungen verbinden.

100a. Der mittlere Fehler des Resultats ist zugleich der wahrscheinlichste Fehler desselben. Wir haben früher auch noch den resultirenden Fehler eingeführt, indem wir darunter den wirklichen Fehler des Resultats

verstanden. Ist X der wahre Betrag der gesuchten Grösse, x der aus den Messungen wahrscheinlichst folgende, so war der Resultirende Fehler

$$R = X - x.$$

Wir wissen nun, dass wir das Resultat einer Messungsreihe auch wie das Ergebnis einer einzelnen Messung von grösserem Gewicht ansehen können.

Ferner aber ergibt sich aus dem Satze 40 in Art. 90, dass die Wahrscheinlichkeit für ein System von Fehlern genau so gross ist, wie die, dass alle diese Fehler den Betrag des aus ihnen resultirenden mittlern Fehlers besitzen. Bei einer einzelnen Messung ist daher die Wahrscheinlichkeit, bei ihr einen gewissen Fehler anzutreffen, ebenso gross wie die, bei ihr ihren mittlern Fehler vorzufinden; oder: die wahrscheinlichste Annahme, die man über die absolute Grösse des wirklichen Fehlers eines Resultats machen kann, ist die, dass man sie gleich der Grösse des mittlern Fehlers des Resultats setzt. Bezeichnet man den wahrscheinlichsten Wert von R mit r , so hat man also absolut genommen

$$\text{LX)} \quad r = \mu.$$

46. *Dem absoluten Betrage nach kann man den wahrscheinlichsten Fehler eines Resultats als ebenso gross ansehen, wie den mittleren Fehler desselben.*

Wir haben von ganz demselben Satz schon in Art. 94 als einer brauchbaren Hypothese Anwendung gemacht.

Aus alledem erhellt aber, dass die entscheidende Grösse für die Beurteilung der Sicherheit eines Resultats der mittlere Fehler ist.

Damit ist die Theorie der einfachen Messungen abgeschlossen.

VI. Uebersicht über die erlangten Ergebnisse.

Ich lasse jetzt eine vollständige Uebersicht und Zusammenstellung aller erlangten Ergebnisse folgen.

101. Gegenstand, Resultate. Zunächst ist zu bemerken, dass die Ausgleichstheorie sich auf Messungen bezieht, die von allen systematischen, controlirbaren, Fehlern befreit sind, und nur noch durch zufällige Fehler, zu denen wir eben alle uncontrolirbaren Fehler rechnen, verfälscht werden.

Ferner muss hervorgehoben werden, dass die Ausgleichsrechnung praktisch für ihre Resultate nicht absolute Sicherheit, sondern nur den Umständen nach grösste Wahrscheinlichkeit beansprucht, sie lehrt nur wahrscheinlichste Ergebnisse und wahrscheinlichste Fehler kennen und giebt die Mittel, die Sicherheit sowohl der einzelnen Messungen als der aus ihnen abgeleiteten Resultate zu beurteilen.

Indem man aber die Folgerungen der Theorie in jeder besondern Ausgleichung mit den Ergebnissen der jeweilig vorliegenden Messungsreihe vergleicht, kann man einen Ueberblick darüber gewinnen, ob die Fehler, mit denen die Messungen behaftet sind, wirklich rein zufälliger Natur sind oder vielleicht noch versteckte systematische Verfälschungen enthalten. Darüber wird im folgenden Capitel das Nötige gesagt werden.

Die weitere Betrachtung spalte ich in zwei Teile, der eine soll sich auf den idealen Fall beziehen, dass alle in einer unbeschränkten Messungsreihe nur möglichen wahren Fehler in Frage kommen, der andere wird die Anpassung der Theorie an die Praxis behandeln.

a) *Theoretische Ergebnisse.*

102. Messungen gleicher Schärfe. 1. Ein zufälliger Fehler kann eine Messung ebenso leicht im Sinne des Zuwenig wie des Zuviel verfälschen.

2. Unter allen (unzähligen) möglichen Fehlern giebt es von jeder absoluten Grösse genau so viele positive Fehler, wie negative.

3. An sich können zufällige Fehler von jedem beliebigen Betrage vorkommen, der Erfahrung nach sind aber grosse zufällige Fehler sehr viel weniger wahrscheinlich wie kleine.

4. Das Verhältnis, in welchem kleine Fehler stärker vertreten sind als grosse, hängt von der besondern Art der Messungsmethode ab. Unter Methode ist aber nicht allein die nackte Methode zur Ausführung der Messungen zu verstehen, sondern die Methode sammt ihrer Ausführung, denn es ist klar, dass ein ungeübter Beobachter mit einer guten Methode schlechtere Resultate erzielen wird als ein geschickter mit einer weniger guten.

Wir nennen eine Messungsmethode schärfer (präciser) als eine andere, wenn bei ihr kleine Fehler im Verhältnis zu grössern leichter vorkommen können als bei dieser.

5. Das Verhältnis, in welchem die Häufigkeit eines Fehlers zu der eines andern steht, ist gleich dem Verhältnis der Wahrscheinlichkeit des ersten Fehlers zu der des zweiten.

6. Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers von dem absoluten Betrage V ist

$$\varphi = w_0 e^{-\pi w_0^2 \frac{V^2}{\epsilon^2}} = \frac{w_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{-q^2} \cos\left(2qw_0 \sqrt{\pi} \frac{V}{\epsilon}\right) = \frac{w_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{\cos\left(q\pi w_0^2 \frac{V^2}{\epsilon^2}\right)}{1+q^2},$$

worin w_0 die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler von der Grösse 0 bedeutet und als Maass der Präcision der Messung anzusehen ist, um welche es sich gerade handelt. ϵ , die Einheit von V , wird so gewählt, dass V/ϵ eine ganze Zahl ist, und es ist die Stufe, um welche sich zwei Fehler von einander

unterscheiden müssen, wenn wir sie gerade noch als von einander verschieden ansehen sollen, eine Stufe, die wir natürlich je nach der Untersuchung und der vermeintlich erreichten Präcision beliebig festsetzen.

Dieses Wahrscheinlichkeitsgesetz gilt auch angenähert, wenn man mit Laplace von der Voraussetzung ausgeht, dass jeder zufällige Fehler durch das Zusammenwirken einer sehr grossen Anzahl von Fehlerquellen entsteht. Man hat dann (mit der hier beliebten kleinen Abänderung)

$$w_0 = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{s\nu(2\nu+1)}} = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\nu+1}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{V_m}},$$

wo s die Anzahl der wirksamen Fehlerquellen, $2\nu+2$ die aller von einer Fehlerquelle ermöglichten Elementarfehler, V_m den grössten überhaupt möglichen Fehler angiebt.

7. Bezeichnet $2N$ die Anzahl aller überhaupt möglichen Fehler, so ist die Anzahl aller der Fehler, die ihrem absoluten Betrage nach zwischen Δ_1 und Δ_2 liegen,

$$N_{\Delta_1}^{\Delta_2} = N \{ \theta(\sqrt{\pi} w_0 \Delta_2) - \theta(\sqrt{\pi} w_0 \Delta_1) \},$$

worin die Function θ defnirt ist durch

$$\theta(\vartheta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\vartheta} e^{-t^2} dt.$$

8. Bezeichnet man mit $\overline{V^i}$ den mittlern Wert der i ten Potenz der absolut gerechneten Fehler, setzt also

$$\overline{V^i} = 2w_0 \int_0^{\infty} \frac{\Gamma^i}{\varepsilon^i} e^{-\pi w_0^2 \frac{V^2}{\varepsilon^2}} d \frac{V}{\varepsilon},$$

so ist die Präcisionsconstante w_0 bestimmt durch jede der unzählbaren Menge von Gleichungen

$$w_0 = \left(\frac{x!}{\pi^{x+1}} \right)^{\frac{1}{2x+1}} \left(\frac{\varepsilon}{V^{2x+1}} \right)^{\frac{1}{2x+1}}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$w_0 = \left(\frac{(2x)!}{\pi^{2x} x!} \right)^{\frac{1}{2x}} \left(\frac{\varepsilon}{V^{2x}} \right)^{\frac{1}{2x}}, \quad x = 1, 2, 3, 4, \dots$$

\overline{V}^i kann man auch definiren durch

$$\overline{V}^i = \frac{V_1^i + V_2^i + V_3^i + \dots + V_n^i}{n},$$

falls man unter n die unzählige Menge der möglichen Fehler $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ versteht und V allgemein den absoluten Betrag eines Fehlers bedeuten lässt.

9. Unter den Fehlern sind drei ganz besonders hervorzuheben, wir haben sie als charakteristische Fehler bezeichnet.

1. Der durchschnittliche Fehler D , er ist gleich dem Mittel aller, absolut gerechneten, Fehler und giebt die durchschnittliche Grösse der Fehler der einzelnen Messungen.

2. Der mittlere Fehler M , er ist gleich der Quadratwurzel aus dem mittlern Fehlerquadrat. Er bezeichnet zugleich den Fehler, der bei der Sonderart der betreffenden Messungsmethode die grösste Wahrscheinlichkeit besitzt, die er überhaupt zu erreichen vermag, für keine andere Messungsmethode eine grössere Wahrscheinlichkeit aufweist, als für die, für welche er berechnet ist.

Ferner ist er derjenige Fehler, der in einer unbegrenzten Messungsreihe allen Messungen zusammengenommen mit derselben Wahrscheinlichkeit zugesprochen werden kann, wie das System der factisch vorgefallenen Fehler.

3. Der wahrscheinliche Fehler P , er ist derjenige Fehler, der die Gesamtheit aller möglichen Fehler in zwei gleiche Teile spaltet, so dass ebenso viele von ihnen grösser sind als er, wie kleiner. Analytisch ergiebt er sich durch Multiplication des mittlern Fehlers mit der Zahl 0,67449, oder im Fall, dass man die Fehler in Teilen von ihm ausdrückt, als mittlere Nullte Potenz derselben.

Wir haben für diese Fehler mehrere analytische Definitionen, einmal ist

$$D = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n}{n},$$

$$M = \sqrt{\frac{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + \dots + V_n^2}{n}},$$

$$P = 0,67449 \sqrt{\frac{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + \dots + V_n^2}{n}},$$

und wenn man den wahrscheinlichen Fehler als das Maass aller Fehler ansieht, ist auch

$$P = \frac{V_1^0 + V_2^0 + V_3^0 + \dots + V_n^0}{n}.$$

Ferner hat man

$$D = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{w_0} = 0,31831 \frac{\varepsilon}{w_0},$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\varepsilon}{w_0} = 0,39895 \frac{\varepsilon}{w_0},$$

$$P = \frac{0,67449}{\sqrt{2\pi}} \frac{\varepsilon}{w_0} = 0,26909 \frac{\varepsilon}{w_0}.$$

Endlich ist nach der Laplace'schen Theorie

$$D = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2\nu+1}{3}} \sqrt{\frac{V_m}{\varepsilon}} = 0,56420 \varepsilon \sqrt{\frac{2\nu+1}{3}} \sqrt{\frac{V_m}{\varepsilon}},$$

$$M = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2\nu+1}{3}} \sqrt{\frac{V_m}{\varepsilon}} = 0,70711 \varepsilon \sqrt{\frac{2\nu+1}{3}} \sqrt{\frac{V_m}{\varepsilon}},$$

$$P = 0,47694 \varepsilon \sqrt{\frac{2\nu+1}{3}} \sqrt{\frac{V_m}{\varepsilon}} = 0,47694 \varepsilon \sqrt{\frac{2\nu+1}{3}} \sqrt{\frac{V_m}{\varepsilon}},$$

wo die Fehlereinheit ε so zu wählen ist, dass V_m/ε eine ganze Zahl bedeutet, und V_m den grössten möglichen Fehler angibt.

10. Zwischen den drei charakteristischen Fehlern bestehen sonach Relationen, die sich aus der folgenden Tabelle entnehmen lassen.

$D =$	V^1	$0,79789 M$	$1,18295 P$
$M =$	$1,25331 D$	V^2	$1,48260 P$
$P =$	$0,84533 D$	$0,67449 M$	$0,67449 V^2$

Die Wahrscheinlichkeiten der drei charakteristischen Fehler sind bezüglich

$$\varphi(D) = w_0 e^{-\frac{1}{\pi}} = \frac{e^{-\frac{1}{\pi}}}{\pi} \frac{\varepsilon}{D} = 0,23153 \frac{\varepsilon}{D},$$

$$\varphi(M) = w_0 e^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\varepsilon}{M} = 0,24198 \frac{\varepsilon}{M},$$

$$\varphi(P) = w_0 e^{-(0,47694)^2} = \frac{e^{-(0,47694)^2} 0,47694}{\sqrt{\pi}} \frac{\varepsilon}{P} = 0,21434 \frac{\varepsilon}{P}.$$

Für eine einzelne Messung hat von den charakteristischen Fehlern die grösste Wahrscheinlichkeit der wahrscheinliche Fehler, die geringste der mittlere Fehler.

11. Die charakteristischen Fehler dienen zur Berechnung der Präcision der betreffenden Messmethoden, es ist nämlich

$$w_0 = 0,31831 \frac{\varepsilon}{D},$$

$$w_0 = 0,39895 \frac{\varepsilon}{M},$$

$$w_0 = 0,29609 \frac{\varepsilon}{P}.$$

Jeder von ihnen vertritt daher vollständig die Präcisionsconstante.

12. Je nachdem ein Fehler gegen den wahrscheinlichen, den durchschnittlichen oder den mittlern Fehler die Grösse x hat, ist seine Wahrscheinlichkeit bezüglich

$$0,26909 \frac{\varepsilon}{P} e^{-0,2275x^2}; \quad 0,31831 \frac{\varepsilon}{D} p^{-0,3183x^2}; \quad 0,39895 \frac{\varepsilon}{M} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

103. Messungen ungleicher Schärfe. 13. Von zwei Bestimmungen hat die eine ein p mal so grosses Gewicht als die andere, wenn sie als aus einer p mal so grossen Anzahl von Einzelbestimmungen wie diese hervorgegangen angesehen werden kann, und diese Einzelbestimmungen in beiden Bestimmungen die nämliche Schärfe besitzen.

14. Eine Bestimmungsreihe ist überall von gleicher Schärfe, wenn man annehmen muss, dass es für die Ableitung eines Resultats aus einer bestimmten Anzahl von ihren Bestimmungen gleichgiltig ist, welche Bestimmungen man dazu verwendet.

15. Hat man eine Bestimmungsreihe von ungleich scharfen Bestimmungen und weiss, aus welchen gleich scharfen Einzelmessungen jede Bestimmung hervorgegangen ist, so beschäftigt man sich besser überhaupt nicht mit den Bestimmungen, sondern nur mit den Einzelmessungen und bezieht alles auf diese.

16. Bei zwei ungleich scharfen Messungsreihen, deren jede eine unbeschränkte Anzahl von gleich scharfen Einzelmessungen umfasst, verhalten sich die Gewichte umgekehrt wie die Quadrate ihrer durchschnittlichen oder mittlern oder wahrscheinlichen Fehler.

Als Corollar folgt hieraus:

17. Die Genauigkeit, die Präcision, einer Bestimmung wächst nicht wie ihr Gewicht, sondern wie die Quadratwurzel ihres Gewichts.

Es ist also das Gewicht einer aus gleich scharfen Einzelmessungen bestehenden Messungsreihe, deren Präcisionsconstante w_0 zum Werte hat,

$$p = w_0^2$$

oder auch

$$p = 0,10132 \frac{\epsilon^2}{D^2},$$

$$p = 0,15916 \frac{\epsilon^2}{M^2},$$

$$p = 0,07240 \frac{\epsilon^2}{P^2}.$$

Die Zahlenfactoren hätten wir ebenso gut fortlassen können, weil „Gewicht“ nur relative Bedeutung hat. Doch ist zu beachten, dass dann bei der Vergleichung der Gewichte zweier Messungsreihen diese Gewichte nach den gleichlautenden Formeln zu berechnen sind.

18. Dieselbe Rolle, die in einer Bestimmungs- oder Messungsreihe vom Gewicht p_i , die Fehler V_1, V_2, \dots, V_n spielen, kommt in einer Bestimmungs- oder Messungsreihe vom Gewicht p_x den Grössen $\sqrt{\frac{p_i}{p_x}} V_1, \sqrt{\frac{p_i}{p_x}} V_2, \dots, \sqrt{\frac{p_i}{p_x}} V_n$ zu. Da, wo in der ersten Reihe ein Fehler von der Grösse V_α eintreten kann, hat man in der zweiten einen solchen von der Grösse $\sqrt{\frac{p_i}{p_x}} V_\alpha$ zu erwarten; umgekehrt entspricht einem Fehler von der Grösse $V^{(\alpha)}$ in der zweiten Messungsreihe ein solcher $\sqrt{\frac{p_x}{p_i}} V^{(\alpha)}$ in der ersten.

Natürlich müssen sich beide Messungsreihen auf eine und dieselbe Grösse beziehen.

19. Da eine Bestimmung vom Gewichte p als aus p gewissen Einzelmessungen hervorgegangen angesehen werden kann, so werden wir zunächst von charakteristischen Fehlern dieser Bestimmung sprechen können, insofern die Einzelmessungen, deren Resultat sie ist, mit Fehlern behaftet sind. Diese Fehler bezeichne ich mit D' M' P' und nenne sie die beobachteten Fehler. Gehört aber diese Bestimmung einer ganzen Bestimmungsreihe an, so kann man auf ihre charakteristischen Fehler offenbar auch schliessen aus der Art, wie alle Bestimmungen ausgefallen sind, aus den Fehlern aller Bestimmungen, genau so, wie man die charakteristischen Fehler einer Messung aus den in der ganzen Messungsreihe vorgefallenen Fehlern berechnet. Diese charakteristischen aus der ganzen Bestimmungsreihe erschlossenen Fehler nenne ich D, M, P und bezeichne sie als ausgeglichene Fehler.

Wenn nun eine Bestimmungsreihe aus ungleich scharfen Bestimmungen besteht, die sich nicht in bestimmte Einzelmessungen zerlegen lassen, so kann man die charakteristischen Fehler ihrer Componenten nicht streng berechnen. Bezeichnet aber n die unbeschränkte Anzahl ihrer Bestimmungen und geben $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ die bezüglichen Gewichte dieser, so hat man für die aus der ganzen Bestimmungsreihe zu erschliessenden, aus-

geglichenen charakteristischen Fehler einer Bestimmung vom Gewichte p_i als wahrscheinlichste Beträge

$$D_i = \frac{1}{\sqrt{p_i}} \frac{\sqrt{p_1} D'_1 + \sqrt{p_2} D'_2 + \sqrt{p_3} D'_3 + \cdots + \sqrt{p_n} D'_n}{n}$$

$$M_i = \frac{1}{\sqrt{p_i}} \sqrt{\frac{p_1 M_1'^2 + p_2 M_2'^2 + p_3 M_3'^2 + \cdots + p_n M_n'^2}{n}}$$

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{p_i}} \sqrt{\frac{p_1 P_1'^2 + p_2 P_2'^2 + p_3 P_3'^2 + \cdots + p_n P_n'^2}{n}}$$

Die D' , M' und P' müsste man eruiren, indem man jede Bestimmung in ihre Einzelmessungen zerlegt, bezeichnet aber V_x den absolut gerechneten Fehler der Bestimmung vom Gewicht p_x , so darf man setzen

$$D'_x = V_x, \quad M'_x = \sqrt{V_x^2}, \quad P'_x = 0,67449 \sqrt{V_x^2}$$

und erhält

$$D_i = \frac{1}{\sqrt{p_i}} \frac{\sqrt{p_1} V_1 + \sqrt{p_2} V_2 + \sqrt{p_3} V_3 + \cdots + \sqrt{p_n} V_n}{n}$$

$$M_i = \frac{1}{\sqrt{p_i}} \sqrt{\frac{p_1 V_1^2 + p_2 V_2^2 + p_3 V_3^2 + \cdots + p_n V_n^2}{n}}$$

$$P_i = \frac{0,67449}{\sqrt{p_i}} \sqrt{\frac{p_1 V_1^2 + p_2 V_2^2 + p_3 V_3^2 + \cdots + p_n V_n^2}{n}}$$

Von einer Präcision für alle Bestimmungen kann man natürlich nicht reden, sondern nur von der einer bestimmten Bestimmung, diese berechnet sich aber, wenn sie aus den Einzelmessungen erschlossen wird, aus denen die betreffende Bestimmung hervorgegangen ist, oder als hervorgegangen angesehen werden kann, aus den D' , M' , P' , und wenn man sie aus der Art wie die ganze Bestimmungsreihe ausgefallen ist, eruiert, durch die D , M , P . Im ersten Fall betrachtet man wieder jede Bestimmung für sich, im zweiten dagegen als Glied der ganzen Bestimmungsreihe und dieser liefert natürlich die sicherern Resultate. Im ersten Fall ist sie die beobachtete, im zweiten die ausgeglichene Präcision.

Als massgebend für die Präcision der ganzen Bestimmungsreihe sieht man die Präcision der Bestimmung an, der das Gewicht 1 zukommt oder

zukommen würde. Bezeichnet man die charakteristischen Grössen für dieselbe durch D , M , P und w_0 , so hat man

$$D = \frac{\sqrt{p_1} V_1 + \sqrt{p_2} V_2 + \sqrt{p_3} V_3 + \dots + \sqrt{p_n} V_n}{n},$$

$$M = \sqrt{\frac{p_1 V_1^2 + p_2 V_2^2 + p_3 V_3^2 + \dots + p_n V_n^2}{n}},$$

$$P = 0,67449 \sqrt{\frac{p_1 V_1^2 + p_2 V_2^2 + p_3 V_3^2 + \dots + p_n V_n^2}{n}},$$

$$w_0 = 0,31831 \frac{\epsilon}{D} = 0,39895 \frac{\epsilon}{M} = 0,29609 \frac{\epsilon}{P}$$

und für eine Bestimmung vom Gewicht p_i

$$D_i = \frac{D}{\sqrt{p_i}}, \quad M_i = \frac{M}{\sqrt{p_i}}, \quad P_i = \frac{P}{\sqrt{p_i}}; \quad w_0^{(i)} = \sqrt{p_i} w_0.$$

b) *Ergebnisse für die praktische Anwendung.*

104. Das wahrscheinlichste Resultat und die wahrscheinlichsten Fehler. 1. Da wir kein Mittel haben, bei Beobachtungen die zufälligen Fehler ganz auszuschliessen, noch auch aus einer Reihe von Messungen die fehlerfreien herauszuerkennen, oder durch analytische Operationen herauszurechnen vermögen, so sind wir in der Praxis nicht in der Lage, den aus den Messungen gezogenen Resultaten absolute Sicherheit zuzusprechen. Alles, was wir erreichen können, ist die Ableitung der nach den Umständen wahrscheinlichsten Resultate, diese Resultate werden aber variiren je nach der Schärfe der angewandten Beobachtungsmethode, je nach der Präcision der Ausführung derselben und je nach der Anzahl der Wiederholungen der Beobachtungen.

Die Ausgleichsrechnung zeigt, wie in jedem Falle das wahrscheinlichste Resultat zu berechnen ist, sie lehrt die wahrscheinliche Unsicherheit kennen, die dem betreffenden Resultat noch anhafet und giebt die Möglichkeit, die Schärfen der einzelnen Beobachtungsmethoden mit einander zahlenmässig zu vergleichen.

Indem sie aber alle Ergebnisse unzweideutig kennen lehrt, vermag der Beobachter zu beurteilen einerseits, ob der von ihm eingeschlagene Weg zur Eruirung der gesuchten Grösse genau genug ist; findet er, dass das aus seinen Messungen folgende wahrscheinlichste Resultat seinem Dafürhalten nach nicht wahrscheinlich genug ist, so hat er seine Messungen zu häufen oder, noch besser, seine Methode zu ändern.

Gleichzeitig ersieht er, ob seine Messungen eine etwa vorgefasste Meinung zu bestätigen im Stande sind, und in welchem Masse sie ihr eventuell widersprechen.

2. Wir kennen in der Wirklichkeit also nicht die wahren Fehler der Beobachtungen, sondern nur die wahrscheinlichsten, oder, genauer gesprochen nur das wahrscheinlichste System von Beobachtungsfehlern. Das wahrscheinlichste System ist aber dasjenige, welches unter den obwaltenden Umständen für sich eine grössere Wahrscheinlichkeit aufweist als irgend ein anderes System, dessen Wahrscheinlichkeit also ein Maximum ist. Hieraus folgt als Bedingung, der die wahrscheinlichsten Fehler einer Messungsreihe zu genügen haben,

$$0 = \frac{1}{\varphi_1(v_1)} \frac{d\varphi_1(v_1)}{dv_1} + \frac{1}{\varphi_2(v_2)} \frac{d\varphi_2(v_2)}{dv_2} + \frac{1}{\varphi_3(v_3)} \frac{d\varphi_3(v_3)}{dv_3} + \dots + \frac{1}{\varphi_n(v_n)} \frac{d\varphi_n(v_n)}{dv_n}.$$

Diese Formel gilt für jedes beliebige Wahrscheinlichkeitsgesetz, adoptirt man, da doch die wahrscheinlichsten Fehler ebenso gut zufällig sind wie die wahren, das Wahrscheinlichkeitsgesetz dieser, setzt also für den Fehler der Messung x_x vom Gewicht p_x

$$\varphi(v_x) = \frac{\sqrt{p_x}}{h \sqrt{\pi}} e^{-\frac{p_x}{h^2} \frac{v_x^2}{\epsilon^2}},$$

so ergibt sich aus jener allgemeineren Gleichung

$$p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 + \dots + p_n v_n = 0.$$

$$v_1 = x - x_1, v_2 = x - x_2, v_3 = x - x_3, \dots, v_n = x - x_n,$$

das wahrscheinlichste Resultat

$$x = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n}.$$

Das Gewicht dieses wahrscheinlichsten Resultats ist

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n.$$

Bei gleich scharfen Messungen hat man

$$p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_n,$$

somit

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}.$$

Diese Gleichung drückt ganz eigentlich das Princip des arithmetischen Mittels aus, und sie giebt in dem Falle, wo n unbeschränkt gross ist, nicht allein den wahrscheinlichsten, sondern den wahren Betrag der gesuchten Grösse.

3. Die wahrscheinlichsten Fehler weichen alle um eine und dieselbe Grösse, den resultirenden Fehler, von den bezüglichen wahren Fehlern ab.

Bildet man die Differenzenreihe der wahrscheinlichsten Fehler, so stellt diese zugleich die Differenzenreihe der wahren Fehler dar.

4. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Systems von Ereignissen ist nur dann gleich dem Product der Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse, wenn die Ereignisse alle von einander unabhängig sind. Grundvoraussetzung für die Anwendbarkeit der Ausgleichungsformeln ist deshalb, dass alle Messungen unabhängig von einander ausgeführt sind, keine mit einer der andern irgend wie zusammenhängt.

105. Die charakteristischen Fehler und die Präcision der einzelnen Messungen. 5. Die zweite Aufgabe erstreckt sich auf die Auffindung der charakteristischen Fehler und damit der Präcision der einzelnen Messungen sowohl als des Resultats.

Hier tritt der Anwendung der Theorie ein doppeltes Hindernis entgegen.

Erstens sind nicht die wahren, sondern nur die wahrscheinlichsten Fehler bekannt. Man sollte nun glauben, dass man infolge dessen auch nur die wahrscheinlichsten charakteristischen Fehler berechnen kann, allein eine Hypothese, die sicher als näherungsweise zutreffend angesehen werden darf, gestattet diese wahrscheinlichsten Werte so zu corrigiren, dass sie zu den wahren Werten Näherungswerte werden, also angenäherte wahre Werte darstellen, und sie sind auch nur deshalb Näherungswerte, weil jene Hypothese nur genäherte Gültigkeit hat.

Zweitens setzt die Definition der charakteristischen Fehler voraus, dass man alle unzähligen bei der betreffenden Messmethode möglichen Fehler kennt, während doch tatsächlich von den Fehlern nur so viel zur Verfügung stehen können, als Einzelmessungen gemacht sind. Deshalb kann man auch für die Näherungswerte der charakteristischen Fehler keine bestimmte Zahlen angeben, sondern nur sagen, zwischen welchen Grenzen ihre Beträge eingeschlossen sind. Die in der Praxis berechneten charakteristischen Fehler haben also mittlere Unsicherheiten, die ihnen gegenüber dieselbe Rolle spielen, wie die mittleren Fehler gegenüber den Messungen.

Was die Präcision anbelangt, so leidet ihre Berechnung an denselben Unsicherheiten, wie die der charakteristischen Fehler. Gauss hat aber nachgewiesen, dass man ihren genauesten Wert bekommt, wenn man sie aus dem mittlern Fehler ableitet.

Bezeichnet man mit δ_{p_i} , ν_{p_i} , r_{p_i} ; $\omega_0^{(p_i)}$ die genäherten Werte von D_{p_i} , M_{p_i} , P_{p_i} ; $w_0^{(p_i)}$, so hat man für eine Bestimmung vom Gewichte p_i , wenn man ihre charakteristischen Grössen aus der ganzen Bestimmungsreihe berechnet,

$$\delta_{p_i} = \frac{1}{\sqrt{p_i}} \frac{\sqrt{p_1} |v_1| + \sqrt{p_2} |v_2| + \cdots + \sqrt{p_n} |v_n|}{\sqrt{n(n-1)}} \left(1 \pm \frac{0,756}{\sqrt{n-1}} \right),$$

$$\mu_{p_i} = \frac{1}{\sqrt{p_i}} \sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots + p_n v_n^2}{n-1}} \left(1 \pm \frac{0,708}{\sqrt{n-1}} \right),$$

$$r_{p_i} = \frac{0,67449}{\sqrt{p_i}} \sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots + p_n v_n^2}{n-1}} \left(1 \pm \frac{0,708}{\sqrt{n-1}} \right),$$

$$\omega_0^{(p_i)} = \sqrt{p} 0,39895 \sqrt{\frac{n-1}{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots + p_n v_n^2}} \left(1 \pm \frac{0,708}{\sqrt{n-1}} \right).$$

Als massgebend für die ganze Bestimmungsreihe sieht man auch hier die charakteristischen Grössen der Bestimmung an, der das Gewicht 1 zukommt oder zuzuschreiben sein würde. Die für die Beurteilung der ganzen Messungsreihe massgebenden Grössen sind also

$$\delta = \frac{\sqrt{p_1} |v_1| + \sqrt{p_2} |v_2| + \cdots + \sqrt{p_n} |v_n|}{\sqrt{n(n-1)}} \left(1 \pm \frac{0,756}{\sqrt{n-1}} \right),$$

$$\mu = \sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots + p_n v_n^2}{n-1}} \left(1 \pm \frac{0,708}{\sqrt{n-1}} \right),$$

$$r = 0,67449 \sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots + p_n v_n^2}{n-1}} \left(1 \pm \frac{0,708}{\sqrt{n-1}} \right);$$

$$\omega_0 = 0,39895 \sqrt{\frac{n-1}{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots + p_n v_n^2}} \left(1 \pm \frac{0,708}{\sqrt{n-1}} \right),$$

woraus die für die einzelnen Bestimmungen massgebenden Grössen folgen

$$\delta_{p_i} = \frac{\delta}{\sqrt{p_i}}, \quad \mu_{p_i} = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}, \quad r_{p_i} = \frac{r}{\sqrt{p_i}}; \quad \omega_0^{(p_i)} = \sqrt{p} \omega_0.$$

106. Charakteristische Fehler und Präcision des Resultats. 6. Während im ideellen Fall, wo wir es mit einer unbeschränkten Anzahl von Messungen, also nachher auch nur mit deren wahren Fehlern zu tun hatten, von einem Fehler des Resultats der Messungen nicht die Rede sein konnte, kann und wird in der Praxis das Endresultat der Messungen, weil es eben nur wahrscheinlichstes Ergebnis ist, mit einem Fehler behaftet sein. Versteht man unter δ_r , μ_r , r_r , ω_r dieselben charakteristischen Grössen für

das Resultat, wie vorher unter entsprechenden Symbolen für die einzelnen Bestimmungen, so hat man

$$\delta_r = \frac{\delta}{\sqrt{p}}, \quad \mu_r = \frac{\mu}{\sqrt{p}}, \quad r_r = \frac{r}{\sqrt{p}}, \quad \omega_r = \omega \sqrt{p},$$

wobei

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$$

ist. Jede der obigen Gleichung kann zur Beurteilung des Resultats dienen, am genauesten wendet man den mittlern Fehler oder den daraus abgeleiteten wahrscheinlichen Fehler und die Präcision an.

Zugleich zeigt sich, dass der wahrscheinlichste Betrag r des wirklichen Fehlers des Resultats seinem absoluten Werte nach so gross angesetzt werden kann, wie der mittlere Fehler, man hat

$$r = \mu_r.$$

107. Die Zeichen der charakteristischen Fehler und die Bedeutung der Hinzufügung dieser zu den Messungen und Resultaten. Ich habe noch eine alle Fehler betreffende Bemerkung zu machen.

7. Das Hauptmerkmal für einen zufälligen Fehler ist, dass er eine Messung ebenso leicht im Sinne des zu viel, wie des zu wenig verfälschen kann. Daraus folgt, dass bei zufälligen Fehlern ihr Zeichen gar keine Rolle spielt, zufällige Fehler sind absolut zu verstehen. Demnach kann man auch bei den charakteristischen Fehlern von keinem Zeichen sprechen, dieselben sind absolute Zahlen. Nichtsdestoweniger hat man sich gewöhnt, ihnen das doppelte Zeichen \pm vorzusetzen. Man schreibt das Resultat in der Form

$$x \pm \delta_r, \quad x \pm \mu_r, \quad \text{u. s. f.}$$

Doch muss man sich hüten, das so zu verstehen, als ob nun der wahre Wert der gesuchten Grösse entweder $x + \delta_r$ oder $x - \delta_r$, entweder $x + \mu_r$ oder $x - \mu_r$ u. s. f. ist.

Bei einer einzelnen Bestimmung bedeutet die Gleichung

$$X = x_{p_i} \pm \delta_{p_i},$$

dass, wenn man diese Bestimmung in ganz derselben Weise n mal wiederholen wollte, man Zahlen erhalten würde, deren durchschnittlicher Fehler δ_{p_i} betrüge, so zwar, dass ein Teil um durchschnittlich δ_{p_i} zu gross, ein anderer um durchschnittlich δ_{p_i} zu klein ausfallen würde.

In demselben Fall, sagt die Gleichung

$$X = x_{p_i} \pm \mu_{p_i}$$

aus, dass, wenn man die Bestimmung n mal wiederholen wollte, die Fehlergrösse μ_{p_i} bei keiner andern sonst noch möglichen Methode mit so grosser

Wahrscheinlichkeit bei einer einzelnen Bestimmung zu erwarten stände als gerade bei der, die vordem zur Ableitung von x_{p_i} gedient hat; μ_{p_i} ist im Durchschnitt der wahrscheinlichste Fehler, und im Durchschnitt kann man erwarten, dass die einzelnen nochmals auszuführenden Bestimmungen Beträge liefern werden, die bald um μ_{p_i} zu gross, bald um μ_{p_i} zu klein sind.

Was endlich die Gleichung

$$X = x_{p_i} \pm r_{p_i}$$

anbetrifft, so sagt diese aus: man kann 1 gegen 1 wetten, dass bei einer Wiederholung der Bestimmung der Wert der gesuchten Grösse in das Intervall von $x_{p_i} - r_{p_i}$ bis $x_{p_i} + r_{p_i}$ fallen wird.

Gehen wir zu den charakteristischen Fehlern des Resultats einer Bestimmungsreihe über, so haben hier die Gleichungen

$$X = x \pm \delta_r, \quad X = x \pm \mu_r, \quad X = x \pm r_r$$

zunächst genau dieselbe providentielle Bedeutung wie bei einzelnen Bestimmungen, aber die mittlere

$$X = x \pm \mu_r$$

erklärt noch ausserdem, dass der wahrscheinlichste Fehler des wahrscheinlichsten Ergebnisses μ ist, will man überhaupt das wahrscheinlichste Ergebnis als noch mit einem Fehler behaftet ansehen, so kann man ihm keinen Fehler mit durchschnittlich grösserer Wahrscheinlichkeit zuschreiben als den $\pm \mu$, keine Annahme ist unter den obwaltenden Verhältnissen durchschnittlich wahrscheinlicher als die, dass x um μ zu gross oder zu klein ist.

VII. Kritik von Beobachtungen und ihrer Ausgleichung.

108. Zu discutirende Fragen. Wir kommen jetzt zu einem der schwierigsten und wichtigsten Abschnitte der ganzen Lehre, über den sich leider mehr sprechen als sagen lässt.

Die Grundlage der ganzen Ausgleichungsrechnung bildete die Annahme, dass man es nur mit zufälligen Fehlern zu tun hat, dass die Messungen, ehe man sie ausgleicht, von systematischen Fehlern befreit sind. Ferner lehrt die Theorie nicht bloss die wahrscheinlichsten Resultate kennen, sie giebt noch eine Anzahl von für die betreffenden Beobachtungen charakteristischen Grössen. Es erhebt sich daher eine Reihe höchst eindringlicher Fragen, über die der Studirende erst klar sein muss, ehe er zu Anwendungen der Ausgleichungsrechnung übergeht.

1. Wie sind systematische Fehler aufzufinden und in Rechnung zu bringen?

2. Wie erkennt man aus den nach der Ausgleichung übrig gebliebenen Fehlern, ob man die Grundannahme der Ausgleichungsrechnung, dass man es nach Berücksichtigung der aufgefundenen systematischen Fehler nur noch mit zufälligen Fehlern zu tun hat, als erfüllt betrachten darf? Mit andern Worten:

Welches sind die Kriterien für zufällige Fehler?

3. Wie sind die charakteristischen Fehler zu verwenden?

a) *Bemerkungen über systematische Fehler.*

109. Systematische Fehler aus der Unkenntnis der Einflüsse, denen die zu messende Grösse unterliegt. Zur ersten Frage lassen sich natürlich nur allgemeine Bemerkungen machen.

Eine Uebersicht über die Ursachen zur Entstehung systematischer Fehler ist im ersten Capitel schon gegeben worden.

Im Grunde genommen ist keine Messung eine wirklich einfache, jede Messung setzt sich im allgemeinen in der Ausführung aus mehreren Manipulationen, in der Ausrechnung aus mehreren Grössen zusammen. Will man zum Beispiel das wirkliche, absolute Gewicht eines Körpers kennen lernen, so reicht die einfache Vergleichung desselben mit einem bekannten Gewichtstücke nicht aus, man muss auch das Volumen des Körpers messen, man muss seine und des Gewichtstücks Temperatur, die Temperatur, den Druck und Feuchtigkeitsgehalt der ihn und das Gewichtstück umgebenden Luft kennen und muss wissen, welche Empfindlichkeit die Waage aufweist. Hier hat man also schon ausser das Grundinstrument, die Waage, noch mindestens ein Thermometer, ein Barometer und ein Psychro- oder Hygrometer abzulesen. Die Angaben all dieser Instrumente treten in die Berechnung des zu bestimmenden Gewichtes ein. Hätte man sie nicht berücksichtigt, so würde man dem gefundenen Gewicht keine absolute Bedeutung zuschreiben dürfen, es wäre dieses Gewicht nur ein scheinbares, eines, welches in derselben Weise nur, bei ganz derselben Temperatur dem ganz selben Barometerstand, derselben Feuchtigkeit, ja auch nur bei Vergleichung mit ganz demselben Gewichtstück, sich wiederfinden würde.

Nun ist klar, dass die Berücksichtigung solcher und ähnlicher mit dem Begriffe der zu messenden Grösse anscheinend garnicht zusammenhängender Umstände nur möglich ist, wenn man weiss, von welchen Nebenerscheinungen der Betrag der zu messenden Grösse, wenn, wie in dem vorigen Beispiel, auch nur scheinbar abhängt. Daher ist als erste Regel festzuhalten:

Ehe man an die Messung einer Grösse herangeht, soll man aus eigenen Untersuchungen oder aus denen anderer Beobachter sich klar machen, von

welchen Nebenerscheinungen der Betrag der zu messenden Grösse abhängt, und wie gross die Veränderung der betreffenden Grösse ist, wenn jene Nebenerscheinungen variiren.

Im obigen Beispiel dienen alle ausser an der Waage noch vorzunehmenden Ablesungen lediglich dazu, um zu erfahren, wie viel an Gewicht der zu wägende Körper durch den hydrostatischen Auftrieb der Luft von der gerade herrschenden Beschaffenheit mehr oder weniger verliert als das Gewichtstück. Wüsste man nicht, dass ein solcher Auftrieb vorhanden ist, wüsste man nicht, dass dieser Auftrieb von dem Druck und der Temperatur der Luft abhängt, wüsste man nicht, dass die Luft Feuchtigkeit enthält, dass dieser Feuchtigkeitsgehalt veränderlich ist u. a. m., so könnte man auch nicht das wirkliche Gewicht des Körpers bestimmen. Wem ferner nicht bekannt ist, dass die Leitungsfähigkeit des Wassers für Elektrizität selbst durch sehr geringe Verunreinigungen erheblich verändert wird, dass sie mit zunehmender Temperatur wächst, der kann wol trotzdem Bestimmungen dieser Leitungsfähigkeit vornehmen, aber diese Bestimmungen gelten nur für das Wasser, welches er gerade benutzt, und für die Temperatur, bei der er gerade gemessen hat. Dehnt er seine Bestimmung überhaupt auf „Wasser“ aus, so begeht er einen systematischen Fehler, ein anderer Beobachter, der die Messung an reinerem Wasser und bei niedrigerer Temperatur ausführt, wird einen andern Wert bekommen.

Zur Ausführung wertvollerer physikalischer Maassbestimmungen gehört also schon ein beträchtliches physikalisches Wissen. Es gehört dazu auch ein gewisses mathematisches Können; die Ausrechnung der betreffenden Grösse aus den Beobachtungen geschieht natürlich nach bestimmten Formeln, und diese Formeln müssen in jedem Falle so aufgestellt sein, dass in ihnen die störenden Nebenursachen zum Ausdruck kommen und so zum Ausdruck kommen, wie sie tatsächlich wirksam gewesen sind. Jede darin fehlende oder falsch angesetzte Correction bedingt eine systematische Verfälschung.

110. Systematische Fehler in Einrichtung und Ausführung der Messung. Dasselbe, was von den Fehlern der äussern Umstände gesagt ist, gilt auch für die eigentlichen Fehler der Messung, die Fehler der benutzten Instrumente, die Fehler der Einrichtung und die subjectiven vom Beobachter abhängigen Fehler in und bei der Ausführung der Messung. Ein Instrument hat einen oder mehrere Fehler natürlich nur mit Bezug auf die besondere mit ihm auszuführende Messung. Wenn eine vertical stehende Strecke mit einem Kathetometer abgemessen wird, so wird von dem zur Messung dienenden Kathetometer verlangt, dass sein Prisma vertical steht und sein Fernrohr bei der Verschiebung längs des Prismas sich stets parallel bleibt; ist eine von beiden Bedingungen nicht erfüllt, so bedingt das einen Fehler des Instruments, den der Beobachter durch gehörige Anwendung von Libellen an gehörigen Stellen zu bestimmen hat. Sind mit demselben Kathetometer zwei vertical stehende Strecken zu vergleichen, die von einander so weit entfernt sind, dass man das Fernrohr mit dem Prisma um

seine Axe von der einen Strecke nach der andern hin drehen muss, so wird verlangt, dass, um beim einfachsten Fall zu bleiben, bei dieser Drehung das Prisma sich weder hebt noch senkt und das Fernrohr eine horizontale Ebene beschreibt, Bedingungen, die viel schwerer zu erfüllen und zu controliren sind als die zuerst genannten und die vermieden werden können, wenn man die zu vergleichenden Strecken dicht an einander bringt, so dass sie wenn möglich im Sehfeld des Fernrohrs gleichzeitig erscheinen.

Zuerst hat man also sich die Manipulationen, die auszuführen sind, zu überlegen und dann durch Nebenuntersuchungen zuzusehen, ob der betreffende Apparat die Ausführung derselben in exacter Weise gestattet. Manipulation ist aber nicht in der rohen Bedeutung des Wortes zu verstehen, es begreift in sich zugleich, das was man mit der Manipulation zu erreichen sucht. Das was man im angeführten einfachen Beispiel mit dem Drehen des Kathetometers um seine Axe bezweckt, ist der Transport der Abschlinie des Fernrohrs in einer genau horizontalen Ebene, derartig, dass sie nach der Drehung die zweite Strecke in derselben Horizontalebene schneidet wie vor der Drehung die erste.

Im Laufe der Zeit haben sich bei den Instrumenten eine Anzahl von typischen Forderungen ausgebildet, bei denen es sich meist um bestimmte Richtungen von Axen, bestimmte Neigungen von Ebenen, Parallelität von Führungen und Drehungen, Starrheit der constructiven Einzelheiten, Genauigkeit von Theilungen, dann um gewisse Fragen der Beleuchtung und der Optik handelt. Es sind auch Methoden und Hilfsinstrumente zur Untersuchung, in wie weit von den Forderungen etwa abgewichen wird, entstanden, die wir im zweiten Bande, so weit sie den Physiker angehen, kennen lernen werden. Das meiste ist freilich der Geschicklichkeit des Experimentators im Anordnen und Ausführen der Versuche überlassen, und von dem Verlangen, dass er weiss, wie er einen entdeckten Fehler analytisch in die Ausrechnung der zu bestimmenden Grösse einführt, kann er nicht befreit werden.

Gewöhnlich sind die eigentlichen instrumentellen Fehler relativ unbedeutend und ihre Berücksichtigung ergiebt sich ohne Schwierigkeit, aber die Fehler bei der Einrichtung der Versuche und der Justirung der Apparate hängen ganz und gar von der Uebung des Experimentirenden ab.

111. Bedingungen zur Vermeidung und Auffindung systematischer Fehler. Also zur Vermeidung bezüglich Berücksichtigung systematischer Fehler hat man

47. *Vor der Beobachtung sich klar zu machen, welche Umstände den Betrag der zu messenden Grösse selbst abändern und in welchem Maasse sie es tun; wozu eigentlich die betreffenden Apparate und die mit ihnen auszuführenden Manipulationen dienen; werden die Forderungen, die man an die Justirung des Apparates für die besondere Messung zu stellen hat, erfüllt, und wenn das nicht der Fall ist, wie stark ist die Abweichung von diesen Forderungen, und welchen zahlenmässigen Einfluss hat sie auf die Messung?*

Während der Beobachtung sind die Intensitäten der verfälschenden Ursachen sowie etwaige in den Apparaten später entstandene oder durch den Experimentator absichtlich hervorgebrachte Veränderungen genau zu notiren, und zwar sind sie, um auch etwaigen Variationen in den störenden Ursachen Rechnung tragen zu können, so oft als man kann zu controliren und zu Protocoll zu bringen.

b) *Formale Kriterien für die Zufälligkeit übrig gebliebener Fehlerreihen.*

112. Die übrig bleibenden systematischen Verfälschungen. Nachdem man alle systematischen Fehler, die man hat auffinden können, berücksichtigt und die für die zu messende Grösse erlangten Werte für sie corrigirt hat, ist man immer noch nicht sicher, ob nicht doch noch ein systematischer Fehler der Beachtung entgangen ist. Es handelt sich dann um die Beantwortung der zweiten Frage, wie kann man an den nach der Ausgleichung der Beobachtungen noch übrig bleibenden Fehlern erkennen, ob man sie als zufällig ansehen darf oder nicht?

Wenn wir von einer Ursache sagen, sie habe eine Messungsreihe systematisch verfälscht, so meinen wir damit entweder, sie habe alle Messungen in gleicher Weise zu gross oder zu klein ausfallen lassen (derartig sind meist die aus den instrumentellen und Einrichtungsfehlern herrührenden Verfälschungen), oder, es habe diese Ursache selbst während der Messungen in bestimmter Weise abgeändert und dadurch den Betrag der zu messenden Grösse nach einem bestimmten Gesetze scheinbar oder wirklich anwachsen bezüglich abnehmen lassen. Die erste systematische Verfälschung, man nennt sie den constanten Fehler, können wir nicht weiter berücksichtigen, denn einerseits ist es fast immer Schuld des Beobachters, wenn ihm eine solche Verfälschung entgeht, und andererseits giebt es kein Mittel, sie in der übrig bleibenden Fehlerreihe zu erkennen, da der constante Fehler sich ganz zum Resultat schlägt und diese ihn gar nicht enthält.

Ein besonderer Fall, wo der constante Fehler als Unbekannte eingeführt und mitberechnet wird, wird später behandelt werden.

Wir haben es also hier nur mit den nach bestimmten Gesetzen variirenden Verfälschungen zu tun, mit Verfälschungen, die, wie man sagt, einen *Gang* zeigen. Hier drängt sich sofort eine ungemein wichtige Bemerkung auf.

113. Anordnung der Fehlerreihe. Für die Ausgleichung von Beobachtungen ist es vollständig gleichgiltig, wie man diese Beobachtungen anordnet, man kann die erhaltenen Einzelwerte bald so, bald anders niederschreiben und erhält doch rechnerisch stets dieselben Ergebnisse. Aber wenn es darauf ankommt, in einer Reihe von Zahlen den Einfluss einer variirenden Ursache zu erkennen, muss man offenbar die Zahlen so anordnen, dass der durch die Variation der Ursache hervorgebrachte Gang in ihnen

zu Tage tritt. Man darf also die Fehler bei ihrer Durchsuchung nach systematischen Verfälschungen nicht in beliebiger Folge schreiben.

48. *Die Anordnung der Fehler, oder besser gesagt der Messungsergebnisse und damit auch der Fehler, ist so zu treffen, dass ihr Gang genau dem Gang der variierenden Ursache entspricht.*

Man habe zum Beispiel für irgend eine Grösse, etwa eine Strecke, aus 7 Messungen die Werte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 erhalten. Hat man diese Werte genau in dieser Reihenfolge bekommen: erst 1, dann 2, 3 . . . und zuletzt 7, so ist es klar, dass im Verlaufe der Messungen mit der Strecke oder dem Messapparat irgend eine stetig zunehmende Veränderung vorgegangen sein muss. Das Mittel ist 4, die übrig bleibenden Differenzen sind +3, +2, +1, 0, -1, -2, -3, und wenn es nicht schon die Messungen selbst gelehrt hätten, würde man aus dem Gange dieser Fehler ersehen, dass eine systematische Verfälschung der Beobachtungen platzgegriffen haben muss. Hat man jedoch die einzelnen Werte in der Folge 4, 5, 2, 1, 6, 7, 3 erhalten und wollte man auch jetzt noch jene erste Anordnung 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 beobachten, so würde man zu dem nicht gerechtfertigten Schluss kommen, dass wieder eine systematische Verfälschung stattgefunden habe, während doch der Umstand, dass die Zahlen bald grösser, bald kleiner als 4 gefunden worden sind, unmittelbar dafür spricht, dass ihre Abweichungen von 4 nur zufälliger Natur sein dürften. Im zweiten Fall muss man die Fehler schreiben 0, -1, +2, +3, -2, -3, +1, wo dann sofort klar ist, dass ein Gang sich nicht bemerkbar macht.

Man lässt also die Messungen so auf einander folgen, dass eine etwa vorhandene systematisch wirkende Ursache in jedem folgenden Fehler sich stärker, bezüglich schwächer bemerkbar macht, als in dem vorhergehenden. Da, wo die Messungen so angestellt sind, dass weder in ihrer Methode noch in ihrer Ausführung ein Grund zu systematischen Verfälschungen vorhanden ist, ordnet man die Messungen so, wie man sie der Zeitfolge nach erhalten hat, erst kommt die erste, dann die zweite, dritte, . . . , zuletzt die letzte Messung.

Man geht dabei von der Vermutung aus, dass vielleicht während der Messung mit der zu messenden Grösse oder dem messenden Apparat irgend eine fortdauernde Veränderung vor sich gegangen ist. Zum Beispiel kann, wenn es sich um die Ausmessung eines Maassstabes handelt, dieser im Laufe der Messung durch die Ausstrahlung des Beobachters immer wärmer und damit immer länger geworden sein. Hat man zwei Spectralfarben wiederholt verglichen, so kann das Auge des Beobachters mehr und mehr ermüdet und zur Wahrnehmung feiner Farbendifferenzen mehr und mehr untauglich geworden sein. In allen solchen Fällen sieht man gewissermassen die Zeit oder besser die Dauer der Messungen als störende Ursache an, hat also die Messungen nach der Zeit zu ordnen.

In andern Fällen treten systematische Verfälschungen dadurch auf, dass man während der Messungen die Methode nach bestimmten Gesichtspunkten

abändert. Hier wird man die Messungen gruppenweise nach den Methoden zusammenstellen, in jeder Gruppe ordnet man die Messungen nach der Zeit. Hat man zum Beispiel den Capillaritätscoefficienten des Wassers n_1 mal mit einer Röhre vom Radius r_1 , n_2 mal mit einer vom Radius r_2 u. s. f. bestimmt, so steht zu vermuten, dass die erhaltenen Zahlen nicht unabhängig von der Röhrenweite sind. Man schreibt also erst alle mit der Röhre vom Radius r_1 erhaltenen Messungen in der Folge, wie man sie ausgeführt hat, dann alle mit der vom Radius r_2 eruirten ebenfalls nach der Zeitfolge u. s. f.

Derartige Abänderungen der Methoden werden meist mit der Absicht unternommen, die Messungen von von vornherein nicht zu übersehenden systematischen Fehlern frei zu machen, man ordnet dann die Messungen nach den einzelnen Methoden und sucht durch die Discussion der übrig bleibenden wahrscheinlichsten Fehler zu entscheiden, ob die einzelnen Methoden gegen einander systematische Differenzen zeigen und, ob diese Differenzen sich im Gesamtergebnis genügend vernichten, so dass diese Differenzen selbst in Bezug auf die ganze Messungsreihe gleichsam als zufällig betrachtet werden dürfen.

Kehren wir nach dieser notwendigen Abschweifung über die Anordnung der Fehler, von der später in der Theorie der Untersuchungen noch mehreres zu sagen sein wird, zu der Kritik der Fehler zurück.

114. Die beiden Haupteigenschaften der zufälligen Fehler. Als Hauptmerkmale für zufällige Fehler haben wir anzusehen:

Positive Fehler und negative sind gleich wahrscheinlich.

Grosse Fehler sind viel unwahrscheinlicher als kleine.

Dazu haben wir noch die aus der analytischen Entwicklung der Theorie zufälliger Fehler erhaltenen Ergebnisse hinzuzuziehen, also namentlich die Relationen zwischen den charakteristischen Fehlern und das eigentliche Verteilungsgesetz.

Die Untersuchung der Fehler zerfällt hiernach in mehrere Abteilungen, die wir in den aufeinanderfolgenden Artikeln einzeln behandeln wollen.

Grundvoraussetzung ist, dass man die Fehler so angeordnet hat, wie es die voraufgehenden Betrachtungen vorschreiben.

115. Kritik der Grösse der einzelnen Fehler; auszuschliessende Beobachtungen. Man beginnt mit einer Durchsicht der Fehler nach ihrer absoluten Grösse. Zwar haben wir an andern Orten bemerkt, dass wirklich zufällige Fehler jeden beliebigen Betrag erreichen können, insofern könnte es scheinen, als ob man aus der Grösse eines Fehlers nichts auf die Ausführung der Beobachtung, der er zugehört, schliessen kann, indess sind grosse Fehler ausserordentlich wenig wahrscheinlich, und da man es in der Praxis immer nur mit beschränkten Messungsreihen zu tun hat, ist die Erwartung wol gerechtfertigt, dass bei keiner Beobachtung ein zu grosser Fehler übrig bleibt. Fällt also, wie man sich ausdrückt, eine Beobachtung aus der Reihe der übrigen gar zu sehr heraus, so kann man annehmen, dass bei dieser irgend ein Versehen gemacht ist oder irgend eine besondere

Störung gewaltet hat, man schliesst die betreffende Beobachtung aus und rechnet die Ausgleichung ohne dieselbe.

Doch ist hier die grösste Vorsicht geboten, denn einerseits ist es nicht leicht zu sagen, wann ein Fehler die zulässigen Grenzen überschreitet, weil diese Grenzen selbst nur willkürlich festgesetzt werden können, und andererseits bringt es die Eigenart der zufälligen Fehler mit sich, dass man durch Ausschluss einer anscheinend sehr schlechten Beobachtung das Resultat in Wahrheit nicht verbessert, sondern verschlechtert, weil zufällige Fehler die Neigung haben sich zu compensiren und durch Ausschluss eines starken positiven Fehlers andere negative Fehler Uebergewicht gewinnen.

Das betrifft die einzelnen Fehler, die folgenden Kriterien richten sich auf die Gesamtheit aller Fehler.

116. Kriterien aus den Zeichen, Zeichenwechsel und Zeichenfolgen.

Positive Fehler sind ebenso wahrscheinlich wie negative, das ist so zu verstehen, dass bei jedem Versuch für sich ein positiver Fehler ebenso leicht eintreten kann wie ein negativer. Wenn aber ein Versuch mit einem positiven Fehler behaftet war, so darf man noch nicht schliessen, dass nun der folgende zur Compensation eher einen negativen aufweisen wird als einen positiven; es kann ein negativer zum Vorschein kommen, aber ebenso leicht kann auch ein positiver vorkommen, nur dürfen nicht fortwährend Fehler eines Zeichens auftreten. Es kommt nicht allein auf die Anzahl der Zeichen an, sondern auch auf ihre Verteilung in der in principieller Weise geordneten Reihe der Fehler. Wir ersehen also zweierlei:

49₁. *In einer Reihe zufälliger Fehler hat man annähernd erstens ebenso viele positive Fehler zu erwarten wie negative, und zweitens ebenso viele Zeichenfolgen wie Zeichenwechsel.*

Dass der erste Teil dieses Kriteriums, wenn er auch notwendig ist, doch für sich nicht genügt auf die Zufälligkeit einer Fehlerreihe zu schliessen, lässt sich an den einfachsten Beispielen zeigen. Messungen, welche die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 in dieser Reihenfolge für eine bestimmte Grösse ergeben haben, sind offenbar systematisch verfälscht, in der Reihe der Fehler + 3, + 2, + 1, 0 - 1, - 2, - 3 finden sich aber genau so viele positive Fehler wie negative.

Erst wenn der zweite Teil dazu kommt, geben die Zeichen und ihre Anordnung ein gutes Kriterium ab, in der obigen Fehlerreihe ist auf mindestens 4 Zeichenfolgen höchstens ein Zeichenwechsel vorhanden.

117. Seeliger's Formulirung der Zeichen-Kriterien. Seeliger hat, um für dieses aus den Zeichen und ihrer Anordnung abgeleitete Kriterium festen Boden zu gewinnen, zwei durchdringende Untersuchungen angestellt.*) Ohne über das Wahrscheinlichkeitsgesetz irgend welche Voraussetzungen zu machen, findet er

*) Astronomische Nachrichten Bd. 96 und 97.

49₂. Je grösser die Anzahl der Einzelmessungen ist, um so wahrscheinlicher wird es, dass

1. die Anzahl aller positiven Fehler nahezu so gross wird wie die aller negativen;
2. die Anzahl aller Zeichenwechsel in der Fehlerreihe, dividirt durch die Anzahl aller Zeichen, nahezu gleich wird dem doppelten Product aus dem Verhältnis aller positiven Zeichen zu allen Zeichen in das Verhältnis aller negativen Zeichen zu allen Zeichen, und diese Wahrscheinlichkeit wird zur Gewissheit, wenn die Anzahl der Einzelmessungen ins Unbeschränkte wächst.

Bezeichnen wir mit n_+ die Anzahl aller positiven, mit n_- die aller negativen, mit n die aller Zeichen, sodass $n = n_+ + n_-$ wird, mit z die aller Zeichenwechsel, mit f die aller Folgen, so soll also näherungsweise sein

$$\frac{n_+}{n} = \frac{1}{2}, \quad \frac{n_-}{n} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{z}{n} = 2 \frac{n_+}{n} \cdot \frac{n_-}{n}.$$

Im Falle, dass $n_+ = n_-$ gesetzt werden darf, wie das von einer guten Ausgleichung verlangt werden kann, ist $2n_+n_-/n^2 = \frac{1}{2}$, das heisst, die Fehlerreihe muss nahezu ebenso viele Zeichenwechsel wie Zeichenfolgen haben. Auf relativ geringe Abweichungen kommt es dabei nicht an; sind zum Beispiel in einer Fehlerreihe $2/3$ aller Fehler positiv, und ist ein Drittel negativ, ein sehr schlechtes Verhältnis, so hat man für $2n_+n_-/n^2$ die Zahl $4/9$, was sich von $\frac{1}{2}$ nur um $1/18$ unterscheidet.

Wir wollen diese Kriterien auf unser schon mehrfach benutztes Beispiel anwenden.

Im ersten Fall hatten wir als

$$\begin{array}{l} \text{Messungen: } 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \\ \text{Fehler: } \quad +3, +2, +1, \quad 0, \quad -1, \quad -2, \quad -3, \end{array}$$

somit, da die 0 positiv wie negativ gerechnet werden kann,

$$\frac{n_+}{n} = \frac{3}{7} \text{ oder } \frac{4}{7}, \quad \frac{n_-}{n} = \frac{4}{7} \text{ oder } \frac{3}{7} \text{ statt } \frac{1}{2},$$

$$\frac{z}{n} = \frac{7}{49}, \quad \frac{f}{n} = \frac{35}{49}, \quad \text{während } \frac{2n_+n_-}{n^2} = \frac{24}{49} \text{ ist.}$$

Die Verteilung der Zeichen ist also eine gute, aber ihre Anordnung sehr schlecht, es ist nur ein Zeichenwechsel auf 5 Zeichenfolgen.

Im zweiten Falle dagegen waren die

Messungen: 4, 5, 2, 1, 6, 7, 3,
Fehler: 0, -1, +2, +3, -2, -3, +1,

somit

$$\frac{n_+}{n} = \frac{3}{7} \text{ oder } \frac{4}{7}, \quad \frac{n_-}{n} = \frac{4}{7} \text{ oder } \frac{3}{7} \text{ statt } \frac{1}{2},$$

$$\frac{z}{n} = \frac{21}{49} \text{ oder } \frac{28}{49}, \quad \frac{f}{n} = \frac{21}{49} \text{ oder } \frac{14}{49} \text{ statt } \frac{24}{49}.$$

Hier ist sowohl die Verteilung der Zeichen als ihre Anordnung eine für die geringe Anzahl von Versuchen jedenfalls befriedigende.

118. Das Abbesche Kriterium. Von diesen Resultaten ausgehend, können wir leicht einen Satz begreiflich machen, für den Abbe*) den Beweis geliefert hat.

Wenn nämlich die Fehler, wie etwa im ersten Fall, so angeordnet sind, dass zuerst positive, dann negative Fehler kommen oder umgekehrt, so bildet das Product zweier aufeinanderfolgender Fehler zuerst eine positive Grösse, dann in der Mitte einmal eine negative, dann wieder bis ans Ende eine positive Grösse, und wenn man noch den letzten Fehler mit dem ersten multiplicirt, eine negative Grösse, es kommen nur zwei negative auf eine ganze Reihe positiver Producte und die Summe aller Producte ist mithin mit grosser Wahrscheinlichkeit positiv. Dies ist der eine extreme Fall, in andern extremen Fall können die Zeichen alternirend aufeinanderfolgen + - + - u. s. f. Dann sind alle Producte negativ, und es kann höchstens das Product aus dem letzten und ersten Fehler eine positive Grösse geben. Hier ist also mit der grössten Wahrscheinlichkeit die Summe aller Producte negativ. Beide Zeichenanordnungen entsprechen aber nicht der Anordnung bei einer zufälligen Fehlerreihe, denn im ersten Fall hat man nur einen Zeichenwechsel, im zweiten gar keine Zeichenfolge. In einer guten Fehlerreihe giebt es nahezu ebenso viele Zeichenwechsel wie Zeichenfolgen, also auch nahezu ebenso viele positive Producte wie negative, und da die Grösse der Fehler keiner Ordnung folgen darf, so sieht man ein:

50. *Der Grenzwert der Summe der Producte von zwei aufeinanderfolgenden Fehlern (immer in der Anordnung, die principiell vorgeschrieben werden muss), nämlich*

$$\text{LXI) } S = v_1 v_2 + v_2 v_3 + v_3 v_4 + \dots + v_{n-1} v_n + v_n v_1,$$

wird mit um so grösserer Wahrscheinlichkeit Null, je grösser die Anzahl der Einzelmessungen ist; für eine unbeschränkt grosse Anzahl von Einzelmessungen ist die Summe geradezu gleich Null.

*) Ueber die Gesetzmässigkeit in der Verteilung der Fehler bei Beobachtungsreihen. Jena 1863, Frommann.

Dieser Satz liefert ein neues Kriterium, er ist aber insofern von geringerem Wert, als die voraufgehenden Sätze, weil er bei Messungsreihen von wenigen Einzelmessungen keine rechte Entscheidung bringt.

In unserem Beispiel ist

im ersten Fall

$$S = 6 + 2 + 0 + 0 + 2 + 6 - 9 = +7,$$

im zweiten

$$S = 0 - 2 + 6 - 6 + 6 - 3 + 0 = +1,$$

was jedenfalls im ersten Fall als ein ungünstiges, im zweiten als ein günstiges Resultat zu bezeichnen ist. Hätten wir aber die Messungen in der Folge 4, 5, 3, 2, 6, 7, 1 erhalten, so würden die Zeichenkriterien an den Fehlern dieselben günstigen Resultate, wie bei der zweiten Anordnung ergeben haben, aber es wäre das Abbesche Kriterium ungünstig ausgefallen, denn man hätte

$$S = 0 - 1 + 2 - 4 + 6 - 9 + 0 = -6,$$

und doch sollte man nach dem Anblick der einzelnen Messungsergebnisse meinen, sie seien nur zufällig verfälscht.

119a. Kriterien für die Giltigkeit des Wahrscheinlichkeitsgesetzes.

Die weitem aus der Fehlerreihe selbst zu schöpfenden Kriterien haben unmittelbar die Giltigkeit des Gaussischen Wahrscheinlichkeitsgesetzes zur Voraussetzung. Hier ist es gleichgiltig, wie die Fehler geordnet sind, es kommt nur ihre absolute Grösse in Betracht, und man tut gut, sie noch einmal ihrer absoluten Grösse nach hinzuschreiben.

Bei zufälligen Verfälschungen sollen kleine Fehler sehr viel leichter vorfallen können als grosse. Wir kennen sogar das Gesetz, welches die Anzahl der Fehler von ihrer Grösse abhängig macht.

119b. Kriterien aus dem Verteilungsgesetz der Fehler. Ist nämlich N die Anzahl aller überhaupt möglichen Fehler, so giebt (Art. 75) die Grösse

$$N_{\Delta_1}^{\Delta_2} = N \left\{ \theta \left(0,47694 \frac{\Delta_2}{r} \right) - \theta \left(0,47694 \frac{\Delta_1}{r} \right) \right\}$$

die Anzahl aller Fehler, die nicht kleiner sind als Δ_1 und keinen grössern Betrag haben als Δ_2 .

In der Praxis, wo die Messungsreihen beschränkt sind, können nicht alle Fehler vorkommen, die überhaupt möglich sind. Indessen kann man, wenn nicht gar zu wenig Einzelmessungen vorliegen, N ersetzen durch die Anzahl n aller wirklich vorgefallenen Fehler, man nimmt dann an, dass jeder Fehlerbetrag in der wirklichen Fehlerreihe in demselben Verhältnis weniger oft vorkommt, als diese wirkliche Fehlerreihe im Verhältnis zu der möglichen weniger Zahlen enthält. Indem man dann alle Fehler in Gruppen so ordnet, dass jede Gruppe sich von der ihr zunächst stehenden um eine

bestimmte für alle Gruppen gleiche Grösse unterscheidet, für jede Gruppe die ihr theoretisch zukommende Zahl nach der obigen Formel berechnet und mit der vorhandenen Fehlerzahl vergleicht, gewinnt man eine gewisse Uebersicht darüber, ob die Fehler dem Verteilungsgesetz gehorchen oder nicht.

Ein Beispiel für eine solche Rechnung habe ich schon in Art. 76 vorgeführt. Eine solch genaue Rechnung wird aber selten nötig und erspriesslich sein, meist lehrt schon ein Blick auf die Fehlerreihe das Gewünschte, und meist sind eben die Fehlerreihen zur Anwendung jenes Kriteriums so beschränkt, dass man aus dem Für oder Wider des Kriteriums nichts Entscheidendes zu schliessen vermag.

120. Kriterien aus den Beziehungen zwischen den charakteristischen Fehlern. Wertvoller und viel bequemer sind die Beziehungen zwischen den einzelnen charakteristischen Fehlern zur Beurteilung der Fehler. Zwar sind wir nicht in der Lage diese genau zu berechnen, aber auch für die wahrscheinlichsten Fehler müssen, wofern sie dem hier adoptirten Wahrscheinlichkeitsgesetz genügen, die Gleichungen des Art. 96 wenigstens angenähert Geltung haben, vermöge deren man die Präcision aus jeder Potenzsumme der absolut gerechneten Fehler eruiren kann. Da man meist nicht die Präcision, sondern die sie ersetzenden charakteristischen Fehler bestimmt, so wird man die Relationen zwischen diesen benutzen, also namentlich die zwischen dem mittlern und durchschnittlichen und die zwischen dem mittlern und wahrscheinlichen Fehler.

Die erste Relation sagt in bequemer Form aus, dass der mittlere Fehler einer Messung $1\frac{1}{4}$ mal so gross ist, wie der durchschnittliche. Genauer ist

$$\mu = 1,25331 \delta,$$

man berechnet also aus den wahrscheinlichsten Fehlern erst den durchschnittlichen, dann den mittlern Fehler und sieht zu, ob die obige Beziehung zwischen den beiden erhaltenen Zahlen erfüllt ist, wenigstens so weit erfüllt ist, als es die Unsicherheiten $\mu 0,708/\sqrt{n-1}$ und $\delta 0,758/\sqrt{n-1}$ in der Berechnung von μ bezüglich δ zulassen.

Was die Beziehung zwischen dem wahrscheinlichen und mittlern Fehler anbetrifft, so ist

$$r = 0,67449 \mu.$$

Den mittlern Fehler kann man nur durch Rechnung finden, der wahrscheinliche lässt sich aber, wenn auch nur annähernd, aus der Zahl der übrig bleibenden Fehler herauserkennen. Nach seiner Definition ist nämlich der wahrscheinliche Fehler derjenige, über dem es ebenso viele Fehler giebt, wie unter ihm vorhanden sind. Nachdem man die Fehler ohne Rücksicht auf ihre Zeichen nach ihrer Grösse geordnet hat (wobei von gleich grossen Fehlern jeder hingeschrieben werden muss), sucht man sich den heraus, der ihre ganze Anzahl in zwei gleiche Teile spaltet, so dass ebenso viele Fehler grösser wie kleiner sind, als er. In einer Fehlerreihe mit einer ungeraden

Anzahl, etwa $2\nu + 1$ Fehlern, giebt es stets einen mittelsten Fehler, es ist der $\nu + 1$ te, in einer mit einer geraden Anzahl, 2ν , nimmt man das Mittel aus dem ν ten und dem $\nu + 1$ ten. Der so durch Abzählen gefundene Fehler ist genähert der wahrscheinliche Fehler, mit $3/2$ multiplicirt — genauer durch 0,6745 dividirt — muss er eine Zahl liefern, die der des errechneten mittlern Fehlers annähernd gleich kommt. Diese Relation kann und braucht auch nicht so genau erfüllt zu sein, wie die zwischen dem mittlern und durchschnittlichen Fehler.

Doch muss noch hinzugefügt werden, dass bisher die Erfahrung ein etwas stärkeres Auftreten grösserer Fehler aufweist, als man es nach dem Gaussischen Wahrscheinlichkeitsgesetz erwarten sollte. Man wird daher den durch Abzählen herausgesuchten wahrscheinlichen Fehler meist etwas grösser finden, als den aus dem mittlern Fehler berechneten.

Das sind so die aus der Fehlerreihe selbst zu entnehmenden Kriterien. Seeliger hat aber in der schon citirten Untersuchung darauf aufmerksam gemacht, dass sich auch die Differenzenreihen der Fehlerreihe zur Gewinnung von Kriterien heranziehen lassen. Er hat überall nur die erste Differenzenreihe und diese auch nur nach ihrer Zeichenanordnung benutzt. Man kann aber etwas weiter gehen.

121. Zeichenkriterien aus den Differenzenreihen der Fehler. Wir ordnen wieder die Fehler so, wie es zur Entdeckung der betreffenden systematischen Verfälschungen nötig ist. Die Reihe, die dann herauskommt, sei

$$v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_{n-1}, v_n,$$

jeder Fehler mit dem Zeichen genommen, das ihm zukommt. Bilden wir dann die Reihe

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \dots, v_{n-1} - v_n,$$

so haben wir die erste Differenzenreihe der Fehler, und diese ist sogar auch Differenzenreihe der wahren Fehler. Sind nun die einzelnen v nach ihren Zeichen und ihrer Grösse dem Zufall unterworfen, so stellen auch die Zahlen der Differenzenreihe in gewisser Beziehung zufällige Zahlen dar, denn da jede Zahl einen neuen Fehler enthält, sind alle Zahlen bis zu einem gewissen Grade von einander unabhängig, und jede ist, vermöge der in sie neu eintretenden, ganz zufälligen Zahl gegen jede der andern zufällig, wenn auch die Differenzenreihe im Ganzen keine unabhängige Zahlenreihe darstellt. Es kann von ihren Zeichen genau dasselbe erwartet werden, wie von denen der Fehler, das heisst in der Differenzenreihe haben annähernd gleich viele positive und negative Zeichen sich vorzufinden, und es müssen Zeichenwechsel und Zeichenfolgen, sich in annähernd gleicher Menge vorfinden. Diesen Satz hat zuerst Seeliger ausgesprochen. Bildet man aus der ersten Differenzenreihe eine zweite, aus dieser eine dritte u. s. f., so kann man wol sagen:

51. *In keiner Differenzenreihe soll ein Zeichen das andere stark überwiegen, in allen sollen Zeichenwechsel und Zeichenfolgen vertreten sein.*

Aber es ist hier noch eins zu beachten. Bildet man aus einer Zahlenreihe eine Differenzenreihe, so können in dieser neue Zeichenfolgen namentlich an Stellen entstehen, wo in der Zahlenreihe Nullen stehen, wo es also zweifelhaft ist, ob man eine Zeichenfolge oder einen Zeichenwechsel anzunehmen hat. Die Differenzenreihe wird aber nicht mehr Zeichenfolgen aufweisen, als der ursprünglichen Zahlenreihe zugeschrieben werden dürfen. Zeichenfolgen haben die Neigung aus den successiven Differenzenreihen mehr und mehr zu verschwinden und Zeichenwechseln Platz zu machen. Ferner bestehen die Differenzenreihen aus um so weniger Zahlen, von je höherer Ordnung sie sind, daher brauchen die obigen Forderungen um so weniger erfüllt zu sein, je weiter wir uns von der eigentlichen Fehlerreihe entfernen.

Im allgemeinen wird man relativ mehr und mehr Zeichenwechsel eintreten sehen. Doch ist es von vornherein klar, *dass ein Ueberwiegen der Zeichenwechsel immer noch günstiger gedeutet werden muss, als ein Ueberwiegen von Zeichenfolgen.*

122. Kriterien aus dem Verschwinden von Differenzenreihen. Auch aus der Grösse der Zahlen in den Differenzenreihen ist noch einiges zu ersehen. Jede Zahl in einer Differenzenreihe setzt eine zunächst rein zufällige Relation zwischen einer gewissen Anzahl von Fehlern fest, wenn aber alle diese Relationen einander gleich sind, hört der Zufall auf. Die folgende Differenzenreihe besteht dann aus lauter Nullen, und man muss notwendig schliessen, dass die Fehlerreihe rein aus systematischen Fehlern zusammengesetzt war.

52. *Bei Fehlern, die nicht rein systematisch sind, darf keine Differenzenreihe verschwinden, geschieht das doch, so sind die Fehler darstellbar durch eine algebraische Function.*

Die algebraische Darstellung der systematischen Fehler ist aber der allein für die Praxis wichtige Fall. So verschwindet bei Fehlern die nach dem Gesetze $v = a$ gebildet sind, also bei constanten Fehlern, die erste; bei solchen, nach dem Gesetze $v = a + bt$, wo t die Variable ist, die zweite; wenn $v = a + bt + ct^2$ ist, die dritte Differenzenreihe u. s. f. Dieses wäre also ein ganz unfehlbares Kriterium für rein systematische Fehler, wie sie in der Praxis vorkommen können, aber einerseits wird in seltenen Fällen die Beobachtungsreihe so durchgeführt sein, dass die Ursache, welche die systematische Verfälschung hervorbringt, proportional zu- oder abnimmt, und andererseits hat man es fast nie mit rein systematischen Fehlern zu tun, weitaus in den meisten Fällen bestehen die Fehler aus systematischen und zufälligen Elementen, und meist sind die zufälligen Teile derselben den systematischen gegenüber keineswegs zu vernachlässigen. Die Forderung, dass alle Differenzenreihen sich sollen bilden lassen, bleibt aber bestehen. Es kommt manchmal vor, dass die systematische Verfälschung nur eine Zeit lang geherrscht hat, und dann aufhörte, dieses wird sich in den Differenzenreihen darin offenbaren, dass eine von ihnen eine Anzahl von auf einander folgenden Nullen aufweist. Mehrere

auf einander folgende Nullen in einer Differenzenreihe können immer als verdachterweckend angesehen werden, und sie sind um so mehr zu beachten, in je grösserer Anzahl sie erscheinen und je niedriger die Ordnung der betreffenden Differenzenreihe ist, in der sie vorkommen.

Da jede Function ihren Charakter in den successiven Differenzenreihen ihrer auf einander folgenden Beträge offenbart, ist es möglich, dass man durch eingehendes Studium der Differenzenreihen von Fehlerreihen zu neuen Kriterien gelangen kann, aber diese Kriterien würden dann schon sehr in Specielle gehen.

Immerhin dürfte die Durchsuchung der Differenzenreihen nach besonderen Eigenartigkeiten sehr zu empfehlen sein, sie ist insofern nie ohne Nutzen, als wenn sich in denselben nichts auffallendes hat finden lassen, das Suchen vergeblich war, man zu dem Charakter der Fehler als zufälliger mehr Vertrauen fassen kann.

Die Differenzenreihen gestatten auch dem Abbeschen Kriterium bequemern Ausspruch zu verleihen.

123. Neue Fassung des Abbeschen Kriteriums als Satz von der mittlern ersten Fehlerdifferenz. Fügt man zu der Reihe der ersten Differenzen noch die Differenz des letzten Fehlers gegen den ersten (indem man sich bildlich die Fehler auf einem Kreise angeordnet denkt), so hat man die Zahlengrössen

$$\delta_1 = v_1 - v_2, \delta_2 = v_2 - v_3, \delta_3 = v_3 - v_4, \dots, \delta_{n-1} = v_{n-1} - v_n, \delta_n = v_n - v_1.$$

Daher ist

$$\sum_{x=1}^{x=n} \delta_x^2 = 2 \sum_{x=1}^{x=n} v_x^2 - 2(v_1 v_2 + v_2 v_3 + v_3 v_4 + \dots + v_{n-1} v_n + v_n v_1).$$

Nach dem Abbeschen Satz hat man aber eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Klammerausdruck verschwindet, daher ist im Grenzfall einer unbeschränkten Messungsreihe

$$\Sigma \delta^2 = 2 \Sigma v_x^2,$$

oder, indem man die aus der ersten Differenzenreihe gebildete mittlere erste Differenz mit μ_δ bezeichnet,

$$\text{LXII)} \quad \mu_\delta = \sqrt{2} \mu = 1,414 \mu.$$

Diese Gleichung ersetzt das Abbesche Kriterium, und sie ist vielleicht insofern vorzuziehen, als man bei mittlern Fehlern sich auf bekannterem Boden befindet. Aehnliche Gleichungen lassen sich für die folgenden Differenzenreihen entwickeln, sind aber weniger genau.

124. Beispiel. Als Beispiel zur Erläuterung der letzten Auseinandersetzungen über die Differenzenreihen benutze ich wieder das schon mehrfach verwendete.

Im ersten Fall haben wir

Fehler	Differenzenreihen					
	1	2	3	4	5	6
+ 3						
+ 2	- 1					
+ 1	- 1	0				
0	- 1	0				
- 1	- 1	0				
- 2	- 1	0				
- 3	- 1	0				

Die folgenden Differenzenreihen verschwinden ebenfalls.

Die erste Differenzenreihe hat nur Zeichenfolgen, die zweite besteht schon aus lauter Nullen, die Fehler folgen also dem Gesetz $v = a + bt$.

Constante und linear-variabele Verfälschungen erkennt man übrigens immer an den Messungen selbst, doch soll das obige nur ein Beispiel sein.

Im zweiten Fall, wo die Messungen in der Folge 4, 5, 2, 1, 6, 7, 3 erhalten wurden, haben wir

Fehler	Differenzenreihen					
	1	2	3	4	5	6
0						
- 1	- 1					
+ 2	+ 3	+ 4	- 6			
+ 3	+ 1	- 2	- 4	+ 2		
- 2	- 5	- 6	+ 10	+ 14	+ 12	
- 3	- 1	+ 4	+ 10	- 9	- 23	- 35
- 3	- 1	+ 4	+ 1			
+ 1	+ 4	+ 5				

Hier sind alle Differenzenreihen vorhanden, in jeder kommen nahezu ebenso viele positive Fehler vor wie negative, ferner hat jede Reihe ungefähr ebenso viel Zeichenwechsel wie Zeichenfolgen.

125. Kriterium aus der Zu- und Abnahme der Fehlerbeträge. Etwas ähnliches, wie von den Zeichen der Fehler gilt auch von ihren absoluten Beträgen, zwar dürfen nicht grosse und kleine Fehler in gleicher Anzahl vertreten sein, im Gegenteil, jene sollen relativ seltener vorkommen als diese, aber es müssen grosse Fehler mit kleinen gehörig abwechseln, und andererseits sollen Grössenfolgen und Grössenwechsel tunlichst gleich verteilt sein, denn offenbar kann es nicht mehr Zufall sein, wenn die Fehler in ihren Beträgen fortwährend wachsen oder abnehmen, noch wenn sie alternierend bald grössere, bald kleinere Beträge aufweisen. Einen bequemen

Ausdruck für die obige Forderung gewinnen wir, wenn wir von den Fehlern zu ihren Differenzen übergehen.

53. *Bildet man zu der Reihe der ohne Zeichen, aber in der principiell notwendigen Ordnung hingeschriebenen Fehler ihre Differenzenreihe, so müssen in dieser positive Zeichen und negative in annähernd gleicher Menge vorkommen und Zeichenwechsel und Zeichenfolgen sollen in ähnlicher Anzahl vertreten sein.*

Im zweiten Fall unseres Beispiels haben wir

absolute Fehlerreihe	0,	1,	2,	3,	2,	3,	1,
Differenzen	+ 1,	+ 1,	+ 1,	− 1,	− 1,	+ 2,	

also 4 positive, 2 negative Zeichen, 3 Zeichenfolgen, 2 Zeichenwechsel, das ist nicht ungünstig. Im ersten wäre

absolute Fehlerreihe	3,	2,	1,	0,	1,	2,	3,
Differenzen	− 1,	− 1,	− 1,	+ 1,	+ 1,	+ 1,	

3 positive, 3 negative Zeichen, aber 4 Zeichenfolgen, 1 Zeichenwechsel.

126. Der Wert der Kriterien und die Notwendigkeit eingehender Protokolle: Es wird dem Leser aufgefallen sein, dass so sehr viele Kriterien herangezogen sind, das liegt aber einfach daran, dass systematische Verfälschungen den allerverschiedensten Gesetzen folgen können. Absolut entscheidende Kriterien besitzt man für die Praxis überhaupt nicht, weil der Begriff gesetzloser Zahlenansammlungen uns an sich nicht recht fassbar ist. Man ist nur oft in der Lage, zu entscheiden, ob eine Zahlenreihe systematisch verfälscht ist, dass sie rein zufällig ist, vermag man nie mit Sicherheit zu behaupten. Daher muss man sich alle übersehbaren Mittel dienstbar machen, um wenigstens einige Sicherheit für ein abgegebenes Urteil zu besitzen, denn wenn auch jedes der angeführten Kriterien für sich nicht ausreicht, um zu entscheiden, ob man es in den übrig bleibenden Fehlern mit systematischen oder zufälligen Fehlern zu tun hat, so wird man doch durch die Anwendung aller, und namentlich der Zeichenkriterien, zu einem relativ sichern Urteil gelangen. Im einzelnen muss das meiste der Einsicht des Beobachters überlassen bleiben. Nur zweierlei will ich noch hervorheben:

1. Da die Seeligerschen Zeichenkriterien von der Anordnung der Messungsergebnisse abhängen, so beziehen sie sich genau auf die Anordnung, die man gerade getroffen hat. Sie entscheiden, ob die Fehler in Bezug auf die Annahme, die man durch die besondere Anordnung ausdrücken will, zufällig sein können oder nicht, aber nur in Bezug auf diese Annahme. Hat man noch einen andern Grund für eine eventuelle systematische Verfälschung der Messungen, so muss man die Messungsergebnisse auch so noch anordnen und mit dem Seeligerschen Kriterium untersuchen, dass auch dieser andere Grund seinen Ausdruck erhält.

Man muss demnach die Fehler in so vielen Reihen anordnen, als man besondere Gründe zu systematischen Verfälschungen hat und jede Reihe für sich nach der Methode der Zeichenzählung untersuchen.

2. Die Hauptgrundlage für die Beurteilung der übrig bleibenden Fehler und damit des errechneten Resultats bildet das Beobachtungsprotokoll. Dieses muss daher mit minutiöser Sorgfalt geführt sein. Es soll nicht blos die nackten Messungsergebnisse enthalten, sondern auch die Umstände, unter denen die Arbeiten ausgeführt sind, angeben; und während der Experimente vorgefallene Störungen durch Temperaturwechsel, Zug, Ermüdung u. s. f. müssen sorgfältig notirt sein. Man gewinnt so eine weit sicherere Uebersicht über das Verhältnis der einzelnen Messungen zu einander, als durch die eingehendsten theoretischen Rechnungen. Da ferner der Beobachter selbst am besten beurteilen kann, wie seine Messungen ausgefallen sind, da er namentlich allein mit den einzelnen Vorgängen während der Messungen bekannt ist, so ist es am besten, wenn er die Berechnung seiner Beobachtungen selbst ausführt. Zur Herstellung eines relativ freien Urteils ist es aber gut, wenn er sich vor der Rechnung, indem er sich den ganzen Verlauf der Messungen nochmals vergegenwärtigt und namentlich das Protokoll zu Rate zieht, die einzelnen Messungen nach Massgabe ihrer Güte auf einem besondern Blatt*) anordnet.

Diese Ordnung bestimmt zugleich die Ordnung der relativen Gewichte der einzelnen Messungen. Diese Gewichte zahlenmässig zu fixiren, ist meist so schwer, dass man bei den Messungen darauf Rücksicht nehmen muss, dass den einzelnen Bestimmungen tunlichst gleiches Gewicht zukommt. Nachträglich für eine Messung ein bestimmtes Gewicht ansetzen, darf man nur da, wo die zwingendsten Gründe vorliegen. Nur wenn man von den einzelnen Bestimmungen weiss, aus wie vielen Messungen gleicher Art jede von ihnen hervorgegangen ist, kann man die Zahlen für die Gewichte unmittelbar angeben, es ist dann das Gewicht einer Bestimmung so gross, wie die Zahl der Messungen, aus denen man sie abgeleitet hat. Aber es ist schon bemerkt, dass man in diesem einzigen Fall am besten auf die gleichwertigen Messungen zurückgeht.

Wenn man keinen Massstab für die Gewichte der einzelnen Messungen hat, giebt man am besten allen Messungen gleiches Gewicht, rechnet also mit dem Gewicht 1.

Doch muss ich wegen der genauern Vorschriften in Bezug auf die Gewichtsangaben auf das betreffende Capitel über Untersuchungen verweisen.

127. Zusammenstellung der Kriterien für zufällige Fehlerreihen. Ich stelle jetzt alle Kriterien für zufällige Fehler zusammen:

1. Kein Fehler darf an Grösse irgend besonders auffallend hervortreten;

*) Für die Rechnung sind natürlich die Messungen nach den Principien anzuordnen, die vorhin angegeben sind.

die Messung, die einen Fehler hat, dessen Betrag ganz und gar unwahrscheinlich ist, muss von der Berechnung ausgeschlossen werden.

2. Wenn die Fehler so geordnet sind, dass die vermuteten systematischen Verfälschungen einen Gang zeigen können (also nach wachsenden oder abnehmenden Beträgen der verfälschenden Ursache), so müssen

2a. In der Fehlerreihe und in ihren Differenzenreihen positive und negative Zeichen in nahezu gleichen Mengen vorhanden sein und Zeichenwechsel mit Zeichenfolgen gehörig abwechseln.

Doch ist ein Ueberwiegen von Zeichenwechseln günstiger zu deuten, als ein Ueberwiegen von Zeichenfolgen.

Speziell hat Seeliger bewiesen:

Je grösser die Anzahl der Einzelmessungen ist, um so wahrscheinlicher wird es, dass

in der Fehlerreihe:

die Anzahl z aller Zeichenwechsel, dividirt durch die Anzahl aller Zeichen n , nahezu gleich ist dem doppelten Product aus der Anzahl n_+ aller positiven Zeichen in die Anzahl n_- aller negativen

Zeichen, dividirt durch das Quadrat aller Zeichen $\left(z = \frac{2n_+n_-}{n^2} \right)$,

in der ersten Differenzenreihe:

die Anzahl aller positiven, bezüglich negativen Zeichen, dividirt durch die Anzahl aller Zeichen, nahezu gleich $1/2$;

$$\left(\frac{n'_+}{n'} = \frac{1}{2}, \quad \frac{n'_-}{n'} = \frac{1}{2} \right),$$

Die Anzahl aller Zeichenwechsel, dividirt durch die Anzahl aller Zeichen, nahezu gleich $1/2$,

ist, und diese Wahrscheinlichkeit nähert sich der Gewissheit, wenn die Anzahl der Einzelmessungen ins Unbeschränkte wächst.

2b. Die Zahlen in den einzelnen Differenzenreihen (mit ihren Zeichen aufgefasst) müssen tunlichst verschieden sein, namentlich dürfen nicht starke Anhäufungen algebraisch gleicher Zahlen auftreten. Die Differenzenreihen sollen sich alle bis tunlichst zur letzten Reihe bilden lassen.

Doch wird man sich fast immer mit der Untersuchung der drei oder vier ersten Differenzenreihen begnügen können.

Definirt man ferner die mittlere Zahl in einer Zahlenreihe genau so, wie den mittlern Fehler einer Fehlerreihe, so muss

2c. die mittlere erste Differenz fast das 1,414fache des mittlern Fehlers sein ($\mu_s = 1,414\mu$) (Abbe'sches Kriterium).

2d. Behält man noch dieselbe Anordnung der Fehler, lässt aber ihre Zeichen fort und bildet dann die erste Differenzenreihe, so müssen in dieser positive und negative Zeichen und ebenso Zeichenwechsel und Zeichenfolgen in annähernd gleicher Menge vertreten sein.

Vermutet man, dass die Messungen durch mehrere Ursachen systematisch verfälscht sind, so hat man die Fehler für jede Ursache besonders zu untersuchen, was natürlich im allgemeinen für jede Ursache eine eigene Anordnung der Fehler bedingen wird.

Wo man keinen Grund hat, irgend eine systematische Verfälschung anzunehmen, ordnet man die Fehler so an, wie die Messungen der Zeit nach erhalten sind.

Hieran reihen sich noch Kriterien zur Entscheidung, ob die übrig bleibenden Fehler auch dem zu Grunde gelegten Wahrscheinlichkeitsgesetz gehorchen, und man tut am besten, für diese die Fehler in der Folge ihrer absoluten Beträge (jeden, so oft er vorkommt) anzuordnen.

3 a. In der Fehlerreihe müssen kleine Fehler relativ öfter vertreten sein wie grosse. Genau sollte die Anzahl der Fehler von dem kleinsten Fehler Δ_0 bis zum Fehler Δ , welches auch der Fehler Δ ist, sein

$$n_{\Delta_0}^{\Delta} = n \left\{ \Theta \left(0,47694 \frac{\Delta}{r} \right) - \Theta \left(0,47694 \frac{\Delta_0}{r} \right) \right\},$$

wo n die Anzahl aller Fehler in der Fehlerreihe bedeuten darf, falls diese Anzahl nicht zu klein ist. Für die Funktion Θ ist, wie in Art. 67 auseinandergesetzt, eine Tafel an das Ende des Buches angefügt.

Die Anwendung dieses Kriteriums dürfte nicht zu oft von besonderem praktischen Nutzen sein. Theoretisch ist dieses Kriterium aber von hohem Wert, und Bessel hat es bekanntlich benutzt, um an einer besonders grossen Fehlerreihe (aus Bradley's Sternbeobachtungen) die Giltigkeit des Gaussischen Wahrscheinlichkeitsgesetzes nachzuweisen. Wichtig sind die folgenden Kennzeichen.

3 b. Der in der Fehlerreihe — diese nach den absoluten Beträgen der Fehler geordnet — in der Mitte stehende oder, falls die Anzahl der Fehler gerade ist, als Mittel aus den beiden mittelsten Fehlern gebildete Fehler, muss annähernd 0,6745, oder kurz $2/3$, vom mittlern Fehler betragen.

3 c. Der durchschnittliche Fehler soll bis auf die der Berechnung der charakteristischen Fehler an sich anhaftende Unsicherheit das $4/5$ fache vom mittlern Fehler betragen.

Ueber das Resultat sagen die Kriterien gar nichts aus. Wenn sie anzeigen, dass die systematischen Verfälschungen als klein betrachtet werden dürfen, so wird im allgemeinen auch das Resultat nur in geringem Maasse systematisch verfälscht sein, aber da im Resultat die zufälligen Fehler sich compensiren sollen, so spielt hier der systematische Fehler eine relativ viel wichtigere Rolle, als in den einzelnen Messungen: Hat man nun die betreffende Grösse genügend scharf oder in häufiger Wiederholung gemessen, so ist das Verlangen, auch den Rest der Unsicherheit aus dem Resultat tunlichst auszumerzen, wol gerechtfertigt. Alsdann bleibt nichts übrig, als für die vermutete systematische Verfälschung einen Ansatz zu

machen, aus den Beobachtungen die Constanten dieses Ansatzes auszurechnen und zuzusehen, ob dann nach Anbringung der so eruirten systematischen Verfälschung die Fehler der Zufälligkeit sich mehr anschliessen als früher. Wie man dabei zu verfahren hat, kann erst später in der Theorie der Untersuchungen dargelegt werden.

c) *Praktischer Wert der charakteristischen Fehler.*

128. Der mittlere Fehler des Resultats als Kriterium für das Erreichte. Die dritte und letzte Frage bezog sich auf den Nutzen der charakteristischen Fehler.

Sehr einfach stellt sich die Sache für die charakteristischen Fehler des Resultats, hier ist nämlich allein der mittlere Fehler von Bedeutung, und da dieser zugleich den wahrscheinlichsten Fehler des Resultats abgiebt, so stellt er die wahrscheinlichste Unsicherheit, die dem gewonnenen Resultat noch anhaftet, dar. Nun muss der Experimentator immer einen gewissen Ueberblick über die Sicherheit, mit der er eine betreffende Grösse bestimmen will, im Voraus besitzen; er muss wissen, welchen Fehler in dem Endergebnis er sich gefallen lassen kann; findet er den mittlern Fehler des Resultats kleiner als diesen zu tolerirenden Fehler, so darf er mit seinen Versuchen zufrieden sein, findet er ihn grösser, so muss er noch mehr Versuche machen oder die Methode ändern. Gewöhnlich sucht man die Beobachtungen so weit zu treiben, bis der mittlere Fehler nur mehr etwa $1/3$ von dem zu tolerirenden beträgt.

129. Die charakteristischen Fehler der Einzelmessungen als Kriterien für die Methode der Beobachtung. Die charakteristischen Fehler der Messungen haben eine mehr ideale Bedeutung. Wir wissen, dass man mit jeder Methode, vorausgesetzt, dass nur zufällige Fehler vorkommen, durch genügende Häufung der einzelnen Bestimmungen schliesslich zu einem genügend genauen Resultat gelangen kann, es können also auch schlechte Methoden, wenn man nur die genügende Ausdauer in dem Wiederholen der Messungen und Variiren der Umstände entwickelt, zu einem relativ geringen mittlern Fehler des Resultats führen. Dagegen wird man, man mag die Versuche so oft wiederholen, wie man will, nie bei einer schlechten Methode für die einzelnen Messungen kleine charakteristische Fehler erlangen.

Die charakteristischen Fehler der Einzelmessungen sind unlösbar mit der Methode*) der Beobachtung verknüpft, sie sind gross, wenn diese Methode schlecht, klein, wenn sie gut ist. Demgemäss dienen denn auch diese Fehler zur Kritisirung der Art, wie man die Beobachtungen eingerichtet, mit welchen Mitteln man sie ausgeführt hat und wie man als Beobachter

*) Unter Methode verstehe ich, wie schon einmal bemerkt, immer zugleich auch die eigentliche mechanische Ausführung der Messungen.

dabei zu Werke gegangen ist. Findet man trotz der guten Einrichtung der Versuche grosse charakteristische Fehler, so muss man schliessen, dass der Beobachter nicht geschickt genug in der Einrichtung und Ausführung zu Werke gegangen ist, denn diese Factoren spielen alle mit, und ihre Prädicate kommen in den charakteristischen Fehlern zum Ausdruck.

Die charakteristischen Fehler der Einzelmessungen haben hiernach für eine bestimmte gerade durchgeführte Messungsreihe zunächst insofern praktische Bedeutung als man durch sie auf die zu grossen Fehler aufmerksam gemacht wird und damit die herausfallenden Messungen erkennt. Hat man aber mit Messungen der betreffenden Art öfter zu tun, so wird man dieselben informatorisch nach mehreren Methoden ausführen — falls man nicht die beste Methode von vornherein erkennt — und zum fernern Gebrauch diejenige dieser Methoden wählen, welche bei dem relativ geringsten Aufwand von Mitteln und Mühe die kleinsten charakteristischen Fehler liefert.

Wenn man die einzelnen Operationen bei einer Methode und die mittlern Fehler, die ihnen eventuell anhaften, kennt, so vermag man, wie sich in der Theorie der zusammengesetzten Messungen noch ergeben wird, die charakteristischen Fehler der betreffenden Methode im Voraus zu berechnen, aber es ist nicht zu vergessen, dass bei der wirklichen Anwendung zur Methode noch manches die Genauigkeit beeinflussende hinzukommt.

VIII. Zahlenbeispiel für die Anwendung der Theorie einfacher Messungen.

Die Beispiele, die im Verlaufe der auseinandergesetzten Theorie einfacher Messungen hin und wieder eingeflochten sind, sollten die Anwendung specieller Resultate demonstrieren. Ich lasse jetzt ein ausgedehntes Beispiel folgen, welches nach allen Richtungen darlegen soll, wie man Beobachtungen nach den entwickelten Principien ausgleicht und wie man sie nach ihren Fehlern bearbeitet.

130. Die gemessene Grösse. Im Auftrage der Behörde, bei der ich amtlich beschäftigt bin, habe ich das capillare Verhalten verschiedener Flüssigkeiten untersucht. Dabei ist ganz besonders eingehend das Wasser studirt worden, in ausgedehnten Versuchsreihen ist der Capillaritätscoefficient dieser Flüssigkeit für 9 Temperaturen zwischen 15° und 100° bestimmt worden. Die angewendete Methode ist die der Steighöhen in engen Glasröhren.

Bezeichnet α^2 den Capillaritätscoefficienten des Wassers bei einer gewissen Temperatur, so erhebt sich das Wasser in einer Röhre vom Radius r , die

in ein weites Gefäss voll der bezeichneten Flüssigkeit taucht, zu einer Höhe h über dem äussern Niveau, die sich genügend genau nach der Formel

$$h = \frac{a^2}{r} - \frac{r}{3}$$

berechnen lässt. Hieraus folgt

$$a^2 = r \left(h + \frac{r}{3} \right).$$

Indem man die Steighöhe mit einem Kathetometer misst und den Radius r nach einer der im zweiten Bande auseinanderzusetzenden Methoden bestimmt, kann man so den Capillaritätscoefficienten des Wassers unter beliebigen Verhältnissen berechnen.*) Es ist das zwar keine einfache Messung mehr, denn a^2 hängt von der Bestimmung zweier Grössen ab, wird also eigentlich nicht selbst gemessen; indem wir aber die jedesmalige Messung von h und r als fehlerfrei betrachten, können wir a^2 wie eine direct gemessene Grösse ansehen.

Später, wenn wir zur Theorie der Untersuchungen kommen, soll das Beobachtungsmaterial vollständiger mitgeteilt werden, um daraus Beispiele für die Bearbeitung von Untersuchungen zu schöpfen. Für den jetzigen Zweck reichen die Bestimmungen von a^2 bei einer Temperatur, in der Nähe von 15° C., aus.

Die Beobachtungen sollen in doppelter Hinsicht benutzt werden, zuerst will ich sie lediglich, um ein Rechnungsbeispiel zu gewinnen, anwenden, sie also ohne jede Discussion so hinschreiben, wie ich sie bekommen habe, und an ihnen zeigen, wie das wahrscheinlichste Resultat, die charakteristischen Fehler, die Präcision u. s. f. zahlenmässig zu berechnen sind. Dann aber sollen die Fehlerquellen auseinandergesetzt, die Beobachtungen darnach geordnet, discutirt und so berechnet werden, dass ihre Resultate auch physikalischen Wert bekommen.

a) *Die Messungen werden lediglich als Zahlenbeispiel für die entwickelten Ausgleichungsformeln benutzt.*

131. Bildung von Gruppenmitteln. Die folgende Zusammenstellung giebt in der ersten Columnne die Nummern, in der zweiten die Radien ρ der benutzten Röhren, die dritte Columnne enthält die in der bezeichneten Weise bestimmten Werte a_x^2 von a^2 in Quadratmillimeter. Von der vierten beginnt die Rechnung.

*) Der so bestimmte Capillaritätscoefficient ist als Fläche z. B. in qmm ausgedrückt gedacht. Multiplicirt man a^2 mit der Dichte des Wassers bei der betreffenden Temperatur und dividirt durch 2, so bekommt man die Anzahl Gewichtseinheiten, z. B. Milligramme, die an einer Strecke von der Längeneinheit, z. B. Millimeter, auf irgend einer Glasfläche vom Wasser dann hängt, wenn dieses die Glasfläche gehörig benetzt.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
No.	ρ	a_x^2	$a'_x{}^2$ (p)	r'_x	$10^{+6} r'_x{}^2$	$\frac{\delta'}{r'_x}$	r_x	$10^4 r_x{}^2$
1	0,645	14,81	14,782 (4)	- 0,028	784	0,037	- 0,050	25
	"	14,82		- 0,038	1444	0,041	- 0,060	36
	"	14,77		+ 0,012	144	0,028	- 0,010	1
	"	14,73		+ 0,052	2704		+ 0,030	9
2	0,535	14,96	14,950 (4)	- 0,010	100	0,075	- 0,200	400
	"	15,07		- 0,120	14400	0,103	- 0,310	961
	"	14,95		0,000	0	0,069	- 0,190	361
	"	14,82		+ 0,130	16900		- 0,060	36
3	0,461	15,09	15,082 (6)	- 0,008	64	0,017	- 0,330	1089
	"	15,08		+ 0,002	4	0,026	- 0,320	1024
	"	15,04		+ 0,042	1764	0,018	- 0,280	784
	"	15,12		- 0,038	1444		- 0,360	1296
	"	15,08		+ 0,002	4		- 0,320	1024
	"	15,08		+ 0,002	4		- 0,320	1024
4	0,447	15,20	15,200 (1)	0,000	0	—	- 0,440	1936
5	0,344	14,94	14,940 (1)	0,000	0	—	- 0,180	324
		14,94		0,000	0	—	- 0,180	324
6	0,336	14,71	14,766 (5)	+ 0,056	3136	0,082	+ 0,050	25
	"	14,73		+ 0,036	1296	0,103	+ 0,030	9
	"	14,72		+ 0,046	2116	0,069	+ 0,040	16
	"	14,72		+ 0,046	2116		+ 0,040	16
	"	14,95		- 0,184	33856		- 0,190	361
7	0,231	14,96	14,960 (1)	0,000	0	—	- 0,200	400
		14,64		- 0,000	0	0,002	+ 0,120	144
		14,62		+ 0,002	4	0,002	+ 0,140	196
8	0,206	14,66	14,640 (3)	- 0,002	4	0,001	+ 0,100	100
		14,62		+ 0,002	4	0,039	+ 0,140	196
		14,69		- 0,068	4624	0,048	+ 0,070	49
		14,60		+ 0,022	484	0,032	+ 0,160	256
9	0,204	14,58	14,622 (4)	+ 0,042	1764		+ 0,180	324
		14,36		+ 0,063	3969	0,052	+ 0,400	1600
		14,44		- 0,017	289	0,056	+ 0,320	1024
		14,47		- 0,047	2209	0,037	+ 0,290	841
		14,55		+ 0,018	324	0,073	+ 0,210	441
10	0,186	14,55	14,423 (3)	+ 0,018	324	0,104	+ 0,210	441
		14,57		- 0,002	4	0,069	+ 0,190	361
		14,73		- 0,162	26244		+ 0,030	9
		14,44		+ 0,128	16384		+ 0,320	1024
		14,56		- 0,182	33124	0,144	+ 0,200	400
11	0,179	14,52	14,568 (5)	- 0,142	20164	0,162	+ 0,240	576
		14,30		+ 0,078	6084	0,108	+ 0,460	2116
		14,34		+ 0,038	1444		+ 0,420	1764
		14,17		+ 0,208	43264		+ 0,590	3481
		14,378						

Fortsetzung der Tabelle umstehend.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
No.	ρ	a_x^2	$a'_x{}^2$ (p)	v'_x	$10^{+6}v_x{}^2$	$\frac{\delta'}{r'}$	v_x	$10^4v_x{}^2$
13	0,170	14,84		0,000	0	—	— 0,080	64
14	0,138	14,72	14,840 (1)	— 0,002	4	0,029	+ 0,040	16
	„	14,75		— 0,032	1024	0,033	+ 0,010	1
	„	14,75		— 0,032	1024	0,022	+ 0,010	1
	„	14,68		+ 0,038	1444		+ 0,080	64
	„	14,69		+ 0,028	784		+ 0,070	49
			14,718 (5)					
15	0,131	14,73		0,000	0	—	+ 0,030	9
			14,730 (1)					
16	0,124	14,97		+ 0,087	7569	0,071	— 0,210	441
	„	15,09		— 0,033	1089	0,076	— 0,330	1089
	„	15,11		— 0,053	2809	0,051	— 0,350	1225
			15,057 (3)					
17	0,122	14,52		+ 0,268	71824	0,135	+ 0,240	576
	„	14,53		+ 0,258	66564	0,158	+ 0,230	529
	„	14,56		+ 0,228	51984	0,106	+ 0,200	400
	„	14,60		+ 0,188	35344		+ 0,160	256
	„	14,74		+ 0,048	2304		+ 0,020	4
	„	14,96		— 0,172	29584		— 0,200	400
	„	14,91		— 0,122	14884		— 0,150	225
	„	14,88		— 0,092	8464		— 0,120	144
	„	14,90		— 0,112	12544		— 0,140	196
	„	14,93		— 0,142	20164		— 0,170	289
	„	14,94		— 0,152	23104		— 0,180	324
	„	14,71		+ 0,078	6084		+ 0,050	25
	„	14,77		+ 0,018	324		— 0,010	1
	„	14,76		+ 0,028	784		+ 0,000	0
	„	14,83		— 0,042	1764		— 0,070	49
	„	14,86		— 0,072	5184		— 0,100	100
	„	15,00	14,788 (17)	— 0,212	44944		— 0,240	576
							+ 612	
							— 617	
		14,760	14,760					33953

Da wir annehmen, dass alle Messungen gleiche Schärfe haben, sind die wahrscheinlichsten Werte für die einzelnen Röhren die Mittel der bezüglichen Messungen; beispielsweise hat man für den wahrscheinlichsten Wert aus den Versuchen mit der Röhre 1

$$a_1^2 = \frac{14,81 + 14,82 + 14,77 + 14,73}{4} = 14,782.$$

Natürlich wird man, wo sie gross sind, nicht unmittelbar mit den Messungszahlen selbst rechnen, sondern wird sich erst aus dem Anblick der Zahlen einen Näherungswert für ihr Mittel ableiten und die Differenzen der Zahlen gegen diesen Näherungswert ausgleichen. Solche Näherungswerte sind in jedem Falle sehr leicht zu finden, man braucht zum Beispiel blos das Mittel aus der grössten und der kleinsten Zahl zu nehmen, oder eine in der Mitte liegende durch 10 dividierbare Zahl zu benutzen.

In unserm Falle ist offenbar 14,80 ein solcher Näherungswert, also wird man schreiben

$$a_1^2 = 14,80 + \frac{0,01 + 0,02 - 0,03 - 0,07}{4} = 14,80 - 0,018.$$

In dieser Weise sind alle bezüglichen wahrscheinlichsten Werte berechnet. Sie stehen in der vierten Columne; neben die einzelnen Zahlen habe ich in Klammern die Anzahl der Messungen hingeschrieben, aus denen sie bezüglich gewonnen sind. Wenn, wie wir angenommen haben, alle Messungen ganz gleich scharf sind, und wenn namentlich zwei mit einer Röhre erhaltene Zahlen ebensoviel wert sind, wie zwei mit zwei Röhren erlangte Zahlen, so stellen die bezeichneten eingeklammerten Grössen die relativen Gewichte der einzelnen Mittel dar. Also ist dann das Gewicht des ersten Mittels 4, das des letzten 17 u. s. f. Wie der Begriff des „Gewichts“ defnirt ist, heisst das, um für a^2 einen Wert zu bekommen, der ebenso genau ist, wie der erste Mittelwert; hat man 4, und wenn er ebenso genau sein soll, wie das aus den Versuchen mit der 17ten Röhre abgeleitete Mittel, 17 Einzelmessungen anzustellen; oder auch die Genauigkeit des ersten Mittels ist $\sqrt{4}$, die des letzten $\sqrt{17}$ mal so gross, wie die einer einzelnen Messung. Die fünfte Columne enthält die Differenzen v'_x der bezüglichen Einzelmessungen gegen die bezüglichen Mittel, also die wahrscheinlichsten Fehler in Bezug auf diese Mittel. Die algebraische Summe dieser Fehler muss für jede Röhre verschwinden, oder, genauer gesprochen, kleiner sein, als das $n'/2$ fache der letzten benutzten Decimale. Indem man in jedem Falle zusieht, ob diese Forderung erfüllt ist, erfährt man, ob das Mittel richtig gerechnet ist oder nicht.

132. Das wahrscheinlichste Resultat aller Messungen. Das allgemeine Mittel, das aus allen Messungen folgende wahrscheinlichste Resultat, kann man entweder unmittelbar aus den einzelnen Messungen, oder aus den für die einzelnen Röhren gebildeten Mitteln ableiten, rechnet man mit diesen Mitteln, so hat man jedes derselben so oft zu nehmen, als sein Gewicht Einheiten enthält, das erste 4mal, das letzte 17mal u. s. f. Hiernach bekommt man, indem man wieder erst Näherungswerte einführt,

$$x = 14,7 + \frac{0,11 + 0,12 + \dots - 0,34 - 0,26 - \dots + 0,30}{69} = 14,7 + 0,060 = 14,760,$$

oder auch

$$x = 14,7 + \frac{0,082 \cdot 4 + 0,250 \cdot 4 + \dots - 0,060 \cdot 3 - 0,078 \cdot 4 - \dots + 0,088 \cdot 17}{69} \\ = 14,7 + 0,060 = 14,760.$$

Dieses Mittel 14,760 steht sowol am Fusse der dritten, als an dem der vierten Columne. Das Gewicht desselben ist gleich der Summe der Gewichte der einzelnen Messungen oder der der Partialmittel, in beiden Fällen gleich 69, seine Genauigkeit also $\sqrt{69}$, mehr als 8mal so gross, wie die einer einzelnen Messung.

Die achte Columnne enthält die wahrscheinlichsten Fehler der einzelnen Messungen in Bezug auf dieses Generalmittel, die algebraische Summe aller dieser Fehler muss gleich 0, sein, jedenfalls aber kleiner, als das $n/2$ fache der letzten (hier dritten) Decimale, die man noch mitberücksichtigt sehen will. Zur Controle der Rechnung hat man daher diese Summe zu bilden.

133. Die charakteristischen Fehler der Einzelmessungen, wenn jede Gruppe für sich betrachtet wird. Von den charakteristischen Fehlern bilden wir erst die der einzelnen Messungen, und von diesen zunächst die sich auf die einzelnen Gruppen beziehenden. Da die charakteristischen Fehler alle umgekehrt proportional sind der Wurzel der um 1 verminderten Anzahl der Messungen, so kommt man bei den Gruppen, die nur aus einer Messung bestehen, auf die Form $0/0$, für diese kann man die charakteristischen Fehler nicht berechnen.

Von den andern Gruppen hat man für die erste, wie aus den Zahlen der fünften Columnne zu ersehen,

$$\delta_1' = 0,001 \cdot \frac{28 + 38 + 12 + 52}{\sqrt{4 \cdot 3}} = 0,037,$$

$$\mu_1' = 0,001 \sqrt{\frac{28^2 + 38^2 + 12^2 + 52^2}{3}} = 0,041,$$

$$r_1' = 0,674 \mu_1' = 0,028.$$

In entsprechender Weise sind die charakteristischen Fehler für die folgenden Gruppen berechnet und in der 7. Columnne in der Folge δ' , μ' , r' vereinigt.

Hinsichtlich der Ausführung dieser Rechnung ist bei dem durchschnittlichen Fehler weiter nichts zu sagen, als dass man die betreffenden Fehler ohne Rücksicht auf ihr Zeichen addirt und durch die Quadratwurzel aus $n'(n' - 1)$, wo n' die Anzahl der benutzten Fehler, dividirt. Zur Ableitung des mittlern Fehlers schreibt man sich unmittelbar hinter die Fehlerreihe die Quadrate der Fehler hin, ist in Columnne 6 geschehen, dividirt durch die betreffende um 1 verringerte Anzahl und zieht die Quadratwurzel. Das Quadriren der Fehler geschieht unmittelbar oder durch Benutzung der wol in den meisten Logarithmentafeln vorhandenen Quadrattafeln. Um dabei die Grössenordnung der Fehler nicht berücksichtigen zu müssen, sieht man alle Fehler als ganze Zahlen an, indem man einen Factor $10^{-\alpha}$, wo α gleich der Anzahl der Decimalen ist, die man beim Fehler mitführt, hinzugefügt denkt; in unserm Falle wird dieser Factor 10^{-3} , das ist 0,001.

134. Die charakteristischen Fehler der Einzelmessungen und des Resultats berechnet aus allen Messungen. Wir haben jetzt die charakteristischen Fehler der Messungen in Bezug auf das wahrscheinlichste Resultat aller Messungen zusammengenommen zu bilden. Das geschieht mit Hilfe der in der achten Columnne niedergeschriebenen wahrscheinlichsten Fehler gegen das Generalmittel.

Addiren wir diese Fehler sämmtlich ohne Rücksicht auf ihr Zeichen und dividiren durch $\sqrt{n(n-1)} = \sqrt{69 \cdot 68}$, so resultirt

$$\delta = \frac{12,29}{\sqrt{69 \cdot 68}} = 0,179.$$

Die Bildung der $\Sigma|v|$ erfordert keine selbstständige Rechnung, denn da man, um die Richtigkeit des Generalmittels zu controliren, die Σv , die nahezu verschwinden soll, so wie so zu rechnen hat, so addirt man bei dieser Rechnung alle positiven Fehler für sich und alle negativen Fehler für sich. Die bezüglichen Summen müssen einander an Betrag nahezu gleich sein, ihre absolute Summe giebt $\Sigma|v|$. Am Fuss der 8. Columne stehen die 2 bezeichneten Summen: die Summe der positiven, dann die der negativen Fehler, die absolute Summe dieser beiden Summen ist 12,29.

Hinsichtlich des Nenners $\sqrt{69 \cdot 68}$ ist zu bemerken, dass man für grosse Zahlen unbedenklich das geometrische Mittel mit dem arithmetischen vertauschen darf. In unserm Falle ist zum Beispiel $\sqrt{69 \cdot 68} = 68,497$ und $\frac{69 + 68}{2} = 68,5$, und es ist für die Rechnung ganz gleichgiltig, welche von beiden Zahlen man benutzt.

Zur Berechnung des mittlern Fehlers hat man die Quadrate aller in Bezug auf das Generalmittel wahrscheinlichsten Fehler zu addiren, durch $n - 1 = 68$ zu dividiren und aus dem Quotienten die Wurzel zu ziehen. Die Quadrate der Fehler nach Ausscheidung des Factors 10^{-4} stehen in der neunten Columne, welche die Ueberschrift $10^4 v_x^2$ trägt, ihre Summe ist am Fuss der Columne zu 33553 angegeben, also wird

$$\mu = 0,01 \sqrt{\frac{33553}{68}} = 0,222.$$

Die Ausrechnung geschieht nach dem Schema

$$\begin{array}{r} \log \Sigma v^2 \quad = 4,5257 \\ \log (n - 1) = 1,8325 \\ \hline \text{Diff.} \quad = 2,6932 \end{array}$$

$$\frac{\text{Diff.}}{2} = 1,3466$$

$$\text{Num.} = 22,2$$

$$\mu = 0,01 \text{ Num.} = 0,222.$$

Der wahrscheinliche Fehler ist das 0,674 . . fache vom mittlern, also

$$r = 0,150.$$

Wir wissen, dass diese charakteristischen Fehler, weil wir es mit wahrscheinlichsten Fehlern zu tun haben, nur Näherungen an die wahren Beträge derselben sind; weil ferner die Anzahl der Messungen beschränkt ist, haftet ihrer Berechnung noch eine gewisse mittlere Unsicherheit an. Diese

ist für den durchschnittlichen Fehler gleich $\delta 0,756/\sqrt{n-1}=0,015$, für den mittlern $\mu 0,708/\sqrt{n-1}=0,019$, für den wahrscheinlichen $r 0,708/\sqrt{n}=0,013$. Also wird

$$\begin{aligned}\delta &= 0,179 \pm 0,017, \\ \mu &= 0,224 \pm 0,019, \\ r &= 0,151 \pm 0,013.\end{aligned}$$

Die mittlern Unsicherheiten sind, weil wir es immerhin mit einer bedeutenden Anzahl von Messungen zu tun haben, unerheblich.

Dieses sind die charakteristischen Fehler jeder einzelnen Messung, der erste giebt die durchschnittliche absolute Grösse der einzelnen Fehler, der zweite zeigt den Fehler an, den man bei einer Wiederholung derselben Messungen im Ganzen zu befürchten hätte, oder auch den Fehler, der bei der gerade befolgten Methode eine grössere Wahrscheinlichkeit für sein Eintreten besitzt, als bei irgend einer andern Methode, der also zum Beispiel, wenn wir die Messungen an Platten oder an Tropfen ausgeführt hätten, nicht leichter eingetreten wäre, als er bei Versuchen an Röhren zum Vorschein kommen kann. Der dritte Fehler hat die Bedeutung, dass sich in der Reihe der Fehler 34 finden müssen, die grösser sind als er und 34, die kleinern Betrag besitzen. Tatsächlich giebt die Fehlerreihe 30 kleinere, 38 grössere, eine Uebereinstimmung mit der Theorie, die immerhin als befriedigend zu bezeichnen ist.

Die charakteristischen Fehler des wahrscheinlichsten Resultats sind nach der Theorie das $1/\sqrt{n}$ fache derjenigen einer Messung, also bekommen wir

$$\begin{aligned}\delta_r &= \frac{\delta}{\sqrt{69}} = 0,023 \pm 0,002, \\ \mu_r &= \frac{\mu}{\sqrt{69}} = 0,027 \pm 0,002, \\ r_r &= \frac{r}{\sqrt{69}} = 0,018 \pm 0,002.\end{aligned}$$

135. Bedeutung des Endergebnisses und seines mittlern Fehlers.

Eine eigentliche Bedeutung hat hier nur der mittlere Fehler, denn dieser ist zugleich der wahrscheinlichste Fehler des Resultats. Wir dürfen sagen, das wahrscheinlichste Ergebnis der Gesamtheit aller Messungen ist

$$a^2 = 14,760 \pm 0,027,$$

das heisst, am wahrscheinlichsten ist zu befürchten, dass die Annahme $a^2 = 14,760$ um 0,027 zu gross oder zu klein ausfällt; oder: der wahrscheinlichste Wert aus allen Messungen ist $a^2 = 14,760$, doch kann dieser Wert auf nicht mehr als 0,027 verbürgt werden, er kann ebenso gut um 0,027 zu gross als zu klein sein. Die Unsicherheit des mittlern Fehlers selbst ist dabei als belanglos nicht berücksichtigt, sonst muss man sagen, dass die Zahl 14,760 um 0,025 bis 0,029 zu gross oder zu klein sein kann.

Es ist durchaus nötig, dass der Leser sich die Bedeutung der einzelnen Grössen in jedem Falle ganz klar macht, sonst hat er leere Zahlen, die ihm gar nichts aussagen. Ich will daher auch noch auf den physikalischen Sinn der Ergebnisse kurz hindeuten. Da die Dichtigkeit des Wassers bei 15° sich von 1 nur sehr wenig unterscheidet, giebt die Zahl $a^2/2$ (siehe die Note auf Seite 142) auch das Gewicht der Wassermenge, welche an einer Längeneinheit einer in das Wasser getauchten und von diesem vollständig benetzten Glasfläche vermöge der Capillarität gehoben wird und hängen bleibt. Wir haben a^2 mit Quadratmillimeter gemessen, denken wir uns diese Zahl mit der Dichtigkeit, 1, multiplicirt und durch die Längeneinheit 1 mm dividirt, so ist $\left(\frac{14,760 \pm 0,027}{2}\right)$ das bezeichnete Gewicht, und das Resultat unserer Rechnungen sagt aus:

Nach den angestellten 69 Messungen und unter den über die Messungen gemachten Annahmen ist es am wahrscheinlichsten, dass an einem Millimeter auf einer in Wasser zum Teil getauchten und von dieser völlig benetzten Glasfläche 7,380 Milligramm Wasser vermöge der Capillaranziehung hängen, doch kann diese Milligrammzahl um 0,012 bis 0,015 Milligramm zu hoch oder zu niedrig angegeben sein, wenigstens vermag man, wenn keine andern Messungen zur Disposition stehen, nicht mehr als 0,012 bis 0,015 Milligramm an dieser wahrscheinlichsten Zahl zu verbürgen. Mit Sicherheit kann man überhaupt nichts verbürgen, nur mit den Umständen nach grösster Wahrscheinlichkeit.

136. Die charakteristischen Fehler berechnet aus den wahrscheinlichsten Fehlern der Gruppenmittel. Wir haben uns bei der Berechnung der charakteristischen Fehler unmittelbar an die Messungen gehalten. Wir können aber auch, indem wir von den Formeln für ungleich scharfe Bestimmungen Gebrauch machen, von den Gruppenmitteln ausgehen.

Die Fehler der Gruppenmittel gegen das Generalmittel sind

$$\begin{aligned} & - 0,022; - 0,190; - 0,322; - 0,440; - 0,180; - 0,006; - 0,200; \\ & + 0,120; + 0,138; + 0,337; + 0,192; + 0,382; - 0,080; + 0,042; \\ & + 0,030; - 0,297; - 0,028. \end{aligned}$$

Für die Gewichte derselben haben wir bezüglich

$$4, 4, 6, 1, 1, 5, 1, 3, 4, 3, 5, 5, 1, 5, 1, 3, 17.$$

Multiplicirt man jeden Fehler mit dem zugehörigen Gewicht und addirt alle Producte unter Berücksichtigung ihrer Zeichen, so muss Null herauskommen.

Es ist ferner

$$\hat{\sigma} = \frac{|v_1|\sqrt{p_1} + |v_2|\sqrt{p_2} + \dots + |v_{17}|\sqrt{p_{17}}}{\sqrt{17.16}},$$

also

$$\delta = 0,001 \frac{22\sqrt{4} + 190\sqrt{4} + 322\sqrt{6} + \dots + 28\sqrt{17}}{\sqrt{17 \cdot 16}} = 0,322.$$

Ferner hat man

$$\mu = \sqrt{\frac{v_1^2 p_1 + v_2^2 p_2 + v_3^2 p_3 + \dots + v_{17}^2 p_{17}}{16}},$$

also

$$\mu = 0,001 \sqrt{\frac{22^2 \cdot 4 + 190^2 \cdot 4 + 322^2 \cdot 6 + \dots + 28^2 \cdot 17}{16}} = 0,414.$$

Diese Zahlen weichen sehr stark von den früher erhaltenen, 0,179 bezüglich 0,224, ab; sie haben zwar, wie wir noch später sehen werden, nicht ganz dieselbe Bedeutung wie diese, aber immerhin zeigt sich selbst bei diesem nicht ungünstigen Beispiel wie gerechtfertigt die Warnung war, Messungen zu Gruppen zu vereinigen, und mit den Gruppenmitteln zu rechnen. Wir müssen die charakteristischen Fehler, wo es nur irgend möglich ist, unmittelbar aus den Messungen selbst ableiten, falls diese wirklich ganz gleichartig sind.

137. Die Präcision; Berechnung und Erklärung. Die letzte der zu bestimmenden Grössen ist die Präcision ω einer Messung. Dazu dient eine der beiden Formeln

$$\omega = \frac{0,31831 \epsilon}{\delta},$$

$$\omega = \frac{0,39895 \epsilon}{\mu},$$

ϵ ist die Einheit, in der wir die Fehler rechnen und als Factor hinzugefügt, um hervortreten zu lassen, dass ω eine reine Zahl ist. Wir bekommen

$$\omega = 1,78 \epsilon \text{ aus } \delta \text{ berechnet,}$$

$$\omega = 1,78 \epsilon \text{ aus } \mu \quad ,$$

zwei ganz gleiche Zahlen.

Praktisch ist es ganz gleichgiltig, wie man die Einheit ϵ für die Fehler wählt, theoretisch sieht man aber in der Ausgleichslehre die Fehler immer als ganze Zahlen an, das heisst, man denkt sich die Fehler von einander immer um ganze Anzahlen von Einheiten, in der sie gemessen sind, verschieden, und als Einheit sieht man den Fehler an, den wir seiner Grösse nach unmittelbar auf den Fehler Null folgen lassen, der also für uns noch gerade Bedeutung hat. Um das auch in der Rechnung hervortreten zu lassen, haben wir also ϵ so zu wählen, dass V/ϵ somit auch δ/ϵ , μ/ϵ , r/ϵ u. s. f. als ganze Zahlen erscheinen. Wir haben die V in 3 Decimalen ausgedrückt, wir hielten also Fehler von 0,001 noch als berücksichtigungswert, und haben damit indirect ausgesprochen, dass wir alle Fehler 0,001, 0,002, 0,003 u. s. f. als möglich ansehen, daher ist $\epsilon = 0,001$ zu setzen. Hätten wir die dritte Decimale fortgelassen, so wären als besondere Fehler

für uns nur die um 0,01 sich unterscheidenden von Bedeutung, die für uns möglichen Fehler betragen dann 0,01, 0,02, 0,03 u. s. f. und es wäre $\varepsilon = 0,01$ zu setzen. Bleiben wir aber bei drei Decimalen, so wird

$$\omega = 0,0018.$$

Nun bedeutet ω die Wahrscheinlichkeit des Fehlers, der die Grösse 0 besitzt, die obige Zahl sagt also aus, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler Null bei der besondern Art unserer Messungen etwa $1/500$ beträgt. Die möglichen Fehler unserer Messungen sind aber

$$0,001, 0,002, 0,003, \dots$$

und wenn sie auch nicht alle vorgefallen sein können, weil wir eben nur 69 Messungen gemacht haben, so sind sie doch alle möglich. In der Tat laufen die Fehler mindestens bis 0,590, es sind also mindestens 590 Fehler möglich, und da der grösste Fehler 0,590 nur das $2\frac{1}{2}$ fache vom mittlern Fehler beträgt, hätten ganz gut auch noch grössere Fehler vorkommen können. Der grösste mögliche Fehler kann sogar, wie sich aus der bald folgenden Fehlerdiscussion ergeben wird, die ganze Grösse a^2 übersteigen, denn wenn die Röhre zufällig durch eine Collodiumschicht verunreinigt ist, tritt statt einer Erhebung des Wassers eine Depression ein. Grössere Fehler sind nicht bloss möglich, sondern müssen bei einer Fortsetzung der Versuche sogar noch ziemlich häufig vorkommen. Die relative Kleinheit der Zahl ω kann also nicht Wunder nehmen.

