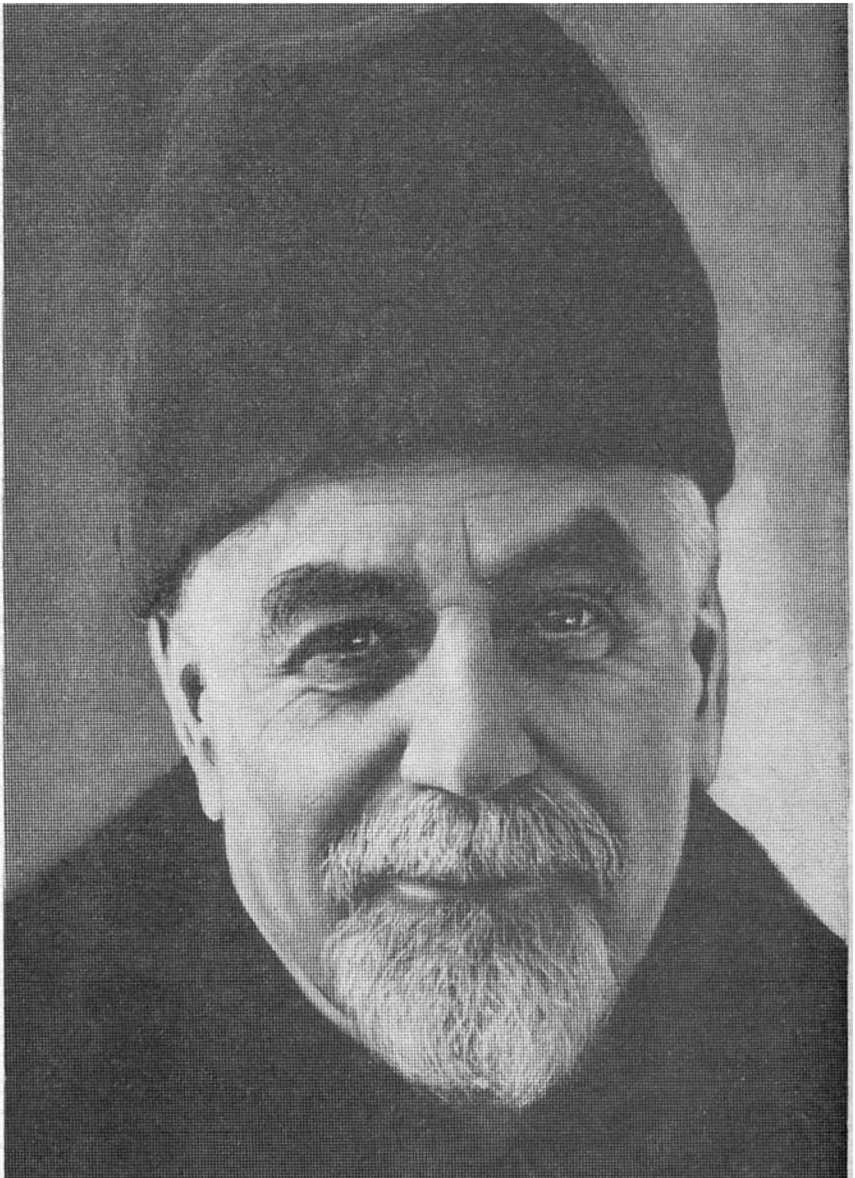
В. И. Смирнов

# ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

## КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

•

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИИ



ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. И. Смирнов

# ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

## КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ
## •
## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИИ

ЛЕНИНГРАД
ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1988

Редактор *З. И. Царькова*

Рецензенты: проф. *Н. Н. Уральцева* (Ленингр. ун-т), д-р физ.-мат. наук *С. В. Хрущев* (Ленингр. отд-ние Мат. ин-та. им. В. А. Стеклова АН СССР)

*Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Ленинградского университета*

УДК 517.5 : 534.222

**Смирнов В. И.**

Избранные труды: Комплексный анализ. Математическая теория дифракции/Сост. и авторы добавлений: Бабич В. М., Никольский Н. К., Хавин В. П. — Л.: Издательство Ленинградского университета, 1988. 280 с.

ISBN 5-288-00286-X

Издание приурочено к столетню со дня рождения В. И. Смирнова (1887—1974) — академика, выдающегося советского ученого, яркого представителя петербургской-ленинградской математической школы. В книгу включены статьи разных лет, в том числе и из зарубежных изданий. Они подобраны таким образом, чтобы читатель мог ознакомиться с созданным ученым методом функционально-инвариантных решений, не утратившим актуальности и в настоящее время, работами по комплексному анализу, широко используемыми в теории линейных операторов и спектральной теории функций.

Книга предназначена для математиков, механиков, физиков.

С $\frac{1702050000-177}{076(02)-87}$ КБ—9—51—88



ISBN 5-288-00286-X

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Научные труды академика Владимира Ивановича Смирнова относятся главным образом к аналитической теории дифференциальных уравнений, комплексному анализу и математической физике (в особенности к теории распространения волн в акустических и упругих средах). В этой книге, публикация которой приурочена к столетию В. И. Смирнова, собраны основные его работы по двум последним из названных направлений.

Цель настоящего издания — сделать эти замечательные работы доступными современному кругу исследователей. Все они (за исключением двух заметок из «Докладов Академии наук СССР») были опубликованы в различных журналах на французском и немецком языках и впервые появляются в русском переводе.

В. И. Смирнов был крупным ученым, внесшим большой вклад в развитие важных разделов математики и ее приложений к механике, сейсмологии, гидро- и аэродинамике, теоретической физике. Велики его заслуги и в постановке преподавания математики, и в подготовке научных кадров. На протяжении полувека В. И. Смирнов оказывал большое влияние на все стороны математической жизни в нашей стране, и особенно в Ленинграде, будучи инициатором новых научных направлений, крупным организатором науки. Его энциклопедический пятитомный «Курс высшей математики» снискал международное признание. Плодотворная деятельность В. И. Смирнова на протяжении всей его жизни была тесно связана с Ленинградским университетом. Обо всем этом рассказано во вступительном очерке.

Собранные в данном сборнике труды В. И. Смирнова представляют большой исторический интерес, отражая важный период становления современного комплексного анализа и теории дифракции. Но ценность их не только в этом. Идеи В. И. Смирнова продолжают воздействовать на современные исследования. Его результаты по теории ортогональных многочленов, по граничным свойствам аналитических функций развивались и развиваются многочисленными специалистами в СССР и за рубежом. Смирновские классы $E_p$ и $D$, смирновские области вошли в обиход математиков, занимающихся комплексным анализом и его приложениями к теории операторов.

Первая часть книги, посвященная комплексному анализу, завершается обзорной статьей, в которой подробно рассказано о влиянии идей В. И. Смирнова на последующее развитие этого раздела математики. К ней приложен обширный список литературы.

Вторая часть посвящена теории дифракции. В ней, в частности, помещены две основополагающие работы (выполненные совместно с С. Л. Соболевым), содержащие «метод функционально инвариантных решений» и его применения к важным задачам математической физики.

Вторая часть заканчивается статьей, в которой дан анализ работ В. И. Смирнова по теории распространения волн.

В настоящем издании сохранены некоторые особенности научных публикаций 20—30-х годов (так, например, ссылки на литературу даны в подстрочных примечаниях, фамилии авторов цитируемых работ приводятся не в русском переводе, а в оригинальном написании).

## ВЛАДИМИР ИВАНОВИЧ СМИРНОВ

Владимир Иванович Смирнов родился 10 июня (29 мая по старому стилю) 1887 г. в Петербурге в семье протоиерея Ивана Николаевича Смирнова, законоучителя Петербургского лицея. Широкая образованность и гуманность отца, любовь и забота матери, Елизаветы Алексеевны, как нельзя лучше способствовали всестороннему умственному и духовному развитию Владимира Ивановича и его многочисленных братьев (Владимир Иванович был младшим, десятым, ребенком). Вся семья была очень музыкальна, и в доме царил культ музыки. От отца же Владимир Иванович и его брат, Константин Иванович, унаследовали любовь и способности к математике.

В 1897 г. Владимир Иванович поступил во Введенскую гимназию, а в 1904 г. был переведен во 2-ю Петербургскую гимназию. Здесь он учился у прекрасного педагога Якова Варфоломеевича Иодынского — большого энтузиаста своего дела. Я. В. Иодынский собрал вокруг себя интересующихся математикой учеников, поощряя их к самостоятельной работе. Из них организовался кружок, составивший даже свою собственную научную библиотеку. Наиболее активными его участниками, кроме Владимира Ивановича, были А. А. Фридман, Я. Д. Тамаркин (ставшие впоследствии крупными учеными), М. Ф. Петелин.

Уже тогда способности Владимира Ивановича и его интерес к математике проявились настолько ярко, что Яков Варфоломеевич и отец будущего ученого одобрили его поступление на естественный факультет Петербургского университета (1905 г.).

Разносторонняя одаренность и навыки к самостоятельной работе, приобретенные еще в гимназические годы, позволили Владимиру Ивановичу наряду с занятиями на избранном факультете уделять много времени музыкальному образованию, а также посещать лекции известных ученых по философии (Н. О. Лосский, Н. А. Бердяев), истории (Н. И. Кареев, С. Ф. Платонов), этике и эстетике, политической экономии, энциклопедии права и другим наукам, читавшиеся в университете. Интерес к этим наукам, и особенно к философии, Владимир Иванович сохранил до конца жизни. Большое влияние на него, как и на многих его современников, имели философские концепции и личность Владимира Соловьева. Владимир Иванович увлекался также театром, где в то время выступала целая плеяда замечательных дирижеров, музыкантов, певцов, актеров.

Но основные силы отдавались все-таки математике. С третьего курса Владимир Иванович стал посещать лекции академика В. А. Стеклова, который в 1906 г., переехав из Харькова, возглавил кафедру А. Н. Коркина в Петербургском университете.

В то время Владимир Иванович углубленно изучал теорию функций комплексного переменного и, будучи еще студентом третьего курса, выполнил свою дипломную работу, посвященную теоремам Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера по представлениям аналитических функций (тема, предложенная ему проф. И. Л. Пташицким).

В 1910 г. он блестяще закончил университет, получив диплом I степени, и начал преподавать в гимназии Столбцова — одной из лучших частных школ того времени.

Появление в Петербурге В. А. Стеклова во многом способствовало оживлению учебной и научной жизни естественного факультета университета. Вокруг него начинает группироваться талантливая молодежь, в их числе и В. И. Смирнов. Чтобы работать под руководством В. А. Стеклова, Владимир Иванович должен был включить в сферу своих интересов дифференциальные уравнения и математическую физику — области исследований Стеклова. К осени 1911 г. он представил на суд руководителя работу по исследованию форм равновесного положения упругой нити, находящейся под равномерным нормальным давлением (тема, предложенная В. А. Стекловым). В ней он даже превзошел задание, показав, что эти формы можно описать с помощью эллиптических интегралов. (До этого исследования они были представлены через функции Вейерштрасса, а В. А. Стеклов предполагал, что их можно описать функциями Якоби.) Работа получила высокую оценку В. А. Стеклова, и с января 1912 г. Владимир Иванович был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию (говоря по-современному — стал аспирантом).

Владимир Андреевич Стеклов был весьма требователен к своим аспирантам. В план занятий входило изучение большого числа трудных классических мемуаров, начиная с трудов Фурье, Штурма, Лиувилля, Фукса, Флоке, Неймана и кончая последними сочинениями Пуанкаре, Ляпунова и самого В. А. Стеклова. Вся эта литература изучалась и обсуждалась на заседаниях кружка, интенсивно работавшего на протяжении нескольких лет. Его участниками, кроме Владимира Ивановича, были его гимназические друзья — А. А. Фридман, Я. Д. Тамаркин, М. Ф. Петелин, а также Н. М. Крылов (впоследствии академик), А. Ф. Гаврилов. Кружковцы внимательно следили и за другими современными работами. Так, например, они внимательно изучили работы Д. Биркгофа 1908 г. о разложениях в ряды по собственным и присоединенным функциям несамосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов, работу Г. Вейля 1909 г. о сингулярных дифференциальных операторах, у которых обнаруживается не только давно получивший права гражданства дискретный спектр, но и так называемый непрерывный спектр, большое число работ по разрывным функциям вещественного переменного. Эти исследования закладывали основы новых понятий и новых разделов математического анализа. В дальнейшем Я. Д. Тамаркин получит результаты, существенно обобщающие результат Д. Биркгофа, работы Г. Вейля окажутся важным звеном на пути формирования спектральной теории абстрактных операторов, а работы по теории разрывных функций образуют фундамент современной теории множеств и теории функций вещественного переменного. Отметим, что сам В. А. Стеклов весьма холодно относился к этим «модернистским» течениям, и члены кружка изучали их на свой «страх и риск».

В 1915 г. Владимир Иванович окончил аспирантуру и начал преподавать в университете в качестве ассистента: первое время у проф. А. В. Васильева (математику у химиков), а затем у В. А. Стеклова (дифференциальные уравнения). С этого времени вся его жизнь и деятельность связаны с Петербургским (позднее Ленинградским) университетом. Ему отдается бо́льшая часть творческих и душевных сил. (Лишь в течение 1918/19 учебного года Владимир Иванович — профессор Екатеринославского университета, а в 1919/20 учебном году — доцент Таврического университета в г. Симферополе.) Параллельно с работой в Петербургском университете Владимир Иванович читает лекции в Институте инженеров путей сообщения (1912—1918 и 1921—1932 гг.), в Горном институте (1914—1916 гг.), на Высших женских Бестужевских курсах (в 1917/18 учебном году) и одновременно преподает в гимназии Столбцова (1910—1918 гг.). В конце 1915 г. он организует свой первый научный семинар — по качественной теории дифференциальных уравнений, на котором изучались в основном мемуары Пуанкаре и апробировались пути их дальнейшего развития.

К этому периоду относится первая из работ Владимира Ивановича по теории аналитических функций. Она посвящена решению одной из важных проблем, привлекавших к себе внимание крупнейших ученых XIX века,— задаче униформизации многозначных аналитических функций. Именно в работе «Приложение принципа сходимости к теории униформизации» (она была опубликована позднее, в 1918 г., в Сообщениях Харьковского математического общества) доказана возможность представления $z$ и $w$, удовлетворяющих неприводимому алгебраическому уравнению $f(z, w)=0$, в виде фуксовых функций $z=\varphi(t)$, $w=\psi(t)$, однозначных и мероморфных внутри единичного круга, имеющих окружность этого круга своей естественной границей. Существование такого типа униформизаций было доказано почти одновременно (в 1907 г.) Пуанкаре и Кёбе путем сложных построений. Владимир Иванович дал весьма изящное и принципиально новое решение этой задачи. Его метод используется во всех последующих доказательствах теорем об униформизациях.

Вслед за этой работой Владимир Иванович выполнил ряд исследований по аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений (1918—1921 гг.). Во второй половине XIX века было установлено, что все специальные функции, известные к тому времени, могут быть получены как решения некоторых уравнений вида $w''+p(z)w'+q(z)w=0$ с аналитическими коэффициентами и что различные их свойства являются свойствами, присущими всем или определенной части решений этих уравнений. Это явилось одной из причин всестороннего изучения линейных уравнений второго порядка, имеющих аналитические коэффициенты. Наиболее простыми особыми точками для них являются так называемые регулярные особые точки. Если уравнение имеет одну или две такие точки, то оно интегрируется в элементарных функциях. При наличии трех регулярных особых точек это уже не так, и такие уравнения порождают широкий класс специальных функций, обладающих целым рядом замечательных свойств. Так, из гипергеометрического ряда $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, дающего общее решение такого уравнения, приведенного к каноническому виду (оно называется уравнением Гаусса), при тех или иных значениях параметров $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ могут быть получены разнообразные элементарные и специальные функции. Представляет интерес также изучение функции $z=z(\eta)$, являющейся обратной к отношению $\eta=w_1(z)/w_2(z)$ двух линейно независимых решений уравнения. При обходе особой точки $\eta$ претерпевает дробно-линейную трансформацию: $\eta \to a\eta+b/c\eta+d$, а $z(\eta)$ (если она однозначна) возвращается к своему исходному значению, так что функция $z$ обладает свойством $z(\eta)=z(a\eta+b/c\eta+d)$. Так возникает класс автоморфных функций, и с каждым уравнением связывается порожденная им конечномерная группа с числом образующих, равным числу особых точек минус единица. Г. А. Шварц провел всестороннее исследование уравнений с тремя регулярными особыми точками: он доказал, что уравнение определяется заданием своих особых точек и характеристических корней в них, выяснил, в каких случаях $z$ является однозначной или алгебраической функцией своего аргумента $\eta$, исследовал группу, порожденную уравнением такого типа.

Несравненно более сложным объектом являются уравнения с четырьмя регулярными особыми точками. Особенно интересен случай, когда разности характеристических корней в особых точках равны нулю. При этом весь класс уравнений (при фиксированных особых точках $z_k$, $k=1, 2, 3, 4$) параметризуется одним комплексным параметром $\lambda$. Именно этот случай является основным объектом работ Владимира Ивановича, опубликованных в 1918—1921 гг. В них он считал, что $z_1=0$, $z_2=a\in(0,1)$, $z_3=1$, $z_4=\infty$. В этих работах проведен исчерпывающий анализ того, при каких значениях $\lambda$ функция $\eta=w_1(z,\lambda)/w_2(z,\lambda)$ однозначно обратима и когда обратная ей функция является функцией Фукса, или более общо — функцией Клейна. Это потребовало нахождения спектров трех краевых задач для исследуемого уравнения при наличии сингулярностей на концах или внутри интервала изменения аргумента и изучения поведения их решений. Полученные результаты позволили доказать, что обращение возможно только для $\lambda$, заполняющих некоторый отрезок. Дополнительные требования, чтобы группа была фуксовой и не имела нетривиальных соотношений, выделили из этого отрезка единственное значение $\lambda$, которое принято называть акцессорным параметром уравнения.

Первая работа этого направления — «Задача обращения линейного дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками» — была защищена Владимиром Ивановичем в 1918 г. как магистерская диссертация. Тема для нее была выбрана им самостоятельно и не встретила сочувственного отношения со стороны В. А. Стеклова. Однако о самой работе Стеклов дал блестящий отзыв. Во время диспута он отметил, что в работе Владимира Ивановича прокладываются новые пути в аналитической теории дифференциальных уравнений.

Я не буду описывать другие достижения Владимира Ивановича в этой теории, ибо им предполагается посвятить отдельную книгу. В нее задумано включить указанную диссертацию, выпущенную к защите в виде отдельного литографированного издания и ставшую библиографической редкостью. Здесь же отмечу, что Владимир Иванович сохранил живой интерес к аналитической теории дифференциальных уравнений до конца своей жизни. Он всячески способствовал ее развитию, равно как и развитию других направлений качественной теории дифференциальных уравнений, особенно теории устойчивости. Под его руководством в этой области получил блестящие результаты И. А. Лаппо-Данилевский (вторая половина 20-х годов). После преждевременной смерти этого талантливого ученого Владимир Иванович выполнил огромный и благородный труд: изучил (совместно с Н. Е. Кочиным, впоследствии академиком) его рукописи и черновые наброски и издал их в виде двенадцати работ. Он же вложил много сил и времени в посмертные издания трудов одного из самых выдающихся русских математиков, своего старшего коллеги, академика А. М. Ляпунова: в середине

20-х годов Владимир Иванович (совместно с Н. Е. Кочиным) изучил рукопись Ляпунова по фигурам равновесия вращающейся жидкости, проверил и частично восстановил рассуждения и выкладки и в доступной форме издал ее под названием «Sur les figures d'équilibre d'une masse fluide hètérogène en rotation»; в конце 40-х — начале 50-х годов под его руководством была составлена обширная библиография трудов А. М. Ляпунова; в 50-х годах Владимир Иванович перевел и издал на русском языке в серии «Классики науки» избранные работы ученого и написал к ним большую обзорную статью о его творчестве; в 1961 г. на Всесоюзном съезде математиков в Ленинграде им был сделан обширный доклад по неизданным работам А. М. Ляпунова, посвященным теории устойчивости.

Но вернемся к началу 20-х годов — к периоду возвращения Владимира Ивановича в родной город и возобновлению его работы в университете. К этому времени уже стало ясным наше сильное отставание в различных областях физики и назрела неотложная потребность в коренной перестройке преподавания физики в высших учебных заведениях, в том числе и в университетах. Это, в свою очередь, требовало и существенных изменений в преподавании математики для физиков. За решение данного комплекса научно-педагогических проблем взялись два замечательных ученых — Дмитрий Сергеевич Рождественский и Владимир Иванович Смирнов. Их знания охватывали по существу все разделы современной физики и математики. Они оба были и блестящими педагогами, не жалевшими сил и времени для воспитания молодежи. Их совместный труд, продолжавшийся до конца жизни Д. С. Рождественского (1940 г.), привел к кардинальной перестройке всего преподавания математики и физики на физическом отделении естественного факультета Ленинградского университета. На базе лекций Владимира Ивановича были выработаны программы по математике для физических факультетов университетов всей страны. Владимир Иванович сам многократно читал все обязательные математические дисциплины и специальные курсы для студентов-физиков. Его лекции, отличавшиеся богатством содержания и доступностью изложения, привлекали к себе не только студентов, но и преподавателей и научных сотрудников. Для облегчения осуществления реформы преподавания Владимиром Ивановичем (совместно с Я. Д. Тамаркиным) написан двухтомный учебник для физиков. Это был учебник небывалого у нас типа, где материал был подобран по степени его важности для физиков и иллюстрировался большим числом приложений к физике, механике и технике.

Перейду теперь к описанию самых ярких достижений Владимира Ивановича в теории аналитических функций, опубликованных в 20-х и начале 30-х годов. Именно этим работам отдана половина данной книги. Из публикуемой в ней статьи

Н. К. Никольского и В. П. Хавина видно, какое большое влияние оказали результаты этих работ, а также введенные в них понятия и методы на развитие названной теории в дальнейшем, и особенно в последние два десятилетия.

Владимир Иванович весьма полно исследовал вопрос о том, для каких функций, аналитических в области, сохраняется принцип максимума. Хорошо известно, что если $f$ регулярна в ограниченной области $\Omega$ и непрерывна вплоть до контура, то максимум ее модуля достигается на контуре. Было важно выяснить, как, не теряя этого свойства, можно ослабить требование непрерывности $f$ в $\overline{\Omega}$.

В теории функций комплексного переменного и ее приложениях важную роль играет класс $N$ (класс Неванлинны). Он состоит из всевозможных функций, аналитических в круге $K=\{z : |z|<1\}$ и представимых в виде частного двух ограниченных функций, аналитических в $K$. Простые примеры показывают, что для применимости принципа максимума класс $N$ слишком широк: он содержит неограниченные функции, угловые граничные значения которых почти везде на окружности $S=\{z : |z|=1\}$ равны по модулю единице. Владимир Иванович выделил из $N$ подкласс $D$, к элементам которого применим и классический принцип максимума, и некоторые его более общие варианты. Более того, в некотором смысле класс $D$ есть наиболее широкое подмножество в $N$, обладающее этим свойством. Владимир Иванович указал различные способы описания этого класса (в терминах, относящихся непосредственно к модулю функции, и в терминах ее разложения на «канонические» множители). Этот класс нашел впоследствии широкое применение в теории функций (особенно в теории приближений).

Владимир Иванович получил важные результаты по теории сингулярных интегралов. Широко известна его теорема о принадлежности интеграла типа Коши — Стилтьеса, взятого по единичной окружности, классам Харди $H_p$ (при $p \in (0,1)$). Это одна из первых оценок сингулярного интегрального оператора. Впоследствии она нашла широкое приложение к задачам, на первый взгляд не связанным с интегралом Коши. Вместе с этой теоремой В. И. Смирнова в монографии по теории тригонометрических рядов включают и его теорему о совпадении сопряженного ряда Фурье с рядом Фурье сопряженной функции, если эта функция суммируема. К такому результату Владимира Ивановича привели его исследования интегралов типа Коши.

Очень важна построенная им теория функций, аналитических в областях со спрямляемыми границами. В теории приближений, при решении экстремальных задач теории функций, при исследовании граничных свойств аналитических функций постоянно применяются введенные и изученные В. И. Смирновым классы $E^p$ — естественные аналоги классов Харди для единичного круга. Владимир Иванович дал полное решение задачи представимости функции по формуле Коши (оказалось, что класс функций, представимых по этой формуле, совпадает с $E_1$), изучил гармонические функции, представимые по формуле Грина, и выяснил роль класса $E_2$ в задачах среднеквадратической аппроксимации многочленами на спрямляемых кривых.

Он открыл важный класс $S$ жордановых областей со спрямляемой границей. Он установил, что применимость принципа максимума к функциям класса $E_1$ и полнота многочленов в $E_2$ равносильны принадлежности области классу $S$.

Владимир Иванович занимался и тонкими вопросами о граничных дифференциальных свойствах функций, осуществляющих конформное отображение круга на односвязную область в зависимости от свойств границы. Им получены важные оценки производных первых трех порядков этих функций.

Результаты Владимира Ивановича по теории аналитических функций отражены в известных монографиях Зигмунда, Бари, Уолша, Сеге, Голузина, Привалова, Дьюрена. О влиянии идей и результатов В. И. Смирнова, возрождении интереса к ним в 60-е годы, об их применениях и развитии можно прочитать в уже упомянутой статье Н. К. Никольского и В. П. Хавина.

В 1925 г. Владимир Иванович организовал в Ленинградском университете кафедру теории функций комплексного переменного. Трудно перечислить все специальные семинары, которые в связи с этим проводил Владимир Иванович. Это и семинар по приближенным методам конформных отображений, и семинар по разложениям в ряды полиномов, и совместный с профессором Г. М. Фихтенгольцем семинар по вопросам теории функций комплексного переменного, смежным с теорией функций вещественного переменного, и семинар по аналитической теории дифференциальных уравнений, граничным задачам теории функций комплексного переменного и многие другие. На этих семинарах формировалось новое поколение математиков: Г. М. Голузин, С. А. Янчевский, А. Л. Шагинян, В. Д. Купрадзе, Д. К. Фаддеев, И. П. Натансон, Л. В. Канторович, С. М. Лозинский, В. И. Крылов, Ф. И. Харшиладзе и др. В то же время вокруг Владимира Ивановича начали группироваться его многочисленные ученики. Одним из первых и наиболее ярких его учеников был Геннадий Михайлович Голузин, которому спустя десять лет Владимир Иванович передал заведование кафедрой теории функций комплексного переменного.

Г. М. Голузин был ориентирован Владимиром Ивановичем на изучение задач геометрической теории функций комплексного переменного и имел постоянное общение со своим учителем, обладавшим обширными познаниями и в этой области. Г. М. Голузиным создана пользующаяся широким признанием ленинградская школа геометрической теории функций. Ее представители Н. А. Лебедев и И. М. Милин сыграли заметную роль в недавнем решении известной проблемы Бибербаха: Де Бранж, решивший эту проблему, существенно использовал их результаты.

После безвременной кончины Г. М. Голузина Владимир Иванович снова взял на себя руководство работами в области теории функций комплексного переменного. Он содействовал привлечению Н. А. Лебедева в Ленинградский университет и убедил его обратиться к задачам теории наилучших приближений в комплексной области. Последовав совету Владимира Ивановича, Н. А. Лебедев получил интересные результаты в этой области. Вместе с ним Владимир Иванович написал монографию по конструктивной теории функций комплексного переменного — первую в отечественной литературе. В ней изложены результаты самого Владимира Ивановича по рядам ортогональных многочленов в областях со спрямляемой границей и обобщению неравенств А. А. Маркова (старшего) и С. Н. Бернштейна. Она охватывает теорию интерполирования, теорию многочленов, ортогональных на контуре и по площади, теорию многочленов Фабера, а также совсем новые в ту пору теоремы С. Н. Мергеляна и А. Г. Витушкина о возможности равномерной аппроксимации многочленами и рациональными функциями.

Владимир Иванович до конца своих дней оставался общепризнанным авторитетом в теории аналитических функций. За советами и оценками к нему обращались из всех научных центров нашей страны, не говоря уже о ленинградцах всех поколений.

Следующим важным этапом научной деятельности В. И. Смирнова были его работы, выполненные в Сейсмологическом институте АН СССР, отделившемся в 1928 г. от Физико-математического института АН СССР. С 1929 по 1935 г. Владимир Иванович возглавлял теоретический отдел института и сумел поднять его работу на небывалую высоту. Здесь он собрал группу талантливых молодых ученых: Е. А. Нарышкину, С. Л. Соболева, И. Н. Векуа, С. Г. Михлина, В. Д. Купрадзе и др., успешно проработавших в Сейсмологическом институте в течение ряда лет. Для самого Владимира Ивановича это был один из очень плодотворных периодов научной работы. Его идеи и исследования по теории распространения волн составили новую главу математической физики, создав основу для развития математической сейсмологии.

В данном сборнике печатаются переводы двух больших статей Владимира Ивановича, выполненных совместно с С. Л. Соболевым и опубликованных в 1932 и 1933 гг. В них изложен новый метод решения задач распространения волн в упругих средах, основанный на построении так называемых функционально-инвариантных решений уравнений. Они характеризуются тем, что произвольная функция от них также является решением исследуемого уравнения. Идея введения и изучения таких решений явно навеяна теорией аналитических функций, влияние которой просматривается во всех работах Владимира Ивановича. Класс функционально-инвариантных решений для волнового уравнения замечателен тем, что внутри него содержатся решения, представляющие собой волны, излучаемые точечным источником, плоские волны и некоторые другие важные решения. Особенно существенно, что в классе указанных решений оказалось возможным построить решение задачи об отражении волн от плоской и прямолинейной границ. Именно по заданной падающей волне, имеющей точечную особенность в полупространстве, находится регулярное решение, которое в сумме с падающей волной удовлетворяет граничному условию. Оказалось, что аналогичные факты имеют место и в задачах теории упругости.

В первой из упомянутых работ дан эффективный способ решения задач распространения волн в слоисто-неоднородных упругих средах с плоскими параллельными границами. Во второй работе аналогичный метод разработан для пространственных задач при наличии осевой симметрии. В других работах 30-х годов Владимир Иванович всесторонне изучает частные решения уравнений теории упругости, имеющие особенности в данной точке, строит все сингулярные решения волнового уравнения. Затем он решает задачи об упругих колебаниях круга и сферы (при наличии осевой симметрии) методом, который вошел в литературу как метод неполного разделения переменных. Указанный метод является своеобразным вариантом теории потенциалов, которую до Владимира Ивановича и после него безуспешно пытались разработать для начально-краевых задач применительно к волновому уравнению.

Теория потенциала, как хорошо известно, была создана во второй половине XIX в. для уравнения Лапласа (однородного и неоднородного), а затем и для уравнения теплопроводности. Трудности перенесения ее на волновые уравнения обусловлены тем, что основное сингулярное решение этого уравнения имеет распределенные особенности и в случае двух и более пространственных переменных является обобщенной функцией (распределением). Попытки построения аналогов потенциалов простого и двойного слоя и поиски в их терминах решений первой или второй начально-краевой задачи для волнового уравнения приводили к интегральным уравнениям, анализ которых столь сложен и непрозрачен, что от этого пути в конце концов отказались. Владимир Иванович предложил для задач, обладающих сферической симметрией, некоторый смешанный вариант метода Фурье и метода теории потенциалов. Согласно этому варианту решение разлагается по сферическим функциям. Коэффициенты данного ряда зависят только от радиуса и времени. Их представляют в виде некоторых потенциалов с плотностями, зависящими от времени. Для определения этих плотностей получают интегральные уравнения, доступные анализу. Этот метод позволил сделать ряд важных качественных и количественных выводов о решениях задач указанного типа. Он нашел применение и развитие в работах других ученых, и прежде всего учеников и последователей Владимира Ивановича (Г. И. Петрашеня и его учеников). В данном сборнике представлены две заметки Владимира Ивановича из «Докладов АН СССР» (1937 г.), посвященных этому методу.

Исследования по функционально-инвариантным решениям породили ряд работ, в которых решался вопрос о наличии таких решений у других уравнений в частных производных, вопрос о нахождении всех функционально-инвариантных решений волнового уравнения и вопрос о нахождении всех уравнений данного класса, имеющих функционально-инвариантные решения. Над этими проблемами работали С. Л. Соболев, Н. П. Еругин, М. М. Смирнов и др. в тесном контакте с Владимиром Ивановичем.

Нарушая хронологию, отметим здесь работы Владимира Ивановича (1953, 1954 гг.), венчающие эту тематику. В них он показал, что она тесно связана с теорией изотропных конгруэнций линий в трехмерном пространстве и $(n-2)$-мерных конгруэнций в случае $n$-мерного пространства. Для простоты возьмем случай трехмерного евклидова пространства. Две вещественные функции $u$ и $v$, определенные на $R^3$, называются сопряженными, если $(\operatorname{grad}(u+iv))^2 \equiv 0$; при этом конгруэнция $\{u(x) = \text{const},\ v(x) = \text{const}\}$ называется изотропной. Владимир Иванович нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы выражение $u(x) + iv(x)$, где $u$ и $v$ — сопряженные функции, было функционально-инвариантным решением уравнения Лапласа. Это условие состоит в том, что соответствующая изотропная конгруэнция должна быть прямолинейной. В общем случае криволинейной конгруэнции $w(x) = u(x) + iv(x)$ есть функционально-инвариантное решение уравнения $\Delta w(x) + [N(x) + k(x)\, a(x)] \operatorname{grad} w(x) = 0$, где $N(x)$ — вектор кривизны линий конгруэнции, $a(x)$—единичный вектор касательной к этим линиям, а $k$ — произвольная скалярная функция. Владимир Иванович установил связь между изотропными конгруэнциями и функционально-инвариантными решениями и в случае произвольной $n$-мерной римановой метрики.

Исследование изотропных конгруэнций позволило дать весьма изящное решение задачи о нахождении всех уравнений эллиптического типа второго порядка, обладающих функционально-инвариантными решениями. Попутно Владимир Иванович дал и простое доказательство ряда теорем из теории конгруэнций, которые ранее доказывались с помощью специально разработанной в геометрии техники. Эти результаты, опубликованные в трех работах в «Вестнике ЛГУ», в данной книге не помещены, с одной стороны, ввиду их большей доступности, а с другой — ввиду ограниченности объема данного издания.

В 1931 г. по инициативе Владимира Ивановича при математико-механическом факультете Ленинградского университета был организован научно-исследовательский институт математики и механики НИИММ, и он был назначен заместителем директора (по научной части) этого института. Это несколько расширило возможности Владимира Ивановича влиять на жизнь факультета, переживавшего тогда тяжелую пору разных экспериментов.

В 1932 г. Владимир Иванович был избран членом-корреспондентом АН СССР.

Владимир Иванович всегда находился в курсе всех больших достижений науки. В 20-х годах он был одним из организаторов и активнейших участников Ленинградского физико-математического общества, а незадолго до его роспуска (в 1930 г.) — его председателем. Владимир Иванович был душой Второго всесоюзного съезда математиков (1934 г.), проводившегося в Ленинграде. Ему мы обязаны и изданием Трудов съезда.

Владимир Иванович внимательно следил за общими тенденциями развития математики и физики, хорошо чувствовал наиболее ценные и перспективные направления и щедро делился своими знаниями с окружающими. Так, уже в конце 20-х — начале 30-х годов Владимир Иванович увидел большое будущее теории групп, причем не только в самой математике, но и в теоретической физике. По желанию Д. С. Рождественского, в 1931—1932 гг. он прочел большой и оригинальный курс лекций по теории групп для сотрудников Государственного оптического института (ГОИ), организатором и директором которого был Дмитрий Сергеевич. Весьма примечательным был контингент его слушателей. Все лекции аккуратно посещал и даже конспектировал сам директор. Рядом сидели известные физики — А. И. Тудоровский и Т. П. Кравец (примерно на десять лет старше Владимира Ивановича), а далее — недавно зачисленные в лаборанты физики — А. Н. Теренин, С. Э. Фриш, Е. Ф. Гросс, математик А. А. Марков (сын знаменитого А. А. Маркова) — будущие члены Академии наук СССР. Еще один лаборант ГОИ — Владимир Александрович Фок, обративший на себя внимание ученого мира и в дальнейшем ставший одним из крупнейших физиков мира, был уже хорошо знаком с Владимиром Ивановичем и самостоятельно изучал эти лекции, обсуждая их затем с Владимиром Ивановичем.

Лекции, прочитанные Владимиром Ивановичем в ГОИ, легли в основу первой части третьего тома «Курса высшей математики», первое издание которого было опубликовано в 1933 г.

Владимир Иванович очень рано оценил значимость и другого нового направления в математике — функционального анализа, и особенно теории операторов, формировавшейся в тесном контакте с квантовой механикой. Он организовал семинар, в котором приняли деятельное участие его коллеги — профессор Г. М. Фихтенгольц, молодые талантливые ученые — И. П. Натансон, Л. В. Канторович (впоследствии академик, лауреат Нобелевской премии), Б. З. Вулих, С. Я. Янчевский и др. Его посещали и маститые ученые — Н. М. Гюнтер и Р. О. Кузьмин. С этого семинара начались многочисленные работы ленинградских математиков по функциональному анализу. Весьма примечательно, что многие из этих исследований вызвал к жизни Владимир Иванович.

В 1936/37 учебном году Владимир Иванович прочел курс лекций по теории операторов студентам и преподавателям физического факультета. Дальнейшая работа ученого в области функционального анализа привела к написанию знаменитого пятого тома «Курса высшей математики», увидевшего свет в 1947 г. Его опубликование оказало большое влияние на дальнейшее развитие функционального анализа, и особенно на развитие теории операторов и ее многочисленных приложений к задачам математической физики.

В середине 30-х годов Владимир Иванович организовал также семинар по приближенным методам математического анализа. Его участниками были С. А. Гершгорин, Г. М. Голузин, Л. В. Канторович, В. И. Крылов, В. Д. Купрадзе и др. С него начались исследования ленинградских ученых и в этой важной области математики, обусловившие в дальнейшем создание целого отдела приближенных вычислений в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР и появление известной монографии Л. В. Канторовича и В. И. Крылова «Приближенные методы высшего анализа».

С 1937 г. Владимир Иванович становится директором НИИММа. Благодаря его усилиям и усилиям других ученых постепенно нормализуется учебный и научный процесс в учебных заведениях. Восстанавливаются веками отработанные формы преподавания, совершенствуются и развиваются формы научно-исследовательской работы, организуются новые семинары в университете, на которых воспитываются новые поколения молодых ученых.

Владимир Иванович был замечательным и редко встречающимся научным руководителем всех тех научных подразделений, во главе которых он стоял. Он был в курсе всех больших и малых дел своих сотрудников. Они помнят, например, такой эпизод: в конце 30-х годов, будучи на даче, Владимир Иванович по требованию срочно представить план научно-исследовательской работы руководимого им НИИММа, не обращаясь к документам, по памяти написал его для всех отделов института.

В период Отечественной войны (1941—1944 гг.) Владимир Иванович занялся аэро- и гидромеханикой, организовал аэродинамическую группу в Елабужском филиале Ленинградского университета, которая под его руководством и при его непосредственном участии выполнила ряд важных оборонных работ по внешней баллистике. Их высокое качество неоднократно отмечалось научными и административными инстанциями.

В 1943 г. за выдающиеся заслуги в науке Владимир Иванович избирается действительным членом АН СССР.

По возвращении в 1944 г. в Ленинград Владимир Иванович с новой энергией принимается за восстановление научной и педагогической работы в университете. Находясь на посту директора НИИММа и заведуя кафедрой математики физического факультета, он взял на себя руководство кафедрами теории упругости и гидроаэромеханики, оказавшимися тогда «беспризорными», и возглавлял их до тех пор, пока не подготовил себе смену.

С 1947 г., когда Владимиру Ивановичу исполнилось 60 лет, он начинает все больше внимания уделять теории дифференциальных уравнений с частными производными и их применениям к различным разделам математической физики. Осенью этого года я переехала в Ленинград и поступила в аспирантуру при математико-механическом факультете Ленинградского университета. С этого времени я имела счастье работать в тесном контакте с Владимиром Ивановичем, пользуясь его обширными знаниями и всесторонней поддержкой. Мне было грустно и тревожно расставаться с моими учителями и друзьями, обретенными в Московском университете за годы учения, и я смутно представляла себе научные тенденции и расстановку научных сил в новом для меня месте. Я обратилась за советом к дружественному мне математическому семейству Ляпиных, знавшему меня в предвоенные годы 1940—1941 гг., и получила их ответ: «Ну, конечно же, Владимир Иванович Смирнов. Он вам придется по душе». Что и говорить, сколь правильным оказался их совет!

Владимир Иванович определил меня к Сергею Львовичу Соболеву, который, хотя и переехал в то время на постоянное жительство и работу в Москву, но навещал Ленинград и имел здесь нескольких аспирантов и докторантов. Я хорошо помню мой первый продолжительный разговор с Владимиром Ивановичем о создании семинара, посвященного теории дифференциальных уравнений в частных производных. Я со свойственной молодости самоуверенностью «тянула» в те стороны, которые мне были более или менее известны и казались интересными, а мудрый Владимир Иванович обдумывал, как приплюсовать мои знания и намерения к тому богатству, которым он располагал.

Осенью 1947 г. под руководством Владимира Ивановича начал работать новый семинар, который объединил всех ленинградских математиков, занимавшихся дифференциальными уравнениями или их приложениями к математической физике. В него влился его кафедральный семинар, работавший в течение 1946/47 учебного года. В семинаре приняли деятельное участие профессора С. Г. Михлин, Г. И. Петрашень и С. В. Валландер, О. А. Ладыженская, Х. Л. Смолицкий, Б. В. Русанов, М. М. Смирнов, несколько позже — М. Ш. Бирман, В. А. Якубович, Л. Н. Слободецкий, затем В. М. Бабич и многие другие. На нем освещались работы по дифференциальным уравнениям (обыкновенным и с частными производными), по функциональному и классическому анализу, по приближенным методам анализа (в их числе методу конечных разностей), теории упругости, теории распространения волн, гидро- и аэродинамике, позже — по спектральным задачам квантовой механики и теории поля, геометрии и другие. В семинаре систематически излагали свои новые работы его постоянные участники, выступали как ведущие ленинградские ученые (А. Д. Александров, Л. В. Канторович), так и начинающие исследователи, читали доклады почти все крупные математики страны, работающие в области дифференциальных уравнений с частными производными и их применений к математической физике. В 60-х годах его гостями были многие знаменитые ученые Европы и США. На семинаре обсуждались новые веяния и достижения в указанных выше областях.

Все это оказалось возможным благодаря энциклопедическим познаниям Владимира Ивановича, его неподдельному интересу ко всему новому и важному, его стилю ведения семинара: доброжелательному и нелицеприятному, но в то же время строгому и высококвалифицированному обсуждению существа излагаемой работы, ее связей с предшествующими работами и ее возможного усовершенствования или дальнейшего развития. Подобные обсуждения приносили пользу и выступавшим с докладами, и их слушателям.

В 50-х годах семинар подготовил новые кадры как для университета, так и для Института математики им. В. А. Стеклова АН СССР. Этому во многом содействовало пребывание на посту ректора университета А. Д. Александрова, который активно поддерживал начинания Владимира Ивановича.

В 1956 г. была создана кафедра математической физики на математико-механическом факультете университета, существенно расширилась и обновилась кафедра математики на физическом, обретя новый статус кафедры математической физики и сделавшись тем самым выпускающей. На последней вводятся новые специальные курсы, и Владимир Иванович сам читает некоторые из них. Она подготовила новую плеяду молодых ученых: В. С. Булдырева, И. А. Молоткова, Л. Д. Фаддеева, Н. Н. Уральцеву, В. А. Солонникова, К. К. Головкина, Б. С. Павлова, В. С. Буслаева, В. И. Дергузова, В. Н. Фомина и многих других, ставших активными участниками семинара. Одни из них остались работать в университете, другие стали сотрудниками ЛОМИ.

На семинаре докладывались оригинальные исследования по линейным краевым задачам для уравнений и систем различных типов, по спектральной теории дифференциальных операторов, математическим проблемам квантовой механики, нелинейным задачам вариационного исчисления, гидродинамики, геометрии, позднее — по строгому обоснованию асимптотик решений задач дифракции и многое другое. Пополнение в семинар стало приходить и с математико-механического факультета: М. З. Соломяк, В. Г. Мазья и др. Создалась новая сильная школа математической физики с широким охватом современных направлений. Прежние, более традиционные или прикладные направления, отпочковываются и сосредоточиваются на семинарах специальных кафедр, в том числе на кафедрах теории упругости и гидроаэромеханики, которые Владимир Иванович передает в это время А. А. Ильюшину и С. В. Валландеру. Последнему передал Владимир Иванович и директорство НИИММа (1957 г.).

В 1952 г. Владимиру Ивановичу пришлось взять на себя заботы по кафедре математического анализа на математико-механическом факультете. В ее ведении были классический и функциональный анализ, теория функций вещественного и комплексного переменного. И здесь Владимир Иванович способствует расширению проблематики кафедры, привлечению новых специалистов и воспитанию новых кадров. При его активном содействии были приглашены на кафедру проф. С. М. Лозинский и проф. Н. А. Лебедев. В 1957 г. Владимир Иванович передает заведование кафедрой С. М. Лозинскому.

В конце 60-х годов вспыхивает новый интерес к его работам 20-х годов, и он курирует работы математиков нового поколения — В. П. Хавина и Н. К. Никольского, посвященные дальнейшему развитию его идей.

Из сказанного видно, какое огромное влияние имел Владимир Иванович на развитие математики и формирование научных кадров в Ленинграде и ряде других городов страны. Под его руководством начал свою научную деятельность И. Н. Векуа, работавший после Ленинграда в Тбилиси, Москве, Новосибирске и создавший свою школу. Владимиру же Ивановичу обязаны своим вхождением в науку и выбором областей исследований В. А. Купрадзе и А. Л. Шагинян, ставшие в дальнейшем ведущими математиками Грузии и Армении. В период образования Сибирского отделения Академии наук СССР в Академгородок переехал академик С. Л. Соболев и многие другие, более молодые, воспитанники Ленинградского университета, являвшиеся или непосредственно учениками Владимира Ивановича, или учениками его учеников. В их числе были Г. И. Марчук (с 1987 г. президент АН СССР), А. С. Алексеев, Е. И. Шемякин, В. Г. Дулов — ныне члены Академии наук СССР, стоящие во главе крупных научных подразделений.

Я не могу перечислить с необходимой полнотой имена известных физиков нашей страны, обязанных Владимиру Ивановичу своим основательным математическим образованием. Их список был бы не менее длинным.

Обратимся теперь к еще одной форме влияния Владимира Ивановича на развитие математических исследований и привлечения к научной работе новых поколений. Оно еще шире выходит за рамки Ленинграда и непосредственного, личного общения с Владимиром Ивановичем. Речь пойдет о его уникальном в своем роде сочинении — пятитомном «Курсе высшей математики». Поначалу он был задуман как учебник-минимум по всему курсу математики для студентов физических факультетов университетов и технических вузов. Он состоял из двух томов, написанных совместно с Я. Д. Тамаркиным (первый том вышел в 1924 г., второй — в 1926 г.). Они содержали аналитическую геометрию, классический анализ для функций одного и многих аргументов, теорию рядов (в их числе ряды Тейлора), теорию обыкновенных дифференциальных уравнений, кратные и криволинейные интегралы, векторный анализ, теорию поля, основы дифференциальной геометрии, ряды Фурье, основные уравнения математической физики. Второй том был снабжен большим числом приложений перечисленных разделов к задачам механики, физики и техники. Книги в полной мере удовлетворяли потребностям вузов того времени.

Вскоре, однако, у Владимира Ивановича созрело другое намерение — создать книги, из которых могли бы черпать знания и сведения как студенты, так и преподаватели и научные работники разных специальностей, причем не только о том, что уже апробировано и вошло прочно в научный обиход, но и о том новом, сегодняшнем, что должно войти в «золотой фонд» науки. Первой реализацией этого намерения явился третий том «Курса высшей математики» (1933 г.), о котором я уже говорила в связи с лекциями Владимира Ивановича в ГОИ по теории групп и теории представления непрерывных групп. Указанный замысел обусловил непрерывную работу Владимира Ивановича над «Курсом» в течение всей его жизни.

После 8-го издания (1937 г.) из первого тома им была исключена аналитическая геометрия (ибо в это время она была уже представлена достаточно полно хорошими учебниками), но зато изложение основ классического анализа было приближено к программе математических факультетов университетов. В 6-м издании второго тома (1937 г.) благодаря сокращению приложений к технике было расширено и углублено изложение теории кратных и криволинейных интегралов (на основе меры Жордана), рядов Фурье и уравнений с частными производными. В 19-м издании второго тома (1965 г.) даны теория меры и теория интегрирования по Лебегу в $R^n$ (это позволило в четвертом томе изложить результаты 40—50-х годов по исследованию разрешимости основных краевых задач для уравнений в частных производных с переменными коэффициентами).

Третий том состоит из двух частей: линейной алгебры и теории функций комплексного переменного с ее богатыми приложениями. Первая часть содержит строгое и красивое изложение теории определителей и систем линейных уравнений, линейных преобразований и квадратичных форм, теории групп и их линейных представлений. В главе по теории групп особое внимание уделяется группе вращений и группе Лоренца.

Весьма богата и вторая часть третьего тома. Главы I—III содержат классическую теорию аналитических функций и ее применения к плоской теории поля. Более того, в них включено много весьма важных приложений, не излагаемых в традиционных курсах теории функций комплексного переменного. К ним относятся, например, задачи дифракции звуковых и упругих волн в плоских средах, метод наискорейшего спуска и метод стационарной фазы, изучение асимптотик различных специальных функций и пр. В последние издания внесены и результаты по исследованию формулы Коши и интегралов Коши с использованием интеграла Лебега. В главе IV излагается теория аналитических функций многих комплексных переменных и функций матриц (опять-таки примечательно, что эти теории были изложены Владимиром Ивановичем уже в 1-м издании 1933 г., когда их роль была ясна лишь немногим специалистам). Главы V и VI посвящены линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с аналитическими коэффициентами и специальными функциями. И эти главы поражают обширностью содержания и вместе с тем строгостью, гармоничностью и доступностью изложения.

Вообще этот том (равно как и последующие два тома) имеет уже монографический характер. В него включены и собственные результаты Владимира Ивановича и результаты из работ других авторов, причем многие доказательства принадлежат Владимиру Ивановичу.

Столь же обширно содержание и четвертого тома. В пяти изданиях он печатался в виде одной книги, а в последнем (шестом) — в двух отдельных. Первое издание вышло в свет перед войной. Оно состоит из четырех глав, каждая из которых включает в себя полный университетский курс по соответствующему предмету.

Первая глава посвящена интегральным уравнениям. В ней изложена теория Фредгольма для уравнений второго рода, уравнений Фредгольма первого рода, уравнений Вольтерра, важнейшие сингулярные интегральные уравнения на всей оси и полуоси. В шестом издании 1974 г. за основу берется пространство $L_2$.

Вторая глава отдана вариационному исчислению. Она содержит и богатый классический материал, отражающий достижения прошлых веков, и результаты нашего века по проблеме нахождения абсолютного экстремума для квадратичных функционалов от функций, зависящих от одной и многих независимых переменных.

В третьей главе излагается общая теория уравнений с частными производными для уравнений первого и более высокого порядка, а также для систем (линейных и нелинейных). Проводится полный анализ (в том числе и решение задачи Коши) для уравнений первого порядка (линейных и нелинейных), доказывается теорема С. Ковалевской для систем, дается интегрирование полных и якобиевых систем, излагаются скобки Пуассона, метод Якоби, канонические системы. Далее классифицируются уравнения второго порядка, излагается теория характеристик, теория качественных свойств решений уравнений различных типов. Много места уделено гиперболическим уравнениям, причем с переменными коэффициентами. Для них выводятся основные неравенства, теоремы единственности. Уже с первого издания вводятся современные понятия обобщенных решений уравнений. В параграфах, посвященных основным системам гидродинамики и теории упругости, проводится анализ кинематических и динамических условий совместности, важный для введения и изучения сильно разрывных решений. Эта глава, как и следующая, содержит много такого материала, который выбирается из оригинальных работ нашего времени и нередко дорабатывается и развивается.

Последняя, четвертая, глава — это по сути дела монография по теории краевых задач (предельных задач, как называет их Владимир Иванович) для линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка всех классических типов. Для обыкновенных дифференциальных уравнений проводится полный спектральный анализ, включая асимптотики собственных значений и собственных функций и исследование сходимости метода Фурье.

Во втором параграфе дается уникальное по полноте изложение теории потенциалов для уравнений Пуассона и Гельмгольца и ее многочисленных применений (в их числе — вывод асимптотики собственных значений для оператора Лапласа в произвольной области). Эта теория, позволяющая установить разрешимость задач Дирихле и Неймана в областях с гладкими границами, дополняется методой Шварца, дающей аналогичные результаты для областей с кусочно-гладкими границами.

В последнем, третьем, параграфе решаются краевые задачи для уравнения теплопроводности, некоторых его обобщений и волнового уравнения. Для первых излагаются методы Фурье и метод Роте, для волнового уравнения проводится анализ сходимости метода Фурье в областях произвольной формы.

В последней, шестой, редакции, четвертый том разбит на две отдельные книги. Вторая посвящена теории разрешимости краевых задач для всех основных типов уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в областях произвольной формы, развитой в конце 40-х — начале 50-х годов нашего века. Их решения находятся в классах функций, имеющих квадратично-суммируемые обобщенные производные, входящие в исследуемое уравнение. Для этого привлекаются и теоремы «чистого» функционального анализа, и свойства ряда функциональных пространств обобщенно-дифференцируемых функций. В рамках этих пространств дается обоснование метода Фурье и различных приближенных методов. Из сказанного видно, сколь полно и исторически последовательно изложена теория дифференциальных уравнений, начиная от достижений прошлых веков и кончая последними десятилетиями.

Не менее всеобъемлющ и пятый том, отданный теории множеств, теории интегрирования (включая интегралы Хеллингера), теории метрических и нормированных пространств и их важнейших представителей — пространств $C(\overline{\Omega})$, $L_p(\Omega)$, $W^l_p(\Omega)$ и др., теории гильбертовых пространств, теории ограниченных и неограниченных операторов в них. Он содержит богатейший материал как по абстрактной теории, так и по ее приложениям к различным разделам анализа и дифференциальным уравнениям. С какой удивительной прозорливостью сделан выбор из того, что публиковалось в то время в многочисленных работах, и с каким мастерством изложен весь этот материал! Доказательства многих предложений и в этом томе принадлежат Владимиру Ивановичу. Первое издание пятого тома вышло в свет в 1947 г., когда в нашей стране не было еще ни одной книги по функциональному анализу, а на Западе были опубликованы лишь две монографии (S. Banach «Théorie des opérations linéaires», 1932 и M. H. Stone «Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis», 1932), посвященные теории линейных операторов и отражающие достижения 20-х годов.

В 1959 г. вышло 2-е издание пятого тома. В нем полнее представлена теория метрических и нормированных пространств и существенно расширен раздел по теории симметрических операторов: здесь изложена теория симметрических неограниченных операторов, теория их расширений, спектральная теория, теория возмущений и др. В этом томе отражены результаты, полученные за время между двумя изданиями. И в нем поражает то, с каким глубочайшим знанием предмета и пониманием перспектив развития теории операторов и ее возможных приложений к задачам математической физики сделан выбор материала и как блестяще и в то же время доступно и систематично он изложен.

За «Курсом высшей математики» Владимира Ивановича закрепилась характеристика энциклопедического. Действительно, он объемлет все главнейшие части анализа, алгебры, дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии, функционального анализа, математической физики. По нему учатся студенты, аспиранты, научные работники, преподаватели. К нему обращаются специалисты-математики и все, кто хочет получить общее, но солидное представление о той или иной части математики или нуждается в той или иной справке. Из него черпают материал и многие авторы учебников, иногда не отдавая себе отчет в том, что он есть плод большой научной переработки и оригинального творческого осмысления материала его автором, а потому на него следует ссылаться как на монографию.

В 1947 г. вышли в свет все пять томов «Курса». В 1948 г. он был отмечен Государственной премией. Как уже было сказано, Владимир Иванович обогащал его новыми достижениями вплоть до конца своей жизни.

Остановимся еще на одной стороне деятельности Владимира Ивановича, в которой он долго еще останется непревзойденным в нашей стране. Речь пойдет об изучении и издании наследия, оставленного выдающимися математиками, жившими и работавшими в России. Этой работе Владимир Иванович уделял много времени в течение всей жизни, и особенно в последние десятилетия. Часто работа, требовавшая для осуществления труда целого научного коллектива специалистов, выполнялась одним Владимиром Ивановичем, причем прекрасно и в предельно короткие сроки. Выше я уже говорила об издании двенадцати мемуаров И. А. Лаппо-Данилевского и издании трудов А. М. Ляпунова. Надо сказать, что Владимир Иванович был знаком с А. М. Ляпуновым, а в конце жизни Ляпунова и дружен с ним.

Под руководством Владимира Ивановича и при его непосредственном участии издано полное собрание сочинений академика А. Н. Крылова (знаменитого корабела), потребовавшее очень большой работы по проверке, корректированию и выявлению архивных материалов. Алексей Николаевич часто прибегал к математическим консультациям Владимира Ивановича, особенно в летнее время, когда они жили неподалеку друг от друга на дачах. Труд, выполненный Владимиром Ивановичем по разбору и изданию неопубликованных исследований И. А. Лаппо-Данилевского, А. М. Ляпунова и А. Н. Крылова, можно сравнить с работой мастера-реставратора, возвращающего людям шедевры других мастеров.

Владимир Иванович являлся многие годы председателем совета Архива АН СССР. В бумагах Д. Бернулли, хранящихся в Архиве Академии наук, он нашел первый вариант «Гидравлики». Д. Бернулли просил Эйлера сжечь эту рукопись после выхода в свет в Базеле улучшенного варианта. Однако Эйлер не счел нужным выполнить просьбу Бернулли, и рукопись сохранилась в России. Владимир Иванович сличил оба экземпляра «Гидравлики» и поместил в конце выполненного под его руководством перевода базельского издания большую статью о научном наследии Д. Бернулли.

С конца 50-х годов Владимир Иванович начал изучать обширный петербургский архив Л. Эйлера. В результате этих изысканий было издано несколько томов трудов Эйлера, в том числе (совместно с Т. Н. Кладо) его переписка и аннотированный указатель работ, насчитывающий 438 страниц.

Владимир Иванович издал и работы М. В. Остроградского, нуждавшиеся как в исправлениях, так и в пояснениях. Им была опубликована переписка А. М. Ляпунова с А. Пуанкаре, Ж. Адамаром и другими иностранными математиками. В связи с юбилейными датами были написаны весьма интересные обзоры работ А. М. Ляпунова, В. А. Стеклова, Н. М. Гюнтера. А сколько глубоких по содержанию и блестящих по форме докладов сделал Владимир Иванович на годовщинах (посмертных или прижизненных) о научном творчестве выдающихся математиков. Эти доклады оставили неизгладимый след в памяти тех, кому довелось их слышать.

Владимир Иванович являл собой редчайший пример ученого, сочетавшего в себе высокую творческую активность с многолетней работой профессионального историка своей науки. Именно это необычное сочетание ученого-исследователя и ученого-историка придает особый интерес его публикациям по истории математики.

Я не знаю официального числа аспирантов и докторантов Владимира Ивановича. В любом случае оно неизмеримо меньше числа людей, для которых он был фактическим научным руководителем или консультантом. Его советами, обширными знаниями и оценками важности того или иного направления пользовались многие ученые. Владимир Иванович старался помочь каждому, кто обращался к нему, независимо от того, кто он. Стол его постоянно был завален статьями разных авторов, которые предназначались для опубликования в «Докладах АН СССР» или других математических журналах. При этом он внимательно читал их и, если была необходимость, то помогал улучшить. Бывали и такие случаи, когда работа полностью переделывалась с помощью Владимира Ивановича.

Выше я назвала имена (в основном только ленинградских) известных математиков разных специальностей, на научную деятельность которых Владимир Иванович оказал плодотворное влияние своими лекциями, научными семинарами. Но не только им были важны советы и научные оценки Владимира Ивановича. К его советам прибегали и маститые ученые — В. А. Фок, А. А. Марков, А. Д. Александров, Л. В. Канторович, Ю. В. Линник, многие специалисты по теории упругости и гидроаэродинамике. Они делились с Владимиром Ивановичем своими достижениями в областях, которые не входили в поле его деятельности. И обсуждение этих результатов с Владимиром Ивановичем было обоюдоинтересным и полезным.

Я уже говорила, что Владимир Иванович был одним из главных организаторов Физико-математического общества в Ленинграде в 20-х годах. В 1957 г. по его инициативе начал работать общегородской математический семинар, на основе которого в 1958 г. было возрождено Ленинградское математическое общество. Все важные и сложные проблемы развития и организации научной работы по математике и механике в Ленинградском университете были в поле его зрения. Он находил справедливые и мудрые решения их и, не жалея сил, добивался их реализации.

80-летие Владимира Ивановича широко отмечалось общественностью, и В. И. Смирнову было присвоено звание Героя Социалистического Труда.

Владимира Ивановича волновали судьбы как состоявшегося ученого, так и молодого человека, мечтающего поступить в институт. Он оказывал деятельную поддержку не только восходящим ученым, но и людям, попавшим в беду. Он помогал из своих средств людям, оказавшимся в затруднительном материальном положении. На телефонные звонки его родные никогда не задавали вопроса: «Кто спрашивает Владимира Ивановича?», и если он был дома, то непременно подходил к телефону и вникал в интересы говорящего. Такую же отзывчивость встречали и все те, кто обращался к нему вне его дома.

Я постаралась рассказать о профессиональной жизни и деятельности Владимира Ивановича. Они, конечно, дают представление и о личности Владимира Ивановича. Но раскрыть ее полнее и глубже мог бы только человек, обладающий талантом, знаниями и душевным богатством самого Владимира Ивановича. Ведь жизнь Владимира Ивановича протекала в двух столетиях: он знал многих крупных ученых — естествоиспытателей и гуманитариев, живших в Петербурге в начале нашего столетия и прославившихся еще в XIX в. К их числу принадлежали его учителя — А. М. Ляпунов и В. А. Стеклов, научное общение с которыми переросло в дружбу. Еще более тесные и продолжительные дружеские узы связали Владимира Ивановича со старшими его коллегами, тоже выдающимися учеными — С. Н. Бернштейном и Н. М. Гюнтером.

Я уже упоминала имена ученых-естествоиспытателей, с которыми он общался на научном или педагогическом поприще. На самом деле их было значительно больше, причем все они питали к Владимиру Ивановичу чувство глубокого уважения и признательности. Но еще более широк был круг людей, с которыми его связывали интересы в области музыки, искусства, литературы, истории, археологии и других гуманитарных наук.

Владимир Иванович обладал большой музыкальной памятью, свободно играл с листа, всю жизнь изучал классическую музыку и следил за современной. Он слышал практически всех знаменитых дирижеров, пианистов, скрипачей и через десятилетия мог рассказывать об особенностях того или иного исполнения. Он увлекался оперным театром и присутствовал на всех лучших представлениях Мариинского театра. Этому в немалой степени содействовал один из его братьев, Борис Иванович, который профессионально занимался театром, служил некоторое время в Мариинском театре и был дружен со многими артистами, выступавшими на его сцене. Спустя уже полстолетия Владимир Иванович восторженно рассказывал, например, о своих впечатлениях о замечательных дореволюционных постановках опер Вагнера и Римского-Корсакова, из которых он не пропустил ни одной. Он помнил все лучшие арии из этих опер и мог напеть их. Владимир Иванович часто приходил в филармонию или оперу с партитурой и следил за тончайшими нюансами исполнения.

Он был лично знаком со многими музыкантами, и общение с ними доставляло ему большую радость. На его даче в Комарово регулярно устраивались музыкальные вечера. Неоднократно на них бывал Д. Д. Шостакович, и они с Владимиром Ивановичем играли в четыре руки. Туда же приезжали известный органист И. А. Браудо, дирижер и знаток музыкального наследия Н. С. Рабинович, профессор Н. О. Голубовская, чье исполнение фортепьянных произведений Моцарта Владимир Иванович высоко ценил.

Владимир Иванович любил играть в четыре руки с Д. К. Фаддеевым, профессионально владеющим инструментом. С ним они неоднократно проигрывали фортепьянные переложения симфоний Малера (когда их почти не исполняли в филармонии), квартетов Бетховена и многие другие произведения.

На музыкальных вечерах бывали и наши ведущие математики из Москвы — П. С. Александров и А. Н. Колмогоров. Их посетили также Р. Курант с женой и К. О. Фридрихс во время их приезда из Америки. Этот дом притягивал и своим уютом, созданным Еленой Прокофьевной, женой Владимира Ивановича.

Интересен круг литературных знакомых Владимира Ивановича. Из них мне особо запомнился Евгений Львович Шварц — не только талантливый писатель, но и блестящий собеседник. Его рассказы-экспромты смешили всех до слез, а сатирические зарисовки вместе с улыбкой вызывали и грустные вздохи. «Как будто погостил у солнышка»,— сказал мне однажды Евгений Львович, возвращаясь домой от Владимира

Ивановича. Высказывание, примечательное в устах этого далеко не сентиментального человека. Столь же необычной была и фраза в устах Антонины Николаевны Изергиной (жены И. А. Орбели, директора Эрмитажа): «Иду, как с причастия»,— произнесенная после одного из визитов к Смирновым. Надо было, конечно, знать эту остроумнейшую женщину с языком, острым, как бритва, чтобы понять, сколь глубокое воздействие оказывал Владимир Иванович на окружающих. А сам Владимир Иванович очень ценил ее превосходные знания живописи, особенно французской, ее ум и артистическое умение рассказать о том, что происходит в сфере ее деятельности (она всю жизнь проработала в Эрмитаже и в последние годы была заведующей картинной галереей Эрмитажа).

Владимир Иванович обладал феноменальной памятью. Он помнил даже имена и отчества людей, с которыми когда-либо имел дело. Я часто обращалась к нему с вопросами о том или ином человеке (авторе или персонаже прочитанного сочинения), и нередко вместо длинного описания Владимир Иванович цитировал соответствующее высказывание этого человека, дававшее исчерпывающий ответ на поставленный вопрос. Вообще Владимир Иванович ценил краткость и точность, и сам обладал редкой способностью игнорировать несущественное, случайное, умением выделять главное, глубинное, из чего следует исходить в оценке событий. В этом ему помогали и обширные знания по философии, истории и литературе. Стоит сказать для понимания мировоззрения Владимира Ивановича, что он ставил Достоевского выше, чем Льва Толстого, что Тютчев был ему ближе Пушкина (хотя, конечно, он отдавал должное поэтическому гению Пушкина), что вклад Карамзина в развитие культуры России он считал более значимым, чем вклад Катенина и Чаадаева.

По духу Владимир Иванович был просветителем-гуманистом, несшим людям свет и тепло, нужные каждому, особенно в трудные моменты жизни.

Во Владимире Ивановиче удивительным образом сочетались большая человечность, мягкость и чуткость с энциклопедической образованностью, талантом, принципиальностью, мужеством. То, как он жил и работал, его направленность — как можно больше дать и меньше взять — действовали на окружающих сильнее любых приказов и благих наставлений. Научное и нравственное влияние Владимира Ивановича ощущается и поныне, и люди, знавшие его, хранят о нем светлую память, любят его и почитают.

*О. А. Ладыженская*

Часть первая

# РАБОТЫ ПО КОМПЛЕКСНОМУ АНАЛИЗУ

## О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ФУНКЦИЙ, РЕГУЛЯРНЫХ ВНУТРИ КРУГА*

1. Пусть $f(z)$ — функция, регулярная в круге $K(|z|<1)$.

В статье рассматриваются некоторые вопросы о связи свойств функции $f(z)$ внутри круга и свойств ее граничных значений на окружности $C$ $(|z|=1)$. В качестве отправной точки мы принимаем один класс функций, рассмотренный Ф. Риссом в его работе „Ueber die Randwerte analytischer Funktionen“ (Math. Zeitschr. Bd. 18. Heft 1/2, 1923), и изложим сначала известные свойства функций этого класса, необходимые в дальнейшем.

Будем говорить, что функция $f(z)=u(re^{i\varphi})+iv(re^{i\varphi})$, регулярная в круге $K$, принадлежит классу $H_\delta$, $\delta>0$, если интегралы

$$\int_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|^\delta\,d\varphi,$$

возрастающие вместе с $r$, остаются ограниченными при $r\to 1$.

Если $f(z)$ принадлежит $H_\delta$, то она имеет почти всюду на $C$ некасательные граничные значения $f(e^{i\varphi})$, и

$$\lim_{r\to 1}\int_M |f(re^{i\varphi})|^\delta\,d\varphi=\int_M |f(e^{i\varphi})|^\delta\,d\varphi, \tag{1}$$

где $M$ — произвольное измеримое подмножество интервала $(0,2\pi)$. Кроме того,

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})-f(e^{i\varphi})|^\delta\,d\varphi=0. \tag{2}$$

---

* Sur les valeurs limites des fonctions régulières à l'intérieur d'un cercle.— Журн. Ленингр. физ.-мат. о-ва, t.II, fasc 2, 1928, p. 22—37.

Допустим, что $f(z)$ имеет бесконечно много нулей: $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ Тогда бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ сходится, и функция

$$b(z) = \prod_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \frac{1 - z/\alpha_n}{1 - \overline{\alpha}_n z}, \tag{3}$$

где $\overline{\alpha}_n$ — число, комплексно-сопряженное с $\alpha_n$, которую мы будем называть *функцией Бляшке*, обладает свойствами: $|b(z)| < 1$ в точках круга $K$ и $b(z)$ имеет почти везде на $C$ предельные значения, равные по модулю единице. Исходную функцию $f(z)$ можно записать в виде

$$f(z) = b(z)\, g(z), \tag{4}$$

где $g$ не обращается в нуль в $K$ и также принадлежит $H_\delta$. Эту процедуру, приводящую к формуле (4), будем называть выделением функции Бляшке функции $f(z)$. Если $f(z)$ имеет конечное множество нулей, произведение (3) также будет конечным.

Если функция $f(z)$ принадлежит классу $H_1$, то из формулы (2) следует, что она представима своими интегралом Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi} - z} d(e^{i\varphi}) \tag{5}$$

и интегралом Пуассона

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi. \tag{6}$$

**2.** Изложим теперь две теоремы, которые представляются нам важными для теории функций.

**Теорема 1.** *Если $f(z)$ принадлежит некоторому классу $H_\delta (\delta > 0)$ и если функция $|f(e^{i\varphi})|^\lambda$, где $\lambda > \delta$, суммируема, то $f(z)$ принадлежит классу $H_\lambda$.*

Выделяя функцию Бляшке, запишем формулу (4). Функция $|g(e^{i\varphi})|^\lambda$, очевидно, суммируема, и достаточно доказать, что $g(z)$ принадлежит классу $H_\lambda$. Таким образом, доказывая теорему, мы можем считать, что $f(z)$ не обращается в нуль в круге $K$. Заменяя теперь $f(z)$ на $[f(z)]^{1/\delta}$, видим, что достаточно рассмотреть случай $\delta = 1$, $\lambda > 1$. Далее, если $f(z)$ принадлежит $H_1$, то имеет место формула (6) и гармонические функции $u(re^{i\theta})$, $v(re^{i\theta})$ представимы интегралами Пуассона.

Применяя к этим интегралам известное неравенство Гёльдера, получаем

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})|^\lambda d\varphi \leqslant \int_0^{2\pi} |u(e^{i\varphi})|^\lambda d\varphi, \quad \int_0^{2\pi} |v(re^{i\varphi})|^\lambda d\varphi \leqslant \int_0^{2\pi} |v(e^{i\varphi})|^\lambda d\varphi,$$

откуда и следует, что $f(z)$ принадлежит классу $H_\lambda$.

**Теорема 2.** *Если $f(z)$ выражается интегралом типа Коши*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\psi(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi} - z} d(e^{i\varphi}) \tag{7}$$

*от некоторой суммируемой функции $\psi(e^{i\varphi})$ или интегралом типа Коши—Стилтьеса*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{dF(\varphi)}{e^{i\varphi} - z} \tag{8}$$

*от некоторой функции ограниченной вариации $F$, то $f(z)$ принадлежит классам $H_\delta$ при всех $\delta < 1$.*

Обратимся к функциям, представимым формулой (7). Очевидно, что достаточно рассмотреть случай, когда $\psi(e^{i\varphi})$ есть вещественная суммируемая функция, такая, что $\psi(e^{i\varphi}) \geqslant m > 0$, где $m$ — некоторое число. Соответствующая функция $u(re^{i\varphi})$ представляется интегралом Пуассона, и поэтому $u(re^{i\varphi}) \geqslant m > 0$. Отсюда следует, что $f(z)$ отлична от нуля в круге $K$ и что интегралы

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})| d\varphi \tag{9}$$

остаются ограниченными при $r \to 1$. На самом деле, в рассматриваемом случае эти интегралы не зависят от $r$ и равны $2\pi u(0)$. Остается лишь доказать, что при $0 < \delta < 1$ ограничены интегралы

$$\int_0^{2\pi} |v(re^{i\varphi})|^\delta d\varphi. \tag{10}$$

Рассмотрим модуль $R(re^{i\varphi})$ и аргумент $\Phi(re^{i\varphi})$ функции $f(z)$. Можно считать, что $-\pi/2 < \Phi(re^{i\varphi}) < \pi/2$. Теперь обратимся к функции

$$[f(z)]^\delta = u_\delta(re^{i\varphi}) + iv_\delta(re^{i\varphi}) = R^\delta \cos\delta\Phi + iR^\delta \sin\delta\Phi,$$

регулярной в круге $K$. При фиксированном $\delta$ $(0 < \delta < 1)$ и подходящей константе $k$ справедливо неравенство $\cos\delta\Phi > k > 0$. Из него следует, что

$$|v(re^{i\varphi})|^{\delta} \leqslant R^{\delta} \leqslant (1/k)\, u_{\delta}(re^{i\varphi}),$$

и интегралы (10), очевидно, остаются все время меньше, чем $(2\pi/k)\, u_{\delta}(0)$, что и требовалось доказать.

В случае формулы (8) нужно отделить вещественную и мнимую части функции $F$ и представить их как разности возрастающих функций. Функция $u(re^{i\varphi})$ будет снова положительной, интегралы (9) останутся ограниченными и доказательство, изложенное выше, сохранится.

**3.** Отметим теперь некоторые непосредственные следствия доказанных теорем.

1. *Если $f(z)$ представима интегралом типа Коши или типа Коши—Стилтьеса и если ее граничные значения суммируемы, то она представима своим интегралом Коши (формула* (5)).

Отсюда, среди прочего, следует, что если $f(z)$ представима своим интегралом Коши, то она принадлежит $H_1$ и представима интегралом Пуассона*.

2. *Если ряд, сопряженный некоторому ряду Фурье—Лебега, не есть ряд Фурье—Лебега, то его обобщенная сумма является функцией, несуммируемой в смысле Лебега.* Мы называем ряды Фурье суммируемых функций рядами Фурье—Лебега.

Интегрируя по частям в формуле (8) и учитывая существование граничных значений $f(e^{i\varphi})$, немедленно приходим к известному результату**: *ряд, полученный почленным дифференцированием ряда Фурье функции ограниченной вариации, так же как и сопряженный ряд, суммируемы методом Пуассона.*

Отметим еще одно обстоятельство, связанное с теоремой 2. Эта теорема утверждает, что из формул (7) и (8) следует принадлежность функции $f(z)$ всем классам $H_{\delta}$, $\delta < 1$. Обратное, однако, неверно, как показывает следующий пример:

$$f(z) = \frac{\log(1-z)}{1-z} = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) z^n.$$

Эта функция принадлежит всем классам $H_{\delta}$ $\delta < 1$, но она не представима формулами (7) или (8), так как ее коэффициенты Маклорена не ограничены.

---

* Это утверждение получено Г. Фихтенгольцем с помощью теоремы единственности для аналитических функций (Fundamenta Mathematicae, t. 13, 1929).

** А. И. Плеснер. Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen. Giessen, 1923.

4. Сделаем несколько дополнительных замечаний о функциях $f(z)$, представимых интегралами типа Коши (7). Запишем (7) в виде

$$f(z)=\int_0^{2\pi} \frac{\pi_1(\varphi)+i\pi_2(\varphi)}{e^{i\varphi}-z}\, d(e^{i\varphi}), \tag{11}$$

где функции $\pi_1(\varphi)$, $\pi_2(\varphi)$ вещественны и суммируемы. Введем теперь новое понятие, которое потребуется нам впоследствии. Пусть $\lambda(\varphi)$ — вещественная суммируемая функция на интервале $(0,2\pi)$. Если тригонометрический ряд, сопряженный с рядом Фурье этой функции, снова является рядом Фурье суммируемой функции, то мы обозначим эту последнюю символом $\overline{\lambda}(\varphi)$ и будем говорить, что функция $\lambda(\varphi)$ имеет сопряженную функцию $\overline{\lambda}(\varphi)$. Отметим два очевидных факта. Чтобы интеграл типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\nu(\varphi)-i\mu(\varphi)}{e^{i\varphi}-z}\, d(e^{i\varphi})$$

представлял тождественный нуль в круге $K$, необходимо и достаточно, чтобы $\mu(\varphi)$ была функцией, сопряженной с $\lambda(\varphi)$, и чтобы ряды Фурье этих функций не содержали свободных членов. Кроме того, если имеет место формула (11), то функция $f(z)$ в том и только в том случае представима своим интегралом Коши (формула (5)), когда $\pi_1(\varphi)$ а $\pi_2(\varphi)$ обладают сопряженными функциями.

Обратимся снова к функциям $f(z)$, представимым формулой (11). Если ввести абсолютно непрерывную функцию

$$\pi(\varphi)=\int_0^{\varphi} [\pi_1(\tau)+i\pi_2(\tau)]\, d(e^{i\tau})$$

и положить $\pi(2\pi)=\alpha 2\pi i$, то можно переписать формулу (11) в виде

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\pi(\varphi)-i\alpha\varphi}{(e^{i\varphi}-z)^2}\, d(e^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\omega_1(\varphi)+i\omega_2(\varphi)}{(e^{i\varphi}-z)^2}\, d(e^{i\varphi}),$$

где $\omega_1(\varphi)$ и $\omega_2(\varphi)$ суть абсолютно непрерывные периодические функции.

Рассмотрим первообразную функции $f(z)$:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\omega_1(\varphi)+i\omega_2(\varphi)}{e^{i\varphi}-z}\, d(e^{i\varphi}).$$

Очевидно, что эта функция также представима своим интегралом Коши, так как абсолютно непрерывные функции $\omega_1(\varphi)$ и $\omega_2(\varphi)$ обладают сопряженными*; однако функция $\omega_1(\varphi)+ + i\omega_2(\varphi)$, вообще говоря, отлична от граничных значений $F(e^{i\varphi})$. Все же в любом случае имеет место формула

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\omega_1(\varphi)+i\omega_2(\varphi)-F(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi}-z}\,d(e^{i\varphi}),$$

т. е. *существует такая вещественная суммируемая функция* $\sigma(\varphi)$, *обладающая сопряженной функцией* $\bar{\sigma}(\varphi)$, *что функция*

$$F(e^{i\varphi})+\sigma(\varphi)-i\bar{\sigma}(\varphi)$$

*абсолютно непрерывна и периодична. Легко видеть, что это условие не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы функция* $f(z)$ *представлялась интегралом типа Коши.*

Заметим, что абсолютная непрерывность самих граничных значений есть необходимое условие представимости функции $f(z)$ своим интегралом Коши (формула (5))**. Рассмотрим пример функции $f(z)$, для которой имеет место представление (11), а не (5):

$$f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}(z^n/\log n)^{***}.$$

В этом случае граничные значения $F(e^{i\varphi})$ оказываются неограниченной функцией и представляются рядом

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\cos n\varphi+i\sin n\varphi}{n\log(n-1)},$$

равномерно сходящимся вне любой окрестности точки $\varphi=0$. Кроме того,

$$\pi_1(\varphi)\sim\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{\log n};\quad \pi_2(\varphi)=0.$$

Отсюда следует, что $\alpha=0$ и что

---

* Легко доказать, что $F(z)$ принадлежит всем классам $H_\delta$, $\delta>0$.

** F. & M. Riesz, IV Congr. Des Math. Scandin. à Stockholm, 1916.

*** См. Г. Фихтенгольц, цит. соч.

$$\pi(\varphi) = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)\log n} - \frac{\cos\varphi}{\log 2} - \frac{\cos 2\varphi}{2\log 3} +$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n}\left[\frac{1}{\log(n-1)} - \frac{1}{\log(n+1)}\right] + i\left\{\frac{\sin\varphi}{\log 2} +\right.$$

$$\left.+\frac{\sin 2\varphi}{2\log 3} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n}\left[\frac{1}{\log(n-1)} + \frac{1}{\log(n+1)}\right]\right\}.$$

**5.** Установим формулу, которая дает параметрическое представление произвольной регулярной функции, принадлежащей какому-нибудь классу $H_\delta$, $\delta > 0$. Сначала сделаем одно предварительное замечание. Пользуясь теоремой Гарнака о возрастающих последовательностях гармонических функций и теоремой Гаусса о средних значениях (гармонических же функций), легко показать, что функция $f(z)$ принадлежит классу $H_\delta$ в том и только в том случае, когда найдется гармоническая функция в круге $K$, мажорирующая в каждой точке функцию $|f(z)|^\delta$. Отсюда немедленно следует, что при конформном отображении круга $K$ на себя функции класса $H_\delta$ преобразуются в функции того же класса.

Перейдем теперь к вопросу об аналитических представлениях положительных функций. Известно, что если $f(z)$ принадлежит классу $H_\delta$, то функции $|f(e^{i\varphi})|^\delta$ и $\log|f(e^{i\varphi})|$ суммируемы*. Обратно, если $p(\varphi) \geqslant 0$ и если функции $p(\varphi)^\delta$ и $\log p(\varphi)$ суммируемы, то существует бесконечное множество функций класса $H_\delta$, чьи граничные значения по модулю совпадают почти везде с $p(\varphi)$, и среди них существует одна, большая по модулю всех остальных внутри круга $K$. (Мы считаем несущественным умножение функции на константу, равную по модулю единице.) Szegö в статье „Ueber die Randwerte der analytischen Funktionen“ (Math. Ann., Bd 84, Heft3/4, 1921) нашел вид этой максимальной функции с помощью теории тёплицевых форм. Мы сделаем это без использования последних и дадим общую формулу для всех упомянутых выше функций, принадлежащих классу $H_\delta$.

Рассмотрим сначала частный случай $\delta = 1$ и $p(\varphi) \equiv 1$. Если функция $f(z)$ принадлежит $H_1$ и ее граничные значения равны почти всюду по модулю единице, то $f(0) = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})\,d\varphi$ и $|f(0)| \leqslant 1$. Сделав конформное преобразование круга $K$

* F. Riesz. Acta Hungarica Universit. Francisco-Joseph, t. I, fasc. II, 1922/23.

на себя, переводящее в нуль наперед заданную точку круга, и напомнив, что функция $f(z)$ при таком преобразовании остается в классе $H_1$, получим $|f(z)| \leqslant 1$ всюду в $K$. Более того, легко видеть, что равенство здесь невозможно, не считая случая, когда $f(e^{i\varphi})$ почти всюду равна некоторой постоянной. В последнем случае функция $f(z)$ представима, конечно, своим интегралом Коши, сводящимся к той же постоянной.

Пусть теперь $\delta = 1$ и $p(\varphi) \geqslant m > 0$. Докажем, что искомая максимальная функция имеет вид

$$D(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log p(x) \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z} dx. \tag{12}$$

Очевидно, что $D(z)$ принадлежит классу $H_1$. Замечая, что функция $1/p(\varphi)$ суммируема, и используя неравенство Иенсена, получаем, что

$$\int_0^{2\pi} |D^{-1}(re^{i\varphi})| d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{p(x)} dx,$$

т. е. что $D^{-1}(z)$ также принадлежит классу $H_1$. Заметим, кроме того, что если функция $f(z)$ имеет нули в круге $K$, то, выделяя функцию Бляшке $b(z)$ по формуле (4), получим функцию $g(z)$, имеющую почти всюду граничные значения, равные по модулю $|f(e^{i\varphi})|$, но в круге $K$ бо́льшую по модулю, чем $|f(z)|$. Поэтому при отыскании максимальной функции $f(z)$ можно считать, что она не обращается в нуль в круге $K$. Функция $\sqrt{f(z) D^{-1}(z)}$ также принадлежит $H_1$ и имеет граничные значения, почти всюду равные по модулю единице. Из предыдущего следует, что $|f(z)| \leqslant |D(z)|$; более того, равенство может иметь место лишь в случае $f(z) = cD(z)$, $|c| = 1$. Следовательно, $D(z)$ и является (единственной) максимальной функцией. Сохраняя условие $\delta = 1$, рассмотрим теперь общий случай неотрицательной суммируемой функции $p(\varphi)$ с суммируемым $\log p(\varphi)$. Введем вспомогательные функции $p_m(\varphi)$, равные $p(\varphi)$ при $p(\varphi) \geqslant m$ и равные $m$ при $p(\varphi) < m$. Положим

$$D_m(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log p_m(x) \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z} dx.$$

Функция $D_m(z)$ и $D_m^{-1}(z)$ принадлежат $H_1$. Функция $\sqrt{f(z) D_m^{-1}(z)}$ также лежит в $H_1$ и имеет граничные значения, не превосходящие почти всюду по модулю единицы. Как и в случае $p(\varphi) \equiv 1$, заключаем, что

$$|f(z)| \cdot |D_m^{-1}(z)| \leqslant 1,$$

т. е. что

$$|f(z)| \leqslant \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log p_m(x) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2} dx,$$

где $z = re^{i\theta}$. Переходя к пределу при $m \to 0$, получаем для функции (12)

$$|f(z)| \leqslant |D(z)|.$$

Остается рассмотреть лишь вопрос о знаке равенства в этом неравенстве. Но частное $f(z)/D(z)$ ограничено и принадлежит $H_1$, и, как уже было показано, равенство может иметь место лишь в случае $f(z) = cD(z)$, $|c| = 1$.

Общий вид функций, имеющих заданный модуль граничных значений $p(\varphi)$, можно дать в виде произведения трех функций

$$f(z) = D(z)\, b(z)\, \sigma(z), \tag{13}$$

где $D(z)$ есть уже определенная максимальная функция, $b(z)$ — функция Бляшке, а функция $\sigma(z)$ такова, что $0 < |\sigma(z)| \leqslant 1$ в круге $K$, и имеет граничные значения, почти всюду по модулю равные единице. Рассмотрим регулярную функцию $\log \sigma(z)$. Ее вещественная часть гармонична и отрицательна в круге $K$. Такая функция может быть представлена интегралом Пуассона—Стилтьеса*

$$\log|\sigma(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2} d\psi(x)$$

некоторой убывающей функции $\psi(x)$, имеющей почти всюду производную, равную нулю. Сама функция $\sigma(z)$ примет вид

$$\sigma(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z} d\psi(x). \tag{14}$$

Обратно, любая функция $\psi(x)$ с названными выше свойствами порождает по формуле (14) функцию $\sigma(z)$, обладающую требуемыми качествами.

* См. Г. Фихтенгольц, цит. соч.

Это позволяет заключить, что любая функция класса $H_1$ имеет вид (13); независимыми параметрами такой функции являются: 1) функция $p(x)$, входящая в формулу (12); 2) нули $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, по которым строится функция $b(z)$; 3) функция $\psi(x)$, входящая в формулу (14).

Сформулируем еще раз требования, которым должны удовлетворять эти параметры: 1) функция $p(x)$ неотрицательна, функции $p(x)$ и $\log p(x)$ суммируемы; 2) множество нулей $\alpha_n$ конечно или бесконечно, причем в последнем случае произведение $\prod_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сходится; 3) функция $\psi(x)$ убывает и имеет почти всюду производную, равную нулю. Параметрическое представление функций класса $H_\delta$ такое же; единственное отличие в том, что требование суммируемости функции $p(x)$ заменяется требованием суммируемости $|p(x)|^\delta$.

**6.** Найденное параметрическое представление функций классов $H_\delta$ тесно связано с вопросом об аналогичном представлении функций, регулярных в круге $K$ и таких, что интегралы

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi \tag{15}$$

остаются ограниченными при $r \to 1$; здесь символ $\log^+ a$ означает $\log a$ при $a \geqslant 1$ и нуль при $a < 1$. Назовем множество таких функций классом $(A)$. Известно, что если функция $f(z)$ класса $(A)$ имеет бесконечно много нулей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, то бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ сходится*, так что можно выделить функцию Бляшке и написать формулу (4).

Легко проверить, что ограниченность интегралов (15) эквивалентна аналогичному условию для интегралов

$$\int_0^{2\pi} |\log |f(re^{i\varphi})|| \, d\varphi.$$

Отсюда немедленно следует, что если $f(z)$ принадлежит классу $(A)$, то и функция $g(z)$ из формулы (4) обладает этим свойством, т. е. что интегралы $\int_0^{2\pi} |\log |g(re^{i\varphi})|| \, d\varphi$ остаются ограниченными. Далее известно**, что свойство ограниченности интегралов $\int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})| \, d\varphi$ является необходимым и достаточным

---

* A. Ostrowski. Acta Hungarica Universit. Francisco-Joseph, t. I, fasc. II, 1922/23.

** Г. Фихтенгольц, цит. соч.

для того, чтобы гармоническая функция $u(re^{i\varphi})$ могла быть представлена интегралом Пуассона—Стилтьеса

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - x) + r^2}\, d\omega(x)$$

некоторой функции ограниченной вариации $\omega(x)$. Следовательно, $g(z)$ имеет вид

$$g(z) = c \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z}\, d\omega(x), \tag{16}$$

где $\omega(x)$ — вещественная функция ограниченной вариации. Обратно, если $g(z)$ задана формулой (16), то $g(z)$ и $f(z)$ принадлежат классу $(A)$, так что параметрическое представление функций класса $(A)$ дается формулой

$$f(z) = b(z) \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z}\, d\omega(x), \tag{17}$$

где $b(z)$ есть функция Бляшке, а $\omega(x)$ — произвольная функция ограниченной вариации. Запишем $\omega(x)$ как разность двух убывающих функций:

$$\omega(x) = \omega_1(x) - \omega_2(x). \tag{18}$$

Тогда формула (17) превратится в представление

$$f(z) = f_1(z)/f_2(z), \tag{19}$$

где функции

$$f_1(z) = b(z) \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z}\, d\omega_1(x),$$

$$f_2(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z}\, d\omega_2(x)$$

не превосходят по модулю единицы и $f_2(z)$ не обращается в нуль в круге $K$. Обратно, если $f(z)$ может быть представлена как отношение (19) функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ с отмеченными выше свойствами, то нетрудно видеть, что $f(z)$ принадлежит классу $(A)$. Следовательно, необходимым и достаточным условием принадлежности функции $f(z)$ классу $(A)$ является возможность представления (19) с указанными свойствами функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Это — известная теорема F. & R. Nevanlinna (Acta Soc. Sc. Fennicae, t. 4, 1922, pp. 1—46)*.

Заканчивая, отметим, что функция ограниченной вариации может быть представлена в виде (18) бесконечно многими способами. Если мы возьмем функцию $\omega_2(x)$, равную полной вариации функции $\omega(x)$ на промежутке $(0, x)$, то функция $f_2(z)$ из формулы (19) будет *максимальной* по модулю внутри круга $K$.

**7.** Используя результаты предыдущего параграфа, легко доказать следующую теорему, указанную Зигмундом в его статье „Sur les fonctions conjuguées" (Fundamenta Mathematicae, t. XIII, 1929).

Пусть $\psi(x)$ — положительная функция такая, что $\psi(x)/x \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Если значения $f(e^{i\varphi})$ некоторой голоморфной при $|z| < 1$ функции $f(z)$ интегрируемы со степенью $\delta > 0$ и если, кроме того, интегралы

$$\int_0^{2\pi} \psi(\log^+ |f(re^{i\varphi})|)\, d\varphi$$

ограничены при $r \to 1$, то интегралы

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\delta d\varphi$$

также остаются ограниченными.

Из условий теоремы немедленно следует, что $f(z)$ принадлежит классу $(A)$. Предположим сначала, что эта функция не обращается в нуль в круге $|z| < 1$. Тогда

$$f(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z}\, d\omega(x), \tag{20}$$

где функция $\omega(x)$ вещественна и имеет ограниченную вариацию. Полагая

$$u(re^{i\varphi}) = \log |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - x) + r^2}\, d\omega(x),$$

получаем, как известно,

$$\omega(x) = \lim_{r \to 1} \int_0^x u(re^{i\varphi})\, d\varphi.$$

* Наши библиотеки не располагают названным изданием и, к сожалению, я не имел возможности прочесть этот мемуар, так что метод доказательства, использованный этими авторами, мне не известен.

Обозначим символом $u^+(re^{i\varphi})$ функцию, равную $u(re^{i\varphi})$ при $u(re^{i\varphi}) \geqslant 0$ и нулю при $u(re^{i\varphi}) < 0$; функция $u^-(re^{i\varphi})$ определяется аналогично. Рассмотрим функцию

$$\omega_1(x) = \lim_{r\to 1} \int_0^x u^+(re^{i\varphi})\, d\varphi.$$

Согласно известной теореме де ла Валле-Пуссена неубывающая функция $\omega_1(x)$ абсолютно непрерывна. Рассмотрим теперь невозрастающую функцию

$$\omega_2(x) = \omega(x) - \omega_1(x) = \lim_{r\to 1} \int_0^x u^-(re^{i\varphi})\, d\varphi$$

и выделим абсолютно непрерывную и сингулярную составляющие. Тогда функция $\omega(x)$ запишется как сумма трех функций. Заменяя $\omega(x)$ в формуле (20) этой суммой, получаем

$$f(z) = \exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(x)\,\frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z}\,dx\,\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z}\,d\omega_3(x), \tag{21}$$

где функция $\omega_3(x)$ не возрастает и имеет почти всюду производную, равную нулю, а функция $e^{\delta q(x)}$ суммируема (по условиям теоремы). Из формулы (21) следует, что $f(z)$ принадлежит классу $H_\delta$, что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что $f(z)$ имеет нули, и выделим функцию Бляшке $b(z)$, так что

$$f(z) = b(z)\, q(z).$$

Используя ту же теорему де ла Валле-Пуссена, находим

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\log^+|g(e^{i\varphi})|\,d\varphi, \tag{22}$$

и далее из неравенства $|b(z)| < 1$ $(|z| < 1)$

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} \log^+|g(re^{i\varphi})|\,d\varphi \geqslant \int_0^{2\pi}\log^+|g(e^{i\varphi})|\,d\varphi. \tag{23}$$

Обозначим $b_n(z)$ произведение первых $n$ сомножителей произведения (3), представляющего функцию $b(z)$, и положим

$$g_n(z) = f(z)/b_n(z).$$

*) Trans. AMS, v.16 (1915), p. 451

Очевидно, что $|b_n(z)| < 1$ при $|z| < 1$ и что $|b_n(re^{i\varphi})| \to 1$ равномерно по $\varphi$, когда $r \to 1$. Поскольку интегралы

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi$$

возрастают при возрастании $r$, получим

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |g_n(re^{i\varphi})| \, d\varphi = \lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi,$$

и далее по формуле (22)

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |g_n(re^{i\varphi})| \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \log^+ |g(re^{i\varphi})| \, d\varphi,$$

откуда следует

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |g_n(re^{i\varphi})| \, d\varphi \leqslant \int_0^{2\pi} \log^+ |g(re^{i\varphi})| \, d\varphi$$

при $r < 1$ и, переходя к пределу,

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |g(re^{i\varphi})| \, d\varphi \leqslant \int_0^{2\pi} \log^+ |g(e^{i\varphi})| \, d\varphi.$$

Это неравенство и неравенство (23) показывают, что

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |g(re^{i\varphi})| \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \log^+ |g(e^{i\varphi})| \, d\varphi.$$

Теперь, используя снова ту же теорему де ла Валле-Пуссена, мы видим, что функция $g(z)$, равно как и $f(z) = b(z)\, g(z)$, принадлежит классу $H_\delta$.

## К ТЕОРИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Пусть $\Gamma$ — простой замкнутый спрямляемый контур. Соответствующие $\Gamma$ ортогональные полиномы

$$P_n(x); \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

однозначно определяются следующими двумя свойствами:

---

* Sur la théorie des polynomes orthogonaux à une variable complexe.— Журн. Ленингр. физ.-мат. о-ва, t. II, fasc. 1, 1928, p. 155—179.

1) $P_n(x)$ есть полином степени $n$ с вещественным положительным старшим коэффициентом;

2) выполнены условия ортогональности и нормированности, т. е.

$$\frac{1}{l}\int\limits_{\Gamma} P_n(x)\,\overline{P_m(x)}\,d\sigma = \varepsilon_{n,m};\quad (\varepsilon_{n,m}=0 \text{ при } n\neq m;\ \varepsilon_{nn}=1),$$

где $l$ — длина контура $\Gamma$, $d\sigma$ — элемент длины дуги на $\Gamma$ и $\overline{a}$ — комплексное число, сопряженное с числом $a$.

Теория ортогональных полиномов была построена в работе Szegö «Ueber orthogonale Polynome die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören» (Math. Zeitschr. Bd. 9; Heft 3/4; 1921, p. 227). В дальнейшем эта работа упоминается как «Szegö, I». В ней Szegö устанавливает основные свойства ортогональных полиномов, теоремы о разложениях по этим полиномам и их связь с проблемой конформных отображений. Целью настоящей работы является указание одного нового метода, который позволяет довольно легко доказывать теоремы о разложениях при более общих, чем в работе Szegö, предположениях о разлагаемых функциях и контуре $\Gamma$.

**2.** Рассмотрим сначала случай, когда кривая, определяющая ортогональные полиномы, есть окружность $C$ единичного радиуса с центром в нуле. В этом случае ортогональные полиномы имеют вид $1, z, z^2, \ldots, z^m, \ldots$ Если функция $f(z)$, регулярная во внутренности окружности $C$, имеет почти всюду на $C$ граничные значения $f(e^{i\theta})$ и выражается через них интегралом Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{z'=e^{i\theta}} \frac{f(e^{i\theta})}{z'-z}\,dz' \quad (|z|<1),$$

то ее ряд Маклорена

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s z^s \quad (|z|<1) \tag{1}$$

является одновременно и рядом Фурье, т. е.

$$\alpha_s = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,e^{-is\theta}\,d\theta \quad (s=0,1,2,\ldots). \tag{2}$$

Будем говорить, что функция $f(z)$ принадлежит классу $(H)$, если она регулярна во внутренности $C$, если она имеет почти всюду на $C$ угловые граничные значения $f(e^{i\theta})$ и выражается через них интегралом Коши и если функция $|f(e^{i\theta})|^2$ суммируема. Легко доказать следующую теорему.

**Теорема 1.** *Для того чтобы функция $f(z)$ принадлежала классу $(H)$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_{s=0}^{\infty} |\alpha_s|^2$. Если это условие выполнено, то имеет место уравнение замкнутости*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{s=0}^{\infty} |\alpha_s|^2. \tag{3}$$

Эта теорема известна, но мы дадим ее доказательство, чтобы не загромождать изложение многочисленными ссылками. Докажем сначала необходимость условия. Введя обозначения $f(z) = u(re^{i\theta}) + iv(re^{i\theta})$, $f(e^{i\theta}) = u(e^{i\theta}) + iv(e^{i\theta})$, рассмотрим коэффициенты Фурье функций $u(e^{i\theta})$, $v(e^{i\theta})$:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\theta})\,d\theta, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\theta})\cos n\theta d\theta;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\theta})\sin n\theta d\theta, \quad c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(e^{i\theta})\,d\theta; \tag{4}$$

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(e^{i\theta})\cos n\theta d\theta; \quad d_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(e^{i\theta})\sin n\theta d\theta.$$

Известно, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2}{2}$$

сходится. В то же время, с другой стороны, из равенств (2) следует

$$\alpha_0 = a_0 + ic_0; \quad \alpha_n = \frac{1}{2}[a_n + c_n + i(d_n - b_n)], \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

что и приводит немедленно к сходимости ряда $\sum_{s=0}^{\infty} |\alpha_s|^2$.

Обратно, если этот последний ряд из коэффициентов функции (1) сходится, то интегралы

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{s=0}^{\infty} |\alpha_s|^2 r^{2s} \quad (0 \leqslant r < 1) \tag{6}$$

ограничены равномерно по $r$ $(0 \leqslant r < 1)$. Отсюда, как хорошо известно, следуют все свойства, характеризующие класс $(H)$, равно как и формула (3)*.

Замечание 1. Из доказанной теоремы следует, что если $f(z)$ принадлежит классу $(H)$, а $\chi(z)$ ограничена и регулярна во внутренности $C$, то произведение $f(z)\chi(z)$ тоже принадлежит $(H)$.

Замечание 2. Если две функции

$$f_1(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s z^s \text{ и } f_2(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s z^s$$

принадлежат классу $(H)$, то, рассматривая функцию $f_1(z) + \lambda f_2(z)$, легко получим обобщенное уравнение замкнутости

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} f_1(z)\overline{f_2(z)}\, d\theta = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s \overline{\gamma}_s. \tag{7}$$

**3.** Рассмотрим некоторые свойства функции, осуществляющей однолистное конформное отображение круга $K$ $(|z| < 1)$ на область $B$, ограниченную простым замкнутым и спрямляемым контуром $L$. Эти свойства будут существенными в дальнейшем. Пусть $x = \varphi(z)$ — упомянутая функция, а $z = \gamma(x)$ — ее обратная; пусть значение $x = a$ соответствует точке $z = 0$. Отметим некоторые известные свойства функции $\varphi(z)$**. Эта функция непрерывна вплоть до границы $C$ круга $K$, и ее значения на $C$ образуют абсолютно непрерывную функцию. Функция $\varphi'(z)$ имеет почти всюду некасательные граничные значения $\varphi'(e^{i\theta})$, которые совпадают со значениями производной упомянутой абсолютно непрерывной функции, вычисленными вдоль окружности. Сохранение углов, характеризующее конформные отображения, имеет место не только внутри $B$ и $K$, но и почти всюду на контурах $\Gamma$ и $C$. Кроме того, из одной формулы упомянутой работы Привалова (с. 89) немедленно следует, что функция $z\varphi'(z)$ представляется интегралом Пуассона от своих граничных значений. Далее, если некоторая функция $w(z)$, регулярная в круге $K$, обладает почти всюду на $C$ некасательными граничными значениями и выражается через них интегралом Пуассона, то она выражается и интегралом Коши, и наоборот. Эти свойства на самом деле

* См., например, Szegö «Ueber die Randwerte einer analytischen Funktion».— Math. Ann., Bd. 84, Heft 3/4; p. 232—244, особенно p. 232—233. Ради краткости написания далее мы ссылаемся на эту статью как на „Szegö, II".

** I. Privalov. Sur certaines propriétés métriques des fonctions analytiques. — Journ. Ecole Polytechnique, 2-me Série, Cahier 24, 1924, p. 77—112 и особенно p. 78—87.

имеют место в том и только в том случае, когда интегралы

$$\int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta})|\, d\theta \tag{8}$$

равномерно ограничены при $0 \leqslant r < 1$*. Итак, интегралы

$$r\int_0^{2\pi} |\varphi'(re^{i\theta})|\, d\theta, \tag{9}$$

представляющие длину линии $\Gamma_r$, которая является $\varphi$-образом окружности $|z| = r$, ограничены в совокупности. Это, в свою очередь, влечет, что функция $\sqrt{\varphi'(z)}$ принадлежит классу $(H)$. Отметим, кроме того, что интеграл

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} |\varphi'(e^{i\theta})|\, d\theta$$

дает длину дуги кривой $\Gamma$, соответствующей дуге $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$ окружности $C$.

Если функция $\pi(x)$ регулярна в области $B$ и имеет почти везде на $\Gamma$ некасательные граничные значения $\pi(\xi)$, то ее представимость интегралом Коши через эти граничные значения равносильна равенствам**

$$\int_\Gamma \pi(\xi)\, \xi^n d\xi = 0 \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Теперь мы докажем, что для существования почти везде на $\Gamma$ угловых граничных значений функции $\pi(x)$ и для представимости ее интегралом Коши от этих граничных значений необходимо и достаточно, чтобы интегралы

$$\int_{\Gamma_r} |\pi(x)|\, d\sigma \tag{10}$$

были равномерно ограничены при $0 \leqslant r < 1$. Для этого рассмотрим функцию $w(z) = \pi(\varphi(z))$, регулярную в круге $K$. Если интегралы (10) ограничены, то таковы же и интегралы

$$\int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta})\, \varphi'(re^{i\theta})|\, d\theta,$$

* Часть этого утверждения доказал F. Riesz (Ueber die Randwerte einer analytischen Funktion.— Math. Zeitschr., Bd. 18, Heft 1/2, 1923, p. 87—95, особенно p. 94.) Окончательный результат любезно сообщен нам Г. Фихтенгольцем.

** См. цит. работу Привалова, с. 106.

так что произведение $w(z)\varphi'(z)$ имеет почти везде граничные значения и восстанавливается по ним с помощью интеграла Коши.

Это влечет

$$\int_{|z|=1} w(z)\varphi'(z)z^n dz=0 \quad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Докажем, что равенства

$$\int_{\Gamma} \pi(\xi)\xi^n d\xi=0 \quad (n=0, 1, 2, \ldots) \tag{12}$$

имеют место. В самом деле, функция $\xi^n=[\varphi(z)]^n$, будучи голоморфной внутри $K$ и непрерывной вплоть до границы $C$, разлагается в ряд по полиномам от $z$, равномерно сходящийся на окружности $C^*$. Поэтому, подставляя это разложение в равенства (12) и переходя от переменной $\xi$ к переменной $z$, получаем, что (11) влечет (12). Обратно, если предположить существование предельных значений $\pi(\xi)$ и выполнение условий (12), легко получим и условия (11). Действительно, разлагая функцию $z^n=[\gamma(x)]^n$ в ряд по полиномам переменной $x$, равномерно сходящийся на $\Gamma$, точно так же убеждаемся, что из условий (12) следуют условия (11). Отметим еще, что, переходя от переменной $\xi$ к переменной $z$ и обратно, мы можем заменить $d\xi$ на $\varphi'(z)\,dz$ под знаком интеграла, так как граничные значения функции $\varphi'(z)$ совпадают почти везде с производной абсолютно непрерывной функции, дающей отображение окружности $C$ на контур $\Gamma$. Итак, предполагая, что $\pi(x)$ имеет граничные значения и выражается через них интегралом Коши, мы доказали, что функция $w(z)\varphi'(z)$ обладает аналогичным свойством, откуда и следует, что интегралы

$$\int_0^{2\pi} |\, w(re^{i\theta})\varphi'(re^{i\theta})\,|\, d\theta$$

или, что одно и то же, интегралы (10) равномерно ограничены.

Следовательно, *для того чтобы функция* $\pi(x)$ *имела граничные значения почти везде на контуре* $\Gamma$ *и восстанавливалась по ним интегралом Коши, необходима и достаточна равномерная ограниченность интегралов* (10).

**4.** Пусть $P_n$ суть полиномы, ортогональные на кривой $\Gamma$, т. е.

$$\frac{1}{l}\int_{\Gamma} P_n(\xi)\overline{P_m(\xi)}\,d\sigma=\varepsilon_{m,n} \quad (\varepsilon_{m,n}=0 \text{ при } n\neq m,\ \varepsilon_{nn}=1),$$

---

* B. Walsh. Ueber die Entwicklung einer analytischen Funktion nach Polynomen.— Math. Ann., Bd. 96, Heft 3/4, 1926, p. 430—436, особенно p. 430.