138. Das Wahrscheinlichkeitsgesetz. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler von der Grösse V ist hiernach

$$\varphi = 0,0018 e^{-\frac{(0,0018)^2 \pi V^2}{\varepsilon^2}}.$$

Der grösste vorgefallene Fehler ist $V = 0,590$, für diesen somit $V/\varepsilon = 590$ und hiernach

$$\varphi = 0,000052.$$

Die Berechnung wird geführt nach dem Schema

$$\varphi = \text{Num} \left(\log \omega - \text{Num} \left[\log (\log e) + 2 \log \omega + 2 \log \frac{V}{\varepsilon} + \log \pi \right] \right),$$

also

$$\begin{array}{r} \log \pi = 0,497, \\ 2 \log \omega = 4,511 - 10, \\ 2 \log \frac{V}{\varepsilon} = 5,542, \\ \log (\log e) = 9,638 - 10 \\ \hline \text{Summa} = 0,188, \\ \hline \text{Num} = 1,542, \\ \log \omega = 7,255, \\ \hline \text{Differenz} = 5,713, \\ \varphi = \text{Num} = 0,000052. \end{array}$$

Die Wahrscheinlichkeit für den grössten vorgefallenen Fehler ist $1/35$ von der für den kleinsten, ein relativ nicht unerhebliches Verhältnis.

Die ganze vorausgehende Rechnung ist nur ausgeführt, um ein tunlichst ausgedehntes Zahlenbeispiel für die auseinandergesetzte Theorie zu gewinnen. Doch kann dem Studirenden nicht genug empfohlen werden, diese Rechnung nicht bloß auf Treu und Glauben hinzunehmen, sondern sie sorgfältig Zahl für Zahl noch einmal durchzuführen, damit er die Regeln der Ausgleichungsrechnung durch selbstständigen Gebrauch seinem Gedächtnis gehörig einprägt.

b) *Die Messungen werden nach ihren Fehlerquellen discutirt, die Fehler auf ihre Zufälligkeit geprüft.*

139. Die Fehlerquellen. Wir kommen jetzt zu dem zweiten Teil unseres Beispiels, zu der Bearbeitung der vorgeführten Messungen, in der Absicht aus ihnen physikalisch brauchbare Resultate abzuleiten. Diese Absicht kann aber nicht erreicht werden, wenn man die Messungen ohne sie zu discutiren benutzt, und ohne Beachtung der Fehlerquellen berechnet.

Nach den gegebenen Regeln hat man bei jeder physikalischen Messung und Untersuchung erst die Ursachen aufzudecken, welche diese Messung verfälschen können, und zuzusehen, ob diese Ursachen die Messung in systematischer oder nur zufälliger Weise beeinflussen. Kommt man dann zu der Ansicht, dass man nach Anbringung der aufgefundenen systematischen Fehler es nur mehr noch mit zufälligen Fehlern zu tun hat, so führt man die Ausgleichungsrechnung aus und hat dann an der Hand der wahrscheinlichsten und charakteristischen Fehler zu untersuchen, erstens ob in der That nur zufällige Verfälschungen übriggeblieben sind, und zweitens, ob die erreichte Genauigkeit genügt und namentlich auch, ob sie der aufgewendeten Mühe entspricht. Sollte das letztere nicht der Fall sein, so müsste man schliessen, dass die Untersuchungsmethode nicht die geeignete gewesen ist.

Nach diesen nochmals hervorgehobenen Grundzügen haben wir also zunächst für unsere Capillaritätsbestimmungen die Fehlerquellen aufzusuchen, und hierzu müssen wir uns sowohl der Erfahrungen bedienen, die andere Beobachter mit solchen Bestimmungen gemacht haben, als der, die sich aus unsern Versuchen selbst ergeben. Vor allen Dingen haben wir aber das Beobachtungsprotokoll zu Rate zu ziehen.

1. Aus der zweiten Columnne unserer Zusammenstellung ist zu ersehen, dass die Bestimmungen von a^2 an Röhren sehr verschiedener Weite ausgeführt worden sind. Man hat aber schon mehrfach behauptet, dass eine benetzende Flüssigkeit nicht direct an der Fläche des eingetauchten Körpers, sondern an einer vorher sich an demselben ausbildenden dünnen Schicht der Flüssigkeit aufsteigt. Diese Schicht würde dann bewirken, dass in einer Röhre das Wasser sich höher hebt, als es dem Radius der Röhre nach geschehen sollte, weil die Röhre gewissermassen verengert wird, und da diese Verengung ihrer absoluten Grösse nach für alle Röhren nahezu dieselbe sein soll, muss

sie sich bei engen Röhren viel mehr bemerkbar machen, als bei weiten. Ist also jene obige Behauptung richtig, so wird man mit engen Röhren grössere Beträge für a^2 bekommen müssen als mit weiten, und das bedingt natürlich eine systematische Verfälschung der Messungen.

2a. Zweitens ist, wenn man auch stets destillirtes Wasser angewendet hat, wie sich aus dem Beobachtungsprotokoll ergibt, nicht immer dasselbe Wasser benutzt worden, namentlich ist in einer grossen Anzahl von Versuchen das Wasser vorher*) auf sehr hohe Temperaturen erwärmt gewesen. Da nun einerseits das Wasser um so weniger Luft aufgelöst enthält, je wärmer es ist, und andererseits schon vielfach bemerkt worden ist, dass Wasser um so besser benetzt, je mehr es mit Luft gesättigt ist, so steht zu vermuten, dass man mit dem vorher erwärmten Wasser im allgemeinen kleinere Werte für a^2 bekommen wird.

2b. Indessen kann die Erwärmung auch noch deshalb von Einfluss gewesen sein, weil Glas von heissem Wasser anscheinend stärker angegriffen wird als von kaltem. In der Tat hat sich auch bei einigen Röhren nach anhaltender Erwärmung des in ihnen angestiegenen Wassers eine Veränderung ihrer innern Oberfläche gezeigt. Wahrscheinlich wird durch diese Zerstörung der innern Oberfläche eine Verringerung der Steighöhe bedingt.

3. Ein dritter Grund zu systematischen Verfälschungen kann darin liegen, dass man nach dem Einstecken einer Röhre nicht lange genug mit der Ablesung der Steighöhe wartet, denn das Wasser braucht ziemlich viel Zeit, ehe es seine Gleichgewichtslage erreicht und braucht um so mehr Zeit, je enger die betreffende Röhre ist. Ich bemerke jedoch, dass die hier mitgetheilten Messungen bis auf die vier ersten mit der Röhre 17 angestellten alle mindestens 24 Stunden nach Einrichtung des Versuchs vorgenommen sind. Ferner aber wird diesem Grunde schon durch die Anordnung nach den Röhren zum grössten Teil Rechnung getragen.

4. Viertens ist es eine Tatsache, dass die Benetzbarkeit einer Fläche ausserordentlich von dem Zustand derselben abhängt, je reiner eine Glasfläche ist, um so besser wird sie vom Wasser benetzt; in reinen Röhren steigt unter sonst gleichen Verhältnissen Wasser höher an, als in unreinen. Grösstenteils aus diesem Grunde sind die Bestimmungen an vielen Röhren vorgenommen worden. Nun kann man eine Glasfläche selbst mit äusserster Mühe nicht ganz rein bekommen, und wenn man sie durch Anwendung verschiedener Agentien (namentlich heisser Natronlauge) sauber gemacht hat, sammelt sich doch in kurzer Zeit aus der Atmosphäre soviel Unreinlichkeit auf derselben wieder an, dass man bald die Arbeit von vorne beginnen kann. Daher wird die Steighöhe in einer Röhre auch niemals so gross sein, als sie theoretisch sein müsste. Eigentlich bekommt man also a^2 immer zu klein. Indem man aber für die betreffende Messungsreihe einen mittlern Reinheitszustand voraussetzt und a^2 auf diesen bezieht, werden die Werte von a^2 um den für diesen mittlern Reinheitszustand geltenden Betrag, schwanken.

*) Im Durchschnitt etwa 15 Stunden vorher.

In diesem Sinne dürfen wir die durch die etwa nicht genügende Reinheit der Röhren verursachten Fehler als zufällig ansehen, wir verzichten dann auf die so wie so nicht zu erlangende Kenntniss des für absolut reine Flächen geltenden Capillaritätscoefficienten.

5. Der Rest der möglichen Fehler bezieht sich auf die Ausführung der Messungen, insofern die Steighöhen und die Radien falsch gemessen sein können. Die Steighöhen habe ich mit viel grösserer Genauigkeit bestimmt, als für die erreichbare Präcision nötig ist, die hier bei den directen Messungen etwa vorgefallenen Fehler sind ganz und gar belanglos und zudem dem grössten Teil nach zufällig. Die Radien muss man allerdings mit grösserer Genauigkeit kennen, als sich meist erreichen lässt. Ich habe sie nach der Gay-Lussacschen Methode bestimmt, also nur Mittelwerte für dieselben bekommen, aber diese Mittelwerte sind bei jeder Röhre für mehrere Stellen eruiert worden, und ausserdem ist jede Röhre durch Herausziehen aus der Flüssigkeit, bezüglich Hineinstossen in dieselbe an mehreren Stellen benutzt. Abgesehen davon sind ja viele Röhren, 17, angewendet, und man hat zu erwarten, dass der Radius bei der einen zu gross, bei der andern zu klein gefunden worden ist, so dass diese Fehler für die Gesamtheit der Bestimmungen auch als zufällig betrachtet werden dürfen.

Andere Fehlerquellen von einiger Bedeutung als die bezeichneten habe ich nicht finden können.

140. Notwendige Zusammenziehung mehrerer Einzelmessungen zu einer Einzelmessung, um wirklich gleichwertige Messungen zu gewinnen. Von diesen geben zwei zu systematischen, zwei zu zufälligen Fehlern Veranlassung. Es ist nun eine Bemerkung, die jeder, der sich mit Capillaritätsversuchen beschäftigt, bald macht, dass von allen Fehlerquellen die dritte die weitaus überwiegende ist. Die Steighöhe in einer Röhre hängt ausserordentlich von dem Zustande der innern Fläche dieser ab, es kann vorkommen, dass sie um ein Drittel und mehr ihres ganzen Betrages zu klein ausfällt. Dabei passirt es nicht selten, dass man mit einer und derselben Röhre eine ganze Reihe von mit einander auf das schönste übereinstimmenden Messungen erhält, die doch falsch sein können*). Hieraus ergiebt sich der wichtige Schluss: Wenn man nicht die wiederholten Bestimmungen an einer Röhre so ausführt, wie wenn man es jedesmal mit einer ganz neuen Röhre zu tun hat, so darf man aus der etwa vorhandenen innern Uebereinstimmung der einzelnen Messungen nicht schliessen, dass nun auch ihr Resultat genau ist. Mit andern Worten: Zwei an einer und derselben Röhre ausgeführte Bestimmungen sind im allgemeinen nicht äquivalent zwei an zwei Röhren gemachten Bestimmungen. Da also in unserm Fall die Fehler der Messungsausführung gegenüber den Fehlern der begleitenden Umstände ganz und gar verschwinden, so haben wir kein Recht, Messungen, die unter genau denselben Umständen angestellt sind, bei denen an der Röhre keine Veränderung vorgenommen ist, getrennt zu bearbeiten,

*) Man betrachte z. B. die Messungen an den Röhren 3, 8, 10.

ändern an verschiedenen Röhren erhaltenen einzeln als gleichwertig an die Seite zu stellen; wir müssen sie zusammenziehen und wie eine einzige Messung behandeln, ohne dieser ein anderes Gewicht zu verleihen. Dadurch erhalten wir unter Zugrundelegung des Beobachtungsprotokolls, in welchem natürlich jede mit einer Röhre vorgenommene Veränderung notirt sein muss, folgendes Schema:

Bei den Röhren 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15 bleiben die Zahlen unverändert bestehen, weil mit diesen Röhren zwischen den einzelnen Messungen zwar keine Reinheits-, wol aber Stellungsänderungen vorgenommen worden sind und jene durch diese in gewissem Maasse ersetzt werden.

Bei den Röhren 1, 16 fällt die zweite mit der dritten Zahl zusammen.

Bei den Röhren 2, 9 sind die drei ersten Zahlen zusammenzuziehen.

Bei der Röhre 14 fallen die drei ersten Zahlen zusammen.

Bei den Röhren 3 und 6 sind alle Zahlen zu vereinigen.

Bei der Röhre 17 sind zunächst die vier ersten Messungen ganz fortzulassen, weil sie nur wenige (2 bis 4) Stunden nach Eintauchung der Röhre vorgenommen sind, wo das Wasser, wie auch der Gang der Zahlen beweist, seine höchste Lage noch nicht erreicht hatte. Von den andern Messungen sind die 2. bis zur 6. incl. und dann die 7. bis zur 13. incl. zusammenzuziehen.

Auch nach diesen Veränderungen ist es noch schwer zu sagen, wie die einzelnen Messungen sich zu einander verhalten, aber da sich etwas Bestimmtes nicht behaupten lässt, tut man am besten, dieselben nunmehr als gleichwertig zu betrachten.

141. Zerlegung der Messungsreihe in zwei Teile, Anordnung in jedem Teile. Diese Gleichwertigkeit gilt aber zunächst nur in Bezug auf die zufälligen Fehler, wir müssen daher auch noch zu entscheiden suchen, ob systematische Fehler von der in Art. 139 angedeuteten Art vorhanden sind oder nicht. Dazu benutzen wir die im vorausgehenden Capitel auseinandergesetzten Kriterien, wir nehmen also erst an, dass die Messungen allerdings nur von zufälligen Fehlern verfälscht sind, leiten das wahrscheinlichste Resultat dieser Messungen ab und sehen zu, ob die übrig bleibenden Fehler den für zufällige Fehler vorgeschriebenen Bedingungen, namentlich den Zeichen-Kriterien entsprechen.

Der erste Grund für systematische Fehler sollte in den verschiedenen Weiten der benutzten Röhren liegen, deshalb sind die Messungen nach den im vorigen Capitel gegebenen Regeln nach diesen Weiten der Röhren zu ordnen.

Man stellt für jede Röhre alle mit ihr erlangten Zahlen zusammen in der Folge, wie man sie bekommen hat, und die ganze Anordnung trifft man so, dass man von den weitesten Röhren zu den engsten oder umgekehrt fortschreitet.

Der zweite Grund, ob er sich auf die Veränderung im Luftgehalt des Wassers oder die Corrodierung der inneren Röhrenfläche bezieht, erfordert eine Anordnung der Versuche nach dem Grad und der Dauer der vorangegangenen Erwärmung. Für beide Anordnungen hat man die Fehlerreihen aufzustellen.

In unserm Fall besteht das gesammte Messungsmaterial aus zwei Teilen, der eine enthält nur Messungen an Wasser, das stets annähernd 15° C. zur

Temperatur hatte, der andere umfasst Messungen, bei denen das Wasser, meist 15 Stunden vorher, einmal oder mehrmals zwischen 85° bis 95° erwärmt war; bei zwei Messungen war das Wasser auf 45° , bei einer auf 63° erwärmt worden.

Hier ergibt sich also schon von selbst, dass man die Beobachtungen in diese beiden Teile zu zerlegen hat. Jeden Teil ordnen wir für sich nach den betreffenden Röhren. Indem wir dann noch die bezüglichen Endresultate der beiden Teile mit einander vergleichen, erfahren wir, ob zum Teil von Luft befreitem Wasser ein anderer Capillaritätscoefficient zukommt, wie mit Luft gesättigtem, bezüglich, ob das Wasser in Röhren, welche der Einwirkung hochtemperirten Wassers ausgesetzt waren, höher oder niedriger als in intacten Röhren steht.

Die folgende Zusammenstellung giebt in Tabelle A. die Beobachtungen des ersten und in Tabelle B. die des zweiten Theiles. Die erste Columnne enthält die Nummern, die zweite die Radien der benutzten Röhren, in der dritten stehen die Werte des mit denselben gemessenen Capillaritätscoefficienten so zusammengezogen, wie es vorhin als nötig angegeben worden ist, in der vierten ihre Differenzen gegen das allgemeine Mittel, also die wahrscheinlichsten Fehler, in der fünften die Zahlen der ersten Differenzenreihe, in der sechsten die Fehler nach ihrer absoluten Grösse geordnet, in der siebenten die Quadrate der Fehler.

Tabelle A.

	r	α_x^2	v_x	Δv_x	$1000 v_x $	$1000^2 v_x^2$
1	0,645	14,81	+ 0,023	— 0,080	13	169
2	0,535	14,93	— 0,057	— 0,190	23	529
3	0,461	15,08	— 0,247	+ 0,140	43	1 849
5	0,344	14,94	— 0,107	+ 0,170	57	3 249
6	0,336	14,77	+ 0,063	— 0,190	63	3 969
7	0,231	14,96	— 0,127	+ 0,320	87	7 569
9	0,204	14,64	+ 0,193	— 0,100	93	8 649
14	0,138	14,74	+ 0,093	+ 0,010	103	10 609
15	0,131	14,73	+ 0,103	— 0,060	107	11 449
16	0,124	14,79	+ 0,043	+ 0,050	127	16 129
17	0,122	14,74	+ 0,093	— 0,180	193	37 249
	"	14,92	— 0,087	+ 0,100		
	"	14,82	+ 0,013	+ 0,010	247	61 009
		14,833	+ 0,624		1 249	171 077
			— 0,625			

Tabelle B.

	r	a_x^2	v_x	Δv_x	$100 v_x $	$100^2 v_x^2$
1	0,645	14,80	- 0,21	+ 0,07	1	1
		14,73	- 0,14	- 0,09	2	4
2	0,535	14,82	- 0,23	+ 0,18	3	9
8	0,206	14,64	- 0,05	+ 0,02	3	9
		14,62	- 0,03	- 0,04	4	16
		14,66	- 0,07	+ 0,08	4	16
9	0,204	14,58	+ 0,01	+ 0,22	5	25
10	0,196	14,36	+ 0,23	- 0,08	7	49
		14,44	+ 0,15	- 0,03	7	49
		14,47	+ 0,12	- 0,08	9	81
11	0,186	14,55	+ 0,04	0,00	10	100
		14,55	+ 0,04	- 0,02	12	144
		14,57	+ 0,02	- 0,16	14	196
		14,73	- 0,14	+ 0,29	14	196
		14,44	+ 0,15	- 0,12	15	225
12	0,179	14,56	+ 0,03	+ 0,04	15	225
		14,52	+ 0,07	+ 0,22	21	441
		14,30	+ 0,29	- 0,04	23	529
		14,34	+ 0,25	+ 0,17	23	529
		14,17	+ 0,42	- 0,67	25	625
13	0,170	14,84	- 0,25	+ 0,16	25	625
14	0,138	14,68	- 0,09	- 0,01	29	841
		14,69	- 0,10	- 0,41	42	1 764
16	0,124	15,10	- 0,51	+ 0,30	51	2 601
		14,59	+ 1,82		364	9 300
			- 1,82			

142. Discussion des ersten Teils der Messungen. Betrachten wir den ersten Teil der Beobachtungen.

1. Zunächst sollte kein Fehler zu stark vor allen andern hervortreten, diese Bedingung ist in der Tat erfüllt, zwar kommt ein negativer Fehler von der Grösse 0,247 vor, aber es ist auch ein positiver Fehler von dem Betrage 0,193 vorhanden.

2. Es lassen sich alle Differenzenreihen bis zur letzten der 12ten bilden — in die Zusammenstellung ist nur die erste von ihnen aufgenommen —, aber da die Radien der Röhren nicht proportional abnehmen, ist ein besonderer Schluss hieraus nicht zu ziehen; nur das folgt sicher, dass die Fehler rein systematisch nicht sein können.

3. Die Vorzeichen der Fehler erwecken in ihrer Anordnung von vornherein den Verdacht, dass diese nicht zufällig sein möchten, denn zu Anfang dominieren die negativen, zu Ende die positiven Zeichen.

Genauere Auskunft giebt die folgende Zusammenstellung :

	Fehler- reihe	Differenzenreihen											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl der Zeichen	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
„ „ + „	8	6	6	5	4	5	4	3	3	2	2	1	1
„ „ - „	5	6	5	5	5	3	3	3	2	2	1	1	—
„ „ Zeichenwechsel	6	9	9	8	7	6	5	5	4	3	2	1	—
„ „ Zeichenfolgen	6	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	—

Die Verteilung der Zeichen kann nur als sehr günstig bezeichnet werden, obgleich im Durchschnitt das negative Zeichen etwas seltener vorkommt, wie das positive, die Anordnung der Zeichen befriedigt aber nur in der Fehlerreihe selbst, sonst ist sie keine gute, die Zeichenwechsel überwiegen in bedeutendem Maasse. Zugleich sieht man, wie entsprechend der Bemerkung im Art. 121 die Zeichenfolgen in den Differenzenreihen gegen die Zeichenwechsel mehr und mehr zurücktreten, es genügt hier schon die Betrachtung der ersten Differenzenreihe.

4. Sieht man von den Zeichen der Fehler ab und bildet die Differenzen aufeinanderfolgender Beträge, so erhält man nach Multiplication mit 1000 die Zahlen +34, +190, -140, -44 +64, +66, -100, +10, -60, +50, -6, -74.

Das giebt 6 positive, 6 negative Zeichen; 7 Zeichenwechsel, 4 Zeichenfolgen und bietet über die Grösse der Fehler ganz befriedigende Auskunft.

Wir gehen jetzt zur Prüfung aus den charakteristischen Fehlern über. Wir ordnen also die Fehler ohne Rücksicht auf ihre Zeichen lediglich nach ihren absoluten Beträgen; das ist in der sechsten Columnne geschehen.

5. Im ersten Teil steht in der Mitte als siebenter Fehler die Zahl 0,093, diese muss also sehr nahe gleich sein dem wahrscheinlichen Fehler r einer einzelnen Messung dieses Theiles.

Wir haben aber

$$r = 0,674 \mu$$

und
$$\mu = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_{13}^2}{12}}$$

Die Quadrate der einzelnen Fehler nach Ausscheidung des Factors $(0,001)^2$ stehen in der 7. Columnne unter $1000^2 v_x^2$, am Fuss dieser Columnne befindet sich ihre Summe $(0,001)^2 171077$ niedergeschrieben. Die weitere Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \log 171077 &= 5,2332, \\ \log 12 &= 1,0792, \\ \hline \frac{1}{2} \text{ Differenz} &= 2,0770, \\ \text{also } \mu &= 0,001.119 = 0,119. \end{aligned}$$

Die Unsicherheit von μ beträgt am wahrscheinlichsten $0,708 \mu / \sqrt{13}$, das ist 0,023, so dass wird

$$\mu = 0,119 \pm 0,023.$$

Multipliziert man jetzt μ mit der vorgeschriebenen Zahl 0,674, so resultirt

$$r = 0,080 \pm 0,016.$$

Die direct aus der Fehlerreihe gefundene Zahl 0,093 stimmt in Anbetracht, dass der mittlere Fehler von r relativ gross ist, und dass der durch Abzählen aus nur 13 Fehlern erhaltene Betrag sehr unsicher ist, nicht schlecht mit der berechneten Zahl überein.

Wollte man von vornherein von der Ansicht ausgehen, dass die Fehler lediglich zufälliger Natur sind, so könnte man noch den Schluss ziehen, dass man r eher gleich 0,096 als 0,064 und μ eher 0,142 als 0,096 zu rechnen hat. Es sei deshalb noch auf den Schluss zu Art. 120 verwiesen.

6₁. Ferner haben wir theoretisch

$$\mu = 1,25 \delta.$$

δ ist gleich der Summe der absoluten Fehler dividirt durch $\sqrt{13 \cdot 12}$, diese Summe steht am Fuss der sechsten Columnne und ist gleich 0,001.1249, damit wird $\delta = 0,100$, und da die Unsicherheit $0,756 \delta / \sqrt{13}$ beträgt, bekommt man

$$\delta = 0,100 \pm 0,021.$$

Man hat hiernach $1,25 \delta = 0,125 \pm 0,026$ und dieser Sollwert von μ unterscheidet sich von dem aus den Fehlerquadraten berechneten Betrag um viel weniger als die Unsicherheit der beiden Zahlen beträgt.

7₁. Endlich haben wir noch das Abbesche Kriterium anzuwenden, darnach sollte die mittlere erste Differenz das 1,414fache des mittlern Fehlers sein. Die ersten Differenzen stehen, wie schon bemerkt, in der fünften Columnne, ihre Quadrate geben summirt $(0,01)^2 \cdot 2882$, also wird

$$\mu_{\delta} = 0,155,$$

dagegen giebt das $\sqrt{2}$ fache von μ 0,168, was wieder mit der obigen Zahl recht gut übereinstimmt, zumal beide Zahlen mit Unsicherheiten behaftet sind.

Als Resultat dieser an den Fehlern des ersten Teils der Beobachtungen geübten formalen Kritik ergibt sich, dass man diese Fehler als grössten-theils zufällig betrachten darf.

Zwar sprechen die Zeichenkriterien — 2₁ bis 4₁ und 7₁ — nicht geradezu für die Zufälligkeit der Fehler, aber sie stehen mit derselben auch nicht in directem Widerspruch. Ferner lehren die Grössenkriterien, dass diese Fehler allerdings dem Gaussischen Wahrscheinlichkeitsgesetz in genügendem Maasse unterworfen sind. Man gerät also durch Anwendung des Ausgleichsverfahrens nicht in Widersprüche und kann sagen, die durch arithmetische

Mittelbildung gewonnene Zahl 14,833 giebt den nach den dargelegten Versuchen wahrscheinlichsten Betrag für den Capillaritätscoefficienten des Wassers von 15°; die zu diesem Betrag führenden Messungen können zwar noch systematisch durch die Weiten der benutzten Röhren beeinflusst sein, doch darf man diese systematischen Verfälschungen als gegen die zufälligen Fehler im allgemeinen unbedeutend ansehen.

143. Der zweite Teil der Messungen. Anders stellt sich das Verhältnis für den zweiten Teil der Beobachtungen. Hier zeigt die Zusammenstellung, wie die übrig bleibenden Fehler an den beiden Enden der Reihe negativ, in der Mitte fast durchweg positiv sind. Wir haben zwar in der Fehlerreihe ziemlich gleich viel positive Zeichen wie negative, nämlich 13 und 11, aber nur 4 Zeichenwechsel auf 19 Zeichenfolgen, und ein Ueberwiegen der Zeichenfolgen ist schon an sich ungünstig. In den Differenzenreihen bessert sich das Verhältnis, die erste enthält mindestens 13 Zeichenwechsel und höchstens 9 Zeichenfolgen. Dasselbe gilt von der Differenzenreihe der absolut gerechneten Fehler, auch diese hat mindestens 13 Zeichenwechsel auf höchstens 9 Zeichenfolgen.

Wir wollen auch noch die andern Kriterien heranziehen.

Keine der Zahlen fällt besonders heraus, denn dem negativen Fehler $-0,51$ entspricht ein positiver $+0,42$.

Ferner haben wir — die Verificirung der Resultate sei dem Leser überlassen —

$$\mu = 0,201 \pm 0,028$$

und

$$\mu_8 = 0,214 \pm 0,030.$$

Es sollte aber sein

$$\mu_8 = 1,414 \mu = 0,284 \pm 0,039.$$

Das Abbesche Kriterium fällt also ungünstig aus.

Dann ist aus μ berechnet

$$r = 0,135 \pm 0,019.$$

Dagegen aus der absoluten Fehlerreihe durch Abzählen

$$r = 0,130.$$

Diese Probe fällt gut aus, wenn auch freilich der durch Abzählen gefundene wahrscheinliche Fehler nur unsicher sein kann.

Endlich haben wir

$$\delta = 0,155 \pm 0,023.$$

Hieraus berechnet sich durch Multiplication mit 1,25

$$\mu = 0,194 \pm 0,028,$$

was mit dem aus den Fehlerquadraten erschlossenen Betrag gut übereinstimmt.

Für die Grössen der Fehler darf man also auch hier das Gaussische Verteilungsgesetz als genügend massgebend ansehen, aber sowohl das Abbesche Kriterium wie die Proben aus den Zeichen widersprechen der Annahme, dass die Fehlerreihe in der ihr gegebenen Anordnung nach den Radien der Röhren zufällig ist.

Trotzdem dürfen wir vorläufig noch nicht schliessen, dass nun wirklich die Fehler durch den Einfluss der Röhrenweiten auf die Messung des Capillaritätscoefficienten systematisch verfälscht sind, denn wir wissen, dass noch eine andere systematische Verfälschung möglich ist. Das Wasser ist nicht in allen Versuchen vorher gleich hoch und gleich oft erwärmt worden, wir haben daher noch die Fehler nach dem Grade, der Dauer und der Anzahl der voraufgegangenen Erwärmungen zu ordnen.

Ordnen wir allein nach der bei der (15 Stunden) voraufgegangenen Erwärmung erreichten Temperatur t , so bekommen wir das folgende Tableau, in der die einzelnen Columnen entsprechende Bedeutung wie früher haben, die zweite aber die bezeichnete Temperatur t angiebt.

No.	t	α_x^2	v_x	Δv_x
2	45°	14,82	— 0,23	+ 0,24
9	"	14,58	+ 0,01	— 0,10
14	"	14,68	— 0,09	+ 0,11
11	56°	14,57	+ 0,02	+ 0,27
12	"	14,30	+ 0,29	— 0,39
14	63°	14,69	— 0,10	— 0,04
11	80°	14,73	— 0,14	+ 0,39
12	"	14,34	+ 0,25	— 0,30
8	86°	14,64	— 0,05	— 0,02
"	"	14,66	— 0,07	+ 0,04
"	"	14,62	— 0,03	+ 0,26
10	"	14,36	+ 0,23	— 0,08
"	"	14,44	+ 0,15	— 0,03
"	"	14,47	+ 0,12	+ 0,03
11	"	14,44	+ 0,15	— 0,11
"	"	14,55	+ 0,04	+ 0,38
12	"	14,17	+ 0,42	— 0,39
"	"	14,56	+ 0,03	— 0,24
1	95°	14,80	— 0,21	+ 0,07
"	"	14,73	— 0,14	+ 0,18
11	"	14,55	+ 0,04	+ 0,03
12	"	14,52	+ 0,07	— 0,32
13	"	14,84	— 0,25	— 0,26
16	"	15,10	— 0,51	— 0,28

Zunächst lässt namentlich die Differenzenreihe der Fehler erkennen, dass den Röhrenweiten selbst innerhalb der bezüglichen Temperaturen ein

massgebender Einfluss nicht zuzuschreiben ist. Wir hätten also eigentlich die den einzelnen Temperaturen entsprechenden Zahlen zu Mitteln zusammenziehen können. Indessen besäßen diese Mittel gar zu verschiedene Gewichte, ihre Fehler wären zu ungleichwertig, und wir sind noch nicht in der Lage, aus ungleichwertigen Fehlern die mittlere Differenz berechnen zu können.

Das Mittel ist natürlich wieder 14,59, und die v_x sind dieselben Zahlen wie in der zweiten Anordnung, nur in anderer Folge. Es enthält die Reihe der Fehler 10 Zeichenwechsel, 13 Zeichenfolgen, die der Fehlerdifferenzen 14 Zeichenwechsel, 9 Zeichenfolgen. Die charakteristischen Fehler sind dieselben wie vorher, für die mittlere Fehlerdifferenz erhält man aber nunmehr

$$\mu_s = 0,236 \pm 0,035,$$

und diese Zahl stimmt mit dem Sollwert $0,284 \pm 0,039$, wenn auch nicht gut, so doch jedenfalls bedeutend besser als die früher berechnete. Da nun auch die Zeichenverteilung nunmehr als eine befriedigende bezeichnet werden muss, so hat man kein Recht, in der voraufgegangenen Temperaturerhöhung allein einen Grund zu systematischen Verfälschungen zu sehen. Nun ist es klar, dass, wenn wir der voraufgegangenen Temperaturerhöhung einen Einfluss, sei es auf den Luftgehalt des Wassers, sei es auf die Einwirkung des Wassers auf die innere Röhrenfläche, zuschreiben, dieser Einfluss wachsen muss, je öfter man die Temperaturerhöhung zuwege gebracht hat. Wir haben daher die Zahlen der zweiten Abteilung auch noch so zu ordnen, dass die Anzahl der bei demselben Wasser und derselben Röhre voraufgegangenen Temperaturerhöhungen zum Ausdruck kommt. So würden wir eigentlich noch zwei Tableaus herzustellen haben, eines in Bezug auf das Wasser, ein anderes in Bezug auf die Röhren; da aber in unserem Fall so oft neue Röhren eingespannt wurden, auch das Wasser erneut wurde, fallen die beiden Tableaus in eines zusammen. Wir bekommen nun an der Hand der Protokollbemerkungen die folgende Zusammenstellung

No.	t	a_x^2	v_x	Δv_x
Erste Temperaturerhöhung.				
2	45°	14,82	— 0,23	+ 0,24
9	„	14,58	+ 0,01	— 0,10
14	„	14,68	— 0,09	+ 0,04
8	86°	14,64	— 0,05	+ 0,28
10	„	14,36	+ 0,23	— 0,19
11	„	14,55	+ 0,04	— 0,01
12	„	14,56	+ 0,03	— 0,22
1	95°	14,78	— 0,19	— 0,06
13	„	14,84	— 0,25	— 0,06
16	„	15,10	— 0,51	— 0,26

(Fortsetzung der Tabelle nächste Seite.)

No.	t	a_x^2	v_x	Δv_x
Zweite Temperaturerhöhung.				+ 0,41
14	63°	14,69	— 0,10	
8	86°	14,62	— 0,03	+ 0,07
10	„	14,47	+ 0,12	+ 0,15
1	„	14,73	— 0,14	— 0,26
11	95°	14,55	+ 0,04	+ 0,18
12	„	14,52	+ 0,07	+ 0,03
Dritte Temperaturerhöhung.				— 0,14
8	86°	14,66	— 0,07	
10	„	14,44	+ 0,15	+ 0,22
11	56°	14,57	+ 0,02	— 0,13
12	„	14,30	+ 0,29	+ 0,27
Vierte Temperaturerhöhung.				— 0,43
11	80°	14,73	— 0,14	
12	„	14,34	+ 0,25	+ 0,39
Fünfte Temperaturerhöhung.				— 0,10
11	86°	14,44	+ 0,15	
12	„	14,17	+ 0,42	+ 0,27
				— 0,65

Jede Erwärmung dauerte gegen 6 Stunden, und zwischen zwei aufeinanderfolgenden Erwärmungen lagen, die Abkühlungszeit nicht mitgerechnet, im Durchschnitt 15 Stunden.

Hier sind zuerst fast alle Fehler negativ und zuletzt fast durchgängig positiv, wir müssen also annehmen, dass sie auch in dieser Anordnung systematisch verfälscht sind. Aber die Differenzenreihe lehrt noch mehr. Die Stellen, wo die positiven Fehler sich hier häufen, entsprechen genau den Stellen, wo sie sich in der ersten Anordnung angesammelt haben, denn die Röhren 10, 11 und 12, die dort unmittelbar auf einander folgten, tun es auch hier; nur von der Röhre 10 hat eine Messung anderweitig gesetzt werden können. Zunächst müssen wir also bekennen, dass wir zwar Grund haben, in den Fehlern systematische Einflüsse zu vermuten, dass wir aber diese Einflüsse zwei Ursachen zuschreiben können, der Ungleichheit der Röhrenweiten oder der verschiedenartigen Erwärmung des Wassers.

Bei genauerer Durchsicht der Fehlerreihe finden wir noch, erstens weichen die Radien der Röhren, bei welchen positive Fehler stehen, eigentlich nur wenig von solchen ab, bei denen negative Fehler vertreten sind, so unterscheidet sich die Röhre 12 in ihrem Radius von der Röhre 13 um 0,008 mm, und doch ist der Fehler von a^2 bei ihr in der ersten Gruppe nur + 0,03, bei der 13 dagegen — 0,25; zweitens zeigen die Fehler bei der Röhre 12 wenigstens einen Gang, der, wie sich aus der zweiten Anordnung ergibt, genau mit dem Gang der Erwärmungsweise übereinstimmt; drittens hat der erste

Teil der Messungen, dem man eine bedeutend grössere Präcision wie dem zweiten zuschreiben muss, einen Einfluss der Radien nicht unzweideutig angezeigt. Es folgt also, dass wir auch hier die offenbar vorhandene systematische Verfälschung eher der Erwärmungsweise des Wassers als der Verschiedenartigkeit in den Röhrenweiten zuzuschreiben haben.

Von den 24 Fehlern sind nun unter den 12 ersten 8 negative, zum Teil sehr bedeutenden Betrages, und nur 4 positive, von denen dazu noch 3 sehr geringen Wert haben, unter den 12 letzten haben wir dagegen 9 positive und nur 3 negative. Im Ganzen sind vorhanden 13 positive, 11 negative Fehler, 11 Zeichenwechsel, 12 Zeichenfolgen. In der Differenzenreihe finden sich 15 Zeichenwechsel auf 8 Zeichenfolgen.

Die mittlere erste Differenz ist

$$\mu_8 = 0,266 \pm 0,040,$$

sie stimmt sehr genau mit ihrem Sollwert $0,284 \pm 0,039$ überein. Wir haben hier einen Fall, wo mehrere der formalen Kriterien für die Zufälligkeit der Fehler sprechen, während der Anblick der Fehlerreihe einen systematischen Gang vermuten lässt. Indessen ist zu beachten, dass die mittlere Fehlerdifferenz gar zu sehr von der Anordnung der Fehler und oft schon von der zweier Fehler gegen einander abhängt. Ferner war die Verteilung der Zeichen, ein Hauptkriterium, eine schlechte und ausserdem sieht man auch, dass die Zeichenfolgen vorzüglich an den Enden, die Zeichenwechsel besonders in der Mitte der Fehlerreihe zu finden sind, und das ist allerdings sehr verdachterweckend. Wir müssen also sagen, dass die Vermutung, der Capillaritätscoefficient des Wassers bei gewöhnlicher Temperatur hänge von den vorausgegangenen Erwärmungen des Wassers in der Röhre ab, nicht ungerechtfertigt ist, und zwar dürfen wir behaupten, dass man ihn im allgemeinen um so kleiner findet, je mehr Erwärmungen vorausgegangen sind.

Weiteres können unsere Kriterien nicht lehren, wollen wir noch mehr wissen, wollen wir namentlich die möglichen Einflüsse der verschiedenen namhaft gemachten Ursachen kennen lernen und die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ursachen gegen einander abwägen, so haben wir es mit einer besondern Untersuchung zu tun. Dazu werden die Regeln erst in dem nächstfolgenden Abschnitt gegeben werden, dort soll dann auch unser Beispiel nach der bezeichneten Richtung fortgeführt und ergänzt werden.

Um das Beispiel aber hier schon noch weiter ausnutzen zu können, sehen wir zunächst von den möglichen systematischen Fehlern ab.

144. Ergebnisse für die Methoden. Der mittlere Fehler einer Messung des ersten Teils der Beobachtungen betrug 0,119 mit einer Unsicherheit von $\pm 0,023$, der einer Messung des zweiten Teiles ist 0,201 mit einer Unsicherheit von $\pm 0,028$. Dieser ist hiernach bei dem zweiten Teil, der fast doppelt soviel Beobachtungen an fast ebenso vielen Röhren enthält wie der erste, noch einmal so gross wie jener. Die Messungen sind also bei mit Luft gesättigtem Wasser und nicht corrodirtten Röhren viel zuverlässiger; eine

Erfahrung, die übrigens schon von mehreren Beobachtern gemacht worden ist. Liegt einem Experimentator daran, das capillare Verhalten des Wassers so regelmässig als möglich zur Erscheinung zu bringen, so muss er dieses Wasser sich mit Luft sättigen lassen und darf es nicht vorher in der Röhre erhitzen.

Im übrigen sind in beiden Teilen die charakteristischen Fehler der einzelnen Bestimmungen recht bedeutend, viel bedeutender jedenfalls, als man es nach wiederholten Versuchen an einer und derselben Röhre erwarten sollte. Die Gründe dafür sind schon auseinandergesetzt.

Der Endwert für a^2 ist im zweiten Teile der Messungen viel kleiner als im ersten, und da beide Teile aus einer immerhin nicht geringen Anzahl von Einzelmessungen bestehen, so wird man annehmen müssen, dass in der Tat Wasser, welches voraufgehende starke Erwärmungen erlitten hat, in der betreffenden Röhre einen zu kleinen Capillaritätscoefficienten ergibt. Wir dürfen die beiden Teile nicht mit einander verbinden, sondern müssen sie getrennt behandeln, den einen unter der Ueberschrift „Capillaritätscoefficient des mit Luft gesättigten Wassers in einer intacten Röhre“, den andern unter der „Capillaritätscoefficient des in der betreffenden Röhre mehrfach erwärmten Wassers.“ Dass die zweite Ueberschrift so vage ist, ist Schuld der Untersuchung, die solche Differenzen nicht voraussah und nachher nicht methodisch genug verfolgen konnte.

Was die charakteristischen Fehler der Resultate betrifft, so haben wir im ersten Teil

$$\delta_r = \frac{\delta}{\sqrt{13}} = 0,028 \pm 0,005,$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\sqrt{13}} = 0,033 \pm 0,007,$$

$$r_r = \frac{r}{\sqrt{13}} = 0,023 \pm 0,005;$$

im zweiten Teil

$$\delta_r = \frac{\delta}{\sqrt{24}} = 0,032 \pm 0,007,$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\sqrt{24}} = 0,041 \pm 0,008,$$

$$r_r = \frac{r}{\sqrt{24}} = 0,027 \pm 0,005.$$

Das wahrscheinlichste Ergebnis ist daher

im ersten Teil

$$a^2 = 14,833 \pm (0,033 \pm 0,007),$$

im zweiten Teil

$$a^2 = 14,590 \pm (0,041 \pm 0,008),$$

also auch das Resultat ist im ersten Teil sicherer als im zweiten. Jedes der beiden Resultate hat für sich seine bestimmte Bedeutung. Die erste Zahl giebt den aus den 13 angeführten Bestimmungen folgenden wahrscheinlichsten Betrag des Capillaritätscoefficienten für mit Luft gesättigtes Wasser bestimmt in einer intacten Röhre.

Die zweite Zahl giebt den aus den 24 angeführten Bestimmungen folgenden wahrscheinlichsten Betrag des Capillaritätscoefficienten für Wasser, das durch voraufgehende Erwärmung zum Teil von Luft befreit ist und die Röhre, in der die Bestimmung vorgenommen ist, wahrscheinlich corrodirt hat.

Wollte man beide Zahlen mit einander vereinigen, so dürfte man nicht etwa der ersten das Gewicht 13, der zweiten das 24 geben, das wäre hier, wo offenbar der ersten Zahl eine grössere Sicherheit innewohnt als der zweiten, ganz falsch; die Messungen des einen Teiles sind eben, wie die Rechnung gezeigt hat, denen des andern nicht gleichwertig, und die 24 Messungen des zweiten Teiles haben nicht soviel Genauigkeit ergeben können als die 13 des ersten. In dieser Beziehung ist das gewählte Beispiel ungemein lehrreich. Wir wissen aber, dass die Gewichte zweier nach nicht gleichwertigen Methoden erlangten Resultate sich umgekehrt wie die Quadrate der mittlern Fehler dieser Resultate verhalten.

Ist also p_1 das Gewicht des Resultats des ersten Teiles von Beobachtungen, p_2 das des Resultats des zweiten, so haben wir

$$p_1 : p_2 = 41^2 : 33^2$$

oder

$$p_2 = p_1 \frac{33^2}{41^2} = 0,65 p_1.$$

Man hätte die Messungen im zweiten Teil im Verhältnis von 0,65 zu 1 vermehren, also mindestens 36 statt 24 Messungen anstellen müssen, um mit mehrfach erwärmtem Wasser ein ebenso genaues Resultat wie bei nicht erwärmtem zu erhalten. Die Vereinigung hätte man aber nach der Formel

$$a^2 = \frac{14,833 + 0,65 \cdot 14,590}{1,65}$$

auszuführen.

Damit ist unser Beispiel, so weit es hier möglich ist, zu Ende gebracht.

Dritter Abschnitt.

Zusammengesetzte Messungen, Abschweifung über Determinanten und die Theorie linearer Gleichungen.



IX. Unbedingte zusammengesetzte Messungen.

a) *Wahrscheinlichste Ergebnisse.*

145. Begriff zusammengesetzter Messungen. Als zusammengesetzt haben wir eine Messung bezeichnet, wenn die Grösse, die durch sie ermittelt werden soll, sich aus mehreren anderen Grössen zusammensetzt, die für sich gemessen werden, und unbedingt nennen wir sie dann, wenn keines ihrer Elemente von den andern analytisch oder auch nur durch die Beobachtung abhängt. Die Art, wie diese einzelnen Grössen, wir nennen sie ihre Elemente, die zu bestimmende Grösse zusammensetzen, kann je nach ihrer eigenen Beschaffenheit und nach der der resultirenden Grösse sehr verschieden sein, die resultirende Grösse ist eine Function der zu bestimmenden, die natürlich in jedem Falle gegeben sein muss.

Hat man zum Beispiel eine Strecke von etwa 2 Meter auszumessen, besitzt aber nur einen Stab von 1 Meter Länge, so kann man nur so verfahren, dass man den Meterstab an die Strecke zweimal anlegt, die Ausmessung der ganzen Strecke tritt dann in der Ausführung als aus zwei Einzelmessungen zusammengesetzt auf, und ihr Resultat besteht aus der Summe der Resultate der beiden Einzelmessungen.

Man ersieht hieraus, dass das Resultat einer zusammengesetzten Messung eigentlich ein Rechenresultat ist. Zusammengesetzte Messungen werden überall da angewendet, wo eine Grösse der directen Bestimmung nicht zugänglich ist, sie kommen aber auch bei Grössen vor, die man für sich als Ganzes wol messen kann, namentlich dann, wenn es sich auch noch um die Kenntniss der einzelnen Teile der betreffenden Grössen handelt, sei es,

dass sie sich als Nebenresultat ergeben, oder, dass man sie zur Controle anderer Messungen heranzieht. Das ist, um ein einfaches Beispiel anzuführen, der Fall, wenn man einen Maassstab von etwa 1 Meter Länge bestimmen soll, der in Decimeter eingetheilt ist. Besitzt man bekannte Längenmaasse von 1, $\frac{1}{2}$, 0,1 Meter Länge, so kann man die Länge des ganzen Stabes erst durch einmaliges Ausmessen mit dem 1 m-Maass, dann durch zweimaliges mit dem 0,5 m-Maass, endlich durch zehnmaliges mit dem 0,1 m-Maass bestimmen, und die Frage richtet sich dann danach, wie man aus allen diesen Einzelmessungen das sicherste Resultat für die Gesamtlänge abzuleiten hat. Indessen gehören zusammengesetzte Messungen dieser Art, weil sie im allgemeinen nicht bloß eine, sondern mehrere Größen betreffen, schon in das Gebiet der „Untersuchungen“, wir werden sie hier nur insoweit zu erledigen haben, als es sich um Bestimmung nur einer Größe handelt.

146. Notwendigkeit, die Elemente unabhängig von einander zu messen. Das Resultat einer zusammengesetzten Messung kann zunächst dadurch gesichert werden, dass man jedes der Elemente, aus denen die betreffende Größe zusammengesetzt ist, für sich mehrfach und nach tunlichst verschiedenen Methoden misst. Wie man aber auch die einzelnen Elemente der zusammengesetzten Größe bestimmen mag, es ist durchaus erforderlich, dass jedes derselben unabhängig von den andern gemessen wird, d. h., dass alle Operationen, die für die Eruirung desselben notwendig sind, auch wirklich ausgeführt werden. Man darf sich eine Operation nicht deshalb sparen, weil sie vielleicht bei der Messung eines der andern Elemente schon vorgekommen ist. Jedes Element ist so zu bestimmen, wie wenn es ganz allein gemessen werden sollte. Wo das nicht geschieht, ist die Berechnung des wahrscheinlichsten Resultats complicirt, und oft auch wegen Verletzung der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gar nicht ausführbar. Das gilt, ob die Elemente von einander abhängen oder nicht. Sprechen wir also irgendwo von der Abhängigkeit der Elemente von einander, so meinen wir damit nicht etwa, dass ihre Messungen von einander abhängen, sondern dass sie als mathematische Größen gewisse analytische Formeln, Bedingungsgleichungen, zu erfüllen haben.

147. Ableitung des Wahrscheinlichsten Resultats für einen Satz von Elementen. Seien X, Y, Z, \dots die Größen, welche durch Vermittelung der gegebenen Function $F(X, Y, Z, \dots)$ die gesuchte Größe A zusammensetzen.

Hat man X n mal gemessen, so ist der sicherste Betrag x dieser Größe das aus den n Bestimmungen nach Maassgabe ihrer Gewichte gebildete Mittel, also wenn diese n Bestimmungen der Beträge x_1, x_2, \dots, x_n mit den bezüglichen Gewichten p_1, p_2, \dots, p_n geliefert haben,

$$x = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n}.$$

Bildet man in entsprechender Weise den sichersten Werth y von Y durch

$$y = \frac{q_1 y_1 + q_2 y_2 + q_3 y_3 + \dots + q_n y_n}{q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n}$$

und ebenso die sichersten Werte aller andern Grössen, so ist offenbar, weil die Function F gegeben ist, die Coefficienten in derselben also völlig bestimmt sind, das sicherste Resultat der zusammengesetzten Messung

LXIII)

$$a = F(x, y, z, \dots).$$

54. *Also, um das sicherste Resultat für eine aus bestimmten, von einander unabhängigen Elementen in bestimmter Weise abhängige Grösse zu bekommen, misst man jedes der betreffenden Elemente für sich so oft, als es die für das abzuleitende Schlussresultat zu erlangende Genauigkeit erheischt, bildet für jedes der Elemente nach bekannten Vorschriften das arithmetische Mittel, und betrachtet diese Mittel als die Elemente der zu bestimmenden Grösse, setzt also diese aus diesen Mitteln zusammen.*

In dieser Vorschrift ist die Festsetzung, dass jedes Element so oft gemessen werden soll, „als es die für das abzuleitende Schlussresultat zu erlangende Genauigkeit erheischt“, noch etwas unbestimmt, wir werden bald damit einen bestimmten Begriff verbinden lernen.

Die Unabhängigkeit der Elemente von einander ist aber unumgängliche Bedingung für die Berechtigung dieses Verfahrens; existiren zwischen den Elementen Bedingungsgleichungen, die streng zu erfüllen sind, so ist der in der angegebenen Weise gebildete Wert für die zusammengesetzte Grösse nicht mehr der wahrscheinlichste. Wie man dann zu verfahren hat, wird später auseinandergesetzt werden.

Weiteres lässt sich zur Sicherung des Resultats nicht tun, wenn die zu eruirende Grösse nur aus einer Reihe ganz bestimmter Elemente zusammensetzen ist.

148. Wahrscheinlichstes Resultat bei mehreren Sätzen von Elementen.

In vielen Fällen ist man aber im Stande, auch die Elemente zu variiren, womit dann meist eine Variation der Abhängigkeit, in der sie zu der zu bestimmenden Grösse stehen, verbunden ist. Man sucht sich dann aus den Elementensystemen das günstigste heraus, oder man bestimmt alle Elementensysteme für sich und setzt die betreffende Grösse aus ihnen zusammen. So bekommt man für diese Grösse so viele Resultate, als man Elementensysteme zur Verfügung hat, und, indem man diese Resultate wie Einzelmessungen behandelt, kann man sie, falls man ihre relativen Gewichte zu bestimmen vermag, nach dem Satz vom arithmetischen Mittel zu einem einzigen Resultat vereinigen.

55. *Sind die einzelnen Elementensysteme, bezüglich X, Y, Z, \dots ; X', Y', Z', \dots ; X'', Y'', Z'', \dots die Functionen, die die zu bestimmende Grösse A von ihnen bezüglich abhängig machen, $F(X, Y, Z, \dots)$;*

$F'(X', Y', Z', \dots)$; $F''(X'', Y'', Z'', \dots)$... , ist ferner z. B. x das aus den Messungen für ein einzelnes Element X nach dem Princip des arithmetischen Mittels gebildete sicherste Resultat; endlich p das Gewicht, welches der Bestimmung der Grösse A aus den Elementen X, Y, Z, \dots ; p' das, welches ihr aus der der Elemente X', Y', Z', \dots , u. s. f. zuzuschreiben ist, so ist das aus allen Messungen folgende sicherste Resultat für A

$$\text{LXIV) } a = \frac{pF(x, y, z, \dots) + p'F'(x', y', z', \dots) + p''F''(x'', y'', z'', \dots) + \dots}{p + p' + p'' + \dots}$$

Im Wesentlichen ist das eine Erweiterung des Principes vom arithmetischen Mittel, und es erledigt zugleich den allgemeinsten Fall zusammengesetzter Messungen.

149. Problem der Gewichtsbestimmung einer Function unabhängiger Elemente. Während nun die Berechnung der einzelnen Grössen $F(x, y, z, \dots)$, $F'(x', y', z', \dots)$... nach den Festsetzungen des vorausgehenden Satzes 54 keine Schwierigkeit bietet, ist es nicht leicht, über die Grössen p , die man als Gewichte dieser Functionen (Einzelbestimmungen der gesuchten Grösse A) bezeichnen kann, sich Gewissheit zu verschaffen.

Es handelt sich, allgemein gesprochen, um die Bestimmung des Gewichts einer Function einzelner Elemente, wenn die Gewichte, die den Bestimmungen dieser Elemente zugehören, bekannt sind.

b) Fehler und Präcision.

Nach den Festsetzungen in Art. 84 wird das Gewicht einer Bestimmung gemessen durch das Reciproke des Quadrats ihres mittlern Fehlers, wir können daher auch die Aufgabe so fassen:

Von einer Reihe von Elementen kennt man die mittlern Fehler ihrer Bestimmungen, man soll den mittlern Fehler einer gegebenen Function dieser Elemente berechnen.

150. Fehlerrechnung. Nothwendigkeit genaue Messungen voraussetzen. Wir wollen wieder annehmen, dass diese Elemente von einander völlig unabhängig sind, und zwar nicht bloß insofern, als sie überhaupt ganz unabhängig von einander gemessen sind — dieses ist immer erforderlich — sondern auch insofern als keine analytischen Bedingungsgleichungen zwischen ihnen zu erfüllen sind. Die wahren Werte der Elemente bezeichne ich mit X_1, X_2, \dots, X_n , die wahre Function mit

$$F = F(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Die Beobachtung der Elemente ergibt im allgemeinen nicht die wahren Beträge, sondern andere, x_1, x_2, \dots, x_n , sind dann die wahren Fehler dieser Beobachtungen $\Delta X_1, \Delta X_2, \dots, \Delta X_n$, so hat man

$$X_1 = x_1 + \Delta X_1, X_2 = x_2 + \Delta X_2, \dots, X_n = x_n + \Delta X_n,$$

somit, wenn mit a der aus den Beobachtungen zu erschliessende Betrag von A bezeichnet wird,

$$a = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$A = F(x_1 + \Delta X_1, x_2 + \Delta X_2, \dots, x_n + \Delta X_n).$$

Hiernach wird der wahre Fehler der Function

$$\Delta F = F(x_1 + \Delta X_1, x_2 + \Delta X_2, \dots, x_n + \Delta X_n) - F(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Die Fehler der Elemente sollen alle zufällige sein, jeder Fehler ΔX kann dann ebenso gut positiv wie negativ ausfallen.

Wenn nun die ΔX einmal alle positiv, ein andermal alle negativ sind, so hat man im ersten Fall

$$\Delta F = F(x_1 + \Delta X_1, x_2 + \Delta X_2, \dots, x_n + \Delta X_n) - F(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

im zweiten

$$\Delta F' = F(x_1 - \Delta X_1, x_2 - \Delta X_2, \dots, x_n - \Delta X_n) - F(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

und hiernach ist es im allgemeinen nicht nötig, dass der Fehler der Function mit den Fehlern der Elemente sein Zeichen wechselt, und man kann streng genommen nicht mehr behaupten, dass auch bei der Function von gemessenen Grössen die Fehler ebenso leicht als positive wie als negative Grössen aufzutreten vermögen. Indessen haben wir vorauszusetzen, dass die Elemente der zu bestimmenden Function so oft beobachtet sind, bis ihre übrig gebliebenen wahren Fehler nur sehr geringe Bedeutung für das Endresultat haben, indem wir dann die Glieder mit den höhern Potenzen dieser Fehler vernachlässigen, können wir den Fehler der zu bestimmenden Grösse setzen

$$\Delta A = \frac{\partial F}{\partial x_1} \Delta X_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \Delta X_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \Delta X_n,$$

und wenn man jetzt die Zeichen aller ΔX umkehrt, wechselt auch ΔA sein Zeichen. Also

56. *Sind die Elemente einer Function so oft beobachtet, bis von den ihnen noch anhaftenden Fehlern jeder nur ganz geringen Einfluss auf dieselbe hat, so darf man die Fehler der Function wie zufällige behandeln und dieselben als lineare Functionen der Fehler der Elemente, bestimmt durch die Gleichung*

$$\text{LXV)} \quad \Delta A = \frac{\partial F}{\partial x_1} \Delta X_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \Delta X_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \Delta X_n,$$

ansetzen.

Es ist hier absichtlich nicht gesagt, dass die übrig gebliebenen Fehler gegen die bezüglichen Elemente sehr klein sein sollen, dies ist auch nicht immer nötig, es kommt lediglich darauf an, dass die übrig gebliebenen Fehler der Elemente einzeln auf das Resultat nur unbedeutenden Einfluss haben.

Daraus folgt noch nicht, dass überhaupt auch die Fehler des Resultats sehr klein sein müssen, denn da diese durch Combination der Fehler der Elemente entstehen, kann es sich wol ereignen, dass in besonders ungünstigen Fällen die Zeichen der Fehler der Elemente sich so gestaltet haben, dass alle Glieder der Reihe

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} \Delta X_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \Delta X_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \Delta X_n$$

ein und dasselbe Zeichen haben, und dann wird ΔA unter Umständen gegen F schon eine in Betracht kommende Grösse bilden.

151. Unterschiede der Fehler zusammengesetzter Messungen gegen die einfacher. Indessen ist doch, abgesehen von dem Fall, wo F eine lineare Function der Elemente bildet, durch die obige Annahme der Spielraum für die Fehler zusammengesetzter Messungen erheblich eingeeengt; den zufälligen Fehlern einfacher Messungen konnten wir fictiv alle Grössen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ zuweisen und dadurch gewannen wir den Vorteil, den Integralen ihrer Wahrscheinlichkeitsfunctionen bestimmte Grenzen zuschreiben zu können, vermöge deren sie sich auf besonders einfache Ausdrücke reduciren liessen. Hier dürfen wir es streng genommen nicht mehr tun, denn da jedenfalls die Differentialquotienten der betreffenden zusammengesetzten Grössen endlich sein müssen, kann ΔA nur dadurch sehr gross werden, dass eine gewisse Anzahl der ΔX sehr gross wird. Tritt aber das letztere ein, so ist eben die Entwicklung von ΔF als lineare Function der ΔX allgemein nicht mehr zulässig.

Wir haben es nun bei der Definition der charakteristischen Fehler durch bestimmte Integrale nie mit den einzelnen Fehlern selbst zu tun, sondern mit ihren Producten in die Wahrscheinlichkeitsfunction. Von letzterer wissen wir aber aus ihrer aus der Erfahrung erschlossenen Form, dass sie für relativ grosse Fehler ungemein geringe Wahrscheinlichkeiten ergiebt, derartig, dass ihr Product mit dem entsprechenden Fehler, dieser mag auch noch so gross sein, immer noch ausserordentlich klein ist. Wo es sich also um Ausdrücke handelt, in denen die Fehler multiplicirt mit ihren bezüglichen Wahrscheinlichkeiten auftreten, hat es nichts auf sich, wenn man entgegen der Supposition, wonach die Fehler zusammengesetzter Messungen unter allen Umständen lineare Functionen der Fehler der sie zusammensetzenden Messungen sein sollen, diesen Fehlern auch unbeschränkt grosse Beträge zuschreibt.

152. Annahmen über die Fehler zusammengesetzter Messungen. Wir werden also im Folgenden die Fehler zusammengesetzter Messungen einmal als lineare Functionen der Fehler der sie zusammensetzenden einfachen Messungen ansehen und dann noch dieselben genau so wie die zufälligen Fehler einfacher Messungen behandeln.

Weil aber jeder Fehler einer zusammengesetzten Messung von den Fehlern aller zusammensetzenden Messungen abhängt, bilden die Fehler von

zusammengesetzten Messungen nicht mehr wie die von einfachen eine einfache Mannigfaltigkeit von Grössen, sondern eine nach der Zahl der sie zusammensetzenden Messungen sich richtende mehrfache Mannigfaltigkeit, und darum kommen wir hier nicht mehr mit einfachen Integralen aus.

Wir haben zunächst die Wahrscheinlichkeitsfunction für zusammengesetzte Fehler zu bilden.

Sei wie bisher $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ die Function, um deren Fehler es sich handelt, die wahren Fehler der Elemente bezeichne ich jetzt mit bezüglich V_1, V_2, \dots, V_n , so dass jedes dieser V alle möglichen Beträge anzunehmen vermag. Der Fehler von F sei V . Dann ist nach unsern Festsetzungen

$$V = \frac{\partial F}{\partial x_1} V_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} V_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} V_n.$$

Die Elemente sollten alle ebenso wie ihre Bestimmungen von einander ganz unabhängig sein, jedes der Glieder in dem Ausdruck für V variiert dann unabhängig von allen andern, und kann alle möglichen Beträge annehmen. Was von den V gilt, ist natürlich auch richtig von ihren Producten in die bezüglichen Grössen

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

Indem man nun

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} V_1 = \lambda_1, \frac{\partial F}{\partial x_2} V_2 = \lambda_2, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} V_n = \lambda_n,$$

also

$$V = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

macht, kann man sagen:

V setze sich zusammen aus den n Fehlern $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, die alle von einander unabhängig sind, und deren jeder alle möglichen Beträge aufweisen kann.

153. Wahrscheinlichkeitsfunction zusammengesetzter Fehler. Nun sei die Wahrscheinlichkeit, dass die Bestimmung des x ten Elements X_x noch mit einem wahren Fehler V_x behaftet ist, gleich $\varphi_x(V_x)$ — eine Wahrscheinlichkeit, die von der Schärfe mit der bei der Messung des betreffenden Elements verfahren wird, abhängt — dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass in dem Ausdruck für V gerade der Fehler V_x mit vertreten ist, $\varphi_x(V_x)$. Hiernach wird die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fehler V gerade durch die Beträge V_1, V_2, \dots, V_n der Fehler seiner Elemente gebildet wird,

$$\varphi'(V) = \varphi_1(V_1) \varphi_2(V_2) \dots \varphi_n(V_n).$$

Bezeichnet allgemein w_x die Wahrscheinlichkeit, mit der bei der Bestimmung des x ten Elements X_x ein Fehler von der Grösse Null auftreten kann, so ist

$$\varphi_x(V_x) = w_x e^{-\pi w_x^2 V_x^2},$$

und

$$\varphi'(V) = w_1 w_2 \cdots w_n e^{-\pi(w_1^2 V_1^2 + w_2^2 V_2^2 + \cdots + w_n^2 V_n^2)},$$

oder, indem wir

$$w_1 w_2 w_3 \cdots w_n = w$$

setzen,

$$\varphi'(V) = w e^{-\pi(w_1^2 V_1^2 + w_2^2 V_2^2 + \cdots + w_n^2 V_n^2)}.$$

Es ist nun wol zu beachten, dass dieses nur die Wahrscheinlichkeit ist dafür, dass der ganz bestimmte Fehler V sich aus den ganz bestimmten Fehlern V_1, V_2, \dots, V_n zusammensetzt, allein da der Betrag V noch durch viele andere Fehlercombinationen entstehen kann, ist $\varphi'(V)$ noch nicht die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die zusammengesetzte Messung einen Fehler von der Grösse V aufweist. Diese müssen wir setzen gleich

$$\varphi(V) = \Sigma \varphi_1(V_1) \varphi_2(V_2) \cdots \varphi_n(V_n),$$

wo das Σ andeutet, dass man die Producte so oft zu bilden und dann zu addiren hat, als sich Combinationen von Beträgen für die Fehler der zusammensetzenden Messungen denken lassen, die in ihrer Zusammensetzung nach dem Gesetz, welches sie mit V verbindet, gerade den Betrag V liefern.

Wenn wir also $n - 1$ von den n Elementen, etwa den $n - 1$ letzten Elementen, schon bestimmte Fehler V_2, V_3, \dots, V_n zugeschrieben haben, so kann das übrige Element keinen beliebigen Fehler mehr haben, wenn das Resultat gerade den Fehler V aufweisen soll, es muss dann vielmehr sein

$$V_1 = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} \left\{ V - \frac{\partial F}{\partial x_2} V_2 - \frac{\partial F}{\partial x_3} V_3 - \cdots - \frac{\partial F}{\partial x_n} V_n \right\},$$

und wenn wir V_1 dieser Gleichung gemäss bestimmen, können wir den V_2, V_3, \dots, V_n irgend welche der ihnen zukommenden Beträge erteilen. Welches der V man in dieser Weise berechnet, nachdem man den andern bestimmte Werte beigelegt hat, ist gleichgiltig, immer bekommt man in dieser Weise alle möglichen Combinationen von Beträgen der V , die, mit den bezüglichen Factoren $\frac{\partial F}{\partial x_x}$ multiplicirt und addirt, gerade die Zahl V liefern.

Schreibt man daher

$$\varphi(V) = \Sigma \varphi_2(v_2) \varphi_3(v_3) \cdots \varphi_n(V_n) \varphi_1 \left(\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} \left\{ V - \frac{\partial F}{\partial x_2} V_2 - \frac{\partial F}{\partial x_3} V_3 - \cdots - \frac{\partial F}{\partial x_n} V_n \right\} \right),$$

so ist die Summe so zu verstehen, dass man den $n - 1$ Grössen V_2, V_3, \dots, V_n alle Beträge, die sie nur besitzen können, erteilt, für jedes Wertsystem die Producte der φ bildet und alle Producte addirt. Σ bezeichnet also eine $n - 1$ fache Summation.

Wir können diese Summation in eine $n - 1$ fache Integration verwandeln. Lassen wir nämlich V_1 irgend einen Betrag zwischen V_1 und $V_1 + dV_1$, V_2 irgend einen zwischen V_2 und $V_2 + dV_2$, \dots annehmen, so wird V irgend einen Betrag zwischen V und $V + dV$ besitzen. Die Wahrscheinlichkeit, dass letzteres der Fall ist, und dass ausserdem dieser Betrag sich gerade aus einem Betrag des V_1 zwischen V_1 und $V_1 + dV_1$, des V_2 zwischen V_2 und $V_2 + dV_2$ u. s. f. zusammensetzt, wo V_1, V_2, \dots, V_n ganz bestimmte Beträge angeben, ist

$$\varphi'(V) dV = \varphi_1(V_1) \varphi_2(V_2) \cdots \varphi_n(V_n) dV_1 dV_2 \cdots dV_n.$$

Suchen wir nun die Wahrscheinlichkeit, dass der zusammengesetzte Fehler überhaupt einen zwischen V und $V + dV$ gelegenen Betrag hat, so können V_1, V_2, \dots, V_n beliebig variiren, wenu nur die Gleichung stets erfüllt bleibt

$$V = \frac{\partial F}{\partial x_1} V_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} V_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} V_n.$$

Scheidet man wieder V_1 aus, so sind V_2, V_3, \dots, V_n ebenso wie ihre Incremente ganz willkürlich, aber man hat zugleich

$$V_1 = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} \left\{ V - \frac{\partial F}{\partial x_2} V_2 - \frac{\partial F}{\partial x_3} V_3 - \cdots - \frac{\partial F}{\partial x_n} V_n \right\}$$

und

$$dV_1 = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} d \left\{ V - \frac{\partial F}{\partial x_2} V_2 - \frac{\partial F}{\partial x_3} V_3 - \cdots - \frac{\partial F}{\partial x_n} V_n \right\}.$$

Es sollten nun die Elemente alle von einander ganz unabhängig gemessen werden, also ist

$$\frac{\partial V_2}{\partial V_1} = \frac{\partial V_3}{\partial V_1} = \cdots = \frac{\partial V_n}{\partial V_1} = 0$$

und darnach:

$$dV_1 = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} dV$$

zu setzen.

Der Sinn dieser Gleichung ist aber der, dass wenn der Fehler der zusammengesetzten Grösse zwischen den sonst beliebigen, aber von vornherein vorgeschriebenen Beträgen V und $V + dV$ liegen soll, und $n - 1$ Fehlern V_2, V_3, \dots, V_n sowie ihren Incrementen beliebige Beträge beigelegt worden sind, der Fehler V_1 jedesmal so bestimmt sein muss, dass

$$V_1 = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} \left\{ V - \frac{\partial F}{\partial x_2} V_2 - \frac{\partial F}{\partial x_3} V_3 - \dots - \frac{\partial F}{\partial x_n} V_n \right\}$$

und sein Increment

$$dV_1 = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} dV$$

wird. Hier liegen also die Verhältnisse so, dass V und V_2, V_3, \dots, V_n ebenso wie ihre Incremente ganz und gar unabhängig von einander und beliebig bestimmt werden, und dann, damit der Zusammenhang zwischen der zusammengesetzten Grösse und ihren Elementen gewahrt bleibt, V_1 und sein Increment geeignet berechnet wird. Lassen wir jetzt V und sein Increment dV einen und denselben Betrag behalten, dagegen die V_2, V_3, \dots, V_n alle möglichen Beträge zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen, so wird zwar nicht V_1 , aber dV_1 unveränderlich, nämlich immer gleich $\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} dV$ bleiben,

und wir bekommen als Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler der zusammengesetzten Grösse zwischen den vorgeschriebenen Beträgen V und $V + dV$ liegt,

$$\text{LXVI}_1) \varphi(V) dV = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} dV \int_{-\infty}^{+\infty} dV_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dV_3 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dV_n \varphi_2(V_2) \varphi_3(V_3) \dots \varphi_n(V_n) \\ \varphi_1 \left(\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} \left\{ V - \frac{\partial F}{\partial x_2} V_2 - \frac{\partial F}{\partial x_3} V_3 - \dots - \frac{\partial F}{\partial x_n} V_n \right\} \right)$$

und hieraus folgt für die Wahrscheinlichkeit, dass der betreffende Fehler gerade die Grösse V hat

$$\text{LXVI}_2) \varphi(V) = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} dV_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dV_3 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dV_n \varphi_2(V_2) \varphi_3(V_3) \dots \varphi_n(V_n) \\ \varphi_1 \left(\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} \left\{ V - \frac{\partial F}{\partial x_2} V_2 - \frac{\partial F}{\partial x_3} V_3 - \dots - \frac{\partial F}{\partial x_n} V_n \right\} \right).$$

Ersetzt man die φ durch ihre bestimmten Darstellungen, so wird LX₃)

$$\varphi(V) = \frac{w_1 w_2 \dots w_n}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} dV_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dV_3 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dV_n e^{-\pi \frac{n}{2} w_x^2 V_x^2 - \pi w_1^2 \left\{ V - \frac{\partial F}{\partial x_2} V_2 - \frac{\partial F}{\partial x_3} V_3 - \dots - \frac{\partial F}{\partial x_n} V_n \right\}^2} \left(\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} \right)^2.$$

57. Diese Gleichung für die Fehlerwahrscheinlichkeit gilt für Functionen, die von ihren Elementen linear abhängen, ganz streng; in allgemeineren Fällen mit um so grösserer Genauigkeit, je schärfer die Bestimmung der einzelnen Elemente ausgefallen ist.

Sie lehrt in jedem Falle die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Fehlers berechnen, wenn man die Präzisionsconstanten für die bezüglichen Bestimmungen der bezüglichen Elemente und die Coefficienten der linearen Abhängigkeit des zusammengesetzten Fehlers von den Fehlern der zusammensetzenden Messungen kennt. Doch hat man dabei $n - 1$ Integrationen auszuführen.

Wir betrachten erst specielle Fälle.

154. Die Präzisionsconstante eines zusammengesetzten Fehlers. Wenn der Fehler V nur von der Bestimmung eines Elements abhängt, so haben wir $n = 1$, die Integrationen fallen alle fort, und man bekommt

$$\varphi(V) = \frac{w_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} e^{-\pi w_1^2 V^2} \frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das a_1 fache einer durch Messungen, deren Schärfe durch die Präzisionsconstante w_1 charakterisirt ist, bestimmten Grösse mit einem zufälligen Fehler von dem Betrage V behaftet ist, wird also

$$\varphi(V) = \frac{w_1}{a_1} e^{-\pi w_1^2 \frac{V^2}{a_1^2}}.$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist aber ja nicht zu verwechseln mit der eines Fehlers einer aus a_1 einzeln für sich gemessenen Elementen, wenn diese auch einander gleich sind, zusammengesetzten Grösse.

Zweitens sei der Fehler V durch die Messungen zweier Elemente bestimmt, dann ist $n = 2$ und

$$\varphi(V) = \frac{w_1 w_2}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} dV_2 e^{-\pi w_2^2 V_2^2 - \pi w_1^2 \left(V - \frac{\partial F}{\partial x_2} V_2 \right)^2} \frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2}.$$

Ich setze

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = a_1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = a_2,$$

so dass

$$V = a_1 V_1 + a_2 V_2$$

wird. Der Exponent von φ geht dann über in

$$-\frac{\pi}{a_1^2} \{ V_2^2 (a_1^2 w_2^2 + a_2^2 w_1^2) - 2w_1^2 a_2 V V_2 + w_1^2 V^2 \},$$

oder, indem man

$$a_1^2 w_2^2 + a_2^2 w_1^2 = \lambda, \quad 2w_1^2 a_2 = \mu', \quad w_1^2 = \nu',$$

$$\frac{\mu'}{\lambda} = \mu, \quad \frac{\nu}{\lambda} = \nu$$

macht, in

$$-\frac{\pi}{a_1^2} \lambda (V_2^2 - \mu V_2 V + \nu V^2) = -\frac{\pi \lambda}{a_1^2} \left(\left(V_2 - \frac{\mu}{2} \right)^2 + \left(\nu - \frac{\mu^2}{4} \right) V^2 \right).$$

Die Integrationsvariable ist V_2 , ersetzt man sie durch $\xi = V_2 - \mu/2$, so ändern sich dadurch die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ nicht, und es bleibt

$$\begin{aligned} \varphi(V) &= \frac{w_1 w_2}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\frac{\pi \lambda}{a_1^2} \left(\xi^2 + \left(\nu - \frac{\mu^2}{4} \right) V^2 \right)} \\ &= \frac{w_1 w_2}{a_1} e^{-\frac{\pi \lambda}{a_1^2} \left(\nu - \frac{\mu^2}{4} \right) V^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi \lambda}{a_1^2} \xi^2} d\xi. \end{aligned}$$

Der Betrag des Integrals ist $a_1 \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, also

$$\varphi(V) = w_1 w_2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-\frac{\pi \lambda}{a_1^2} \left(\nu - \frac{\mu^2}{4} \right) V^2}.$$

Setzt man für ν und μ ihre Werte ein, so resultirt

$$\frac{\pi \lambda}{a_1^2} \left(\nu - \frac{\mu^2}{4} \right) = \frac{\pi}{\lambda a_1^2} \left(\nu' \lambda - \frac{\mu'^2}{4} \right) = \frac{\pi w_1^2 w_2^2}{(a_1^2 w_2^2 + a_2^2 w_1^2)},$$

und damit wird

$$\varphi(V) = \frac{w_1 w_2}{\sqrt{a_1^2 w_2^2 + a_2^2 w_1^2}} e^{-\pi \frac{w_1^2 w_2^2}{a_1^2 w_2^2 + a_2^2 w_1^2} V^2}.$$

In ganz entsprechender Weise findet man für die Wahrscheinlichkeitsfunction einer dreifach zusammengesetzten Grösse

$$\varphi(V) = \frac{w_1 w_2 w_3}{\sqrt{a_1^2 w_2^2 w_3^2 + a_2^2 w_3^2 w_1^2 + a_3^2 w_1^2 w_2^2}} e^{-\pi \frac{w_1^2 w_2^2 w_3^2}{a_1^2 w_2^2 w_3^2 + a_2^2 w_3^2 w_1^2 + a_3^2 w_1^2 w_2^2}} V^2$$

und so kann man durch Induction schliessen, dass allgemein, wenn

$$a_1^2 w_2^2 w_3^2 \dots w_n^2 + a_2^2 w_3^2 w_4^2 \dots w_n^2 w_1^2 + a_3^2 w_4^2 w_5^2 \dots w_n^2 w_2^2 w_1^2 + \dots = \lambda^2$$

gesetzt wird,

$$\varphi(V) = \frac{w_1 w_2 w_3 \dots w_n}{\lambda} e^{-\pi \frac{w_1^2 w_2^2 w_3^2 \dots w_n^2}{\lambda^2}} V^2$$

ist.

Ich dividire den Ausdruck für λ^2 mit $w_1^2 w_2^2 \dots w_n^2$ und schreibe für die Grösse

$$\frac{a_1^2}{w_1^2} + \frac{a_2^2}{w_2^2} + \frac{a_3^2}{w_3^2} + \dots + \frac{a_n^2}{w_n^2}$$

w_0 , dann ist

$$\varphi(V) = w_0 e^{-\pi w_0^2 V^2}.$$

Hieraus ersehen wir

58a. Die Präcisionsconstante einer Function F von n Elementen x_1, x_2, \dots, x_n , deren Präcisionsconstanten die bezüglichen Beträge haben

$$w_1, w_2, w_3, \dots, w_n,$$

ist

$$w_0 = \left(\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2}{w_1^2} + \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2}{w_2^2} + \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^2}{w_3^2} + \dots + \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2}{w_n^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

155. Präcision, charakteristischer Fehler und Gewicht zusammengesetzter Messungen. Durch die Präcisionsconstante sind aber alle charakteristischen Fehler bestimmt, und indem wir von den diesbezüglichen für einfache Messungen geltenden Formeln Gebrauch machen und mit ϵ die Einheit bezeichnen, in der die Fehler der zusammengesetzten Grösse gerechnet werden, finden wir

$$\text{Durchschnittlicher Fehler} = \frac{0,31831 \epsilon}{w_0},$$

$$\text{Mittlerer} \quad \quad \quad \text{„} = \frac{0,39895 \epsilon}{w_0},$$

$$\text{Wahrscheinlicher} \quad \quad \quad \text{„} = \frac{0,26909 \epsilon}{w_0}.$$

Nennen wir jetzt allgemein die wahren charakteristischen Fehler der Bestimmung des x ten Elementes der zusammengesetzten Grösse bezüglich

$$D_x, M_x, P_x,$$

so haben wir

$$w_x = \frac{0,31831\varepsilon}{D_x} = \frac{0,39895\varepsilon}{M_x} = \frac{0,26909\varepsilon}{P_x}$$

und nunmehr können wir den Satz aussprechen:

58b. Wenn eine Grösse F abhängig ist von n Elementen X_1, X_2, \dots, X_n durch das Functionsverhältnis

$$F = F(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

und nicht direct, sondern durch Vermittelung dieser Elemente gemessen wird, so ist die Präzisionsconstante w_0 einer für sie getroffenen Bestimmung, falls w_1, w_2, \dots, w_n die Präzisionsconstanten der für die Elemente ausgeführten Bestimmungen bedeuten,

$$\text{LXVII)} \quad w_0 = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 \frac{1}{w_1^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 \frac{1}{w_2^2} + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} \right)^2 \frac{1}{w_n^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Ihre charakteristischen Fehler D, M, P sind mit den entsprechenden charakteristischen Fehlern $D_1, M_1, P_1; D_2, M_2, P_2; \dots; D_n, M_n, P_n$ der gemessenen Elemente verbunden durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 D_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 D_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} \right)^2 D_n^2}, \\ \text{LXVIII)} \quad M &= \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 M_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 M_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} \right)^2 M_n^2}, \\ P &= \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 P_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 P_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} \right)^2 P_n^2}. \end{aligned}$$

Endlich ist das Gewicht p ihrer Bestimmung berechnet aus den mittlern Fehlern, bezüglich den Gewichten p_1, p_2, \dots, p^n ihrer Elemente

$$\text{LXIXa)} \quad p = \frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 M_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 M_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} \right)^2 M_n^2}$$

bezüglich

$$\text{LXIXb)} \quad p = \frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 \frac{1}{p_2} + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} \right)^2 \frac{1}{p_n}}$$

156. Gültigkeitsbereich des voraufgehenden Satzes. Der Satz ist zwar nur für die wahren bezüglichen Grössen abgeleitet, er gilt aber mit den in den Art. 93 ff. hervorgehobenen Einschränkungen auch für die wahrscheinlichsten Beträge dieser Grössen, falls man unter den w_x, D_x, M_x, P_x, p_x die angenäherten, aus den bezüglichen Bestimmungen der bezüglichen Elemente nach den Anleitungen des Art. 98 zu berechnenden Beträge der betreffenden Grössen für die Elemente versteht.

Nach den früheren Bezeichnungen hätte man, um für die zusammengesetzte Messung ω, δ, μ, r , zu bekommen, w_x, D_x, M_x, P_x zu ersetzen durch $\omega_x, \delta_x, \mu_x, r_x$.

Ferner ist der obige Satz ganz streng richtig, wenn das Abhängigkeitsverhältnis zwischen der zusammengesetzten Grösse und den zusammensetzenden Elementen ein lineares ist. Ist die Function F nicht linear, so gilt der Satz mit um so grösserer Annäherung, je schärfer die Bestimmungen der einzelnen Elemente ausgefallen sind.

Endlich muss hervorgehoben werden, dass er nicht mehr angewandt werden darf, sowie die Bestimmung eines Elementes von der eines der andern abhängt. Es ist durchaus nötig, dass die Grössen, um die es sich handelt, von einander unabhängig gewonnen sind, wie man am besten einsieht, wenn man sich die Art, wie die Wahrscheinlichkeitsfunction für zusammengesetzte Grössen bestimmt ist, ins Gedächtnis zurückeruft. Ich komme darauf bald zurück.

157. Strengerer Beweis für den Fall des mittlern Fehlers. Es könnte noch ein Zweifel an der Richtigkeit dieses Satzes bestehen, weil wir zu der allgemeinen Formel für $\varphi(V)$ nur durch einen Inductionsschluss gelangt sind, ich will ihn daher für einen Fall, für den des mittlern Fehlers, allgemein beweisen. Ausser durch die Präcisionsconstante ist nämlich der mittlere Fehler nach Art. 65 auch noch dadurch defnirt, dass sein Quadrat gleich dem mittlern Fehlerquadrat sein soll. Wie bei einfachen Messungen, setzen wir daher auch

$$M^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} V^2 \varphi(V) dV,$$

führt man für $\varphi(V)$ seine allgemeine Formel ein, so wird

$$M^2 = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} V^2 dV \int_{-\infty}^{+\infty} dV_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dV_3 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dV_n \varphi_2(V_2) \varphi_3(V_3) \cdots \varphi_n(V_n) \varphi_1 \left(\left[V - \frac{\partial F}{\partial x_2} V_2 - \frac{\partial F}{\partial x_3} V_3 - \cdots - \frac{\partial F}{\partial x_n} V_n \right] \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} \right).$$

Integriren wir zuerst über V , so haben wir V_2, V_3, \dots, V_n als unveränderlich anzusehen. Setzt man daher an Stelle von V das Argument von φ_1 als Integrationsvariable, indem man dieses Argument mit V_1 bezeichnet, so wird

$$V = \frac{\partial F}{\partial x_1} V_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} V_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} V_n,$$

$$dV = \frac{\partial F}{\partial x_1} dV_1,$$

somit

$$M^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dV_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dV_n \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} V_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} V_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} V_n \right)^2 \varphi_1(V_1) \dots \varphi_n(V_n).$$

Führen wir für den Klammerausdruck die angedeutete Quadrigung aus, so kommen ausser den Quadraten von V_1, V_2, \dots, V_n noch die Producte dieser Grössen vor, da aber die φ alle gerade Functionen der bezüglichen V sind, so hat man allgemein

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V_x \varphi(V_x) dV_x = 0,$$

somit verschwinden die Integrale, welche Producte der V enthalten, aus dem Ausdruck für M^2 , es bleibt

$$M^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dV_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dV_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dV_n \sum_1^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_x} \right)^2 V_x^2 \varphi_1(V_1) \varphi_2(V_2) \dots \varphi_n(V_n)$$

oder, wie wir auch schreiben können,

$$M^2 = \sum_1^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_x} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dV_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dV_{x-1} \int_{-\infty}^{+\infty} V_x^2 dV_x \int_{-\infty}^{+\infty} dV_{x+1} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dV_n \varphi_1(V_1) \dots \varphi_n(V_n).$$

Alle V sind von einander unabhängig, alle Integrationsgrenzen sind ganz bestimmt, die n -fachen Integrale sind also nichts anderes, als Producte von n einfachen Integralen, daher das allgemeine Glied auch gleich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(V_1) dV_1 \cdot \dots \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{x-1}(V_{x-1}) dV_{x-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} V_x^2 \varphi_x(V_x) dV_x \cdot \dots \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{x+1}(V_{x+1}) dV_{x+1} \cdot \dots \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(V_n) dV_n,$$

und da zufolge der Bedeutung, die dem Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(V_i) dV_i$$

beizulegen ist, da es die Wahrscheinlichkeit angiebt, dass ein Fehler des i ten Elements überhaupt irgend eine Grösse hat — eine Wahrscheinlichkeit, die mit der Sicherheit übereinkommt — ein solches Integral den Wert 1 hat, so sind alle Integrale bis auf das, welches V_x^2 neben $\varphi_x(V_x)$ enthält, gleich 1 zu setzen, somit wird

$$M^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} V_1^2 \varphi_1(V_1) dV_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} V_2^2 \varphi_2(V_2) dV_2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} V_n^2 \varphi_n(V_n) dV_n.$$

aber die hier noch vertretenen Integrale geben die Quadrate der mittlern Fehler der einzelnen Elemente; es kommt also, wie wir früher gefunden haben,

$$M^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 M_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 M_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2 M_n^2.$$

Aus dem mittlern Fehler lässt sich die Präzisionsconstante w_0 , aus dieser wieder der durchschnittliche und wahrscheinliche Fehler, und nicht minder das Gewicht ableiten. Durch den Beweis, dass der bezeichnete Satz für den mittlern Fehler richtig ist, ist der ganze Satz allgemein bewiesen.

158. Specielle Anwendungen. Ich mache einige specielle Anwendungen unseres Satzes, beziehe mich aber der Einfachheit wegen allein auf den mittlern Fehler und das Gewicht.

1. Sei

$$F = a_1 x,$$

wo a_1 eine gegebene Zahl ist, x gemessen wird. Ist M_1 der mittlere Fehler von x , so haben wir für den mittlern Fehler von F

$$M = a_1 M_1,$$

und für das Gewicht von F

$$p = \frac{1}{a_1^2 M_1^2} = \frac{1}{a_1^2} p_1,$$

also zum Beispiel für $a_1 = 2$

$$M = 2 M_1,$$

$$p = \frac{1}{4} p_1.$$

59. *Der mittlere Fehler des n fachen einer gemessenen Grösse ist gleich dem n fachen des mittlern Fehlers der gemessenen Grösse; das gleiche gilt von*

den andern charakteristischen Fehlern. Das Gewicht ist nur das $1/n^2$ fache des Gewichts der gemessenen Grösse.

2. Sei

$$F' = a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

wo a_1 und a_2 bestimmte gegebene Zahlen, x_1 und x_2 von einander unabhängig gemessene Grössen bedeuten.

Man hat

$$\frac{\partial F'}{\partial x_1} = a_1, \quad \frac{\partial F'}{\partial x_2} = a_2$$

und

$$M = \sqrt{a_1^2 M_1^2 + a_2^2 M_2^2},$$

$$p = \frac{1}{a_1^2 M_1^2 + a_2^2 M_2^2} = \frac{p_1 p_2}{a_1^2 p_2 + a_2^2 p_1}$$

Ist specieller $a_1 = a_2 = 1$, so wird

$$F' = x_1 + x_2,$$

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}, \quad p = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}.$$

Allgemein hat man für

$$F' = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n,$$

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + \cdots + M_n^2},$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \cdots + \frac{1}{p_n}.$$

Hier wird eine Grösse aus n einzelnen Grössen durch einfache Addition zusammengesetzt, und man sieht, dass der resultirende mittlere Fehler aus den componirenden mittlern Fehlern genau so berechnet wird, wie im Raume die resultirende Kraft aus den componirenden Kräften.

159. Principieller Unterschied zwischen einer mehrfach genommenen Messung und einer mehrfach zusammengesetzten Messung. Fortsetzung der Beispiele. Es ist interessant, diesen Fall, dass eine Grösse aus n einzeln für sich gemessenen Grössen zusammengesetzt wird, mit dem zu vergleichen, wo eine Grösse das n fache einer gemessenen Grösse bildet. Um den so wesentlichen Unterschied zwischen den beiden Fällen zu markiren, nehmen wir an, dass die Elemente der zusammengesetzten Grösse alle mit gleicher Schärfe gemessen sind, dann haben wir

$$M_1 = M_2 = \cdots = M_n$$

und können schreiben

für die n fach zusammengesetzte Grösse

$$M = M_1 \sqrt{n}, \quad p = \frac{p_1}{n},$$

für die n fach genommene Grösse

$$M = M_1 n, \quad p = \frac{p_1}{n^2}.$$

Dort verhält sich der mittlere Fehler der gesuchten Grösse zu dem eines gemessenen Elements wie \sqrt{n} zu 1, hier wie n zu 1; dort ist das Gewicht der gesuchten Grösse $1/n$ tel vom Gewicht eines gemessenen Elements, hier $1/n^2$ tel.

Man habe z. B. 9 Drähte von gleicher Länge und gleicher Dicke und gleichem Material, aber unbekanntem elektrischen Widerstand. Wir bestimmen den Widerstand W_1 nur eines der Drähte, und zwar so genau, dass der mittlere Fehler $0,001 W_1$ beträgt. Schalten wir die 9 Drähte hinter einander in den Kreis eines Stromes, so ist ihr Gesamtwiderstand $9 W_1$ und der mittlere Fehler desselben $0,009 W_1$. Schalten wir sie neben einander, so ist ihr Gesamtwiderstand $\frac{W_1}{9}$ und der mittlere Fehler desselben $\frac{0,001 W_1}{9}$.

Nun denken wir uns, dass der Widerstand jedes der Drähte für sich bestimmt ist, und zwar so, dass der mittlere Fehler für jede Bestimmung $0,001 \bar{W}$ wird, wo \bar{W} der durchschnittliche Widerstand der Drähte ist, und sich naturgemäss von W_1 sehr wenig unterscheidet. Schalten wir die Drähte wieder hinter einander, so ist ihr Gesamtwiderstand

$$W = W_1 + W_2 + \dots + W_9 = 9 \bar{W},$$

der mittlere Fehler also, weil hier $F = W$, $x_1 = W_1$, $x_2 = W_2$, ..., $x_9 = W_9$, also

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 1$$

ist,

$$M = 0,001 \cdot \sqrt{9 \bar{W}} = 0,003 \bar{W},$$

während er früher, als wir nur für einen Draht den Widerstand bestimmten, 3mal so gross war. Schalten wir die Drähte neben einander, so ist ihr Gesamtwiderstand bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{1}{W} = \frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} + \dots + \frac{1}{W_9}$$

oder

$$W = \frac{1}{\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} + \dots + \frac{1}{W_9}}.$$

W ist das, was wir früher mit F bezeichnet haben, W_1, W_2, \dots, W_9 sind die Elemente x_1, x_2, \dots, x_9 , daher

$$\frac{\partial F}{\partial x_x} = -W^2 \frac{\partial \frac{1}{W_x}}{\partial W_x} = W^2 \frac{1}{W_x^2}, \quad x = 1, 2, 3, \dots, 9,$$

somit der mittlere Fehler von W

$$\begin{aligned} M &= W^2 \sqrt{\frac{1}{W_1^4} (0,001 \bar{W})^2 + \frac{1}{W_2^4} (0,001 \bar{W})^2 + \dots + \frac{1}{W_9^4} (0,001 \bar{W})^2} \\ &= 0,001 \bar{W} W^2 \sqrt{\frac{1}{W_1^4} + \frac{1}{W_2^4} + \dots + \frac{1}{W_9^4}}. \end{aligned}$$

Zufolge der Annahmen, die wir über die Drähte gemacht haben, sollen ihre Widerstände gleich sein, ersetzen wir diese Widerstände durch ihren durchschnittlichen Betrag \bar{W} , so wird noch nahezu $W = \frac{\bar{W}}{9}$ und

$$M = \frac{0,001 \bar{W}^3}{9 \cdot 9} \sqrt{\frac{9}{\bar{W}^4}} = \frac{0,001 \bar{W}}{3 \cdot 9},$$

also auch bei Nebenschaltung ist der mittlere Fehler des gesuchten Widerstandes, wenn man die 9 Widerstände alle einzeln bestimmt, nur $\frac{1}{3}$ von dem, wenn man nur einen der 9 Widerstände direct misst.

Ich schlage dem Leser vor, dieses instructive Beispiel noch weiter zu verfolgen, indem er von 9 Drähten einige hinter einander, den Rest neben einander sich verbunden denkt, indem er überhaupt aus den neun Drähten irgend ein Netzwerk bildet, den Widerstand desselben zwischen zwei Punkten nach bekannten Regeln auswertet und den mittlern Fehler des gesuchten Widerstandes berechnet, je nachdem der Widerstand nur eines Drahtes oder mehrerer (z. B. aller) bestimmt ist.

3. Als drittes Beispiel nehme ich den Fall, der uns schon im achten Capitel beschäftigt hat, wo der Capillaritätscoefficient a^2 einer Flüssigkeit durch ihre Steighöhe h in einer Röhre vom Radius r bestimmt ist. Wir haben hier

$$a^2 = rh + \frac{r^2}{3},$$

also

$$F = a^2, \quad x_1 = r, \quad x_2 = h,$$

damit wird

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = h + \frac{2}{3} r, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = r$$

und wenn der mittlere Fehler der Messung von h gleich M_h , der der Messung von r gleich M_r ist, und mit M_{a^2} der mittlere Fehler von a^2 bezeichnet wird,

$$M_{a^2} = \sqrt{\left(h + \frac{2}{3}r\right)^2 M_r^2 + r^2 M_h^2}.$$

Vorausgesetzt, dass die Unsicherheiten eben nur in den Messungen von h und r begründet sind, was, wie an geeignetem Ort bemerkt, nicht zutrifft. Diese Beispiele mögen vorläufig genügen, andere werden wir bald kennen zu lernen Gelegenheit haben.

X. Bedingte zusammengesetzte Messungen.

a) *Ableitung der wahrscheinlichsten Resultate.*

Der Fall, wo eine Grösse aus Elementen zusammengesetzt ist, die nicht unabhängig von einander sind, soll nur insoweit behandelt werden, als er für physikalische Maassbestimmungen und für die im folgenden Abschnitt auszuführende Theorie der Ausgleichung von Untersuchungen Bedeutung hat.

Doch werde ich, weil gerade die Existenz von Bedingungsgleichungen bei Anwendungen der Ausgleichungsrechnung so leicht ausser Acht gelassen wird, mit grosser Sorgfalt zu Werke gehen und nirgends das Principielle hervorzuheben und durch Beispiele zu illustriren versäumen.

160. Art der Abhängigkeit der Elemente von einander. Wenn Elemente von einander abhängig sind, so kann das entweder dadurch geschehen, dass zwischen ihnen selbst gewisse Gleichungen bestehen, oder dadurch, dass sie mit einer Reihe anderer Elemente durch Gleichungen verbunden sind.

Existiren zwischen den Elementen selbst gewisse Bedingungsgleichungen, so müssen diese jedenfalls ganz streng erfüllt werden, und dann handelt es sich nicht allein um Ableitung der aus ihnen zusammengesetzten Grösse, sondern um diese Ableitung unter der Voraussetzung, dass die beobachteten Beträge der Elemente den zwischen ihnen vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen angepasst werden.

161. Methode der Elimination überschüssiger Elemente. Hier kann man sich nun so helfen, dass man erst aus der zusammengesetzten Grösse so viele Elemente eliminirt, als man es durch die gegebenen Bedingungsgleichungen ermöglichen kann, es bleiben dann nur noch von einander unabhängige Elemente übrig, und diese allein werden beobachtet.

Ist zum Beispiel die Anzahl der Elemente, zwischen denen Bedingungsgleichungen existiren, gleich g , die Anzahl der Bedingungsgleichungen h , so kann man durch Auflösung dieser Gleichungen h dieser Elemente durch

die $g - h$ übrigen ausdrücken, setzt man ihre so erhaltenen Beträge in die gesuchte Function F ein, so geht diese in eine neue Function Φ — die aber immer noch dieselbe zusammengesetzte Grösse darstellt — über, die nur $n - h$ Elemente enthält, zwischen denen aber keine Bedingungen mehr zu erfüllen sind. Auf diese übrig gebliebenen Elemente erstrecken sich die Beobachtungen und man hat die Bedingungsgleichungen nicht weiter zu beachten. Nachdem man die $n - h$ Elemente gemessen, sind ihre erhaltenen Werte in die Function Φ einzusetzen, wodurch die zusammengesetzte Grösse bestimmt ist. Die charakteristischen Fehler und die Präcision der zusammengesetzten Grösse werden dann nach den gegebenen Regeln an der Function Φ bestimmt.

Dieses Verfahren kann immer angewendet werden, wenn die Elimination der überschüssigen Elemente sich ausführen lässt. Im allgemeinen ist aber die Auflösung von Gleichungen nicht durchführbar, und dann bleibt nichts übrig, als alle Elemente selbstständig zu beobachten und dann durch Verbesserungen, die man zu den Elementen hinzufügt, welche in den Bedingungsgleichungen vertreten sind, diesen Gleichungen nachträglich gerecht zu werden.

Ja, selbst in dem Falle, wo man die Elimination auszuführen vermag, wird man doch lieber alle Elemente beobachten, denn einerseits gewinnt dadurch die Bestimmung der zusammengesetzten Grösse an Sicherheit, und andererseits gestattet die Substitution in die Bedingungsgleichungen eine gewisse Uebersicht über die erlangte Genauigkeit, die man sonst entbehren würde.

162. Welche Beträge bedingter Elemente als die wahrscheinlichsten zu erachten sind. Wir wollen daher annehmen, man habe die überschüssigen Elemente nicht eliminirt, sondern alle Elemente mit ausreichender Genauigkeit gemessen und für sie, deren wahre Beträge X_1, X_2, \dots, X_n sein mögen, die Beträge x_1, x_2, \dots, x_n gefunden. Die Bedingungsgleichungen finden naturgemäss zwischen den wahren Beträgen der betreffenden Elemente statt, sind die ihnen unterworfenen Elemente etwa X_1, X_2, \dots, X_g , so wird man also haben

$$\begin{aligned} f_1(X_1, X_2, \dots, X_g) &= 0, \\ f_2(X_1, X_2, \dots, X_g) &= 0, \\ \vdots & \qquad \qquad \qquad \vdots \\ f_h(X_1, X_2, \dots, X_g) &= 0, \end{aligned}$$

und da die entsprechenden beobachteten Beträge im allgemeinen von den wahren abweichen werden, werden für sie die Bedingungsgleichungen auch nicht erfüllt sein. Nun ist der wahrscheinlichste Wert der aus den Elementen x zusammengesetzten Grösse derjenige, der durch die Zusammensetzung der wahrscheinlichsten Werte der Elemente selbst gebildet wird, und da diese nicht als „wahrscheinlichst“ bezeichnet werden können, wenn

sie nicht den Bedingungsgleichungen genau gerecht werden, so ist also auch nicht mehr derjenige Wert von F der wahrscheinlichste, den man erhält, wenn man in seinen Ausdruck die beobachteten Elemente geradezu einträgt.

163. Einführung der Verbesserungen. Es sei allgemein ΔX_x der wahre Fehler, mit dem das Beobachtungsergebnis der Grösse x_x noch behaftet ist, dann wird die zusammengesetzte Grösse

$$F = F(x_1 + \Delta X_1, x_2 + \Delta X_2, \dots, x_n + \Delta X_n)$$

und die Bedingungsgleichungen bekommen die Form

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(x_1 + \Delta X_1, x_2 + \Delta X_2, \dots, x_g + \Delta X_g), \\ 0 &= f_2(x_1 + \Delta X_1, x_2 + \Delta X_2, \dots, x_g + \Delta X_g), \\ &\vdots \\ 0 &= f_h(x_1 + \Delta X_1, x_2 + \Delta X_2, \dots, x_g + \Delta X_g). \end{aligned}$$

Sind nun die Elemente genau genug bestimmt, dann dürfen wir bei einer Entwicklung der einzelnen Functionen nach den Fehlern höhere Potenzen dieser als die erste fortlassen, in zweiter Näherung ist dann die Reihe der Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_g) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Delta X_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Delta X_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_g} \Delta X_g, \\ 0 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_g) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Delta X_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Delta X_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_g} \Delta X_g, \\ &\vdots \\ 0 &= f_h(x_1, x_2, \dots, x_g) + \frac{\partial f_h}{\partial x_1} \Delta X_1 + \frac{\partial f_h}{\partial x_2} \Delta X_2 + \dots + \frac{\partial f_h}{\partial x_g} \Delta X_g. \end{aligned}$$

Hier sind die x_1, x_2, \dots, x_g durch die Messungen gegebene Grössen und da die Functionen f auch vorgeschrieben sein sollten, so hat man h lineare Gleichungen mit bekannten Factoren und g unbekanntem Grössen ΔX .

Ist $h = g$, so sind durch obige Gleichungen alle ΔX bestimmt, nachdem man letztere aus denselben ausgerechnet hat, muss man die bezüglichen Elemente x_1, x_2, \dots, x_g um sie vergrössern und in der so veränderten Form in die Gleichung für die zusammengesetzte Grösse einsetzen.

Hier ist also

$$F = F(x_1 + \Delta X_1, x_2 + \Delta X_2, \dots, x_g + \Delta X_g, x_{g+1}, x_{g+2}, \dots, x_n),$$

und in jedem Falle berechenbar. Doch ist es durchaus nicht nötig, dass die so bestimmten ΔX auch die wahren Fehler der betreffenden Elemente darstellen.

Der Fall $g < h$ hat keine Bedeutung, denn dann sind mehr Bedingungsgleichungen als Grössen vorhanden, und sie können im allgemeinen nicht streng erfüllt werden.

Ist $g > h$, so lassen sich h der unbekanntenen ΔX , etwa die $\Delta X_1, \Delta X_2, \dots, \Delta X_h$ durch die $g - h$ andern, durch $\Delta X_{h+1}, \Delta X_{h+2}, \dots, \Delta X_g$ mit Hilfe der obigen Gleichungen ausdrücken; allein, da die wahren Beträge dieser letztern doch nicht bekannt sind, hilft eine solche Procedur nichts. Man könnte zwar diesen $g - h$ Fehlern beliebige Beträge beilegen, dann die h andern berechnen und nun wieder die x_1, x_2, \dots, x_g corrigiren, indessen wäre dadurch der Willkür Thür und Tor geöffnet, und man wüsste doch nicht, welche Sicherheit man dem so erhaltenen Betrage für F zuschreiben darf.

164. Die Verbesserungen werden der Bedingung unterworfen, dass sie die grösste Wahrscheinlichkeit für sich haben. Bezeichnen wir nun die Verbesserungen, die wir an die von einander abhängigen Elemente x_1, x_2, \dots, x_g anzubringen haben, mit v_1, v_2, \dots, v_g , so genügen diese also h Gleichungen, und den Rest von Willkür, der ihren Beträgen noch deshalb innewohnt, weil $g - h$ von ihnen beliebig gewählt werden dürfen, können wir dazu verwenden, sie im Ganzen so zu gestalten, dass dem dann für die zusammengesetzte Funktion resultirenden Betrag so viel Wahrscheinlichkeit innewohnt, als die Umstände es zulassen. Ist nun $\varphi(v_x)$ die Wahrscheinlichkeit der Verbesserung v_x , so wird die Wahrscheinlichkeit, dass die nötigen Verbesserungen keine andern, als gerade die Beträge v_1, v_2, \dots, v_g haben,

$$W = \varphi_1(v_1) \varphi_2(v_2) \cdots \varphi_g(v_g)$$

und da diese Beträge insofern als zufällig zu bezeichnen sind, als die Fehler der Elemente zufällig sein sollten, mithin auch ihren Verbesserungen zufällig sein müssen, so können wir

$$\varphi_x(v_x) = \omega_x e^{-\pi \omega_x^2 v_x^2}$$

setzen und dann wird

$$W = \omega e^{-\pi(\omega_1^2 v_1^2 + \omega_2^2 v_2^2 + \cdots + \omega_g^2 v_g^2)}$$

Die wahrscheinlichsten Verbesserungen sind nun offenbar diejenigen, für welche W ein Maximum, somit $\omega_1^2 v_1^2 + \omega_2^2 v_2^2 + \cdots + \omega_g^2 v_g^2$ ein Minimum ist. Indem wir also die Elemente x_1, x_2, \dots, x_g um die Grössen v_1, v_2, \dots, v_g corrigiren und die zusammengesetzte Grösse

$$F = F(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_g + v_g, x_{g+1}, \dots, x_n)$$

setzen, bekommen wir für letztere den den Umständen nach wahrscheinlichsten Betrag, wenn wir die v so wählen, dass einerseits die Grössen $x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_g + v_g$ die h Bedingungsgleichungen erfüllen und andererseits die Summe

$$\omega_1^2 v_1^2 + \omega_2^2 v_2^2 + \cdots + \omega_g^2 v_g^2$$

ein Minimum wird. Die ω sind die Präcisionen der v .

Wir können die Aufgabe, um die es sich hier handelt, noch von einem andern Gesichtspunkt betrachten.

Es ist klar, dass die Bedingungsgleichungen, welchen ein Teil der Elemente unterworfen ist, nicht abhängen von der Art, wie wir die Elemente zu der gesuchten Grösse zusammensetzen sollen, sie bleiben bestehen, wenn es sich auch um eine andere Function der Elemente handelt als die gerade angenommene. Das wesentliche ist also, dass eine Reihe von Grössen x_1, x_2, \dots, x_g beobachtet sind, die gewissen Bedingungen zu gehorchen haben. Sehen wir also von dem Zweck, zu dem diese Grössen beobachtet sind, ab, so können wir sagen:

Es sind g Grössen x_1, x_2, \dots, x_g unabhängig von einander beobachtet worden, es sollen zu denselben Correctionen v_1, v_2, \dots, v_g hinzugefügt werden, die es erstens bewirken, dass gewisse Bedingungsgleichungen, die zwischen den x bestehen, von den corrigirten Beobachtungswerten erfüllt werden, und zweitens, dass diese corrigirten Beobachtungswerte so wahrscheinlich, als es die Umstände gestatten, werden.

Hieraus ist klar, dass die als Präcisionen der Verbesserungen bezeichneten Grössen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g$ nichts anderes sind als die Präcisionen der Beobachtungswerte der x_1, x_2, \dots, x_g .

165. Maximum oder Minimum unter Nebenbedingungen. Die Aufgabe eine Grösse zu einem Minimum oder Maximum unter Erfüllung gewisser Nebenbedingungen zu machen, ist in der Analysis wol bekannt. Ihre Auflösung findet sie im folgenden Satz, den wir noch öfter werden anzuwenden haben.

60. Um eine Function Φ von n Variabeln $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ zu einem Minimum oder Maximum zu machen, während g von ihren Variabeln, nämlich die $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_g$ gezwungen sind h Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}\varphi_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_g) &= 0, \\ \varphi_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_g) &= 0, \\ \vdots & \\ \varphi_h(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_g) &= 0\end{aligned}$$

streng zu erfüllen, multiplicirt man diese Bedingungsgleichungen mit Factoren x_1, x_2, \dots, x_h , addirt sie dann zu der Function und bringt von dem so erhaltenen Ausdruck

$$\Omega = \Phi + x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2 + \dots + x_h \varphi_h,$$

die ersten Differentialquotienten nach den einzelnen Variabeln zum Verschwinden, macht also allgemein

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} + x_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_i} + x_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_i} + \dots + x_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, g.$$

Das giebt so viele Gleichungen als Unbekannte $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_g$ zu berechnen sind; in diesen Gleichungen sind zwar noch die h Factoren x_1, x_2, \dots, x_h enthalten, da aber ausserdem noch die h Bedingungsgleichungen zu erfüllen sind, so hat man im Ganzen $g + h$ Gleichungen, die zusammen sowohl die g Variablen wie die h Factoren x zu berechnen gestatten.

In der Ausgleichsrechnung bezeichnet man die Hilfsfactoren x als *Correlaten*.

166. Aufstellung der Gleichungen für die Verbesserungen und Correlaten. In unserm Falle sind die ξ zu ersetzen durch die v , ferner ist

$$\Phi = \omega_1^2 v_1^2 + \omega_2^2 v_2^2 + \dots + \omega_g^2 v_g^2,$$

und die Bedingungsgleichungen $\varphi = 0$ gehen über in

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_g) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} v_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_g} v_g &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_g) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} v_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_g} v_g &= 0, \\ \vdots & \\ f_h(x_1, x_2, \dots, x_g) + \frac{\partial f_h}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f_h}{\partial x_2} v_2 + \dots + \frac{\partial f_h}{\partial x_g} v_g &= 0. \end{aligned}$$

Die Variablen sind hier allein die v .

Nun ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} = 2 \omega_i^2 v_i; \quad i = 1, 2, 3, \dots, g,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_i} = \frac{\partial f_1}{\partial v_i}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_i} = \frac{\partial f_2}{\partial v_i}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_i} = \frac{\partial f_h}{\partial v_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, g.$$

Daher haben wir

$$2 \omega_i^2 v_i + x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + x_h \frac{\partial f_h}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, g.$$

Hierin ist aber nach Art. 65

$$\omega_i^2 = \left(\frac{0,39895}{\mu_i} \right)^2,$$

und indem wir uns die Correlaten x alle mit $\frac{2}{(0,39895)^2}$ multiplicirt denken, gewinnt unsere Aufgabe die bestimmte Form, dass die v_1, v_2, \dots, v_g , sowie die x_1, x_2, \dots, x_h zu berechnen sind aus den $h + g$ Gleichungen

b) Fehlerrechnung.

168. Die beobachteten und ausgeglichenen mittlern Fehler der Elemente. Wir haben nun zuzusehen, wie viel durch die Ausgleichung der g Elemente vermittelt der Bedingungsgleichungen gewonnen ist. Was zunächst die Elemente selbst betrifft, so ergibt die Beobachtung jedes derselben, wenn sie mehrfach wiederholt wird, einen bestimmten, nach den Vorschriften des Art. 97 zu berechnenden mittlern Fehler, der naturgemäss auch fehlerhaft sein kann. Wir nennen diesen Fehler den beobachteten mittlern Fehler der betreffenden Grösse und bezeichnen ihn wie bisher mit μ_i , wenn er dem Element x_i zugehört. Indem wir aber die g Elemente nach den angegebenen Principien ausgleichen, finden wir für sie gewisse Verbesserungen, die wir auch geradezu als ihre Fehler bezeichnen können, denn nur dadurch, dass wir ihnen diese Verbesserungen hinz. fügen, bringen wir sie dazu, wahre Gleichungen widerspruchsfrei zu erfüllen. Diese Fehler also führen zu neuen mittlern Fehlern für die Elemente, zu ausgeglichenen mittlern Fehlern, die, weil sie eben ausgeglichen sind, der Wahrheit näher kommen werden als die beobachteten, und folglich zur Kritik der Beobachtungen allein heranzuziehen sind. Hiernach dienen die beobachteten mittlern Fehler nur noch zur Feststellung der relativen Gewichte der betreffenden Grössen. Ich bezeichne nun die ausgeglichenen mittlern Fehler der g Elemente x_1, x_2, \dots, x_g mit $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \dots, \bar{\mu}_g$; den ausgeglichenen Fehler eines Elements, dem das Gewicht 1 zuzuschreiben sein würde, mit $\bar{\mu}$, dann ist nach Satz 38, indem wir die relativen Gewichte der bedingten Elemente p_1, p_2, \dots, p_g nennen,

$$\bar{\mu}_1 = \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{p_1}}, \quad \bar{\mu}_2 = \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{p_2}}, \quad \dots \quad \bar{\mu}_g = \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{p_g}},$$

oder, weil nach Satz 37

$$p_1 = \frac{1}{\mu_1^2}, \quad p_2 = \frac{1}{\mu_2^2}, \quad \dots, \quad p_g = \frac{1}{\mu_g^2}$$

ist,

$$\bar{\mu}_i = \mu_1 \bar{\mu}, \quad \bar{\mu}_2 = \mu_2 \bar{\mu}, \quad \dots \quad \bar{\mu}_g = \mu_g \bar{\mu}.$$

$\bar{\mu}^2$ ist aber proportional dem mittlern Betrag von pv^2 , und da wir g solche Grössen pv^2 haben, und, weil die v aus $g + h$ Gleichungen berechnet werden, nur h dieser Gleichungen überschüssig sind, ist nach Satz 44

$$\bar{\mu}^2 = \frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_g v_g^2}{h}$$

oder

$$\bar{\mu}^2 = \frac{1}{h} \left(\frac{v_1^2}{\mu_1^2} + \frac{v_2^2}{\mu_2^2} + \dots + \frac{v_g^2}{\mu_g^2} \right).$$

169. Mittlerer Fehler der zusammengesetzten Grösse. Vorbereitende Schritte. Ebenso einfach erledigt sich im Princip, wenn auch nicht in der Berechnung, die Frage nach dem mittlern Fehler der aus den Elementen zusammengesetzten Grösse. Da nämlich die Elemente x , wenn sie auch nicht alle von einander unabhängig sind, doch unabhängig von einander gemessen werden, so würde, wenn man sich um die Bedingungsgleichungen nicht kümmerte und an die Elemente x_1, x_2, \dots, x_g die Verbesserungen v nicht anbrächte, nach Satz 58b

$$\mu^2 = \left(\frac{\partial F'}{\partial x_1}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial x_2}\right)^2 \mu_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial F'}{\partial x_n}\right)^2 \mu_n^2$$

sein, wo

$$F' = F'(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Indem man aber die Verbesserungen v einführt, die ihrerseits in ihren Beträgen von den beobachteten Elementen x_1, x_2, \dots, x_g bestimmt werden und jedenfalls ihre Beträge ändern, wenn die Beobachtungen anders ausfallen, so ist bei der Ableitung von μ auch auf die Unsicherheit der v Rücksicht zu nehmen. Nun sind die v aus den angegebenen Gleichungen zu berechnen, und sie erscheinen als Functionen von x_1, x_2, \dots, x_g , derartig, dass etwa

$$v_1 = \alpha_1(x_1, x_2, \dots, x_g), v_2 = \alpha_2(x_1, x_2, \dots, x_g), \dots$$

wird. Führt man daher diese ihre Ausdrücke in den verbesserten Wert

$$\bar{F} = F(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_g + v_g, x_{g+1}, \dots, x_n)$$

der zusammengesetzten Grösse ein, so geht derselbe in eine neue Form

$$F = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

über, die zwar wiederum den verbesserten Betrag F ergibt, aber keine Spur der Verbesserungen mehr enthält, also, da die x alle unabhängig von einander gemessen sind, genau so behandelt werden kann, wie wenn die Bedingungsgleichungen gar nicht existirten.

Also:

61. *Um die charakteristischen Fehler und die Präcision der zusammengesetzten Grösse kennen zu lernen, hat man in der Darstellung derselben, in*

$$\bar{F} = F(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_g + v_g, x_{g+1}, \dots, x_n)$$

die v durch ihre Ausdrücke als Functionen der x_1, x_2, \dots, x_g zu ersetzen. Geht dann F über in

$$F = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

so sind die charakteristischen Fehler von F und die Präcision genau so zu berechnen, wie wenn man sie für Φ aufsuchte. Für letztere Function tritt aber der Satz 58 in Kraft.

Damit wird z. B. die Gleichung für den mittlern Fehler

$$\mu^2 = \bar{\mu}^2 \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 \mu_1^2 + \cdots + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_g} \right)^2 \mu_g^2 \right\} + \cdots + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \right)^2 \mu_n^2.$$

Noch kürzer können wir sagen:

61₂. Man berechnet für die verbesserte Function \bar{F} die charakteristischen Fehler genau so wie für die unverbesserte, nur hat man bei der Ausführung der notwendigen Differentiationen von \bar{F} zu beachten, dass auch die Verbesserungen v von den Elementen x_1, x_2, \dots, x_g abhängen.

Die so verstandenen partiellen Differentialquotienten von \bar{F} bezeichne ich allgemein mit $\frac{\partial \bar{F}}{\partial x}$. Bleiben wir beim mittlern Fehler stehen, so ist wieder

$$\mu^2 = \bar{\mu}^2 \left\{ \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_1} \right)^2 \mu_1^2 + \cdots + \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_g} \right)^2 \mu_g^2 \right\} + \cdots + \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_n} \right)^2 \mu_n^2,$$

aber man hat

$$\bar{F} = F(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_g + v_g, x_{g+1}, \dots, x_n)$$

und demgemäss

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_1} &= \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial v_g} \frac{\partial v_g}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_2} &= \frac{\partial F}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial v_g} \frac{\partial v_g}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

u. s. f.

Die einzelnen Differentialquotienten nach \bar{F} rechter Hand sind so zu bilden, wie wenn auch die v zu den Variablen der Function zählten, sie sind die gewöhnlichen partiellen Differentialquotienten nach den x und den v .

Es kommen aber die entsprechenden x und v in \bar{F} niemals einzeln für sich, sondern immer in algebraischer Verbindung vor, daher ist beispielsweise

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_1} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial v_1} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial (x_1 + v_1)},$$

und somit können wir allgemein schreiben

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial v_i} + \frac{\partial F}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial v_g} \frac{\partial v_g}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

Wir sind nun überall von der Annahme ausgegangen, dass die Elemente x so genau beobachtet sind, dass die noch notwendigen Verbesserungen derselben jedenfalls nur geringe Bedeutung haben.

Es ist dann

$$\bar{F} = F + \frac{\partial F}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} v_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_g} v_g,$$

wo F die unverbesserte Function

$$F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

angiebt. Mithin haben wir

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial v_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial v_2} = \frac{\partial F}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial v_g} = \frac{\partial F}{\partial x_g}$$

und innerhalb der hier eingehaltenen Genauigkeitsgrenzen

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_g} \frac{\partial v_g}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_g} \frac{\partial v_g}{\partial x_2}$$

u. s. f.

Die v sind durch die Correlaten \varkappa bestimmt, indem allgemein

$$v_i = -\mu_i^2 \left(\varkappa_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \varkappa_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots + \varkappa_h \frac{\partial f_h}{\partial x_i} \right)$$

zu setzen ist. Die Correlaten ihrerseits sind aus dem System LXXII) zu berechnen. Denken wir uns die Gleichungen dieses Systems nach irgend einem Verfahren — das Nähere darüber folgt bald — aufgelöst, so bekommen wir

$$\varkappa_i = \alpha_{i1} f_1 + \alpha_{i2} f_2 + \alpha_{i3} f_3 + \cdots + \alpha_{ih} f_h,$$

wo die α von den Coefficienten der betreffenden Gleichungen abhängen, und dann ist

$$v_i = -\mu_i^2 (\beta_{i1} f_1 + \beta_{i2} f_2 + \beta_{i3} f_3 + \cdots + \beta_{ih} f_h).$$

Die f sind die Fehler der Bedingungsgleichungen, sie ändern sich, wenn die Elemente sich ändern, und ihre Existenz bedingt die Existenz der v_i , die $\partial f / \partial x$ hängen zwar auch von den x ab, Variationen dieser Grössen sind aber ohne Einfluss, denn indem wir die Fehler der Bedingungsgleichungen nach den Formeln

$$-f_i = v_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \cdots + v_g \frac{\partial f_i}{\partial x_g}$$

berechnen, können wir in Folge der Kleinheit der v die $\partial f/\partial x$ dadurch numerisch bestimmen, dass wir in ihre Ausdrücke für die Elemente irgend welche genäherte Werte einsetzen, die auch nicht gerade die x_1, x_2, \dots, x_g zu sein brauchen. Die $\partial f/\partial x$ sind hiernach wie Constanten zu behandeln, und man hat demgemäss

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_\lambda} = -\mu_i^2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_\lambda} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial x_2}{\partial x_\lambda} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial x_h}{\partial x_\lambda} \frac{\partial f_h}{\partial x_i} \right),$$

also ist allgemein

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial x_1}{\partial x_i} \left[\mu_1^2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} \right] - \frac{\partial x_2}{\partial x_i} \left[\mu_2^2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial x} \right] - \dots - \frac{\partial x_h}{\partial x_i} \left[\mu_h^2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial f_h}{\partial x} \right],$$

und diese Gleichung gilt für $i = 1, 2, 3, \dots, g; g+1, \dots, n$. Dass sie auch noch über $i = g$ hinaus richtig ist, folgt daraus, dass für $i > g$ die Differentialquotienten der x , weil diese nur von x_1, x_2, \dots, x_g abhängen, verschwinden. Die Factoren der $\partial x/\partial x$ sind vom Index i nicht abhängig, sie sind in allen Gleichungen dieselben. Ich bezeichne diese Factoren, um zugleich anzudeuten, dass sie bei eventuellen Differentiationen wie Constanten zu behandeln sind, durch bezüglich c_1, c_2, \dots, c_h , wo also

$$c_i = \mu_1^2 \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \mu_2^2 \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \mu_3^2 \frac{\partial F}{\partial x_3} \frac{\partial f_i}{\partial x_3} + \dots + \mu_g^2 \frac{\partial F}{\partial x_g} \frac{\partial f_i}{\partial x_g}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, g$$

ist, dann können wir auch schreiben:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ F - c_1 x_1 - c_2 x_2 - c_3 x_3 - \dots - c_h x_h \right\}$$

und diese Gleichung sagt aus:

61₃. Man berechnet die Differentialquotienten $\partial \bar{F}/\partial x$ so, wie wenn

$$\bar{F} = F - c_1 x_1 - c_2 x_2 - \dots - c_h x_h$$

wäre.

Man hätte dieses Resultat auf kürzerem Wege finden können, die obige Ableitung scheint aber strenger zu sein und lässt die notwendigen Vernachlässigungen deutlicher hervortreten.

Die x sind durch ihre Gleichungen unter LXXII) vollständig bestimmt und es ist nur noch hervorzuheben, dass bei ihrer Differentiation nur die f , nicht die Derivirten als variabel anzusehen sind, derartig, dass

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial x_i}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial x_i}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_\lambda} + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial f_h} \frac{\partial f_h}{\partial x_\lambda}$$

zu setzen, die x hiernach aus ihrem Gleichungssystem als Functionen der f darzustellen sind.

Die weitere Behandlung unseres Problems verlangt also vor allen Dingen die Bestimmung der x , das heisst die Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen.

170. Die Theorie der linearen Gleichungen. In welchem Sinne die Determinanten Verwendung finden sollen. Die Theorie der linearen Gleichungen macht sich uns hier zum ersten Mal erforderlich, in dem Abschnitt über die Ausgleichung von Untersuchungen werden wir ihrer auf Schritt und Tritt bedürfen. Welche Functionen auch auszugleichen sein mögen, die Ausgleichungsrechnung führt dieselben immer durch Substitution von Näherungswerten nach den im Art. 30 auseinandergesetzten Principien in lineare Functionen über und gleicht im Grunde genommen nur lineare Functionen aus. Darum bildet die Theorie linearer Gleichungen gerade einen Hauptpfeiler der Ausgleichungsrechnung. Ich will diese Theorie in der folgenden Abschweifung auseinandersetzen, indem ich zuerst die Hauptsätze der Determinantenlehre meist ohne Beweis vorführe und dann diese auf die linearen Gleichungen anwende. Ich bediene mich aber der Determinanten lediglich um gewisse Theoreme über die linearen Gleichungen allgemein und präcis aussprechen und vor allen Dingen das Schema für die Ausrechnung der bezüglichen Gleichungen allgemein entwickeln und aufstellen zu können. Einen andern Zweck als den bezeichneten, die Theoreme allgemein und präcis fassen und die Rechenschemata consequent nach wenigen Principien entwickeln zu lehren, dürften die Determinanten in der Praxis überhaupt nicht haben und sie haben diesen Zweck erst erfüllt, wenn sie aus den Schlussgleichungen verschwunden sind. Wo man sie, wie das nicht selten geschieht, in den Schlussformeln stehen lässt, da hat man die Rechnungen praktisch durchaus nicht weiter gefördert, denn wir besitzen keine Determinantentafeln in dem Sinne, wie wir Tafeln für goniometrische, elliptische und andere Functionen in mehr oder minder grosser Ausdehnung haben.

XI. Abschweifung über Determinanten und lineare Gleichungen.

a) *Determinanten.*

171. Definition der Determinanten. 1. Eine Determinante n ter Ordnung ist eine homogene Function von n^2 Elementen; nach allen Elementen zusammengenommen ist sie eine Function n ten, nach jedem Element für sich eine solche 1ten Grades. Keines ihrer Glieder ist also aus mehr oder weniger als n Elementen zusammengesetzt, und keines ihrer Elemente kommt in einer höhern Potenz als der ersten vor. Sie hat im Ganzen $n!$ Glieder, jedes Element kommt genau in $(n - 1)!$ Gliedern vor. Die Coefficienten ihrer einzelnen Glieder sind abwechselnd $+1$ und -1 .

Darnach wird man sich schon eine vorläufige Vorstellung von der Art dieser Functionen machen können.

Es seien die n^2 Elemente $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}; a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n}$ u. s. f. Dann bezeichnet man die Determinante derselben durch

$$1a) \quad D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Die horizontalen Reihen nennt man Zeilen, die verticalen Columnen. So ist also

$$D_1 = | a_{11} | = a_{11},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

u. s. f.

Der Bequemlichkeit halber schreibt man auch manchmal

$$1b) \quad D_n = | a_{ix} |; \quad i, x = 1, 2, 3, \dots, n,$$

oder, indem man jede der Columnen zusammenfassend durch ein f , jede der Zeilen durch ein g bezeichnet,

$$1c) \quad D_n = | f_1 f_2 f_3 \dots f_n |$$

$$1d) \quad D_n = \begin{vmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_n \end{vmatrix}$$

Endlich ist auch noch die Schreibweise gebräuchlich

$$1e) \quad D_n = \Sigma \pm a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1n}.$$

Von den Elementen einer Zeile oder Colonne ist in jedem Gliede immer nur eines enthalten; oder

2. Eine Determinante ist in Bezug auf jede ihrer Zeilen bezüglich auf jede ihrer Columnen eine lineare, homogene Function.

172. Unveränderlichkeit des Betrages einer Determinante bei gewissen Operationen. Determinanten besitzen gegen gewisse Veränderungen, die man mit ihnen vornimmt, eine derartige Widerstandsfähigkeit, dass sie dabei höchstens ihr Zeichen ändern oder einen Factor abscheiden.

3. Eine Determinante bleibt ungeändert, wenn man alle Zeilen mit den entsprechenden Columnen vertauscht, also ist

$$D_n = |g_1 g_2 g_3 \cdots g_n| = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{vmatrix}$$

4. Eine Determinante ändert nur ihr Zeichen, nicht ihren absoluten Betrag, wenn man irgend zwei ihrer Zeilen oder irgend zwei ihrer Columnen mit einander vertauscht. Also:

$$|f_1 f_2 \cdots f_i \cdots f_x \cdots f_n| = - |f_1 f_2 \cdots f_x \cdots f_i \cdots f_n|,$$

$$\begin{vmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_i \\ \vdots \\ g_x \\ \vdots \\ g_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_x \\ \vdots \\ g_i \\ \vdots \\ g_n \end{vmatrix}$$

Hieraus folgt noch allgemeiner

4. Eine Determinante bleibt ganz ungeändert oder wechselt nur ihr Zeichen, je nachdem man zwischen ihren Zeilen oder ihren Columnen eine gerade bezüglich eine ungerade Anzahl von Vertauschungen vornimmt.

5. Multiplicirt man alle Elemente irgend einer Zeile bezüglich einer Colonne mit einer und derselben Zahl s , so nimmt die Determinante den s -fachen Betrag an. Also

$$|f_1 f_2 \cdots s f_i \cdots f_n| = s |f_1 f_2 \cdots f_i \cdots f_n|$$

$$\begin{vmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ s g_i \\ \vdots \\ g_n \end{vmatrix} = s \begin{vmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_i \\ \vdots \\ g_n \end{vmatrix}$$

173. Wann eine Determinante identisch Null ist. Der specielle Fall, dass $s = 0$ ist, giebt den Satz

5₁. Eine Determinante, in der eine Zeile oder eine Colonne aus lauter Nullen besteht, ist selbst Null.

Wenn zwei Zeilen einander gleich sind, beispielsweise die i te und die x te, so ist natürlich

$$|f_1 f_2 \cdots f_i \cdots f_x \cdots f_n| = |f_1 f_2 \cdots f_x \cdots f_i \cdots f_n|,$$

da zwischen f_i und f_x kein Unterschied sein sollte.

Aber es ist auch nach dem voraufgehenden Satz

$$|f_1 f_2 \cdots f_i \cdots f_x \cdots f_n| = - |f_1 f_2 \cdots f_x \cdots f_i \cdots f_n|.$$

Daher muss die Determinante überhaupt verschwinden. Dasselbe gilt für die Colonnen, und wir bekommen den Satz

6₁. Eine Determinante, in der zwei Zeilen oder zwei Colonnen in den entsprechenden Elementen einander gleich sind, ist unter allen Umständen gleich Null. Analytisch

$$|f_1 f_2 \cdots f_i \cdots f_i \cdots f_n| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_i \\ \vdots \\ g_i \\ \vdots \\ g_n \end{vmatrix} = 0$$

und als Erweiterung bekommen wir durch 5₁

6. Eine Determinante, in der zwei Zeilen oder zwei Colonnen einander proportional sind, ist unter allen Umständen Null. Also

$$|f_1 f_2 \cdots f_i \cdots s f_i \cdots f_n| = 0$$

$$\begin{vmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_i \\ \vdots \\ s g_i \\ \vdots \\ g_n \end{vmatrix} = 0.$$

Selbstverständlich sind das nicht die einzigen Fälle, in denen eine Determinante verschwinden kann, es sind nur die theoretisch wichtigsten.