где $l$ — длина кривой Г, $d\sigma$ есть элемент длины дуги на Г. Рассмотрим следующие функции, регулярные в круге $K$:

$$R_n(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{l}}\ P_n[\varphi(z)]\sqrt{\varphi'(z)}\ (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (13)$$

Легко видеть, что эти функции принадлежат классу $(H)$ и что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_n(z)\overline{R_m(z)}\,d\theta = \varepsilon_{mn}, \qquad (14)$$

где $z = e^{i\theta}$. Полагая

$$R_n(z) = \sum_{s\geq 0} \alpha_s^{(n)} z^s \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (15)$$

получаем из (14) соотношения ортогональности и нормальности для таблицы коэффициентов $\alpha_s^{(n)}$:

$$\sum \alpha_s^{(n)}\,\overline{\alpha_s^{(m)}} = \varepsilon_{n,m}. \qquad (16)$$

Функции (13) образуют ортонормированную систему на окружности $C$. Используем положение о замкнутости (полноте) этой системы. Если какая-нибудь функция $\pi$ регулярна внутри области $B$ и непрерывна в ее замыкании, она может быть сколь угодно точно приближена в этой области полиномом*. Отсюда немедленно следует, что требуемое уравнение замкнутости имеет место для любой такой функции $\pi$, т. е. что

$$\frac{1}{l}\int_{\Gamma} |\pi(\xi)|^2\,d\sigma = \sum_{s=0}^{\infty} |c_s|^2, \qquad (17)$$

где

$$c_s = \frac{1}{l}\int_{\Gamma} \pi(\xi)\,\overline{P_s(\xi)}\,d\sigma.$$

Переходя в плоскость $z$, рассмотрим функцию

$$V(z) = \pi[\varphi(z)]\sqrt{\varphi'(z)},$$

и вычислим ее коэффициенты Фурье относительно системы (13):

---

* J. Walsh; l. c., § 3.

$$k_s=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1} V(z)\,\overline{R_s(z)}\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}\pi[\varphi(z)]\sqrt{\frac{2\pi}{l}}\,P_s[\varphi(z)]\,|\varphi'(z)|\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi l}}\int\limits_{\Gamma}\pi(\xi)\,\overline{P_s(\xi)}\,d\sigma=\sqrt{\frac{l}{2\pi}}\,c_s.$$

Кроме того, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}|V(z)|^2\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}|\pi[\varphi(z)]|^2\,|\varphi'(z)|\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}|\pi(z)|^2\,d\sigma,$$

так что уравнение (17) приводит к формуле замкнутости

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}|V(z)|^2\,d\theta=\sum_{s=0}^{\infty}|k_s|^2.$$

Итак, уравнение замкнутости относительно системы (13) имеет место для всех функций вида $\mu(z)\sqrt{\varphi'(z)}$, где $\mu(z)$ непрерывна в замкнутом и регулярна в открытом круге $K$.

Допустим теперь, что для некоторых функций $\lambda_s(e^{i\theta})$ $(s=0,1,2,\ldots)$ выполнено уравнение замкнутости относительно системы (13), что функция $\lambda(e^{i\theta})$ измерима и суммируема с квадратом и что

$$\lim_{s\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}|\lambda(e^{i\theta})-\lambda_s(e^{i\theta})|^2\,d\theta=0. \tag{18}$$

Обозначим символами $\lambda_s^{(n)}$ и $\lambda^{(n)}$ коэффициенты Фурье функций $\lambda_s(e^{i\theta})$ и $\lambda(e^{i\theta})$ соответственно. Тогда, из очевидного неравенства

$$|\alpha+\beta|^2\leqslant 2(|\alpha|^2+|\beta|^2)$$

следует

$$\int\limits_0^{2\pi}\Big|\lambda(e^{i\theta})-\sum_{k=1}^{m}\lambda^{(k)}R_k(e^{i\theta})\Big|^2d\theta\leqslant 2\int\limits_0^{2\pi}\Big|\lambda_s(e^{i\theta})-$$
$$-\sum_{k=1}^{m}\lambda_s^{(k)}R_k(e^{i\theta})\Big|^2\,d\theta+2\int\limits_0^{2\pi}|\lambda(e^{i\theta})-\lambda_s(e^{i\theta})|^2\,d\theta.$$

Отсюда, из условия (18) и из уравнений замкнутости для функций $\lambda_s(e^{i\theta})$ следует, что это уравнение выполнено и для функции $\lambda(e^{i\theta})$. Проверим теперь, что (при некоторых дополнительных предположениях) для функций

$$z^m\ (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{19}$$

имеет место уравнение замкнутости относительно системы (13). Легко видеть, что для этого достаточно указать такую последовательность полиномов $\chi_n(z)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{|z|=1} |1-\chi_n(z)\sqrt{\varphi'(z)}|^2 d\theta = 0. \tag{20}$$

В самом деле, равенство (20) равносильно равенствам

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{|z|=1} |z^m - z^m\chi_n(z)\sqrt{\varphi'(z)}|^2 d\theta = 0 \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

А так как функции $z^m\chi_n(z)\sqrt{\varphi'(z)}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ удовлетворяют уравнению замкнутости, то таковыми будут и функции $z^m$.

Для построения полиномов $\chi_n(z)$ со свойством (20) рассмотрим полиномы $p_n(z)$, ортогональные и нормированные на окружности $C$ относительно некоторой неотрицательной функции $w(\theta)$. Эти полиномы определяются следующими условиями: $p_n(z)$ имеет степень $n$, имеет положительный коэффициент при $z^n$ и выполнены равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} w(\theta)\, p_n(e^{i\theta})\,\overline{p_m(e^{i\theta})}\, d\theta = \varepsilon_{m,n}. \tag{21}$$

Теория таких полиномов построена Szegö (Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen. — Math. Zeitschr., Bd. 6, Heft 3/4, 1920; p. 176 und Bd. 9; Heft 3/4, 1921; p. 175). Некоторые результаты этой работы будут важны в последующем, и мы будем ссылаться на нее, как на „Szegö, III“.

Положим

$$w(\theta) = |K(z)|^2_{z=e^{i\theta}},$$

где $K(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{l}}\sqrt{\varphi'(z)}.$

Функция $K(z)$ принадлежит классу $(H)$, и потому $w(\theta) > 0$ почти всюду и $\log w(\theta)$ суммируем (Szegö, II, p. 223). Вычислим коэффициенты Фурье функции $H(\theta) = 1/K(e^{i\theta})$ относительно полиномов $p_n(z)$:

$$d_s = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} w(\theta)\, H(\theta)\,\overline{p_s(e^{i\theta})}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \overline{K(e^{i\theta})}\,\overline{p_s(e^{i\theta})}\, d\theta,$$

или

$$\overline{d_s} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} \frac{K(z)\,p_s(z)}{z}\, dz.$$

Замечая, что функции $K(z)p_s(z)$ принадлежат классу $(H)$ и что, в частности, они представимы интегралом Коши, получаем

$$d_s = \overline{K(0)}\,\overline{p_s(0)}. \tag{22}$$

Полагая

$$\chi_n(z) = \sum_{s=0}^{n} d_s p_s(z)$$

и используя § 14 Szegö, III, находим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(\theta)\left|\frac{1}{K(e^{i\theta})} - \chi_n(e^{i\theta})\right|^2 d\theta = 1 - \sum_{s=0}^{n} |d_s|^2.$$

Следовательно, соотношение (20) эквивалентно равенству

$$\sum_{s=0}^{\infty} |d_s|^2 = 1$$

или, ввиду (22), равенству

$$\sum_{s=0}^{\infty} |p_s(0)|^2 = \frac{1}{|K(0)|^2}. \tag{23}$$

Для доказательства этого последнего воспользуемся теоремой XXX Szegö, III. Из нее следует, что

$$\sum_{s=0}^{\infty} |p_s(0)|^2 = \frac{1}{|D(0)|^2}, \tag{24}$$

где $D(z)$ есть функция класса $(H)$, определяемая равенством (см. Szegö, II, p. 241)

$$D(z) = \exp\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \log w(\psi)\,\frac{1+ze^{-i\psi}}{1-ze^{-i\psi}}\,d\psi.$$

Функции $|D(z)|^2$ и $|K(z)|^2$ имеют некасательные граничные значения, совпадающие почти всюду. Кроме того, известно, что функция $D(z)$ имеет наибольший модуль (в каждой точке круга $K$) среди всех функций класса $(H)$, граничные значения которых совпадают почти всюду с $w(\theta)$.

Итак, имеем

$$|K(z)| \leqslant |D(z)| \qquad (|z| < 1); \tag{25}$$

причем равенство возможно лишь в случае, когда $K(z)$ и $D(z)$ совпадают с точностью до постоянного множителя, равного по модулю единице. Равенство (23) будет доказано, если мы установим, что в (25) имеет место знак равенства, т. е. что функция $\log|K(z)|^2$ представляется вещественной частью интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log w(\psi) \frac{1+ze^{-i\psi}}{1-ze^{-i\psi}}\, d\psi$$

или интегралом Пуассона

$$\log|K(re^{i\theta})|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|K(e^{i\psi})| \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\theta)+r^2}\, d\psi.$$

Вспоминая определение функции $K(z)$, видим, что все сводится к утверждению о представимости функции $\log|\varphi'(z)|$-гармонической в круге $K$, интегралом Пуассона от своих граничных значений:

$$\log|\varphi'(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\varphi'(e^{i\psi})| \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\theta)+r^2}\, d\psi. \quad (26)$$

Итак, если условие (26) выполнено, то для функций $z^m$ $(m=0, 1, 2, \ldots)$ имеет место уравнение замкнутости относительно системы (13). В силу формулы (7) коэффициенты Фурье этих функций равны

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} z^m \overline{R_k(z)}\, d\theta = \overline{\alpha_m^{(k)}},$$

так что уравнение замкнутости имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_m^{(k)}|^2 = 1 \quad (m=0, 1, 2, \ldots).$$

Эти уравнения вместе с уравнениями (16) показывают, что таблица коэффициентов $\alpha_n^{(k)}$ является матрицей некоторого полного ортогонального преобразования. Следовательно, условие, что система (13) полна относительно функций $z^m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, эквивалентно условию на таблицу коэффициентов Маклорена функций $R_s(z)$ $(s=0, 1, 2, \ldots)$: она должна быть матрицей полного ортогонального преобразования. Если это последнее условие выполнено, то легко видеть, что для любой функции $\sigma(z)$ класса $(H)$ имеет место уравнение замкнутости относительно системы (13).

В самом деле, пусть

$$\sigma(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \sigma_s z^s.$$

Так как $\sigma(z)$ принадлежит $(H)$, имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |\sigma(z)|^2 \, d\theta = \sum_{s=0}^{\infty} |\sigma_s|^2.$$

Замечая, что коэффициентами Фурье функции $\sigma(z)$ служат числа

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \sigma(z) \overline{R_k(z)} \, d\theta = \sum_{s=0}^{\infty} \sigma_s \overline{\alpha_s^{(k)}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

и что матрица $\alpha_s^{(k)}$ осуществляет полное ортогональное преобразование, немедленно получаем искомое уравнение замкнутости

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{s=0}^{\infty} \sigma_s \overline{\alpha_s^{(k)}} \right|^2 = \sum_{s=0}^{\infty} |\sigma_s|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |\sigma(z)|^2 d\theta.$$

Рассуждениями этого параграфа доказана следующая теорема.

**Теорема 2.** *Если справедлива формула* (26), *то коэффициенты Маклорена функций* (13) *образуют матрицу полного ортогонального преобразования, и для каждой функции класса (H) имеет место уравнение замкнутости относительно системы* (13).

**5.** Предполагая выполненным условие (26), докажем формулу замкнутости и теорему о разложении в области $B$. Пусть $f(x)$ — регулярная функция в области $B$, для которой интегралы

$$\int_{\Gamma_r} |f(x)|^2 \, d\sigma \quad (r < 1) \tag{27}$$

ограничены в совокупности; $\Gamma_r$ суть образы окружностей. Рассмотрим функции

$$F(z) = f[\varphi(z)] \text{ и } \tau(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{l}}\, F(z) \sqrt{\varphi'(z)}.$$

Некасательные направления в точках контура $\Gamma$ являются почти везде образами аналогичных направлений в точках окружности $C$ (см. п. 3), а условие ограниченности интегралов (27) эквивалентно такому же условию для

$$\int_{|z|=1} |\tau(z)|^2 d\theta \quad (r < 1),$$

откуда следует, что функция $\tau(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s z^s$ принадлежит классу $(H)$. Рассмотрим коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{l} \int_{\Gamma} f(\xi) \overline{P_n(\xi)} \, d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \tau(z) \overline{R_n(z)} \, d\theta = \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s \overline{a_s^{(n)}}.$$

Поскольку коэффициенты $a_s^{(n)}$ определяют полное ортогональное преобразование, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{s=0}^{\infty} |\delta_s|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |\tau(z)|^2 d\theta = \frac{1}{l} \int_{\Gamma} |f(\xi)|^2 d\sigma,$$

а это и есть уравнение замкнутости для функции $f(x)$ относительно системы полиномов $P_n(x)$. Следовательно, получаем теорему.

**Теорема 3.** *Если функция $f(x)$ регулярна в области $B$, если интегралы* (27) *равномерно ограничены и если выполнено* (26), *то для функции $f(x)$ имеет место уравнение замкнутости относительно полиномов $P_n(x)$.*

Перейдем теперь к доказательству теоремы о разложении функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы 3. Рассмотрим отрезок ряда Фурье функции $\tau(z)$ по системе (13):

$$S_n(z) = \sum_{s=0}^{n} c_s R_s(z).$$

Отмечая, что функции $\tau(z)$ и $R_s(z)$ принадлежат классу $(H)$, получим

$$\tau(z) - S_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z'|=1} \frac{\tau(z') - S_n(z')}{z' - z} dz' \quad (|z| < 1)$$

и далее по неравенству Шварца

$$|\tau(z) - S_n(z)|^2 \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \int_{|z'|=1} |\tau(z') - S_n(z')|^2 d\theta' \int_{|z'|=1} \frac{d\theta'}{|z'-z|^2}.$$

Поскольку для функции $\tau(z)$ выполнено уравнение замкнутости по системе (13), имеем

$$\tau(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{l}} F(z) \sqrt{\varphi'(z)} = \lim_{n \to \infty} S_n(z)$$

равномерно по $z$ в каждой области, лежащей внутри $K$ вместе со своим замыканием. Сокращая на множитель $\sqrt{\frac{2\pi}{l}}\sqrt{\varphi'(z)}$ в левой и правой частях и возвращаясь к переменной $x$, получаем теорему о разложении для функции $f(x)$.

**Теорема 4.** *Если выполнено соотношение* (26), *то функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы* 3, *разлагается в ряд Фурье по полиномам $P_n(x)$, который сходится к ней равномерно в каждой области, лежащей внутри $B$ вместе со своим замыканием.*

Рассмотрим теперь произвольный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n P_n(x), \tag{28}$$

такой, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |d_n|^2$ сходится, и образуем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n R_n(z). \tag{29}$$

Учитывая свойства матрицы $\alpha_m^{(k)}$, можно утверждать, что ряд (29) определяет функцию $\rho(z)$, регулярную в круге $K$:

$$\rho(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n R_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n z^n \quad (|z| < 1), \tag{30}$$

и что

$$\sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\delta_n|^2.$$

Отсюда следует, что $\rho(z)$ принадлежит классу $(H)$. Обратно, если задана функция $\rho(z)$ класса $(H)$, то заданы и коэффициенты $\delta_n$, и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\delta_n|^2$ сходится. Приравнивая по формуле (30) коэффициенты при степенях $z$, получаем бесконечную систему линейных уравнений для $d_n$, из которой эти числа определятся однозначно, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |d_n|^2$ будет сходиться. Если $\rho(z)$ принадлежит классу $(H)$, то функция

$$F(z) = \rho(z) \Big/ \sqrt{\frac{2\pi}{l}} \sqrt{\varphi'(z)} \tag{31}$$

определяет на плоскости $x$ функцию $f(x) = F[\gamma(x)]$, удовлетворяющую условиям теоремы 3. И обратно, если задана такая функция $f(x)$, то формула (31) определит функцию $\rho(z)$

класса $(H)$. Следовательно, каждая функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы 3, единственным образом разлагается в ряд вида (28) с конечной суммой $\sum_{n=0}^{\infty}|d_n|^2$. Этот ряд есть в точности ряд Фурье функции $f(x)$. Итак, получаем следующую теорему.

**Теорема 5.** *Если имеет место* (26), *то каждая функция* $f(x)$, *удовлетворяющая условиям теоремы* 3, *единственным образом разлагается в области* $B$ *в ряд вида* (28) *с коэффициентами, суммируемыми с квадратом. Обратно, каждый такой ряд есть ряд Фурье некоторой функции* $f(x)$, *обладающей указанными свойствами.*

В заключение докажем одну формулу для случая аналитического контура, установленную Szegö. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{l}{2\pi}\overline{\sqrt{\gamma'(a)}}\sqrt{\gamma'(x)}.$$

Она обладает всеми свойствами, отмеченными в теореме 3. Элементарное вычисление позволяет найти ее коэффициенты Фурье:

$$c_n=\frac{1}{l}\int_{\Gamma}f(\xi)\overline{P_n(\xi)}\,d\sigma=\overline{P_n(a)}.$$

Действительно, учитывая очевидную формулу

$$\gamma'(x)\,\varphi'(z)=1$$

и замечая, что значению $z=0$ соответствует $x=a$, получим

$$\overline{c}_n=\frac{1}{2\pi\sqrt{\varphi'(0)}}\int_{|z|=1}\frac{P_n[\varphi(z)]\,|\varphi'(z)|}{\sqrt{\varphi'(z)}}\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i\sqrt{\varphi'(0)}}\int_{|z|=1}\frac{P_n[\varphi(z)]\sqrt{\varphi'(z)}}{z}\,dz.$$

Но, поскольку произведение $P_n[\varphi(z)]\sqrt{\varphi'(z)}$, как мы видели, представимо интегралом Коши, это влечет

$$\overline{c}_n=\frac{1}{\sqrt{\varphi'(0)}}P_n[\varphi(0)]\sqrt{\varphi'(0)}=P_n(a).$$

Таким образом, согласно теореме 3, мы получаем следующее разложение функции (31) в ряд Фурье:

$$\frac{l}{2\pi}\overline{\sqrt{\gamma'(a)}}\sqrt{\gamma'(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{P_n(a)}\,P_n(x). \tag{32}$$

Это и есть та формула, которую мы собирались доказать. Она установлена в тех же предположениях, что и предыдущая теорема, т. е. контур Г предполагается спрямляемым и таким, что имеет место представление (26).

**6.** В случае аналитического контура Г гармоническая функция $\log|\varphi'(z)|$ аналитична (в „вещественном“ смысле) в замыкании круга $K$, так что формула (26) без сомнения справедлива. Докажем более общую теорему разложения, чем ранее, но только для аналитических контуров Г. Пусть $f(x)$ — регулярная функция в области $B$, имеющая почти везде граничные значения $f(\xi)$, интегрируемые на Г, и представимая интегралом Коши этих своих граничных значений:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - x} \quad (x \text{ меняется внутри области } B).$$

Ввиду сказанного в п. 3 можно утверждать, что интегралы

$$\int\limits_{|z|=r} |f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)|\,d\theta \qquad (r<1),$$

равномерно ограничены. Кроме того, в рассматриваемом случае функция $\varphi'(z)$ регулярна и отлична от нуля вплоть до окружности $C$. Поэтому существуют постоянные $m$ и $M$, такие, что $0 < m < |\varphi'(z)| < M$ всюду в круге $K$. Отсюда вытекает, что интегралы

$$\int\limits_{|z|=r} |f[\varphi(z)]|\,d\theta, \quad \int\limits_{|z|=r} |f[\varphi(z)]\sqrt{\varphi'(z)}|\,d\theta$$

также равномерно ограничены и что функции $f[\varphi(z)]$ и $f[\varphi(z)]\sqrt{\varphi'(z)}$ представимы в круге $K$ интегралами Коши своих граничных значений.

Рассмотрим теперь отрезок ряда Фурье функции $f(x)$:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x); \quad a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{\Gamma} f(\xi)\,\overline{P_k(\xi)}\,d\sigma,$$

или

$$S_n(x) = \frac{1}{l}\int\limits_{\Gamma} f(\xi)\,K_n(\xi, x)\,d\sigma = \frac{1}{l}\int\limits_{\Gamma} f(\xi)\,\overline{K_n(x, \xi)}\,d\sigma,$$

$$K_n(x, \xi) = \sum_{k=0}^{n} \overline{P_k(x)}\,P_k(\xi).$$

Известно (см. Szegö, I), что при фиксированном $x$ из области $B$ и при $\xi$, меняющемся на контуре Г, функции $K_n(x, \xi)$ равномерно относительно $\xi$ стремятся к $\frac{l}{2\pi}\overline{\sqrt{\gamma'(x)}}\sqrt{\gamma'(\xi)}$, где $z = \gamma(y)$

есть функция, осуществляющая конформное отображение области $B$ на круг $K$ так, что точке $y = x$ соответствует $z = 0$. Поэтому имеем

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} f(\xi) \sqrt{\gamma'(x)} \sqrt{\overline{\gamma'(\xi)}}\, d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} f[\varphi(z)] \sqrt{\frac{\varphi'(z)}{\varphi'(0)}}\, d\theta,$$

где, как всегда, $y = \varphi(z)$ есть функция, обратная к $z = \gamma(y)$. Это очевидным образом влечет

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\varphi'(0)}} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f[\varphi(z)] \sqrt{\varphi'(z)}}{z}\, dz,$$

и, далее,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\varphi'(0)}} f[\varphi(0)] \sqrt{\varphi'(0)} = f(x),$$

поскольку функция $f[\varphi(z)] \sqrt{\varphi'(z)}$ представима своим интегралом Коши.

Таким образом, получено разложение функции $f(x)$ в области $B$ в ряд Фурье по ортогональным полиномам.

Из исследований Szegö легко видеть, что $K_n(x, \xi)$ стремится к функции $\frac{l}{2\pi} \sqrt{\gamma'(x)} \sqrt{\overline{\gamma'(\xi)}}$ равномерно не только по $\xi$, но и по $x$, если $x$ меняется в некоторой области, лежащей внутри $B$ вместе со своим замыканием. То же самое можно сказать и о разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье. Итак, мы получаем теорему вполне аналогичную теореме о разложении в степенной ряд.

**Теорема 6.** *Если функция $f(x)$ регулярна в области $B$, если она имеет почти везде на $\Gamma$ некасательные граничные значения и восстанавливается интегралом Коши по этим граничным значениям и если, кроме того, контур $\Gamma$ есть аналитическая кривая, то $f(x)$ разлагается в ряд Фурье по ортогональным полиномам, соответствующим контуру $\Gamma$, сходящийся равномерно внутри $B$.*

Допустим теперь, что функция $f(x)$ всего лишь регулярна в области $B$. Тогда функция $f[\varphi(z)]$ разлагается в ряд Маклорена в круге $K$:

$$f[\varphi(z)] = \sum_{s=0}^{\infty} c_s z^s,$$

где

$$\limsup \sqrt[s]{|c_s|} \leqslant 1.$$

Поэтому, при любом $R > 1$ имеем

$$|c_s| < AR^s \tag{33}$$

с константой $A$, не зависящей от $s$. Для функции же $z^s$ имеем очевидное разложение

$$z^s = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\alpha_s^{(j)}} R_j(z) \qquad (|z| < 1),$$

откуда находим

$$f[\varphi(z)] = \sum_{s=0}^{\infty} c_s \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\alpha_s^{(j)}} R_j(z). \tag{34}$$

Используем теперь два утверждения работы Szegö I. Пусть $x = \psi(z)$ — функция, отображающая внешность круга $K$ на внешность контура Г, причем так, что бесконечно удаленные точки этих областей переходят друг в друга. Напишем разложение

$$x = \tau z + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\beta_s}{z^s} \qquad \text{для } |z| > 1. \tag{35}$$

Пусть $z = \delta(x)$ — обратное отображение. В каждой точке $x$, лежащей во внешности Г, полиномы $P_n(x)$ допускают асимптотическое представление

$$P_n(x) = \varepsilon \sqrt{\frac{l}{2\pi}} \sqrt{\delta'(x)}\, [\delta(x)]^n [1 + o(1)], \tag{36}$$

где $\varepsilon = \text{const}$, $|\varepsilon| = 1$, а $o(1)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Это стремление равномерно по $x$, пробегающим любую область, лежащую вместе со своим замыканием во внешности Г. Напротив, если $x$ лежит внутри Г, то

$$|P_n(x)| < M\rho^n, \tag{37}$$

где $M$ и $\rho$ не зависят от $n$ и $0<\rho<1$. Все эти результаты установлены Szegö для случая аналитического контура Г. В этом случае функции (13) голоморфны в круге с центром в нуле и радиуса, большего единицы, так что имеет место следующее представление для коэффициентов $\alpha_s^{(j)}$:

$$\alpha_s^{(j)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_1} \frac{R_j(z)}{z^{s+1}}\, dz,$$

где $r_1 > 1$, а разность $r_1 - 1$ сколь угодно мала. Учитывая (36), получаем оценку

$$|\alpha_s^{(j)}| < c r_2^{j-s}, \tag{38}$$

где $c$ не зависит от $j$ и $s$, $r_2 > 1$ и $r_2 - 1$ сколь угодно мало. Из (37) следует, что в каждой точке $z$, лежащей внутри $C$,

$$|R_n(z)| < D\rho^n. \tag{39}$$

Оценки (33), (38) и (39) показывают, что двойной ряд в правой части равенства (34) абсолютно сходится. Меняя порядок суммирования, получаем разложение по функциям $R_n(z)$:

$$f[\varphi(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} D_n R_n(z).$$

Разделив это представление на $\sqrt{\varphi'(z)}$, получим разложение в ряд по полиномам $P_n(x)$ произвольной функции, голоморфной во внутренности контура Г, но этот ряд не будет, вообще говоря, рядом Фурье. Приходим, таким образом, к следующей теореме.

**Теорема 7.** *Функция $f(x)$, регулярная в области $B$, ограниченной аналитическим контуром, разлагается в абсолютно сходящийся ряд по полиномам $P_n(x)$.*

7. Теоремы п. 5 установлены в предположении справедливости представления (26). Обсудим содержание этого предположения. Если функция $x = \varphi(z)$ осуществляет конформное отображение круга $K$ ($|z| < 1$) на область $B$ со спрямляемым контуром Г, то соотношение (26) сводится к представимости функции $\log|\varphi'(z)|$, гармонической в $K$ и имеющей почти всюду на окружности $C$ некасательные граничные значения, интегралом Пуассона от своих граничных значений. Нам не удалось доказать, что такое представление на самом деле имеет место в общем случае спрямляемого контура Г, и мы ограничимся проверкой условия (26) для некоторых классов контуров Г.

Если интегралы

$$\int_0^{2\pi} |\log \varphi'(re^{i\theta})|\, d\theta, \quad r < 1, \tag{40}$$

остаются ограниченными, то функция $\log \varphi'(z)$, регулярная в круге $K$, допускает представление интегралом Пуассона своих граничных значений, как было отмечено в п. 3, и тем самым формула (26) справедлива. Ввиду очевидного неравенства

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leqslant \alpha + \beta \qquad (\alpha, \beta \geqslant 0)$$

интегралы (40) ограничены, если ограничены интегралы

$$\int_0^{2\pi} |\log|\varphi'(re^{i\theta})||\, d\theta, \tag{41}$$

$$\int_0^{2\pi} |\arg \varphi'(re^{i\theta})|\, d\theta. \tag{42}$$

Поскольку функция $\sqrt{\varphi'(z)}$ принадлежит классу $(H)$, ограниченность интегралов (41) вытекает из одного неравенства Рисса, установленного в его статье „Sur les suites des fonctions analytiques"*. Таким образом, для справедливости формулы (26) достаточно ограниченности интегралов (42). Если область $B$ выпукла или звездна по Миттаг-Леффлеру, то известно, что функция $\arg\varphi'(re^{i\theta})$ ограничена в круге $K$**, и тем более интегралы (42) ограничены. Легко видеть, что то же самое имеет место и для областей $B$, ограниченных кусочно-аналитическими кривыми без нулевых углов.

Покажем теперь, что если равенство (26) не верно, то коэффициенты $\alpha_k^{(n)}$ разложений Маклорена функций $R_n(z)$ не порождают полного ортогонального преобразования. Если (26) не верно, то в формуле (25) п. 4 имеет место знак «$\ll$», а формулы (22), (23), (24) дают $\sum\limits_{s=0}^{\infty} |d_s|^2 < 1$, где $d_s$ суть коэффициенты Фурье граничных значений функции $1/K(z)$ относительно системы ортогональных полиномов $p_n(z)$, которые были построены в п. 4. Если функция $F(z)$ регулярна в области $|z| \leqslant 1$ (например, это полином), то теорема XXXV упомянутой выше статьи Szegö, III влечет неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1} |K(z)|^2 \left|F(z) - \frac{1}{K(z)}\right|^2 d\theta \geqslant 1 - \sum_{s=0}^{\infty} |d_s|^2 > 0.$$

Следовательно, учитывая формулу для функции $K(z)$, можно утверждать, что для любого полинома $F(z)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{|z|=1} |-F(z)\sqrt{\varphi'(z)}\,|^2 d\theta > M > 0, \tag{43}$$

где $M$ — некоторое положительное число. Отсюда следует, что для функции, тождественно равной единице, не верно уравнение замкнутости относительно системы $R_m(z)$, т. е. что

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_0^{(k)}|^2 < 1.$$

В самом деле, если замкнутость имеет место, то интеграл

$$I_m = \int\limits_{|z|=1} |1 - \sum_{k=0}^{m} \overline{\alpha}_0^{(k)} R_k(z)|^2 d\theta$$

* F. Riesz. — Acta Universit. Francisco-Joseph, t. I, fasc. 2, 1923, p. 88—98, и особенно p. 97.

** Bieberbach. Aufstellung und Beweise des Drehungssatzes für schlichte conforme Abbildung.— Math. Zeitschr., Bd. 4, Heft 3/4; 1919; p. 295—305 и особенно p. 302, 304.

можно сделать сколь угодно малым при достаточно большом $m$. Далее,

$$\sum_{k=0}^{m} \overline{\alpha_0^{(k)}} R_k(z) = \psi_m(z) \sqrt{\varphi'(z)},$$

где $\psi_m(z)$ — функция, регулярная в круге $K$ и непрерывная в его замыкании. Используя результаты Уолша, упомянутые в п. 4, можно представить функцию $\psi_m(z)$ в виде

$$\psi_m(z) = \omega_m(z) + \varepsilon_m(z),$$

где $\omega_m(z)$ — полином, а $\max|\varepsilon_m(z)|$ по окружности $C$ произвольно мал. Отсюда

$$\int\limits_{|z|=1} \left|1 - \omega_m(z)\sqrt{\varphi'(z)}\right|^2 d\theta \leqslant 2I_m + 2\int\limits_{|z|=1} \left|\varepsilon_m(z)\sqrt{\varphi'(z)}\right|^2 d\theta, \quad (44)$$

где

$$\int\limits_{|z|=1} \left|\varepsilon_m(z)\sqrt{\varphi^1(z)}\right|^2 d\theta \leqslant \max_{|z|=1} |\varepsilon_m(z)|^2 l,$$

$l$ — длина контура Г. Следовательно, оба слагаемых в (44) можно считать произвольно малыми, что противоречит неравенству (43). Это означает, что предположение об уравнении замкнутости для функции, тождественно равной единице, относительно системы функций $R_n(z)$ не верно, если представление (26) невозможно. Обратно, если уравнение замкнутости для единицы относительно системы функций $R_m(z)$ имеет место, т. е. если

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\overline{\alpha_0^{(k)}}\right|^2 = 1, \quad (45)$$

то интегралы $I_m$ стремятся к нулю при безграничном возрастании $m$. Следовательно, предыдущие рассуждения показывают, что существуют полиномы $\omega_m(z)$, для которых

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{|z|=1} \left|1 - \omega_m(z)\sqrt{\varphi'(z)}\right|^2 d\theta = 0.$$

В этом случае, как мы видели в п. 4, уравнения замкнутости имеют место и для функций $z^j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$, и таблица коэффициентов определяет полное ортогональное преобразование. Итак, условия (45) и (26) эквивалентны.

**8.** Рассмотрим теперь конформное отображение области $|z| > 1$ на внешность контура Г, считая, что точка $\infty$ плоскости $z$ переходит в аналогичную точку плоскости $x$. Пусть

$$x = \psi(z) = \tau z + \tau_0 + \frac{\tau_1}{z} + \frac{\tau_2}{z^2} + \ldots \quad (|z| > 1) \quad (46)$$

и есть это отображение. Не умаляя общности, считаем число $\tau$ вещественным и положительным. Пусть $z=\delta(x)$ — обратная функция. Рассмотрим, далее, функции, аналогичные функциям (13):

$$S_n(z)=\sqrt{\frac{2\pi}{l}}\,P_n[\psi(z)]\sqrt{\psi'(z)}\quad (n=0,1,2,\ldots).$$

Эти функции регулярны при $|z|>1$ и допускают представления вида

$$S_n(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\beta_s^{(n)}}{z^{s-n}}\quad (|z|>1). \tag{47}$$

Как и в п. 4, для общих спрямляемых контуров $\Gamma$ имеют место формулы

$$\sum_{s=0}^{\infty}|\beta_s^{(n)}|^2=1\quad (n=0,1,2,\ldots), \tag{48}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}\beta_s^{(n)}\overline{\beta}_{n-m+s}^{(n)}=0\quad (m<n). \tag{49}$$

Обозначим через $\mu_n^2$ минимум интегралов вида

$$(1/l)\int_{\Gamma}|\xi^n+a_1\xi^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\xi+a_n|^2\,d\sigma.$$

Известно (Szegö, I), что полином $P_n(x)$ имеет коэффициент при $x^n$, равный $1/\mu_n$, и потому в разложениях (47)

$$\beta_0^{(n)}=\frac{\tau_n}{\mu_n}\sqrt{\frac{2\pi\tau}{l}}.$$

Из (48) следует, что $|\beta_0^{(n)}|^2\leqslant 1$, т. е. что

$$\mu_n^2\geqslant\frac{2\pi}{l}\tau^{2n+1}. \tag{50}$$

Для случая аналитического контура $\Gamma$ это неравенство было доказано в работе Szegö, I. Как уже было отмечено в п. 6, для этого же случая Szegö получил асимптотическую формулу для полиномов $P_n(x)$ в точках внешности контура $\Gamma$:

$$P_n(x)=\sqrt{\frac{l}{2\pi}}\sqrt{\delta'(x)}\,[\delta(x)]^n[1+\varepsilon_n(x)], \tag{51}$$

где $\varepsilon_n(x)$ стремится к нулю при $n\to\infty$ равномерно в каждой области, лежащей во внешности $\Gamma$ вместе со своим замыканием. Это асимптотическое представление равносильно условию

$$\lim_{n\to\infty}\beta_0^{(n)}=1. \tag{52}$$

Действительно, равенство (52) немедленно следует из представления (51). Обратно, если выполнено (52), то из формулы (48) следует, что наибольшее из чисел $|\beta_s^{(n)}|$ $(s = 1, 2, \ldots)$ стремится к нулю, когда $n$ неограниченно возрастает. В силу (47) заключаем, что

$$\lim_{n \to \infty} (S_n(z)/z^n) = 1.$$

Более того, $S_n(z)/z$ стремится к единице равномерно в каждой области, лежащей в $|z| > 1$ вместе со своим замыканием. Это эквивалентно соотношению (51). Условие (52) и асимптотическое представление (51), установленные Szegö для случая аналитического контура $\Gamma$, перестают быть верными для общих спрямляемых кривых. Условие (52) нарушается, например, если $\Gamma$ есть двойной сегмент $[-1, +1]$ (см. Szegö, I). Однако нетрудно указать оценку для $P_n(x)$, справедливую во внешности $\Gamma$ для общих спрямляемых контуров*. Из равенства (48) и неравенства Коши имеем

$$\left| \frac{S_n(z)}{z^n} \right|^2 \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{|z|^{2s}} \quad (|z| > 1), \tag{53}$$

а отсюда получаем

$$|S_n(z)| \leqslant M |z|^n,$$

где $M$ есть положительное число, не зависящее от $n$ и одно и то же для всех $z$ из

$$|z| \geqslant R_0 > 1. \tag{54}$$

Пусть $\Delta_r$ — кривая на плоскости $x$, соответствующая окружности $|z| = r > 1$. Поскольку функция $\psi'(z)$ ограничена в области (54), получим на кривой $\Delta_R$ оценку

$$|P_n(x)| < NR^n, \tag{55}$$

причем одно и то же $N$ подходит для всех $R$ с $R \geqslant R_0 > 1$.

Эта оценка полиномов $P_n(x)$ немедленно влечет теорему о сходимости рядов Фурье для функций $f(x)$, регулярных в замыкании области $B$. Предположим, что функция $f(x)$ регулярна в замкнутой области, ограниченной кривой $\Delta_{R_1}$. Тогда получим, что существуют полиномы $v_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ степени не выше $n$, удовлетворяющие на $\Gamma$ следующему неравенству:

$$|f(x) - v_n(x)| \leqslant M_0/R_1^n.$$

---

* Мы все время предполагаем выполненным условие (26).

с константой $M_0$, не зависящей ни от $x$, ни от $n^*$. Отсюда немедленно следует, что коэффициенты Фурье $c_n$ функции $f(x)$ имеют оценку вида

$$|c_n| < N_0/R_1^n \tag{56}$$

и что, в силу неравенства (55), ряд Фурье функции $f(x)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \tag{57}$$

сходится в каждой области $B_1$, содержащейся во внутренности $\Delta_{R_1}$, вместе со своим замыканием. Сумма этого ряда равна $f(x)$ в области $B$ и, следовательно, во всей области $B_1$. Если $\Delta_{R_2}$ — кривая, внутри которой функция регулярна, но на которой она имеет особые точки, мы можем в качестве $B_1$ выбрать произвольную область, содержащуюся во внутренности $\Delta_{R_2}$ вместе со своим замыканием.

В неравенстве (56) число $R_1$ можно выбирать столь близким к $R_2$, как мы захотим. Это дает

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n|} \leqslant 1/R_2.$$

Далее, если бы неравенство было строгим: $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} < 1/R_2$, ряд (57) сходился бы (ввиду (55)) равномерно внутри области, содержащей $\Delta_{R_2}$, а это противоречит допущению, что $f(x)$ имеет особые точки на $\Delta_{R_2}$. Следовательно,

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = 1/R_2. \tag{58}$$

Если кривая $\Gamma$ аналитична и $a$ — точка внутренности $\Gamma$, имеет место неравенство, отмеченное в п. 6: $|P_n(a)| < M\rho^n$, постоянные $M$ и $0 < \rho < 1$ не зависят от $n$. Покажем теперь, что такое неравенство возможно лишь в случае аналитической кривой $\Gamma$. В самом деле, если такая оценка имеет место, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{P_n(a)} P_n(x),$$

сумма которого внутри $\Gamma$ совпадает с $\frac{l}{2\pi} \sqrt{\overline{\gamma'(a)}} \sqrt{\gamma'(x)}$, сходится равномерно и абсолютно в некоторой области, содержащей кривую $\Gamma$, так что $\sqrt{\gamma'(x)}$ является функцией, аналитической в этой области. Контур $\Gamma$ тем самым также должен

---

* J. Walsh. Ueber den Grad der Approximation einer analytischen Funktion.— Sitzungsber. Bayer. Akademie, H. 2, 1926; p. 223—229, и особенно p. 223.

быть аналитическим. Далее, ввиду (55) имеем $|P_n(a)| < NR^n$, причем число $R$ больше единицы, но разность $R-1$ может быть сделана сколь угодно малой. Поэтому из предыдущих рассуждений следует, что для не аналитических кривых Г обязательно будет

$$\limsup \sqrt[n]{|P_n(a)|} = 1$$

во всех точках внутренности Г.

## О СООТВЕТСТВИИ ГРАНИЦ ПРИ КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ*

В настоящей статье я обобщаю некоторые результаты, которые получил Зайдель в работе с тем же названием, что и эта (Math. Annalen, Bd. 104, S. 183—243, в особенности S. 226). Сначала я привожу результаты его работы, которая будет здесь обобщена.

**1.** Пусть $B$ — односвязная однолистная область, ограниченная спрямляемой жордановой кривой Г, и пусть $z = \omega(\xi)$ — функция, отображающая круг $|\xi| < 1$ на область $B$. Мы предположим, что граничная кривая Г имеет касательную в каждой точке, и обозначим через $\varphi(s)$ угол, который образует положительно направленная касательная с положительным направлением оси $x$. При этом $s$ обозначает длину дуги на Г, отсчитываемую от некоторой фиксированной точки. Первый результат Зайделя, который я процитирую, содержится в теореме 20 его работы. Его можно сформулировать так:

*Если $\varphi(s)$ удовлетворяет условию Липшица*

$$|\varphi(s+h) - \varphi(s)| \leqslant kh, \tag{1}$$

*где $k$ — некоторая постоянная, то функция $\omega'(\xi)$ непрерывна в замкнутом круге $|\xi| \leqslant 1$ и абсолютно непрерывна на окружности $|\xi| = 1$, а функция $\omega''(\xi)$ имеет почти везде угловые граничные значения $\omega''(e^{i\theta})$, причем $|\omega''|^p$ суммируема при любом положительном $p$.*

Приведем еще один результат Зайделя — теорему 21: *Если функция $\varphi(s)$ из теоремы 20 имеет абсолютно непрерывную производную $\frac{d\varphi}{ds}$, а $\left|\frac{d^2\varphi}{ds^2}\right|^{p_1}$ суммируема при некотором $p_1 > 1$, то функция $\omega''(\xi)$ имеет почти везде угловые граничные значения $\omega''(e^{i\theta})$, причем $|\omega''(e^{i\theta})|^{p_1}$ суммируема.*

Используя результаты Зайделя, можно легко показать, что

* Über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung.— Math. Ann., Bd. 107, Heft 2, 1932, S. 313—323.

при условиях теоремы 21 функция $\omega''(\xi)$ непрерывна в замкнутой области $|\xi| \leq 1$ и что

$$\omega''(e^{i\theta}) = \frac{d\omega'(e^{i\theta})}{d(e^{i\theta})} = -ie^{-i\theta}\frac{d\omega'(e^{i\theta})}{d\theta}. \qquad (2)$$

Мы не будем входить в детали этого элементарного дополнения к результатам Зайделя, а докажем наше обобщение теорем Зайделя заново. Наш метод доказательства отличен от метода Зайделя. В частности, мы не используем результатов Жюлиа и Каратеодори о некоторых граничных свойствах отображения $z = \omega(\xi)$.

**2.** Сначала мы приведем некоторые леммы, используемые в дальнейшем.

**Лемма 1.** *Если $\varphi(s)$ непрерывно зависит от $s$, то гармоническая в открытом единичном круге функция*

$$U_1(r, \theta) = \arg \omega'(\xi)$$

*непрерывна в замкнутом круге $|\xi| \leq 1$.*

Рассмотрим функцию

$$U_1(r, \theta, \delta) = \arg \frac{\omega(\xi e^{i\delta}) - \omega(\xi)}{\xi e^{i\delta} - \xi},$$

определенную в трехмерной области $|\xi| \leq 1$, $\delta > 0$. После этого лемма без труда доказывается известным методом Линделефа*.

**Лемма 2.** *Пусть $\mu(\theta)$ — непрерывная $2\pi$-периодическая функция ограниченной вариации:*

$$\mu(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \qquad (3)$$

*а $\tilde{\mu}(\theta)$ — сопряженная функция, имеющая ряд Фурье*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta).$$

*Тогда функция $e^{m\tilde{\mu}(\theta)}$ суммируема при любом вещественном $m$.*

Вследствие равномерной сходимости ряда (3) для каждого $\varepsilon$ найдется такое целое $k$, что

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\right| < \varepsilon \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

---

* Vierter Skand. Mathem.-Kongreß. Stockholm, 1916. S. 87—90.

Рассмотрим теперь функцию

$$\tilde{\mu}_k(\theta) = \tilde{\mu}(\theta) - \sum_{n=1}^{k-1} (-b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta),$$

сопряженную с функцией

$$\mu_k(\theta) = \sum_{n=k}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

и соответствующую функцию комплексной переменной $\xi$:

$$\varphi_k(\xi) = \sum_{n=k}^{\infty} (a_k - ib_k)\,\xi^k \quad (|\xi| < 1).$$

Составим интеграл*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{-im\varphi_k(\xi)} \frac{d\xi}{\xi} = 1,$$

где $C_r$ обозначает окружность $|\xi| = r < 1$, а $m$ — вещественное число. Последнюю формулу можно привести к виду

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{m\tilde{\mu}_k(\theta, r)} \cos [m\mu_k(\theta, r)]\, d\theta = 1,$$

где

$$\mu_k(\theta, r) = \sum_{n=k}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\, r^n;$$

$$\tilde{\mu}_k(\theta, r) = \sum_{n=k}^{\infty} (-b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta)\, r^n.$$

Если выбрать теперь число $k$ так, что $|m|\,\varepsilon < \pi/2$, то из известных теорем** Фату мы заключим, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{m\tilde{\mu}_k(\theta)}\, d\theta \leq \frac{1}{\cos m\varepsilon}.$$

Поскольку разность $\tilde{\mu}(\theta) - \tilde{\mu}_k(\theta)$ есть тригонометрический многочлен, то

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{m\tilde{\mu}(\theta)}\, d\theta < +\infty,$$

и лемма доказана.

---

* A. Zygmund.— Fund. Math., Bd. 13, 1929, s. 285.

** P. Fatou. — Acta Math., Bd. 30, 1906. S. 348—349, 373—378.

**3.** Для сокращения последующих рассмотрений введем некоторые обозначения. Будем говорить, что регулярная в круге $|\xi| < 1$ функция $f(\xi)$ принадлежит классу $H_\delta$ ($\delta > 0$), если возрастающие вместе с $r$ интегралы $\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\delta \, d\theta$ остаются ограниченными при $r \to 1$. Основополагающие свойства функций класса $H_\delta$ дал Ф. Рисс*. Нам особенно будет нужен результат, состоящий в том, что любая функция класса $H_\delta$ имеет почти везде угловые граничные значения $f(e^{i\theta})$. При этом функция $|f(e^{i\theta})|^\delta$ суммируема, а $f(e^{i\theta})$ почти везде отлична от нуля, и

$$\lim_{r\to 1} \int\limits_M |f(re^{i\theta})|^\delta \, d\theta = \int\limits_M |f(e^{i\theta})|^\delta \, d\theta, \tag{4}$$

где $M$ — произвольное измеримое подмножество интервала $(0,2\pi)$. Как известно**, для каждой функции класса $H_1$ верна формула Пуассона

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} \, dt, \tag{5}$$

и наоборот, если верна формула Пуассона, то функция $f(\xi)$ принадлежит классу $H_1$. Положим

$$f(\xi) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} (a_n - ib_n)\, \xi^n \quad (|\xi| < 1). \tag{6}$$

Из формулы (5) следует, что тригонометрические ряды

$$a_0 + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \text{ и}$$

$$-b_0 + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta) \tag{7}$$

суть ряды Фурье суммируемых функций $u(n^{i\theta})$ и $v(e^{i\theta})$, где

$$f(e^{i\theta}) = u(e^{i\theta}) - iv(e^{i\theta}).$$

Наоборот, если ряды (7) суть ряды Фурье суммируемых функций, то очевидно, что к функции (6) применима формула (5), и потому эта функция принадлежит классу $H_1$.

Отметим еще следующее утверждение***.

---

* F. Riesz. — Meth. Zeitchr., Bd. 18, 1923. S. 87—95.

** Gr. Fichtenholz. — Fund. Math., vol. 13. S. 26, 1929, p. 1—33.

*** V. Smirnoff. — Journ. Soc. phys. Math. de Leningrad. Bd. 2, Heft 2, 1930. S. 23—24.

**Лемма 3.** *Если функция* $f(\xi)$ *принадлежит классу* $H_\alpha$, *а* $|f(e^{i\theta})|^\beta$ *суммируема при некотором* $\beta > \alpha$, *то* $f(\xi)$ *принадлежит классу* $H_\beta$.

**4.** Будем говорить, что регулярная в круге $|\xi| < 1$ функция $f(\xi)$ принадлежит классу $A_1$, если $f(\xi)$ непрерывна в замкнутом круге $|\xi| \leq 1$ и абсолютно непрерывна на его границе $|\xi| = 1$. Если, кроме того, $\left|\frac{df(e^{i\theta})}{d\theta}\right|^{p_1}$ $(p_1 > 1)$ суммируема, то мы будем говорить, что $f$ принадлежит классу $A_{p_1}$.

Если $F(\xi)$ принадлежит $A_1$, то

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(e^{it}) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} dt$$

и

$$i\xi F'(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(e^{it}) \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(e^{it}) \frac{\partial}{\partial t} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} dt.$$

Интегрируя по частям, находим

$$i\xi F'(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dF(e^{it})}{dt} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} dt, \tag{8}$$

т. е. к функции $i\xi F'(\xi)$ применима формула Пуассона, и потому эта функция принадлежит классу $H_1$. Кроме того, как известно*, граничные значения интеграла Пуассона (8) почти везде равны $dF(e^{i\theta})/d\theta$. Поэтому мы приходим к формуле

$$F'(e^{i\theta}) = \frac{dF(e^{i\theta})}{d(e^{i\theta})} = -ie^{-i\theta}\frac{dF(e^{i\theta})}{d\theta}. \tag{9}$$

Из леммы 3 следует, что если функция $F(\xi)$ принадлежит классу $A_{p_1}$ $(p_1>1)$, то функция $F'(\xi)$ принадлежит классу $H_{p_1}$. Тогда функция $|F'(e^{i\theta})|^{p_1}$ суммируема в силу формулы (9). Допустим, наоборот, что $F'(\xi)$ принадлежит классу $H_1$, и положим

$$F'(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n - i\beta_n)\xi^n.$$

---

* P. Fatou, l. c. S. 349, 377—378.

Из результатов п. 3 следует, что тригонометрические ряды

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \text{ и } -\beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta_n \cos n\theta + \alpha_n \sin n\theta)$$

суть ряды Фурье—Лебега, т. е. ряды Фурье некоторых суммируемых функций $u_1(e^{i\theta})$ и $v_1(e^{i\theta})$. Соответствующие тригонометрические ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos(n+1)\theta + \beta_n \sin(n+1)\theta}{n+1}$$

и
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\beta_n \cos(n+1)\theta + \alpha_n \sin(n+1)\theta}{n+1} \tag{10}$$

для первообразной

$$F(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n - i\beta_n}{n+1} \xi^{n+1}$$

получаются интегрированием рядов Фурье функций

$$-u_1(e^{i\theta}) \sin\theta - v_1(e^{i\theta}) \cos\theta \text{ и } u_1(e^{i\theta}) \cos\theta - v_1(e^{i\theta}) \sin\theta.$$

Поэтому ряды (10) — это ряды Фурье абсолютно непрерывных функций $u_2(e^{i\theta})$ и $v_2(e^{i\theta})$*. Кроме того, $F(\xi)$ представима интегралом Пуассона

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u_2(e^{i\theta}) + iv_2(e^{i\theta})] \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} dt,$$

а потому непрерывна в замкнутом круге $|\xi| \leqslant 1$, причем ее граничные значения равны $u_2(e^{i\theta}) + iv_2(e^{i\theta})$. Таким образом, $F(\xi)$ принадлежит классу $A_1$. Если $F'(\xi)$ принадлежит классу $H_{p_1}$ $(p_1 > 1)$, то $|F'(e^{i\theta})|^{p_1}$ суммируема, и из формулы (9) следует, что $F(\xi)$ принадлежит классу $A_{p_1}$. Итак, справедливо следующее утверждение.

**Лемма 4.** *Если функция $F(\xi)$ принадлежит классу $A_{p_1}$ $(p_1 \geqslant 1)$, то ее производная $F'(\xi)$ принадлежит классу $H_{p_1}$, и наоборот. Для граничных значений функции $F'(\xi)$ верна формула* (9).

В дальнейшем мы воспользуемся следующей теоремой М. Рисса**. *Пусть $f_1(\theta)$ — функция класса $L^{p_1}$ $(p_1 > 1)$, т. е.*

---

* A. Lebesgue.— Ann. École Norm., t. 3, № 20, 1903, S. 484.

** M. Riesz. — Math. Zeitschr., Bd. 27, 1928. S. 224—226.

*пусть* $f_1(\theta)$ *измерима, а* $|f_1(\theta)|^{p_1}$ *суммируема в интервале* $(0,2\pi)$, *и пусть*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \tag{11}$$

*— ее ряд Фурье. Тогда и сопряженный ряд*

$$-b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta) \tag{12}$$

*есть ряд Фурье некоторой функции* $\tilde{f}_1(\theta)$ *класса* $L^{p_1}$.

Поскольку ряды (11) и (12) суть ряды Фурье, то функция

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n)\xi^n \tag{13}$$

представима по формуле Пуассона

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f_1(t) + i\tilde{f}_1(t)] \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\,dt$$

и потому принадлежит классу $H_1$. Как известно, граничные значения интеграла Пуассона почти везде равны $f(e^{i\theta}) = f_1(\theta) + i\tilde{f}_1(\theta)$. Значит, функция $|f(e^{i\theta})|^{p_1}$ суммируема, и по лемме 3 функция $f(\xi)$ принадлежит классу $H_{p_1}$.

Точно так же можно показать, что если (11) есть ряд Фурье абсолютно непрерывной функции $f_1(\theta)$, производная которой принадлежит $L^{p_1}$ $(p_1 > 1)$, то ряд (12) есть также ряд Фурье некоторой функции с теми же свойствами*, а функция $f(\xi)$ принадлежит классу $A_{p_1}$.

**Лемма 5.** *Если ряд* (11) *есть ряд Фурье абсолютно непрерывной функции, производная которой принадлежит классу* $L^{p_1}$ $(p_1 > 1)$, *то функция* (13) *принадлежит классу* $A_{p_1}$. *Если ряд* (11) *есть ряд Фурье функции класса* $L^{p_1}$, *то функция* (13) *принадлежит классу* $H_{p_1}$.

**5.** Мы докажем еще следующую лемму**.

**Лемма 6.** *Если оба сопряженных ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}(-b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta) \tag{14}$$

*суть ряды Фурье функций ограниченной вариации* $\psi_1(\theta)$ *и* $\psi_2(\theta)$, *то эти функции эквивалентны абсолютно непрерывным функциям.*

---

* L. Seidel, l. c. S. 223—224.

** F. und M. Riesz. Vierter Skand. Mathem.-Kongreß. Stockholm, 1916, S. 44.

Действительно, рассмотрим функцию

$$\psi(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-ib_n)\xi^n \quad (|\xi|>1),$$

представимую по формуле Пуассона

$$\psi(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\psi_1(t)+i\psi_2(t)]\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}dt. \qquad (15)$$

Тогда

$$\chi(\xi)=i\xi\psi'(\xi)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\psi_1(t)+i\psi_2(t)]\frac{\partial}{\partial t}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}dt.$$

Мы можем предполагать, что $\psi_1(2\pi)=\psi_1(0)$, $\psi_2(2\pi)=\psi_2(0)$. Поэтому, интегрируя по частям, получаем

$$\chi(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}d[\psi_1(t)+i\psi_2(t)],$$

где интеграл нужно понимать в смысле Стилтьеса. Функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ представимы в виде разностей возрастающих функций, и из этого разложения получаем

$$\chi(\xi)=u_1(\theta,r)-u_2(\theta,r)+iu_3(\theta,r)-iu_4(\theta,r),$$

где $u_m(\theta,r)$ — положительные гармонические функции. Итак,

$$|\chi(\xi)|\leq\sum_{m=1}^{4}u_m(r,\theta),$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\chi(re^{i\theta})|d\theta\leq\sum_{m=1}^{4}u_m(0).$$

Таким образом, $\chi(\xi)$ принадлежит классу $H_1$, откуда следует, что $\psi'(\xi)$ обладает тем же свойством. По лемме 4 $\psi(\xi)$ принадлежит классу $A_1$. Формула (15) показывает, что $\psi_1(\theta)$ и $\psi_2(\theta)$ эквивалентны абсолютно непрерывным функциям.

**6.** После этих приготовлений мы подходим к нашей теме.

Пусть, как и в п. 1, $\omega(\xi)$ — функция, которая осуществляет конформное отображение круга $|\xi|<1$ на область $B$. Поскольку граница области $B$ — спрямляемая жорданова кривая, то $\omega(\xi)$ непрерывна в замкнутом круге $|\xi|\leq 1$, а на его границе имеет ограниченную вариацию. По лемме 6 $\omega(\xi)$ принадлежит классу $A_1$, так что $\omega'(\xi)$ принадлежит классу $H_1$. Рассмотрим регулярную в круге $|\xi|<1$ функцию

$$\lg\omega'(\xi)=\lg|\omega'(\xi)|+i\arg\omega'(\xi). \qquad (16)$$

Функцию $\varphi(s)$ (см. п. 1) можно считать функцией угла $\theta$. Если эта функция $\varphi(s)$ или $\varphi(\theta)$ непрерывна, то мнимая часть функции (16) по лемме 1 непрерывна в замкнутом круге $|\xi| \leqslant 1$, а ее граничные значения равны

$$\varphi(\theta) - \theta - \pi/2. \tag{17}$$

По лемме 5 функция (16) принадлежит классу $H_p$ при любом положительном $p$ и, в частности, представима интегралом Пуассона.

Допустим теперь, что $\varphi(s)$ абсолютно непрерывна. Как уже говорилось, $\omega(\xi)$ принадлежит классу $A_1$, а $\omega'(\xi)$—классу $H_1$, и

$$\omega'(e^{i\theta}) = -ie^{-i\theta}\,\frac{d\omega(e^{i\theta})}{d\theta}$$

(см. п. 4). Таким образом,

$$s = \int_0^\theta |\omega'(e^{it})|\,dt, \tag{18}$$

т. е. $s$ есть возрастающая абсолютно непрерывная функция угла $\theta$, а потому функция (17) есть абсолютно непрерывная $2\pi$-периодическая функция от $\theta$. По лемме 2 функция

$$e^{m\lg|\omega'(e^{i\theta})|} = |\omega'(e^{i\theta})|^m \tag{19}$$

суммируема при любом вещественном $m$. Кроме того, $|\omega'(e^{i\theta})| \neq$ $\neq 0$ почти везде, и

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{d\varphi}{ds}\,|\omega'(e^{i\theta})|. \tag{20}$$

Допустим, наконец, что $\varphi(s)$ абсолютно непрерывна, а $\frac{d\varphi(s)}{ds}$ принадлежит классу $L^{p_1}$ $(p_1 > 1)$. Докажем, что $\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}$ принадлежит тому же классу. С этой целью мы воспользуемся неравенством Гельдера

$$\left|\int_M h(x)\,g(x)\,dx\right|^k \leqslant \int_M |h(x)|^k\,dx\left(\int_M |g(x)|^{\frac{k}{k-1}}\,dx\right)^{k-1} \quad (k>1),$$

в котором из сходимости интегралов в правой части следует сходимость интеграла в левой. Применим его к интегралу

$$J = \int_0^{2\pi}\left|\frac{d\varphi}{d\theta}\right|^{p_2} d\theta,$$

который в силу (18) и (20) можно записать так:

$$J = \int_0^{2\pi} \left| \frac{d\varphi}{d\theta} \right|^{p_2} d\theta = \int_0^{l} \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|^{p_2} |\omega'(e^{i\theta})|^{p_2-1} ds,$$

где $l$ — длина кривой $\Gamma$, а $p_2$—фиксированное число, удовлетворяющее неравенству $1 < p_2 < p_1$. Из неравенства Гельдера следует, что

$$\left( \int_0^{2\pi} \left| \frac{d\varphi}{d\theta} \right|^{p_2} d\theta \right)^k \leq \int_0^{l} \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|^{p_2 k} ds \left( \int_0^{l} |\omega'(e^{i\theta})|^{\frac{(p_2-1)k}{k-1}} ds \right)^{k-1},$$

или

$$\left( \int_0^{2\pi} \left| \frac{d\varphi}{d\theta} \right|^{p_2} d\theta \right)^k \leq \int_0^{l} \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|^{p_2 k} ds \left( \int_0^{2\pi} |\omega'(e^{i\theta})|^{\frac{(p_2k-1)}{k-1}} d\theta \right)^{k-1}.$$

Выберем число $k > 1$ так, что $p_2 k < p_1$, и заметим, что функция (19) суммируема при любом вещественном $m$. Мы видим, что $\left| \frac{d\varphi}{d\theta} \right|^{p_2}$ при $p_2 < p_1$ суммируема по $\theta$. Значит, если $\varphi(s)$ абсолютно непрерывна и $\frac{d\varphi}{ds}$ принадлежит классу $L^{p_1}$, то функция (17) угла $\theta$ абсолютно непрерывна, а ее производная по $\theta$ принадлежит классу $H_{p_2}$ при $p_2 < p_1$. Лемма 5 показывает, что функция (16) принадлежит классу $A_{p_2}$. Обозначив ее через $\omega_1(\xi)$, находим

$$\omega'(\xi) = e^{\omega_1(\xi)}, \quad \omega''(\xi) = e^{\omega_1(\xi)} \omega_1'(\xi).$$

Функция $\omega'(\xi)$, очевидно, принадлежит классу $A_1$, и, следовательно, $\omega''(\xi)$ принадлежит $H_1$. Но так как $\omega_1(\xi)$ принадлежит классу $H_{p_2}$, то функция

$$\omega''(e^{i\theta}) = e^{\omega_1(e^{i\theta})} \omega_1'(e^{i\theta})$$

принадлежит $L^{p_2}$, и по лемме 3 $\omega''(\xi)$ принадлежит классу $H_{p_2}$. Значит, $\omega'(\xi)$ тоже принадлежит классу $A_{p_2}$, и $|\omega'(e^{i\theta})|$ имеет положительную нижнюю границу:

$$|\omega'(e^{i\theta})| \geqslant \mu > 0. \tag{21}$$

Но формула

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{d\varphi}{ds} |\omega'(e^{i\theta})| \tag{22}$$

показывает, что $\frac{d\varphi}{d\theta}$ принадлежит тому же классу $L^{p_1}$, что и функция $\frac{d\varphi}{ds}$. Поэтому в предшествующих рассмотрениях можно положить $p_2 = p_1$. Так как функция $\omega'(\xi)$ принадлежит классу $A_{p_1}$, то по лемме 4 $\omega''(\xi)$ принадлежит классу $H_{p_1}$, а для граничных значений $\omega''(e^{i\theta})$ почти везде справедливо равенство

$$\omega''(e^{i\theta}) = -ie^{-i\theta}\frac{d\omega'(e^{i\theta})}{d\theta} = \frac{d\omega'(e^{i\theta})}{d(e^{i\theta})}.$$

Итак, мы получили следующую теорему.

**Теорема 1.** *Если $\varphi(s)$ абсолютно непрерывна, а $\frac{d\varphi(s)}{ds}$ принадлежит классу $L^{p_1}$ $(p_1 > 1)$, то функция $\omega'(\xi)$ непрерывна в замкнутом круге $|\xi| \leqslant 1$ и абсолютно непрерывна на его границе $|\xi| = 1$; $\omega''(\xi)$ принадлежит классу $H_{p_1}$, а для ее граничных значений почти везде*

$$\omega''(e^{i\theta}) = -ie^{-i\theta}\frac{d\omega'(e^{i\theta})}{d\theta} = \frac{d\omega'(e^{i\theta})}{d(e^{i\theta})},$$

*и $|\omega'(e^{i\theta})|$ имеет положительную нижнюю границу.*

7. Допустим теперь, что $\varphi(s)$ и $\frac{d\varphi(s)}{ds}$ абсолютно непрерывны и что $\frac{d^2\varphi(s)}{ds^2}$ принадлежит классу $L^{p_1}$ $(p_1 > 1)$. Так как функция $\omega'(e^{i\theta})$ абсолютно непрерывна, то из равенства (22) следует, что $\frac{d\varphi}{d\theta}$ также абсолютно непрерывна. По предположению $\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|^p$ суммируема при любом положительном $p$, а потому по теореме 1 $|\omega''(e^{i\theta})|^p$ обладает тем же свойством.

Положим

$$\omega'(e^{i\theta}) = u_1(e^{i\theta}) + iv_1(e^{i\theta}).$$

Функции $u_1(e^{i\theta})$ и $v_1(e^{i\theta})$ абсолютно непрерывны, а $u_1'(e^{i\theta})$ и $v_1'(e^{i\theta})$ принадлежат классу $L^p$ при каждом положительном значении $p$. То же верно, очевидно, и для производной функции $|\omega'(e^{i\theta})| = \sqrt{u_1^2(e^{i\theta}) + v_1^2(e^{i\theta})}$. С помощью формулы

$$\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} = \frac{d^2\varphi}{ds^2}|\omega'(e^{i\theta})|^2 + \frac{d\varphi}{ds}\frac{d|\omega'(e^{i\theta})|}{d\theta}$$

мы видим, что $\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}$ принадлежит тому же классу $L^{p_1}$, что и $\frac{d^2\varphi}{ds^2}$.

Рассмотрим теперь функцию

$$\lg\omega'(\xi) = \lg|\omega'(\xi)| + i\arg\omega'(\xi),$$

принадлежащую классу $A_1$. По лемме 1 функция

$$\omega_1(\xi) = \frac{\omega''(\xi)}{\omega'(\xi)}\xi \tag{23}$$

принадлежит классу $H_1$, а граничные значения ее мнимой части равны

$$v(e^{i\theta}) = -i\frac{d}{d\theta}\left[\varphi(\theta) - \theta - \frac{\pi}{2}\right] = -i\left(\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta} - 1\right).$$

Последняя функция угла $\theta$ абсолютно непрерывна, а ее производная принадлежит классу $L^{p_1}$. Поэтому функция

$$\omega_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n - i\beta_n)\xi^n \quad (|\xi| < 1)$$

представима по формуле Пуассона

$$\omega_1(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(e^{i\theta}) + iv(e^{i\theta})]\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta - t) + r^2}dt,$$

где $u(e^{i\theta})$ — вещественная часть функции $\omega_1(\xi)$, а $v(e^{i\theta})$ обладает вышеуказанными свойствами. Поскольку ряд

$$-\beta_0 + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(-\beta_n\cos n\theta + \alpha_n\sin n\theta)$$

есть ряд Фурье функции $v(e^{i\theta})$, то из леммы 5 следует, что функция $\omega_1(\xi)$ принадлежит классу $A_{p_1}$. Тому же классу, очевидно, принадлежит и функция

$$\frac{\omega''(\xi)}{\omega'(\xi)} = \frac{\omega_1(\xi)}{\xi} = \omega_2(\xi).$$

Теперь ясно, что функция

$$\omega''(\xi) = \omega_2(\xi)\,\omega'(\xi)$$

принадлежит классу $A_1$. Но можно показать, что производная от $\omega''(e^{i\theta})$ принадлежит классу $L_{p_1}$, откуда следует, что $\omega''(\xi)$ принадлежит классу $A_{p_1}$. Действительно,

$$\frac{d\omega''(e^{i\theta})}{d\theta} = \frac{d\omega_2(e^{i\theta})}{d\theta}\omega'(e^{i\theta}) + \omega_2(e^{i\theta})\frac{d\omega'(e^{i\theta})}{d\theta}. \tag{24}$$

Но функция $\omega_2(\xi)$ принадлежит классу $A_{p_1}$, и поэтому функция

$$\left|\frac{d\omega_2(e^{i\theta})}{d\theta}\right|^{p_1}$$

суммируема. В то же время, по лемме 4

$$\frac{d\omega'(e^{i\theta})}{d\theta} = ie^{i\theta}\omega''(e^{i\theta}),$$

и эта функция абсолютно непрерывна. Итак, функция (24) принадлежит классу $L^{p_1}$, а функция $\omega''(\xi)$ — классу $A_{p_1}$. Но тогда из леммы 4 следует, что $\omega'''(\xi)$ принадлежит классу $H_{p_1}$.

Таким образом, мы получили следующую теорему.

**Теорема 2.** *Если* $\varphi(s)$ *и* $\frac{d\varphi(s)}{ds}$ *абсолютно непрерывны, а* $\frac{d^2\varphi(s)}{ds^2}$ *принадлежит классу* $L^{p_1}$ $(p_1 > 1)$, *то функция* $\omega''(\xi)$ *непрерывна в замкнутом круге* $|\xi| \leqslant 1$ *и абсолютно непрерывна на его границе* $|\xi| = 1$; *функция* $\omega'''(\xi)$ *принадлежит классу* $H_{p_1}$, *и ее граничные значения равны*

$$\omega'''(e^{i\theta}) = \frac{d\omega''(e^{i\theta})}{d(e^{i\theta})} = -ie^{-i\theta}\frac{d\omega''(e^{i\theta})}{d\theta}.$$

## О ФОРМУЛАХ КОШИ И ГРИНА И О НЕКОТОРЫХ СВЯЗАННЫХ С НИМИ ПРОБЛЕМАХ*

**1.** Пусть $B$ — односвязная однолистная область на плоскости комплексной переменной $x$, ограниченная спрямляемой кривой Жордана $\Gamma$, а $f(x)$ — функция, регулярная внутри $B$. Основная цель этой работы состоит в том, чтобы получить некоторые результаты о применимости формул Коши и Грина:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - x}d\xi; \qquad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma f(\xi)\frac{\partial G(\xi; x)}{\partial n}ds; \qquad (2)$$

$G(\xi;\ x)$ есть функция Грина области $B$ с полюсом $x$, т. е. $G(\xi;\ x)$ есть функция, гармоническая внутри $B$, равная нулю на $\Gamma$ и имеющая такую особенность в точке $x$, что разность

$$G(\xi; x) - \lg|\xi - x|$$

остается гармонической в точке $x$. Обозначим через $f(\xi)$ граничные значения функции $f(x)$ на контуре $\Gamma$ вдоль некасательных путей, а через $n$ — направление внешней нормали к $\Gamma$. Кроме того, рассмотрим некоторые задачи об ортогональных

* Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problèmes qui s'y rattachent. — Изв. АН СССР, сер. физ.-мат., № 3, 1932, p. 338—372.

системах функций на Г. В последующем мы откажемся в некоторых случаях от требования однолистности области $B$.

Если $B$ — это круг, то формула Грина есть известная формула Пуассона, и в этом случае, как известно, формулы (1) и (2) суть следствия друг друга, а необходимое и достаточное условие их применимости состоит в том, что средние модуля функции $f(x)$ по окружностям, концентрическим с Г, остаются ограниченными, т. е. интегралы

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\lambda})|\,d\lambda \quad (0<r<1),$$

возрастая вместе с $r$, должны быть ограниченными, когда $r\to 1$. Мы считаем, что центр круга $B$ расположен в начале $x=0$, а его радиус равен единице*.

В дальнейшем мы будем заниматься аналогичными вопросами для области $B$, удовлетворяющей условиям, описанным выше.

**2.** Приведем сначала несколько известных результатов, которые будут нам полезны в дальнейшем.

Пусть $K$ — круг $|z|<1$, а $C$ — окружность $|z|=1$. Будем говорить, что функция $\omega(z)$, регулярная внутри круга $K$, принадлежит классу $H_\delta$, где $\delta>0$, если интегралы

$$\int_0^{2\pi}|\omega(re^{i\lambda})|^\delta\,d\lambda,$$

возрастая вместе с $r$, остаются ограниченными при $r\to 1$. Известно, что если функция $\omega(z)$ принадлежит $H_\delta$, то она имеет почти везде граничные значения $\omega(e^{i\varphi})$ вдоль некасательных путей, и

$$\lim_{r\to 1}\int_M|\omega(re^{i\lambda})|^\delta\,d\lambda=\int_M|\omega(e^{i\lambda})|^\delta\,d\lambda,$$

где $M$ — произвольное измеримое подмножество интервала $(0, 2\pi)$; кроме того, имеет место равенство

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}|\omega(re^{i\lambda})-\omega(e^{i\lambda})|^\delta\,d\lambda=0.$$

Если $\omega(z)$ обладает бесконечным множеством нулей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ внутри $K$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|) \tag{3}$$

* Gr. Fichtenholz.— Fundamenta Mathematicae, t. 13, 1929.

сходится, а функция

$$b(z) = \prod_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \frac{1 - z/\alpha_n}{1 - \overline{\alpha}_n z},$$

которую мы назовем „функцией Бляшке", удовлетворяет внутри $K$ условию $|b(z)| < 1$ и обладает почти везде граничными значениями, равными по модулю единице*.

Все функции класса $H_\delta$ допускают параметрическое представление вида

$$\omega(z) = b(z) \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg p(\lambda) \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} d\lambda \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} dq(\lambda), \tag{4}$$

где $b(z)$ — функция Бляшке, $p(\lambda)$ неотрицательна, причем $\lg p(\lambda)$ и $[p(\lambda)]^\delta$ суммируемы, $q(\lambda)$ — ограниченная невозрастающая функция, производная которой почти везде равна нулю; соответствующий интеграл есть интеграл Стилтьеса. Символом $\exp x$ мы обозначаем $e^x$. Если функция $\omega(z)$ не имеет нулей, то в формуле (4) нужно положить $b(z) \equiv 1$. Взяв числа $\alpha_n$ и функции $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$ при единственном условии, что они обладают вышеупомянутыми свойствами, мы получим по формуле (4) некоторую функцию $\omega(z)$, принадлежащую $H_\delta$. Можно выразить этот факт, сказав, что формула (4) дает параметрическое представление класса $H_\delta$**.

Легко видеть, что $p(\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ почти везде совпадает с модулем граничных значений функции $\omega(z)$, т. е. $p(\varphi) = |\omega(e^{i\varphi})|$. Первый и третий сомножители в правой части формулы (4) имеют почти везде граничные значения, по модулю равные единице, а внутри $K$ их модули меньше единицы. Следовательно, функция

$$D(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg p(\lambda) \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} d\lambda \tag{5}$$

среди всех функций класса $H_\delta$ с модулем граничных значений, равным $p(\varphi)$, имеет наибольший модуль внутри $K$. Мы назовем эту функцию „максимальной функцией с граничным модулем $p(\varphi)$".

Как мы уже говорили, для справедливости формул Коши и Пуассона

$$\omega(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(e^{i\lambda}) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \lambda) + r^2} d\lambda \tag{6}$$

---

* F. Riesz.— Math. Ztschr., Bd. 18, H. 1/2, 1923.

** V. Smirnoff. Journ. Soc. Phys.—Math. Leningr., t. II, fasc. 2, 1928, p. 22—37.

необходимо и достаточно, чтобы функция $\omega(z)$ принадлежала классу $H_1$. Положим

$$\omega(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-ib_n)z^n. \tag{7}$$

Формула (6) равносильна тому факту, что тригонометрические ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi) \tag{$8_1$}$$

$$\text{и}\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-b_n\cos n\varphi+a_n\sin n\varphi) \tag{$8_2$}$$

суть ряды Фурье—Лебега, т. е. ряды Фурье суммируемых функций.

Функции $\omega(z)$ класса $H_1$ обладают еще одним замечательным свойством: для того, чтобы первообразная

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n-ib_n}{n+1}z^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n-i\beta_n)z^n$$

была непрерывна в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ и абсолютно непрерывна на окружности $|z|=1$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\omega(z)$ принадлежала классу $H_1$.

Предположим, что функция $F(z)$ обладает вышеупомянутым свойством. В этом случае ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\sin n\varphi)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-\beta_n\cos n\varphi+\alpha_n\sin n\varphi)$$

суть ряды Фурье абсолютно непрерывных функций. Дифференцируя их, мы получим ряды Фурье—Лебега, откуда следует, что ряды (8) суть ряды Фурье—Лебега, и, следовательно, имеет место формула (6) и функция $\omega(z)$ принадлежит классу $H_1$. Доказательство обратного утверждения можно найти в мемуаре Ф. Рисса, цитированном выше.

Можно также сказать, что первообразные функций класса $H_1$ образуют класс функций, которые непрерывны в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ и отображают этот круг на ограниченную часть некоторой римановой поверхности, имеющую спрямляемый контур*.

---

* См., например, F. et M. Riesz. IV Congr. des Math. Scandin. à Stockholm, 1916.

Такие области мы будем называть областями типа $\alpha$.

Это обстоятельство связано с тем, что если два сопряженных тригонометрических ряда суть ряды Фурье функций ограниченной вариации, то они суть ряды Фурье абсолютно непрерывных функций. Эта теорема немедленно следует из двух теорем, указанных в моем мемуаре, цитированном выше.

Мы определили класс $H_\delta$ условием ограниченности интегралов

$$\int_0^{2\pi} |\omega(re^{i\lambda})|^\delta \, d\lambda.$$

Можно дать другое определение этого класса, которое инвариантно относительно конформного отображения: функция $\omega(z)$ принадлежит классу $H_\delta$, если $|\omega(z)|^\delta$ имеет внутри круга $K$ гармоническую мажоранту, т. е. если существует такая функция $U(r, \varphi)$, гармоническая внутри $K$, что $U(r, \varphi) \geqslant |\omega(re^{i\varphi})|^\delta$. Легко доказать равносильность этих двух определений с помощью теоремы Гарнака. Второе определение класса $H_\delta$ применимо к каждой односвязной области.

**3.** Отметим еще два класса функций, один из которых будет нам очень полезен в дальнейшем. Вместо формулы (4) определим класс $A$ с помощью следующего параметрического представления:

$$\omega(z) = b(z) \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q_1(\lambda) \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} d\lambda \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} dq(\lambda), \quad (9)$$

где $b(z)$ — функция Бляшке, $q_1(\lambda)$ — вещественная суммируемая функция, $q(\lambda)$ — вещественная функция ограниченной вариации, производная которой почти везде равна нулю. Этот класс $A$ совпадает с классом функций, для которых интегралы

$$\int_0^{2\pi} \lg^+ |\omega(re^{i\lambda})| \, d\lambda \quad (10)$$

остаются ограниченными. Символ $\lg^+$ равен $\lg a$ при $a \geqslant 1$ и нулю при $0 < a \leqslant 1$*.

Можно еще сказать, что класс $A$ есть класс функций $\omega(z)$, для которых $\lg^+|\omega(z)|$ имеет гармоническую мажоранту. Это определение применимо к любой односвязной области. Как известно, класс $A$ можно еще определить, потребовав, чтобы функция $\omega(z)$ была частным двух ограниченных регулярных функций.

---

* V. Smirnoff, l. c.

Определим еще один класс функций с помощью параметрического представления вида (9), где $b(z)$ — функция Бляшке, $q_1(\lambda)$ — суммируемая функция, а $q(\lambda)$ — невозрастающая функция, производная которой почти везде равна нулю. Этот класс $D$ очевидно составляет часть класса $A$.

Для этого класса $D$ модули первого и третьего сомножителей в правой части формулы (9) меньше единицы внутри круга $K$. Кроме того, верна следующая теорема: для того чтобы функция $\omega(z)$ принадлежала классу $D$, необходимо и достаточно, чтобы интегралы (10) оставались ограниченными и

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} \lg^+|\omega(re^{i\lambda})|\,d\lambda = \int_0^{2\pi} \lg^+|\omega(e^{i\lambda})|\,d\lambda. \qquad (11)$$

Этот результат и его доказательство принадлежат П. Кочиной. С ее любезного разрешения я цитирую здесь этот результат, чтобы воспользоваться им в дальнейшем.

Пусть $n$ —целое положительное число. Введем функцию

$$q_n(\lambda) = \begin{cases} q_1(\lambda) & \text{для } q(\lambda) \leqslant n, \\ n & \text{для } q(\lambda) > n \end{cases}$$

и положим

$$\omega_n(z) = b(z)\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q_n(\lambda)\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\,d\lambda\,\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\,dq(\lambda). \qquad (12)$$

Эта функция ограничена, так как очевидно $|\omega_n(z)| \leqslant e^n$. Из формул (10) и (12) следует, что $|\omega_n(z)| \leqslant |\omega(z)|$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n(z) = \omega(z)$ равномерно внутри $K$, т. е. равномерно в каждой области, расположенной вместе со своим контуром внутри $K$. Следовательно, каждую функцию $\omega(z)$ класса $D$ можно приблизить ограниченными минорантами $\omega_n(z)$ так, что $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n(z) = \omega(z)$ равномерно внутри $K$. Покажем теперь, что если такое приближение возможно, то функция $\omega(z)$ принадлежит классу $D$.

Частное $\omega_n(z)/\omega(z)$ есть ограниченная функция, и, следовательно, функция $\omega(z)$ есть частное двух ограниченных функций, а потому принадлежит классу $A$. Пусть

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg^+|\omega(re^{i\lambda})|\,d\lambda = \alpha; \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg^+|\omega(e^{i\lambda})|\,d\lambda = \beta.$$

Если $\omega(z)$ не принадлежит классу $D$, то в силу известной теоремы Фату $\beta < \alpha$. Предположим, что это неравенство верно, и рассмотрим положительное число $m = \alpha - \beta$. Зафиксируем число $r$ так, чтобы

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg^+ |\omega(re^{i\lambda})|\,d\lambda \geqslant \alpha - \frac{m}{4},$$

и выберем столь большое $n$, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg^+ |\omega_n(re^{i\lambda})|\,d\lambda \geqslant \alpha - \frac{m}{2}.$$

Это возможно, так как $\omega_n(z)$ стремится к $\omega(z)$ равномерно на окружности $|z| = r$. Кроме того, $|\omega_n(z)| \leqslant |\omega(z)|$, и, следовательно,

$$\beta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg^+ |\omega(e^{i\lambda})|\,d\lambda \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg^+ |\omega_n(e^{i\lambda})|\,d\lambda \geqslant \alpha - \frac{m}{2}.$$

Но неравенство $\beta \geqslant \alpha - \frac{m}{2}$ противоречит равенству $\alpha - \beta = m$, и, следовательно, наше допущение, что функция $\omega(z)$ не принадлежит классу $D$, неверно.

Итак, мы доказали, что класс $D$ можно определить тем свойством, что каждую функцию $\omega(z)$ этого класса можно приблизить ее ограниченными минорантами равномерно внутри $K$. Это определение инвариантно относительно конформного отображения и применимо к любой односвязной области.

Параметрические представления классов $D$ и $H_\delta$ дают следующий результат: для того, чтобы функция $\omega(z)$ принадлежала классу $H_\delta$ в круге $K$, необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала классу $D$, а функция $|\omega(e^{i\lambda})|^\delta$ была суммируема. Следовательно, для применимости формул Коши и Грина в случае круга необходимо и достаточно, чтобы функция $\omega(z)$ принадлежала классу $H_\delta$, а ее предельные значения $\omega(e^{i\lambda})$ были суммируемы. В дальнейшем мы получим аналогичный результат для случая произвольной односвязной области со спрямляемым контуром.

**4.** Установим теперь условия, необходимые и достаточные для справедливости формул Коши и Грина.

Пусть $x = \psi(z)$ — функция, совершающая конформное отображение круга $K$ ($|z| < 1$) на область $B$. Обозначим через $z = \chi(x;\ x_0)$ обратную функцию, где $x_0$ есть образ точки $z = 0$, т. е. $x_0 = \psi(0)$. Если $B$ есть общая область типа $\alpha$, то производная $\psi'(z)$ имеет почти везде граничные значения $\psi'(e^{i\lambda})$, совпадающие почти везде со значениями производной абсолютно непрерывной функции $\psi(e^{i\lambda})$; эта производная берется вдоль окружности $C$ ($|z|=1$)*.

Формулу Грина (2) можно записать для области $B$ типа $\alpha$ в следующем виде:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} f(\xi)\,|\chi'(\xi;\,x)|\,ds=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f\,[\psi(e^{i\lambda})]\,d\lambda,$$

т. е. формула Грина равносильна тому факту, что теорема Гаусса верна для $f(x)$ после преобразования области $B$ на круг $K$, при котором точка $z=0$ отвечает точке $x$. Если мы в конформном отображении $z=\chi(x;\,x_0)$ зафиксируем точку $x_0$, то формула Грина для области $B$ превратится в формулу Пуассона для круга $K$, и, следовательно, необходимое и достаточное условие справедливости формулы Грина состоит в том, чтобы функция $f[\psi(z)]$ принадлежала классу $H_1$, т. е. чтобы функция $|f(x)|$ имела в области $B$ гармоническую мажоранту. В этих рассуждениях нам не нужно предполагать, что область $B$ однолистна. Это предположение будет существенно в последующих рассуждениях, относящихся к формуле Коши.

Пусть $\Gamma_r$ — кривая внутри $B$, отвечающая окружности $|z|=r$. Уравнение этой кривой имеет вид

$$x=\psi(re^{i\varphi})\quad(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi).$$

Докажем, что необходимое и достаточное условие справедливости формулы Коши состоит в том, что интегралы $\int\limits_{\Gamma_r}|f(\xi)|\,ds$ остаются ограниченными при $r\to 1$. Это значит, что на плоскости комплексной переменной $z$ функция $f[\psi(z)]\,\psi'(z)$ принадлежит классу $H_1$.

Докажем сначала, что указанное условие достаточно. Рассмотрим интеграл

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f[\psi(z')]\,\psi'(z')\,dz'}{\psi(z')-\psi(z)}. \tag{13}$$

Имеем

$$\frac{1}{\psi(z')-\psi(z)}=\frac{1}{\psi'(z)(z'-z)}+\omega(z';\,z),$$

где $\omega(z';\,z)$ есть функция от $z'$, регулярная внутри круга $K$ и непрерывная в замкнутом круге $|z'|\leqslant 1$.

---

* I. Privaloff.—Journ. de l'École Polyt., 2-me série, cahier 24, 1924, p. 77—112.

По условию $f[\psi(z)]\psi'(z)$ принадлежит классу $H_1$, и, следовательно, первое слагаемое суммы

$$I = \frac{1}{\psi'(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f[\psi(z')]\psi'(z')}{z'-z} dz' +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_C f[\psi(z')]\psi'(z')\,\omega(z'; z)\,dz' \tag{14}$$

равно $f[\psi(z)] = f(x)$. Докажем, что второе слагаемое равно нулю. Функция $\omega(z'; z)$, будучи непрерывной в $|z'| \leqslant 1$, ограничена, и функция

$$f[\psi(z')]\ \psi'(z')\ \omega(z'; z)$$

принадлежит поэтому классу $H_1$. Но если функция $\Phi(z)$ принадлежит классу $H_1$, то, как легко видеть, $\int_C \Phi(z)\,dz = 0$. Действительно, разделив вещественную и мнимую части, находим

$$\int_C \Phi(z)\,dz = i \int_0^{2\pi} [\Phi_1(e^{i\lambda}) + i\Phi_2(e^{i\lambda})]\, e^{i\lambda} d\lambda.$$

Учитывая, что к $\Phi(z)$ применима формула Пуассона, а ряды Фурье вещественных функций $\Phi_1(e^{i\lambda})$ и $\Phi_2(e^{i\lambda})$ суть сопряженные тригонометрические ряды, легко доказать, что последний интеграл равен нулю. Таким образом, из формулы (14) следует, что $I = f(x)$, и, учитывая (13), мы можем записать

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi. \tag{15}$$

В этом доказательстве нам не нужно было предполагать, что спрямляемый контур $\Gamma$ есть кривая Жордана. Доказательство необходимости вышеупомянутого условия для формулы Коши гораздо более сложно, и мы будем в нем считать, что $\Gamma$ есть кривая Жордана. Итак, предположим, что формула (15) имеет место, и рассмотрим интеграл

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\chi(\xi) - \chi(z)} d\xi, \tag{16}$$

где функция $z = \chi(x)$ — обратная по отношению к функции $x = \psi(z)$. Запишем следующее равенство:

$$\frac{1}{\chi(\xi) - \chi(x)} = \frac{1}{\chi'(x)(\xi - x)} + \pi(\xi; x),$$

где $\pi(\xi; x)$ — функция от $\xi$, регулярная внутри $B$ и непрерывная в замкнутой области $B$. В силу (15)

$$I_1 = \frac{1}{\chi'(x)} f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\xi)\, \pi(\xi; x)\, d\xi. \tag{17}$$

Мы покажем, что второе слагаемое справа равно нулю. Функцию $\pi(\xi; x)$ можно разложить в ряд многочленов, сходящийся равномерно в замкнутой области $B^*$.

Следовательно, достаточно доказать формулы

$$\int_{\Gamma_r} f(\xi)\, \xi^n d\xi = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Но эти формулы, как известно**, следуют из формулы Коши (15). Итак, формула (17) дает

$$I_1 = \frac{1}{\chi'(x)} f(x) = f[\psi(z)]\, \psi'(z),$$

и, учитывая (16), мы можем заключить, что функция $f[\psi(z)] \times \times \psi'(z)$ представима по формуле Коши, т. е. принадлежит классу $H_1$, и интегралы $\int_r |f(\xi)|\, ds$ остаются ограниченными.

Сделаем еще одно замечание. Пусть $x = \mu(x')$ — функция, отображающая область $B$ на ту же самую область. Положим

$$f_1(x') = f[\mu(x')].$$

Очевидно, что если формула Грина верна для $f(x)$, то она верна и для $f_1(x')$. Для формулы Коши это утверждение теряет силу.

**5.** Функция $\psi'(z)$ принадлежит, как уже говорилось в п. 2, классу $H_1$, и допускает параметрическое представление вида

$$\psi'(z) = b(z) \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg p(\lambda)\, \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z}\, d\lambda \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z}\, dq(\lambda). \tag{18}$$

Если область $B$ не имеет точек разветвления, то эта формула не содержит функции Бляшке $b(z)$. В последующих рассуждениях, относящихся к формуле Коши, мы будем предполагать, что формула (18) не содержит члена с интегралом Стилтьеса, т. е. мы будем предполагать, что параметрическое представление функции $\psi'(z)$ имеет вид

$$\psi'(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg p(\lambda)\, \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z}\, d\lambda, \tag{19}$$

---

* B. Walsh.—Math. Annalen, Bd. 96, Heft 3/4, 1926.

** I. Privaloff, l. c.

где $p(\lambda)$ и $\lg p(\lambda)$ — суммируемые функции. Формула (19) означает, что $\psi'(z)$ есть „максимальная функция с граничным модулем $p(\varphi)$“.

Учитывая, что

$$R\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\lambda-\varphi)+r^2}\quad(z=re^{i\varphi}),$$

где $R$ есть символ вещественной части, легко заключить, что наше дополнительное предположение о $\psi'(z)$ равносильно предположению, что гармоническая функция $\lg|\psi'(z)|$ представима интегралом Пуассона. Впоследствии мы проанализируем наше предположение более подробно, а сейчас, исходя из этого предположения, обратимся к формуле Коши. Имеется бесконечно много функций $\psi(z)$, совершающих конформное отображение круга $K$ на область $B$. Докажем, прежде всего, что если одна из этих функций $\psi_1(z)$ удовлетворяет условию (19), то и любая другая функция $\psi_2(z)$ также ему удовлетворяет. Действительно, можно записать

$$\psi_2(z)=\psi_1[\nu(z)];\ \psi_2'(z)=\psi_1'[\nu(z)]\,\nu'(z),$$

где функция $\nu(z)$ конформно отображает круг $K$ на тот же круг. Эта функция аналитична в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$, и $\lg|\nu'(z)|$ представим интегралом Пуассона. По условию функция $\psi_1'(z)$ есть „максимальная функция с заданным граничным модулем“, и очевидно функция $\psi_1'[\nu(z)]$ также обладает этим свойством, т. е. функция $\lg|\psi_1'[\nu(z)]|$ представима по формуле Пуассона. Мы приходим к выводу, что функция $\lg|\psi_2'(z)|$ также представима по формуле Пуассона, что и требовалось доказать.

Будем говорить, что функция $f(x)$, регулярная внутри области $B$, принадлежит в этой области классу $E_\delta$, если интегралы $\int\limits_{\Gamma_r}|f(\xi)|^\delta ds$ остаются ограниченными при $r\to 1$. На плоскости переменной $z$ это означает, что функция $f[\psi(z)]\,\{\psi'(z)\}^{1/\delta}$ принадлежит классу $H_\delta$. В этом случае функция $f(x)$ имеет почти везде на контуре $\Gamma_\delta$ предельные значения $f(\xi)$ вдоль некасательных путей, $|f(\xi)|^\delta$ суммируема, и

$$\lim_{r\to 1}\int\limits_{\Gamma_r}|f(\xi)|^\delta ds=\int\limits_{\Gamma}|f(\xi)|^\delta\,ds.$$

Легко доказать, что определение класса $E_\delta$ не зависит от выбора функции $x=\psi(z)$.

Предположим, что функция $f(x)$ принадлежит некоторому классу $E_\alpha$ и что функция $|f(\xi)|^\beta$ при $\beta>\alpha$ суммируема на контуре Г. Можно доказать, что в этом случае $f(x)$ принадлежит классу $E_\delta$. Эта теорема в случае круга была доказана автором в работе, цитированной выше.

Действительно,

$$f[\psi(z)]\{\psi'(z)\}^{1/\beta}=f[\psi(z)]\{\psi'(z)\}^{1/\alpha}\{\psi'(z)\}^{-(1/\alpha-1/\beta)}.$$

Два первых сомножителя справа образуют по условию функцию класса $H_\alpha$ и представимы в виде

$$b(z)\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg p(\lambda)\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}d\lambda\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}dq(\lambda),$$

где $q(\lambda)$ — невозрастающая функция, производная которой почти везде равна нулю.

Представление третьего сомножителя следует непосредственно из формулы (19), и мы получаем для левой части такое представление:

$$f[\psi(z)]\{\psi'(z)\}^{1/\beta}=b(z)\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg p_1(\lambda)\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}d\lambda\times$$

$$\times\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}dq(\lambda),$$

где $q(\lambda)$—невозрастающая функция с производной, равной нулю почти везде. Условие суммируемости функции $f(\xi)$ на Г показывает, что функция $|f[\psi(e^{i\lambda})]|^\beta|\psi'(e^{i\lambda})|$ суммируема, т. е. $|p_1(\lambda)|^\beta$ суммируема, функция $f[\psi(z)]\{\psi'(z)\}^{1/\beta}$ принадлежит классу $H_\beta$, а функция $f(x)$ в области $B$ принадлежит классу $E_\beta$.

Выше мы показали, что справедливость формулы Коши равносильна принадлежности классу $E_1$. Предположим, что это имеет место для $f(x)$ и что граничные значения $f(\xi)$ на Г ограничены почти везде:

$$|f(\xi)|\leqslant M \quad (\text{на Г}), \tag{20}$$

где $M$ — постоянная. В этом случае функция $|f(\xi)|^\beta$ суммируема на Г при каждом значении $\beta$. Теперь легко доказать, что неравенство (20) выполняется внутри $B$. Мы применим для этого изящный метод Ландау. В рассматриваемом случае $\{f(x)\}^n$ принадлежит классу $E_1$ для каждого целого положительного значения $n$, и мы имеем формулу Коши

$$\{f(x)\}^n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\{f(\xi)\}^n}{\xi-x}d\xi.$$

Оценивая интеграл, имеем

$$|f(x)| \leqslant M\left(\frac{l}{2\pi\delta}\right)^{1/n},$$

где $l$ — длина кривой $\Gamma$, а $\delta$ — расстояние от точки $x$ до контура $\Gamma$. Устремляя $n$ к бесконечности, находим, что

$$|f(x)| \leqslant M. \tag{21}$$

Итак, мы получили следующую теорему: *если применима формула Коши, а граничные значения почти везде допускают оценку* (20), *то внутри $B$ выполнено неравенство* (21).

Теперь приведем новую форму необходимых и достаточных условий применимости формул Коши и Грина. Для формулы Грина это условие состоит в принадлежности функции $f[\psi(z)]$ классу $H_1$, т. е. принадлежности функции $f[\psi(z)]$ классу $D$ и суммируемости ее граничных значений на окружности $C$. На плоскости $x$ мы получаем следующее условие: $f(x)$ принадлежит классу $D$, а функция $f(\xi)\chi'(\xi;\ x)$ суммируема на $\Gamma$. Достаточно проверить последнее условие для некоторого определенного выбора точки $x$, образом которой служит $z=0$.

Для формулы Коши произведение $f[\psi(z)]\,\psi'(z)$ должно принадлежать классу $H_1$. Учитывая представимость функции $\psi'(z)$ в виде (19), мы можем утверждать, что функция $f[\psi(z)]$ представима в виде (9), где $q(\lambda)$ есть невозрастающая функция, производная которой почти везде равна нулю, т. е. $f[\psi(z)] = f(x)$ должна принадлежать классу $D$, а $f(\xi)$ должна быть суммируемой на $\Gamma$.

Легко видеть, что эти условия в то же время и достаточны для формулы Коши. Мы можем, стало быть, придать необходимым и достаточным условиям справедливости формул Коши и Грина следующую форму: $f(x)$ принадлежит классу $D$, и интеграл, участвующий в формуле, имеет смысл.

Если $\Gamma$ — аналитическая кривая, то

$$0 < m < |\chi'(\xi; x)| < M \quad (\text{на } \Gamma),$$

и интегралы Коши и Грина имеют смысл одновременно, т. е. в случае аналитического контура формулы Коши и Грина суть следствия друг друга.

6. Пусть $F(\xi)$ — ограниченная и измеримая функция, определенная на контуре $\Gamma$ области $B$. С помощью конформного отображения мы получаем функцию $F[\psi(e^{i\lambda})]$, определенную на окружности $C(|z|=1)$. Предположим, что эта функция удовлетворяет следующим условиям:

$$\int\limits_C F[\psi(\xi)]\,\xi^n\,d\xi = 0 \quad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{22}$$

Тогда, как известно, существует функция $F[\psi(z)]$, регулярная внутри круга $K$, граничные значения которой почти везде равны $F[\psi(\xi)]$ и которая представима по формуле Коши. Эта формула влечет принцип модуля, т. е. $F[\psi(z)]$ ограничена внутри $K$. Отсюда следует, что $F[\psi(z)]\psi'(z)$ принадлежит классу $H_1$, и потому функция $F(x)$, регулярная внутри области $B$, также представима по формуле Коши. Из этой формулы вытекают равенства*

$$\int_{\Gamma} F(\xi)\xi^n d\xi = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{23}$$

И наоборот, можно показать, что равенства (22) следуют из равенств (23). Действительно, если эти последние имеют место, то существует функция $F(x)$ с граничными значениями $F(\xi)$, для которой верна формула Коши, и, следовательно, $F[\psi(z)]\psi'(z)$ принадлежит классу $H_1$. По предположению $\psi'(z)$ выражается формулой (19) и $F[\psi(e^{i\lambda})]$ — ограниченная функция.

Отсюда следует, что $F[\psi(z)]$ принадлежит классу $D$, а ее граничные значения определяют суммируемую функцию, т. е. $F[\psi(z)]$ принадлежит классу $H_1$, и выполняются равенства (22), что и требовалось доказать. Чтобы доказать равносильность условий (22) и (23), достаточно предположить, что интегралы, участвующие в этих условиях, имеют смысл.

Если функция $F(\xi)$, заданная на контуре $\Gamma$, непрерывна или эквивалентна непрерывной функции, то условия (22), как известно**, необходимы и достаточны для существования функции $F[\psi(z)]$, регулярной внутри $K$ и непрерывной в замкнутом круге $K$ с граничными значениями $F[\psi(e^{i\varphi})]$. Следовательно, условия (23) имеют тот же смысл для области $B$.

**7.** Остановимся более подробно на предположении, которое выражается формулой (19). В общем случае, если область $B$ типа $\alpha$ не имеет точек разветвления, то функция $\psi'(z)$, принадлежащая классу $H_1$, имеет следующее параметрическое представление:

$$\lg\psi'(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg p(\lambda)\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\,d\lambda + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\,dq(\lambda), \tag{24}$$

где $p(\lambda)$ и $\lg p(\lambda)$ — суммируемые функции, а $q(\lambda)$ — невозрастающая функция, производная которой почти везде равна нулю. Оба слагаемых справа принадлежат всем классам $H_\delta$ с $\delta < 1$***. Граничные значения вещественной части $\lg|\psi'(z)|$ дают суммируемую функцию $\lg p(\lambda)$. Если граничные значения

* I. Privaloff, l. c.

** B. Walsh. — Trans. of Amer. Math. Soc., vol. 30, N2, 1928, p. 472—482.

*** V. Smirnoff, l. c.

мнимой части $\arg\psi'(z)$ также дают суммируемую функцию, то функция $\lg\psi'(z)$ принадлежит классу $H^1$, и в формуле (24) второе слагаемое правой части должно обратиться в нуль. Следовательно, суммируемость граничных значений функции $\arg\psi'(z)$ есть условие, достаточное для того, чтобы выполнялась формула (19). Оно, очевидно, выполнено, если функция $\arg\psi'(z)$ ограничена. Этому достаточному условию наверняка удовлетворяют выпуклые или звездообразные контуры Жордана, а также контуры, составленные из конечного числа дуг с непрерывно меняющейся касательной.

Я не смог доказать формулу (19) в общем случае однолистной области $B$ со спрямляемым контуром. В дальнейшем я укажу лишь несколько условий, равносильных предположению (19) для этого случая.

Пусть $l$ — длина контура Г, а $P_n(x)$ — многочлены, ортогональные на этом контуре:

$$\frac{1}{l}\int_{\Gamma} P_n(x)\overline{P_m(x)}\,ds = \varepsilon_{n,m} \quad (\varepsilon_{n,m}=0 \text{ для } n\neq m,\ \varepsilon_{nn}=1).$$

Я доказал*, что формула (19) дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы формула замкнутости по отношению к многочленам $P_n(x)$ имела место для любой функции $f(x)$ класса $E_2$ в области $B$. Таким образом, формула (19) будет доказана, если мы докажем вышеупомянутую формулу замкнутости.

Введем функцию $x=\psi(z)$, совершающую конформное отображение круга $K(|z|<1)$ на область $B$, и пусть $z=\chi(x;\,a)$ — обратная функция, где $a$ — образ точки $z=0$. Я доказал в цитированном выше мемуаре, что упомянутая формула замкнутости равносильна справедливости такой формулы для функции $F(z)=1$ (формула (45) цитированного мемуара) по отношению к функциям

$$R_n(z)=\sqrt{\frac{2\pi}{l}}\,P_n[\psi(z)]\sqrt{\psi'(z)} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

ортогональным на окружности $C(|z|=1)$. Эта формула имеет следующий вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|P_n(a)|^2=\frac{l}{2\pi}|\chi'(a;\,a)|. \tag{25}$$

Пусть $\mu_n(a)$ — минимум интегралов вида

$$I_n=\frac{1}{l}\int_{\Gamma}|1+a_1(\xi-a)+a_2(\xi-a)^2+\ldots+a_n(\xi-a)^n|^2 ds$$

* V. Smirnoff.—Journ. Soc. Phys. Math. Leningrad, t. II, fasc. I, 1928, p. 155—179.

и $$\mu(a)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(a).$$

Запишем равенство

$$I_n=\frac{1}{l}\int\limits_{\Gamma}\left|\sum\nolimits_{k=0}^{n}\alpha_k P_k(\xi)\right|^2 ds=\sum\nolimits_{k=0}^{n}|\alpha_k|^2$$

при условии

$$\sum\nolimits_{k=0}^{n}\alpha_k P_k(a)=1.$$

Применяя неравенство Коши, получим известную формулу

$$\mu_n(a)=1/\sum\nolimits_{k=0}^{n}|P_k(a)|^2,$$

которая позволяет переписать условие (25), равносильное замкнутости многочленов $P_n(x)$, в следующем виде:

$$\mu(a)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(a)=2\pi/l\,|\chi'(a;\ a)|. \tag{26}$$

Если замкнутость не имеет места, то вместо (26) выполняется неравенство

$$\mu(a)>2\pi/l\,|\chi'(a;\ a)|. \tag{27}$$

Укажем теперь одно условие, достаточное для справедливости равенства (26). Это условие будет также достаточным и для формулы (19). Допустим, что существует последовательность областей $B_n$, сходящихся к $B$ таким образом, что каждая $B_n$ содержит замкнутую область $B$ в своей внутренности и

$$\lim_{n\to\infty}L_n=2\pi, \tag{28}$$

где $L_n$ — длина образа кривой $\Gamma$ при конформном отображении $z=\chi_n(x;\ a)$ области $B_n$ на круг $K$.

Мы покажем сейчас, что формула (26) следует из этого предположения. Введем функцию

$$\delta_n(x)=\sqrt{\chi_n'(x;\ a)}/\sqrt{\chi_n'(a;\ a)}\quad(\delta_n(a)=1).$$

По теореме Рунге можно построить такой многочлен $Q_n(x)$, равный единице при $x=a$, что в замкнутой области $B$ выполнено неравенство

$$|\delta_n(x)-Q_n(x)|<\eta_n,$$

где $\eta_n$ — заранее заданное положительное число. Выберем эти числа так, что $\eta_n\to 0$ при $n\to\infty$. Имеем очевидно

$$\frac{1}{l}\int_{\Gamma}|Q_n(x)|^2 ds \leqslant \frac{1}{l}\int_{\Gamma}|\delta_n(x)-Q_n(x)|^2 ds +$$

$$+\frac{1}{l}\int_{\Gamma}|\delta_n(x)|^2 ds+\frac{2}{l}\int_{\Gamma}|\delta_n(x)-Q_n(x)||\delta_n(x)|\,ds.$$

Применяя неравенство Шварца, получаем

$$\frac{1}{l}\int_{\Gamma}|Q_n(x)|^2 ds \leqslant \eta_n^2+\frac{L_n}{l\,|\chi_n'(a;\,a)|}+\frac{2}{l}\sqrt{l\eta_n^2\,\frac{L_n}{|\chi_n'(a;\,a)|}}. \tag{29}$$

Если $p_n$ — степень многочлена $Q_n$, то

$$\frac{1}{l}\int_{\Gamma}|Q_n(x)|^2 ds \geqslant \mu_{p_n}(a).$$

Из определения величины $\mu_n(a)$ следует, что $\mu_n(a)$ стремится к $\mu(a)$, убывая, и, следовательно,

$$\frac{1}{l}\int_{\Gamma}|Q_n(x)|^2 ds \geqslant \mu(a)$$

при любом значении $n$, т. е.

$$\mu(a) \leqslant \eta_n^2+\frac{L_n}{l\,|\chi_n'(a;\,a)|}+\frac{2}{l}\sqrt{l\eta_n^2\,\frac{L_n}{|\chi_n'(a;\,a)|}}.$$

При $n$, стремящемся к бесконечности, имеем $\eta_n \to 0$, $L_n \to 2\pi$, $\chi_n'(a;\,a) \to \chi'(a;\,a)$, и, следовательно,

$$\mu(a) \leqslant 2\pi/l\,|\chi'(a;\,a)|.$$

Но, как мы уже отмечали выше,

$$\mu(a) \geqslant 2\pi/l\,|\chi'(a;\,a)|,$$

и мы получаем таким образом формулу (26), что и требовалось доказать. Следовательно, указанное выше геометрическое свойство области $B$ оказывается условием, достаточным для формулы (19).

8. Предположим, как и выше, что $B$ — однолистная область, контур которой — спрямляемая кривая Жордана. Я хочу показать в этом параграфе, что формула (19) равносильна тому, что принцип максимума есть следствие формулы Коши. Мы уже показали, что если формула (19) имеет место, то принцип максимума есть следствие формулы Коши. Сейчас мы покажем, что если формула (19) не имеет места, то можно построить функцию $f(x)$, регулярную внутри $B$, граничные

значения которой равны по модулю единице почти везде на Г, которая выражается по формуле Коши и модуль которой везде внутри $B$ больше единицы.