174. Zerlegung von Determinanten. 7. Jede Determinante n ter Ordnung, in der die Elemente in α Zeilen bezüglich α Columnen als Summen von je zwei Grössen auftreten, zerfällt in 2^α Determinanten derselben Ordnung, in denen die Summanden der betreffenden Zeilen bezüglich Columnen einzeln als entsprechende Zeilen bezüglich Columnen vertreten sind.

So ist

$$\begin{aligned} |f_1 + \varphi f_2 f_3 \cdots f_n| &= |f_1 f_2 f_3 \cdots f_n| + |\varphi f_2 f_3 \cdots f_n|, \\ |f_1 + \varphi f_2 + \psi f_3 \cdots f_n| &= |f_1 f_2 + \psi f_3 \cdots f_n| + |\varphi f_2 + \psi f_3 \cdots f_n| \\ &= |f_1 f_2 f_3 \cdots f_n| + |f_1 \psi f_3 \cdots f_n| \\ &\quad + |\varphi f_2 f_3 \cdots f_n| + |\varphi \psi f_3 \cdots f_n|. \end{aligned}$$

Hiernach ist es wol schon klar, wie die Zerlegung weiter zu führen ist, wenn noch mehr Zeilen als Summen auftreten. Entsprechend ist das Verfahren für Columnen.

175. Weitere Unveränderlichkeitseigenschaften. Der vorausgehende Satz ist schon allgemein genug, wenn wir nur eine Zeile oder Colonne aus zwei Summanden zusammensetzen, wir schreiben also

$$|f_1 f_2 \cdots f_i + \varphi \cdots f_x \cdots f_n| = |f_1 f_2 \cdots f_i \cdots f_x \cdots f_n| + |f_1 f_2 \cdots \varphi \cdots f_x \cdots f_n|.$$

Ich setze jetzt $\varphi = \pm s f_x$, dann wird

$$|f_1 f_2 \cdots f_i \pm s f_x \cdots f_x \cdots f_n| = |f_1 f_2 \cdots f_i \cdots f_x \cdots f_n| + |f_1 f_2 \cdots \pm s f_x \cdots f_x \cdots f_n|,$$

aber nach Satz 6 ist auf der rechten Seite die zweite Determinante Null, also:

8. In jeder Determinante darf man, ohne sie irgendwie zu ändern, irgend eine Zeile bezüglich Colonne um ein Vielfaches einer andern Zeile, bezüglich Colonne vermehren oder vermindern. Analytisch

$$|f_1 f_2 \cdots f_i \pm s f_x \cdots f_x \cdots f_n| = |f_1 f_2 \cdots f_i \cdots f_x \cdots f_n|$$

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_i \pm s g_x \\ \vdots \\ g_x \\ \vdots \\ g_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_i \\ \vdots \\ g_x \\ \vdots \\ g_n \end{array} \right| \end{array}$$

Wir haben noch einen Begriff einzuführen und einen Satz auszusprechen, um sofort zeigen zu können, wie man in jedem Falle eine Determinante auszurechnen vermag.

176. Unterdeterminanten; Entwicklung nach denselben. Scheidet man von den n Zeilen einer Determinante n ter Ordnung die i te aus, so kann man aus den $n - 1$ übrigen, da sie n Columnen bilden, n neue Determinanten $n - 1$ ter Ordnung bilden, man nennt diese die Unterdeterminanten erster Ordnung der ursprünglichen Determinante, und zwar, insofern die i te Zeile ausgeschieden war, die zur i ten Zeile gehörigen. Entsprechend erhält man n Unterdeterminanten, wenn man eine Columne ausscheidet.

Nach Ausscheidung der i ten Zeile wird das System der Elemente

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & a_{i-13} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & a_{i+13} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

$n - 1$ Zeilen und n Columnen, die n Unterdeterminanten haben also die allgemeine Form

$$A_{ix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1x-1} & a_{1x+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2x-1} & a_{2x+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1x-1} & a_{i-1x+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1x-1} & a_{i+1x+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nx-1} & a_{nx+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und, indem wir sowohl x als i alle Werte von 1 bis n annehmen lassen, bekommen wir alle durch Auslassung einer Zeile oder einer Columnen aus einer Determinante n ter Ordnung bildbaren Unterdeterminanten erster Ordnung.

Aus Satz 2 wissen wir, dass jede Determinante eine lineare homogene Function der Elemente jeder ihrer Zeilen oder Columnen ist. Unter Benutzung der eben definirten Unterdeterminanten A_{ix} , können wir jetzt genauer sagen:

9. Es ist

$$(-1)^{i-1} D = a_{i1} A_{i1} - a_{i2} A_{i2} + a_{i3} A_{i3} - \cdots \pm a_{in} A_{in}$$

oder

$$(-1)^{x-1} D = a_{1x} A_{1x} - a_{2x} A_{2x} + a_{3x} A_{3x} - \dots \pm a_{xx} A_{xx}$$

je nachdem wir die Determinante nach den Elementen der i ten Zeile oder nach denen der x ten Colonne entwickeln.

177. Differentialquotienten einer Determinante, Entwicklung nach ihnen. Man kann aus diesen Formeln noch eine Folgerung ziehen.

Nach dem bekannten Euler'schen Satz über homogene Functionen ist nämlich auch

$$D = a_{i1} \frac{\partial D}{\partial a_{i1}} + a_{i2} \frac{\partial D}{\partial a_{i2}} + a_{i3} \frac{\partial D}{\partial a_{i3}} + \dots + a_{in} \frac{\partial D}{\partial a_{in}},$$

oder

$$D = a_{1x} \frac{\partial D}{\partial a_{1x}} + a_{2x} \frac{\partial D}{\partial a_{2x}} + a_{3x} \frac{\partial D}{\partial a_{3x}} + \dots + a_{nx} \frac{\partial D}{\partial a_{nx}}.$$

10. Hiernach ist

$$\frac{\partial D}{\partial a_{ix}} = (-1)^{i+x} A_{ix},$$

eine Gleichung, die den partiellen Differentialquotienten der Determinante n ter Ordnung nach irgend einem Element berechnen lehrt.

Man schliesst ferner, unter Zuhilfenahme des Satzes, dass in keiner von Null verschiedenen Determinante zwei Zeilen oder zwei Colonnen gleich sein können, die weitem Beziehungen

$$a_{g1} \frac{\partial D}{\partial a_{i1}} + a_{g2} \frac{\partial D}{\partial a_{i2}} + a_{g3} \frac{\partial D}{\partial a_{i3}} + \dots + a_{gn} \frac{\partial D}{\partial a_{in}} = 0,$$

und

$$a_{1g} \frac{\partial D}{\partial a_{1i}} + a_{2g} \frac{\partial D}{\partial a_{2i}} + a_{3g} \frac{\partial D}{\partial a_{3i}} + \dots + a_{ng} \frac{\partial D}{\partial a_{ni}} = 0.$$

Kronecker hat in seinen Vorlesungen über Determinanten einen Factor δ_{gi} eingeführt, der die Eigenschaft besitzen soll, dass er für $g \geq i$ stets Null ist, für $g = i$ gleich 1 wird. Mit Hilfe eines solchen „Discontinuitätsfactors“ kann man schreiben

$$11) \quad \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{g\lambda} \frac{\partial D}{\partial a_{i\lambda}} = \delta_{gi} D,$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{\lambda g} \frac{\partial D}{\partial a_{\lambda i}} = \delta_{gi} D,$$

und mit Einführung der Unterdeterminanten

$$11_2) \quad \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (-1)^{\lambda-1} a_{g\lambda} A_{i\lambda} = (-1)^{g-1} \delta_{gi} D,$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (-1)^{\lambda-1} a_{\lambda g} A_{\lambda i} = (-1)^{g-1} \delta_{gi} D,$$

wo also

$$\delta_{gi} = 0 \text{ für } g \geq i,$$

$$\delta_{gi} = 1 \text{ für } g = i.$$

Offenbar giebt es genau so viele δ und ebenfalls genau so viele Unterdeterminanten A_{ix} als es Elemente a_{ix} giebt.

12. Bildet man aus den δ und den Unterdeterminanten wieder Determinanten, so ist

$$|\delta_{ix}| = 1$$

$$|(-1)^{i+x} A_{ix}| = D^{n-1}$$

13. und nach Satz 5

$$\left| (-1)^{i+x} \frac{A_{ix}}{D} \right| = \frac{1}{D}.$$

Die A_{ix} sind Determinanten $n-1$ ter Ordnung, der Satz unter 9 reducirt also die Berechnung einer Determinante n ter Ordnung auf die von n Determinanten der nächstniedrigen Ordnung. Auf jede dieser Determinanten lässt sich wieder derselbe Satz anwenden, und so kann man successive die Berechnung der Determinante n ter Ordnung auf die von Determinanten $n-1$ ter, dann $n-2$ ter, $n-3$ ter Ordnung u. s. f. zurückführen, bis man zuletzt zu Determinanten erster Ordnung, d. h. einfachen Grössen gelangt.

178. Beispiele von Entwicklungen von Determinanten, Regeln zur Erleichterung der Entwicklung. Als Beispiel wähle ich die Determinante dritter Ordnung

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D_3.$$

Ich entwickle gleich nach der ersten Zeile, dann ist $i=1$, und bekomme nach Satz 9

$$D_3 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man hier jede der Determinanten zweiter Ordnung nach der ersten Zeile, so wird wieder nach Satz 9

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{22} | a_{33} | - a_{23} | a_{32} | = a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}, \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{21} | a_{33} | - a_{23} | a_{31} | = a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}, \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} &= a_{21} | a_{32} | - a_{22} | a_{31} | = a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}, \end{aligned}$$

und damit bekommt man

$$D_3 = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31},$$

wie schon früher angegeben.

Zu genau demselben Resultat wären wir gelangt, wenn wir nach einer andern der Zeilen oder nach einer der Columnen entwickelt hätten.

Im allgemeinen ist es gleichgiltig, nach welchen Zeilen oder Columnen man entwickelt; aber da wo man bestimmte Fälle vor sich hat, wird man natürlich diejenigen Zeilen oder Columnen wählen, welche die geringste Anzahl von Gliedern liefern. So wird man die Determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = D_3$$

nach der zweiten Zeile entwickeln, denn dann bekommt man einfach diese Determinante gleich

$$D_3 = -1 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 35 = +26.$$

Indessen wenn auch der Satz 9 immer zum Ziele führt, so werden doch die Rechnungen meist sehr weitläufig, denn erst liefert eine Determinante n ter Ordnung n Determinanten $n - 1$ ter, von diesen jede $n - 1$ Determinanten $n - 2$ ter, von diesen jede $n - 2$ Determinanten $n - 3$ ter Ordnung u. s. f., so dass man schliesslich schon bei Determinanten relativ niedriger Ordnungszahl um die Anordnung der sich so ausserordentlich häufenden Rechnungen verlegen ist. Man wird daher nach einem Verfahren suchen, bei welchem alle nötigen Operationen an der betreffenden Determinante selbst vorgenommen werden.

Man kann nun mit jeder Determinante eine Reihe von Operationen vornehmen, die durch die voraufgehenden Sätze bestimmt sind, und diese Operationen werden immer so einzurichten sein, dass in den Zeilen oder

Colonnen der Determinanten tunlichst viele Nullen zu stehen kommen. Nun reducirt sich die besondere Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \dots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

in der also die eine Diagonalhälfte durch Nullen ersetzt ist, wie man sofort sieht, auf ein einziges Glied, und zwar auf das Diagonalglied

$$a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}.$$

Daher wird man die Operationen immer so vorzunehmen haben, dass die zu bestimmende Determinante in die Form Δ übergeführt wird.

Die beiden Operationen, die hier zu Gebote stehen, sind die durch den Satz 4 und den Satz 8 bestimmten. In der ersten handelt es sich lediglich um Vertauschen von Zeilen oder Columnen, wobei nach jeder Vertauschung zweier Zeilen oder Columnen die Determinante ihr Zeichen wechselt. In der zweiten um die Addition oder Subtraction des Vielfachen einer Zeile bezüglich Columnne zu einer andern Zeile bezüglich Columnne, wobei die Determinante überhaupt keine Veränderung erleidet.

Wie man diese Operationen am geeignetsten ausführt, kann natürlich wie überall, wo es sich um Anwendung mathematischer Sätze zu numerischen Rechnungen handelt, nur die Uebung lehren. Eine allgemeine, unter allen Umständen zum Ziel führende Regel werde ich bald angeben.

Als Beispiel wähle ich die Determinante

$$D'' = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

Ich multiplicire die zweite Zeile mit 3 und ziehe sie von der ersten ab, dann kommt

$$D'' = \begin{vmatrix} -7 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

Nun multiplicire ich die zweite Columnne mit 7 und addire sie zur ersten, so wird

$$D'' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 10 & 1 & 2 \\ 61 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

und nachdem man die erste Colonne mit der zweiten vertauscht hat,

$$D'' = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 2 \\ 8 & 61 & 2 \end{vmatrix}$$

Endlich subtrahire ich die letzte Zeile von der zweiten und erhalte

$$D'' = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & -51 & 0 \\ 8 & 61 & 2 \end{vmatrix}$$

Diese Determinante ist schon von der Form Δ , ihr Betrag ist daher

$$D'' = - (1)(-51)(2) = + 102.$$

Später wird ein allgemeines Schema für numerische Ausrechnung von Determinanten aufgestellt werden. Wir haben nun über die analytische Rechnung mit Determinanten Klarheit zu schaffen.

179. Multiplicationstheorem für Determinanten. Die Addition und Subtraction von Determinanten führt unter Anwendung der Sätze 7 und 9 wieder zu Determinanten. Praktisch wird man aber eher Determinanten zu zerlegen als zusammensetzen haben, und darum genügt es auf die Möglichkeit einer solchen Zusammensetzung hinzuweisen.

Sehr wichtig hat sich die Theorie der Multiplication von Determinanten erwiesen. Hier gilt der als Multiplicationstheorem bekannte Satz

14a. Das Product zweier Determinanten $|a_{ix}|$ und $|b_{ix}|$ gleicher Ordnung ist wieder eine Determinante $|c_{ix}|$ und von derselben Ordnung, deren Elemente c_{ix} durch die lineare homogene Substitution

$$c_{ix} = a_{1i} b_{1x} + a_{2i} b_{2x} + \dots + a_{ni} b_{nx}, \quad i = 1, 2, 3 \dots n$$

bestimmt sind. Es ist also

$$|a_{ix}| |b_{ix}| = |c_{ix}|; \quad i, x = 1, 2, 3, \dots, n$$

und hierbei, um die Formeln expliciter zu geben,

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11} b_{11} + a_{21} b_{21} + a_{31} b_{31} + \dots + a_{n1} b_{n1}, \\ c_{12} &= a_{11} b_{12} + a_{21} b_{22} + a_{31} b_{32} + \dots + a_{n1} b_{n2}, \\ &\vdots \\ c_{1n} &= a_{11} b_{1n} + a_{21} b_{2n} + a_{31} b_{3n} + \dots + a_{n1} b_{nn}; \\ c_{21} &= a_{12} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{32} b_{31} + \dots + a_{n2} b_{n1}, \\ c_{22} &= a_{12} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{32} b_{32} + \dots + a_{n2} b_{n2}, \\ &\vdots \\ c_{2n} &= a_{12} b_{1n} + a_{22} b_{2n} + a_{32} b_{3n} + \dots + a_{n2} b_{nn}; \end{aligned}$$

u. s. f. bis

$$\begin{aligned}
 c_{n1} &= a_{1n} b_{11} + a_{2n} b_{21} + a_{3n} b_{31} + \cdots + a_{nn} b_{n1}, \\
 c_{n2} &= a_{1n} b_{12} + a_{2n} b_{22} + a_{3n} b_{32} + \cdots + a_{nn} b_{n2}, \\
 &\vdots \\
 c_{nn} &= a_{1n} b_{1n} + a_{2n} b_{2n} + a_{3n} b_{3n} + \cdots + a_{nn} b_{nn}.
 \end{aligned}$$

Indem wir zu unsern frühern symbolischen Bezeichnungen der Columnen und Zeilen unsere Zuflucht nehmen, die Zeilen in der Determinante $|a_{ix}|$ mit g , die in der Determinante $|b_{ix}|$ mit γ bezeichnen, können wir auch übersichtlicher schreiben

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= g_1 \gamma_1, & c_{12} &= g_1 \gamma_2, & \cdots, & c_{1n} &= g_1 \gamma_n, \\
 c_{21} &= g_2 \gamma_1, & c_{22} &= g_2 \gamma_2, & \cdots, & c_{2n} &= g_2 \gamma_n, \\
 &\vdots & &\vdots & & &\vdots \\
 c_{n1} &= g_n \gamma_1, & c_{n2} &= g_n \gamma_2, & \cdots, & c_{nn} &= g_n \gamma_n.
 \end{aligned}$$

Da übrigens eine Determinante ungeändert bleibt, wenn man alle Zeilen mit den entsprechenden Columnen vertauscht, so darf man auch, unter Benutzung der Symbole f und φ für die Columnen der betreffenden Determinanten, setzen

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= f_1 \gamma_1, & c_{12} &= f_1 \gamma_2, & \cdots, & c_{1n} &= f_1 \gamma_n, \\
 c_{21} &= f_2 \gamma_1, & c_{22} &= f_2 \gamma_2, & \cdots, & c_{2n} &= f_2 \gamma_n, \\
 &\vdots & &\vdots & & &\vdots \\
 c_{n1} &= f_n \gamma_1, & c_{n2} &= f_n \gamma_2, & \cdots, & c_{nn} &= f_n \gamma_n,
 \end{aligned}$$

und nicht minder

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= f_1 \varphi_1, & c_{12} &= f_1 \varphi_2, & \cdots, & c_{1n} &= f_1 \varphi_n, \\
 c_{21} &= f_2 \varphi_1, & c_{22} &= f_2 \varphi_2, & \cdots, & c_{2n} &= f_2 \varphi_n, \\
 &\vdots & &\vdots & & &\vdots \\
 c_{n1} &= f_n \varphi_1, & c_{n2} &= f_n \varphi_2, & \cdots, & c_{nn} &= f_n \varphi_n.
 \end{aligned}$$

Neue Formeln erhält man, wenn man noch f mit φ und g mit γ vertauscht und allgemein ist

$$c_{ix} = f_i \varphi_x, = f_x \varphi_i, = f_i \gamma_x, = f_x \gamma_i, = g_i \gamma_x, = g_x \gamma_i, = g_i \varphi_x, = g_x \varphi_i.$$

Natürlich sind die einzelnen Ausdrücke für die c einander nicht numerisch gleich, aber für das Bestehen der Relation

$$|a_{ix}| |b_{ix}| = |c_{ix}|$$

ist es gleichgiltig, welche von ihnen man wählt, nur muss man die c consequent nach einem Schema berechnen.

Den Fall, dass die beiden zu multiplicirenden Determinanten nicht gleicher Ordnung sind, kann man immer auf den, wo sie dieselbe Ordnung haben,

zurückführen, und zwar darum, weil sich jede Determinante in eine Determinante höherer Ordnung verwandeln lässt.

Das Mittel bietet dazu der Satz 9. Wir wollen in der daselbst aufgestellten Formel $i = n$ setzen, und $a_{n1} = 1$, $a_{n2} = a_{n3} = \dots = a_{nn} = 0$ machen, dann ist $(-1)^{n-1} D_n = A_{1n}$, aber hier hat man

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad A_{1n} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-12} & a_{n-13} & \dots & a_{n-1n} \end{vmatrix}$$

Die Gleichung zwischen D_n und A_{1n} bleibt bestehen, welche Beträge wir auch den a_{11} , a_{21} , \dots , a_{n-11} geben mögen; wir dürfen diese Elemente der Einfachheit wegen auch gleich Null setzen, und dann ist durch die obige Gleichung eine Determinante $n-1$ ter Ordnung in eine solche n ter umgewandelt, und man hat allgemein

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

wo links eine Determinante n ter, rechts eine $n+1$ ter Ordnung steht; letztere kann man nun wieder nach demselben Schema setzen gleich

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und das ist eine Determinante $n+2$ ter Ordnung.

15. So kann man jede Determinante m ter Ordnung in eine solche n ter überführen, indem man zu ihrer Diagonalreihe $n-m$ Einheiten hinzufügt und die dadurch notwendig gewordenen $n-m$ Zeilen und $n-m$ Columnen durch Nullen ergänzt. Hat man daher zwei Determinanten ungleicher Ordnung zu multipliciren, so bringt man die Determinante niederer Ordnung nach dem angegebenen Schema auf die höhere Ordnung und führt die Multiplication nach dem Multiplicationstheorem aus. Unter allen Umständen ist aber das Resultat eine Determinante von der Ordnung der höher geordneten Determinante.

14b. Ich bemerke noch, dass man das Resultat der Multiplication zweier Determinanten auch noch durch eine Determinante darstellen kann,

deren Ordnung gleich der Summe den Ordnungen der zu multiplicirenden Determinanten ist, und zwar hat man

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

Das Multiplicationstheorem der Determinanten ist ungemein fruchtbar an nützlichen Anwendungen. Es lehrt einerseits, Producte und Potenzen von Determinanten wieder als Determinanten darzustellen und andererseits Determinanten in Producte anderer Determinanten umzuformen. Dem Physiker tritt es namentlich entgegen bei der Umwandlung von Coordinatensystemen in einander, bei der Transformation der Gleichungen in der Hydrodynamik, in der Elasticitätstheorie und bei der Lehre von der Energie geladener Leiter, überhaupt überall da, wo er lineare Gleichungssysteme in einander überzuführen hat.

Wegen der weitem Ausführung der Determinanten-Theorie muss der Leser auf die einschlägigen Werke verwiesen werden. Wir haben uns jetzt mit der Hauptanwendung der Determinanten zu beschäftigen.

b) *Theorie der linearen Gleichungen.*

180. Bedingung für die Existenz eines Systems homogener Gleichungen.

Es ist bekannt, dass die Determinanten ihre Einführung in die Wissenschaft namentlich der Theorie der linearen Gleichungen verdanken, sie bieten ein ungemein bequemes Mittel, Lehrsätze über die linearen Gleichungen präcis auszusprechen und die Auflösung dieser Gleichungen schematisch darzustellen. Im wesentlichen hat sie schon Lagrange benutzt, als er seine Methode der unbestimmten Factoren auf die Auflösung linearer Gleichungen anwandte.

16. In einem System von n linearen homogenen Gleichungen zwischen n Variablen x_1, x_2, \dots, x_n heisst die Determinante der n^2 Coefficienten die Determinante des Gleichungssystems.

Es seien diese n Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \cdots + a_{1n} x_n &= 0, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \cdots + a_{2n} x_n &= 0, \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_{n3} x_3 + \cdots + a_{nn} x_n &= 0. \end{aligned}$$

Sie werden zunächst befriedigt, wenn man alle x der Null gleich setzt. Nun kann man aber alle Gleichungen durch eines der x , etwa x_i , dividiren und bekommt auch n Gleichungen zur Bestimmung der $n - 1$ Verhältnisse $x_1/x_i, x_2/x_i, \dots, x_n/x_i$, eine Gleichung mehr, als dazu nötig sind. Daher muss es auch Fälle geben, wo den obigen Gleichungen auch durch von Null verschiedene Werte der x widerspruchsfrei genügt werden kann. Hier gilt nun der Satz

17. Ein System von n homogenen linearen Gleichungen zwischen n Variablen, kann nur dann durch Beträge der Variablen, die nicht alle Null sind, identisch erfüllt werden, wenn die Determinante der Coefficienten Null ist, also die Gleichung stattfindet

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Ist diese Gleichung zwischen den Coefficienten nicht erfüllt, so ist die einzig mögliche Art, jenen Gleichungen zu genügen, die, alle Variablen gleich Null zu setzen.

Jedes solche System von homogenen linearen Gleichungen bedingt hiernach, wenn es durch Beträge der Variablen, die nicht alle Null sind, erfüllt werden soll, eine Gleichung zwischen den Coefficienten.

Allgemeiner kann man sagen:

18. Wird von einem System von n linearen homogenen Gleichungen zwischen m Variablen verlangt, dass es identisch erfüllt werden soll, ohne dass man alle Variablen der Null gleich setzt, so müssen alle aus den nm Coefficienten der Reihe nach bildbaren Determinanten m ter Ordnung gleich Null sein. Man hat dann zwischen den Coefficienten $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ Gleichungen, die eben notwendige Beziehungen zwischen denselben aussprechen.

Dabei ist übrigens notwendig, dass m die Anzahl der Variablen nicht grösser ist, als n , die Anzahl der Gleichungen. In der Tat kann man sonst überhaupt keine Determinante m ter Ordnung zusammenstellen. Der Fall, dass $m > n$ ist, hat aber keine Bedeutung, denn wenn man mehr Variablen hat als Gleichungen, kann man immer die überflüssige Anzahl derselben willkürlich wählen und die anderen dann aus den so modificirten Gleichungen ausrechnen. Hier ist es immer möglich, das Gleichungssystem durch von Null verschiedene Beträge der Variablen zu erfüllen.

Ogleich der Satz 17 nur ein specieller Fall dieses Satzes 18 ist, habe ich ihn doch gesondert ausgesprochen, weil namentlich er in der Physik die ausgedehnteste Anwendung findet. Man wird oft, wo es sich in der Physik um den Nachweis der Existenz gewisser, aus einer Reihe von An-

n Gleichungen auf die von $n-1$ Unbekannten aus $n-1$ Gleichungen zurückgeführt, da man A_1 ganz beliebig, z. B. gleich 1 (nur nicht gleich 0) ansetzen darf.

Damit ist schon etwas gewonnen, aber wir kommen noch weiter, wenn wir den Satz 11 über die Unterdeterminanten zu Hilfe rufen. Nach diesem Satz war nämlich

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (-1)^{\lambda-1} a_{\lambda h} A_{\lambda i} = 0 \text{ oder } = (-1)^{i-1} D,$$

je nachdem $h \geq i$ oder $h = i$ ist, und dabei konnten noch h und i alle Werte von 1 bis n durchlaufen. Geben wir nun dem h der Reihe nach alle Werte von 1 bis n , so haben wir folgendes System von Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11} A_{1i} - a_{21} A_{2i} + a_{31} A_{3i} - \cdots + (-1)^{n-1} a_{n1} A_{ni} &= 0, \\ a_{12} A_{1i} - a_{22} A_{2i} + a_{32} A_{3i} - \cdots + (-1)^{n-1} a_{n2} A_{ni} &= 0, \\ \vdots & \\ a_{1i-1} A_{1i} - a_{2i-1} A_{2i} + a_{3i-1} A_{3i} - \cdots + (-1)^{n-1} a_{ni-1} A_{ni} &= 0, \\ a_{1i+1} A_{1i} - a_{2i+1} A_{2i} + a_{3i+1} A_{3i} - \cdots + (-1)^{n-1} a_{ni+1} A_{ni} &= 0, \\ \vdots & \\ a_{1n} A_{1i} - a_{2n} A_{2i} + a_{3n} A_{3i} - \cdots + (-1)^{n-1} a_{nn} A_{ni} &= 0, \\ a_{1i} A_{1i} - a_{2i} A_{2i} + a_{3i} A_{3i} - \cdots + (-1)^{n-1} a_{ni} A_{ni} &= (-1)^{i-1} D. \end{aligned}$$

Die ersten $n-1$ Gleichungen sind genau so gebaut wie die Gleichungen zur Berechnung der Hilfsfactoren, und da von diesen immer noch ein Factor willkürlich gewählt werden kann, können wir auch stets mit ihnen eine Gleichung

$$a_{1i} A_1 + a_{2i} A_2 + a_{3i} A_3 + \cdots + a_{ni} A_n = (-1)^{i-1} D$$

von der Form der letzten erfüllen, daher erreichen wir unsern Zweck vollständig, wenn wir setzen

$$A_1 = + A_{1i}, A_2 = - A_{2i}, A_3 = + A_{3i}, \dots, A_n = (-1)^{n-1} A_{ni}.$$

Die Gleichung zur Berechnung von x_i geht dann in der Tat über in

$$x_i \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{\lambda i} A_{\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{\lambda} A_{\lambda} = 0.$$

Führen wir für die A ihre so gewonnenen Beträge ein und beachten, dass der Festsetzung zufolge $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{\lambda i} A_{\lambda} = (-1)^{i-1} D$ sein sollte, so bekommen wir

$$(-1)^{i-1} D x_i + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (-1)^{\lambda-1} a_{\lambda} A_{\lambda i} = 0$$

oder

$$x_i = (-1)^i \frac{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (-1)^{\lambda-1} a_{\lambda} A_{\lambda i}}{D},$$

und es ist D die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und $A_{\lambda i}$ die Determinante, die aus D herauskommt, wenn man daselbst die i te Columnne und die λ te Zeile fortlässt. Indem wir die Reihen, die fortgelassen werden sollen, durch Striche einfassen, können wir schreiben

$$A_{\lambda i} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i-1} & a_{1i} & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i-1} & a_{2i} & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\lambda-11} & a_{\lambda-12} & \cdots & a_{\lambda-1i-1} & a_{\lambda-1i} & a_{\lambda-1i+1} & \cdots & a_{\lambda-1n} \\ a_{\lambda1} & a_{\lambda2} & \cdots & a_{\lambda i-1} & a_{\lambda i} & a_{\lambda i+1} & \cdots & a_{\lambda n} \\ a_{\lambda+11} & a_{\lambda+12} & \cdots & a_{\lambda+1i-1} & a_{\lambda+1i} & a_{\lambda+1i+1} & \cdots & a_{\lambda+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni-1} & a_{ni} & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ich will hier noch eine kleine Aenderung anbringen, indem ich für α schreibe l , also die aufzulösenden Gleichungen in die Form bringe, die man ihnen gewohnheitsmässig verleiht, ferner will ich des Folgenden wegen n durch h ersetzen, also die Gleichungen schreiben

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \cdots + a_{1h} x_h &= l_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \cdots + a_{2h} x_h &= l_2, \\ \vdots & \vdots \\ a_{h1} x_1 + a_{h2} x_2 + a_{h3} x_3 + \cdots + a_{hh} x_h &= l_h. \end{aligned}$$

Dann wird

$$20_1) \quad x = (-1)^{i-1} \frac{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=h} (-1)^{\lambda-1} l_{\lambda} A_{\lambda i}}{D}.$$

Der Zähler lässt sich noch bequemer anordnen. Nach dem Satz 11 ist er nämlich nichts anderes, als die Determinante D , wenn man in letzterer die i te Colonne durch $l_1 l_2 \cdots l_h$ ersetzt, und indem man noch den Satz 8 von der Vertauschung der Columnen oder Zeilen beachtet, erhält man als zweite Form

$$20_2) \quad x_i = (-1)^{h-i} \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i-1} & a_{1i+1} & \cdots & a_{1h} & l_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i-1} & a_{2i+1} & \cdots & a_{2h} & l_2 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3i-1} & a_{3i+1} & \cdots & a_{3h} & l_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hi-1} & a_{hi+1} & \cdots & a_{hh} & l_h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i-1} & a_{1i} & a_{1i+1} & \cdots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i-1} & a_{2i} & a_{2i+1} & \cdots & a_{2h} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3i-1} & a_{3i} & a_{3i+1} & \cdots & a_{3h} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hi-1} & a_{hi} & a_{hi+1} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix}}$$

Der Nenner ist natürlich für alle x derselbe, der Zähler variiert je nachdem $i=1, =2, =3, \dots, =h$ ist; zur Bestimmung aller x ist also erst die Determinante des Gleichungssystems zu berechnen, und dann hat man die aus ihr dadurch abgeleiteten Determinanten zu eruiren, dass man für sich allein erst die erste, dann die zweite, dann die dritte, zuletzt die h te Colonne fortlässt und statt dessen an letzter Stelle die Colonne der l als neue Colonne hinzufügt. So sind also im Ganzen $h+1$ Determinanten auszurechnen.

183. Allgemeine Reduction einer Determinante. Ich habe schon bemerkt, dass man bei der numerischen Auswertung von Determinanten immer darauf ausgeht, die betreffende Determinante auf die Form Δ zu bringen, in der rechts von der Diagonale nur Nullen stehen, der Betrag dieser Determinante ist dann einfach gleich dem Product seiner Diagonalelemente. Es sollen jetzt die Regeln entwickelt werden, nach denen man unter allen Umständen und — worauf bei längern Rechnungen das Hauptgewicht zu legen — in ganz geordneter schematischer Weise, jede Determinante auszurechnen vermag.

Es sei die zu berechnende Determinante allgemein $D = |a_{i\kappa}|$. Wir ziehen die erste Zahl der ersten Zeile, also a_{11} , vor die Determinante, und setzen

$$\frac{a_{12}}{a_{11}} = \alpha_{12}, \quad \frac{a_{13}}{a_{11}} = \alpha_{13}, \quad \dots, \quad \frac{a_{1h}}{a_{11}} = \alpha_{1h}.$$

Dann wird nach Satz 5 die Determinante $D = a_{11}D_1$, wo D_1 sich von D nur dadurch unterscheidet, dass an Stelle der ersten Zeile von D steht $1 \alpha_{12} \alpha_{13} \cdots \alpha_{1h}$.

Jetzt multipliciren wir die erste Colonne mit α_{12} und ziehen sie von der zweiten ab, dann multipliciren wir sie mit α_{13} und ziehen sie von der dritten ab, zuletzt multipliciren wir sie mit α_{1h} und ziehen sie von der letzten ab. Dem Betrag nach ändert sich D_1 nach Satz 8 gar nicht, der Form nach erhält es aber in der ersten Zeile, abgesehen von der ersten 1, lauter Nullen, und es wird

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - a_{21}\alpha_{12} & a_{23} - a_{21}\alpha_{13} & \cdots & a_{2h} - a_{21}\alpha_{1h} \\ a_{31} & a_{32} - a_{31}\alpha_{12} & a_{33} - a_{31}\alpha_{13} & \cdots & a_{3h} - a_{31}\alpha_{1h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} - a_{h1}\alpha_{12} & a_{h3} - a_{h1}\alpha_{13} & \cdots & a_{hh} - a_{h1}\alpha_{1h} \end{vmatrix}.$$

Aber indem wir hier nach der ersten Zeile entwickeln, fallen alle Glieder bis auf das erste fort, und wir haben unter Benutzung der Abkürzungen

$$\begin{aligned} a_{22} - a_{21}\alpha_{12} &= a_{22,1}, & a_{23} - a_{21}\alpha_{13} &= a_{23,1}, & \cdots, & a_{2h} - a_{21}\alpha_{1h} &= a_{2h,1} \\ a_{32} - a_{31}\alpha_{12} &= a_{32,1}, & a_{33} - a_{31}\alpha_{13} &= a_{33,1}, & \cdots, & a_{3h} - a_{31}\alpha_{1h} &= a_{3h,1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{h2} - a_{h1}\alpha_{12} &= a_{h2,1}, & a_{h3} - a_{h1}\alpha_{13} &= a_{h3,1}, & \cdots, & a_{hh} - a_{h1}\alpha_{1h} &= a_{hh,1} \end{aligned}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{22,1} & a_{23,1} & \cdots & a_{2h,1} \\ a_{32,1} & a_{33,1} & \cdots & a_{3h,1} \\ a_{42,1} & a_{43,1} & \cdots & a_{4h,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{h2,1} & a_{h3,1} & \cdots & a_{hh,1} \end{vmatrix}$$

Mit dieser Determinante $h-1$ ter Ordnung verfahren wir genau so wie mit der ursprünglichen; also wir ziehen $a_{22,1}$ vor und setzen

$$\alpha_{23} = \frac{a_{23,1}}{a_{22,1}}, \quad \alpha_{24} = \frac{a_{24,1}}{a_{22,1}}, \quad \cdots, \quad \alpha_{2h} = \frac{a_{2h,1}}{a_{22,1}},$$

so resultirt

$$D_1 = a_{22,1}D_2,$$

wo

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \cdots & \alpha_{2h} \\ a_{32,1} & a_{33,1} & a_{34,1} & \cdots & a_{3h,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{h2,1} & a_{h3,1} & a_{h4,1} & \cdots & a_{hh,1} \end{vmatrix}$$

Dann multipliciren wir die erste Colonne der Reihe nach mit $\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \dots, \alpha_{2,h}$ und ziehen sie der Reihe nach von der zweiten, dritten, ..., letzten Colonne ab. Setzt man

$$\begin{aligned} a_{3,3,1} - a_{3,2,1} \alpha_{2,3} &= a_{3,3,2}, & a_{3,4,1} - a_{3,2,1} \alpha_{2,4} &= a_{3,4,2}, & \dots, & a_{3,h,1} - a_{3,2,1} \alpha_{2,h} &= a_{3,h,2} \\ a_{4,3,1} - a_{4,2,1} \alpha_{2,3} &= a_{4,3,2}, & a_{4,4,1} - a_{4,2,1} \alpha_{2,4} &= a_{4,4,2}, & \dots, & a_{4,h,1} - a_{4,2,1} \alpha_{2,h} &= a_{4,h,2} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ a_{h,3,1} - a_{h,2,1} \alpha_{2,h} &= a_{h,3,2}, & a_{h,4,1} - a_{h,2,1} \alpha_{2,4} &= a_{h,4,2}, & \dots, & a_{h,h,1} - a_{h,2,1} \alpha_{2,h} &= a_{h,h,2} \end{aligned}$$

so geht D_2 über in die Determinante $h-2$ ter Ordnung

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{3,3,2} & a_{3,4,2} & \dots & a_{3,h,2} \\ a_{4,3,2} & a_{4,4,2} & \dots & a_{4,h,2} \\ a_{3,h,2} & a_{5,4,2} & \dots & a_{5,h,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{h,3,2} & a_{h,4,2} & \dots & a_{h,h,2} \end{vmatrix}$$

die man dann wieder genau so behandelt wie D_1 oder D_2 .

Fassen wir jetzt alles zusammen:

Zur Berechnung der Determinante h ter Ordnung $D = |a_{ix}|$ bildet man erst die Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}, & \alpha_{1,3} &= \frac{a_{1,3}}{a_{1,1}}, & \alpha_{1,4} &= \frac{a_{1,4}}{a_{1,1}}, & \dots, & \alpha_{1,h} &= \frac{a_{1,h}}{a_{1,1}}, \\ \alpha_{2,2,1} &= a_{2,2} - a_{2,1} \alpha_{1,2}, & \alpha_{2,3,1} &= a_{2,3} - a_{2,1} \alpha_{1,3}, & \dots, & \alpha_{2,h,1} &= a_{2,h} - a_{2,1} \alpha_{1,h}, \\ \alpha_{3,2,1} &= a_{3,2} - a_{3,1} \alpha_{1,2}, & \alpha_{3,3,1} &= a_{3,3} - a_{3,1} \alpha_{1,3}, & \dots, & \alpha_{3,h,1} &= a_{3,h} - a_{3,1} \alpha_{1,h}, \\ \alpha_{4,2,1} &= a_{4,2} - a_{4,1} \alpha_{1,2}, & \alpha_{4,3,1} &= a_{4,3} - a_{4,1} \alpha_{1,3}, & \dots, & \alpha_{4,h,1} &= a_{4,h} - a_{4,1} \alpha_{1,h}, \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ \alpha_{h,2,1} &= a_{h,2} - a_{h,1} \alpha_{1,2}, & \alpha_{h,3,1} &= a_{h,3} - a_{h,1} \alpha_{1,3}, & \dots, & \alpha_{h,h,1} &= a_{h,h} - a_{h,1} \alpha_{1,h}. \end{aligned}$$

Damit ist die erste Reduction ausgeführt. Zur zweiten rechnet man

$$\begin{aligned} \alpha_{2,3} &= \frac{c_{2,3,1}}{a_{2,2,1}}, & \alpha_{2,4} &= \frac{a_{2,4,1}}{a_{2,2,1}}, & \alpha_{2,5} &= \frac{a_{2,5,1}}{a_{2,2,1}}, & \dots, & \alpha_{2,h} &= \frac{a_{2,h,1}}{a_{2,2,1}}, \\ \alpha_{3,3,2} &= a_{3,3,2} - a_{3,2,1} \alpha_{2,3}, & \alpha_{3,4,2} &= a_{3,4,2} - a_{3,2,1} \alpha_{2,4}, & \dots, & \alpha_{3,h,2} &= a_{3,h,2} - a_{3,2,1} \alpha_{2,h}, \\ \alpha_{4,3,2} &= a_{4,3,2} - a_{4,2,1} \alpha_{2,3}, & \alpha_{4,4,2} &= a_{4,4,2} - a_{4,2,1} \alpha_{2,4}, & \dots, & \alpha_{4,h,2} &= a_{4,h,2} - a_{4,2,1} \alpha_{2,h}, \\ \alpha_{5,3,2} &= a_{5,3,2} - a_{5,2,1} \alpha_{2,3}, & \alpha_{5,4,2} &= a_{5,4,2} - a_{5,2,1} \alpha_{2,4}, & \dots, & \alpha_{5,h,2} &= a_{5,h,2} - a_{5,2,1} \alpha_{2,h}, \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ \alpha_{h,3,2} &= a_{h,3,2} - a_{h,2,1} \alpha_{2,3}, & \alpha_{h,4,2} &= a_{h,4,2} - a_{h,2,1} \alpha_{2,4}, & \dots, & \alpha_{h,h,2} &= a_{h,h,2} - a_{h,2,1} \alpha_{2,h}. \end{aligned}$$

hinzufügen. Die Determinante steigt dadurch in der Ordnung um einen Grad, aber ihre Bedeutung ändert sich, wie man sofort sieht, wenn man sie nach Satz 9 nach der nunmehr letzten Zeile entwickelt, nur insofern, als sie jetzt mit $(-1)^{h-i+1}$ multiplicirt erscheint, und sie hat die Form

$$D^{(i)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1h} & l_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2h} & l_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3h} & l_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hi} & \dots & a_{hh} & l_h \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

und unterscheidet sich von der Nennerdeterminante dadurch, dass sie eine Colonne und eine Zeile mehr besitzt als diese. Je nach dem Index der Unbekannten x wandert die 1 in der letzten Zeile von der ersten bis zur h ten Stelle. Es ist aber

$$20_3) \quad x_i = - \frac{D^{(i)}}{D}$$

Wenn wir jetzt, um x_i zu erhalten, die Determinante $D^{(i)}$ berechnen, so ist klar, dass in allen Reductionen genau dieselben Hilfsgrößen zu rechnen sind, wie bei der Reduction der Determinante D , nur kommt, weil nach der Colonne a_{xh} noch die Colonne der l folgt, in jeder Reduction eine neue Colonne hinzu.

In der ersten Reduction ist daher noch zu rechnen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{l_1}{a_{11}}; \\ l_{2,1} &= l_2 - a_{21} \lambda_1, \\ l_{3,1} &= l_3 - a_{31} \lambda_1, \\ &\vdots \\ l_{h,1} &= l_h - a_{h1} \lambda_1, \end{aligned}$$

und nach dieser Reduction sieht die Determinante so aus wie die D_1 , nur dass sie noch die Colonne

$$\begin{aligned} &l_{2,1} \\ &l_{3,1} \\ &\vdots \\ &l_{h,1} \\ &0 \end{aligned}$$

und die Zeile $00 \dots 1 \dots 00$ hat.

In der zweiten Reduction tritt zu den bei der Berechnung von D erhaltenen Hilfsgrößen als letzte Columne noch hinzu

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{l_{2,1}}{a_{2,2,1}} \\ l_{3,2} &= l_{3,1} - a_{3,2,1} \lambda_2, \\ l_{4,2} &= l_{4,1} - a_{4,2,1} \lambda_2, \\ &\vdots \\ l_{h,2} &= l_{h,1} - a_{h,2,1} \lambda_2, \end{aligned}$$

und die Determinante unterscheidet sich von der D_2 dadurch, dass sie die Columne

$$\begin{aligned} &l_{3,2} \\ &l_{4,2} \\ &\vdots \\ &l_{h,2} \\ &0 \end{aligned}$$

und die Zeile

$$0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \ 0$$

mehr hat.

So geht die Reduction weiter, man hat zu den bei den Reductionen von D schon gerechneten Columnen jedesmal nur noch eine einzige Columne hinzuzurechnen, und zwar für die x te Reduction die

$$\begin{aligned} \lambda_x &= \frac{l_{x,x-1}}{a_{x,x,x-1}}; \\ l_{x+1,x} &= l_{x+1,x-1} - a_{x+1,x,x-1} \lambda_x, \\ l_{x+2,x} &= l_{x+2,x-1} - a_{x+2,x,x-1} \lambda_x, \\ &\vdots \\ l_{h,x} &= l_{h,x-1} - a_{h,x,x-1} \lambda_x. \end{aligned}$$

Allein die nach jeder Reduction resultirende Determinante bleibt nicht immer so einfach, dass sie in ihrer letzten Zeile lauter Nullen und nur eine 1 hat. In der That, nach jeder Reduction wird die Determinante immer um eine Ordnung niedriger, sie verliert von oben nach unten mehr und mehr Zeilen und von links nach rechts mehr und mehr Columnen, es nimmt also die Anzahl der vor der 1 stehenden Nullen mehr und mehr ab. Nach der $i-1$ ten Reduction sind alle Nullen vor der 1 verschwunden, und man hat die Determinante

$$D_{i-1}^{(i)} = \begin{vmatrix} a_{i\ i, i-1} & a_{i\ i+1, i-1} & \cdots & a_{i\ h, i-1} & l_{i, i-1} \\ a_{i+1\ i, i-1} & a_{i+1\ i+1, i-1} & \cdots & a_{i+1\ h, i-1} & l_{i+1, i-1} \\ a_{i+2\ i, i-1} & a_{i+2\ i+1, i-1} & \cdots & a_{i+2\ h, i-1} & l_{i+2, i-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{h\ i, i-1} & a_{h\ i+1, i-1} & \cdots & a_{h\ h, i-1} & l_{h, i-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Wenn man jetzt, nachdem der Vorschrift nach $a_{i\ i, i-1}$ vorgezogen und die Elemente der ersten Zeile durch $a_{i\ i, i-1}$ dividirt sind, die erste Colonne mit den gehörigen Hilfsgrössen α der Reihe nach multiplicirt, bleibt die letzte Zahl derselben nicht mehr wie bisher 0, sondern geht nach einander in die einzelnen α über und beim Subtrahiren von den folgenden Columnen verschwinden in der letzten Zeile alle Nullen und es treten an ihre Stellen die α .

Die weitere Führung der Reductionen wird dadurch in keiner Weise beeinflusst, man hat nach wie vor immer nur eine Colonne neu zu rechnen. Aber: Nach der i ten Reduction wird die letzte Zeile

$$- \alpha_{i\ i+1} - \alpha_{i\ i+2} - \alpha_{i\ i+3} \cdots - \alpha_{i\ h} - \chi_i.$$

Wir können die $-$ Zeichen fortlassen, wenn wir statt dessen nach Satz 5 uns die Determinante $D^{(i)}$ mit dem negativen Zeichen versehen denken, dann wird die letzte Zeile

$$\alpha_{i\ i+1} \alpha_{i\ i+2} \alpha_{i\ i+3} \cdots \alpha_{i\ h} \chi_i.$$

Nach der $i + 1$ ten Reduction geht sie also über in

$$(\alpha_{i\ i+2} - \alpha_{i\ i+1} \alpha_{i+1\ i+2}) (\alpha_{i\ i+3} - \alpha_{i\ i+1} \alpha_{i+1\ i+3}) \cdots \\ \cdots (\alpha_{i\ h} - \alpha_{i\ i+1} \alpha_{i+1\ h}) (\chi_i - \alpha_{i\ i+1} \chi_{i+1}).$$

Man sieht, dass diese Grössen genau dieselbe Bauart haben wie die a in den einzelnen Reductionen. Jede derselben reiht sich in eine Colonne der $i + 1$ Reduction ein, wir benutzen also entsprechende Symbole und setzen

$$\begin{aligned} \alpha_{i\ i+2, 1} &= \alpha_{i\ i+2} - \alpha_{i\ i+1} \alpha_{i+1\ i+2}, \\ \alpha_{i\ i+3, 1} &= \alpha_{i\ i+3} - \alpha_{i\ i+1} \alpha_{i+1\ i+3}, \\ \alpha_{i\ i+4, 1} &= \alpha_{i\ i+4} - \alpha_{i\ i+1} \alpha_{i+1\ i+4}, \\ &\vdots \\ \alpha_{i\ h, 1} &= \alpha_{i\ h} - \alpha_{i\ i+1} \alpha_{i+1\ h}, \\ \chi_{i, 1} &= \chi_i - \alpha_{i\ i+1} \chi_{i+1}. \end{aligned}$$

Also abgesehen davon, dass man von Anfang an in jeder Reduction zu den bei der Ausrechnung von D schon berechneten Columnen noch eine Colonne hinzuzufügen hat (die der χ und l), muss man von der i ten Re-

duction (diese mit) zu jeder Columne noch eine Zahl rechnen, derartig, dass bei der $i + x$ ten Reduction hinzuzufügen ist

$$\begin{aligned} \text{zur ersten Columne } \alpha_{i \ i+x+1, x} &= \alpha_{i \ i+x+1, x-1} - \alpha_{i \ i+x, x-1} \alpha_{i+x \ i+x+1}, \\ \text{,, zweiten } \alpha_{i \ i+x+2, x} &= \alpha_{i \ i+x+2, x-1} - \alpha_{i \ i+x, x-1} \alpha_{i+x \ i+x+2}, \\ \text{,, letzten } \alpha_{i \ h, x} &= \alpha_{i \ h, x-1} - \alpha_{i \ i+x, x-1} \alpha_{i+x \ h}; \\ \text{,, Columne der } l \ \chi_{i, x} &= \chi_{i, x-1} - \alpha_{i \ i+x, x-1} \chi_{i+x}. \end{aligned}$$

Wir müssen jetzt zusehen, zu welchem Endresultat wir so gelangen.

Wenn an D $h - 2$ Reductionen hinter einander ausgeführt sind, erfordert die $h - 1$ te Reduction nach Seite 223 die Berechnung der einen Columne

$$\begin{aligned} \alpha_{h-1 \ h} &= \frac{a_{h-1 \ h, h-2}}{a_{h-1 \ h-1, h-2}}; \\ \alpha_{h \ h, h-1} &= a_{h \ h, h-2} - a_{h \ h-1, h-2} \alpha_{h-1 \ h}, \end{aligned}$$

und es wird

$$D_h = a_{1 \ 1} a_{2 \ 2, 1} a_{3 \ 3, 2} a_{4 \ 4, 3} \cdots a_{h \ h, h-1}.$$

Bei der Reducirung der Zählerdeterminante haben wir nach der $h-1$ ten Reduction

$$\begin{aligned} \alpha_{h-1 \ h} &= \frac{a_{h-1 \ h, h-2}}{a_{h-1 \ h-1, h-2}}, \\ \alpha_{h \ h, h-1} &= a_{h \ h, h-2} - a_{h \ h-1, h-2} \alpha_{h-1 \ h}, \end{aligned}$$

dazu noch

$$\begin{aligned} \alpha_{i \ h, h-i-1} &= \alpha_{i \ h, h-i-2} - \alpha_{i \ h-1, h-i-2} \alpha_{h-1 \ h}, \\ \chi_{h-1} &= \frac{l_{h-1, h-2}}{a_{h-1 \ h-1, h-2}}, \\ l_{h, h-1} &= l_{h, h-2} - a_{h \ h-1, h-2} \chi_{h-1}, \\ \chi_{i, h-i-1} &= \chi_{i, h-i-2} - \alpha_{i \ h-1, h-i-2} \chi_{h-1} \end{aligned}$$

und es wird

$$D^{(i)} = - a_{1 \ 1} a_{2 \ 2, 1} a_{3 \ 3, 2} a_{4 \ 4, 3} \cdots a_{h \ h, h-1} \begin{vmatrix} 1 & l_{h, h-1} \\ & a_{h \ h, h-1} \\ & & \alpha_{i \ h, h-i-1} \chi_{i, h-i-1} \end{vmatrix}$$

Es bleibt also noch eine Determinante zweiter Ordnung stehen. Setzen wir daher unsere symbolischen Bezeichnungen weiter fort, so haben wir noch

$$\chi_h = \frac{l_{h, h-1}}{a_{h \ h, h-1}}$$

und

$$\gamma_{i,h-i} = \gamma_{i,h-i-1} - a_{i,h,h-i-1} \gamma_h$$

zu rechnen, und dann wird

$$D^{(i)} = - a_{11} a_{22,1} a_{33,2} a_{44,3} \cdots a_{hh,h-1} \gamma_{i,h-i},$$

somit*) einfach

$$x_i = \gamma_{i,h-i}.$$

Es ist nun bemerkenswert, dass die in jeder Reduction neu zu rechnende Columne von i gar nicht abhängt, hat man sie einmal abgeleitet, so bleibt sie bestehen, welche der Unbekannten x man auch ausrechnen mag. Anders verhält es sich mit den zu den einzelnen Columnen noch hinzuzufügenden Zeilen; diese beginnen bei x_i erst in der i ten Reduction, also bei $i=1$ schon in der ersten, bei $i=2$ in der zweiten u. s. f.

In der ersten Reduction von D enthalten die Columnen $h-1$, in der zweiten $h-2, \dots$ Elemente. Richtet man also die Rechnung so ein, dass man alle x zugleich kennen lernt, so werden in allen Reductionen die Columnen je h Elemente enthalten, und ausserdem hat die erste Reduction, mit der Columne der l, h Columnen, die zweite $h-1$, die dritte $h-2$, u. s. f. die letzte, nämlich h te, 1 Columne.

184. Schema für die Ausrechnung (Reduction) linearer Gleichungen.

Wir können jetzt von dem Hilfsmittel der Determinanten völlig absehen und alles zusammenfassend sagen.

20₄. Wenn aus dem System linearer Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \cdots + a_{1h} x_h &= l_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \cdots + a_{2h} x_h &= l_2, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \cdots + a_{3h} x_h &= l_3, \\ \vdots & \\ a_{h1} x_1 + a_{h2} x_2 + a_{h3} x_3 + \cdots + a_{hh} x_h &= l_h \end{aligned}$$

die h Unbekannten $x_1, x_2, x_3, \dots, x_h$ zu rechnen sind, so verfährt man nach dem nachstehenden Schema, in welchem der bessern Uebersicht wegen jede Reduction von der folgenden und in jeder Reduction jede Columne von der folgenden durch einen Strich getrennt ist.

*) Ich möchte die Bemerkung hinzufügen, dass aus den obigen Reductionen erhellt, wie auch die Auflösung durch Determinanten sogenannte unnütze Factoren nicht vermeiden kann, dass es also nicht richtig ist, wenn man dieser Auflösung vor der Lagrange'schen der unbestimmten Coefficienten deshalb den Vorzug geben will, weil letztere eben solche unnütze Factoren mitführt. Man ist im Grunde über die Methode dieses grossen Mathematikers nicht hinausgekommen.

Man rechnet

$\alpha_{1,2} = \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}$	$\alpha_{1,3} = \frac{a_{1,3}}{a_{1,1}}$	$\dots, \alpha_{1,h} = \frac{a_{1,h}}{a_{1,1}}$	$\lambda_1 = \frac{l_1}{a_{1,1}}$
$a_{2,2,1} = a_{2,2} - a_{2,1} \alpha_{1,2}$	$a_{2,3,1} = a_{2,3} - a_{2,1} \alpha_{1,3}$	$\dots, a_{2,h,1} = a_{2,h} - a_{2,1} \alpha_{1,h}$	$l_{2,1} = l_2 - a_{2,1} \lambda_1$
$a_{3,2,1} = a_{3,2} - a_{3,1} \alpha_{1,2}$	$a_{3,3,1} = a_{3,3} - a_{3,1} \alpha_{1,3}$	$\dots, a_{3,h,1} = a_{3,h} - a_{3,1} \alpha_{1,h}$	$l_{3,1} = l_3 - a_{3,1} \lambda_1$
$a_{4,2,1} = a_{4,2} - a_{4,1} \alpha_{1,2}$	$a_{4,3,1} = a_{4,3} - a_{4,1} \alpha_{1,3}$	$\dots, a_{4,h,1} = a_{4,h} - a_{4,1} \alpha_{1,h}$	$l_{4,1} = l_4 - a_{4,1} \lambda_1$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$a_{h,2,1} = a_{h,2} - a_{h,1} \alpha_{1,2}$	$a_{h,3,1} = a_{h,3} - a_{h,1} \alpha_{1,3}$	$\dots, a_{h,h,1} = a_{h,h} - a_{h,1} \alpha_{1,h}$	$l_{h,1} = l_h - a_{h,1} \lambda_1$
$\alpha_{1,2,0} = \alpha_{1,2}$	$\alpha_{1,3,0} = \alpha_{1,3}$	$\dots, \alpha_{1,h,0} = \alpha_{1,h}$	$\lambda_{1,0} = \lambda_1$

Im Ganzen h Columnen zu je $h + 1$ Zahlen.

$\alpha_{2,3} = \frac{a_{2,3,1}}{a_{2,2,1}}$	$\alpha_{2,4} = \frac{a_{2,4,1}}{a_{2,2,1}}$	$\dots, \alpha_{2,h} = \frac{a_{2,h,1}}{a_{2,2,1}}$	$\lambda_2 = \frac{l_{2,1}}{a_{2,2,1}}$
$a_{3,3,2} = a_{3,3,1} - a_{3,2,1} \alpha_{2,3}$	$a_{3,4,2} = a_{3,4,1} - a_{3,2,1} \alpha_{2,4}$	$\dots, a_{3,h,2} = a_{3,h,1} - a_{3,2,1} \alpha_{2,h}$	$l_{3,2} = l_{3,1} - a_{3,2,1} \lambda_2$
$a_{4,3,2} = a_{4,3,1} - a_{4,2,1} \alpha_{2,3}$	$a_{4,4,2} = a_{4,4,1} - a_{4,2,1} \alpha_{2,4}$	$\dots, a_{4,h,2} = a_{4,h,1} - a_{4,2,1} \alpha_{2,h}$	$l_{4,2} = l_{4,1} - a_{4,2,1} \lambda_2$
$a_{5,3,2} = a_{5,3,1} - a_{5,2,1} \alpha_{2,3}$	$a_{5,4,2} = a_{5,4,1} - a_{5,2,1} \alpha_{2,4}$	$\dots, a_{5,h,2} = a_{5,h,1} - a_{5,2,1} \alpha_{2,h}$	$l_{5,2} = l_{5,1} - a_{5,2,1} \lambda_2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$a_{h,3,2} = a_{h,3,1} - a_{h,2,1} \alpha_{2,3}$	$a_{h,4,2} = a_{h,4,1} - a_{h,2,1} \alpha_{2,4}$	$\dots, a_{h,h,2} = a_{h,h,1} - a_{h,2,1} \alpha_{2,h}$	$l_{h,2} = l_{h,1} - a_{h,2,1} \lambda_2$
$\alpha_{1,3,1} = \alpha_{1,3,0} - \alpha_{1,2,0} \alpha_{2,3}$	$\alpha_{1,4,1} = \alpha_{1,4,0} - \alpha_{1,2,0} \alpha_{2,4}$	$\dots, \alpha_{1,h,1} = \alpha_{1,h,0} - \alpha_{1,2,0} \alpha_{2,h}$	$\lambda_{1,1} = \lambda_{1,0} - \alpha_{1,2,0} \lambda_2$
$\alpha_{2,3,0} = \alpha_{2,3}$	$\alpha_{2,4,0} = \alpha_{2,4}$	$\alpha_{2,h,0} = \alpha_{2,h}$	$\lambda_{2,0} = \lambda_2$

Im Ganzen $h - 1$ Columnen zu je $h + 1$ Zahlen.

$\alpha_{3,4} = \frac{a_{3,4,2}}{a_{3,3,2}}$	$\alpha_{3,5} = \frac{a_{3,5,2}}{a_{3,3,2}}$	$\dots, \alpha_{3,h} = \frac{a_{3,h,2}}{a_{3,3,2}}$	$\lambda_3 = \frac{l_{3,2}}{a_{3,3,2}}$
$a_{4,4,3} = a_{4,4,2} - a_{4,3,2} \alpha_{3,4}$	$a_{4,5,3} = a_{4,5,2} - a_{4,3,2} \alpha_{3,5}$	$\dots, a_{4,h,3} = a_{4,h,2} - a_{4,3,2} \alpha_{3,h}$	$l_{4,3} = l_{4,2} - a_{4,3,2} \lambda_3$
$a_{5,4,3} = a_{5,4,2} - a_{5,3,2} \alpha_{3,4}$	$a_{5,5,3} = a_{5,5,2} - a_{5,3,2} \alpha_{3,5}$	$\dots, a_{5,h,3} = a_{5,h,2} - a_{5,3,2} \alpha_{3,h}$	$l_{5,3} = l_{5,2} - a_{5,3,2} \lambda_3$
$a_{6,4,3} = a_{6,4,2} - a_{6,3,2} \alpha_{3,4}$	$a_{6,5,3} = a_{6,5,2} - a_{6,3,2} \alpha_{3,5}$	$\dots, a_{6,h,3} = a_{6,h,2} - a_{6,3,2} \alpha_{3,h}$	$l_{6,3} = l_{6,2} - a_{6,3,2} \lambda_3$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$a_{h,4,3} = a_{h,4,2} - a_{h,3,2} \alpha_{3,4}$	$a_{h,5,3} = a_{h,5,2} - a_{h,3,2} \alpha_{3,5}$	$\dots, a_{h,h,3} = a_{h,h,2} - a_{h,3,2} \alpha_{3,h}$	$l_{h,3} = l_{h,2} - a_{h,3,2} \lambda_3$
$\alpha_{1,4,2} = \alpha_{1,4,1} - \alpha_{1,3,1} \alpha_{3,4}$	$\alpha_{1,5,2} = \alpha_{1,5,1} - \alpha_{1,3,1} \alpha_{3,5}$	$\dots, \alpha_{1,h,2} = \alpha_{1,h,1} - \alpha_{1,3,1} \alpha_{3,h}$	$\lambda_{1,2} = \lambda_{1,1} - \alpha_{1,3,1} \lambda_3$
$\alpha_{2,4,1} = \alpha_{2,4,0} - \alpha_{2,3,0} \alpha_{3,4}$	$\alpha_{2,5,1} = \alpha_{2,5,0} - \alpha_{2,3,0} \alpha_{3,5}$	$\dots, \alpha_{2,h,1} = \alpha_{2,h,0} - \alpha_{2,3,0} \alpha_{3,h}$	$\lambda_{2,1} = \lambda_{2,0} - \alpha_{2,3,0} \lambda_3$
$\alpha_{3,4,0} = \alpha_{3,4}$	$\alpha_{3,5,0} = \alpha_{3,5}$	$\alpha_{3,h,0} = \alpha_{3,h}$	$\lambda_{3,0} = \lambda_3$

Im Ganzen $h - 2$ Columnen zu je $h + 1$ Zahlen.

$\alpha_{45} = \frac{a_{45,3}}{a_{44,3}}$	$\alpha_{46} = \frac{a_{46,3}}{a_{44,3}}$	$\dots, \alpha_{4h} = \frac{a_{4h,3}}{a_{44,3}}$	$\lambda_4 = \frac{l_{4,3}}{a_{44,3}},$
$a_{55,4} = a_{55,3} - a_{54,3} \alpha_{45}$	$a_{56,4} = a_{56,3} - a_{54,3} \alpha_{46}$	$\dots, a_{5h,4} = a_{5h,3} - a_{54,3} \alpha_{4h}$	$l_{5,4} = l_{5,3} - a_{54,3} \lambda_4,$
$a_{65,4} = a_{65,3} - a_{64,3} \alpha_{45}$	$a_{66,4} = a_{66,3} - a_{64,3} \alpha_{46}$	$\dots, a_{6h,4} = a_{6h,3} - a_{64,3} \alpha_{4h}$	$l_{6,4} = l_{6,3} - a_{64,3} \lambda_4,$
$a_{75,4} = a_{75,3} - a_{74,3} \alpha_{45}$	$a_{76,4} = a_{76,3} - a_{74,3} \alpha_{46}$	$\dots, a_{7h,4} = a_{7h,3} - a_{74,3} \alpha_{4h}$	$l_{7,4} = l_{7,3} - a_{74,3} \lambda_4,$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$a_{h5,4} = a_{h5,3} - a_{h4,3} \alpha_{45}$	$a_{h6,4} = a_{h6,3} - a_{h4,3} \alpha_{46}$	$\dots, a_{hh,4} = a_{hh,3} - a_{h4,3} \alpha_{4h}$	$l_{h,4} = l_{h,3} - a_{h4,3} \lambda_4,$
$\alpha_{15,3} = \alpha_{15,2} - \alpha_{14,2} \alpha_{45}$	$\alpha_{16,3} = \alpha_{16,2} - \alpha_{14,2} \alpha_{46}$	$\dots, \alpha_{1h,3} = \alpha_{1h,2} - \alpha_{14,2} \alpha_{4h}$	$\lambda_{1,3} = \lambda_{1,2} - \alpha_{14,2} \lambda_4,$
$\alpha_{25,2} = \alpha_{25,1} - \alpha_{24,1} \alpha_{45}$	$\alpha_{26,2} = \alpha_{26,1} - \alpha_{24,1} \alpha_{46}$	$\dots, \alpha_{2h,2} = \alpha_{2h,1} - \alpha_{24,1} \alpha_{4h}$	$\lambda_{2,2} = \lambda_{2,1} - \alpha_{24,1} \lambda_4,$
$\alpha_{35,1} = \alpha_{35,0} - \alpha_{34,0} \alpha_{45}$	$\alpha_{36,1} = \alpha_{36,0} - \alpha_{34,0} \alpha_{46}$	$\dots, \alpha_{3h,1} = \alpha_{3h,0} - \alpha_{34,0} \alpha_{4h}$	$\lambda_{3,1} = \lambda_{3,0} - \alpha_{34,0} \lambda_4,$
$\alpha_{45,0} = \alpha_{45}$	$\alpha_{46,0} = \alpha_{46}$	$\dots, \alpha_{4h,0} = \alpha_{4h}$	$\lambda_{4,1} = \lambda_4.$

Im Ganzen $h - 3$ Columnen zu je h Zahlen.

So gehen die Reductionen immer weiter, in jeder Columne stehen $h + 1$ Zahlen; die Anzahl der Columnen nimmt aber von Reduction zu Reduction um eine Einheit ab.

Die letzten Reductionen sind von der vorletzten ab

$\alpha_{h-1h} = \frac{a_{h-1h,h-2}}{a_{h-1h-1,h-2}}$	$\lambda_{h-1} = \frac{l_{h-1,h-2}}{a_{h-1h-1,h-2}},$
$a_{hh,h-1} = a_{hh,h-2} - a_{hh-1,h-2} \alpha_{h-1h}$	$l_{h,h-1} = l_{h,h-2} - a_{hh-1,h-2} \lambda_{h-1},$
$\alpha_{1h,h-2} = \alpha_{1h,h-3} - \alpha_{1h-1,h-3} \alpha_{h-1h}$	$\lambda_{1,h-2} = \lambda_{1,h-3} - \alpha_{1h-1,h-3} \lambda_{h-1},$
$\alpha_{2h,h-3} = \alpha_{2h,h-4} - \alpha_{2h-1,h-4} \alpha_{h-1h}$	$\lambda_{2,h-3} = \lambda_{2,h-4} - \alpha_{2h-1,h-4} \lambda_{h-1},$
$\alpha_{3h,h-4} = \alpha_{3h,h-5} - \alpha_{3h-1,h-5} \alpha_{h-1h}$	$\lambda_{3,h-5} = \lambda_{3,h-4} - \alpha_{3h-1,h-5} \lambda_{h-1},$
\vdots	\vdots
$\alpha_{h-2h,1} = \alpha_{h-2h,0} - \alpha_{h-2h-1,0} \alpha_{h-1h}$	$\lambda_{h-2,1} = \lambda_{h-2,0} - \alpha_{h-2h-1,0} \lambda_{h-1},$
$\alpha_{h-1h,0} = \alpha_{h-1h}$	$\lambda_{h-1,0} = \lambda_{h-1}.$

Im Ganzen 2 Columnen zu je $h + 1$ Zahlen.

$$\lambda_h = \frac{l_{h,h-1}}{a_{hh,h-1}},$$

$$\lambda_{1,h-1} = \lambda_{1,h-2} - \alpha_{1h,h-2} \lambda_h,$$

$$\lambda_{2,h-2} = \lambda_{2,h-3} - \alpha_{2h,h-3} \lambda_h,$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{3,h-3} &= \gamma_{3,h-4} - \alpha_{3h,h-4} \gamma_h, \\
 \gamma_{4,h-4} &= \gamma_{4,h-5} - \alpha_{4h,h-5} \gamma_h, \\
 &\vdots \\
 \gamma_{h-1,1} &= \gamma_{h-1,0} - \alpha_{h-1h,0} \gamma_h, \\
 \gamma_{h,0} &= \gamma_h.
 \end{aligned}$$

Im Ganzen 1 Columne zu $h + 1$ Zahlen.

185. Die Werte der Unbekannten, zwei Formen. Diese letzte Reduction giebt schon die gesuchten h Unbekannten durch die in ihr berechneten γ , und es ist

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \gamma_{1,h-1} \\
 x_2 &= \gamma_{2,h-2} \\
 x_3 &= \gamma_{3,h-3}
 \end{aligned}$$

22₁.

allgemein

$$\begin{aligned}
 x_i &= \gamma_{i,h-i} \\
 &\vdots \\
 x_{h-1} &= \gamma_{h-1,1} \\
 x_h &= \gamma_{h,0}.
 \end{aligned}$$

Der grosse Vorteil dieser Rechenmethode besteht darin, dass man alle Unbekannten mit einem Mal und in derselben Form erhält, und dass man immer nur einen und denselben Algorithmus auszuführen hat.

Bei jeder Reduction hat man nur die Zahlen der eben ausgeführten Reduction zu beachten, und alle andern zu ignoriren.

Die Formeln für die einzelnen Reductionen sehen wegen der vielen Indices etwas verwickelt aus, aber sie repräsentiren vollständig den Gang der Rechnung, und jeder Buchstabenformel entspricht genau eine notwendige Zahlenformel. Ich habe darum auch, um dem Gedächtnis des Rechners zu Hilfe zu kommen, eine relativ grosse Anzahl von Reductionen unmittelbar angegeben. Aber wenn der Rechner sich einmal an der Hand der gegebenen Entwicklungen klar gemacht hat, nach welchen Principien die Bezeichnungen gewählt sind, wird er sie gerade für die Uebersichtlichkeit der notwendigen Operationen und für die Art, wie eine Operation aus der andern folgt, sehr bequem finden. Sie sind im Wesentlichen den Gaussischen Bezeichnungen nachgebildet, wie auch das ganze Schema dem Gaussischen entspricht.

Man kann den Lösungen noch eine andere Form verleihen, in der man sie gewöhnlich vorführt, indem man die γ successive durch ihre Werte ersetzt.

So ist zum Beispiel

$$\begin{aligned} x_1 &= \chi_{1,h-1} = \chi_{1,h-2} - \alpha_{1h,h-2} \chi_h = \chi_{1,h-3} - \alpha_{1h-1,h-3} \chi_{h-1} - \alpha_{1h,h-2} \chi_h \\ &= \chi_{1,h-4} - \alpha_{1h-2,h-4} \chi_{h-2} - \alpha_{1h-1,h-3} \chi_{h-1} - \alpha_{1h,h-2} \chi_h \end{aligned}$$

und so fort.

Man bekommt schliesslich

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \chi_1 - \alpha_{12} \chi_2 - \alpha_{13,1} \chi_3 - \alpha_{14,2} \chi_4 - \cdots - \alpha_{1h,h-2} \chi_h, \\ x_2 & = & \chi_2 - \alpha_{23} \chi_3 - \alpha_{24,1} \chi_4 - \cdots - \alpha_{2h,h-3} \chi_h, \\ 22. \quad x_3 & = & \chi_3 - \alpha_{34} \chi_4 - \cdots - \alpha_{h,h-4} \chi_h, \\ & \vdots & \vdots \\ x_{h-1} & = & \chi_{h-1} - \alpha_{h-1h} \chi_h, \\ x_h & = & \chi_h. \end{array}$$

Man braucht, wenn man diese Darstellung wählt, in der letzten Columnne der einzelnen Reductionen die auf die l folgenden χ nicht mehr zu rechnen. Es bedingt das insofern eine Abkürzung der numerischen Rechnungen, als man in dem allgemeinen Schema die hier angezeigte Summation successive ausführt, während man sie hier mit einem Male bewerkstelligen kann. Etwas ähnliches gilt auch in Bezug auf die α und nicht minder in Bezug auf die a . Doch dürfte trotzdem die schematische Ausrechnung im allgemeinen vorzuziehen sein, weil das Schema seiner ganzen Ausdehnung nach gleichartig ist und in den Operationen kein Abwechseln verlangt.

Ich bezeichne die χ dieser zweiten Darstellung, also

$$\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_h$$

nach Galmert als *Aequivalentgrössen*.

186. Verringerung der Operationen für symmetrische Gleichungen.

Der Leser ist hiernach im Stande, jedes System linearer Gleichungen, wie beschaffen auch die Coefficienten sein mögen, aufzulösen. Die Ausgleichungsrechnung hat es aber ausschliesslich mit Gleichungen zu tun, deren Coefficienten ein symmetrisches System zusammensetzen, unter einem symmetrischen System ein solches verstanden, in welchem zwei Elemente, die zur Diagonale des Systems symmetrisch liegen, auch gleich sind. Analytisch ausgedrückt, werden wir uns also mit Gleichungen beschäftigen, in denen

$$a_{ix} = a_{xi}$$

ist.

Es lässt sich leicht zeigen, dass, was von den Elementen des ursprünglichen Systems gilt, sich auf die Elemente aller Reductionen fortpflanzt. Also

23. Bei symmetrischen Systemen bilden die Elemente in allen Reductionen wieder symmetrische Systeme.

Zum Beispiel war in der ersten Reduction

$$a_{3\ 2,\ 1} = a_{3\ 2} - a_{3\ 1} a_{1\ 2},$$

und

$$a_{2\ 3,\ 1} = a_{2\ 3} - a_{2\ 1} a_{1\ 3}.$$

Es ist aber

$$a_{1\ 3} = \frac{a_{1\ 3}}{a_{1\ 1}},$$

also auch

$$a_{2\ 3,\ 1} = a_{2\ 3} - a_{1\ 3} \frac{a_{2\ 1}}{a_{1\ 1}},$$

und da

$$a_{2\ 1} = a_{1\ 2}$$

sein sollte, ist der Factor von $a_{1\ 3}$ auch gleich $a_{1\ 2}$, und hiernach

$$a_{2\ 3,\ 1} = a_{2\ 3} - a_{1\ 3} a_{1\ 2}.$$

In den beiden rechts stehenden a können wir wieder die Indices vertauschen und dann bekommen wir

$$a_{2\ 3,\ 1} = a_{3\ 2,\ 1}.$$

23₁. Man kann hiernach in jedem a die beiden vor dem Komma stehenden Indices mit einander vertauschen. Der allgemeine Beweis wird dadurch geführt, dass man annimmt, es bilden die a -Größen einer Reduction ein symmetrisches System, und nachweist, dass dann auch die a -Größen der folgenden Reduction ein symmetrisches System zusammensetzen. Der Leser wird ihn leicht nachholen können.

Wenn aber die a -Größen in den einzelnen Reductionen symmetrisch sind, so brauchen wir sie auch nicht alle zu rechnen. So ersparen wir, nachdem in einer Reduction die a der ersten Columnne gerechnet sind, in der zweiten Columnne das erste, in der dritten das erste und zweite, in der vierten das erste, zweite und dritte a u. s. f.

Schreiben wir also das System

$$\begin{array}{cccccc} a_{1\ 1} & a_{1\ 2} & a_{1\ 3} & \cdots & a_{1\ h-1} & a_{1\ h} \\ a_{2\ 1} & a_{2\ 2} & a_{2\ 3} & \cdots & a_{2\ h-1} & a_{2\ h} \\ a_{3\ 1} & a_{2\ 1} & a_{3\ 3} & \cdots & a_{3\ h-1} & a_{3\ h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{h-1\ 1} & a_{h-1\ 2} & a_{h-1\ 3} & \cdots & a_{h-1\ h-1} & a_{h-1\ h} \\ a_{h\ 1} & a_{h\ 2} & a_{h\ 3} & & a_{h\ h-1} & a_{h\ h} \end{array}$$

der Coefficienten, indem wir, wenn es symmetrisch ist, den über der Diagonale befindlichen Teil, als dem unter der Diagonale liegenden in den entsprechenden Elementen gleich, fortlassen, in der Dreiecksform

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ a_{h-11} & a_{h-12} & a_{h-13} & \cdots & a_{h-1h-1} & & \\ a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} & \cdots & a_{hh-1} & a_{hh} & \end{array}$$

so sind in jeder Reduction nur die a zu rechnen, die sich dieser Dreiecksform anschmiegen, also zum Beispiel in der ersten Reduction

$$\begin{array}{ccccccc} a_{22,1} & & & & & & \\ a_{32,1} & a_{33,1} & & & & & \\ a_{42,1} & a_{43,1} & a_{44,1} & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ a_{h-12,1} & a_{h-13,1} & a_{h-14,1} & \cdots & a_{h-1h-1,1} & & \\ a_{h2,1} & a_{h3,1} & a_{h4,1} & \cdots & a_{hh-1,1} & a_{hh,1} & \end{array}$$

Diese Verringerung der Rechenarbeit findet nur für die a statt, die l , α und χ müssen vollständig gerechnet werden.

Wir wollen aber auch noch die l anders einordnen. Es ist nämlich allgemein in der i ten Reduction

$$l_{x,i} = l_{x,i-1} - a_{xi,i-1} \gamma_i,$$

also weil

$$\gamma_i = \frac{l_{i,i-1}}{a_{ii,i-1}},$$

auch

$$l_{x,i} = l_{x,i-1} - \frac{a_{xi,i-1}}{a_{ii,i-1}} l_{i,i-1},$$

aber da $a_{xi,i-1} = a_{ix,i-1}$ sein sollte und

$$\frac{a_{ix,i-1}}{a_{ii,i-1}} = \alpha_{ix}$$

ist

$$l_{x,i} = l_{x,i-1} - \alpha_{ix} l_{i,i-1}.$$

Damit ordnen sich die l den a bei, und es kann $l_{x,i}$ auch in die zu α_{ix} gehörige Columnne geschrieben werden.

In der Tat dürfen wir nur allgemein

$$a_{ix} = \left[\mu^2 \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_x}{\partial x} \right] = \mu_1^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{\partial f_x}{\partial x_1} + \mu_2^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \frac{\partial f_x}{\partial x_2} + \dots + \mu_g^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_g} \frac{\partial f_x}{\partial x_g},$$

und

$$l_i = f_i$$

setzen, um das ausgeführte Schema sofort auf unsern Fall, wo die Unbekannten x_1, x_2, \dots, x_h durch die Correlaten x_1, x_2, \dots, x_h vertreten werden, anwenden zu können.

Der zweite Teil unserer Arbeit bedarf die Elimination der x aus der Gleichung

$$\bar{F} = F - c_1 x_1 - c_2 x_2 - c_3 x_3 - \dots - c_h x_h.$$

Es sollte aber diese Elimination so ausgeführt werden, dass nach derselben \bar{F} als Function der f erscheint. Wir können diese Elimination mit einem Schlage für alle x zugleich bewerkstelligen. Setzen wir nämlich

$$\bar{F} - F = f_0$$

und schreiben die obige Gleichung in der Form

$$-f_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_h x_h,$$

so hat sie genau die Form wie die Correlatengleichungen, fügen wir sie also zu diesen hinzu, so haben wir im Ganzen $h + 1$ Gleichungen mit nur h Unbekannten und diese können nach dem Satz 17 unserer Abschweifung zusammen nur bestehen, wenn ihre Determinante verschwindet. Wir haben somit

$$0 = \begin{vmatrix} -f_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_h \\ f_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1h} \\ f_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2h} \\ f_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_h & a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} & \dots & a_{hh} \end{vmatrix}$$

wo also

$$f_0 = \bar{F} - F, \quad a_{ix} = \left[\mu^2 \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_x}{\partial x} \right]$$

ist. Das ist schon die gesuchte Gleichung für \bar{F} , denn die x sind in derselben nicht mehr vorhanden.

187b. Mittlerer Fehler der zusammengesetzten Grösse. Einführung der Uebertragungsgrössen. Bei einer Differentiation nach einem der Elemente sind die c und a als Constanten zu betrachten, da nun jede

Determinante nach Satz 1 unserer Abschweifung in Bezug auf jedes seiner Elemente linear ist, dürfen wir die f auch innerhalb des Determinantenzeichens differenzieren.

So bekommen wir also

$$0 = \begin{vmatrix} -\frac{\partial f_0}{\partial x_i} & c_1 & c_2 & \cdots & c_h \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_i} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_h}{\partial x_i} & a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix}$$

Entwickeln wir diese Determinante nach der ersten Colonne, so wird nach Satz 9 unserer Abschweifung

$$0 = -\frac{\partial f_0}{\partial x_i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2h} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix} - \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_h \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2h} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix} \\ + \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_h \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1h} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix} - \frac{\partial f_3}{\partial x_i} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_h \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2h} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \cdots & a_{4h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix} + \cdots$$

Ohne die Determinanten zu ändern, können wir in ihnen die Zeilen zu Columnen, die Columnen zu Zeilen machen (Satz 3 der Abschweifung). Tun wir das, so geht der Factor von z. B. $\frac{\partial f_1}{\partial x_i}$ über in

$$\begin{vmatrix} c_1 & a_{21} & a_{31} & a_{41} & \cdots & a_{h1} \\ c_2 & a_{22} & a_{32} & a_{42} & \cdots & a_{h2} \\ c_3 & a_{23} & a_{33} & a_{43} & \cdots & a_{h3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_h & a_{2h} & a_{3h} & a_{4h} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix}$$

Nun ist das System der Coefficienten a unserer Correlaten-Gleichungen symmetrisch, so dass $a_{ix} = a_{xi}$ ist, somit dürfen wir in allen a die Indices mit einander vertauschen, und es wird jener hervorgehobene Factor

$$\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1h} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2h} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_h & a_{h2} & a_{h3} & a_{h4} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix}$$

Stellen wir aber die Correlaten x als Auflösungen ihres Gleichungssystems nach Satz 20₁ der Abschweifung in Determinantenform dar, so wird von ihnen zum Beispiel x_1 bestimmt durch

$$x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2h} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1h} \\ f_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2h} \\ f_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_h & a_{h2} & a_{h3} & a_{h4} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix}$$

Die Determinante rechter Hand ist genau so gebaut wie der Factor von $\partial f_1 / \partial x_i$, nur dass statt der ersten Column eine andere steht. Ganz entsprechendes gilt von den Factoren aller andern $\partial f / \partial x$. Setzen wir also allgemein

$$r_\lambda = (-1)^{\lambda-1} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_h \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\lambda-21} & a_{\lambda-22} & a_{\lambda-23} & \cdots & a_{\lambda-2h} \\ a_{\lambda1} & a_{\lambda2} & a_{\lambda3} & \cdots & a_{\lambda h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} & \cdots & a_{h3} \end{vmatrix}$$

so sind die r Grössen, die durch ein System linearer Gleichungen bestimmt sind, welches genau so gebaut ist, wie das für die Correlaten, nur dass ihre l statt wie bei den Correlaten die f , andere Grössen c sind.

Man nennt die r Uebertragungsgrössen.

188. Mittlerer Fehler der zusammengesetzten Grösse. Darstellung der Differentialquotienten und definitive Formel. Wir haben aber

$$-\frac{\partial f_0}{\partial x_i} = r_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + r_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots + r_h \frac{\partial f_h}{\partial x_i},$$

und die r sind von der Ordnung der Zahl i unabhängig.

Aber da

$$f_0 = \bar{F} - F$$

ist, so erhalten wir

$$\text{LXXVII) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} - r_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - r_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dots - r_h \frac{\partial f_h}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_2} - r_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - r_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \dots - r_h \frac{\partial f_h}{\partial x_2}, \\ \vdots \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_g} = \frac{\partial F}{\partial x_g} - r_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_g} - r_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_g} - \dots - r_h \frac{\partial f_h}{\partial x_g}, \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_{g+1}} = \frac{\partial F}{\partial x_{g+1}}, \\ \vdots \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_n} = \frac{\partial F}{\partial x_n}, \end{array} \right.$$

und dabei sind die r die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\text{LXXVIII) } \left\{ \begin{array}{l} c_1 = a_{11} r_1 + a_{12} r_2 + a_{13} r_3 + \dots + a_{1h} r_h, \\ c_2 = a_{21} r_1 + a_{22} r_2 + a_{23} r_3 + \dots + a_{2h} r_h, \\ \vdots \\ c_h = a_{h1} r_1 + a_{h2} r_2 + a_{h3} r_3 + \dots + a_{hh} r_h, \end{array} \right.$$

worin die a dieselben Coefficienten wie in den Correlatengleichungen, nämlich

$$a_{ix} = a_{xi} = \left[\mu^2 \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_x}{\partial x} \right]$$

angeben, und die c definiert sind durch

$$c_i = \left[\mu^2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial x} \right].$$

Weil die Gleichungen der Uebertragungsgrößen dasselbe Coefficientensystem haben wie die Correlatengleichungen, wird man sie nicht noch besonders aufzulösen brauchen. In allen Reductionen derselben sind die ersten Columnen genau dieselben wie bei den Correlaten, nur die letzte ist eine andere, da sie von den c abhängt, während sie bei den Correlaten durch die f bestimmt wird. Man löst daher die Uebertragungsgleichungen mit den Correlatengleichungen zusammen auf, indem man einfach zu den Columnen, die man für diese zu rechnen hat, in jeder Reduction noch eine

aus den c , sowie die aus den f gebildete rechnet. So bekommt man die Uebertragungsgrössen mit den Correlaten zugleich als Zahlen, und indem man sie in den vorstehenden Gleichungen für die $\overline{\partial F/\partial x}$ einführt, kann man nunmehr den mittlern Fehler der zusammengesetzten Grösse \overline{F} durch die Formel

$$\mu^2 = \sqrt{\mu^2 \left\{ \left(\frac{\overline{\partial F}}{\partial x_1} \right)^2 \mu_1^2 + \dots + \left(\frac{\overline{\partial F}}{\partial x_g} \right)^2 \mu_g^2 \right\} + \left(\frac{\overline{\partial F}}{\partial x_{g+1}} \right)^2 \mu_{g+1}^2 + \dots + \left(\frac{\overline{\partial F}}{\partial x_n} \right)^2 \mu_n^2}$$

zahlenmässig ausdrücken.

Es kommt vor, dass in der zusammengesetzten Grösse einzelne der von einander abhängigen Elemente garnicht vertreten sind, sei es, dass sie von vornherein fehlten, oder dass man sie mit Hilfe der Bedingungsgleichungen hat eliminiren können. Hat man aber alle Elemente beobachtet, so ändern sich die Formeln principiell garnicht, nur dass die verbesserte Function nur die Elemente sammt ihren Verbesserungen enthält, die in der unverbesserten stehen. In den Ausdrücken LXXVII für die $\overline{\partial F/\partial x}$ wird daher hin und wieder das erste Glied $\overline{\partial F/\partial x}$ fehlen, weil das betreffende x in F nicht vorhanden ist.

Wenn mehrere Systeme von Elementen Bedingungsgleichungen unterworfen sind, verfährt man für jedes System so wie für das hervorgehobene, indess werden die Verhältnisse für den Physiker meist sehr einfach liegen.

Die schematische Anordnung der einzelnen Rechnungen werde ich in der den Schluss dieses Abschnitts bildenden Zusammenfassung angeben; ich lasse erst ein Beispiel folgen.

189. Beispiel. Es treffe parallel zur Einfallsebene polarisirtes einfarbiges Licht auf eine reflectirende Ebene. Bezeichnet i den Einfallswinkel, ρ den Brechungswinkel, I die Intensität des einfallenden Lichts, so haben wir für die Intensität des reflectirten Lichts

$$R = I \frac{\sin^2(i - \rho)}{\sin^2(i + \rho)}.$$

Wir wollen diese Intensität bestimmen, ohne dass wir sie direct zu messen brauchen. Dazu messen wir die Intensität I des einfallenden Lichtes, den Einfallswinkel i und den Brechungswinkel ρ . Allein zwischen Einfalls- und Brechungswinkel besteht bekanntlich die Relation

$$\frac{\sin i}{\sin \rho} = n,$$

wo n den relativen Brechungsquotienten der beiden Medien, welche die reflectirende Ebene trennt, bedeutet. Durch eine voraufgegangene sorgfältige Untersuchung soll dieser Brechungsquotient so genau bestimmt sein, dass sein Betrag in Bezug auf die Grössen, mit denen wir es jetzt zu tun haben, als geradezu sicher angesehen werden darf, wir müssen dann ver-

langen, dass von den gemessenen Grössen die beiden i und ρ das Brechungsgesetz

$$\sin i - n \sin \rho = 0$$

genau erfüllen.

Nun können wir zunächst so verfahren, dass wir einen der beiden Winkel, etwa ρ , überhaupt nicht messen, indem wir ihn mit Hilfe des Brechungsgesetzes, welches hier als Bedingungsgleichung auftritt, aus dem Ausdruck für R eliminiren. Wir bekommen zunächst

$$R = I \left(\frac{\sin i \cos \rho - \cos i \sin \rho}{\sin i \cos \rho + \cos i \sin \rho} \right)^2$$

und hierin ist

$$\sin \rho = \frac{\sin i}{n}, \quad \cos \rho = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{n},$$

somit

$$R = I \left(\frac{\sin i \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos i \sin i}{\sin i \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \cos i \sin i} \right)^2.$$

n ist hier als bekannte Zahl anzusehen, und man hat nur I und i zu messen, um die zusammengesetzte Grösse zu erhalten.

Wenn man aber ρ nicht eliminirt und selbst mitmisst, so handelt es sich also um den wahrscheinlichsten Wert der zusammengesetzten Grösse

$$R = I \frac{\sin^2(i - \rho)}{\sin^2(i + \rho)},$$

von der die beiden Elemente i und ρ durch die Bedingungsgleichung

$$\sin i - n \sin \rho = 0,$$

wo n eine gegebene Zahl ist, verbunden sind.

Es mögen jetzt i und ρ die durch Messung für die bezeichneten Winkel erhaltenen Beträge sein. Weil diesen Beträgen Fehler anhaften können, werden sie der Bedingungsgleichung nicht mehr genügen. Stellen wir aber unsere jetzigen Bezeichnungen mit den früheren zusammen, so ist $g = 2$, $n = 1$, $x_1 = i$, $x_2 = \rho$, $x_3 = I$, $F = R$, ferner

$$f_1 = \sin i - n \sin \rho.$$

Der beobachtete mittlere Fehler von i sei μ_1 , der von ρ sei μ_2 , der von I sei μ_3 .

Weil nur eine Bedingungsgleichung zu erfüllen ist, existirt nur eine Correlate und eine Uebertragungsgrösse.

Wir haben nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial f_1}{\partial i} = \cos i, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial f_1}{\partial \rho} = -n \cos \rho, \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} &= \frac{\partial R}{\partial i} = 2I \frac{\cos(i-\rho) \sin(i-\rho)}{\sin^2(i+\rho)} - 2I \frac{\sin^2(i-\rho) \cos(i+\rho)}{\sin^3(i+\rho)} \\ &= 2I \frac{\sin 2\rho \sin(i-\rho)}{\sin^3(i+\rho)} \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial R}{\partial \rho} = -2I \frac{\sin 2i \sin(i-\rho)}{\sin^3(i+\rho)}.$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left[\mu^2 \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} \right] = \mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho, \\ c_1 &= \left[\mu^2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} \right] = \mu_1^2 2I \frac{\sin 2\rho \sin(i-\rho)}{\sin^3(i+\rho)} \cos i \\ &\quad + \mu_2^2 2I \frac{\sin 2i \sin(i-\rho)}{\sin^3(i+\rho)} n \cos \rho. \end{aligned}$$

Demgemäss lautet die einzige hier vorhandene Correlaten-Gleichung

$$\sin i - n \sin \rho = x(\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho)$$

und die einzige Uebertragungsgleichung

$$2I \frac{\sin(i-\rho)}{\sin^3(i+\rho)} (\mu_1^2 \sin 2\rho \cos i + \mu_2^2 n \sin 2i \cos \rho) = r_2 (\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho),$$

und es wird

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sin i - n \sin \rho}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho}, \\ r &= 2I \frac{\sin(i-\rho)}{\sin^3(i+\rho)} \cdot \frac{\mu_1^2 \sin 2\rho \cos i + \mu_2^2 n \sin 2i \cos \rho}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho}. \end{aligned}$$

Die Verbesserungen v_1 , v_2 der beobachteten Elemente i und ρ sind daher

$$\begin{aligned} v_1 &= -\mu_1^2 x \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -\mu_1^2 \frac{\sin i - n \sin \rho}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho} \cos i, \\ v_2 &= -\mu_2^2 x \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = +\mu_2^2 \frac{\sin i - n \sin \rho}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho} n \cos \rho. \end{aligned}$$

Die verbesserten Beträge \bar{i} , $\bar{\rho}$ der Elemente i und ρ

$$\begin{aligned} \bar{i} &= i + v_1 = i - \mu_1^2 \frac{\sin i - n \sin \rho}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho} \cos i, \\ \bar{\rho} &= \rho + v_2 = \rho + \mu_2^2 \frac{\sin i - n \sin \rho}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho} n \cos \rho. \end{aligned}$$

Diese Werte haben wir in den Ausdruck für R einzuführen, um den verbesserten Wert \bar{R} für die Intensität des reflectirten Lichtes zu bekommen.

Nun ist

$$\bar{i} - \bar{\rho} = i - \rho - \frac{\sin i - n \sin \rho}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho} (\mu_1^2 \cos i + \mu_2^2 n \cos \rho),$$

$$\bar{i} + \bar{\rho} = i + \rho - \frac{\sin i - n \sin \rho}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho} (\mu_1^2 \cos i - \mu_2^2 n \cos \rho),$$

also

$$\bar{R} = I \left\{ \frac{\sin \left[i - \rho - \frac{\sin i - n \sin \rho}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho} (\mu_1^2 \cos i + \mu_2^2 n \cos \rho) \right]}{\sin \left[i + \rho - \frac{\sin i - n \sin \rho}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho} (\mu_1^2 \cos i - \mu_2^2 n \cos \rho) \right]} \right\}^2.$$

Was die ausgeglichenen mittlern Fehler der Elemente i und ρ anbelangt, so haben wir zunächst

$$\begin{aligned} \frac{v_1^2}{\mu_1^2} + \frac{v_2^2}{\mu_2^2} &= \frac{(\sin i - n \sin \rho)^2}{(\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho)^2} \{ \mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho \} \\ &= \frac{(\sin i - n \sin \rho)^2}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho} \end{aligned}$$

und das stimmt mit dem Betrage, den die Controlformel LXXV ergeben würde.

Damit wird also

$$\bar{\mu}_1 = (\sin i - n \sin \rho) \sqrt{\frac{\mu_1^2}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho}},$$

$$\bar{\mu}_2 = (\sin i - n \sin \rho) \sqrt{\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho}}.$$

Um endlich noch den mittlern Fehler des verbesserten Resultats \bar{R} zu erhalten, haben wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_1} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial i} = \frac{\partial R}{\partial i} - r_1 \frac{\partial f_1}{\partial i} &= -2I \frac{\sin(i-\rho)}{\sin^3(i+\rho)} \left\{ \frac{\mu_1^2 \sin 2\rho \cos i + \mu_2^2 n \sin 2i \cos \rho}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho} \cos i - \sin 2\rho \right\} \\ &= -2I \frac{\sin(i-\rho)}{\sin^3(i+\rho)} \mu_2^2 n \cos \rho \frac{\cos i \sin 2i - n \cos \rho \sin 2\rho}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_2} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \rho} = \frac{\partial R}{\partial \rho} - r_1 \frac{\partial f_1}{\partial \rho} &= +2I \frac{\sin(i-\rho)}{\sin^3(i+\rho)} \left\{ \frac{\mu_1^2 \sin 2\rho \cos i + \mu_2^2 n \sin 2i \cos \rho}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho} n \cos \rho - \sin 2i \right\} \\ &= -2I \frac{\sin(i-\rho)}{\sin^3(i+\rho)} \mu_1^2 \cos i \frac{\cos i \sin 2i - n \cos \rho \sin 2\rho}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_3} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial I} = \frac{\partial R}{\partial I} = \frac{\sin^2(i-\rho)}{\sin^2(i+\rho)} = \frac{R}{I}.$$

Wir erhalten also

$$\left(\frac{\partial R}{\partial i}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \rho}\right)^2 \mu_2^2 = 4 I^2 \frac{\sin^2(i - \rho)}{\sin^6(i + \rho)} \mu_1^2 \mu_2^2 \frac{(\cos i \sin 2i - n \cos \rho \sin 2\rho)^2}{\mu_2^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho},$$

ersetzt man noch hierin I^2 durch $\frac{R^2 \sin^4(i + \rho)}{\sin^4(i - \rho)}$, so resultirt schliesslich

$$\mu = R \sqrt{4 \frac{\mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho} \left(\frac{\cos i \sin 2i - n \cos \rho \sin 2\rho}{\sin(i - \rho) \sin(i + \rho)} \right)^2 + \frac{\mu_3^2}{I^2}}.$$

Der Factor von R muss eine Zahl sein. $\frac{\mu_3^2}{I^2}$ ist schon eine Zahl, weil μ_3 als mittlerer Fehler von I mit I dieselbe Einheit haben muss. ρ und i sind Winkelgrössen, daher werden μ_1 und μ_2 als ihre beobachteten mittlern Fehler ebenfalls als Winkel ausgedrückt sein, da nun die trigonometrischen Functionen Verhältnisse von Bogen zu Radien angeben, so hat man die im Winkelmaass erhaltenen Beträge von μ_1 und μ_2 zu dividiren durch

$$57,2958 \text{ oder } 3437,7468 \text{ oder } 206264,8,$$

je nachdem sie in Grade, Minuten oder Secunden ausgedrückt sind.

Umgekehrt hat man bei der Berechnung von μ_1 , μ_2 und von \bar{R} die Grösse

$$\sin i - n \sin \rho$$

mit diesen betreffenden Zahlen zu multipliciren, je nachdem man $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$, \bar{i} und $\bar{\rho}$ in Grade, Minuten oder Secunden angeben will. Hierauf ist bei der numerischen Ausführung dieser Rechnungen wol zu achten.

Die Aufgabe lässt sich auch von einem anderen Gesichtspunkt behandeln.

Nachdem man nämlich aus dem Ausdruck für R mit Hilfe der Bedingungsgleichung ρ eliminirt hat, bekommt man, wie schon bemerkt,

$$R = I \left(\frac{\sin i \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\sin 2i}{2}}{\sin i \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\sin 2i}{2}} \right)^2.$$

Hat man trotzdem auch ρ beobachtet, und will, was ja unter allen Umständen wünschenswert, die Beobachtung dieser Grösse zur Sicherung von R mit heranziehen, so kann man wieder nach dem wahrscheinlichsten Wert des R fragen unter der Bedingung, dass die Bedingungsgleichung streng erfüllt wird. Das Verfahren ist genau dasselbe wie das obige. Die Correlaten-Gleichungen und die Verbesserungen bleiben ungeändert, nur die Uebertragungsgrössen sind andere, weil F , hier R , von $x_2 = \rho$ nicht abhängt und nach $x_1 = i$ eine andere Function ist als früher.

Wir haben nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial R}{\partial i} &= 2R \frac{\left(\cos i \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\sin^2 i \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} - \cos 2i \right)}{\sin i \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\sin 2i}{2}} \\ &- 2R \frac{\cos i \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\sin^2 i \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} + \cos 2i}{\sin i \sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\sin 2i}{2}} \\ &= 4R \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}, \end{aligned}$$

also lautet die Uebertragungsgleichung

$$4R \mu_1^2 \frac{\sin i \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = r (\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho),$$

und es wird

$$r = 4R \frac{\sin i \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \frac{\mu_1^2}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho}.$$

v_1 und v_2 ebenso wie $\bar{\mu}_1$ und $\bar{\mu}_2$ haben dieselben Beträge wie früher, dagegen bekommen wir R , wenn wir in dem Ausdruck

$$R = I \left\{ \frac{\sin i \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\sin 2i}{2}}{\sin i \sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\sin 2i}{2}} \right\}^2$$

das i ersetzen durch

$$\bar{i} = i + v_1 = i - \mu_1^2 \frac{\sin i - n \sin \rho}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho} \cos i.$$

Um den mittlern Fehler des verbesserten R zu berechnen, haben wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_1} = \frac{\partial R}{\partial i} - r \frac{\partial f_1}{\partial i} &= 4R \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \left\{ 1 - \frac{\mu_1^2 \cos^2 i}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho} \right\} \\ &= 4R n^2 \frac{\sin i \cos^2 \rho}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho}, \end{aligned}$$

somit wird

$$\mu = R \sqrt{16 \frac{n^4 \sin^2 i \cos^4 \rho}{n^2 - \sin^2 i} \frac{\bar{\mu}_2^2 \mu_2^4 \mu_1^2}{(\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho)^2} + \frac{\mu_3^2}{I^2}}.$$

Es ist interessant, dieses Resultat mit dem vorher für μ erhaltenen zu vergleichen.

Dort war das von μ_1, μ_2 abhängige Glied

$$\lambda_1 = 4 \frac{\overline{\mu^2 \mu_1^2 \mu_1^2}}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_1^2 n^2 \cos^2 \rho} \cdot \left(\frac{\cos i \sin 2i - n \cos \rho \sin 2\rho}{\sin(i - \rho) \sin(i + \rho)} \right)^2.$$

Da $n \sin \rho$ sehr nahe gleich $\sin i$ ist, hat der in () gefasste Quotient wie man sich leicht überzeugt, nahezu den Wert $4 \sin^2 i$, so dass man dieses Glied bis auf eine sehr kleine Grösse auch schreiben kann

$$\lambda_1 = 16 \frac{\overline{\mu^2 \mu_1^2 \mu_2^2} \sin^2 i}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho}.$$

In dem andern für μ gewonnenen Ausdruck schreibe ich das von μ_1, μ_2 abhängige Glied in der Form

$$\lambda_2 = 16 \frac{\overline{\mu^2 \mu_1^2 \mu_2^2} \sin^2 i}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho} \cdot \frac{n^2 \cos^2 \rho}{n^2 - \sin^2 i} \cdot \frac{\mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho}{\mu_1^2 \cos^2 i + \mu_2^2 n^2 \cos^2 \rho}.$$

Der erste Factor ist dasselbe wie λ_1 , der zweite Factor unterscheidet sich von 1 nur sehr wenig, wären die Beobachtungen fehlerfrei, so betrüge sein Wert geradezu 1. Der dritte Factor ist jedenfalls kleiner als 1. Also ist λ_2 kleiner als λ_1 , und da wir jedenfalls das Verfahren vorzuziehen haben, welches für das Endresultat den kleinern mittlern Fehler ergibt, ist es vorteilhafter, zur Berechnung von R sich der Gleichung zu bedienen, in der das Element, das sich aus der zusammengesetzten Grösse mit Hilfe der Bedingungsgleichung eliminiren lässt, auch eliminirt ist, natürlich nur dann, wenn trotzdem das eliminirte Element mit beobachtet und zur Sicherung des Resultats mit herangezogen wird. Das gilt nicht blos hier, sondern allgemeiner, wie sich bald zeigen wird. Die ganze Rechnung verliert ihren Wert, so wie die Grösse n selbst erst gemessen werden muss, denn dann kann man das Brechungsgesetz nicht mehr als Bedingungsgleichung auffassen, da, wenn es etwa durch die beobachteten Beträge der Winkel i und ρ nicht erfüllt wird, die Schuld auch der Unsicherheit von n beigemessen werden kann. Das Brechungsgesetz gewinnt erst seinen Charakter als Bedingungsgleichung, so wie man sich in irgend einer Weise davon überzeugt hat, dass der Zahlenwert, den man für n zur Verfügung hat, so genau ist, dass seine etwaige Unsicherheit durchaus nicht zur Erklärung des Abweichens der Grösse $\sin i - n \sin \rho$ nach den gerade vorliegenden Beobachtungen von Null herangezogen werden kann, auch nicht zu der eines für uns noch in Betracht kommenden aliquoten Theiles dieses Abweichens.

Eine ganz andere Aufgabe ist es, wenn wir mit i und ρ zugleich auch n beobachten, und verlangen, dass der Intensitätsformel wie dem Brechungsgesetz tunlichst genügt wird. Diese gehört in das Gebiet der Untersuchungen, und in dem Abschnitt, in dem dieses behandelt werden soll, werden wir auch auf diese andere Form der Aufgabe zurückkommen können.

XIII. Zusammengesetzte Messungen mit zum Teil zusammengesetzten Elementen.

c) Ersetzung von Elementen durch andere Elemente.

190. Art der Abhängigkeit und Berechnung des wahrscheinlichsten Resultats. Der zweite in Art. 160 hervorgehobene Fall ist der, wo die Elemente der zusammengesetzten Grösse nicht direct von einander, sondern von gewissen andern Elementen abhängig sind, wo die Elemente selbst Functionen anderer Elemente sind. Gewöhnlich liegen die Verhältnisse so, dass die neuen Elemente die allein durch die Beobachtung bestimmten sind, während die Elemente der zusammengesetzten Grösse aus ihnen erst berechnet werden. Sollte das nicht der Fall sein, so beobachtet man alle Elemente, sieht die neuen wie mit den alten zusammen ein einziges System bildend an (nur dass diese in der zusammengesetzten Grösse fehlen) und berechnet ihre Verbesserungen genau nach dem vorigen Schema.

Auch dann, wenn diese neuen Elemente die allein beobachteten sind, kann es sich naturgemäss nicht um besondere Schwierigkeiten bei der Bildung der zusammengesetzten Grösse handeln; man berechnet erst ihre Elemente aus den Grössen, von denen sie abhängen, und führt ihre so erhaltenen Beträge in die gesuchte Function ein. Nur die Bestimmung des mittlern Fehlers der zusammengesetzten Grösse fordert zu einer leichten Ueberlegung auf.

191. Fehlerrechnung für eine Grösse, deren Elemente aus andern beobachteten Elementen zusammengesetzt sind. Es seien wieder x_1, x_2, \dots, x_n die Elemente der Function $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Es sollen diese Elemente nicht selbst beobachtet sein, sondern durch m andere Elemente $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, die sämmtlich gemessen sind, mittelst der gegebenen Functionen

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m), \\ \text{LXXIX)} \quad x_2 &= f_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m), \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \end{aligned}$$

bestimmt sein.

Wenn $m < n$, so können nicht alle x von einander unabhängig sein, denn wenn wir aus den Gleichungen $x = f$ uns die ξ eliminirt denken, bleiben $n - m$ Gleichungen zwischen den x bestehen. Dieser Fall lässt sich zwar auch mit Hilfe der voraufgehenden Theoreme vollständig bearbeiten, er hat aber vorläufig keine Bedeutung, und wird sich in der Theorie der Untersuchungen wieder finden. Wichtig ist für uns nur der Fall, wo $m > n$ ist.

Ersetzt man nun in F die x durch ihre Ausdrücke als Functionen der ξ , so wird

$$F = F(f_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m), f_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m), \dots, f_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)),$$

somit einfach

$$F = \Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m).$$

Um also in diesem Falle den mittlern Fehler (und damit alle andern charakteristischen Fehler) von der gesuchten Grösse zu bekommen, transformirt man sie in eine Function derjenigen Grössen, die direct beobachtet sind und von denen ihre Elemente abhängen, und sucht von dieser Function den mittlern Fehler auf, der natürlich gegeben ist durch

$$\text{LXXX}_1) \quad \mu = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\right)^2 \mu_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_m}\right)^2 \mu_m^2},$$

falls μ_i den mittlern Fehler von ξ_i bedeutet.

Dass man in dem Ausdruck für F die x durch die ξ ersetzen soll, ist nur des leichtern Verständnisses wegen gesagt, wenn man weiss, worauf es ankommt, kann man sich auch so ausdrücken, dass

$$\text{LXXX}_2) \quad \mu = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_1}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_2}\right)^2 \mu_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_m}\right)^2 \mu_m^2}$$

ist, vorausgesetzt, dass die Abgeleiteten von F nach den Regeln berechnet werden

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1}, \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \xi_2}, \\ &\vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_m} &= \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_m} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_m} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \xi_m}. \end{aligned}$$

Dieses ist unter allen Umständen die sicherste Methode zur Berechnung des mittlern Fehlers. Eine Schwierigkeit in ihrer Anwendung könnte nur dann eintreten, wenn die Abhängigkeit der x von den ξ nicht in der expliciten Form

$$x_i = f_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$$

gegeben wäre, sondern in der complicirten

$$\varphi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m; x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

wo dann die explicite Darstellung der einzelnen x als Functionen der ξ nur selten ausführbar sein würde. Man hilft sich dann so, wie man es immer in der Ausgleichsrechnung tut. Man sucht sich erst Näherungswerte für die x , sind diese a_1, a_2, \dots, a_n , so setzt man

$$x_1 = a_1 + \alpha_1, x_2 = a_2 + \alpha_2, \dots, x_n = a_n + \alpha_n$$

und in erster Näherung

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m; a_1, a_2, \dots, a_n) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_1} \alpha_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_2} \alpha_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_n} \alpha_n &= 0, \\ \varphi_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m; a_1, a_2, \dots, a_n) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_1} \alpha_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_2} \alpha_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_n} \alpha_n &= 0, \\ \vdots & \\ \varphi_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m; a_1, a_2, \dots, a_n) + \frac{\partial \varphi_n}{\partial a_1} \alpha_1 + \frac{\partial \varphi_n}{\partial a_2} \alpha_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial a_n} \alpha_n &= 0. \end{aligned}$$

Diese n Gleichungen sind in Bezug auf die α linear, man kann sie also in Bezug auf die α auflösen und bekommt

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \psi_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m; a_1, a_2, \dots, a_n), \\ \alpha_2 &= \psi_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m; a_1, a_2, \dots, a_n), \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned}$$

und hat nunmehr nach der Substitution der Beträge für die α in

$$F' = F(a_1 + \alpha_1, a_2 + \alpha_2, \dots, a_n + \alpha_n)$$

wieder eine Function Φ von $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, für die man dann den mittlern Fehler bestimmt. Selbstverständlich spielen dabei die Näherungswerte a_1, a_2, \dots, a_n keine Rolle. Die Aufsuchung von Näherungswerten a_1, a_2, \dots, a_n ist meist nicht leicht, aber glücklicher Weise stellen sich dem Physiker die Probleme nur sehr selten in complicirter Form dar.

192. Beispiel. Ich lasse ein Beispiel folgen, dessen vollständige Behandlung uns erst in der Lehre von der Ausgleichung von Untersuchungen und von andern Gesichtspunkten beschäftigen wird.

Wenn man die erdmagnetischen Elemente einer continuirlichen Beobachtung unterzieht, so bemerkt man bald, dass sie gewisse Veränderungen erleiden, die von Tag zu Tag in derselben Weise wiederkehren, und in einem nicht zu ausgedehnten Zeitraum an bestimmte Tagesstunden gebunden sind. Die Elemente variiren periodisch. Man stellt daher ihren täglichen Gang durch periodische Reihen von der Form

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} c_0 + c_1 \cos 1x + c_2 \cos 2x + c_3 \cos 3x + \dots \\ &\quad + s_1 \sin 1x + s_2 \sin 2x + s_3 \sin 3x + \dots \end{aligned}$$

dar, wo, wenn man die Zeit in Stunden rechnet, $x = 15t$ ist, falls t die Nummer der betreffenden Stunde angibt.

Die Constanten c und s berechnet man aus den Beobachtungen des betreffenden Tages. Hat man zum Beispiel das betreffende erdmagnetische Element, etwa die Declination, zu den Stunden $0^h, 1^h, 2^h, \dots, 23^h$ bestimmt und für dasselbe die Beträge $D_0, D_1, D_2, \dots, D_{23}$ gefunden, so giebt das 24 Gleichungen von der Form

$$D_i = \frac{1}{2} c_0 + c_1 \cos 1x_i + c_2 \cos 2x_i + c_3 \cos 3x_i + \dots \\ + s_1 \sin 1x_i + s_2 \sin 2x_i + s_3 \sin 3x_i + \dots \\ i = 0, 1, 2, 3, \dots, 23,$$

aus denen man so viele der Constanten c, s zu berechnen vermag, als zur genügenden Darstellung der beobachteten Beträge D_i nötig sind. Wie man dabei zu verfahren hat, wird erst in dem Abschnitt über „Untersuchungen“ auseinandergesetzt werden, nur das muss vorweg bemerkt werden, dass jedes der c und s sich als lineare Function aller D ergibt, derartig, dass man setzen kann

$$c_i = \gamma_{i0} D_0 + \gamma_{i1} D_1 + \gamma_{i2} D_2 + \dots + \gamma_{i23} D_{23}, \\ s_i = \sigma_{i0} D_0 + \sigma_{i1} D_1 + \sigma_{i2} D_2 + \dots + \sigma_{i23} D_{23}.$$

Wenn die mittlern Fehler der beobachteten D bezüglich sind $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{23}$, so haben wir für die mittlern Fehler μ_{c_i} und μ_{s_i} der c und s nach Satz 57

$$\mu_{c_i} = \sqrt{\gamma_{i0}^2 \mu_0^2 + \gamma_{i1}^2 \mu_1^2 + \gamma_{i2}^2 \mu_2^2 + \dots + \gamma_{i23}^2 \mu_{23}^2}, \\ \mu_{s_i} = \sqrt{\sigma_{i0}^2 \mu_0^2 + \sigma_{i1}^2 \mu_1^2 + \sigma_{i2}^2 \mu_2^2 + \dots + \sigma_{i23}^2 \mu_{23}^2}.$$

Nachdem man die c und s berechnet, transformirt man gewöhnlich die periodische Reihe so, dass sie in die

$$D = A_0 + A_1 \sin(x + \alpha_1) + A_2 \sin(2x + \alpha_2) + A_3 \sin(3x + \alpha_3) + \dots$$

übergeht, und es fragt sich dann, welche mittlern Fehler man den A und α zuzuschreiben hat.

Wie man eine solche Transformation ausführt, ist bekannt genug. Man setzt

$$A_0 = \frac{1}{2} c_0,$$

dann aber

$$c_1 = A_1 \sin \alpha_1, \\ s_1 = A_1 \cos \alpha_1,$$

und allgemein

$$\begin{aligned}c_i &= A_i \sin \alpha_i, \\s_i &= A_i \cos \alpha_i.\end{aligned}$$

Hiernach hat man

$$\begin{aligned}A_i &= \sqrt{c_i^2 + s_i^2}, \\ \alpha_i &= \operatorname{arctg} \frac{c_i}{s_i}.\end{aligned}$$

A_i ist eine Function von c_i und s_i , und ebenso ist α_i eine Function von c_i und s_i . Wären c_i und s_i selbst die beobachteten Grössen, so hätte man nach Satz 57 den mittlern Fehler von A_i

$$\begin{aligned}\mu'_{A_i} &= \sqrt{\frac{c_i^2}{c_i^2 + s_i^2} \mu_{c_i}^2 + \frac{s_i^2}{c_i^2 + s_i^2} \mu_{s_i}^2}, \\ \mu'_{\alpha_i} &= \sqrt{\frac{s_i^2}{(c_i^2 + s_i^2)^2} \mu_{c_i}^2 + \frac{c_i^2}{(c_i^2 + s_i^2)^2} \mu_{s_i}^2} = \frac{\sqrt{s_i^2 \mu_{c_i}^2 + c_i^2 \mu_{s_i}^2}}{c_i^2 + s_i^2}.\end{aligned}$$

Es sind aber die c und s nicht direct beobachtet, sondern erst aus den D abgeleitet, und diese sind die eigentlich beobachteten Grössen. Wir haben daher zunächst die Werte der c und s als Functionen der D in die Ausdrücke für A_i und α_i einzuführen. So bekommen wir, um uns zunächst mit α_i zu beschäftigen,

$$\alpha_i = \operatorname{arctg} \left(\frac{\gamma_{i0} D_0 + \gamma_{i1} D_1 + \gamma_{i2} D_2 + \cdots + \gamma_{i23} D_{23}}{\sigma_{i0} D_0 + \sigma_{i1} D_1 + \sigma_{i2} D_2 + \cdots + \sigma_{i23} D_{23}} \right),$$

und es wird

$$\mu_{\alpha_i}^2 = \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial D_0} \right)^2 \mu_0^2 + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial D_1} \right)^2 \mu_1^2 + \cdots + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial D_{23}} \right)^2 \mu_{23}^2.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial D_\lambda} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial D_\lambda} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_i} \frac{\partial s_i}{\partial D_\lambda} = \frac{s_i \gamma_{i\lambda}}{c_i^2 + s_i^2} - \frac{c_i \sigma_{i\lambda}}{c_i^2 + s_i^2} = \frac{s_i \gamma_{i\lambda} - c_i \sigma_{i\lambda}}{c_i^2 + s_i^2},$$

also wird

$$\mu_{\alpha_i}^2 = \frac{(s_i \gamma_{i0} - c_i \sigma_{i0})^2 \mu_0^2 + (s_i \gamma_{i1} - c_i \sigma_{i1})^2 \mu_1^2 + \cdots + (s_i \gamma_{i23} - c_i \sigma_{i23})^2 \mu_{23}^2}{(c_i^2 + s_i^2)^2}.$$

Den Zähler dieses Ausdrucks kann man auch schreiben

$$\begin{aligned}s_i^2 (\gamma_{i0}^2 \mu_0^2 + \gamma_{i1}^2 \mu_1^2 + \cdots + \gamma_{i23}^2 \mu_{23}^2) + c_i^2 (\sigma_{i0}^2 \mu_0^2 + \sigma_{i1}^2 \mu_1^2 + \cdots + \sigma_{i23}^2 \mu_{23}^2) \\ - 2s_i c_i (\gamma_{i0} \sigma_{i0} \mu_0^2 + \gamma_{i1} \sigma_{i1} \mu_1^2 + \cdots + \gamma_{i23} \sigma_{i23} \mu_{23}^2),\end{aligned}$$

also nach Satz 57 auch

$$s_i^2 \mu_{c_i}^2 + c_i^2 \mu_{s_i}^2 - 2s_i c_i M^2,$$

wo

$$M^2 = \gamma_{i0} \sigma_{i0} \mu_0^2 + \gamma_{i1} \sigma_{i1} \mu_1^2 + \dots + \gamma_{i23} \sigma_{i23} \mu_{23}^2$$

gesetzt wird.

$$\mu_{\alpha_i}^2 = \frac{s_i^2 \mu_{c_i}^2 + c_i^2 \mu_{s_i}^2}{(c_i^2 + s_i^2)^2} - \frac{2s_i c_i M^2}{(c_i^2 + s_i^2)^2},$$

und das weicht von dem unter der Voraussetzung, dass s_i und c_i direct beobachtet sind, berechneten Betrage von $\mu_{\alpha_i}^2$ ab um das Glied

$$- \frac{2s_i c_i M^2}{(c_i^2 + s_i^2)^2}.$$

Die Bedeutung dieses Gliedes kann erst klar werden, wenn wir die Coefficienten γ und σ in den Ausdrücken für die c und s zu bestimmen gelernt haben, doch bemerke ich gleich hier, den diesbezüglichen Entwicklungen vorgreifend, dass M sich in gewissen Fällen gleich Null herausstellen kann, so dass in diesen besondern Fällen $\mu_{\alpha_i} = \mu'_{\alpha_i}$ ist. Für die Grösse A_i haben wir zunächst

$$\mu_{A_i}^2 = \left(\frac{\partial A_i}{\partial D_0} \right)^2 \mu_0^2 + \left(\frac{\partial A_i}{\partial D_1} \right)^2 \mu_1^2 + \dots + \left(\frac{\partial A_i}{\partial D_n} \right)^2 \mu_n^2.$$

Darin ist

$$\frac{\partial A_i}{\partial D_\lambda} = \frac{\partial A_i}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial D_\lambda} + \frac{\partial A_i}{\partial s_i} \frac{\partial s_i}{\partial D_\lambda} = \frac{c_i \gamma_{i\lambda}}{\sqrt{c_i^2 + s_i^2}} + \frac{s_i \sigma_{i\lambda}}{\sqrt{c_i^2 + s_i^2}}.$$

Wir finden sonach ähnlich wie bei der Berechnung von μ_{α_i}

$$\mu_{A_i}^2 = \frac{c_i^2 \mu_{c_i}^2 + s_i^2 \mu_{s_i}^2}{c_i^2 + s_i^2} + \frac{2s_i c_i M}{c_i^2 + s_i^2},$$

und in den besondern Fällen, wo M sich gleich Null herausstellen wird, dürfen wir auch für A_i den mittlern Fehler aus den mittlern Fehlern seiner Elemente c_i und s_i so berechnen, wie wenn diese Elemente direct beobachtet wären. Aber von vornherein ist das nicht vorauszusehen.

XIII. Kritik zusammengesetzter Messungen.

Die Kritik der zusammengesetzten Messungen zerfällt in zwei Teile, die auf den übrig bleibenden Fehlern der Elemente und den für die charakteristischen Fehler, insbesondere für den mittlern Fehler gegebenen Darstellungen beruhen. Einmal handelt es sich um eine Kritik dessen, was erreicht werden soll und kann, und dann um das, was erreicht worden ist.

193. Beurteilung der Schlussergebnisse, Einführung des zu erwartenden mittlern Fehlers. In der Beurteilung des Schlussergebnisses werden erst die Messungen der einzelnen Elemente einer Kritik unterzogen, und dann an dem berechneten mittlern Fehler der zusammengesetzten Grösse gesehen, ob die erreichte Genauigkeit in ihrer Bestimmung ausreicht oder nicht. Die Messungen der Elemente sind aber einfache Messungen, es gelten also für ihre Kritisierung alle für die Beurteilung einfacher Messungen in dem Capitel VII aufgestellten Regeln, auf die verwiesen werden muss.

Wenn man mit den Eigenheiten der Apparate, mit denen man die Elemente messen soll, genügend vertraut ist, weiss man gewöhnlich im Voraus, welche mittlern Fehler ungefähr den Messungen anhaften werden. Führt man dann auch — wozu man fast immer in der Lage ist — genäherte Werte für die Elemente ein, so kann man den für die zusammengesetzte Grösse F zu erwartenden mittlern Fehler nach der Formel

$$\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 \mu_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2 \mu_n^2}$$

im Voraus berechnen. Man nennt diesen so aus einem vorausgegangenen Studium der Apparate und der Beobachtungsgenauigkeit vor den eigentlichen Messungen abzuleitenden mittlern Fehler den theoretischen mittlern Fehler, und sieht das Resultat der eigentlichen Messungen als den Erwartungen entsprechend und von systematischen Versehen frei an, wenn der aus den Messungen selbst folgende, der „beobachtete“ mittlere Fehler nicht mehr von den „theoretischen“ abweicht, als die Unsicherheit in der vor den Messungen vorgenommenen Abschätzung der bei der Bestimmung der Elemente zu erwartenden mittlern Fehler zu erklären vermag. Dient so der theoretische mittlere Fehler zur Kritisierung der Messungen, so kann er ausserdem noch herangezogen werden, um das Maass von Sorgfalt, welches man den Messungen der einzelnen Elemente bezüglich zu widmen hat, richtig zu verteilen.

194. Kriterien für das Maass von Sorgfalt, welches den einzelnen Elementen zu widmen ist. In der Tat muss die Untersuchung dessen, was man bei der Bestimmung einer zusammengesetzten Grösse mit vorgelegtem Elementensystem zu erreichen vermag, vor Ausführung der Messungen geschehen. Wir gehen von der Formel für den mittlern Fehler μ der zu-

sammengesetzten Grösse F aus. Offenbar wird man immer streben, diesen mittlern Fehler so klein als möglich zu gestalten. Es ist nun dieser mittlere Fehler

$$\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 \mu_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2 \mu_n^2},$$

und da alle Glieder in seinem Ausdruck Quadrate sind, bewirkt die Vergrößerung bezüglich Verkleinerung jedes derselben eine Verschlechterung bezüglich Verbesserung des Resultats der Messungen. Nun hängt aber jedes Glied von zwei Factoren ab, nämlich dem partiellen Differentialquotienten der gesuchten Function nach dem betreffenden Element und dem mittlern Fehler dieses Elements; ist der erste gross, so muss man den zweiten tunlichst klein zu machen suchen, ist er klein, so darf man das betreffende Element schon mit geringerer Sorgfalt bestimmen. Also:

62. *Die Messung eines Elements muss um so genauer durchgeführt werden, je grösser die nach ihm von der zusammengesetzten Grösse gebildete erste Ableitung ist.*

Ehe man die Elemente selbst gemessen hat, kann man zwar die betreffenden Abgeleiteten nicht streng berechnen, aber es reicht schon aus, wenn man für die Elemente Näherungswerte (die man im allgemeinen von vornherein schon zur Hand hat) einführt, und mit diesen die betreffenden Abgeleiteten ausrechnet.

Findet man, dass für ein Element x_i die Abgeleitete $\partial F/\partial x_i$ viel kleiner ist als für ein anderes Element x_x , so wäre es eine Thorheit, wenn man es mit ganz derselben Genauigkeit messen wollte wie dieses, man wendet lieber die Arbeit, die man bei der Messung von x_i erspart, auf die von x_x auf. Das scheint alles klar und selbstverständlich, indessen ist es gut darauf aufmerksam zu machen, denn es wird gegen diese so einfache Regel nicht selten gefehlt.

195. Kriterium für die Wahl des geeignetsten Elementensystems. Es geschieht oft, dass man eine bestimmte Grösse aus mehreren Elementensystemen zusammensetzen vermag. Das genaueste Resultat erhält man dann, wie in Artikel 148 näher ausgeführt ist, wenn man alle Elementensysteme misst, die betreffende Grösse aus allen Elementensystemen zusammensetzt und aus den für sie so erhaltenen Beträgen nach Maassgabe der Gewichte, die man ihnen zuschreiben muss, und die wir jetzt zu berechnen gelernt haben, das arithmetische Mittel bildet. Scheut man aber die mit einem solchen Verfahren meist verbundene bedeutende Arbeit, so wird man sich wenigstens von allen Elementensystemen das geeignetste herausuchen.

Im allgemeinen ist wol das System am günstigsten, welches die geringste Anzahl von Elementen umfasst, festere Anhaltspunkte gewinnt man aber nur, wenn man für die Elemente, sowie für ihre zu befürchtenden mittlern Fehler genäherte Werte kennt, da man dann mit diesen Werten jedesmal einen genäherten Betrag für den mittlern Fehler

des Resultats ausrechnen kann. Man wird dann das System wählen, welches bei dem Maass von Arbeit, das man aufzuwenden gewillt ist, für den mittlern Fehler des Resultats den kleinsten genäherten Betrag liefert. Eine gewisse Willkür ist nicht zu vermeiden, denn wenn auch die genäherten Werte der Elemente keiner Discussion unterliegen werden, können doch die genäherten Beträge für die mittlern Fehler ihrer Messungen von einem Beobachter anders als von dem andern angesetzt werden, und auch das Maass der aufzuwendenden Arbeit wird vielfach von dem subjectiven Ermessen des Beobachters abhängen. Hat man eine und dieselbe Grösse öfter zu messen, so wird man mit den Elementensystemen abwechseln, und dann wird sich bald genug herausstellen, welches System für die besondern Einrichtungen, die man besitzt, und den besondern Zweck, den man verfolgt, das vorteilhafteste ist.

196. Beispiel zur Entscheidung für ein bestimmtes Elementensystem.

Ein sehr geeignetes Beispiel bietet die schon mehrfach angeführte Aufgabe der Capillaritätsbestimmung.

Ich habe früher bemerkt, dass man den Capillaritätscoefficienten a^2 einer Flüssigkeit, welche die in sie eingetauchten Körper vollständig benetzt, aus der Steighöhe in einer nicht zu weiten (nicht über 2 mm weiten) Röhre nach der Formel

$$a_1) \quad a^2 = r \left(h_1 + \frac{1}{3} r \right)$$

zu bestimmen vermag, wo h_1 die Steighöhe und r den Radius der Röhre bedeutet. Hier sind die Elemente der zusammengesetzten Grösse r und h_1 .

Aber jede andere Consequenz der Capillaritätstheorie kann nicht minder zur Bestimmung von a^2 herangezogen werden.

Beobachtet man die Steighöhe h_2 zwischen zwei parallelen ebenen Platten, die man vertical in die Flüssigkeit eingesenkt hat, so ist

$$a_2) \quad a^2 = d \left(h_2 + \frac{d}{10} \right),$$

wenn d den Abstand der beiden Platten von einander bedeutet. Hier sind h_2 und d die Elemente.

Man kann auch a^2 aus der Steighöhe h_3 an einer ebenen Wand bestimmen, denn man hat in diesem Fall

$$a_3) \quad a^2 = h_3^2.$$

Tut man ferner die Flüssigkeit in ein Gefäss, deckt über sie eine ebene Glasplatte und lässt etwas Luft hinein, so bildet sich in ihr eine Luftblase, die gegen die Platte anliegt und etwa die Form der Blase in einer Dosenlibelle hat. Misst man dann die grösste Höhe h_4 der Luftblase, so ist, falls diese Blase gross genug ist,

$$a_4) \quad a^2 = \frac{h_4^2}{2},$$

und wenn man noch den Abstand der Spitze der Blase von der Ebene, die durch ihren grössten Umfang geht, mit h_5 bezeichnet, ist

$$a_5) \quad a^2 = h_5^2.$$

In den drei letzten Fällen ist nur je ein Element vorhanden.