Действительно, пусть параметрическое представление функции $\psi'(z)$ содержит интеграл Стилтьеса:

$$\psi'(z) = \exp \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg p(\lambda)\,\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\,d\lambda \exp \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\,dq(\lambda),$$

где $q(\lambda)$ — ограниченная невозрастающая функция, производная которой почти везде равна нулю. Совершив конформное преобразование на плоскость $x$, положим

$$f(x) = \exp\left[-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\,dq(\lambda)\right].$$

Модуль этой функции выражается по формуле

$$|f(x)| = \exp\left[-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\lambda)+r^2}\,dq(\lambda)\right] \quad (z=re^{i\varphi}).$$

Очевидно, что $|f(x)|>1$ внутри $B$, и граничные значения функции $|f(x)|$ равны единице почти везде. Функция

$$f[\psi(z)]\,\psi'(z) = \exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg p(\lambda)\,\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\,d\lambda$$

принадлежит классу $H_1$, и, следовательно, $f(x)$ выражается по формуле Коши. Итак, функция $f(x)$ обладает всеми свойствами, указанными выше.

Можно указать еще одно утверждение, равносильное формуле (19). Пусть $z=\chi(x)$ — функция, обратная к функции $x=\psi(z)$.

Если параметрическое представление функции $\psi'(z)$ не содержит члена с интегралом Стилтьеса, то представление функции $\chi'(x)=1/\psi'(z)$ не содержит интеграла Стилтьеса с невозрастающей функцией, т. е. функция $\chi'(x)$ принадлежит классу $D$. Обратно, если функция $\chi'(x)$ принадлежит классу $D$, то параметрическое представление функции $\psi'(z)$ не содержит интеграла Стилтьеса. Следовательно, формула (19) равносильна тому, что можно приблизить $\chi'(x)$ ограниченными минорантами, которые сходятся к $\chi'(x)$ равномерно внутри $B$.

**9.** В дальнейшем мы предположим, что $B$ есть общая область типа $\alpha$. В этом случае параметрическое представление функции $\psi'(z)$ может содержать функцию Бляшке и член с интегралом Стилтьеса. Мы рассмотрим влияние этого члена на теорию функций, ортогональных на контуре Г. Для этого нам нужно будет построить некоторые многочлены $q_n(z)$.

Пусть $p(\lambda)$ — неотрицательная функция в промежутке $0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi$, причем функции $p(\lambda)$ и $\lg p(\lambda)$ суммируемы. Мы определим многочлены $q_n(z)$ как многочлены, ортогональные на окружности $|z|=1$ с весом $p(\lambda)$, т. е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\lambda)\, q_n(e^{i\lambda})\, \overline{q_m(e^{i\lambda})}\, d\lambda = \varepsilon_{n,m} \qquad (\varepsilon_{n,m}=0 \text{ при } n \neq m;\ \ \varepsilon_{nn}=1).$$

Теория таких многочленов изучена Сеrё (G. Szegö) в его мемуаре „Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen" (Math. Ztschr., Bd. 6; H. 3/4, 1920; S. 176 u Bd. 9; H. 3/4, 1921, S. 175). Мы хотим доказать одну теорему о разложении по этим многочленам, которая будет нам полезна в дальнейшем.

Пусть $D(z)$ — максимальная функция с граничным модулем $\sqrt{p(\varphi)}$, принадлежащая классу $H_2$:

$$D(z) = \exp \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg \sqrt{p(\lambda)}\, \frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\, d\lambda. \tag{30}$$

Ряд Фурье функции

$$\pi(z) = \frac{1}{1-\overline{\alpha}z}\,\frac{1}{D(z)} \qquad (|\alpha|<1) \tag{31}$$

имеет вид

$$\overline{D(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{q_k(\alpha)}\, q_k(z), \tag{32}$$

и неравенство Бесселя дает

$$\sum_{k=0}^{\infty} |q_k(\alpha)|^2 \leqslant 1/((1-|\alpha|^2)\,|D(\alpha)|^2), \tag{33}$$

откуда следует, что ряд

$$\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k q_k(z) \tag{34}$$

сходится абсолютно и равномерно в каждом круге $|z| \leqslant r < 1$, если сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2. \tag{35}$$

Предположим, что это последнее условие выполнено. Легко доказать, что: 1) функция

$$D(z)\, \omega(z) \tag{36}$$

принадлежит классу $H_2$; 2) коэффициенты $x_k$ суть коэффициенты Фурье функции $\omega(z)$; 3) эта функция удовлетворяет уравнению замкнутости.

Функция $D(z)$ по определению принадлежит классу $H_2$, и, умножив ее на многочлен, мы получим новую функцию

$$D(z)\sum_{k=0}^{n} x_k q_k(z),$$

также принадлежащую классу $H_2$. Значит,

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(re^{i\lambda})|^2 \left|\sum_{k=0}^{n} x_k q_k(re^{i\lambda})\right|^2 d\lambda =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2 \left|\sum_{k=0}^{n} x_k q_k(e^{i\lambda})\right|^2 d\lambda = \sum_{k=0}^{n} |x_k|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2.$$

Интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(re^{i\lambda})|^2 \left|\sum_{k=0}^{n} x_k q_k(re^{i\lambda})\right|^2 d\lambda$$

возрастает с ростом $r$, и при каждом $r<1$ мы получаем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(re^{i\lambda})|^2 \left|\sum_{k=0}^{n} x_k q_k(re^{i\lambda})\right|^2 d\lambda \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2.$$

Но при фиксированном $r$ мы можем перейти к пределу под знаком интеграла, устремив $n$ к бесконечности. Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(re^{i\lambda})|^2 |\omega(re^{i\lambda})|^2 d\lambda \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2, \tag{37}$$

т. е. функция (36) принадлежит классу $H_2$.

Рассмотрим теперь коэффициенты Фурье функции $\omega(e^{i\lambda})$:

$$y_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|\, \omega(e^{i\lambda})\, \overline{q_m(e^{i\lambda})}\, d\lambda. \tag{38}$$

Мы должны доказать, что

$$y_m = x_m \qquad (m = 0, 1, \ldots).$$

Начнем с одного замечания. Предположим, что функции

$$\varphi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$$

и

$$\varphi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k$$

принадлежат классу $H_2$. Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(re^{i\lambda})\,\overline{\varphi_2(re^{i\lambda})}\,d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\overline{\beta}_k r^{2k},$$

причем ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 \text{ и } \sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|^2$$

сходятся. В то же время известно, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(e^{i\lambda})\,\overline{\varphi_2(e^{i\lambda})}\,d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\overline{\beta_k},$$

и легко видеть, что

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(re^{i\lambda})\,\overline{\varphi_2(re^{i\lambda})}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(e^{i\lambda})\,\overline{\varphi_2(e^{i\lambda})}\,d\lambda.$$

Полагая

$$\varphi_1(z) = D(z)\,\omega(z);\quad \varphi_2(z) = D(z)\,q_m(z),$$

мы можем вместо (38) записать

$$y_m = \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(re^{i\lambda})|^2\,\omega(re^{i\lambda})\,\overline{q_m(re^{i\lambda})}\,d\lambda,$$

или

$$y_m = \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(re^{i\lambda})|^2\left(\sum_{k=0}^{p} x_k q_k(re^{i\lambda})\right)\overline{q_m(re^{i\lambda})}\,d\lambda +$$
$$+\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(re^{i\lambda})|^2\left(\sum_{k=p+1}^{\infty} x_k q_k(re^{i\lambda})\right)\overline{q_m(re^{i\lambda})}\,d\lambda. \quad (39)$$

Первый член в правой части очевидно равен $x_m$, если $p \geqslant m$. Квадрат модуля второго члена не превосходит выражения

$$\max|q_m(e^{i\lambda})|^2\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D(e^{i\lambda})|^2\,d\lambda\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D(e^{i\lambda})|^2\times$$
$$\times\left|\omega(e^{i\lambda}) - \sum_{k=0}^{p} x_k q_k(e^{i\lambda})\right|^2 d\lambda.$$

Но из формулы (37) следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D(e^{i\lambda})|^2\left|\omega(e^{i\lambda}) - \sum_{k=0}^{p} x_k q_k(e^{i\lambda})\right|^2 d\lambda \leqslant \sum_{k=p+1}^{\infty}|x_k|^2,$$

и, следовательно, второй член должен стремиться к нулю при $p \to \infty$. Учитывая, что левая часть формулы (39) не зависит от $p$, мы можем заключить, что $y_m = x_m$, и наше второе утверждение доказано.

Поскольку числа $x_k$ суть коэффициенты Фурье функции $\omega(e^{i\lambda})$, то мы имеем неравенство Бесселя

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2 |\omega(e^{i\lambda})|^2 d\lambda \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2,$$

и, учитывая формулу (37), мы получим уравнение замкнутости для функции $\omega(e^{i\lambda})$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2 |\omega(e^{i\lambda})|^2 d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2. \tag{40}$$

Мы сейчас докажем, что если функция $F(z)$, регулярная внутри круга $K$, такова, что произведение $D(z)F(z)$ принадлежит классу $H_2$, то эта функция разлагается в ряд Фурье вида (34), для которого сходится ряд (35).

Образуем ряд Фурье для функции $F(z)$:

$$F(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} x_k q_k(z),$$

и введем функцию

$$F_1(z) = F(z) - \sum_{k=0}^{\infty} x_k q_k(z).$$

Как было доказано выше, произведение $D(z)\sum_{k=0}^{\infty} x_k q_k(z)$ принадлежит классу $H_2$, так как ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2$ очевидно сходится. В то же время произведение $D(z)F(z)$ принадлежит классу $H_2$ по предположению, откуда следует, что и произведение $D(z)F_1(z)$ принадлежит классу $H_2$. Но по определению функции $F(z)$ все коэффициенты Фурье этой функции равны нулю, так как коэффициенты Фурье функции $\sum_{k=0}^{\infty} x_k q_k(z)$ равны $x_k$ по доказанному выше. Следовательно, для любого многочлена $Q(z)$ верна формула:

$$\int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2 \; F_1(e^{i\lambda})\overline{Q(e^{i\lambda})}d\lambda = \int_0^{2\pi} \overline{D(e^{i\lambda})\,Q(e^{i\lambda})}\,D(e^{i\lambda})\,F_1(e^{i\lambda})\,d\lambda = 0. \tag{41}$$

Но как мы доказали в нашем мемуаре, цитированном выше*, для каждого целого числа $m \geqslant 0$ существует такая последовательность многочленов $Q_n(z)$, что

* V. Smirnoff.— Journ. Soc. Phys. Math. Leningrad, t. II, fasc. I, 1928, p. 155—179.

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{2\pi}|(e^{i\lambda})^m - D(e^{i\lambda})\,Q_n(e^{i\lambda})|^2\,d\lambda = 0. \tag{42}$$

Учитывая формулу (41), мы получаем

$$I_m = \int_0^{2\pi}\overline{(e^{i\lambda})^m}\,D(e^{i\lambda})\,F_1(e^{i\lambda})\,d\lambda =$$

$$= \int_0^{2\pi}\overline{[(e^{i\lambda})^m - D(e^{i\lambda})\,Q_n(e^{i\lambda})]}\,D(e^{i\lambda})\,F_1(e^{i\lambda})\,d\lambda,$$

откуда следует, что

$$|I_m|^2 \leqslant \int_0^{2\pi}|D(e^{i\lambda})\,F_1(e^{i\lambda})|^2\,d\lambda\int_0^{2\pi}|(e^{i\lambda})^m - D(e^{i\lambda})\,Q_n(e^{i\lambda})|^2\,d\lambda.$$

Интеграл $I_m$ не зависит от $n$, и формула (42) показывает, что

$$I_m = \int_0^{2\pi}\overline{(e^{i\lambda})^m}\,D(e^{i\lambda})\,F_1(e^{i\lambda})\,d\lambda = 0,$$

или

$$\int_C\frac{D(z')\,F_1(z')}{z'^{m+1}}\,dz' = 0 \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{43}$$

Но функция $D(z)\,F_1(z)$ принадлежит классу $H_2$, и, следовательно, выражается по формуле Коши

$$D(z)\,F_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{D(z')\,F_1(z')}{z'-z}\,dz',$$

и условия (43) показывают, что функция $F_1(z)$ равна нулю, или что $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty}x_k q_k(z)$, т. е. функция $F(z)$ разлагается в ряд Фурье. Эти рассмотрения приводят нас к следующей теореме: множество рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty}x_k q_k(z), \tag{44}$$

для которых ряд $\sum_{k=0}^{\infty}|x_k|^2$ сходится, есть множество рядов Фурье таких функций $F(z)$, что $D(z)F(z)$ принадлежит классу $H_2$, и ряд сходится к $F(z)$ равномерно при $|z| \leqslant r < 1$.

**10.** В предыдущем пункте мы сформулировали следующую теорему: если функция $D(z)$ представима в виде

$$D(z) = \exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg\sqrt{p(\lambda)}\;\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\,d\lambda, \tag{45}$$

где $p(\lambda) \geqslant 0$, причем $p(\lambda)$ и $\lg p(\lambda)$ суммируемы, то при каждом целом значении $m \geqslant 0$ существует такая последовательность многочленов $Q_n(z)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |(e^{i\lambda})^m - D(e^{i\lambda}) Q_n(e^{i\lambda})|^2 d\lambda = 0.$$

Приведем теперь доказательство этой теоремы. Очевидно, достаточно доказать ее для $m = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |1 - D(e^{i\lambda}) Q(e^{i\lambda})|^2 d\lambda = 0. \tag{46}$$

Возьмем функцию

$$\omega_1(z) = 1/D(z), \tag{47}$$

коэффициенты Фурье которой относительно многочленов $q_m(z)$ равны

$$d_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2 \omega_1(e^{i\lambda}) \overline{q_m(e^{i\lambda})} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{D(e^{i\lambda}) q_m(e^{i\lambda})} d\lambda,$$

или

$$\overline{d_m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D(e^{i\lambda}) q_m(e^{i\lambda}) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{D(z') q_m(z')}{z'} dz'. \tag{48}$$

Замечая, что функция $D(z) q_m(z)$ принадлежит классу $H_2$ и, в частности, что она представима по формуле Коши, мы получаем

$$d_m = \overline{D(0) q_m(0)}. \tag{49}$$

Положим

$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} d_k q_k(z) \tag{50}$$

и рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2 |\omega_1(e^{i\lambda}) - Q_n(e^{i\lambda})|^2 d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2 [1/D(e^{i\lambda}) - Q_n(e^{i\lambda})] \overline{[1/D(e^{i\lambda}) - Q_n(e^{i\lambda})]} d\lambda.$$

Учитывая (48) и (50), мы получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D(e^{i\lambda})|^2|\omega_1(e^{i\lambda})-Q_n(e^{i\lambda})|^2\,d\lambda = 1+\sum_{k=0}^{n}|d_k|^2 -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{D(e^{i\lambda})\,Q_n(e^{i\lambda})}\,d\lambda-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}D(e^{i\lambda})\,Q_n(e^{i\lambda})\,d\lambda=$$

$$=1-\sum_{k=0}^{n}|d_k|^2,$$

или, учитывая (47),

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|1-D(e^{i\lambda})\,Q_n(e^{i\lambda})|^2\,d\lambda=1-\sum_{k=0}^{n}|d_k|^2.$$

Формула (46) равносильна формуле

$$\sum_{k=0}^{\infty}|d_k|^2=1, \tag{51$_1$}$$

или, в силу (49), формуле

$$\sum_{k=0}^{\infty}|q_k(0)|^2=1/|D(0)|^2. \tag{51$_2$}$$

Равенство ($51_1$) или ($51_2$) представляет собою уравнение замкнутости для функции $\omega_1(z)$.

Чтобы доказать равенство ($51_1$), мы предположим прежде всего, что функция $p(\lambda)$, участвующая в формуле (45), удовлетворяет неравенству $p(\lambda)\geqslant m>0$ $(0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi)$, где $m$—данное положительное число.

В этом случае

$$|D(z)|=\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg\sqrt{p(\lambda)}\;\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\lambda)+r^2}\,d\lambda\geqslant e^{\lg\sqrt{m}}=$$

$$=\sqrt{m}\quad(z=re^{i\varphi}),$$

и, следовательно,

$$|\omega_1(z)|=1/|D(z)|\leqslant 1/\sqrt{m},$$

т. е. функция $\omega_1(z)$ ограничена в круге $K$. Но для такой функции легко доказать уравнение замкнутости. Действительно, пусть $S_n(z)$ — суммы Фейера для отрезков ряда Маклорена функции $\omega_1(z)$. Эти суммы $S_n(z)$, как хорошо известно, тоже ограничены и стремятся почти везде на окружности $|z|=1$ к предельным значениям $\omega_1(z)$. Значит,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}|D(e^{i\lambda})|^2|\omega_1(e^{i\lambda})-S_n(e^{i\lambda})|^2\,d\lambda=0.$$

Если мы подставим вместо $S_n(z)$ отрезки ряда Фурье функции $\omega_1(z)$, то этот интеграл не увеличится, и мы получим

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}|D(e^{i\lambda})|^2\,|\omega_1(e^{i\lambda})-\sum_{k=0}^n d_k q_k(e^{i\lambda})|^2\,d\lambda=0,$$

т. е. $\omega_1(z)$ удовлетворяет уравнению замкнутости.

Обратимся теперь к общему случаю, когда $p(\lambda)\geqslant 0$. Легко видеть, что для заданного положительного числа $\varepsilon$ функция $\lg[p(\lambda)+\varepsilon]$ суммируема, и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\lg[p(\lambda)+\varepsilon]\,d\lambda=\int_0^{2\pi}\lg p(\lambda)\,d\lambda. \tag{52}$$

Действительно, разобьем интеграл $(0,2\pi)$ на три части: 1) часть $F_1$, где $p(\lambda)>M$; 2) часть $F_2$, где $p(\lambda)<1/M$; 3) часть $F_3$, где $M\geqslant p(\lambda)\geqslant 1/M$, ($M$ — достаточно большое положительное число). На части $F_1$ имеем $\lg[p(\lambda)+\varepsilon]<\lg[2p(\lambda)]$, а на части $F_2$ $|\lg[p(\lambda)+\varepsilon]|<|\lg p(\lambda)|$, т. е. на этих двух частях функция $\lg[p(\lambda)+\varepsilon]$ по абсолютной величине не превосходит некоторой суммируемой функции, и, следовательно, можно перейти к пределу под знаком интеграла, взятому по частям $F_1$ и $F_2$. На части $F_3$ функция $\lg[p(\lambda)+\varepsilon]$ ограничена, и предельный переход под знаком интеграла также возможен. Значит, мы получили формулу (52).

Обратимся теперь к интегралам

$$I_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D(e^{i\lambda})|^2\,|1+a_1e^{i\lambda}+a_2e^{i2\lambda}+\ldots+a_ne^{in\lambda}|^2\,d\lambda.$$

Повторяя рассуждения из п. 7, можно доказать, что минимум интеграла $I_n$ равен

$$\mu_n=1/\sum_{k=0}^n|q_k(0)|^2.$$

Пусть

$$\mu=\lim_{n\to\infty}\mu_n.$$

Можно записать формулу $(51_2)$ в виде $\mu=|D(0)|^2$. Обозначим через $D^{(\varepsilon)}(z)$, $\mu_n^{(\varepsilon)}$ и $\mu^{(\varepsilon)}$ те значения $D(z)$, $\mu_n$ и $\mu$, которые получаются, если мы заменим $p(\lambda)$ на $p(\lambda)+\varepsilon$. В этом случае мы доказали формулу $(51_2)$, т. е.

$$\mu^{(\varepsilon)}=|D^{(\varepsilon)}(0)|^2,$$

где

$$|D^{(\varepsilon)}(0)|^2 = \exp \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg [p(\lambda) + \varepsilon]\, d\lambda.$$

Кроме того, мы имеем неравенства

$$|D^{(\varepsilon)}(z)| \geqslant |D(z)|; \ |D^{(\varepsilon)}(e^{i\lambda})| \geqslant |D(e^{i\lambda})|,$$

$$\mu_n^{(\varepsilon)} \geqslant \mu_n; \ \mu^{(\varepsilon)} \geqslant \mu,$$

откуда следует, что $\mu \leqslant |D^{(\varepsilon)}(0)|^2$. Устремив $\varepsilon$ к нулю, получим $\mu \leqslant |D(0)|^2$. В то же время, по неравенству Бесселя $\mu \geqslant |D(0)|^2$, и, следовательно, $\mu = |D(0)|^2$, что и требовалось доказать.

В нашем мемуаре, цитированном выше, мы доказали теорему, сформулированную в начале параграфа, используя некоторые результаты Сеге. Здесь мы дали полное доказательство, и это доказательство содержит некоторые существенные моменты рассуждений Сеге.

**11.** Вернемся к рассмотрению общей области $B$ типа $\alpha$, но предположим, что у нее нет точек разветвления. Пусть, как и прежде, $x = \psi(z)$ — функция, конформно отображающая круг $K$ на область $B$, а $z = \chi(x)$ — обратная функция. Построим максимальную функцию $D(z)$ предельного модуля

$$|D(e^{i\lambda})|^2 = \frac{2\pi}{l} |\psi'(e^{i\lambda})|.$$

В этом случае соответствующие многочлены $q_n(z)$ можно получить ортогонализацией функций

$$1, \ \chi(x), \ \{\chi(x)\}^2, \ \{\chi(x)\}^3, \ \ldots$$

вдоль контура $\Gamma$ области $B$. Действительно, условия

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2 q_m(e^{i\lambda}) \overline{q_n(e^{i\lambda})}\, d\lambda = \varepsilon_{n,m}$$

имеют в этом случае на плоскости $x$ следующий вид:

$$\frac{1}{l}\int_\Gamma q_m[\chi(\xi)]\, q_n[\chi(\xi)]\, ds = \varepsilon_{n,m}.$$

Если параметрическое представление функции $\psi'(z)$ имеет вид (19), т. е. не содержит члена с интегралом Стилтьеса, то эта функция дает максимальную функцию

$$D(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{l}\psi'(z)}.$$

Разложения

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k q_k(z), \tag{53}$$

где ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 \tag{54}$$

сходятся, дают класс функций $\omega(z)$, для которых произведение

$$D(z)\,\omega(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{l}}\sqrt{\psi'(z)}\,\omega(z)$$

принадлежит классу $H_2$, или $\omega[\chi(z)]$ принадлежит классу $E_2$, т. е. интегралы

$$\int\limits_{\Gamma_r} |\omega[\chi(z)]|^2 ds$$

остаются ограниченными. Итак, разложения по ортогональным функциям $\varphi_k[\chi(z)]$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k q_k[\chi(z)], \tag{55}$$

где ряд (54) сходится, дают класс функций $f(x)$, принадлежащих $E_2$, т. е. таких, что интегралы

$$\int\limits_{\Gamma_r} |f(\xi)|^2 ds \tag{56}$$

остаются ограниченными. Базисные функции $q_n[\chi(z)]$ в этом случае ограничены.

Предположим теперь, что параметрическое представление функции $\psi'(z)$ содержит интеграл Стилтьеса:

$$\sqrt{\frac{2\pi}{l}}\sqrt{\psi'(z)} = \exp\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \lg\sqrt{p(\lambda)}\,\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}d\lambda\,\exp\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}dq(\lambda). \tag{57}$$

В этом случае максимальная функция имеет вид

$$D(z) = \exp\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \lg\sqrt{p(\lambda)}\,\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}d\lambda. \tag{58}$$

Рассмотрим функцию $\pi(x)$, определенную формулой

$$\frac{1}{\pi(x)} = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z} dq(\lambda).$$

Модуль этой функции $\pi(x)$ внутри $B$ больше единицы, а на контуре $\Gamma$ ее модуль почти везде равен единице. Разложения (53), где ряд (54) сходится, дают такие функции $\omega(z)$, что произведение

$$D(z)\,\omega(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{l}} \sqrt{\psi'(z)}\, \pi[\psi(z)]\, \omega(z)$$

принадлежит классу $H_2$, а разложения (55) дают функции $f(x)$, для которых произведение $\pi(x) f(x)$ принадлежит классу $E_2$, т. е. интегралы

$$\int_{\Gamma_r} |\pi(\xi) f(\xi)|^2 ds \tag{59}$$

остаются ограниченными. Если функция $f(x)$ ограничена, то это условие, конечно, выполнено, так как в этом случае произведение

$$f[\psi(z)]\, \pi[\psi(z)] \sqrt{\psi'(z)} =$$
$$= f[\psi(z)] \sqrt{\frac{l}{2\pi}} \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \sqrt{p(\lambda)}\, \frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z} d\lambda$$

принадлежит классу $H_2$. Итак, множество ортогональных функций $q_m[\chi(z)]$ представляет собою полную ортогональную систему для класса функций, ограниченных в области $B$, и если система ограниченных ортогональных функций $r_m(x)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ выражается через функции $q_m[\chi(z)]$ посредством полного ортогонального преобразования, то верны формула замкнутости и теорема разложения по функциям $r_m(x)$ для каждой функции $f(x)$, для которой интегралы (59) остаются ограниченными. Если мы хотим получить теорему разложения для функций класса $E_2$, т. е. для таких функций, что интегралы (56) остаются ограниченными, то мы должны добавить к системе функций $r_m(x)$ новые функции, неограниченные в области $B$, но принадлежащие в ней классу $E_2$.

Можно получить аналогичные результаты и в общем случае, когда область $B$ содержит точки разветвления. В этом случае параметрическое представление функции $\psi'(z)$ содержит функцию Бляшке $b(z)$:

$$\frac{2\pi}{l}\psi'(z) = b(z) \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg p(\lambda) \frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z} d\lambda \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z} dq(\lambda), \tag{60}$$

где $\lg p(\lambda)$ и $p(\lambda)$ — суммируемые функции.

Максимальная функция $D(z)$ определяется по формуле (58), как и в предыдущем случае. Допустим сначала, что формула (60) не содержит интеграла Стилтьеса, и пусть $f(x)$ — функция класса $E_2$ в области $B$. Произведение

$$\{f[\psi(z)]\}^2 \psi'(z) \tag{61}$$

принадлежит классу $H_1$, и для $\psi'(z)$ мы имеем

$$\frac{2\pi}{l}\psi'(z) = b(z)\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg p(\lambda)\,\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\,d\lambda.$$

Исключив из произведения (61) функцию $b(z)$, мы получим произведение $\{f[\psi(z)]\}^2\{D(z)\}^2$, принадлежащее классу $H_1$, а потому произведение $f[\psi(z)]\,D(z)$ принадлежит классу $H_2$. Следовательно, если формула (60) не содержит интеграла Стилтьеса, то теорема разложения верна для каждой функции $f(x)$ класса $E_2$.

Если формула (60) содержит интеграл Стилтьеса, то необходимое и достаточное условие для формулы замкнутости и теоремы разложения состоит в том, что интегралы (59) остаются ограниченными.

## РЕЗУЛЬТАТЫ В. И. СМИРНОВА ПО КОМПЛЕКСНОМУ АНАЛИЗУ И ИХ ПОСЛЕДУЮЩЕЕ РАЗВИТИЕ

*(Н. К. Никольский, В. П. Хавин)*

В. И. Смирнов — основатель ленинградской школы комплексного анализа. Его работа в этой области началась примерно в 1926 г., когда он возглавил кафедру теории функций комплексной переменной Ленинградского университета. Под руководством В. И. Смирнова в Ленинграде начали развиваться теория приближений в комплексной области и теория граничных свойств аналитических функций. Его ученик Г. М. Голузин возглавил известную ленинградскую школу геометрической теории функций. Все ленинградские специалисты по комплексному анализу — последователи В. И. Смирнова.

Работы В. И. Смирнова по теории функций комплексной переменной были выполнены в эпоху, отмеченную бурным развитием теории функций вещественной переменной, а точнее говоря, теории меры и интеграла, в ту пору еще совсем молодой. Ее успехи побуждали к пересмотру всех разделов анализа, в том числе и теории функций комплексной переменной (ТФКП). Возможно, что важнейшим стимулом исследований В. И. Смирнова в то время и было стремление испытать новую „вещественную“ идеологию в теории аналитических функций. Но при этом В. И. Смирнов обратился к кругу вопросов, значение которого далеко не только в испытании возможностей того или иного аппарата. Задачи теории функций, которыми занимался В. И. Смирнов, с годами становились все более актуальными, обнаруживая способность активно взаимодействовать со многими разделами математики. В 60—70-х годах то направление комплексного анализа, в развитие которого работы В. И. Смирнова внесли существенный вклад, пережило новый расцвет. В настоящее время оно играет важную роль в теории линейных операторов, в теории дифференциальных уравнений, в теории вероятностей, не говоря уже о самой теории функций и гармоническом анализе.

Наша статья не претендует на сколько-нибудь полный обзор этого направления в целом*, но дает лишь указания о дальнейшем развитии областей, в которых работал В. И. Смирнов, об использовании введенных им понятий и лишь частично об исследованиях, возникших под влиянием работ В. И. Смирнова или под его личным влиянием.

**1. Вводные замечания.** Аналитические функции определяются своими „особенностями", или „спектром", причем этим словам придается точный смысл в рамках подходящих теорий. К таким особенностям безусловно относятся нули функций — как внутри области определения, так и на ее границе, но кроме этих последних нужно учитывать еще и более общее „характерное поведение" функции вблизи границы области. Установление связей между такими „спектрами" и глобальными свойствами функций составляет важную задачу комплексного анализа. Классическая, вейерштрассовская ТФКП дала много примеров такого сорта: это и описание многочленов как произведений по их нулям $\prod\limits_{1}^{N}(1 - z/z_i)$, и теория роста аналитических функций вблизи границы области в терминах „густоты" множества нулей (развитая, в основном, для случая всей плоскости $\mathbf{C}$), и другие более тонкие зависимости. Позднее, вошедший в практику интеграл Лебега, с одной стороны, и кристаллизация понятия „пространства" — с другой привели к потребности (и возможности) исследования классов функций, определяемых некими „метрическими свойствами" (в основном свойствами их интегрируемости на границе). В работах Р. Неванлинны, Ф. Рисса, Г. Сеге, Г. Харди, И. Шура и других было начато изучение таких классов функций в единичном круге $\mathbf{D} = \{\zeta \in \mathbf{C} : |\zeta| < 1\}$, а затем оно распространилось и на другие области плоскости $\mathbf{C}$.

---

* См. монографии [8, 10, 20, 25], а также сборник проблемных статей [77].

По целому ряду причин в центре новой метрической ТФКП оказались так называемые классы Неванлинны и Харди. Они и связанные с ними вопросы и являются объектом исследования в работах В. И. Смирнова.

**2. Фундаментальная теорема о факторизации.** ***Класс D.*** К 1929 году, когда появилась основная теорема В. И. Смирнова о параметрическом представлении классов Харди, было известно, что эти классы инвариантны относительно деления на фактор Бляшке (Ф. Рисс, 1923), были известны конструкция и основные свойства внешних функций (Сегё, 1921). Кроме того, было известно (но не в Ленинграде второй половины 20-х годов, как это отмечает В. И. Смирнов в подстрочном примечании, см. с. 44 наст. изд.), что более широкий класс Неванлинны совпадает с множеством всех регулярных отношений ограниченных регулярных функций (Ф. и Р. Неванлинна, 1922). Еще раньше были найдены условия представимости гармонической функции интегралом Пуассона — Стилтьеса (Герглотц, 1911). Эти факты использовались при описании граничных свойств аналитических и гармонических функций, при доказательстве граничных теорем единственности, при установлении некоторых вариантов принципа максимума. Но никто не оценил их как составные части будущего аппарата, приспособленного к гибкому и выразительному описанию важнейших классов аналитических функций с помощью некоторой системы независимых параметров. Такой аппарат и был предложен В. И. Смирновым. Важно отметить, что приводимая ниже теорема о факторизации была открытием даже для ограниченных аналитических функций, не говоря уже о классах Харди, классах $D$ и $N$. В. И. Смирнов называет свою теорему „параметрическим представлением“ классов $N$ и $H^p$ (классы $A$ и $H_\delta$ в его обозначениях). Под этим подразумевается мультипликативное представление, в котором требования на внутренние нули и граничное поведение функции независимы и имеют „вещественный“ характер (суммируемость некоторых рядов и интегралов). Самым широким из рассматриваемых классов функций является класс $N$ всех аналитических в $\mathbf{D}$ функций $f$, таких, что

$$\sup_{0\leqslant r<1}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{it})|\,dt<+\infty.$$

Теорема о параметризации гласит, что каждая функция $f$ класса $N$ однозначно определяется заданием следующих „параметров“:

1) последовательностью комплексных чисел $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$, для которой выполнено условие Бляшке $\sum\limits_{n\geqslant 1}(1-|\lambda_n|)<\infty$;

2) конечной вещественной мерой (зарядом) $\mu$ на единичной окружности $\mathbf{T}=\{\zeta\in C:|\zeta|=1\}$.

Функция $f$ восстанавливается по этим своим параметрам формулой $f=Bf_\mu$, где $B$ есть произведение Бляшке

$$B=\prod_{n\geqslant 1}\frac{\lambda_n-z}{1-\overline{\lambda}_n z}\frac{|\lambda_n|}{\lambda_n}$$

(сходящееся ввиду условия 1)), а функция $f_\mu$ определяется формулой

$$f_\mu=\exp\left(\int_{\mathbf{T}}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\mu(\zeta)\right).$$

Сами же эти параметры $\{\lambda_n\}$ и $\mu$ находятся по правилам: а) $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$ есть последовательность нулей функции $f$ в круге $\mathbf{D}$, считаемых с учетом кратностей, б) $\mu$ есть слабый предел при $r\to 1$ семейства мер $\log\left|\frac{f(re^{it})}{B(re^{it})}\right|dt$, $0\leqslant r<1$.

Далее, разложив меру $\mu$ в сумму абсолютно непрерывного $\mu_a$ и сингулярного $\mu_s$ слагаемых (относительно нормированной меры Лебега $m$ на окружности $\mathbf{T}$) и воспользовавшись теоремой Фату о граничных значениях интегралов Пуассона, мы легко усматриваем различие ролей соответствующих сомножителей в представлении $f_\mu=f_{\mu_a}f_{\mu_s}$. Первый из них полностью определяется модулем граничных значений $|f|$ на окружности $\mathbf{T}$: $d\mu_a=|f|\,dm$; этот множитель называется внешним (термин А. Бёрлинга [70]). Второй, т. е. функция $f_{\mu_s}$, имеет угловые граничные значения, равные по модулю единице п. в. на $\mathbf{T}$. Поэтому этот множитель, по самой его природе, нельзя оценить во внутренних точках круга, глядя только на его значения на окружности. Нетрудно, однако, доказать, что функция $f_{\mu_s}$ ограничена в $\mathbf{D}$ в том и только в том случае, когда $\mu_s\leqslant 0$. Такие функции $f_{\mu_s}$ называют сингулярными внутренними функциями (снова следуя А. Бёрлингу). Всегда $f_{\mu_s}=f_{\mu_s^+}/f_{\mu_s^-}$, т. е. всегда $f_{\mu_s}$ единственным образом представляется как отношение двух сингулярных внутренних функций.

Описав таким образом (следуя В. И. Смирнову) параметрическое представление функций класса $N$, мы вплотную подошли (вместе с В. И. Смирновым — с. 87 наст. изд.) к определению и исследованию важного для приложений класса $D$. Так обозначается класс всех функций из $N$, у которых $\mu_s^+=0$.

Этот класс оказался замечательным сразу в нескольких отношениях, отмеченных в основном самим В. И. Смирновым:

— он устанавливает естественные границы, в которых справедливы различного рода „принципы максимума“, подобные известным теоремам Фрагмена — Линделёфа;

— он существенно участвует в решении наиболее тонких задач теории (весовой) полиномиальной аппроксимации;

— он возникает при описании замкнутых идеалов или $z$-инвариантных подпространств, особенно в связи с частным случаем этой задачи — с описанием так называемых слабо обратимых функций.

И еще следует отметить, что именно открытие и использование класса $D$ (задолго до направления, возникшего под влиянием уже упомянутой известной работы А. Бёрлинга [70]) ознаменовало понимание роли внутренних функций* в различных задачах комплексного анализа. Некоторым подтверждением этому служит и настоящая статья.

Теперь мы опишем вкратце развитие некоторых идей В. И. Смирнова как в рамках ТФКП, так и в ее приложениях. При этом речь пойдет лишь о работах В. И. Смирнова, вошедших в это издание.

**3. Универсальный принцип максимума.** Так мы будем называть следующее утверждение — частный случай теоремы В. И. Смирнова [Наст. изд., с. 88]

**Теорема.** *Пусть* $f \in D$, *и пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Если* $f | \mathbf{T} \in L^p(\mathbf{T})$, *то* $f \in H^p$ *и притом* $\|f\|_{H^p} = \|f|\mathbf{T}\|_{L^p}$.

При $p = \infty$ это утверждение имеет вид классического принципа максимума модуля, а при $p < \infty$ является его интегральным аналогом. ($H^\infty$ есть множество всех функций, аналитических и ограниченных в $\mathbf{D}$, $\|f\|_{H^\infty} = \sup |f|$, аналогичный смысл имеет символ $H^\infty(\Omega)$ и для произвольной области $\Omega \subset \mathbf{C}$).

Отметим, что к функциям неванлинновского класса $N$ универсальный принцип максимума, вообще говоря, неприменим, как показывают совсем простые примеры [26]. Можно сказать, что класс $D$ — это „самый широкий“ из „естественных“ классов функций, аналитических в $\mathbf{D}$, в которых универсальный принцип максимума еще действует. Он действует, в частности, в любом классе $H^p$, так как $H^p \subset D$.

Пусть $\Omega$ — область, конформно эквивалентная кругу, а $\omega$ — конформный гомеоморфизм $\Omega$ на круг $\mathbf{D}$. Обозначим через $D(\Omega)$ множество всех функций вида $f \circ \omega$, где $f \in D$. Класс $D(\Omega)$ допускает и внутреннее описание — достаточно вспомнить данное В. И. Смирновым конформно инвариантное описание класса $D$ [Наст. изд., с. 88]:

$$f \in D(\Omega) \Longleftrightarrow (\exists f_n : f_n \in H^\infty(\Omega),\ f(\zeta) = \lim_{n\to\infty} f_n(\zeta),\\ |f_n(\zeta)| \uparrow |f(\zeta)| \text{ при } \zeta \in \Omega).$$

Если граница $\operatorname{Fr}\Omega$ нашей области $\Omega$ достаточно правильна, то на класс $D(\Omega)$ легко распространяется универсальный принцип максимума (точнее, его вариант, отвечающий $p = \infty$).

---

* Т. е. функций $f$ вида $f = BS$, где $B$ — произведение Бляшке, $S$ — сингулярная внутренняя функция.

Нам понадобится еще понятие функции, внешней в области $\Omega$: так мы назовем функцию $F$ вида $f \circ \omega$, где $f$ — внешняя функция в круге $\mathbf{D}$. Можно описать внешнюю в $\Omega$ функцию $F$, не покидая область $\Omega$: $F$ — внешняя, если $F$ и $1/F$ принадлежат классу $D(\Omega)$ ($\omega$ — конформное отображение круга на $\Omega$).

В приведенном „универсальном принципе максимума" содержатся все утверждения типа теорем Фрагмена — Линделёфа. Чтобы убедиться в этом, нужно совсем немногое — кроме уже упомянутого инвариантного описания класса $D(\Omega)$ лишь следующие просто проверяемые свойства этого класса: а) инвариантность его относительно деления на любую внешнюю функцию; б) монотонность относительно области: если $\Omega_1 \supset \Omega_2$, $f \in D(\Omega_1)$, то $f | \Omega_2 \in D(\Omega_2)$; в) свойство мажорации: если $f \in D(\Omega)$, а $g$ — функция, аналитическая в $\Omega$ и $|g| \leqslant |f|$ в $\Omega$, то $g \in D(\Omega)$.

Опишем теперь подход к теоремам Фрагмена — Линделёфа, опирающийся на „универсальный принцип максимума". Пусть в области $\Omega$ (конформно эквивалентной кругу и с правильной границей $\operatorname{Fr}\Omega$) заданы неотрицательные функции $M$ и $h$. Пусть $w$ — неотрицательная функция, заданная на $\operatorname{Fr}\Omega$. Обозначим через $C_A(\Omega)$ множество всех функций, непрерывных в $\operatorname{clos}\Omega$ и аналитических в $\Omega$. Утверждение типа

$$(g \in C_A(\Omega),\ |g| \leqslant M \text{ в } \Omega,\ |g| \leqslant w \text{ на } \operatorname{Fr}\Omega) \Longrightarrow |g| \leqslant h \text{ в } \Omega \quad (1)$$

называют *теоремой Фрагмена—Линделёфа.*

Применив универсальный принцип максимума к функции $f = g/\varphi$, где $\varphi$ — внешняя функция, модуль которой совпадает с $w$ на $\operatorname{Fr}\Omega$, мы докажем справедливость импликации (1) при условии, что: а) $M$ мажорируется модулем некоторой функции класса $D$ и б) $h$ мажорирует функцию $|\varphi|$.

Обобщение: область $\Omega$ разрезается на подобласти ($\Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_n$) так, что сужения $M | \Omega_i$ мажорируются модулями функций класса $D(\Omega_i)$, а сужения $h | \Omega_i$ мажорируют модули внешних функций в $\Omega_i$, порожденных „данными" $w | \operatorname{Fr}\Omega_i$, $i = 1, \ldots, n$ (в этом случае $w$ задана на объединении кривых $\operatorname{Fr}\Omega_i$).

**Классические примеры.** 1. Пусть $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, $g$ — функция, аналитическая в $\Omega$. Если $|g| \leqslant M \overset{\text{def}}{=} e^{|z|^\alpha}$ в $\Omega$ и $|g| \leqslant w \overset{\text{def}}{=} e^{|z|^\beta}$ на $\operatorname{Fr}\Omega$ и если $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha < 1$, то $|g| \leqslant |G|$ в $\Omega$, где $G = e^{bz^\beta}$, $b \cos \beta \frac{\pi}{2} = 1$.

Для доказательства достаточно положить $F = e^{az^\alpha}$, $a \cos \alpha \frac{\pi}{2} = 1$, заметить, что $F$ и $G$ — внешние функции в $\Omega$ (так как $1/F$, $1/G$ ограничены и $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \log |F(x)| = 0$), $M \leqslant |F|$, $w \leqslant |G|$, и сослаться на теорему Смирнова.

2. $\Omega = \mathbf{C}$, $g$ — целая аналитическая функция. Если $|g| \leqslant \leqslant M \stackrel{\text{def}}{=} e^{|z|^\alpha}$ в $\mathbf{C}$ и $|g| \leqslant w \stackrel{\text{def}}{=} e^{|z|^\beta}$ на координатных осях ($\operatorname{Re} z = 0$ и $\operatorname{Im} z = 0$) и если $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha < 2$, то $|g| \leqslant e^{b|z|^\beta}$ во всей плоскости, $b \cos \frac{\pi}{4} \beta = 1$.

Это утверждение проверяется аналогичным рассуждением, примененным к квадрантам $\Omega_i (i = 1, \ldots, 4)$ координатной плоскости.

Точно так же можно получить и другие классические „теоремы Фрагмена—Линделёфа“, ибо все они основаны на принадлежности мажоранты классу $D$ в соответствующей области. Изложенный подход был намечен Хелсоном [78].

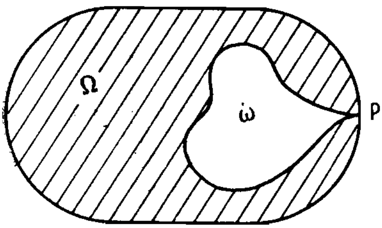
Подобным же образом из теоремы В. И. Смирнова можно вывести и „интегральные теоремы Фрагмена—Линделёфа“ следующего типа: если $|g/M|$ имеет мажоранту в $E^p(\Omega)$, $g/w \in L^q(\operatorname{Fr}\Omega)$, то $g/h \in E^q(\Omega)$; здесь $M$, $w$, $h$ имеют тот же смысл, что и выше, в „равномерных“ ($p = q = \infty$) теоремах Фрагмена—Линделёфа.

**4. Роль класса $D$ в теории аппроксимации.** Есть несколько задач теории полиномиальной аппроксимации, решение которых существенно зависит от класса $D$. В этих задачах в терминах класса $D$ реализуется известный принцип „полнота или компактность“. Именно, если замыкание многочленов не совпадает со всем пространством, где происходит аппроксимация, то препятствием к этому обычно оказывается компактность единичного шара внутри соответствующей области плоскости $\mathbf{C}$, и проявляется эта компактность вхождением в класс $D$ всех функций, допускающих аппроксимацию.

Начнем с важного добавления, сделанного В. И. Смирновым (см. также [32]) к известной теореме Сегё. Пусть $w$ — неотрицательная функция, $w \in L^1(T)$. По теореме Сегё множество полиномов $P_A$ не плотно в пространстве $L^p(w, \mathbf{T})$, $1 \leqslant p < \infty$ в том и только в том случае, когда $\int\limits_{\mathbf{T}} \log w > -\infty$. Как описать множество $\operatorname{clos}_{L^p(w,\mathbf{T})} P_A \stackrel{\text{def}}{=} H^p(w)$ при последнем условии? На с. 100—104 настоящего издания фактически доказано, что $H^p(w) = D \cap L^p(w, \mathbf{T})$.

При $p = \infty$ пространство $L^p(w, \mathbf{T})$ зависит не от $w$, а от класса эквивалентности меры $w\,dm$, так что аналогом описанной задачи следует здесь считать вопрос о $*$ — слабом замыкании множества $wP_A$ в пространстве $L^\infty(\mathbf{T})$. Характер ответа сохраняется [78, 25]. Также в терминах класса $D$ описывается и секвенциальное замыкание множества $wP_A$ относительно ограниченной сходимости почти всюду на окружности $\mathbf{T}$ [23].

Интересной и трудной проблемой, где также обнаруживается класс $D$, является задача о полиномиальной аппроксимации по площади области (в пространствах аналитических функций $L_A^p(\Omega, dxdy)$ в некаратеодориевых областях $\Omega$. Этому вопросу посвящена значительная литература (М. В. Келдыш, А. А. Шагинян, М. М. Джрбашян, Дж. Бреннан и др., библиография и обзор состояния предмета имеются в статьях [22, 71]). В работе [52] было обнаружено, что и здесь в случае неполноты многочленов описание замыкания зависит от класса $D$. Именно, рассмотрим модельную область $\Omega$ типа луночки (рисунок) с достаточно гладкой границей $\mathrm{Fr}\,\Omega$. Пусть $1 < p < \infty$ и пусть область $\Omega$ такова, что $\mathrm{clos}\,P_A \neq L_A^p(\Omega, dxdy)$ (выполнение этого условия зависит от степени касания кривых в точке $P$, и в упомянутых выше работах эта степень точно определена). Тогда замыкание $\mathrm{clos}\,P_A$ состоит из всех функций $L_A^p(\Omega, dxdy)$, продолжимых в область $\omega$ до функции класса $D(\omega)$ и суммируемых на $\mathrm{Fr}\,\omega$ с некоторым весом, зависящим от той же „степени касания“ кривых в точке $P$; см. подробности в статье [52].




**5. Класс D для областей общего вида.** Класс $D(\Omega)$ для произвольной области $\Omega$ (в том числе и для бесконечносвязной) был определен и изучен в работах [42, 39]. Вот одно из его определений (при $\Omega = \mathbf{D}$ равносильное определению В. И. Смирнова): функция $f$, аналитическая в $\Omega$, принадлежит классу $D(\Omega)$, если наименьшие гармонические мажоранты $u_M$ субгармонических в $\Omega$ функций $\log^+|f|/M$ существуют при любом положительном $M$ и стремятся к нулю в $\Omega$, когда $M$ неограниченно возрастает. В работах [39, 59] были полностью решены задачи описания областей $\Omega$, для которых класс $D(\Omega)$ нетривиален (т. е. содержит функции, отличные от констант), и множеств устранимых особенностей функций класса $D(\Omega)$. В работе [68] получена полная характеристика областей $\Omega \subset \mathbf{C}$, обладающих следующим свойством: всякая функция $f$, регулярная в $\mathbf{D}$ и такая, что $f(\mathbf{D}) \subset \Omega$, принадлежит классу $D(\mathbf{D})$. Оказалось, что это свойство области $\Omega$ равносильно регулярности бесконечно далекой точки по отношению к $\Omega$ в смысле теории потенциала.

**6. Параметрическое представление.** Это представление функций класса $N$, описанное выше в п. 2 и называемое также канонической факторизацией, стало основным инструментом „метрической“ ТФКП с момента своего открытия. Позднее (с 40—50-х годов) оно утвердилось в той же роли в теории идеалов (инвариантных подпространств) в пространствах аналитических функций, в теории функциональной модели

С. Надя-Фойаша и в спектральной теории стационарных случайных процессов. Число результатов в каждом из этих направлений необозримо, и мы кратко отметим лишь те из них, на которых непосредственно сказалось влияние работ В. И. Смирнова или его личное влияние. В основном это результаты ленинградских математиков.

Можно отметить наперед, что своеобразие взгляда В. И. Смирнова на каноническую факторизацию как отыскание „свободных" вещественных параметров аналитической функции определенного класса (нули, модуль граничных значений, сингулярная мера) оказалось неожиданно современным именно тогда, когда упомянутая факторизация нашла новое и очень богатое поле приложений (случайные процессы, спектральная теория операторов, идеалы) и сама, в свою очередь, получила существенный импульс к внутреннему развитию. Мы начнем именно с внутренних задач, затем коснемся породившей их теории идеалов и совсем кратко отметим связи с другими приложениями.

**6.1. Параметрическое представление подклассов класса $N$.** Здесь речь идет, как правило, о пространствах функций, аналитических в круге $\mathbf{D}$ и гладких вплоть до его границы. Классические „гладкости" порождают популярные пространства $\mathrm{Lip}_A\alpha = \{f : f$ аналитична в $\mathbf{D}$, $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ в замкнутом круге $\operatorname{clos}\mathbf{D}\}$, $C_A^n = \{f : f$ аналитична в $\mathbf{D}$, $f^{(n)}$ непрерывна в $\operatorname{clos}\mathbf{D}\}$ и их обобщения $\mathrm{Lip}_A\omega$, $C_A^{n,\omega}$ с произвольным модулем непрерывности $\omega$. Другой характер имеют ограничения, налагаемые на модули коэффициентов Тейлора (Маклорена, как пишет В. И. Смирнов):

$$l_A^p = \{f = \sum_{n\geqslant 0} \hat{f}(n)\, z^n : \sum_{n\geqslant 0} |\hat{f}(n)|^p < \infty\},$$

$$l_A^p(w_n) = \{f = \sum_{n\geqslant 0} \hat{f}(n)\, z^n : \sum_{n\geqslant 0} |\hat{f}(n)|^p w_n^p < \infty\}.$$

Задача состоит в том, чтобы, рассматривая один из этих классов* $X$, найти в терминах „параметров" канонической факторизации необходимые и (или) достаточные условия для включения $f \in X$. Важной характеристикой при описании замкнутых $z$-инвариантных подпространств пространства $X$ (идеалов, если речь идет об алгебре функций) является так называемое „свойство деления": если $f \in X$, $I$ — внутренняя функция, то из включения $f/I \in D$ должно следовать $f/I \in X$.

Упомянутое описание, равно как и свойство деления, очевидно для пространств $H^p(\mathbf{D})$. Для пространств, которые не

---

* Разумеется, рассматриваются лишь пространства $X$, содержащиеся в $N$.

определяются условиями на модуль граничных значений, напротив, обе задачи являются, как правило, весьма нетривиальными.

Исследование нулей функций, гладких вплоть до границы (т. е. исследование множеств $Z(f)=\{\zeta:|\zeta|\leqslant 1,\ f(\zeta)=0\}$, содержащих, в частности, внутренние нули $\lambda_k$ и носитель сингулярной меры, которые участвуют в параметрическом представлении), начато по существу Л. Карлесоном [72]. В [72, 18] установлено, что если $f\in \mathrm{Lip}_A\alpha$, то

$$\int\limits_{\mathbf{T}} \log \operatorname{dist}(\zeta,\ Z(f))\, dm(\zeta) > -\infty,$$

и, обратно, если это условие (и, конечно, условие Бляшке для множества $Z\cap\mathbf{D}$) выполнено для некоторого множества $Z$, то существует* $f\in \mathrm{Lip}_A\alpha$ с $Z=Z(f)$. Подобная теорема справедлива и для $\mathrm{Lip}_A\omega$ с заменой $\operatorname{dist}(\zeta,\ Z(f))$ на $\omega(\operatorname{dist}(\zeta, Z(f)))$, что было установлено Н. А. Широковым, см. подробности в [67].

Внешняя часть функций, гладких вплоть до границы, подчинена тем же условиям гладкости, что и сама функция, если эта последняя отделена от нуля на окружности $\mathbf{T}$. Именно, в этом случае связь между гладкостями $|f|$ и $f$, грубо говоря, такова же, как между гладкостями функции $\log|f|$ и ее интеграла Коши (или преобразования Гильберта). В частности, такие $f$ и $|f|$ одновременно принадлежат или нет классу $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha<1$. Ситуация существенно меняется, если разрешить функции $f$ обращаться в нуль на окружности $\mathbf{T}$. В работе [55] было обнаружено, что для внешних функций $f$ включение $|f|\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha<1$, влечет $f\in\mathrm{Lip}_A\alpha/2$, но, вообще говоря, не влечет $f\in\mathrm{Lip}_A(\alpha/2+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$. Это двойное падение гладкости (от модуля непрерывности $\omega(t)$ до $\omega(\sqrt{t})$ было подробно исследовано в [53]. Аналоги этих результатов для высших гладкостей (для пространств $C_A^{n,\omega}$, равно как и для многих других естественных пространств аналитических функций) были получены в работах Н. А. Широкова [64—66]. Там, в частности, дано доказательство трудной теоремы о гладкости внешней функции, обобщающей цитированный выше результат работ [53, 55] на гладкости высоких порядков (формулировка — но не доказательство — этой теоремы была ранее известна в математическом фольклоре как „теорема Карлесона — Якобса“). В работах [64—66] найдено также полное (правда, довольно громоздкое) описание функций вида $|f|\,\mathbf{T}$, где $f$ — внешняя функция класса $C_A^{n,\omega}$, $n\geqslant 0$.

„Свойству деления“ для различных классов функций также посвящено немало работ; его наличие — вместе с предыдущи-

* На самом деле существует и $f\in C_A^\infty \overset{\text{def}}{=} \bigcap\limits_{n\geqslant 1} C_A^n$, такая, что $Z=Z(f)$.

ми результатами — создает довольно ясную картину взаимозависимости свойств гладкости и параметров канонической факторизации, ибо оно, в частности, свидетельствует о том, что вся гладкость создается внешним сомножителем. Сам „вопрос о делении“ присутствует, по существу, уже в работах Бёрлинга [70] и Рудина [86] о $z$-инвариантных подпространствах пространств $H^p$ и $C_A = C_A^0$ соответственно где, правда, он решается совсем легко. Есть одно простое достаточное для возможности деления условие, использованное в [17]: чтобы в пространстве $X$ (обладающем некоторыми естественными свойствами) было возможно деление на внутренние функции, достаточно, чтобы для предсопряженного с ним пространства $X^*$ каждая функция из $H^\infty$ была мультипликатором*. Здесь имеется в виду, что двойственность между $X$ и $X^*$ осуществляется продолжением формы $\overline{<f, g>} = \sum_{n\geqslant 0}\hat{f}(n)\hat{g}(n)$ (или $<f, g> = \sum_{n\geqslant 0}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$), заданной на полиномах, что $X$ и $X^*$ суть пространства функций, аналитических в круге D, и что мультипликатор — это такая функция $\varphi$, что $f\in X^* \Longrightarrow \varphi f \in X^*$. Из этого достаточного условия выводится свойство деления для пространств $\mathrm{Lip}_A\alpha$, $\mathrm{Lip}_A\omega$, $C_A^{n,\omega}$ (для широкого класса модулей непрерывности $\omega$), для $l_A^2(w_n)$ при условии $w_n \leqslant w_{n+1}$ и для многих других классов функций [19, 54, 63]. В последнем случае, впрочем, нет нужды обращаться к сопряженному пространству, поскольку обратный сдвиг $S^*f = (f - f(0))/z$ есть сжатие гильбертова пространства $l_A^2(w_n)$ и по известному неравенству Дж. фон Неймана [27] оператор $\varphi(S^*)g = P_+\varphi^* g$, $\varphi^* = \sum_{n\geqslant 0}\hat{\varphi}(n)\overline{z^n}$ непрерывен в $l_A^2(w_n)$ для любой функции $\varphi\in H^\infty$. Опуская многие подробности, отметим только, что самые общие результаты о „делении“ принадлежат, по-видимому, Н. А. Широкову [66]. Им, в частности, доказано это свойство для пространств $C_A^n$, $H_n^\infty$, для которых обсуждавшееся выше достаточное условие Коренблюма не выполнено. В то же время в классах $l_A^p(w_n)$, $p\neq 2$ (и в некоторых других), „деление“ как правило, невозможно, см. [65, 11]. Ниже, в п. 7.2, мы вернемся к „свойству деления“ в связи с классом интегралов типа Коши—Стилтьеса.

**6.2. Инвариантные подпространства.** Это одна из важных тем анализа, в которых преимущества параметрического представления аналитических функций перед другими способами их записи сказываются особенно сильно. Речь идет о пространствах аналитических функций $X$, $X\subset N$, и об описании их замкнутых подпространств $E$, инвариантных относительно

* Действительно, если $\varphi\in H^\infty$, то по двойственности $P_+\overline{\varphi} g\in X$ для любой функции $g\in X$; $P_+\left(\sum_{k\in Z} a_k z^k\right) = \sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$ есть проектор Рисса.

умножения на независимую переменную $z$ ($zE \subset E$). Если $X$— алгебра функций и полиномы от $z$ плотны в $X$, то следует говорить об идеалах в $X$. И хотя проблема описания $z$-инвариантных подпространств обычно сводится к исследованию параметрического представления функций, во всей своей широте (вместе с порождаемым его кругом задач и приложений) она далеко выходит за пределы настоящей статьи. Поэтому, отсылая интересующегося читателя к обзорам [90, 24, 23, 91], мы обсудим здесь лишь один вопрос, затронутый в работах В. И. Смирнова (см. [29] и с. 104, 105 наст. изд.) и связанный с весовой полиномиальной аппроксимацией. Речь пойдет о так называемых слабо обратимых функциях (термин Г. Шапиро [87]), т. е. таких элементах $f$ заданного пространства $X$, что замкнутая линейная оболочка множества функций $z^n f$, $n \geqslant 0$, совпадает с $X$. Связь с весовой полиномиальной аппроксимацией очевидна, особенно для пространств $H^p$, $L^p_A(\Omega, dxdy)$. Общих результатов о таких слабо обратимых функциях, однако, немного.* Назовем некоторые из них, в которых усматривается непосредственная связь с работами В. И. Смирнова. Эти результаты устанавливают свойства слабо обратимых функций в пространствах аналитических функций, подчиненных некоторым естественным требованиям, из которых главным является то, что вхождение функции в такое пространство определяется поведением модуля: если $f_1, \dots, f_n \in X$ и $|f| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |f_i|$ в круге $\mathbf{D}$, то $f \in X$. Более подробно см. в [23, § 2.1]. Примерами таких пространств могут служить классы аналитических функций, задаваемые нормами

$$\| f \| = \Big( \int\limits_{\mathbf{D}} |f(\varsigma)|^p w(\varsigma)^p d\mu(\varsigma) \Big)^{1/p},$$

$1 \leqslant p \leqslant \infty$, с некоторыми условиями на $w$ и $\mu$ (например, с условием их радиальной симметрии). В каждом таком пространстве $X$:

а) если $f(\varsigma) \neq 0$, $\varsigma \in \mathbf{D}$, если $fX \subset X$ и $f^{-\varepsilon} \in X$ при некотором $\varepsilon > 0$, то $f$ — слабо обратимая функция;

б) если $f \in X$, $|g| \leqslant |f|$ в $\mathbf{D}$ и функция $g$ слабо обратима, то и $f$ такова же;

в) если $f(\varsigma) = \lim\limits_{n} f_n(\varsigma) \neq 0$, $|\varsigma| < 1$, $f_n$ — слабо обратимые в $X$ функции, и $|f| \leqslant \mathrm{const}\,|f_n|$ в $\mathbf{D}$ при всех $n$, то и функция $f$ слабо обратима;

г) если $f \in X$, $1/f \in D$, то $f$ слабо обратима в $X$;

д) пусть $f = f_1 f_2 \in X$ и $f_1, f_2 \in X$; из слабой обратимости $f_1, f_2$ следует это же свойство $f$, если предположить, что

* Первый такой результат принадлежит В. И. Смирнову (см. с. 104—108 наст. изд., где доказана слабая обратимость в $H^2$ любой внешней функции из $H^2$).

одна из функций $1/f_1$, $1/f_2$ принадлежит классу $D$; обратно, если $f_1 \in D$, то из слабой обратимости $f$ следует слабая обратимость $f_2$.

Мы не будем приводить здесь конкретных приложений этих утверждений, обобщающих некоторые предшествовавшие им результаты (В. И. Смирнова—Н. А. Лебедева, Г. Шапиро, Л. Хедберга и др.), но снова отошлем читателя к ]23]. См. также недавний обзор [91], где изложен несколько иной, но во многом пересекающийся с [23] подход к задаче о слабой обратимости.

Стоит также отметить эффектное появление класса $D$ В. И. Смирнова в подходе Келлегера и Тейлора [82] к описанию замкнутых идеалов в топологических алгебрах аналитических функций $A_p = \{f : f$ аналитична в $\Omega \subset C$, $|f| \leqslant ce^{cp}$ при некотором $c > 0\}$, называемых алгебрами Хёрмандера; здесь $p$ — субгармоническая функция в области $\Omega$, подчиненная некоторым условиям роста вблизи границы $\mathrm{Fr}\Omega$.

**6.3. Функциональная модель Секефальви-Надя-Фойаша.** Здесь приложения канонической факторизации основаны на использовании характеристической оператор-функции $\theta_T$ исследуемого (вполне не унитарного) сжатия $T$ гильбертова пространства $H$ и определителя $\det \theta_T$ этой функции. Если этот определитель существует, то он оказывается функцией из $H^\infty$, а его „параметры“ в канонической факторизации могут быть истолкованы как спектральные параметры определенного содержания (собственные числа, спектральные подпространства и т. д.). Само параметрическое представление $\det \theta_T$ отвечает некоторому „спектральному“ разложению исходного оператора. Подробности этого направления можно найти в [28, 25]. Следует отметить, что именно взгляд В. И. Смирнова на каноническую факторизацию как на выделение „вещественных“ независимых параметров особенно близок спектральной точке зрения и в общем способствовал этой интерпретации факторизации функции $\det \theta_T$.

Класс $D$ находит также приложения в спектральной теории на модели С.-Надя-Фойаша и в ее обобщениях. Именно при изучении более общих — несжимающих — операторов весьма существенным оказывается расщепление пространства на слагаемые, в некотором смысле соответствующие „сжимающей“ и „растягивающей“ частям оператора. Возможность этого расщепления и описания соответствующих подпространств (при одном из подходов) основаны на использовании класса $D$ (В. И. Васюнин, Н. Г. Макаров).

**7. Интегралы типа Коши—Стилтьеса и классы Харди. Сопряженные функции.** Пусть $\mu$ — комплексная счетно аддитивная функция, заданная на борелевской $\sigma$-алгебре подмножеств единичной окружности $\mathbf{T}$. Такую функцию мы будем называть зарядом. Положим

$$K^{\mu}(\varsigma) = \int_{\mathrm{T}} \frac{d\mu(t)}{t-\varsigma} \quad (|\varsigma| < 1). \qquad (2)$$

Функция $K^{\mu}$ называется интегралом типа Коши—Стилтьеса, отвечающим заряду $\mu$ (или потенциалом, или интегралом Коши). В. И. Смирнов показал [Наст. изд., с. 35], что $K^{\mu} \subset \bigcap_{0<p<1} H^p$. Иными словами, если $p \in (0,1)$, то

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |K^{\mu}(re^{i\theta})|^p \, d\theta < +\infty. \qquad (3)$$

Из доказательства, данного В. И. Смирновым, видно, что если $z^{-1}\mu$ — неотрицательный заряд (мера), то левая часть в (3) не превосходит $(|\mu|(\mathrm{T}))^p \left(\cos\frac{p\pi}{2}\right)^{-1}$. Отметим, что любой заряд $\mu$ представим в виде $\sum_{k=1}^{4} \varepsilon_k z \mu_k$, где $|\varepsilon_k| = 1$, а $\mu_k$ — меры.

Теорема В. И. Смирнова — одна из исторически первых оценок так называемых „сингулярных интегральных операторов“. Теория таких операторов ныне представляет собой обширную, важную область анализа (см., например, [30]).

На первый взгляд может показаться, что оценка (3) верна просто потому, что функция $K^{\mu}$ есть, грубо говоря, „линейная комбинация“ функций $1/(t-z)$ ($t \in \mathrm{T}$), каждая из которых суммируема по окружности Т с любой степенью $p$, $p \in (0, 1)$. Но если в определении $K^{\mu}$ заменить функции $1/(t-z)$ функциями $1/|t-z|$ (также принадлежащими классу $L^p(\mathrm{T})$ при любом $p$, $p \in (0, 1)$), то оценка (3) потеряет силу. Все дело здесь в тонком и трудноуловимом взаимодействии аргументов „слагаемых“ $1/(t-z)$, в их „интерференции“. Короткое доказательство оценки (3), данное В. И. Смирновым, необычайно изящно. Впоследствии аналогичный метод был использован Л. Карлесоном для вывода неравенства Колмогорова:

$$\operatorname{mes}\{\theta \in [0, 2\pi] : |K^{\mu}(re^{i\theta})| > a\} \leqslant \frac{C \operatorname{var}\mu}{a} \quad (0<r<1,\ a>0), \qquad (3^*)$$

где $C$ — абсолютная постоянная [81].

**7.1. Критерии представимости функции интегралом типа Коши—Стилтьеса.** Теорема В. И. Смирнова доставляет важные необходимые условия представимости функции $f$, голоморфной в единичном круге $\mathbf{D}$, интегралом типа Коши—Стилтьеса. Эти условия не достаточны. Вообще, обозримых достаточных условий представимости интегралом типа Коши—Стилтьеса в $\mathbf{D}$, которые совпадали бы с необходимыми, по-видимому, не существует [31, 50]. Задача о представимости интегралом типа Коши—Стилтьеса допускает удовлетворительное решение, если речь идет о функциях, голоморфных на всей плоскости с разрезом вдоль окружности $\mathbf{T}$, т. е. в открытом множестве $O \overset{\text{def}}{=} \hat{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{T}$ (формула (2) определяет $K^\mu$ как функцию, голоморфную в $O$ и исчезающую в бесконечности). Г. Ц. Тумаркин показал [31], что функция $f$, голоморфная в $O$, представима в виде $f = K^\mu$ тогда и только тогда, когда $f(\infty) = 0$, и

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) - f\left(\frac{1}{r} e^{i\theta}\right) \right| d\theta < +\infty.$$

Однако, для некоторых применений более удобной оказывается иная форма этого условия, найденная А. Б. Александровым [69, 1, 2]) и основанная на теореме В. И. Смирнова. По этой теореме всякая функция $f$ вида $K^\mu$ (заданная в $O$) обладает следующими свойствами:

$$|f|_p^p \overset{\text{def}}{=} \sup_{0<r<\infty,\, r\neq 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < +\infty \quad (p \in (0,1)) \tag{4}$$

$$|f|_p^p = O\left(\frac{1}{1-p}\right) \quad (p \to 1-0). \tag{5}$$

Кроме того, из классической теоремы Фату об интеграле Пуассона сразу следует, что функция $P_f : \varsigma \to \lim\limits_{r\to 1-0} \left( f(r\varsigma) - f\left(\frac{1}{r}\varsigma\right)\right)$, суммируема на окружности $\mathbf{T}$:

$$P_f \in L^1(\mathbf{T}, m). \tag{6}$$

А. Б. Александров показал, что условия (4) — (6) не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы функция $f$, голоморфная в $O$ и исчезающая в бесконечности, была представима в виде $f = K^\mu$ (где $\mu$ — некоторый заряд на окружности $\mathbf{T}$). Интересно, что для функций $f$, удовлетворяющих условию (4) и (6), условие (5) равносильно условию

$$\varliminf_{p\to 1-0} (1-p)|f|_p^p < +\infty.$$

Равенство $\lim\limits_{p\to 1-0}(1-p)|f|_p^p = 0$ (вместе с условием (6)) характеризует функции $f$ вида $K^\mu$ с $m$-абсолютно непрерывным зарядом $\mu$, а условие (5) вместе с равенством $P_f = 0$ ($m$-п. в.) — функции $f = K^\mu$ с $m$-сингулярными $\mu$ ($m$, как и выше, обозначает нормированную меру Лебега на окружности $\mathbf{T}$). В диссертации А. Б. Александрова [2] даны обобщения этих результатов на функции нескольких комплексных переменных.

**7.2. Деление интеграла типа Коши—Стилтьеса на внутреннюю функцию.** Функция $K^{\mu} \mid \mathbf{D}$, будучи по теореме В. И. Смирнова элементом класса $H^{1/2}$, допускает параметрическое представление (см. выше п. 2)

$$K^{\mu}(\varsigma) = I(\varsigma)\, Q(\varsigma) \quad (|\varsigma| < 1),$$

где $I$ — внутренняя, а $Q$ — внешняя функции. Возникает естественный вопрос: представим ли множитель $Q$ интегралом типа Коши—Стилтьеса (в $\mathbf{D}$)? (Для множителя $I$ утвердительный ответ на такой вопрос очевиден.) С. А. Виноградов показал, что $Q$ есть интеграл типа Коши—Стилтьеса [5]. Более того, если внутренняя функция $J$ такова, что функция $IJ^{-1}$ ограничена в $\mathbf{D}$, то и $J^{-1} K^{\mu}$ есть интеграл типа Коши—Стилтьеса. Эта теорема Виноградова легко следует из сформулированных выше результатов Александрова [1]. В связи с задачей деления интеграла типа Коши—Стилтьеса на внутреннюю функцию см. также работу М. Г. Голузиной [9].

**7.3. Теорема Виноградова о рядах интегралов типа Коши—Стилтьеса.** Напомним, что символ $C_A$ обозначает так называемую „диск-алгебру", т. е. пространство всех функций, непрерывных на множестве $\mathbf{D} \cup \mathbf{T}$ и аналитических в $\mathbf{D}$, с нормой $\|f\|_{C_A} = \max_{\mathbf{T}} |f|$. Рассмотрим также класс $C_A^{\infty}$ всех функций $f$, принадлежащих $C_A$ и бесконечно дифференцируемых (по комплексной переменной) в $\mathbf{D} \cup \mathbf{T}$, который естественным образом превращается в счетно-нормированное пространство.

Пусть $\mathrm{E}$ — некоторое нормированное пространство функций, голоморфных в $\mathbf{D}$. Предположим, что $C_A^{\infty} \subset \mathrm{E}$, причем вложение $C_A^{\infty} \to \mathrm{E}$ непрерывно. С любым элементом $\Phi$ сопряженного пространства $\mathrm{E}^*$ можно связать функцию $\mathrm{K}(\Phi)$, голоморфную в $\mathbf{D}$:

$$\mathrm{K}(\Phi)(\varsigma) \overset{\text{def}}{=} \Phi\left(\frac{1}{1-\varsigma z}\right) \quad (\varsigma \in \mathbf{D})$$

(функционал „применяется по $z$" при фиксированном $\zeta$). Эта функция называется преобразованием Коши функционала $\Phi$.

При изучении конкретных пространств $\mathrm{E}$ часто представляет интерес следующий вопрос: содержится ли множество $\mathrm{K}(\mathrm{E}^*)$ в каком-нибудь классе Харди $H^p$?

Теорема В. И. Смирнова (см. (3)) дает ответ на этот вопрос в том случае, когда $\mathrm{E} = C_A$. В самом деле, в силу принципа максимума модуля пространство $C_A$ можно отождествить с некоторым замкнутым подпространством пространства $C(\mathbf{T})$. Поэтому из теоремы Хана—Банаха, из теоремы Ф. Рисса об общем виде линейного функционала в $C(\mathbf{T})$ и из (3) следует, что

$$\mathrm{K}((C_A)^*) \subset \bigcap_{0<p<1} H^p. \qquad (7)$$

Приведем пример, в котором включение $K(E^*) \subset H^p$ используется для изучения коэффициентов Тейлора $\hat{f}(n)$ функций $f$ класса E.

Условимся говорить, что последовательность $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ комплексных чисел есть мультипликатор пространства E, если

$$\sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} |\hat{f}(n)|\,|\lambda_n| < +\infty,$$

какова бы ни была функция $f \in E$. Множество всех мультипликаторов пространства будет обозначаться символом $M(E)$.

Иногда бывает так, что множество всех последовательностей вида $\{\hat{f}(n)\}_{n\geqslant 0}$, где $f \in E$, не поддается обозримому описанию, т. е. принадлежность функции классу E не поддается отчетливому выражению „на языке ее коэффициентов Тейлора". В таких случаях именно класс $M(E)$ может помочь исследованию коэффициентов функций класса E. Для описания класса $M$ (E) бывает полезен следующий результат.

**Лемма** [6]. *Пусть банахово пространство* E *состоит из функций, аналитических в* **D**. *Предположим, что*

$$C_A^\infty \subset E \subset H^2,$$

*причем оба вложения непрерывны. Пусть существуют такие числа* $p \in (0, 1)$ *и* $c > 0$, *что*

$$K(E^*) \subset H^p, \tag{8}$$

$$\|K(\Phi)\|_{H^p} \leqslant c\|\Phi\|_{E^*} \quad (\Phi \in E^*). \tag{9}$$

*Тогда* $M(E) = l^2$.

Сопоставляя эту лемму с теоремой В. И. Смирнова (в форме (7)), заключаем, что

$$M(C_A) = l^2. \tag{10}$$

Диск-алгебра $C_A$ как раз и есть пример класса функций, коэффициенты которых вряд ли допускают обозримое описание. Однако равенство (10) показывает, что последовательности вида $\{\hat{f}(n)\}_{n\geqslant 0}$, где $f \in C_A$, в некотором смысле „почти заполняют" пространство $l^2$.

Более трудную задачу представляет описание класса $M(U_A)$, где $U_A$ обозначает множество всех функций, голоморфных в **D** и таких, что их ряд Тейлора сходится равномерно в **D**. С. А. Виноградов показал, что $M(U_A) = l^2$. Основная трудность при этом состояла в проверке свойств (8) и (7) (с $E = U_A$). В этом случае они вытекают из следующей теоремы Виноградова, которая представляет собою обобщение теоремы

В. И. Смирнова (см. (3)) и теоремы А. Н. Колмогорова (см. (3*)).

**Теорема С. А. Виноградова** [6]. *Пусть* $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ — *последовательность зарядов на единичной окружности* $\mathbf{T}$. *Если* $\sum\limits_{n\geqslant 0} \operatorname{var}\mu_n < +\infty$, *то функция* $F$, *заданная равенством*

$$F(\varsigma)=\sum\nolimits_{n\geqslant 0}\varsigma^n\int\limits_{\mathbf{T}}\frac{d\mu_n(\eta)}{1-\eta\varsigma}\quad(\varsigma\in\mathbf{D})$$

*принадлежит множеству* $\bigcap\limits_{0<p<1} H^p$. *Существуют такие абсолютные постоянные* $c_1$ *и* $c_2$, *что*

$$m\{\varsigma\in\mathbf{T}:|F(\varsigma)|>t\}\leqslant\frac{c_1}{t}\sum_{n\geqslant 0}\operatorname{var}\mu_n\ (t>0),\qquad(11_1)$$

$$\|F\|_{H^p}\leqslant\frac{c_2}{1-p}\sum_{n\geqslant 0}\operatorname{var}\mu_n\ (0<p<1)\qquad(11_2)$$

($F(\varsigma)$ *в* (1) *обозначает* $\lim\limits_{r\to 1-0}F(r\varsigma)$; *этот предел существует при* $m$-п. в. $\varsigma\in\mathbf{T}$, *так как* $F\in H^p$).

Применяя этот результат к последовательности зарядов вида ($\mu$, 0, 0, ...), получаем из ($11_1$) теорему А. Н. Колмогорова (см. (3*)), а из ($11_2$) — теорему В. И. Смирнова (см. (3)).

Теорема Виноградова — очень глубокий результат; ее доказательство опирается на трудную теорему Карлесона о сходимости почти везде рядов Фурье функций класса $L^2(\mathbf{T})$. Теорема Виноградова имеет и другие красивые применения к исследованию равномерно сходящихся рядов Фурье и Тейлора [15, 16, 2] и, в частности, количественное уточнение теоремы Д. Е. Меньшова об исправлении измеримой функции до функции с равномерно сходящимся рядом Фурье [15].

Пусть $\omega$ — некоторый модуль непрерывности. Обозначим через $\operatorname{lip}_A\omega$ пространство всех функций $f$ класса $C_A$, обладающих следующим свойством:

$$|f(\varsigma_1)-f(\varsigma_2)|=o(\omega(|\varsigma_1-\varsigma_2|))\ (\varsigma_1-\varsigma_2\to 0,\ \varsigma_1,\varsigma_2\in\mathbf{D}).$$

Из результатов С. В. Хрущёва [62] можно вывести, что $\mathrm{K}((\operatorname{lip}\omega)^*)\not\subset N$, каков бы ни был модуль непрерывности $\omega$. Этот факт интересно сопоставить с тем, что для пространства $\mathrm{E}=U_A$ по теореме Виноградова имеет место включение (8).

**7.4. Сопряженные функции и $A$-интеграл.** Рассмотрим тригонометрический ряд

$$a_0/2+\sum\nolimits_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx.\qquad(12)$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} - b_k \cos kx + a_k \sin kx \qquad (13)$$

называется сопряженным с рядом (12). Если (12) есть ряд Фурье (т. е. если существует функция $f$, суммируемая на отрезке $[0,2\pi]$ и такая, что $a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx \quad (k=0, 1, \ldots)$,

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx \quad (k = 1, 2, \ldots)),$$

то ряд (13), вообще говоря, не обязан быть рядом Фурье, хотя в этом случае он суммируем почти везде на $[0,2\pi]$ методом Абеля—Пуассона к некоторой измеримой функции $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(x) = \lim_{r\to 1-0} \sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1}(-b_k \cos kx + a_k \sin kx). \qquad (14)$$

Эту функцию $\tilde{f}$ называют сопряженной с функцией $f$, для которой (12) служит рядом Фурье. Значения функции $\tilde{f}$ при почти всех $x\in[0,2\pi]$ можно представить и как несобственный интеграл:

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{\operatorname{tg} t/2}\, dt, \qquad (15)$$

где $\int\limits_0^{\pi}$ понимается как $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi}$. Существование последнего предела при п. в. $x\in[0,2\pi]$ доказал И. И. Привалов. Из (3) можно вывести, что $\tilde{f}\in \bigcap\limits_{0<p<1} L^p([0,2\pi])$.

В. И. Смирнову (см. с. 36 наст. изд.) принадлежит следующая важная теорема.

**Теорема.** *Если* $\tilde{f}\in L^1([0,2\pi])$, *то ряд* (13) *есть ряд Фурье функции* $\tilde{f}$.

Иными словами, если обе функции $f$ и $\tilde{f}$ суммируемы на $[0,2\pi]$, то

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \tilde{f}(x)\cos kx dx = -b_k \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \tilde{f}(x)\sin kx dx = a_k \quad (k = 0, 1, \ldots). \qquad (16)$$

Эти интегралы по условию теоремы имеют смысл как интегралы Лебега, однако вычислить их, исходя из формул (14) и (15) для сопряженной функции, очень непросто. В. И. Смирнов вывел равенства (16) из своей оценки (3) и из „универсального принципа максимума" (см. выше раздел 3), так что его доказательство в конечном счете существенно использовало теорию функций комплексной переменной, хотя обсуждаемый результат сам по себе имеет вполне „вещественный" смысл. Новое, чисто „вещественное" доказательство теоремы В. И. Смирнова дал П. Л. Ульянов (оно изложено в [4, гл. 8]). Это доказательство основано на понятии $A$-интеграла.

Измеримая комплексная функция $f$, заданная на пространстве $X$ с конечной мерой $\mu$, называется $A$-интегрируемой (по мере $\mu$), если

$$\lim_{t\to+\infty} t\mu\{x\in X: |f(x)|>t\}=0, \tag{17}$$

и существует предел $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{|f|\leqslant A} fd\mu$. Этот предел называется $A$-интегралом функции $f$ и обозначается символом $(A)\int fd\mu$. Отметим очевидный (но важный) факт: если $\int|f|d\mu<+\infty$, то $\int fd\mu=(A)\int fd\mu$. Ниже в качестве $X$ будет выступать отрезок вещественной оси или окружность $\mathrm{T}$; а $\mu$ будет мерой Лебега.

П. Л. Ульянов, используя „чисто вещественные" средства, доказал, что для любой суммируемой функции $f\in L^1([0,2\pi])$ сопряженная функция $\tilde f$ $A$-интегрируема на $[0,2\pi]$; более того, ряд (13) есть ее $A$-ряд Фурье:

$$-b_k=(A)\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\tilde f(x)\cos kx dx,\quad a_k=(A)\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\tilde f(x)\sin kx dx. \tag{18}$$

Этот результат по-новому объясняет теорему В. И. Смирнова о сопряженных функциях: если $\tilde f\in L^1([0,2\pi])$, то все $A$-интегралы в (18) становятся интегралами Лебега.

**7.5. $A$-интеграл и интегральная формула Коши.**

Определение. *Говорят, что функция $f$, голоморфная в круге $\mathrm{D}$, представима в нем по формуле Коши, если*

1) *конечный предел*

$$\lim_{r\to1-0} f(r\zeta)\ (\stackrel{\text{def}}{=\!=} f(\zeta)) \tag{19}$$

*существует при* $m$-п.в.$\zeta$, *и функция* $f$, *определенная равенством* (19) $m$-п.в. *на окружности* $\mathrm{T}$, $m$-*суммируема на ней*;

2) *при любом* $\eta \in \mathbf{D}$

$$f(\eta) = \int\limits_{\mathbf{T}} \frac{f(\varsigma)\, dm(\varsigma)}{1 - \bar{\varsigma}\eta}. \qquad (20)$$

Условие 1), конечно, необходимо для того, чтобы формулу (20) можно было хотя бы записать (и тем более для того, чтобы она была верна). Простые примеры (скажем, $f(\varsigma) = \exp\left[\frac{1+\varsigma}{1-\varsigma}\right]$) показывают, что это естественное условие не достаточно для справедливости равенства (20). В. И. Смирнов (с. 88 наст. изд.) дал исчерпывающее решение задачи об описании класса функций, представимых по формуле Коши. Вот оно.

**Теорема 1.** *Пусть* $f$ — *функция, голоморфная в* $\mathbf{D}$. *Следующие утверждения равносильны*:

a) $f$ *представима в* $\mathbf{D}$ *по формуле Коши*;

b) $f \in D$, *и выполнено условие* 1) *определения.*

Из этой теоремы, из (3) и из того факта, что $H^{1/2} \subset D$, легко следует и еще один результат В. И. Смирнова (с. 36 наст. изд.)

**Теорема 2.** *Предположим, что функция* $f$ *представима в* $\mathbf{D}$ *как интеграл типа Коши*:

$$f(\eta) = \int\limits_{\mathbf{T}} \frac{\psi(\varsigma)\, dm(\varsigma)}{1 - \bar{\varsigma}\eta} \qquad (\eta \in \mathbf{D}), \qquad (21)$$

*где* $\psi$ — *некоторая функция класса* $L^1(\mathbf{T}, m)$. *Если* $f$ *удовлетворяет условию* 1) *определения, то* $f$ *представима в* $\mathbf{D}$ *по формуле Коши.*

Теорема 2 была по-новому доказана П. Л. Ульяновым в рамках его теории $A$-интеграла. А именно, он показал, что любой интеграл типа Коши (21) представим в $\mathbf{D}$ „своим" $A$-интегралом Коши, т. е.

$$f(\varsigma) = (A) \int\limits_{\mathbf{T}} \frac{f(\varsigma)\, dm(\varsigma)}{1 - \bar{\varsigma}\eta} \quad (\eta \in \mathbf{D}) \qquad (22)$$

($f$ в правой части этого равенства определяется формулой (19)). Если $\int\limits_{\mathbf{T}} |f|\, dm < +\infty$, то букву $A$ перед интегралом (22) можно не писать, и мы получаем теорему 2. П. Л. Ульянов обобщил свою формулу (22) на интегралы типа Коши, взятые по ляпуновскому жорданову контуру [49].

А. Б. Александров [1] обобщил результат П. Л. Ульянова, показав, что формула (22) применима к любой функции $f$ смирновского класса $D$, удовлетворяющей условию (17) (где $m=\mu$, а $f$ определена, как в (19)). Из теоремы Александрова теорема 1 следует уже в полном объеме (а не только применительно к интегралам типа Коши). В [1, 2] есть также ряд результатов о представлении с помощью $A$-интегралов гармонических и аналитических функций многих переменных.

В заключение упомянем, что И. В. Островский успешно применил теорему В. И. Смирнова об интегралах типа Коши—Стилтьеса к исследованию распределения значений мероморфных функций вида

$$\sum \frac{A_n}{z-h_n}, \text{ где } \sum \frac{|A_n|}{|h_n|} < \infty \text{ и } \lim |h_n| = +\infty$$

[7, с. 286, 287].

**8. Классы $E^p$.** Г. Ц. Тумаркин и С. Я. Хавинсон обобщили смирновскую теорию классов $E^p$, изложенную на с. 92 наст. изд., на многосвязные области. Начнем с краткого описания этого обобщения [41, 42].

Будем говорить, что последовательность $\{G_j\}_{j\geqslant 1}$ областей исчерпывает область $G$, если $G_j \subset G$ $(j=1, 2, \ldots)$, и для любой компактной части $K$ области $G$ найдется такой номер $j(K)$, что $K \subset G$ при всех $j > j(K)$. Область $G$, граница $\mathrm{Fr}G$ которой есть объединение $n$ попарно дизъюнктных компактных связных и бесконечных множеств, мы будем называть $n$-областью. Круговой областью называется $n$-область, у которой все компоненты границы суть окружности. Для всякой $n$-области $G$ найдутся ограниченная круговая $n$-область $\mathrm{K}_G$ и конформный гомеоморфизм $\varphi_G : \mathrm{K}_G \to G$, такие, что $G = \varphi_G(\mathrm{K}_G)$.

Условимся называть жордановой такую $n$-область $G$, что все компоненты ее границы суть замкнутые кривые Жордана. Если все эти кривые спрямляемы, то мы будем говорить, что $G$ есть область со спрямляемой границей, а $l(\mathrm{Fr}G)$ будет обозначать длину границы.

**Теорема** [42]. *Пусть $p$ — положительное число, а $f$ — функция, голоморфная в $n$-области $G$. Если $G$ неограничена, то мы предположим, кроме того, что $f$ голоморфна в бесконечности. Следующие утверждения равносильны*:

a) *найдется такая последовательность $\{G_j\}_{j\geqslant 1}$ $n$-областей со спрямляемыми границами, что*

$$\sup_j \int_{\mathrm{Fr}G_j} |f(z)|^p |dz| < +\infty; \tag{23}$$

b) *неравенство* (23) *верно для некоторой последовательности $n$-областей $\{G_j\}_{j\geqslant 1}$, удовлетворяющей условиям утверждения* a) *и такой, что* $\sup_j l(\mathrm{Fr}G_j) < +\infty$;

c) *неравенство* (23) *верно для любой последовательности* $\{G_j\}_{j\geqslant 1}$ *со спрямляемыми границами, исчерпывающей* $G$;

d) *существует функция* $U$, *гармоническая в круговой области* $K_G$ *и такая, что* $|(f\circ\varphi_G)|^p|\varphi_G'|\leqslant U$.

Определение. Функция $f$, голоморфная в $n$-области $G$ (и в бесконечности, если $G$ неограничена) и обладающая свойством (а), называется функцией класса $E^p(G)$.

Подчеркнем, что граница области $G$ здесь не предполагается спрямляемой.

В случае 1-области со спрямляемой границей это определение равносильно определению В. И. Смирнова (с. 92 наст. изд.), в котором в роли $G_j$ выступали области, ограниченные линиями уровня функции Грина области $G$. В этом же случае равносильность утверждений (а)—(с) была доказана М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым [14].

Всякая $n$-область $G$ представима в виде пересечения $n$ 1-областей: $G=G_1\cap G_2\cap\ldots\cap G_n$. Если функция $f$ голоморфна в $G$, то

$$f=(f_1\,|\,G)+(f_2\,|\,G)+\ldots+(f_n\,|\,G), \qquad (*)$$

где $f_j$ — некоторая функция, голоморфная в $G_j$. Можно попытаться обобщить определение класса $E^p$ для 1-областей на $n$-области, назвав функцией класса $E^p(G)$ в $n$-области $G$ функцию вида (*), где $f_j\in E^p(G_j)$. Такое определение, действительно, равносильно определению, данному выше, если граница области $G$ спрямляема. Интересно, что эта равносильность сохраняется только для областей со спрямляемыми границами, как показывает следующая теорема Тумаркина и Хавинсона.

**Теорема** [41]. *Пусть* $p$ — *положительное число,* $G$ — *жорданова* $n$-*область,* $n\geqslant 2$. *Следующие утверждения равносильны*:

а) $G$ — *область со спрямляемой границей*;

b) *если* $f_j\in E^p(G_j)$ $(j=1,\ldots,n)$, *то* $(f_1\,|\,G)+\ldots+(f_n\,|\,G)\in E^p(G)$;

c) *всякая функция* $f$ *класса* $E^p(G)$ *представима в виде* (*), *где* $f_j\in E^p(G_j)$ $(j=1,\ldots,n)$.

Г. Ц. Тумаркин и С. Я. Хавинсон решили задачу построения функции класса $E^p(G)$ с заданным модулем граничных значений [48]. Эта задача решается совсем просто, например с помощью конформной пересадки в круг, если $G$ есть 1-область. Для $n$-области при $n\geqslant 2$ задача сильно усложняется. Обычный способ построения внешней функции неприменим из-за возможной многозначности функции, гармонически сопряженной с заданной гармонической функцией. Тем не менее верно следующее утверждение.

**Теорема.** *Пусть $G$ — $n$-область со спрямляемой границей. Если неотрицательная функция* $\rho$, *заданная на* $\mathrm{Fr}G$, *суммируема по мере Лебега со степенью $p$, а функция* $\log\rho$ *суммируема на* $\mathrm{Fr}G$ *по гармонической мере (относительно области $G$), то существует такая функция $f$ класса $E^p(G)$, что* $|f(\zeta)|=\rho(\zeta)$ п. в. *на* $\mathrm{Fr}G$.

В работе [42] доказаны аналогичные утверждения, относящиеся к классам $H^p(G)$ (см. ниже) и $D(G)$.

Будем говорить, что измеримые по Лебегу функции $\alpha$ и $\beta$, заданные на $\mathrm{Fr}G$, где $G$ — $n$-область со спрямляемой границей, ортогональны, если функция $\alpha\beta$ суммируема на $\mathrm{Fr}G$, и $\int\limits_{\mathrm{Fr}G}\alpha(z)\beta(z)\,dz=0$. В [46] доказано, что при $p\in(1,+\infty)$ класс $E^p(G)$ совпадает с множеством всех функций, ортогональных классу $E^q(G)$, где $q=p/(1-p)$ (мы имеем в виду, что голоморфную функцию класса $E^r(G)$ можно не отличать от ее граничной функции, определенной почти везде на $\mathrm{Fr}G$). Аналогичный результат справедлив при $p=1$ и $p=\infty$.

А. Б. Александров [69] изучал классы $E^p(G)$ при $p\in(0,1)$ (для 1-области $G$ со спрямляемой границей). Он показал, в частности, что при $p\in(0,1)$ любая вещественная функция $f\in L^p(\mathrm{Fr}G)$ представима в виде $f=\mathrm{Re}F$, где $F$ — некоторая функция класса $E^p(G)$.

Обозначим через $G_-$ неограниченную компоненту множества $\mathbf{C}\diagdown\mathrm{Fr}G$, где $G$ — по-прежнему 1-область со спрямляемой границей. А. Б. Александров показал [69], что при $p\in(0,1)$

$$L^p(\mathrm{Fr}G)=E^p(G)+E^p(G_-) \tag{24}$$

(и здесь мы рассматриваем $E^p(G)$ и $E^p(G_-)$ как подпространства в $L^p(\mathrm{Fr}G)$). При $p=1$ равенство (24) не имеет места — даже, если $G$ есть круг. В то же время в случае $p\in(1,\infty)$ это равенство было давно доказано Б. В. Хведелидзе для ляпуновских кривых $\mathrm{Fr}G$. В [51] было отмечено, что (24) при $p>1$ не может быть верным, если $\mathrm{Fr}G$ — несмирновская кривая (об этом понятии см. ниже). Оно верно тогда и только тогда, когда интегральный оператор с ядром Коши действует из $L^p(\mathrm{Fr}G)$ в $E^p(G)$. Класс спрямляемых кривых, обладающих этим свойством (при $p\in(1,+\infty)$), был полностью описан в замечательной работе [73].

**8.1. Приложения классов $E^p$.** Приложения классов $E^p$, указанные самим В. И. Смирновым, относятся к интегральным представлениям и теории приближений. Фундаментальный результат В. И. Смирнова о совпадении класса $E^1(G)$ с классом всех функций, представимых в 1-области $G$ со спрямляемой границей по формуле Коши, был распространен на многосвязные области в работе [42]. Ряд исследований был посвящен обобщению и развитию другого важного результата В. И. Смирнова о совпадении класса $E^2(G)$ в смирновской 1-области $G$ с замыканием в $L^2(\mathrm{Fr}G)$ множества всех многочленов. С этой теоремой связаны работы М. В. Келдыша, М. А. Лаврентьева, П. П. Коровкина, Я. Л. Геронимуса (см. библиографию в [32]). Наиболее законченные результаты получил Г. Ц. Тумаркин [32]. Они охватывают классы $E^p(G)$ при любых положительных $p$, доставляют полную характеристику множества всех функций класса $L^p(\mathrm{Fr}G)$, допускающих аппроксимацию многочленами в метрике $L^p(\mathrm{Fr}G)$ (для смирновской области это множество совпадает с $E^p(G)$). Кроме того, в работе [32] подробно исследована аппроксимация многочленами в $L^p(\mathrm{Fr}G, \sigma)$, где $\sigma$— конечная мера на $\mathrm{Fr}G$. Классы $E^p(G)$ появляются естественным образом и при исследовании $L^p$-аппроксимации рациональными дробями [33, 3]. Приведем еще один пример аппроксимационной задачи, которая на первый взгляд не имеет отношения к классам $E^p$, но в решении которой они тем не менее играют важную роль. Мы имеем в виду задачу описания класса $X(\Omega, p)$ функций, допускающих аппроксимацию многочленами в луночке $\Omega$ в метрике $L^p(\Omega, dxdy)$ (см. выше п. 4). Оказывается, что описанию множества $X(\Omega, p)$ в терминах класса $D(\omega)$, о котором уже говорилось в п. 4, равносильно такое описание: функция $f$ класса $L^p(\Omega, dxdy)$ принадлежит классу $X(\Omega, p)$ тогда и только тогда, когда она аналитически продолжима в область $\omega$ до функции, произведение которой на некоторую стандартную функцию, голоморфную в $\omega$ и зависящую лишь от пары $(\Omega, \omega)$ и числа $p$, попадает в класс $E^p(\omega)$ [52].

Еще одна важная область приложений классов $E^p$ — это теория двойственности экстремальных задач для аналитических функций, с которой можно познакомиться по работам [44, 57, 61]. Мы ограничимся здесь обсуждением лишь одного классического примера — теоремы Альфорса о конформном отображении $n$-области $G$ на $n$-листный круг. Согласно этой теореме, такое отображение осуществляет функция $f^*$, доставляющая максимум функционалу $f \to |f'(z_0)|$ на классе всех функций, голоморфных в $G$ и не превосходящих по модулю единицы ($z_0$— это фиксированная точка области $G$, определяющая функционал). В работе [57] дано элегантное доказательство этой теоремы, в котором используется класс $E^1(G)$, хотя он и не присутствует в постановке задачи. Доказательство основано на том, что в силу общих соображений двойственности из теории линейных пространств задача о максимуме указанного выше функционала в некотором смысле равносильна задаче наилучшего приближения функции $\varsigma \to 1/(\varsigma - z_0)^2$ в пространстве $L^1(\mathrm{Fr}G)$ функциями класса $E^1(G)$. Совместное исследование этих двух экстремальных задач и позволяет установить упомянутое выше геометрическое свойство функции $f^*$ и доказать ее единственность (с точностью до постоянного множителя). В [56] можно найти выражение величины $|f^{*p}(z_0)|$ через воспроизводящее ядро Сегё для области $G$; это понятие тесно связано с классом $E^2(G)$.

Мы не останавливаемся здесь на обобщениях классов $E^p(G)$ на бесконечносвязные области $G$ и на римановы поверхности (см. литературу в [76]).

**8.2. Классы** $H^p(G)$. В. И. Смирнов предложил еще одно естественное обобщение классов Харди $H^p$ на области, отличные от круга, определив, наряду с классами $E^p(G)$, классы $H^p(G)$. Напомним, что функция $f$, голоморфная в области $G$, по определению принадлежит классу $H^p(G)$, если $|f|^p$ имеет гармоническую мажоранту в $G$ (с. 86 наст. изд.). Это определение не нуждается ни в каких предположениях о структуре области $G$ или ее границы; оно имеет смысл и тогда, когда $G$ есть риманова поверхность.

Пусть $G$ — $n$-область со спрямляемой границей. Тогда одновременно имеют смысл оба обобщения классов Харди: $E^p(G)$ и $H^p(G)$. В. И. Смирнов заметил, что $E^p(G) = H^p(G)$, если $G$ есть 1-область, а производная $\varphi'$ конформного гомеоморфизма $\varphi$: $\mathrm{D} \to G$ отделена от нуля и от бесконечности. Г. Ц. Тумаркин и С. Я. Хавинсон показали, что это свойство области $G$ и необходимо для совпадения классов $E^p(G)$ и $H^p(G)$. Аналогичный результат получен ими и для многосвязных областей [43].

Теоремы В. И. Смирнова о представлении аналитических и гармонических функций по формуле Грина (с. 89 наст. изд.) были обобщены на многосвязные области в работах [43, 45].

Теории классов $H^p(G)$ посвящена обширная литература (см., например, монографию [76]).

**9. Смирновские области.** В. И. Смирнов открыл важный класс областей, носящий теперь его имя.

Определение. *Пусть $G$ — ограниченная область, граница которой — простая спрямляемая кривая Жордана, а $\varphi$ — конформный гомеоморфизм единичного круга* **D** *на область $G$. Говорят, что $G$ есть смирновская область (область класса $S$), если функция $\varphi'$ — внешняя.*

В. И. Смирнов показал, что принадлежность области классу $S$ играет решающую роль для возможности полиномиальной аппроксимации голоморфных функций в среднем и для применимости различных форм классического принципа максимума (с. 56, 65, 93, 98 наст. изд.). Так, если $G \in S$, то класс $E^2(G)$ совпадает с замыканием множества всех многочленов в метрике $L^2(\mathrm{Fr}\, G)$, и всякая функция $f$ класса $E^1(G)$, для которой $\operatorname{vrai\,sup}_{\mathrm{Fr}\, G} |f| \leqslant 1$, удовлетворяет и неравенству

$\sup\limits_{G}|f| \leqslant 1$. Эти результаты — точные: они применимы только к смирновским областям.

Таким образом, 1-область со спрямляемой границей, не принадлежащая классу $S$ (короче, несмирновская область) — чрезвычайно патологический объект. Интуиция, выработанная на материале классических курсов теории аналитических функций или теории классов Харди в круге, часто отказывает при обращении с функциями, голоморфными в несмирновской области.

**9.1. Свойства функций и смирновские области.** Остановимся на исследованиях, в которых изучалась связь свойств голоморфных функций со смирновской (или несмирновской) природой области их определения.

Г. Ц. Тумаркин и С. Я. Хавинсон определили и изучили многосвязные области класса $S$. Они, в частности, обобщили на такие области „универсальный принцип максимума" В. И. Смирнова [42].

Мы уже говорили выше о той роли, которую области класса $S$ играют в теории приближений. Рассмотрим еще одну аппроксимационную задачу, решение которой использует понятие смирновской области.

Рассмотрим множество $v$ всех функций $f$, принадлежащих диск-алгебре $C_A$ (см. выше п. 7.3) и таких, что $f|\mathbf{T}$ есть функция ограниченной вариации на окружности $\mathbf{T}$. Класс $v$ есть банахова алгебра (относительно поточечного умножения и нормы $\|f\|_v \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname{var}\limits_{\mathbf{T}} f + |f(0)|$).

Элемент $a$ банаховой алгебры A называется образующей этой алгебры, если линейные комбинации степеней $1, f, f^2, \ldots$ образуют множество, плотное в A.

**Теорема** [84, с. 476]. *Следующие утверждения равносильны:* a) *$f$ есть образующая алгебры $v$;* b) *отображение $f: \mathbf{D} \cup \mathbf{T} \to \mathbf{C}$ взаимнооднозначно, и $f(\mathbf{D})$ есть смирновская область.*

Алгебра $v$ содержится в алгебре $l_A^1$ всех функций, голоморфных в $\mathbf{D}$, ряды Тейлора которых $f = \sum_{k \geqslant 0} \hat{f}(k) z^k$ абсолютно сходятся в замкнутом круге $\mathbf{D} \cup \mathbf{T}$. Положим $\|f\|_{l_A^1} \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{k \geqslant 0} |\hat{f}(k)|$ $(f \in l_A^1)$. Интересно, что всякая функция $f$, конформно и взаимнооднозначно отображающая $\mathbf{D} \cup \mathbf{T}$ на 1-область со спрямляемой границей, есть образующая банаховой алгебры $l_A^1$ — независимо от того, принадлежит $f(\mathbf{D})$ классу $S$ или нет [87]. Некоторые приложения смирновских областей к задачам рациональной аппроксимации в пространствах $E^p$ даны в статье А. Б. Александрова [3].

**9.2. Области класса $K$.** Условимся говорить, что функция, заданная в области $G$, представима в $G$ интегралом типа Коши — Стилтьеса (короче, $f \in \mathrm{K}(G)$) если существует комплексная борелевская мера $\mu$, сосредоточенная на $\mathrm{Fr}G$ и такая, что

$$f(\varsigma) = \int\limits_{\mathrm{Fr}G} \frac{d\mu(t)}{t - \varsigma} \quad (\varsigma \in G).$$

Следующее определение принадлежит Г. Ц. Тумаркину.

Определение. *Говорят, что* 1-*область $G$ со спрямляемой границей принадлежит классу $K$, если* $(f \circ \varphi)\ \varphi' \in \mathrm{K}(\mathbf{D})$ *для всякой функции $f$ класса* $\mathrm{K}(G)$ (*здесь $\varphi$ — конформный гомеоморфизм круга $\mathbf{D}$ на область $G$*).

Класс $K$ представляет интерес для теории приближений, а также в связи с некоторыми задачами теории сингулярных интегралов (см. проблемную статью Г. Ц. Тумаркина в книге [77, с. 313 — 316]). Геометрические свойства областей класса $K$ еще не вполне выяснены. Известно, однако, что $K \subset S$ ([35], см. также [37]). Более того, А. Б. Александров заметил, что для любой несмирновской области $G$ можно подобрать такую функцию $f \in L^1(\mathrm{Fr}G)$ и такую дискретную меру $\mu$, сосредоточенную на $\mathrm{Fr}G$, что функции $\varsigma \to \int_{\mathrm{Fr}G} \frac{f(t)\,dt}{t-\varsigma}$ и $\varsigma \to \int_{\mathrm{Fr}G} \frac{d\mu(t)}{t-\varsigma}$ не принадлежат классу Неванлинны $N(G)$, т. е. не представимы в виде отношения ограниченных функций, голоморфных в $G$ [77, с. 680—681]. Напомним (см. п. 7), что в силу теоремы В. И. Смирнова $\mathrm{K}(\mathbf{D}) \subset N(\mathbf{D})$, откуда в силу конформной инвариантности класса $N(G)$ и включения $\varphi' \in H^1$, следует $\mathrm{K}(G) \subset N(G)$, если $G \in K$.

Итак, и по отношению к классам $\mathrm{K}(G)$ несмирновские области еще раз обнаруживают свою патологическую природу.

**9.3. Несмирновские области и вещественность граничных значений.** Еще одно причудливое свойство несмирновских областей указано в работе [83]: если $G$ несмирновская область, то класс $E^1(G)$ содержит непостоянную функцию, граничные значения которой в почти всех точках границы вещественны и заключены в промежутке $(0,1)$. Напомним, что все функции класса Харди $H^{1/2}(\mathbf{D})$ с неотрицательными граничными значениями и все функции класса $H^1(\mathbf{D})$ с вещественными граничными значениями постоянны.

**9.4. Приближение рациональными дробями с учетом величин коэффициентов.** Еще одна характеристика смирновских областей принадлежит Г. Ц. Тумаркину и С. Я. Хавинсону [58]. Положим

$$\Omega_1(z) = \inf \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathrm{Fr}G} \left| \frac{1}{t-z} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{t-z_k} \right| |dt| \qquad (z \in G),$$

$$\Omega_2(z) = \inf \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\operatorname{Fr} G} \left| \frac{1}{t-z} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{t-z_k} \right| |dt| + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|,$$

где $G$ — 1-область со спрямляемой границей, а infimum вычисляется по всевозможным конечным наборам точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, расположенных в $\mathbf{C} \setminus (G \cup \operatorname{Fr} G)$, и комплексных коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

**Теорема** [58]. *Если* $\sup \{\Omega_1(z) : z \in G\} < +\infty$, *то* $G \in S$. *Если* $G \in S$, *то* $\Omega_2(z) \leqslant 2$ *при любом* $z \in G$.

**9.5. Геометрические свойства смирновских областей.** Хорошо известно, что уже довольно слабые требования правильности границы 1-области обеспечивают принадлежность этой области классу $S$ (см. с. 64, 65 наст. изд. и [26, 14, 21]). Смирновскими оказываются все 1-области с кусочно-гладкой (т. е. с кусочно-$C^1$) границей, или с границей ограниченного вращения, или с границей, удовлетворяющей известному условию „хорда—дуга“ (длина достаточно малой граничной дуги сравнима с длиной стягивающей ее хорды).

Г. Ц. Тумаркин ввел понятие смирновской дуги [34]. Так называется простая и ориентированная дуга, которая содержится в ориентированной границе некоторой смирновской области (причем ориентация дуги согласована с ориентацией границы). В [34] доказано, что 1-область $G$ со спрямляемой границей принадлежит $S$, если каждая точка границы, за исключением некоторого счетного множества, содержится в некоторой открытой смирновской граничной дуге, ориентация которой согласована с ориентацией границы. В работе Г. Шапиро [88] было показано, что в теореме Тумаркина допустимы и некоторые несчетные множества „несмирновских“ точек.

В [36] изучалась устойчивость классов смирновских и несмирновских областей относительно деформаций границы. Оказалось, что классу $S$ принадлежит всякая 1-область $G_0$ со спрямляемой границей, содержащаяся в смирновской области $G$ и такая, что $\operatorname{Fr} G_0 \setminus \operatorname{Fr} G$ есть счетное объединение попарно дизъюнктных смирновских дуг (с естественной ориентацией). Можно сказать, что область $G_0$ получена в результате деформации некоторых граничных дуг области $G$ в смирновские дуги, внутренние по отношению к $G$. Класс $S$, таким образом, устойчив относительно „внутренних“ и „смирновских“ деформаций границы. Вопрос об устойчивости класса $S$ относительно „внешних“ деформаций (при которых некоторые граничные дуги заменяются смирновскими дугами, расположенными вне замыкания области) остается открытым.