Andere Formeln machen a^2 wieder von zwei oder noch mehr Elementen abhängig.

Taucht man einen irgendwie geformten Körper in die betreffende Flüssigkeit, so ist das Gewicht des an demselben durch die capillaren Kräfte emporgehobenen Flüssigkeitswulstes gleich dem halben Betrag des Capillaritätscoefficienten multiplicirt mit dem Umfang, den der Körper an der Stelle hat, wo der Wulstrand ihn trifft, wieder vorausgesetzt, dass der Körper von der Flüssigkeit vollständig benetzt wird und dass derselbe da, wo der Wulst sich ausbildet, keine scharfen Kanten und Spitzen aufweist.

Ich bezeichne mit g das Gewicht des Wulstes, und nenne s die Dichtigkeit der Flüssigkeit, U den Umfang des Körpers an der Stelle, wo er vom Wulstrand geschnitten wird, dann ist also

$$g = \frac{1}{2} a^2 s U,$$

und

$$a_6') \quad a^2 = \frac{2g}{sU}.$$

Der Umfang U lässt sich direct ausmessen, die Dichtigkeit s der Flüssigkeit mit hinreichender Genauigkeit zu bestimmen, bietet gar keine Schwierigkeit, das Gewicht g des Wulstes lässt sich aber für sich allein nicht eruiren, weil es nicht möglich ist, den Wulst von der übrigen Flüssigkeit zu trennen.

Man verfährt daher so, dass man den Körper an eine Wagschale hängt, und seinen Gewichtsverlust bestimmt, wenn er bis zu einer bestimmten auf seiner Oberfläche gezogenen Marke in die Flüssigkeit eintaucht. Aus seinen Dimensionen, der Dichtigkeit der Flüssigkeit und der Grösse des eintauchenden Stückes lässt sich der Gewichtsverlust, den er dem Archimedischen Princip zufolge erleiden sollte, berechnen, die Differenz gegen den tatsächlich beobachteten Gewichtsverlust giebt das gesuchte Gewicht des Wulstes. Der Körper soll die Form einer rechteckigen Platte haben, die Flüssigkeit sich in einem weiten Gefäss befinden. Taucht der Körper senkrecht zum Teil in die Flüssigkeit ein, so bildet letztere an ihm selbst einen Wulst, in einiger Entfernung von ihm ist sie aber eben. Ich bezeichne die Länge der Platte von ihrem untern Ende bis zur Niveauebene der Flüssigkeit mit l , die Dicke derselben mit d , ihre Breite mit b , der Gewichtsverlust der Platte in der Flüssigkeit ist dann nach dem Archimedischen Princip gleich $bdls$. Ihr Gewichtsverlust in der Luft $bd(L-l)\gamma$, falls L ihre ganze Länge angiebt und γ die Dichtigkeit der Luft bedeutet. Ist daher G das

Gewicht der Platte im luftleeren Raume, G_1 dasjenige Gewicht, welches sie zum Teil in die Flüssigkeit eingesenkt zeigen würde, wenn die Flüssigkeit keine Capillaritätserscheinungen besässe, so wäre

$$G_1 = G - bd(sl + (L - l)\gamma).$$

Tatsächlich bildet sich aber an der Platte der Wulst aus, das Gewicht G_1 erscheint um das Gewicht g dieses Wulstes vergrössert, und wenn G' das wirklich beobachtete Gewicht ist, so hat man

$$G' = G - bd(sl + (L - l)\gamma) + g,$$

also

$$g = G' + bd(sl + \gamma(L - l)) - G,$$

somit

$$a_6^2 = \frac{G' + bd(sl + \gamma(L - l)) - G}{(b + d)s}.$$

Das Gewicht G' wird durch eine Anzahl von Gewichtstücken, die man auf die linke Schale der Waage zu legen hat, wenn der Körper an der rechten hängt, angezeigt. Solche Gewichtstücke haben aber den auf ihnen verzeichneten Betrag nur im leeren Raum, und da man bei luftfühltem Raum wägt, hat man ihren nominellen Betrag um das Gewicht der Luft, welche sie verdrängen, zu verringern. Ist also z der absolute Wert der aufgelegten Gewichtstücke, v das Volumen derselben, so wird

$$G' = z - \gamma v$$

und

$$a_6^2 = \frac{z + bd(sl + \gamma(L - l)) - G - \gamma v}{s(b + d)}.$$

Hier ist a^2 aus einer sehr grossen Anzahl von Elementen zusammengesetzt, von denen streng genommen jedes für sich gemessen werden muss. Es giebt noch andere Methoden zur Bestimmung von a^2 , wir wollen uns aber mit den angeführten 6 begnügen und nun zu entscheiden suchen, welche von ihnen die meiste Sicherheit in der Bestimmung der gesuchten Grösse gewährleistet, indem wir annehmen, dass auf die Fehler dieser Grösse allein die Fehler der Messungen der Elemente Einfluss haben.

Die einfachsten Methoden sind die, welche für a nur die Messung eines Elements verlangen. Indem wir mit μ_λ den mittlern Fehler einer Grösse λ bezeichnen, bekommen wir je nach den Methoden, die wir zur Bestimmung von a^2 anwenden, abgesehen von der letzten Methode, die für sich allein bearbeitet werden soll, die folgende Zusammenstellung

Methode.	Formel.	Mittlerer Fehler.
1. Steighöhe an einer Platte	$a^2 = h_3^2$,	$\mu = 2h_3 \mu_{h_3}$
2. Luftblase	} $a^2 = \frac{h_4^2}{2}$,	$\mu = h_4 \mu_{h_4}$
3. „		
	} $a^2 = h_5^2$,	$\mu = 2h_5 \mu_{h_5}$
4. Steighöhe in einer Capillarröhre	$a^2 = r \left(h_1 + \frac{r}{3} \right)$,	$\mu = \sqrt{\left(h_1 + \frac{2}{3} r \right)^2 \mu_r^2 + r^2 \mu_{h_1}^2}$
5. Steighöhe zwischen zwei Platten	$a^2 = d \left(h_2 + \frac{d}{10} \right)$,	$\mu = \sqrt{\left(h_2 + \frac{d}{5} \right)^2 \mu_d^2 + d^2 \mu_{h_2}^2}$

Um gleiche Verhältnisse zu haben, wollen wir annehmen, dass in jeder Methode jedes der vertretenen Elemente nur einmal gemessen wird. Bei der ersten Methode hat man die Höhe h_3 des an der Platte angestiegenen Flüssigkeitswalls zu messen, also den Abstand der oberen Linie dieses Walls von dem Niveau der Flüssigkeit. Aber die obere Begrenzung lässt sich nur schwer genau ermitteln, zumal man, um den Anforderungen der Theorie gerecht zu werden, die Platte vorher gehörig benetzt haben muss. Nach meinen eigenen Erfahrungen kann bei der Schätzung der Lage dieser oberen Begrenzung leicht ein Fehler von 0,1 mm unterlaufen. Hagen hat solche Messungen an einer Messingplatte, die in Wasser tauchte, ausgeführt, 5 aufeinanderfolgende Ausmessungen der Steighöhe an derselben ergaben in mm die Zahlen*)

3,11; 2,86; 3,13; 3,29; 3,09.

Im Mittel folgt daraus 3,10, die übrig bleibenden Fehler sind 0,01; 0,24; 0,03; 0,19; 0,01, der mittlere Fehler des Mittels hiernach gleich 0,069, woraus für den mittlern Fehler einer Beobachtung folgen würde 0,16 mm. Diese Zahl wollen wir denn auch als mittlern Fehler von h_3 ansetzen.

Höhen von Blasen hat Quinke**) gemessen. Aus seinen Zahlen lässt sich leicht entnehmen, dass man bei so sorgfältig ausgeführten Beobachtungen, wie es die Quinke'schen sind, μ_{h_3} wie μ_{h_2} zu 0,02 mm ansetzen darf. Die Steighöhen in Röhren und zwischen Platten lassen sich mit einem gutem Kathetometer, welches noch 0,01 mm abzulesen gestattet, leicht mit einem mittlern Fehler von 0,02 mm messen.

Die innern Radien von Röhren zwischen 0,1 und 1,0 mm sind, wenn die Röhren nach dem Gay-Lussac'schen Verfahren mit einem nach der Enge der betreffenden Röhre zu bemessenden Quecksilberfaden calibriert werden, mit einem mittlern Fehler von 0,002 mm bestimmbar. Weniger genau kann man den Abstand zweier planparalleler Platten abmessen, es

*) Ueber die Oberfläche der Flüssigkeiten. Berlin 1845. Seite 26.

**) Ueber die Capillaritätserscheinungen an der gemeinschaftlichen Oberfläche von Flüssigkeiten. Poggendorffs Annalen Bd. 139 Seite 12 ff.

scheint mir nicht zu viel zu sein, wenn man hier den mittlern Fehler zu 0,004 ansetzt.

Somit wird μ bezüglich

$$0,32h_3; \quad 0,02h_4; \quad 0,04h_5;$$

$$\sqrt{0,002^2 \left(h_1 + \frac{2}{3}r \right)^2 + 0,02^2 r^2}; \quad \sqrt{0,004^2 \left(h_2 + \frac{d}{5} \right)^2 + 0,02^2 d^2}.$$

Setzt man

$$\left(h_1 + \frac{2}{3}r \right) = h_1 + \frac{1}{3}r + \frac{1}{3}r, \quad h_2 + \frac{d}{5} = h_2 + \frac{d}{10} + \frac{d}{10},$$

so lassen sich die beiden letzten Beträge auch schreiben

$$\sqrt{0,002^2 \left(\frac{r^2 \left(h_1 + \frac{1}{3}r \right)^2}{r^2} + \frac{2}{3}r \left(h_1 + \frac{1}{3}r \right) \right) + r^2 \left(0,02^2 + \frac{0,002^2}{9} \right)},$$

$$\sqrt{0,004^2 \left(\frac{d^2 \left(h_2 + \frac{d}{10} \right)^2}{d^2} + \frac{1}{5}d \left(h_2 + \frac{d}{10} \right) \right) + d^2 \left(0,02^2 + \frac{0,004^2}{100} \right)}.$$

Indem wir jetzt statt der h den Capillaritätscoefficienten selbst einführen, bekommen wir bezüglich

$$\mu = \frac{0,32}{a} a^2,$$

$$\mu = \frac{0,03}{a} a^2,$$

$$\mu = \frac{0,04}{a} a^2,$$

$$\mu = a^2 \sqrt{0,002^2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{a^2} \right) + \frac{r^2}{a^4} \left(0,02^2 + \frac{0,002^2}{9} \right)},$$

$$\mu = a^2 \sqrt{0,004^2 \left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{a^2} \right) + \frac{d^2}{a^4} \left(0,02^2 + \frac{0,004^2}{9} \right)}.$$

Die drei ersten Methoden geben sofort allgemein gültige Zahlen, und man sieht, dass von ihnen die erste im Princip die einfachste, aber tatsächlich die ungenaueste ist; die zweite bietet die meiste Gewähr für Genauigkeit des erhaltenen Resultats, die dritte steht ihr nur wenig nach.

Die beiden andern Methoden können wir nicht so allgemein behandeln, weil sie noch die variable Grösse r bezüglich d enthalten; wenn aber die angegebenen Formeln für a^2 noch in wünschenswerter Annäherung (bis auf 0,01 qmm für Wasser) gelten sollen, dürfen r und d nicht viel über 1 mm

steigen. Nehmen wir daher als extreme Fälle erst $r = d = 0,05$ mm und dann $r = d = 1$ mm und beziehen uns auf Wasser als Flüssigkeit, für welches a^2 bei gewöhnlicher Temperatur etwa gleich 15 anzusetzen ist, so haben wir bei

$$\begin{aligned} r = d &= 0,05 \text{ m,} \\ \mu &= 0,04a^2 \text{ bezüglich } 0,08a^2; \\ r = d &= 1 \text{ mm,} \\ \mu &= 0,002a^2 \text{ bezüglich } 0,004a^2. \end{aligned}$$

Da nun für Wasser $a = \sqrt{15} = 3,8 \dots$ ist, so folgt hieraus, dass von den angeführten Methoden die genaueste die ist, in der man die Steighöhe in einer Röhre von etwa 1 mm Radius beobachtet, nächst dem kommt die Benutzung von zwei Platten in 1 mm Abstand. Die Bestimmung von a^2 aus der grössten Dicke einer flachen Luftblase steht auf gleicher Höhe mit der aus der Steighöhe in einer Röhre von 0,2 mm.

Es muss aber nochmals hervorgehoben werden, dass diese Ergebnisse rein ideell sind oder vielmehr nur für gut benetzende Flüssigkeiten Wert haben, weil eben die zu befürchtenden Fehler nicht lediglich in Messungsfehlern bestehen. Tatsächlich hat sich die Methode der Steighöhe zwischen zwei Platten oder an einer Platte als die schlechteste ergeben. Ausserdem hat sich gezeigt, dass es besser ist, engere Röhren zu verwenden als weitere, und es verdient erwähnt zu werden, dass Röhren von etwa 0,4 mm Weite recht vorteilhaft sind, gerade solche also, mit denen man theoretisch gleiche Genauigkeit erzielt wie mit flachen Luftblasen (und bei Flüssigkeiten, welche nicht benetzen, mit flachen Tropfen), an denen man ihre ganze Dicke misst.

Die letzte der aufgeführten Methoden ist besonders von Wilhelmii ausgebildet worden, und sie hat zu einer interessanten Controverse Veranlassung gegeben.

Wir wollen die aus ihr für μ resultierende Formel erst ganz allgemein hinschreiben und dann discutiren und vereinfachen.

Es war

$$a^2 = \frac{z - \gamma v + bd(ls + \gamma(L - l)) - G}{s(b + d)},$$

daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial a^2}{\partial z} &= \frac{1}{(b + d)s}, \quad \frac{\partial a^2}{\partial G} = -\frac{1}{(b + d)s}, \quad \frac{\partial a^2}{\partial v} = -\frac{\gamma}{(b + d)s}; \\ \frac{\partial a^2}{\partial s} &= \frac{bdl}{(b + d)s} - \frac{a^2}{s}, \quad \frac{\partial a^2}{\partial \gamma} = \frac{bd(L - l) - v}{(b + d)s}; \\ \frac{\partial a^2}{\partial l} &= \frac{bd(s - \gamma)}{(b + d)s}, \quad \frac{\partial a^2}{\partial L} = \frac{bd\gamma}{(b + d)s}; \\ \frac{\partial a^2}{\partial b} &= \frac{d(ls + \gamma(L - l))}{s(b + d)} - \frac{a^2}{b + d}, \quad \frac{\partial a^2}{\partial d} = \frac{b(ls + \gamma(L - l))}{s(b + d)} - \frac{a^2}{b + d}. \end{aligned}$$

Als erstrebenswerte Genauigkeit in der Bestimmung von a^2 wollen wir 0,01 qmm festsetzen, indem wir uns a^2 in qmm, also z , G in mg, c in cmm, l , b , d , L in mm gemessen denken. Wir schliessen uns jetzt an die Zahlen an, die Wilhelmi für eine von ihm benutzte Glasplatte angibt. Das Volumen der Platte betrug etwa 15 000 cmm, so dass die von ihr im Ganzen verdrängte Luft das Gewicht 18 mg hatte, daher sind Aenderungen in der Dichtigkeit der Luft und Fehler bei ihrer genauern Bestimmung ganz ohne Belang, und wir dürfen nicht blos $\partial a^2/\partial \gamma$, sondern alle von γ abhängenden Glieder ausser Acht lassen, zumal bei Wasser s nahe tausendmal so gross ist, wie γ . So bekommen wir als zu berücksichtigende Grössen

$$\frac{\partial a^2}{\partial z} = \frac{1}{(b+d)s}, \quad \frac{\partial a^2}{\partial G} = -\frac{1}{(b+d)s}, \quad \frac{\partial a^2}{\partial s} = \frac{bdl}{(b+d)s} - \frac{a^2}{s},$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial l} = \frac{bd}{(b+d)}, \quad \frac{\partial a^2}{\partial b} = \frac{dl}{b+d} - \frac{a^2}{b+d}, \quad \frac{\partial a^2}{\partial d} = \frac{bl}{b+d} - \frac{a^2}{b+d}.$$

Nun war für die bezeichnete Platte

$$b = 94,844; \quad d = 1,648; \quad G = 38\,000,$$

machen wir, da es sich hier um Wasser handelt, $s = 1$, $a^2 = 15$, so wird

$$\frac{\partial a^2}{\partial z} = 0,010; \quad \frac{\partial a^2}{\partial G} = -0,010; \quad \frac{\partial a^2}{\partial s} = 1,6198l - 15,$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial l} = 1,620; \quad \frac{\partial a^2}{\partial b} = 0,0171l - 0,156; \quad \frac{\partial a^2}{\partial d} = 0,826l - 0,156,$$

l , das Stück der eingetauchten Platte, wählte Wilhelmi der Reihe nach gleich

$$10,192; 15,220; 20,136; 25,348.$$

Wir haben nun noch über die mittlern Fehler der einzelnen Elemente Annahmen zu machen. Den mittlern Fehler von z schätzt Wilhelmi selbst auf 2 mg; wir werden später die Gründe kennen lernen, warum diese Zahl kaum als zu hoch gegriffen gelten kann, dagegen ist der mittlere Fehler von G , weil die Platte vor dem Versuch genau gewogen wurde, höchstens auf 0,5 mg anzusetzen. Für die linearen Messungen von b und d können wir 0,005 mm als mittlern Fehler annehmen.

Viel schwieriger ist die Abschätzung des mittlern Fehlers von l . Wilhelmi hat auf die Platte Marken aufgetragen, die von der untern Grundfläche derselben die durch l gegebenen Abstände hatten, und die Platte so tief eingesenkt, bis das Niveau der Flüssigkeit in die Höhe der betreffenden Marke kam. Der mittlere Fehler von l besteht also aus zwei Teilen, einmal aus dem Fehler der linearen Ausmessung des Abstandes der betreffenden Marke von der untern Grundfläche der Platte — diesen können wir wie den von b und d gleich 0,005 ansetzen — und dann aus dem Fehler bei der

Schätzung, wann das Niveau der Flüssigkeit die betreffende Marke erreichte. Den letztern Fehler schätzt Volkmann*) auf 0,1 mm, das ist wol etwas zu viel, mir scheint 0,05 auszureichen, wir haben dann

$$\mu_l = \sqrt{0,005^2 + 0,05^2} = 0,0502.$$

Der mittlere Fehler von s scheint bei Wilhelmi sehr gross gewesen zu sein, da wir aber den Wert der Methode überhaupt kennen lernen wollen, nicht blos in der Wilhelmi'schen Ausführung, so bemerke ich, dass s ohne Schwierigkeit bis auf eine Einheit der vierten Decimale bestimmt werden kann, selbst wenn man nur eine einfache hydrostatische Wägung macht. Ich setze also $\mu_s = 0,0001$, und nunmehr wird für $l = 10,192$

$$\frac{\partial a^2}{\partial z} \mu_z = 0,021, \quad \left(\frac{\partial a^2}{\partial z} \mu_z \right)^2 = 441 \cdot 10^{-6},$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial G} \mu_G = 0,005, \quad \left(\frac{\partial a^2}{\partial z} \mu_z \right)^2 = 25 \cdot 10^{-6},$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial s} \mu_s = 0, \quad \left(\frac{\partial a^2}{\partial z} \mu_i \right)^2 = 0,$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial l} \mu_l = 0,082, \quad \left(\frac{\partial a^2}{\partial l} \mu_l \right)^2 = 6724 \cdot 10^{-6},$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial b} \mu_b = 0, \quad \left(\frac{\partial a^2}{\partial b} \mu_b \right)^2 = 0,$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial d} \mu_d = 0,049, \quad \left(\frac{\partial a^2}{\partial d} \mu_d \right)^2 = 2401 \cdot 10^{-6},$$

also $\mu^2 = 9591 \cdot 10^{-6}$, d. h. $\mu = 0,10$. Es reicht also diese Methode für die vorgeschriebene Genauigkeit bei weitem nicht aus, selbst dann nicht, wenn man von allen Fehlern der Benetzung abstrahirt. Man sieht aber genau, worauf man sein Augenmerk zu richten hat, wenn man sie doch anwenden will.

197. Kriterien für die Wahl der Beträge der Elemente. Der Physiker befindet sich oft genug in der Lage, auch noch an einem und demselben Elementensysteme hinsichtlich des absoluten Betrages einer Anzahl der zu messenden Elemente beliebige Festsetzungen treffen zu können, und zwar indem er die Hilfsmittel, die ihm zur Bestimmung der zusammengesetzten Grösse dienen sollen, variirt. So kann man, wenn es sich um die Bestimmung der erdmagnetischen Horizontalintensität nach der Gaussischen Methode handelt, das als Element in der Formel für die Berechnung der Horizontalintensität eingehende Moment des Hilfsmagnets beliebig gross oder

*) Wiedemanns Annalen, Bd. 11, Seite 185.

klein wählen, indem man diesen Magnet stärker oder schwächer macht. Will man die Dichtigkeit einer gewissen Substanz kennen lernen, so kann man von derselben ein grosses oder kleines Stück verwenden, man vermag ausserdem bei einem Stück von bestimmtem Volumen, indem man in seinem Innern Höhlungen herstellt, das Gewicht beliebig zu verändern. Indessen, wenn man über die Beträge der einzelnen Elemente verfügt, wird man es immer so tun, dass für die zusammengesetzte Grösse ein tunlichst genauer Wert herauskommt, ihr mittlerer Fehler also ein Minimum, ihr Gewicht ein Maximum wird.

Wir denken uns die Elemente so geordnet, dass diejenigen, deren Beträge man zu variiren vermag, zuerst stehen; $x_1, x_2, \dots, x_\lambda$ seien also diese Elemente, dann hat man

$$\mu^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 \mu_1^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_\lambda}\right)^2 \mu_\lambda^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2 \mu_n^2,$$

unter der Bedingung, dass

$A = F(x_1, x_2, \dots, x_\lambda, \dots, x_n)$ eine bestimmte Grösse, nämlich die gesuchte zusammengesetzte Grösse A ist, zu einem Minimum zu machen. Nach dem Satz 59 multipliciren wir die Bedingungsgleichung $F(x_1, x_2, \dots, x_n) - A = 0$ mit einem Factor α , addiren sie so zu der Gleichung für μ^2 und suchen von der Grösse

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 \mu_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2 \mu_n^2 + \alpha (F(x_1, x_2, \dots, x_n) - A) = 0$$

das Minimum, wobei $x_1, x_2, \dots, x_\lambda$ als Variable angesehen werden sollen. Die mittlern Fehler $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ haben wir als von den Elementen unabhängig anzusehen, von den Elementen selbst nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass sie ebenfalls von einander unabhängig sind, alsdann haben wir $x_1, x_2, \dots, x_\lambda$ so zu wählen, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu^2}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial F}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial \mu^2}{\partial x_2} + \alpha \frac{\partial F}{\partial x_2} &= 0, \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \frac{\partial \mu^2}{\partial x_\lambda} + \alpha \frac{\partial F}{\partial x_\lambda} &= 0, \end{aligned}$$

$$F(x_1 \dots x_n) - A = 0$$

wird.

somit weil durch Variation der Röhrenweite auch die Steighöhe sich ändert, r und h also gleichzeitig variabel sind, indem man $x_1 = h$, $x_2 = r$ setzt,

$$\frac{\partial \mu^2}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2 \left(h + \frac{2}{3} r \right) \mu_r^2 + \alpha r$$

$$\frac{\partial \mu^2}{\partial x_2} + \alpha \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{4}{3} \left(h + \frac{2}{3} r \right) \mu_r^2 + 2r \mu_h^2 + \alpha \left(h + \frac{2}{3} r \right),$$

und es resultiren zur Bestimmung von h , r und α die Gleichungen

$$r \left(h + \frac{r}{3} \right) = a^2,$$

$$2 \left(h + \frac{2}{3} r \right) \mu_r^2 + \alpha r = 0,$$

$$2 \left(h + \frac{2}{3} r \right) \mu_r^2 + \alpha r + 3r \mu_h^2 + \alpha \frac{3}{2} h = 0.$$

Indem man die zweite Gleichung von der dritten abzieht, kommt

$$3r \mu_h^2 + \frac{3}{2} h \alpha = 0,$$

somit

$$\alpha = -\frac{2r}{h} \mu_h^2 = -\frac{6r^2}{3a^2 - r^2} \mu_h^2,$$

und es folgt zur Bestimmung von r , da $h + \frac{2}{3} r = \frac{a^2}{r} + \frac{1}{3} r$ ist,

$$\left(\frac{a^2}{r} + \frac{1}{3} r \right) \mu_r^2 - \frac{3r^3}{3a^2 - r^2} \mu_h^2 = 0,$$

oder

$$(9a^4 - r^4) \mu_r^2 - 9r^4 \mu_h^2 = 0,$$

und geordnet

$$r^4 (9\mu_h^2 + \mu_r^2) = +9a^4 \mu_r^2$$

$$r^4 = \frac{9a^4 \mu_r^2}{\mu_r^2 + 9\mu_h^2},$$

oder

$$r = a \sqrt[4]{\frac{9\mu_r^2}{\mu_r^2 + 9\mu_h^2}}.$$

Für Wasser ist $a = 3,8$ etwa, μ_r^2 haben wir zu $0,002^2$, μ_h^2 zu $0,02^2$ geschätzt, es wäre also

$$r = 2,2 \text{ mm etwa.}$$

Für Röhren von solcher Weite hört allerdings die Formel zur Berechnung von a^2 auf genügend genau zu sein. Wir können aber schliessen, dass wir die Röhren so weit zu nehmen haben, als die Gültigkeitsgrenze der Formel für a^2 irgend gestattet, vorausgesetzt, dass die Fehler in der Bestimmung von a^2 allein den Messungsfehlern zur Last fallen und dass der Radius der Röhren nur zehnmal so genau bestimmt werden kann wie die Steighöhe, dass die Fehler nicht aber noch in anderer Weise, etwa durch Unreinheit der innern Röhrenfläche verursacht werden können, und falls endlich die Genauigkeit der Messungen von r und h von den Beträgen dieser Grössen unabhängig ist; beide Annahmen sind nicht exact, die letztere ist aber von weit geringerer Bedeutung als die erstere. Der Leser darf sich durch die Verwahrungen, die hier so oft gegen die praktische Anwendbarkeit der theoretischen Resultate eingelegt werden, nicht irre machen lassen, eben aus der Tatsache, dass die theoretisch berechneten mittlern Fehler mit denen aus der Erfahrung, durch vielfache Wiederholung der Bestimmungen, sowie namentlich durch Häufung der Methoden erschlossenen nicht übereinstimmten, ist man zu der Ueberzeugung gekommen, dass derartigen Bestimmungen noch andere Fehler innewohnen, als lediglich Messungsfehler. Es ist ja gerade die erste Aufgabe der kritisirenden charakteristischen Fehler, auf Fehlerquellen aufmerksam zu machen.

XV. Zusammenstellung der Ergebnisse.

199. Unbedingte zusammengesetzte Messungen. Ich stelle wieder die Resultate, die wir in diesem Abschnitt gewonnen haben, zusammen, doch übergehe ich dabei die rein mathematische Zugabe aus der Determinanten- und Gleichungstheorie.

1. Eine Messung ist zusammengesetzt, wenn sie aus Messungen, die an mehreren Elementen auszuführen sind, besteht.

Zusammengesetzte Messungen werden ausgeführt:

- a) wo die analytische Definition der betreffenden Grösse von vornherein deren directe Bestimmbarkeit ausschliesst.
- b) zur Sicherung der Bestimmung einer Grösse, indem man diese mehrfach in einzelne Teile zerlegt, diese einzelnen Teile jedesmal misst und dann aus den für sie erhaltenen Beträgen jedesmal den Betrag der betreffenden Grösse zusammensetzt.
- c) Da, wo die instrumentellen Mittel, die man gerade zur Verfügung hat, die Messung der ganzen Grösse nicht zulassen.

2. Ob die Elemente einer zusammengesetzten Grösse von einander abhängen oder nicht, es ist unter allen Umständen erforderlich, dass die Messung für jedes Element völlig unabhängig von den Messungen für die andern ausgeführt wird. Selbst wenn gewisse Operationen und Ablesungen für zwei Elemente zugleich verwendet werden könnten, müssen sie doch bei der Messung jedes derselben vorgenommen werden.

3. Wenn die Elemente einer zusammengesetzten Grösse von einander unabhängig sind, so bekommt man den wahrscheinlichsten Betrag der zusammengesetzten Grösse, indem man die wahrscheinlichsten Beträge der Elemente nach Maassgabe der für den Zusammenhang der betreffenden Grösse mit ihren Elementen vorgeschriebenen Function zusammensetzt. Der wahrscheinlichste Betrag eines Elements aber wird aus den einzelnen Messungen desselben genau nach den Vorschriften, die für einfache Messungen gelten, vermittelt des Principis des arithmetischen Mittels gebildet. Nach denselben Vorschriften berechnet man auch die Präcisionsconstante des betreffenden Elements, wie seine charakteristischen Fehler.

Sind X_1, X_2, \dots, X_n die wahren Beträge der Elemente einer Grösse, deren wahrer Betrag gegeben ist durch $A = F(X_1, X_2, \dots, X_n)$, bedeuten x_1, x_2, \dots, x_n die wahrscheinlichsten Beträge der Elemente, so ist also der wahrscheinlichste Betrag der betreffenden Grösse

$$a = F(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Wenn ferner $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ die Präcisionsconstanten für die Messungen der bezüglichen Elemente angeben, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ die mittlern, r_1, r_2, \dots, r_n die wahrscheinlichen, $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ die durchschnittlichen Fehler, p_1, p_2, \dots, p_n die Gewichte der wahrscheinlichsten Beträge der bezüglichen Elemente sind, so hat man die Präcisionsconstante der zusammengesetzten Grösse

$$\frac{1}{\omega} = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{1}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{1}{\omega_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{1}{\omega_n}\right)^2},$$

die charakteristischen Fehler derselben

$$\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \mu_1\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \mu_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} \mu_n\right)^2},$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} r_1\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} r_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} r_n\right)^2},$$

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \delta_1\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \delta_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} \delta_n\right)^2},$$

und ihr Gewicht ist

$$p = \frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{1}{p_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{1}{p_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{1}{p_n}\right)^2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Betrag der Grösse mit einem zwischen den Grenzen v_1 und v_2 liegenden Fehler behaftet ist, wird ganz so wie bei einfachen Messungen dargestellt durch

$$\varphi = \frac{\omega}{\varepsilon} \int_{v_1}^{v_2} e^{-\pi\omega^2 \frac{v^2}{\varepsilon^2}} dv,$$

wo ω den oben angegebenen Wert hat.

4. Kann man eine Grösse aus mehreren Systemen von Elementen zusammensetzen, die man alle misst, so berechnet man ihren Wert für jedes dieser Systeme und nimmt von allen so erhaltenen Zahlen das arithmetische Mittel.

Es sei $a^{(1)}$, $\mu^{(1)}$ ihr Wert und mittlerer Fehler im ersten, $a^{(2)}$, $\mu^{(2)}$ ihr Wert und mittlerer Fehler im zweiten, ..., $a^{(i)}$, $\mu^{(i)}$ ihr Wert und mittlerer Fehler im i ten System — diese Grössen so berechnet, wie in den vorausgehenden Sätzen angegeben — dann ist der wahrscheinlichste Wert

$$a = \frac{a^{(1)} \left(\frac{1}{\mu^{(1)}}\right)^2 + a^{(2)} \left(\frac{1}{\mu^{(2)}}\right)^2 + \dots + a^{(i)} \left(\frac{1}{\mu^{(i)}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\mu^{(1)}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mu^{(2)}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{\mu^{(i)}}\right)^2}$$

und der mittlere Fehler

$$\mu = \sqrt{\frac{\left(\frac{a - a^{(1)}}{\mu^{(1)}}\right)^2 + \left(\frac{a - a^{(2)}}{\mu^{(2)}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a - a^{(i)}}{\mu^{(i)}}\right)^2}{(i-1) \left[\left(\frac{1}{\mu^{(1)}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mu^{(2)}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{\mu^{(i)}}\right)^2\right]}}$$

Alle diese Formeln haben strenge Giltigkeit nur bei Grössen, die aus ihren Elementen linear zusammengesetzt sind; bei Grössen, die in verwickelterer Weise von ihren Elementen abhängen, führen sie zu um so mehr der Wahrheit entsprechenden Zahlenwerten, je genauer die Elemente bestimmt sind.

200. Bedingte zusammengesetzte Messungen. 5. Wenn von den Elementen einer zusammengesetzten Grösse eine gewisse Anzahl mit einander durch streng zu erfüllende analytische Bedingungsgleichungen verbunden sind, so kann man erst aus dem Ausdruck für die zusammengesetzte Grösse so viele Elemente eliminieren, als Bedingungsgleichungen vorhanden sind. Die übrig bleibenden Elemente sind dann von einander unabhängig. Beobachtet man nur diese allein, so gelten alle im vorausgehenden Satz angegebenen Bestimmungen. Lässt sich aber die Elimination nicht bequem

ausführen, oder will man den Wert der zusammengesetzten Grösse noch weiter sichern, so hat man, selbst wenn im letztern Fall die Elimination der überschüssigen Elemente sich hat bewerkstelligen lassen, alle Elemente ohne Unterschied (und natürlich unabhängig von einander) zu messen und dann die für diese Elemente aus den Beobachtungen abgeleiteten Beträge erst gegen einander so auszugleichen, dass die betreffenden Bedingungsgleichungen identisch erfüllt werden.

Die Ausgleichung geschieht aber dadurch, dass man zu den beobachteten Beträgen der betreffenden Elemente Verbesserungen hinzufügt, die man mit Hilfe der Bedingungsgleichungen berechnet, doch ist es nötig, die Beobachtungen der Elemente so weit zu treiben, bis man durch diese Beobachtungen allein schon ein relativ genaues System von Elementen erhält und die nötigen Verbesserungen nur noch kleine Grössen repräsentiren.

Das Verfahren ist das folgende :

Man ordnet den Elementen die Indices so zu, dass die von einander abhängigen die ersten Indices erhalten.

Seien also x_1, x_2, \dots, x_g die von einander vermittelt der h Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_g) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_g) &= 0, \\ &\vdots \\ f_h(x_1, x_2, \dots, x_g) &= 0 \end{aligned}$$

abhängenden Elemente.

Man setzt für die wahren Beträge der betreffenden Elemente die aus den Beobachtungen abgeleiteten wahrscheinlichsten x_1, x_2, \dots, x_g und berechnet damit

$$a) \quad l_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_g), \quad l_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_g), \quad \dots, \quad l_h = f_h(x_1, x_2, \dots, x_g),$$

b) indem man die Functionen f jede nach den einzelnen Elementen der Reihe nach differenzirt und für diese Elemente ihre beobachteten bezüglichen Beträge einsetzt, die Abgeleiteten

$$b_1) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_g}; \\ &\frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_g}; \\ &\vdots \\ &\frac{\partial f_h}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_h}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f_h}{\partial x_g}; \end{aligned}$$

und ihre Logarithmen, also indem man den Logarithmus einer Grösse α durch (α) bezeichnet,

$$\begin{array}{c}
 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right), \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right), \dots, \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_g}\right), \\
 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right), \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right), \dots, \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_g}\right), \\
 \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \left(\frac{\partial f_h}{\partial x_1}\right), \left(\frac{\partial f_h}{\partial x_2}\right), \dots, \left(\frac{\partial f_h}{\partial x_g}\right).
 \end{array}$$

Hat die Berechnung dieser Abgeleiteten zunächst zu den Logarithmen derselben geführt, so schreibt man diese, ohne erst nach den Numeris zu suchen, auf, es besteht dann allein das System b_2); ist das nicht der Fall gewesen, so muss man zu den Zahlen, die man erhalten, die Logarithmen aufsuchen, die dann das System b_2) zusammensetzen. Hat die Zahl, zu der man den Logarithmus aufschlägt, das — Zeichen vor sich, so wird das zweckmässig dadurch gekennzeichnet, dass man dem Logarithmus ein kleines n oder ein — Zeichen anhängt.

Nunmehr addirt man zu den Logarithmen der ersten Columne den Logarithmus des mittlern Fehlers μ_1 von x_1 , zu den der zweiten den Logarithmus des mittlern Fehlers μ_2 von x_2 , ..., zu den der letzten den Logarithmus des mittlern Fehlers μ_g von x_g . Für die praktische Ausführung bemerke ich, dass so oft man eine Zahl zu einer Reihe anderer zu addiren (bezüglich von ihnen abzuziehen) hat, man diese Zahl am untern Rande eines Zettelchens hinschreibt, welches man dann über jeder der Zahlen hält. Stehen die betreffenden Zahlen wie hier in einer Columne, so schiebt man das Zettelchen diese entlang und schreibt die Summen in gleicher Höhe ebenfalls in einer Columne. Eine zweite allgemeine Bemerkung für Zahlenrechnungen ist die, dass Zahlen, die man zu addiren oder zu subtrahiren hat, tunlichst unter einander, nicht neben einander anzuordnen sind. Endlich soll man sich gewöhnen, dem Beispiel der Astronomen und Geodäten folgend, Zahlen, statt von rechts nach links, umgekehrt von links nach rechts zu addiren und zu subtrahiren. Man wird bald genug bemerken, wie bequem diese Abweichung vom Schulgebrauch beim geordneten Hinschreiben der Resultate ist.

Wenn man die mittlern Fehler $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_g$ der Elemente, weil zu wenig Einzelmessungen vorliegen, nicht sicher zu berechnen vermag, so setzt man an deren Stelle das Reciproke aus den Quadratwurzeln der Gewichte dieser Elemente, also $\frac{1}{\sqrt{p_1}}, \frac{1}{\sqrt{p_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{p_g}}$ und nimmt diese Gewichte gleich den Anzahlen Einzelmessungen, die für die bezüglichen Elemente angestellt sind.

Nach der Ausführung der betreffenden Additionen hat man also, indem man, um es nochmals hervorzuheben, den Logarithmus einer Zahl a mit (a) bezeichnet, das System von Logarithmen

$$c) \quad \begin{pmatrix} \mu_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \mu_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \mu_1 \frac{\partial f_h}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \mu_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \mu_2 \frac{\partial f_h}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mu_g \frac{\partial f_1}{\partial x_g} \\ \mu_g \frac{\partial f_2}{\partial x_g} \\ \vdots \\ \mu_g \frac{\partial f_h}{\partial x_g} \end{pmatrix},$$

ein Zahlensystem, das man, wenn der Raum es gestattet, am besten neben das System $b_2)$ der Logarithmen der Zahlen $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots$ hinschreibt.

Von den Zahlen dieses Systems $c)$ addirt man die Zahlen jeder Zeile zu sich selbst und zu den in derselben Columnne stehenden Zahlen aller folgenden Zeilen und schlägt die Numeri auf. Man kann, weil die zu addirenden Zahlen immer in gleicher Columnne stehen, die Additionen leicht im Kopfe ausführen und dann gleich zu der betreffenden Summe den Numerus aufschlagen. Die Numeri schreibt man hin, und zwar für jede Operation mit je zwei Zeilen in einer Columnne. Die Zahlen einer solchen Columnne addirt man dann.

Man hat also schematisch

$$d) \quad \begin{array}{cccc} \mu_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \mu_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \mu_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \dots \mu_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_h}{\partial x_1} \\ \mu_2^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \mu_2^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \mu_2^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \dots \mu_2^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_h}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_g^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_g} \frac{\partial f_1}{\partial x_g} & \mu_g^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_g} \frac{\partial f_2}{\partial x_g} & \mu_g^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_g} \frac{\partial f_3}{\partial x_g} & \dots \mu_g^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_g} \frac{\partial f_h}{\partial x_g} \end{array}$$

$$\text{Summen: } a_{11} = \quad a_{12} = \quad a_{13} = \quad \dots \quad a_{1h} =$$

$$\begin{array}{cccc} & \mu_1^2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \mu_1^2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \dots \mu_1^2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_h}{\partial x_1} \\ & \mu_2^2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \mu_2^2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \dots \mu_2^2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_h}{\partial x_2} \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & \mu_g^2 \frac{\partial f_2}{\partial x_g} \frac{\partial f_2}{\partial x_g} & \mu_g^2 \frac{\partial f_2}{\partial x_g} \frac{\partial f_3}{\partial x_g} & \dots \mu_g^2 \frac{\partial f_2}{\partial x_g} \frac{\partial f_h}{\partial x_g} \end{array}$$

$$\text{Summen: } a_{22} = \quad a_{23} = \quad \dots \quad a_{2h} =$$

$$\begin{array}{r}
 \mu_1^2 \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \cdots \mu_1^2 \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \frac{\partial f_h}{\partial x_1} \\
 \mu_2^2 \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \cdots \mu_2^2 \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \frac{\partial f_h}{\partial x_2} \\
 \vdots \\
 \mu_g^2 \frac{\partial f_3}{\partial x_g} \frac{\partial f_3}{\partial x_g} \cdots \mu_g^2 \frac{\partial f_3}{\partial x_g} \frac{\partial f_h}{\partial x_g} \\
 \hline
 \text{Summen: } a_{33} = \quad \cdots \quad a_{3h} =
 \end{array}$$

u. s. f., zuletzt hat man noch

$$\begin{array}{r}
 \mu_1^2 \frac{\partial f_h}{\partial x_1} \frac{\partial f_h}{\partial x_1} \\
 \mu_2^2 \frac{\partial f_h}{\partial x_2} \frac{\partial f_h}{\partial x_2} \\
 \vdots \\
 \mu_g^2 \frac{\partial f_h}{\partial x_g} \frac{\partial f_h}{\partial x_g} \\
 \hline
 \text{Summen: } a_{hh} =
 \end{array}$$

und das giebt die $\frac{h(h+1)}{2}$ Coefficienten a . In diesen Coefficienten ist von den beiden Indices der zweite nicht kleiner als der erste. Setzen wir noch fest, dass

e)
$$a_{ix} = a_{xi}$$

sein soll, und denken uns in jeder Reihe der a die fehlenden, die sich also immer in den voraufgehenden Reihen vorfinden, nachgetragen: in der zweiten das a_{21} ($= a_{12}$), in der dritten das a_{31} ($= a_{13}$), a_{32} ($= a_{23}$), ..., so haben wir nunmehr das zur Aufstellung des Correlaten- und Uebertragungssystems nötige System von hh Coefficienten, von denen immer je zwei mit denselben Indices behaftete einander gleich sind.

Wir differenziren jetzt die Function F , welche zur Berechnung der zusammengesetzten Grösse aus ihren Elementen dient, nach ihren Elementen und ersetzen die Elemente durch ihre aus den Beobachtungen abgeleiteten Beträge, so bekommen wir die Zahlen

f)
$$\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_g}; \frac{\partial F}{\partial x_{g+1}}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

Von diesen schlagen wir die Logarithmen auf und addiren zu letztern die bezüglichen Logarithmen der mittlern Fehler der x , oder wenn diese

nicht zur Verfügung stehen, die Logarithmen der Reciproken der Wurzeln der Gewichte der x ; wir haben dann

$$g) \quad \begin{pmatrix} \mu_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \mu_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \dots \\ \mu_g \frac{\partial F}{\partial x_g} \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} \mu_{g+1} \frac{\partial F}{\partial x_{g+1}} \\ \mu_{g+2} \frac{\partial F}{\partial x_{g+2}} \\ \dots \\ \mu_n \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Von der ersten dieser beiden Zeilen addiren wir die erste Zahl zu allen Zahlen der ersten Columne des Systems c), die zweite zu allen der zweiten Columne dieses Systems u. s. f., die g te zu allen der letzten Columne des Systems c).

Wir bekommen so das System

$$h) \quad \begin{pmatrix} \mu_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \mu_2^2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \dots \\ \mu_g^2 \frac{\partial f_g}{\partial x_g} \frac{\partial F}{\partial x_g} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \mu_1^2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \mu_2^2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \dots \\ \mu_g^2 \frac{\partial f_2}{\partial x_g} \frac{\partial F}{\partial x_g} \end{pmatrix}, \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} \mu_1^2 \frac{\partial f_h}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \mu_2^2 \frac{\partial f_h}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \dots \\ \mu_g^2 \frac{\partial f_h}{\partial x_g} \frac{\partial F}{\partial x_g} \end{pmatrix}.$$

Zu diesen Logarithmen schlagen wir Zeile für Zeile die Numeri auf, schreiben die zu jeder Zeile gehörigen Numeri in eine Columne und addiren die g Zahlen der so erhaltenen h Columnen.

Es resultirt dann

$$i) \quad \begin{array}{ccc} \mu_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \mu_1^2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \dots \mu_1^2 \frac{\partial f_h}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \mu_2^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial x_2} & \mu_2^2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial x_2} & \dots \mu_2^2 \frac{\partial f_h}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_g^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_g} \frac{\partial F}{\partial x_g} & \mu_g^2 \frac{\partial f_2}{\partial x_g} \frac{\partial F}{\partial x_g} & \dots \mu_g^2 \frac{\partial f_h}{\partial x_g} \frac{\partial F}{\partial x_g} \end{array}$$

$$\text{Summen: } l'_1 = \quad l'_2 = \quad \dots \quad l'_h =$$

Alle diese Rechnungen dienen dazu, die Coefficienten in den beiden Systemen linearer Gleichungen

und wir haben

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & = & \chi_{1,h-1}, & r_1 & = & \chi'_{1,h-1}, \\
 x_2 & = & \chi_{2,h-2}, & r_2 & = & \chi'_{2,h-2}, \\
 k) \quad x_3 & = & \chi_{3,h-3}, & r_3 & = & \chi'_{3,h-3}, \\
 & \vdots & & & & \vdots \\
 & \vdots & & & & \vdots \\
 x_{h-1} & = & \chi_{h-1,1}, & r_{h-1} & = & \chi'_{h-1,1}, \\
 x_h & = & \chi_{h,0}, & r_h & = & \chi'_{h,0},
 \end{array} \quad l)$$

Wir gehen jetzt nochmals zurück auf das System c), addiren zu den Zahlen ihrer ersten Zeile den Logarithmus von x_1 , zu denen der zweiten den von x_2 u. s. f. und bekommen so das System

$$\begin{array}{r}
 m) \quad \left(\mu_1 x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right), \left(\mu_2 x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right), \dots, \left(\mu_g x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_g} \right), \\
 \left(\mu_1 x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right), \left(\mu_2 x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right), \dots, \left(\mu_g x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_g} \right), \\
 \vdots \\
 \left(\mu_1 x_h \frac{\partial f_h}{\partial x_1} \right), \left(\mu_2 x_h \frac{\partial f_h}{\partial x_2} \right), \dots, \left(\mu_g x_h \frac{\partial f_h}{\partial x_g} \right),
 \end{array}$$

Die Numeri zu jeder Columnne schreiben wir wieder in eine Columnne, erhalten so g Columnnen, deren bezügliche Zahlen wir durch Addition zu je einer Zahl vereinigen, also

$$\begin{array}{r}
 n) \quad \begin{array}{ccc}
 \mu_1 x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \mu_2 x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \mu_g x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_g} \\
 \mu_1 x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \mu_2 x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \mu_g x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_g} \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \mu_1 x_h \frac{\partial f_h}{\partial x_1} & \mu_2 x_h \frac{\partial f_h}{\partial x_2} & \dots \mu_g x_h \frac{\partial f_h}{\partial x_g}
 \end{array} \\
 \hline
 \text{Summen: } \xi_1 = & \xi_2 = & \dots \xi_g =
 \end{array}$$

und nunmehr haben wir für die ausgeglichenen Elemente

$$\begin{array}{r}
 o) \quad \begin{array}{l}
 x_1 = x_1 - \xi_1 \mu_1, \\
 x_2 = x_2 - \xi_2 \mu_2, \\
 \vdots \\
 x_g = x_g - \xi_g \mu_g.
 \end{array}
 \end{array}$$

Der gesuchte Wert der zusammengesetzten Grösse ist

$$p) \quad \bar{F} = F(x_1 - \xi_1 \mu_1, x_2 - \xi_2 \mu_2, \dots, x_g - \xi_g \mu_g, x_{g+1}, \dots, x_n).$$

Die mittlern Fehler der ausgeglichenen Elemente findet man, nachdem man

$$q_1) \quad M = \sqrt{\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \dots + \xi_g^2}{h}}$$

berechnet hat, aus den Formeln

$$r) \quad \bar{\mu}_1 = \mu_1 M, \quad \bar{\mu}_2 = \mu_2 M, \quad \dots, \quad \bar{\mu}_g = \mu_g M.$$

Zur Controle der Rechnungen dient dann die Bemerkung, dass man auch haben muss

$$q_2) \quad M = \sqrt{\frac{x_1 l_1 + x_2 l_2 + \dots + x_h l_h}{h}}.$$

Berechnet man also M erst nach der ersten und dann nach der zweiten Formel, so muss, wenn die Rechnungen richtig ausgeführt sind, in beiden Fällen dieselbe Zahl herauskommen.

Um den mittlern Fehler des ausgeglichenen Betrages \bar{F} der zusammengesetzten Grösse zu erhalten, addiren wir zu der ersten Zeile des Logarithmensystems b_2) den Logarithmus von r_1 , zur zweiten den von r_2 u. s. f. zur letzten den von r_h . Wir bekommen so

$$s) \quad \begin{array}{c} \left(r_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right), \left(r_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right), \dots, \left(r_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_g}\right), \\ \left(r_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right), \left(r_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right), \dots, \left(r_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_g}\right), \\ \vdots \\ \left(r_h \frac{\partial f_h}{\partial x_1}\right), \left(r_h \frac{\partial f_h}{\partial x_2}\right), \dots, \left(r_h \frac{\partial f_h}{\partial x_g}\right). \end{array}$$

Dazu schlagen wir die Numeri auf und schreiben die einer Columnne angehörigen ebenfalls in einer Columnne, die Zahlen jeder der so erhaltenen Columnnen summiren wir dann jedesmal zu einer Zahl, es resultirt also

$$t) \quad \begin{array}{ccc} r_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & r_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & r_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_g} \\ r_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & r_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & r_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_g} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_h \frac{\partial f_h}{\partial x_1} & r_h \frac{\partial f_h}{\partial x_2} & \dots & r_h \frac{\partial f_h}{\partial x_g} \\ \hline \text{Summen: } r_{1_1} = & r_{1_2} = & \dots & r_{1_g} = \end{array}$$

Indem wir die η noch mit den bezüglichen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_g$ multipliciren, zu den Logarithmen unter g) die Zahlen aufschlagen, und von diesen die betreffenden Producte der $\mu\eta$ abziehen, bekommen wir die Grössen

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \mu_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} - \mu_1 \eta_1, \quad \zeta_2 = \mu_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} - \mu_2 \eta_2, \quad \dots, \quad \zeta_g = \mu_g \frac{\partial F}{\partial x_g} - \mu_g \eta_g, \\ \text{u)} \quad \zeta_{g+1} &= \mu_{g+1} \frac{\partial F}{\partial x_{g+1}}, \quad \zeta_{g+2} = \mu_{g+2} \frac{\partial F}{\partial x_{g+2}}, \quad \dots, \quad \zeta_n = \mu_n \frac{\partial F}{\partial x_n}, \end{aligned}$$

und als mittlern Fehler des ausgeglichenen Resultats

$$\text{v)} \quad \mu = \sqrt{M^2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \dots + \zeta_g^2) + \zeta_{g+1}^2 + \dots + \zeta_n^2}.$$

Aus diesem mittlern Fehler kann man dann nach denselben Formeln wie bei einfachen Messungen, die Präcisionsconstante ω und die andern charakteristischen Fehler r und δ ableiten.

Bei der Anordnung der Rechnung wird man sich so einzurichten haben, dass die Zahlensysteme b₁), b₂), s), t) neben einander und ebenso c), m), n) neben einander zu stehen kommen, nachdem man also b₁), b₂) resp. c) gerechnet hat, lässt man Platz für die später hinzuzufügenden gleich ausgedehnten Systeme s), t), bezüglich m) n).

Man kann auch, namentlich wenn man zwei verschiedenfarbige Tinten zur Verfügung hat, Logarithmen zu Zahlen und Zahlen zu Logarithmen unter einander schreiben. Systeme wie b₁), b₂) oder s), t) oder m), n) ziehen sich dann zu je einem System zusammen, bei den an den Zahlen auszuführenden Columnenadditionen muss man dann die zwischen befindlichen Logarithmen übersehen, was sehr leicht geschieht, wenn man die Zahlen mit andersfarbiger Tinte als die Logarithmen schreibt.

Das sind die allgemeinen Regeln für die Ausführung der Rechnungen, bei verwickeltern Rechnungen ist es gut, sich streng an ein Schema zu halten, einmal verleiht es dem Rechner eine gewisse Ruhe, wenn er die Operationen, die er auszuführen hat, genau übersieht und nicht erst darüber nachdenken muss, welche er am bequemsten gerade vornehmen kann, dann fällt die Anordnung der Zahlenmassen übersichtlich aus, da man genau weiss, wo die einzelnen Zahlen hinschreiben sind, und wo man bereits gerechnete Zahlen, falls man sie braucht, wieder findet. Wo die Verhältnisse einfach liegen, schadet es nicht, wenn man sich das Schema beliebig anordnet, man kann auch Zahlen mit einander, statt logarithmisch, direct multipliciren, man kann überquer addiren oder subtrahiren u. s. f. Der Physiker wird sich meist in solcher Lage befinden. Hat er keinen besondern Grund von dem Schema abzuweichen — ein solcher würde z. B. vorliegen, wenn er vor allen Dingen den mittlern Fehler der gesuchten Grösse kennen lernen will, um darnach zu bemessen, ob seine Beobachtungen ausreichen, oder ob er die Elemente noch genauer bestimmen muss — so soll er es auch nicht tun.

Wenn das System der Elemente in mehrere Gruppen zerfällt, für deren jede Bedingungsgleichungen zu erfüllen sind, so rechnet man für jede Gruppe so wie hier für eine angegeben ist.

201. Zusammengesetzte Messungen, bei denen ein Teil der Elemente selbst zusammengesetzte Grössen sind. 6. Sind in einer zusammengesetzten Grösse eine Anzahl von Elementen x_1, x_2, \dots, x_g nicht direct beobachtet, sondern erst aus andern ihrerseits beobachteten Elementen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h$ gemäss der Formeln

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h), \\ x_2 &= f_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h), \\ &\vdots \\ x_g &= f_g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h) \end{aligned}$$

zusammengesetzt, so bekommt man den wahrscheinlichsten Wert der gesuchten Grösse, indem man für x_1, x_2, \dots, x_g nach dem einen oder andern der beiden vorausgehenden Sätze (je nachdem zwischen den ξ noch Bedingungsgleichungen vorhanden sind oder nicht) die wahrscheinlichsten Werte ableitet, für $x_{g+1}, x_{g+2}, \dots, x_n$ die aus den Beobachtungen sich ergebenden (eventuell, wenn zwischen einzelnen von ihnen Bedingungsgleichungen da sind, die nach Satz 4 ausgeglichenen) wahrscheinlichsten Werte nimmt und dann in die Function, die die zusammengesetzte Grösse darstellt, einsetzt.

Der mittlere Fehler der zusammengesetzten Grösse berechnet sich aus der Formel

$$\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_1}\right)^2 \mu_1'^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_2}\right)^2 \mu_2'^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_h}\right)^2 \mu_h'^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_{g+1}}\right)^2 \mu_{g+1}^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2 \mu_n^2},$$

wo $\mu_1', \mu_2', \dots, \mu_h'$ die mittlern Fehler der $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h$; $\mu_{g+1}, \mu_{g+2}, \dots, \mu_n$ die mittlern Fehler der $x_{g+1}, x_{g+2}, \dots, x_n$ sind. Hierbei ist aber

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_g} \frac{\partial f_g}{\partial \xi_1}, \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_g} \frac{\partial f_g}{\partial \xi_2}, \\ &\vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_h} &= \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_h} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_h} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_g} \frac{\partial f_g}{\partial \xi_h}. \end{aligned}$$

Man differenzirt also erst die zusammengesetzte Grösse F nach ihren einzelnen Elementen, und ersetzt diese Elemente durch ihre oben gekennzeichneten wahrscheinlichsten Beträge, so bekommt man die Abgeleiteten

$$a_1) \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_g}; \quad \frac{\partial F}{\partial x_{g+1}}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_{g+2}}, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

und schlägt gleich für die g ersten Zahlen die Logarithmen auf:

$$b_1) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right), \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right), \quad \dots, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x_g} \right).$$

Dann differenziert man die Functionen f nach den einzelnen ξ , ersetzt die ξ durch ihre wahrscheinlichsten Beträge und erhält das System

$$c_1) \quad \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2}, & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_h}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2}, & \dots, & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_h}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_g}{\partial \xi_1}, & \frac{\partial f_g}{\partial \xi_2}, & \dots, & \frac{\partial f_g}{\partial \xi_h} \end{array}$$

und hieraus die Logarithmen (die man eventuell auch unter die einzelnen Zahlen schreiben kann)

$$d_1) \quad \begin{array}{ccc} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \right), & \left(\frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} \right), & \dots, & \left(\frac{\partial f_1}{\partial \xi_h} \right) \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} \right), & \left(\frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} \right), & \dots, & \left(\frac{\partial f_2}{\partial \xi_h} \right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_g}{\partial \xi_1} \right), & \left(\frac{\partial f_g}{\partial \xi_2} \right), & \dots, & \left(\frac{\partial f_g}{\partial \xi_h} \right). \end{array}$$

Zur ersten Zeile addirt man dann $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)$, zur zweiten $\left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)$ u. s. f., zur letzten $\left(\frac{\partial F}{\partial x_g} \right)$. Die resultirenden Zahlen kann man entweder unter die bezüglichen des obigen Systems schreiben oder zu einem neuen System

$$e_1) \quad \begin{array}{ccc} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \right), & \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} \right), & \dots, & \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_h} \right) \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} \right), & \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} \right), & \dots, & \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_h} \right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x_g} \frac{\partial f_g}{\partial \xi_1} \right), & \left(\frac{\partial F}{\partial x_g} \frac{\partial f_g}{\partial \xi_2} \right), & \dots, & \left(\frac{\partial F}{\partial x_g} \frac{\partial f_g}{\partial \xi_h} \right) \end{array}$$

vereinigen.

Zu den Zahlen jeder Columnne schlägt man die Numeri auf und schreibt sie unter einander, so bekommt man h neue Columnnen, die man durch

Addition der in ihnen bezüglich enthaltenen Zahlen zu h Zahlen vereinigt, so:

$$\begin{array}{r}
 f_1) \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial f'_1}{\partial \xi_1} \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial f'_1}{\partial \xi_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial f'_1}{\partial \xi_h} \\
 \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial f'_2}{\partial \xi_1} \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial f'_2}{\partial \xi_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial f'_2}{\partial \xi_h} \\
 \vdots \\
 \frac{\partial F}{\partial x_g} \frac{\partial f'_g}{\partial \xi_1} \quad \frac{\partial F}{\partial x_g} \frac{\partial f'_g}{\partial \xi_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial F}{\partial x_g} \frac{\partial f'_g}{\partial \xi_h} \\
 \hline
 \text{Summen: } \alpha_1 = \quad \alpha_2 = \quad \cdots \quad \alpha_h =
 \end{array}$$

Rechnet man nun noch die Zahlen

$$g_1) \quad \gamma'_1 = \mu'_1 \alpha_1, \quad \gamma'_2 = \mu'_2 \alpha_2, \quad \cdots, \quad \gamma'_h = \mu'_h \alpha_h,$$

$$h_1) \quad \gamma_{g+1} = \mu_{g+1} \frac{\partial F}{\partial x_{g+1}}, \quad \gamma_{g+2} = \mu_{g+2} \frac{\partial F}{\partial x_{g+2}}, \quad \cdots, \quad \gamma_n = \mu_n \frac{\partial F}{\partial x_n},$$

so ist

$$i_1) \quad \mu = \sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2 + \cdots + \gamma_h'^2 + \gamma_{g+1}^2 + \gamma_{g+2}^2 + \cdots + \gamma_n^2}.$$

Es kann vorkommen, dass die Gleichungen, die die betreffenden x mit den ξ verbinden, nicht explicit sind und nicht die x unmittelbar zu berechnen gestatten; sie haben dann die Form

$$\begin{array}{r}
 k_1) \quad \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h; x_1, x_2, \dots, x_g) = 0, \\
 \varphi_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h; x_1, x_2, \dots, x_g) = 0, \\
 \vdots \\
 \varphi_g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h; x_1, x_2, \dots, x_g) = 0.
 \end{array}$$

Alsdann muss man sich (eventuell durch Probieren) Näherungswerte für die x_1, x_2, \dots, x_g verschaffen. Sind diese r_1, r_2, \dots, r_g , so hat man

$$l_1) \quad x_1 = r_1 + \Delta x_1, \quad x_2 = r_2 + \Delta x_2, \quad \dots, \quad x_g = r_g + \Delta x_g,$$

und die Δx bestimmen sich aus dem System linearer Gleichungen

$$\begin{array}{r}
 m_1) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_g} \Delta x_g = - \varphi_1, \\
 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_g} \Delta x_g = - \varphi_2, \\
 \vdots \\
 \frac{\partial \varphi_g}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial \varphi_g}{\partial x_2} \Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi_g}{\partial x_g} \Delta x_g = - \varphi_1.
 \end{array}$$

Hierin sind die φ und ihre Derivirten dadurch zu berechnen, dass man an Stelle der x_1, x_2, \dots, x_g , deren bezügliche Näherungswerte $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_g$ setzt. Die Gleichungen sind zunächst unbestimmt aufzulösen, man bekommt dann

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= \psi_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h), \\ n_1) \quad \Delta x_2 &= \psi_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h), \\ &\vdots \\ \Delta x_g &= \psi_g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h), \end{aligned}$$

und diese ψ treten bei der Berechnung des mittlern Fehlers an Stelle der f . Mehr als diese Andeutungen will ich darüber nicht geben, da der Fall den Physiker wol selten beschäftigen wird.

Die Gleichungen für den Fall, dass die x sich explicit durch die ξ bestimmen lassen, sind aber sehr wichtig, der Physiker kann oft genug Gelegenheit haben, sie anwenden zu müssen. Es wird das unter anderem stets dann geschehen, wenn er die zusammengesetzte Grösse durch Einführung neuer Variabeler (Elemente), die nicht beobachtet sind, transformiren will, und vor allen Dingen dann, wenn ein Teil der Elemente selbst der directen Beobachtung nicht zugänglich ist, sondern aus andern einfachen Elementen zusammengesetzt werden muss.

202. Kritik der Messungen und Resultate, Information über die zu wählende Messungsmethode und das zu wählende Elementensystem. 7. Die für die Elemente erhaltenen Zahlen werden nach den Regeln kritisirt, die für einfache Messungen aufgestellt sind, zur Kritisirung des Betrages der zusammengesetzten Grösse dient ihr mittlerer Fehler (oder, wenn man will, wahrscheinlicher Fehler, das 0,6745fache des mittlern). Kann man aus der Beschaffenheit der Apparate, die man zur Messung der Elemente benutzt, und der Art, wie man beobachtet, vor den Messungen noch ungefähre Beträge für die zu erwartenden mittlern Fehler der Elemente angeben, und vermag man sich Näherungswerte für die Elemente zu verschaffen (eventuell indem man eine provisorische ungefähre Ausmessung derselben vornimmt), so berechnet man sich damit einen ungefähren Wert für den zu erwartenden mittlern Fehler der zusammengesetzten Grösse. Die Vergleichung dieses angenäherten mittlern Fehlers (des theoretischen) mit dem später aus den wirklichen Messungen abgeleiteten (des beobachteten) zeigt dann, ob während der Messungen besondere Versehen vorgefallen sind oder nicht.

Ausserdem dient der Betrag des mittlern Fehlers der zusammengesetzten Grösse zur Entscheidung, ob die Messungen ausreichend sind oder nicht, ist dieser Betrag für den Zweck, den man verfolgt, zu bedeutend, so hat man die Elemente noch schärfer zu bestimmen.

8. Ein Element ist um so genauer zu messen, je grösser der Betrag des Differentialquotienten der zusammengesetzten Grösse nach ihm ist.

Um also zu entscheiden, welche Elemente man mit ganz besonderer Sorgfalt zu messen hat, und bei welchen man sich mit minderer Genauigkeit begnügen darf, sucht man genäherte Werte für die Elemente, differenziert die zusammengesetzte Grösse nach jedem der Elemente und ersetzt die Elemente durch ihre genäherten Beträge, so dass man für die entscheidenden Differentialquotienten genäherte Werte zur Verfügung hat.

9. Von allen Systemen von Elementen, aus denen eine Grösse zusammengesetzt werden kann, ist dasjenige das günstigste, welches für dieselbe den kleinsten mittlern Fehler befürchten lässt. Dieses ist nicht immer dasjenige, welches die geringste Anzahl von Elementen enthält. Nachdem man in jedem System für die Elemente und ihre zu erwartenden mittlern Fehler Näherungswerte aufgesucht und mit ihnen für jedes System den genäherten Wert des mittlern Fehlers für die zusammengesetzte Grösse berechnet hat, wählt man zur eigentlichen Messung, falls man nicht alle Systeme benutzen will, dasjenige, welches den kleinsten Betrag für den näherungsweise berechneten mittlern Fehler aufweist.

10. Kann man in einem System von Elementen die Beträge einer Anzahl derselben beliebig variieren, so sucht man sich diejenigen Beträge aus, für welche der zu erwartende mittlere Fehler der zusammengesetzten Grösse am kleinsten ist.

Sind x_1, x_2, \dots, x_g diese variirbaren Elemente, so verschafft man sich von den $n - g$ andern $x_{g+1}, x_{g+2}, \dots, x_n$ und von den mittlern Fehlern aller Elemente, sowie von der zusammengesetzten Grösse selbst Näherungswerte, setzt diese in die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu^2}{\partial x_1} + x \frac{\partial F'}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial \mu^2}{\partial x_2} + x \frac{\partial F'}{\partial x_2} &= 0, \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \frac{\partial \mu^2}{\partial x_g} + x \frac{\partial F'}{\partial x_g} &= 0, \\ F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= F' \end{aligned}$$

ein und berechnet aus denselben nach Elimination von x die Beträge von x_1, x_2, \dots, x_g , diese sind dann die günstigsten, und man hat die Messungen und Apparate so einzurichten, dass für die Elemente x_1, x_2, \dots, x_g Beträge ungefähr in der Grösse, wie sie aus den obigen Gleichungen resultiren, sich ergeben.

Vierter Abschnitt.

Ausgleichung von Untersuchungen.

XVI. Ableitung der Normalgleichungen.

203. Aufgabe des Physikers bei Untersuchungen. Die allgemeine Charakteristik der Untersuchungen und ihrer Ausgleichung ist in dem ersten Abschnitt, Artikel 16—22 gegeben worden, ich habe hier an einige der dort gewonnenen Resultate zu erinnern und einzelnes weiter auszuführen.

Die meisten Arbeiten des experimentirenden Physikers sind auf Untersuchungen gerichtet, einfache und zusammengesetzte Messungen, die der Metronom und Meteorologe ihrer selbst willen unternimmt, dienen dem Physiker mehr als Mittel zum Zweck, da sein Augenmerk besonders auf die Aufsuchung oder Verificirung von Naturgesetzen, auf Herstellung von Verbindungen zwischen anscheinend discreten Erscheinungen gerichtet ist.

Wenn der praktische Metronom die Ausdehnung eines Stabes mit wachsender Temperatur studirt, so geschieht das vor allen Dingen, um später die Länge des betreffenden Stabes für jede Temperatur, ohne sie erst messen zu müssen, angeben zu können; dagegen beobachtet der Physiker die Länge des Stabes bei verschiedenen Temperaturen, um eine Beziehung zwischen der Ausdehnung desselben und dem Anwachsen der Temperatur aufzufinden. Er will die Function kennen lernen, die diese Ausdehnung mit der Temperaturzunahme verbindet. Die Aufgabe des Metronomen ist daher auch nicht dieselbe wie die des Physikers, jenem genügt es, wenn er die Länge des Stabes als Function der Temperatur so dargestellt hat, dass er diese Länge für jede Temperatur zu berechnen vermag, welcher Art diese Function ist, bildet eine Frage zweiter Ordnung, wenn sie nur für numerische Rechnungen einfach genug ist und für die erforderliche Präcision hinreicht; dieser dagegen darf nicht jede beliebige Function wählen, die seine Beobachtungen darzustellen im Stande ist, er muss den Blick weiter richten, auf analoge Untersuchungen für andere Körper, häufig sogar auf andere Erscheinungsklassen zurückgreifen, und es ist gerade die Aufgabe seiner Untersuchung, diejenige Function herauszufinden, die sowohl

seinen Beobachtungen genügend gerecht wird, als die meiste Gewähr bietet, bei entsprechenden Erscheinungen für andere Körper ebenfalls Anwendung finden zu können, und da, wo er die Form der Function schon kennt, die in ihr vertretenen Constanten so sicher als möglich zu bestimmen.

So hat der Physiker bei Untersuchungen es mit zwei Aufgaben zu tun :

1. Wenn die Function, die die Grössen, auf welche seine Untersuchung gerichtet ist, mit einander verbindet, gegeben ist, diese Function seinen Beobachtungen anzupassen.

2. Die Function selbst erst zu finden.

Es ist nicht immer nötig, dass die Untersuchung sich auf eine bestimmte Function richtet oder mit einer solchen beschäftigt. Oft geht die Frage lediglich nach der sichersten Bestimmung einer gegebenen Anzahl beobachteter Grössen, die mit einander durch eine oder mehrere sonst ganz gleichgiltige Functionen verbunden sind. Der Fall ist wesentlich von dem vorausgehenden nicht verschieden, ich will des bequemern Ausdrucks wegen zuerst nur von Untersuchungen, die auf bestimmte Functionen gerichtet sind, sprechen, später dann den Entwicklungen die nötige principielle Erweiterung geben.

Wir werden uns also zunächst mit der ersten Aufgabe beschäftigen, die bis zu einer gewissen Annäherung von der Ausgleichsrechnung gelöst wird.

204. Festsetzung über die analytische Darstellung der auszugleichenden Beziehungen. Wenn eine Function als gegeben betrachtet wird, so ist damit gemeint, dass ihre analytische Form bekannt ist, und nur eine Reihe von in ihr enthaltenen Coefficienten unbestimmt sind. Damit ist freilich der eigentliche Charakter der Function im allgemeinen noch nicht aufgeklärt, denn beispielsweise kann eine Potenzreihe je nach den Zahlenwerten ihrer Coefficienten sehr verschiedenartige Functionen darstellen, wir bleiben aber bei dieser allgemeinen Festsetzung stehen und werden später sehen, wie sie für eigentliche physikalische Untersuchungen einzuschränken ist.

Es sei also die Untersuchung auf den Zusammenhang einer Reihe von physikalischen Grössen, deren jeder wir beliebige Beträge beizulegen vermögen, gerichtet. Abweichend von dem gewöhnlichen Gebrauch, der Variablen die letzten Buchstaben des Alphabets reservirt, bezeichnen wir diese Grössen mit den ersten Buchstaben und nennen ein System Beträge derselben A, B, C, \dots, F, G . Die analytische Form des Zusammenhanges sei

$$\Phi(A, B, C, \dots, G) = 0,$$

wo also Φ eine in Bezug auf die Variablen vorgeschriebene Function darstellt, in der die Coefficienten aber noch nicht bekannt sind, sondern erst aus der Untersuchung erschlossen werden sollen. Die wahren Beträge dieser Coefficienten seien X_1, X_2, \dots, X_k und vollständiger geschrieben

$$\Phi(A, B, C, \dots, F, G; X_1, X_2, \dots, X_k) = 0.$$

Man wird die Function Φ nach der Grösse entwickeln, deren Gang man besonders kennen lernen will. Bezeichnet z. B. A die Länge einer in einer Röhre eingeschlossenen Quecksilbersäule, B die Temperatur der Säule, so wird man nach A auflösen und

$$A = F_1(B)$$

schreiben, wenn man die Ausdehnung der Quecksilbersäule mit wachsender Temperatur untersucht, dagegen hat man nach B aufzulösen und

$$B = F_2(A)$$

zu schreiben, falls daran liegt, diese Quecksilbersäule als thermometrische Substanz zu verwenden, die Untersuchung also lehren soll, sie als Thermometer zu Temperaturmessungen zu benutzen.

Eine und dieselbe Function kann also zu sehr verschiedenen Untersuchungen Veranlassung geben, und in der That finden auch die physikalischen Gleichungen die verschiedenartigsten Anwendungen.

Schon aus diesem Grunde ist es vorteilhafter, zunächst bei der allgemeinen Form solcher Gleichungen stehen zu bleiben, ausserdem aber ist es wichtig, dass in dieser Form keine der Grössen augenscheinlich bevorzugt wird, was für die eine gesagt ist, auch für die andere gilt.

205. Stellung der Aufgabe. Wir messen ein System der Elemente, nehmen in der Einrichtung der Versuche die nötigen Veränderungen vor und messen ein zweites System derselben, und indem wir immer wieder durch Veränderung in der Einrichtung der Versuche neue Systeme von Beträgen der Elemente hervorbringen, die wir dann messen, bekommen wir Reihen von zusammengehörigen Beträgen der Elemente, die wir nacheinander in die Function Φ einsetzen. Lieferten die Messungen die wahren Beträge $A_x, B_x, \dots, F_x, G_x$, so wäre identisch

$$\Phi(A_x, B_x, \dots, G_x; X_1, X_2, \dots, X_h) = 0$$

und es würden h Systeme von zusammengehörigen Beträgen der Elemente ausreichen, um aus den so entstehenden h Gleichungen die h Coefficienten mit absoluter Genauigkeit auszurechnen.

Wenn die Beobachtungen mit Fehlern behaftet sind, so reichen zwar immer noch h Systeme der Elemente zur Ausrechnung der h Coefficienten aus, aber man erhält für diese Coefficienten nicht mehr wahre Beträge, sondern nur wahrscheinlichste, und es kommen diese wahrscheinlichsten Beträge den wahren um so näher, je mehr Systeme von Elementen man beobachtet hat, je mehr überschüssige Gleichungen ausser den h notwendigen zur Berechnung der Coefficienten zur Verfügung stehen.

Nehmen wir für einen Augenblick an, es seien uns die wahren Beträge der Coefficienten bekannt; indem wir dann ein System der Elemente beobachten, haben wir es mit der Bestimmung einer zusammengesetzten Grösse zu tun, und zwar ist hier 0 die zusammengesetzte Grösse, A, B, \dots, G sind ihre Elemente, und Φ giebt die Function an, die die zusammengesetzte

Grösse mit ihren Elementen verbindet. Wir bezeichnen mit a_x, b_x, \dots, g_x irgend ein System zusammengehöriger beobachteter Beträge der Elemente und nennen A_x, B_x, \dots, G_x die Beträge, die die Elemente in Wahrheit besitzen, dann sind

$$\Delta A_x = A_x - a_x, \Delta B_x = B_x - b_x, \dots, \Delta G_x = G_x - g_x$$

die wahren Fehler der beobachteten Elemente, und

$$V_x = \Phi(A_x, B_x, \dots, G_x) - \Phi(a_x, b_x, \dots, g_x),$$

das heisst

$$V_x = -\Phi(a_x, b_x, \dots, g_x),$$

oder noch genauer geschrieben

$$V_x = -\Phi(a_x, b_x, \dots, g_x; X_1, X_2, \dots, X_h)$$

giebt den wahren Fehler der zusammengesetzten Grösse 0 oder, wie man auch sagt, den wahren Fehler der Gleichung $\Phi = 0$ für dieses bestimmte System von Elementen. Da wir nun diesen wahren Fehler nicht kennen, und auch die wahren Beträge der Coefficienten uns unbekannt sind, so sind wir gezwungen

$$\Phi(a_x, b_x, \dots, g_x) = 0$$

zu setzen, aber jede solche Gleichung ist mit einem bestimmten Fehler behaftet.

Das Gewicht einer solchen Gleichung haben wir gleich $\frac{1}{\mu_x^2}$ zu setzen, falls μ_x der mittlere Fehler der zusammengesetzten Grösse 0 ist, berechnet aus dem beobachteten System a_x, b_x, \dots, g_x . Es ist aber, falls μ_{a_x} den mittlern Fehler der Messung des Elements A_x , μ_{b_x} , den der Messung des Elements B_x , u. s. f. bedeutet nach Art. 155 Satz 57

$$\mu_x^2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a_x}\right)^2 \mu_{a_x}^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial b_x}\right)^2 \mu_{b_x}^2 + \dots + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial g_x}\right)^2 \mu_{g_x}^2,$$

und wir haben als Gewicht der betreffenden Gleichung

$$p_x = \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial a_x}\right)^2 \mu_{a_x}^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial b_x}\right)^2 \mu_{b_x}^2 + \dots + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial g_x}\right)^2 \mu_{g_x}^2}.$$

Unsere Aufgabe ist nun die:

aus dem System der n Gleichungen (wo n mindestens so gross ist wie h)

$$\begin{array}{l} \text{LXXXI)} \quad \Phi(a_1, b_1, \dots, g_1; x_1, x_2, \dots, x_h) = 0, \\ \quad \Phi(a_2, b_2, \dots, g_2; x_1, x_2, \dots, x_h) = 0, \\ \quad \vdots \\ \quad \Phi(a_n, b_n, \dots, g_n; x_1, x_2, \dots, x_h) = 0, \end{array}$$

deren erster das Gewicht p_1 , deren zweiter das p_2 , ..., deren letzter das Gewicht p_n zukommt, und in welchen alle Coefficienten und alle Beobachtungen von einander unabhängig sind, die wahrscheinlichsten Beträge x_1, x_2, \dots, x_h der Coefficienten X_1, X_2, \dots, X_h zu berechnen, und die mittlern Fehler dieser Beträge anzugeben.

206. Die allgemeinen Ausgleichungsformeln. Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe ist in Art. 29 gegeben.

Es seien v_1, v_2, \dots, v_n die wahrscheinlichsten Fehler der n Gleichungen, und es bezeichne $\varphi_1(v_1)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Gleichung mit einem Fehler v_1 , $\varphi_2(v_2)$ die, dass die zweite Gleichung mit einem Fehler v_2 , ..., $\varphi_n(v_n)$ die, dass die n te Gleichung mit einem Fehler v_n behaftet ist, dann ist dasjenige System der Coefficienten x_1, x_2, \dots, x_h das wahrscheinlichste, für welches die Wahrscheinlichkeit

$$W = \varphi_1(v_1) \varphi_2(v_2) \cdots \varphi_n(v_n),$$

dass das System der vorgelegten Gleichungen gerade mit den Fehlern v_1, v_2, \dots, v_n behaftet ist, ein Maximum ist, welches also den Gleichungen

$$\text{LXXXIIa)} \quad \frac{\partial W}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial x_h} = 0,$$

oder expliciter den

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varphi_1(v_1)} \frac{d\varphi_1(v_1)}{dv_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{1}{\varphi_2(v_2)} \frac{d\varphi_2(v_2)}{dv_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{1}{\varphi_n(v_n)} \frac{d\varphi_n(v_n)}{dv_n} \frac{\partial v_n}{\partial x_1} = 0, \\ \text{LXXXIIb)} \quad & \frac{1}{\varphi_1(v_1)} \frac{d\varphi_1(v_1)}{dv_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{1}{\varphi_2(v_2)} \frac{d\varphi_2(v_2)}{dv_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{1}{\varphi_n(v_n)} \frac{d\varphi_n(v_n)}{dv_n} \frac{\partial v_n}{\partial x_2} = 0, \\ & \vdots \\ & \frac{1}{\varphi_1(v_1)} \frac{d\varphi_1(v_1)}{dv_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_h} + \frac{1}{\varphi_2(v_2)} \frac{d\varphi_2(v_2)}{dv_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_h} + \cdots + \frac{1}{\varphi_n(v_n)} \frac{d\varphi_n(v_n)}{dv_n} \frac{\partial v_n}{\partial x_h} = 0. \end{aligned}$$

Wir haben dieses System von Gleichungen als das System der *Ausgleichungsformeln* im Gegensatz zu dem System der ursprünglichen Gleichungen, welches die *Beobachtungsgleichungen* enthält, bezeichnet.

Ich habe zunächst einen Punkt zu erörtern, den ich in Art. 30 nur kurz streifen können.

207. Verhältnis der Ausgleichungsformeln zu den Beobachtungsgleichungen. Es könnte nämlich scheinen, als ob hier die Theorie mehr leistet, als man verstandesmächtig zugeben darf. In der That ist die Anzahl der Ausgleichungsformeln stets so gross, wie die der zu berechnenden Coefficienten, sie hängt garnicht ab von der Anzahl der Beobachtungsgleichungen, und hiernach könnte man glauben auch in den Fällen, wo weniger Beobachtungsgleichungen vorhanden sind, als man Coefficienten berechnen muss, ein Mittel zur eindeutigen Bestimmung wahrscheinlichster

Werte für diese zu besitzen. Die Theorie der linearen Gleichungen, die in der Abschweifung des vorausgehenden Abschnitts auseinandergesetzt ist, hilft aber die Verhältnisse klar zu übersehen.

Ich setze wie in Art. 30 allgemein

$$\frac{1}{\varphi_x(v_x)} \frac{d\varphi_x(v_x)}{dv_x} = \xi_x,$$

alsdann gehen die Ausgleichsformeln über in

$$\begin{aligned} \xi_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \frac{\partial v_n}{\partial x_1} &= 0, \\ \xi_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \xi_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial v_n}{\partial x_2} &= 0, \\ \vdots & \\ \xi_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_h} + \xi_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_h} + \dots + \xi_n \frac{\partial v_n}{\partial x_h} &= 0, \end{aligned}$$

alle ξ sind in allen Gleichungen und in jeder derselben linear vertreten. Die h Ausgleichsformeln bilden also auch ein System von h linearen homogenen Gleichungen für die n Grössen ξ , und indem wir sie als solche auffassen, können wir auf sie alle Theoreme, die die Theorie der linearen Gleichungen angiebt, anwenden.

Sind nun weniger Beobachtungsgleichungen vorhanden, als man Coefficienten zu berechnen hat, so ist $h > n$, die Anzahl der Gleichungen für die ξ ist dann grösser als die Anzahl der ξ . Nun kann man ihnen allerdings allen gerecht werden, indem man $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$ setzt, aber dann sind alle φ von den bezüglichlichen v unabhängig, in jeder Beobachtungsgleichung grosse Fehler genau so wahrscheinlich wie kleine, und unsere Ausgleichstheorie verliert überhaupt ihre Bedeutung, wenn nicht diese ξ deshalb verschwinden, weil die Fehler gerade solche Werte haben, dass die Differentialquotienten der Wahrscheinlichkeitsfunctionen identisch Null sind. Entweder muss also schon das Gleichungssystem so beschaffen sein, dass es auch durch von Null verschiedene Beträge der ξ erfüllt werden kann und dazu ist nach Satz 18 der Abschweifung im vorausgehenden Abschnitt nötig, dass alle aus dem System der nh Grössen

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v_n}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial v_n}{\partial x_2}, \\ \vdots \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_h}, \frac{\partial v_2}{\partial x_h}, \dots, \frac{\partial v_n}{\partial x_h} \end{aligned}$$

bildbaren Determinanten n ter Ordnung gleich Null sind, was $\frac{h!}{(h-n)!n!}$ Gleichungen zwischen den n Fehlern v giebt. Wenn eine Determinante verschwindet, so kann das dadurch geschehen, dass eines ihrer Elemente sich vermöge der Beziehung, dass eben alle ihre Glieder zusammengekommen Null geben sollen, sich durch die anderen ausdrücken lässt, zweitens dadurch, dass sie paarweise gleiche und entgegengesetzte Glieder enthält, in welchem Falle dann die entsprechenden Elemente zweier oder mehrerer Zeilen bezüglich Columnen einander gleich sind, endlich drittens dadurch, dass die Elemente mindestens einer Zeile oder Columne einzeln Null sind. Die beiden ersten Fälle finden hier keine Anwendung, denn sie würden zwischen den Derivirten der Fehler Beziehungen festsetzen, und es bildet die Grundlage der Ausgleichsrechnung, dass die Fehler von einander unabhängig sind, da man sie sonst nicht mehr als zufällig ansehen darf. Bleibt also nur noch der dritte Fall.

Sei erst $h = n$, wir haben dann genau so viele Beobachtungsgleichungen, als zu berechnende Coefficienten vorhanden sind; die einzige Determinante, welche verschwinden soll, ist die aus allen Derivirten der v gebildete, demnach ist entweder mindestens eines der v von allen Coefficienten oder es sind alle v von mindestens einem Coefficienten unabhängig. Findet das erste statt, so fällt in jeder der Ausgleichsformeln ein Glied fort und es bleiben h homogene Gleichungen mit nur $h - 1$ Unbekannten ξ , und es müssen wieder eine Reihe $\left(\frac{h!}{(h-1)!} = h\right)$ von Determinanten verschwinden. Findet das zweite statt, so fällt eine der Ausgleichsformeln fort, wir haben nur noch $h - 1$ Gleichungen, aus denen die h Coefficienten nicht mehr eindeutig berechnet werden können.

Hieraus ersieht man schon, dass allgemein, wenn $h \geq n$ ist, entweder alle Fehler von allen Coefficienten unabhängig sein müssen, was nur die Bedeutung haben kann, dass man die Coefficienten als richtig ansieht und den Fehlern die Werte Null zuschreibt, und dann giebt es keine Ausgleichsformeln mehr; oder dass die Coefficienten nicht eindeutig berechnet werden können. Es verheissen also die Ausgleichsformeln nicht mehr, als man von vornherein zugeben darf; sie haben eine bestimmte Bedeutung nur, wenn $h < n$ ist, wenn mehr Beobachtungsgleichungen da sind, als man Coefficienten zu berechnen hat.

208. Die Ausgleichsformeln nach dem Gaussischen Fehlergesetz. Bezeichnet jetzt ω_x die Präcisionconstante der x ten Beobachtungsgleichung, so ist

$$\varphi_x(v_x) = \omega_x e^{-\pi \omega_x^2 v_x^2},$$

also

$$\xi_x = \frac{1}{\varphi_x(v_x)} \frac{d\varphi_x(v_x)}{dv_x} = -2\pi \omega_x^2 v_x$$

und die Ausgleichungsformeln gehen über in

$$\text{LXXXII c) } \left\{ \begin{array}{l} \omega_1^2 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \omega_2^2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \cdots + \omega_n^2 v_n \frac{\partial v_n}{\partial x_1} = 0, \\ \omega_1^2 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \omega_2^2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + \omega_n^2 v_n \frac{\partial v_n}{\partial x_2} = 0, \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \omega_1^2 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_h} + \omega_2^2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_h} + \cdots + \omega_n^2 v_n \frac{\partial v_n}{\partial x_h} = 0. \end{array} \right.$$

Die Quadrate der Präzisionsconstanten sind proportional den bezüglichen Gewichten, und zwar ist der Proportionalitätsfactor bei allen Constanten der nämliche, also haben wir auch als zweite Form

$$\text{LXXXII d) } \left\{ \begin{array}{l} p_1 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + p_2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \cdots + p_n v_n \frac{\partial v_n}{\partial x_1} = 0, \\ p_1 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + p_2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + p_n v_n \frac{\partial v_n}{\partial x_2} = 0, \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ p_1 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_h} + p_2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_h} + \cdots + p_n v_n \frac{\partial v_n}{\partial x_h} = 0. \end{array} \right.$$

209. Die Ausgleichungsformeln als Consequenz des Princips vom kleinsten mittlern Fehler. Die Fehler der einzelnen Beobachtungsgleichungen entsprechen ganz den Fehlern einzelner einfacher Messungen.

Es giebt nun

$$M = \sqrt{\frac{p_1 V_1^2 + p_2 V_2^2 + \cdots + p_n V_n^2}{n}}$$

den wahren mittlern Fehler irgend einer der Beobachtungsgleichungen, wenn sie das Gewicht 1 besässe, und es ist der wahre mittlere Fehler der x ten Beobachtungsgleichung

$$M_x = \frac{1}{\sqrt{p_x}} M$$

und ihr Gewicht

$$P_x = \frac{p_x}{M^2}.$$

Diesen wahren mittlern Fehler kennen wir nicht, ersetzen wir aber die wahren Fehler durch die wahrscheinlichsten, so können wir

$$m = \sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots + p_n v_n^2}{n}}$$

als den wahrscheinlichsten mittlern Fehler und

$$\bar{p}_x = \frac{p_x}{m^2}$$

als das wahrscheinlichste ausgeglichene Gewicht bezeichnen. Später werden wir sehen, dass diesem wahrscheinlichsten Betrag ein angenäherter Betrag des wahren mittlern Fehlers proportional ist.

Indem wir jetzt beachten, dass allgemein

$$p_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_x} = \frac{1}{2} \frac{\partial (p_i v_i^2)}{\partial x_x}$$

ist, da die beobachteten Gewichte p_i naturgemäss von den Coefficienten x nicht abhängen können, so erhalten wir als Ausgleichungsformeln auch

$$\frac{\partial m^2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial m^2}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial m^2}{\partial x_n} = 0.$$

Diese Gleichungen sagen aus, dass m^2 , also auch m ein Minimum (ein Maximum hätte hier keinen Sinn) sein soll, und da dann auch jedes der m ein Minimum, und jedes der \bar{p}_x ein Maximum ist, bekommen wir den Satz

62. *Dasjenige System von Coefficienten ist das wahrscheinlichste, welches den ausgeglichenen wahrscheinlichsten mittlern Fehler jeder der Beobachtungsgleichungen so klein als möglich, das ausgeglichene wahrscheinlichste Gewicht so gross als möglich ausfallen macht.*

Der Satz entspricht genau dem in Art. 88 für die Ausgleichung einfacher Messungen abgeleiteten, und er kann auch statt des Fehlergesetzes als Ausgangspunkt für alle Ausgleichungen dienen, vorausgesetzt, dass man den mittlern Fehler geeignet durch die Quadrate der Fehler definirt.

Er ist für das Gedächtnis ausserordentlich bequem und hilft in jedem Falle die Ausgleichungsformeln aufstellen, so dass man sich den Bau dieser nicht erst einzuprägen braucht.

Es erhellt ferner aus diesem Satz, warum die Ausgleichungsrechnung auch bei Untersuchungen als Methode der kleinsten Quadrate bezeichnet wird.

Uebrigens wird der Satz sofort einleuchtend, so wie wir statt wahrscheinlichst, vorteilhaftest sagen, in der Tat müssen wir ja das System von Beträgen für die Coefficienten als das vorteilhafteste betrachten, welches die kleinsten mittlern Fehler befürchten lässt. Wenn der Satz trotzdem nicht als Axiom angesehen werden darf, so liegt das daran, dass er nicht zugleich für den Begriff „mittlerer Fehler“ eine von selbst einleuchtende Definition giebt, das Hypothetische liegt gerade in dieser Definition, und man kann nicht sagen, dass man gleich von vornherein die Quadratwurzel aus dem mittlern Fehlerquadrat als entscheidend ansehen muss.

210. Allgemeine Fehlergleichungen. Wir haben nunmehr in die Ausgleichungsformeln für die v ihre bezüglichen Werte einzusetzen.

Denken wir uns in die Function Φ , deren Coefficienten bestimmt werden sollen, die wahrscheinlichsten Beträge x_1, x_2, \dots, x_h dieser Coefficienten eingesetzt, so wird für irgend ein beobachtetes System a_x, b_x, \dots, g_x der Variablen $\Phi(a_x, b_x, \dots, g_x; x_1, x_2, \dots, x_h)$ im allgemeinen nicht mehr gleich Null sein, und da die eingesetzten Beträge der Coefficienten die wahrscheinlichsten sein sollten, so ist die Abweichung des Wertes $\Phi(a_x, b_x, \dots, g_x; x_1, x_2, \dots, x_h)$ von Null auch der wahrscheinlichste Fehler der betreffenden Beobachtungsgleichung. Wir haben also

$$\text{LXXXIII)} \quad \begin{cases} v_1 = -\Phi(a_1, b_1, \dots, g_1; x_1, x_2, \dots, x_h), \\ v_2 = -\Phi(a_2, b_2, \dots, g_2; x_1, x_2, \dots, x_h); \\ \vdots \\ v_n = -\Phi(a_n, b_n, \dots, g_n; x_1, x_2, \dots, x_h). \end{cases}$$

Man bezeichnet diese Gleichungen als *allgemeine Fehlergleichungen*, und da die x_1, x_2, \dots, x_h schon ihren wahrscheinlichsten Beträgen nach bestimmt angesehen werden, heissen die wahrscheinlichsten Fehler v_1, v_2, \dots, v_n auch die *übrig bleibenden Fehler* der bezüglichen Beobachtungsgleichungen. Es dienen diese Fehler ganz so wie die entsprechenden Fehler bei einfachen Messungen zur Kritik der erhaltenen Resultate wie der angewendeten Messungsmethoden.

211a. Allgemeine Normalgleichungen. Setzen wir jetzt zur Abkürzung

$$\Phi(a_x, b_x, \dots, g_x; x_1, x_2, \dots, x_h) = \Phi_x,$$

so gehen die Ausgleichungsformeln über in

$$\text{LXXXIIe)} \quad \begin{aligned} p_1 \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + p_2 \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} + \dots + p_n \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} &= 0, \\ p_1 \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} + p_2 \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \dots + p_n \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} &= 0, \\ \vdots & \\ p_1 \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_h} + p_2 \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_h} + \dots + p_n \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_h} &= 0. \end{aligned}$$

Und diese Gleichungen heissen *allgemeine Normalgleichungen*.

211b. Notwendigkeit eines Näherungsverfahrens bei der Behandlung der allgemeinen Normalgleichungen. Berechnen wir nun die Gewichte nach der allgemeinen Formel

$$p_x = \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial a_x}\right)^2 \mu_{a_x}^2 + \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial b_x}\right)^2 \mu_{b_x}^2 + \dots + \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial g_x}\right)^2 \mu_{g_x}^2},$$

so wissen wir aus Art. 155, dass diese Gleichung für p nur dann angewendet werden darf, wenn Φ schon sehr genau bestimmt ist, wir können daher die

Ordnet man jetzt nach den x , so wird

$$\begin{aligned} & x_1(p_1 a_1^{(1)} a_x^{(1)} + p_2 a_1^{(2)} a_x^{(2)} + p_3 a_1^{(3)} a_x^{(3)} + \dots + p_n a_1^{(n)} a_x^{(n)}) \\ & + x_2(p_1 a_2^{(1)} a_x^{(1)} + p_2 a_2^{(2)} a_x^{(2)} + p_3 a_2^{(3)} a_x^{(3)} + \dots + p_n a_2^{(n)} a_x^{(n)}) \\ & + x_3(p_1 a_3^{(1)} a_x^{(1)} + p_2 a_3^{(2)} a_x^{(2)} + p_3 a_3^{(3)} a_x^{(3)} + \dots + p_n a_3^{(n)} a_x^{(n)}) \\ & + \dots \\ & + x_h(p_1 a_h^{(1)} a_x^{(1)} + p_2 a_h^{(2)} a_x^{(2)} + p_3 a_h^{(3)} a_x^{(3)} + \dots + p_n a_h^{(n)} a_x^{(n)}) \\ & = - (p_1 a_0^{(1)} a_x^{(1)} + p_2 a_0^{(2)} a_x^{(2)} + p_3 a_0^{(3)} a_x^{(3)} + \dots + p_n a_0^{(n)} a_x^{(n)}). \end{aligned}$$

Ich schreibe jetzt in der Gaussischen Bezeichnungsweise allgemein

$$p_1 a_i^{(1)} a_x^{(1)} + p_2 a_i^{(2)} a_x^{(2)} + p_3 a_i^{(3)} a_x^{(3)} + \dots + p_n a_i^{(n)} a_x^{(n)} = [pa_i a_x],$$

alsdann werden die zur Function $0 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_h x_h$ gehörigen Ausgleichsformeln

$$\begin{aligned} & [pa_1 a_1] x_1 + [pa_1 a_2] x_2 + [pa_1 a_3] x_3 + \dots + [pa_1 a_h] x_h = - [pa_0 a_1], \\ & [pa_2 a_1] x_1 + [pa_2 a_2] x_2 + [pa_2 a_3] x_3 + \dots + [pa_2 a_h] x_h = - [pa_0 a_2], \\ \text{LXXXII}_1) & [pa_3 a_1] x_1 + [pa_3 a_2] x_2 + [pa_3 a_3] x_3 + \dots + [pa_3 a_h] x_h = - [pa_0 a_3], \\ & \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ & [pa_h a_1] x_1 + [pa_h a_2] x_2 + [pa_h a_3] x_3 + \dots + [pa_h a_h] x_h = - [pa_0 a_h]. \end{aligned}$$

Später werde ich auch noch die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} [pa_i a_x] &= a_{ix}, \\ - [pa_0 a_x] &= l_x \end{aligned}$$

benutzen, unter deren Annahme die Ausgleichsformeln übergehen in

$$\begin{aligned} & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1h} x_h = l_1, \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2h} x_h = l_2, \\ \text{LXXXII}_2) & a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \dots + a_{3h} x_h = l_3, \\ & \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ & a_{h1} x_1 + a_{h2} x_2 + a_{h3} x_3 + \dots + a_{hh} x_h = l_h. \end{aligned}$$

Für die p gelten aber die Gleichungen

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{\mu_{a_0}^2(1) + x_1^2 \mu_{a_1}^2(1) + x_2^2 \mu_{a_2}^2(1) + \dots + x_h^2 \mu_{a_h}^2(1)}, \\ p_2 &= \frac{1}{\mu_{a_0}^2(2) + x_1^2 \mu_{a_1}^2(2) + x_2^2 \mu_{a_2}^2(2) + \dots + x_h^2 \mu_{a_h}^2(2)}, \\ & \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ p_n &= \frac{1}{\mu_{a_0}^2(n) + x_1^2 \mu_{a_1}^2(n) + x_2^2 \mu_{a_2}^2(n) + \dots + x_h^2 \mu_{a_h}^2(n)}. \end{aligned}$$

Da man die p kennen muss, ehe man die Grössen a und l numerisch anzugeben, also die Ausgleichungsformeln nach den x aufzulösen vermag, die p aber von den x selbst abhängen, ist man gezwungen, entweder für die p , ohne auf die zu ihrer Bestimmung dienenden Formeln einzugehen, Näherungswerte zu schätzen, oder — was jedenfalls vorzuziehen ist — für die x Näherungswerte abzuleiten und so für die p Näherungen zu rechnen.

213. Ausgleichung homogener linearer Functionen. Ich habe noch eine Bemerkung hinzuzufügen; es kann vorkommen, dass unsere Function kein von einem Coefficienten freies Glied enthält, in diesem Falle wäre $a_0 = 0$, und in den Ausgleichungsformeln gingen alle l in Null über. Man hätte so ein System linearer homogener Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten erhalten. Ein solches System kann aber für die Unbekannten von Null verschiedene Beträge nur dann liefern, wenn seine Determinante verschwindet; da das nun in unserm Falle durchaus nicht einzutreffen braucht, so können also die Ausgleichungsformeln dann überhaupt nicht mehr so stehen bleiben. Um dieser Schwierigkeit zu entgehen, hat man die Function durch einen der Coefficienten zu dividiren, wodurch sie ein von unbekanntem Coefficienten freies Glied bekommt, dieser Coefficient bleibt dann allerdings für immer unbekannt, die andern sind aber nach den voraufgehenden Regeln zu berechnen.

Ein Coefficient würde auch unbekannt bleiben müssen, wenn es sich um eine bestimmte, nicht bloß wahrscheinlichste Lösung des Problems handelte; die Ausgleichungsmethode leistet also nicht mehr, als sie verstandemässig darf.

Geht, um ein Beispiel anzuführen, ein Lichtstrahl aus einem Körper, dessen absoluter Brechungsexponent n_1 ist, in einen andern über, dem der absolute Brechungsexponent n_2 zukommt, so ist das Gesetz, welches physikalisch seinen Brechungswinkel r von seinem Einfallswinkel i abhängig macht,

$$n_1 \sin i - n_2 \sin r = 0.$$

Eine wie grosse Reihe zusammengehöriger Werte von i und r man auch gemessen haben mag, so vermag man doch nicht n_1 und n_2 zu berechnen, sondern nur die Verhältniszahlen $\frac{n_1}{n_2}$ oder $\frac{n_2}{n_1}$.

Man hat also hier nicht etwa die zwei Ausgleichungsformeln

$$\begin{aligned} n_1 [p \sin i \sin i] - n_2 [p \sin i \sin r] &= 0, \\ - n_1 [p \sin i \sin r] + n_2 [p \sin r \sin r] &= 0, \end{aligned}$$

sondern, wenn man $\frac{n_2}{n_1} = n$ haben will, nur die eine Ausgleichungsformel

$$n [p \sin^2 r] = [p \sin i \sin r],$$

aus der

$$n = \frac{[p \sin i \sin r]}{[p \sin^2 r]}$$

folgt.

214. Zurückführung des allgemeinen Falls auf Ausgleichung linearer Functionen in successiver Näherung. Zu ganz entsprechenden Ausgleichungsformeln gelangt man auch im allgemeinen Fall, wo die Function Φ irgendwie beschaffen ist.

Wir besorgen uns in irgend einer Weise — wenn es nicht anders geht durch eine Auflösung von h der Beobachtungsgleichungen, die man dann nur genähert auszuführen braucht — angenäherte Beträge für die Coefficienten. Es seien diese angenäherten Beträge

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_h^{(1)}.$$

Setzen wir dann

$$x_1 = x_1^{(1)} + \xi_1, x_2 = x_2^{(1)} + \xi_2, \dots, x_h = x_h^{(1)} + \xi_h,$$

so sind die ξ die durch die Ausgleichungsformeln noch zu berechnenden notwendigen Verbesserungen. Indem wir jetzt die ξ als relativ klein ansehen, können wir genähert annehmen

$$\Phi = \Phi^{(1)} + \xi_1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_1^{(1)}} + \xi_2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_2^{(1)}} + \dots + \xi_h \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_h^{(1)}},$$

wo

$$\Phi^{(1)} = \Phi(a, b, \dots, g; x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_h^{(1)})$$

ist. Damit wird

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_x} = \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_x^{(1)}},$$

also auch noch angenähert

$$p_x = p_x^{(1)} = \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi_x^{(1)}}{\partial a_x}\right)^2 \mu_{a_x}^2 + \left(\frac{\partial \Phi_x^{(1)}}{\partial b_x}\right)^2 \mu_{b_x}^2 + \dots + \left(\frac{\partial \Phi_x^{(1)}}{\partial g_x}\right)^2 \mu_{g_x}^2},$$

und es gehen also die Fehlergleichungen über in

$$\begin{aligned} -v_1 &= \Phi_1^{(1)} + \xi_1 \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial x_1^{(1)}} + \xi_2 \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial x_2^{(1)}} + \dots + \xi_h \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial x_h^{(1)}}; \\ -v_2 &= \Phi_2^{(1)} + \xi_1 \frac{\partial \Phi_2^{(1)}}{\partial x_1^{(1)}} + \xi_2 \frac{\partial \Phi_2^{(1)}}{\partial x_2^{(1)}} + \dots + \xi_h \frac{\partial \Phi_2^{(1)}}{\partial x_h^{(1)}}; \\ &\vdots \\ -v_n &= \Phi_n^{(1)} + \xi_1 \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial x_1^{(1)}} + \xi_2 \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial x_2^{(1)}} + \dots + \xi_h \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial x_h^{(1)}}; \end{aligned}$$

und die Ausgleichungsformeln werden, indem man nach der schon in Art. 212 benutzten Gaussischen Bezeichnungsweise für Summen

$$p_1^{(1)} \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial x_x} + p_2^{(1)} \frac{\partial \Phi_2^{(1)}}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_2^{(1)}}{\partial x_x} + \dots + p_n^{(1)} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial x_x} = \left[p^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_x} \right],$$

$$p_1^{(1)} \Phi_1^{(1)} \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial x_i} + p_2^{(1)} \Phi_2^{(1)} \frac{\partial \Phi_2^{(1)}}{\partial x_i} + \dots + p_n^{(1)} \Phi_n^{(1)} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial x_i} = \left[p^{(1)} \Phi^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_i} \right]$$

setzt.

$$\xi_1 \left[p^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_1^{(1)}} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_1^{(1)}} \right] + \xi_2 \left[p^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_1^{(1)}} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_2^{(1)}} \right] + \dots + \xi_h \left[p^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_1^{(1)}} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_h^{(1)}} \right] = - \left[p^{(1)} \Phi^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_1^{(1)}} \right],$$

$$\xi_1 \left[p^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_2^{(1)}} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_1^{(1)}} \right] + \xi_2 \left[p^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_2^{(1)}} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_2^{(1)}} \right] + \dots + \xi_h \left[p^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_2^{(1)}} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_h^{(1)}} \right] = - \left[p^{(1)} \Phi^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_2^{(1)}} \right],$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$\xi_1 \left[p^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_h^{(1)}} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_1^{(1)}} \right] + \xi_2 \left[p^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_h^{(1)}} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_2^{(1)}} \right] + \dots + \xi_h \left[p^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_h^{(1)}} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_h^{(1)}} \right] = - \left[p^{(1)} \Phi^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_h^{(1)}} \right].$$

Das sind h lineare Gleichungen, aus denen sich die h Verbesserungen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h$ der Coefficienten eindeutig berechnen lassen. Nachdem man so die ξ berechnet hat, muss man erst nachsehen, ob die Annahme, dass in der Entwicklung von Φ nach den ξ die Glieder, welche höhere Potenzen der ξ enthielten, als die erste, vernachlässigt werden dürfen, berechtigt war. Man rechnet also noch mindestens die Glieder, die von den zweiten Potenzen abhängen, die

$$\xi_1 \left(\xi_1 \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial x_1^{(1)} \partial x_1^{(1)}} + \xi_2 \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial x_1^{(1)} \partial x_2^{(1)}} + \dots + \xi_h \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial x_1^{(1)} \partial x_h^{(1)}} \right)$$

$$+ \xi_2 \left(\xi_1 \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial x_2^{(1)} \partial x_1^{(1)}} + \xi_2 \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial x_2^{(1)} \partial x_2^{(1)}} + \dots + \xi_h \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial x_2^{(1)} \partial x_h^{(1)}} \right)$$

$$+ \dots \dots \dots$$

$$+ \xi_h \left(\xi_1 \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial x_h^{(1)} \partial x_1^{(1)}} + \xi_2 \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial x_h^{(1)} \partial x_2^{(1)}} + \dots + \xi_h \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial x_h^{(1)} \partial x_h^{(1)}} \right),$$

und diese Glieder zusammengenommen und durch 2 dividirt, müssen so klein sein, dass sie nicht mehr in Betracht kommen, das heisst, dass es uns bei einer numerischen Ausrechnung von Φ ganz gleichgiltig ist, ob wir jene Glieder noch mitnehmen oder nicht. Zeigt sich, dass jene Glieder

nicht hätten vernachlässigt werden dürfen, weil die ξ sich als zu gross ergeben haben, so sind die Grössen

$$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} + \xi_1, \quad x_2^{(2)} = x_2^{(1)} + \xi_2, \quad \dots, \quad x_h^{(2)} = x_h^{(1)} + \xi_h$$

als zweite Näherungen anzusehen. Man setzt dann

$$x_1 = x_1^{(2)} + \xi_1^{(1)}, \quad x_2 = x_2^{(2)} + \xi_2^{(1)}, \quad \dots, \quad x_h = x_h^{(2)} + \xi_h^{(1)}$$

und berechnet die $\xi^{(1)}$ aus Formeln, die genau so gebaut sind wie die für die ξ , nur dass statt

$$\Phi^{(1)} = \Phi(a, b, \dots, g; x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_h^{(1)})$$

zu setzen ist

$$\Phi^{(2)} = \Phi(a, b, \dots, g; x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_h^{(2)})$$

und statt der ersten Näherungswerte $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_h^{(1)}$ die zweiten $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_h^{(2)}$ einzuführen sind.

Nach der zweiten kann man eine dritte, dann eine vierte u. s. f. Näherung rechnen, man fährt aber so lange damit fort, bis sich die Verbesserungen ξ klein genug ergeben. Principiell Neues tritt dabei nicht auf, eine Näherung wird genau so gerechnet wie die andere.

Das Charakteristische des ganzen Verfahrens besteht hiernach darin, dass man die Function, um deren Coefficienten es sich handelt, durch Einführung von Näherungswerten und Verbesserungen für diese Coefficienten in eine andere verwandelt, die von ihren Coefficienten nur noch linear abhängt und wir können auch sagen, dass die Ausgleichsrechnung sich auf Functionen beschränkt und beschränken darf, die von den zu bestimmenden Grössen linear abhängen.

215. Andere Methoden Ausgleichungen verwickelter Functionen auf die linearer zurückzuführen. Diese Bemerkung lehrt das Ganze von einem höhern Standpunkt betrachten. Es kommt nämlich hiernach nur darauf an, die betreffende Function so umzuändern, dass die in ihr nach der Umänderung vertretenen Coefficienten linear erscheinen. Ein Verfahren dazu haben wir soeben kennen gelernt, es ist aber klar, dass man vielfach auch ohne Näherungsrechnungen die Transformation wird ausführen können. Hat man zum Beispiel

$$\Phi = x_1 e^{ax_2} - b = 0,$$

so ist

$$b = x_1 e^{ax_2}$$

und

$$\log b = \log x_1 + ax_2 \log e,$$

indem man jetzt

$$\log x_1, \quad x_2 \log e$$

als neue Coefficienten r_1, r_2 ansieht, wird die transformirte Function

$$\Psi = r_1 + r_2 a - \log b,$$

die von ihren Coefficienten nur noch linear abhängt. Indessen hat man es dann nicht mehr mit der Function Φ , sondern mit der Ψ zu tun, und dieses ist besonders deshalb wichtig, weil die Gewichte der Beobachtungsgleichungen nicht mehr die p , sondern andere sind. Ich deute das hier nur an, später wird darauf näher einzugehen sein.

In andern Fällen ist das Näherungsverfahren mit dem Transformiren zu verbinden, wir werden später auch hierfür Beispiele kennen lernen, vorläufig erwähne ich die aus den Untersuchungen von Kohlrausch und andern über die Nachwirkungserscheinungen wohl bekannte Function

$$x_1 e^{r_2 a^{x_3}} - b = 0,$$

die uns in der Folge nach beschäftigen wird.

Ferner ist es selbst in den Fällen, in denen die Function von ihren Coefficienten schon linear abhängt, noch sehr vorteilhaft, diese Coefficienten durch successive Näherung zu berechnen, weil dann die rechten Seiten der Gleichungen für die ξ relativ klein werden, die Auflösung dieser Gleichungen sich bequemer ausführen lässt, vor allen Dingen aber, weil so die charakteristischen Fehler der in Frage kommenden Grösse am leichtesten zu berechnen sind.

216. Die praktischen Fehler- und Normalgleichungen. Ich setze also voraus, dass man nach Einführung von Näherungswerten für die Coefficienten nur noch deren verhältnismässig kleine Verbesserungen zu berechnen hat. x'_1, x'_2, \dots, x'_h seien die fraglichen Näherungswerte, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h$ ihre Verbesserungen, ferner sei

$$\begin{aligned} \Phi(a_x, b_x, \dots, g_x; x'_1, x'_2, \dots, x'_h) &= \Phi'_x, \\ \frac{\partial \Phi(a_x, b_x, \dots, g_x; x'_1, x'_2, \dots, x'_h)}{\partial x'_i} &= \frac{\partial \Phi'_x}{\partial x'_i}, \end{aligned}$$

alsdann ist also, um die Gleichungen nochmals zusammenzustellen,

$$\text{LXXXIII)} \quad x_1 = x'_1 + \xi_1, \quad x_2 = x'_2 + \xi_2, \quad \dots, \quad x_h = x'_h + \xi_h$$

$$\text{LXXXIV)} \quad \left\{ \begin{array}{l} -v_1 = \Phi'_1 + \xi_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_1} + \xi_2 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_2} + \dots + \xi_h \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_h}, \\ -v_2 = \Phi'_2 + \xi_1 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_1} + \xi_2 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_2} + \dots + \xi_h \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_h}, \\ \vdots \\ -v_n = \Phi'_n + \xi_1 \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_1} + \xi_2 \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_2} + \dots + \xi_h \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_h}, \end{array} \right.$$

XVII. Fehlerrechnung.

a) Beobachtete mittlere Fehler und Gewichte der Beobachtungsgleichungen.

Allein mit der Aufstellung der Normalgleichungen ist unsere Aufgabe noch nicht abgeschlossen, wir müssen auch wissen, welche Sicherheit wir den Resultaten zuzuschreiben haben, und welche Genauigkeit den einzelnen Beobachtungsgleichungen zukommt.

217. Die beobachteten mittlern Fehler und Gewichte der Beobachtungsgleichungen. Beginnen wir mit dem zweiten Teil unseres Problems, als dem leichtern, so müssen die Beobachtungen selbst schon eine gewisse Uebersicht über die bei jeder Gleichung erreichte Genauigkeit geben.

In der Tat, die Messung jedes Elements wird mit Fehlern behaftet sein, wenn aber in dem System a_x, b_x, \dots, g_x jedes Element mehrfach gemessen ist, kann für jedes derselben nach den für einfache Messungen geltenden Regeln der mittlere Fehler berechnet werden. Seien nun $\mu_{a_x}, \mu_{b_x}, \dots, \mu_{g_x}$ die bezüglichen mittlern Fehler der Beträge a_x, b_x, \dots, g_x des Elementensystems, so ist nach dem Satz 58 über die Berechnung des mittlern Fehlers zusammengesetzter Functionen der mittlere Fehler der x ten Beobachtungsgleichung

$$\mu_x = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial a_x}\right)^2 \mu_{a_x}^2 + \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial b_x}\right)^2 \mu_{b_x}^2 + \dots + \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial g_x}\right)^2 \mu_{g_x}^2.}$$

In der Function Φ sind zwar die Coefficienten streng genommen als durch ihre wahren Beträge vertreten anzusehen, indessen weil die μ relativ kleine Grössen sein werden, darf man in erster Näherung von den wahrscheinlichsten Beträgen oder auch von Näherungswerten Gebrauch machen und

$$\Phi_x = \Phi(a_x, b_x, \dots, g_x; x_1, x_2, \dots, x_h)$$

oder auch

$$\Phi_x = \Phi(a_x, b_x, \dots, g_x; x'_1, x'_2, \dots, x'_h)$$

setzen.

Für diejenigen Elemente, welche nur einmal gemessen sind, kann man die μ nicht berechnen, man tut dann am besten diese μ zu schätzen, oder wenn das nicht geht, was wol nicht oft der Fall sein wird, sie einfach gleich Null setzen.

Ich nenne den so bestimmten mittlern Fehler einer Beobachtungsgleichung den *beobachteten mittlern Fehler* der Gleichung. Ihm entspricht das *beobachtete Gewicht*

$$p_x = \frac{1}{\mu_x^2}$$

der betreffenden Gleichung.

b) *Ausgeglichene mittlere Fehler und Gewichte der Beobachtungsgleichungen.*

218a. Der wahre mittlere Fehler. Allein, da die Beobachtungsgleichungen einander um so weniger widersprechen werden, je genauer sie sind, so bietet auch das nach Ausrechnung der wahrscheinlichsten Coefficienten übrig bleibende System der Fehler ein Kriterium für die Güte der Messungen und die Sicherheit des Resultats, und dieses Kriterium ist um so wertvoller, als es zur Beurteilung einer Gleichung alle Gleichungen heranzieht, und als man selten in der Lage ist, in jedem System der Elemente jedes Element so oft zu messen, bis man im Stande ist, seinen mittlern Fehler auch nur mit einiger Sicherheit anzugeben.

Wir haben daher auch noch zu zeigen, wie man Werte für die charakteristischen Fehler aus allen Beobachtungsgleichungen ableiten kann. Systematische Versehen sollen ausgeschlossen sein, so dass wir es nur mit zufälligen Fehlern zu tun haben.

Ich nehme zunächst für den Augenblick an, dass die wahren Fehler der Beobachtungsgleichungen bekannt sind; V_1 sei der wahre Fehler der ersten, V_2 der der zweiten, ..., V_n der der letzten Beobachtungsgleichung.

Es ist dann, wie schon bemerkt, der wahre Fehler der x ten Beobachtungsgleichung

$$V_x = -\Phi(a_x, b_x, \dots, g_x; X_1, X_2, \dots, X_h).$$

Ferner definiere ich die charakteristischen Fehler hier genau so, wie bei den einfachen Messungen.

Es mögen erst alle Beobachtungsgleichungen gleiches Gewicht, das Gewicht 1 können wir sagen, haben, alsdann ist der wahre mittlere Fehler einer derselben

$$M = \sqrt{\overline{V^2}},$$

wo $\overline{V^2}$ das mittlere Quadrat aller nur möglichen Fehler angiebt. Wenn die Anzahl n der Beobachtungsgleichungen unbeschränkt gross ist, haben wir

$$\overline{V^2} = \frac{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2}{n}.$$

Sehen wir davon ab, dass n notwendiger Weise eine endliche Zahl angiebt, so können wir uns $\overline{V^2}$ immer noch durch eine Formel von der obigen Form berechnet denken. Allein da die wahren Beträge der Coefficienten unbekannt bleiben, sind wir nicht im Stande, die wahren Fehler V zu bestimmen, vermögen also auch nicht die wahren mittlern Fehler der Beobachtungsgleichungen anzugeben.

218b. Der wahrscheinlichste mittlere Fehler. Gehen wir aber zu den wahrscheinlichsten Fehlern über, so haben wir in

$$m = \sqrt{v^2}$$

den wahrscheinlichsten mittlern Fehler, und indem wir die wahrscheinlichsten Beträge der Coefficienten aus den Ausgleichungsformeln berechnen und allgemein

$$v_x = -\Phi(a_x, b_x, \dots, g_x; x_1, x_2, \dots, x_h)$$

setzen, vermögen wir die einzelnen v und damit

$$\frac{1}{v^2} = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{n}$$

zu bestimmen.

Indessen brauchen wir uns hier ebenso wenig wie bei den einfachen Messungen mit dem wahrscheinlichsten Betrag des mittlern Fehlers zu begnügen, denn auch hier können wir einen genäherten Betrag für den wahren mittlern Fehler ableiten.

218c. Genäherter Wert für den wahren mittlern Fehler. Sind nämlich die wahren Fehler der Coefficienten bezüglich

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h,$$

dann wird

$$X_1 = x_1 + \alpha_1, X_2 = x_2 + \alpha_2, \dots, X_h = x_h + \alpha_h,$$

somit

$$V_x = -\Phi(a_x, b_x, \dots, g_x; x_1 + \alpha_1, x_2 + \alpha_2, \dots, x_h + \alpha_h).$$

Wir müssen jetzt die Annahme machen, dass die Beobachtungen so scharf oder ihre Anzahl so gross ist, dass die aus ihnen berechneten wahrscheinlichsten Beträge der Coefficienten von den wahren Beträgen derselben so wenig noch abweichen, dass man bei einer Entwicklung von Φ nach den wahren Fehlern der Coefficienten höhere Potenzen als die erste Potenz vernachlässigen darf, alsdann ist, indem wir

$$\Phi(a_x, b_x, \dots, g_x; x_1, x_2, \dots, x_h) = \varphi_x$$

setzen,

$$V_x = -\varphi_x - \alpha_1 \frac{\partial \varphi_x}{\partial x_1} - \alpha_2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial x_2} - \dots - \alpha_h \frac{\partial \varphi_x}{\partial x_h}.$$

Nun ist offenbar (Art. 209)

$$-\varphi_x = -\Phi(a_x, b_x, \dots, g_x; x_1, x_2, \dots, x_h)$$

der wahrscheinlichste Fehler v_x der x ten Beobachtungsgleichung, somit wird

somit auch

$$\overline{r^2} = \frac{\overline{r'^2}}{n}.$$

r' hängt aber von der Messung von h Grössen X_1, X_2, \dots, X_h ab.

Da nun bei der Berechnung des wahren mittlern Fehlers die Coefficienten nach ihren wahren Beträgen vorausgesetzt sind, so liegt es nahe,

$$\overline{r'^2} = h M^2$$

anzunehmen, und in erster Annäherung muss das auch richtig sein, da, wie wir aus der Theorie zusammengesetzter Messungen wissen, eine zusammengesetzte Grösse um so weniger präcis zu bestimmen ist, aus je mehr Elementen sie besteht, derartig, dass das Quadrat ihres mittlern Fehlers aus so vielen positiven Gliedern besteht, als Elemente zu beobachten sind.

Hiernach haben wir also

$$M^2 = m^2 + \frac{h M^2}{n}$$

oder

$$\text{XCI) } M^2 = \frac{n}{n-h} m^2.$$

Führen wir für m^2 seinen Ausdruck als das mittlere Quadrat der wahrscheinlichsten Fehler ein, und vertauschen M mit $\overline{\mu}$, um zu kennzeichnen, dass wir es nur mit einem angenäherten Betrag des wahren mittlern Fehlers und ausserdem mit einem ausgeglichenen zu tun haben, so wird

$$\overline{\mu} = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{n-h}}.$$

$n-h$ ist die Anzahl der Beobachtungsgleichungen, die man mehr hat als zur Berechnung der Coefficienten nötig sind, also

64. *Man bekommt einen genäherten Wert für den mittlern Fehler, wenn man aus den wahrscheinlichsten Fehlern das mittlere Fehlerquadrat so bildet, wie wenn die Anzahl der Fehler gleich der Anzahl überschüssiger Beobachtungsgleichungen wäre.*

Die obige Ableitung dieses Satzes ist nicht sehr streng, aber sie hat den Vorteil, die vernachlässigenden Annahmen klar hervortreten zu lassen und sich an die entsprechende Ableitung für einfache Messungen anzulehnen.

219. Die mittlere Unsicherheit der charakteristischen Fehler. Die zweite Fehlerquelle bei der Berechnung des mittlern Fehlers bildet die Annahme, die wir gemacht haben, dass man das mittlere Fehlerquadrat

$$\overline{V^2} = \frac{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2}{n}$$

setzen darf, streng genommen ist dasselbe aus

$$\overline{V^2} = \omega \int_{-\infty}^{+\infty} V^2 e^{-\pi\omega^2 V^2} dV$$

zu berechnen.

Ganz entsprechend dem, was wir in dieser Hinsicht für einfache Messungen (Art. 97) kennen gelernt haben, ist nach Gauss die mittlere Unsicherheit, wenn man für den mittlern Fehler seinen durch $\bar{\mu}$ gegebenen Ausdruck anwendet, angenähert gleich

$$\bar{\mu} \frac{0,708}{\sqrt{n-h}},$$

so dass man hat

$$\text{XCII}_1) \quad \bar{\mu} = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{n-h}} \left(1 \pm \frac{0,708}{\sqrt{n-h}} \right).$$

220. Uebergang zu den tatsächlichen Verhältnissen. Formeln. Wenn endlich den Beobachtungsgleichungen nicht, wie bisher angenommen, gleiches Gewicht zukommt, sondern der ersten das Gewicht p_1 , der zweiten das p_2 , ..., der letzten das p_n zuzuschreiben ist, so hat man jedes der v mit dem zugehörigen Gewicht zu multipliciren und dann ist der ausgeglichene mittlere Fehler der x ten Beobachtungsgleichung

$$\text{XCIII) } \bar{\mu}_x = \sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2}{p_x (n-h)}} \left(1 \pm \frac{0,708}{\sqrt{n-h}} \right).$$

Es ist früher bemerkt, dass man für jede Beobachtungsgleichung auch von einem mittlern Fehler vor der Ausgleichung sprechen kann, und es ist dieser der beobachtete mittlere Fehler genannt und durch μ_x bezeichnet worden. Entsprechendes gilt für die andern charakteristischen Grössen. Stellen wir also die Formeln zusammen, so ist

$$\begin{aligned} \mu_x &= \sqrt{\left(\frac{\partial\Phi_x}{\partial a_x}\right)^2 \mu_{a_x}^2 + \left(\frac{\partial\Phi_x}{\partial b_x}\right)^2 \mu_{b_x}^2 + \dots + \left(\frac{\partial\Phi_x}{\partial g_x}\right)^2 \mu_{g_x}^2}, \\ \bar{\mu}_x &= \sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2}{p_x (n-h)}} \left(1 \pm \frac{0,708}{\sqrt{n-h}} \right), \\ \text{XCIV}_1) \quad p_x &= \frac{1}{\left(\frac{\partial\Phi_x}{\partial a_x}\right)^2 \mu_{a_x}^2 + \left(\frac{\partial\Phi_x}{\partial b_x}\right)^2 \mu_{b_x}^2 + \dots + \left(\frac{\partial\Phi_x}{\partial g_x}\right)^2 \mu_{g_x}^2}, \\ \bar{p}_x &= \frac{p_x (n-h)}{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2} \left(1 \pm \frac{1,416}{\sqrt{n-h}} \right). \end{aligned}$$

Aehnliche Betrachtungen lassen sich für die andern charakteristischen Grössen anstellen.

Für den wahrscheinlichen Fehler ist

$$r_x = 0,67448 \mu_x,$$

$$\bar{r}_x = 0,67448 \bar{\mu}_x,$$

für den durchschnittlichen

XCIV₂)

$$\delta_x = \sqrt{\left(\frac{\partial\Phi_x}{\partial a_x}\right)^2 \delta_{a_x}^2 + \left(\frac{\partial\Phi_x}{\partial b_x}\right)^2 \delta_{b_x}^2 + \dots + \left(\frac{\partial\Phi_x}{\partial g_x}\right)^2 \delta_{g_x}^2},$$

$$\bar{\delta}_x = \frac{\sqrt{p_1} |v_1| + \sqrt{p_2} |v_2| + \dots + \sqrt{p_n} |v_n|}{\sqrt{p_x n (n-h)}} \left(1 \pm \frac{0,756}{\sqrt{n-h}}\right),$$

wo $|a|$ den absoluten Betrag einer Grösse a vorstellt, für die Präzisionsconstante.

$$\omega_x = 0,39895 \frac{1}{\mu_x^2},$$

$$\bar{\omega}_x = 0,39895 \frac{1}{\bar{\mu}_x^2},$$

All' diese Grössen beziehen sich auf eine bestimmte Beobachtungsgleichung, in der also die Elemente die Beträge haben, die man unmittelbar aus der Beobachtung erhalten hat.

Ueber die Berechnung der beobachteten charakteristischen Grössen ist nichts weiter hinzuzufügen, nur mag noch einmal hervorgehoben werden, dass in der Function Φ an Stelle der wahren Beträge X_1, X_2, \dots, X_h der Coefficienten genäherte x'_1, x'_2, \dots, x'_h oder die aus der Ausgleichung folgenden wahrscheinlichsten Beträge x_1, x_2, \dots, x_h eingesetzt werden dürfen, es ist dann

$$\Phi_x = \Phi(a_x, b_x, \dots, g_x; x_1, x_2, \dots, x_h),$$

oder auch

$$\Phi_x = \Phi(a_x, b_x, \dots, g_x; x'_1, x'_2, \dots, x'_h).$$

Die Schwierigkeiten beginnen erst dann, wenn wir diese Grössen nicht mehr nach bestimmten Formeln zu berechnen im Stande sind, weil die Beobachtungen dazu nicht ausreichen, und wir auf das Schätzen angewiesen sind. Vorläufig haben wir es aber nur mit analytischen Entwicklungen zu tun.

Die ausgeglichenen charakteristischen Grössen hängen von den wahrscheinlichsten Fehlern ab und insofern diese sich aus den Fehlergleichungen numerisch ausrechnen lassen, sind auch hier alle Operationen vorgeschrieben.

ist, so bildet die Gleichung für $[pv^2]$ zusammen mit den Normalgleichungen ein System von $h + 1$ linearen Gleichungen,

$$\begin{aligned} a_{1\ 1} \xi_1 + a_{1\ 2} \xi_2 + \cdots + a_{1\ h} \xi_h + a_{1\ h+1} \xi_{h+1} &= l_1, \\ a_{2\ 1} \xi_1 + a_{2\ 2} \xi_2 + \cdots + a_{2\ h} \xi_h + a_{2\ h+1} \xi_{h+1} &= l_2, \\ \vdots & \\ a_{h\ 1} \xi_1 + a_{h\ 2} \xi_2 + \cdots + a_{h\ h} \xi_h + a_{h\ h+1} \xi_{h+1} &= l_h, \\ a_{h+1\ 1} \xi_1 + a_{h+1\ 2} \xi_2 + \cdots + a_{h+1\ h} \xi_h + a_{h+1\ h+1} \xi_{h+1} &= l_{h+1}, \end{aligned}$$

wobei die l_1, l_2, \dots, l_h auch durch $a_{h+1\ 1}, a_{h+1\ 2}, \dots, a_{h+1\ h}$ bezeichnet werden, und man bekommt durch Auflösung dieses Systems die gesuchte Grösse $\xi_{h+1} = [pv^2]$ zusammen mit den Verbesserungen ξ der Coefficienten.