В то же время несмирновская область $G$ становится смирновской, если подвергнуть „смирновской“ и „внутренней“ деформации сколь угодно малую (по длине) открытую часть ее границы, содержащую некоторую фиксированную часть

$e_s$ ($\subset \operatorname{Fr} G$) нулевой длины. Множество $e_s$ целиком отвечает за всю патологию области $G$ [36]. Эти результаты были дополнены в [38], где понятие смирновской и несмирновской области распространено на некоторые классы областей с неспрямляемыми границами.

Остается нерешенной следующая интересная проблема, поставленная Г. Ц. Тумаркиным [34, 38]: существует ли смирновская дуга, которую переменой ориентации можно превратить в несмирновскую?

**9.6. Способы построения несмирновских областей.** Свойства функций, голоморфных в несмирновской области, столь необычны, а геометрические условия, обеспечивающие принадлежность области классу $S$, столь необременительны, что само существование несмирновских областей кажется в высшей степени проблематичным. В. И. Смирнов рассказывал, что, обнаружив роль условия $S$ в теории приближений и в теории граничных свойств голоморфных функций, он в течение некоторого времени не сомневался в том, что все 1-области со спрямляемой границей этому условию удовлетворяют.

В настоящее время известны два способа построения несмирновских областей. Первый был предложен М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым в замечательной работе [14] (см. также [26]), а второй — спустя тридцать лет — американцами Дьюреном, Шапиро и Шилдсом ([75]; см. также [74]).

Гомеоморфное отображение $\varphi$ окружности $\mathbf{T}$ на жорданову кривую $\Gamma = \varphi(\mathbf{T})$ назовем для краткости преобразованием (окружности $\mathbf{T}$). Преобразование $\varphi$ назовем изгибанием окружности, если кривая $\Gamma$ спрямляема и длина любой дуги $\gamma$ окружности $\mathbf{T}$ равна длине дуги $\varphi(\gamma)$. Будем говорить, что преобразование $\varphi$ конформно, если $\varphi$ совпадает на окружности $\mathbf{T}$ с некоторой функцией $g$ класса $v$ (см. выше п. 9.1.). В этом случае $g$ есть гомеоморфизм замкнутого круга $\mathbf{D} \cup \mathbf{T}$ на замыкание некоторой 1-области со спрямляемой границей, а $g' \in H^1$, причем отображение $g$ конформно в круге $\mathbf{D}$ (в классическом смысле этого слова) и почти везде на $\mathbf{T}$ (в том смысле, что $\lim\limits_{r \to 1-0} g'(re^{i\theta}) \neq 0$ при почти всех $\theta \in \mathbf{R}$).

Назовем псевдоокружностью образ окружности $\mathbf{T}$ при конформном изгибании.

М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев исходили из следующего простого замечания: всякая нетривиальная (т. е. отличная от $\mathbf{T}$) псевдоокружность ограничивает некоторую несмирновскую область. В самом деле, из условий $g' \in H^1$, $|g'(e^{i\theta})| = 1$ при почти всех $\theta \in \mathbf{R}$ и $g' \neq \text{const}$ следует, что $g'$ — непостоянная внутренняя функция, так что $g(\mathbf{D} \cup \mathbf{T}) \overline{\in} S$.

М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев доказали, что существуют псевдоокружности, умещающиеся в сколь угодно малом кружке $r\mathbf{D}$. Если $r < 1$, то такая псевдоокружность нетривиальна. В [14] описана явная (хотя и весьма сложная) геометрическая конструкция некоторой последовательности расширяющихся подобластей круга $r\mathbf{D}$. Их границы — кусочно аналитические кривые, а граница их объединения $G$ — псевдоокружность. Основная трудность состоит в доказательстве равенства

$$|g'(e^{i\theta})| = 1 \tag{25}$$

при почти всех вещественных $\theta$, где $g$ — конформное отображение круга $\mathbf{D}$ на область $G$.

В работе [75] Дъюрена, Шапиро и Шилдса нет геометрической конструкции псевдоокружности. Конформное изгибание $\varphi$ окружности $\mathbf{T}$ ищется в виде $\varphi = g|\mathbf{T}$, где $g$ — первообразная ($g(0) = 0$) внутренней функции $J$,

$$J(\varsigma) = \exp\left[-\int_{\mathbf{T}} \frac{t+\varsigma}{t-\varsigma}\, d\mu(t)\right], \tag{26}$$

так что условие (25) выполнено автоматически, а основная трудность состоит в поиске сингулярной меры $\mu$, обеспечивающей взаимную однозначность отображения $g: \mathbf{D} \cup \mathbf{T} \to \mathbf{C}$.

В работе [75] показано, что если сингулярная мера $\nu$ удовлетворяет условию Зигмунда, т. е. если

$$|\nu(I_1) - \nu(I_2)| \leqslant Cm(I_1) \tag{27}$$

для любой пары дуг $I_1$, $I_2$ окружности $\mathbf{T}$, имеющих одинаковые длины и единственную общую точку, то при всех достаточно малых положительных $a$ мера $\mu = a\nu$ обладает нужным свойством: отображение $g$ есть гомеоморфизм замкнутого единичного круга. Доказательство этой теоремы опирается на критерий однолистности Нехари—Альфорса—Вейля, выраженный в терминах шварциана $(g''/g')' - (1/2)(g''/g')^2$ функции $g$. В конечном счете построение псевдоокружности сводится в [75] к следующему вопросу вещественного анализа: можно ли совместить сингулярность вероятностной меры $\nu$ (на окружности $\mathbf{T}$) с условием гладкости (27)? На этот вопрос дан утвердительный ответ в работах [89, 85, 80]. В работе [89] показано даже, что в правой части неравенства (27) можно заменить $m(I_1)$ на $\dfrac{m(I_1)}{\sqrt{|\log m(I_1)|}}$ $\left(\text{но не на } \dfrac{m(I_1)}{|\log m(I_1)|^{1/2+\varepsilon}}\right)$.

В работе [88] указан также способ построения несмирновских областей, границы которых отличны от псевдоокружностей. Там же перечислены некоторые интересные свойства псевдоокружностей, иллюстрирующие сложную природу несмирновских областей. Конструкция Келдыша — Лаврентьева применена в [79] для уточнения результатов Лаврентьева [21], относящихся к кривым, подчиненным условию „хорда—дуга“.

## УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Александров А. Б. Об $A$-интегрируемости граничных значений гармонических функций//Мат. заметки. 1981. Т. 30, № 1. С. 59—72.
2. Александров А. Б. Квазинормированные пространства в комплексном анализе (внутренние функции, операторы сдвига, суммы Фурье): Автореф. докт. дис. Л., 1983. 15 с.
3. Александров А. Б. Два аналога теоремы М. Рисса о сопряженных функциях для пространств В. И. Смирнова $E^p$, $0<p<1$//Теория операторов и теория функций. Л., 1983. Вып. 1. С. 9—20.
4. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М., 1961. 936 с.
5. Виноградов С. А. Свойства мультипликаторов интегралов типа Коши — Стилтьеса и некоторые задачи факторизации аналитических функций//Математическое программирование и смежные вопросы: Труды седьмой зимней школы. Дрогобыч, 1974. С. 5—39.
6. Виноградов С. А. Усиление теоремы Колмогорова о сопряженной функции и интерполяционные свойства равномерно сходящихся степенных рядов//Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1981. Т. 155. С. 7—70.
7. Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М., 1960. 319 с.
8. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М., 1984. 469 с.
9. Голузина М. Г. Несколько замечаний о факторизации интегралов типа Коши — Стилтьеса//Вестн. Ленингр. ун-та. 1982. № 1. С. 107—110.
10. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. М., 1963. 311 с.
11. Гурарий В. П. О факторизации абсолютно сходящихся рядов Тейлора и интегралов Фурье//Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1972. Т. 30. С. 15—32.
12. Келдыш М. В. Об одном классе экстремальных полиномов//Избранные труды. Математика. М., 1985. С. 51—53.
13. Келдыш М. В. Об аппроксимации в среднем функций комплексного переменного полиномами//Избранные труды. Математика. М., 1985. С. 82—91.
14. Келдыш М. В., Лаврентьев М. А. О конформном отображении областей, ограниченных спрямляемыми кривыми//Избранные труды. Математика. М., 1985. С. 29—30.
15. Кисляков С. В. Количественный аспект теорем об исправлении//Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1979. Т. 92. С. 182—191.
16. Кисляков С. В. Коэффициенты Фурье граничных значений функций, аналитических в круге и в бидиске//Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1981. Т. 155. С. 77—102.
17. Коренблюм Б. И. Об одном экстремальном свойстве внешних функций//Мат. заметки. 1971. Т. 10, № 1. С. 53—56.
18. Коренблюм Б. И. О функциях, голоморфных в круге и гладких вплоть до его границы//Докл. АН СССР. 1971. Т. 200, № 1. С. 24—27.
19. Коренблюм Б. И., Файвышевский В. М. Об одном классе сжимающих операторов, связанных с делимостью аналитических функций//Укр. мат. журн. 1972. Т. 24, № 5. С. 692—695.
20. Кусис П. Введение в теорию пространств $H^p$. М., 1984. 364 с.
21. Лаврентьев М. А. О некоторых граничных задачах в теории однолистных функций//Мат. сб. 1936. Т. 1, № 6. С. 815—844.
22. Мергелян С. Н. О полноте систем аналитических функций//Успехи мат. наук. 1953. Т. 8, № 4. С. 3—63.
23. Никольский Н. К. Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа//Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1974. Т. 120. 255 с.
24. Никольский Н. К. Инвариантные подпространства в теории опера-

торов и теории функций//Математический анализ. М., 1974. Т. 12. С. 199—412.
25. Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига. М., 1980. 383 с.
26. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.; Л., 1950. 336 с.
27. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., 1979. 587 с.
28. Сёкефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М., 1970. 431 с.
29. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М., 1964. 438 с.
30. Стейн И. М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., 1973. 342 с.
31. Тумаркин Г. Ц. Об интегралах типа Коши — Стилтьеса//Успехи мат. наук. 1956. Т. 11, № 4. С. 163—166.
32. Тумаркин Г. Ц. Приближение в среднем функций на спрямляемых кривых//Мат. сб. 1957. Т. 42. С. 79—128.
33. Тумаркин Г. Ц. Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов//Изв. АН Арм. ССР, физ.-мат. науки. 1961. Т. 14, № 1. С. 9—31.
34. Тумаркин Г. Ц. Об одном достаточном условии принадлежности области классу $S$//Вестн. Ленингр. ун-та. 1962. № 13. С. 47—55.
35. Тумаркин Г. Ц. Свойства аналитических функций, представимых интегралами типа Коши — Стилтьеса и типа Коши — Лебега//Изв. АН Арм. ССР, физ.-мат. науки. 1963. Т. 16, № 5. С. 23—45.
36. Тумаркин Г. Ц. Влияние деформации границы на некоторые конформные свойства областей (вхождение области в класс S В. И. Смирнова)//Мат. заметки. 1970. Т. 8, № 3. С. 351—359.
37. Тумаркин Г. Ц. Граничные свойства аналитических функций, представимых интегралами типа Коши//Мат. сб. 1971. Т. 84, № 3. С. 425—439.
38. Тумаркин Г. Ц. Граничные свойства конформных отображений некоторых классов областей//Некоторые вопросы современной теории функций: Материалы конференции. Новосибирск, 1976. С. 149—160.
39. Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я. О стирании особенностей у аналитических функций одного класса (класса $D$)//Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 4. С. 193—199.
40. Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я. О теореме разложения для аналитических функций класса $E_p$ в многосвязных областях//Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, № 2. С. 223—228.
41. Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я. К определению аналитических функций класса $E_p$ в многосвязных областях//Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, № 1. С. 201—206.
42. Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я. Аналитические функции в многосвязных областях класса В. И. Смирнова (класса $S$)//Изв. АН СССР, сер. мат. 1958. Т. 22. С. 379—386.
43. Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я. Классы аналитических функций в многосвязных областях, представимые по формулам Коши и Грина//Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, № 2. С. 215—221.
44. Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я. Исследование свойств экстремальных функций с помощью соотношений двойственности в экстремальных задачах для классов аналитических функций в многосвязных областях//Мат. сб. 1958. Т. 46, № 2. С. 195—228.
45. Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я. Условия представимости гармонической функции формулой Грина в многосвязной области//Мат. сб. 1958. Т. 44, № 2. С. 225—234.
46. Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я. Взаимная ортогональность граничных значений некоторых классов аналитических функций в многосвязных областях//Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, № 3. С. 173—180.
47. Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я. Классы аналитических функций

в многосвязных областях//Исследования по современным проблемам ТФКП: Сб. ст./Под ред. А. И. Маркушевича. 1960. С. 45—47.
48. Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я. О существовании в многосвязных областях однозначных аналитических функций с заданным модулем граничных значений//Изв. АН СССР, сер. мат. 1958. Т. 22. С. 543—562.
49. Ульянов П. Л. Об интеграле типа Коши//Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1961. Т. 60. С. 262—281.
50. Хавин В. П. Об аналитических функциях, представимых интегралом типа Коши — Стилтьеса//Вестн. Ленингр. ун-та. 1958. № 1. С. 66—79.
51. Хавин В. П. Граничные свойства интегралов Коши и гармонически сопряженных функций в областях со спрямляемой границей//Мат. сб. 1965. Т. 68. С. 499—517.
52. Хавин В. П. Аппроксимация многочленами в среднем в некоторых некаратеодориевых областях//Изв. вузов, математика. 1968. Т. 9. С. 86—93; Т. 10. С. 87—94.
53. Хавин В. П. Обобщение теоремы Привалова — Зигмунда о модуле непрерывности сопряженной функции//Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1971. Т. 6, № 2—3. С. 252—258.
54. Хавин В. П. О факторизации аналитических функций, гладких вплоть до границы//Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1971. Т. 22. С. 202—205.
55. Хавин В. П., Шамоян Ф. А. Аналитические функции с липшицевым модулем граничных значений//Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1970. Т. 19. С. 237—239.
56. Хавинсон С. Я. Об аналитической емкости множеств, совместной нетривиальности различных классов аналитических функций и лемме Шварца в произвольных областях//Мат. сб. 1961. Т. 54. С. 3—50.
57. Хавинсон С. Я. Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области//Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, № 2. С. 25—98.
58. Хавинсон С. Я. Некоторые аппроксимационные теоремы, учитывающие величины коэффициентов аппроксимирующих функций//Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 6. С. 366—370.
59. Хавинсон С. Я. Устранимые особенности аналитических функций класса В. И. Смирнова//Некоторые вопросы современной теории функций: Материалы конференции. Новосибирск, 1976. С. 160—166.
60. Хавинсон С. Я. Факторизация аналитических функций в конечносвязных областях. М., 1981. 115 с.
61. Хавинсон С. Я. Основы теории экстремальных задач для ограниченных аналитических функций и их различных обобщений. М., 1981. 92 с.
62. Хрущёв С. В. Проблема одновременной аппроксимации и стирание особенностей интегралов типа Коши//Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1978. Т. 130. С. 124—194.
63. Шамоян Ф. А. Деление на внутреннюю функцию в некоторых пространствах функций, аналитических в круге//Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1971. Т. 22. С. 206—208.
64. Широков Н. А. Модули аналитических функций, гладких вплоть до границы.— Препринт Ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1982, Р-7—82. 43 с.
65. Широков Н. А. Свойства модулей аналитических функций, гладких вплоть до границы//Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 6. С. 1320—1323.
66. Широков Н. А. Мультипликативные свойства аналитических функций, гладких вплоть до границы: Автореф. докт. дис. Л., 1985. 16 с.
67. Широков Н. А. Множества нулей функций из $\Lambda_\omega$//Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1982. Т. 107. С. 179—188.
68. Ahern P., Cohn W. A geometric charactererization of $N^+$ domains// Proc. Amer Math. Soc. 1983. 88, N 3. P. 454—458.
69. Aleksandrov A. B. Essays on non-locally convex Hardy Classes// Lecture Notes in Math. 1981. Vol. 864. P. 1—89.

70. Beurling A. On two problems concerning linear transformations in Hilbert space// Acta Math. 1949. Vol. 81, N 1—2. P. 239—245.
71. Brennan J. Approximation in the mean by polynomials on non-Caratheodory domains// Ark. Mat. 1977. Vol. 15. P. 117—168.
72. Carleson L. Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle// Acta Math. 1952. Vol. 87. P. 325—345.
73. David G. L'intégrale de Cauchy sur les courbes rectifiables. Prepublications// Université de Paris-Sud. Dép. Math. Orsay, 1982. T. 5, N. 528. 21 p.
74. Duren P. L. Theory of $H^p$ spaces. New York, 1970. 258 p.
75. Duren P. L., Shapiro H. S., Shields A. L. Singular measures and domains not of Smirnov type// Duke Math. J. 1966. Vol. 33, N. 2. P. 247—254.
76. Hasumi M. Hardy classes on infinitely connected Riemann surfaces. Berlin, 1983. 280 p.
77. Havin V. P., Hruščev S. V., Nikol'skii N. K. (Ed.) Linear and complex analysis problem book. Berlin, 1984. 719 p.
78. Helson H. Lectures on invariant subspaces. New York, Academic Press, 1964. 173 p.
79. Jerison D. The failure of $L^p$ estimates for harmonic measure in chord-arc domains// Mich. Math. J. 1983. Vol. 30, N. 2. P. 191—198.
80. Kahane J.—P. Trois notes sur les ensembles parfaits linéaires// Enseignement Math. 1969. Vol. 15. P. 185—192.
81. Katznelson Y. An introduction to harmonic analysis. New York, 1976. 264 p.
82. Kelleher J. J., Taylor B. A. Closed ideals in locally convex algebras of analytic functions// J. reine u. angew. Math. 1972. Vol. 255. P. 190—209.
83. Khavinson D. Remarks concerning boundary properties of analytic functions of $E_p$ -classes// Indiana Univ. Math. J. 1982. Vol. 31, N. 6. P. 779—787.
84. Newman D. J., Schwartz J. T., Shapiro H. S. On generators of Banach algebras $l_1$ and $L_1(0,\infty)$// Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 107. P. 466—484.
85. Piranian G. Two monotonic, singular, uniformly almost smooth functions// Duke Math. J. 1966. Vol. 33. P. 255—262.
86. Rudin W. The closed ideals in an algebra of analytic functions// Canad. J. Math. 1957. Vol. 9, N. 3. P. 426—434.
87. Shapiro H. S. Weakly invertible elements in certain function spaces, and generators in $l_1$ // Mich. Math. J. 1964. Vol. 11. P. 161—165.
88. Shapiro H. S. Remarks concerning domains of Smirnov type// Mich. Math. J. 1966. Vol. 13. P. 341—348.
89. Shapiro H. S. Monotonic singular functions of high smoothness// Mich. Math. J. 1968. Vol. 15. P. 265—275.
90. Shields A. L. Weighted shift operators and analytic function theory// AMS Surveys series, N. 13, Top. Oper. Theory, 1974, Providence, R. I. P. 49—128.
91. Shields A. L. Cyclic vectors in Banach spaces of analytic functions// NATO ASI. Series C 153, Operators and Function Theory. Dordrecht, Reidel, 1985. P. 315—350.

## Часть вторая

# РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН

## НОВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ*

*(Совместно с С. Л. Соболевым)*

1. Задача изучения колебаний упругого полупространства, граничащего с вакуумом, была поставлена M. G. Lamb'ом в известной работе „О распространении колебаний вдоль поверхности упругого тела"**. Автор рассматривает ряд задач, касающихся колебаний, вызванных различного рода силами. В одних случаях он решает задачу до конца, однако в других случаях у него возникают формулы, в которые входят расходящиеся интегралы Фурье. В начале автор изучает случай силы, периодической по времени и координатам, затем использует интеграл Фурье для перехода к общему случаю.

В настоящей работе мы предлагаем новый метод, позволяющий, между прочим, решить проблемы M. Lamb'a с помощью весьма несложных вычислений. Наш метод дает возможность определять смещение не только на поверхности полупространства (как делал M. Lamb), но также и внутри полупространства.

Существенной чертой нашего метода является преобразование задачи с тремя независимыми переменными к задаче, содержащей только две независимые переменные.

Две вещественные переменные можно трактовать как комплексную переменную, и теория функций комплексной переменной дает возможность легко построить искомое решение.

Сначала мы рассмотрим задачу, изученную M. Lamb'ом, — задачу о колебаниях полупространства под воздействием приложенного к поверхности вертикального импульса. Далее, переходя к другим задачам, в которых источник находится внутри упругого полупространства, мы сделаем несколько важных предположений, позволяющих искать решение, являющееся

---

* Sur une méthode nouvelle dans le problème plan des vibrations élastiques. — Труды Сейсмол. ин-та, vol. 20, 1932, p. 1—37.

** Phil. Trans. Roy. Soc. of London, vol. 203, Sept., 1904, p. 1.

функцией меньшего числа независимых переменных. Найденные решения будут удовлетворять начальным и граничным условиям.

Наше общее рассмотрение позволяет изучить отражение (от плоскости) некоторых специальных типов упругих волн.

Это дает нам возможность решить, например, задачу о колебаниях упругого слоя.

**2.** Поставим первую задачу — задачу о колебаниях полупространства под действием приложенного к поверхности вертикального импульса.

Пусть поверхность рассматриваемого полупространства совпадает с координатной плоскостью $xz$ и пусть движение не зависит от $z$. Это предположение сводит нашу задачу к плоской, что для нас весьма важно.

Для компонент смещения $u$ и $v$ справедливы соотношения

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{1}$$

в которых функции $\varphi$ и $\psi$ должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right), \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right), \tag{2}$$

где

$$a = \sqrt{\rho/(\lambda + 2\mu)}, \quad b = \sqrt{\rho/\mu}. \tag{3}$$

Здесь через $\rho$ мы обозначили плотность среды, а через $\lambda$ и $\mu$ — упругие постоянные Ламе.

Предположим, что вдоль оси $X$ действует вертикальная сила $R(x, t)$, нормальная к поверхности $y = 0$. Тогда на границе

$$\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right]_{y=0} = 0, \tag{4}$$

$$\left[\left(\frac{b^2}{a^2} - 2\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y}\right]_{y=0} = \frac{R(x, t)}{\mu}. \tag{5}$$

Для изучения случая импульса, сосредоточенного в точке $x=0$ в момент $t=0$, мы должны сделать предельный переход. Пусть

$$P_\varepsilon(x, t) = \frac{1}{\varepsilon^2} P\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\right),$$

где $P(x, t)$ — функция, непрерывная в прямоугольнике $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$; $P(x, t) = 0$ при $|x| \geqslant 1$ или $\left|t - \frac{1}{2}\right| \geqslant 1/2$.

Обозначим через $\varphi_\varepsilon(x, t)$ и $\psi_\varepsilon(x, t)$ решения уравнения (2) с условиями (4) и (5), в которых $R(x, t)$ заменена на $P_\varepsilon(x,t)$.

Мы будем рассматривать задачу о колебаниях, возникающих под действием импульса как предела при $\varepsilon \to 0$ изучаемых нами задач. Таким образом,

$$\varphi(x, y, t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon(x, y, t), \quad \psi(x, y, t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \psi_\varepsilon(x, y, t).$$

Величина импульса определяется по формуле

$$Q = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx \int_0^{\varepsilon} P_\varepsilon(x, t)\, dt = \int_{-1}^{1} dx \int_0^1 P(x, t)\, dt.$$

Из определения $\varphi_\varepsilon$, $\psi_\varepsilon$ следует, что $\varphi_\varepsilon(kx, ky, kt) = \varphi_{\varepsilon/k}(x, y, t)$; $\psi_\varepsilon(kx, ky, kt) = \psi_{\varepsilon/k}(x, y, t)$.

Это свойство функций $\varphi_\varepsilon$ и $\psi_\varepsilon$ вытекает из вида уравнения (2), граничных условий (4) и (5) и определения $P_\varepsilon(x, t)$. Переходя в этих равенствах к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем $\varphi(kx, ky, kt) = \varphi(x, y, t)$, $\psi(kx, ky, kt) = \psi(x, y, t)$, т. е. функции $\varphi$ и $\psi$ — это функции, однородные степени нуль и, следовательно, зависящие только от двух переменных

$$\xi = x/t, \quad \eta = y/t. \tag{6}$$

Укажем еще случай, когда потенциалы $\varphi_\varepsilon$ и $\psi_\varepsilon$ оказываются однородными функциями. Пусть $P(x)$ — нечетная, непрерывная при $-1 \leqslant x \leqslant +1$ функция. Положим в уравнении (5) $R(x, t) = 0$ для $t < 0$ и $R(x, t) = \frac{1}{\varepsilon^2} P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ для $t > 0$. В этом случае

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} R(x, t) dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^{1} P(x)\, dx = 0.$$

Момент относительно оси $x = 0$ будет равен

$$\frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^{\varepsilon} xP\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = 2 \int_0^1 P(x)\, x dx = q.$$

При $\varepsilon \to 0$ мы получаем случай сосредоточенного в точке $x = 0$ момента величины $q$, который включается в момент времени $t = 0$.

Таким образом, мы видим, что случай однородных потенциалов может возникать в различных механических задачах. В дальнейшем мы увидим, что решение такого типа будет содержать несколько произвольных постоянных, которые могут быть определены исходя из условий задачи. Следует отметить, что мы встретимся еще с одним обстоятельством, которое приводит к неопределенности в решении. Здесь мы изучаем уравнение на контуре, окружающем область существования какой-либо регулярной функции. Это уравнение означает, что вещественная часть некоторого линейного оператора равна нулю на этой функции. Мы выбираем наиболее простой случай, полагая, что указанный оператор везде равен нулю. Однако мы можем получить и иные решения, отождествляя этот оператор с регулярной функцией, вещественная часть которой равна нулю всюду на контуре, за исключением единственной точки, где она имеет особенность. Мы не будем рассматривать все множество решений подобного вида, надеясь сделать это в дальнейшем исследовании.

Переходя к изучению функций $\varphi$ и $\psi$, отметим еще одно обстоятельство, которое встретится нам в дальнейшем.

Используя тот факт, что функции $\varphi$ и $\psi$ однородны, сведем уравнения (2) к двум уравнениям с двумя независимыми переменными. Кроме того, выбирая эти переменные соответствующим образом, сведем эти уравнения к уравнению Лапласа или уравнению колебания струны. Действительно, если функции $\varphi$ и $\psi$ зависят только от переменных (6), то уравнения (2) принимают вид

$$(a^2\xi^2-1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+2a^2\xi\eta\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}+(a^2\eta^2-1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+2a^2\left(\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)=0, \tag{7}$$
$$(b^2\xi^2-1)\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+2b^2\xi\eta\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}+(b^2\eta^2-1)\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+2b^2\left(\xi\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)=0.$$

Характеристики первого из уравнений (7) определяются с помощью обыкновенного дифференциального уравнения $(a^2\xi^2-1)\,d\eta^2-2a^2\xi\eta d\xi d\eta+(a^2\eta^2-1)\,d\xi^2=0$, а характеристики второго из уравнений (7) — из аналогичного уравнения.

Предыдущее уравнение может быть представлено следующим образом: $a^2(\xi d\eta-\eta d\xi)^2-(d\xi^2+d\eta^2)=0$.

Пусть $ds$ — элемент длины дуги характеристики. Тогда наше уравнение можно записать в виде

$$\xi\frac{\partial\eta}{\partial s}-\eta\frac{\partial\xi}{\partial s}=\pm\frac{1}{a},$$

откуда сразу вытекает, что характеристики касательны к окружности $\xi^2+\eta^2=1/a^2$. Первое из уравнений (7) эллиптично при

$$\xi^2+\eta^2<1/a^2 \tag{$8_1$}$$

и гиперболично при

$$\xi^2+\eta^2>1/a^2. \tag{$8_2$}$$

В последнем случае имеются два однопараметрических семейства характеристик, задаваемых уравнением $-C\xi \pm \pm\sqrt{a^2 - C^2}\eta + 1 = 0$, где $C$ — произвольная постоянная. В случае ($8_1$) из этого уравнения находятся два значения $C$, которые оказываются комплексно сопряженными. Проанализируем этот случай. Вдоль мнимых характеристик

$$\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} \pm i\frac{\eta\sqrt{1-a^2(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2} = C.$$

Полагая

$$\sigma = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \quad \tau = \frac{\eta\sqrt{1-a^2(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2}, \tag{$9_1$}$$

приведем уравнение (7) к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} = 0. \tag{$10_1$}$$

Аналогично в случае ($8_2$) уравнение (7) с помощью вещественной замены переменных

$$\sigma = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \quad \tau = \frac{\eta\sqrt{a^2(\xi^2+\eta^2)-1}}{\xi^2+\eta^2} \tag{$9_2$}$$

сводится к уравнению колебания струны

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} = 0. \tag{$10_2$}$$

Во второй части нашей работы мы укажем более общий и простой метод сведения уравнений (2) к канонической форме ($10_1$) или ($10_2$).

**3.** Учитывая, что к моменту времени $t=0$ исследуемое нами упругое полупространство находилось в состоянии покоя и что колебания не могут распространяться со скоростью, превышающей скорость распространения продольных волн, мы можем утверждать, что искомое решение должно обращаться в нуль вне круга

$$\xi^2 + \eta^2 = 1/a^2. \tag{$11_1$}$$

Таким образом, нахождение потенциала $\varphi$ приводит к интегрированию уравнения ($10_1$).

Для нахождения потенциала $\psi$ во всех предыдущих формулах необходимо заменить $a$ на $b$. Характеристики второго уравнения (7) будут касательны к окружности

$$\xi^2 + \eta^2 = 1/b^2, \tag{$11_2$}$$

и уравнение сведется к виду ($10_2$) во внешности этой окружности. Если же точка ($\xi$, $\eta$) будет лежать во внешности не только окружности ($11_2$), но и окружности ($11_1$), то значение функции $\psi$ в этой точке также должно быть равно нулю.

Учитывая, что значение $\psi$ в каждой точке, лежащей вне окружности ($11_2$), равно сумме двух членов, каждый из которых постоянен вдоль одной из характеристик, приходящих в эту точку, мы можем утверждать, что $\psi$ может быть отличным от нуля вне окружности ($11_2$) только на отрезках касательных между точкой касания и осью $\eta = 0$ и только таких касательных, которые пересекаются с осью $\eta = 0$ на расстоянии, меньшем $1/a$ от начала координат.

Таким образом, в плоскости $\xi\eta$ фронт поперечной волны образован дугой $AB$ окружности ($11_2$) и отрезками касательных $\overline{AA_1}$ и $\overline{BB_1}$, таких, что $\overline{OA_1} = \overline{OB_1} = 1/a$ (рис. 1). В случае продольной волны, т. е. в случае потенциала $\varphi$, фронт представляет собой просто полуокружность ($11_1$). Вид фронта поперечной волны (рис. 1) можно легко получить, используя принцип Ферма. Следует отметить, что колебания, распространяющиеся вдоль поверхности, имеют скорость $1/a$, причем каждая точка поверхности представляет собой источник как продольных, так и поперечных колебаний, в то время как во внутренности области поперечные колебания распространяются со скоростью $1/b$.

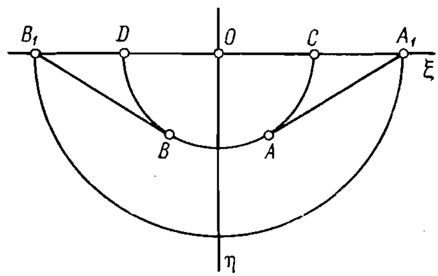


Рис. 1.

Уравнение отрезка волнового фронта $AA_1$ имеет вид

$$a\xi + \sqrt{b^2 - a^2}\,\eta - 1 = 0. \tag{12}$$

Возвращаясь к переменным $x$, $y$, $t$, получаем прямолинейный фронт

$$ax + \sqrt{b^2 - a^2}\,y - t = 0. \tag{$12_1$}$$

Для изучения уравнения ($10_1$) введем комплексную переменную

$$\theta_1 = \sigma + i\tau = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} + i\,\frac{\eta\sqrt{1 - a^2(\xi^2 + \eta^2)}}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Это преобразование отображает полукруг $\xi^2 + \eta^2 < 1/a^2$ ($\eta > 0$) на полуплоскость $\tau > 0$ комплексной переменной $\theta_1$, причем

$B_1A_1$ переходит в полуоси $(-\infty, -a)$ и $(+a, +\infty)$ оси $\tau=0$, а полуокружность $B_1A_1$ — в отрезок $(-a, +a)$ этой оси (рис. 2). В полуплоскости $\tau>0$ потенциал представляет собой гармоническую функцию и может быть представлен в виде вещественной части аналитической функции $\Phi(\theta_1)=\varphi+i\varphi^*$:

$$\varphi=R[\Phi(\theta_1)].$$

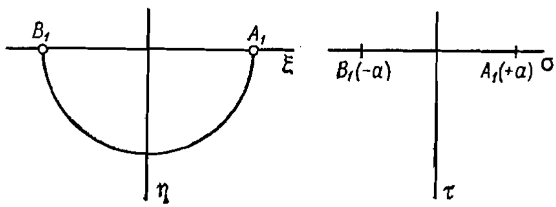



Рис. 2.

Аналогично, вводя комплексную переменную

$$\theta_2=\sigma+i\tau=\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}+i\frac{\eta\sqrt{1-b^2(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2}$$

в полукруге $\xi^2+\eta^2<1/b^2$ $(\eta>0)$, мы можем представить потенциал $\psi$ в виде вещественной части функции $\Psi(\theta_2)=$ $=\psi+i\psi^*$, аналитической в полуплоскости $\tau>0$:

$$\psi=R[\Psi(\theta_2)].$$

Формулы

$$\theta_1=\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}+i\frac{\eta\sqrt{1-a^2(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2},\quad \theta_2=\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}+i\frac{\eta\sqrt{1-b^2(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2} \tag{13}$$

показывают, что на отрезке диаметра $CD$ (см. рис. 1) $\theta_1$ оказывается равным $\theta_2$. Этот факт окажется существенным в дальнейшем.

Легко показать, что на плоскости $\theta_2$ точкам $D$ и $C$ соответствуют точки $+b$ и $-b$ оси $\tau=0$, а точкам $B$ и $A$ — точки $a$ и $-a$ указанной оси.

Выясним, какой вид принимают в новых переменных краевые условия. Каково бы ни было $t>0$, на поверхности полупространства напряжение отсутствует, так что для $\varphi$ и $\psi$ должны выполняться условия (4) и (5), в которых $P(x, t)=0$. Таким образом,

$$\begin{gathered}D_1(\varphi, \psi)=\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\right]_{y=0}=0,\\ D_2(\varphi, \psi)=\left[\left(\frac{b^2}{a^2}-2\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\right)+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}-2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}\right]_{y=0}=0,\end{gathered} \tag{14}$$

где через $D_1$ и $D_2$ мы обозначили линейные операторы, возникающие в левых частях краевых уравнений. Дифференцирование по $\xi$ и $\eta$ может быть заменено дифференцированием по $\theta_1$ и $\theta_2$. Нетрудно заметить, что при $\eta=0$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\xi}=-\theta_1^2,\quad \frac{\partial^2\theta_1}{\partial\xi^2}=2\theta_1^3,\quad \frac{\partial\theta_1}{\partial\eta}=-\theta_1\sqrt{a^2-\theta_1^2},\quad \frac{\partial^2\theta_1}{\partial\eta^2}=-2\theta_1^3,$$

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\xi\partial\eta}=-\frac{2\theta_1^4-a^2\theta_1^2}{\sqrt{a^2-\theta_1^2}},$$

где ветвь квадратного корня выбирается таким образом, чтобы при $\theta_1>a$ она была чисто мнимой и отрицательной.

Вполне аналогичные соотношения выполняются и для $\theta_2$. Условия (14) преобразуются к виду

$$\begin{gathered}R\left[2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}\,\Phi''(\theta)+2\frac{a^2-2\theta^2}{\sqrt{a^2-\theta^2}}\Phi'(\theta)-(2\theta^2-b^2)\Psi''(\theta)-\right.\\ \left.-4\theta\Psi'(\theta)\right]_{\tau=0}=0,\\ R\left[(b^2-2\theta^2)\Phi''(\theta)-4\theta\Phi'(\theta)-2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}\,\Psi''(\theta)-\right.\\ \left.-2\frac{b^2-2\theta^2}{\sqrt{b^2-\theta^2}}\Psi'(\theta)\right]_{\tau=0}=0.\end{gathered}\tag{15}$$

Здесь, как и выше, символ $R$ означает вещественную часть комплексного числа. Переменные $\theta_1$ и $\theta_2$ мы обозначили одной буквой $\theta$ без указания индекса, так как на оси $\eta=0$ переменные $\theta_1$ и $\theta_2$ совпадают.

Равенства (15) должны выполняться на той части вещественной оси $\tau=0$, которая соответствует диаметрам полуокружностей.

Вспоминая то, что было сказано относительно соответствия между $\theta_1$, $\theta_2$, $\xi$ и $\eta$, получаем, что условия (15) должны удовлетворяться на полуосях $\sigma\leqslant -b$ и $\sigma\geqslant b$. Заметим также, что отрезок $-a\leqslant\sigma\leqslant +a$ переменных $\theta_1$ и $\theta_2$ соответствует дугам полуокружностей волновых фронтов продольных и поперечных колебаний и, следовательно, функций $\varphi$ и $\psi$, т. е. вещественные части $\Phi$ и $\Psi$ должны обращаться в нуль на этом отрезке. Учитывая, что при $-a\leqslant\theta\leqslant a$ все коэффициенты в левых частях уравнений (15) вещественны, мы можем утверждать, что условия (15) должны выполняться также и на отрезке $-a\leqslant\theta\leqslant a$.

Покажем теперь, что условия (15) выполняются также и при $-b\leqslant\theta\leqslant -a$ и $a\leqslant\theta\leqslant b$. Для этого рассмотрим гиперболическое уравнение, которому удовлетворяет функция $\psi$ в криволинейных треугольниках $AA_1C$ и $BB_1D$ (см. рис. 1).

Достаточно изучить случай треугольника $BB_1D$. Вводя координаты

$$\sigma = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \quad \tau = \frac{\eta\sqrt{b^2(\xi^2+\eta^2)-1}}{\xi^2+\eta^2}, \tag{16}$$

получим для $\psi$ уравнение струны

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} = 0,$$

решение которого записывается в виде суммы двух волн:

$$\psi = f_1(\sigma+\tau) + f_2(\sigma-\tau).$$

Используя то обстоятельство, что $\psi$ обращается в нуль вне круга ($11_1$), мы можем утверждать, как уже указывалось выше, что в предыдущем выражении для $\psi$ отличен от нуля лишь один член, который не равен нулю на характеристиках, представляющих собой отрезки касательных к полуокружности $DC$, заключенные между точками дуги $BD$ и осью $\tau=0$.

Указанные отрезки касательных могут быть обозначены с помощью вещественного параметра $\theta_3$:

$$\theta_3 = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} - \frac{\eta\sqrt{b^2(\xi^2+\eta^2)-1}}{\xi^2+\eta^2} \qquad (a \leqslant \theta_3 \leqslant b), \tag{17}$$

и функция $\psi$ окажется зависящей во внутренности треугольника $BB_1D$ только от $\theta_3$. Очевидно, что значение переменной $\theta_3$ на каждой касательной совпадает со значением $\theta_2$ в точке касания. Отсюда в силу непрерывности $\psi$ следует, что в треугольнике $BB_1D$

$$\psi = R[\Psi(\theta_3)].$$

На отрезке $B_1D$ оси $\eta=0$ значение $\theta_3$ совпадает с $\theta_1$.

Возвращаясь к условиям (14), мы можем выразить производные по $\xi$ и $\eta$ через производные по $\theta_1$ и $\theta_3$. Эти переменные можно обозначить одной и той же буквой $\theta$, причем $a \leqslant \theta \leqslant b$.

Уравнения (14) приобретают вид

$$R\left[2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}\,\Phi''(\theta) + 2\frac{a^2-2\theta^2}{\sqrt{a^2-\theta^2}}\,\Phi'(\theta)\right] + \\ + (2\theta^2-b^2)\,R[\Psi''(\theta)] + 4\theta R[\Psi'(\theta)] = 0,$$

$$R[(b^2-2\theta^2)\,\Phi''(\theta) - 4\theta\Phi'(\theta)] - 2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}\,R[\Psi''(\theta)] - \\ - 2\frac{b^2-2\theta^2}{\sqrt{b^2-\theta^2}}\,R[\Psi'(\theta)] = 0$$

$$(a \leqslant \theta \leqslant b),$$

откуда следует, что условия (15) должны выполняться также и при $a \leqslant \theta \leqslant b$.

Рассматривая треугольник $AA_1C$, можно показать, используя аналогичные выкладки, что условия (15) должны выполняться также и в интервале $-b \leqslant \theta \leqslant -a$. Итак, условия (15) справедливы на всей вещественной оси комплексной переменной $\theta$.

Отсюда вытекает, что аналитическая функция, стоящая в левой части уравнения (15), представляет собой мнимую постоянную. Этот вывод справедлив, если предположить, что при $\tau \to 0$ функция, стоящая в левой части условий (15), равномерно стремится к своему предельному значению. Таким образом, имеем

$$-2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}\,\Phi''(\theta) - 2\frac{a^2-2\theta^2}{\sqrt{a^2-\theta^2}}\,\Phi'(\theta) + (2\theta^2-b^2)\,\Psi''(\theta) + 4\theta\Psi'(\theta) = \alpha i,$$

$$(b^2-2\theta^2)\,\Phi''(\theta) - 4\theta\Phi'(\theta) - 2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}\,\Psi''(\theta) - 2\frac{b^2-2\theta^2}{\sqrt{b^2-\theta^2}}\,\Psi'(\theta) = \beta i,$$

где $\alpha$ и $\beta$ вещественны.

Интегрируя эти уравнения по $\theta$, получаем

$$\begin{aligned} -2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}\,\Phi'(\theta) + (2\theta^2-b^2)\,\Psi'(\theta) &= \alpha i\theta + C_1, \\ (b^2-2\theta^2)\,\Phi'(\theta) - 2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}\,\Psi'(\theta) &= \beta i\theta + C_2, \end{aligned} \tag{18}$$

откуда

$$\begin{aligned} \Phi'(\theta) &= \frac{-(\alpha i\theta + C_1)\cdot 2\theta\sqrt{b^2-\theta^2} - (\beta i\theta + C_2)(2\theta^2-b^2)}{(2\theta^2-b^2)^2 + 4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\sqrt{b^2-\theta^2}}, \\ \Psi'(\theta) &= \frac{(\alpha i\theta + C_1)(2\theta^2-b^2) - (\beta i\theta + C_2)\cdot 2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}}{(2\theta^2-b^2)^2 + 4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\sqrt{b^2-\theta^2}}, \end{aligned} \tag{19}$$

где $C_1$ и $C_2$ — комплексные постоянные. Рассмотрим вещественные $\theta$, $-a \leqslant \theta \leqslant a$. Как мы уже указывали, такие $\theta$ соответствуют фронту продольной волны и части фронта поперечной волны, и, следовательно, при $-a \leqslant \theta \leqslant a$ вещественные части $\Phi'(\theta)$ и $\Psi'(\theta)$ должны обращаться в нуль. Отсюда вытекает, что $C_1$ и $C_2$ чисто мнимые.

Для того чтобы найти входящие в выражение для $\Phi'$ и $\Psi'$ постоянные, выразим через $\Phi$ и $\Psi$ компоненты смещений $u$ и $v$, используя формулу (1). Имеем

$$u = R\left[\Phi'(\theta_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \Psi'(\theta_2)\frac{\partial\theta_2}{\partial y}\right],$$
$$v = R\left[\Phi'(\theta_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial y} - \Psi'(\theta_2)\frac{\partial\theta_2}{\partial x}\right]. \tag{20}$$

Используя выражение $\theta_1$ и $\theta_2$, получаем

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial x} = -\theta_1\frac{\partial\theta_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial\theta_1}{\partial y} = -\sqrt{a^2-\theta_1^2}\,\frac{\partial\theta_1}{\partial t},$$
$$\frac{\partial\theta_2}{\partial x} = -\theta_2\frac{\partial\theta_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial\theta_2}{\partial y} = -\sqrt{b^2-\theta_2^2}\,\frac{\partial\theta_2}{\partial t}, \tag{21}$$

где, как уже указывалось выше, квадратные корни выбираются таким образом, чтобы при $\theta_1 > a$ и $\theta_2 > b$ они были чисто мнимыми с отрицательной мнимой частью. Переменные $\theta_1$ и $\theta_2$ имеют в координатах $x$, $y$, $t$ следующий вид:

$$\theta_1 = \frac{xt}{x^2+y^2} + i\,\frac{y\sqrt{t^2-a^2(x^2+y^2)}}{x^2+y^2},$$
$$\theta_2 = \frac{xt}{x^2+y^2} + i\,\frac{y\sqrt{t^2-b^2(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}. \tag{22}$$

Рассмотрим теперь значения $u$ и $v$ на оси $x=0$. В случае импульса, сосредоточенного в точке $x=0$ и действующего в направлении оси $x$, смещение $u$ на этой оси должно равняться нулю. Учитывая, что на этой оси $\theta_1$, $\theta_2$, $\partial\theta_1/\partial t$ и $\partial\theta_2/\partial t$ чисто мнимые и, следовательно, $\partial\theta_1/\partial x$ вещественно, а $\partial\theta_1/\partial y$ — чисто мнимо, мы можем получить из первого уравнения (20), что $C_1=\beta=0$. Обозначая $C_2$ через $Ci$, где $C$ — вещественная постоянная, запишем $\Phi'$ и $\Psi'$ в виде

$$\Phi'(\theta) = i\,\frac{-2\alpha\theta^2\sqrt{b^2-\theta^2}+C(2\theta^2-b^2)}{F(\theta)},$$
$$\Psi'(\theta) = i\,\frac{\alpha\theta(2\theta^2-b^2)+2C\theta\sqrt{a^2-\theta^2}}{F(\theta)}, \tag{23}$$

где

$$F(\theta) = (2\theta^2-b^2)^2 + 4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\,\sqrt{b^2-\theta^2}\,. \tag{24}$$

Формулы (23) содержат две вещественные постоянные: $\alpha$ и $C$. Рассмотрим смещения $u$ и $v$ в точках оси $y=0$, предполагая, что время $t$ стремится к бесконечности. При этом переменные $\theta_1$ и $\theta_2$, равные $t/x$, также стремятся к бесконечности, и выражение

$$F(\theta) = (2\theta^2 - b^2)^2 - 4\theta^4 \left(1 - \frac{a^2}{\theta^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{b^2}{\theta^2}\right)^{1/2} = (2a^2 - 2b^2)\theta^2 + \ldots$$

будет порядка $\theta^2$.

Используя для $\theta$ выражение

$$\theta = \frac{xt}{x^2 + y^2} + i \frac{y\sqrt{t^2 - c^2(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2} \qquad (c^2 = a^2 \text{ или } b^2), \qquad (25)$$

легко представить $u$ и $v$ в виде ряда по степеням $1/t$. Если $\alpha \neq 0$, главный член в этих разложениях оказывается константой, так что при $t \to \infty$ мы получаем отличное от нуля смещение. При $\alpha = 0$ этот член также равен нулю. Поэтому $\alpha$ также следует положить равным нулю. Тогда формулы (23) принимают вид

$$\Phi'(\theta) = iC \frac{2\theta^2 - b^2}{F(\theta)}, \qquad \Psi'(\theta) = iC \frac{\sqrt{a^2 - \theta^2}}{F(\theta)}. \qquad (26)$$

Потенциал $\psi$ будет определяться вещественной частью аналитической функции $\Psi(\theta)$ не только в полукруге $\xi^2 + \eta^2 \leqslant 1/b^2$, но и в двух треугольниках, если вместо $\theta_2$ подставить введенную выше переменную $\theta_3$.

**4.** Значение постоянной $C$ в формулах (26) зависит от значения $Q$ сосредоточенного импульса. Предположим, что эта постоянная определена при $Q = 1$. Предположим, далее, что в точке $x = 0$ оси $y = 0$ приложена сила $Q(t)$, где $Q(t)$ — непрерывная функция $t$. Пусть $\varphi_0(x, y, t)$ и $\psi_0(x, y, t)$ — элементарные потенциалы в точке $(x, y)$ в момент времени $t$. Мы можем построить эти потенциалы суперпозицией потенциалов, получающихся под воздействием элементарных импульсов величины $Q(t - H)\,dH$, действующих в момент времени $t = H$, где переменная $H$ меняется от $H_0$ до $\infty$. Через $H_0$ мы обозначили интервал времени, необходимый для того, чтобы сигнал дошел до точки $(x, y)$. Для продольной волны $H_0$ равно $a\sqrt{x^2 + y^2}$. Для поперечной волны выражение для $H_0$ зависит от положения точки $(x, y)$. Если точка $(x, y)$ расположена внутри угла $AOB$ (см. рис. 1), где фронт поперечной волны имеет вид дуги окружности, $H_0 = b\sqrt{x^2 + y^2}$. Если же точка $(x, y)$ находится вне этого угла, то $H_0 = ax + \sqrt{b^2 - a^2}\,y$. Это выражение для $H_0$ немедленно следует из уравнения (12) (мы сейчас полагаем $x > 0$). Используя уравнения (1) и (26), для компонент смещения можно получить следующие выражения:

$$u = CJ \int\limits_{a\sqrt{x^2+y^2}}^{\infty} \frac{(2\theta_1^2 - b^2)\frac{\partial\theta_1}{\partial x}}{F(\theta_1)} Q(t-H)\,dH +$$

$$+ CJ \int\limits_{b\sqrt{x^2+y^2}}^{\infty} \frac{2\theta_2\sqrt{a^2-\theta_2^2}}{F(\theta_2)} \frac{\partial\theta_2}{\partial y} Q(t-H)\,dH,$$

$$v = CJ \int\limits_{a\sqrt{x^2+y^2}}^{\infty} \frac{(2\theta_1^2 - b^2)\frac{\partial\theta_1}{\partial y}}{F(\theta_1)} Q(t-H)\,dH -$$

$$- CJ \int\limits_{b\sqrt{x^2+y^2}}^{\infty} \frac{2\theta_2\sqrt{a^2-\theta_2^2}}{F(\theta_2)} \frac{\partial\theta_2}{\partial x} Q(t-H)\,dH. \qquad (27)$$

Символ $J$ обозначает мнимую часть следующего за ним выражения. Выражения (27) отвечают случаю, когда точка $(x,y)$ находится внутри угла $AOB$, т. е. когда $b^2x^2 \leqslant a^2(x^2+y^2)$. В случае, когда $b^2x^2 \geqslant a^2(x^2+y^2)$,

$$u = CJ \int\limits_{a\sqrt{x^2+y^2}}^{\infty} \frac{(2\theta_1^2 - b^2)\frac{\partial\theta_1}{\partial x}}{F(\theta_1)} Q(t-H)\,dH +$$

$$+ CJ \int\limits_{ax+\sqrt{b^2-a^2}\,y}^{\infty} \frac{2\theta_2\sqrt{a^2-\theta_2^2}}{F(\theta_2)} \frac{\partial\theta_2}{\partial y} Q(t-H)\,dH,$$

$$v = CJ \int\limits_{a\sqrt{x^2+y^2}}^{\infty} \frac{(2\theta_1^2 - b^2)\frac{\partial\theta_1}{\partial y}}{F(\theta_1)} Q(t-H)\,dH -$$

$$- CJ \int\limits_{ax+\sqrt{b^2-a^2}\,y}^{\infty} \frac{2\theta_2\sqrt{a^2-\theta_2^2}}{F(\theta_2)} \frac{\partial\theta_2}{\partial x} Q(t-H)\,dH. \qquad (28)$$

В этих формулах следует положить

$$\theta_2 = \frac{Hx}{x^2+y^2} + i\,\frac{y\sqrt{H^2 - b^2(x^2+y^2)}}{x^2+y^2} \qquad \text{при } H^2 \geqslant b^2(x^2+y^2),$$

$$\theta_2 = \frac{Hx}{x^2+y^2} - \frac{y\sqrt{b^2(x^2+y^2) - H^2}}{x^2+y^2} \qquad \text{при } H^2 \leqslant b^2(x^2+y^2).$$

причем корень понимается в арифметическом смысле. Для определения производных $\theta$ по $x$ и $y$ можно воспользоваться формулами (21). Очевидно, следует предположить, что рост функции $Q(t)$ при $t \to -\infty$ таков, что интегралы (28) сходятся.

Формулы (27) и (28) совпадают с формулами, полученными в работе С. Л. Соболева „О применении метода плоских волн к проблеме М. Лэмба", однако представленный здесь метод проще и позволяет также решить множество других задач, не прибегая к использованию интеграла Фурье. Известно, что использование интегралов Фурье (при решении задач) часто сопряжено со значительными трудностями.

Анализ формул (26) — (28) проделан в указанной работе С. Соболева, однако мы повторим здесь некоторые существенные моменты этого анализа.

Прежде всего отметим, что в случае сосредоточенного импульса компоненты смещения $u$ и $v$ обращаются в бесконечность на окружностях $(11_1)$ и $(11_2)$. Это прямо следует из выражений производных $\partial\theta/\partial x$ и $\partial\theta/\partial y$.

Единственное исключение представляют точки оси $\eta = 0$, в которых смещение оказывается равным нулю. То же имеет место и на участках $AC$ и $BD$ окружности $(11_2)$, которые не входят в волновой фронт, и моменты времени, соответствующие этим участкам окружности, определяют начало новой фазы колебаний. На прямолинейных участках волнового фронта поперечной волны $\pm a\xi + \sqrt{b^2 - a^2}\,\eta = 1$ производные $\partial u/\partial t$ и $\partial v/\partial t$ обращаются в $\infty$. Это следует из выражения для $\Psi'(\theta)$, которое содержит множитель $\sqrt{a^2 - \theta^2}$, причем на прямолинейных участках фронта $\theta^2 = a^2$.

Аналитические функции $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\theta)$, определенные формулами (26), имеют на вещественной оси два полюса $\theta = \pm c$, являющиеся корнями уравнения

$$F(\theta) = 0. \tag{29}$$

Легко видеть, что $\theta = c$ представляет собой число, обратное скорости распространения поверхностных волн, рассмотренных впервые Rayleigh'ем. Учитывая, что на вещественной оси $\theta = t/x$, можно утверждать, что указанные полюсы определяют бесконечное смещение, распространяющееся вдоль поверхности раздела двух сред со скоростью $1/c$. За исключением этих полюсов функции $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\theta)$ не имеют сингулярных точек в полуплоскости $R(\theta) > 0$. Действительно, можно показать, что уравнение (29) не имеет корней в этой полуплоскости, если положить ветви $\sqrt{a^2 - \theta^2}$ и $\sqrt{b^2 - \theta^2}$ такими, чтобы при $\theta > b$ они оказались чисто мнимыми с отрицательной мнимой частью.