Wenn wir jetzt diese Auflösung nach dem in der Abschweifung zum vorausgehenden Abschnitt gegebenen Schema ausführen wollen, haben wir das dortige h durch $h + 1$ zu ersetzen, und da die a bis auf das $a_{h+1\ h+1}$ gleich Null sind, erfordert die Auflösung nur wenig Mehrrechnung als die der Normalgleichungen selbst, und zwar besteht diese Mehrrechnung darin, dass man

1. in jeder Reduction, noch eine Columnne zwischen der vorletzten und letzten einschaltet,
2. in jeder Reduction in jeder Columnne noch eine Zahl rechnet.

Hinsichtlich der ersten Mehrarbeit hat man hiernach in der ersten Reduction noch die Columnne hinzuzufügen

$$\begin{aligned} a_{2\ h+1,1} &= a_{2\ h+1} - a_{2\ 1} \alpha_{1\ h+1}, \\ a_{3\ h+1,1} &= a_{3\ h+1} - a_{3\ 1} \alpha_{1\ h+1}, \\ \vdots & \\ a_{h\ h+1,1} &= a_{h\ h+1} - a_{h\ 1} \alpha_{1\ h+1}, \\ a_{h+1\ h+1,1} &= a_{h+1\ h+1} - a_{h+1\ 1} \alpha_{1\ h+1}, \\ \alpha_{1\ h+1,0} &= \alpha_{1\ h+1}; \end{aligned}$$

aber es ist

$$\alpha_{1\ h+1} = \frac{a_{1\ h+1}}{a_{1\ 1}} = 0$$

und nicht minder

$$a_{2\ h+1} = a_{3\ h+1} = \cdots = a_{h\ h+1} = 0,$$

somit bleibt von dieser ganzen Columnne nur die vorletzte Zahl

$$a_{h+1\ h+1,1} = a_{h+1\ h+1} = 1$$

übrig.

Genau so findet man, dass von der in der zweiten Reduction einzufügenden Columnne auch nur eine Zahl übrig bleibt, nämlich

$$a_{h+1\ h+1,2} = a_{h+1\ h+1,1} = 1.$$

So besteht in allen Reductionen die einzufügende Columnne immer lediglich aus einer Zahl, nämlich 1.

Die einzufügenden Columnnen bedingen also keine Mehrarbeit.

Auch in Bezug auf die den einzelnen Columnnen hinzuzufügenden Zahlen ist die Mehrarbeit eine sehr beschränkte. Ich schreibe, um die Verhältnisse klarzulegen, eine Reduction, die erste, vollständig hin.

Es ist also zur Auflösung der $h + 1$ Gleichungen zu rechnen

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \alpha_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} & \alpha_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & \alpha_{1h} = \frac{a_{1h}}{a_{11}} & \chi_1 = \frac{l_1}{a_{11}}, \\ a_{22,1} = a_{22} - a_{21} \alpha_{12} & a_{23,1} = a_{23} - a_{21} \alpha_{13} & \dots & a_{2h,1} = a_{2h} - a_{21} \alpha_{1h} & l_{2,1} = l_2 - a_{21} \chi_1, \\ a_{32,1} = a_{32} - a_{31} \alpha_{12} & a_{33,1} = a_{33} - a_{31} \alpha_{13} & \dots & a_{3h,1} = a_{3h} - a_{31} \alpha_{1h} & l_{3,1} = l_3 - a_{31} \chi_1, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{h2,1} = a_{h2} - a_{h1} \alpha_{12} & a_{h3,1} = a_{h3} - a_{h1} \alpha_{13} & \dots & a_{hh,1} = a_{hh} - a_{h1} \alpha_{1h} & l_{h,1} = l_h - a_{h1} \chi_1, \\ a_{h+12,1} = a_{h+12} - a_{h+11} \alpha_{12} & a_{h+13,1} = a_{h+13} - a_{h+11} \alpha_{13} & \dots & a_{h+1h,1} = a_{h+1h} - a_{h+11} \alpha_{1h} & l_{h+1,1} = l_{h+1} - a_{h+11} \chi_1. \end{array}$$

Die letzte Zeile enthält die neu zu rechnenden Zahlen.

Nun ist aber

$$a_{h+11} = l_1, \quad a_{h+1,2} = l_2, \quad \dots, \quad a_{h+1h} = l_h,$$

somit geht diese neu zu rechnende Zeile über in

$$a_{h+12,1} = l_2 - l_1 \alpha_{12}, \quad a_{h+13,1} = l_3 - l_1 \alpha_{13}, \quad \dots, \quad a_{h+1h,1} = l_h - l_1 \alpha_{1h}; \quad l_{h+1,1} = l_{h+1} - l_1 \chi_1.$$

Setzen wir für die α ihre Werte ein, so ist

$$\begin{aligned} l_1 \alpha_{12} &= l_1 \frac{a_{12}}{a_{11}} = a_{12} \chi_1, \\ l_1 \alpha_{13} &= l_1 \frac{a_{13}}{a_{11}} = a_{13} \chi_1, \\ &\vdots \\ l_1 \alpha_{1h} &= l_1 \frac{a_{1h}}{a_{11}} = a_{1h} \chi_1. \end{aligned}$$

Das System der Coefficienten a ist aber ein symmetrisches, man hat somit

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}, \quad \dots, \quad a_{1h} = a_{h1},$$

und es geht die neu zu rechnende Zeile über in

$$a_{h+12,1} = l_2 - a_{21} \chi_1, \quad a_{h+13,1} = l_3 - a_{31} \chi_1, \quad \dots, \quad a_{h+1h} = l_h - a_{h1} \chi_1;$$

$$l_{h+1,1} = l_{h+1} - l_1 \chi_1,$$

das heisst in

$$l_{2,1}, \quad l_{3,1}, \quad \dots, \quad l_{h,1} \quad \text{und} \quad l_{h+1,1} = l_{h+1} - l_1 \chi_1.$$

Alle diese Zahlen sind schon gerechnet und stehen in der letzten Columne der Reduction, nur die letzte Zahl ist neu zu rechnen. Nun ergibt sich jede Reduction aus der voraufgehenden wie die folgende aus ihr, was also von der ersten Reduction gesagt ist, gilt für alle andern, und man hat hiernach in jeder Reduction nur die der letzten Columne hinzuzufügende Zahl neu zu rechnen.

Indem man also für die Normalgleichungen die einzelnen Reductionen ausführt, rechnet man noch

$$\begin{array}{llll}
 \text{in der ersten Reduction} & l_{h+1,1} & = l_{h+1} & - l_1 \chi_1, \\
 \text{„ „ zweiten „} & l_{h+1,2} & = l_{h+1,1} & - l_{2,1} \chi_2, \\
 \text{„ „ dritten „} & l_{h+1,3} & = l_{h+1,2} & - l_{3,2} \chi_3, \\
 & \vdots & & \vdots \\
 \text{„ „ vorletzten „} & l_{h+1,h-1} & = l_{h+1,h-2} & - l_{h,h-2} \chi_{h-1}, \\
 \text{„ „ letzten „} & l_{h+1,h} & = l_{h+1,h-1} & - l_{h,h-1} \chi_h.
 \end{array}$$

Um ξ_{h+1} zu erhalten, haben wir noch

$$\chi_{h+1} = \frac{l_{h+1,h}}{a_{h+1,h+1,h}}$$

zu rechnen, und dann ist schon

$$\xi_{h+1} = \chi_{h+1},$$

aber da dem zufolge, was über den ersten Teil der Mehrrechnung gesagt ist,

$$a_{h+1,h+1,h} = 1$$

ist, so folgt

$$\text{XCV b) } \xi_{h+1} = [pv^2] = l_{h+1,h}.$$

222. Wert der Formel $[pv^2] = l_{h+1,h}$ zur summarischen Controle der numerischen Rechnungen. Obgleich nun zur Berechnung von $[pv^2]$ nur h Zahlen zu rechnen sind, können diese Zahlen doch nicht angegeben werden, wenn man nicht alle Reductionen für die Normalgleichungen mit ausführt, sind diese Reductionen richtig gerechnet und aus ihnen die bezeichneten h Zahlen richtig abgeleitet, so ist auch der Zahlenwert für $[pv^2]$ richtig; allein man kann diesen Zahlenwert auch noch in anderer Weise bestimmen. Setzt man nämlich, nachdem die ξ durch Auflösung der Normalgleichungen — was eben die successive Reduction dieser erforderlich macht —

$$x_1 = x'_1 + \xi_1, \quad x_2 = x'_2 + \xi_2, \quad \dots, \quad x_h = x'_h + \xi_h,$$

wo also die x' die bekannten Näherungswerte angeben, substituirt diese wahrscheinlichsten Beträge der Coefficienten in die Function Φ und rechnet damit der Reihe nach die Zahlenwerte von

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi(a_1, b_1, \dots, g_1; x_1, x_2, \dots, x_h), \\ \Phi_2 &= \Phi(a_2, b_2, \dots, g_2; x_1, x_2, \dots, x_h), \\ &\vdots \\ \Phi_n &= \Phi(a_n, b_n, \dots, g_n; x_1, x_2, \dots, x_h),\end{aligned}$$

so ist auch

$$\text{XCV c)} \quad [pv^2] = p_1 \Phi_1^2 + p_2 \Phi_2^2 + \dots + p_n \Phi_n^2,$$

wofür man auch die Formel unter XCV a) substituiren kann, und dieser Zahlenwert muss mit dem aus der Formel XCV b)

$$[pv^2] = l_{h+1, h}$$

abgeleiteten soweit übereinstimmen, als es die Genauigkeit, mit der die Rechnung durchgeführt ist, zulässt. Damit hat man eine äusserst bequeme und sehr wirksame Controle für die Richtigkeit der ganzen Zahlenrechnung, die man bis zur Erlangung der wahrscheinlichsten Beträge der Coefficienten hat ausführen müssen, erreicht, eine Controle, die um so wertvoller ist, als sie sowohl die Bildung der Normalgleichung, die immerhin noch die Ausrechnung der Coefficienten a_{ix} und l_x erforderlich macht, als auch die Auflösung dieser Normalgleichungen umfasst.

Der mittlere Fehler für eine Beobachtungsgleichung vom Gewicht p_x wird aber

$$\bar{\mu}_x = \sqrt{\frac{[p\Phi^2]}{p_x(n-h)}},$$

oder

$$\bar{\mu}_x = \sqrt{\frac{l_{h+1, h}}{p_x(n-h)}}.$$

Für den durchschnittlichen Fehler giebt es keine andere Formel als die schon in Art. 220 aufgestellte. Nachdem man durch Einsetzen der wahrscheinlichsten Beträge der Coefficienten die Zahlenwerte von $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ abgeleitet hat, versieht man alle diese Zahlen mit demselben Zeichen oder besser gesagt man nimmt sie alle positiv und berechnet dann $\bar{\delta}_x$ aus der Formel

$$\bar{\delta}_x = \frac{[\sqrt{p_x} |\Phi_x|]}{\sqrt{p_x n (n-h)}}.$$

Damit ist unsere Aufgabe, so weit sie die Berechnung der wahrscheinlichsten Coefficienten und der Grössen, die zur Kritisirung der Beobachtungen und ihres Endergebnisses dienen soll, betrifft, erledigt.

c) Fehlerrechnung für die ausgeglichenen Grössen.

223. Die Fehler der Coefficienten als kritisches Hilfsmittel. Allein es kommt nicht selten vor, dass man auch noch wissen muss, welche Sicherheit den berechneten Beträgen der Coefficienten selbst zukommt. Namentlich in den Fällen, wo die analytische Form der Function nicht von vornherein gegeben ist, sondern angenommen wird, und dies ist ja bei physikalischen Untersuchungen fast die Regel, ist es durchaus nötig, sich einen Ueberblick über den Wert der einzelnen Coefficienten zu verschaffen.

Man habe zum Beispiel eine Untersuchung über die Abnahme der Dichtigkeit einer Substanz mit wachsender Temperatur angestellt, indem man diese Dichtigkeit in irgend einer Weise bei den Temperaturen t_1, t_2, \dots, t_n gemessen hat. Eine rationelle Formel für die Abhängigkeit der Dichtigkeit der Substanzen von der Temperatur existirt, vielleicht mit Ausnahme der Gase, noch nicht, man hilft sich daher dadurch, dass man die Dichtigkeit in eine Potenzreihe nach der Temperatur entwickelt. Ist also D diese Dichtigkeit für die Temperatur t , so hat man

$$D = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots$$

als zu untersuchende Gleichung.

Da die Anzahl der Potenzen nicht vorgeschrieben ist und auch theoretisch nicht hat ermittelt werden können, entsteht sofort die Frage, wie viele derselben soll man nun nehmen. Je mehr man nimmt, desto mehr Coefficienten hat man zu bestimmen, desto weniger überschüssige Beobachtungsgleichungen sind zu befriedigen, desto genauer lassen sich also die Beobachtungsgleichungen erfüllen, und wenn man bis zur $n - 1$ Potenz von t geht, hat man n Coefficienten, genau so viel wie Beobachtungsgleichungen, und diese werden ganz streng erfüllt. Aber das giebt noch lange kein Kriterium für die Richtigkeit der Darstellung und die Güte der Beobachtungen, im Gegenteil, je mehr Glieder man nehmen muss, um den Beobachtungen einigermaßen gerecht zu werden, desto sicherer kann man im allgemeinen sein, entweder schlecht beobachtet oder eine falsche Function zur Darstellung gewählt zu haben. Bei welchem Gliede hat man denn nun in einem gegebenen Fall stehen zu bleiben? Offenbar bei demjenigen, dessen Coefficient eine Unsicherheit besitzt, die seinem Betrage nahe kommt oder diesen gar übertrifft. Die Unsicherheit einer Grösse beurteilen wir aber nach deren mittlerem Fehler, und hieraus ersieht man schon, wie notwendig es oft ist, auch die mittlern Fehler der Coefficienten zu kennen. So oft der mittlere Fehler eines Coefficienten dem Betrage dieses Coefficienten nahe kommt oder diesen Betrag übersteigt, können wir diesen Coefficienten nicht als reell betrachten und müssen entweder die Beobachtungen noch weiter häufen oder die mit diesem betreffenden Coefficienten multiplicirten Glieder fortlassen.

Dass man aber von einer Unsicherheit der Coefficienten wol sprechen darf, erhellt daraus, dass die Normalgleichungen zu ihrer Ableitung mit

Hilfe von beobachteten Grössen aufgestellt sind; als aus der Beobachtung entsprungen, sind die Zahlenwerte in den Normalgleichungen mit Fehlern behaftet, es kann also nicht anders sein, als dass auch die wahrscheinlichsten Coefficienten mit Fehlern behaftet sind. Die wahren Fehler dieser Coefficienten, wir haben sie früher mit α bezeichnet, kennen wir nicht, wir suchen also ihre wahrscheinlichsten Fehler und diese kommen hier, wo wir es mit Fehlern einzelner Grössen zu tun haben, mit den bezüglichen mittlern Fehlern dieser Grössen überein.

224. Vereinfachung des Problems. Notwendigkeit der Rechnung durch Näherungen. Es ist nun

$$x_1 = x'_1 + \xi_1, \quad x_2 = x'_2 + \xi_2, \quad \dots, \quad x_h = x'_h + \xi_h,$$

die x' sind Näherungswerte, die wir beliebig annehmen, von bestimmten Fehlern dieser Grössen kann also keine Rede sein, es handelt sich nur um die mittlern Fehler der ξ .

Die ξ sind die Lösungen der Normalgleichungen, stellen wir sie in der Determinantenform dar, so ist nach Art. 183, 20₃)

$$\xi_i = - \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1h} & l_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2h} & l_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hi} & \dots & a_{hh} & l_h \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2h} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & \dots & \dots & a_{hh} \end{vmatrix}}$$

Hier sind nun sowohl die a wie die l aus Beobachtungsgrössen zusammengesetzt, und zwar ist

$$a_{ix} = \left[p' \frac{\partial \Phi'}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi'}{\partial x_x} \right],$$

$$l_i = - \left[p' \Phi' \frac{\partial \Phi'}{\partial x_i} \right].$$

Nach der Regel, die in Satz 58 für die Berechnung des mittlern Fehlers einer Grösse, die als Function einer Reihe anderer von einander unabhängig bestimmter Grössen auftritt, gegeben ist, müssen wir den Ausdruck für ξ_i so umwandeln, dass er als Function dieser unabhängig von einander bestimmten Grössen auftritt. Dadurch aber würden sich die Ausdrücke so ausserordentlich compliciren, dass einerseits eine Uebersicht sehr erschwert und andererseits die Masse der Rechnung ungemein gehäuft würde.

Nun sind die Φ' also auch die Derivirten dieser Grössen in gewisser Beziehung dadurch unserm Belieben anheim gegeben, dass wir die Näherungswerte der Coefficienten abzuändern vermögen, wir wollen daher diese Näherungswerte so gewählt denken, dass der Einfluss der Fehler der a_{i_x} zu vernachlässigen ist. Die a_{i_x} sind aber aus den Differentialquotienten der Φ' zusammengesetzt, wir haben daher die Näherungswerte so anzunehmen, dass der Einfluss der Fehler der einzelnen Differentialquotienten der Φ' ausser Acht zu lassen ist. Es muss aber noch gesagt werden, bei welchen Grössen dieser Einfluss sich nicht geltend machen soll.

Wenn die Beobachtungen mit einander schlecht harmoniren, werden nach Berechnung der wahrscheinlichsten Coefficienten relativ grosse wahrscheinlichste Fehler in den Beobachtungsgleichungen übrig bleiben. Die wahrscheinlichsten Fehler kritisiren die Beobachtungsergebnisse wie die Rechenresultate, alle Versehen spiegeln sich in ihnen wieder und in ihnen treten auch die Unsicherheiten der Coefficienten hervor. Wollen wir also den Einfluss irgend einer Grösse vernichten, so müssen wir es mit Bezug auf diese wahrscheinlichsten Fehler tun, und damit ist gesagt, dass die Näherungswerte für die Coefficienten so gewählt werden müssen, dass kleine durch Abänderung der Beträge der Variabeln hervorgebrachte Aenderungen in den Beträgen der Derivirten der Φ' auf die wahrscheinlichsten Fehler ohne wesentlichen Einfluss bleiben. Nun sind die wahrscheinlichsten Fehler bedingt durch Gleichungen von der Form

$$-v_x = \Phi'_x + \xi_1 \frac{\partial \Phi'_x}{\partial x'_1} + \xi_2 \frac{\partial \Phi'_x}{\partial x'_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial \Phi'_x}{\partial x'_n},$$

$$(x = 1, 2, 3, \dots, n),$$

und wenn hier kleine durch Variirung der Beobachtungsbeträge der Variabeln bedingte Aenderungen in den Factoren der ξ sollen vernachlässigt werden dürfen, müssen die ξ selbst hinreichend klein sein.

Was wir also früher zur Ausrechnung der Ausgleichungsformeln der Bequemlichkeit wegen eingeführt haben, nämlich die Auflösung dieser Form durch successive Näherung, zeigt sich jetzt, wo man auch die Unsicherheiten der Coefficienten kennen lernen will, als durchaus nötig, wenn man nicht die Rechnungen so compliciren will, dass man bald jede Uebersicht verliert.

Es kann hiernach gar nicht oft genug hervorgehoben werden, dass die Normalgleichungen nur zur Ausrechnung der Verbesserungen der Coefficienten angewendet werden sollen, nicht zur Ausrechnung dieser Coefficienten selbst. Man muss für das System der Coefficienten erst Näherungswerte suchen, durch die mit diesen hergestellten Normalgleichungen diese Näherungswerte verbessern, die verbesserten Coefficienten als neue Näherungswerte ansehen, aus den mit diesen hergestellten Normalgleichungen neue Verbesserungen rechnen, und damit so lange fortfahren, bis die weitem

Verbesserungen keinen Zweck mehr haben; aus dem System der Normalgleichungen für die letzten Verbesserungen sind dann die mittlern Fehler dieser, die auch die der wahrscheinlichsten Coefficienten sind, zu rechnen.

225. Entwickelte Formeln für die mittlern Fehler der Coefficienten.

Es seien also $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h$ diese letzten Verbesserungen, es sind dann die a_{ix} wie fehlerlos zu betrachten, und in den l hat man nur die Φ' , nicht die $\partial\Phi'/\partial x$ als mit Fehlern behaftet anzusehen.

Wollen wir daher den mittlern Fehler eines der ξ bestimmen, etwa des ξ_i , so ist der Ausdruck von ξ_i als Function der Φ' darzustellen, und wenn das geschehen und hierdurch die Beziehung

$$\xi_i = \psi_i(\Phi'_1, \Phi'_2, \dots, \Phi'_n)$$

gewonnen ist, wird der mittlere Fehler von ξ_i

$$\mu_{\xi_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial\Phi'_1}\right)^2 \mu_{\Phi'_1}^2 + \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial\Phi'_2}\right)^2 \mu_{\Phi'_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial\Phi'_n}\right)^2 \mu_{\Phi'_n}^2}$$

Aber die mittlern Fehler der Φ' sind mit den mittlern Fehlern der Φ_1 der Beobachtungsgleichungen zu identificiren, also durch $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ zu ersetzen, und da, wenn

$$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{p'_1 v_1^2 + p'_2 v_2^2 + \dots + p'_n v_n^2}{n - h}}$$

gemacht wird,

$$\bar{\mu}_1 = \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{p'_1}}, \quad \bar{\mu}_2 = \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{p'_2}}, \quad \dots, \quad \bar{\mu}_n = \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{p'_n}}$$

ist, so bekommt man

$$\text{XCVIa)} \quad \mu_{\xi_i} = \bar{\mu} \sqrt{\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial\Phi'_1}\right)^2 \frac{1}{p'_1} + \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial\Phi'_2}\right)^2 \frac{1}{p'_2} + \dots + \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial\Phi'_n}\right)^2 \frac{1}{p'_n}}$$

226. Erste Entwicklung der mittlern Fehler der Coefficienten. Wir haben jetzt den Ausdruck für ψ_i zu entwickeln. Ich werde erst den nahelegendsten Weg einschlagen ohne Rücksicht auf besondere praktische Brauchbarkeit der resultirenden Formeln.

In der allgemeinen Form besteht ξ_i aus einem Bruch, dessen Zähler eine Determinante ist; der Nenner hängt nur von den a_{ix} ab, ist also als constant zu betrachten, bezeichnen wir diesen Nenner mit N und den Zähler mit Z , so ist

$$N\xi_i = -Z_i,$$

und man hat

$$Z_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1h} & \left[-p' \Phi' \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_1} \right] \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2h} & \left[-p' \Phi' \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_2} \right] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hi} & \dots & a_{hh} & \left[-p' \Phi' \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_h} \right] \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ich setze

$$- \sqrt{p'_\beta} \frac{\partial \Phi'_\beta}{\partial x'_\alpha} = \lambda_\alpha^{(\beta)}.$$

Es wird dann, wie zunächst bemerkt werden mag,

$$a_{ix} = \lambda_i^{(1)} \lambda_x^{(1)} + \lambda_i^{(2)} \lambda_x^{(2)} + \dots + \lambda_i^{(n)} \lambda_x^{(n)} = [\lambda_i \lambda_x],$$

und dann ist die letzte Columnne auch

$$\begin{aligned} \left[-p' \Phi' \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_1} \right] &= \lambda_1^{(1)} \sqrt{p'_1} \Phi'_1 + \lambda_1^{(2)} \sqrt{p'_2} \Phi'_2 + \dots + \lambda_1^{(n)} \sqrt{p'_n} \Phi'_n \\ \left[-p' \Phi' \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_2} \right] &= \lambda_2^{(1)} \sqrt{p'_1} \Phi'_1 + \lambda_2^{(2)} \sqrt{p'_2} \Phi'_2 + \dots + \lambda_2^{(n)} \sqrt{p'_n} \Phi'_n \\ &\vdots \\ \left[-p' \Phi' \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_h} \right] &= \lambda_h^{(1)} \sqrt{p'_1} \Phi'_1 + \lambda_h^{(2)} \sqrt{p'_2} \Phi'_2 + \dots + \lambda_h^{(n)} \sqrt{p'_n} \Phi'_n \\ 0 &= 0 \Phi'_1 + 0 \Phi'_2 + \dots + 0 \Phi'_n \end{aligned}$$

Nach Satz 7 unserer Abschweifung zerfällt daher die Determinante Z in n andere Determinanten, deren jede genau so gebaut ist, wie diese Determinante, nur dass an Stelle der letzten Columnne eine andere steht, es ist beispielsweise die x te Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1h} & \lambda_1^{(x)} \sqrt{p'_x} \Phi'_x \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2h} & \lambda_2^{(x)} \sqrt{p'_x} \Phi'_x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hi} & \dots & a_{hh} & \lambda_h^{(x)} \sqrt{p'_x} \Phi'_x \\ 0 & 0 & & 1 & & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Hier darf man aber nach Satz 4 der Abschweifung $\sqrt{p'_x} \Phi'_x$ als Factor vor das Determinantenzeichen vorziehen, setzt man daher

$$Z_i^{(x)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1h} & \lambda_1^{(x)} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2h} & \lambda_2^{(x)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hi} & \dots & a_{hh} & \lambda_h^{(x)} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

so wird

$$Z_i = \sqrt{p'_1} \Phi'_1 Z_i^{(1)} + \sqrt{p'_2} \Phi'_2 Z_i^{(2)} + \dots + \sqrt{p'_n} \Phi'_n Z_i^{(n)},$$

und die $Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)}, \dots, Z_i^{(n)}$ sind als Constanten zu betrachten. Nunmehr haben wir die gewünschte Entwicklung von ξ_i als Function der Φ' , nämlich

$$\xi_i = - \left\{ \sqrt{p'_1} \Phi'_1 \frac{Z_i^{(1)}}{N} + \sqrt{p'_2} \Phi'_2 \frac{Z_i^{(2)}}{N} + \dots + \sqrt{p'_n} \Phi'_n \frac{Z_i^{(n)}}{N} \right\}.$$

Es sind die $Z_i^{(x)}$ Determinanten von genau der Form wie Z_i , während aber in letzterer die letzte Columnne aus $l_1, l_2, \dots, l_h, 0$ besteht, ist sie hier $\lambda_1^{(x)}, \lambda_2^{(x)}, \dots, \lambda_h^{(x)}, 0$. Schreiben wir daher

$$-\frac{Z_i^{(x)}}{N} = \xi_i^{(x)}, \quad x = 1, 2, 3, \dots, n,$$

so ist $\xi_i^{(x)}$ eine Grösse ganz von derselben Art wie ξ_i , sie resultirt aus den Normalgleichungen, so wie man in diesen auf der rechten Seite die l_1, l_2, \dots, l_h ersetzt durch $\lambda_1^{(x)}, \lambda_2^{(x)}, \dots, \lambda_h^{(x)}$. Was hier von ξ_i gesagt ist, gilt von allen ξ . Wir bekommen also den Satz.

65. *Als Functionen der Beobachtungsgrössen Φ' dargestellt sind alle Verbesserungen ξ linear und homogen, und zwar hat man*

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1^{(1)} \sqrt{p'_1} \Phi'_1 + \xi_1^{(2)} \sqrt{p'_2} \Phi'_2 + \dots + \xi_1^{(n)} \sqrt{p'_n} \Phi'_n, \\ \xi_2 &= \xi_2^{(1)} \sqrt{p'_1} \Phi'_1 + \xi_2^{(2)} \sqrt{p'_2} \Phi'_2 + \dots + \xi_2^{(n)} \sqrt{p'_n} \Phi'_n, \\ &\vdots \\ \xi_h &= \xi_h^{(1)} \sqrt{p'_1} \Phi'_1 + \xi_h^{(2)} \sqrt{p'_2} \Phi'_2 + \dots + \xi_h^{(n)} \sqrt{p'_n} \Phi'_n, \end{aligned}$$

wo die unter einander stehenden Grössen $\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_h^{(1)}$ die Auflösungen der Normalgleichungen sind, wenn man in diesen die l_1, l_2, \dots, l_h ersetzt durch $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_h^{(1)}$; $\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_h^{(2)}$ die Auflösungen der Normalgleichungen sind, wenn man in diesen die l_1, l_2, \dots, l_h ersetzt durch $\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \dots, \lambda_h^{(2)}$, wo also allgemein $\xi_1^{(x)}, \xi_2^{(x)}, \dots, \xi_h^{(x)}$ die Auflösungen der Normalgleichungen sind, wenn man in diesen die l_1, l_2, \dots, l_h ersetzt durch $\lambda_1^{(x)}, \lambda_2^{(x)}, \dots, \lambda_h^{(x)}$.

und genau so, wie man für die ξ selbst hat

$$\xi_1 = \chi_{1,h-1}, \xi_2 = \chi_{2,h-2}, \dots, \xi_{h-1} = \chi_{h-1,1}, \xi_h = \chi_{h,0},$$

findet man

$$\xi_1^{(x)} = \chi_{1,h-1}^{(x)}, \xi_2^{(x)} = \chi_{2,h-2}^{(x)}, \dots, \xi_{h-1}^{(x)} = \chi_{h-1,1}^{(x)}, \xi_h^{(x)} = \chi_{h,0}^{(x)}$$

$$x = 1, 2, 3, \dots, n,$$

und damit

$$\text{XCVIc) } \mu_{x_i} = \mu_{\xi_i} = \mu \sqrt{(\chi_{i,h-i}^{(1)})^2 + (\chi_{i,h-i}^{(2)})^2 + \dots + (\chi_{i,h-i}^{(n)})^2}.$$

Die Mehrarbeit wächst proportional der Anzahl der Beobachtungsgleichungen und ist darum meist sehr erheblich.

227. Zweite Entwicklung, Darstellung durch die coordinirten Coefficienten. Es giebt aber noch andere Methoden, die rascher zum Ziele führen, wenn sie sich auch analytisch nicht so leicht ableiten lassen wie die vorstehende.

Ich gehe wieder von der Darstellung der ξ durch die Determinanten Z und N aus. Es ist zunächst

$$\mu_{\xi_i}^2 = \mu^2 \left\{ \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \Phi'_1} \right)^2 \frac{1}{p'_1} + \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \Phi'_2} \right)^2 \frac{1}{p'_2} + \dots + \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \Phi'_n} \right)^2 \frac{1}{p'_n} \right\},$$

also auch

$$\mu_{\xi_i}^2 = \frac{\mu^2}{N^2} \left\{ \left(\frac{\partial Z_i}{\partial \Phi'_1} \right)^2 \frac{1}{p'_1} + \left(\frac{\partial Z_i}{\partial \Phi'_2} \right)^2 \frac{1}{p'_2} + \dots + \left(\frac{\partial Z_i}{\partial \Phi'_n} \right)^2 \frac{1}{p'_n} \right\}.$$

Die Determinante Z_i hängt von den Φ' insofern ab, als die Elemente $l_1, l_2, \dots, l_h, 0$ ihrer letzten Columnne Functionen der Φ' sind, wir haben also

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \Phi'_x} = \frac{\partial Z_i}{\partial l_1} \frac{\partial l_1}{\partial \Phi'_x} + \frac{\partial Z_i}{\partial l_2} \frac{\partial l_2}{\partial \Phi'_x} + \dots + \frac{\partial Z_i}{\partial l_h} \frac{\partial l_h}{\partial \Phi'_x}$$

und da

$$\frac{\partial l_1}{\partial \Phi'_x} = -p'_x \frac{\partial \Phi'_x}{\partial x'_1}, \quad \frac{\partial l_2}{\partial \Phi'_x} = -p'_x \frac{\partial \Phi'_x}{\partial x'_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial l_h}{\partial \Phi'_x} = -p'_x \frac{\partial \Phi'_x}{\partial x'_h}$$

ist, so bekommen wir, wenn wie früher

$$\text{XCVII) } -\sqrt{p'_x} \frac{\partial \Phi'_x}{\partial x'_v} = \lambda_v^{(x)}$$

gesetzt wird, was die Gleichung

$$\text{XCVIII) } a_{ix} = [\lambda_i \lambda_x]$$

mitbringt,

wo die 1 an i ter Stelle steht. Ich führe, um diese letzte Zeile den andern conform zu machen, eine Anzahl neuer Elemente ein, indem ich

$$a_{h+1\ 1} = 0, a_{h+1\ 2} = 0, \dots, a_{h+1\ i-1} = 0, a_{h+1\ i} = 1, a_{h+1\ i+1} = 0, \dots, \\ a_{h+1\ 2} = 0, l_{h+1} = 0,$$

setze, Z_i wird dann

$$Z_i = \begin{vmatrix} a_{1\ 1} & a_{1\ 2} & \dots & a_{1\ h} & l_1 \\ a_{2\ 1} & a_{2\ 2} & \dots & a_{2\ h} & l_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{h+1\ 1} & a_{h+1\ 2} & \dots & a_{h+1\ h} & l_{h+1} \end{vmatrix}$$

Nach Satz 11 der Abschweifung ist hiernach

$$\begin{aligned} a_{1\ 1} \frac{\partial Z_i}{\partial l_1} + a_{2\ 1} \frac{\partial Z_i}{\partial l_2} + \dots + a_{h\ 1} \frac{\partial Z_i}{\partial l_h} + a_{h+1\ 1} \frac{\partial Z_i}{\partial l_{h+1}} &= 0, \\ a_{1\ 2} \frac{\partial Z_i}{\partial l_1} + a_{2\ 2} \frac{\partial Z_i}{\partial l_2} + \dots + a_{h\ 2} \frac{\partial Z_i}{\partial l_h} + a_{h+1\ 2} \frac{\partial Z_i}{\partial l_{h+1}} &= 0, \\ \vdots & \\ a_{1\ h} \frac{\partial Z_i}{\partial l_1} + a_{2\ h} \frac{\partial Z_i}{\partial l_2} + \dots + a_{h\ h} \frac{\partial Z_i}{\partial l_h} + a_{h+1\ h} \frac{\partial Z_i}{\partial l_{h+1}} &= 0. \end{aligned}$$

Da nun alle a_{h+1} bis auf das $a_{h+1\ i}$ gleich Null sind, so verschwinden in dem Ausdruck für $\frac{N^2 \mu_{\xi_i}^2}{\mu^2}$ alle Klammerausdrücke bis auf den Ausdruck, welcher $\frac{\partial Z_i}{\partial l_i}$ zum Factor hat, dieser wird aber gleich

$$- a_{h+1\ i} \frac{\partial Z_i}{\partial l_{h+1}} = - \frac{\partial Z_i}{\partial l_{h+1}}.$$

Zufolge des Satzes 10 der Abschweifung ist aber

$$\frac{\partial Z_i}{\partial l_{h+1}} = \begin{vmatrix} a_{1\ 1} & a_{1\ 2} & \dots & a_{1\ h} \\ a_{2\ 1} & a_{2\ 2} & \dots & a_{2\ h} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{h\ 1} & a_{h\ 2} & \dots & a_{h\ h} \end{vmatrix} \text{ also } = N,$$

somit bekommen wir einfach

$$\mu_{\xi_i}^2 = - \frac{\mu^2}{N} \frac{\partial Z_i}{\partial l_i}.$$

Nach demselben Satz ist ferner, bis auf das Zeichen, $\frac{\partial Z_i}{\partial l_i}$ das, was aus Z_i wird, wenn man daselbst die letzte Columnne und die i te Zeile weglässt, schliessen wir diese Columnne und diese Zeile in Parallelstriche ein, so haben wir

$$\frac{\partial Z_i}{\partial l_i} = (-1)^{h+i+1} \left| \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1h} & l_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2h} & l_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ih} & l_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hi} & \cdots & a_{hh} & l_h \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right|$$

Wir können die i te Zeile stehen lassen, wenn wir in der letzten Columnne an Stelle der l lauter Nullen setzen und nur für l_i eine 1 hinschreiben und das Zeichen geeignet ändern, dann bekommt man die sehr symmetrische Form

$$\frac{\partial Z_i}{\partial l_i} = \left| \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1h} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2h} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ih} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hi} & \cdots & a_{hh} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right|$$

Indem wir jetzt

$$-\frac{\partial Z_i}{N} = \gamma_i^{(i)}$$

setzen, geht $\gamma_i^{(i)}$ dadurch aus ξ_i hervor, dass man in den Normalgleichungen an Stelle der l lauter Nullen und nur für l_i die 1 setzt, und wir bekommen damit

$$\mu_{\xi_i} = \bar{\mu} \sqrt{\gamma_i^{(i)}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, h.$$

Um die γ zu bestimmen, haben wir hiernach h Systeme von linearen Gleichungen aufzulösen, deren linke Seiten ganz den Normalgleichungen entsprechen, deren rechte Seiten nur je in der i ten Gleichung eine 1, sonst überall Nullen haben. Ich nenne diese Gleichungen die *coordinirten Normalgleichungen* und die durch sie bestimmten γ die *coordinirten Coefficienten*.

Die allgemeine Form eines solchen Systems coordinirter Normalgleichungen ist also

$$\text{IC)} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11} \eta_1^{(i)} + a_{12} \eta_2^{(i)} + \dots + a_{1h} \eta_h^{(i)} = 0, \\ \vdots \\ a_{i-11} \eta_1^{(i)} + a_{i-12} \eta_2^{(i)} + \dots + a_{i-1h} \eta_h^{(i)} = 0, \\ a_{i1} \eta_1^{(i)} + a_{i2} \eta_2^{(i)} + \dots + a_{ih} \eta_h^{(i)} = 1, \\ a_{i+11} \eta_1^{(i)} + a_{i+12} \eta_2^{(i)} + \dots + a_{i+1h} \eta_h^{(i)} = 0, \\ \vdots \\ a_{h1} \eta_1^{(i)} + a_{h2} \eta_2^{(i)} + \dots + a_{hh} \eta_h^{(i)} = 0. \end{array} \right.$$

Von den so zu berechnenden h^2 coordinirten Coefficienten

$$\begin{array}{cccc} \eta_1^{(1)} & \eta_2^{(1)} & \eta_3^{(1)} & \dots & \eta_h^{(1)} \\ \eta_1^{(2)} & \eta_2^{(2)} & \eta_3^{(2)} & \dots & \eta_h^{(2)} \\ \eta_1^{(3)} & \eta_2^{(3)} & \eta_3^{(3)} & \dots & \eta_h^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_1^{(h)} & \eta_2^{(h)} & \eta_3^{(h)} & \dots & \eta_h^{(h)} \end{array}$$

brauchen wir aber, wenigstens für den vorliegenden Zweck, nur die h Grössen, welche in der Diagonale stehen, nämlich

$$\eta_1^{(1)} \eta_2^{(2)} \eta_3^{(3)} \dots \eta_h^{(h)}.$$

Die andern $h(h-1)$ Grössen werden mitgerechnet, weil man diese nötigen Grössen sonst nicht zu erlangen vermag. Trotzdem ist diese Methode immer noch bei weitem einfacher als die erste, denn in jener haben wir n Gleichungssysteme, hier nur h aufzulösen, ausserdem aber sind die rechten Seiten in unsern jetzigen Gleichungssystemen viel einfacher als in den von der ersten Methode gelieferten Gleichungssystemen.

Abgesehen davon können auch noch die andern coordinirten Coefficienten, wie sich bald zeigen wird, Verwendung finden. Uebrigens bilden die η ein symmetrisches System, da sich leicht beweisen lässt, dass

$$\eta_i^{(x)} = \eta_x^{(i)}$$

ist, in der Tat ist das System der Unterdeterminanten einer symmetrischen Determinante wieder symmetrisch. Es reducirt sich also die Anzahl der vorläufig unnützen η auf $\frac{h(h-1)}{2}$.

Die obige Methode zur Berechnung der mittlern Fehler reicht schon in vielen Fällen — namentlich dann, wenn die Anzahl der Coefficienten eine

beschränkte ist — aus; man kann sich dann direct an die coordinirten Normalgleichungen halten.

Indessen sind wir leicht im Stande, die Entwicklung weiter zu treiben und für die η explicite Ausdrücke herzustellen.

228. Dritte Entwicklung, explicite Formeln. Gehen wir nämlich auf die Auflösung der Gleichungen genauer ein, so haben wir nach Reduction der Normalgleichungen für jedes unserer neuen Gleichungssysteme in jeder Reduction nur eine Columnne, die der letzten entsprechende neu zu rechnen. Ich discutire diese Columnne allgemein für das Gleichungssystem der $\eta^{(i)}$.

Bezeichnet man die rechten Seiten der Gleichungen für die $\eta^{(i)}$ allgemein durch bezüglich $l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \dots, l_h^{(i)}$, so ist

$$l_1^{(i)} = 0, \dots, l_{i-1}^{(i)} = 0, l_i^{(i)} = 1, l_{i+1}^{(i)} = 0, \dots, l_h^{(i)} = 0,$$

und die für diese Gleichungen zu rechnende Columnne hat in der x ten Reduction die Form

$$\begin{aligned} \chi_x^{(i)} &= \frac{l_{x,x-1}^{(i)}}{a_{x,x,x-1}}, \\ l_{x+1,x}^{(i)} &= l_{x+1,x-1}^{(i)} - a_{x+1,x,x-1} \chi_x^{(i)}, \\ l_{x+2,x}^{(i)} &= l_{x+2,x-1}^{(i)} - a_{x+2,x,x-1} \chi_x^{(i)}, \\ &\vdots \\ l_{h,x}^{(i)} &= l_{h,x-1}^{(i)} - a_{h,x,x-1} \chi_x^{(i)}; \\ \chi_{1,x-1}^{(i)} &= \chi_{1,x-2}^{(i)} - a_{1,x,x-2} \chi_x^{(i)}, \\ \chi_{2,x-2}^{(i)} &= \chi_{2,x-3}^{(i)} - a_{2,x,x-3} \chi_x^{(i)}, \\ &\vdots \\ \chi_{x-1,1}^{(i)} &= \chi_{x-1,0}^{(i)} - a_{x-1,x,0} \chi_x^{(i)}, \\ \chi_{x,0}^{(i)} &= \chi_x^{(i)}. \end{aligned}$$

Die $l_{\lambda,\mu}^{(i)}$ müssen wir alle rechnen, von den $\chi_{\lambda,\mu}$ brauchen wir aber nur eines in jeder Columnne zu bestimmen, nämlich dasjenige, in welchem der erste Index λ gleich i ist, denn von allen $\eta^{(i)}$ wollen wir ja nur eines, $\eta_i^{(i)}$, kennen lernen.

Nun ist für $x = 1$ das $l_{1,0}^{(i)} = l_1^{(i)} = 0$, also auch $\chi_{1,1}^{(i)} = 0$, und da bis auf das $l_{i,0}^{(i)} = l_i^{(i)}$ auch alle andern l gleich 0 sind, so bleibt allein $l_{i,2}^{(i)}$ von Null verschieden und wird gleich 1. Hiernach ist auch $\chi_{2,2}^{(i)} = 0$ und nur $l_{i,3}^{(i)}$ von Null verschieden und gleich 1 u. s. f. Also, in allen $i - 1$ ersten Reductionen zieht sich die letzte Columnne auf eine einzige Zahl, die gleich 1 ist, zusammen.

Von der i ten Reduction ab aber sind die Columnen immer vollzählig.
Speziell ist in der i ten Reduction

$$\begin{aligned} \chi_i^{(i)} &= \frac{1}{a_{i,i,i-1}}, \\ l_{i+1,i}^{(i)} &= -a_{i+1,i,i-1} \chi_i^{(i)}, \\ l_{i+2,i}^{(i)} &= -a_{i+2,i,i-1} \chi_i^{(i)}, \\ &\vdots \\ l_{h,i}^{(i)} &= -a_{h,i,i-1} \chi_i^{(i)}. \end{aligned}$$

Es sind aber, weil die ursprünglichen a ein symmetrisches System bilden, wie Art. 186 gezeigt, auch die a aller folgenden Reductionen symmetrisch, also

$$a_{\lambda\mu,\nu} = a_{\mu\lambda,\nu},$$

also können wir beispielsweise $l_{i+1,i}^{(i)}$ auch schreiben

$$l_{i+1,i}^{(i)} = -a_{i+1,i,i-1} \chi_i^{(i)},$$

und das wird zufolge des Betrages von $\chi_i^{(i)}$ gleich $-\alpha_{i+1}$ oder, was dasselbe ist, gleich $-\alpha_{i+1,0}$, die l werden hiernach bis auf das Zeichen gleich den am Fusse der einzelnen Columnen stehenden α , die wir bei derselben Reduction zuletzt zu rechnen haben, geben also hier nichts Neues.

In der auf diese Reduction folgenden Reduction, in der $i+1$ ten, ist beispielsweise das erste l

$$\begin{aligned} l_{i+2,i+1}^{(i)} &= l_{i+2,i}^{(i)} - a_{i+2,i+1,i} l_{i+1,i}^{(i)} \\ &= -\alpha_{i+2} + \frac{a_{i+2,i+1,i}}{a_{i+1,i+1,i}} \alpha_{i+1}. \end{aligned}$$

Hier ist wieder

$$a_{i+2,i+1,i} = a_{i+1,i+2,i},$$

also der Factor von α_{i+1} auch gleich $\alpha_{i+1,i+2}$ und

$$l_{i+2,i+1}^{(i)} = -(\alpha_{i+2} - \alpha_{i+1} \alpha_{i+1,i+2}).$$

Aber die in den Klammern stehende Grösse ist nicht anderes als $\alpha_{i+2,1}$, und hiernach wird die Reihe der l , die in der vorausgehenden Reduction war,

$$-\alpha_{i+1,0}, -\alpha_{i+2,0}, \dots, -\alpha_{i,h,0},$$

in dieser

$$-\alpha_{i+2,1}, -\alpha_{i+3,1}, \dots, -\alpha_{i,h,1}.$$

Das heisst gleich den in dieser Reduction in den einzelnen Columnen an vorletzter Stelle stehenden α . Es folgt hieraus schon von selbst, dass in der nächsten Reduction, der $i+2$ ten, die l bis auf das Zeichen gleich den in dieser Reduction in den einzelnen Columnen an drittletzter Stelle stehenden α sind. Allgemein ist hiernach in der $i+x$ ten Reduction die Reihe der l gleich den in dieser Reduction in den einzelnen Columnen an x letzter Stelle stehenden α nämlich gleich

$$-\alpha_{i+i+x+1, x}, -\alpha_{i+i+x+2, x}, \dots, -\alpha_{i, h, x}.$$

Man erkennt diese α daran, dass ihr erster Index eben i ist.

Die $l^{(i)}$ sind hiernach überhaupt nicht neu zu rechnen.

Was die $\chi^{(i)}$ anbelangt, so ist zunächst in jeder Reduction allein das i te zu rechnen, in der i ten Reduction also das $\chi_{i,0}^{(i)}$ und dieses ist

$$\chi_{i,0}^{(i)} = \chi_i^{(i)} = \frac{1}{a_{i,i,i-1}}.$$

In der $i+1$ ten haben wir nur $\chi_{i,1}^{(i)}$ zu berechnen. Es ist aber

$$\chi_{i,1}^{(i)} = \chi_{i,0}^{(i)} - \alpha_{i+1,0} \chi_{i+1}^{(i)},$$

und weil

$$\chi_{i+1}^{(i)} = \frac{l_{i+1,i}^{(i)}}{a_{i+1,i+1,i}} = -\frac{\alpha_{i+1,0}}{a_{i+1,i+1,i}}$$

ist, wird

$$\chi_{i,1}^{(i)} = \chi_{i,0}^{(i)} + \frac{\alpha_{i+1,0}^2}{a_{i+1,i+1,i}} = \frac{1}{a_{i,i,i-1}} + \frac{\alpha_{i+1,0}^2}{a_{i+1,i+1,i}}.$$

In der nächstfolgenden Reduction haben wir es mit $\chi_{i,2}^{(i)}$ zu tun. Unentwickelt ist

$$\chi_{i,2}^{(i)} = \chi_{i,1}^{(i)} - \alpha_{i+2,1} \chi_{i+2}^{(i)},$$

und wegen

$$\chi_{i+2}^{(i)} = \frac{l_{i+2,i}^{(i)}}{a_{i+2,i+2,i+1}} = -\frac{\alpha_{i+2,1}}{a_{i+2,i+2,i+1}}$$

wird

$$\begin{aligned} \chi_{i,2}^{(i)} &= \chi_{i,1}^{(i)} + \frac{\alpha_{i+2,1}^2}{a_{i+2,i+2,i+1}} \\ &= \frac{1}{a_{i,i,i-1}} + \frac{\alpha_{i+1,0}^2}{a_{i+1,i+1,i}} + \frac{\alpha_{i+2,1}^2}{a_{i+2,i+2,i+1}}. \end{aligned}$$

Man sieht schon, wie die Rechnung weiter geht, und bekommt schliesslich

$$\chi_{i,h-i}^{(i)} = \eta_i^{(i)} = \frac{1}{a_{i,i,i-1}} + \frac{\alpha_{i+1,i+1,0}^2}{a_{i+1,i+1,i}} + \frac{\alpha_{i+2,i+2,1}^2}{a_{i+2,i+2,i+1}} + \frac{\alpha_{i+3,i+3,2}^2}{a_{i+3,i+3,i+2}} + \dots$$

$$+ \dots + \frac{\alpha_{i,h,h-i-1}^2}{a_{h,h,h-1}}.$$

Jetzt können wir, indem wir statt $\eta_i^{(i)}$ schreiben q_i und von der besondern Form, in der wir das Problem gelöst haben, absehen, sagen:

66. *Rechnet man h Grössen q_i nach den Formeln*

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{a_{11}} + \frac{\alpha_{12}^2}{a_{22,1}} + \frac{\alpha_{13,1}^2}{a_{33,2}} + \frac{\alpha_{14,2}^2}{a_{44,3}} + \dots + \frac{\alpha_{1h,h-2}^2}{a_{hh,h-1}}, \\ \text{C) } q_2 &= \frac{1}{a_{22,1}} + \frac{\alpha_{23}^2}{a_{33,2}} + \frac{\alpha_{24,1}^2}{a_{44,3}} + \dots + \frac{\alpha_{2h,h-3}^2}{a_{hh,h-1}}, \\ q_3 &= \frac{1}{a_{33,2}} + \frac{\alpha_{34}^2}{a_{44,3}} + \dots + \frac{\alpha_{3h,h-4}^2}{a_{hh,h-1}}, \end{aligned}$$

und so fort, bis

$$q_{h-1} = \frac{1}{a_{h-1,h-1,h-2}} + \dots + \frac{\alpha_{h-1,h}^2}{a_{hh,h-1}},$$

$$q_h = \frac{1}{a_{hh,h-1}},$$

so sind die mittlern Fehler der bezüglichen Coefficienten

$$\text{XCVI d) } \begin{cases} \mu_{x_1} = \bar{\mu} \sqrt{q_1}, \\ \mu_{x_2} = \bar{\mu} \sqrt{q_2}, \\ \vdots \\ \mu_{x_h} = \bar{\mu} \sqrt{q_h}. \end{cases}$$

Die in den Ausdrücken für die q unter einander stehenden α befinden sich jedesmal in der ersten Columnne einer Reduction, und zwar von vorne gezählt, in der der ersten, zweiten, dritten u. s. f. bis vorletzten Reduction.

229. Vierte Methode, Berechnung aus den Aequivalentgrössen. Die mittlern Fehler und Gewichte der Aequivalentgrössen. Es ist lehrreich, die Ausdrücke für die q mit denen der entsprechenden ξ zu vergleichen.

In der zweiten expliciten Darstellung haben wir nämlich nach Art. 185

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \chi_1 - \alpha_{12,0} \chi_2 - \alpha_{13,1} \chi_3 - \alpha_{14,2} \chi_4 - \dots - \alpha_{1h,h-2} \chi_h, \\ \xi_2 &= \chi_2 - \alpha_{23,0} \chi_3 - \alpha_{24,1} \chi_4 - \dots - \alpha_{2h,h-3} \chi_h, \\ \xi_3 &= \chi_3 - \alpha_{34,0} \chi_4 - \dots - \alpha_{3h,h-4} \chi_h, \\ &\vdots \\ \xi_{h-1} &= \chi_{h-1} - \alpha_{h-1h,0} \chi_h, \\ \xi_h &= \chi_h \end{aligned}$$

und es knüpft sich an diese Form eine sehr interessante Bemerkung an.

Sehen wir nämlich die χ — wir haben sie Art. 184 als Aequivalentgrößen bezeichnet — als direct durch Beobachtung gefundene Größen an, denen die bezüglichen Gewichte $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_h$ zukommen, so haben wir nach dieser Darstellung der ξ für den mittlern Fehler eines der x , etwa für den von x_i

$$\mu_{x_i} = \mu \sqrt{\frac{1}{\pi_i} + \frac{\alpha_{i,i+1,0}^2}{\pi_{i+1}} + \frac{\alpha_{i,i+2,1}^2}{\pi_{i+2}} + \dots + \frac{\alpha_{i,h,h-i-1}^2}{\pi_h}},$$

aber nach den obigen Formeln ist

$$\mu_{x_i} = \mu \sqrt{\frac{1}{a_{i,i,i-1}} + \frac{\alpha_{i,i+1,0}^2}{a_{i+1,i+1,i}} + \frac{\alpha_{i,i+2,1}^2}{a_{i+2,i+2,i+1}} + \dots + \frac{\alpha_{i,h,h-i-1}^2}{a_{h,h,h-1}}},$$

somit bekommen wir

$$\pi_i = a_{i,i,i-1}, \pi_{i+1} = a_{i+1,i+1,i}, \pi_{i+2} = a_{i+2,i+2,i+1}, \dots, \pi_h = a_{h,h,h-1},$$

und es ergibt sich:

67. *Man kann die mittlern Fehler der Coefficienten auch unmittelbar aus der Darstellung dieser Coefficienten als Functionen der Aequivalentgrößen χ ableiten, wenn man diesen Größen der Reihe nach die Gewichte*

$$a_{11}, a_{22,1}, a_{33,2}, a_{44,3}, \dots, a_{hh,h-1},$$

also die mittlern Fehler

$$\frac{\bar{\mu}}{\sqrt{a_{11}}}, \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{a_{22,1}}}, \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{a_{33,2}}}, \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{a_{44,3}}}, \dots, \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{a_{hh,h-1}}}$$

zuschreibt.

Wir hätten diese mittlern Fehler der χ auch von vornherein ableiten können. In der That nehmen wir als Beispiel den mittlern Fehler von χ , so ist zunächst

$$\mu_{\chi_1} = \frac{\mu}{a_{11}} \sqrt{\left(\frac{\partial l_1}{\partial \Phi_1'}\right)^2 \frac{1}{p_1'} + \left(\frac{\partial l_1}{\partial \Phi_2'}\right)^2 \frac{1}{p_2'} + \dots + \frac{\partial l_1}{\partial \Phi_n'} \frac{1}{p_n'}},$$

aber man hat

$$-l_1 = \Phi'_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_1} p'_1 + \Phi'_2 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_1} p'_2 + \cdots + \Phi'_n \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_1} p'_n,$$

somit

$$\frac{\partial l_1}{\partial \Phi'_1} = -p'_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_1}, \quad \frac{\partial l_1}{\partial \Phi'_2} = -p'_2 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial l_1}{\partial \Phi'_n} = -p'_n \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_1},$$

und es wird

$$\mu_{\chi_1} = \frac{\mu}{a_{11}} \sqrt{p'_1 \left(\frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_1} \right)^2 + p'_2 \left(\frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_1} \right)^2 + \cdots + p'_n \left(\frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_1} \right)^2}.$$

Der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck ist aber nichts anderes als a_{11} , es ergibt sich also

$$\mu_{\chi_1} = \frac{\mu}{\sqrt{a_{11}}}.$$

Für die anderen μ_{χ} den directen Beweis zu führen ist nicht nötig, denn wir wissen, dass χ_i zu χ_{i-1} genau in dem Verhältniss steht wie χ_{i-1} zu χ_{i-2} , und dass dasselbe von den a gilt.

„Aequivalent“ sind hiernach die χ den Φ' .

In der allgemeinen Zusammenfassung, die diesem Abschnitt zu folgen hat, werde ich das allgemeine Schema für alle zur numerischen Berechnung hier in Frage kommenden Grössen aufstellen.

230. Fünfte Methode, Ableitung aus der Präcision. Die Normalgleichungen geben die wahrscheinlichsten Coefficienten. Gauss, der ja nicht bloß die Ausgleichsrechnung erfunden, sondern auch dieselbe zur höchsten Vollendung gebracht hat, hat noch eine Reihe anderer Methoden zur Berechnung der mittlern Fehler der ausgeglichenen Coefficienten angegeben, ein Beweis dafür, dass er einerseits diese Berechnung für sehr wichtig und andererseits die Ableitung der dazu nötigen Formeln als verwickelt angesehen hat. Ich will nur eine dieser Methoden genauer ausführen, die andern dagegen, ohne sie im Einzelnen darzulegen, erwähnen.

Es werden in dieser Methode nicht sowohl die mittlern Fehler der Coefficienten als vielmehr ihre Präcisionen constanten bestimmt, die ja in bekannter Weise mit den mittlern Fehlern zusammenhängen.

Gauss geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Beobachtungsgleichungen gerade mit den Fehlern v_1, v_2, \dots, v_n behaftet sind, dargestellt wird durch

$$W = Ce^{-\pi(w_1^2 v_1^2 + w_2^2 v_2^2 + \cdots + w_n^2 v_n^2)}.$$

C ist eine Constante, die dadurch zu bestimmen ist, dass die Wahrscheinlichkeit aller möglichen Combinationen von Fehlerbeträgen gleich 1 sein muss, weil eine dieser Combinationen sicher eintreffen muss. Die w_x sind die relativen Präcisionsconstanten der bezüglichen Gleichungen. Die v hängen von den zu bestimmenden Coefficienten ab. Da wir mehr Gleichungen haben, als Coefficienten zu bestimmen sind, können von vornherein diese Coefficienten alle möglichen Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ haben, W drückt daher zugleich die Wahrscheinlichkeit aus, dass die Coefficienten gerade die Beträge x_1, x_2, \dots, x_h , keine andern haben. Multipliciren wir W mit $dx_1, dx_2, \dots, dx_{h-1}$, so haben wir in

$$W dx_1 dx_2 \dots dx_{h-1} = C e^{-\pi(w_1^2 v_1^2 + w_2^2 v_2^2 + \dots + w_n^2 v_n^2)} dx_1 dx_2 \dots dx_{h-1}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass der letzte Coefficient gerade den Wert x_h , der erste einen zwischen x_1 und $x_1 + dx_1$, der zweite den zwischen x_2 und $x_2 + dx_2, \dots$, der vorletzte einen zwischen x_{h-1} und $x_{h-1} + dx_{h-1}$ gelegenen Wert hat. Indem wir jetzt nach x_1, x_2, \dots, x_{h-1} von $-\infty$ bis $+\infty$ integriren, bekommen wir in

$$W_{x_h} = C \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_{h-1} e^{-\pi(w_1^2 v_1^2 + w_2^2 v_2^2 + \dots + w_n^2 v_n^2)}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die x_1, x_2, \dots, x_{h-1} überhaupt irgend welche Werte haben, x_h dagegen gerade den Betrag x_h besitzt.

Bezeichnet aber w die Präcisionsconstante, die einer Beobachtungsgleichung zukommt, wenn sie das Gewicht 1 hat, so wird

$$w_1^2 = w^2 p_1, w_2^2 = w^2 p_2, \dots, w_n^2 = w^2 p_n,$$

somit auch

$$W_{x_h} = C \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_{h-1} e^{-\pi w^2 (p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2)},$$

und das giebt die Wahrscheinlichkeit, dass der letzte Coefficient gerade den Wert x_h hat. Es sind nun die $n-1$ Integrationen auszuführen. Ich setze wieder

$$x_1 = x'_1 + \xi_1, x_2 = x'_2 + \xi_2, \dots, x_{h-1} = x'_{h-1} + \xi_{h-1}, x_h = x'_h + \xi_h$$

und schreibe die Fehlergleichungen in der Form

$$\begin{aligned} \sqrt{p_1} v_1 &= \gamma^{(1)} + \xi_1 \lambda_1^{(1)} + \xi_2 \lambda_2^{(1)} + \xi_3 \lambda_3^{(1)} + \dots + \xi_h \lambda_h^{(1)}, \\ \sqrt{p_2} v_2 &= \gamma^{(2)} + \xi_1 \lambda_1^{(2)} + \xi_2 \lambda_2^{(2)} + \xi_3 \lambda_3^{(2)} + \dots + \xi_h \lambda_h^{(2)}, \\ &\vdots \\ \sqrt{p_n} v_n &= \gamma^{(n)} + \xi_1 \lambda_1^{(n)} + \xi_2 \lambda_2^{(n)} + \xi_3 \lambda_3^{(n)} + \dots + \xi_h \lambda_h^{(n)}, \end{aligned}$$

Wir ordnen jetzt den Exponenten von e nach ξ_2 und setzen

$$R_1 - \frac{Q_1^2}{a_{11}} = P_2 \xi_2^2 + 2Q_2 \xi_2 + R_2,$$

alsdann ist

$$P_2 = a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}$$

$$Q_2 = -l_2 + \frac{l_1 a_{12}}{a_{11}} + \xi_3 \left(a_{23} - \frac{a_{13} a_{12}}{a_{11}} \right) + \xi_4 \left(a_{24} - \frac{a_{14} a_{12}}{a_{11}} \right) + \dots + \xi_h \left(a_{2h} - \frac{a_{1h} a_{12}}{a_{11}} \right)$$

$$\begin{aligned} R_2 = & + l_{h+1} - \frac{l_1^2}{a_{11}} + \xi_3^2 \left(a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} \right) + \xi_4^2 \left(a_{44} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} \right) + \dots + \xi_h^2 \left(a_{hh} - \frac{a_{1h}^2}{a_{11}} \right) \\ & + 2\xi_3 \left(-l_3 + \frac{l_1 a_{13}}{a_{11}} + \xi_4 \left(a_{34} - \frac{a_{14} a_{13}}{a_{11}} \right) + \xi_5 \left(a_{35} - \frac{a_{15} a_{13}}{a_{11}} \right) + \dots + \xi_h \left(a_{3h} - \frac{a_{1h} a_{13}}{a_{11}} \right) \right) \\ & + \dots \\ & + 2\xi_{h-1} \left(-l_{h-1} + \frac{l_1 a_{1h-1}}{a_{11}} + \xi_h \left(a_{h-1h} - \frac{a_{1h-1} a_{1h}}{a_{11}} \right) \right) \\ & + 2\xi_h \left(-l_h + \frac{l_1 a_{1h}}{a_{11}} \right). \end{aligned}$$

Beachtet man aber die Grössen, die bei der ersten Reduction der Normalgleichungen gebildet sind, so folgt

$$\begin{aligned} P_2 &= a_{22,1} \\ Q_2 &= -l_{2,1} + \xi_3 a_{23,1} + \xi_4 a_{24,1} + \dots + \xi_h a_{2h,1} \\ R_2 &= + l_{h+1,1} + \xi_2^2 a_{33,1} + \xi_4^2 a_{44,1} + \dots + \xi_h^2 a_{hh,1} \\ &+ 2\xi_3 \left(-l_{3,1} + \xi_4 a_{34,1} + \xi_5 a_{35,1} + \dots + \xi_h a_{3h,1} \right) \\ &+ 2\xi_4 \left(-l_{4,1} + \xi_5 a_{45,1} + \xi_6 a_{46,1} + \dots + \xi_h a_{4h,1} \right) \\ &+ \dots \\ &+ 2\xi_{h-1} \left(-l_{h-1,1} + \xi_h a_{h-1h,1} \right) \\ &+ 2\xi_h \left(-l_{h,1} \right), \end{aligned}$$

und die P_2, Q_2, R_2 sind aus den Grössen der ersten Reduction der Normalgleichungen genau so gebildet wie die P_1, Q_1, R_1 aus den Elementen der ersten. Man hat aber nach Ausführung der Integration nach ξ_2

$$\frac{1}{w^2} \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \frac{1}{\sqrt{a_{22,1}}} e^{-\pi \left(R_2 - \frac{Q_2^2}{P_2} \right) w^2}.$$

Indem man wieder zur Integration nach ξ_3

$$R_2 - \frac{Q_2^2}{P_2} = P_3 \xi_3^2 + 2Q_3 \xi_3 + R_3$$

setzt, sind die P_3 , Q_3 , R_3 aus den Elementen der zweiten Reduction der Normalgleichungen genau so zusammengesetzt wie die P_2 , Q_2 , R_2 aus denen der ersten. Das Integral wird daher

$$\frac{1}{w^3} \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \frac{1}{\sqrt{a_{22,1}}} \frac{1}{\sqrt{a_{33,2}}} \frac{1}{\sqrt{a_{33,2}}} e^{-\pi \left(R_3 - \frac{Q_3^2}{P_3} \right) w^2}$$

So geht die Integration weiter. Nach Ausführung der letzten Integration bekommt man also

$$W_{x_h} = \frac{Cw^{-(h-1)}}{\sqrt{a_{11}} \sqrt{a_{22,1}} \sqrt{a_{33,2}} \sqrt{a_{44,3}} \cdots \sqrt{a_{h-1, h-1, h-2}}} e^{-\pi \left(R_{h-1} - \frac{Q_{h-1}^2}{P_{h-1}} \right) w^2}$$

und hierin ist

$$\begin{aligned} P_{h-1} &= a_{h-1, h-1, h-2}, \\ Q_{h-1} &= -l_{h-1, h-2} + \xi_h a_{h-1, h, h-2}, \\ R_{h-1} &= +l_{h+1, h-2} + \xi_h^2 a_{h, h, h-2} - 2\xi_h l_{h, h-2}. \end{aligned}$$

Hiernach haben wir

$$\begin{aligned} R_{h-1} - \frac{Q_{h-1}^2}{P_{h-1}} &= \xi_h^2 \left(a_{h, h, h-2} - \frac{a_{h-1, h, h-2}^2}{a_{h-1, h-1, h-2}} \right) + l_{h+1, h-2} - \frac{l_{h-1, h-2}^2}{a_{h-1, h-1, h-2}} \\ &\quad - 2\xi_h \left(l_{h, h-2} - \frac{l_{h-1, h-2} a_{h-1, h, h-2}}{a_{h-1, h-1, h-2}} \right) \end{aligned}$$

oder

$$R_{h-1} - \frac{Q_{h-1}^2}{P_{h-1}} = \xi_h^2 a_{h, h, h-1} - 2\xi_h l_{h, h-1} + l_{h+1, h-1},$$

und es wird

$$W_{x_h} = \frac{Cw^{h-1}}{\sqrt{a_{11}} a_{22,1} a_{33,2} \cdots a_{h-1, h-1, h-2}} e^{-\pi a_{h, h, h-1} \left[\left(\xi_h - \frac{l_{h, h-1}}{a_{h, h, h-1}} \right)^2 + \frac{l_{h+1, h-1}}{a_{h, h, h-1}} - \frac{l_{h, h-1}^2}{a_{h, h, h-1}^2} \right] w^2}$$

oder, weil

$$\frac{l_{h, h-1}}{a_{h, h, h-1}} = \chi_h,$$

$$l_{h+1, h-1} - l_{h, h-1} \chi_h = l_{h+1, h}$$

ist, auch

$$W_{x_h} = \frac{Cw^{-(h-1)} e^{-\pi w^2 l_{h+1, h}}}{\sqrt{a_{11}} a_{22,1} a_{33,2} \cdots a_{h-1, h-1, h-2}} e^{-\pi w^2 a_{h, h, h-1} (\xi_h - \chi_h)^2}.$$

Die Constante C sollte dadurch bestimmt sein, dass $W = 1$ wird, wenn es sich um die Wahrscheinlichkeit handelt, dass überhaupt irgend eine Combination von Fehlern auftritt. Es sind aber alle Fehlercombinationen erschöpft, wenn alle Combinationen der ξ erschöpft sind, und da in dem Ausdruck für W_{x_h} alle Combinationen der $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{h-1}$ schon berücksichtigt sind, muss noch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_{x_h} d\xi_h = 1$$

sein. Damit bekommt man aber

$$1 = \frac{C w^{-(h-1)} e^{-\pi w^2 l_{h+1, h}}}{\sqrt{a_{1,1}} a_{2,2,1} a_{3,3,2} \dots a_{h-1, h-1, h-2}} \cdot \frac{1}{w \sqrt{a_{h, h, h-1}}},$$

und es wird sehr einfach

$$W_{x_h} = w \sqrt{a_{h, h, h-1}} e^{-\pi w^2 a_{h, h, h-1} (\xi_h - \chi_h)^2}.$$

Hieraus folgt zunächst ein wichtiger Satz. Nach dem Ausgleichungsverfahren, das wir eingeschlagen haben, ist nämlich

$$\xi_h = \chi_h;$$

offenbar findet aber für W_{x_h} gerade dann der grösste Betrag statt, wenn eben $\xi_h - \chi_h = 0$ ist, weil alle im Exponenten von e in Frage kommenden Grössen nur positiv sein können. Da nach demselben Schema die Wahrscheinlichkeiten auch für die andern Coefficienten zu bestimmen sind, so ergibt sich also

68. *Darf man die Fehler in einer Untersuchung als zufällig ansehen, so ergibt das Ausgleichungsverfahren nach der Methode der kleinsten Quadrate für die zu berechnenden Coefficienten die wahrscheinlichsten Beträge, das heisst, keine andere Combination der Fehlergleichungen führt zu wahrscheinlicheren Beträgen für die Coefficienten als die durch die Normalgleichungen ausgedrückte.*

Ferner sieht man, dass die Präzisionsconstante von x_h gleich

$$w_{x_h} = w \sqrt{a_{h, h, h-1}}$$

ist. Der mittlere Fehler von x_h wird hiernach

$$\mu_{x_h} = \frac{1}{\sqrt{a_{h, h, h-1}}}.$$

Das ist dasselbe, was wir schon früher gefunden haben, denn es ist $\frac{1}{a_{h, h, h-1}}$ nichts anderes als q_h .

Gauss hat hiernach noch die Regel angegeben :

69. Will man einen Coefficienten und seinen wahrscheinlichen Fehler kennen lernen, so stellt man das ξ , welches zu diesem Coefficienten gehört, in jeder der Normalgleichungen an letzter Stelle und eliminirt nach und nach alle andern ξ , und zwar lediglich durch successive Substitution ohne dabei eine der Gleichungen mit einem Factor zu multipliciren oder zu dividiren. Hat man dann zuletzt für dieses ξ , wir nennen es allgemein ξ_i , erhalten

$$\alpha \xi_i = \beta,$$

so ist

$$\mu_{x_i} = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha}}.$$

Nach diesem Verfahren würde man also die Normalgleichungen h mal vollständig niederschreiben haben, indem man jedesmal ein anderes ξ an letzter Stelle schreibt, und h mal alle Coefficienten bis auf das letzte lediglich durch Substitution eliminiren müssen.

Die Rechnung selbst ist nicht so weitläufig, wie es hiernach scheinen könnte, schreibt man die Coefficienten einmal vorwärts und einmal rückwärts, also in der Folge

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h$$

und in der

$$\xi_h, \xi_{h-1}, \dots, \xi_1,$$

und führt die Eliminationen für die eine wie für die andere Anordnung der Normalgleichungen aus, so hat man schon alle Grössen gerechnet, deren man sonst noch bedarf, um $\xi_{h-1}, \xi_{h-2}, \dots, \xi_1$ und deren mittlere Fehler zu erhalten. Ich gehe darauf nicht weiter ein, weil die voraufgehende Methode vor dieser historisch ersten Methode mit der Zeit anscheinend doch den Vorzug bekommen hat und für den Physiker auch den bedeutenden Vorteil eines einzigen festen Schemas hat.

d) Die charakteristischen Fehler von Functionen ausgeglichener Grössen.

231. Frage nach den mittlern Fehlern von Functionen der Coefficienten.

Nachdem man die Ausgleichung ausgeführt, und für die Coefficienten die wahrscheinlichsten Werte abgeleitet hat, ist man nicht selten in der Lage, die vorgelegte ausgeglichene Function in eine andere transformiren zu müssen, weil man aus dieser noch besondere Schlüsse ziehen will.

Am besten ist es zwar, diese neue Function unabhängig von der andern für sich auszugleichen, indessen kann es doch kommen, dass eine Ausgleichung

der in ihr enthaltenen Coefficienten ganz ohne Rücksicht auf die ursprüngliche Function untunlich ist und zwar einmal, weil sie vielleicht in ihrem Bau verwickelter ist als jene und die Coefficienten nicht so unmittelbar als solche erkennen lässt, und dann, weil sie vielleicht mehr Coefficienten enthält als jene.

Ein gutes Beispiel für den ersten Fall bietet die periodische Reihe. Wir können dieselbe zuerst in der Form

$$g = x_0 + r_1 \sin(a + \eta_1) + r_2 \sin(b + \eta_2) + \dots$$

anwenden, wo die r und η die Coefficienten sind, um deren Ausrechnung es sich handeln würde. Aber da die η unter dem \sin -Zeichen stehen, so wird die Bestimmung selbst von Näherungswerten für diese Grössen nicht leicht sein. Entwickelt man nun die Sinusse, so bekommt man eine Reihe von der Form

$$g = x_0 + x_1 \cos a + x_2 \cos b + \dots \\ + y_1 \sin a + y_2 \sin b + \dots$$

und hier sind die zu berechnenden Grössen wirklich als Coefficienten vertreten und in ihren Näherungswerten durch Auflösung linearer Gleichungen zu eruiern. Man sieht auch, dass die zweite Form genau so viele Unbekannte enthält, wie die erste, und da sie sich so viel leichter behandeln lässt wie jene, bringt man jedesmal, so oft es sich um Ausgleichung einer periodischen Reihe von der ersten Form handelt, diese erst auf die zweite Form und gleicht die Coefficienten dieser aus. Nachdem das geschehen, hat man aus den Gleichungen

$$r_1 \cos \eta_1 = y_1, \quad r_1 \sin \eta_1 = x_1; \\ r_2 \cos \eta_2 = y_2, \quad r_2 \sin \eta_2 = x_2; \\ \text{u. s. f.,}$$

aus denen allgemein

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \eta = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$$

folgt, die r und η auszurechnen.

In diesem Fall, wo also die transformirte Function genau so viele Coefficienten enthält wie die ursprüngliche, sind principielle Schwierigkeiten nicht zu überwinden, man berechnet die Coefficienten für die transformirte Function unter Beachtung dessen, dass auch die Gewichte einer gewissen, bald zu discutirenden Aenderung zu unterwerfen sind, und leitet aus ihnen vermöge der durch die Transformation gegebenen Beziehungen zwischen ihnen und den Coefficienten der ursprünglichen Function die Beträge dieser Coefficienten ab.

Nur ein Punkt verdient noch besondere Erwähnung; die Coefficienten der transformirten Function sind nach ihrer Ausgleichung mit gewissen mittlern Fehlern, die wir zu berechnen gelernt haben, behaftet; rechnet

man aus ihnen die Coefficienten der ursprünglichen Function, so werden auch diese durch mittlere Unsicherheiten verfälscht sein können, und wir haben diese Unsicherheiten aus denen der Coefficienten der eigentlich ausgeglichenen Function abzuleiten.

Die Regeln hierfür sind leicht aus den Sätzen, die wir über die mittlern Fehler zusammengesetzter Functionen kennen gelernt haben, zu erlangen.

Allgemein gesprochen, handelt es sich also um die Bestimmung des Gewichts einer Function der ausgeglichenen Coefficienten.

232. Darstellung durch die coordinirten Coefficienten. Es sei diese Function

$$\psi = \psi(x_1, x_2, \dots, x_h),$$

wären die x direct und unabhängig von einander erhaltene Beobachtungsgrössen, so hätten wir

$$\mu_\psi^2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2 \mu_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)^2 \mu_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_h}\right)^2 \mu_{x_h}^2.$$

Allein, da die x nicht unabhängig gewonnen sind, sind in ψ erst ihre Ausdrücke als Functionen der wirklich beobachteten Grössen einzuführen.

Ich bezeichne mit x'_1, x'_2, \dots, x'_h wie früher die Näherungswerte der Coefficienten, mit $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h$ die Verbesserungen und erhalte, indem

$$\psi(x'_1, x'_2, \dots, x'_h) = \psi'$$

gesetzt wird,

$$\psi = \psi' + \xi_1 \frac{\partial\psi'}{\partial x'_1} + \xi_2 \frac{\partial\psi'}{\partial x'_2} + \dots + \xi_h \frac{\partial\psi'}{\partial x'_h}.$$

Für die ξ gelten die Normalgleichungen, und es ist in der Determinantendarstellung 20₃ Art. 183

$$\xi_x = -\frac{Z_x}{N},$$

somit

$$\psi = \psi' - \frac{1}{N} \left\{ Z_1 \frac{\partial\psi'}{\partial x'_1} + Z_2 \frac{\partial\psi'}{\partial x'_2} + \dots + Z_h \frac{\partial\psi'}{\partial x'_h} \right\}.$$

Als Beobachtungsgrössen haben wir wie in Art. 225 die Φ' anzusehen, somit wird, indem wir den in $\{ \}$ gefassten Ausdruck mit Z bezeichnen,

$$\text{CI'a)} \quad \mu_\psi^2 = \frac{\bar{\mu}^2}{N^2} \left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial \Phi'_1}\right)^2 \frac{1}{p'_1} + \left(\frac{\partial Z}{\partial \Phi'_2}\right)^2 \frac{1}{p'_2} + \dots + \left(\frac{\partial Z}{\partial \Phi'_n}\right)^2 \frac{1}{p'_n} \right\}.$$

233. Entwicklung allgemeiner Formeln. Ueber die Reduction dieser Gleichungssysteme ist schon in Art. 228, wo von den τ_i zur Berechnung der mittlern Fehler der Coefficienten die $\eta_i^{(i)}$ nötig waren, das meiste entwickelt. Wir haben hier, wo wir alle η kennen müssen, nur wenig nachzuholen.

Ich bezeichne wie in dem citirten Artikel die rechten Seiten der Gleichungen für die $\eta^{(i)}$ durch bezüglich $l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \dots, l_h^{(i)}$, so dass also

$$l_1^{(i)} = 0, \dots, l_{i-1}^{(i)} = 0, l_i^{(i)} = 1, l_{i+1}^{(i)} = 0, \dots, l_h^{(i)} = 0$$

ist. Nachdem man für die Normalgleichungen alle Reductionen gerechnet hat, ist für das herausgegriffene System der $\eta^{(i)}$ in jeder Reduction eine die letzte Columnne der Reductionen der Normalgleichungen ersetzende neue Columnne zu rechnen, die in der x ten Reduction die Form hat

$$\begin{aligned} \chi_x^{(i)} &= \frac{l_{x,x-1}^{(i)}}{a_{x,x,x-1}}, \\ l_{x+1,x}^{(i)} &= l_{x+1,x-1}^{(i)} - a_{x+1,x,x-1} \chi_x^{(i)}, \\ l_{x+2,x}^{(i)} &= l_{x+2,x-1}^{(i)} - a_{x+2,x,x-1} \chi_x^{(i)}, \\ &\vdots \\ l_{h,x}^{(i)} &= l_{h,x-1}^{(i)} - a_{h,x,x-1} \chi_x^{(i)}. \end{aligned}$$

Aus den in jenem Artikel geführten Entwicklungen wissen wir schon, dass die neu zu rechnenden Columnnen vor der i ten Reduction nur aus einer Zahl bestehen, die gleich 1 ist, erst von der i ten Reduction ab (diese noch mit eingeschlossen) sind die Columnnen vollständig. Ferner hat sich dort ergeben, dass die $l^{(i)}$ in keiner Reduction neu zu rechnen sind, da sie sich schon unter den α befinden, und zwar sind in der $i+x$ ten Reduction die l gleich den mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Beträgen der an x letzter Stelle in den einzelnen Columnnen dieser Reduction stehenden α , nämlich gleich

$$-\alpha_{i+i+x+1,x} - \alpha_{i+i+x+2,x} \dots - \alpha_{i h,x}$$

Größen, die man aus der Reihe der in der betreffenden Reduction gerechneten α dadurch herauskennt, dass sie eben als ersten Index i haben.

Gehen wir nun von der zweiten Darstellung für die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen aus, so haben wir nur noch die coordinirten Aequivalentgrößen $\chi_x^{(i)}$ zu rechnen.

Wir haben zunächst

$$\chi_1^{(i)} = \chi_2^{(i)} = \dots = \chi_{i-1}^{(i)} = 0.$$

in den $i-1$ ersten Reductionen sind alle $\chi = 0$, von der i ten ab haben sie bestimmte Werte.

In der i ten Reduction ist

$$\chi_i^{(i)} = \frac{1}{a_{ii, i-1}}.$$

In der nächstfolgenden Reduction, der $i+1$ ten, ist

$$\chi_{i+1}^{(i)} = \frac{\chi_{i+1, i}^{(i)}}{a_{i+1, i+1, i}} = - \frac{\alpha_{i+1, 0}}{a_{i+1, i+1, i}}.$$

Für die $i+2$ te Reduction ist

$$\chi_{i+2}^{(i)} = - \frac{\alpha_{i+2, 1}}{a_{i+2, i+2, i+1}},$$

u. s. f. Allgemein ist in der $i+x$ ten Reduction

$$\text{CHa)} \quad \chi_{i+x}^{(i)} = - \frac{\alpha_{i+x, x-1}}{a_{i+x, i+x, i+x-1}}.$$

In der zweiten Darstellung der Auflösung irgend eines Systems linearer Gleichungen nach h Unbekannten $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_h$ war aber

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \chi_1 - \alpha_{1, 2, 0} \chi_2 - \alpha_{1, 3, 1} \chi_3 - \alpha_{1, 4, 2} \chi_4 - \dots - \alpha_{1, h, h-2} \chi_h, \\ \eta_2 &= \chi_2 - \alpha_{2, 3, 0} \chi_3 - \alpha_{2, 4, 1} \chi_4 - \dots - \alpha_{2, h, h-3} \chi_h, \\ \eta_3 &= \chi_3 - \alpha_{3, 4, 0} \chi_4 - \dots - \alpha_{3, h, h-4} \chi_h, \\ &\vdots \\ \eta_h &= \chi_h. \end{aligned}$$

Wenden wir diese Formeln auf unsern Fall an, so wird

$$\text{CHb)} \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_1^{(i)} &= -\alpha_{1, i, i-2} \chi_i^{(i)} - \alpha_{1, i+1, i-1} \chi_{i+1}^{(i)} - \alpha_{1, i+2, i} \chi_{i+2}^{(i)} - \dots - \alpha_{1, h, h-2} \chi_h^{(i)}, \\ \eta_2^{(i)} &= -\alpha_{2, i, i-3} \chi_i^{(i)} - \alpha_{2, i+1, i-2} \chi_{i+1}^{(i)} - \alpha_{2, i+2, i-1} \chi_{i+2}^{(i)} - \dots - \alpha_{2, h, h-3} \chi_h^{(i)}, \\ &\vdots \\ \eta_{i-1}^{(i)} &= -\alpha_{i-1, i, 0} \chi_i^{(i)} - \alpha_{i-1, i+1, 1} \chi_{i+1}^{(i)} - \alpha_{i-1, i+2, 2} \chi_{i+2}^{(i)} - \dots - \alpha_{i-1, h, h-i} \chi_h^{(i)}, \\ \eta_i^{(i)} &= \chi_i^{(i)} - \alpha_{i, i+1, 0} \chi_{i+1}^{(i)} - \alpha_{i, i+2, 1} \chi_{i+2}^{(i)} - \dots - \alpha_{i, h, h-i-1} \chi_h^{(i)}, \\ \eta_{i+2}^{(i)} &= \chi_{i+1}^{(i)} - \alpha_{i+1, i+2, 0} \chi_{i+2}^{(i)} - \dots - \alpha_{i+1, h, h-i-2} \chi_h^{(i)}, \\ \eta_{i+2}^{(i)} &= \chi_{i+2}^{(i)} - \dots - \alpha_{i+2, h, h-i-3} \chi_h^{(i)}, \\ &\vdots \\ \eta_h^{(i)} &= \chi_h^{(i)}. \end{aligned} \right.$$

und hierin ist

$$\text{CII b) } \left\{ \begin{array}{l} \chi_i^{(i)} = \frac{1}{a_{i i, i-1}}, \\ \chi_{i+1}^{(i)} = \frac{\alpha_{i i+1, 0}}{a_{i+1 i+1, i}}, \\ \chi_{i+2}^{(i)} = \frac{\alpha_{i i+2, 1}}{a_{i+2 i+2, i+1}}, \\ \vdots \\ \chi_h^{(i)} = \frac{\alpha_{i h, h-i-1}}{a_{h h, h-1}}. \end{array} \right.$$

Die Mehrarbeit bei der Berechnung der η ist hiernach relativ gering, da sie sich nach der Reduction der Normalgleichungen lediglich auf die Ausrechnung der $\chi^{(i)}$ nach den vorstehenden Formeln beschränkt.

234. Berechnung aus den Aequivalentgrößen. Eine zweite Methode, den mittlern Fehler einer Function der Coefficienten zu bestimmen, liefert die Bemerkung des Art. 229, wonach an Stelle der Φ' auch die χ als direct beobachtete Größen angesehen werden können, wenn man ihnen nur die mittlern Fehler

$$\frac{\bar{\mu}}{\sqrt{a_{11}}}, \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{a_{22,1}}}, \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{a_{33,2}}}, \dots, \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{a_{hh,h-1}}}$$

zuschreibt.

Wir haben also auch

$$\mu_{\psi}^2 = \bar{\mu}^2 \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial \chi_1} \right)^2 \frac{1}{a_{11}} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \chi_2} \right)^2 \frac{1}{a_{22,1}} + \dots + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \chi_h} \right)^2 \frac{1}{a_{hh,h-1}} \right\}$$

und unsere Aufgabe ist jetzt, ψ als Function der χ darzustellen. Nun war

$$\psi = \psi' + \xi_1 \frac{\partial \psi'}{\partial x'_1} + \xi_2 \frac{\partial \psi'}{\partial x'_2} + \dots + \xi_h \frac{\partial \psi'}{\partial x'_h},$$

also bekommen wir

$$\frac{\partial \psi}{\partial \chi_1} = \frac{\partial \psi'}{\partial x'_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \chi_1} + \frac{\partial \psi'}{\partial x'_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial \chi_1} + \dots + \frac{\partial \psi'}{\partial x'_h} \frac{\partial \xi_h}{\partial \chi_1},$$

und da zufolge der Beträge der ξ nur ξ_1 von χ_1 abhängt und zwar so, dass χ_1 den Factor 1 hat, wird

$$\frac{\partial \psi}{\partial \chi_1} = \frac{\partial \psi'}{\partial x'_1}.$$

$$\begin{aligned} \chi'_1 &= \frac{\xi_1}{a_{11}}; \\ \xi_{2,1} &= \xi_2 - a_{21} \chi'_1, \\ \xi_{3,1} &= \xi_3 - a_{31} \chi'_1, \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \xi_{h,1} &= \xi_h - a_{h1} \chi'_1, \end{aligned}$$

am Schluss der zweiten die

$$\begin{aligned} \chi'_2 &= \frac{\xi_{2,1}}{a_{22,1}}; \\ \xi_{3,2} &= \xi_{3,1} - a_{32,1} \chi'_2, \\ \xi_{4,2} &= \xi_{4,1} - a_{42,1} \chi'_2, \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \xi_{h,2} &= \xi_{h,1} - a_{h2,1} \chi'_2, \end{aligned}$$

allgemein am Schluss der *i*ten

$$\begin{aligned} \chi'_i &= \frac{\xi_{i,i-1}}{a_{ii,i-1}}; \\ \xi_{i+1,i} &= \xi_{i+1,i-1} - a_{i+1,i,i-1} \chi'_i, \\ \xi_{i+2,i} &= \xi_{i+2,i-1} - a_{i+2,i,i-1} \chi'_i, \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \xi_{h,i} &= \xi_{h,i-1} - a_{hi,i-1} \chi'_i, \end{aligned}$$

zuletzt in der *h*—1ten Reduction steht allein

$$\begin{aligned} \chi'_{h-1} &= \frac{\xi_{h-1,h-2}}{a_{hh,h-1}}; \\ \xi_{h,h-1} &= \xi_{h,h-2} - a_{hh,h-1} \chi'_{h-1}. \end{aligned}$$

Die erste Zahl jeder dieser Columnen ist jedesmal das ξ , welches wir brauchen, doch muss man natürlich in jeder Columnne alle ξ rechnen, weil man sonst die ξ der folgenden Columnen nicht bestimmen könnte. Der Beweis für dieses Schema ist an der Hand der Definitionen der α und der Bemerkung, dass die α ein symmetrisches System bilden, so einfach, dass er übergangen werden darf.

Endlich bemerke ich noch, dass die obige Rechnung auch unmittelbar die Function ψ selbst ergibt, denn man hat

$$\text{CV) } \psi = \psi' + \xi_{1,0} \chi_1 + \xi_{2,1} \chi_2 + \xi_{3,2} \chi_3 + \cdots + \xi_{h,h-1} \chi_h,$$

eine Formel, die bei Berücksichtigung der Werte für die x durch Specialisirung auch zu den Formeln für x_1, x_2, \dots, x_h führt.

235. Benutzung der vorstehenden Formeln bei Transformationen.

Wenn wir nun eine Function, deren Coefficienten durch Ausgleichung berechnet sind, in eine andere transformiren, so wissen wir immer, wie die Coefficienten dieser neuen Function von denen der ursprünglichen abhängen, sind also auch nach dem obigen im Stande, die mittlern Fehler dieser Coefficienten zu berechnen. Gehen dabei die ausgeglichenen Coefficienten x_1, x_2, \dots, x_h über in

$$y_1 = \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_h), y_2 = \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_h), \dots, y_{h'} = \psi_{h'}(x_1, x_2, \dots, x_h),$$

wo h' beliebig $\geq h$ sein kann, so haben wir einfach in der Formel für μ_{ψ}^2 die Derivirten von ψ der Reihe nach durch die von $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{h'}$ zu ersetzen.

Umgekehrt, haben wir eine bestimmte Function mit den Coefficienten x_1, x_2, \dots, x_h auszugleichen, und transformiren sie erst, weil sie vielleicht numerischen Rechnungen zu viel Schwierigkeiten entgegengesetzt, in eine einfachere mit den Coefficienten $y_1, y_2, \dots, y_{h'}$, so berechnen sich wieder die mittlern Fehler der ursprünglichen Coefficienten x nach den vorstehenden Formeln, wobei ψ der Reihe nach zu ersetzen ist durch

$$x_1 = \psi_1(y_1, y_2, \dots, y_{h'}), x_2 = \psi_2(y_1, y_2, \dots, y_{h'}), \dots, x_h = \psi_h(y_1, y_2, \dots, y_{h'}).$$

Doch muss dabei $h' = h$ sein, und ausserdem ist nicht zu vergessen, dass mit der Transformirung der Function auch die Gewichte der Beobachtungsgleichungen eine Aenderung erfahren.

e) *Die Fehler des Endresultats.*

236. Endresultat einer Ausgleichung. Es bleibt uns nun noch zur Vervollständigung der Theorie anzugeben, wie man die charakteristischen Fehler des Endresultats zu berechnen hat.

Bei einfachen Messungen bestand das Resultat in einer einzigen Grösse, der ein bestimmter, der gesuchte, Betrag entsprach, daher konnten hier auch dem Resultat bestimmte charakteristische Fehler zugeschrieben werden. Anders verhält sich die Sache bei Untersuchungen. Wir stellen nämlich Untersuchungen an, um für Functionen, deren Bau uns bekannt ist oder von uns angenommen wird, eine Reihe in ihnen enthaltener Coefficienten zu bestimmen. Das Resultat unserer Untersuchung besteht daher darin, dass wir für diese Coefficienten gewisse Werte erlangt haben, und insofern wir jetzt auch einerseits die charakteristischen Fehler dieser Werte und andererseits die der einzelnen Beobachtungsgleichungen berechnen gelernt haben, besitzen wir auch schon die charakteristischen Fehler dieses

Resultats. Aber das ist nur ein Resultat, ein zweites — und zwar das oft weit wichtigere — haben wir dadurch bekommen, dass wir nach Ausgleichung der Untersuchung im Stande sind, durch die betreffenden Functionen eine der Variablen zu berechnen, wenn die andern vorgeschriebene Werte bekommen. Für dieses Resultat bestimmt sich aber der mittlere Fehler nach den Regeln des Satzes 58.

Sei g das hervorgehobene Element, rechnet man dasselbe aus der Function $\Phi = 0$ aus, so resultirt für ein vorgeschriebenes System A, B, \dots der andern Elemente

$$g = F(A, B, \dots; x_1, x_2, \dots, x_h).$$

Gewöhnlich schreibt man dieses Resultat so, dass man zu den x auch ihre zugehörigen mittlern Fehler hinzufügt, also in der Form

$$g = F(A, B, \dots; x_1 \pm \mu_{x_1}, x_2 \pm \mu_{x_2}, \dots, x_h \pm \mu_{x_h}).$$

Da die A, B, \dots , jetzt vorgeschrieben sein sollten, so sind die Fehler von g Darstellungsfehler, herrührend von den Fehlern der Coefficienten. Die Fehler dieser Coefficienten rühren aber wieder von den Fehlern der Φ' her, also man hat für den mittlern Darstellungsfehler von g

$$\mu_g = \sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial \Phi'_1}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial \Phi'_2}\right)^2 \mu_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial F'}{\partial \Phi'_n}\right)^2 \mu_n^2}.$$

Die $\bar{\mu}$ sind die ausgeglichenen Fehler der Beobachtungsgleichungen, setzt man

$$\bar{\mu}^2 = \frac{[pv^2]}{n-h} = \frac{l_{h+1,h}}{n-h},$$

so wird also auch

$$\text{CVI)} \quad \mu_g = \bar{\mu} \sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial \Phi'_1}\right)^2 \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial F'}{\partial \Phi'_2}\right)^2 \frac{1}{p_2} + \dots + \left(\frac{\partial F'}{\partial \Phi'_n}\right)^2 \frac{1}{p_n}}.$$

F' hängt insofern von den Φ' ab, als die x von den Φ' abhängen. Die Aufgabe, μ_g , den mittlern Darstellungsfehler, zu berechnen, ist aber keine andere als die, überhaupt den mittlern Fehler einer Function der Coefficienten zu bestimmen, und diese ist in dem vorausgehenden Abschnitt dieses Capitels schon gelöst, man hat hiernach entweder von den Formeln unter CIa) und CII), CIII) oder von denen unter CIb) und CIV), woselbst ψ durch F' zu ersetzen, Gebrauch zu machen.

XVIII. Untersuchungen mit Nebenbedingungen.

237. Untersuchungen mit Nebenbedingungen. Stellung des Problems.

Fälle, in denen zwischen den auszugleichenden Coefficienten Bedingungsgleichungen zu erfüllen sind, werden dem Physiker nicht selten aufstossen. So wird es ihm oft wünschenswert erscheinen, eine Function zu transformiren, und dann kann er zu einer neuen Function geführt werden, die, wenn sie unserm Verlangen entsprechend, für Rechnungen bequemer als die ursprüngliche Function sein soll, mehr Coefficienten enthält als diese. Es ist klar, dass in einem solchen Fall eine unmittelbare Ausgleichung der neuen Function nicht zu exacten Resultaten führen kann, denn da sie mehr Coefficienten hat, als nötig ist, bleiben auch weniger überschüssige Beobachtungsgleichungen. Die ausgeglichenen Beträge dieser Coefficienten werden dann im allgemeinen diese Beobachtungsgleichungen besser erfüllen, als sie es tun könnten, wenn man sie auf die unumgänglich nötige Zahl reducirte, und es wird so der Untersuchung grössere Exactheit vindicirt, als ihr zukommt. Sind nun in der transformirten Gleichung zu viel Coefficienten enthalten, so sagt das nur, dass zwischen diesen Coefficienten noch eine Reihe von Bedingungsgleichungen existiren, die streng zu erfüllen sind, dass die Coefficienten nicht unabhängig von einander sind. Die Grundlage all unserer bisherigen Ausgleichungsregeln bildet aber gerade die Annahme, dass wir es mit von einander unabhängigen Grössen zu tun haben, und wir kommen so zu der Frage:

Wie ist eine Untersuchung auszugleichen, wenn die durch dieselbe zu berechnenden Grössen nicht unabhängig von einander sind, sondern eine gewisse Anzahl von Gleichungen streng zu erfüllen haben?

238. Directe Lösung durch Elimination der überschüssigen Coefficienten.

Die nächste Antwort wäre die, dass man vor der Ausgleichung durch die Bedingungsgleichungen so viele Coefficienten aus der betreffenden Function eliminiren soll, als Bedingungsgleichungen vorhanden sind.

Vermag man die Elimination streng nicht auszuführen, so sucht man erst ein System von Näherungswerten für die Coefficienten, entwickelt die Fehler- und Bedingungsgleichungen nach den notwendigen Verbesserungen und bewirkt die Elimination zwischen diesen Verbesserungen.

Es seien

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_h) = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_h) = 0,$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$f_v(x_1, x_2, \dots, x_h) = 0$$

die ν Bedingungsgleichungen, und x'_1, x'_2, \dots, x'_h ein System von Näherungswerten der Coefficienten. Sind dann die notwendigen Verbesserungen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h$, so hat man für das System der Fehler und Bedingungsgleichungen

$$\text{CVII)} \quad \left\{ \begin{array}{l} -v_1 = \Phi'_1 + \xi_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_1} + \xi_2 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_2} + \dots + \xi_h \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_h}, \\ \vdots \\ -v_n = \Phi'_n + \xi_1 \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_1} + \xi_2 \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_2} + \dots + \xi_h \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_h}, \\ 0 = f'_1 + \xi_1 \frac{\partial f'_1}{\partial x'_1} + \xi_2 \frac{\partial f'_1}{\partial x'_2} + \dots + \xi_h \frac{\partial f'_1}{\partial x'_h}, \\ \vdots \\ 0 = f'_\nu + \xi_1 \frac{\partial f'_\nu}{\partial x'_1} + \xi_2 \frac{\partial f'_\nu}{\partial x'_2} + \dots + \xi_h \frac{\partial f'_\nu}{\partial x'_h}. \end{array} \right.$$

Aus den letzten ν Gleichungen können wir, weil sie linear sind, immer ν der ξ , etwa $\xi_h, \xi_{h-1}, \dots, \xi_{h-\nu+1}$, durch die $h-\nu$ andern ausdrücken. Setzen wir dann ihre Beträge in die Fehlergleichungen ein, so gehen diese über in

$$\text{CVIII)} \quad \left\{ \begin{array}{l} -v_1 = L_1 + \xi_1 F'_{11} + \xi_2 F'_{12} + \dots + \xi_{h-\nu} F'_{1h-\nu}, \\ \vdots \\ -v_n = L_n + \xi_1 F'_{n1} + \xi_2 F'_{n2} + \dots + \xi_{h-\nu} F'_{nh-\nu}, \end{array} \right.$$

wo die L, F bekannte Functionen der Φ', f' und ihrer Derivirten sind.

Die Normalgleichungen bestehen dann nur zwischen diesen von einander unabhängigen $h-\nu$ Verbesserungen, und es ist in ihnen

$$\text{CIX)} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{ix} = p'_1 F'_{1i} F'_{1x} + p'_2 F'_{2i} F'_{2x} + \dots + p'_n F'_{ni} F'_{nx} \\ i, x = 1, 2, 3, \dots, h-\nu, \\ -l_x = p'_1 L_1 F'_{1x} + p'_2 L_2 F'_{2x} + \dots + p'_n L_n F'_{nx} \\ x = 1, 2, 3, \dots, h-\nu. \end{array} \right.$$

Nachdem wir aus diesen Normalgleichungen die $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{h-\nu}$ und ihre mittlern Fehler berechnet haben, bekommen wir aus den Bedingungsgleichungen, vermöge der aus ihnen gezogenen Formeln

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{h-\nu+1} = \psi_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{h-\nu}), \\ \xi_{h-\nu+2} = \psi_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{h-\nu}), \\ \vdots \\ \xi_h = \psi_\nu(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{h-\nu}), \end{array} \right.$$

wo, wie man sieht, die ψ lineare Functionen der ξ sind, die Werte der noch fehlenden ξ und nach den voraufgehenden Regeln des Art. 235 auch die mittlern Fehler derselben.

Nur auf eins ist noch zu achten:

Da in den Fehlergleichungen nach Eliminirung der überschüssigen Verbesserungen nur mehr noch $h - \nu$ Coefficienten vorhanden sind, so hat man bei der Berechnung der mittlern Fehler, sowohl der Beobachtungsgleichungen, wie der Coefficienten, den mit μ bezeichneten mittlern Fehler einer Beobachtungsgleichung vom Gewicht 1 nunmehr $n - (h - \nu)$ Beobachtungsgleichungen als überschüssig in Anschlag zu bringen, und es ist demgemäss

$$\mu = \sqrt{\frac{[p' v^2]}{n + \nu - h}}.$$

239. Ausgleichung nach Bessel. a) Grundlagen. Eine zweite, von Bessel herrührende Methode lehrt die Coefficienten alle mit einem Mal und nach demselben Schema wie bei unabhängigen Beobachtungsgleichungen ableiten.

Wir haben es nämlich hier mit einer Aufgabe zu tun, die ganz der in Art. 164 gelösten entspricht, und wir gehen hier auch ganz so zu Werke wie dort.

Es seien wieder v_1, v_2, \dots, v_n die übrig bleibenden wahrscheinlichsten Fehler der vorgelegten Beobachtungsgleichungen, die Wahrscheinlichkeit, dass das System der Beobachtungsgleichungen gerade diese Fehler, keine andern, übrig behält, ist dann

$$W = \varphi_1(v_1) \varphi_2(v_2) \dots \varphi_n(v_n).$$

Nun kann kein System von Coefficienten x_1, x_2, \dots, x_h als das wahrscheinlichste bezeichnet werden, welches zwar die obige Wahrscheinlichkeit W so gross wie möglich werden lässt, aber die Bedingungsgleichungen nicht erfüllt, wir müssen daher hier sagen:

Die Coefficienten sind so zu berechnen, dass einerseits die Wahrscheinlichkeit W so gross als möglich wird und andererseits die Bedingungsgleichungen streng erfüllt werden.

Sind also die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_h) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_h) &= 0, \\ &\vdots \\ f_\nu(x_1, x_2, \dots, x_h) &= 0, \end{aligned}$$

so haben wir nach dem Satz 59 x_1, x_2, \dots, x_h so zu bestimmen, dass die $\nu + h$ Gleichungen

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial(W + x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_\nu f_\nu)}{\partial x_1} = 0, \\
 & \frac{\partial(W + x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_\nu f_\nu)}{\partial x_2} = 0, \\
 & \quad \vdots \\
 \text{CX)} \quad & \frac{\partial(W + x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_\nu f_\nu)}{\partial x_h} = 0, \\
 & f_1 = 0, \\
 & f_2 = 0, \\
 & \quad \vdots \\
 & f_\nu = 0
 \end{aligned}$$

identisch erfüllt werden. Die x sind neu eingeführte Factoren, wir bezeichnen sie wie in Art. 166 als Correlaten. Ihre Anzahl ist gleich ν und sie sind zusammen mit den x durch die $h + \nu$ obigen Gleichungen bestimmt. Wir haben jetzt nur noch diese obigen Gleichungen näher auszuführen.

239b. Die Normalgleichungen. Zunächst ist

$$W = \text{Const. } e^{-\pi(w_1^2 v_1^2 + w_2^2 v_2^2 + \dots + w_n^2 v_n^2)}.$$

Es gehen also die h ersten Gleichungen, indem wir uns die x durch die Const. von W und durch 2π dividirt denken, über in

$$\begin{aligned}
 w_1^2 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_i} + w_2^2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_i} + \dots + w_n^2 v_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} + x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + x_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} = 0, \\
 i = 1, 2, 3, \dots, h,
 \end{aligned}$$

oder indem wir an Stelle der Präcisionsconstanten die Gewichte einführen und noch gemäss Art. 209 die v durch ihre Beträge $-\Phi_1, -\Phi_2, \dots, -\Phi_n$ ersetzen, in

$$\begin{aligned}
 & p_1 \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + p_2 \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} + \dots + p_n \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \dots + x_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial x_1} = 0, \\
 \text{CXI)} \quad & p_1 \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} + p_2 \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \dots + p_n \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + x_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial x_2} = 0, \\
 & \quad \vdots \\
 & p_1 \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_h} + p_2 \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_h} + \dots + p_n \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_h} + x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_h} + x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_h} + \dots + x_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial x_h} = 0.
 \end{aligned}$$

Nun sei wieder x'_1, x'_2, \dots, x'_h ein System von Näherungswerten für die x (solche bekommen wir unmittelbar aus h Beobachtungsgleichungen

endlich ist

$$m_i = -f'_i.$$

Im ganzen ist das System der Coefficienten wie früher ein symmetrisches. Die obigen Gleichungen bilden unser jetziges System von Normalgleichungen; die weitere Rechnung unterscheidet sich nun principiell gar nicht von der frühern, nur dass wir hier numerisch mehr zu rechnen haben, als wenn keine Bedingungsgleichungen mit zu erfüllen sind. Ein näheres Eingehen verlangt nur noch die Rechnung der Fehlergrößen.

239 c. Fehler der Beobachtungsgleichungen, Controlformel. Die übrig bleibenden Fehler sind aus den Fehlergleichungen zu bestimmen, nachdem man in dieselben für die ξ ihre aus den Normalgleichungen abgeleiteten Werte eingesetzt hat.

Hiernach haben wir aus diesen Fehlergleichungen auch die mittlern Fehler der einzelnen Beobachtungsgleichungen abzuleiten. Indessen dürfen wir hier nicht mehr wie früher den mittlern Fehler einer einzelnen Beobachtungsgleichung, der das Gewicht 1 zukommen würde, gleich

$$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{[p'v^2]}{n-h}}$$

setzen, denn wenn auch die Anzahl der überschüssigen Beobachtungsgleichungen immer noch $n-h$ ist, so haben unsere Coefficienten doch noch ν analytische Bedingungen streng zu erfüllen, sie werden also eigentlich aus $n+\nu$ Gleichungen errechnet, und darum setzt man

$$\text{CXV)} \quad \bar{\mu} = \sqrt{\frac{[p'v^2]}{n+\nu-h}},$$

und hier stellt $n+\nu-h$ die ganze Anzahl überschüssiger Gleichungen dar. Dass man in der Tat den Nenner so wie angegeben, gleich $n+\nu-h$, wählen muss, ist leicht noch in anderer Weise zu erhärten. Denn denken wir uns mit Hilfe der ν Bedingungsgleichungen ν der Coefficienten aus den Beobachtungsgleichungen eliminirt, so blieben von den h Coefficienten nur noch $h-\nu$ übrig, und wenn man diese dann aus den Beobachtungsgleichungen nach dem früheren Verfahren ausrechnet, hat man als mittlern Fehler μ .

$$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{[p'v^2]}{n-(h-\nu)}},$$

und das entspricht dem oben angegebenen Werte.

Der mittlere Fehler einer Beobachtungsgleichung vom Gewicht p'_i wird

$$\text{CXVI)} \quad \bar{\mu}_i = \frac{1}{\sqrt{p'_i}} \bar{\mu} = \sqrt{\frac{[p'v^2]}{p'_i(n+\nu-h)}}.$$

Die ζ stehen zu den Correlaten in derselben Beziehung, wie die η zu den Verbesserungen ξ ; wir haben sie also folgerichtig als *coordinirte Correlaten* zu bezeichnen. Specialisirt man die Function ψ , indem man sie der Reihe nach gleich x_1, x_2, \dots, x_h setzt, so resultirt wieder genau so wie früher,

$$\mu_{x_1} = \bar{\mu} \sqrt{\gamma_1^{(1)}}, \mu_{x_2} = \bar{\mu} \sqrt{\gamma_2^{(2)}}, \dots, \mu_{x_h} = \bar{\mu} \sqrt{\gamma_h^{(h)}}.$$

Alles zusammenfassend können wir jetzt sagen:

71. *Nachdem man für den Fall, wo zwischen den gesuchten Grössen Bedingungsgleichungen zu erfüllen sind, die Normalgleichungen in der angegebenen Form aufgestellt hat, unterscheidet sich die weitere Rechnung in keiner Weise mehr von der, die man auszuführen hat, wenn keine Bedingungsgleichungen existiren. Alle nötigen Grössen werden aus den jetzigen Normalgleichungen genau so abgeleitet wie die entsprechenden aus den für den einfachern Fall aufgestellten Normalgleichungen.*

Die auseinandergesetzte Behandlungsweise von Beobachtungsgleichungen mit Bedingungsgleichungen rührt von Bessel her. Es giebt noch andere Lösungsmethoden, ich will von ihnen nur eine noch erwähnen, ohne sie weiter auszuführen.

240. Methode von Hansen und Andrä, Ausgleichung durch die Aequivalentgrössen. Bei Gelegenheit der Berechnung der mittlern Fehler der Elemente sahen wir, dass die χ völlig wie direct beobachtete Grössen behandelt werden können, wenn man ihnen nur bestimmte daselbst angegebene mittlere Fehler zuschreibt. Denken wir uns nun in den Bedingungsgleichungen die ξ durch ihre Ausdrücke als Functionen der χ ersetzt, so gehen diese über in lineare Functionen der χ , und indem wir unter

$$r_{1,0}^{(i)}, r_{2,1}^{(i)}, r_{3,2}^{(i)}, \dots, r_{h,h-1}^{(i)}$$

ein System von Grössen verstehen, welches aus den Derivirten von f'_i nach x'_1, x'_2, \dots, x'_h genau so gewonnen ist, wie das in Art. 234 mit

$$r_{1,0}, r_{2,1}, r_{3,2}, \dots, r_{h,h-1},$$

bezeichnete aus den Derivirten der Function ψ , gehen sie über in beziehungsweise

$$\begin{aligned} 0 &= f'_1 + r_{1,0}^{(1)} \chi_1 + r_{2,1}^{(1)} \chi_2 + r_{3,2}^{(1)} \chi_3 + \dots + r_{h,h-1}^{(1)} \chi_h, \\ 0 &= f'_2 + r_{1,0}^{(2)} \chi_1 + r_{2,1}^{(2)} \chi_2 + r_{3,2}^{(2)} \chi_3 + \dots + r_{h,h-1}^{(2)} \chi_h, \\ &\vdots \\ 0 &= f'_v + r_{1,0}^{(v)} \chi_1 + r_{2,1}^{(v)} \chi_2 + r_{3,2}^{(v)} \chi_3 + \dots + r_{h,h-1}^{(v)} \chi_h, \end{aligned}$$

und unsere Aufgabe ist jetzt, „die Beobachtungen χ_1, χ_2, χ_h , denen die Gewichte $a_{11}, a_{22,1}, a_{33,2}, \dots, a_{hh,h-1}$ zukommen, so auszugleichen, dass die vorstehenden Bedingungsgleichungen streng erfüllt werden.“ Diese Aufgabe ist aber schon im voraufgehenden Abschnitt Cap. X gelöst.

Der Gang der Rechnung ist dann der folgende:

Man stellt die Normalgleichungen zu den Beobachtungsgleichungen auf, wie wenn Bedingungsgleichungen garnicht vorhanden wären und rechnet mit ihnen die χ aus. Diese sind unsere Beobachtungen und bekommen die Gewichte $a_{11}, a_{22,1}, \dots, a_{hh,h-1}$. Setzt man ihre Beträge in die Bedingungsgleichungen ein, so werden diese nicht erfüllt, man muss ihnen noch gewisse Verbesserungen $v_1, v_2, v_3, \dots, v_h$ hinzufügen. Hat man dann diese Verbesserungen nach den in den bezeichneten Artikeln namentlich in der Zusammenfassung Art. 200 gegebenen Regeln ausgerechnet, so erhält man die zur Erfüllung der Bedingungsgleichungen notwendigen, an die ξ noch anzubringenden Verbesserungen durch die den ursprünglichen Gleichungen entsprechenden

$$\begin{array}{rcl} \delta_{\xi_1} & = & v_1 - \alpha_{12,0} v_2 - \alpha_{13,1} v_3 - \dots - \alpha_{1h-1,h-2} v_h, \\ \delta_{\xi_2} & = & v_2 - \alpha_{23,0} v_3 - \dots - \alpha_{2h,h-3} v_h, \\ \vdots & & \vdots \phantom{v_{10}} \\ \delta_{\xi_h} & = & \phantom{v_{10}} v_h. \end{array}$$

Wenn die erreichte Genauigkeit nicht genügt, hat man die

$$\chi_1 + v_1, \chi_2 + v_2, \dots, \chi_h + v_h$$

als Beobachtungen anzusehen, sie an Stelle der χ zu setzen und nach denselben Regeln neue Verbesserungen für die χ zu rechnen.

Um zu den mittlern Fehlern der x zu gelangen, rechnet man erst die mittlern Fehler der χ nach den in Art. 200 gegebenen Regeln und aus ihnen bekommt man dann vermöge des Satzes 67 in Art. 229 die mittlern Fehler der gesuchten Grössen oder irgend einer Function derselben.

Die Methode ist, wie man sieht, im Princip sehr einfach, ihre Ausführung wird aber wol im allgemeinen eher mehr als weniger Rechenarbeit verursachen, wie die vorausgehende. Sie rührt von Hansen und Andrä her.

XIX. Ausgleichung von einander abhängiger Beobachtungen.

241. Unabhängige Beobachtungen und abhängige Beobachtungen. Wir sind bei allen bisher durchgeführten Entwicklungen von der Voraussetzung ausgegangen, dass die einzelnen Beobachtungsgleichungen unabhängig von einander erhalten sind, das heisst, dass bei jeder Beobachtungsgleichung alle in derselben enthaltenen, durch Beobachtung zu bestimmenden Elemente auch ganz ohne Rücksicht auf die andern Beobachtungsgleichungen wirklich für diese Beobachtungsgleichung bestimmt sind. Jedes Element sollte, selbst in dem Fall, dass auch sein wahrer Betrag nicht von Beobachtungsgleichung zu Beobachtungsgleichung variirte, trotzdem für jede Beobachtungsgleichung gesondert

gemessen werden; der Betrag keines Elementes durfte also aus der einen Beobachtungsgleichung in die andere hinüber genommen werden.

Wenn diese Bedingung der völligen Unabhängigkeit der einzelnen Beobachtungsgleichungen von einander nicht erfüllt ist, dürfen wir auch die Fehler der Beobachtungsgleichungen nicht mehr als von einander unabhängig ansehen, alsdann darf man auch nicht die Wahrscheinlichkeit für das ganze Fehlersystem gleich dem Produkt der einzelnen Fehlerwahrscheinlichkeiten setzen, und dadurch geht die Grundgleichung zur Ableitung der Ausgleichungsformeln verloren. Und da man weiter dann auch nicht bei allen Beobachtungsgleichungen die Fehler als rein zufällig ansehen kann, hat man auch nicht das Recht, bei allen Beobachtungsgleichungen die Fehlerwahrscheinlichkeit nach dem für zufällige Fehler als gültig angenommenen Gaussischen Wahrscheinlichkeitsgesetz zu beurteilen.

242. Fälle abhängiger Beobachtungen. Differenz- oder Nullpunktsbeobachtungen. Beispiele. Es giebt aber Fälle, und solche werden namentlich dem Physiker nicht selten aufstossen, in denen sich in der Tat die völlige Unabhängigkeit der einzelnen Beobachtungsgleichungen nicht wahren lässt. Gewöhnlich liegen die Verhältnisse so, dass entweder eine Reihe von Beobachtungsgleichungen alle ein und dasselbe, aber nur einmal (wenn auch in mehrfacher Wiederholung) beobachtete Element enthalten, oder dass eine Anzahl von Beobachtungsgleichungen wie die Glieder einer Kette mit einander zusammenhängen, indem immer zwei auf einander folgende Gleichungen durch ein nur einmal, das heisst nur für eine Gleichung, beobachtetes Element verbunden sind.

Messungen solcher Art können passend als *Differenzmessungen*, und insofern in dem Fall, wo ein einmal beobachtetes Element durch eine ganze Reihe von Beobachtungsgleichungen verwendet wird, der angenommene Betrag dieses Elementes meist lediglich als Ausgangspunkt für die Beträge der andern Elemente dient, auch als *Nullpunktsbeobachtungen* bezeichnet werden. Natürlich gehören nicht alle Differenzmessungen zu der Kategorie der von einander abhängigen Messungen. Liegen solchen Messungen Substrate zu Grunde, die man sich stets wieder verschaffen kann, so wäre es nicht zu billigen, wenn man die Messungen nicht auch für jede Beobachtungsgleichung vollständig ausführen wollte. Derart sind, zum Beispiel, die Messungen, die man auszuführen hat, um die inneren Caliberfehler eines Thermometers kennen zu lernen. Man könnte hier zunächst so verfahren wollen, dass man den Quecksilberfaden, der zur Calibrirung dient, und successive von links nach rechts verschoben wird, immer so verschiebt und einstellt, dass sein linkes Ende genau da zu liegen kommt, wo in der vorausgehenden Messung sein rechtes Ende lag, und hiernach jedesmal (abgesehen von der ersten Lage) immer nur für das rechte Ende die Ablesung vornimmt. Es seien die für den Faden successive erhaltenen Längen $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$, die auf einander fol-

genden Ablesungen an der Thermometerscala (oder einem besondern Massstab) am rechten Ende des Fadens für die einzelnen Lagen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Giebt dann a_0 die Ablesung am linken Ende des Fadens in seiner ersten Lage, so hätte man die Reihe von Beobachtungsgleichungen

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 - a_0, \\ f_2 &= a_2 - a_1, \\ f_3 &= a_3 - a_2, \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ f_n &= a_n - a_{n-1}, \end{aligned}$$

und diese Gleichungen sind mit einander verkettet, also nicht von einander unabhängig.

Nun ist es sehr schwer den Faden jedesmal so einzustellen, dass sein linkes Ende auch genau da zu liegen kommt, wo früher das rechte lag, man wird also schon von selbst die Mühe der genauen Einstellung sparen und lieber jedesmal die Ablesungen an beiden Enden vornehmen. Dann hat man

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 - a_0, \\ f_2 &= a_2 - a'_1, \\ f_3 &= a_3 - a'_2, \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ f_n &= a_n - a'_{n-1}, \end{aligned}$$

und diese Gleichungen sind, weil $a_1, a'_1; a_2, a'_2; a_3, a'_3; \dots; a_{n-1}, a'_{n-1}$ Paare gesondert gemessener Grössen darstellen, unabhängig von einander.

Hier hatte es also keine Schwierigkeit, die Beobachtungen so einzurichten, dass die Beobachtungsgleichungen unabhängig von einander herauskommen, es liegen aber auch der Messung Substrate zu Grunde, die uns stets zur Verfügung stehen.

In einem ganz ähnlichen Fall auf einem andern Gebiet sind wir nicht mehr in der Lage zu unabhängigen Beobachtungsgleichungen zu gelangen, und zwar, weil das der Messung unterliegende Substrat vergänglich ist. Es handele sich um die Schwingungsdauer eines Magnets. Man bestimmt diese Schwingungsdauer, indem man bei Beobachtung mit Spiegel und Scala die Zeiten des Durchgangs eines bestimmten Strichs des Bildes der Scala durch den Faden des Fernrohrs notirt. Ist diese Schwingungsdauer T und bezeichnen $U_0, U_1, U_2, \dots, U_n$ die Zeiten auf einander folgender Durchgänge, so hat man die Beobachtungsgleichungen

$$\begin{aligned} T &= U_1 - U_0, \\ T &= U_2 - U_1, \\ T &= U_3 - U_2, \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ T &= U_n - U_{n-1}, \end{aligned}$$

Hier sind wir nicht mehr in der Lage, die in zwei auf einander folgenden Gleichungen zugleich vertretenen Durchgangszeiten wie U_1, U_2, \dots, U_{n-1} gesondert zu beobachten, die Gleichungen müssen in der angegebenen Form stehen bleiben und ihre Verkettung ist allein durch Beobachtung nicht zu lösen, wenigstens nicht, wenn man alle zwischen der ersten und letzten Beobachtung stattgefundenen Durchgangszeiten zur Berechnung der Schwingungsdauer heranziehen will.

Wollte man nun in diesem Falle die gesuchte Grösse so berechnen, wie es die Ausgleichsrechnung für unabhängige Messungen vorschreibt, so hätte man im Mittel

$$T = \frac{(U_1 - U_0) + (U_2 - U_1) + (U_3 - U_2) + \dots + (U_n - U_{n-1})}{n},$$

also einfach

$$T = \frac{U_n - U_0}{n},$$

d. h. die Beobachtungen der Durchgangszeiten $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}$ kämen für die Ableitung des wahrscheinlichsten Resultats gar nicht in Frage, sie wären ganz unnütz, und das ist offenbar ein widersinniges Resultat, denn wenn man Beobachtungen angestellt hat, muss man sie auch irgendwie zur Sicherung des betreffenden Ergebnisses benutzen können, und eine Theorie, die das nicht gestattet, darf nicht als zufriedenstellend angesehen werden.

Die Lösung der Schwierigkeit ist leicht bei Gleichungen, die nur dadurch mit einander in Verbindung stehen, dass mehrere aber nur ja einmal gemessene Elemente in allen zugleich vertreten sind. Wir nennen solche Gleichungen verbundene Gleichungen. Verkettete Gleichungen lassen sich durch Transformation auf verbundene reduciren, wir haben uns also nur mit verbundenen Gleichungen zu beschäftigen.

243. Zwei Annahmen, um die Verbindung zwischen Beobachtungsgleichungen zu lösen. Seien also, um noch etwas mehr Allgemeinheit zu erreichen, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ Elemente, deren jedes nur einmal (das heisst nur in einer Reihe) gemessen ist und in allen Beobachtungsgleichungen mit demselben Betrag vertreten ist. Die Beobachtungsgleichungen

$$0 = \Phi_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; a_1, b_1, \dots, g_1; x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$0 = \Phi_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; a_2, b_2, \dots, g_2; x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\vdots$$

$$0 = \Phi_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; a_n, b_n, \dots, g_n; x_1, x_2, \dots, x_n)$$

hängen dann durch die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ zusammen. Wären diese Grössen völlig fehlerfrei, so würden sie in den Gleichungen lediglich die

Rolle von bestimmten Zahlengrößen spielen. Bei der Berechnung der Fehler der einzelnen Gleichungen kämen also diese Größen gar nicht in Betracht, und die Ausgleichung der Beobachtungsgleichungen könnte genau nach den frühern Regeln ausgeführt werden.

Gehen wir nun zum zweiten Extrem über, indem wir diese Elemente α als ganz unbekannt ansehen, so haben wir wieder ein System von einander unabhängiger Gleichungen, denn nunmehr rangiren diese Elemente mit den durch die Ausgleichung zu berechnenden Größen x_1, x_2, \dots, x_h in eine Reihe.

Also zwei Wege stehen uns zunächst offen, um Beobachtungsgleichungen, welche durch gewisse Elemente mit einander in Abhängigkeit gebracht sind, von einander unabhängig zu machen; entweder wir betrachten die betreffenden Elemente als vollständig bekannt, ihre aus der einmaligen Messung resultirenden Beträge als ganz fehlerfrei, oder wir sehen diese Elemente als überhaupt nicht gemessen an, sie sind dann vollständig unbekannt, und mit den betreffenden andern Unbekannten zugleich auszurechnen.

Es kommt nun auf dasselbe hinaus, ob wir die verbindenden Elemente ganz als Unbekannte betrachten, oder ob wir nur ihre Fehler als Unbekannte einführen, denn wenn eine Grösse b unbekannt ist, so ist es nicht minder die Grösse $a + b$, wenn auch a bekannt sein sollte.

Wir können uns daher auch so ausdrücken, dass uns zwei Annahmen freistehen, durch die wir die Verbindung zwischen den Beobachtungsgleichungen aufzuheben vermögen: Entweder wir betrachten die verbindenden Elemente als fehlerfrei, oder wir schreiben diesen verbindenden Elementen bestimmte, wenn auch zunächst nicht bekannte Fehler zu.

244a. Normalgleichungen für verbundene Beobachtungsgleichungen.
Erste Lösung. Keine der beiden Annahmen hat von vornherein vor der andern einen Vorzug, wir müssen sie also, um zu wahrscheinlichsten Resultaten zu gelangen, beide zum Ausdruck bringen.

Wir schreiben also erst die Beobachtungsgleichungen hin, indem wir zu den dieselben mit einander verbindenden Elementen gewisse unbekanntere Verbesserungen hinzufügen, und dann stellen wir noch Gleichungen auf, welche besagen, dass diese Verbesserungen auch Null sein können. Die Gewichte dieser letztern Gleichungen nehmen wir gleich den Gewichten der entsprechenden Elemente. Also:

72. *Sind eine Reihe von Beobachtungsgleichungen*

$$0 = \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N; a, b, \dots, g; x_1, x_2, \dots, x_h)$$

durch die N Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ mit einander verbunden, so berechnet man die wahrscheinlichsten Beträge der auszugleichenden Größen x_1, x_2, \dots, x_h , indem man sich die verbindenden Elemente um gewisse als ihre Fehler anzusehende Größen f_1, f_2, \dots, f_N verbessert denkt und diese Größen zugleich mit den gesuchten Größen x_1, x_2, \dots, x_h aus dem Gleichungssystem

$$\text{CXXIIa)} \left\{ \begin{array}{l} 0 = r_1, \\ 0 = r_2, \\ \vdots \\ 0 = r_{h'}, \\ 0 = \Phi(\alpha_1 + r_1, \alpha_2 + r_2, \dots, \alpha_{h'} + r_{h'}; a_1, b_1, \dots, g_1; x_1, x_2, \dots, x_h), \\ 0 = \Phi(\alpha_1 + r_1, \alpha_2 + r_2, \dots, \alpha_{h'} + r_{h'}; a_2, b_2, \dots, g_2; x_1, x_2, \dots, x_h), \\ \vdots \\ 0 = \Phi(\alpha_1 + r_1, \alpha_2 + r_2, \dots, \alpha_{h'} + r_{h'}; a_n, b_n, \dots, g_n; x_1, x_2, \dots, x_h) \end{array} \right.$$

nach den in den vorangehenden Capiteln gegebenen Regeln ausrechnet. Als Gewichte sind dabei für die h' ersten Gleichungen die Gewichte der den einzelnen r entsprechenden Elemente zu verwenden, während die Gewichte der n folgenden eigentlichen Beobachtungsgleichungen in bekannter Weise aus den Fehlern der anderen Beobachtungselemente a, b, \dots, g berechnet werden.

Die Anzahl der auszurechnenden Grössen beträgt jetzt $h' + h$, die Anzahl der zur Verfügung stehenden Gleichungen $h' + n$.

Statt der Beobachtungsgleichungen können wir auch die Fehlergleichungen hinschreiben. Benutzen wir alle frühern Bezeichnungen und beachten, dass die r als Fehler kleine Grössen sein werden, so haben wir

$$\text{CXXIIb)} \left\{ \begin{array}{l} 0 = r_1, \\ 0 = r_2, \\ \vdots \\ 0 = r_{h'}; \\ 0 = \Phi'_1 + \xi_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_1} + \dots + \xi_h \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_h} + r_h \frac{\partial \Phi'_1}{\partial \alpha_1} + \dots + r_{h'} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial \alpha_{h'}}, \\ 0 = \Phi'_2 + \xi_1 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_1} + \dots + \xi_h \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_h} + r_1 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial \alpha_1} + \dots + r_{h'} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial \alpha_{h'}}, \\ \vdots \\ 0 = \Phi'_n + \xi_1 \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_1} + \dots + \xi_h \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_h} + r_1 \frac{\partial \Phi'_n}{\partial \alpha_1} + \dots + r_{h'} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial \alpha_{h'}} \end{array} \right.$$

wo

$$\Phi'_x = \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{h'}; \alpha_x, b_x, \dots, g_x; x'_1, x'_2, \dots, x'_h)$$

gesetzt ist.

Indem wir jetzt wie früher

$$a_{ix} = a_{xi} = \left[p' \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_i} \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_x} \right], \quad l_x = - \left[p' \Phi' \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_x} \right]$$

Nun hängen hier die v mit den ζ insofern zusammen, als unsere jetzigen Fehlergleichungen die Form haben

$$0 = v_x + \Phi_x + \frac{\partial \Phi_x}{\partial \alpha_1} \zeta_1 + \frac{\partial \Phi_x}{\partial \alpha_2} \zeta_2 + \cdots + \frac{\partial \Phi_x}{\partial \alpha_h} \zeta_h.$$

Wir bekommen daher

$$v_x^2 = \Phi_x^2 + 2\Phi_x \left[\frac{\partial \Phi_x}{\partial \alpha} \zeta \right] + \left[\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial \alpha} \zeta \right)^2 \right],$$

und es sind die x und ζ so zu wählen, dass

$$L = [p\Phi^2] + 2 \left[p\Phi \left[\frac{\partial \Phi_x}{\partial \alpha} \zeta \right] \right] + \left[p \left[\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial \alpha} \zeta \right)^2 \right] \right] + [p_\alpha \zeta^2]$$

zu einem Minimum wird. Früher, als wir es mit unverbundenen Gleichungen zu tun hatten, wurde lediglich $[p\Phi^2]$ zu einem Minimum gemacht.

Damit L zu einem Minimum wird, muss, wenn wir wie der Einfachheit wegen annehmen, dass die x von einander nicht abhängen,

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial L}{\partial x_h} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \zeta_1} = \frac{\partial L}{\partial \zeta_2} = \cdots = \frac{\partial L}{\partial \zeta_h} = 0$$

sein.

Nun sind die ζ nicht von den x abhängig, und da wir nach den Auseinandersetzungen des Art. 224 bei guten Beobachtungen auch die Derivierten von Φ als, bis auf hier nicht in Betracht kommende Grössen, fehlerfrei betrachten dürfen, so wird allgemein

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial x_x} &= \left[p\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_x} \right] + \left[p \frac{\partial \Phi}{\partial x_x} \left[\frac{\partial \Phi_x}{\partial \alpha} \zeta \right] \right], \\ \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial \zeta_x} &= p_{\alpha_x} \zeta_x + \left[p \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_x} \left[\frac{\partial \Phi_x}{\partial \alpha} \zeta \right] \right] + \left[p\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_x} \right]. \end{aligned}$$

Nehmen wir erst die Gleichungen vor, die aus der Differentiation des L nach den x resultiren, so haben wir h Gleichungen von der Form

$$0 = \left[p\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_x} \right] + \left[p \frac{\partial \Phi}{\partial x_x} \left[\frac{\partial \Phi_x}{\partial \alpha} \zeta \right] \right].$$

Das erste Glied giebt, wenn wir wie früher

$$\Phi = \Phi' + \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_1} \xi_1 + \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_2} \xi_2 + \cdots + \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_h} \xi_h$$

setzen, nichts anderes als

$$a_{x_1} \xi_1 + a_{x_2} \xi_2 + \cdots + a_{x_h} \xi_h - l_x.$$

Das zweite ist expliciter geschrieben

$$p_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_x} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha_1} r_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha_2} r_2 + \dots + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha_{h'}} r_{h'} \right) + p_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_x} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha_1} r_1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha_2} r_2 + \dots + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha_{h'}} r_{h'} \right) + \dots + p_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_x} \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha_1} r_1 + \frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha_2} r_2 + \dots + \frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha_{h'}} r_{h'} \right),$$

oder nach den r geordnet

$$\left[p \frac{\partial \Phi}{\partial x_x} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} \right] r_1 + \left[p \frac{\partial \Phi}{\partial x_x} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} \right] r_2 + \dots + \left[p \frac{\partial \Phi}{\partial x_x} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_{h'}} \right] r_{h'}.$$

Hier dürfen wir bis auf Grössen zweiter Ordnung p mit p' , x mit x' und Φ mit Φ' vertauschen, und wir bekommen so, indem wir wie in Art. 244 a

$$\left[p' \frac{\partial \Phi'}{\partial x_x} \frac{\partial \Phi'}{\partial \alpha_i} \right] = b_{xi}$$

setzen,

$$a_{x1} \xi_1 + a_{x2} \xi_2 + \dots + a_{xh} \xi_h + b_{x1} r_1 + b_{x2} r_2 + \dots + b_{xh'} r_{h'} = l_x.$$

Das ist aber die allgemeine Form der h ersten Gleichungen in dem früher gewonnenen System CXXIII.

Die Gleichungen, die aus der Differentiation des L nach den r resultiren, bringen wir leicht auf die Form

$$0 = p_{\alpha_x} r_x + p_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha_x} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha_1} r_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha_2} r_2 + \dots + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha_{h'}} r_{h'} \right) + p_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha_x} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha_1} r_1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha_2} r_2 + \dots + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha_{h'}} r_{h'} \right) + \dots + p_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha_x} \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha_1} r_1 + \frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha_2} r_2 + \dots + \frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha_{h'}} r_{h'} \right) + p_1 \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha_x} + p_2 \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha_x} + \dots + p_n \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha_x},$$

oder indem wir nach den r ordnen

$$0 = \left[p \frac{\partial \Phi}{\partial x_x} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} \right] r_1 + \left[p \frac{\partial \Phi}{\partial x_x} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} \right] r_2 + \dots + \left[p \frac{\partial \Phi}{\partial x_x} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_{h'}} \right] r_{h'} + p_{\alpha_x} r_x + p_1 \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha_x} + p_2 \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha_x} + \dots + p_n \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha_x}.$$

In der ersten Zeile ersetzen wir wieder p und Φ durch p' und Φ' , machen wir dann wie früher

$$\left[p' \frac{\partial \Phi'}{\partial \alpha_x} \frac{\partial \Phi'}{\partial \alpha_i} \right] = c_{xi},$$

so geht diese Zeile über in

$$c_{x1} r_1 + c_{x2} r_2 + \cdots + c_{xx-1} r_{x-1} + (c_{xx} + p_{\alpha_x}) r_x + c_{xx+1} r_{x+1} + \cdots + c_{xh} r_h,$$

die zweite Zeile giebt, indem wir

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_x} = \frac{\partial \Phi'}{\partial \alpha_x}$$

und

$$\Phi = \Phi' + \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_1} \xi_1 + \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_2} \xi_2 + \cdots + \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_h} \xi_h$$

setzen, bei einer Anordnung nach den ξ

$$\left[p' \Phi' \frac{\partial \Phi'}{\partial \alpha_x} \right] + \left[p' \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_1} \frac{\partial \Phi'}{\partial \alpha_x} \right] \xi_1 + \left[p' \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_2} \frac{\partial \Phi'}{\partial \alpha_x} \right] \xi_2 + \cdots + \left[p' \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_h} \frac{\partial \Phi'}{\partial \alpha_x} \right] \xi_h$$

oder nach Einführung der früher benutzten Bezeichnung

$$\left[p' \Phi' \frac{\partial \Phi'}{\partial \alpha_x} \right] = -m_x$$

und unter Beachtung der Definitionen der b

$$-m_x + b_{1x} \xi_1 + b_{2x} \xi_2 + \cdots + b_{hx} \xi_h.$$

Im ganzen giebt also die Differentiation nach den r Gleichungen von der Form

$$b_{1x} \xi_1 + b_{2x} \xi_2 + \cdots + b_{hx} \xi_h + c_{x1} r_1 + c_{x2} r_2 + \cdots + c_{xx-1} r_{x-1} + (c_{xx} + p_{\alpha_x}) r_x + c_{xx+1} r_{x+1} + \cdots + c_{xh} r_h = m_x$$

und das stimmt mit der Form der h' letzten Gleichungen unseres Systems CXXIII) in Art. 244a.

Mit der Aufstellung der Normalgleichungen ist unsere Aufgabe gelöst, denn alle weitem Rechnungen schliessen sich an diese Gleichungen an. Man kann alle früher entwickelten Formeln in Anwendung bringen, nur hat man zu beachten, dass wir es hier mit $n + h'$ Beobachtungsgleichungen und $h + h'$ Normalgleichungen zu tun haben, und dass an Stelle des frühern Systems der Coefficienten a_{ix} ; $i, x = 1, 2, 3, \dots, h$ jetzt tritt das System

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1h} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1h'}, \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2h} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2h'}, \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hh} & b_{h1} & b_{h2} & \dots & b_{hh'}, \\
 b_{11} & b_{21} & \dots & b_{h1} & c_{11} + p_{\alpha_1} & c_{12} & \dots & c_{1h'}, \\
 b_{12} & b_{22} & \dots & b_{h2} & c_{21} & c_{22} + p_{\alpha_2} & \dots & c_{2h'}, \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 b_{1h'} & b_{2h'} & \dots & b_{hh'} & c_{h'1} & c_{h'2} & \dots & c_{h'h'} + p_{\alpha_{h'}}.
 \end{array}$$

Auch dieses System ist ein symmetrisches.

Die Gewichte p und ihre Näherungswerte p' hängen allein ab von den unabhängig beobachteten Elementen, es ist also wie früher

$$\text{CXXIV) } p' = \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial a_x}\right)^2 \mu_{a_x}^2 + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial b_x}\right)^2 \mu_{b_x}^2 + \dots}$$

Ferner haben wir für den mittlern Fehler einer verbesserten Beobachtungsgleichung vom Gewicht p'_x

$$\text{CXXV) } \mu_x = \sqrt{\frac{[p'v^2] + [p_x r^2]}{p'_x(n-h)}}.$$

Dabei ist

$$v_x = -\Phi(\alpha_1 + r_1, \alpha_2 + r_2, \dots, \alpha_{h'} + r_{h'}; a_x, b_x, \dots, g_x; x_1, x_2, \dots, x_h) = -\bar{\Phi}_x$$

oder, indem man wie früher

$$\Phi'_x = \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{h'}; a_x, b_x, \dots, g_x; x'_1, x'_2, \dots, x'_h)$$

setzt,

$$\text{CXXVI) } v_x = -\Phi'_x - \left[\xi \frac{\partial \Phi'_x}{\partial x'} \right] - \left[r \frac{\partial \Phi'_x}{\partial a} \right].$$

245. Streng zu erfüllende verbundene Gleichungen. Ein besonders hervorzuhebender Fall ist der, wo die Fehler der Beobachtungsgleichungen lediglich durch die Fehler der diese Gleichungen verbindenden Elemente hervorgebracht werden. Wir haben aber hierbei zwischen zwei Fällen zu unterscheiden. Entweder ist die Anzahl der Beobachtungsgleichungen grösser als die der Verbesserungen r zusammen mit der Anzahl der zu berechnenden Grössen, und dann sind die Beobachtungsgleichungen nur tunlichst zu erfüllen. Dieser Fall bietet durchaus nichts neues, und ist durch die obigen allgemeinen Entwicklungen erledigt. Oder die Anzahl

der Beobachtungsgleichungen ist nicht grösser als die der Verbesserungen und zu berechnenden Grössen. Die Gleichungen sind dann streng zu erfüllen und als Bedingungsgleichungen anzusehen, und die Aufgabe ist eine Verallgemeinerung der im vorausgehenden Abschnitt in Cap. X behandelten, insofern hier auch noch eine Reihe von Grössen mit zu berechnen ist. Die Lösung entspricht auch der dort gegebenen; es ist $[p_x r^2]$ zu einem Minimum zu machen unter der Bedingung, dass die n Gleichungen

$$0 = \Phi_x + \frac{\partial \Phi_x}{\partial \alpha_1} r_1 + \frac{\partial \Phi_x}{\partial \alpha_2} r_2 + \cdots + \frac{\partial \Phi_x}{\partial \alpha_{h'}} r_{h'}$$

erfüllt werden. Hier kann man etwas anders verfahren als in dem eben behandeltem allgemeineren Fall. Führt man nämlich wieder Correlatengrössen x_1, x_2, \dots, x_n ein, so hat man nach der in Art. 165 gegebenen Regel die r und x so zu bestimmen, dass

$$\frac{\partial [p_x r^2]}{\partial r_\lambda} + \sum_{i=1}^{i=n} 2x_i \frac{\partial \left(\Phi_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \alpha_1} r_1 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \alpha_2} r_2 + \cdots + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \alpha_{h'}} r_{h'} \right)}{\partial r_\lambda} = 0,$$

$$\lambda = 1, 2, 3, \dots, h',$$

$$\frac{\partial [p_x r^2]}{\partial x_\lambda} + \sum_{i=1}^{i=n} 2x_i \frac{\partial \left(\Phi_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \alpha_1} r_1 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \alpha_2} r_2 + \cdots + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \alpha_{h'}} r_{h'} \right)}{\partial x_\lambda} = 0,$$

$$\lambda = 1, 2, 3, \dots, h.$$

wird. Die Differentiation nach den r ergibt Gleichungen von der Form

$$p_{\alpha_\lambda} r_\lambda + x_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha_\lambda} + x_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha_\lambda} + \cdots + x_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha_\lambda} = 0, \quad \lambda = 1, 2, \dots, h'.$$

Aus den Differentiationen nach den x folgt

$$x_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_\lambda} + x_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_\lambda} + \cdots + x_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_\lambda} = 0, \quad \lambda = 1, 2, \dots, h.$$

Stellt man diese $h + h'$ Gleichungen mit den Fehlergleichungen

$$0 = \Phi'_\lambda + \left[\xi \frac{\partial \Phi'_\lambda}{\partial x'} \right] + \left[r \frac{\partial \Phi'}{\partial \alpha} \right], \quad \lambda = 1, 2, \dots, n$$

zusammen und beachtet, dass

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial \Phi'_i}{\partial x'_\lambda}$$

ist, so hat man zur Lösung der Aufgabe folgende 3 Gleichungssysteme

$$\text{CXXVII) } \left\{ \begin{array}{l} p_{\alpha_1} \gamma_1 + x_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial \alpha_1} + x_2 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial \alpha_1} + \dots + x_n \frac{\partial \Phi'_n}{\partial \alpha_1} = 0, \\ p_{\alpha_2} \gamma_2 + x_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial \alpha_2} + x_2 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial \alpha_2} + \dots + x_n \frac{\partial \Phi'_n}{\partial \alpha_2} = 0, \\ \vdots \\ p_{\alpha_{h'}} \gamma_{h'} + x_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial \alpha_{h'}} + x_2 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial \alpha_{h'}} + \dots + x_n \frac{\partial \Phi'_n}{\partial \alpha_{h'}} = 0; \\ x_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_1} + x_2 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_1} + \dots + x_n \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_1} = 0, \\ x_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_2} + x_2 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_2} + \dots + x_n \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_2} = 0, \\ \vdots \\ x_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_h} + x_2 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_h} + \dots + x_n \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_h} = 0; \\ \Phi'_1 + \xi_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_1} + \xi_2 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_2} + \dots + \xi_h \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_h} + \gamma_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial \alpha_2} + \dots + \gamma_{h'} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial \alpha_{h'}} = 0, \\ \Phi'_2 + \xi_1 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_1} + \xi_2 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_2} + \dots + \xi_h \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_h} + \gamma_1 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial \alpha_2} + \dots + \gamma_{h'} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial \alpha_{h'}} = 0, \\ \vdots \\ \Phi'_n + \xi_1 \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_1} + \xi_2 \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_2} + \dots + \xi_h \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_h} + \gamma_1 \frac{\partial \Phi'_n}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \frac{\partial \Phi'_n}{\partial \alpha_2} + \dots + \gamma_{h'} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial \alpha_{h'}} = 0, \end{array} \right.$$

zusammen also $h' + h + n$ Gleichungen zur Berechnung der n Correlaten x , der h Verbesserungen ξ und der h' Verbesserungen γ . Der mittlere Fehler einer der Beobachtungsgrößen, also eines der α , ist

$$\text{CXXVIII) } \mu_{\alpha_i} = \sqrt{\frac{[p_{\alpha} \gamma^2]}{p_{\alpha_i} (n - h)}}.$$

Allgemein findet man den mittlern Fehler einer Function F von den $\alpha + \gamma$ und den $x' + \xi$, indem man die γ und die ξ aus den obigen $h' + h + n$ Gleichungen als Functionen der in den Φ' enthaltenen direct beobachteten Größen α darstellt. Ist dann

$$F = F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{h'}),$$

so hat man

$$\mu_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\right)^2 \mu_{\alpha_1}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_2}\right)^2 \mu_{\alpha_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_{h'}}\right)^2 \mu_{\alpha_{h'}}^2},$$

oder

$$\text{CXXIX) } \mu_F = \sqrt{\frac{[p_\alpha r^2]}{n-h}} \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\right)^2 \frac{1}{p_{\alpha_1}} + \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_2}\right)^2 \frac{1}{p_{\alpha_2}} + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_h}\right)^2 \frac{1}{p_{\alpha_h}}}$$

Die weitere Entwicklung darf, nachdem schon so viele Aufgaben ähnlicher Art behandelt sind, dem Leser überlassen bleiben.

246a. Beispiel für die Ausgleichung verbundener Beobachtungsgleichungen. Als Beispiel für die Ausgleichung verbundener Beobachtungsgleichungen wähle ich die schon vorgeführte Aufgabe der Bestimmung der Schwingungsdauer eines schwingenden Körpers, etwa eines Magnets, einer Waage oder eines Pendels. Zur Ableitung der Schwingungsdauer notirt der Beobachter die Durchgangszeit einer mit dem schwingenden Körper verbundenen, also mit diesem schwingenden, Marke vor einer andern anderweitig festgemachten Marke. Das genauere Verfahren bei der Beobachtung wird im zweiten Bande auseinandergesetzt werden.

Ist eine beobachtete Durchgangszeit U_x , eine andere U_{x+1} und die Anzahl der Schwingungen, die der Körper zwischen diesen beiden Durchgangszeiten ausgeführt hat, ν_x , so folgt für die Schwingungsdauer

$$T = \frac{U_{x+1} - U_x}{\nu_x}$$

Wir haben also die etwas allgemeiner als in Art. 242 gestalteten Beobachtungsgleichungen

$$\begin{aligned} T\nu_1 &= U_1 - U_0, \\ T\nu_2 &= U_2 - U_1, \\ T\nu_3 &= U_3 - U_2, \\ &\vdots \\ T\nu_n &= U_n - U_{n-1}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen sind in dieser Form zu schreiben, weil die direct beobachteten Grössen eben die U sind.

Die Gleichungen sind verkettet, und es sind anscheinend $n - 1$ verbindende Grössen vorhanden. Es ist aber sehr leicht, aus ihnen ein anderes Gleichungssystem abzuleiten, welches nur eine einzige verbindende Grösse enthält. Man hat zu dem Behufe lediglich hinter einander 2, 3, 4, ..., n dieser Gleichungen zu addieren und bekommt dann das System

$$\begin{aligned} T\nu_1 &= U_1 - U_0, \\ T\nu_2 + T\nu_1 &= U_2 - U_0, \\ T\nu_3 + T\nu_2 + T\nu_1 &= U_3 - U_0, \\ &\vdots \\ T\nu_n + \dots + T\nu_3 + T\nu_2 + T\nu_1 &= U_n - U_0. \end{aligned}$$

Die ν sind, wie an der betreffenden Stelle des zweiten Bandes gezeigt werden wird, als fehlerfreie Grössen zu betrachten.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \nu'_1, \\ \nu_2 + \nu_1 &= \nu'_2, \\ \nu_3 + \nu_2 + \nu_1 &= \nu'_3, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \nu_n + \dots + \nu_3 + \nu_2 + \nu_1 &= \nu'_n, \end{aligned}$$

so geht das System der Beobachtungsgleichungen über in

$$\begin{aligned} T\nu'_1 &= U_1 - U_0, \\ T\nu'_2 &= U_2 - U_0, \\ T\nu'_3 &= U_3 - U_0, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ T\nu'_n &= U_n - U_0, \end{aligned}$$

und dieses System enthält nur eine verbindende Grösse, nämlich U_0 , die Ausgangszeit für die Beobachtungen. Man sieht auch leicht ein, dass dieses System von vorn herein als System der Beobachtungsgleichungen hätte aufgestellt werden können, denn die ν' haben principiell dieselbe Bedeutung wie die ν , nur dass sie sich auf grössere Zeitintervalle beziehen als diese.

Wir haben jetzt nach der Vorschrift des Satzes 72 die Beobachtungsgleichung so umzuändern, dass wir in ihnen U_0 um seinen wahrscheinlichsten Fehler, wir bezeichnen ihn mit ΔU_0 , vergrössern, und ausserdem auch noch die Annahme zum Ausdruck zu bringen, dass ΔU_0 auch gleich Null sein kann. So bekommen wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \quad \quad \quad - \Delta U_0, \\ T\nu'_1 &= U_1 - U_0 - \Delta U_0, \\ T\nu'_2 &= U_2 - U_0 - \Delta U_0, \\ T\nu'_3 &= U_3 - U_0 - \Delta U_0, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ T\nu'_n &= U_n - U_0 - \Delta U_0, \end{aligned}$$

$n + 1$ Gleichungen, aus denen T und ΔU_0 durch Ausgleichung zu berechnen sind.

Die Gewichte all' dieser Gleichungen sind einander gleich, also gleich 1 zu setzen. Die Normalgleichungen werden hiernach in Uebereinstimmung mit ihrer unter CXXIII) gegebenen allgemeinen Form

$$\begin{aligned} [\nu'\nu']T + [\nu']\Delta U_0 &= [\nu'(U - U_0)], \\ [\nu']T + [1]\Delta U_0 &= [U - U_0]. \end{aligned}$$

Darin haben wir

$$[\sqrt{v}] = 0 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2,$$

$$[v] = 0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n,$$

$$[1] = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n + 1,$$

$$[v(U - U_0)] = 0 + v_1 U_1 + v_2 U_2 + v_3 U_3 + \dots + v_n U_n - U_0(0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n),$$

$$[U - U_0] = 0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n - n U_0 = [U] - (n + 1) U_0,$$

und es ergibt sich

$$T = \frac{(n + 1) [v(U - U_0)] - [v] [U - U_0]}{(n + 1) [v^2] - [v] [v]},$$

$$\Delta U_0 = \frac{[v] [v(U - U_0)] - [v^2] [U - U_0]}{[v] [v] - (n + 1) [v^2]},$$

oder nach einigen Umformungen

$$T = \frac{(n + 1) [vU] - [v] [U]}{(n + 1) [v^2] - [v] [v]},$$

$$\Delta U_0 = - \frac{[v] [vU] - [v^2] [U]}{(n + 1) [v^2] - [v] [v]} - U_0.$$

Zu denselben Formeln ist F. Neumann *) nach der zweiten Lösungsmethode des allgemeinen Problems gelangt.

Die Formel für T giebt den wahrscheinlichsten Wert für die Schwingungsdauer, die für ΔU_0 den wahrscheinlichsten Wert für den Fehler der Ausgangszeit, der ersten Durchgangsbeobachtung. Die wahrscheinlichsten Fehler für die andern Durchgangszeiten können wir auch leicht berechnen.

Führen wir nämlich die Werte für T und ΔU_0 in die Beobachtungsgleichungen ein, so gehen diese über in

$$\frac{\{(n + 1) [vU] - [v] [U]\} v_x - \{[v] [vU] - [v^2] [U]\}}{(n + 1) [v^2] - [v] [v]} = U_x,$$

$$x = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Wenn wir jetzt die wahrscheinlichsten Fehler von U_1, U_2, \dots, U_n mit $\Delta U_1, \Delta U_2, \dots, \Delta U_n$ bezeichnen, haben wir allgemein

$$\Delta U_x = \frac{\{(n + 1) [vU] - [v] [U]\} v_x - \{[v] [vU] - [v^2] [U]\}}{(n + 1) [v^2] - [v] [v]} - U_x,$$

woraus sich die wahrscheinlichsten Fehler der einzelnen U in jedem Falle berechnen lassen.

Besonders zu beachten ist nur, dass $v_0 = 0$ ist.

*) Theoretische Physik herausgegeben von Pape.

Zu einem sehr bemerkenswerten Resultat gelangt man, wenn man alle ΔU addirt, es ist dann nämlich

$$[\Delta U_x] = \frac{\left\{ (n+1)[v'U] - [v'][U] \right\} \left\{ [v'] \right\} - (n+1) \left\{ [v'][v'U] - [v'^2][U] \right\}}{(n+1)[v'^2] - [v'][v']} - [U_x].$$

Der Zähler des ersten Gliedes rechter Hand giebt aber nichts anderes als

$$(n+1)[v'^2][U] - [v'][v'][U].$$

Das ganze erste Glied rechter Hand ist mithin gleich $[U]$, und damit wird

$$[\Delta U_x] = \Delta U_0 + \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 + \dots + \Delta U_n = 0.$$

Nun ist zu beachten, dass die ΔU hier zugleich auch die Fehler der bezüglichen Beobachtungsgleichungen angeben. Wir sehen also, dass bei diesem Ausgleichsverfahren die wahrscheinlichsten Fehler der Beobachtungsgleichungen zusammen 0 ergeben, ganz so, wie wenn es sich um einfache Messungen handelte.

Bezeichnen wir diese Fehler wie früher durch $v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$, so ist also in diesem Falle

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = 0.$$

Wir wollen noch die mittlern Fehler rechnen. Zunächst schreiben wir

$$v_x = \Delta U_x = \frac{\alpha v'_x - \beta}{\gamma} - U_x,$$

und haben

$$[v^2] = [\Delta U^2] = \frac{\alpha^2 [v'^2] + (n+1) \beta^2 - 2\alpha\beta [v']}{\gamma^2} - 2 \frac{\alpha [v'U] - \beta [U]}{\gamma} + [U^2].$$

Nach einigen Reductionen findet man

$$[v^2] = [\Delta U^2] = [U^2] - T[v'U] - (U_0 + \Delta U_0)[U]$$

oder auch

$$[v^2] = [\Delta U^2] = [v'^2] \left((n+1)[U^2] - [U]^2 \right) + [v'] \left([U][v'U] - [v'][U^2] \right) + [v'U] \left([v'][U] - (n+1)[v'U] \right).$$

Die erste Form eignet sich zu numerischen Rechnungen, die zweite zu theoretischen Untersuchungen.

Der mittlere Fehler einer Beobachtungsgleichung ist, weil die Anzahl der überschüssigen Gleichungen $n+1-2$ beträgt,

$$\mu = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}.$$

Um die mittlern Fehler der ausgeglichenen Grössen T und ΔU_0 zu bestimmen, stellen wir unsere frühern Symbole mit den jetzigen Bezeichnungen zusammen. Es ist

$$a_{11} = [v'^2], \quad a_{12} = a_{21} = [v'], \quad a_{22} = [1] = n + 1, \\ l_1 = [v'U] - [v']U_0, \quad l_2 = [U] - (n + 1)U_0,$$

somit

$$\alpha_{12} = \frac{[v']}{[v'^2]}, \\ a_{22,1} = n + 1 - \frac{[v']^2}{[v'^2]} = \frac{(n + 1)[v'^2] - [v']^2}{[v'^2]}; \\ q_1 = \frac{1}{[v'^2]} + \frac{[v']^2}{[v'^2]^2} \frac{[v'^2]}{(n + 1)[v'^2] - [v']^2} = \frac{n + 1}{(n + 1)[v'^2] - [v']^2}, \\ q_2 = \frac{[v'^2]}{(n + 1)[v'^2] - [v']^2},$$

und wir bekommen

$$\mu_T = \sqrt{\frac{n + 1}{(n + 1)[v'^2] - [v']^2}} \sqrt{\frac{[v^2]}{n - 1}}, \\ \mu_{\Delta U_0} = \sqrt{\frac{[v'^2]}{(n + 1)[v'^2] - [v']^2}} \sqrt{\frac{[v^2]}{n - 1}},$$

wo also $[v^2]$ den oben angegebenen Betrag besitzt.

246b. Wir wollen die so erlangten Resultate mit den Resultaten vergleichen, zu welchen wir gelangt wären, wenn wir auf die Verbindung zwischen den Gleichungen keine Rücksicht genommen hätten.

Da die eigentlich beobachteten Grössen nicht die $T_x = \frac{U_x - U_0}{v'_x}$, sondern die $U_x - U_0$ sind, so behalten die Beobachtungsgleichungen die Form

$$v'_1 T = U_1 - U_0, \\ v'_2 T = U_2 - U_0, \\ \vdots \\ v'_n T = U_n - U_0.$$

Indem wir nur T als Unbekannte ansehen, haben wir als einzige Normalgleichung

$$[v'^2] T = [v'(U_1 - U_0)] = [v'U] - [v']U_0,$$

und es wird, wenn wir die so berechnete Schwingungsdauer mit T' bezeichnen,

$$T' = \frac{[v'(U - U_0)]}{[v'^2]} = \frac{[v'U] - [v']U_0}{[v'^2]}.$$

Die Differenz zwischen diesem Betrag und dem vorausgehend angegebenen ist

$$T' - T = [\nu'] \frac{[\nu'^2][U] - (n+1)U_0[\nu'^2] - [\nu'][\nu'U - U_0]}{[\nu'^2]((n+1)[\nu'^2] - [\nu']^2)}$$

oder

$$T' - T = [\nu'] \frac{[\nu'^2][U] - [\nu'][\nu'U]}{[\nu'^2]((n+1)[\nu'^2] - [\nu']^2)} - [\nu'] \frac{U_0}{[\nu'^2]},$$

und das giebt einfach

$$T' - T = \frac{[\nu']}{[\nu'^2]} \Delta U_0.$$

Je grösser hiernach $[\nu'^2]$ im Verhältnis zu $[\nu']$ ist, um so eher ist es gestattet, von der zwischen den einzelnen Gleichungen bestehenden Verbindung abzusehen und die Schwingungsdauer aus den Beobachtungsgleichungen so zu berechnen, wie wenn diese ganz unabhängig von einander wären. $[\nu'^2]$ kann man aber dadurch im Verhältnis zu $[\nu']$ gross machen, dass man zwischen den einzelnen beobachteten Durchgangszeiten beträchtliche Zeitintervalle verfliesen lässt.

Bilden wir weiter die Fehler der Beobachtungsgleichungen und bezeichnen sie in ihren jetzigen Beträgen durch v'_1, v'_2, \dots, v'_n , so wird allgemein

$$v'_x = U_x - U_0 - \frac{[\nu'U] - [\nu']U_0}{[\nu'^2]} v'_x, \quad x = 1, 2, \dots, n,$$

also

$$[\nu'] = \frac{(n+1)[\nu'^2] - [\nu']^2}{[\nu'^2]} \Delta U_0 = ((n+1)[\nu']^2 - [\nu'^2]) \frac{(T' - T)}{[\nu']},$$

und ebenso

$$[\nu'] - [\nu] = \frac{(n+1)[\nu'^2] - [\nu']^2}{[\nu'^2]} \Delta U_0.$$

Ferner ist, indem, wie früher,

$$[U] = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n,$$

$$[U^2] = U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2,$$

$$[(U - U_0)^2] = (U_0 - U_0)^2 + (U_1 - U_0)^2 + (U_2 - U_0)^2 + \dots + (U_n - U_0)^2$$

gesetzt wird, in für die Rechnung bequemer Form

$$[\nu'^2] = [(U - U_0)^2] - T'^2[\nu'^2].$$

Zur Vergleichung dieses Wertes für $[v'^2]$ mit dem oben für $[v^2]$ gefundenen Wert schreibe ich zunächst unter Benutzung der Formel für T'

$$[v'^2] = [U^2] - T' [v' U] - U_0 [U] + T' U_0 [v'] - U_0 [U] + (n+1) U_0^2.$$

Die auf der rechten Seite der Gleichung stehenden drei letzten Glieder können in $(T' [v'] - [U - U_0]) U_0$ zusammengefasst werden, und geben zufolge des Wertes von T' auch $\frac{[v'] [v' (U - U_0)] - [v'^2] [U - U_0]}{[v'^2]} U_0$, und das ist gleich $\Delta U_0 \left(\frac{[v']^2 - (n+1) [v'^2]}{[v'^2]} \right) U_0$.

Damit wird

$$[v'^2] = [U^2] - T' [v' U] - U_0 [U] - \frac{\Delta U_0}{[v'^2]} ((n+1) [v'^2] - [v']^2) U_0,$$

folglich

$$[v'^2] - [v^2] = \Delta U_0 [U] - (T' - T) [v' U] - \frac{\Delta U_0}{[v'^2]} ((n+1) [v'^2] - [v']^2) U_0.$$

Führen wir hierin den Wert von $T' - T$ ein, so gehen die beiden ersten Glieder rechter Hand über in

$$\frac{\Delta U_0}{[v'^2]} ([v'^2] [U] - [v'] [v' U]),$$

das ist in

$$\frac{\Delta U_0}{[v'^2]} (U_0 + \Delta U_0) ((n+1) [v'^2] - [v']^2),$$

und es wird schliesslich

$$[v'^2] - [v^2] = + \frac{(n+1) [v'^2] - [v']^2}{[v'^2]} (\Delta U_0)^2.$$

Nun ist $(n+1) [v'^2] - [v']^2$ unter allen Umständen positiv, somit ist $[v^2]$ jedenfalls kleiner als $[v'^2]$. Da nun zur Berechnung der mittlern Fehler in beiden Fällen die Fehlerquadratsumme mit $n-1$ zu dividieren ist, so gleicht die erste Berechnungsweise die Beobachtungsgleichungen gegen einander jedenfalls mehr aus, als die zweite.

Endlich haben wir noch $\mu_{T'}$ mit μ_T zu vergleichen.

Es war

$$\mu_T = \sqrt{\frac{n+1}{(n+1) [v'^2] - [v']^2}} \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}.$$

Dagegen ist

$$\mu_{T'} = \sqrt{\frac{1}{[v'^2]}} \sqrt{\frac{[v'^2]}{n-1}},$$

somit

$$\mu_{r'} = \mu_T \sqrt{\frac{(n+1)[v'^2] - [v']^2}{(n+1)[v'^2]}} \sqrt{\frac{(n+1)[v'^2] - [v']^2}{[v'^2]} \frac{(\Delta U_0)^2}{[v^2]} + 1},$$

oder unter Beachtung der Formel für den mittlern Fehler von ΔU_0

$$\mu_{r'} = \mu_T \sqrt{1 - \frac{[v']^2}{(n+1)[v'^2]}} \sqrt{\left(\frac{\Delta U_0}{\mu_{\Delta U_0}}\right)^2 \frac{1}{n+1} + 1}.$$

Das Beispiel ist so eingehend behandelt, damit der Leser übersieht, welche Fehler er begeht, wenn er zur Erleichterung der Rechnung von den strengen Regeln der Ausgleichsrechnung abweicht.

Uebrigens sind mit diesem Beispiel eine grosse Anzahl anderer den Physiker besonders interessirender Aufgaben im wesentlichen erledigt. Namentlich hervorzuheben sind die Aufgaben: die Gleichgewichtslage eines schwingenden Körpers (etwa einer Declinationsnadel, einer Waage u. s. f.) das logarithmische Decrement von Schwingungen, die Fadendistanzen in einem Fernrohr durch Passagebeobachtungen zu bestimmen.

XX. Ueber die Form, die man den Beobachtungsgleichungen zu geben hat.

Von den analytischen Entwicklungen der einzelnen Regeln gehen wir zu der praktischen Anwendung derselben über, um, nachdem wir gezeigt haben, welche Vorarbeiten jedem Ausgleichsverfahren vorauszugehen haben, dieses selbst schematisch darzulegen und mit einer Kritik der Beobachtungen und Resultate zu schliessen.

247. Mit den Beobachtungsgleichungen dürfen vor ihrer Ausgleichung keinerlei Operationen vorgenommen werden, die ihre Gewichte beeinflussen. Den Grundstock der ganzen Ausgleichsrechnung bilden die Beobachtungsgleichungen und die Gewichte derselben, über beide sind eine Reihe von wichtigen Bemerkungen zu machen.

In der bestimmten Analysis darf man bekanntlich mit Gleichungen alle möglichen Operationen vornehmen, ohne dadurch die Werte der aus ihnen zu berechnenden Unbekannten irgend wie zu alteriren.

Ganz anders verhält es sich mit der Analysis des Wahrscheinlichen. Besässen ihre Formeln absolute Giltigkeit, wären sie nicht bloß Annäherungen an die wirklichen Verhältnisse, so könnte man auch hier die Beobachtungsgleichungen irgend welchen Operationen unterwerfen. Das ist aber nicht der Fall, und darum gilt als erste Regel

73. *Dass man mit den Beobachtungsgleichungen vor ihrer Ausgleichung keinerlei Veränderungen vornehmen darf, die mit Multiplicationen oder Divisionen, oder irgend andern höhern algebraischen Operationen verbunden*

sind, und Additionen und Subtractionen sind auch nur gestattet, wenn sie einfache Zahlen, oder als fehlerfrei anzusehende Grössen betreffen.

Nimmt man doch solche Veränderungen vor, dann liefert die Ausgleichsrechnung die gesuchten Grössen nicht wie sie für die vorgelegte Function am wahrscheinlichsten sind, sondern wie sie der veränderten Function entsprechen, und man muss bei der veränderten Function stehen bleiben, kann von ihr nicht mehr mit grösster Wahrscheinlichkeit auf die vorgelegte Function schliessen.

248. Wenn die Gleichungen abgeändert werden, müssen auch ihre Gewichte geändert werden, indessen wird das Resultat unsicherer. Man kann zwar den Einfluss einer solchen Veränderung zum Teil dadurch wieder aufheben, dass man auch die Gewichte der Gleichungen entsprechend abändert, sie also für die neue Function berechnet, indessen ist das nur ein Nothbehelf, denn einerseits sind die Gewichte nur selten mit genügender Genauigkeit zu bestimmen und andererseits wissen wir aus der Theorie zusammengesetzter Messungen, dass die Formel, nach der man das Gewicht einer Function ausmittelt, auf strenge Giltigkeit nur bei linearen Functionen Anspruch erheben darf. Nur dann, wenn die Function sowohl in ihrer ursprünglichen, als auch in ihrer abgeänderten Form in Bezug auf die Grössen, welche bei der Gewichtsbestimmung in Frage kommen, linear ist, kann man auf Uebereinstimmung der jeweilig gewonnenen Ergebnisse rechnen. Ein Beispiel soll lehren, worauf es ankommt.

249. Beispiel 1. Wickelt man um ein Stück weiches Eisen einen Kupferdraht und sendet durch diesen Draht einen Strom, so wird das Eisenstück magnetisch. Man hat nun Grund anzunehmen, dass der Magnetismus des Eisens für scharfe Ströme der Stromstärke annähernd proportional anwächst. Ist m der Magnetismus des Eisenstücks (gemessen durch sein Moment), i die Stromstärke, so wird also bis zu einem gewissen Wert von i sein $m = xi$, wo demnach x den unbekanntem Proportionalitätsfactor angiebt.

Man kann nun sowohl m als i messen und bekommt dann zur Bestimmung von x eine Reihe von Beobachtungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_1 &= xi_1, \\ m_2 &= xi_2, \\ &\vdots \\ m_n &= xi_n. \end{aligned}$$

Die Function, um die es sich handelt, ist

$$\Phi = m - xi,$$

wir haben hier $h = 1$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -i$.

Es seien die Gewichte der vorstehenden Beobachtungsgleichungen bezüglich

$$p_1, p_2, \dots, p_n,$$

also wenn p_{m_x} das Gewicht der Bestimmung von m_x , p_{i_x} das der Bestimmung von i_x bedeutet, nach Art. 155

$$p_x = \frac{1}{\frac{1}{p_{m_x}} + \frac{x^2}{p_{i_x}}},$$

wo man für die Unbekannte x bei numerischen Rechnungen irgend einen Näherungswert, etwa $\frac{m_x}{i_x}$, setzen darf.

Wir haben dann, indem wir davon absehen, dass die Ausgleichungsformeln durch successive Annäherung gelöst werden sollen, diese Ausgleichungsformeln, weil wir es mit einer linearen Function zu tun haben, in der unter LXXXII) gegebenen Gestalt anzuwenden. Nun ist

$$a_0 = m, \quad a_1 = -i,$$

also

$$\begin{aligned} a_{11} &= [p a_1 a_1] = p_1 i_1^2 + p_2 i_2^2 + \cdots + p_n i_n^2, \\ l &= -[p a_0 a_1] = p_1 m_1 i_1 + p_2 m_2 i_2 + \cdots + p_n m_n i_n. \end{aligned}$$

Die übrigen a sind nicht vertreten, weil nur ein Coefficient da ist. Es giebt sonach hier nur eine Normalgleichung

$$a_{11} x = l,$$

und damit wird der wahrscheinlichste Wert des Proportionalitätsfactors

$$x = \frac{p_1 m_1 i_1 + p_2 m_2 i_2 + \cdots + p_n m_n i_n}{p_1 i_1^2 + p_2 i_2^2 + \cdots + p_n i_n^2}.$$

Das ist die Formel, die man für den unbekanntenen Proportionalitätsfactor bekommt, wenn man die Beobachtungsgleichungen so ausgleicht, wie sie von vornherein geschrieben werden müssen.

Es könnte aber jemandem einfallen, die Beobachtungsgleichungen dadurch zu vereinfachen, dass er sie durch die entsprechenden i dividirt, denn dadurch bekommt man sofort eine Reihe von Gleichungen für x , nämlich

$$\begin{aligned} x &= \frac{m_1}{i_1}, \\ x &= \frac{m_2}{i_2}, \\ &\vdots \\ x &= \frac{m_n}{i_n}, \end{aligned}$$

wie wenn x n mal direct gemessen wäre, und so würde er das arithmetische Mittel

$$x = \frac{p_1 \frac{m_1}{i_1} + p_2 \frac{m_2}{i_2} + \cdots + p_n \frac{m_n}{i_n}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

für den wahrscheinlichsten Betrag des Proportionalitätsfactors ansehen, der doch mit dem oben als wahrscheinlichst abgeleiteten Wert nicht harmonirt.

Hier lässt sich der scheinbare Widerspruch noch leicht lösen, wenn man beachtet, dass man durch das Dividiren der Beobachtungsgleichungen durch i zugleich die Gewichte dieser Gleichungen verändert hat.

Die Function, die jetzt ausgeglichen werden soll, ist nicht mehr $\Phi = m - xi$, sondern $\psi = \frac{m}{i} - x$. Bezeichnen wir daher mit p' allgemein das Gewicht einer der jetzt als Beobachtungsgleichungen angesehenen Gleichungen, so ist nach Satz 58

$$p' = \frac{1}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial m}\right)^2 \frac{1}{p_m} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial i}\right)^2 \frac{1}{p_i}} = \frac{i^2}{\frac{1}{p_m} + \frac{m^2}{i^2 p_i}}$$

Setzt man wieder angenähert $\frac{m}{i} = x$, so wird hiernach

$$p'_1 = i_1^2 p_1, p'_2 = i_2^2 p_2, \cdots, p'_n = i_n^2 p_n$$

und es folgt aus den abgeänderten Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= \frac{p'_1 \frac{m_1}{i_1} + p'_2 \frac{m_2}{i_2} + \cdots + p'_n \frac{m_n}{i_n}}{p'_1 + p'_2 + \cdots + p'_n} \\ &= \frac{p_1 m_1 i_1 + p_2 m_2 i_2 + \cdots + p_n m_n i_n}{p_1 i_1^2 + p_2 i_2^2 + \cdots + p_n i_n^2}, \end{aligned}$$

ganz so, wie aus den ursprünglichen Gleichungen.

Aber man sieht — und hierauf möchte ich die Aufmerksamkeit des Lesers ganz besonders richten — dass selbst in diesem so einfachen Fall eine strenge Uebereinstimmung nicht zu erzielen ist, denn in der Formel für p_x steht im Nenner

$$\frac{1}{p_{m_x}} + \frac{x^2}{p_{i_x}},$$

in der für p'_x dagegen

$$\frac{1}{p_{m_x}} + \frac{m_x^2}{i_x^2} \frac{1}{p_{i_x}},$$

und der wahre Wert von x braucht nicht mit $\frac{m_x}{i_x}$ übereinzustimmen. Praktisch ist man freilich genötigt, für x so wie so einen Näherungswert einzuführen, man kann dann x durch $\frac{m_x}{i_x}$ ersetzen, aber man muss es nicht, hat man einen Wert für x , dem man mehr Vertrauen schenkt, so wird man diesen, nicht den durch $\frac{m_x}{i_x}$ gegebenen wählen. Hieraus sieht man, in welchem Verhältnis die beiden Lösungswerte zu einander stehen, die zweite gehört zu den Näherungslösungen der ersten Methode, da sie jedoch vorschreibt, dass bei der Berechnung der einzelnen Gewichte jedesmal ein anderer Näherungswert für x genommen werden soll, kann man sie nicht einmal für besonders consequent halten, denn selbstverständlich wird man den Wert von x , den man als der Wahrheit am nächsten kommend erkannt hat, auch überall anwenden.

Nur in einem Falle herrscht vollständige Uebereinstimmung zwischen beiden Methoden, dann nämlich, wenn man p_{i_x} als unbegrenzt gross ansehen darf, wenn also die Genauigkeit der Messungen der Stromstärke die der Messungen des Magnetismus so sehr übertrifft, dass der mittlere Fehler jener gegen den dieser garnicht in Betracht kommt, in diesem Falle ist

$$p_x = p_{m_x},$$

$$p'_x = i_x^2 p_{m_x}$$

und die beiden Ausdrücke stimmen vollständig überein. Hier trifft aber auch die Hauptbedingung für die Anwendbarkeit der zweiten Methode ein, denn sowohl Φ als ψ sind in Bezug auf die Grösse, welche dann bei Berechnung ihrer Gewichte in Frage kommt, linear.

250. Beispiel 2. Ich habe, um noch einen zweiten Fall vorzuführen, in dem man leicht geneigt ist, eine Veränderung mit den Beobachtungsgleichungen vorzunehmen, das voraufgehende Beispiel nur ein wenig zu modificiren. Es möge das betreffende Eisenstück auch noch eigenen Magnetismus besitzen, also solchen, der sich auch noch zeigt, wenn man den Strom ganz aufhebt.

Misst man dann in einem besondern Fall sein Moment, so setzt sich dasselbe aus zwei Theilen zusammen, aus dem ihm an sich zukommenden und aus dem durch den Strom hervorgerufenen Teil und man hat, falls jetzt x_1 jenes Eigenmoment bezeichnet und x_2 den Proportionalitätsfactor zur Ableitung des elektromagnetischen Moments angiebt, bei schwachen Strömen $m = x_1 + x_2 i$.

Hiernach wird

$$\Phi = m - x_1 - x_2 i,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = -1,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = -i$$

so wird nach einer ähnlichen Rechnung wie im Art. 249

$$x_2 = \frac{p'_1 m'_1 i'_1 + p'_2 m'_2 i'_2 + \dots + p'_n m'_n i'_n}{p'_1 i'^2_1 + p'_2 i'^2_2 + \dots + p'_n i'^2_n},$$

oder

$$x_2 = \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \frac{p_x}{p_x + [p]} (m_x [p] - [pm]) (i_x [p] - [pi])}{\sum_{x=1}^{x=n} \frac{p_x}{p_x + [p]} (i_x [p] - [pi]) (i_x [p] - [pi])}.$$

Aus der Mittelgleichung hat man dann noch zur Bestimmung von x_1

$$[p]x_1 = [pm] - x_2 [pi].$$

Zunächst ist zu constatiren, dass diese Ausdrücke für x_1 und x_2 für die Rechnung durchaus nicht einfacher sind, als die nach der allgemeinen Ausgleichung abgeleiteten, sie sind eher noch complicirter. Ferner lehrt der Augenschein, dass sie auch jenen nicht gleich zu setzen sind, wenn man nicht noch gewisse Vernachlässigungen macht. Wenn nun $[p]$ relativ gross gegen jedes der p ist, wird die Grösse $p_x + [p]$ nur wenig von Gleichung zu Gleichung variiren, nimmt man an, dass es überhaupt constant bleibt, so geht der Zähler über in

$$\sum_{x=1}^{x=n} p_x (m_x i_x [p]^2 - m_x [p] [pi] - i_x [pm] [p] + [pm] [pi]),$$

und dieses wird, weil die $[]$ dieselbe Operation anzeigen wie $\sum_{x=1}^{x=n}$, gleich

$$[pmi] [p]^2 - [pm] [p] [pi] - [pi] [pm] [p] + [p] [pm] [pi],$$

oder einfach

$$[p] ([pmi] [p] - [pi] [pm]).$$

Für den Nenner findet man in ganz derselben Weise

$$- [p] ([pi] [pi] + [p] [pi^2])$$

und es wird

$$-x_2 = \frac{[pmi] [p] - [pi] [pm]}{[pi] [pi] - [p] [pi^2]},$$

$$x_1 = \frac{[pmi] [pi] - [pm] [pii]}{[pi] [pi] - [p] [pi^2]},$$

und das stimmt allerdings mit den aus den ursprünglichen Normalgleichungen gefundenen Werten überein.

Das zweite, anscheinend einfachere Verfahren führt also, richtig angewendet, erstens zu complicirtern Rechnungen und stimmt zweitens in seinen Resultaten mit dem Ausgleichsverfahren an den ungeänderten Beobachtungsgleichungen nur annäherungsweise überein, und zwar entspricht es diesem um so genauer, je mehr Beobachtungsgleichungen vorhanden sind, und je gleichmässiger zugleich diese Beobachtungsgleichungen in ihrer Schärfe sind. Aber die Resultate der Ausgleichung an den ungeänderten Beobachtungsgleichungen sind, wie in Art. 230 nachgewiesen, überhaupt die wahrscheinlichsten, denn wir fanden dort, dass die Wahrscheinlichkeit für den Betrag einer Grösse nie so gross wird, als wenn man diesen Betrag nach den Formeln rechnet, die wir dort an den ungeänderten Beobachtungsgleichungen abgeleitet haben. Man hat also nach keiner Richtung hin einen Grund, solche Veränderungen vorzunehmen. Noch viel weniger natürlich sind Veränderungen gestattet oder auch nur für bequemere Rechnung vorteilhaft, wenn die Functionen complicirter sind, als hier angenommen ist.

Ich habe hier absichtlich von den angeführten Rechenarten als von lediglich „Veränderungen“, die man an den Beobachtungsgleichungen vornimmt, gesprochen, um das Ausgleichsverfahren zu vereinfachen. Von einem höhern Standpunkt könnte man vielleicht diese Rechenarten, die also im wesentlichen darin bestehen, entweder die Anzahl der Beobachtungsgleichungen zu verringern oder die zu bestimmenden Coefficienten successive zu eliminiren, als neue selbständige Ausgleichsverfahren betrachten, aber wenn man zugiebt, dass man es mit zufälligen Fehlern zu tun hat und von der Richtigkeit des Principis vom arithmetischen Mittel oder von der des Gesetzes der grossen Zahlen überzeugt ist, muss man auch den angeführten Satz von der Wahrscheinlichkeit der ausgeglichenen Grössen zu Recht bestehen lassen, und dann sind diese Rechenarten als selbständige besondere Ausgleichsverfahren im allgemeinen zurückzuweisen.

Wir können jetzt den Satz 73, nachdem wir an dem Beispiel gesehen haben, worauf es eigentlich bei solchen Veränderungen in den Beobachtungsgleichungen ankommt, auch einfacher so fassen:

74. *Vor der Ausgleichung hat man sich an den Beobachtungsgleichungen und, was dasselbe ist, an den Fehlergleichungen aller Veränderungen, die die bezüglichlichen Gewichte dieser Gleichungen mit verändern, zu enthalten.*

Naturgemäss entsteht jetzt die Frage, was man in jedem besondern Falle als eigentliche Form der Beobachtungsgleichungen anzusehen hat. Wären wir im Stande, in jedem Fall die Gewichte nach absolut strengen Regeln zu berechnen, so würde der voraufgehende Satz und mit ihm diese Frage ihre Bedeutung verlieren, dann wäre es gleichgiltig, ob man die vorgelegte Function oder irgend eine andere, aus ihr abgeleitete ausgleicht, und man könnte den Beobachtungsgleichungen jede beliebige Form verleihen. Da dies nun nicht der Fall ist, so gewinnt auch diese Frage eine gewisse Wichtigkeit.

251. Form der ausgleichenden Beobachtungsgleichungen bei praktischen Rechnungen; Beispiel. In der Praxis pflegt man die betreffende Function nach dem Element zu entwickeln, auf welches die Untersuchung sich ganz besonders bezieht, und dieses Verfahren ist stets dann anzuwenden, wenn man durch die Untersuchung weiter nichts bezweckt, als das betreffende Element in jedem Falle aus vorgeschriebenen Beträgen der andern Elemente mit grösster Sicherheit berechnen zu können. Gewöhnlich gleicht man dann auch nicht die Coefficienten aus, die in der ursprünglichen Function stehen, sondern andere, aus ihnen zusammengesetzte, die sich durch die Auflösung nach dem hervorgehobenen Element so zu sagen von selbst einstellen. Aus den wahrscheinlichsten Werten dieser kann dann aber nicht auf die wahrscheinlichsten Werte jener geschlossen werden, es sind vielmehr die ausgeglichenen Beträge der neuen Coefficienten lediglich in Bezug auf die neue Form der Beobachtungsgleichungen wahrscheinlichst.

Nehmen wir wieder unser Beispiel in seiner ersten einfachen Form auf, so wird die Function, um die es sich handelte,

$$\Phi = m - xi = 0.$$

Wollen wir aus Messungen der Stromstärke auf die Stärke des Magnetismus des Eisenstückes schliessen, so ist die obige Form von Φ völlig am Platz, denn sie fällt mit der zusammen

$$m = xi,$$

die eben die gesuchte Grösse berechnen lehrt, und es ist hier der wahrscheinlichste Wert von x der

$$x = \frac{p_1 m_1 i_1 + p_2 m_2 i_2 + \dots + p_n m_n i_n}{p_1 i_1^2 + p_2 i_2^2 + \dots + p_n i_n^2},$$

woselbst

$$p_x = \frac{1}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{p_{m_x}} + \frac{1}{p_{i_x}}}, \quad x = 1, 2, \dots, n.$$

ist. Es kann aber auch sein, dass man aus der Stärke des durch einen Strom inducirten Magnetismus die Intensität dieses Stromes erschliessen will. In diesem Falle würde man die obige Gleichung schreiben

$$i = \frac{1}{x} m.$$

Durch die Ausgleichung ergibt sich nicht der Wert von x , sondern direct nur der von $\frac{1}{x}$, setzt man $\frac{1}{x} = y$, so wird hiernach

$$\Phi = i - ym = 0,$$

und es ist der wahrscheinlichste Wert von y

$$y = \frac{p'_1 m_1 i_1 + p'_2 m_2 i_2 + \dots + p'_n m_n i_n}{p'_1 m_1^2 + p'_2 m_2^2 + \dots + p'_n m_n^2},$$

woselbst

$$p'_x = \frac{1}{\frac{1}{p_{i_x}} + \frac{y^2}{p_{m_x}}}$$

ist.

Wollten wir jetzt wieder der Gleichung ihre ursprüngliche Form geben, so hätten wir

$$x = \frac{p'_1 m_1^2 + p'_2 m_2^2 + \dots + p'_n m_n^2}{p'_1 m_1 i_1 + p'_2 m_2 i_2 + \dots + p'_n m_n i_n},$$

und dieser Wert stimmt analytisch durchaus nicht mit dem früher für x als wahrscheinlichst gefundenen, er ist also auch nicht der wahrscheinlichste Wert des x . Numerisch freilich kann die obige Formel unter Umständen dasselbe ergeben wie die richtige. Im allgemeinen darf man aber nicht einmal für den so einfachen Fall einer Grösse und ihres reciproken Wertes schliessen, dass das Reciproke des wahrscheinlichsten Betrages dieser Grösse gleich dem wahrscheinlichsten Betrage des Reciproken derselben ist.

Wir wollen ein Paar Zahlen einführen.

J. Müller *) fand, als er einen cylindrischen Stab von weichem Eisen, dessen Länge 560 mm und dessen Dicke 44 mm betrug, mit 372 Windungen eines Kupferdrahtes umgab,

bei der Stromstärke	45,633	den Magnetismus	1,3631,
„ „ „	19,810	„ „	0,5946,
„ „ „	9,093	„ „	0,2730.

Ueber die Genauigkeit dieser Beobachtungen ist nichts ausgesagt. Ich nehme an, dass die Stromstärken mit absoluter Genauigkeit gemessen sind, den Bestimmungen des Magnetismus aber wenigstens in allen drei Fällen dieselbe Schärfe zukommt. Es wird dann

$$p_{i_x} = \infty, \quad p_{m_x} = 1$$

zu setzen sein, und damit hat man

$$p_1 = p_2 = p_3 = 1,$$

$$p'_1 = p'_2 = p'_3 = \frac{1}{y^2}$$

*) G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektrizität. 1883. Bd. III. Seite 414.

und nach der Berechnung aus der Function $\Phi = m - xi = 0$

$$x = \frac{45,633 \cdot 1,3631 + 19,810 \cdot 0,5946 + 9,093 \cdot 0,2730}{(45,633)^2 + (19,810)^2 + (9,093)^2} = 0,02990.$$

Hingegen finden wir nach der Berechnung aus $\Phi = i - ym = 0$

$$x = \frac{1}{y} = \frac{(1,3631)^2 + (0,5946)^2 + (0,2730)^2}{45,633 \cdot 1,3631 + 19,810 \cdot 0,5946 + 9,093 \cdot 0,2730} = 0,02990.$$

Hier ist also der Betrag von x aus dem wahrscheinlichsten Wert von y berechnet, derselbe wie er aus der ursprünglichen Formel gefunden wird. Nachdem also für das betreffende Eisenstück und die betreffende es umgebende Spirale

$$m = 0,0229i$$

gefunden ist, darf man hier später durch Messung des inducirten Magnetismus auch die Stromstärke nach der Formel

$$i = \frac{1}{0,0229} m = 33,448 m$$

berechnen, wenn man es nicht für zweckmässig findet, diese Stromstärke direct zu bestimmen.

Nehmen wir jetzt eine andere Versuchsreihe. Wiedemann*) fand in entsprechenden Messungen an einem Eisencylinder von 250 mm Länge und 20 mm Dicke, der von gegen 128 Windungen eines Kupferdrahtes umwickelt war, durch den der Strom ging,

bei der Stromstärke	169,0	den Magnetismus	291,6,
" "	"	346,2	" " 615,9,
" "	"	395,9	" " 716,8,
" "	"	425,8	" " 762,1,
" "	"	494,8	" " 892,3,
" "	"	550,3	" " 1007,6,

Ueber die Genauigkeit mache ich dieselben Annahmen, wie bei den Versuchen von J. Müller, dann wird direct berechnet

$$x = 1,80475,$$

und aus y bestimmt

$$x = 1,80621.$$

Diese beiden Beträge stimmen schon nicht mehr ganz überein. So würde für $m = 1007,6$ folgen, mit dem ersten Wert von x

$$i = 558,3,$$

mit dem zweiten

$$i = 557,8,$$

*) l. c. pag. 489,

der letztere Betrag ist natürlich der wahrscheinlichere, und wenn wir i aus m berechnen wollen, haben wir zu setzen

$$i = \frac{1}{1,80621} m = 0,55364m,$$

wogegen zur Berechnung von m aus i die Formel

$$m = 1,80475i$$

anzuwenden ist.

Gehen wir jetzt zu dem allgemeinen Fall über, und nehmen an, dass das Element, um dessen Abhängigkeit von den andern Elementen uns ganz besonders zu tun ist, g ist und ferner, dass uns an nichts weiter liegt, als dieses Element mit grösster Sicherheit berechnen zu können, so haben wir die Function $\Phi = 0$ nach g aufzulösen, sie also in der Form

$$g - F(a, b, \dots, f; y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

zu schreiben.

Meist sind die Functionen von vornherein in dieser Form gegeben, und dann hat man die Beobachtungen nach den Coefficienten y auszugleichen. Es tritt dieses namentlich da ein, wo der Zusammenhang des Elements g mit den andern kein innerer, aus irgend welchen theoretischen Ansichten über die mechanische oder sonstige Begriffsbestimmung der einzelnen Elemente abgeleiteter, sondern ein mehr zufälliger ist. So ist das Gewicht eines Körpers nichts, was irgend etwas mit dem Barometerstand, der Temperatur der den Körper umgebenden Luft oder ihrem Feuchtigkeitsgehalt zu tun hätte. Findet doch, wie die Erfahrung lehrt, ein Zusammenhang zwischen diesem Gewicht und den genannten andern Grössen statt, so rührt das daher, weil wir unsere Wägungen nicht im luftleeren Raum ausführen. Täten wir das, so würde der Zusammenhang sofort verschwinden. Ganz anders ist das Verhältnis zwischen der Leitungsfähigkeit eines Körpers und seiner Temperatur, wir mögen hier anstellen, was wir wollen, es gelingt uns nicht die Leitungsfähigkeit von der Temperatur unabhängig zu machen, ja wir wissen nicht einmal anzugeben, was wir zu tun haben, um hier den Zusammenhang aufzuheben.

252. Ausgleichen von Beobachtungsgleichungen, die nach der darzustellenden Grösse entwickelt sind. In solchen Fällen nun, wo der Zusammenhang zwischen den einzelnen Elementen ein wirklich physikalischer ist, ist die Function in ihrer Form meist vorgeschrieben, und wenn man dann die Function nach dem hervorgehobenen Element entwickelt, hängen die neuen Coefficienten von den ursprünglichen ab. Hier verfährt man am strengsten, wenn man die neuen Coefficienten überhaupt nicht einführt, sondern die ursprünglichen stehen lässt, ersetzt man diese doch durch die neuen Coefficienten, weil dadurch der Ausdruck für das gesuchte Element besonders einfach und zu numerischen Rechnungen bequem wird, so hat man noch folgenden Umstand zu beachten.

Da die neuen Coefficienten aus den ursprünglichen zusammengesetzt sind, kann es kommen, dass sie nicht alle von einander unabhängig sind, und es tritt das immer dann ein, wenn ihre Anzahl h' grösser ist, als die der ursprünglichen Coefficienten. Man kann dann diese neuen Coefficienten nicht mehr nach dem einfachen Ausgleichsverfahren berechnen, weil dieses auf der Voraussetzung einer Unabhängigkeit der einzelnen zu bestimmenden Grössen von einander begründet ist. Die Regeln, nach denen man in diesem Fall zu verfahren hat, sind aber schon in Cap. XVIII dargelegt. Ich sehe hier von solchen Verhältnissen ab und nehme an, dass die Function in der Form

$$\Phi = g - F(a, b, \dots, f; x_1, x_2, \dots, x_h) = 0$$

gegeben ist, sei es, dass die x die alten Coefficienten sind, oder dass ihre Anzahl nicht grösser als die dieser sich herausstellt.

Für das hervorgehobene Element lasse ich seine Bezeichnung stehen, für die andern Elemente führe ich entsprechend den in Art. 212 gewählten Symbolen die Bezeichnungen

$$a_1, a_2, \dots, a_i$$

ein und nenne ein System von ihnen beobachteter zusammengehöriger Werte

$$g_x, a_1^{(x)}, a_2^{(x)}, a_3^{(x)}, \dots, a_i^{(x)}.$$

Dann sind die Beobachtungsgleichungen

$$\begin{aligned} g_1 &= F(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_i^{(1)}; x_1, x_2, \dots, x_h) = F_1, \\ g_2 &= F(a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_i^{(2)}; x_1, x_2, \dots, x_h) = F_2, \\ &\vdots \\ g_n &= F(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_i^{(n)}; x_1, x_2, \dots, x_h) = F_n; \end{aligned}$$

die Fehlergleichungen entweder

$$\begin{aligned} v_1 &= F_1 - g_1, \\ v_2 &= F_2 - g_2, \\ &\vdots \\ v_n &= F_n - g_n, \end{aligned}$$

oder nach Einführung von Näherungswerten für die Coefficienten

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(F'_1 + \xi_1 \frac{\partial F'_1}{\partial x'_1} + \xi_2 \frac{\partial F'_1}{\partial x'_2} + \dots + \xi_h \frac{\partial F'_1}{\partial x'_h} \right) - g_1, \\ \text{CXXX)} \quad v_2 &= \left(F'_2 + \xi_1 \frac{\partial F'_2}{\partial x'_1} + \xi_2 \frac{\partial F'_2}{\partial x'_2} + \dots + \xi_h \frac{\partial F'_2}{\partial x'_h} \right) - g_2, \\ &\vdots \\ v_n &= \left(F'_n + \xi_1 \frac{\partial F'_n}{\partial x'_1} + \xi_2 \frac{\partial F'_n}{\partial x'_2} + \dots + \xi_h \frac{\partial F'_n}{\partial x'_h} \right) - g_n; \end{aligned}$$

Nachdem man die wahrscheinlichsten Beträge der Coefficienten, sowie ihre mittlern Fehler gerechnet hat, ist man im Stande, g oder irgend eine Function dieses Elements für jedes vorgeschriebene System der andern Elemente zu berechnen, man schreibt daher das Resultat der Untersuchung in der Form

$$\text{CXXXIV)} \quad g = F(A, B, \dots, F; x_1 \pm \mu_{x_1}, x_2 \pm \mu_{x_2}, \dots, x_h \pm \mu_{x_h}).$$

Der mittlere Darstellungsfehler von g ist somit nach Satz 58

$$\text{CXXXV)} \quad \mu_g = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial g_1}\right)^2 \mu_{g_1}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial g_2}\right)^2 \mu_{g_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial g_n}\right)^2 \mu_{g_n}^2},$$

er variirt in seiner Grösse, wie man sieht, mit den Beträgen der variabeln Elemente.

So ist also, um es nochmals hervorzuheben, zu rechnen, wenn es lediglich auf die wahrscheinlichste Darstellung eines bestimmten Elements durch eine Reihe anderer ankommt.

253. Aufstellung der Beobachtungsgleichungen nach theoretischen Gesichtspunkten. Dem Physiker wird aber häufig weniger an der wahrscheinlichsten Darstellung eines besondern Elements gelegen sein, als vielmehr an dem wahrscheinlichsten Zusammenhang zwischen einer Reihe von Elementen ohne Hervorhebung eines besondern Elements. In diesem Falle behält man die Function in der Form bei, die man ihr aus theoretischen Gründen zusprechen muss. Man muss sich dann natürlich klar sein, welches diese Form ist, und kann ein Eingehen auf ihre analytische Ableitung, verbunden mit einer Discussion der physikalischen Bedeutung ihrer einzelnen Glieder, nicht vermeiden.

So könnten zunächst Zweifel entstehen, in welcher Form man das Snellius'sche Brechungsgesetz zu schreiben hat, wenn man aus einer Reihe von Beobachtungen über den Einfallswinkel eines Lichtstrahls gegen die ebene Grenzfläche eines Körpers und den Brechungswinkel Schlüsse in Bezug auf die Brechung des betreffenden Körpers ziehen will. Beachtet man aber, dass in der Gleichung

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n$$

n nicht den absoluten, sondern den relativen Brechungsexponenten angiebt, relativ in Bezug auf das Verhalten des Körpers gegen das an ihn anstossende Medium, aus welchem der Lichtstrahl kommt, und dass n eigentlich durch v_1, v_2 zu ersetzen ist, wo v_1 die Geschwindigkeit des Lichtstrahls im umgebenden Medium, v_2 die im betreffenden Körper ist, so hat man zunächst

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Aber in physikalischen Gleichungen sollen alle Glieder auch physikalische Bedeutung haben, werden also nicht abstracte Zahlen sein, wie das mit den Gliedern der obigen Gleichung der Fall ist. Die physikalisch richtige Form dieser Gleichung könnte also noch sein

$$\frac{\sin i}{v_1} = \frac{\sin r}{v_2}$$

oder

$$\frac{v_1}{\sin i} = \frac{v_2}{\sin r}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass nur die erste Form massgebend ist, denn multiplicirt man beiderseits mit einer Grösse a und versteht unter a den Abstand zwischen den Auftreffpunkten zweier paralleler Strahlen gegen die Grenzebene des betreffenden Körpers, so bedeutet $a \sin r$ den Weg, den der erste Strahl schon in dem Körper zurückgelegt hat, ehe der zweite noch an die Grenzebene dieses Körpers gelangt ist, und $a \sin i$ giebt den Weg, den dieser letztere Strahl bis zur Grenzebene noch zurückzulegen hat zu der Zeit, wo der erste Strahl diese Grenzebene gerade trifft. $\frac{a \sin i}{v_1}$ ist dann die Zeit, die der zweite Strahl noch braucht, um die Grenzebene zu erreichen, $\frac{a \sin r}{v_2}$ ist die Zeit, die der erste Strahl schon in dem betreffenden Körper verweilt, bis der zweite Strahl diesen Körper trifft, und das Snellius'sche Brechungsgesetz besagt nichts weiter als das Selbstverständliche, dass diese beiden Zeiten einander gleich sind. Denkt man sich für a die Längeneinheit gesetzt, so nennt man

$$n_1 = \frac{a}{v_1}, \quad n_2 = \frac{a}{v_2}$$

den absoluten Brechungsexponenten des Körpers, aus dem der Lichtstrahl kommt, bezüglich des Körpers, in welchen er gebrochen wird, und die richtige Gleichung ist

$$n_1 \sin i - n_2 \sin r = 0.$$

Ich habe schon bemerkt, Art. 244, dass man solche in Bezug auf die Unbekannten homogene Functionen nicht auszugleichen vermag, man also auch nicht n_1 und n_2 , sondern nur $\frac{n_1}{n_2}$ oder $\frac{n_2}{n_1}$ berechnen kann. Sucht man die letztere durch n zu bezeichnende Grösse, so hat man also zu schreiben

$$n \sin r - \sin i = 0,$$

und in dieser Form, nicht in der

$$n - \frac{\sin i}{\sin r} = 0,$$

sind die Beobachtungsgleichungen anzuwenden.

Also :

75. *Wo es darauf ankommt, nicht sowohl die in Bezug auf die Verbindung eines bestimmten Elements mit einer Reihe anderer wahrscheinlichsten Coefficienten zu berechnen, als vielmehr die in Bezug auf den physikalischen Zusammenhang zwischen einer Anzahl von Elementen wahrscheinlichsten zu ermitteln, da ist die betreffende Function in der ihr durch die Theorie angewiesenen Form anzuwenden. Und wenn eine theoretische Ableitung der Function nicht angängig ist, hat man letztere wenigstens so zu schreiben, dass die physikalische Bedeutung bei jedem ihrer einzelnen Glieder klar hervortritt.*

Es ist hier im letzten Satz absichtlich besonderer Nachdruck darauf gelegt worden, dass man bei jedem der Glieder seine physikalische Bedeutung soll erkennen können. Schreibt man zum Beispiel das Boyle-Gay-Lussac'sche Gesetz, um aus einer Reihe von Beobachtungen zusammengehöriger Beträge des Druckes P , des Volumens V und der Temperatur T die Constante R zu berechnen, in der Form

$$P - R \frac{T}{V} = 0,$$

so hat zwar das erste Glied eine klare physikalische Bedeutung, aber was man sich unter dem Quotienten einer Temperatur durch ein Volumen vorstellen soll, ist nicht recht abzusehen. So wie man aber die Form

$$PV - RT = 0$$

anwendet, gewinnen beide Glieder physikalische Bedeutung. Das erste Glied ist eine Arbeitsgrösse, das zweite eine Temperatur, und nach unsern jetzigen Anschauungen eine lebendige Kraft, also auch eine Arbeitsgrösse.

Ein zweiter Grund ist der, dass man in physikalischen Untersuchungen sehr oft in dem Suchen nach constanten Verhältnissen zwischen bestimmten Grössen die Beobachtungsgleichungen ummodellt. In solchen Fällen hat man stets, nachdem die Existenz eines constanten Verhältnisses erkannt ist, die betreffenden Beobachtungsgleichungen wieder in ihrer natürlichen Form zu schreiben. Man kann zum Beispiel, um zu sehen, ob das Verhältniss zwischen der Intensität i eines eine Spule durchlaufenden Stromes und des durch ihn in einen in die Spule eingeschobenen weichen Eisenkern inducirten Magnetismus m constant ist, aus den Beobachtungen zusammengehöriger Werte von i und m die Verhältniszahlen

$$\frac{m_1}{i_1}, \quad \frac{m_2}{i_2}, \quad \frac{m_3}{i_3}, \dots, \quad \frac{m_n}{i_n}$$

bilden, wenn sich aber schon gezeigt hat, dass alle diese Zahlen nahezu gleich sind und keinen Gang haben, dann darf man nicht die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{i_1} - x &= 0, \\ \frac{m_2}{i_2} - x &= 0, \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \frac{m_n}{i_n} - x &= 0, \end{aligned}$$

ausgleichen, sondern muss es mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} m_1 - i_1 x &= 0, \\ m_2 - i_2 x &= 0, \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ m_n - i_n x &= 0, \end{aligned}$$

tun, weil nur diesen ein bestimmter physikalischer Sinn zukommt.

Umgekehrt hat man aus einer Reihe von bei derselben Temperatur T_0 ausgeführten Messungen des Druckes und Volumens eines Gases zur Bestimmung des R , trotzdem nicht direct die Grösse PV beobachtet ist, sondern die Grössen P und V einzeln bestimmt sind, die Beobachtungsgleichungen in der Form

$$PV - RT_0 = 0$$

zu schreiben. Man bekommt dann RT_0 als arithmetisches Mittel aller aus den Beobachtungen zusammengehöriger Werte von P und V berechneten Arbeitsgrössen PV .

XXI. Ueber die Bestimmung der Gewichte der Beobachtungsgleichungen.

Ein zweiter Punkt, der die ganze Aufmerksamkeit und oft den grössten Scharfsinn des Rechners herausfordert, betrifft die numerische Bestimmung der Gewichte, die man den Beobachtungsgleichungen zuzuschreiben hat.

254. Berechnung der Gewichte aus den mittlern Fehlern der beobachteten Elemente. Gewichte sind, wie schon öfter bemerkt, Relativzahlen, haben alle Beobachtungsgleichungen gleiches Gewicht, so setzt man dieses Gewicht gleich 1, besitzen die bezüglichen Gewichte einen gemeinschaftlichen Factor, so darf man diesen fortlassen.

Strenge Formeln für die Berechnung der Gewichte kennt man nicht, solche würden auch viel zu verwickelt sein, wenn aber die Beobachtungen

der einzelnen Elemente relativ gut sind, darf man das Gewicht einer Gleichung nach dem Schema

$$p = \frac{1}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial a}\right)^2 \mu_a^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial b}\right)^2 \mu_b^2 + \dots + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial g}\right)^2 \mu_g^2}$$

berechnen, wo man in den Φ die unbekanntenen Coefficienten durch Näherungsbeträge ersetzen kann.

Wo also die mittlern Fehler der beobachteten Elemente bekannt sind, hat es keine Schwierigkeit, sich wenigstens eine genäherte Kenntniss von den Gewichten zu verschaffen. Gute Untersuchungen sind hiernach stets so auszuführen, dass man in den Stand gesetzt wird, für die beobachteten Elemente einigermassen entsprechende mittlere Fehler anzugeben. Hat man zum Beispiel das Element a bei derselben Grösse a_x etwa v mal beobachtet, so dass sein wahrscheinlichster Wert wird

$$a_x = \frac{a_{x1} + a_{x2} + \dots + a_{xv}}{v},$$

so wird

$$\mu_{a_x} = \sqrt{\frac{(a_x - a_{x1})^2 + (a_x - a_{x2})^2 + \dots + (a_x - a_{xv})^2}{v(v-1)}}.$$

Je öfter ein solches Element gemessen wird, desto genauer ist der berechnete mittlere Fehler, daher hat man jedes Element bei jedem System von Werten, das man den Elementen erteilt, tunlichst oft zu bestimmen.

Doch ist dieser mittlere Fehler selbst noch mit einer mittlern Unsicherheit behaftet, die nach Art. 220 unter Festhaltung unserer Bezeichnungsweise

$$\mu_{\mu_{a_x}} = \mu_{a_x} \frac{0,708}{\sqrt{v-1}} = \mu_{a_x} \frac{1}{\sqrt{2(v-1)}}$$

ist, und wenn wir diesem mittlern Fehler ein bestimmtes Gewicht zuschreiben wollen, haben wir dasselbe gleich

$$p_\mu = \frac{v-1}{\mu^2(0,708)^2}$$

und mit Fortlassung des Zahlenfactors gleich

$$p_\mu = \frac{v-1}{\mu^2}$$

zu setzen.

255. Befreiung von systematischen Verfälschungen, Ausgleichung der beobachteten mittlern Fehler der Gleichungen in sich zur Ableitung genauerer Gewichte. Bei der numerischen Auswertung dieser mittlern Fehler ist nun zu beachten, dass wir es hier lediglich mit zufälligen Fehlern zu tun haben sollen. Ehe wir also an diese Auswertung gehen, müssen wir die Einzelmessungen des betreffenden Elements, und damit auch die übrig bleibenden Fehler von systematischen Versehen befreien. Wie man in einer Bestimmung einer aus mehreren Einzelmessungen bestehenden Reihe durch den Gang der übrig bleibenden Fehler auf die Existenz systematischer Verfälschungen schliessen kann, ist in dem Art. 107 gezeigt worden, man hat für jede Beobachtungsgleichung auf die ausgeführten Messungen und ihre übrig bleibenden Fehler die dort gegebenen Regeln anzuwenden. So wird man eine Anzahl etwa vorhandener systematischer Verfälschungen zu erkennen und die Messungen von ihnen zu befreien im Stande sein. Aber bei Untersuchungen ist auch die gleichzeitige Betrachtung aller in den einzelnen Beobachtungsgleichungen für das betreffende Element übrig gebliebenen Fehler von hoher Bedeutung, und sie führt oft genug zur Erkennung systematischer Versehen, wenn die Regeln zur Discussion einer einzelnen Beobachtungsreihe nicht ausreichen. Man hat sich dabei sowohl an die übrig bleibenden Fehler, wie an die aus ihnen abgeleiteten mittlern Fehler zu halten.

In Bezug auf die letztern kommt es vor allen Dingen darauf an, ob die auf Gewichtseinheit reducirten mittlern Fehler der einzelnen Beobachtungsgleichungen einen Gang zeigen oder nicht. Der Gang muss dann hervortreten, wenn man die Beobachtungsgleichungen in Bezug auf die Zunahme oder Abnahme derjenigen Grösse ordnet, die einen solchen Gang verschulden kann. Findet ein solcher Gang statt, dann sind entweder die in den einzelnen Stadien der Untersuchung angewendeten Methoden nicht von gleicher Schärfe gewesen, oder es hat eine systematische Verfälschung der Messungen stattgefunden. Man wird das letztere anzunehmen gezwungen sein, wenn man keinen Grund anzugeben vermag, warum die Messungsmethode bei einem System von Beträgen der Elemente eine schärfere gewesen sein soll, als bei dem andern.

Solche Fälle können in der That leicht eintreten, wie aus den folgenden Beispielen zu ersehen.

256. Beispiel 1. Man habe eine Mischung hergestellt aus Wasser und einer so leicht verdunstenden Flüssigkeit wie Alkohol und bestimme die Dichtigkeit dieser Mischung bei verschiedenen Temperaturen. Da aus der Mischung der Alkohol rascher verdampft als das Wasser, wird dieselbe immer dichter, wächst ferner die Verdampfung an Energie mit der Temperatur an, so verdampft auch noch in demselben Zeitraum um so mehr, je höher temperirt die Mischung ist. Zwei Dichtigkeitsbestimmungen werden dann um so mehr von einander abweichen, bei je höherer Temperatur sie angestellt sind, und so kann es kommen, dass der mittlere Fehler einer

Dichtigkeitsbestimmung mit der Temperatur, bei welcher diese Bestimmung ausgeführt wird, ansteigt.

Der Gang der Discussion ist folgender:

Nachdem man für alle Beobachtungsgleichungen die übrig bleibenden Fehler des betreffenden Elements abgeleitet hat, ordnet man diese mittlern Fehler in jeder Beobachtungsgleichung nach dem Verlauf der Grösse, die sie systematisch verfälscht haben soll, und sieht zu, ob die Annahme einer systematischen Verfälschung sich gerechtfertigt zeigt, was dadurch hervortritt, dass die Fehler in allen Beobachtungsgleichungen denselben Gang aufweisen. Dann bringt man bei der Discussion der so angeordneten übrig bleibenden Fehler für jede Beobachtungsgleichung die Kriterien in Anwendung, die in der Theorie der einfachen Messungen auseinandergesetzt sind.

Bleiben wir bei unserm obigen Beispiel. Es ist eine Mischung von etwa 97 Theilen Alkohol und 3 Theilen Wasser auf ihre Dichtigkeitsänderungen mit wachsender Temperatur untersucht worden. Die Mischung befand sich in einem hohen, relativ engen Standglas, welches nur während der Versuche offen war, sonst durch einen aufgeschliffenen Glasdeckel geschlossen stand. Man brachte die Mischung der Reihe nach auf Temperaturen in der Nähe von 10, 15, 20, 25, 30° C., wog jedesmal in derselben einen gläsernen Schwimmkörper von bekanntem absoluten Gewicht, bestimmtem Volumen und gemessener Ausdehnung und las zugleich an einem in die Mischung eingesenkten Thermometer die Temperatur ab.

Der für eine systematische Verfälschung der Fehler massgebende Factor ist hier die Zeit, denn da während eines Versuches eine Verdampfung der Mischung vor sich gehen konnte, musste die Flüssigkeit in jedem folgenden Versuche bei gleicher Temperatur dichter erscheinen. Bildet man dann das Mittel der bei einer Temperatur für die Dichtigkeit erhaltenen Bestimmungen, so werden die Abweichungen dieser einzelnen Bestimmungen von dem Mittel, die übrig bleibenden Fehler nach beiden Seiten an Grösse zunehmen, und ausserdem nach der einen Seite anderes Zeichen, als nach der andern haben. Ein derartiges Verhalten hätten wir also zu erwarten, wenn die Annahme einer systematischen Verfälschung richtig ist, und umgekehrt, wenn ein solches Verhalten sich zeigt, haben wir auf eine systematische Verfälschung zu schliessen.

Wir haben daher die Messungen bei jeder Temperatur nach der Folge, in der sie ausgeführt sind, die ersten zuerst, die letzten zuletzt anzuordnen.

Es ergab sich nun

bei der Temperatur	9,60° C.	die Dichtigkeit	{ 0,817998
			{ 0,818070
" "	"	15,43° C.	" "
			{ 0,813256
			{ 0,813269
" "	"	19,98° C.	" "
			{ 0,809237
			{ 0,809297

bei der Temperatur 25,10° C. die Dichtigkeit	{	0,804850
	{	0,804870
" " " 29,70° C. " "	{	0,800854
	{	0,800887

Indem man jetzt aus den Bestimmungen bei jeder Temperatur das Mittel bildet und die Abweichungen gegen dieses Mittel in dem Sinne

Rechnung — Beobachtung

rechnet, erhält man in Einheiten der sechsten Decimale für die übrig bleibenden Fehler bei den angegebenen Temperaturen

$$+ 36, - 36; + 6, - 7; + 30, - 30; + 10, - 10; + 17, - 16.$$

Es fällt sofort auf, dass jedesmal die erste Zahl positiv, die zweite negativ ist, und wirklich ist ja auch die zuerst bestimmte Dichtigkeit bei allen Temperaturen kleiner, als die zweit gemessene, es hat also in der Tat eine Verdampfung stattgefunden, und die übrig bleibenden Fehler sind nicht rein zufällig, die aus ihnen gerechneten mittlern Fehler also ebenfalls nicht. Stellen wir uns noch vor, dass überhaupt keine zufällige und sonstige Fehler vorgefallen sind, so müssten wir die Abweichungen von den bezüglichen Mitteln lediglich der Verdampfung zuschreiben, und es betrüge diese Verdampfung bei den betreffenden Temperaturen

$$72, 13, 60, 20, 33.$$

Ein Gang ist in diesen Zahlen nicht zu ersehen, und da die einzelnen Versuche immer gleich viel Zeit in Anspruch nahmen, haben wir auch keinen Grund, die Verdampfung als mit steigender Temperatur wachsend anzusehen.

Nun werden in Wirklichkeit jene Zahlen noch durch die zufälligen Fehler verfälscht, in ihrem Mittel darf man aber diese Fehler wegen ihres zufälligen Charakters als sich gegenseitig aufhebend ansehen. Damit haben wir für die Verdampfung eine relativ sichere Zahl, nämlich

$$\frac{72 + 13 + 60 + 20 + 33}{5} = 40$$

erlangt, und indem wir sie bei jeder Abweichung zur Hälfte in Rechnung ziehen, gehen diese Abweichungen über in

$$+ 16, - 16; - 14, + 13; + 10, - 10; - 10, + 10; + 3, - 4,$$

die wir dann als die eigentlichen zufälligen Fehler ansehen dürfen.

Das obige Beispiel zeigt klar, wie man aus der Betrachtung der übrig bleibenden Fehler aller Beobachtungsgleichungen auf systematische Verfälschung derselben schliessen kann; aus den zwei Beobachtungen bei einer Temperatur hätten wir den systematischen Fehler nicht mit Sicherheit entdecken können. Zu einer weitem Verfolgung eignet sich aber dieses Beispiel

nicht, weil einerseits zu wenig Messungen vorliegen, und andererseits die nach Verbesserung der übrig bleibenden Fehler resultirenden Zahlen schon zu gering sind, um Anspruch auf besondere Genauigkeit erheben zu dürfen. Wenn nun, wie in diesem Falle selbst, die nach Verbesserung für das systematische Versehen übrig bleibenden Fehler immer noch einen bestimmten Gang aufweisen — sie werden hier mit wachsender Temperatur kleiner —, das Beobachtungsmaterial aber zu gering ist, um diesem Gang einige Sicherheit zuschreiben zu dürfen, dann muss man auf entsprechende Untersuchungen zurückgreifen und zusehen, ob der Gang nur zufällig eingetreten ist, oder in andern Beobachtungen begründet ist. Ich führe an, dass für eine Wasser-Alkoholmischung von etwa 63% ganz entsprechende Bestimmungen ausgeführt sind, es ergab sich hier nach der Zeitfolge geordnet

bei der Temperatur 10,15	die Dichtigkeit	{	911 740
		{	911 764
" " "	15,35 " "	{	907 353
		{	907 421
" " "	24,83 " "	{	899 915
		{	900 018
" " "	29,82 " "	{	895 741
		{	895 784

Die Differenzen gegen die bezüglichlichen Mittelwerte sind

$$+ 12, - 12; + 34, - 34; + 51, - 52; + 21, - 22.$$

Wieder hat jedesmal die erste Differenz das positive, die zweite das negative Zeichen, also auch hier ist die Mischung durch Verdampfung immer dichter geworden. Setzen wir diese Verdampfung gleich

$$\frac{24 + 68 + 103 + 43}{4} = 60,$$

und verteilen sie zur Hälfte auf die bezeichneten Differenzen, so gehen dieselben über in

$$- 18, + 18; + 4, - 4; + 21, - 21; - 9, + 9.$$

Hier existirt nicht bloß keine Regelmässigkeit der Zeichen mehr, sondern auch die absolute Grösse der einzelnen Zahlen ist anscheinend an kein Gesetz gebunden, wir dürfen daher auch in Ermangelung genauere Untersuchungen bei der für 97% erhaltenen verbesserten Fehlerreihe den Gang in der Grösse als zufällig ansehen, denn beide Untersuchungen sind genau mit denselben Hilfsmitteln und unter denselben Umständen geführt worden.

257. Beispiel 2. Wir nehmen ein zweites Beispiel, in dem wir nicht bloß aus den Zeichen, sondern auch aus den Grössen der übrig bleibenden Fehler Schlüsse ziehen können.

Zwei Thermometer, deren eines, ich bezeichne es als Normalthermometer, durch eine vorausgegangene Untersuchung sehr genau in Bezug auf seine Angaben untersucht worden war, wurden mit einander in Wasser von den bezüglichen Temperaturen 6,0; 12,5; 18,8; 25,4 Grad verglichen. Die Thermometer waren jedesmal so tief in das Wasser eingesenkt, dass die Quecksilberfäden vollständig in der Flüssigkeit eintauchten, und die Gefäße in gleicher Tiefe unter der Oberfläche der Flüssigkeit sich befanden. Die Anzahl der Vergleichen betrug bei den bezüglichen Temperaturen 9, 8, 10, 8, vor jeder Vergleichung ist die Flüssigkeit gehörig durchgerührt worden, um locale Temperaturverschiedenheiten tunlichst auszumerzen.

Nachdem die Angaben des Normalthermometers auf richtige Temperaturen reducirt waren, fanden sich als Differenzen zwischen beiden Thermometern in Hundertteilen des Centesimalgrades bei der Temperatur

6° C.

+ 1, - 4, - 2, - 4, - 6, - 2, - 3, - 6, - 1,

12,5° C.

+ 3, + 4, + 1, + 2, + 3, + 1, + 1, 0,

18,8° C.

+ 39, + 39, + 40, + 40, + 38, + 38, + 38, + 38, + 39, + 38,

25,4° C.

+ 41, + 43, + 42, + 42, + 42, + 42, + 40, + 43.

Die Mittel dieser Zahlenreihen sind in Tausendteilen des Grades ausgedrückt, bezüglich

- 30, + 19, + 387, + 419,

und wenn die Beobachtungsfehler als rein zufällig zu betrachten sind, geben sie die Correctionen, die man an die Ablesungen des zweiten Thermometers anzubringen hat, um aus den Angaben dieses Thermometers bei den hervor gehobenen Temperaturen die richtige Temperatur ableiten zu können.

Nun sind die Differenzen der in den bezüglichen Vergleichungsreihen erhaltenen Einzelresultate gegen die entsprechenden Mittelresultate wieder in Tausendteilen des Grades ausgedrückt bei der Temperatur

6° C.

- 40, + 10, - 10, + 10, + 30, - 10, 0, + 30, - 20,

12,5° C.

- 11, - 21, + 9, - 1, - 11, + 9, + 9, + 19,

18,8° C.

- 3, - 3, - 13, - 13, + 7, + 7, + 7, + 7, - 3, + 7,

25,4° C.

+ 9, - 11, - 1, - 1, - 1, - 1, + 19, - 11.

Für sich betrachtet, giebt keine dieser Reihen bestimmten Anlass zur Vermutung systematischer Fehler. Da nun ferner alle Reihen in ganz gleicher Weise erhalten sind, kann man auch aus den Zeichen der übrig bleibenden Differenzen im Ganzen keine bestimmten Schlüsse in Bezug auf systematische Verfälschung der Zahlen ziehen.

Es fällt aber bei näherer Vergleichung dieser Differenzenreihen sofort auf, dass die in ihnen vertretenen Zahlen absolut genommen, im allgemeinen um so kleiner sind, einer je höhern Temperatur sie angehören, und dieses tritt noch klarer hervor, wenn wir für die einzelnen Reihen die durchschnittlichen, oder besser die mittlern Fehler berechnen.

Wir finden so den mittlern Fehler einer einzelnen Vergleichung

$$\begin{array}{llll} \text{bei der Temperatur } 6^\circ & \text{zu } \sqrt{\frac{4200}{8}} = 23, \\ \text{„ „ „ } 12,5^\circ & \text{„ } \sqrt{\frac{1288}{7}} = 14, \\ \text{„ „ „ } 18,4^\circ & \text{„ } \sqrt{\frac{610}{9}} = 8, \\ \text{„ „ „ } 25,4^\circ & \text{„ } \sqrt{\frac{688}{7}} = 10. \end{array}$$

Die mittlern Fehler nehmen erst ab und dann anscheinend wieder zu, zeigen jedenfalls einen ausgesprochenen Gang. Es fragt sich nun, ob sich ein plausibler Grund für diesen Gang angeben lässt, und ein solcher ist in der Tat vorhanden. Das Zimmer, in welchem die Vergleichen ausgeführt worden sind, hatte eine Temperatur von etwa 16°C . Während der Vergleichen bei 6 und $12,5$ Grad musste also die Temperatur des Wassers steigen, während der bei $18,8$ und bei $25,5$ fallen, wie nach dem Ausweis der Protokolle auch tatsächlich geschehen ist. Es betrug aber der Temperaturanwuchs während der Vergleichen bei 6 etwa 0,2; während der bei $12,5$ etwa 0,15; der Temperaturabfall dagegen während der Vergleichen bei $18,8$ etwa 0,07, während der bei $25,4$ ebenfalls 0,07.

Stellt man jetzt die mittlern Fehler diesen Temperaturänderungen gegenüber, so hat man

Mittlerer Fehler	Temperaturänderung
0,023° C.	+ 0,20° C.
0,014 „	+ 0,15 „
0,008 „	— 0,07 „
0,010 „	— 0,07 „

Die beiden Reihen entsprechen sich also ziemlich genau. Die Correspondenz ist aber keine bloß äußerliche. Die Thermometer brauchen immer einige Zeit, ehe sie die Temperatur ihrer Umgebung annehmen, ändert sich nun diese Temperatur während des Versuchs, so folgen die

Thermometer nicht unmittelbar, bei niedrigen aber steigenden Temperaturen bleiben sie zurück, bei hohen aber fallenden gehen sie vor. Je kleiner das Gefäss eines Thermometers und je dünner seine Wandung ist, um so rascher folgt es Temperaturschwankungen, um so empfindlicher ist es, das als Normalthermometer bezeichnete Instrument hatte aber ein kleineres Gefäss und dünnere Wandung als das mit ihm verglichene, es ist sicher empfindlicher als das andere mit ihm verglichene gewesen, und so ist denn dieses in den beiden ersten Temperaturen gegen jenes in seinen Angaben wahrscheinlich zurückgeblieben, und bei den beiden höheren ihm gewissermassen vorgelaufen, wengleich es sich auch hier factisch um ein Zurückbleiben handelte.

Nachdem wir also einen innern Grund für die Correspondenz der beiden Reihen gefunden haben, können wir daran denken, die mittlern Fehler von den ihnen anhaftenden systematischen Verfälschungen zu befreien.

Dem obigen zufolge sind die mittlern Fehler Functionen der während der einzelnen Vergleichungsreihen vor sich gegangenen Temperaturveränderungen. Bezeichnen wir diese mit δ , so hätten wir also

$$\mu = f(\delta).$$

Die Art der Function kennen wir nicht; um für die Function einen Ausdruck angeben zu können, müsste uns eine ausgedehnte Reihe von physikalischen Grössen zu Gebote stehen, wie die Wärmeleitungsfähigkeit, Wärmecapacität, das Volumen, die Wanddicke der betreffenden Thermometer, die Entfernungen der Gefässe von den Begrenzungen der Flüssigkeit u. s. f. Da es sich aber nur um näherungsweise richtige Zahlen handelt, setzen wir nach dem gewöhnlichen Gebrauch eine Potenzreihe an, schreiben also

$$\mu = x_1 + x_2 \delta + \dots,$$

und bleiben hier schon bei der ersten Potenz stehen. Wir haben dann vier Beobachtungsgleichungen

$$2,3 = x_1 + x_2 \cdot 20,$$

$$1,4 = x_1 + x_2 \cdot 15,$$

$$0,8 = x_1 - x_2 \cdot 7,$$

$$1,0 = x_1 - x_2 \cdot 7,$$

woselbst die bestimmten Zahlen Hundertteile des Grades angeben, und müssen x_1 und x_2 durch Ausgleichung nach den gegebenen Regeln bestimmen.

Was die Gewichte dieser Gleichungen anbetrifft, so haben wir dieselben, indem wir von den Fehlern der δ absehen und lediglich die Fehler der μ in Rücksicht ziehen, nach Art. 254 gemäss der Formel

$$p_\mu = \frac{\nu - 1}{\mu^2}$$

zu berechnen und erhalten

$$p_{\mu_1} = \frac{8}{23^2} = 0,015,$$

$$p_{\mu_2} = \frac{7}{14^2} = 0,036,$$

$$p_{\mu_3} = \frac{9}{8^2} = 0,140,$$

$$p_{\mu_4} = \frac{7}{10^2} = 0,070,$$

oder auch, da Gewichte Relativzahlen sind, 2, 4, 14, 7 und noch bequemer, indem wir sie alle durch 3 dividirt denken, mit genügender Näherung 1, 1, 5, 2.

Aus der ersten und vierten Gleichung leiten wir als erste Näherungswerte ab

$$x'_1 = 1,3, \quad x'_2 = 0,05.$$

Bezeichnen wir dann wie früher durch ξ_1 und ξ_2 die Verbesserungen der Näherungswerte, so haben wir zur Bestimmung dieser Verbesserungen die vier Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \xi_1 + \xi_2 \cdot 20, \quad \text{Gewicht } 1, \\ -0,65 & = & \xi_1 + \xi_2 \cdot 15, \quad \text{,, } 1, \\ -0,15 & = & \xi_1 - \xi_2 \cdot 7, \quad \text{,, } 5, \\ +0,05 & = & \xi_1 - \xi_2 \cdot 7, \quad \text{,, } 2. \end{array}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1.1^2 + 1.1^2 + 5.1^2 + 2.1^2 = 9, \\ a_{12} &= 1.1.20 + 1.1.15 - 5.1.7 - 2.1.7 = -14, \\ a_{21} &= a_{12} = -14, \\ a_{22} &= 1.20^2 + 1.15^2 + 5.7^2 + 2.7^2 = +968, \\ l_1 &= 1.1.0 - 1.1.0,65 - 5.1.0,15 + 2.1.0,05 = -1,3, \\ l_2 &= 1.0.20 - 1.15.0,65 + 5.7.0,15 - 2.7.0,05 = -5,2, \\ l_3 &= 1.0^2 + 1.(0,65)^2 + 5.(0,15)^2 + 2.(0,05)^2 = 0,54, \end{aligned}$$

und die Normalgleichungen werden

$$\begin{aligned} 9\xi_1 - 14\xi_2 &= -1,3, \\ -14\xi_1 + 968\xi_2 &= -5,2, \\ \alpha_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} &= -1,56, \quad \chi_1 = \frac{l_1}{a_{11}} = -0,14, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{22,1} = a_{22} - a_{12}\alpha_1 &= 946, \quad l_{2,1} = l_2 - a_{12}\chi_1 = -7,2, \quad l_{3,1} = l_3 - l_1\chi_1 = 0,358, \\ \alpha_{12,0} = \alpha_{12} &= -1,56 \quad \chi_{1,0} = \chi_1 = -0,14, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_2 &= \frac{l_{2,1}}{a_{22,1}} = -0,0077, \\ \chi_{2,1} &= \chi_{1,0} - a_{12,0} \chi_2 = -0,156, \\ \chi_{2,0} &= \chi_2 = -0,0077, \\ l_{3,2} &= l_{3,1} - l_{2,1} \chi_2 = 0,303,\end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \chi_{2,1} = -0,156, \quad x_1 = x'_1 + \xi_1 = 1,14, \\ \xi_2 &= \chi_{2,0} = -0,008, \quad x_2 = x'_2 + \xi_2 = 0,042.\end{aligned}$$

Die übrig bleibenden Fehler sind bezüglich

$$v_i = +0,31, \quad v_2 = -0,38, \quad v_3 = -0,05, \quad v_4 = +0,15,$$

somit wird

$$[pv^2] = 0,298,$$

und das stimmt mit dem für $l_{3,2}$ erhaltenen Wert, 0,303, genügend genau überein, womit die numerische Rechnung hinreichend controlirt ist.

Was die ausgeglichenen mittlern Fehler der Beobachtungsgleichungen anbetrifft, so ist zunächst der mittlere Fehler einer Beobachtungsgleichung, der das Gewicht 1 zukommt, gleich

$$\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-m}} = \sqrt{\frac{0,298}{2}} = 0,39,$$

den vier Gleichungen kommen hiernach die mittlern Fehler zu

$$0,39; \quad 0,39; \quad 0,18; \quad 0,27.$$

Endlich haben wir zur Berechnung der mittlern Fehler von x_1 und x_2

$$\begin{aligned}q_1 &= \frac{1}{a_{11}} + \frac{a_{12}^2}{a_{22,1}} = 0,11; \quad \mu_{x_1} = \sqrt{0,11} \cdot 0,39 = 0,13, \\ q_2 &= \frac{1}{a_{22,1}} = 0,001; \quad \mu_{x_2} = \sqrt{0,001} \cdot 0,39 = 0,013,\end{aligned}$$

beide Constanten sind also verhältnismässig sicher bestimmt, und man hat in Teilen des Grades

$$\mu = (0,011 \pm 0,0013) + (0,042 \pm 0,013)\delta,$$

wo auch δ in Teilen des Grades zu messen ist, und die grösste Unsicherheit des so bestimmten μ etwa $0,004^\circ \text{C}$. beträgt.

Der constante Teil 0,011 ist als der zufällige mittlere Fehler zu betrachten, der variable $0,042 \delta$ als die systematische Verfälschung desselben.

Wissen wir nun gar nichts über das Verhältnis der beiden Thermometer zu einander, so sind wir auch nicht in der Lage, die Resultate in den

einzelnen Beobachtungsreihen für diese systematische Verfälschung zu corrigieren und die ganze Rechnung hat dann nur die Bedeutung, dass wir jetzt durch die gewonnene Formel

$$\mu = 0,011 + 0,042 \delta$$

den mittlern Fehler einer einzelnen Vergleichung mit grösserer Sicherheit berechnen können, als es aus den einzelnen Vergleichungen selbst möglich ist, und wenn wir aus den Beobachtungen eine Gleichung ableiten wollten, die die Correctionen c des zweiten Thermometers als Function F seiner Ablesungen t darstellt, also eine Gleichung von der Form $c = F(t)$, so hätten wir den aus den vier Versuchsreihen resultirenden vier Beobachtungsgleichungen die bezüglichen Gewichte zu erteilen

$$p_x = \frac{n_x}{(0,011 + 0,042 \delta_x)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial t_x}\right)^2 \mu_{t_x}^2}, \quad x = 1, 2, 3, 4,$$

wo also n_x die Anzahl der bei der Temperatur t_x ausgeführten Vergleichungen ist, und μ_{t_x} den mittlern Fehler in der Ablesung der wahren Temperatur anzeigt.

In dem von uns behandelten Fall wissen wir aber, dass das Normalinstrument bei weitem empfindlicher war, als das mit ihm verglichene Instrument, wir dürfen jenes diesem gegenüber als absolut empfindlich betrachten, und dann rührt der Teil $0,042 \delta$ her allein von dem Zurückbleiben des zu bestimmenden Instruments. Es sei nun c_x die wegen der eruirten systematischen Verfälschung an das Resultat der Vergleichungen bei t_x anzubringende Correction, dann ist, weil die Resultate in den Differenzen

Ablesung des Normals — Ablesung des zu untersuchenden Thermometers bestehen, c_x mit dem negativen Zeichen hinzuzufügen. Die übrig bleibenden Fehler der betreffenden Vergleichungsreihe bekommen also alle den Zuwachs $-c_x$, und indem wir die so von der systematischen Verfälschung befreiten Fehler mit $v_1^{(x)}$, $v_2^{(x)}$, ... bezeichnen, haben wir für den oben berechneten systematisch verfälschten mittlern Fehler einer Vergleichung

$$\mu_x = \sqrt{\frac{(v_1^{(x)})^2 + (v_2^{(x)})^2 + \dots + 2c_x(v_1^{(x)} + v_2^{(x)} + \dots) + n_x c_x^2}{n_x - 1}}.$$

Aber es ist

$$\begin{aligned} v_1^{(x)} + v_2^{(x)} + \dots &= 0, \\ \mu_x &= 0,011 + 0,042 \delta_x, \end{aligned}$$

somit bekommen wir zur Bestimmung der gesuchten Correction c_x die Gleichung

$$c_x^2 = \frac{n_x - 1}{n_x} \left\{ (0,011 + 0,042 \delta_x)^2 - \frac{(v_1^{(x)})^2 + (v_2^{(x)})^2 + \dots}{n_x - 1} \right\}.$$

$\sqrt{\frac{(v_1^{(x)})^2 + (v_2^{(x)})^2 + \dots}{n_x - 1}}$ ist der unverfälschte mittlere Fehler, wir dürfen

diese Grösse aber nicht ohne weiteres gleich dem constanten Teil von μ , gleich 0,011 setzen, denn das betreffende Thermometer ist jedesmal zurückgeblieben, braucht bei keiner Vergleichung genau die Temperatur der umgebenden Flüssigkeit besessen zu haben, es kann also der mittlere Fehler auch noch durch einen constanten systematischen Fehler verfälscht sein. Wir wollen nun annehmen, dass jedesmal bei der ersten Vergleichung der betreffenden Reihe so anhaltend gerührt worden ist, dass bei dieser ersten Vergleichung beide Thermometer genau die Temperatur der Flüssigkeit hatten, später soll nicht weiter gerührt worden sein, so wird die Constante im Ausdruck für μ allein den unverfälschten mittlern Fehler geben, wir haben dann

$$\frac{(v_1^{(x)})^2 + (v_2^{(x)})^2 + \dots}{n_x - 1} = (0,011)^2$$

und

$$c_x = \frac{n_x - 1}{n_x} \sqrt{0,0018 \delta_x^2 + 0,0009 \delta_x}$$

Für die um diese c_x verbesserten Resultate sind aber die Gewichte

$$p_x = \frac{n_x}{0,011^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial t_x}\right)^2 \mu_{t_x}^2},$$

und wenn man diese verbesserten Resultate ausgleicht, hat man auch diese Gewichte in Rechnung zu bringen.

258. Mittlere Unsicherheit der berechneten Gewichte. Jedenfalls unterliegt die Berechnung der Gewichte principiell keinen Schwierigkeiten, wenn man nur für jede Beobachtungsgleichung und jedes Element die genügende Anzahl von Beobachtungen hat. Als genügend hat man aber diese Anzahl der Beobachtungen dann anzusehen, wenn der mittlere Fehler sich aus ihr mit hinreichender Sicherheit berechnen lässt. Nun beträgt die mittlere Unsicherheit eines aus ν Messungen resultirenden mittlern Fehlers μ , wie wir wissen

$$\frac{\mu}{\sqrt{2(\nu - 1)}},$$

zeigt sich also diese Unsicherheit als im Verhältnis zum mittlern Fehler zu gross, so wird unser Verfahren, die Gewichte aus den mittlern Fehlern zu berechnen, illusorisch. Schreiben wir jetzt diese Unsicherheit auch in die Formel für das Gewicht hinein und bezeichnen die Anzahl der Messungen, die zur Bildung der x ten Beobachtungsgleichung an einem Element ausgeführt sind, durch ν , dem wir das Symbol des Elements als Index beifügen, so haben wir

$$\frac{1}{p_x} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_x}\right)^2 \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}(\nu_{a_x} - 1)}\right)^2 \mu_{a_x}^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial b_x}\right)^2 \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}(\nu_{b_x} - 1)}\right)^2 \mu_{b_x}^2 + \dots,$$

und es beträgt das Quadrat der mittlern Unsicherheit von $\frac{1}{p_x}$ näherungsweise

$$\mu_{\frac{1}{p_x}}^2 = 2 \left\{ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_x}\right)^4 \frac{\mu_{a_x}^4}{\nu_{a_x} - 1} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial b_x}\right)^4 \frac{\mu_{b_x}^4}{\nu_{b_x} - 1} + \dots + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial g_x}\right)^4 \frac{\mu_{g_x}^4}{\nu_{g_x} - 1} \right\},$$

also die mittlere Unsicherheit von p_x

$$\mu_{p_x} = \pm p_x^2 \sqrt{2} \left\{ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_x}\right)^4 \frac{\mu_{a_x}^4}{\nu_{a_x} - 1} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial b_x}\right)^4 \frac{\mu_{b_x}^4}{\nu_{b_x} - 1} + \dots + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial g_x}\right)^4 \frac{\mu_{g_x}^4}{\nu_{g_x} - 1} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Nehmen wir zunächst nur ein einzelnes Element vor, etwa a_x , so ist in Bezug auf dieses Element der mittlere Fehler des Gewichts

$$\mu_{p_x} = \pm \frac{p_x^2 \sqrt{2}}{\sqrt{\nu_x - 1}} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_x}\right)^2 \mu_{a_x}^2.$$

Aus den mittlern Fehlern berechnet, ist mithin die durch die mittlere Unsicherheit eines Elements a_x hervorgebrachte mittlere Unsicherheit des Gewichts einer Beobachtungsgleichung,

wenn das betreffende Elemente 1 mal gemessen ist:	$\frac{0}{0}$	$p_x^2 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_x}\right)^2 \mu_{a_x}^2,$
" " " " 2 " " "	1,41	$p_x^2 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_x}\right)^2 \mu_{a_x}^2,$
" " " " 3 " " "	1,00	$p_x^2 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_x}\right)^2 \mu_{a_x}^2,$
" " " " 4 " " "	0,81	$p_x^2 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_x}\right)^2 \mu_{a_x}^2,$
" " " " 5 " " "	0,71	$p_x^2 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_x}\right)^2 \mu_{a_x}^2,$
" " " " 6 " " "	0,63	$p_x^2 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_x}\right)^2 \mu_{a_x}^2,$
" " " " 7 " " "	0,58	$p_x^2 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_x}\right)^2 \mu_{a_x}^2,$
" " " " 8 " " "	0,53	$p_x^2 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_x}\right)^2 \mu_{a_x}^2,$
" " " " 9 " " "	0,50	$p_x^2 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_x}\right)^2 \mu_{a_x}^2,$
" " " " 10 " " "	0,48	$p_x^2 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_x}\right)^2 \mu_{a_x}^2,$

259. Wann die Gewichte noch aus den mittlern Fehlern der Elemente berechnet werden dürfen. Denken wir uns jetzt, um einen ungefähren Ueberblick über die ganze mittlere Unsicherheit des berechneten Gewichts zu gewinnen, weil es sich um kleine Grössen handelt, die $\frac{\partial\Phi}{\partial a_x} \mu_{a_x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial b_x} \mu_{b_x}$, ... und ebenso die ν_{a_x} , ν_{b_x} , ... durch durchschnittliche Werte ersetzt, so geht die ganze mittlere Unsicherheit über in $\frac{p_x \sqrt{2}}{\sqrt{\nu-1}}$ und aus der vor-
 aufstehenden Tabelle ergibt sich die ganze mittlere Unsicherheit, wenn wir $\left(p_x \frac{\partial\Phi}{\partial a_x} \mu_{a_x}\right)^2$ ersetzen durch p_x . Hieraus folgt für eine genäherte Schätzung der Sicherheit bei der Gewichtsrechnung: sind die Elemente nur einmal gemessen, so kann man das Gewicht aus den mittlern Fehlern überhaupt nicht berechnen; in der Tat werden dann die mittlern Fehler selbst, weil sie in der Form $\frac{1}{9}$ auftreten, unbestimmt. Man muss für jedes Element im Durchschnitt mindestens 3 Messungen ausführen, wenn man eine Sicherheit vom vollen Betrag des Gewichts haben will, und auf die Hälfte des ganzen Betrages sinkt die Unsicherheit erst, wenn man durchschnittlich für jedes Element 9 Messungen ausgeführt hat; die Unsicherheit kann aber noch grösser ausfallen, wenn man von den durchschnittlichen zu den wahren Verhältnissen übergeht.

Ausserdem wächst die Unsicherheit proportional dem Gewichte selbst. Letzterer Umstand ist nicht von so grosser Bedeutung. Jedenfalls darf man aber nicht die Gewichte der Beobachtungsgleichungen aus ihren mittlern Fehlern ableiten, wenn nicht in jeder Beobachtungsgleichung die Elemente durchschnittlich mindestens 3 mal gemessen sind.

260. Zuziehung anderweitig ausgeführter Untersuchungen zur Ableitung der mittlern Fehler. Oft ist man in der Lage, die mittlern Fehler der Messungen zwar nicht aus der gerade geführten Untersuchung, aber aus anderweitig angestellten Beobachtungen zu ermitteln.

Dieses Mittel, welches also in dem Zurückgreifen auf andere Untersuchungen besteht, ist das bei weitem wirksamste; es kann überall da angewendet werden, wo man die Untersuchungen mit denselben Instrumenten ausführt, und bedingt also ein gewisses Studium dieser Instrumente. Zum Beispiel wird man, nachdem man eine Waage einige Zeit hindurch benutzt hat, ziemlich im Klaren sein, welchen mittlern Fehler man bei einer Wägung eines ihrer Tragfähigkeit entsprechenden Körpers zu erwarten hat. Ist man dann einmal nicht in der Lage gewesen, so viele Wägungen auszuführen, als zur sichern Ableitung des mittlern Fehlers nötig sind, so wird man den vorausgesehenen mittlern Fehler als auch für diese Wägung geltend annehmen dürfen.

Es ist ferner, um ein anderes Beispiel anzuführen, die Temperatur bei der angeführten Untersuchung über die Ausdehnung des Alkohols in den einzelnen Bestimmungen ein- oder zweimal abgelesen worden. Daraus lässt

sich natürlich auf den mittlern Fehler einer der in der betreffenden Untersuchung ausgeführten Temperaturbestimmungen nicht schliessen, aber das benutzte Thermometer war gerade dasjenige, welches, wie in dem zweiten Beispiel dargelegt, mit dem Normalthermometer verglichen wurde, und aus dieser Vergleichung konnten wir für diesen mittlern Fehler eine bestimmte Formel ableiten. Dieser mittlere Fehler bezog sich auf eine einzige Temperaturmessung, ist also, will man den mittlern Fehler der für die betreffende Reihe geltenden mittlern Temperatur kennen, durch die Quadratwurzel aus der Anzahl der hier vorgenommenen Ablesungen zu dividiren.

Natürlich müssen dann aber auch in der vorliegenden Untersuchung für das betreffende Element genau dieselben Verhältnisse herrschen, wie in der, auf die man sich bezieht, und wenn das nicht der Fall ist, muss man wenigstens diese Verhältnisse auf einander zurückzuführen wissen.

Indessen bildet dieses Mittel doch immer nur einen Notbehelf, und es ist viel mehr zur Controle als bei der eigentlichen Rechnung in Anwendung zu bringen.

261. Ableitung der Gewichte aus den Messungsanzahlen. Wo weder die Anzahl der Messungen zur Bestimmung der mittlern Fehler ausreicht, noch anderweitige Untersuchungen herangezogen werden können, bestimmt man die Gewichte der Beobachtungsgleichungen nicht aus den mittlern Fehlern der Elemente, sondern aus den Gewichten dieser.

Ersetzt man nämlich jeden mittlern Fehler durch das Reciproke des Gewichts, so wird

$$p_x = \frac{1}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_x}\right)^2 \frac{1}{p_{a_x}} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial b_x}\right)^2 \frac{1}{p_{b_x}} + \dots + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial g_x}\right)^2 \frac{1}{p_{g_x}}}$$

Die Gewichte der Elemente sind nun zwar auch streng genommen durch die mittlern Fehler definirt, aber aus der Theorie der einfachen Messungen wissen wir, dass man in gewisser Näherung das Gewicht einer Bestimmung auch der Anzahl der Messungen, deren Resultat sie ist, gleich setzen kann.

Bezeichnen wir also wie früher durch $v_{a_x}, v_{b_x}, \dots, v_{g_x}$ wie oft das Element a, b, \dots, g bei seinem Betrage a_x, b_x, \dots, g_x gemessen worden ist, so hat man

$$p_x = \frac{1}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_x}\right)^2 \frac{1}{v_{a_x}} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial b_x}\right)^2 \frac{1}{v_{b_x}} + \dots + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial g_x}\right)^2 \frac{1}{v_{g_x}}}$$

und man nimmt dann an, dass der mittlere Fehler, nachdem er aus einer Anzahl von Messungen berechnet ist, sich nicht mehr ändert, wenn man zur Berechnung noch andere Messungen hinzuzieht. Offenbar kann eine solche Annahme nur gerechtfertigt erscheinen, wenn man es mit einer grossen Anzahl von Messungen zu tun hat, denn wenn in der Definitions-

gleichung des mittlern Fehlers im Zähler schon viele v^2 und im Nenner schon viele Einheiten stehen, ist es gleichgiltig, ob man oben noch ein v^2 und unten noch eine Einheit zufügt oder nicht.

262. Beobachtungsgleichungen zu Mittelgleichungen zu vereinigen, ist im allgemeinen nicht zu empfehlen. Ganz so, wie es bei einfachen Messungen bei weitem vorzuziehen ist, da, wo die einzelnen Messungen wirklich gleiches Vertrauen verdienen, lieber nicht Gruppen von ihnen zu Mitteln zusammenzuziehen, denen man dann bestimmte Gewichte verleiht, sondern die Messungen so zu einem Mittel zu vereinigen, wie man sie bekommen hat, ganz so ist es auch hier besser, jede Beobachtungsgleichung für sich hinzuschreiben und nicht Beobachtungsgleichungen, weil die Systeme ihrer Variablen nur wenig von einander abweichen, zu einer Beobachtungsgleichung mit vergrössertem Gewicht zusammenzuziehen. Hat man also in der x ten Beobachtungsgleichung jedes der Elemente zum Beispiel 3 mal, aber so gemessen, dass 3 mal die ganze Reihe von Elementen durchgemessen ist (und nicht so, dass erst ein Element, dann das folgende u. s. f. hinter einander 3 mal gemessen ist), so schreibt man besser 3 Beobachtungsgleichungen hin. Wir können diese Regel kurz so ausdrücken:

76. *Man gleicht die Beobachtungsgleichungen am besten so aus, wie man sie bekommen hat, ohne sie in Gruppen zu vereinigen, vorausgesetzt, dass man es nur mit zufälligen Fehlern zu tun hat und die Beobachtungsgleichungen einander äquivalent sind.*

Der Nachsatz ist wichtig, denn man richtet oft die Untersuchungen so ein, dass die systematischen Fehler erst durch Combination von Beobachtungsgleichungen herausfallen, und dann wäre es sehr unvorteilhaft diese Combinationen nicht auszuführen.

Ein geeignetes Beispiel bietet die erwähnte Untersuchung über die Ausdehnung bei Mischungen aus Wasser und Alkohol. Die Untersuchungen leicht verdunstender Flüssigkeitsgemische werden systematisch durch die fortwährende Verdampfung des Alkohols verfälscht. Richtet man aber die Versuche so ein, dass man die Beobachtungen in aufsteigender und absteigender Temperatur ausführt, also beispielsweise die Dichtigkeit bei 20, 15, 10, 5, 0; 0, 5, 10, 15, 20° C. misst, so geben die Gleichungen, wenn man sie zu zwei und zwei symmetrisch zur Mitte vereinigt, ein von der systematischen Verfälschung durch Verdampfung fehlerfreies System von Beobachtungsgleichung, in dem sich dann alle Dichtigkeitsbestimmungen auf die Dichte bei der in der Mitte stehenden Temperatur beziehen. Wollte man hier die Gleichungen so ausgleichen, wie sie erhalten sind, so müsste man noch zu den Beobachtungsgleichungen Glieder hinzufügen, die dem Fortschreiten der Verdampfung Rechnung tragen. Durch die Combinirung zweier symmetrisch zur Mitte stehenden Gleichungen werden diese Correctionsglieder vermieden. Handelt es sich dagegen um eine Flüssigkeit, die durch Verdampfung weder ihre Dichtigkeit noch ihre Stärke ändert, so gleicht man die Gleichungen getrennt aus.

XXII. Verallgemeinerung und Zusammenfassung der Ergebnisse ; Rechenschemata.

In den vorausgehenden Capiteln sind alle für den Physiker bei der Ausglei chung von Untersuchungen wichtigen Fälle behandelt worden. Indem wir die Ergebnisse, zu denen uns die Entwicklungen geführt haben, zusammenfassen, haben wir zunächst einige Verallgemeinerungen hinsichtlich der Bedeutung dieser Ergebnisse hervorzuheben.

a) *Verallgemeinerung der Bedeutung der Entwicklungen.*

263. Die Entwicklungen gelten für irgend welche Formen der Beobachtungsgleichungen. Die Bedeutung der erlangten Ergebnisse scheint insofern eine beschränkte zu sein, als wir überall im Texte nur von einer der Untersuchung zu Grunde liegenden Function gesprochen haben. Indessen genügen wenige Bemerkungen, um diese Beschränkung als eine nur scheinbare darzutun.

In der Tat ist bei den Ableitungen der einzelnen Formeln nirgend die Annahme massgebend gewesen, dass die in den einzelnen Beobachtungsgleichungen vertretenen Functionen alle denselben analytischen Charakter haben. Die einzige Operation, die wir mit den Beobachtungsfunktionen überhaupt vorgenommen haben, bestand darin, dass wir sie nach gewissen kleinen Grössen entwickelten, dazu bedarf es aber der Kenntnis der analytischen Form der Functionen nicht.

Es ist also für die Existenz der erlangten Formeln völlig gleichgiltig, ob die in ihnen vertretenen, den einzelnen Beobachtungsgleichungen zugehörigen Functionen — sie sind mit $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ bezeichnet worden — in der Form übereinstimmen oder nicht. Ich habe zwar der bequemen Ausdrucksweise wegen überall nur von einer Function Φ gesprochen und auch Φ_x durch $\Phi(a_x, b_x, \dots, g_x; x_1, x_2, \dots, x_h)$ definiert, so dass Φ_x sich von Φ_i lediglich durch die Werte der Argumente a, b, \dots, g zu unterscheiden schien, aber der Leser darf in der Definition dem Functionszeichen Φ nur irgend einen Index anhängen und $\Phi_x = \Phi_x(a_x, b_x, \dots, g_x; x_1, x_2, \dots, x_h)$ setzen, wo Φ_x irgend eine eventuell von Φ_i verschiedene analytische Form symbolisirt, und a_x, b_x, \dots, g_x irgend welche beobachtete Grössen darstellen, die der Art nach nicht einmal mit den Grössen a_i, b_i, \dots, g_i übereinzustimmen brauchen. Die Formeln ändern sich dadurch gar nicht, denn in ihnen stehen nur die symbolisirenden Grössen $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, nicht deren Argumente.

Also alles, worauf es allein bei der Anwendung der abgeleiteten Formeln ankommt, ist, dass die auszugleichenden Grössen, sie sind mit x_1, x_2, \dots, x_h bezeichnet, in allen Beobachtungsgleichungen vorhanden sind; in welcher Verbindung und mit welchen beobachteten Grössen sie in den einzelnen Beob-

achtungsgleichungen auftreten, ist ganz gleichgiltig. Die Functionen und beobachteten Elemente können in ihrer Art von Beobachtungsgleichung zu Beobachtungsgleichung irgendwie variiren. Ja auch die Bezeichnung Function hat keine besondere Bedeutung, und wenn wir eine Beobachtungsgleichung schreiben

$$0 = \Phi_x(a_x, b_x, \dots, g_x; x_1, x_2, \dots, x_n),$$

so bedeutet das nichts weiter, als dass irgend ein Aggregat von Gliedern, welche zusammengesetzt sind aus irgend welchen beobachteten Grössen a_x, b_x, \dots, g_x in irgend welcher Verbindung mit einander und mit den auszugleichenden Grössen, gleich Null sein sollte. Dass unter Umständen — und für den Physiker sogar sehr oft — die besondere Art der Verbindung von so grosser Wichtigkeit sein kann, dass allein ihretwegen die ganze Untersuchung angestellt ist, hat wol für die Bedeutung der Untersuchung Wert, aber nicht für den Gang der eigentlichen Ausgleichungsrechnung.

Die auszugleichenden Grössen haben wir früher als Coefficienten bezeichnet, weil wir von einer der Untersuchung unterliegenden Function sprachen. Jetzt, wo wir wissen, dass für die Bedeutung der entwickelten Formeln die Supposition, dass wir es mit bestimmten Functionen zu tun haben, ganz irrelevant ist, dürfte es auch besser sein, jenen Grössen gar keinen besondern Namen zu geben, sondern, wie das schon mehrfach im Text geschehen, sie einfach als auszugleichende Grössen zu bezeichnen.

Es ist schon in Art. 252 ein Fall behandelt worden, wo es keinen Sinn gehabt hätte, die auszugleichenden Grössen als Coefficienten zu bezeichnen, und von besondern Beobachtungsfunktionen, auf welche die Untersuchung sich gerichtet hätte, zu sprechen.

Damit ist die eine der in Art. 203 berührten Verallgemeinerungen gewonnen.

264. Die Entwicklungen sind unabhängig davon, ob die Form der Beobachtungsgleichungen bestimmt oder hypothetisch ist. Die zweite Verallgemeinerung bezieht sich gerade auf die Form der einzelnen Beobachtungsgleichungen.

In vielen Fällen ist die Form der Beobachtungsgleichungen, wie wir auch sagen können, der analytische Charakter der in ihnen vertretenen Functionen Φ von vorn herein bekannt.

In solchen Fällen ist auch im allgemeinen das ganze Interesse lediglich auf die auszugleichenden Grössen gerichtet, und die Untersuchung ist im wesentlichen eine maassbestimmende, eine metronomische.

Oft soll aber die Untersuchung gerade die Form der betreffenden Function, oder der betreffenden Functionen, kennen lehren. Die Formeln der Ausgleichungsrechnung sind nun allerdings nicht anwendbar, wenn die Form der Beobachtungsgleichungen nicht bekannt ist. Da sie aber keine besondere Form voraussetzen, darf man diese Form hypothetisch annehmen.

Die Anzahl der auszurechnenden Grössen ist dann im allgemeinen auch hypothetisch, und insofern bleibt auch die ganze Ausgleichung hypothetisch. Das berührt aber den Gang der Rechnung nicht, sondern nur den Wert dieser Rechnung für den besondern Fall.

Gehen wir jetzt zu der Zusammenfassung selbst über.

b) *Beobachtungsgleichungen und Fehlergleichungen.*

265. 1. Untersuchungen haben zum Ziel die Kenntnis einer Reihe mit einander irgendwie zusammenhängender Grössen, sei es, dass diese Grössen selbst Gegenstand des Interesses sind, oder dass sie nur zur völligen Bestimmung anderer Grössen und Functionen dienen sollen.

2. Eine Gleichung, in welcher neben den zu bestimmenden Grössen andere, direct oder auf Umwegen gemessene Grössen (Elemente) vertreten sind, nennen wir eine Beobachtungsgleichung. Denkt man sich in den Beobachtungsgleichungen die zu bestimmenden Grössen durch genäherte Beträge, zu denen man noch unbekannte Verbesserungen hinzufügt, ersetzt, so gehen die Beobachtungsgleichungen in Fehlergleichungen über, und die Resultate dieser Fehlergleichungen geben die wahrscheinlichsten übrig bleibenden Fehler der Beobachtungsgleichungen, wenn die Verbesserungen wahrscheinlichst sind.

Kommt eine und dieselbe beobachtete Grösse in mehreren Beobachtungsgleichungen vor, ohne dass sie auch für jede dieser Gleichungen besonders beobachtet ist, so sind die betreffenden Beobachtungsgleichungen mit einander durch diese Grösse verbunden.

Als Hauptregel gilt:

3. Man muss die Beobachtungen so einrichten, dass zwischen den einzelnen Beobachtungsgleichungen so wenig Verbindungen als möglich übrig bleiben, hat also, wo man kann, jede beobachtbare Grösse, selbst wenn sie denselben Betrag für eine ganze Reihe von Beobachtungsgleichungen haben sollte, doch für jede dieser Beobachtungsgleichungen gesondert zu messen.

Gleichungen, zwischen denen keine durch beobachtete Grössen hergestellte Verbindungen existiren, nennen wir unabhängige Gleichungen. Abhängige Gleichungen sind dann solche, welche mit einander durch beobachtete Grössen verbunden sind.

4. Existiren neben den Beobachtungsgleichungen noch eine Anzahl anderer Gleichungen, in denen ausser den auszugleichenden Grössen nur noch Zahlengrössen oder auch solche Grössen, die zwar ebenfalls beobachtet sind, deren Beträge aber als fehlerfrei betrachtet werden, und eventuell andere zu berechnende Grössen vertreten sind, die also streng erfüllt werden müssen, so haben wir es mit einer bedingten Ausgleichung zu

tun. Die streng zu erfüllenden Gleichungen sind die Bedingungsgleichungen.

5. Die Anzahl der Beobachtungsgleichungen zusammen mit der Anzahl der eventuell vorhandenen Bedingungsgleichungen muss mindestens so gross sein, wie die der zu berechnenden Grössen. Je mehr überschüssige Beobachtungsgleichungen vorhanden sind, um so sicherer wird die Ausgleichung.

6. Vor der Ausgleichung soll man mit den Beobachtungsgleichungen keinerlei Operationen vornehmen, die mit Multiplicationen oder Divisionen oder andern höhern algebraischen Operationen verbunden sind. Additionen und Subtractionen sind auch nur gestattet, wenn sie einfache Zahlen oder für die betreffende Untersuchung als fehlerfrei zu betrachtende Grössen betreffen.

7. Die analytische Form der Beobachtungsgleichungen ist so zu wählen, wie sie die betreffende Theorie ergibt, namentlich also so, dass jedes der in den Gleichungen vertretenen Glieder einen bestimmten physikalischen Sinn hat.

Kommt es auf die Form selbst nicht an, so darf man nach der Grösse entwickeln, auf welche die Untersuchung ganz besonders gerichtet ist.

8. Für die Messung und Kritik der Elemente in den einzelnen Beobachtungsgleichungen gelten alle Regeln, die in der Theorie der einfachen und zusammengesetzten Messungen auseinandergesetzt sind.

c) Die Gewichte.

266. 9. Bei der Beobachtung und auch bei der Aufstellung der Beobachtungsgleichungen ist besonders darauf zu achten, dass die Gewichte der einzelnen Beobachtungsgleichungen tunlichst wenig von einander verschieden herauskommen.

10. Um das Gewicht einer Beobachtungsgleichung berechnen zu können, muss man die mittlern Fehler der in ihr enthaltenen beobachteten Grössen, ihrer Elemente kennen, daher hat man jedes dieser Elemente so oft zu messen, bis man seinen mittlern Fehler mit genügender Genauigkeit zu berechnen vermag.

Sei die Beobachtungsgleichung

$$0 = \Phi_x(a_x, b_x, \dots, g_x; x_1, x_2, \dots, x_h),$$

woselbst a_x, b_x, \dots, g_x die beobachteten Elemente, x_1, x_2, \dots, x_h die zu berechnenden Grössen angeben, dann ist das Gewicht dieser Gleichung

$$p_x = \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial a_x}\right)^2 \mu_{a_x}^2 + \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial b_x}\right)^2 \mu_{b_x}^2 + \dots + \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial g_x}\right)^2 \mu_{g_x}^2}.$$

Da Φ_x noch die unbekanntenen Grössen x_1, x_2, \dots, x_h enthält, so kann man p immer nur näherungsweise berechnen. Sind dann x'_1, x'_2, \dots, x'_h

Näherungswerte für die zu berechnenden Grössen, so hat man als Näherungswert für das Gewicht der betreffenden Beobachtungsgleichung

$$p'_x = \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi'_x}{\partial a_x}\right)^2 \mu_{a_x}^2 + \left(\frac{\partial \Phi'_x}{\partial b_x}\right)^2 \mu_{b_x}^2 + \dots + \left(\frac{\partial \Phi'_x}{\partial g_x}\right)^2 \mu_{g_x}^2},$$

woselbst

$$\Phi'_x = \Phi_x(a_x, b_x, \dots, g_x; x'_1, x'_2, \dots, x'_h)$$

gesetzt ist.

11. Entscheidend für die Bestimmung der Gewichte sind diejenigen Elemente, deren Aenderung den grössten Einfluss auf die betreffende Beobachtungsgleichung haben, nach welchen, analytisch gesprochen, Φ'_x partiell differenziert, den grössten Betrag liefert.

12. Wenn bei der betreffenden Beobachtungsgleichung ein Element nicht so genau bestimmt ist, dass man seinen mittlern Fehler anzugeben vermag, so hat man auf die Grösse dieses mittlern Fehlers aus den entsprechenden Beobachtungen für die andern Gleichungen, oder aus anderweitigen Untersuchungen zu schliessen. Besitzt man gar keinen Anhalt zur Beurteilung dieses mittlern Fehlers, so nimmt man ihn gleich Null an.

Giebt die Untersuchung nicht die nötigen genauen Daten zur Berechnung der mittlern Fehler der einzelnen Beobachtungsgleichungen, so setzt man die Gewichte dieser Beobachtungsgleichungen zu einander in den Verhältnissen der bezüglichen Messungszahlen der entscheidenden Elemente.

Off beurteilt man das Gewicht einer Beobachtungsgleichung nach dem Gewicht nur eines einzigen Elements und setzt jenes Gewicht dem Gewicht dieses Elements gleich, alsdann sieht man nur dieses Element als entscheidend an.

Hat man gar keinen Anhalt zur Abschätzung der Gewichte der einzelnen Beobachtungsgleichungen gegen einander, so giebt man allen Gleichungen das nämliche Gewicht, welches man dann gleich 1 setzt; oder, wie man sich auch ausdrückt, man berücksichtigt die Gewichte gar nicht.

13. Wenn eine Beobachtungsgleichung ihre Form ändert, so ändert sich auch ihr Gewicht, transformirt man also überhaupt Beobachtungsgleichungen, so muss man auch deren Gewichte abändern, und zwar dadurch, dass man in der Formel für dieses Gewicht die ursprüngliche Function durch die neue ersetzt.

d) Die Näherungsrechnungen.

267. 14. Die eigentliche Ausgleichsrechnung hat nicht die Beobachtungsgleichungen (und wo solche vorhanden sind, auch nicht die Bedingungsgleichungen zur Grundlage), sondern die Fehlergleichungen.

Es ist unter allen Umständen geboten, die Ausgleichung durch successive Näherung auszuführen.

Man greift aus den Beobachtungsgleichungen so viele heraus, als zur Berechnung der gesuchten Grössen nötig sind, und rechnet aus ihnen, eventuell nur ganz roh, Beträge für diese Grössen heraus, die man dann als Näherungswerte ansieht. Will man, was sehr wünschenswert ist, die erste Näherung weiter treiben, so rechnet man die betreffenden Grössen aus mehrern Combinationen von Beobachtungsgleichungen aus und nimmt Mittel.

Auf die wahrscheinlichsten Verbesserungen dieser Näherungswerte bezieht sich dann die eigentliche Ausgleichsrechnung.

Unter Benutzung der ersten Näherungen für die zu berechnenden Grössen bekommt man durch die Ausgleichung einen ersten Satz von Verbesserungen, benutzt man dann die durch die Verbesserungen corrigirten ersten Näherungen als zweite Näherungen, so giebt die erneute Ausgleichung einen zweiten Satz von Verbesserungen u. s. f. Alle Sätze von Verbesserungen werden in ganz gleicher Weise gerechnet. Indem ich noch auf Art. 32 und 214 verweise, setze ich für alles folgende voraus, dass man die Näherungsrechnungen schon so weit getrieben hat, dass nur noch der letzte Satz von Verbesserungen zu rechnen ist, die Schemata für die numerische Rechnung, die hier massgebend sind, gelten in ganz gleicher Weise auch für die voraufgehenden Näherungsrechnungen, nur dass man bei jenen die Fehlerrechnungen, die wir bei den letzten Verbesserungen, um zu den Endresultaten zu gelangen, mit ausführen müssen, fortlässt.

e) *Rechenschema für unabhängige und unbedingte Untersuchungen.*

268. Bildung der Normalgleichungen. Es seien die zu berechnenden Grössen x_1, x_2, \dots, x_h , die Beobachtungsgleichungen

$$\begin{aligned} & 0 = \Phi_1(a_1, b_1, \dots, g_1; x_1, x_2, \dots, x_h), \\ a_1) \quad & 0 = \Phi_2(a_2, b_2, \dots, g_2; x_1, x_2, \dots, x_h), \\ & \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ & 0 = \Phi_n(a_n, b_n, \dots, g_n; x_1, x_2, \dots, x_h), \end{aligned}$$

woselbst die a, b, \dots, g die der Beobachtung unterliegenden Elemente angeben.

Man multiplicirt jede Beobachtungsgleichung mit der Quadratwurzel aus dem zugehörigen angenähert berechneten Gewicht und bekommt so das System

$$\begin{aligned} & 0 = \sqrt{p_1} \Phi_1(a_1, b_1, \dots, g_1; x_1, x_2, \dots, x_h), \\ a_2) \quad & 0 = \sqrt{p_2} \Phi_2(a_2, b_2, \dots, g_2; x_1, x_2, \dots, x_h), \\ & \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ & 0 = \sqrt{p_n} \Phi_n(a_n, b_n, \dots, g_n; x_1, x_2, \dots, x_h). \end{aligned}$$

Nun differenziert man jede Beobachtungsgleichung nach allen zu berechnenden Grössen x und ersetzt sowohl in den Φ wie in ihren Derivirten die x durch ihre als bekannt vorauszusetzenden Näherungswerte x' . So bekommt man das System der Grössen

$$\begin{array}{l}
 \sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_1} \quad \sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_1} \quad \cdots \quad \sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_1}, \\
 \sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_2} \quad \sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_2} \quad \cdots \quad \sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_2}, \\
 \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 \sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_h} \quad \sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_h} \quad \cdots \quad \sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_h}, \\
 - \sqrt{p'_1} \Phi'_1 \quad - \sqrt{p'_2} \Phi'_2 \quad \cdots \quad - \sqrt{p'_n} \Phi'_n,
 \end{array}$$

und indem man die Logarithmen aufschlägt und wie früher mit (α) den Logarithmus einer Grösse α bezeichnet, resultirt das eventuell neben das System b_1) oder zwischen die Zeilen dieses Systems (aber dann mit andersfarbiger Dinte oder in kleinern Ziffern) hinzuschreibende System

$$\begin{array}{l}
 \left(\sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_1} \right) \quad \left(\sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_1} \right) \quad \cdots \quad \left(\sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_1} \right), \\
 \left(\sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_2} \right) \quad \left(\sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_2} \right) \quad \cdots \quad \left(\sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_2} \right), \\
 \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 \left(\sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_h} \right) \quad \left(\sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_h} \right) \quad \cdots \quad \left(\sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_h} \right), \\
 (- \sqrt{p'_1} \Phi'_1) \quad (- \sqrt{p'_2} \Phi'_2) \quad \cdots \quad (- \sqrt{p'_n} \Phi'_n).
 \end{array}$$

Von diesen Zahlen addirt man die Zahlen der ersten Zeile zu sich selbst und zu allen darunter stehenden Zahlen der folgenden Zeile, schlägt die Numeri auf und schreibt die so erhaltenen Zahlen für die Operation der ersten Zeile mit je einer andern Zeile in einer Columnne. So bekommt man $h+1$ Columnnen zu je n Zahlen, die man dann für jede Columnne durch Summation vereinigt. Dann verfährt man mit der zweiten Zeile so, wie vorher mit der ersten, addirt also ihre Zahlen zu sich selbst und zu allen folgenden und schlägt die Numeri auf, die man für die Operation mit je zwei Zeilen in eine Columnne schreibt. Man hat dann h neue Columnnen mit je n Zahlen, die man für jede Columnne zu einer Zahl vereinigt. Dann führt man dieselben Operationen für die dritte, vierte, ... bis letzte Zeile aus.

Im ganzen hat man dann das System

$$c_1) \quad \begin{array}{ccccccc} p_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_1} & p_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_2} & \cdots & p_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_h} & - p_1 \Phi'_1 & \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_1} \\ p_2 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_1} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_1} & p_2 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_1} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_2} & \cdots & p_2 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_1} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_h} & - p_2 \Phi'_2 & \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_n \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_1} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_1} & p_n \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_1} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_2} & \cdots & p_n \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_1} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_h} & - p_n \Phi'_n & \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_1} \end{array}$$

$$\text{Summen: } a_{11} = \quad a_{12} = \quad \cdots \quad a_{1h} = \quad l_1 =$$

$$\begin{array}{ccccccc} p_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_2} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_2} & \cdots & p_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_2} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_h} & - p_1 \Phi'_1 & \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_2} \\ p_2 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_2} & \cdots & p_2 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_h} & - p_2 \Phi'_2 & \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_n \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_2} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_2} & \cdots & p_n \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_2} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_h} & - p_n \Phi'_n & \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_2} \end{array}$$

$$\text{Summen: } a_{22} = \quad \cdots \quad a_{2h} = \quad l_2 =$$

u. s. f. bis

$$\begin{array}{ccc} p_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_h} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_h} & - p_1 \Phi'_1 & \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_h} \\ p_2 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_h} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_h} & - p_2 \Phi'_2 & \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_h} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_n \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_h} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_h} & - p_n \Phi'_n & \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_h} \end{array}$$

$$\text{Summen: } a_{hh} = \quad l_h =$$

$$\begin{array}{c} p_1 \Phi'_1 \Phi'_1 \\ p_2 \Phi'_2 \Phi'_2 \\ \vdots \\ p_n \Phi'_n \Phi'_n \end{array}$$

$$\text{Summe: } l_{h+1} =$$

Damit sind alle Grössen gewonnen, die zur weitem Rechnung nötig sind,

Dann zieht man in dem rechts stehenden System der Logarithmen die Zahl der ersten Columnne, also (a_{11}) von allen darunter stehenden ab, man bekommt dadurch die Logarithmen (α_{12}) , (α_{13}) , ..., (α_{1h}) , (χ_1) , die man in der Höhe von (a_{11}) in einer Zeile schreibt. Zuletzt schreibt man noch die decadische Ergänzung zu (a_{11}) hin, womit man den Logarithmus zu $\frac{1}{a_{11}}$ bekommt, diesen bezeichne ich wie früher mit $\chi_1^{(1)}$. Indem man jetzt (a_{12}) zu allen unter (a_{11}) stehenden Zahlen addirt, und die erhaltenen Zahlen in einer Columnne schreibt, dann (α_{13}) zu allen unter (a_{12}) stehenden Zahlen addirt und die erhaltenen Zahlen wieder in einer Columnne schreibt und so fortfährt, nimmt das System der Logarithmen die Form an

$$\begin{array}{cccccc}
 (a_{11}) & (\alpha_{12}) & (\alpha_{13}) & \dots & (\alpha_{1h}) & (\chi_1) & (\chi_1^{(1)}) \\
 \hline
 & (a_{12}) & & & & & \\
 & & (a_{12} \alpha_{12}) & & & & \\
 \hline
 & (a_{13}) & & & & & \\
 & & (a_{13} \alpha_{13}) & (a_{13} \alpha_{13}) & & & \\
 \hline
 & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
 & (a_{1h}) & & & & & \\
 & & (a_{1h} \alpha_{12}) & (a_{1h} \alpha_{13}) & \dots & (a_{1h} \alpha_{1h}) & \\
 \hline
 (l_1) & & (l_1 \alpha_{12}) & (l_1 \alpha_{13}) & \dots & (l_1 \alpha_{1h}) & (l_1 \chi_1)
 \end{array}$$

Man schlägt zu den Logarithmen von Producten die Numeri auf und schreibt diese unter die entsprechenden Zahlen der entsprechenden Columnnen des Systems der a , so dass dieses System die Form bekommt

$$\begin{array}{cccccc}
 a_{11} & & & & & \\
 \hline
 a_{12} & a_{22} & & & & \\
 & a_{12} \alpha_{12} & & & & \\
 \hline
 a_{13} & a_{23} & a_{33} & & & \\
 & a_{13} \alpha_{12} & a_{13} \alpha_{13} & & & \\
 \hline
 \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
 a_{1h} & a_{2h} & a_{3h} & \dots & a_{hh} & \\
 & a_{1h} \alpha_{12} & a_{1h} \alpha_{13} & \dots & a_{1h} \alpha_{1h} & \\
 \hline
 l_1 & l_2 & l_3 & \dots & l_h & l_{h+1} \\
 & l_1 \alpha_{12} & l_1 \alpha_{13} & \dots & l_1 \alpha_{1h} & l_1 \chi_1
 \end{array}$$

Wenn man jetzt von jeder ursprünglichen Zahl der zweiten, dritten, . . . , letzten Columne dieses Systems die darunter stehende hinzugefügte Zahl abzieht, bekommt man das System Zahlen, mit dem die zweite Reduction auszuführen ist. Zu diesem System schreiben wir aber noch hin die α_1 und ausserdem den negativen Wert von $\chi_1^{(1)}$, den wir mit $\chi_{1,0}^{(1)}$ bezeichnen (also die Numeri zu allen in der ersten Zeile hinter $(a_{1,1})$ stehenden Zahlen des Logarithmensystems). In der zweiten Reduction sieht also das System der Zahlen so aus:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{2,2,1} & & & & & & \\
 a_{2,3,1} & a_{3,3,1} & & & & & \\
 \vdots & \vdots & & & & & \\
 a_{2,h,1} & a_{3,h,1} & \dots & a_{h,h,1} & & & \\
 l_{2,1} & l_{3,1} & \dots & l_{h,1} & l_{h+1,1} & & \\
 \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \dots & \alpha_{1,h} & \chi_1 & \chi_{1,0}^{(1)} &
 \end{array}$$

Zur ersten Columne dieses Zahlensystems stellt man das Logarithmensystem auf, bildet wieder durch Subtraction der ersten Zahl dieses Systems von allen in derselben Columne unter ihr stehenden Zahlen die Differenzen $(a_{2,3,1}) - (a_{2,2,1})$, $(a_{2,4,1}) - (a_{2,2,1})$, . . . , $(a_{2,h,1}) - (a_{2,2,1})$; $(l_{h,1}) - (a_{2,2,1})$, $(\alpha_{1,2}) - (a_{2,2,1})$, zu denen man noch die dekadische Ergänzung $(a_{2,2,1})$ hinzufügt, wodurch man also bekommt

$$(\alpha_{2,3}), (\alpha_{2,4}), \dots, (\alpha_{2,h}), (\chi_2), (\chi_2^{(1)}), (\chi_2^{(2)}).$$

Von diesen Logarithmen addirt man $(\alpha_{2,3})$ zu allen unter $(a_{2,2,1})$ stehenden Zahlen und schreibt die Resultate in einer zweiten Columne, $(\alpha_{2,4})$ zu allen unter $(a_{2,3,1})$ stehenden Zahlen und schreibt die Zahlen wieder in einer dritten Columne u. s. f. Das Logarithmensystem bekommt dann die Form

$$\begin{array}{ccccccc}
 (a_{2,2,1}) & (\alpha_{2,3}) & \dots & (\alpha_{2,h}) & (\chi_2) & (\chi_2^{(1)}) & (\chi_2^{(2)}) \\
 \hline
 (a_{2,3,1}) & & & & & & \\
 & (a_{2,3,1} \alpha_{2,3}) & & & & & \\
 \hline
 \vdots & \vdots & & & & & \\
 (a_{2,h,1}) & & & & & & \\
 & (a_{2,h,1} \alpha_{2,3}) \dots (a_{2,h,1} \alpha_{2,h}) & & & & & \\
 \hline
 (l_{2,1}) & & & & & & \\
 & (l_{2,1} \alpha_{2,3}) \dots (l_{2,1} \alpha_{2,h}) & (l_{2,1} \chi_2) & & & & \\
 \hline
 (\alpha_{1,2}) & & & & & & \\
 & (\alpha_{1,2} \alpha_{2,3}) \dots (\alpha_{1,2} \alpha_{2,h}) & (\alpha_{1,2} \chi_2) & (\alpha_{1,2} \chi_2^{(1)}) & & &
 \end{array}$$

Zu den so berechneten Logarithmen von Producten schlägt man die Zahlen auf und schreibt diese unter die entsprechenden Zahlen des zugehörigen Zahlensystems, so dass dieses wird

$$\begin{array}{cccccc}
 & a_{2,1} & & & & \\
 \hline
 & a_{2,3,1} & a_{3,3,1} & & & \\
 & & a_{2,3,1} & a_{2,3} & & \\
 \hline
 & \vdots & \vdots & & & \\
 & a_{2,h,1} & a_{3,h,1} & \cdots & a_{h,h,1} & \\
 & & a_{2,h,1} & a_{2,3} & a_{2,h,1} & a_{2,h} \\
 \hline
 & l_{2,1} & l_{3,1} & \cdots & l_{h,1} & l_{h+1,1} \\
 & & l_{2,1} & a_{2,3} & l_{2,1} & a_{2,h} & l_{2,1} & \chi_2 \\
 \hline
 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \cdots & \alpha_{1,h} & \chi_1 & \chi_1^{(1)} \\
 & & \alpha_{1,2} & a_{2,3} & \alpha_{1,2} & a_{2,h} & \alpha_{1,2} & \chi_2 & \alpha_{1,2} & \chi_2^{(1)}
 \end{array}$$

Subtrahirt man wieder von jeder in der zweiten, dritten, . . . , Columne stehenden ursprünglichen Zahl die unmittelbar unter ihr hingeschriebene Zahl und fügt noch als letzte Zeile hinzu

$$\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \dots, \alpha_{2,h}, \chi_2, \chi_2^{(1)}, \chi_{2,0}^{(2)},$$

wobei $\chi_{2,0}^{(2)}$ den negativen Wert von der Zahl zu $(\chi_2^{(2)})$ angiebt, so bekommt man die nötigen Zahlen für die dritte Reduction.

270. Regeln für die Ausführung der Ausgleichung. Im Ganzen hat man für die Ausführung der Rechnung folgende Regeln zu behalten:

1. Alle Reductionen werden nach ganz demselben Algorithmus gerechnet.
2. In jeder Reduction werden die in dem Logarithmensystem in der ersten Zeile stehenden (α) und (χ) dadurch erhalten, dass man die in der ersten Columne dieses Systems und zuerst stehende Zahl von allen in derselben Columne und unter ihr stehenden Zahlen der Reihe nach abzieht, das letzte (χ) , es hat immer unten denselben Index wie oben, ist die dekadische Ergänzung zu jener bezeichneten ersten Zahl des Logarithmensystems.
3. Die in irgend einer Columne des Logarithmensystems einer Reduction gerechneten Zahlen sind die bezüglichen Summen der in dieser Columne an der Spitze stehenden (α) oder (χ) zu den in gleicher Höhe mit den entsprechenden Zahlen der entsprechenden Columne im Zahlensystem stehenden Zahlen der ersten Columne des Logarithmensystems.
4. Die in irgend einer Columne des Zahlensystems einer Reduction unter die ursprünglichen Zahlen hingeschriebenen hinzugefügten Zahlen (sie treten als Producte zweier Zahlen auf) sind die Numeri zu den in dem Logarithmensystem in der entsprechenden Columne und in der nämlichen Höhe stehenden (hinzugefügten) Zahlen.
5. Von einer Reduction folgen die Grundzahlen der nächsten Reduction, indem man: erstens von jeder Grundzahl des Zahlensystems der Reduction die unter ihr stehende, hinzugefügte Zahl abzieht, zweitens zu den in der ersten isolirten Zeile des Logarithmensystems stehenden Zahlen die Numeri aufschlägt. Zu beachten ist, dass der Numerus zu dem letzten (χ) , also zu $(\chi_x^{(x)})$ das entgegengesetzte Zeichen erhält und so als $\chi_{x,0}^{(x)}$ bezeichnet ist.

271. Rechenschema für die Ausgleichung. Im nachfolgenden sind die

α_{11}	(α_{11})	(α_{12})	(α_{13})	(α_{14})	$\dots (\alpha_{1h})$	(λ_1)	$(\lambda_1)^{(1)}$
α_{12}	(α_{12})						
$\alpha_{12} \alpha_{12}$	$(\alpha_{12} \alpha_{12})$						
α_{13}	(α_{13})	$(\alpha_{13} \alpha_{12})$	$(\alpha_{13} \alpha_{13})$				
$\alpha_{13} \alpha_{12}$	$(\alpha_{13} \alpha_{12})$						
α_{14}	(α_{14})	$(\alpha_{14} \alpha_{12})$	$(\alpha_{14} \alpha_{13})$	$(\alpha_{14} \alpha_{14})$			
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		
α_{1h}	(α_{1h})	$(\alpha_{1h} \alpha_{12})$	$(\alpha_{1h} \alpha_{13})$	$(\alpha_{1h} \alpha_{14}) \dots (\alpha_{1h} \alpha_{1h})$			
l_1	(l_1)	$(l_1 \alpha_{12})$	$(l_1 \alpha_{13})$	$(l_1 \alpha_{14}) \dots (l_1 \alpha_{1h})$		(λ_1)	$(\lambda_1)^{(1)}$
$\alpha_{22,1}$	$(\alpha_{22,1})$	(α_{23})	(α_{24})	$\dots (\alpha_{2h})$		(λ_1)	$(\lambda_2)^{(2)}$
$\alpha_{23,1}$	$(\alpha_{23,1})$	$(\alpha_{23,1} \alpha_{23})$					
$\alpha_{24,1}$	$(\alpha_{24,1})$	$(\alpha_{24,1} \alpha_{23})$	$(\alpha_{24,1} \alpha_{24})$				
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots				
$\alpha_{2h,1}$	$(\alpha_{2h,1})$	$(\alpha_{2h,1} \alpha_{23})$	$(\alpha_{2h,1} \alpha_{24}) \dots (\alpha_{2h,1} \alpha_{2h})$				
$l_{2,1}$	$(l_{2,1})$	$(l_{2,1} \alpha_{23})$	$(l_{2,1} \alpha_{24}) \dots (l_{2,1} \alpha_{2h})$			(λ_2)	$(\lambda_2)^{(1)}$
α_{12}	(α_{12})	$(\alpha_{12} \alpha_{23})$	$(\alpha_{12} \alpha_{24}) \dots (\alpha_{12} \alpha_{2h})$			$(\alpha_{12} \lambda_2)$	$(\alpha_{12} \lambda_2)^{(1)}$
$\alpha_{12} \alpha_{23}$	$(\alpha_{12} \alpha_{23})$						
$\alpha_{12} \alpha_{24}$	$(\alpha_{12} \alpha_{24})$						
$\alpha_{12} \alpha_{2h}$	$(\alpha_{12} \alpha_{2h})$						
α_{13}	(α_{13})	$(\alpha_{13} \alpha_{23})$	$(\alpha_{13} \alpha_{24}) \dots (\alpha_{13} \alpha_{2h})$				
$\alpha_{13} \alpha_{23}$	$(\alpha_{13} \alpha_{23})$						
$\alpha_{13} \alpha_{24}$	$(\alpha_{13} \alpha_{24})$						
$\alpha_{13} \alpha_{2h}$	$(\alpha_{13} \alpha_{2h})$						
α_{14}	(α_{14})	$(\alpha_{14} \alpha_{23})$	$(\alpha_{14} \alpha_{24}) \dots (\alpha_{14} \alpha_{2h})$				
$\alpha_{14} \alpha_{23}$	$(\alpha_{14} \alpha_{23})$						
$\alpha_{14} \alpha_{24}$	$(\alpha_{14} \alpha_{24})$						
$\alpha_{14} \alpha_{2h}$	$(\alpha_{14} \alpha_{2h})$						
α_{1h}	(α_{1h})	$(\alpha_{1h} \alpha_{23})$	$(\alpha_{1h} \alpha_{24}) \dots (\alpha_{1h} \alpha_{2h})$				
$\alpha_{1h} \alpha_{23}$	$(\alpha_{1h} \alpha_{23})$						
$\alpha_{1h} \alpha_{24}$	$(\alpha_{1h} \alpha_{24})$						
$\alpha_{1h} \alpha_{2h}$	$(\alpha_{1h} \alpha_{2h})$						
l_1	(l_1)	$(l_1 \alpha_{23})$	$(l_1 \alpha_{24}) \dots (l_1 \alpha_{2h})$				
$l_1 \alpha_{23}$	$(l_1 \alpha_{23})$						
$l_1 \alpha_{24}$	$(l_1 \alpha_{24})$						
$l_1 \alpha_{2h}$	$(l_1 \alpha_{2h})$						
l_2	(l_2)	$(l_2 \alpha_{23})$	$(l_2 \alpha_{24}) \dots (l_2 \alpha_{2h})$				
$l_2 \alpha_{23}$	$(l_2 \alpha_{23})$						
$l_2 \alpha_{24}$	$(l_2 \alpha_{24})$						
$l_2 \alpha_{2h}$	$(l_2 \alpha_{2h})$						
l_3	(l_3)	$(l_3 \alpha_{23})$	$(l_3 \alpha_{24}) \dots (l_3 \alpha_{2h})$				
$l_3 \alpha_{23}$	$(l_3 \alpha_{23})$						
$l_3 \alpha_{24}$	$(l_3 \alpha_{24})$						
$l_3 \alpha_{2h}$	$(l_3 \alpha_{2h})$						
l_4	(l_4)	$(l_4 \alpha_{23})$	$(l_4 \alpha_{24}) \dots (l_4 \alpha_{2h})$				
$l_4 \alpha_{23}$	$(l_4 \alpha_{23})$						
$l_4 \alpha_{24}$	$(l_4 \alpha_{24})$						
$l_4 \alpha_{2h}$	$(l_4 \alpha_{2h})$						
l_5	(l_5)	$(l_5 \alpha_{23})$	$(l_5 \alpha_{24}) \dots (l_5 \alpha_{2h})$				
$l_5 \alpha_{23}$	$(l_5 \alpha_{23})$						
$l_5 \alpha_{24}$	$(l_5 \alpha_{24})$						
$l_5 \alpha_{2h}$	$(l_5 \alpha_{2h})$						
l_{h+1}	(l_{h+1})	$(l_{h+1} \alpha_{23})$	$(l_{h+1} \alpha_{24}) \dots (l_{h+1} \alpha_{2h})$				
$l_{h+1} \alpha_{23}$	$(l_{h+1} \alpha_{23})$						
$l_{h+1} \alpha_{24}$	$(l_{h+1} \alpha_{24})$						
$l_{h+1} \alpha_{2h}$	$(l_{h+1} \alpha_{2h})$						
$l_{h+1} \lambda_1$	$(l_{h+1} \lambda_1)$						
$l_{h+1} \lambda_2$	$(l_{h+1} \lambda_2)$						
$l_{h+1} \lambda_3$	$(l_{h+1} \lambda_3)$						
$l_{h+1} \lambda_4$	$(l_{h+1} \lambda_4)$						
$l_{h+1} \lambda_5$	$(l_{h+1} \lambda_5)$						
$l_{h+1} \lambda_{5,0}$	$(l_{h+1} \lambda_{5,0})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(1)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(1)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(2)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(2)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(3)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(3)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(4)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(4)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(5)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(5)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(6)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(6)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(7)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(7)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(8)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(8)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(9)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(9)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(10)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(10)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(11)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(11)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(12)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(12)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(13)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(13)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(14)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(14)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(15)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(15)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(16)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(16)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(17)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(17)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(18)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(18)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(19)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(19)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(20)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(20)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(21)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(21)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(22)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(22)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(23)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(23)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(24)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(24)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(25)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(25)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(26)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(26)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(27)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(27)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(28)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(28)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(29)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(29)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(30)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(30)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(31)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(31)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(32)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(32)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(33)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(33)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(34)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(34)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(35)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(35)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(36)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(36)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(37)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(37)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(38)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(38)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(39)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(39)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(40)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(40)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(41)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(41)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(42)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(42)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(43)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(43)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(44)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(44)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(45)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(45)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(46)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(46)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(47)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(47)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(48)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(48)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(49)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(49)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(50)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(50)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(51)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(51)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(52)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(52)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(53)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(53)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(54)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(54)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(55)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(55)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(56)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(56)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(57)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(57)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(58)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(58)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(59)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(59)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(60)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(60)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(61)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(61)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(62)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(62)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(63)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(63)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(64)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(64)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(65)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(65)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(66)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(66)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(67)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(67)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(68)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(68)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(69)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(69)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(70)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(70)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(71)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(71)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(72)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(72)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(73)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(73)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(74)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(74)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(75)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(75)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(76)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(76)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(77)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(77)})$						
$l_{h+1} \lambda_3^{(78)}$	$(l_{h+1} \lambda_3^{(78)})$				</		

bei den Reductionen nötigen Rechnungen schematisch zusammengestellt.

$\alpha_{3,3,2}$				$(\alpha_{3,3,2})$	$(\alpha_{3,4})$	$\dots (\alpha_{3,h})$	(\mathcal{L}_3)	$(\mathcal{L}_3^{(1)})$	$(\mathcal{L}_3^{(2)})$	$(\mathcal{L}_3^{(3)})$
$\alpha_{3,4,2}$				$(\alpha_{3,4,2})$	$(\alpha_{3,4,2} \alpha_{3,4})$					
\vdots	\vdots			\vdots	\vdots					
$\alpha_{3,h,2}$	$\alpha_{4,h,2}$	$\dots \alpha_{h,h,2}$		$(\alpha_{3,h,2})$	$(\alpha_{3,h,2} \alpha_{3,4})$	$\dots (\alpha_{3,h,2} \alpha_{3,h})$				
$\mathcal{L}_{3,2}$	$\mathcal{L}_{4,2}$	$\dots \mathcal{L}_{h,2}$	$\mathcal{L}_{h+1,2}$	$(\mathcal{L}_{3,2})$	$(\mathcal{L}_{3,2} \alpha_{3,4})$	$\dots (\mathcal{L}_{3,2} \alpha_{3,h})$	$(\mathcal{L}_{3,2} \mathcal{L}_3)$			
$\alpha_{1,3,1}$	$\alpha_{1,4,1}$	$\dots \alpha_{1,h,1}$	$\mathcal{L}_{1,1}$	$(\alpha_{1,3,1})$						
	$\alpha_{1,3,1} \alpha_{3,4}$	$\dots \alpha_{1,3,1} \alpha_{3,h}$	$\alpha_{1,3,1} \mathcal{L}_3$	$(\alpha_{1,3,1} \alpha_{3,4})$	$\dots (\alpha_{1,3,1} \alpha_{3,h})$	$(\alpha_{1,3,1} \mathcal{L}_3)$	$(\alpha_{1,3,1} \mathcal{L}_3)$	$(\alpha_{1,3,1} \mathcal{L}_3^{(1)})$		
$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{2,4}$	$\dots \alpha_{2,h}$	\mathcal{L}_2	$(\alpha_{2,3})$						
	$\alpha_{2,3} \alpha_{3,4}$	$\dots \alpha_{2,3} \alpha_{3,h}$	$\alpha_{2,3} \mathcal{L}_3$	$(\alpha_{2,3} \alpha_{3,4})$	$\dots (\alpha_{2,3} \alpha_{3,h})$	$(\alpha_{2,3} \mathcal{L}_3)$	$(\alpha_{2,3} \mathcal{L}_3)$	$(\alpha_{2,3} \mathcal{L}_3^{(1)})$	$(\alpha_{2,3} \mathcal{L}_3^{(2)})$	
u. s. f.										
$\alpha_{h,h,h-1}$				$(\alpha_{h,h,h-1})$	(\mathcal{L}_h)	$(\mathcal{L}_h^{(1)})$	$(\mathcal{L}_h^{(2)})$	$(\mathcal{L}_h^{(h-1)})$	$(\mathcal{L}_h^{(h)})$	
$\mathcal{L}_{h,h-1}$	$\mathcal{L}_{h+1,h-1}$			$(\mathcal{L}_{h,h-1})$	$(\mathcal{L}_{h,h-1} \mathcal{L}_h)$					
$\alpha_{1,h,h-2}$	$\mathcal{L}_{1,h-2}$	$\mathcal{L}_{1,h-2}$		$(\alpha_{1,h,h-2})$	$(\alpha_{1,h,h-2} \mathcal{L}_h)$	$(\alpha_{1,h,h-2} \mathcal{L}_h^{(1)})$				
	$\alpha_{1,h,h-3}$	$\alpha_{2,h,h-3}$	$\mathcal{L}_{2,h-3}$	$(\alpha_{2,h,h-3})$	$(\alpha_{2,h,h-3} \mathcal{L}_h)$	$(\alpha_{2,h,h-3} \mathcal{L}_h^{(1)})$	$(\alpha_{2,h,h-3} \mathcal{L}_h^{(2)})$			
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\alpha_{h-2,h,1}$	$\mathcal{L}_{h-2,h-1}$	$\mathcal{L}_{h-2,h-1}$		$(\alpha_{h-2,h,1})$	$(\alpha_{h-2,h,1} \mathcal{L}_h)$	$(\alpha_{h-2,h,1} \mathcal{L}_h^{(1)})$	$(\alpha_{h-2,h,1} \mathcal{L}_h^{(2)})$			
	$\alpha_{h-2,h,1} \mathcal{L}_h$	$\alpha_{h-1,h,1}$	\mathcal{L}_{h-1}	$(\alpha_{h-1,h,1})$	$(\alpha_{h-1,h,1} \mathcal{L}_h)$	$(\alpha_{h-1,h,1} \mathcal{L}_h^{(1)})$	$(\alpha_{h-1,h,1} \mathcal{L}_h^{(2)})$			
$\alpha_{h-1,h}$	\mathcal{L}_{h-1}	\mathcal{L}_{h-1}		$(\alpha_{h-1,h})$	$(\alpha_{h-1,h} \mathcal{L}_h)$	$(\alpha_{h-1,h} \mathcal{L}_h^{(1)})$	$(\alpha_{h-1,h} \mathcal{L}_h^{(2)})$	$(\alpha_{h-1,h} \mathcal{L}_h^{(h-1)})$	$(\alpha_{h-1,h} \mathcal{L}_h^{(h)})$	

Die vorletzte, die hte, Reduction ist

Die letzte Reduction giebt

$$\begin{array}{ccccccc}
 l_{h+1,h} & & & & & & \\
 \chi_{1,h-1} & \chi_{1,h-1}^{(1)} & & & & & \\
 \chi_{2,h-2} & \chi_{2,h-2}^{(1)} & \chi_{2,h-2}^{(2)} & & & & \\
 \chi_{3,h-3} & \chi_{3,h-3}^{(1)} & \chi_{3,h-3}^{(2)} & \cdots & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
 \chi_{h-1,1} & \chi_{h-1,1}^{(1)} & \chi_{h-1,1}^{(2)} & \cdots & \chi_{h-1,1}^{(h-1)} & & \\
 \chi_h & \chi_h^{(1)} & \chi_h^{(2)} & \cdots & \chi_h^{(h-1)} & \chi_h^{(h)} &
 \end{array}$$

und damit sind alle nötigen Zahlen gewonnen.

Es ist nämlich von den Werten der ersten Columnne der erste Wert

$$l_{h+1,h} = [p'v^2].$$

Die folgenden Werte dieser ersten Columnne geben in der Folge von oben nach unten die h gesuchten Grössen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_h$.

Die Werte der nächst folgenden Columnnen mit den entgegengesetzten Zeichen genommen sind die zur Berechnung der mittlern Fehler der gesuchten Grössen, sowie der irgend welcher Functionen dieser gesuchten Grössen nötigen coordinirten Coefficienten

$$\begin{array}{ccccccc}
 r_1^{(1)} & & & & & & \\
 r_2^{(1)} & r_2^{(2)} & & & & & \\
 r_3^{(1)} & r_3^{(2)} & & & & & \\
 \vdots & \vdots & & & & & \\
 r_{h-1}^{(1)} & r_{h-1}^{(2)} & \cdots & r_{h-1}^{(h-1)} & & & \\
 r_h^{(1)} & r_h^{(2)} & \cdots & r_h^{(h-1)} & r_h^{(h)} & &
 \end{array}$$

Man hat also hiernach für die gesuchten Grössen

$$\begin{array}{l}
 \xi_1 = \chi_{1,h-1}, \\
 \xi_2 = \chi_{2,h-2}, \\
 \xi_3 = \chi_{3,h-3}, \\
 \vdots \\
 \xi_{h-1} = \chi_{h-1,1}, \\
 \xi_h = \chi_h,
 \end{array}$$

für den mittlern Fehler einer Beobachtungsgleichung vom Gewicht 1

$$\text{g) } \bar{\mu} = \sqrt{\frac{l_{h+1,h}}{(n-h)}},$$

Also: zu den $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h$ sucht man die Logarithmen $(\xi_1), (\xi_2), \dots, (\xi_h)$, und bekommt durch Addition zu den Zeilen des Systems b_2)

$$\begin{array}{l}
 q_1) \quad \left(\xi_1 \sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_1} \right) \quad \left(\xi_1 \sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_1} \right) \cdots \left(\xi_1 \sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_1} \right) \\
 \left(\xi_2 \sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_2} \right) \quad \left(\xi_2 \sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_2} \right) \cdots \left(\xi_2 \sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_2} \right) \\
 \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \left(\xi_h \sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_h} \right) \quad \left(\xi_h \sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_h} \right) \cdots \left(\xi_h \sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_h} \right) \\
 \left(\sqrt{p'_1} \Phi'_1 \right) \quad \left(\sqrt{p'_2} \Phi'_2 \right) \quad \cdots \quad \left(\sqrt{p'_n} \Phi'_n \right)
 \end{array}$$

und indem man dazu die Numeri aufschlägt und die Zahlen jeder Columnne summirt, erhält man

$$\begin{array}{l}
 q_2) \quad \xi_1 \sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_1} \quad \xi_1 \sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_1} \cdots \xi_1 \sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_1} \\
 \xi_2 \sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_2} \quad \xi_2 \sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_2} \cdots \xi_2 \sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_2} \\
 \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \xi_h \sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_h} \quad \xi_h \sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_h} \cdots \xi_h \sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_h} \\
 \hline
 \sqrt{p'_1} \Phi'_1 \quad \sqrt{p'_2} \Phi'_2 \quad \cdots \quad \sqrt{p'_n} \Phi'_n \\
 \hline
 \text{Summen: } \sqrt{p'_1} v_1 = \quad \sqrt{p'_2} v_2 = \quad \cdots \quad \sqrt{p'_n} v_n =
 \end{array}$$

Die unter der Linie stehenden Zahlen quadriert und addirt geben $[p'v^2]$ und es muss sein, wenn die Rechnung richtig ausgeführt ist,

$$r) \quad [p'v^2] = l_{h+1, h}$$

Eine andere Formel ist auch

$$s) \quad [p'v^2] = l_{h+1} - \xi_1 l_1 - \xi_2 l_2 - \cdots - \xi_h l_h$$

$l_1, l_2, \dots, l_h, l_{h+1}$ stehen in den letzten Columnen des Systems c_1).

Beide Formeln müssen so genau erfüllt sein, als es die Rechnung zulässt, denn analytisch sind sie beide streng richtig.

Bei einfachen Messungen hatten wir eine sehr bequeme Controle in der Formel $[p'v] = 0$, bei Untersuchungen ist aber $[p'v]$ nicht notwendig Null.

Ein Beispiel für die zahlenmässige Ausführung einer Ausgleichung nach diesem Schema findet sich in Art. 280b

f₁) *Berücksichtigung von Bedingungsgleichungen zwischen den gesuchten Grössen.*

273. Die Normalgleichungen. Wenn zwischen den gesuchten Grössen Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} & f_1(x_1, x_2, \dots, x_h) = 0, \\ \text{a)} \quad & f_2(x_1, x_2, \dots, x_h) = 0, \\ & \vdots \\ & f_v(x_1, x_2, \dots, x_h) = 0, \end{aligned}$$

die selbst keine beobachteten, oder nur als fehlerfrei anzusehende Grössen enthalten, streng zu erfüllen sind, so rechnet man zunächst genau so wie früher aus den Beobachtungsgleichungen das System c) der *a* und *l*.

Ferner bildet man durch Differentiation jedes der *f* nach jedem der *x* das System

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f_v}{\partial x_1}, \\ \text{b')} \quad & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f_v}{\partial x_2}, \\ & \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ & \frac{\partial f_1}{\partial x_h} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_h} \quad \dots \quad \frac{\partial f_v}{\partial x_h}. \end{aligned}$$

Ersetzt man in den analytischen Ausdrücken der einzelnen Derivierten die *x* durch ihre Näherungswerte *x'*, so geht das obige System über in das Zahlensystem

$$\begin{aligned} & b_{11} \quad b_{12} \quad \dots \quad b_{1v}, \\ \text{b)} \quad & b_{21} \quad b_{22} \quad \dots \quad b_{2v}, \\ & \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ & b_{h1} \quad b_{h2} \quad \dots \quad b_{hv}. \end{aligned}$$

Endlich ersetzt man noch in den *f* selbst die *x* durch ihre Näherungswerte *x'* und nimmt die so resultirenden *v* Zahlen mit den entgegengesetzten Zeichen. Es kommt dann das System

$$\text{c)} \quad m_1 = -f_1, \quad m_2 = -f_2', \quad m_v = -f_v',$$

und das zu behandelnde System Normalgleichungen lautet

f₂) *Beobachtete Grössen haben Bedingungsgleichungen, in welchen noch unbekannte Grössen enthalten sind, streng zu erfüllen (Erweiterung zu Art. 200).*

275. Es seien die beobachteten Grössen $g_1, g_2, \dots, g_{k'}$, ihre bezüglichen Gewichte $p_1, p_2, \dots, p_{k'}$, die gesuchten Grössen wieder x_1, x_2, \dots, x_h , die streng zu erfüllenden Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} f_1(g_1, g_2, \dots, g_{k'}; x_1, x_2, \dots, x_h) &= 0, \\ f_2(g_1, g_2, \dots, g_{k'}; x_1, x_2, \dots, x_h) &= 0, \\ &\vdots \\ f_v(g_1, g_2, \dots, g_{k'}; x_1, x_2, \dots, x_h) &= 0, \end{aligned}$$

der Fall hat nur Bedeutung für

$$h + h' > v.$$

Man denkt sich zu den beobachteten Grössen Verbesserungen $r_1, r_2, \dots, r_{k'}$ hinzugefügt, führt für die x wieder Näherungsbeträge ein, und rechnet die Verbesserungen ξ der x' und die Verbesserungen r zusammen mit v Correlaten x_1, x_2, \dots, x_v aus den $h + h' + v$ Gleichungen des folgenden Systems aus:

$$\begin{aligned} p_1 r_1 + x_1 \frac{\partial f'_1}{\partial g_1} + x_2 \frac{\partial f'_2}{\partial g_1} + \dots + x_v \frac{\partial f'_v}{\partial g_1} &= 0, \\ p_2 r_2 + x_1 \frac{\partial f'_1}{\partial g_2} + x_2 \frac{\partial f'_2}{\partial g_2} + \dots + x_v \frac{\partial f'_v}{\partial g_2} &= 0, \\ &\vdots \\ p_{k'} r_{k'} + x_1 \frac{\partial f'_1}{\partial g_{k'}} + x_2 \frac{\partial f'_2}{\partial g_{k'}} + \dots + x_v \frac{\partial f'_v}{\partial g_{k'}} &= 0; \\ x_1 \frac{\partial f'_1}{\partial x'_1} + x_2 \frac{\partial f'_2}{\partial x'_1} + \dots + x_v \frac{\partial f'_v}{\partial x'_1} &= 0, \\ x_1 \frac{\partial f'_1}{\partial x'_2} + x_2 \frac{\partial f'_2}{\partial x'_2} + \dots + x_v \frac{\partial f'_v}{\partial x'_2} &= 0, \\ &\vdots \\ x_1 \frac{\partial f'_1}{\partial x'_h} + x_2 \frac{\partial f'_2}{\partial x'_h} + \dots + x_v \frac{\partial f'_v}{\partial x'_h} &= 0; \\ f'_1 + \xi_1 \frac{\partial f'_1}{\partial x'_1} + \xi_2 \frac{\partial f'_1}{\partial x'_2} + \dots + \xi_h \frac{\partial f'_1}{\partial x'_h} + r_1 \frac{\partial f'_1}{\partial g_1} + r_2 \frac{\partial f'_1}{\partial g_2} + \dots + r_{k'} \frac{\partial f'_1}{\partial g_{k'}} &= 0, \\ f'_2 + \xi_1 \frac{\partial f'_2}{\partial x'_1} + \xi_2 \frac{\partial f'_2}{\partial x'_2} + \dots + \xi_h \frac{\partial f'_2}{\partial x'_h} + r_1 \frac{\partial f'_2}{\partial g_1} + r_2 \frac{\partial f'_2}{\partial g_2} + \dots + r_{k'} \frac{\partial f'_2}{\partial g_{k'}} &= 0, \\ &\vdots \\ f'_v + \xi_1 \frac{\partial f'_v}{\partial x'_1} + \xi_2 \frac{\partial f'_v}{\partial x'_2} + \dots + \xi_h \frac{\partial f'_v}{\partial x'_h} + r_1 \frac{\partial f'_v}{\partial g_1} + r_2 \frac{\partial f'_v}{\partial g_2} + \dots + r_{k'} \frac{\partial f'_v}{\partial g_{k'}} &= 0. \end{aligned}$$

Zur Aufstellung dieser Gleichungen hat man jedes der f nach allen g und nach allen x zu differenzieren und in die so erhaltenen Ausdrücke für die Derivirten, wie in die f selbst, die x durch ihre Näherungswerte, die x' , zu ersetzen. Man bekommt so die beiden nötigen Zahlensysteme

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial f'_1}{\partial g_1} & \frac{\partial f'_2}{\partial g_1} & \cdots \frac{\partial f'_v}{\partial g_1}, \\ \frac{\partial f'_1}{\partial g_2} & \frac{\partial f'_2}{\partial g_2} & \cdots \frac{\partial f'_v}{\partial g_2}, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f'_1}{\partial g'_h} & \frac{\partial f'_2}{\partial g'_h} & \cdots \frac{\partial f'_v}{\partial g'_h}, \\ \\ \frac{\partial f'_1}{\partial x'_1} & \frac{\partial f'_2}{\partial x'_1} & \cdots \frac{\partial f'_v}{\partial x'_1}, \\ \frac{\partial f'_1}{\partial x'_2} & \frac{\partial f'_2}{\partial x'_2} & \cdots \frac{\partial f'_v}{\partial x'_2}, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f'_1}{\partial x'_h} & \frac{\partial f'_2}{\partial x'_h} & \cdots \frac{\partial f'_v}{\partial x'_h}, \\ f'_1 & f'_2 & \cdots f'_v. \end{array}$$

Die Zahlen des ersten Systems sind in derselben Anordnung die Coefficienten der ersten Reihe von Gleichungen, die des zweiten mit Ausschluss der letzten Zeile, in derselben Anordnung die Coefficienten der zweiten Reihe von Gleichungen, beide Systeme zusammen, aber so angeordnet, dass die Columnen in Zeilen gesetzt werden, geben die Coefficienten der dritten Reihe von Gleichungen. Bei der Ausrechnung von χ , ξ und α führt man erst die Ausdrücke der χ aus der ersten Reihe von Gleichungen in die dritte Reihe ein, so bekommt man zwei Reihen von Gleichungen zur Berechnung der ξ und der α . Hat man diese Grössen erhalten, so giebt die erste Reihe von Gleichungen die Werte der χ .

Der mittlere Fehler einer der Beobachtungsgrössen ist

$$\mu_{g_x} = \sqrt{\frac{[p\chi^2]}{p_x(v-h)}},$$

und der mittlere Fehler einer Function F' der Beobachtungsgrössen

$$\mu_{F'} = \sqrt{\frac{[p\chi^2]}{v-h}} \sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial g_1}\right)^2 \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial F'}{\partial g_2}\right)^2 \frac{1}{p_2} + \cdots + \left(\frac{\partial F'}{\partial g_h}\right)^2 \frac{1}{p_h}}.$$

Die Aufgabe ist darum eine Erweiterung der in Art. 200 in ihrer systematischen Behandlung dargelegten, weil hier noch eine Anzahl unbekannter Grössen mit zu berechnen ist.

g) *Ausgleichung abhängiger Beobachtungen.*

276. Als abhängige Beobachtungsgleichungen haben wir diejenigen bezeichnet, bei denen zu beobachtende Grössen nicht auch für alle Gleichungen für sich beobachtet sind, wo also für gewisse Elemente ihre einmal gewonnenen Beträge in einer ganzen Anzahl von Beobachtungsgleichungen Verwendung finden.

Abhängige Beobachtungsgleichungen treten meist da auf, wo den Messungen vergängliche Substrate zu Grunde liegen, und bei solchen Elementen, deren Beträge lediglich Ausgangswerte für die Beträge anderer Elemente liefern.

Kann die Abhängigkeit der Gleichungen von einander durch die Anordnung und Ausführung von Beobachtungen vermieden werden, so soll es auch unter allen Umständen geschehen.

Vor der Ausgleichung hat man die Beobachtungsgleichungen so zu transformiren, dass die Abhängigkeit durch die geringstmögliche Anzahl von Elementen bewerkstelligt wird.

Abhängige Beobachtungsgleichungen sind mit einander verkettet, wenn immer auf einander folgende Gleichungen ganz besonders zu einander in Beziehung stehen. Sie sind mit einander verbunden, wenn die die Abhängigkeit bewerkstelligenden Elemente in allen gleichartig vertreten sind.

Verkettete Gleichungen sind durch Transformation und Elimination in verbundene überzuführen.

Es seien die die Verbindung bewerkstelligenden Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k'}$, die andern Elemente, die gesuchten Grössen und die Beobachtungsgleichungen werden wie früher bezeichnet.

Man fügt zu den verbindenden Elementen α wahrscheinlichste Verbesserungen r hinzu und berechnet diese Verbesserungen zusammen mit den gesuchten Grössen x so, wie wenn das System der Beobachtungsgleichungen wäre

$$\begin{aligned}
 0 &= r_1, \\
 0 &= r_2, \\
 &\vdots \\
 0 &= r_{k'}; \\
 0 &= \Phi_1(\alpha_1 + r_1, \alpha_2 + r_2, \dots, \alpha_{k'} + r_{k'}; a_1, b_1, \dots, g_1; x_1, x_2, \dots, x_h), \\
 0 &= \Phi_2(\alpha_1 + r_1, \alpha_2 + r_2, \dots, \alpha_{k'} + r_{k'}; a_2, b_2, \dots, g_2; x_1, x_2, \dots, x_h), \\
 &\vdots \\
 0 &= \Phi_n(\alpha_1 + r_1, \alpha_2 + r_2, \dots, \alpha_{k'} + r_{k'}; a_n, b_n, \dots, g_n; x_1, x_2, \dots, x_h).
 \end{aligned}$$

Als Gewichte der k' ersten Gleichungen sind die Gewichte der bezüglichen α anzusehen, die Gewichte der n folgenden Gleichungen sind so zu berechnen, wie wenn die α fehlerfreie Zahlen wären.

Es sind also diese Gewichte

$$p_1 = p_{\alpha_1},$$

$$p_2 = p_{\alpha_2},$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$p_k = p_{\alpha_k},$$

$$p'_1 = \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi'_1}{\partial a_1}\right)^2 \mu_{a_1}^2 + \left(\frac{\partial \Phi'_1}{\partial b_1}\right)^2 \mu_{b_1}^2 + \dots + \left(\frac{\partial \Phi'_1}{\partial g_1}\right)^2 \mu_{g_1}^2},$$

$$p'_2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi'_2}{\partial a_2}\right)^2 \mu_{a_2}^2 + \left(\frac{\partial \Phi'_2}{\partial b_2}\right)^2 \mu_{b_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial \Phi'_2}{\partial g_2}\right)^2 \mu_{g_2}^2},$$

$$\vdots$$

$$p'_n = \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi'_n}{\partial a_n}\right)^2 \mu_{a_n}^2 + \left(\frac{\partial \Phi'_n}{\partial b_n}\right)^2 \mu_{b_n}^2 + \dots + \left(\frac{\partial \Phi'_n}{\partial g_n}\right)^2 \mu_{g_n}^2}.$$

Die Φ' entstehen aus den Φ dadurch, dass in diesen die x durch ihre Näherungswerte x' , die ζ durch Null ersetzt werden. Die weitere Rechnung ist genau nach dem gegebenen Ausgleichungsschema zu führen, nur tritt als grundlegendes Zahlensystem, durch welches die a und l zu berechnen sind, an Stelle des dort unter b) angegebenen Systems das

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_1} & \sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_1} & \dots & \sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_1}, \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_2} & \sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_2} & \dots & \sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_2}, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_h} & \sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_h} & \dots & \sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_h}, \\ \sqrt{p_{\alpha_1}} & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial r_1} & \sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial r_1} & \dots & \sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial r_1}, \\ 0 & \sqrt{p_{\alpha_2}} & 0 & \dots & 0 & \sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial r_2} & \sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial r_2} & \dots & \sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial r_2}, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{p_{\alpha_h}} & \sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial r_k} & \sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial r_k} & \dots & \sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial r_k}, \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\sqrt{p'_1} \Phi'_1 & -\sqrt{p'_2} \Phi'_2 & \dots & -\sqrt{p'_n} \Phi'_n. \end{array}$$

Aus diesem System sind die Coefficienten a der Normalgleichungen und die Grössen l zu berechnen. Die Normalgleichungen zur Berechnung der ξ und γ lauten dann

$$\begin{aligned} a_{11} \xi_1 + a_{12} \xi_2 + \dots + a_{1h} \xi_h + a_{1h+1} \gamma_1 + a_{1h+2} \gamma_2 + \dots + a_{1h+h'} \gamma_{h'} &= l_1, \\ a_{21} \xi_1 + a_{22} \xi_2 + \dots + a_{2h} \xi_h + a_{2h+1} \gamma_1 + a_{2h+2} \gamma_2 + \dots + a_{2h+h'} \gamma_{h'} &= l_2, \\ \vdots & \\ a_{h+h'-1} \xi_1 + a_{h+h'-2} \xi_2 + \dots + a_{h+h'-h} \xi_h + a_{h+h'-h+1} \gamma_1 + a_{h+h'-h+2} \gamma_2 + \dots + a_{h+h'-h+h'} \gamma_{h'} &= l_{h-h} \end{aligned}$$

den Reductionen der Normalgleichungen ist also das System

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & & & & & & \\ a_{12} & a_{22} & & & & & \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ a_{1h+h'} & a_{2h+h'} & a_{3h+h'} & \dots & a_{h+h'h+h'} & & \\ l_1 & l_2 & l_3 & \dots & l_{h+h'} & l_{h+h'+1} & \end{array}$$

zu Grunde zu legen.

Die Anzahl der zu berechnenden Grössen ist $h+h'$, die der Beobachtungsgleichungen $n+h'$, überschüssige Gleichungen sind also $n-h$ vorhanden und darum ist der Fehler für eine Beobachtungsgleichung vom Gewicht 1, die für die ganze Fehlerrechnung massgebende Zahl,

$$\bar{p} = \sqrt{\frac{[p_\alpha r^2] + [p' v^2]}{n-h}},$$

woselbst eines der v , etwa v_x , bestimmt ist durch

$$-v_x = \Phi'_x + \left[\xi \frac{\partial \Phi'_x}{\partial x'} \right] + \left[\gamma \frac{\partial \Phi'_x}{\partial \alpha} \right]$$

und

$$\Phi'_x = \Phi_x(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; a_x, b_x, \dots, g_x; x'_1, x'_2, \dots, x'_h)$$

ist.

Weiteres hinzuzufügen ist nicht nötig; auch die Formel für \bar{p} bietet nichts besonderes, denn die γ sind die übrig bleibenden Fehler der h' ersten, die v die der n folgenden Beobachtungsgleichungen.

XXIII. Kritik von Untersuchungen.

277. Kritische Arbeiten vor der Ausgleichung. Die Kritik von Untersuchungen schliesst sich eng an die von einfachen und zusammengesetzten Messungen an.

Vor der eigentlichen Messung hat man an der Hand der bei den Auseinandersetzungen über die Kritik zusammengesetzter Messungen gegebenen Regeln für jedes der in Aussicht genommenen Systeme der zu messenden Elemente und damit auch für jede der aufzustellenden Beobachtungsgleichungen die wünschenswerte Genauigkeit zu fixiren und die Messungen dann so einzurichten, dass diese Genauigkeit erreicht werden kann. Man wird dabei nicht umhin können sowohl für die bei den einzelnen Elementen in der Messung erreichbare Genauigkeit als auch für die Beträge der gesuchten Grössen sich genäherte Werte zu verschaffen.

Die genäherten mittlern Fehler für die Messungen der einzelnen Elemente erlangt man, wie schon oft bemerkt, durch ein Studium der Apparate und aller bei den einzelnen Messungen möglichen Fehler, oft auch durch Heranziehung anderweitiger Untersuchungen, bei denen ähnliche Elemente gemessen worden sind. Weil die Anzahl der Messungen unterliegenden Elemente überhaupt eine beschränkte ist, trifft man bei den verschiedenen Untersuchungen immer wieder auf dieselben Elemente, und da auch im allgemeinen dieselben Apparate bei den verschiedenartigsten Untersuchungen zur Anwendung kommen, wird es, wenn man die Apparate, mit denen man arbeitet, in Bezug auf ihre Leistungsfähigkeit einigermaßen kennt, nicht schwer fallen, sich von den Werten der bezeichneten mittlern Fehler genäherte Kenntnis zu verschaffen.

Was die genäherten Werte für die zu bestimmenden Grössen anbetrifft, so ist man namentlich bei Untersuchungen, die einen metronomischen Zweck haben, sehr oft in der Lage, sie unmittelbar angeben zu können. Wo das nicht der Fall ist, tut man gut, der eigentlichen Untersuchung eine kleine Voruntersuchung vorausgehen zu lassen, die solche genäherte Beträge zu liefern im Stande ist. Eine solche Voruntersuchung ist aber auch sonst sehr wünschenswert, da man so am sichersten über das Verhältnis der wünschenswerten Genauigkeit zur erreichbaren aufgeklärt wird.

278. Systematische Fehler in den einzelnen Beobachtungsgleichungen. Nach der Ausführung der verschiedenen Messungen sind die für die einzelnen Elemente in den einzelnen Beobachtungsgleichungen erhaltenen Beträge einer Discussion zu unterziehen. Der Zweck dieser Discussion ist zu entscheiden erstens, ob diese Beträge auch frei von systematischen Fehlern sind, und zweitens die Berechnung der Gewichte der Beobachtungsgleichungen zu ermöglichen.

Systematische Verfälschungen können nun bei Untersuchungen in doppelter Gestalt auftreten. Zunächst können die Messungen eines Elements für eine bestimmte Beobachtungsgleichung in der Art, wie wir es bei

einfachen und zusammengesetzten Messungen gesehen haben, systematisch verfälscht sein. Die Angabe für den Betrag dieses Elements in der betreffenden Beobachtungsgleichung ist dann sicher mit einem Fehler behaftet. Diese systematischen Verfälschungen sind nach den in den Capiteln VII und XIII gegebenen Regeln an den für die einzelnen Elemente in den diesbezüglichen Untersuchungen erhaltenen Fehlern zu verfolgen. Sie sind ferner in dem Capitel XXII, welches von der Berechnung der Gewichte handelt, discutirt, und dort ist auch ihre Aufdeckung und Eliminirung in Beispielen dargelegt.

279 a. Systematische Verfälschungen der Beobachtungsgleichungen gegen einander. Notwendigkeit von Nebenuntersuchungen. Zweitens können in Untersuchungen systematische Verfälschungen dadurch hineinkommen, dass beim Uebergang von einer Beobachtungsgleichung zu einer andern die Beträge gewisser Elemente systematisch verfälscht werden. Hier beziehen sich also die Worte „systematische Verfälschung“ auf die Beträge eines Elements in den verschiedenen Beobachtungsgleichungen.

Zur Entscheidung über die so entstehenden systematischen Verfälschungen der Beobachtungsgleichungen gegen einander haben wir vor allen Dingen die Veränderungen zu studiren, welche die zu den Messungen dienenden Apparate, sowie die Substrate, an denen die betreffenden Elemente gemessen werden, im Laufe der Untersuchung erleiden können. Ein derartiges Studium erfordert meist eine ganze Reihe oft sehr schwieriger Nebenuntersuchungen. Allgemeine Regeln hier aufzustellen, hätte nicht viel Wert; es ist besser, bei den einzelnen Untersuchungen auf die Besonderheiten hinzuweisen. Das wird im zweiten Bande geschehen. Einige Beispiele sollen aber hier schon zeigen, worauf es ankommt.

279 b. Beispiel. Gesetzt, man habe die Aenderung der elektrischen Leitungsfähigkeit des Quecksilbers mit wachsender Temperatur zu untersuchen. Man bringt zu dem Behufe das Quecksilber in eine Glasröhre von bekannten Dimensionen und bekannter thermischer Ausdehnung, die mit ihren Enden in grosse mit Quecksilber gefüllte Gefässe mündet. Dann schaltet man die Röhre in den Kreis eines elektrischen Stromes, indem man die den Strom zu- und ableitenden Elektroden in die Quecksilbergefässe hineintut. Man erhebt nun die Röhre, aber nur diese, auf verschiedene Temperaturen und misst jedesmal bei unveränderter äusserer Schliessung und unverändertem Element den Widerstand. Findet man dann bei den verschiedenen Temperaturen verschiedene Widerstände, so rührt das eben daher, dass der Widerstand, den der Strom zu überwinden hat, von der Temperatur der Röhre und des in ihr enthaltenen Quecksilbers abhängt. Man bekommt so eine Reihe von Beobachtungsgleichungen

$$\begin{aligned} W_1 &= F(t_1), \\ W_2 &= F(t_2), \\ &\vdots \\ W_n &= F(t_n), \end{aligned}$$

wo die W die bei den gemessenen Temperaturen t gemessenen Widerstände angeben, und kann aus diesen Gleichungen die in der Function vorhandenen unbekanntem Coefficienten bestimmen.

So weit ist alles correct. Allein, wenn man nunmehr schliessen wollte, die Gleichung $W = F(t)$ stelle den Widerstand des Quecksilbers als Function der Temperatur dar, würde man einen systematischen Fehler begehen. In der Tat ist man nicht in der Lage, das Quecksilber in der Röhre für sich allein zu erwärmen, ohne zugleich die Röhre mit zu erwärmen. Nun ist zwar Glas bei gewöhnlichen Temperaturen als Isolator zu betrachten, aber es gewinnt doch mit wachsender Temperatur mehr und mehr an Leitungsfähigkeit. Das Quecksilber verliert mit wachsender Temperatur an Leitungsfähigkeit. Es erfährt also der Widerstand mit wachsender Temperatur beim Quecksilber eine Steigerung, bei der Glasröhre eine Verminderung, wenn man die gefundene Gleichung $W = F(t)$ allein auf das Quecksilber bezieht, setzt man die Aenderung des Widerstandes des Quecksilbers mit steigender Temperatur zu niedrig an. Die Beobachtungsgleichungen sind also hier dadurch gegen einander systematisch verfälscht, dass der Aenderung des Widerstandes der Glasröhre nicht Rechnung getragen ist. In einer Nebenuntersuchung hat man, wo es darauf ankommt, erst diese Aenderung zu constatiren und zahlenmässig zu fixiren, oder die Gleichung $W = F(t)$ stellt nicht die wirkliche Aenderung des Widerstandes des Quecksilbers mit wachsender Temperatur dar, sondern nur die scheinbare, das heisst diese Aenderung in der betreffenden Glasröhre.

279 c. Aufhebung der systematischen Verfälschung durch Deutung der durch die Beobachtungsgleichungen erlangten Resultate. Ich mache hier gleich auf einen wichtigen Punkt aufmerksam. Man kann hier die systematische Verfälschung der Beobachtungsgleichungen gegen einander einmal durch die Nebenuntersuchung in Bezug auf die Leitungsfähigkeit der angewandten Röhre unschädlich machen, man kann sie aber auch, wie man sieht, durch die geeignete Deutung der erhaltenen Resultate heben. Indessen sind das nicht verschiedene Gesichtspunkte, gerade auf die Deutung der Resultate kommt es an, weiss man erst, was man durch die einzelnen Beobachtungsgleichungen erhält, so hat man den betreffenden Untersuchungen auch schon ihren Wert verliehen. In der Tat sind ja systematische Verfälschungen „Verfälschungen“ nur in Bezug auf das Resultat, welches man gerade erzielen will, deutet man das Erlangte richtig, so kann man nicht mehr von „Verfälschungen“ reden, man kann nur sagen, die betreffende Untersuchung für sich reiche nicht aus, das verlangte Resultat rein zu erzielen, man müsse noch eine oder mehrere Nebenuntersuchungen anstellen, um auch die bei den betreffenden Untersuchungen mitspielenden andern Verhältnisse kennen zu lernen.

Dass es aber nicht immer leicht ist, die erlangten Resultate richtig zu deuten, hat die Entwicklung unserer Wissenschaft oft genug gezeigt.

279 d. Fortführung des Beispiels. Ich gehe, um unser Beispiel weiter auszuführen, auch auf die zweite gemessene Grösse ein, auf die Temperatur. Man besitzt bekanntlich zur Maassbestimmung der Temperatur verschiedene Festsetzungen. Darauf kommt es aber nicht an, wenn nur hinzugefügt wird, welche dieser Festsetzungen zur Anwendung gebracht ist. Es werde die Temperatur mit einem Quecksilberthermometer gemessen. Die Angaben eines solchen Thermometers sind nicht ohne weiteres zu benutzen, man muss erst die Fehler, mit denen diese Angaben behaftet sind, ermitteln. Nach den gewöhnlichen Vorschriften bestimmt man an dem Thermometer: Die Teilungsfehler der Scale, die Kaliberfehler der Capillare, die Lage der Scale mit Bezug auf die Stellung des Quecksilberfadens bei einer bestimmten Temperatur (wozu man die Temperatur des schmelzenden Eises verwendet), endlich den Wert der einzelnen Teilintervalle in Graden ausgedrückt. Wäre nun das Quecksilberthermometer ein unveränderliches Instrument, so würde man also aus der Ablesung desselben die Temperatur in der bei solchen Thermometern üblichen Definition erhalten, wenn man diese Ablesung für Teilung, Caliber, Nullpunkt und Gradwert corrigirte. Nun lehrt aber die Erfahrung, dass man bei einem Quecksilberthermometer zwar Teilung, Caliber und Gradwert (letzteren geeignet definiert) als unveränderlich betrachten darf, dass aber die Lage des Nullpunkts auf der Scale im Laufe der Zeit mehr und mehr in die Höhe rückt, weil das Quecksilbergefäss sich stetig zusammenzieht. Brächte man hiernach bei allen Temperaturablesungen eine und dieselbe Correction für den Nullpunkt, etwa diejenige an, die man im Beginn der Untersuchung gefunden hat, so würden die Werte der t immer falscher werden, je weiter man in der Untersuchung kommt, und die Beobachtungsgleichungen würden gegen einander systematisch verfälscht sein. Wenn man diese Verfälschung unschädlich machen will, hat man eine Nebenuntersuchung über die Veränderung der Nullpunkts correction mit der Zeit anzustellen und die Temperaturablesungen nach dem aus dieser Nebenuntersuchung abzuleitenden Gesetz für den Nullpunkt zu corrigiren. Aber die Erfahrung hat noch mehr gelehrt, sie zeigte, dass auch jede Temperaturänderung die Nullpunkts correction beeinflusst, jeder Temperatur entspricht eine besondere Nullpunkts correction. Man muss also auch hierfür eine Nebenuntersuchung anstellen. Sollen die so nötigen beiden Nebenuntersuchungen nur für die betreffende Untersuchung Bedeutung haben, so kann man sie mit einander verbinden, und es reicht dann aus, wenn man die Nullpunkts correction bei jeder Temperatur unmittelbar, nachdem man diese gemessen, gesondert bestimmt.

Es sind so in unserm Beispiel gleich die beiden Hauptursachen systematischer Verfälschungen zur Sprache gebracht, die eine Ursache ist durch den äussern Umstand bedingt, dass wir die Quecksilbermasse in eine Röhre bringen müssen, die nicht bei allen Temperaturen gleich gut isolirt; die andere verdankt der Veränderlichkeit eines messenden Instruments ihre Entstehung.

Und ganz in derselben Weise kommen die meisten und wichtigsten systematischen Verfälschungen bei Untersuchungen zu Wege.

Das nähere ist in dem ersten Capitel dieses Buches ausgeführt, und wird in dem zweiten Bande an den geeigneten Stellen speciell hervorgehoben werden.

280. Die Trennung der einzelnen Verfälschungen von einander. Es ist nun nicht immer möglich, die Untersuchungen so auszuführen und mit einer solchen Fülle von Nebenuntersuchungen auszustatten, dass man die systematischen Verfälschungen von vornherein unschädlich zu machen im Stande ist. Man muss dann die Ergebnisse der Untersuchung selbst einer Kritik unterwerfen; aber hier tritt gleich eine grosse Schwierigkeit auf. Die einzigen Grössen, die uns über etwa noch vorhandene systematische Versehen aufzuklären vermögen, sind die übrig bleibenden Fehler der Beobachtungsgleichungen nach Ausführung der Ausgleichung. Diese sind aber selbst zusammengesetzte Grössen, und zwar bedingt durch die Fehler der gemessenen Elemente. Wir sind daher zwar in der Lage, durch die Fehlerreihe auf im Ganzen vorhandene systematische Verfälschungen zu schliessen, aber wir können nicht die einzelnen systematischen Verfälschungen von einander trennen, wir erfahren nicht, welche Elemente und welche Messungen zu den systematischen Verfälschungen Veranlassung gegeben haben.

Für die Verwendbarkeit des Resultats der Untersuchung ist es zwar gleichgiltig, wie die etwa vorhandene ganze systematische Verfälschung entstanden ist, aber nicht blos die Wissenschaft hat ein Interesse daran, die einzelnen Fehlerquellen von einander zu trennen, sondern auch der Praxis muss namentlich bei Untersuchungen, welche öfter zu wiederholen sind, daran liegen, diese Fehlerquellen selbst aufzudecken.

Rein durch Rechnung, ohne Hinzuziehung von Nebenuntersuchungen, oder wenigstens Hypothesen, lassen sich die systematischen Verfälschungen durch die einzelnen Elemente nicht von einander trennen. Man kann aber in folgender Weise verfahren.

281. Anordnung der Fehlerreihe nach den vermutlichen Ursachen der systematischen Verfälschungen. Man stellt die Reihe der übrig bleibenden Fehler der Beobachtungsgleichungen her, sucht durch eine Discussion der während der einzelnen Messungen massgebenden äussern und innern Umstände die einzelnen Ursachen, die etwa systematische Verfälschungen bei den Messungen der einzelnen Elemente haben hervorbringen können, auf, und ordnet die übrig bleibenden Fehler ganz so, wie es bei der Kritik einfacher Messungen gezeigt ist, nach den Veränderungen der einzelnen Ursachen. Man bekommt damit so viele Anordnungen der Fehler, als Ursachen zu systematischen Verfälschungen angenommen sind, und hat nun die einzelnen Reihen nach den in der Kritik der einfachen Messungen gegebenen Regeln in Bezug auf die Berechtigung der betreffenden Annahmen

zu prüfen. Selbstverständlich können bei jedem Element mehrere Ursachen zu systematischen Verfälschungen mitwirken, es können auch dieselben Ursachen bei den Messungen mehrerer Elemente gewirkt haben, im letztern Fall bekommt man dann die systematischen Verfälschungen der bezüglichen Elemente nicht mehr getrennt.

Als Beispiel für eine solche Discussion der Fehlerreihe nach den vermuteten Verfälschungsursachen kann das in der Kritik einfacher Messungen, Art. 139—144 behandelte auch hier dienen.

282. Einführung von Correctionsgliedern zur Berücksichtigung der systematischen Fehler bei den Messungen einzelner Elemente. Nachdem man bei einer Anordnung nach einer bestimmten Ursache die Ueberzeugung gewonnen hat, dass die Fehlerreihe in dieser Anordnung nicht als rein zufällig angesehen werden kann, hat man die Beobachtungsgleichungen von der betreffenden systematischen Verfälschung zu befreien, und mit den so verbesserten Beobachtungsgleichungen die gesuchten Grössen von neuem zu rechnen.

Wir denken uns wieder für die gesuchten Grössen Näherungswerte eingeführt.

Die Beobachtungsgleichungen sind dann von der Form

$$0 = \Phi'_x + \frac{\partial \Phi'_x}{\partial x'_1} \xi_1 + \frac{\partial \Phi'_x}{\partial x'_2} \xi_2 + \dots + \frac{\partial \Phi'_x}{\partial x'_h} \xi_h,$$

$$x = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Man hat nun zwei Fälle zu unterscheiden :

1. Ist durch die Discussion der betreffenden Fehlerreihe nicht blos die Existenz der systematischen Verfälschung erkannt, sondern auch das Element herausgefunden, bei dessen Messungen die verfälschende Ursache wirksam gewesen ist, so steckt die systematische Verfälschung in den Φ' und ihren Derivirten. Aber da es sich immer nur um kleine Grössen handeln kann, denn die ξ sollten die Verbesserungen in letzter Näherung sein, dürfen wir von den Verfälschungen der Derivirten der Φ' absehen, es ist dann in jeder Beobachtungsgleichung nur das erste Glied Φ' verfälscht.

283. Correctionsglieder für systematische Verfälschung der Beträge der Elemente. Es sei die Grösse, deren Veränderungen die systematische Verfälschung hervorgebracht haben, U , das Element, bei dessen Messungen die verfälschende Ursache gewirkt hat, a , dann sind die aus den Messungen abgeleiteten, in den einzelnen Φ' vertretenen Werte von a , also a_1, a_2, \dots, a_n zu ersetzen durch $a_1 + f(U_1), a_2 + f(U_2), \dots, a_n + f(U_n)$.

Die Beträge der f werden bei guten Messungen kleine Grössen etwa von der Ordnung der ξ sein, die Beobachtungsgleichungen erhalten daher die Form

$$\begin{array}{cccc}
\sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_1} & \sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_1} & \cdots & \sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_1}, \\
\sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_2} & \sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_2} & \cdots & \sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_2}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x'_h} & \sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x'_h} & \cdots & \sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial x'_h}, \\
\sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial a_1} & \sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial a_2} & \cdots & \sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial a_n}, \\
\sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial a_1} U_1 & \sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial a_2} U_2 & \cdots & \sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial a_n} U_n, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\sqrt{p'_1} \frac{\partial \Phi'_1}{\partial a_1} U_1^{k'-1} & \sqrt{p'_2} \frac{\partial \Phi'_2}{\partial a_2} U_2^{k'-1} \cdots & & \sqrt{p'_n} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial a_n} U_n^{k'-1}, \\
- \sqrt{p'_1} \Phi'_1 & - \sqrt{p'_2} \Phi'_2 & \cdots & - \sqrt{p'_n} \Phi'_n
\end{array}$$

ein.

Die γ sind nicht ihrer selbst willen gerechnet, sondern nur, um die Berechnung der ξ sicherer zu gestalten. Trotzdem wird man für die γ nicht minder wie für die ξ die mittlern Fehler auch berechnen. An diesen mittlern Fehlern der γ ersieht man dann, ob man der Annahme der betreffenden systematischen Verfälschung Berechtigung zuschreiben darf oder nicht. Je kleiner diese mittlern Fehler im Verhältnis zu den γ selbst sind, um so sicherer darf man sein, dass jene systematische Verfälschung wirklich vorgefallen ist. Zeigt sich ein γ als mit einem besonders grossen mittlern Fehler behaftet (zum Beispiel mit einem, der seinem Betrage nach so gross ist wie das betreffende γ selbst), so kann man in der Entwicklung von $f(U)$ das Glied, dessen Factor dieses γ ist, fortlassen. Aber, ob man nach einmaliger Ausführung der Rechnung eingeführte Glieder fortzulassen hat oder noch neue Glieder einführen muss, so braucht man doch nicht jedesmal alle Rechnungen vollständig zu wiederholen, es sind, wie man sofort sieht, immer nur einzelne Columnen oder Zeilen neu zu rechnen, und die Mehrarbeit durch Einführung von Correctionsgliedern ist bei weitem nicht so bedeutend, als man von vornherein anzunehmen geneigt sein würde.

Nachdem man die ξ und γ berechnet hat, sind die Fehlergleichungen in der Form

$$-v_x = \Phi_x + \left[\xi \frac{\partial \Phi'_x}{\partial x'} \right] + \gamma_1 \frac{\partial \Phi'_x}{\partial a_x} + \gamma_2 \frac{\partial \Phi'_x}{\partial a_x} U_x + \cdots + \gamma_{k'} \frac{\partial \Phi'_x}{\partial a_x} U_x^{k'-1}$$

zu schreiben.

In dem Resultat sind natürlich die γ nicht mehr vorhanden, dieses lautet

$$0 = \Phi(A, B, \dots, G; x_1 \pm \mu_{x_1}, x_2 \pm \mu_{x_2}, \dots, x_h \pm \mu_{x_h}).$$

Sind bei mehreren Elementen systematische Verfälschungen oder bei einem Element mehrere systematische Verfälschungen constatirt, so hat man noch weitere Correctionsglieder auch für diese Verfälschungsursachen einzuführen. Principiell neues kommt dabei nicht in Frage.

Aber es ist klar, dass man mit der Einführung von solchen Correctionsgliedern sehr vorsichtig sein muss, denn je mehr man von ihnen benutzt, um so weniger überschüssige Gleichungen behält man, um so weniger kann man dann über die erreichte Genauigkeit einen Ueberblick gewinnen, und es kann so durch die Häufung der Correctionsglieder mehr Schaden ange richtet als Nutzen gestiftet werden. Man darf nur diejenigen Correctionsglieder einführen, von deren Notwendigkeit man durchaus überzeugt ist, oder man bekommt ein ganz falsches Bild von dem Wert der betreffenden Untersuchung.

Zur Illustrirung des Verfahrens möge das folgende Beispiel dienen.

284. Beispiel. Von einer Mischung aus etwa 63 % Alkohol und 37 % Wasser ist die Dichtigkeit bei verschiedenen Temperaturen durch hydrostatische Wägung bestimmt worden.

Es ergab sich so:

bei der Temperatur	10°,15 C.	Dichtigkeit	0,911752,
" "	" 15°,35 C.	"	0,907375,
" "	" 20°,03 C.	"	0,903571,
" "	" 24°,83 C.	"	0,899966,
" "	" 29°,82 C.	"	0,895762.

Wir stellen den Zusammenhang der Dichtigkeit s mit der Temperatur t dar durch eine Formel

$$s = x_1 + x_2 t + x_3 t^2.$$

Die Elemente der Beobachtung sind s und t , die zu berechnenden Grössen x_1, x_2, x_3 . Die Untersuchung giebt hiernach die 5 Beobachtungsgleichungen

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 0,911752 - x_1 - x_2 10,15 - x_3 103,02 = 0, \\ \Phi_2 &= 0,907375 - x_1 - x_2 15,35 - x_3 235,62 = 0, \\ \Phi_3 &= 0,903571 - x_1 - x_2 20,03 - x_3 401,20 = 0, \\ \Phi_4 &= 0,899966 - x_1 - x_2 24,83 - x_3 616,54 = 0, \\ \Phi_5 &= 0,895762 - x_1 - x_2 29,82 - x_3 889,24 = 0. \end{aligned}$$

Da die Discussion der Beobachtungen keinen Grund bot, die Gewichte dieser Gleichungen als von einander verschieden anzunehmen, setzen wir $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 1$.

Die Erfahrung lehrt, dass der Coefficient von t^2 gegen den von t meist klein ist, ich nehme daher als Näherungswert für x_3 an $x'_3 = 0$. Aus der ersten und letzten Gleichung folgen dann für die Näherungswerte von x_1 und x_2 die Beträge $x'_1 = 0,920004$, $x'_2 = -0,00081292$. Führen wir diese Näherungswerte in die obigen Beobachtungsgleichungen ein, so bekommen wir zur Berechnung der Verbesserungen ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 die 5 Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= 0,000000 + \xi_1 + \xi_2 10,15 + \xi_3 103,02, \\ 0 &= + 0,000150 + \xi_1 + \xi_2 15,35 + \xi_3 235,62, \\ 0 &= + 0,000150 + \xi_1 + \xi_2 20,03 + \xi_3 401,20, \\ 0 &= - 0,000147 + \xi_1 + \xi_2 24,83 + \xi_3 616,54, \\ 0 &= 0,000000 + \xi_1 + \xi_2 29,82 + \xi_3 889,24. \end{aligned}$$

Die Ableitung der Normalgleichungen und die Reduction derselben sei dem Leser überlassen, man findet

$$\begin{aligned} \xi_1 &= + 0,0001670, \\ \xi_2 &= - 0,00003000, \\ \xi_3 &= + 0,0000008981, \\ l_{h+1,h} = l_{4,3} &= 0,0000000463. \end{aligned}$$

Hiernach bekommt man nach Einsetzung der so erhaltenen Beträge für die ξ in die voraufstehenden Fehlergleichungen als übrig bleibende Fehler

$$\begin{aligned} v_1 &= - 0,000045, \quad v_2 = + 0,000068, \quad v_3 = + 0,000076, \\ v_4 &= - 0,000171, \quad v_5 = + 0,000071. \end{aligned}$$

Zunächst geben diese übrig bleibenden Fehler $[v^2] = 0,0000000467$, das stimmt hinreichend mit dem Betrage von $l_{4,3}$ überein, die Zahlen dürfen also als richtig gerechnet angesehen werden.

Es zeigt sich aber, dass diese übrig bleibenden Fehler relativ gross sind.

Wir haben nun zu überlegen, welche systematische Verfälschungen vorgefallen sein können. Aus dem Beobachtungsprotokoll, in welchem natürlich die Einrichtung und Ausführung der Versuche genau dargelegt sein muss, ergibt sich zunächst, dass von den beiden Beobachtungselementen die Temperatur immer sicher genug bestimmt worden ist. Die Bestimmungen der Temperatur bieten zur Annahme systematischer Verfälschungen keinen Anhalt. Auch bei dem zweiten Beobachtungselement, der Dichtigkeit, sind die eigentlichen Messungen, da sie in sorgfältig ausgeführten hydrostatischen Wägungen bestanden, als von systematischen Verfälschungen frei anzusehen.

Haben wir also keinen Grund, systematische Fehler in den Messungen selbst zu vermuten, so müssen wir zusehen, ob solche Fehler vielleicht dadurch entstanden sein können, dass sich die messenden Apparate oder die

Mischung während der Untersuchung geändert haben. Die Apparate — es handelt sich dabei um eine Waage, ein Thermometer, einen Gewichtssatz, einen Schwimmkörper, Barometer und Psychrometer — sind durch Nebenuntersuchungen als hinlänglich unveränderlich constatirt worden. Bleibt also nur noch die Mischung selbst übrig, und diese konnte allerdings während der Versuche systematische Veränderungen erlitten haben. In der Tat verdunstet Alkohol rascher als Wasser, und da die Verdunstung während der Versuche nicht hat gehindert werden können, ist anzunehmen, dass die Mischung im Laufe der Versuche mehr und mehr Alkohol verloren hat und dadurch an Dichtigkeit zunahm.

Sehen wir zu, ob diese Hypothese sich durch die übrig bleibenden Fehler rechtfertigen lässt. Das Protokollbuch giebt an, dass die Versuche nicht in der Folge der steigenden Temperaturen ausgeführt worden sind, sondern in der der Temperaturen 15,35; 29,82; 20,03; 24,83; 10,15. Wir haben also die übrig bleibenden Fehler in der Ordnung v_2, v_5, v_3, v_4, v_1 zu schreiben, und bekommen so die Reihe

$$+ 0,000068; + 0,000071; + 0,000076; - 0,000171; - 0,000045.$$

Es fällt sofort auf, dass die drei ersten Fehler positiv, die beiden letzten negativ sind. Wir müssen uns noch überzeugen, ob der Gang der Zeichen der gemachten Hypothese entspricht.

Die übrig bleibenden Fehler geben, wie man sich leicht überzeugt, die Differenzen

Rechnung — Beobachtung,

wenn also die ersten v positiv, die letzten negativ sind, so bedeutet das, weil die Rechnung naturgemäss einen mittlern Zustand der Mischung darstellt, dass die Mischung in Bezug auf diesen mittlern Zustand tatsächlich zuerst weniger dicht, zuletzt dichter gewesen ist, und so muss auch das Verhältnis sein, denn durch die stärkere Verdunstung des leichten Alkohols wird die Mischung dichter.

Also sowohl die Verteilung, wie der Gang der Zeichen sprechen für unsere Hypothese, und wir haben hiernach die Ausgleichung nochmals vorzunehmen, nachdem wir noch den Beobachtungsgleichungen der Hypothese entsprechende Correctionsglieder hinzugefügt haben.

Als Ursache der Verdunstung haben wir die Dauer der Versuche anzusehen; die Grösse, deren Variation die bezeichnete systematische Verfälschung hervorruft, ist also die Zeit. Nun zeigt das Protokoll, dass die Mischung immer nur während der eigentlichen Messungen mit der Luft frei communicirte, zwischen den Messungen befand sie sich in einem geschlossenen Gefäss. Wir haben daher die betreffenden Correctionsglieder nicht sowohl als Functionen der Zeit, als vielmehr als Function der Nummern der betreffenden Beobachtungsgleichungen darzustellen. Gehen wir von dem zuerst

ausgeführten Versuch aus, so ist hiernach in der früher benutzten Anordnung der Beobachtungsgleichungen nach steigenden Temperaturen

$$U_1 = 4, U_2 = 0, U_3 = 2, U_4 = 3, U_5 = 1,$$

und indem wir annehmen, dass während der einzelnen Versuche immer gleich viel verdampft ist, bekommen wir als für die systematische Verfälschung corrigirte Beobachtungsgleichungen

$$0 = -0,000045 + \xi_1 + \xi_2 10,15 + \xi_3 103,02 + r_1 4,$$

$$0 = +0,000068 + \xi_1 + \xi_2 15,35 + \xi_3 235,62 + r_1 0,$$

$$0 = +0,000076 + \xi_1 + \xi_2 20,03 + \xi_3 401,20 + r_1 2,$$

$$0 = -0,000171 + \xi_1 + \xi_2 24,83 + \xi_3 616,54 + r_1 3,$$

$$0 = +0,000071 + \xi_1 + \xi_2 29,82 + \xi_3 889,24 + r_1 1,$$

wobei die durch die oben berechneten Verbesserungen ξ corrigirten Zahlen

$$+0,920004 \quad +0,000167 \quad = +0,920171,$$

$$-0,00081292 \quad -0,00003000 \quad = -0,00084292,$$

$$0 \quad +0,0000008981 \quad = +0,0000008981$$

als Näherungswerte für die x angesehen sind.

In dem System der a haben die

$$a_{11}$$

$$a_{12} \quad a_{22}$$

$$a_{13} \quad a_{23} \quad a_{33}$$

dieselben Werte wie früher neu zu rechnen sind

$$a_{14} \quad a_{24} \quad a_{34} \quad a_{44}$$

$$l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad l_4 \quad l_5.$$

Auch in den Reductionen der Normalgleichungen sind einige Zahlen aus der voraufgehenden Rechnung hinüber zu nehmen.

Weil diese Gleichungen aber das erste Beispiel einer umfangreichern Ausgleichung bieten, setze ich die ganze Reductionsrechnung, ausgeführt nach dem Schema in Cap. XXII, hierher

Zu diesen Zahlen ist noch zu bemerken: eine vorgesetzte kleine Zahl giebt die Anzahl der fehlenden Decimalnullen an, halbfette Charakteristiken bei den Logarithmen zeigen eine fehlende -10 , ganz fette eine fehlende -20 an.

Man entnimmt der letzten Reduction die

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -0,00036902, \\ \xi_2 &= +0,000024485, \\ \xi_3 &= -0,00000052121, \\ \gamma_1 &= +0,000056431.\end{aligned}$$

Setzt man die Werte der ξ , sie sind auf mehr Decimalen angegeben, als nötig sind, und den Betrag des γ in die obigen Gleichungen ein, so resultiren als übrig bleibende Fehler

$$\begin{aligned}v_1 &= +0,000007, \quad v_2 = -0,000048, \quad v_3 = +0,000102, \\ v_4 &= -0,000084, \quad v_5 = +0,000025.\end{aligned}$$

Hieraus folgt zur Controle der Rechnung $[v^2] = 0,0000000203$ übereinstimmend mit dem der letzten Reduction zu entnehmenden Betrage von $l_{5,4}$.

Der mittlere Fehler einer der Beobachtungsgleichungen ist

$$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{[v^2]}{5-4}} = 0,000143.$$

Zur Berechnung der mittlern Fehler der ξ und des γ hat man die mit den ξ und γ zusammengerechneten Beträge der η heranzuziehen. Es finden sich diese η in der letzten Reduction

$$\begin{aligned}\eta_1^{(1)} &= 21,81, & \mu_{\xi_1} &= \bar{\mu} \sqrt{\eta_1^{(1)}} = 0,000668, \\ \eta_2^{(2)} &= 0,2176, & \mu_{\xi_2} &= \bar{\mu} \sqrt{\eta_2^{(2)}} = 0,0000666, \\ \eta_3^{(3)} &= 0,0001296, & \mu_{\xi_3} &= \bar{\mu} \sqrt{\eta_3^{(3)}} = 0,000001745, \\ \eta_4^{(4)} &= 0,1206, & \mu_{\gamma_1} &= \bar{\mu} \sqrt{\eta_4^{(4)}} = 0,0000496.\end{aligned}$$

Zunächst sieht man, dass der mittlere Fehler von γ nahezu so gross ist wie γ selber, die Correction für die Verdunstung ist also immerhin recht unsicher. Sie ist aber durch die Erfahrung bestätigt; am Schluss der ganzen Versuche ist nämlich für die Mischung nochmals bei der Ausgangstemperatur die Dichtigkeit bestimmt worden, es fand sich bei 15,35 diese Dichtigkeit gleich 0,907803. Die Verdunstung während der Versuche hat also tatsächlich die Dichtigkeit um $0,907803 - 0,907375 = 0,000428$ geändert. Der Betrag dieser Aenderung sollte mit dem Betrage von $5 \cdot \gamma_1$ übereinstimmen. Das ist nicht vollständig der Fall, denn $5\gamma_1$ ist nur gleich 0,000282. Man darf aber nicht vergessen, dass die Zahl 0,000434 aus zwei Zahlen abgeleitet ist, die beide mit Fehlern behaftet sein können.

Acceptirt man nun die gefundene Correction für die Verdunstung, so hat man für die Coefficienten x

$$\begin{aligned}x_1 &= + 0,920171 & - 0,000369 & = + 0,919802, \\x_2 &= - 0,0008429 & + 0,0000245 & = - 0,0008184, \\x_3 &= + 0,000000898 & - 0,000000521 & = + 0,000000377.\end{aligned}$$

Die mittlern Fehler der x sind gleich den mittlern Fehlern der ξ , hiernach ist der mittlere Fehler von x_3 5mal so gross wie der Betrag dieses Coefficienten selbst und man hat eigentlich kein Recht mehr, diesen Coefficienten noch mitzuführen.

Das Resultat für allgemeine Anwendung ist aber

$$\begin{aligned}s &= 0,919802 \pm 0,000668 - (0,0008184 \pm 0,0000666)t \\ &\quad + (0,000000377 \pm 0,000001745)t^2.\end{aligned}$$

Das heisst eine Mischung aus Wasser und Alkohol, die bei 0° C. die Dichtigkeit 0,919802 hat, zeigt bei der Temperatur t die durch s gegebene Dichtigkeit.

In Bezug auf die Beobachtungsgleichungen ist noch das Glied $+(0,0000564 \pm 0,0000496)U$ hinzuzufügen, wo U der Reihe nach gleich 4, 0, 2, 3, 1 ist.

Der mittlere Fehler des Resultats hängt natürlich nicht von γ ab, man hat vielmehr

$$\begin{aligned}\mu_s^2 &= \bar{\mu}^2 \left\{ \frac{\partial s}{\partial x_1} \left(\frac{\partial s}{\partial x_1} \gamma_1^{(1)} + \frac{\partial s}{\partial x_2} \gamma_2^{(1)} + \frac{\partial s}{\partial x_3} \gamma_3^{(1)} \right) \right. \\ &\quad + \frac{\partial s}{\partial x_2} \left(\frac{\partial s}{\partial x_1} \gamma_1^{(2)} + \frac{\partial s}{\partial x_2} \gamma_2^{(2)} + \frac{\partial s}{\partial x_3} \gamma_3^{(2)} \right) \\ &\quad \left. + \frac{\partial s}{\partial x_3} \left(\frac{\partial s}{\partial x_1} \gamma_1^{(3)} + \frac{\partial s}{\partial x_2} \gamma_2^{(3)} + \frac{\partial s}{\partial x_3} \gamma_3^{(3)} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Hierin ist

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial s}{\partial x_2} = t, \quad \frac{\partial s}{\partial x_3} = t^2,$$

somit

$$\begin{aligned}\mu_s^2 &= \bar{\mu}^2 \left\{ \gamma_1^{(1)} + t(\gamma_2^{(1)} + \gamma_1^{(2)}) + t^2(\gamma_3^{(1)} + \gamma_1^{(3)} + \gamma_2^{(2)}) \right. \\ &\quad \left. + t^3(\gamma_3^{(2)} + \gamma_2^{(3)}) + t^4 \gamma_3^{(3)} \right\},\end{aligned}$$

und da allgemein $\gamma_i^{(x)} = \gamma_x^{(i)}$ ist; auch

$$\mu_s^2 = \bar{\mu}^2 \left\{ \gamma_1^{(1)} + 2\gamma_2^{(1)}t + (2\gamma_3^{(1)} + \gamma_2^{(2)})t^2 + 2\gamma_3^{(2)}t^3 + \gamma_3^{(3)}t^4 \right\}.$$

nämlichen Verhältnis steht, ist das betreffende ζ nicht bestimmbar, man muss es von vornherein fortlassen.

Die Bemerkung ist namentlich wichtig für das Correctionsglied wegen eines constanten Fehlers für ζ_1 . Bei metronomischen Untersuchungen ist nämlich oft

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 1.$$

Hier bekommen ξ_1 und ζ_1 durch alle Gleichungen dieselben Factoren, und sie sind nur zusammen, nicht getrennt berechenbar. Ein constanter Fehler ist dann nicht corrigirbar.

287. Systematische Verfälschung durch die analytische Form der Beobachtungsgleichungen. Ich habe nun noch eine besondere Art systematischer Verfälschung zu erwähnen, diejenige nämlich, die nicht durch eine systematische Verfälschung der Beobachtungen hervorgerufen wird, sondern in der unrichtigen Aufstellung der analytischen Form der Beobachtungsgleichungen ihren Grund findet. Ich bezeichne diese systematische Verfälschung als einen systematischen Darstellungsfehler.

Wenn die analytische Form der Beobachtungsgleichungen von vorn herein gegeben ist, kann von solchen systematischen Darstellungsfehlern keine Rede sein; zeigt die Fehlerreihe in einer bestimmten Anordnung eine systematische Verfälschung an, so ist diese nur in den Beobachtungen zu suchen. Aber wenn diese analytische Form nicht vorgeschrieben ist, sondern mit einer gewissen Willkür angenommen wird, kann es kommen, dass die gerade gewählten Functionen überhaupt nicht im Stande sind, die Beobachtungen darzustellen. Die Fehlerreihe zeigt dann eine systematische Verfälschung an, die lediglich durch die unrichtige Form der betreffenden Functionen verursacht ist. Dadurch werden die Verhältnisse stark complicirt, es superponiren sich die durch die angenommene analytische Form verursachten systematischen Verfälschungen mit den durch die Beobachtungen und durch eventuelle Veränderungen in den der Beobachtung unterliegenden Substraten und zu den Beobachtungen dienenden Apparaten verursachten Verfälschungen, und die Schwierigkeit, die einzelnen Fehler von einander zu trennen, wird oft unüberwindbar.

Zunächst hat man die Reihe der übrig bleibenden Fehler so anzuordnen, dass die durch die etwa unrichtig angenommene analytische Form der betreffenden Function verursachte systematische Verfälschung hervorzutreten vermag. Es kann sein, dass die Form nur nach einzelnen Elementen unrichtig angenommen ist, dann ist die Fehlerreihe nach steigenden oder fallenden Beträgen dieser Elemente zu ordnen.

Der Gang der Fehler, der Gang ihrer Zeichen muss, nach den bei einfachen Messungen gegebenen Regeln beurteilt, über die Existenz der systematischen Verfälschung aufklären.

Hat man ferner aus einem Studium aller bei den Beobachtungen massgebenden Factoren erfahren, welche Grösse die bei den Beobachtungen etwa entstandenen systematischen Verfälschungen erreichen können, so untersucht man die Reihe der übrig bleibenden Fehler auch noch darauf, ob die Beträge dieser Fehler jene Grösse systematisch überschreiten oder nicht. Daraus, dass hin und wieder ein einzelner Fehler zu gross erscheint, ist nichts zu schliessen, nur wenn die Ueberschreitung jener durch Beobachtungsverfälschungen noch zu erklärenden Grösse „systematisch“ auftritt, kann man auf eine Verfälschung durch die angenommene Form schliessen. Die Bezeichnung systematisch hat aber hier eine doppelte Bedeutung, einmal insofern es sich überhaupt um eine grössere Anzahl von Fehlern handelt, welche nach den Ansichten, die wir aus einem Studium der bei den Beobachtungen möglichen Fehler gewinnen, zu gross erscheinen, und dann in Bezug auf eine Aufeinanderfolge der grössern Fehler bei der Anordnung der Fehlerreihe, in welcher die durch die unrichtige analytische Form der betreffenden Functionen verursachte systematische Verfälschung hervortreten soll.

Wenn man so zu der Ansicht gelangt ist, dass in der That die Form der betreffenden Functionen nicht richtig angenommen ist, muss man da, wo es gerade auf diese Form ankommt, also namentlich bei eigentlichen physikalischen Untersuchungen, zu andern Functionen greifen und so lange mit verschiedenen Functionen herumprobiren, bis man eine gefunden hat, die keine durch sie selbst veranlasste systematische Verfälschung hinterlässt. Natürlich wird man nicht aufs Geratwohl es mit irgend welchen Functionen versuchen, sondern sich dabei von theoretischen Gesichtspunkten leiten lassen, die durch die Art der betreffenden, mit einander in Verbindung zu setzenden Grössen bestimmt werden.

Es ist auch darauf zu achten, dass man keine Functionen einführen darf, die mehr unbekannte Grössen enthalten, als man theoretisch zu rechtfertigen vermag, denn sonst kann die Untersuchung durch die betreffenden Functionen ausgeglichen, zu wenig überschüssige Gleichungen bieten, so dass nicht blos die systematische Verfälschung nicht zum Ausdruck kommt, die Unsicherheit über die Richtigkeit der gewählten Form also doch bestehen bleibt, sondern überhaupt jede Uebersicht über den Wert der Untersuchung verloren geht.

In Untersuchungen, bei denen es nicht sowohl auf Richtigkeit der gewählten Form, als auf gute Ausgleichung der Beobachtungen gegen einander ankommt, also besonders in metronomischen Untersuchungen, corrigirt man die durch die unrichtige Form verursachte systematische Verfälschung genau so, wie man die bei den Beobachtungen aufgetretenen systematischen Verfälschungen corrigirt. Man fügt also zu der einmal gewählten Form noch Correctionsglieder hinzu und bestimmt wieder die gesuchten Grössen zusammen mit diesen Correctionsgliedern. Hier bleiben dann die Correctionsglieder auch in dem Resultat stehen. Im wesentlichen kommt das freilich auch

hier darauf hinaus, dass man die Form der Functionen abändert; aber in der Praxis geschieht diese Abänderung immer dadurch, dass man als Correctionsglieder Aggregate von Potenzen oder periodischen Functionen benutzt.

Am bekanntesten und häufigsten ist die Ausgleichung durch Potenzreihen und periodische Reihen überhaupt. Gewöhnlich hat man, wenn man die Verbindung zwischen gewissen Untersuchungsgrössen durch Potenzreihen oder periodische Reihen darstellt, keinen andern theoretischen Grund für die Darstellung gerade durch diese Reihen als den, dass eben die meisten physikalischen Functionen sich durch Entwicklung in solche Reihen auflösen lassen, oder dass die betreffende Verbindung zwischen den Untersuchungsgrössen nicht eigentlich eine einheitliche ist, sondern aus einer Anzahl besonderer, unter Umständen von einander ganz unabhängiger Verbindungen bewerkstelligt wird.

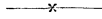
Man ist dann auch nicht in der Lage, von vorn herein gleich die Anzahl von Gliedern der bezeichneten Reihen anzugeben, welche hinreichen, die Untersuchung auszugleichen. Man nimmt deshalb zuerst tunlichst wenig Glieder. Mit je weniger Gliedern man auskommt, um so besser ist es; zeigt sich nach der Ausgleichung durch eine bestimmte Anzahl von Gliedern noch eine durch die Beobachtungen nicht zu erklärende systematische Verfälschung, so fügt man zu den gewählten Gliedern das nächstfolgende hinzu. Hier bestehen die Correctionsglieder in den weitem Gliedern der betreffenden Reihe.

288. Kritik der Resultate einer Untersuchung. Die Resultate einer Untersuchung bestehen einmal in den Beträgen der zu berechnenden Grössen und dann in der Schlussformel für die durch die Untersuchung mit einander zu verbindenden Grössen.

Die Kritik dieser Resultate, die an den mittlern Fehlern derselben zu üben ist, schliesst sich durchaus der Kritik der Resultate einfacher und zusammengesetzter Messungen an und bietet nichts neues.

Fünfter Abschnitt.

Interpolation, Differentiation und Quadratur.



XXIV. Interpolation.

289. Aufgabe. Der Physiker ist oft vor die Aufgabe gestellt, den Betrag einer von einer Anzahl Grössen (Elementen) abhängigen Grösse aus den bekannten Beträgen, die diese Grösse für gewisse gegebene Wertsysteme der Elemente besitzt, für ein bestimmtes Wertsystem dieser Elemente zu berechnen. Man bezeichnet die Rechnung, um die es sich dabei handelt, als Interpolation, benutzt aber in den Fällen, wo das Wertsystem, für welches die betreffende Grösse berechnet werden soll, ausserhalb der Wertsysteme liegt, für welche der Betrag dieser Grösse schon bekannt ist, auch die Bezeichnung Extrapolation. Interpoliren oder Extrapoliren muss man also vornehmlich dann, wenn der analytische Zusammenhang zwischen der gesuchten Grösse und ihren Elementen nicht bekannt ist, man wendet die Interpolationsrechnung aber auch bei bekannten Functionen an, wenn es sich um Construction ganzer Tabellen für die Werte dieser Functionen handelt.

Man besitzt drei Methoden, diese Aufgabe zu lösen, deren jede ihre besondern Vorzüge hat, und bei besondern Gelegenheiten anzuwenden ist; wir können diese drei Methoden als graphische, analytische und numerische Interpolation bezeichnen.

290. Graphische Interpolation. Die graphische Interpolation ist die einfachste und weitaus am häufigsten angewendete. Sie gestattet nicht bloss den gesuchten Wert der betreffenden Function abzuleiten, sondern giebt auch eine gewisse Vorstellung von dem Verlauf dieser Function mit Aenderung ihrer Elemente.

Ich betrachte erst den für die Anwendung wichtigsten Fall, wo es sich um die Abhängigkeit nur zweier Grössen von einander handelt, die Function also nur ein Argument (Element nach der frühern Nomenclatur) hat.

Man trägt die gegebenen Werte des Arguments als Abscissen, die gegebenen zugehörigen Werte der Function als Ordinaten auf, und zieht eine den Endpunkten der Ordinaten sich tunlichst eng anschliessende und

regelmässig verlaufende Curve, die man, wenn nötig, nach beiden Seiten gehörig weiter führt. Die Ordinate der Curve, welcher der vorgeschriebene Wert des Arguments als Abscisse zugehört, giebt dann den gesuchten Betrag der Function.

Zur nähern Präcisirung der obigen allgemeinen Vorschrift dienen die folgenden Regeln.

1. Wenn die zu den gegebenen Beträgen des Arguments gehörigen Beträge der Function streng richtig sind, muss die Curve geradezu durch die Enden der Ordinaten hindurchgehen.

2. Wenn die betreffenden Beträge der Function beobachtet sind, also noch mit Fehlern behaftet sein können, hat man die Curve so zu legen, dass sie tunlichst zwanglos verläuft, und dabei denjenigen Ordinatenenden am nächsten kommt, welche die Functionswerte grössten Gewichts, das heisst grössten Vertrauens, repräsentiren. Die Curve wird dann so gezogen, dass tunlichst gleich viele Ordinaten über, wie unter ihr enden. Es ist dabei nicht nötig, dass jeder Ordinate, die die Curve überragt, gleich eine folgt, die unter der Curve bleibt; es gilt vielmehr hier dieselbe Regel, wie bei der Verteilung der Zeichen in Fehlerreihen (Art. 117). Die Curve stellt eine gewisse Ausgleichung der gegebenen beobachteten Functionswerte dar, die Abstände der Enden der gegebenen Ordinaten von der Curve sind den übrig bleibenden Fehlern gleich zu achten, und wie in Fehlerreihen Zeichenwechsel und Zeichenfolgen gehörig verteilt sein müssen, so sollen auch hier Folgen von überragenden mit Folgen von darunter bleibenden Ordinaten gehörig abwechseln. Auch die Anzahlen der in den einzelnen Folgen vertretenen Ordinaten sollen gehörig abwechseln. Es wird oft die Regel gegeben, man solle die Curve so ziehen, dass sie immer durch die Schwerpunkte je dreier auf einander folgender Ordinatenendpunkte hindurchgeht, wobei diesen Punkten den Gewichten der zugehörigen Functionswerte gleiche Massen zugeschrieben werden. Man sieht, in welchem Verhältnis diese Regel zu der hier angegebenen steht. Bei dieser letztern wird jeder Teil der Curve als durch alle Ordinaten bestimmt angesehen, bei jener sind immer nur die nächstbenachbarten bestimmend. Indessen kann in schwierigen Fällen jene weniger strenge Regel nützlicher sein, als die strengere.

Oft begnügt man sich damit, die Curve durch geradlinige Verbindung der Ordinatenenden zu bilden. Man nimmt dann an, dass die betreffende Function zwischen je zwei ihrer gegebenen Werte linear verläuft. Wann das gestattet ist, muss eine Discussion der nötigen und erreichbaren Genauigkeit lehren.

3. Eine Hauptforderung ist, dass die betreffende Curve sich zwanglos durch die Ordinatenenden schlingt, die Curve soll also im allgemeinen keine Ecken und Knickungen zeigen. Scharfe Ecken sind leicht zu erkennen, stumpfe Ecken und Knickungen bemerkt man am besten, wenn man die Curve schräg betrachtet, das Blatt in der Höhe des Auges hält und eventuell ein wenig krümmt.

Wenn die Function von mehr als einem Argument abhängt, so hat man es statt mit einer Curve, mit ganzen Schaaren von Curven zu tun. Von Bedeutung ist nur noch der Fall, dass zwei Argumente vorhanden sind.

Man giebt dem einen Argument einen bestimmten Wert und zeichnet die Curve, welche die Aenderung der Function mit dem andern Argument darstellt. Dann verleiht man jenem Argument einen andern Wert, und zeichnet wieder die Curve, u. s. f. So bekommt man eine Schaar von Curven. Jede dieser Curven stellt den Gang der Function mit dem einen der Argumente dar, die Curven insgesamt repräsentiren den Gang mit dem zweiten Argument, dieses zweite Argument ist so das Argument der Curven. Will man den Wert der Function für bestimmte Werte der beiden Argumente interpoliren, so sucht man in der Schaar der Curven zunächst die beiden Curven auf, deren Argumente den gegebenen Betrag des zweiten Arguments einschliessen, und zeichnet zwischen ihnen eine den Gang mit dem ersten Argument repräsentirende Curve, die in ihrer Form ein Mittelding zwischen den Formen der einschliessenden Curven bilden wird, aber sich der Form der Curve näher anschmiegen muss, deren Argument dem ihrigen am nächsten liegt. Die zu dem gegebenen Betrag des ersten Arguments gehörige Ordinate dieser Curve ist dann der gesuchte Wert der Function.

Oft reicht es auch aus, die gesuchte Ordinate aus den Beträgen der in den einschliessenden Curven zu dem Wert des ersten Arguments gehörigen Ordinaten durch proportionale Verteilung abzuleiten.

Welches der beiden Argumente man zur Construction der Curven, welches man zur Unterscheidung der Curven von einander wählen soll, hängt ganz von der Besonderheit der betreffenden Aufgabe ab. Im allgemeinen wird man die Curven nach dem Element construiren, nach welchem sie sich am leichtesten und genauesten construiren lassen.

291. Analytische Interpolation. Die analytische Methode der Interpolation besteht im wesentlichen darin, dass man zwischen der Function und ihren Argumenten eine analytische Verbindung herstellt, die die wahre, aber unbekannt Verbindung zu ersetzen im Stande ist. Man stellt also eine Formel auf zwischen der Function und ihren Argumenten, berechnet die in dieser Function auftretenden unbekannt Grössen nach den in dem vorausgehenden Abschnitt entwickelten Regeln aus den gegebenen oder beobachteten zusammengehörigen Beträgen der Function und ihrer Argumente und hat damit eine Gleichung, aus der sich der Betrag der Function für jedes andere System von Werten der Argumente berechnen lässt. Von grossem Vorteil bei der Wahl der Form ist die graphische Darstellung der gegebenen Functionswerte, aus dem Anblick der betreffenden Curve wird man oft ersehen, welche Gleichung man ihr zuschreiben soll, man darf Regnaults Verfahren als strenge Regel hinstellen, dass man sich nämlich vor Aufstellung der betreffenden Gleichung aus dem Anblick der darstellenden Curve in Bezug auf diese Gleichung erst einigen Aufschluss zu verschaffen hat. Weiter auszuführen brauche ich diese Methode nicht, da sie

in dem vorausgehenden Abschnitt schon vollständig bearbeitet ist. Man bekommt aber in dieser Weise nicht bloß die Möglichkeit, den Betrag der Function für jedes Wertsystem zu berechnen, sondern kann auch durch den mittlern Fehler den Grad der Sicherheit, der diesem Betrag innewohnt, beurteilen.

Zwei specielle Fälle sind aber ihrer hohen, praktischen Wichtigkeit wegen besonders hervorzuheben.

Man stellt nämlich bei physikalischen Untersuchungen da, wo der Zusammenhang einer Function mit ihren Argumenten nicht bekannt ist, diesen Zusammenhang durch eine Potenzreihe oder periodische Reihe dar, die man auf eine gewisse, je nach Bedarf mehr oder weniger grosse Anzahl von Gliedern beschränkt. Potenzreihen wählt man, wenn es sich um Functionen handelt, bei denen man periodische Aenderung ihres Charakters bei wachsenden Argumenten nicht zu vermuten hat; periodische Reihen, wenn solche periodische Aenderung angenommen werden muss.

291a. Darstellung durch algebraische Functionen. Lagrange'sche Interpolationsformel. Wir betrachten erst die Darstellung durch Potenzreihen. Es sei die Function nur von einem Argument abhängig, a sei dieses Argument, f die Function. Wir setzen also

$$x_1 + x_2 a + x_3 a^2 + \dots + x_h a^{h-1} = f,$$

wo h die durchaus notwendige Anzahl von Gliedern angiebt; $f_1, a_1; f_2, a_2; \dots; f_n, a_n$ sind gegebene zusammengehörige Beträge der Function und ihres Arguments. Man hat also zur Bestimmung von x_1, x_2, \dots, x_h die n linearen Gleichungen

$$x_1 + x_2 a_i + x_3 a_i^2 + \dots + x_h a_i^{h-1} = f_i,$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Wenn $n < h$, lassen sich nicht alle x berechnen, wenn $n > h$, haben wir es mit einer Ausgleichungsaufgabe zu tun, die uns nichts neues bietet.

Bemerkenswert ist hier nur die Bildung des Systems Coefficienten der Normalgleichungen. Es ist nämlich

$$a_{ix} = [p^i a^i a^x] = [p^i a^{i+x}].$$

Hieraus folgt, dass alle a_{ix} , deren Indices gleiche Summen geben, gleichen Betrag haben, man hat also nur zu rechnen

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1h},$$

und dann noch

$$a_{2h}, a_{3h}, \dots, a_{hh},$$

das heisst $2h - 1$ Zahlen statt der $\frac{h(h+1)}{2}$ Zahlen, alle andern a finden sich unter diesen $2h - 1$ Zahlen.

bezeichnet man dann den numerischen Wert des Differentialquotienten von ψ nach a , wenn man a durch eines der gegebenen Argumente, etwa durch a_x ersetzt, mit $\psi'(a_x)$, so wird

$$1b) \quad f = \psi(a) \left\{ \frac{f_1}{a-a_1} \frac{1}{\psi'(a_1)} + \frac{f_2}{a-a_2} \frac{1}{\psi'(a_2)} + \dots + \frac{f_h}{a-a_h} \frac{1}{\psi'(a_h)} \right\}$$

oder

$$1c) \quad f = \sum_{i=1}^{i=h} \frac{f_i}{a-a_i} \frac{\psi(a)}{\psi'(a_i)}.$$

291b. Darstellung durch periodische Reihen. Bei der Darstellung der betreffenden Function durch eine periodische Reihe setzt man

$$f = x_0 + x_1 \cos 1a + x_2 \cos 2a + \dots + x_h \cos ha \\ + y_1 \sin 1a + y_2 \sin 2a + \dots + y_h \sin ha,$$

woselbst $x_0, x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots$ die zu bestimmenden Grössen sind.

291c. Die Gaussischen Interpolationsformeln. Wenn zunächst nur so viele zusammengehörige Wertepaare von f und a da sind, als Glieder genommen werden müssen, hat man $2h + 1$ lineare Gleichungen von der Form

$$f_i = x_0 + x_1 \cos 1a_i + x_2 \cos 2a_i + \dots + x_h \cos ha_i \\ + y_1 \sin 1a_i + y_2 \sin 2a_i + \dots + y_h \sin ha_i, \\ i = 1, 2, 3, \dots, 2h + 1$$

zur Berechnung der $2h + 1$ Coefficienten x und y .

Gauss hat nachgewiesen*), dass dann für f eine Formel herauskommt, die genau so gebaut ist wie die Lagrangesche Formel für algebraische Functionen, statt der Differenzen stehen die Sinusse der halben Differenzen. Es ist also nach Gauss

$$2) \quad f = \sin\left(\frac{a-a_1}{2}\right) \sin\left(\frac{a-a_2}{2}\right) \dots \\ \dots \sin\left(\frac{a-a_{2h+1}}{2}\right) \left\{ \frac{f_1}{\sin\left(\frac{a-a_1}{2}\right) \sin\left(\frac{a_1-a_2}{2}\right) \sin\left(\frac{a_1-a_3}{2}\right) \dots \sin\left(\frac{a_1-a_{2h+1}}{2}\right)} + \dots + \frac{f_{2h+1}}{\sin\left(\frac{a-a_{2h+1}}{2}\right) \sin\left(\frac{a_{2h+1}-a_1}{2}\right) \sin\left(\frac{a_{2h+1}-a_2}{2}\right) \dots \sin\left(\frac{a_{2h+1}-a_{2h}}{2}\right)} \right\}.$$

*) Werke Bd. 3, Ausgabe von 1876, *Theoria Interpolationis methodo nova tractata*, eine aus Gauss' Nachlass durch Schering veröffentlichte Arbeit, die wieder eine Menge von Resultaten vorwegnimmt, zu denen man erst im Laufe der Jahre von andern Seiten allmählig gelangt ist.

Für Functionen, die nur nach Cosinussen entwickelt werden sollen, ist

$$2_1) \quad f = (\cos a - \cos a_1) \dots \\ \dots (\cos a - \cos a_{h+1}) \left\{ \frac{f_1}{\cos a - \cos a_1} \frac{1}{(\cos a_1 - \cos a_2) \dots (\cos a_1 - \cos a_h)} + \dots \right. \\ \left. + \frac{f_{h+1}}{\cos a - \cos a_{h+1}} \frac{1}{(\cos a_{h+1} - a_1) \dots (\cos a_{h+1} - \cos a_h)} \right\}.$$

Für Functionen, die nur nach Sinussen fortschreiten sollen, ist

$$2_2) \quad f = \sin a (\cos a - \cos a_1) \dots \\ \dots (\cos a - \cos a_h) \left\{ \frac{f_1}{\cos a - \cos a_1} \frac{1}{\sin a_1 (\cos a_1 - \cos a_2) \dots (\cos a_1 - \cos a_h)} + \dots \right. \\ \left. + \frac{f_h}{\cos a - \cos a_h} \frac{1}{\sin a_h (\cos a_h - \cos a_1) \dots (\cos a_h - \cos a_{h-1})} \right\}.$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Formeln ist leicht und wird ähnlich geführt wie bei der Lagrangeschen Interpolationsformel.

291d. Ausgleichung durch periodische Reihen. Wenn $n > 2h + 1$ ist, haben wir es mit einer Ausgleichungsaufgabe zu tun. Die Normalgleichungen bestehen im allgemeinsten Fall aus $h + 1$ Paaren zusammengehöriger Gleichungen; die allgemeine Form eines Paares ist

$$[fp' \cos ia] = [p' \cos ia]x_0 + [p' \cos a \cos ia]x_1 + [p' \cos 2a \cos ia]x_2 + \dots + [p' \cos ha \cos ia]x_h \\ + [p' \sin a \cos ia]y_1 + [p' \sin 2a \cos ia]y_2 + \dots + [p' \sin ha \cos ia]y_h, \\ [fp' \sin ia] = [p' \sin ia]x_0 + [p' \cos a \sin ia]x_1 + [p' \cos 2a \sin ia]x_2 + \dots + [p' \cos ha \sin ia]x_h \\ + [p' \sin a \sin ia]y_1 + [p' \sin 2a \sin ia]y_2 + \dots + [p' \sin ha \sin ia]y_h, \\ i = 0, 1, 2, \dots, h.$$

Die Gleichungen bieten nichts bemerkenswertes, wenn die Argumente a ganz beliebig festgesetzt sind.

Gewöhnlich ist aber das System der Argumente a — sie bedeuten natürlich Winkel oder Bögen — so gegeben, dass die Intervalle zwischen den einzelnen a einander gleich sind und zusammen die ganze Kreisperipherie oder 360° ausmachen, es ist dann

$$a_1 = 0 \frac{2\pi}{n}, \quad a_2 = 1 \frac{2\pi}{n}, \quad a_3 = 2 \frac{2\pi}{n}, \quad \dots, \quad a_n = (n-1) \frac{2\pi}{n}.$$

In diesem Fall gelten aber, falls ausserdem die Gewichte der einzelnen Gleichungen einander gleich sind, die bekannten Formeln*)

*) Fourier, analytische Theorie der Wärme. Deutsche Ausgabe 1884, p. 211.

$$[\cos xa \cos ia] = 0, \text{ wenn } x \begin{matrix} > \\ \geq \end{matrix} i,$$

$$[\sin xa \sin ia] = 0, \text{ „ } x \begin{matrix} > \\ \geq \end{matrix} i,$$

$$[\sin xa \cos ia] = 0, \text{ „ } x \begin{matrix} > \\ \geq \end{matrix} i,$$

$$[\sin^2 xa] = \frac{n}{2}, \text{ „ } x > 0,$$

$$[\sin^2 xa] = 0, \text{ „ } x = 0,$$

$$[\cos^2 xa] = \frac{n}{2}, \text{ „ } x > 0,$$

$$[\cos^2 xa] = n, \text{ „ } x = 0.$$

In dem iten Paar von Normalgleichungen bleibt hiernach rechts vom Gleichheitszeichen in der ersten Gleichung nur das mit x_i , in der zweiten nur das mit y_i multiplicirte Glied stehen, und hiernach ist

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{[f]}{n} = \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_n}{n}, \\ x_1 &= \frac{2[f \cos 1a]}{n} = 2 \frac{f_1 \cos a_1 + f_2 \cos a_2 + \dots + f_n \cos a_n}{n}, \\ x_2 &= \frac{2[f \cos 2a]}{n} = 2 \frac{f_1 \cos 2a_1 + f_2 \cos 2a_2 + \dots + f_n \cos 2a_n}{n}, \\ &\vdots \\ x_h &= \frac{2[f \cos ha]}{n} = 2 \frac{f_1 \cos ha_1 + f_2 \cos ha_2 + \dots + f_n \cos ha_n}{n}, \\ y_1 &= \frac{2[f \sin 1a]}{n} = 2 \frac{f_1 \sin a_1 + f_2 \sin a_2 + \dots + f_n \sin a_n}{n}, \\ y_2 &= \frac{2[f \sin 2a]}{n} = 2 \frac{f_1 \sin 2a_1 + f_2 \sin 2a_2 + \dots + f_n \sin 2a_n}{n}, \\ &\vdots \\ y_h &= \frac{2[f \sin ha]}{n} = 2 \frac{f_1 \sin ha_1 + f_2 \sin ha_2 + \dots + f_n \sin ha_n}{n}, \end{aligned}$$

und es wird, eben in dem Fall, dass

$$a_x = (x - 1) \frac{2\pi}{n}$$

ist,

$$3 \text{ a) } f = \frac{2}{n} \left\{ \frac{[f]}{2} + [f \cos 1a] \cos 1a + [f \cos 2a] \cos 2a + \dots + [f \sin 1a] \sin 1a + [f \sin 2a] \sin 2a + \dots \right\},$$

eine Gleichung, die ganz dem Fourierschen Satz entspricht,

Wir haben noch die mittlern Fehler der berechneten Coefficienten x und y und den mittlern Fehler von f selbst zu bestimmen. Dazu ist erst $[v^2]$ zu berechnen.

Nach der Formel XCV, im Art. 221, und zufolge der Werte, welche in unserem Falle den l zukommen, ist

$$[v^2] = [f^2] - x_0[f] - x_1[f \cos 1a] - x_2[f \cos 2a] - \dots - x_h[f \cos ha] \\ - y_1[f \sin 1a] - y_2[f \sin 2a] - \dots - y_h[f \sin ha],$$

also nach Einführung der gegebenen Formeln für die x und y

$$[v^2] = [f^2] - \frac{n}{2} (2x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_h^2 + y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_h^2).$$

Hieraus folgt zunächst für den mittlern Fehler einer Beobachtungsgleichung

$$4) \quad \mu = \sqrt{\frac{[f^2] - \frac{n}{2}[x^2] - \frac{n}{2}[y^2] - \frac{n}{2}x_0^2}{n - 2h - 1}}.$$

Weiter ist

$$\mu_{x_x}^2 = \left(\frac{\partial x_x}{\partial f_1}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{\partial x_x}{\partial f_2}\right)^2 \mu_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial x_x}{\partial f_n}\right)^2 \mu_n^2,$$

also wegen

$$x_x = \frac{2}{n} (f_1 \cos \alpha a_1 + f_2 \cos \alpha a_2 + \dots + f_n \cos \alpha a_n)$$

und weil

$$\mu_1^2 = \mu_2^2 = \dots = \mu_n^2 = \mu^2$$

ist,

$$\mu_{x_x} = \mu \frac{2}{n} \sqrt{\cos^2 \alpha a_1 + \cos^2 \alpha a_2 + \dots + \cos^2 \alpha a_n} = \mu \frac{2}{n} \sqrt{[\cos^2 \alpha a]}.$$

Nun ist

$$a_1 = 0 \frac{2\pi}{n}, \quad a_2 = 1 \frac{2\pi}{n}, \quad \dots \quad a_n = (n-1) \frac{2\pi}{n},$$

somit nach den schon hervorgehobenen Beziehungen

$$\mu_{x_x} = \mu \frac{2}{n} \sqrt{\frac{n}{2}} = \mu \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Diese Formel gilt nur für $\alpha > 0$, für $\alpha = 0$ ist nämlich $[\cos^2 \alpha a] = n$, somit $\mu_{x_0} = \mu \sqrt{\frac{1}{n}}$.

Ganz so wie den mittlern Fehler eines der x findet man auch den mittlern Fehler eines der y . Im ganzen ist also

$$5_1) \quad \mu_{x_0} = \frac{\mu}{\sqrt{n}},$$

$$5_2) \quad \mu_{x_1} = \mu_{x_2} = \dots = \mu_{x_h} = \mu_{y_1} = \mu_{y_2} = \dots = \mu_{y_h} = \sqrt{2} \frac{\mu}{\sqrt{n}}.$$

Zur Berechnung des mittlern Fehlers irgend einer Function der x und y , also auch des der Function f selbst, haben wir erst die $2h + 1$ Systeme η zu bestimmen. Es sind aber [IC] Art. 232] die $2h + 1$ Grössen η jedes Systems durch Gleichungen ganz derselben Form wie die Normalgleichungen bestimmt, nur dass in noch grösserer Einfachheit die l immer nur bei einer Gleichung — und zwar in dem i ten System bei der i ten Gleichung — von Null verschieden sind; bei dieser einen Gleichung hat l den Wert 1. Hieraus folgt, dass in unserm Fall in jedem System der η nur ein η von Null verschieden ist; von allen η bleiben nur die in der Diagonale stehen, das sind diejenigen, welche den x und y entsprechen, und sie haben sämmtlich den Betrag $\frac{2}{n}$. Nur dem ersten η kommt der Wert $\frac{1}{n}$ zu.

Darnach darf man den mittlern Fehler jeder Function der x und y so berechnen, wie wenn die x und y selbst die direct beobachteten Grössen wären, vorausgesetzt, dass man diesen x und y die mittlern Fehler zuschreibt, die ihnen nach den obigen Entwicklungen zukommen.

Wir haben jetzt für irgend eine Function

$$F(x_0, x_1, x_2, \dots, x_h; y_1, y_2, \dots, y_h),$$

$$\mu_F = \mu \sqrt{\frac{2}{n}} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_h} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial y_h} \right)^2}.$$

Auf unsere Function f angewendet, giebt das

$$\mu_f = \mu \sqrt{\frac{2}{n}} \sqrt{\frac{1}{2} + \cos^2 1a + \cos^2 2a + \dots + \cos^2 ha + \sin^2 1a + \sin^2 2a + \dots + \sin^2 ha},$$

das heisst

$$5_3) \quad \mu_f = \mu \frac{\sqrt{2h+1}}{\sqrt{n}}.$$

Der mittlere Fehler der resultirenden Function ist von dem Argument a ganz unabhängig, und sein Quadrat steht zu dem Quadrat des mittlern Fehlers einer der Bestimmungsgleichungen im Verhältnis der Anzahl der berechneten Coefficienten zu der Anzahl der Bestimmungsgleichungen (der gegebenen Wertepaare von Function und Argument).

Nachdem man die Coefficienten bestimmt hat, transformirt man gewöhnlich die Darstellung von f in

$$3b) f = x_0 + r_1 \sin(a + \eta_1) + r_2 \sin(2a + \eta_2) + \dots + r_h \sin(ha + \eta_h),$$

und hierin ist

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2},$$

$$\eta_i = \operatorname{arctg} \frac{x_i}{y_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, h.$$

Dem obigen zufolge werden die mittlern Fehler der r_i und η_i so berechnet, wie wenn x_i und y_i die direct beobachteten Grössen wären, man hat also

$$\mu_{r_i}^2 = \frac{x_i^2 \mu_{x_i}^2 + y_i^2 \mu_{y_i}^2}{x_i^2 + y_i^2},$$

$$\mu_{\eta_i}^2 = \frac{y_i^2 \mu_{x_i}^2 + x_i^2 \mu_{y_i}^2}{(x_i^2 + y_i^2)^2},$$

also einfach

$$\mu_{r_i} = \mu \sqrt{\frac{2}{n}},$$

$$6) \quad \mu_{\eta_i} = \mu \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{1}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} = \mu \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{1}{r_i}.$$

Das ist der Fall, auf den in Art. 192 hingewiesen worden ist, wo die dort mit M bezeichnete Grösse gleich Null sein sollte. In der That ist in unserer jetzigen Bezeichnungsweise jenes M bestimmt durch

$$M = \cos i a_1 \sin i a_1 + \cos i a_2 \sin i a_2 + \dots + \cos i a_n \sin i a_n,$$

und das giebt zufolge der angeführten trigonometrischen Formeln in unserm Fall wirklich Null.

So einfach sich hiernach schon in dem bezeichneten speciellen Fall alle Rechnungen stellen, so treten noch weitere Reductionen der Arbeit auf, wenn erst angegeben ist, welchen aliquoten Teil der Kreisperipherie das Intervall zwischen den einzelnen a bilden soll.

Als Beispiel soll das Schema der Rechnung für einen besonders wichtigen Fall vollständig aufgestellt werden. Der Beweis für die Richtigkeit dieses Schemas aber sei dem Leser überlassen.

291e. Beispiel. Schema für die Berechnung des täglichen Ganges einer Erscheinung aus den 24 Stundenbeobachtungen. Man habe den Gang einer Erscheinung, etwa den der Variation im Erdmagnetismus, oder der Lufttemperatur u. s. f., an einem bestimmten Tage alle Stunden beob-

achtet, und wolle diesen Gang als Function der Tagesstunde darstellen. Da der Tag 24 Stunden hat, so wird

$$a_1 = 0.15^\circ, a_2 = 1.15^\circ, a_3 = 2.15^\circ, \dots, a_{24} = 23.15^\circ.$$

Zur Anwendung bei der Multiplication der einzelnen f kommen also nur

$$\sin 0, \sin 15^\circ, \sin 30^\circ, \sin 45^\circ, \sin 60^\circ, \sin 75^\circ, \sin 90^\circ, \\ \cos 0, \cos 15^\circ, \cos 30^\circ, \cos 45^\circ, \cos 60^\circ, \cos 75^\circ, \cos 90^\circ.$$

Die Zahlen der untern Zeile sind gleich den Zahlen der obern, aber in umgekehrter Folge, ich bezeichne die 6 Zahlen

$$\sin 15^\circ, \sin 30^\circ, \sin 45^\circ, \sin 60^\circ, \sin 75^\circ, \sin 90^\circ,$$

also die Zahlen

$$0,2588; 0,5; 0,7071; 0,8660; 0,9659; 1,$$

durch $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$.

Man schreibt die 24 Beobachtungszahlen f_1, f_2, \dots, f_{24} in einer Columne unter einander, summirt diese Zahlen und dividirt durch 24, der Quotient ist x_0 , nun zieht man x_0 von allen 24 Zahlen ab, und schreibt die Differenzen zu 12 und 12 in zwei Zeilen, und zwar die ersten 12 mit den richtigen, die andern 12 mit entgegengesetzten Zeichen. Ich bezeichne diese Differenzen mit u_1, u_2, \dots, u_{24} , und habe jetzt folgendes Schema

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{24} \\ \hline \text{Summe} = [f] \\ x_0 = \frac{[f]}{24} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ -u_{13} & -u_{14} & -u_{15} & -u_{16} & -u_{17} & -u_{18} & -u_{19} & -u_{20} & -u_{21} & -u_{22} & -u_{23} & -u_{24} \end{array}$$

Summen: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = \sigma_7 = \sigma_8 = \sigma_9 = \sigma_{10} = \sigma_{11} = \sigma_{12} =$

$\sigma_2 + \sigma_{12}$	$z_1(\sigma_1 + \sigma_{12})$	σ_1	$z_6 \sigma_1$
$\sigma_3 + \sigma_{11}$	$z_2(\sigma_3 + \sigma_{11})$	$\sigma_2 - \sigma_{12}$	$z_5(\sigma_2 - \sigma_{12})$
$\sigma_4 + \sigma_{10}$	$z_3(\sigma_4 + \sigma_{10})$	$\sigma_3 - \sigma_{11}$	$z_4(\sigma_3 - \sigma_{11})$
$\sigma_5 + \sigma_9$	$z_4(\sigma_5 + \sigma_9)$	$\sigma_4 - \sigma_{10}$	$z_3(\sigma_4 - \sigma_{10})$
$\sigma_6 + \sigma_8$	$z_5(\sigma_6 + \sigma_8)$	$\sigma_5 - \sigma_9$	$z_4(\sigma_5 - \sigma_9)$
σ_7	$z_6 \sigma_7$	$\sigma_6 - \sigma_8$	$z_5(\sigma_6 - \sigma_8)$
Summe =		Summe =	
Summe		Summe	
$\frac{\quad}{12} = \dots = y_1$		$\frac{\quad}{12} = \dots = x_1$	

Zur Berechnung von y_2 und x_2 zieht man die zweite Zeile der u von der ersten ab, es seien die so erhaltenen Differenzen $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{12}$, man schreibt

$$\begin{array}{cccccc} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 \\ -\delta_7 & -\delta_8 & -\delta_9 & -\delta_{10} & -\delta_{11} & -\delta_{12} \\ \hline \text{Summen: } \sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3 = \sigma'_4 = \sigma'_5 = \sigma'_6 = \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} \sigma'_2 + \sigma'_6 \\ \sigma'_3 + \sigma'_5 \\ \sigma'_4 \end{array} \left| \begin{array}{l} z_2(\sigma'_2 + \sigma'_6) \\ z_4(\sigma'_3 + \sigma'_5) \\ z_6 \sigma'_4 \end{array} \right. & \begin{array}{l} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 - \sigma'_6 \\ \sigma'_3 - \sigma'_5 \end{array} \left| \begin{array}{l} z_6 \sigma'_1 \\ z_4(\sigma'_2 - \sigma'_6) \\ z_2(\sigma'_3 - \sigma'_5) \end{array} \right. \\ \hline \text{Summe} & \text{Summe} \\ \hline \frac{\text{Summe}}{12} = \dots = y_2 & \frac{\text{Summe}}{12} = \dots = x_2 \end{array}$$

Zur Berechnung von y_3, x_3 schreibt man die Reihe der σ in der folgenden Ordnung

$$\begin{array}{cccc} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 \\ -\sigma_5 & -\sigma_6 & -\sigma_7 & -\sigma_8 \\ \sigma_9 & \sigma_{10} & \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \hline \text{Summen: } \sigma''_1 = \sigma''_2 = \sigma''_3 = \sigma''_4 = \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} \sigma''_2 + \sigma''_4 \\ \sigma''_3 \end{array} \left| \begin{array}{l} z_3(\sigma''_2 + \sigma''_4) \\ z_6 \sigma''_3 \end{array} \right. & \begin{array}{l} \sigma''_1 \\ \sigma''_2 - \sigma''_4 \end{array} \left| \begin{array}{l} z_6 \sigma''_1 \\ z_3(\sigma''_2 - \sigma''_4) \end{array} \right. \\ \hline \text{Summe} & \text{Summe} \\ \hline \frac{\text{Summe}}{12} = \dots = y_3 & \frac{\text{Summe}}{12} = x_3 \end{array}$$

Für x_4 und y_4 geht man auf die Berechnung der x_2 und y_2 zurück, indem man die untere Zeile der δ von der oberen abzieht und in folgender Weise schreibt

$$\begin{array}{ccc} \delta_1 + \delta_7 & \delta_2 + \delta_8 & \delta_3 + \delta_9 \\ -\delta_4 - \delta_{10} & -\delta_5 - \delta_{11} & -\delta_6 - \delta_{12} \\ \hline \text{Summen: } \sigma'''_1 = \sigma'''_2 = \sigma'''_3 = \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} \sigma'''_2 + \sigma'''_3 \end{array} \left| \begin{array}{l} z_4(\sigma'''_2 + \sigma'''_3) \end{array} \right. & \begin{array}{l} \sigma'''_1 \\ \sigma'''_2 - \sigma'''_3 \end{array} \left| \begin{array}{l} z_6 \sigma'''_1 \\ z_2(\sigma'''_2 - \sigma'''_3) \end{array} \right. \\ \hline \text{Summe} & \text{Summe} \\ \hline \frac{\text{Summe}}{12} = \dots = y_4 & \frac{\text{Summe}}{12} = x_4 \end{array}$$

Weiter als bis zu x_4, y_4 zu rechnen dürfte nur in den seltensten Fällen Zweck haben.

Zur Ableitung der mittlern Fehler bildet man

$$[v^2] = f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_{24}^2 - 12(2x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)$$

$$= u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{24}^2 - 12(4x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2),$$

dann

$$\mu = \sqrt{\frac{[v^2]}{15}},$$

so wird

$$\mu_{x_0} = \frac{\mu}{\sqrt{24}},$$

$$\mu_{x_1} = \mu_{x_2} = \mu_{x_3} = \mu_{x_4} = \mu_{y_1} = \mu_{y_2} = \mu_{y_3} = \mu_{y_4} = \frac{\mu}{\sqrt{12}}.$$

Nachdem man die Coefficienten bestimmt hat, will man oft die übrig bleibenden Fehler und, um die Zeiten, zu denen die betreffende Grösse ihre Maxima und Minima erreicht, zu erhalten, auch die Differentialquotienten kennen.

Man rechnet hier nach dem folgenden, leicht abzuleitenden Schema, zu welchem nur zu bemerken ist, dass die zx , zy Producte der Zahlen z in die Coefficienten x , y angeben, die σ wieder Summen, die δ Differenzen unter einander stehender Zahlen bedeuten, bei letzteren immer die untern Zahlen von den obern abgezogen gedacht.

	0	$z_1 y_1$	$z_2 y_1$	$z_3 y_1$	$z_4 y_1$	$z_5 y_1$	$z_6 y_1$
	$z_6 x_1$	$z_5 x_1$	$z_4 x_1$	$z_3 x_1$	$z_2 x_1$	$z_1 x_1$	0
Summen:	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	
Differenzen:		δ_6	δ_5	δ_4	δ_3	δ_2	δ_1

	0	$z_2 y_2$	$z_4 y_2$	$z_6 y_2$
	$z_6 x_2$	$z_4 x_2$	$z_2 x_2$	0
Summen:	σ'_1	σ'_2	σ'_3	
Differenzen:		δ'_3	δ'_2	δ'_1

	0	$z_3 y_3$	$z_6 y_3$
	$z_6 x_3$	$z_3 x_3$	0
Summen:	σ''_1	σ''_2	
Differenzen:		δ''_2	δ''_1

	0	$z_4 y_4$	0	— $z_4 x_4$
	$z_6 x_4$	$z_2 x_4$	$z_6 y_4$	$z_4 y_4$
Summen:	σ'''_1	σ'''_2	φ_1	φ_2
Differenzen:		δ'''_1		ψ_1

Nunmehr bekommt man zur Berechnung

von $u_x = f_x - x_0$	der Differentialquotienten u'
$\sigma_1 + \sigma'_1 + \sigma''_1 + \sigma'''_1 = u_1$	$\delta_1 + 2\delta'_1 + 3\delta''_1 + 4\varphi_1 = u'_1$
$\sigma_2 + \sigma'_2 + \sigma''_2 + \sigma'''_2 = u_2$	$\delta_2 + 2\delta'_2 + 3\delta''_2 + 4\varphi_2 = u'_2$
$\sigma_3 + \sigma'_3 + \delta''_1 + \delta'''_1 = u_3$	$\delta_3 + 2\delta'_3 - 3\sigma''_1 + 4\psi_1 = u'_3$
$\sigma_4 + \delta'_1 + \delta''_2 - \sigma'''_1 = u_4$	$\delta_4 - 2\sigma'_1 - 3\sigma''_2 - 4\varphi_1 = u'_4$
$\sigma_5 + \delta'_2 - \sigma''_1 - \sigma'''_2 = u_5$	$\delta_5 - 2\sigma'_2 - 3\delta''_1 - 4\varphi_2 = u'_5$
$\sigma_6 + \delta'_3 - \sigma''_2 - \delta'''_1 = u_6$	$\delta_6 - 2\sigma'_3 - 3\delta''_2 - 4\psi_1 = u'_6$
$\delta_1 - \sigma'_1 - \delta''_1 + \sigma'''_1 = u_7$	$-\sigma_1 - 2\delta'_1 + 3\sigma''_1 + 4\varphi_1 = u'_7$
$\delta_2 - \sigma'_2 - \delta''_2 + \sigma'''_2 = u_8$	$-\sigma_2 - 2\delta'_2 + 3\sigma''_2 + 4\psi_2 = u'_8$
$\delta_3 - \sigma'_3 + \sigma''_1 + \delta'''_1 = u_9$	$-\sigma_3 - 2\delta'_3 + 3\delta''_1 + 4\psi_1 = u'_9$
$\delta_4 - \delta'_1 + \sigma''_2 - \sigma'''_1 = u_{10}$	$-\sigma_4 + 2\sigma'_1 + 3\delta''_2 - 4\varphi_1 = u'_{10}$
$\delta_5 - \delta'_2 + \delta''_1 - \sigma'''_2 = u_{11}$	$-\sigma_5 + 2\sigma'_2 - 3\sigma''_1 - 4\varphi_2 = u'_{11}$
$\delta_6 - \delta'_3 + \delta''_2 - \delta'''_1 = u_{12}$	$-\sigma_6 + 2\sigma'_3 - 3\sigma''_2 - 4\psi_1 = u'_{12}$
$-\sigma_1 + \sigma'_1 - \sigma''_1 + \sigma'''_1 = u_{13}$	$-\delta_1 + 2\delta'_1 - 3\delta''_1 + 4\varphi_1 = u'_{13}$
$-\sigma_2 + \sigma'_2 - \sigma''_2 + \sigma'''_2 = u_{14}$	$-\delta_2 + 2\delta'_2 - 3\delta''_2 + 4\varphi_2 = u'_{14}$
$-\sigma_3 + \sigma'_3 - \delta''_1 + \delta'''_1 = u_{15}$	$-\delta_3 + 2\delta'_3 + 3\sigma''_1 + 4\psi_1 = u'_{15}$
$-\sigma_4 + \delta'_1 - \delta''_2 - \sigma'''_1 = u_{16}$	$-\delta_4 - 2\sigma'_1 + 3\sigma''_2 - 4\varphi_1 = u'_{16}$
$-\sigma_5 + \delta'_2 + \sigma''_1 - \sigma'''_2 = u_{17}$	$-\delta_5 - 2\sigma'_2 + 3\delta''_1 - 4\varphi_2 = u'_{17}$
$-\sigma_6 + \delta'_3 + \sigma''_2 - \delta'''_1 = u_{18}$	$-\delta_6 - 2\sigma'_3 + 3\delta''_2 - 4\psi_1 = u'_{18}$
$-\delta_1 - \sigma'_1 + \delta''_1 + \sigma'''_1 = u_{19}$	$+\sigma_1 - 2\delta'_1 - 3\sigma''_1 + 4\varphi_1 = u'_{19}$
$-\delta_2 - \sigma'_2 + \delta''_2 + \sigma'''_2 = u_{20}$	$+\sigma_2 - 2\delta'_2 - 3\sigma''_2 + 4\varphi_2 = u'_{20}$
$-\delta_3 - \sigma'_3 - \sigma''_1 + \delta'''_1 = u_{21}$	$+\sigma_3 - 2\delta'_3 - 3\delta''_1 + 4\psi_1 = u'_{21}$
$-\delta_4 - \delta'_1 - \sigma''_2 - \sigma'''_1 = u_{22}$	$+\sigma_4 + 2\sigma'_1 - 3\delta''_2 - 4\varphi_1 = u'_{22}$
$-\delta_5 - \delta'_2 - \delta''_1 - \sigma'''_2 = u_{23}$	$+\sigma_5 + 2\sigma'_2 + 3\sigma''_1 - 4\varphi_2 = u'_{23}$
$-\delta_6 - \delta'_3 - \delta''_2 - \delta'''_1 = u_{24}$	$+\sigma_6 + 2\sigma'_3 + 3\sigma''_2 - 4\psi_1 = u'_{24}$

Der Bau der einzelnen Columnen ist sehr einfach, da dieselben Zahlen sich fortwährend wiederholen. Man braucht übrigens die σ und δ nicht erst unter die Horizontalstriche zu schreiben, man kann sie gleich in die Columnen eintragen.

Die Differenzen zwischen den so berechneten u und oben angegebenen $u_x = f_x - x_0$ geben schon die übrig bleibenden Fehler. Die Zeiten der Maxima und Minima sind zwischen den Stunden, wo die Differentialquotienten u' ihre Zeichen wechseln, zu interpoliren.

gesetzt wird, wo also Δ^2 eine zweite Differenz bedeutet,

$$\Delta_x = \Delta_1 + \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_{x-1}^2, \quad x = 1, 2, \dots, n,$$

somit wird, wie leicht zu ersehen,

$$f(a_n) = f(a) + n\Delta_1 + (n-1)\Delta_1^2 + (n-2)\Delta_2^2 + (n-3)\Delta_3^2 + \dots + \Delta_{n-1}^2.$$

Geht man zu den dritten Differenzen über und setzt

$$\Delta_{i+1}^2 - \Delta_i^2 = \Delta_i^3,$$

so wird nach der vorausgehenden Gleichung

$$\Delta_x^2 = \Delta_1^2 + \Delta_1^3 + \dots + \Delta_{x-1}^3,$$

somit

$$f(a_n) = f(a) + n\Delta_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta_1^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \Delta_1^3 + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} \Delta_2^3 + \dots + \Delta_{n-3}^3.$$

Durch stete Wiederholung derselben Operationen bekommt man schliesslich

$$8) \quad f(a_n) = f(a) + n\Delta_1 + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta_1^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \Delta_1^3 + \dots$$

Das ist die Interpolationsformel in ihrer allgemeinsten Form. Um sie bequem anwenden zu können, setzt man

$$a_n = a + nh,$$

woselbst also

$$h = \frac{a_n - a}{n},$$

den n ten Teil des Intervalls zwischen dem ersten Argument und dem Argument bezeichnet, für welches f bestimmt werden soll.

Schreibt man dann für a_n allgemeiner x , so ist auch

$$n = \frac{x - a}{h},$$

somit

$$9) \quad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{h} \Delta_1 + \frac{(x-a)(x-a-h)}{2! h^2} \Delta_1^2 + \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{3! h^3} \Delta_1^3 + \dots + \frac{(x-a)(x-a-h) \dots (x-a-(n-2)h)}{(n-1)! h^{n-1}} \Delta_1^{(n-1)}.$$

Bei numerischen Rechnungen verfährt man nach dem folgenden Schema. Man schreibt die gegebenen Argumente in einer Columnne und daneben die gegebenen zugehörigen Functionswerte, aus den Functionswerten bildet man durch Subtraction jeder Zahl von der unter ihr stehenden die Reihe der ersten Differenzen; aus dieser ersten Differenzenreihe wieder durch Subtraction jeder Zahl von der unter ihr stehenden die Reihe der zweiten Differenzen, aus dieser die der dritten Differenzen u. s. f.

Man hat dann das Tableau

Argumente a	Functionswerte	Differenzen			
		1	2	3	4
a	$f(a)$				
a_1	$f(a_1)$	Δ_1			
a_2	$f(a_2)$	Δ_2	Δ_1^2		
a_3	$f(a_3)$	Δ_3	Δ_2^2	Δ_1^3	
a_4	$f(a_4)$	Δ_4	Δ_3^2	Δ_2^3	Δ_1^4 ...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Die in der oberen Diagonale stehenden Grössen $f(a)$, Δ_1 , Δ_1^2 , Δ_1^3 , ... sind in jene Formel einzuführen.

Man nimmt von der Reihe so viele Glieder, als die Beträge der Differenzen es erforderlich machen.

Offenbar ist das Argument a , von dessen Functionswert man ausgeht, einigermaßen willkürlich; liegt x innerhalb der Argumente, für welche die Functionswerte gegeben sind, so wird man als Ausgangsargument a eines wählen, welches noch über x steht, aber nur so weit von ihm entfernt ist, dass alle in der Reihe nötigen Differenzen sich noch gerade bilden lassen, ehe man an das Ende der gegebenen Functionswerte gelangt.

Im ganzen muss man sich so einrichten, dass $f(x)$ ungefähr in der Mitte zwischen den beiden Functionswerten zu stehen kommt, zwischen welchen alle nötigen Differenzen liegen.

Man sieht die Richtigkeit dieser Behauptung ein, wenn man beachtet, dass von der Wahl des Ausgangsarguments die Beträge der Factoren der Differenzen in der Entwicklung der Function abhängen, diese Factoren aber für die höhern Differenzen tunlichst klein zu halten sind.

Folgendes diene als Beispiel.

Es wurde die Lage der Declinationsnadel in dem Zeitintervall 13^h bis 24^h auf einer Scale von Stunde zu Stunde beobachtet, es soll diese Lage für den Zeitpunkt $19^h 45^m$ bestimmt werden.

Wir haben nach dem obigen Schema und den gemachten Beobachtungen

a	$f(a)$	Differenzen				
		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
13	— 6					
14	+ 9	+ 15				
15	+ 18	+ 9	— 6	— 1		
16	+ 20	+ 2	— 7	+ 13	+ 14	— 21
17	+ 28	+ 8	+ 6	+ 6	— 7	— 23
18	+ 48	+ 20	+ 12	— 24	— 30	+ 28
19	+ 56	+ 8	— 12	— 26	— 2	+ 18
20	+ 26	— 30	— 38	— 10	+ 16	+ 25
21	— 52	— 78	— 48	+ 31	+ 41	— 17
22	— 147	— 95	— 17	+ 55	+ 24	— 44
23	— 204	— 57	+ 38	+ 35	— 20	
24	— 188	+ 16	+ 73			

Es ist hier $x = 19^h 45^m$, gehen wir also in der Reihe bis zur 5ten Differenz, so müssen wir $f(17^h)$ zum Ausgangspunkt wählen. Es wird nun

$$x = a_n - a = 19,75 - 17 = 2,75,$$

und wir bekommen, da $h = 1$ zu setzen ist,

$$\begin{aligned} f(19^h 45^m) &= + 28 + 2,75 \cdot 20 - \frac{2,75 \cdot 1,75}{2} 12 - \frac{2,75 \cdot 1,75 \cdot 0,75}{6} 26 \\ &\quad - \frac{2,75 \cdot 1,75 \cdot 0,75 \cdot 0,25}{24} 16 + \frac{2,75 \cdot 1,75 \cdot 0,75 \cdot 0,25 \cdot 1,25}{120} 25 \\ &= + 28,0 + 55,0 - 28,9 - 15,6 - 0,6 + 0,1 = + 38,0. \end{aligned}$$

Man sieht, dass die 5. Differenz schon von ganz geringem Einfluss ist.

292b. Interpolationsformeln mit Zeilen-Differenzen. Für den sehr wichtigen Fall, dem auch das obige Beispiel angehört, dass die Argumente, für welche die Functionswerte gegeben sind, einander in gleichen Intervallen folgen, also, wie man sagt, eine arithmetische Reihe bilden, hat man noch eine Anzahl anderer Interpolationsformeln aufgestellt, die sich von der obigen Formel dadurch unterscheiden, dass die nötigen Differenzen nicht in einer Diagonale stehen, sondern in zwei Zeilen, welche zu den beiden Argumenten gehören, die das Argument, für welches die betreffende Function interpolirt werden soll, einschliessen.

Es sei also das Intervall zwischen den einzelnen Argumenten λ und diese Argumente selbst, indem das Argument a als zwischen ihnen liegend betrachtet wird, seien gleich

$$\dots, a - 2\lambda, a - \lambda, a, a + \lambda, a + 2\lambda, \dots$$

Wir haben, wie ursprünglich

$$9a) f(a + n\lambda) = f(a) + n\Delta_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta_1^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta_1^3 + \dots,$$

$f(a)$ und die Δ stehen in einer Diagonale.

Das Schema wird jetzt

Argu- mente	Func-tions- werte	Differenzen				
		1	2	3	4	5
\vdots	\vdots	\vdots				
$a - 3\lambda$	$f(a - 3\lambda)$	Δ_{-4}	Δ_{-3}^2			
$a - 2\lambda$	$f(a - 2\lambda)$	Δ_{-3}	Δ_{-2}^2	Δ_{-3}^3	Δ_{-2}^4	
$a - \lambda$	$f(a - \lambda)$	Δ_{-2}	Δ_{-1}^2	Δ_{-2}^3	Δ_{-1}^4	Δ_{-2}^5
a	$f(a)$	Δ_{-1}	Δ_0^2	Δ_{-1}^3	Δ_0^4	$\Delta_{-1}^5 \dots$
$a + \lambda$	$f(a + \lambda)$	Δ_{+1}	Δ_{+1}^2	Δ_{+1}^3	Δ_{+1}^4	Δ_{+1}^5
$a + 2\lambda$	$f(a + 2\lambda)$	Δ_{+2}	Δ_{+2}^2	Δ_{+2}^3	Δ_{+2}^4	Δ_{+2}^5
$a + 3\lambda$	$f(a + 3\lambda)$	Δ_{+3}	Δ_{+3}^2	Δ_{+3}^3		
\vdots	\vdots	Δ_{+4}				
		\vdots				

Die Δ , die in unserer Formel stehen, sind

$$\Delta_{+1}^1, \Delta_{+1}^2; \Delta_{+2}^3, \Delta_{+2}^4; \Delta_{+3}^5; \Delta_{+3}^6; \dots$$

Nun ist nach der Definition der Differenzen

$$\begin{aligned} \Delta_{+1}^2 &= \Delta_{+1}^3 + \Delta_0^2 \\ \Delta_{+2}^3 &= \Delta_{+1}^4 + \Delta_{+1}^3 = \Delta_{+1}^5 + \Delta_0^4 + \Delta_{+1}^3 \end{aligned}$$

u. s. f.

Kurz man kann jede der in der Formel vertretenen höheren Differenzen durch Differenzen ausdrücken, die entweder mit dem Argument a oder mit der ersten Differenz Δ_{+1} auf gleicher Zeile stehen. Die geraden Differenzen gehören der Zeile durch a , die ungeraden der durch Δ_{+1} an. Man bekommt aber nach leichter Zwischenrechnung

$$\begin{aligned} 9b) f(a + n\lambda) &= f(a) + n\Delta_{+1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta_0^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta_{+1}^3 \\ &+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta_0^4 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \Delta_{+1}^5 \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Statt der Δ_{+1} hätten wir auch die Δ_{-1} einführen können; es folgt dann

$$\begin{aligned}
 9c) \quad & f(a + n\lambda) = f(a) \\
 & + n\Delta_{-1} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \Delta_0^2 + \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta_{-1}^3 \\
 & + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta_0^4 + \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \Delta_{-1}^5 \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Beide Formeln gelten für positive wie für negative n , man kann mit ihnen vorwärts wie rückwärts interpolieren, aber die erste eignet sich mehr für positive, die zweite mehr für negative n . Als Ausgangsargument ist dann aber dasjenige Argument zu wählen, welches dem Argument $a + n\lambda$ am nächsten liegt.

Endlich bekommen wir die dritte und am meisten angewendete Formel, indem wir die beiden voraufgehenden Formeln zu einem Mittel vereinigen. Schreiben wir dann

$$\frac{\Delta_{+1}^{2i+1} + \Delta_{-1}^{2i+1}}{2} = \Delta^{2i+1}$$

und lassen bei den geraden Differenzen den Index 0 fort

$$\begin{aligned}
 9d) \quad & f(a + n\lambda) = f(a) \\
 & + n\Delta^1 + \frac{n^2}{1 \cdot 2} \Delta^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 \\
 & + \frac{(n+1)n^2(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta^4 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \Delta^5 + \dots
 \end{aligned}$$

Die ungeraden Δ sind die Mittel unter einander stehender ungerader, die Zeile a einfassender Differenzen, diese Δ stehen also alle auf derselben Zeile, nämlich auf der von a .

In allen drei letzten Formeln ist $n < 1$, denn das Argument $a + n\lambda$ sollte zwischen a und $a + \lambda$ liegen.

Nehmen wir unser früheres Beispiel, so ist bei einer Interpolation nach vorwärts $a = 19$, $f(a) = + 56$, $n = 0,75$, ferner

$$\begin{aligned}
 \Delta^1 &= \frac{1}{2}(+ 8 - 30) = - 11, \\
 \Delta^2 &= - 38, \\
 \Delta^3 &= - \frac{1}{2}(10 + 26) = - 18, \\
 \Delta^4 &= + 16, \\
 \Delta^5 &= + \frac{1}{2}(18 + 25) = + 21,
 \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned}
 f(19^h 45^m) &= +56 - 0,75 \cdot 11 - \frac{(0,75)^2}{2} 38 + \frac{1,75 \cdot 0,75 \cdot 0,25}{6} 18 \\
 &\quad - \frac{1,75 \cdot 0,75^2 \cdot 0,25}{24} 16 + \frac{2,75 \cdot 1,75 \cdot 0,75 \cdot 0,25 \cdot 1,25}{120} 21. \\
 &= +56 - 8,2 - 10,6 + 1,0 - 0,2 + 0,2 = +38,2,
 \end{aligned}$$

dasselbe, was wir früher gefunden haben.

Wollen wir, was hier wegen des Betrages von n richtiger ist, rückwärts interpoliren, so müssen wir von $a = 20$ ausgehen; es ist dann $n = -0,25$ und

$$\begin{aligned}
 f(a) &= +26, \\
 \Delta^1 &= \frac{1}{2}(-30 - 78) = -54, \\
 \Delta^2 &= -48, \\
 \Delta^3 &= \frac{1}{2}(-10 + 31) = +10, \\
 \Delta^4 &= +41, \\
 \Delta^5 &= \frac{1}{2}(+25 - 17) = +4,
 \end{aligned}$$

somit nach der Formel 9d)

$$\begin{aligned}
 f(19^h 45^m) &= +26 + 0,25 \cdot 54 - \frac{0,25 \cdot 0,25}{2} 48. \\
 &\quad + \frac{0,75 \cdot 0,25 \cdot 1,25}{6} 10 - \frac{0,75 \cdot 0,25 \cdot 0,25 \cdot 1,25}{24} 41. \\
 &\quad - \frac{1,75 \cdot 0,75 \cdot 0,25 \cdot 1,25 \cdot 2,25}{120} 4 + \dots, \\
 &= +26 + 13,5 - 1,5 + 0,4 - 0,1 - \dots = +38,3.
 \end{aligned}$$

Es lassen sich noch eine ganze Anzahl anderer Formeln ableiten, aber mit den angeführten 4 Formeln kann man in jedem Falle die Interpolation schon bequem genug ausführen.

292c. Extrapolation. Wenn die Grösse $a + n\lambda$ nicht in dem Intervall der Argumente liegt, für welche die Werte der Function gegeben sind, es sich also um eine eigentliche Extrapolation handelt, oder wenn es einem Ende in der Reihe dieser Werte so nahe liegt, dass sich nicht alle nötigen Differenzen Δ_{+1} , Δ_{-1} und Δ_0 bilden lassen, hat man allein von der ersten Formel Gebrauch zu machen. Als Ausgangswert gilt dann der obere Functionswert, wenn das Argument der gesuchten Grösse oberhalb, der untere, wenn dieses Argument unterhalb der gegebenen Reihe von Argumenten steht.

Liegt $a + n\lambda$ oberhalb der Reihe der Argumente, so ist n negativ, schreiben wir also jenes Argument $a - n\lambda$, so wird

$$9e) \quad f(a - n\lambda) = f(a) - n\Delta_1 + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \Delta_1^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta_1^3 + \dots$$

Wenn $a + n\lambda$ unterhalb der Reihe der Argumente liegt, können wir unsere Entwicklung nicht ohne weiteres anwenden, denn die Δ sollten in einer von oben nach unten verlaufenden Diagonale stehen, während die letzten Differenzen eine von unten nach oben gerichtete Diagonale ausfüllen. Denken wir uns aber die Reihe der Argumente a, a_1, a_2, \dots, a_i umgekehrt, so dass a_i zuerst, a zuletzt steht, so ist dieser Fall auf den vorausgehenden zurückgeführt, und wenn man

$$a + n\lambda = a_i + \nu\lambda$$

setzt, bekommt man genau so wie im vorausgehenden Fall

$$9f) \quad f(a_i + \nu\lambda) = f(a_i) - \nu\Delta_i + \frac{\nu(\nu+1)}{1 \cdot 2} \Delta_i^2 - \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta_i^3 + \dots$$

In beiden Fällen wachsen die Factoren der Differenzen fortwährend, wenn also die Differenzen selbst nicht gegen Null convergiren, kann es geschehen, dass die Extrapolation sich nicht ausführen lässt. Oft ist auch die Reihe halb convergent, alsdann kommt es nur darauf an, die richtige Anzahl von Gliedern zu benutzen.

Im allgemeinen wird man eine Untersuchung der Reihe auf ihre Convergenz nicht vermeiden können, indessen wird die Anwendung selbst schon zeigen, ob man genügend sicher extrapoliren kann oder nicht. Es ist aber besser, das numerische Extrapoliren tunlichst zu vermeiden und lieber aus den gegebenen Functionswerten eine Formel für die Function abzuleiten, also analytisch zu interpoliren.

Wie man aber auch verfahren mag, die Extrapolation wird um so unsicherer, je weiter das Argument, für welches extrapolirt werden soll, von der Reihe der gegebenen Argumente entfernt liegt.

292d. Interpolation für mehrere Argumente. Wenn man eine Function mehrerer Argumente hat, interpolirt man für jedes Argument für sich, indem man immer allen andern Argumenten bestimmte Werte beilegt. Zum Beispiel bei zwei Argumenten interpolirt man erst eine Reihe von Functionswerten, in denen das eine Argument die Beträge hat, für welche die Function gegeben ist, das andere Argument den Betrag besitzt, für den interpolirt werden soll. Dann interpolirt man in der so erhaltenen Reihe von neuen Functionswerten für den Betrag des andern Arguments.

XXV. Differentiation und Integration.

a) *Differentiation.*

293. Graphische Differentiation. Bei der graphischen Differentiation einer Function nach einem Argument zeichnet man aus den für bestimmte gegebene Beträge des betreffenden Arguments gegebenen Werten dieser Function, indem die andern etwa vorhandenen Argumente constant erhalten werden, die den Verlauf der Function für das hervorgehobene Argument darstellende Curve und zieht an dem Punkte der Curve, dessen Ordinate den vorgeschriebenen Betrag der Function, für welchen die Differentiation gelten soll, hat, die Berührende. Die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Berührende mit der Abscissenaxe einschliesst, ist der gesuchte Differentialquotient.

Da sich das totale Differential summatorisch aus den partiellen Differentialen zusammensetzt, bekommt man dieses totale Differential, indem man für den Verlauf der Function für jedes Argument eine besondere Curve zeichnet und in allen Curven an den Stellen, die den vorgeschriebenen Beträgen der Argumente entsprechen, die Tangenten zieht.

Diese Methode führt zu um so genaueren Zahlen, je stärker die Ordinaten an den betreffenden Stellen variiren, sie wird unbrauchbar, wenn der Abfall oder das Ansteigen der Curven daselbst unbedeutend ist. Ihre Anwendung ist, zumal wenn es sich um Functionen handelt, bei deren graphischer Darstellung Willkür nicht zu vermeiden ist, nur für approximative Bestimmung zu empfehlen.

Die höhern Differentialquotienten könnte man auch graphisch bestimmen, aber hier würde das Verfahren umständlich und unsicher sein.

294. Analytische Differentiation. Ueber die analytische Differentiation ist nichts besonderes zu bemerken, kennt man die Function von vornherein nicht, so muss man für sie irgend eine Form (eine algebraische oder periodische) annehmen und diese eventuell durch Ausgleichung den gegebenen Beträgen der Function anpassen. Die Differentiation dieser angenommenen Form ersetzt dann die Differentiation der unbekanntnen, wahren Form.

In dieser Weise verfährt man zum Beispiel bei dem Uebergang von den mittlern Ausdehnungscoefficienten auf die wahren.

Ein Beispiel für die analytische Differentiation haben wir schon in Art. 291e kennen gelernt.

295. Numerische Differentiation. Der weitesten und bequemsten Anwendung fähig ist die numerische Differentiation.

Es hänge die Function nur von einem Argument ab, und sie sei für bestimmte Beträge dieses Arguments gegeben, so dass die Differenzenreihen ebenfalls bekannt sind,

Wir gehen von der Interpolationsformel 9a) in Art. 292b aus und stellen sie der durch den Taylor'schen Satz gegebenen Entwicklung gegenüber.

Nach dem Taylor'schen Satz ist

$$f(a + n\lambda) = f(a) + \frac{n\lambda}{1!} \frac{df(a)}{da} + \frac{n^2\lambda^2}{2!} \frac{d^2f(a)}{da^2} + \frac{n^3\lambda^3}{3!} \frac{d^3f(a)}{da^3} + \dots$$

Nach der bezeichneten Interpolationsformel ist dagegen

$$f(a + n\lambda) = f(a) + \frac{n}{1!} \Delta_1 + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta_1^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \Delta_1^3 + \dots$$

Das variirende Element ist n , es müssen hiernach, wenigstens wenn beide Reihen convergent sind, und dies ist ja der für uns allein wichtige Fall, Factoren gleicher Potenzen von n in beiden Darstellungen einander gleich sein. Ordnet man nun die Interpolationsformel nach den Potenzen von n , so wird

$$\begin{aligned} f(a + n\lambda) = f(a) + \frac{n}{1!} & \left(\Delta_1 - \frac{\Delta_1^2}{2} + \frac{\Delta_1^3}{3} - \frac{\Delta_1^4}{4} + \dots \right) \\ & + \frac{n^2}{2!} \left(\Delta_1^2 - \Delta_1^3 + \frac{11}{12} \Delta_1^4 - \dots \right) \\ & + \frac{n^3}{3!} \left(\Delta_1^3 - \frac{3}{2} \Delta_1^4 + \dots \right) \\ & + \frac{n^4}{4!} \left(\Delta_1^4 - \dots \right), \end{aligned}$$

und damit bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{df(a)}{da} &= \frac{1}{\lambda} \left(\Delta_1 - \frac{\Delta_1^2}{2} + \frac{\Delta_1^3}{3} - \frac{\Delta_1^4}{4} + \dots \right) \\ 10a) \quad \frac{d^2f(a)}{da^2} &= \frac{1}{\lambda^2} \left(\Delta_1^2 - \Delta_1^3 + \frac{11}{12} \Delta_1^4 + \dots \right) \\ \frac{d^3f(a)}{da^3} &= \frac{1}{\lambda^3} \left(\Delta_1^3 - \frac{3}{2} \Delta_1^4 + \dots \right) \end{aligned}$$

u. s. f.

Allgemein gilt die symbolische Formel

$$10) \quad \frac{d^i f(a)}{da^i} = \frac{1}{\lambda^i} \left(\Delta_1 - \frac{\Delta_1^2}{2} + \frac{\Delta_1^3}{3} - \frac{\Delta_1^4}{4} + \dots \right)^i = \frac{1}{\lambda^i} (\log(1 + \Delta_1))^i.$$

Das Symbolische besteht darin, dass man nach Ausführung der Potenzirung unter jeder Potenz Δ^x die x te Differenz zu verstehen hat.

Damit sind die Differentialquotienten von $f(a)$ gewonnen, will man die von $f(a + n\lambda)$ haben, so hat man an Stelle von a zu setzen $a + n\lambda$. Die Differenzen $\Delta_1, \Delta_1^2, \dots$ gehen dann über in $\Delta_n, \Delta_n^2, \dots$, sie sind, wenn n eine ganze Zahl ist, in der Reihe der Differenzen enthalten, wenn aber n ein Bruch ist, kennt man sie zunächst nicht, aber offenbar entsteht Δ_n^i aus Δ_1^i und den folgenden Differenzen genau so, wie $f(a + n\lambda)$ aus $f(a)$ und den Differenzen abgeleitet ist. Man hat also nach unserer Interpolationsformel

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \Delta_1 + n\Delta_1^2 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta_1^3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta_1^4 + \dots, \\ \Delta_n^2 &= \Delta_1^2 + n\Delta_1^3 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta_1^4 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta_1^5 + \dots,\end{aligned}$$

allgemein wird hiernach

$$11a) \Delta_n^i = \Delta_1^i + n\Delta_1^{i+1} + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta_1^{i+2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta_1^{i+3} + \dots$$

Nachdem man nach diesen (oder auch nach den den Formeln 9b) bis 9d) entsprechenden) Formeln die nötigen Differenzen $\Delta_n, \Delta_n^2, \dots$ berechnet hat, bekommt man

$$12a) \begin{aligned}\frac{df(a+n\lambda)}{da} &= \frac{1}{\lambda} \left(\Delta_n - \frac{1}{2}\Delta_n^2 + \frac{1}{3}\Delta_n^3 - \dots \right), \\ \frac{d^2f(a+n\lambda)}{da^2} &= \frac{1}{\lambda^2} \left(\Delta_n^2 - \Delta_n^3 + \frac{11}{12}\Delta_n^4 - \dots \right),\end{aligned}$$

allgemein in symbolischer Darstellung

$$12) \frac{d^i f(a+n\lambda)}{da^i} = \frac{1}{\lambda^i} (\log(1 + \Delta_n))^i.$$

Die so erhaltenen Reihen für die Differentialquotienten sind meist wenig convergent, andere, oft brauchbarere Formeln bekommt man, indem man die Entwicklung nach dem Taylor'schen Satz mit den andern Interpolationsformeln vergleicht.

Ich nehme die letzte Interpolationsformel, die ja die beiden andern in sich vereinigt, wo also alle Differenzen in einer Zeile stehen, nach dieser ist

$$\begin{aligned}f(a+n\lambda) &= f(a) + n\Delta^1 + \frac{n^2}{1.2}\Delta^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\Delta^3 \\ &\quad + \frac{(n+1)n^2(n-1)}{1.2.3.4}\Delta^4 + \dots\end{aligned}$$

Ordnet man nach Potenzen von n , und vergleicht mit der Taylorschen Entwicklung, so findet sich leicht

$$\begin{aligned}
 \frac{df(a)}{da} &= \frac{1}{\lambda} \left(\Delta^1 - \frac{\Delta^3}{6} + \frac{\Delta^5}{30} - \frac{\Delta^7}{140} + \dots \right) \\
 \frac{d^2f(a)}{da^2} &= \frac{1}{\lambda^2} \left(\Delta^2 - \frac{\Delta^4}{12} + \frac{\Delta^6}{90} - \dots \right) \\
 \frac{d^3f(a)}{da^3} &= \frac{1}{\lambda^3} \left(\Delta^3 - \frac{\Delta^5}{4} + \frac{7}{120} \Delta^7 - \dots \right) \\
 \frac{d^4f(a)}{da^4} &= \frac{1}{\lambda^4} \left(\Delta^4 - \frac{\Delta^6}{6} \dots \right)
 \end{aligned}$$

10b)

u. s. f.

Offenbar sind diese Formeln viel geeigneter zu numerischen Rechnungen, als die voraufgehend angegebenen.

Wollen wir den Differentialquotienten für $f(a + n\lambda)$ haben, so brauchen wir uns in den obigen Formeln nur Δ^{2i+1} durch $\frac{1}{2}(\Delta_n^{2i+1} + \Delta_{(n+1)}^{2i+1})$, bezüglich durch Δ_n^{2i} ersetzt denken, diese neuen Δ berechnet man aber nach einer der Interpolationsformeln. So ist für gerade Differenzen nach der Interpolationsformel 9d)

$$\begin{aligned}
 11b) \quad \Delta_n^{2i} &= \Delta^{2i} + n\Delta^{2i+1} + \frac{n^2}{1 \cdot 2} \Delta^{2i+2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^{2i+3} \\
 &\quad + \frac{(n+1)n^2(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta^{2i+4} + \dots
 \end{aligned}$$

und für ungerade Differenzen, je nachdem wir von Δ_{+1}^{2i+1} oder Δ_{-1}^{2i+1} ausgehen, nach den Formeln 9b, 9c)

$$\begin{aligned}
 11c) \quad \Delta_n^{2i+1} &= \Delta_{+1}^{2i+1} + (n-1)\Delta^{2i+2} + \frac{(n-1)n}{2!} \Delta_{+1}^{2i+3} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \Delta^{2i+4} + \dots \\
 &= \Delta_{-1}^{2i+1} + n\Delta^{2i+2} + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta_{-1}^{2i+3} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} \Delta^{2i+4} + \dots
 \end{aligned}$$

somit auch

$$\begin{aligned}
 11d) \quad \Delta_n^{2i+1} &= \Delta^{2i+1} + \frac{2n-1}{2} \Delta^{2i+2} + \frac{(n-1)n}{2!} \Delta^{2i+3} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{2 \cdot 3!} \Delta^{2i+4} \\
 &\quad + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!} \Delta^{2i+5} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(2n-1)}{2 \cdot 5!} \Delta^{2i+6} + \dots
 \end{aligned}$$

Also das arithmetische Mittel zweier auf einander folgender interpolirter ungerader Differenzen

$$\begin{aligned}
 11e) \quad \frac{\Delta_{2n+1}^{2i+1}}{2} &= \frac{1}{2}(\Delta_n^{2i+1} + \Delta_{(n+1)}^{2i+1}) \\
 &= \Delta^{2i+1} + n\Delta^{2i+2} + \frac{n^2}{2!} \Delta^{2i+3} + \frac{n(n^2 + \frac{1}{2})}{3!} \Delta^{2i+4} \\
 &\quad + \frac{(n+1)n^2(n-1)}{4!} \Delta^{2i+5} + \frac{n(n-1)(n+1)(n^2+1)}{5!} \Delta^{2i+6} + \dots
 \end{aligned}$$

Wir nehmen unser früheres Beispiel, Art. 292a, und fragen nach der Geschwindigkeit, mit der die Declinationsnadel ihre Lage erstens um 19^h , zweitens um $19^h 45^m$ geändert hat. Wir haben nach den Angaben des betreffenden Artikels

$$\Delta^1 = -11, \Delta^2 = -38, \Delta^3 = -18, \Delta^4 = +16, \Delta^5 = +21,$$

somit erstens

$$\left(\frac{df(a)}{da}\right)_{19^h} = \frac{1}{1^h} \left(-11 + \frac{18}{6} + \frac{21}{30} \dots\right) = -\frac{7,3}{1^h},$$

das heisst, wenn die Nadel sich mit der Geschwindigkeit, die sie um 19^h hat, weiter bewegen würde, so würden die Scalenablesungen pro Stunde um 7,3 Teile abnehmen.

Im zweiten Fall, wo $\left(\frac{df}{da}\right)_{19^h, 75}$ zu berechnen ist, haben wir zunächst

$$\begin{aligned} \Delta^1(19,75) &= -11 - 0,75 \cdot 38 - \frac{(0,75)^2}{2} 18 + \frac{0,75((0,75)^2 + 0,5)}{6} 16 \\ &\quad - \frac{1,75 \cdot (0,75)^2 \cdot 0,25}{24} 21 \dots \\ &= -11 - 28,5 - 5,1 + 2,1 - 0,2 = -42,7 \\ \Delta^3(19,75) &= -18 + 0,75 \cdot 16 + \frac{(0,75)^2}{2} 21 + \dots = +0,4 \\ \Delta^5(19,75) &= +21 + 0,75 \cdot 7 \dots = +21,6 \end{aligned}$$

Von je höherer Ordnung eine Differenz ist, mit um so geringerer Genauigkeit braucht sie hier bestimmt zu werden, weil die Differenzen durch verhältnismässig grosse Zahlen dividirt werden, das ist der Grund, warum bei der Berechnung von Δ^3 und Δ^5 die andern Differenzen Δ nicht zu Rate gezogen sind.

Man findet nunmehr

$$\left(\frac{df(a)}{da}\right)_{19,75} = -\frac{43,5}{1^h}.$$

Die Ablesungen der Nadel nehmen also um $19^h 45^m$ mit so grosser Geschwindigkeit ab, dass auf die Stunde 43,5 Scalenteile kommen würden, wenn die Nadel sich mit derselben Geschwindigkeit weiter bewegen würde.

Bei Differentiationen nach mehrern Argumenten hat man für jedes Argument unter Constanthaltung der übrigen nach den obigen Formeln zu rechnen.

b) *Integration.*

Die Integration, oder, wie man auch sagt, Quadratur soll nur insoweit behandelt werden, als sie für den Physiker von Interesse ist. Für ein tieferes Eindringen in diese Materie seien ausser den Arbeiten von Gauss namentlich die schönen Enckeschen Abhandlungen empfohlen.*)

296. Graphisches Integriren. (Mechanische Quadratur.) Bei der graphischen Integration, der eigentlich mechanischen Quadratur stellt man die gegebenen Werte der Function für bestimmte Beträge des Arguments, nach welchem integrirt werden soll, durch eine Curve dar und misst den Inhalt der von der Curve, der Abscissenaxe und den beiden, den Grenzwerten des Arguments, zwischen denen integrirt werden soll, entsprechenden Ordinaten aus dem Blatt abgegrenzten Fläche. Dieser Inhalt giebt schon das gesuchte Integral.

Zur praktischen Ausführung solcher Flächenbestimmungen hat man eine ganze Reihe von Instrumenten construiert, die man als Planimeter bezeichnet. Es bestehen diese Planimeter im allgemeinen aus zwei mit einander verbundenen Stangen (wie die Cirkel), die Querspitzen tragen; die eine Stange wird an ihrer Spitze festgelegt, die andere wird so herumgeführt, dass ihre Spitze den Contour der auszumessenden Fläche beschreibt, an einer besonders eingerichteten Trommel wird dann, nachdem diese Spitze den ganzen Contour vollständig beschrieben hat, der Flächeninhalt abgelesen.

Hat man kein Planimeter zur Verfügung, so benutzt man Coordinatenpapier und zählt die einzelnen in dem bezeichneten Flächenstück enthaltenen Quadrathen, wobei man die Teile von Quadraten, die an der Curve liegen können, zu schätzen hat.

Oft verfährt man auch so, dass man die Zeichnung auf einem in Form eines Rechtecks geschnittenen Blatt ausführt. Man misst die Seitenlängen dieses Blattes, wodurch der Flächeninhalt desselben bekannt wird, wiegt das Blatt, schneidet das zu bestimmende Flächenstück aus und wiegt auch dieses. Der Inhalt des Flächenstücks ist dann gleich dem des Blattes multiplicirt mit dem Quotienten aus dem Gewicht des Flächenstücks und dem Gewicht des Blattes. Die Methode setzt voraus, dass das Blatt überall gleich dick und ganz eben ist.

Reichen die bezeichneten nötigen Hilfsmittel zur Ausführung der Flächenbestimmung nicht aus, so misst man zwischen den beiden Grenzordinaten h_0 und h' eine ungerade Anzahl von Ordinaten h_1, h_2, \dots, h_{n-1} und berechnet den Flächeninhalt nach der bekannten Simpsonschen Formel

$$13a) \quad F = \int_{a_0}^{a'} f(a) da = \frac{a' - a_0}{3n} \{ h_0 + 4(h_1 + h_3 + h_5 + \dots + h_{n-1}) + 2(h_2 + h_4 + h_6 + \dots + h_{n-2}) + h' \}.$$

*) Astronomisches Jahrbuch, Jahrgang von 1830, 1837 und 1862.

Oft genügt die Formel

$$13b) \quad F = \int_{a_1}^{a'} f(a) da = \frac{a' - a_0}{n} \left\{ \frac{1}{2} h_0 + h_1 + h_2 + \dots + h_{n-1} + \frac{1}{2} h' \right\}$$

oder gar schon die

$$13c) \quad F = \int_{a_0}^{a'} f(a) da = \frac{a' - a_0}{n} \{ h_0 + h_1 + h_2 + \dots + h_{n-1} \}.$$

Die Bedeutung dieser Formeln ist bekannt, ihre Genauigkeit ist um so grösser, je mehr Ordinaten gemessen werden, und zwar steigt diese Genauigkeit bei der Simpsonschen Formel proportional n^4 , bei der zweiten und letzten Formel proportional n^2 .

Die graphische Integration hat nur dann einen besondern Wert, wenn der Verlauf der darstellenden Curve von vornherein gegeben ist oder doch genügend genau gezogen werden kann. Wir werden im zweiten Band einige Beispiele kennen lernen.

297. Analytische Integration. Für die zweite Methode, die analytische, hat man die Function durch eine, ihre wahre Formel ersetzende, den gegebenen Beträgen angepasste Gleichung darzustellen. Man integrirt dann diese analytische Darstellung zwischen den vorgeschriebenen Beträgen der Argumente.

297a. Integration durch die Lagrange'sche Interpolationsformel. Von besonderer Wichtigkeit ist hier der Fall, dass man die Function durch die Lagrange'sche Interpolationsformel darstellt.

Analytisch gesprochen sagt jene Formel aus: man kann stets eine algebraische Function angeben, welche mit irgend einer vorgelegten Function eine gewisse Anzahl von Werten gemein hat. Der Grad der betreffenden Function richtet sich nach der Anzahl der gemeinschaftlichen Werte, und wenn f_1, f_2, \dots, f_h die den Beträgen a_1, a_2, \dots, a_h entsprechenden Werte der vorgelegten Function sind, ist die diese Function für diese Werte ersetzende algebraische Function

$$\varphi(a) = \sum_{i=1}^{i=h} \frac{f_i}{\psi'(a_i)} \frac{\psi_i(a)}{a - a_i},$$

woselbst

$$\psi(a) = (a - a_1)(a - a_2) \dots (a - a_h),$$

$$\psi'(a_i) = \left(\frac{d\psi(a)}{da} \right)_{a=a_i},$$

ist.

Dieselbe Substitution von $\varphi(a)$ an Stelle von $f(a)$ hat man aber auch zu machen, wenn man $f(a)$ nach Potenzen von a entwickelt und von der so entstehenden Reihe die h ersten Glieder nimmt. Wir können daher auch sagen:

Wird eine Function $f(a)$ durch die h ersten Glieder ihrer Entwicklung nach ganzen positiven Potenzen ihres Arguments dargestellt, so lautet diese Darstellung

$$f(a) = \sum_{i=1}^{i=h} \frac{f_i}{\psi'(a_i)} \frac{\psi(a)}{(a - a_i)},$$

woselbst die f_i gegebenen Beträge den a_i entsprechende Beträge der Function bedeuten.

Nun erst erhellt die grosse Bedeutung des Lagrangeschen Satzes für den Physiker, der ja meist die Functionen in Reihen darstellt.

Es sei jetzt das gesuchte Integral $\int f(a) da$ zwischen den Grenzen a' und a'' zu bilden, wobei a' und a'' nicht zu weit ausserhalb des Bereichs der Argumente, für welche die Function gegeben ist, liegen dürfen.

Wir haben zufolge der Lagrangeschen Gleichung

$$14') \quad \int_{a'}^{a''} f(a) da = \sum_{i=1}^{i=h} \frac{f_i}{\psi'(a_i)} \int_{a'}^{a''} \frac{\psi(a)}{a - a_i} da.$$

Gauss, von dem im wesentlichen die sämtlichen folgenden Entwicklungen herrühren*), transformirt erst das Integral in ein solches mit Zahlengrenzen. Er setzt

$$a = a' + (a'' - a')t,$$

wo t die neue Variable angiebt, dann sind die Grenzen 0 und 1, und es wird

$$\int_{a'}^{a''} f(a) da = (a'' - a') \int_0^1 f(a' + (a'' - a')t) dt = (a'' - a') \sum_{i=1}^{i=h} \frac{f_i}{\psi'(t_i)} \int_0^1 \frac{\psi(t)}{t - t_i} dt.$$

Hierin ist

$$t_i = \frac{a_i - a'}{a'' - a'}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, h,$$

also bekannt.

Man hat aber

$$\frac{\psi(t)}{t - t_i} = (t - t_1)(t - t_2) \cdots (t - t_{i-1})(t - t_{i+1}) \cdots (t - t_h),$$

*) *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi.* Werke, Ausgabe von 1876, Bd. 3, Seite 165—196.

1. Man rechnet aus den beiden Grenzen a' und a'' des Integrals und den n Argumenten a_1, a_2, \dots, a_n , für welche die Beträge der zu integrierenden Function f gegeben sind, h Zahlen t_1, t_2, \dots, t_h nach den Formeln

$$t_1 = \frac{a_1 - a'}{a'' - a'},$$

$$t_2 = \frac{a_2 - a'}{a'' - a'},$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$t_h = \frac{a_h - a'}{a'' - a'}.$$

2. Man multiplicirt die Function

$$\psi(t) = (t - t_1)(t - t_2)(t - t_3) \cdots (t - t_h)$$

aus, wodurch man bekommt

$$\psi(t) = t^h + A_1 t^{h-1} + A_2 t^{h-2} + \cdots + A_h.$$

Die so sich ergebenden A sind bestimmte, durch t_1, t_2, \dots, t_h berechenbare Zahlen, nämlich die aus der Lehre von den Gleichungen bekannten symmetrischen Functionen, also

$$A_1 = -(t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_h),$$

$$A_2 = +(t_1 t_2 + t_1 t_3 + \cdots + t_1 t_h + t_2 t_3 + \cdots + t_{h-1} t_h),$$

$$A_3 = -(t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_4 + \cdots + t_2 t_3 t_4 + \cdots + t_{h-2} t_{h-1} t_h)$$

u. s. f.

3. Aus diesen h Zahlen, von denen man die letzte, A_h , nicht einmal braucht, berechnet man $h - 1$ neue Zahlen B_1, B_2, \dots, B_{h-1} nach dem Schema

$$B_1 = A_1 + \frac{1}{2},$$

$$B_2 = A_2 + \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{3},$$

$$B_3 = A_3 + \frac{1}{2} A_2 + \frac{1}{3} A_1 + \frac{1}{4},$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$B_{h-1} = A_{h-1} + \frac{1}{2} A_{h-2} + \frac{1}{3} A_{h-3} + \frac{1}{4} A_{h-4} + \cdots + \frac{1}{h-2} A_2 + \frac{1}{h-1} A_1 + \frac{1}{h}.$$

Es ist hiernach für :

$$h = 2 \\ v = -\frac{1}{6} K_2 - \frac{1}{4} K_3 - \frac{3}{10} K_4 - \dots,$$

$$h = 3 \\ v = -\frac{1}{120} K_4 - \frac{1}{48} K_5 - \dots,$$

$$h = 4 \\ v = -\frac{1}{270} K_4 - \frac{1}{108} K_5 - \dots,$$

$$h = 5 \\ v = -\frac{1}{2688} K_6 - \frac{1}{768} K_7 - \dots,$$

$$h = 6 \\ v = -\frac{11}{52500} K_6 - \frac{11}{15000} K_7 - \dots,$$

$$h = 7 \\ v = -\frac{1}{38880} K_8 - \frac{1}{8640} K_9,$$

$$h = 8 \\ v = -\frac{167}{10588410} K_8 - \frac{167}{2352980} K_9,$$

$$h = 9 \\ v = -\frac{37}{17361504} K_{10} - \frac{37}{3145728} K_{11},$$

$$h = 10 \\ v = -\frac{865}{631351908} K_{10} - \frac{865}{114791256} K_{11},$$

$$h = 11 \\ v = -\frac{26927}{13650000000} K_{12} - \frac{26927}{2100000000} K_{13}.$$

In zwei besondern Fällen ist die Rechenarbeit durch von Cotes bezüglich Gauss berechnete Tabellen erheblich verringert. Beide Fälle beziehen sich auf speciellen Verlauf der Argumente, für welche die Function gegeben sein sollte, setzen also voraus, dass man diese Function für alle Werte ihres Arguments streng berechnen kann oder wenigstens, dass man die Interpolation aus gegebenen Werten für andere Argumente genau genug auszuführen vermag.

für $h = 9$, also 9 Glieder

$$\frac{a'' - a'}{2835} \left\{ \frac{989}{10} (f_1 + f_9) + \frac{2944}{5} (f_2 + f_8) - \frac{464}{5} (f_3 + f_7) + \frac{5248}{5} (f_4 + f_6) - 454 f_5 \right\},$$

für $h = 10$, also 10 Glieder

$$\frac{a'' - a'}{44800} \left\{ \frac{2857}{2} (f_1 + f_{10}) + \frac{15741}{2} (f_2 + f_9) + 540 (f_3 + f_8) + 9672 (f_4 + f_7) \right. \\ \left. + 2889 (f_5 + f_6) \right\},$$

für $h = 11$, also 11 Glieder

$$\frac{a'' - a'}{24948} \left\{ \frac{16067}{24} (f_1 + f_{11}) + \frac{26575}{6} (f_2 + f_{10}) - \frac{16175}{8} (f_3 + f_9) + 11350 (f_4 + f_8) \right. \\ \left. - 10856 (f_5 + f_7) + 17807 f_6 \right\}.$$

Bei der Anwendung hat der Leser nichts weiter zu tun, als die betreffenden Werte der f einzusetzen.

Für die Grössenordnung der vernachlässigten Glieder gelten dieselben Formeln wie im allgemeinen Fall, Art. 297a.

Was die Anzahl der zu wählenden Glieder anbetrifft, so zeigen die in dem betreffenden Artikel für die Vernachlässigungen aufgestellten Formeln, dass man immer gut tut, eine ungerade Anzahl von Gliedern zu wählen, also bei einer geraden Potenz aufzuhören. Die Genauigkeit steigt nur wenig, wenn man noch eine ungerade Potenz hinzunimmt, sie wächst aber auf das Doppelte, wenn die Anzahl der Glieder weiter noch um eine gerade Potenz vermehrt wird.

297c. Die Gaussischen Integralformeln. Die zweite Methode ist von Gauss selbst behandelt, sie erlaubt die Integration mit h bekannten Functionswerten bis auf Glieder $2h$ ter Ordnung auszuführen, während die eben auseinandergesetzte Methode schon die h ter Ordnung vernachlässigte.

Hier werden die t_1, t_2, \dots, t_h in ganz besonderer Weise gewählt, nämlich als Wurzeln der Gleichung

$$t^h - \frac{h^2}{1 \cdot (2h)^2} t^{h-1} + \frac{(h(h-1))^2}{1 \cdot 2 \cdot (2h)(2h-1)} t^{h-2} - \frac{(h(h-1)(h-2))^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (2h)(2h-1)(2h-2)} t^{h-3} + \dots = 0.$$

Auf die Ableitung gehe ich nicht ein, es sei nur bemerkt, dass sie sich leicht an die Theorie der Kugelfunctionen anschliesst. Nur die Resultate seien angeführt.

In der folgenden Zusammenstellung kommen zuerst die Argumente a_1, a_2, \dots , für welche die Function f zu berechnen oder aus ihren gegebenen Beträgen zu interpoliren ist, dann wird die Formel für das Integral

$I = \int_{a'}^{a''} f(a) da$ hingeschrieben, zuletzt ist das erste der vernachlässigten Glieder angegeben, wobei L_{2n} den Coefficienten von $\left(a - \frac{1}{2}\right)^{2n}$ in der Entwicklung von $f(a)$ nach Potenzen von $\left(a - \frac{1}{2}\right)$ bedeutet.

$$\begin{aligned}
 h &= 1, \\
 a_1 &= a' + 0,5(a'' - a'), \\
 I &= (a'' - a')f(a_1), \\
 \text{Corr} &= \frac{1}{12} L_2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h &= 2, \\
 a_1 &= a' + 0,211325(a'' - a'), \\
 a_2 &= a' + 0,788675(a'' - a'), \\
 I &= \frac{a'' - a'}{2}(f_1 + f_2), \\
 \text{Corr} &= \frac{1}{180} L_4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h &= 3 \\
 a_1 &= a' + 0,112702(a'' - a'), \\
 a_3 &= a' + 0,887298(a'' - a'), \\
 a_2 &= a' + 0,5(a'' - a'), \\
 J &= \frac{a'' - a'}{9} \left\{ \frac{5}{2}(f_1 + f_3) + 4f_2 \right\}, \\
 \text{Corr} &= \frac{1}{2800} L_6.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h &= 4 \\
 a_1 &= a' + 0,069432(a'' - a'), \\
 a_4 &= a' + 0,930568(a'' - a'), \\
 a_2 &= a' + 0,330009(a'' - a'), \\
 a_3 &= a' + 0,669991(a'' - a'), \\
 J &= (a'' - a') \{ 0,1739274(f_1 + f_4) + 0,3260726(f_2 + f_3) \}, \\
 \text{Corr} &= \frac{1}{44100} L_8.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h &= 5 \\
 a_1 &= a' + 0,046910(a'' - a'), \\
 a_5 &= a' + 0,953090(a'' - a'), \\
 a_2 &= a' + 0,230765(a'' - a'), \\
 a_4 &= a' + 0,769235(a'' - a'), \\
 a_3 &= a' + 0,5(a'' - a'), \\
 J &= (a'' - a') \{ 0,1184634(f_1 + f_5) + 0,2393143(f_2 + f_4) + 0,2844444 f_3 \}, \\
 \text{Corr} &= \frac{1}{698544} L_{10}.
 \end{aligned}$$

$$h = 6$$

$$a_1 = a' + 0,033765(a'' - a'),$$

$$a_6 = a' + 0,966235(a'' - a'),$$

$$a_2 = a' + 0,169395(a'' - a'),$$

$$a_5 = a' + 0,830605(a'' - a'),$$

$$a_3 = a' + 0,380690(a'' - a'),$$

$$a_4 = a' + 0,619310(a'' - a'),$$

$$J = (a'' - a') \{ 0,0856622(f_1 + f_6) + 0,1803808(f_2 + f_5) + 0,2339570(f_3 + f_4) \},$$

$$\text{Corr} = \frac{1}{11099088} L_{12}.$$

$$h = 7$$

$$a_1 = a' + 0,025446(a'' - a'),$$

$$a_7 = a' + 0,974554(a'' - a'),$$

$$a_2 = a' + 0,129234(a'' - a'),$$

$$a_6 = a' + 0,870766(a'' - a'),$$

$$a_3 = a' + 0,297077(a'' - a'),$$

$$a_5 = a' + 0,702923(a'' - a'),$$

$$a_4 = a' + 0,5(a'' - a'),$$

$$J = (a'' - a') \{ 0,0647425(f_1 + f_7) + 0,1398527(f_2 + f_6) + 0,1909150(f_3 + f_5) + 0,2089796f_4 \},$$

$$\text{Corr} = \frac{1}{176679360} L_{14}.$$

Es wird wol wenige Fälle geben, in denen die hier nach Gauss zusammengestellten Formeln nicht ausreichen. Die Schwierigkeit liegt nicht in der Rechnung, denn die Formeln sind durchaus einfach, sondern in der Interpolation für die vorgeschriebenen Argumente, und zwar darum, weil diese Interpolation bei Functionen, deren analytische Form nicht bekannt ist, sich mit genügender Genauigkeit nur ausführen lässt, wenn der Wert der Function innerhalb des Integrationsintervalls für eine relativ bedeutende Anzahl von Argumentbeträgen gegeben ist. Je grösser das Intervall $a'' - a'$ ist, desto mehr Werte der Function müssen im allgemeinen gegeben sein.

297d. Mehrfache Integration durch die Lagrangesche Interpolationsformel. Wenn nach demselben Argument mehrfach, etwa x mal zu integrieren ist, geht man von der allgemeinen Form der Lagrangeschen Gleichung aus, und integrirt diese x mal. Nach Ausführung der x ersten unbestimmten Integrationen hat man als Resultat

$$\begin{aligned}
 15) \quad & \iiint \cdots \int f(a) da^x = \\
 & = \sum_{i=1}^{i=h} \frac{f_i}{\Psi'(a_i)} \left\{ \frac{a^{h+x-1}}{h(h+1)\cdots(h+x-1)} + A_{i1} \frac{a^{h+x-2}}{h(-1)(h)\cdots(h+x-2)} \right. \\
 & \quad \left. + A_{i2} \frac{a^{h+x-3}}{(h-2)(h-2)\cdots(h+x-3)} + \cdots + A_{ih-1} \frac{a^{x-1}}{1.2 \dots (x-1)} \right\} \\
 & \quad + c_{x-1} a^{x-1} + c_{x-2} a^{x-2} + \cdots + c_1 a + c_0.
 \end{aligned}$$

Die c sind die willkürlichen Integrationsconstanten. Zu ihrer Bestimmung müssen x Bedingungen, denen das Integral zu genügen hat, gegeben sein. Eine dieser Constanten fällt schon fort, wenn man bei der letzten Integration bestimmte Grenzen vorschreibt. Zur Bestimmung der $x-1$ andern wird man $x-1$ für $x-1$ Beträge des Arguments a gegebene Werte des Integrals kennen müssen.

Die $A_{i\lambda}$ sind die uns schon bekannten Grössen und nach den in Art. 297a gegebenen Gleichungen zu berechnen.

297e. Integration nach mehreren Variablen. Endlich haben wir noch den Fall zu betrachten, dass die zu integrierende Function von mehreren Argumenten abhängt, und nach mehreren Argumenten zwischen bestimmten Grenzen integrirt werden soll. Auch hier führt die Darstellung durch die Lagrangesche Formel zum Ziel.

Wir können die Annahme machen, dass die Argumente alle von einander unabhängig sind, sollten zwischen ihnen Bedingungsgleichungen existiren, so eliminirt man die überschüssigen Argumente mit Hilfe dieser Gleichungen.

Um die Formeln nicht zu sehr zu compliciren, nehme ich nur zwei Argumente, mit wie viel Argumenten man es auch zu tun hat, das Verfahren ist immer dasselbe.

Die Beträge der Argumentenpaare, für welche die Function ihrem Werte nach gegeben ist, seien

$$\begin{array}{cccc}
 b_1, a_1; & b_1, a_2; & b_1, a_3; & \dots; & b_1, a_n, \\
 b_2, a_1; & b_2, a_2; & b_2, a_3; & \dots; & b_2, a_n, \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 b_m, a_1; & b_m, a_2; & b_m, a_3; & \dots; & b_m, a_n,
 \end{array}$$

dann hat man durch zweimalige Anwendung der Lagrangeschen Interpolationsformel

$$16) \quad f(a, b) = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\psi(b)}{\Psi'(b_i)(b-b_i)} \left(\sum_{x=1}^{x=n} \frac{f(b_i, a_x)}{\Psi'(a_x)} \frac{\psi(a_x)}{(a-a_x)} \right).$$

und wir sind nach dem frühern stets in der Lage, R_x und S_x aus den angeführten Werten der t_x und τ_i zahlenmässig zu berechnen. Wir bekommen daher

$$17a) \quad \int_{b'}^{b''} \int_{a'}^{a''} f(a) da = \\ = (a'' - a')(b'' - b') \sum_{i=1}^{i=m} S_i \{ f(b_i, a_1) R_1 + f(b_i, a_2) R_2 + \dots + f(b_i, a_n) R_n \},$$

und noch vollständiger ausgeschrieben

$$17b) \quad \int_{b'}^{b''} \int_{a'}^{a''} f(a, b) da db = \\ = (a'' - a')(b'' - b') \{ S_1 (f(b_1, a_1) R_1 + f(b_1, a_2) R_2 + f(b_1, a_3) R_3 + \dots + f(b_1, a_n) R_n) \\ + S_2 (f(b_2, a_1) R_1 + f(b_2, a_2) R_2 + f(b_2, a_3) R_3 + \dots + f(b_2, a_n) R_n) \\ + \dots \\ + S_m (f(b_m, a_1) R_1 + f(b_m, a_2) R_2 + f(b_m, a_3) R_3 + \dots + f(b_m, a_n) R_n) \}.$$

Wir haben es also hier mit doppelten Summationen zu tun; bei Integrationen nach 3 Variabeln kommen 3fache, allgemein bei Integrationen nach x Variabeln x fache Summationen vor; aber immer sind die auszuführenden Integrale solche nach dem Muster der früher dargelegten R oder S .

Wenn die t und τ wieder in gleichen Intervallen auf einander folgen, die a, b mit a', b' anfangen, und mit a'', b'' schliessen, sind die S den entsprechenden R gleich, und man hat für diese Grösse die bei den Integralformeln in Art. 297b gegebenen Zahlen anzuwenden.

297f. Integration durch periodische Reihen. Bei Entwicklungen nach periodischen Reihen tut man am besten, die Functionen in der Form

$$f(a) = x_0 + x_1 \cos a + x_2 \cos 2a + \dots + x_h \cos ha \\ + y_1 \sin a + y_2 \sin 2a + \dots + y_h \sin ha$$

zu benutzen, also für die x und y geradezu ihre aus den gegebenen Functionswerten zu berechnenden Zahlenbeträge einzusetzen.

Die Integration zwischen den Grenzen a' und a'' ergibt dann

$$18a) \quad \int_{a'}^{a''} f(a) da = \left\{ x_0 a + \frac{x_1}{1} \sin a + \frac{x_2}{2} \sin 2a + \dots + \frac{x_h}{h} \sin ha \right. \\ \left. - \frac{y_1}{1} \cos a - \frac{y_2}{2} \cos 2a - \dots - \frac{y_h}{h} \cos ha \right\}_{a=a'}^{a=a''},$$

Für $f(a + n\lambda)$ benutzen wir jetzt eine der gegebenen Interpolationsformeln, und zwar wird die unter 9d) gegebene Formel angewendet.

Wir haben diese Formel nach Potenzen von n zu ordnen. Setzen wir

$$L_1 = \Delta - \frac{1}{6}\Delta^3 + \frac{1}{30}\Delta^5 - \frac{1}{140}\Delta^7 + \dots$$

$$L_2 = \Delta^2 - \frac{1}{12}\Delta^4 + \frac{1}{90}\Delta^6 - \dots$$

$$L_3 = \Delta^3 - \frac{1}{4}\Delta^5 + \frac{7}{120}\Delta^7 - \dots$$

$$L_4 = \Delta^4 - \frac{1}{6}\Delta^6 + \dots$$

$$L_5 = \Delta^5 - \frac{1}{3}\Delta^7 - \dots$$

$$L_6 = \Delta^6 - \dots$$

$$L_7 = \Delta^7 - \dots$$

u. s. f.,

so wird

$$f(a + n\lambda) = f(a) + \frac{n}{1!}L_1 + \frac{n^2}{2!}L_2 + \frac{n^3}{3!}L_3 + \dots$$

$$19a) \quad \int_{x'}^{x''} f(x) dx = \lambda \left\{ n f(a) + \frac{n^2}{2!}L_1 + \frac{n^3}{3!}L_2 + \frac{n^4}{4!}L_3 + \dots \right\}_{n=n'}^{n=n''},$$

woselbst

$$n' = \frac{x' - a}{\lambda}, \quad n'' = \frac{x'' - a}{\lambda}.$$

Die Δ sind die uns bekannten, in dem Schema der $f(a)$ und ihrer Differenzen auf der Zeile durch $f(a)$ stehenden Differenzen bezüglich Differenzmittel.

Hat man nach a mehrfach zu integrieren, so wird die Interpolationsformel nach n mehrfach integriert, und man bekommt

$$20) \quad \int \int \dots \int f(x) dx^h = \lambda^h \left\{ \frac{n^h}{h!} f(a) + \frac{n^{h+1}}{(h+1)!} L_1 + \frac{n^{h+2}}{(h+2)!} L_2 + \dots \right\} \\ + C_{h-1} n^{h-1} + C_{h-2} n^{h-2} + \dots + C_1 n + C_0, \\ n = \frac{x - a}{\lambda}.$$

Die C sind die Integrationsconstanten und müssen gegeben sein oder sich durch bestimmte Bedingungen, denen das h fache Integral genügen soll, etwa durch h bekannte Beträge dieses Integrals für h Werte des Arguments x berechnen lassen. Eine der Constanten, C_0 , fällt fort, wenn die letzte Integration zwischen bestimmten Grenzen ausgeführt werden soll.

Nach diesen Formeln hat man zu rechnen, so oft das Intervall λ der Argumente, für welche die Functionswerte direct gegeben sind oder durch Interpolation sicher genug gefunden werden können, *fest* vorgeschrieben ist. Den Ausgangswert a nimmt man dann am besten ungefähr in der Mitte zwischen den Grenzen a' und a'' der Integration.

298 a. Besondere Formeln für einfache Integration. Gehen wir, um zu andern, speciellen Verhältnissen angepassten, Rechenschematen zu gelangen, zurück auf das einfache Integral, so zeigt sich in dem für dieses Integral aufgestellten Ausdruck eine durchgehende Uebereinstimmung mit $f(a + n\lambda)$ selbst, es entspricht $nf(a)$ dem nL_1 , $\frac{n^2}{2!}L_1$ dem $\frac{n^2}{2!}L_2$ u. s. f., fügen wir noch ein Glied $F(a)$ hinzu, welches den Wert des bestimmten Integrals, da dieses eine Differenzgrösse ist, nicht ändert, so herrscht zwischen dem Ausdruck

$$f(a + n\lambda) = f(a) + nL_1 + \frac{n^2}{2!}L_2 + \frac{n^3}{3!}L_3 + \dots$$

und dem

$$\int_x^{x'} f(x) dx = \lambda \left\{ F(a) + nf(a) + \frac{n^2}{2!}L_1 + \frac{n^3}{3!}L_2 + \dots \right\} + \text{Const.}$$

völlige Analogie, und man kann schreiben

$$\int_x^{x'} f(x) dx = \lambda (F(a + n\lambda))_{n=n'}^{n=n''}.$$

$F(a + n\lambda)$ wird aber durch Interpolation aus $F(a)$ genau so gefunden, wie $f(a + n\lambda)$ aus $f(a)$. Wir haben nun die Differenzen aufzusuchen, die zur Interpolation dienen sollen. Das ist aber sehr leicht. Bezeichnen wir nämlich diese, den Δ entsprechenden Differenzen, für unsere neuen Functionen durch $'\Delta$, so ist nach der Definition der Δ zu setzen

$$\begin{aligned} '\Delta - \frac{1}{6}'\Delta^3 + \frac{1}{30}'\Delta^5 - \frac{1}{140}'\Delta^7 + \dots &= f(a), \\ '\Delta^2 - \frac{1}{12}'\Delta^4 + \frac{1}{90}'\Delta^6 - \dots &= L_1, \\ '\Delta^3 - \frac{1}{4}'\Delta^5 + \frac{7}{120}'\Delta^7 - \dots &= L_2, \\ '\Delta^4 - \frac{1}{6}'\Delta^6 + \dots &= L_3, \\ '\Delta^5 - \frac{1}{3}'\Delta^7 + \dots &= L_4, \\ '\Delta^6 - \dots &= L_5, \\ '\Delta^7 - \dots &= L_6. \end{aligned}$$

Die rechts stehenden L sind bekannte Zahlen, es lassen sich also die $'\Delta$ stets berechnen. Wir bekommen so, indem wir uns die voraufstehenden Gleichungen aufgelöst denken,

$$' \Delta = f(a) + \frac{1}{6} L_2 + \frac{1}{120} L_4 + \frac{1}{5040} L_6 + \dots$$

$$' \Delta^3 = L_2 + \frac{1}{4} L_4 + \frac{1}{40} L_6 + \dots$$

$$' \Delta^5 = L_4 + \frac{1}{3} L_6 + \dots$$

$$' \Delta^7 = L_6 + \dots$$

u. s. f.

$$' \Delta^2 = L_1 + \frac{1}{12} L_3 + \frac{1}{360} L_5 + \dots$$

$$' \Delta^4 = L_3 + \frac{1}{6} L_5 + \dots$$

$$' \Delta^6 = L_5 + \dots$$

u. s. f.

Führen wir hierin die Werte der L als Functionen der Differenzen Δ ein, so ergibt sich

$$' \Delta = f(a) + \frac{1}{6} \Delta^2 - \frac{1}{180} \Delta^4 + \frac{1}{1512} \Delta^6 - \dots$$

$$' \Delta^2 = \Delta - \frac{1}{12} \Delta^3 + \frac{11}{720} \Delta^5 - \frac{97}{30240} \Delta^7 + \dots$$

$$' \Delta^3 = \Delta^2 + \frac{1}{6} \Delta^4 - \frac{1}{180} \Delta^6 + \dots$$

$$' \Delta^4 = \Delta^3 - \frac{1}{12} \Delta^5 + \frac{11}{40} \Delta^7 - \dots$$

$$' \Delta^5 = \Delta^4 + \frac{1}{6} \Delta^6 - \dots$$

$$' \Delta^6 = \Delta^5 - \frac{1}{3} \Delta^7 + \dots$$

$$' \Delta^7 = \Delta^6 + \dots$$

Zur Interpolation von $F(a + n\lambda)$ aus $F(a)$ und den neuen Differenzen wollen wir aber die Gleichung 9b) anwenden, weil man durch diese Gleichung zu übersichtlichen Formeln gelangt. Wir brauchen also noch die $'\Delta_{+1}$, $'\Delta_{+1}^3$, ..., dagegen sind die in jener Formel mit dem Index 0 bezeichneten Differenzen nicht neu zu rechnen, da sie äquivalent sind den $'\Delta^2$, $'\Delta^4$, ...

Der Definition nach ist aber

$$' \Delta_{+1}^i = \frac{1}{2} (' \Delta_{+1}^i + ' \Delta_{-1}^i),$$

u. s. f.

und hieraus folgt schon

$$' \Delta_{+1}^i = ' \Delta^i + \frac{1}{2} ' \Delta^{i+1}.$$

Bezeichnen wir jetzt die Coefficienten in jener Interpolationsformel mit n_1, n_2, n_3, \dots , so wird

$$\begin{aligned} F(a + n\lambda) = \\ F(a) + n_1 \left(f(a) + \frac{1}{2} \Delta + \frac{1}{6} \Delta^2 - \frac{1}{24} \Delta^3 - \frac{1}{180} \Delta^4 + \frac{11}{1440} \Delta^5 + \frac{1}{1512} \Delta^6 - \dots \right) \\ + n_2 \left(\Delta - \frac{1}{12} \Delta^3 + \frac{11}{720} \Delta^5 - \frac{97}{30240} \Delta^7 + \dots \right) \\ + n_3 \left(\Delta^2 + \frac{1}{2} \Delta^3 + \frac{1}{6} \Delta^4 - \frac{1}{24} \Delta^5 - \frac{1}{180} \Delta^6 + \dots \right) \\ + \dots \end{aligned}$$

Endlich ersetzen wir Δ, Δ^3, \dots durch ihre Ausdrücke $\Delta_{+1} - \frac{1}{2} \Delta^2, \Delta_{+1}^3 - \frac{1}{2} \Delta^4, \dots$ und bekommen schliesslich

$$\begin{aligned} 19b) \quad \frac{1}{2} \int f(x) dx = F(a + n) = \\ F(a) + n_1 \left(f(a) + \frac{1}{2} \Delta_{+1} - \frac{1}{12} \Delta^2 - \frac{1}{24} \Delta_{+1}^3 + \frac{11}{720} \Delta^4 + \frac{11}{1440} \Delta_{+1}^5 - \frac{191}{60480} \Delta^6 + \dots \right) \\ + n_2 \left(\Delta_{+1} - \frac{1}{2} \Delta^2 - \frac{1}{12} \Delta_{+1}^3 + \frac{1}{24} \Delta^4 + \frac{11}{720} \Delta_{+1}^5 - \frac{11}{1440} \Delta^6 - \dots \right) \\ + n_3 \left(\Delta^2 + \frac{1}{2} \Delta_{+1}^3 - \frac{1}{12} \Delta^4 - \frac{1}{24} \Delta_{+1}^5 + \frac{11}{720} \Delta^6 + \dots \right) \\ + n_4 \left(\Delta_{+1}^3 - \frac{1}{2} \Delta^4 - \frac{1}{12} \Delta_{+1}^5 + \frac{1}{24} \Delta^6 + \dots \right) \\ + n_5 \left(\Delta^4 + \frac{1}{2} \Delta_{+1}^5 - \frac{1}{12} \Delta^6 - \dots \right) \\ + \dots \end{aligned}$$

Diese an sich schon sehr durchsichtige Gleichung lässt sich noch auf eine sehr elegante Form bringen. Man ersetzt in den Columnen mit abwechselnden Zeichen, also in der 2ten, 4, ... Columnen die Differenzen durch ihre Ausdrücke als Functionen der voraufgehenden Differenzen.

So wird also in der ersten Zeile

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta_{+1} &= \frac{1}{2} (f(a + 1\lambda) - f(a)), \\ \frac{1}{24} \Delta_{+1}^3 &= \frac{1}{24} (\Delta_{+1}^2 - \Delta^2), \\ \frac{11}{1440} \Delta_{+1}^5 &= \frac{11}{1440} (\Delta_{+1}^4 - \Delta^4), \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

in der zweiten Zeile

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \Delta^2 &= -\frac{1}{2} (\Delta_{+1} - \Delta_{-1}), \\ -\frac{1}{24} \Delta^4 &= -\frac{1}{24} (\Delta_{+1}^3 - \Delta_{-1}^3), \\ -\frac{11}{1440} \Delta^6 &= -\frac{11}{1440} (\Delta_{+1}^5 - \Delta_{-1}^5), \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Für die dritte Zeile werden wieder die ungeraden, für die vierte die geraden Differenzen ersetzt u. s. f.

Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} 19c) \quad & \frac{1}{\lambda} \int f(x) dx = F(a + n\lambda) = \\ & F(a) + \frac{n_1}{2} \left(f(a + 1\lambda) + f(a) - \frac{1}{12} \Delta^2 - \frac{1}{12} \Delta_{+1}^2 + \frac{11}{720} \Delta^4 + \frac{11}{720} \Delta_{+1}^4 - \dots \right) \\ & + \frac{n_2}{2} \left(\Delta_{+1} + \Delta_{-1} - \frac{1}{12} \Delta_{-1}^3 - \frac{1}{12} \Delta_{+1}^3 + \frac{11}{720} \Delta_{-1}^5 + \frac{11}{720} \Delta_{+1}^5 - \dots \right) \\ & + \frac{n_3}{2} \left(\Delta_{+1}^2 + \Delta^2 - \frac{1}{12} \Delta^4 - \frac{1}{12} \Delta_{+1}^4 + \frac{11}{720} \Delta^6 + \frac{11}{720} \Delta_{+1}^6 - \dots \right) \\ & + \dots \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$n_1 f(a + 1\lambda) + n_2 \Delta_{+1} + n_3 \Delta_{+1}^2 + \dots$$

bis auf eine hinzuzufügende Zahl eine Grösse, die aus einer Reihe von Zahlen zu interpoliren ist, welche sich zu den Zahlen $f(a + 1\lambda)$, $f(a + 2\lambda)$, ... genau so verhält, wie diese Zahlen zu ihren ersten Differenzen Δ_{+1} , Δ_{+2} , ... Ich bezeichne diese Grösse durch S_n^1 und nenne die Grössenklasse, zu der sie gehört, die Klasse der ersten summirten Grössen, da die ursprünglichen Grössen ihre Differenzen sind. Es stehen diese Grössen in gleicher Höhe mit den Δ^1 und sie haben auch dieselben Indices wie diese. Es wird also

$$n_1 f(a + 1\lambda) + n_2 \Delta_{+1} + n_3 \Delta_{+1}^2 + \dots = S_{n+1}^1 - S_1^1,$$

ebenso haben wir

$$\begin{aligned} n_1 f(a) &+ n_2 \Delta_{-1} + n_3 \Delta_{-1}^2 + \dots = S_n^1 - S_{-1}^1, \\ n_1 \Delta^2 &+ n_2 \Delta_{-1}^3 + n_3 \Delta^4 + \dots = \Delta_n^1 - \Delta_{-1}^1, \\ n_1 \Delta_{+1}^2 &+ n_2 \Delta_{+1}^3 + n_3 \Delta_{+1}^4 + \dots = \Delta_{n+1}^1 - \Delta_{+1}^1, \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Wir bekommen daher

$$19d) \quad \frac{1}{\lambda} \int_a^{a+n\lambda} f(x) dx = F(a+n\lambda) = F(a) + \frac{1}{2} (S_{n+1}^1 + S_n^1) - \frac{1}{24} (\Delta_{n+1}^1 + \Delta_n^1) \\ + \frac{11}{1440} (\Delta_{n+1}^3 + \Delta_n^3) - \dots$$

Die andern Glieder, die nicht von n abhängen, sind zu der willkürlichen Grösse $F(a)$ geschlagen.

Ich setze jetzt die Mittel

$$\frac{S_{n+1}^1 + S_n^1}{2} = S_{\frac{2n+1}{2}}^1,$$

$$\frac{\Delta_{n+1}^1 + \Delta_n^1}{2} = \Delta_{\frac{2n+1}{2}}^1,$$

u. s. f.

und erhalte

$$F(a+n\lambda) = F(a) + S_{\frac{2n+1}{2}}^1 - \frac{1}{12} \Delta_{\frac{2n+1}{2}}^1 + \frac{11}{720} \Delta_{\frac{2n+1}{2}}^3 - \dots$$

Die Grösse $F(a)$ bestimmt sich durch die Integrationsconstante oder, wie wir auch sagen können, durch die untere Integrationsgrenze n' . Wir haben also schliesslich

$$19e) \quad \int_{x'}^x f(x) dx = \lambda \left\{ + S_{\frac{2n+1}{2}}^1 - \frac{1}{12} \Delta_{\frac{2n+1}{2}}^1 + \frac{11}{720} \Delta_{\frac{2n+1}{2}}^3 + \dots \right. \\ \left. - S_{\frac{2n'+1}{2}}^1 + \frac{1}{24} \Delta_{\frac{2n'+1}{2}}^1 - \frac{11}{720} \Delta_{\frac{2n'+1}{2}}^3 - \dots \right\},$$

woselbst

$$n' = \frac{x' - a}{\lambda}, \quad n = \frac{x - a}{\lambda}.$$

Was zunächst die summirten Grössen S betrifft, so sind diese in gewisser Weise willkürlich, denn da zu ihrer Berechnung nur die Differenzenreihe gegeben ist, sind sie auch nur bis auf eine Constante, den Ausgangswert, bestimmt. Ich bezeichne diese Constante, also den Ausgangswert der summirten Grössen, mit S_{-1}^1 , dann ist die Reihe der summirten Grössen

$$S_1^1 = S_{-1}^1 + f(a),$$

$$S_2^1 = S_1^1 + f(a + \lambda),$$

$$S_3^1 = S_2^1 + f(a + 2\lambda),$$

u. s. f.

Man bekommt also jedes S^1 , indem man zu dem vorgehenden S^1 das unmittelbar darunter stehende f addirt, ganz so, wie man die f aus den Δ^1 erhalten würde.

Den willkürlichen Ausgangswert S_{-1}^1 kann man beliebig ansetzen, man wird ihn also meist gleich Null nehmen. Will man dem Integral aber einen bestimmten Anfangswert, C , verleihen, den man entweder seinem Zahlenwert nach kennt, oder auf den es nicht ankommt, weil er sich nachher aus der betreffenden Formel heraushebt, so setzt man $S_{-1}^1 = C$. Der Integralwert ist dann einfach

$$19f) \quad \int^x f(x) dx = \lambda \left\{ S_{\frac{2n+1}{2}} - \frac{1}{12} \frac{\Delta_{\frac{2n+1}{2}}^1}{2} + \frac{11}{720} \frac{\Delta_{\frac{2n+1}{2}}^3}{2} - \dots \right\}.$$

Sind n' und n ganze Zahlen, so finden sich S_{n+1}^1 und S_n^1 unter den so durch Summation gerechneten Zahlen. Sind aber die n' und n Brüche, so interpolirt man nach irgend einer der auseinandergesetzten Methoden die $S_{n+1}^1, S_n^1; S_{n'+1}^1, S_n^1$, und bildet daraus $S_{\frac{2n+1}{2}}^1, S_{\frac{2n'+1}{2}}^1$. Die $\Delta_{n+1}, \Delta_n, \dots$ sind dann ebenfalls durch Interpolation zu berechnen.

Wir haben nun n und n' durch die Grenzen des Integrals bestimmt, denn es war $n' = (x' - a)/\lambda$, $n = (x - a)/\lambda$. Wenn das Intervall λ , nach welchem die Argumente fortschreiten, für die man die Beträge der zu integrierenden Function kennt, von vornherein gegeben ist, wählt man a ungefähr in der Mitte zwischen x' und x oder, wenn es auf den Anfangswert des Integrals nicht ankommt, tunlichst nahe an x , so dass n tunlichst klein wird. In diesem Falle bietet die Rechnung nach der letzten zusammenfassenden Formel wenig besondere Vorteile, und man kann bei einer der beiden allgemeineren Formeln unter 19a) oder 19b) stehen bleiben.

298b. Integration von Argument zu Argument. Sind aber die Grenzen x' und x so beschaffen, dass sie mit unter die Argumente gehören, für welche die Function bekannt ist, so ist die letzte Formel sehr bequem, da keine der in ihr enthaltenen Grössen erst interpolirt zu werden braucht, vielmehr alle diese Grössen schon in dem Schema der summirten Grössen, der Functionswerte und Differenzenreihen enthalten sind.

Man kann diesen Fall stets realisiren, wenn die Function überhaupt ihrer analytischen Form nach bekannt ist. Man berechnet dann f für $x', x' + \lambda, x' + 2\lambda, \dots, x' + (i-1)\lambda, x$. Das Intervall λ ist willkürlich, man wählt es so klein, dass die höhern Differenzen Δ recht unbedeutend werden, damit die in dem Integralausdruck vernachlässigten Glieder eine tunlichst geringe Vernachlässigung bedingen.

Es sei zum Beispiel das Integral der uns so wohl bekannten Function e^{-x^2} zwischen den Grenzen 0 und 0,5, also $\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx$ zu berechnen. Das Integrationsintervall $x - x'$ ist = 0,5. Man wählt als Ausgangsargument 0,0 und

berechne die Werte von e^{-x^2} für 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6... Diese Werte sind in Art. 59 schon angeführt. Da wir die dritten Differenzen noch mit berücksichtigen wollen, müssen wir e^{-x^2} auch noch für $x = -0,1$ berechnen. Wir haben dann die folgende Zusammenstellung

Argumente	Summirte Functionen	Functionswerte	Differenzen		
0,0	$S_{-1}^1 = 0$	1	+ 0,0099	- 0,0198	- 0,0004
0,1	$S_{+1}^1 = 1$	0,9901	- 0,0099	- 0,0194	+ 0,0004
0,2	$S_{+2}^1 = 1,9901$	0,9608	- 0,0293	- 0,0176	+ 0,0018
0,3	$S_{+3}^1 = 2,9509$	0,9139	- 0,0469	- 0,0149	+ 0,0027
0,4	$S_4^1 = 3,8648$	0,8521	- 0,0618	- 0,0115	+ 0,0034
0,5	$S_5^1 = 4,7169$	0,7788	- 0,0733	- 0,0078	+ 0,0037
0,6	$S_6^1 = 5,4957$	0,6977	- 0,0811	- 0,0040	+ 0,0038
0,7		0,6126	- 0,0851		

Hier ist nun $\lambda = 0,1$, somit, indem wir von dem Wert 0,0 des Arguments ausgehen, $n' = 0$, $n = 5$ und hiernach

$$\text{für die obere Grenze} \left\{ \begin{array}{l} S_{+6}^1 = + 5,4947, \quad S_{+5}^1 = + 4,7169; \quad S_{\frac{2n+1}{2}}^1 = + 5,1058, \\ \Delta_{+6}^1 = - 0,0811, \quad \Delta_{+5}^1 = - 0,0733; \quad \Delta_{\frac{2n+1}{2}}^1 = - 0,0772, \\ \Delta_{+6}^3 = + 0,0038, \quad \Delta_{+4}^3 = + 0,0037; \quad \Delta_{\frac{2n+1}{2}}^3 = + 0,0038, \end{array} \right.$$

$$\text{für die untere Grenze} \left\{ \begin{array}{l} S_{+1}^1 = 1; \quad S_{-1}^1 = 0; \quad S_{\frac{2n+1}{2}}^1 = + 0,5; \\ \Delta_{+1}^1 = - 0,0099; \quad \Delta_{-1}^1 = + 0,0099; \quad \Delta_{\frac{2n+1}{2}}^1 = 0; \\ \Delta_{+1}^3 = + 0,0004; \quad \Delta_{-1}^3 = - 0,0004; \quad \Delta_{\frac{2n+1}{2}}^3 = 0. \end{array} \right.$$

Damit wird also

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx = 0,1 \left\{ 5,1058 + \frac{1}{12} 0,0772 - \frac{11}{720} 0,0038 \right\} - 0,1 \{ 0,5 \}$$

und ausgerechnet 0,46122. Durch Reihenentwicklung findet sich, wenn man bis zu Gliedern 8ter Potenz geht, 0,46128. Man sieht übrigens, dass

für die in Aussicht genommene Genauigkeit die dritten Differenzen schon keine Rolle mehr spielen.

Hätten wir dasselbe Integral nicht bis zu 0,5, sondern nur bis zu 0,45 berechnen sollen, so müssten wir die S und Δ für die obere Grenze interpolieren. Es ist nun, indem wir für die Interpolation von $S_{3,5}^1$ und $S_{4,5}^1$ als Ausgangswerte S_3^1 , bezüglich S_4^1 benutzen, nach der Interpolationsformel 9c)

$$S_{3,5}^1 = 4,7169 + 0,5 \cdot 0,7788 + \frac{0,5 \cdot 0,5}{1 \cdot 2} 0,0733 + \frac{1,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5}{1 \cdot 2 \cdot 3} 0,0078 + \frac{1,5 \cdot 1,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 0,0037,$$

$$S_{4,5}^1 = 3,8648 + 0,5 \cdot 0,8521 + \frac{0,5 \cdot 0,5}{1 \cdot 2} 0,0618 + \frac{1,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5}{1 \cdot 2 \cdot 3} 0,0115 + \frac{1,5 \cdot 1,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 0,0034,$$

somit

$$\frac{S_{3,5}^1 + S_{4,5}^1}{2} = \frac{1}{2} (8,5817 + 0,8154 + 0,0169 + 0,0012 + 0,0002) = 4,7077,$$

$$\Delta_{3,5}^1 = -0,0733 - 0,5 \cdot 0,0078 - \frac{0,5 \cdot 0,5}{1 \cdot 2} 0,0037,$$

$$\Delta_{4,5}^1 = -0,0618 - 0,5 \cdot 0,0115 - \frac{0,5 \cdot 0,5}{1 \cdot 2} 0,0034,$$

$$\frac{\Delta_{3,5}^1 + \Delta_{4,5}^1}{2} = -\frac{1}{2} (0,1351 + 0,0096 + 0,0009) = -0,0728.$$

Für $\Delta_{3,5}^3$ und $\Delta_{4,5}^3$ können wir, wie man sieht, 0,0035 annehmen.

Es wird daher

$$\int_0^{4,5} e^{-x^2} dx = 0,1 \left\{ 4,7077 + \frac{1}{12} 0,0728 - \frac{11}{720} 0,0035 \right\} - 0,1 \{0,5\},$$

das heisst 0,42138. Durch Reihenentwicklung findet man genau denselben Wert.

298c. Integration von Intervallmitte zu Intervallmitte. Die Hauptarbeit fällt auf die Interpolation der S und Δ , die wir im vorausgehenden Beispiel, wo beide Argumente zu den Argumenten der bekannten Functionswerte gehörten, nicht nötig hatten. Man hat deshalb, indem man statt der Substitution $x = a + n\lambda$ die $x = a + n\lambda + \frac{1}{2}\lambda$ einführte, noch eine andere Interpolationsformel abgeleitet, die in dem zweiten wichtigen Fall, dem, wo die Integrationsgrenzen in die Mitten von Intervallen der Argumente bekannter Functionswerte fallen, n also eine ganze Zahl angiebt, auch nur in dem Schema der S , f , Δ enthaltene Grössen besitzt, Interpolationen also nicht nötig sind. Da die Ableitung dieser Formel sich mit Hilfe der vorausgehenden Auseinandersetzungen leicht ausführen lässt, gebe ich nur das Resultat.

Es ist für beliebige Integrationsgrenzen

$$19g) \frac{1}{\lambda} \int_a^{x'} f(x) dx = (S_{n+1}^1 - S_{n'+1}^1) + \frac{1}{24} (\Delta_{n+1}^3 - \Delta_{n'+1}^3) - \frac{17}{5760} (\Delta_{n+1}^5 - \Delta_{n'+1}^5) + \frac{367}{967680} (\Delta_{n+1}^7 - \Delta_{n'+1}^7) + \dots$$

Hierbei hat man

$$\frac{x' - a}{\lambda} = +\frac{1}{2} + n', \quad \frac{x - a}{\lambda} = +\frac{1}{2} + n.$$

Wenn die n beliebige Zahlen bedeuten, hat man wieder die S und die Δ zu interpolieren, sind aber n und n' ganze Zahlen, so stehen die S und Δ gerade in dem Schema der S und Δ und können diesem entnommen werden. Da a noch willkürlich ist, kann man dann a so wählen, dass $n' = 0$ ist. Es liegt dann x' zwischen $a + \lambda$ und a , oder besser gesagt, man hat als a das dem x' nächst voraufgehende Argument zu wählen.

Es wird dann aber

$$19h) \int_a^{x'} f(x) dx = \lambda \left\{ (S_{n+1}^1 - S_{n+1}^1) + \frac{1}{24} (\Delta_{n+1}^3 - \Delta_{n+1}^3) - \frac{17}{5760} (\Delta_{n+1}^5 - \Delta_{n+1}^5) + \frac{367}{967680} (\Delta_{n+1}^7 - \Delta_{n+1}^7) - \dots \right\},$$

$$a = x' - \frac{1}{2} \lambda, \quad n = \frac{x - a}{\lambda} - \frac{1}{2}.$$

Rechnen wir mit dieser Gleichung unser obiges Integral zwischen 0,15 und 0,45, so folgt aus $\frac{x' - a}{\lambda} = \frac{1}{2}$, dass $a = 0,1$ ist.

Jetzt ist also 0,1 das Ausgangsargument, und unser Schema nimmt die Form an

Argumente	Summe	Functionswerte	Differenzen
0,0		1,0000	
0,1	$S_{-1} = 0$	0,9901	— 0,0099
0,2	$S_{+1} = 0,9901$	0,9608	— 0,0293 — 0,0194 + 0,0018
0,3	$S_{+2} = 1,9509$	0,9139	— 0,0469 — 0,0176 + 0,0027
0,4	$S_{+3} = 2,8648$	0,8521	— 0,0618 — 0,0149 + 0,0034
0,5	$S_{+4} = 3,7169$	0,7788	— 0,0733 — 0,0115 + 0,0037
0,6	$S_{+5} = 4,4957$	0,6977	— 0,0811

Damit wird, da $n = \frac{0.75 - 0.1}{0.1} - \frac{1}{2} = 3$ ist,

$$S_{n+1}^1 = S_4^1 = 3,7169, \quad \Delta_{n+1}^1 = \Delta_4 = -0,0733, \quad \Delta_{n+1}^3 = \Delta_4^3 = 0,0037,$$

$$S_1^1 = 0,9901, \quad \Delta_1 = -0,0293, \quad \Delta_{+1} = 0,0018,$$

also

$$\int_{0,15}^{0,45} e^{-x^2} dx = 0,1 \left(2,7268 - \frac{1}{24} 0,0440 + \frac{17}{5760} 0,0019 \right) = 0,27250.$$

Die dritten Differenzen sind schon unnötig mitgeführt. Durch Reihenentwicklung bekommt man genau denselben Wert.

Man wird sich nun bei Integrationen immer so einzurichten suchen, dass man von Argument zu Argument oder von Intervallmitte zu Intervallmitte integrieren kann. Wo die Function ihrer analytischen Form nach bekannt ist, hat das natürlich keine Schwierigkeit. Auch dann, wenn die Function für viele und so nahe liegende Argumente gegeben ist, dass man sicher und leicht zu interpoliren vermag, kann man es dahin bringen, dass man nur von Argument zu Argument oder von Intervallmitte zu Intervallmitte zu integrieren hat, indem man Functionswerte für gleich abstehende Argumente interpolirt, zu denen die Integrationsgrenzen entweder selbst gehören, oder wo diese Grenzen in Intervallmitten liegen.

In allen Fällen soll man aber die Integrale zunächst nur bis zu den den Integrationsgrenzen nächsten Argumenten oder Intervallmitten ausführen, die noch restirenden zwei Integrale haben dann jedes eng aneinanderliegende Grenzen, und für sie lassen sich, weil dann n und n' Brüche sind, die nötigen Interpolationen leicht bewerkstelligen.

298d. Zweifache Integration. Die Formeln für zweifache und mehrfache Integration sind leicht aus den Formeln für einfache Integration abzuleiten.

Es sei das auszuführende, zunächst zweifache, Integral

$$I = \int_{x'}^x \int f(x) dx dx.$$

Man setzt wieder

$$x = a + n\lambda, \text{ oder } x = a + n\lambda + \frac{1}{2}\lambda,$$

dann werden die Grenzwerte von n

$$n' = \frac{x' - a}{\lambda}, \quad n = \frac{x - a}{\lambda}, \quad \text{oder } n' = \frac{x' - a}{\lambda} - \frac{1}{2}, \quad n = \frac{x - a}{\lambda} - \frac{1}{2},$$

und das Integral bekommt den Wert

$$I = \lambda \int_{n'}^n \int f(a + n\lambda) dn dx, \quad \text{oder } I = \lambda \int_{n'}^n \int f\left(a + \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda\right) dn dx.$$

Nun war, zum Beispiel nach der allgemeinen Formel 19b)

$$\int f(a + n\lambda) dn = \lambda F(a + n\lambda) + \text{Const.}$$

Daher steht I zu $F(a + n\lambda)$ genau in demselben Verhältnis, wie $F(a + n\lambda)$ zu $f(a + n\lambda)$ stand. Indem wir jetzt für das Integral über $f(a + n\lambda)$ eine der entwickelten Formeln einführen, wird eine neue Grösse S^2 eintreten, die aus den S^1 und ihren Differenzen so gebildet ist, wie S^1 aus den f und ihren Differenzen.

Benutzen wir nach Encke die Integralformel unter 19g), weil diese sich leichter behandeln lässt, und schreiben sie in der Form

$$\frac{1}{\lambda} \int f\left(a + n\lambda + \frac{1}{2}\lambda\right) d\lambda = S_{n+1}^1 + \alpha \Delta_{n+1}^1 + \beta \Delta_{n+1}^3 + \dots + C_1,$$

so wird

$$\frac{x-a}{\lambda} - \frac{1}{2} = n,$$

$$\frac{1}{\lambda} \int \int f\left(a + n\lambda + \frac{1}{2}\lambda\right) dn dx = \int S_{n+1}^1 dx + \alpha \int \Delta_{n+1}^1 dx + \beta \int \Delta_{n+1}^3 + \dots + Cn + C_1.$$

Denken wir uns nun in den Grössen S_{n+1} , Δ_{n+1} , ..., das n wieder ersetzt durch seinen Betrag $\frac{x-a}{\lambda} - \frac{1}{2}$, so haben diese Grössen schon $\frac{x-a}{\lambda} - \frac{1}{2}$ zu Argumenten, wollen wir daher dieselbe Integralformel 19g) auch bei der Integration dieser Grössen zur Anwendung bringen, so ist nicht mehr wie früher $\frac{x-a}{\lambda} - \frac{1}{2}$ als Variable einzuführen, sondern $\frac{x-a}{\lambda}$. Es wird hiernach bei der zweiten Integration $n = \frac{x-a}{\lambda}$ zu setzen sein.

Man hat aber unter Anwendung der bezeichneten Integralformel

$$\frac{1}{\lambda} \int S_{n+1}^1 dx = S_{n+1}^2 + \alpha f_{n+1} + \beta \Delta_{n+1}^2 + \gamma \Delta_{n+1}^4 + \dots$$

$$\frac{\alpha}{\lambda} \int \Delta_{n+1}^1 dx = \alpha f_{n+1} + \alpha \Delta_{n+1}^2 + \alpha \beta \Delta_{n+1}^4 + \dots,$$

$$\frac{\beta}{\lambda} \int \Delta_{n+1}^3 dx = \beta \Delta_{n+1}^2 + \beta \alpha \Delta_{n+1}^4 + \dots$$

u s. f.,

somit

$$\frac{1}{\lambda^2} \int \int f(x) dx dx = S_{n+1}^2 + 2\alpha f_{n+1} + (2\beta + \alpha\alpha) \Delta_{n+1}^2 + (2\gamma + 2\alpha\beta) \Delta_{n+1}^4 + \dots + nC + C_1.$$

Führt man für die α , β , γ , ... ihre Zahlenwerte ein, so resultirt, indem noch als Grenzen n' und n angesehen werden,

$$20a) \int_x^x \int_x^x f(x) dx dx = \lambda^2 \left\{ (S_{n+1}^2 - S_{n'+1}^2) + \frac{1}{12} (f_{n+1} - f_{n'+1}) - \frac{1}{240} (\Delta_{n+1}^2 - \Delta_{n'+1}^2) + \frac{31}{60480} (\Delta_{n+1}^4 - \Delta_{n'+1}^4) + \dots \right\} + C(n - n').$$

Die Constante C , die erste Integrationsconstante, ist nicht bestimmbar, wenn nicht noch ein Wert des zweifachen Integrals gegeben ist.

Die S, f, Δ sind Functionen von $a + n\lambda$, dabei sind n' und n aus den Gleichungen zu berechnen

$$n' = \frac{x' - a}{\lambda}, \quad n = \frac{x - a}{\lambda}.$$

Die S^2 sind aus den S^1 so entstanden, wie diese aus den f , das erste der S^2 steht über dem S^1_{-1} , es ist wie dieses willkürlich.

Wir haben aber

$$\begin{aligned} S_1^2 &= S_{-1}^2 + S_{-1}^1, \\ S_2^2 &= S_1^2 + S_{+1}^1, \\ S_2^3 &= S_2^2 + S_2^1 \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Das Schema sieht jetzt also so aus

Argu- mente	Summen		Functionswerte	Differenzen		
	2	1		1	2	3
$a - \lambda$	S_{-1}^2		$f(a - \lambda)$			
a	S_0^2	S_{-1}^1	$f(a)$	Δ_{-1}^1		
$a + \lambda$	S_{+1}^2	S_{+1}^1	$f(a + \lambda)$	Δ_{+1}^1	Δ_0^2	$\Delta_{+1}^3 \dots$
$a + 2\lambda$	S_{+2}^2	S_{+2}^1	$f(a + 2\lambda)$	Δ_{+2}^1	Δ_{-1}^2	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Die S^2 stehen in gleicher Höhe mit den f und den geraden Differenzen Δ^2 , und sie haben auch dieselben Indices wie diese Grössen. S^1_{-1} war willkürlich, wir setzten es bei einfachen Integralen mit bestimmten Grenzen gleich Null, dasselbe tun wir bei zweifachen Integralen mit dem willkürlichen S^2_{-1} , dann ist auch $S^2_0 = S^1_{-1}$.

Im allgemeinen wird man die S, f und $\Delta^2, \Delta^4, \dots$, Zahlen, die in dem Schema alle in gleicher Höhe stehen, interpoliren müssen. Nun war

$$\frac{x - a}{\lambda} = + n$$

gesetzt worden, sollen also die $S, f, \Delta^2, \Delta^4, \dots$ in dem Schema schon stehen, ohne erst interpolirt werden zu müssen, so muss $n\lambda$ eine Zahl geben, die mit einem der Argumente a zusammenfällt, es müssen daher die Grenzen x', x mit den Argumenten angehören. Die obige Formel 20a) eignet sich hiernach zu Integrationen von Argument zu Argument. So wie wir nun durch die Formel für die einfache Integration von Intervallmitte zu Inter-

vallmitte eine Formel, die sich besonders geeignet zeigt für zweifache Integration von Argument zu Argument erhalten haben, können wir auch von der Formel für Integration von Argument zu Argument zu einer Formel für zweifache Integration von Intervallmitte zu Intervallmitte gelangen. Der Gang der Rechnung ist derselbe wie oben. Man bekommt:

$$\begin{aligned}
 20b) \quad \int_{x'}^x f(x) dx &= \frac{1}{2} (S_{n+2}^2 + S_{n+1}^2) - \frac{1}{24} \left(\frac{f_{n+2} + f_{n+1}}{2} \right) + \frac{17}{1920} \left(\frac{\Delta_{n+2}^2 + \Delta_{n+1}^2}{2} \right) \\
 &\quad - \frac{367}{193536} \left(\frac{\Delta_{n+2}^4 + \Delta_{n+1}^4}{2} \right) + \dots \\
 &\quad - \frac{1}{2} (S_{n'+2}^2 + S_{n'+1}^2) + \frac{1}{24} \left(\frac{f_{n'+2} + f_{n'+1}}{2} \right) - \frac{17}{1920} \left(\frac{\Delta_{n'+2}^2 + \Delta_{n'+1}^2}{2} \right) \\
 &\quad + \frac{367}{193536} \left(\frac{\Delta_{n'+2}^4 + \Delta_{n'+1}^4}{2} \right) - \dots + C(n-n'),
 \end{aligned}$$

und hierin ist

$$\frac{x' - a}{\lambda} = \frac{1}{2} + n', \quad \frac{x - a}{\lambda} = \frac{1}{2} + n.$$

Die von vornherein nicht bestimmbare Constante C wird meist so angesetzt, dass das Doppelintegral für seinen Anfangswert verschwindet. Gewöhnlich werden auch die Integrationsconstanten gleich mit in die Reihe der S eingeführt.

In ganz derselben Weise kann man die Formeln für dreifache, mehrfache, ... Integrale ableiten, es hat aber kein Interesse darauf einzugehen. Es bietet, wie man sieht, die mechanische Integration ein sehr bequemes Mittel, totale Differentialgleichungen numerisch aufzulösen, aber mit Differentialgleichungen, die die zweite Ordnung übersteigen, wird der Physiker wol selten zu tun haben.

Für Integrationen nach mehreren Variablen lassen sich zwar auch ganz entsprechende Schemata aufstellen, man tut aber hier besser, auf die analytische Form zurückzugehen, und wo diese nicht bekannt ist, die Integration durch die Lagrangesche Interpolationsformel auszuführen.



Tafel für die Werte des Integrals

$$\theta(\vartheta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\vartheta} e^{-t^2} dt.$$

ϑ	$\theta(\vartheta)$	$\Delta\theta$	$\Delta^2\theta$	ϑ	$\theta(\vartheta)$	$\Delta\theta$	$\Delta^2\theta$
0,00	0,00000 00		0	0,30	0,32862 67		6 19
0,01	01128 33	1128 33	22	0,31	33890 81	1028 14	6 36
0,02	02256 44	1128 11	45	0,32	34912 59	1015 26	6 52
0,03	03384 10	1127 66	67	0,33	35927 85	1008 59	6 67
0,04	04511 09	1126 99	90	0,34	36936 44	1001 75	6 84
0,05	05637 18	1126 09	1 12	0,35	37938 19	994 77	6 98
0,06	06762 15	1124 97	1 35	0,36	38932 96	987 63	7 14
0,07	07885 77	1123 62	1 58	0,37	39920 59	980 34	7 29
0,08	09007 81	1122 04	1 79	0,38	40900 93	972 92	7 42
0,09	10128 06	1120 25	2 01	0,39	41873 85		7 55
		1118 24				965 37	
0,10	0,11246 30	1116 00	2 24	0,40	0,42839 22	957 68	7 69
0,11	12362 30	1113 54	2 46	0,41	43796 90	949 86	7 82
0,12	13475 84	1110 87	2 67	0,42	44746 76	941 91	7 95
0,13	14586 71	1107 99	2 88	0,43	45688 67	933 84	8 07
0,14	15694 70	1104 89	3 10	0,44	46622 51	925 67	8 17
0,15	16799 59	1101 58	3 31	0,45	47548 18	917 37	8 30
0,16	17901 17	1098 06	3 52	0,46	48465 55	908 97	8 40
0,17	18999 23	1094 34	3 72	0,47	49374 52	900 46	8 53
0,18	20093 57	1090 41	3 93	0,48	50274 98	891 85	8 61
0,19	21183 98		4 14	0,49	51166 83		8 69
		1086 27				883 16	
0,20	0,22270 25	1081 93	4 34	0,50	0,52049 99	874 38	8 78
0,21	23352 18	1077 40	4 53	0,51	52924 37	865 50	8 88
0,22	24429 58	1072 67	4 73	0,52	53789 87	856 54	8 96
0,23	25502 25	1067 75	4 92	0,53	54646 41	847 51	9 03
0,24	26570 00	1062 63	5 12	0,54	55493 92	838 41	9 10
0,25	27632 63	1057 34	5 29	0,55	56332 33	829 24	9 17
0,26	28689 97	1051 85	5 49	0,56	57161 57	820 01	9 23
0,27	29741 82	1046 18	5 67	0,57	57981 58	810 71	9 30
0,28	30788 00	1040 34	5 84	0,58	58792 29	801 36	9 35
0,29	31828 34		6 01	0,59	59593 65		9 40
		1034 33				791 96	
0,30	0,32862 67		6 19	0,60	0,60385 61		9 45

ϑ	$\theta(\vartheta)$	$\Delta\theta$	$\Delta^2\theta$	ϑ	$\theta(\vartheta)$	$\Delta\theta$	$\Delta^2\theta$
0,60	0,60385 61	782 51	9 45	1,00	0,84270 08	410 97	8 30
0,61	61168 12	773 02	9 49	1,01	84681 05	402 75	8 22
0,62	61941 14	763 49	9 53	1,02	85083 80	394 62	8 13
0,63	62704 63	753 94	9 55	1,03	85478 42	386 57	8 05
0,64	63458 57	744 35	9 59	1,04	85864 99	378 61	7 96
0,65	64202 92	734 73	9 62	1,05	86243 60	370 75	7 86
0,66	64937 65	725 10	9 63	1,06	86614 35	362 97	7 77
0,67	65662 75	715 45	9 65	1,07	86977 32	355 29	7 68
0,68	66378 20	705 79	9 66	1,08	87332 61	347 69	7 60
0,69	67083 99	696 11	9 68	1,09	87680 30	340 20	7 49
0,70	0,67780 10	686 44	9 67	1,10	0,88020 50	332 80	7 40
0,71	68466 54	676 76	9 68	1,11	88353 30	325 49	7 31
0,72	69143 30	667 08	9 68	1,12	88678 79	318 28	7 21
0,73	69810 38	657 42	9 66	1,13	88997 07	311 16	7 12
0,74	70467 80	647 76	9 66	1,14	89308 23	304 15	7 01
0,75	71115 56	638 11	9 65	1,15	89612 38	297 24	6 91
0,76	71753 67	628 49	9 62	1,16	89909 62	290 42	6 82
0,77	72382 16	618 88	9 61	1,17	90200 04	283 70	6 72
0,78	73001 04	609 31	9 57	1,18	90483 74	277 09	6 61
0,79	73610 35	599 75	9 56	1,19	90760 83	270 57	6 52
0,80	0,74210 10	590 23	9 52	1,20	0,91031 40	264 15	6 42
0,81	74800 33	580 75	9 48	1,21	91295 55	257 84	6 31
0,82	75381 08	571 30	9 45	1,22	91553 39	251 62	6 22
0,83	75952 38	561 89	9 41	1,23	91805 01	245 51	6 11
0,84	76514 27	552 53	9 36	1,24	92050 52	239 49	6 02
0,85	77066 80	543 22	9 31	1,25	92290 01	233 58	5 91
0,86	77610 02	533 96	9 26	1,26	92523 59	227 77	5 81
0,87	78143 98	524 75	9 21	1,27	92751 36	222 06	5 71
0,88	78668 73	515 59	9 16	1,28	92973 42	216 45	5 61
0,89	79184 32	506 50	9 09	1,29	93189 87	210 93	5 52
0,90	0,79690 82	497 46	9 04	1,30	0,93400 80	205 52	5 41
0,91	80188 28	488 49	8 97	1,31	93606 32	200 20	5 32
0,92	80676 77	479 58	8 91	1,32	93806 52	194 98	5 22
0,93	81156 35	470 75	8 83	1,33	94001 50	189 87	5 11
0,94	81627 10	461 98	8 77	1,34	94191 37	184 85	5 02
0,95	82089 08	453 28	8 70	1,35	94376 22	179 92	4 93
0,96	82542 36	444 67	8 61	1,36	94556 14	175 10	4 82
0,97	82987 03	436 12	8 55	1,37	94731 24	170 36	4 74
0,98	83423 15	427 66	8 46	1,38	94901 60	165 73	4 63
0,99	83850 81	419 27	8 39	1,39	95067 33	161 18	4 55
1,00	0,84270 08		8 30	1,40	0,95228 51		4 45

θ	$\theta(\theta)$	$\Delta\theta$	$\Delta^2\theta$	θ	$\theta(\theta)$	$\Delta\theta$	$\Delta^2\theta$
1,40	0,95228 51	156 73	4 45	1,70	0,98379 04	61 66	2 12
1,41	95385 24	152 38	4 35	1,71	98440 70	59 58	2 08
1,42	95537 62	148 11	4 27	1,72	98500 28	57 57	2 01
1,43	95685 73	143 93	4 18	1,73	98557 85	55 61	1 96
1,44	95829 66	139 84	4 09	1,74	98613 46	53 71	1 90
1,45	95969 50	135 85	3 99	1,75	98667 17	51 86	1 85
1,46	96105 35	131 94	3 91	1,76	98719 03	50 07	1 79
1,47	96237 29	128 12	3 82	1,77	98769 10	48 32	1 75
1,48	96365 41	124 38	3 74	1,78	98817 42	46 64	1 68
1,49	96489 79		3 65	1,79	98864 06		1 65
		120 73				44 99	
1,50	0,96610 52	117 16	3 57	1,80	0,98909 05	43 40	1 59
1,51	96727 68	113 67	3 49	1,81	98952 45	41 86	1 54
1,52	96841 35	110 27	3 40	1,82	98994 31	40 36	1 50
1,53	96951 62	106 95	3 32	1,83	99034 67	38 92	1 44
1,54	97058 57	103 70	3 25	1,84	99073 59	37 51	1 41
1,55	97162 27	100 54	3 16	1,85	99111 10	36 15	1 36
1,56	97262 81	97 45	3 09	1,86	99147 25	34 82	1 33
1,57	97360 26	94 44	3 01	1,87	99182 07	33 55	1 27
1,58	97454 70	91 50	2 94	1,88	99215 62	32 31	1 24
1,59	97546 20		2 86	1,89	99247 93		1 20
		88 64				31 11	
1,60	0,97634 84	85 85	2 79	1,90	0,99279 04	29 95	1 16
1,61	97720 69	83 12	2 73	1,91	99308 99	28 83	1 12
1,62	97803 81	80 48	2 64	1,92	99337 82	27 75	1 08
1,63	97884 29	77 89	2 59	1,93	99365 57	26 69	1 06
1,64	97962 18	75 38	2 51	1,94	99392 26	25 68	1 01
1,65	98037 56	72 93	2 45	1,95	99417 94	24 69	99
1,66	98110 49	70 55	2 38	1,96	99442 63	23 74	95
1,67	98181 04	68 24	2 31	1,97	99466 37	22 83	91
1,68	98249 28	65 98	2 26	1,98	99489 20	21 94	89
1,69	98315 26		2 20	1,99	99511 14		85
		63 78				21 09	
1,70	0,98379 04		2 12	2,00	0,99532 23		82

Tafel für die Werte des Integrals

$$\theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0,47694 \frac{\Delta}{P}} e^{-t^2} dt.$$

$\frac{\Delta}{P}$	$\theta\left(P \frac{\Delta}{r}\right)$	$\frac{\Delta}{P}$	$\theta\left(P \frac{\Delta}{r}\right)$	$\frac{\Delta}{P}$	$\theta\left(P \frac{\Delta}{r}\right)$			
0,00	0,00000	538	0,40	0,21268	519	0,80	0,41052	465
0,01	00538	538	0,41	21787	517	0,81	41517	462
0,02	01076	538	0,42	22304	517	0,82	41979	461
0,03	01614	538	0,43	22821	515	0,83	42440	459
0,04	02152	538	0,44	23336	515	0,84	42899	458
0,05	02690	538	0,45	23851	513	0,85	43357	456
0,06	03228	538	0,46	24364	512	0,86	43813	454
0,07	03766	537	0,47	24876	512	0,87	44267	452
0,08	04303	537	0,48	25388	510	0,88	44719	450
0,09	04840	538	0,49	25898	509	0,89	45169	449
0,10	0,05378	536	0,50	0,26407	508	0,90	0,45618	446
0,11	05914	537	0,51	26915	506	0,91	46064	445
0,12	06451	536	0,52	27421	506	0,92	46509	443
0,13	06987	536	0,53	27927	504	0,93	46952	441
0,14	07523	536	0,54	28431	503	0,94	47393	439
0,15	08059	535	0,55	28934	502	0,95	47832	438
0,16	08594	535	0,56	29436	500	0,96	48270	435
0,17	09129	534	0,57	29936	499	0,97	48605	434
0,18	09663	534	0,58	30435	498	0,98	49139	431
0,19	10197	534	0,59	30933	497	0,99	49570	430
0,20	0,10731	533	0,60	0,31430	495	1,00	0,50000	428
0,21	11264	532	0,61	31925	494	1,01	50428	425
0,22	11796	532	0,62	32419	492	1,02	50853	424
0,23	12328	532	0,63	32911	491	1,03	51277	422
0,24	12860	531	0,64	33402	490	1,04	51699	420
0,25	13391	530	0,65	33892	488	1,05	52119	418
0,26	13921	530	0,66	34380	486	1,06	52537	415
0,27	14451	529	0,67	34866	486	1,07	52952	414
0,28	14980	528	0,68	35352	483	1,08	53366	412
0,29	15508	527	0,69	35835	482	1,09	53778	410
0,30	0,16035	527	0,70	0,36317	481	1,10	0,54188	407
0,31	16562	526	0,71	36798	479	1,11	54595	406
0,32	17088	526	0,72	37277	478	1,12	55001	403
0,33	17614	524	0,73	37755	476	1,13	55404	402
0,34	18138	524	0,74	38231	474	1,14	55806	399
0,35	18662	523	0,75	38705	473	1,15	56205	397
0,36	19185	522	0,76	39178	471	1,16	56602	396
0,37	19707	522	0,77	39649	469	1,17	56998	393
0,38	20229	520	0,78	40118	468	1,18	57391	391
0,39	20749	519	0,79	40586	466	1,19	57782	389
0,40	0,21268	519	0,80	0,41052	466	1,20	0,58171	389

$\frac{\Delta}{P}$	$\theta\left(P\frac{\Delta}{r}\right)$		$\frac{\Delta}{P}$	$\theta\left(P\frac{\Delta}{r}\right)$		$\frac{\Delta}{P}$	$\theta\left(P\frac{\Delta}{r}\right)$	
1,20	0,58171	387	1,70	0,84847	277	2,20	0,86216	178
1,21	58558	384	1,71	75124	276	2,21	86394	176
1,22	58942	383	1,72	75400	274	2,22	86570	175
1,23	59325	380	1,73	75674	271	2,23	86745	172
1,24	59705	378	1,74	75945	269	2,24	86917	171
1,25	60083	377	1,75	76214	267	2,25	87088	170
1,26	60460	373	1,76	76481	265	2,26	87258	167
1,27	60833	372	1,77	76746	263	2,27	87425	166
1,28	61205	370	1,78	77009	261	2,28	87591	164
1,29	61575	367	1,79	77270	258	2,29	87755	163
1,30	0,61942	366	1,80	0,77528	257	2,30	0,87918	160
1,31	62308	363	1,81	77785	254	2,31	88078	159
1,32	62671	361	1,82	78039	252	2,32	88237	158
1,33	63032	359	1,83	78291	251	2,33	88395	155
1,34	63391	356	1,84	78542	248	2,34	88550	155
1,35	63747	355	1,85	78790	246	2,35	88705	152
1,36	64102	352	1,86	79036	244	2,36	88857	151
1,37	64454	350	1,87	79280	242	2,37	89008	149
1,38	64804	348	1,88	79522	239	2,38	89157	147
1,39	65152	346	1,89	79761	238	2,39	89304	146
1,40	0,65498	343	1,90	0,79999	236	2,40	0,89450	145
1,41	65841	341	1,91	80235	234	2,41	89595	143
1,42	66182	339	1,92	80469	231	2,42	89738	141
1,43	66521	337	1,93	80700	230	2,43	89879	140
1,44	66858	335	1,94	80930	228	2,44	90019	138
1,45	67193	333	1,95	81158	225	2,45	90157	136
1,46	67526	330	1,96	81383	224	2,46	90293	135
1,47	67856	328	1,97	81607	221	2,47	90428	134
1,48	68184	326	1,98	81828	220	2,48	90562	132
1,49	68510	323	1,99	82048	218	2,49	90694	131
1,50	0,68833	322	2,00	0,82266	215	2,50	0,90825	129
1,51	69155	319	2,01	82481	214	2,51	90954	128
1,52	69474	317	2,02	82695	212	2,52	91082	126
1,53	69791	315	2,03	82907	210	2,53	91208	124
1,54	70106	313	2,04	83117	207	2,54	91332	124
1,55	70419	310	2,05	83324	206	2,55	91456	122
1,56	70729	309	2,06	83530	204	2,56	91578	120
1,57	71038	306	2,07	83734	202	2,57	91698	119
1,58	71344	304	2,08	83936	201	2,58	91817	118
1,59	71648	301	2,09	84137	198	2,59	91935	116
1,60	0,71949	300	2,10	0,84335	196	2,60	0,92051	115
1,61	72249	297	2,11	84531	195	2,61	92166	114
1,62	72546	295	2,12	84726	193	2,62	92280	112
1,63	72841	293	2,13	84919	190	2,63	92392	111
1,64	73134	291	2,14	85109	189	2,64	92503	110
1,65	73425	289	2,15	85298	188	2,65	92613	108
1,66	73714	286	2,16	85486	185	2,66	92721	107
1,67	74000	285	2,17	85671	183	2,67	92828	106
1,68	74285	282	2,18	85854	182	2,68	92934	104
1,69	74567	280	2,19	86036	180	2,69	93038	103
1,70	0,74847		2,20	0,86216		2,70	0,93141	

$\frac{\Delta}{P}$	$\theta\left(P\frac{\Delta}{r}\right)$		$\frac{\Delta}{P}$	$\theta\left(P\frac{\Delta}{r}\right)$		$\frac{\Delta}{P}$	$\theta\left(P\frac{\Delta}{r}\right)$	
2,70	0,93141		3,00	0,95698		3,30	0,97397	
2,71	93243	102	3,01	95767	69	3,31	97442	45
2,72	93344	101	3,02	95835	68	3,32	97486	44
2,73	93443	99	3,03	95902	67	3,33	97530	44
2,74	93541	98	3,04	95968	66	3,34	97573	43
2,75	93638	97	3,05	96033	65	3,35	97615	42
2,76	93734	96	3,06	96098	65	3,36	97657	42
2,77	93828	94	3,07	96161	63	3,37	97698	41
2,78	93922	94	3,08	96224	63	3,38	97738	40
2,79	94014	92	3,09	96286	62	3,39	97778	40
		91			60			39
2,80	0,94105		3,10	0,96346		3,40	0,97817	
2,81	94195	90	3,11	96406	60	3,50	98176	359
2,82	94284	89	3,12	96466	60	3,60	98482	306
2,83	94371	87	3,13	96524	58	3,70	98743	261
2,84	94458	87	3,14	96582	58	3,80	98962	219
2,85	94543	85	3,15	96638	56	3,90	99147	185
2,86	94627	84	3,16	96694	56	4,00	99302	155
2,87	94711	84	3,17	96749	55	4,10	99431	129
2,88	94793	82	3,18	96804	55	4,20	99539	108
2,89	94874	81	3,19	96857	53	4,30	99627	88
		80			53			73
2,90	0,94954		3,20	0,96910		4,40	0,99700	
2,91	95033	79	3,21	96962	52	4,50	99760	60
2,92	95111	78	3,22	97013	51	4,60	99808	48
2,93	95187	76	3,23	97064	51	4,70	99848	40
2,94	95263	76	3,24	97114	50	4,80	99879	31
2,95	95338	75	3,25	97163	49	4,90	99905	26
2,96	95412	74	3,26	97211	48	5,00	99926	21
2,97	95485	73	3,27	97259	48			
2,98	95557	72	3,28	97306	47			
2,99	95628	71	3,29	97352	46			
		70			45			
3,00	0,95698		3,30	0,97397				