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в статье Д. Купрадзе и С. Л. Соболева „К задаче распространения упругих волн вдоль границы раздела двух сред с различными упругими постоянными". Труды Ин-та сейсмологии АН СССР, № 10, 1930.

**5.** Теперь легко получить выражение смещений также и для случая, когда сила распределена непрерывным образом вдоль оси $y=0$. Пусть $f(x)$ — плотность распределения. В случае мгновенного импульса в момент времени $t=0$

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= CJ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(2\theta_1^2 - b^2)}{F(\theta_1)} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} f(\xi)\, d\xi + \\ &+ CJ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2\theta_2 \sqrt{a^2 - \theta_2^2}}{F(\theta_2)} \frac{\partial \theta_2}{\partial y} f(\xi)\, d\xi, \\ v(x, y, t) &= CJ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(2\theta_1^2 - b^2)}{F(\theta_1)} \frac{\partial \theta_1}{\partial y} f(\xi)\, d\xi - \\ &- CJ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2\theta_2 \sqrt{a^2 - \theta_2^2}}{F(\theta_2)} \frac{\partial \theta_2}{\partial x} f(\xi)\, d\xi, \end{aligned} \tag{30}$$

где

$$\theta_1 = \frac{(x-\xi)\,t}{(x-\xi)^2 + y^2} + i\, \frac{y \sqrt{t^2 - a^2 (x-\xi)^2 - a^2 y^2}}{(x-\xi)^2 + y^2},$$

$$\theta_2 = \begin{cases} \dfrac{(x-\xi)\,t}{(x-\xi)^2 + y^2} + i\, \dfrac{y \sqrt{t^2 - b^2 (x-\xi)^2 - b^2 y^2}}{(x-\xi)^2 + y^2} & \text{при } b^2(x-\xi)^2 + b^2 y^2 < t^2, \\ \dfrac{(x-\xi)\,t}{(x-\xi)^2 + y^2} - \dfrac{y \sqrt{b^2 (x-\xi)^2 + b^2 y^2 - t^2}}{(x-\xi)^2 + y^2} & \text{при } b^2(x-\xi)^2 + b^2 y^2 > t^2. \end{cases}$$

Отметим, что мнимые части всех функций, входящих в подынтегральные выражения в формулах (30), обращаются в нуль во внешности волновых фронтов соответствующих волн. Если сила не только распределена вдоль оси $y=0$, но и размазана во времени, то, умножив элементарные потенциалы на значение силы $Q(\xi, t-H)$, следует проинтегрировать по $H$, как это было сделано при получении формул (27), (28), и по $\xi$, как при получении формул (30). Нижний предел при интегрировании по $H$ в первом интеграле будет $a\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}$, а во втором $b\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}$ при $b^2(x-\xi)^2 \leqslant a^2[(x-\xi)^2 + y^2]$ и $a(x-\xi) + \sqrt{b^2 - a^2}\,y$ при $b^2(x-\xi)^2 \geqslant a^2[(x-\xi)^2 + y^2]$.

**6.** Все предыдущие рассуждения вплоть до формул (19) остаются справедливыми также и для случая сосредоточенной силы, действующей вдоль оси $y=0$. В этом случае необходимо только несколько по-иному определить постоянные, входящие в формулы (19). Легко видеть, что в этом случае компонента смещения $v$ должна обращаться в нуль вдоль оси $y=0$. Действительно, если поменять направление силы, действующей вдоль оси $y=0$, то в силу симметрии компонента смещения $v$ на оси $x=0$ не изменится, в то время как знак $u$ сменится на противоположный. В то же время вектор смещения может разве лишь изменить свое направление, откуда следует, что $v=0$. Рассуждая так же, как и выше, можно получить вместо формул (26) формулы

$$\Phi'(\theta) = -iC\,\frac{2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}}{F(\theta)}, \qquad \Psi'(\theta) = iC\,\frac{2\theta^2-b^2}{F(\theta)}. \tag{31}$$

**7.** Прежде чем перейти к решению новых задач, приведем некоторые соображения, которые уже сыграли значительную роль в наших предыдущих рассмотрениях и в еще большей степени потребуются нам в дальнейшем. Существенным для решения задачи является сведение волнового уравнения для потенциала

$$c^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \qquad (c^2 = a^2 \text{ или } b^2) \tag{2'}$$

к уравнению с двумя независимыми переменными $\sigma$ и $\tau$ таким образом, что в этих новых переменных уравнение переходит в уравнение Лапласа. В случае $c^2=b^2$ мы получили также решение уравнения (2) в виде произвольной функции, зависящей от одной переменной, обозначенной выше через $(\sigma-\tau)$. В первом случае зависимость комплексной переменной $\theta = \sigma + i\tau$ от исходных переменных $(x, y, t)$ может быть выражена формулой

$$-\theta x - \sqrt{c^2-\theta^2}\,y + t = 0. \tag{32}$$

Если рассмотреть пространство трех переменных $(S)$ с координатами $(x, y, t)$, то из предыдущих вычислений следует, что уравнение (32) имеет комплексный корень внутри конуса

$$c^2(x^2+y^2) - t^2 = 0. \tag{33}$$

Если мы хотим выбрать корень $\theta$ уравнения (32) таким образом, чтобы он имел положительную мнимую часть, то нам надо в качестве ветви $\sqrt{c^2-\theta^2}$ выбрать ту, которая принимает отрицательные мнимые значения при $\theta > c$, т. е, которая положительна при $-c < \theta < c$.

Вне конуса (33), т. е. при $c^2(x^2+y^2)-t^2>0$, уравнение (32) имеет два вещественных корня, и произвольная функция любого из этих двух корней удовлетворяет уравнению (2).

Укажем теперь один более общий класс решений уравнения (2), возникающий при сведении его к уравнению Лапласа.

Зависимость новой переменной $\theta=\sigma+i\tau$ от переменных $(x, y, t)$ выберем в виде линейной функции $x$, $y$, $t$ с коэффициентами, являющимися аналитическими функциями $\theta$, при этом коэффициент при $t$ без ограничения общности можно положить равным 1. Таким образом, мы получаем следующее уравнение:

$$t+\chi_1(\theta)x+\chi_2(\theta)y=\chi(\theta). \tag{34}$$

Предположим, что в некоторой области пространства $(S)$ это уравнение имеет комплексный корень $\theta=\sigma+i\tau$, являющийся, очевидно, функцией $(x, y, t)$. Рассмотрим решения уравнения (2), зависящие только от $\sigma$ и $\tau$.

Можно проверить непосредственными вычислениями, что уравнение (2) в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}=0,$$

если $\chi_1$ и $\chi_2$ таковы, что

$$\chi_1^2(\theta)+\chi_2^2(\theta)=c^2.$$

Этот факт является следствием геометрии линий $\sigma=\mathrm{const}$, $\tau=\mathrm{const}$, которые в этом случае представляют собой прямые в исходном пространстве трех измерений $(S)$. Но, поскольку мы не будем использовать этот факт, мы не будем углубляться в изучение уравнения (34). Учитывая, что при конформном преобразовании гармоническая функция переходит в гармоническую, мы можем в качестве новой независимой переменной выбрать $\chi_1(\theta)$. Тогда в силу указанного соотношения

$$\chi_2(\theta)=\pm\sqrt{c^2-\theta^2},$$

так что уравнение (34) может быть сведено к уравнению

$$t-\theta x\pm\sqrt{c^2-\theta^2}\,y-\chi(\theta)=0. \tag{35}$$

Если в какой-либо части пространства $(S)$ это уравнение имеет вещественный корень, то произвольная функция этого корня удовлетворяет уравнению (2).

Все эти утверждения нетрудно проверить с помощью простых вычислений.

Приведем соответствующие формулы, ибо они потребуются нам в дальнейшем. Обозначим через $\delta$ левую часть уравнения (35) и через $\delta'$ производную $\partial\delta/\partial\theta$. Тогда

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\theta}{\delta'}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\pm\sqrt{c^2-\theta^2}}{\delta'}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial t}=-\frac{1}{\delta'}. \tag{36}$$

Вторые производные имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\theta^2}{\delta'}\right), \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{c^2-\theta^2}{\delta'}\right),\\ \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\delta'}\right), \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\mp\sqrt{c^2-\theta^2}\,\theta}{\delta'}\right).\end{gathered} \tag{37}$$

Из выражений (36) вытекает, что если в некоторой области пространства $(S)$ уравнение (35) имеет вещественный корень, то этот корень должен удовлетворять неравенству $-c\leqslant\theta\leqslant c$ и функция $\chi(\theta)$ должна при этом принимать вещественные значения.

Приведем еще некоторые необходимые для дальнейшего формулы. Пусть $\theta$ — комплексный корень уравнения (35) и $f(\theta)$ — аналитическая функция. Используя формулы (36) и (37), получаем следующие выражения для производных $f(\theta)$ по $(x, y, t)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[f'(\theta)\frac{\theta^2}{\delta'}\right], \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[f'(\theta)\frac{c^2-\theta^2}{\delta'}\right],\\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[f'(\theta)\frac{1}{\delta'}\right], \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\pm 1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[f'(\theta)\frac{\theta\sqrt{c^2-\theta^2}}{\delta'}\right].\end{gathered} \tag{38}$$

Те же формулы справедливы и для функции $f(\theta)$ вещественного аргумента $\theta$, если $\theta$ представляет собой вещественный корень уравнения (35).

**8.** Перейдем к изучению задачи о плоских колебаниях полупространства, индуцированных источником силы $F$, расположенным внутри полупространства. Пусть, как и выше, упругое полупространство определяется уравнением $y\geqslant 0$ и пусть источник расположен в точке $x=0$, $y=f$. Предположим, что действие силы происходит в момент времени $t=0$.

Введем две функции $X(\alpha, t)$ и $Y(\alpha, t)$, определенные при $\alpha$, $t$: $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$ и $0\leqslant t\leqslant 1$, и рассмотрим колебания покоящегося при $t=0$ полупространства, индуцированные напряжением с компонентами $(1/\varepsilon^2)X(\alpha, t/\varepsilon)$ и $(1/\varepsilon^2)Y(\alpha, t/\varepsilon)$, приложенным к $\varepsilon$ окрестности точки $F$ и действующим в интервале времени $0\leqslant t\leqslant\varepsilon$. Полагая $\varepsilon\to 0$, мы получаем колебания полупространства, имеющие единственную сингулярность в точке $F:(0, f)$ и определяемые потенциалами $\varphi$ и $\psi$, которые являются функциями, однородными по $x$, $y-f$ и $t$. Подобный тип сингулярности мы будем определять как однородную сингулярность и предположим, что наш источник порождает сингулярность подобного типа.

В следующей работе будет проведен анализ введенных нами однородных сингулярностей.

Волна, отраженная от плоскости $y=0$ пространства $(S)$, отсутствует при $0 \leqslant t \leqslant af$, и, как и в разобранном выше случае, элементарные потенциалы $\varphi$ и $\psi$ зависят лишь от отношений $x/t$ и $(y-f)/t$, т. е. постоянны вдоль любых прямых пространства $(S)$, проходящих через точку $x=0$, $y=f$, $t=0$. В дальнейшем эти прямые будут называться лучами пространства $(S)$. Сначала предположим, что мы имеем дело со случаем, когда источник $F$ является источником чисто продольной волны, т. е. предположим, что потенциал $\psi$ равен нулю при $0 \leqslant t \leqslant af$. Потенциал $\varphi$ будет отличен от нуля только при $t^2 \geqslant a^2[x^2+(y-f)^2]$, т. е. во внутренности конуса $T_0$ пространства $(S)$, имеющего вершиной точку $F$. Уравнение конуса имеет вид

$$t^2 - a^2[x^2+(y-f)^2] = 0. \tag{39}$$

Мы рассмотрим только ту часть конуса, которая лежит внутри полупространства, где $y \geqslant 0$ и $t > 0$.

Введем комплексную переменную $\theta_1$, определенную аналогично (35)

$$t - \theta_1 x + \sqrt{a^2-\theta_1^2}\,(y-f) = 0,$$

т. е.
$$\delta_1 = t - \theta_1 x + \sqrt{a^2-\theta_1^2}\,y - \sqrt{a^2-\theta_1^2}\,f = 0. \tag{40}$$

Тогда $\varphi$ должна быть вещественной частью аналитической по $\theta_1$ функции

$$\varphi_1 = R[\Phi_1(\theta_1)]. \tag{41}$$

Уравнение (40) сопоставляет каждому лучу определенное значение $\theta_1$, так что функция $\varphi_1$ имеет постоянное значение вдоль луча. Рассмотрим это соответствие более подробно. Решая уравнение (40) относительно $\theta_1$, получаем

$$\theta_1 = \frac{xt - i(y-f)\sqrt{t^2-a^2[x^2+(y-f)^2]}}{x^2+(y-f)^2}, \tag{42}$$

причем радикал выбирается со знаком $+$, так что лучам, выходящим из точки $F$ при $t=0$ и протыкающим плоскость $y=0$, соответствуют $\theta_1$ из верхней полуплоскости, т. е. с положительной мнимой частью. Формула (42) устанавливает соответствие между лучами и значениями комплексной переменной $\theta_1$. Множество всех лучей, образующих ту часть конуса, в которой $t > 0$, отображается на всю плоскость комплексной переменной $\theta_1$ с разрезом вдоль вещественной оси $(-a, +a)$, причем точки этого разреза соответствуют образующим конуса. Интервалам вещественной оси $(-\infty, -a)$ и $(a, +\infty)$ соответствуют лучи, лежащие в плоскости $y=f$, а точки мнимой оси — лучам, лежащим в плоскости $x=0$, причем верхняя полуось $(0, +i\infty)$ соответствует лучам, у которых $y < f$ и которые пересекают плоскость $y=0$. Из последнего замечания и из уравнения (40) непосредственно вытекает, что в этом уравнении корень $\sqrt{a^2-\theta_1^2}$ положителен при $\theta_1$, лежащих на полуоси $(0, +i\infty)$. Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что $\sqrt{a^2-\theta_1^2}$ является чисто мнимым с отрицательной мнимой частью при $\theta_1 > a$.

Образующие конуса $(T_0)$ соответствуют фронту распространяющихся упругих волн, и, следовательно, потенциал $\varphi_1$ должен обращаться в нуль в соответствующих точках, т. е. функция $\Phi_1(\theta_1)$, фигурирующая в формуле (41), должна принимать чисто мнимые значения на разрезе $(-a, a)$. Точки, расположенные на оси конуса $(T_0)$, соответствуют источнику колебаний в различные моменты времени и отображаются посредством формулы (42) в бесконечно удаленную точку комплексной плоскости $\theta_1$. Так как источник колебаний известен, то определена и сингулярность функции $\Phi_1(\theta_1)$ на бесконечности.

Эти данные, в свою очередь, определяют функцию $\Phi_1(\theta_1)$. Более тщательное рассмотрение различных источников будет проведено ниже. Заметим только, что из предположения о том, что потенциал $\varphi_1$ сохраняет постоянное значение вдоль любого луча, выходящего из точки $x=0$, $y=f$, $t=0$, следует, что сингулярность потенциала $\varphi_1$ в источнике сохраняется при всех $t > 0$.

**9.** Элементарный потенциал $\varphi_1$ определяет колебания при $t < af$. При $t > af$ мы должны ожидать наличия уже обоих потенциалов: $\varphi_2$ для продольной волны и $\psi$ — для поперечной. Выберем эти потенциалы из соображений, аналогичных приведенным выше, а именно, предположим, что они сохраняют постоянное значение вдоль некоторых лучей пространства $(S)$. Эти лучи можно назвать отраженными. Начиная построение $\varphi_2$, заметим прежде всего, что $\varphi_2$ должна быть вещественной частью аналитической функции:

$$\varphi_2 = R[\Phi_2(\theta_2)], \tag{43}$$

где $\theta_2$ определяется из уравнения вида (35) с $c=a$. Выберем функцию $\chi(\theta)$ в этом уравнении таким образом, чтобы значения $\theta_1$ и $\theta_2$ совпадали при $y=0$, т. е. положим $\chi(\theta)$ тем же, что и в уравнении (40).

Таким образом, мы получаем следующее уравнение для $\theta_2$:

$$\delta_2 = t - \theta_2 x - \sqrt{a^2 - \theta_2^2}\, y - \sqrt{a^2 - \theta_2^2}\, f = 0. \tag{44}$$

Определенные таким образом отраженные лучи образуют, как легко проверить, конус

$$t^2 - a^2 [x^2 + (y + f)^2] = 0$$

с вершиной в точке $(0, -f, 0)$. Выберем в уравнении (44) знак радикала иным, нежели в уравнении (40), для того, чтобы лучам, лежащим в той части пространства, где $t > 0$, $y > 0$, соответствовали значения $\theta_2$ с положительной мнимой частью.

При построении $\psi_1$ в уравнении (35) следует положить $c = b$. Свободный член $\chi(\theta)$ следует положить тем же, что и в уравнении (40). Знак радикала в коэффициенте при $y$ следует выбрать таким образом, чтобы лучам, вдоль которых $t$ и $y$ растут, соответствовали значения $\theta$ с положительной мнимой частью. Легко показать, что для этого необходимо выбрать знак (—).

Итак, для $\theta_3$ мы получаем уравнение

$$\delta_3 = t - \theta_3 x - \sqrt{b^2 - \theta_3^2}\, y - \sqrt{a^2 - \theta_3^2}\, f = 0. \tag{45}$$

При $y = 0$ значения $\theta_3$ совпадают со значениями $\theta_1$ и $\theta_2$. Потенциал $\psi_1$ будет вещественной частью аналитической функции

$$\psi_1 = R\,[\Psi_1(\theta_3)]. \tag{46}$$

Прежде чем перейти к построению функций $\Phi_2(\theta_2)$ и $\Psi_1(\theta_3)$, выясним связь между переменными $\theta$. Рассмотрим для этого пересечение фундаментального конуса $(T_0)$ с плоскостью $y=0$, от которой происходит отражение. Это пересечение имеет вид гиперболы $t^2 - a^2(x^2 + f^2) = 0$.

Каждой точке $(x, t)$ на плоскости $y = 0$, расположенной внутри этой гиперболы, для которой $t^2 - a^2(x^2 + f^2) \geqslant 0$ и $t > 0$, соответствует значение комплексной переменной $\theta_1$ из верхней полуплоскости или с вещественной оси. Из соображений, которыми мы руководствовались при выводе уравнений (44) и (45), следует, что точке $(x, t)$ должны соответствовать значения $\theta_2$ и $\theta_3$, равные значению $\theta_1$. Таким образом, точке $(x, t)$ из указанной области сопоставляются значения $\theta_2$ и $\theta_3$ из верхней полуплоскости. Подставляя эти значения в уравнения (44) и (45), мы получаем в пространстве $(S)$ два отраженных луча. Вдоль одного из них остается постоянным потенциал $\varphi_2$, а вдоль другого — $\psi_1$. Вдоль этих лучей координаты $t$ и $y$ растут, откуда следует, между прочим, что добавление потенциалов $\varphi_2$ и $\varphi_1$ не оказывает влияния на моменты времени $t < af$ и не меняет начальных условий. Если зафиксировать точку $(x, y)$ и момент времени $t$, то соответствующие значения $\theta_2$ и $\theta_3$ из верхней полуплоскости вычисляются из уравнений (44) и (45), причем очевидно это может быть сделано не для всех значений $(x, y, t)$.

Этот факт определяется тем, что отраженные лучи не заполняют все четвертьпространство $t > 0$, $y > 0$.

Если, например, отраженные лучи потенциала $\varphi_2$ не проходят через точку $(x, y, t)$, то при построении решения влияние отражения на продольную волну в этой точке отсутствует.

Легко понять, что в силу уравнения (35) комплексное $\theta$ задает при произвольной функции $\chi(\theta)$ определенное направление в пространстве $(S)$. Таким образом, предыдущие построения задают соответствие между направлениями падающих и отраженных лучей. Мы не будем останавливаться на этом вопросе — наша задача состоит в эффективном построении решения.

Для компонент вектора смещения получаем формулы

$$
\begin{aligned}
u &= R\left[\Phi_1'(\theta_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \Phi_2'(\theta_2)\frac{\partial\theta_2}{\partial x} + \Psi_1'(\theta_3)\frac{\partial\theta_3}{\partial y}\right],\\
v &= R\left[\Phi_1'(\theta_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial y} + \Phi_2'(\theta_2)\frac{\partial\theta_2}{\partial y} - \Psi_1'(\theta_3)\frac{\partial\theta_3}{\partial x}\right].
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Во внутренности гиперболы $t^2 - a^2(x^2 + f^2) = 0$ на плоскости $y = 0$ должны выполняться граничные условия, означающие отсутствие напряжения на границе. Отметим также, что переменные $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ принимают при $y = 0$ одинаковые значения, что позволяет нам в этом случае не писать индексов при $\theta$.

Пусть далее $\delta'$ без индекса обозначает общее значение $\delta_1'$, $\delta_2'$, $\delta_3'$ при $y = 0$. Используя уравнение (38), запишем граничные условия на поверхности $y = 0$ в виде

$$
\begin{aligned}
&R\left\{\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{-2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}\,[\Phi_1'(\theta) - \Phi_2'(\theta)] + (b^2 - 2\theta^2)\Psi_1'(\theta)}{\delta'}\right\} = 0,\\
&R\left\{\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{(b^2 - 2\theta^2)[\Phi_1'(\theta) + \Phi_2'(\theta)] - 2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}\,\Psi_1'(\theta)}{\delta'}\right\} = 0.
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Выражение, стоящее под знаком вещественной части $R$, зависит от комплексной переменной $\theta$, которая может принимать любое значение из верхней полуплоскости, и вещественной переменной $x$, которая входит в выражение для $\delta$.

Заметим сначала, что $\theta$ может быть выражена через $x$ и $t$. Этот факт является непосредственным следствием формулы (42), если положить в ней $y = 0$.

Таким образом, мы можем в выражении для $\delta'$

$$\delta' = -x + \frac{\theta}{\sqrt{a^2-\theta^2}} f \tag{49}$$

выразить $x$ по формуле

$$x = t - \frac{\sqrt{a^2-\theta^2}}{\theta} f.$$

Поэтому в левой части уравнений (48) под знаком вещественной части стоят выражения, которые могут быть записаны как функции комплексной переменной $\theta$ и вещественного параметра $t$.

Рассмотрим отрезок вещественной оси $(-a, +a)$ на плоскости $\theta$, который соответствует образующим конуса $(T_0)$, т. е. фронту распространения колебаний вдоль плоскости $y=0$. На этом фронте все три потенциала $\varphi_1$, $\varphi_2$ и $\psi_1$ должны обращаться в нуль, т. е. вещественные части всех трех функций $\Phi_1$, $\Phi_2$ и $\Psi_1$ должны быть нулевыми в этом интервале. Очевидно, то же справедливо и для производных $\Phi_1'$, $\Phi_2'$ и $\Psi_1'$. Учитывая, что радикал $\sqrt{a^2-\theta^2}$ веществен в этом интервале, можно утверждать, что соотношения (48) выполняются при всех вещественных и положительных $t$ при $-a \leqslant \theta \leqslant +a$. Зафиксируем теперь некоторое значение $t$ и покажем, что соотношения (48) выполняются при вещественных положительных $t$ и любых $\theta$ из верхней полуплоскости. При фиксированном $t$ и $x$, меняющемся от $-\frac{\sqrt{t^2-a^2}}{a} f$ до $\frac{\sqrt{t^2-a^2}}{a} f$ комплексная переменная

$$\theta = \frac{xt}{x^2+f^2} \pm i \frac{f\sqrt{t^2 - a^2(x^2+f^2)}}{x^2+f^2}$$

описывает некоторую кривую $(l)$, начинающуюся в некоторой точке $A$ отрезка $(-a, +a)$ и кончающуюся в некоторой точке $B$ того же отрезка. Кривая $(l)$ образует совместно с отрезком вещественной оси $AB$ замкнутый контур, вдоль которого указанные выражения от $\theta$ и $t$ имеют в силу (48) при фиксированном $t$ нулевую вещественную часть. Но тогда при таком $t$ вещественная часть соответствующего выражения должна обращаться в нуль при всех $\theta$ из верхней полуплоскости. Подставляя $t = \theta x + \sqrt{a^2-\theta^2} f$, мы можем сделать вывод, что условия (48), в которых $\delta'$ определено формулой (49), должны выполняться для любого фиксированного $x$ и любой $\theta$ из верхней полуплоскости. Покажем, что отсюда следует

$$\begin{gathered} -2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}\,[\Phi_1'(\theta) - \Phi_2'(\theta)] + (b^2 - 2\theta^2)\Psi_1'(\theta) = 0, \\ (b^2-2\theta^2)[\Phi_1'(\theta) + \Phi_2'(\theta)] - 2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}\,\Psi_1'(\theta) = 0. \end{gathered} \tag{50}$$

Обозначая через $\sigma_1(\theta)$ левую часть первого из этих равенств и полагая $\sigma_2(\theta) = \theta f/\sqrt{a^2-\theta^2}$, мы можем записать первое из соотношений (48) в виде

$$\frac{\sigma_1'(\theta)\,[-x+\sigma_2(\theta)] - \sigma_2'(\theta)\,\sigma_1(\theta)}{[-x+\sigma_2(\theta)]^2} = Ci,$$

где $C$ — вещественная постоянная, которая может зависеть только от параметра $x$, и где $\theta$ принимает любые значения из верхней полуплоскости. Из последнего равенства следует, что в числителе указанной дроби коэффициент при $x$ и свободный по $x$ член должны обращаться в нуль, откуда $\sigma_1(\theta) = 0$, что и доказывает первое из равенств (50). Совершенно аналогичным способом можно доказать и второе из этих равенств.

Разрешая уравнения (50) относительно $\Phi_2'(\theta)$ и $\Psi_1'(\theta)$, мы получаем

$$\begin{aligned} \Phi_2'(\theta) &= \frac{-(2\theta^2-b^2)^2 + 4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\sqrt{b^2-\theta^2}}{F(\theta)}\,\Phi_1'(\theta), \\ \Psi_1'(\theta) &= \frac{-4\theta\,(2\theta^2-b^2)\sqrt{a^2-\theta^2}}{F(\theta)}\,\Phi_1'(\theta), \end{aligned} \tag{51}$$

где

$$F(\theta) = (2\theta^2-b^2)^2 + 4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\sqrt{b^2-\theta^2}. \tag{52}$$

При $-a<\theta<a$ дроби, входящие в формулы (51), вещественно-значны. В то же время по условию вещественные части $\Phi_1(\theta)$ обращаются в нуль на этом интервале, откуда следует, что вещественные части $\Phi_2'(\theta)$ и $\Psi_1'(\theta)$ аннулируются в указанном интервале. Интегрируя уравнения (51), мы можем подобрать постоянные интегрирования таким образом, чтобы вещественные части функций $\Phi_2(\theta)$ и $\Psi_1(\theta)$ были равны нулю при $-a<\theta<a$. С помощью формул (51) и (47) мы можем определить компоненты вектора смещения.

**10.** Отметим некоторые следствия полученных формул. Рассмотрим уравнение (40), имеющее во внутренности конуса $(T_0)$ комплексные корни и на образующих этого конуса вещественные корни из интервала $-a<\theta<a$. Этим образующим в четвертьпространстве $t>0$, $y>0$ пространства $(S)$ соответствует, как мы знаем, фронт распространения продольной волны. Пусть $\theta_1 = \theta_0$ — некоторое значение из интервала $-a<\theta<a$ и пусть $\lambda_0$ — соответствующая образующая. Если положить в уравнении (40) $\theta_1 = \theta_0$, мы получим уравнение плоскости, касающейся конуса $(T_0)$ вдоль образующей $\lambda_0$, так что точкам $(x, y, t)$ внешности конуса $(T_0)$ соответствуют вещественные значения $\theta_1$ из интервала $-a<\theta<a$. Из этого вытекает, что

вдоль каждой образующей $\lambda_0 \delta_1' = 0$, т. е. производная левой части уравнения (40) обращается в нуль. Следовательно, вдоль этих образующих производные $\partial\theta_1/\partial x$ и $\partial\theta_1/\partial y$ обращаются в бесконечность, и, таким образом, на фронте распространения продольной волны смещение обращается в бесконечность. Рассмотрение уравнений (44) и (45) приводит к аналогичным заключениям, так что на фронтах отраженных волн смещение также обращается в бесконечность.

Разлагая левую часть уравнения (40) в ряд по степеням $(\theta_1 - \theta_0)$, можно получить, что $\partial\theta_1/\partial x$ и $\partial\theta_1/\partial y$ обращаются в бесконечность, как $1/\sqrt{x - x_0}$ и $1/\sqrt{y - y_0}$.

Перейдем к изучению асимптотики решения при $t \to \infty$. При этом мы должны получить поверхностные волны. Положим*

$$\xi = x - t/c, \quad \eta = y,$$

где $c$ — положительный корень уравнения $F(\theta) = 0$, т. е. $1/c$ — это скорость волн Рэлея. Предполагая, что $\xi$ и $\eta$ ограничены, построим разложение $\theta_1$ и $\theta_2$ до членов порядка $1/t^2$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \theta_1 &= c - \frac{c^2\xi}{t} - i\,\frac{c\sqrt{c^2 - a^2}\,(\eta - f)}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right), \\ \theta_2 &= c - \frac{c^2\xi}{t} + i\,\frac{c\sqrt{c^2 - a^2}\,(\eta + f)}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right), \end{aligned} \tag{53}$$

откуда непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta_1}{\partial x} &= \frac{\partial\theta_1}{\partial\xi} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial\theta_1}{\partial t} = -\frac{c^2}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad \frac{\partial\theta_1}{\partial y} = i\,\frac{c\sqrt{c^2 - a^2}}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right), \\ \frac{\partial\theta_2}{\partial x} &= -\frac{c^2}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad \frac{\partial\theta_2}{\partial y} = i\,\frac{c\sqrt{c^2 - a^2}}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right). \end{aligned} \tag{54}$$

Можно также показать, что в силу равенства $F(c) = 0$

$$F(\theta_1) = F'(c)\,\frac{-c^2\xi + ic\sqrt{c^2 - a^2}\,(\eta - f)}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right), \tag{55}$$

$$F(\theta_2) = F'(c)\,\frac{-c^2\xi + ic\sqrt{c^2 - a^2}\,(\eta + f)}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right). \tag{56}$$

---

* С. Л. Соболев. Применение плоских волн к одной проблеме M. Lamb'a.

Аналогично можно получить для $\theta_3$, что

$$\theta_3 = c - \frac{c^2\xi}{t} + i\frac{c\sqrt{c^2-b^2}}{t}\eta + i\frac{c\sqrt{c^2-a^2}}{t}f + O\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad (57)$$

$$\frac{\partial\theta_3}{\partial x} = -\frac{c^2}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad \frac{\partial\theta_3}{\partial y} = i\,\frac{c\sqrt{c^2-b^2}}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right). \quad (58)$$

Эти равенства позволяют выписать асимптотику смещения до членов порядка $1/t$. Принимая во внимание формулы (47) и (51), получаем

$$u = R\left\{\frac{-(2c^2-b^2)-4c^2\sqrt{c^2-a^2}\sqrt{c^2-b^2}}{F'(c)}\,\frac{-c^2}{-c^2\xi+ic\sqrt{c^2-a^2}\,(\eta+f)}\,\Phi_1'(c) + \right.$$

$$\left. + i\,\frac{4c\sqrt{c^2-a^2}\,(2c^2-b^2)}{F'(c)}\,\frac{i\sqrt{c^2-b^2}}{-c\xi+i\sqrt{c^2-b^2}\,\eta+i\sqrt{c^2-a^2}\,f}\,\Phi_1'(c)\right\} + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad (59)$$

$$v = R\left\{\frac{-(2c^2-b^2)-4c^2\sqrt{c^2-a^2}\sqrt{c^2-b^2}}{F'(c)}\,\frac{i\sqrt{c^2-a^2}}{-c\xi+i\sqrt{c^2-a^2}\,(\eta+f)}\,\Phi_1'(c) + \right.$$

$$\left. + i\,\frac{4c\sqrt{c^2-a^2}\,(2c^2-b^2)}{F'(c)}\,\frac{-c}{-c\xi+i\sqrt{c^2-b^2}\,\eta+i\sqrt{c^2-a^2}\,f}\,\Phi_1'(c)\right\} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Из наших рассмотрений можно заключить, что при $t \to \infty$ колебание порождает волну с конечной амплитудой, распространяющуюся со скоростью $1/c$. Легко видеть, что эта волна представляет собой естественное обобщение волны Рэлея*.

Таким образом, как мы видим, в случае точечного источника, находящегося внутри полупространства, возникает непериодическая поверхностная волна. Необходимо также отметить, что экспоненциальный закон убывания этой волны с ростом глубины утрачивает свою справедливость в рассматриваемом случае. Понятие длины волн очевидно не имеет смысла.

**11.** Перейдем теперь к случаю, когда источник порождает поперечные колебания. Как и раньше, мы предположим, что этот источник регулярен, т. е. что элементарный потенциал $\psi_1$ поперечных волн представляет собой вещественную часть регулярной функции

$$\psi_1 = R\,[\Psi_1(\theta_1)], \quad (60)$$

где комплексная переменная $\theta_1$ определяется из уравнения, аналогичного (40):

$$\delta_1 = t - \theta_1 x + \sqrt{b^2-\theta_1^2}\,y - \sqrt{b^2-\theta_1^2}\,f = 0. \quad (61)$$

---

* Эти волны были рассмотрены С. Л. Соболевым в цитированной выше работе.

Конус $(T_0)$ определяется в этом случае уравнением

$$t^2 - b^2[x^2 + (y-f)^2] = 0, \tag{62}$$

и лучам, находящимся внутри этого конуса, соответствует комплексная плоскость переменной $\theta_1$ с разрезом $(-b, +b)$ вдоль вещественной оси. Значениям $\theta_1$ на этом разрезе соответствуют образующие конуса. Потенциал продольных отраженных волн мы также будем искать в виде вещественной части функции, регулярной в верхней полуплоскости:

$$\varphi = R[\Phi(\theta_2)], \tag{63}$$

где $\theta_2$ определяется из уравнения

$$\delta_2 = t - \theta_2 x - \sqrt{a^2 - \theta_2^2}\, y - \sqrt{b^2 - \theta_2^2}\, f = 0. \tag{64}$$

Как и в предыдущей задаче, это уравнение выбирается таким образом, чтобы при $y=0$ оно совпадало с уравнением (61). Пересечение конуса (62) с плоскостью $y=0$ имеет вид гиперболы

$$t^2 - b^2(x^2 + f^2) = 0 \quad (t > 0). \tag{65}$$

Каждой точке $P$ внутри этой гиперболы соответствует значение комплексной переменной $\theta_1$ из верхней полуплоскости, а точкам на самой гиперболе сопоставляются значения $\theta_1$ из интервала $(-b, +b)$ вещественной оси. Чтобы получить отраженный луч $(l_{x,t})$ потенциала $\varphi$ продольной волны, выходящий из какой-либо точки $P$ плоскости $y=0$ с координатами $(x, t)$, следует взять соответствующее значение $\theta_1$ и подставить его вместо $\theta_2$ в уравнение (64). Этот луч $(l_{x,t})$ очевидно проходит через точку $P$, причем уравнение (64) определяет его направление.

Но, как мы уже указывали, направление прямых, получаемых из уравнения (64), полностью определяется первыми тремя членами левой части этого уравнения, и, следовательно, оно будет таким же, что и в случае уравнения (44) при том же значении $\theta$. Прямые уравнения (44) образуют уже изученный нами конус с вершиной в точке $x=0$, $y=-f$, $t=0$, причем угол при вершине равен $\operatorname{arctg}(1/a)$. Для этого конуса, так же как и для конуса $(T_0)$ рассматриваемой нами задачи, значениям $\theta$ из верхней полуплоскости соответствуют лучи, вдоль которых $t$ и $y$ возрастают. Когда значение $\theta$ стремится к некоторой точке на интервале $(-a, +a)$, направление луча стремится к направлению соответствующей образующей конуса; когда же $\theta$ стремится к некоторой точке вещественной оси, лежащей вне интервала $(-a, +a)$, направление луча стремится к направлению, лежащему в плоскости $y=0$. В рассматриваемом случае точкам на гиперболе (62) соответствуют значения $\theta_1$ из интервала $(-b, +b)$. Пусть $A$ и $B$ — точки на этой гиперболе, которым соответствуют значения $\theta_1$, такие, что $\theta_1 = \pm a$ (рис. 3).

Ограниченной дуге $AB$ гиперболы соответствуют значения $\theta_1$, удовлетворяющие неравенству $-a < \theta_1 < +a$.

Бесконечным дугам $AA_1$ и $BB_1$ соответствуют значения $\theta_1$ из интервала $a \leqslant \theta_1 < b$ и $-b < \theta_1 \leqslant -a$. Предыдущие рассмотрения приводят к следующему заключению: если точка $P(x, t)$ стремится к точке на дугах $AA_1$ или $BB_1$, то угол между соответствующим лучом $(l_{x,t})$ отраженной продольной волны и плоскостью $y=0$ стремится к нулю и в пределе для точек, расположенных на этих дугах, $(l_{x,t})$ выходит на плоскость $y=0$.

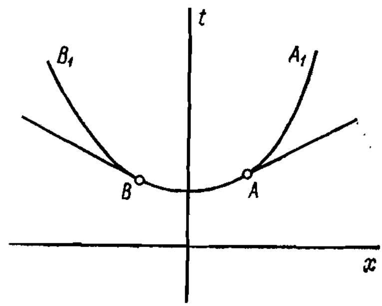


Рис. 3.

Подставляя в (64) на место $\theta_2$ какое-либо значение из интервала $(a, b)$ или $(-b, -a)$, мы получаем уравнение луча $(l_{x,t})$, выходящего из точки на дуге $AA_1$ или $BB_1$ и лежащего в плоскости $y=0$:

$$y=0, \quad t-\theta_2 x-\sqrt{b^2-\theta_2^2}\, f=0.$$

Легко показать, что последнее уравнение представляет собой уравнение касательной к гиперболе (65). Таким образом, каждой точке дуг $AA_1$ и $BB_1$ сопоставляется луч отраженной продольной волны, представляющий собой касательную к гиперболе (65) в этой точке.

В дальнейшем будет показано, что потенциал отраженных продольных волн обращается в нуль только на интервале $(-a, a)$ вещественной оси, как это имело место и в случае источника продольных колебаний, но уже отличен от нуля на интервалах $(-b, -a)$ и $(a, b)$. Он будет также отличен от нуля в двух областях плоскости, образованных дугами $AA_1$ и $BB_1$ гиперболы и касательными к гиперболе в точках $A$ и $B$. В этих областях, которые мы будем в дальнейшем обозначать через (I) и (II), отсутствует падающая поперечная волна, так что, чтобы удовлетворить краевому условию, необходимо определить потенциал отраженной поперечной волны $\psi_2$ не только во внутренности гиперболы (62), но и вне этой гиперболы в областях (I) и (II).

В дальнейшем мы увидим, как это можно сделать, а сейчас перейдем к определению $\psi_2$ во внутренности гиперболы, т. е. для комплексных значений $\theta$ из верхней полуплоскости. Здесь $\psi_2$ — вещественная часть регулярной функции

$$\psi_2 = R\left[\Psi_2(\theta_3)\right], \tag{66}$$

где $\theta_3$ определено уравнением

$$\delta_3 = t - \theta_3 x - \sqrt{b^2 - \theta_3^2}\,y - \sqrt{b^2 - \theta_3^2}\,f = 0, \tag{67}$$

которое, очевидно, определяет конический пучок лучей $(T_1)$ с вершиной $F_1:(x=0,\ y=-f,\ t=0)$ и углом при вершине, равным $\operatorname{arctg}(1/b)$. Нас будут интересовать только те лучи из указанного пучка, на которых $y>0$ и $t>0$.

Выпишем краевые условия для рассматриваемых точек, т. е. для $\theta$, лежащих в верхней полуплоскости. Значения $\theta_1$, $\theta_2$ и $\theta_3$ при $y=0$ совпадают, и, обозначая через $\theta$ их общее значение, мы получаем

$$\begin{gathered} R\left\{\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}\,\Phi'(\theta)+(b^2-2\theta^2)\left[\Psi_1'(\theta)+\Psi_2'(\theta)\right]}{\delta'}\right\}_{y=0}=0,\\ R\left\{\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{(b^2-2\theta^2)\,\Phi'(\theta)+2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}\left[\Psi_1'(\theta)-\Psi_2'(\theta)\right]}{\delta'}\right\}_{y=0}=0, \end{gathered} \tag{68}$$

где $\delta'$ обозначает производную по $\theta$ от $(t-\theta x-\sqrt{b^2-\theta^2}\,f)$.

Как и в случае источника продольных волн, мы получаем отсюда, что

$$\begin{gathered} 2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}\,\Phi'(\theta)+(b^2-2\theta^2)\left[\Psi_1'(\theta)+\Psi_2'(\theta)\right]=0,\\ (b^2-2\theta^2)\,\Phi'(\theta)+2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}\left[\Psi_1'(\theta)-\Psi_2'(\theta)\right]=0, \end{gathered} \tag{69}$$

откуда можно выразить функции $\Phi'(\theta)$ и $\Psi_2'(\theta)$ через $\Psi_1'(\theta)$:

$$\begin{gathered} \Phi'(\theta)=\frac{4\theta\,(2\theta^2-b^2)\sqrt{b^2-\theta^2}}{F(\theta)}\,\Psi_1'(\theta),\\ \Psi_2'(\theta)=\frac{-(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\,\sqrt{b^2-\theta^2}}{F(\theta)}\,\Psi_1'(\theta). \end{gathered} \tag{70}$$

Потенциал $\psi_1$ поперечной волны, распространяющейся от источника, должен обращаться в нуль на фронте волны. Это можно выразить, сказав, что вещественные части функций $\Psi_1(\theta)$ и $\Psi_1'(\theta)$ обращаются в нуль при $-b\leqslant\theta\leqslant b$. Учитывая, что дроби, входящие в формулы (70), принимают вещественные значения при $-a \leqslant \theta \leqslant a$, мы можем утверждать, что и вещественные части функций $\Phi'(\theta)$ и $\Psi_2'(\theta)$ в свою очередь обращаются в нуль при $-a \leqslant \theta \leqslant a$. Это утверждение, однако, не имеет места при $a < \theta < b$ и $-b < \theta < -a$, поскольку указанная дробь содержит радикал $\sqrt{a^2 - \theta^2}$. Поэтому в областях (I) и (II) плоскости $y = 0$ потенциал $\varphi$, который равен вещественной части $\Phi(\theta)$, не будет обращаться в нуль. Эти области образованы лучами $(l_{x,t})$ или $(l_\theta)$, которые соответствуют вещественным значениям $\theta$ из интервалов $(a, b)$ и $(-b, -a)$. Если подставить такое значение $\theta$ на место $\theta_3$ в уравнение (67), мы получим уравнение некоторой плоскости в пространстве $(S)$. Пересечение этой плоскости с плоскостью $y = 0$ и дает луч $(l_\theta)$. Легко видеть, что эта плоскость представляет собой касательную плоскость к конусу $(T_1)$, образованному лучами отраженной поперечной волны. Таким образом, мы получаем семейство плоскостей, касающихся $(T_1)$ вдоль образующих конуса и проходящих через точки $P$ гиперболы (65), лежащие на дугах $AA_1$ и $BB_1$. Рассмотрим одну из этих плоскостей, которая касается конуса вдоль образующей $F_1P$, причем $\theta$ — вещественное значение параметра $\theta$, соответствующее этой образующей. Обозначим через $(U_\theta)$ ту часть этой касательной плоскости, которая лежит в полупространстве $y > 0$ и ограничена образующей $F_1P$ и лучом $(l_\theta)$. Соответствующее значение $\theta$ лежит в интервалах $(a, b)$ или $(-b, -a)$.

Множество определенных таким образом частей касательных плоскостей $(U_\theta)$ заполняет область $(R)$ пространства $(S)$. В этой области мы определим $\psi_2$ как функцию вещественной переменной $\theta$, которая постоянна на каждой $(U_\theta)$. Как мы уже указывали в п. 6, произвольная функция вещественного параметра $\theta$, являющегося корнем уравнения (60), удовлетворяет в области $(R)$ волновому уравнению (2) с $c = b$.

Наш выбор $(U_\theta)$ позволяет утверждать, что начальные условия при этом не изменились, ибо всюду на $(U_\theta)$ $t > af$. Аналогичное утверждение будет справедливо и в последующих рассмотрениях, на чем мы впредь не будем останавливаться. Как мы покажем в дальнейшем, указанная процедура определяет непрерывный потенциал. Переходя к непосредственному вычислению этого потенциала, мы должны выбрать искомую функцию $\theta$ таким образом, чтобы определяемый в $(R)$ потенциал $\psi_2$ удовлетворял краевым условиям в областях (I) и (II) плоскости $y = 0$. Вторая из формул (70) позволяет определить $\Psi_2'(\theta)$ в интервалах $(a, b)$ и $(-b, -a)$, и, интегрируя вдоль вещественной оси, мы можем найти $\Psi_2(\theta)$, выбрав постоянную интегрирования таким образом, чтобы $\Psi_2(\pm a) = 0$. Легко показать, что если функцию $\psi_2$ на плоскости $(U_\theta)$ положить равной вещественной части вышеупомянутой функции $\Psi_2(\theta)$, то краевые условия будут выполнены также и в областях (I) и (II) плоскости $y=0$. Действительно, обращаясь к равенствам (69), можно утверждать, что они выполняются и при $a \leqslant \theta \leqslant b$ и $-b \leqslant \theta \leqslant -a$. Но при таких $\theta$ вещественная часть $\Psi_1'(\theta)$ обращается в нуль, и коэффициенты при этой функции в уравнениях (69) не содержат радикала $\sqrt{a^2-\theta^2}$ и потому вещественны. Учитывая также то, что $\delta'$ также вещественно, мы можем утверждать, что в рассматриваемом случае условия (68) можно записать без $\Psi_1'(\theta)$, т. е. в виде

$$R\left\{\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}\,\Phi'(\theta)+(b^2-2\theta^2)\,\Psi_2'(\theta)}{\delta'}\right\}=0,$$

$$R\left\{\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{(b^2-2\theta^2)\,\Phi'(\theta)-2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}\,\Psi_2'(\theta)}{\delta'}\right\}=0.$$

Эти уравнения показывают, что краевые условия удовлетворяются в областях (I) и (II) плоскости $y=0$. Таким образом, проблема решена.

Отметим также, что значение $\psi_2$ на $(U_\theta)$ равно значению этой функции на образующей $F_1P$, через которую проходит $(U_\theta)$.

**12.** Укажем теперь некоторые следствия полученных результатов. С помощью рассуждений, аналогичных приведенным в п. 10, можно показать, что смещения окажутся бесконечными на фронтах волн. Мы не будем далее останавливаться на этом моменте.

Если рассечь построенную в пространстве $(S)$ конструкцию плоскостью $t=\text{const}$, мы получим фронты волн в момент времени $t$ (рис. 4). Мы выбираем $t$ достаточно большим, чтобы плоскость $t=\text{const}$ пересекалась с областью $(R)$ пространства $(S)$. Фронт поперечной волны в этом случае состоит из трех частей. Первая часть — это дуга окружности $AHB$—сечения конуса $(T_0)$ плоскостью $t=\text{const}$. Это волна, распространяющаяся от источника. Вторая часть — это дуга окружности $AEFB$ — сечение конуса $(T_1)$ плоскостью $t=\text{const}$. Третья часть образована двумя отрезками прямых $CE$ и $DF$— сечение $(U_{+a})$ и $(U_{-a})$ плоскостью $t=\text{const}$. Эта третья часть порождена продольными волнами, распространяющимися вдоль плоскости $y=0$ со скоростью $1/a$. Точки $E$ и $F$ — это точки пересечения плоскости $t=\text{const}$ с образующими конуса $(T_1)$, соответствующими значениям $\theta=\pm a$. Фронтом продольных

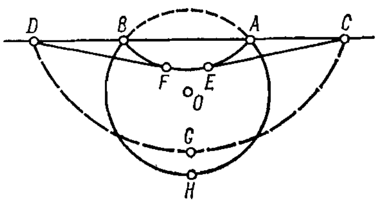


Рис. 4.

волн является кривая $CGD$, являющаяся огибающей семейства прямых

$$\theta x + \sqrt{a^2 - \theta^2}\, y + \sqrt{b^2 - \theta^2}\, f = t \quad (-a \leqslant \theta \leqslant +a,\ t = \text{const}).$$

Все эти фронты распространяются, удовлетворяя принципу Ферма. Как и в предыдущем случае, можно вычислить асимптотику для смещения и получить поверхностную волну. Используемые при этом рассмотрения вполне аналогичны приведенным выше.

**13.** Изложенный метод применим не только к задаче плоских колебаний полупространства, но определяет также общий закон отражения от плоскости пучка лучей специального вида в пространстве $(S)$. Для этого специального типа лучей потенциал (продольный или поперечный) представляет собой вещественную часть функции комплексной переменной $\theta$, регулярной в верхней полуплоскости, где $\theta$ — корень уравнения

$$t - \theta x \pm \sqrt{c^2 - \theta^2}\, y - \chi(\theta) = 0 \quad (c = a \text{ или } b).$$

Как мы показали ранее, такой вид уравнения эквивалентен виду (34). Мы будем говорить, что в этом случае колебания имеют мнимый потенциал.

Указанная выше регулярная функция должна также удовлетворять некоторым краевым условиям. Для удовлетворения этим условиям необходимо рассмотреть функцию при вещественных значениях параметра $\theta$, которым соответствуют некоторые плоскости в пространстве $(S)$. На каждой из этих плоскостей потенциал постоянен. Мы не берем эти плоскости целиком, а лишь ту их часть, которая заключена между отражающей плоскостью и предельным положением луча, которое получается, если устремить значение $\theta$ из верхней полуплоскости к вещественному значению, которому соответствует рассматриваемая плоскость. Изложенный выше метод позволяет, например, решить проблему колебаний слоя.

Пусть $2f$ — толщина плоского слоя, ограниченного плоскостями $y = 0$ и $y = 2f$, и пусть мы имеем дело с источником продольных колебаний в точке $x = 0$, $y = f$, $t = 0$, который задает сингулярность указанного выше вида и которому соответствует потенциал волны

$$\varphi = R[\Phi(\theta)], \tag{71}$$

где регулярная функция $\Phi(\theta)$ определена на плоскости комплексной переменной $\theta$ с разрезом вдоль вещественной оси $(-a, +a)$, причем вещественная часть $\Phi(\theta)$ обращается в нуль на этом разрезе. Рассмотрим часть $(\Omega)$ пространства $(S)$, ограниченную плоскостями $y = 0$ и $y = 2f$. Обозначим первую из этих плоскостей через $(S_0)$, а вторую — через $(S_1)$. Если при $t<0$ слой покоился, то при $0 \leqslant t < af$ мы имеем продольные колебания с потенциалом $\varphi$. Лучи, соответствующие этой волне, образуют конус $(T_0)$ с вершиной в точке $(x=0,\ y=f,\ t=0)$ и углом при вершине, равным $\operatorname{arctg}(1/a)$. При $t=af$ появляются продольные и поперечные волны, отраженные от плоскостей $(S_0)$ и $(S_1)$. Вдоль лучей, соответствующих этим волнам, $t$ растет, так что в той части области $(\Omega)$, которая ограничена плоскостями $t=0$ и $t=af$, колебания будут определяться фундаментальным конусом лучей $(T_0)$. В уравнении (71) $\theta$ определена соотношением $t-\theta x+\sqrt{a^2-\theta^2}\,y-\sqrt{a^2-\theta^2}\,f=0$.

Пусть $\varphi_1$ и $\psi_1$ — потенциалы отраженных от $(S_0)$ продольной и поперечной волн и пусть $\varphi_2$ и $\psi_2$ — аналогичные потенциалы для волн, отраженных от $(S_1)$. Имеем

$$\varphi_1 = R[\Phi_1(\theta_1)] \text{ и } \psi_1 = R[\Psi_1(\theta_1')], \tag{72}$$

где (комплексные) $\theta_1$ и $\theta_1'$ со значениями в верхней полуплоскости определены уравнениями

$$\begin{aligned} &t-\theta_1 x-\sqrt{a^2-\theta_1^2}\,y-\sqrt{a^2-\theta_1^2}\,f=0,\\ &t-\theta_1' x-\sqrt{b^2-\theta_1'^2}\,y-\sqrt{a^2-\theta_1^2}\,f=0. \end{aligned} \tag{73}$$

Уравнения (51) позволяют определить функции $\Phi_1(\theta_1)$ и $\Psi_1(\theta_1')$ для значений аргумента, лежащих в верхней полуплоскости:

$$\begin{aligned} \Phi_1'(\theta) &= \frac{-(2\theta^2-b^2)+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\sqrt{b^2-\theta^2}}{F(\theta)}\,\Phi'(\theta),\\ \Psi_1'(\theta) &= \frac{-4\theta(2\theta^2-b^2)\sqrt{a^2-\theta^2}}{F(\theta)}\,\Phi'(\theta), \end{aligned} \tag{74}$$

причем вещественные части $\Phi_1'(\theta)$ и $\Psi_1'(\theta)$ обращаются в нуль при $-a \leqslant \theta \leqslant a$. Соответствующие отраженные лучи исходят из точек на плоскости $(S_0)$, которые лежат внутри гиперболы $t^2-a^2(x^2+f^2)=0$, и встречают плоскость $(S_1)$ за линией $t=3af$.

Тем лучам конуса $(T_0)$, которые пересекают плоскость $(S_1)$, соответствуют значения $\theta$ из нижней полуплоскости, т. е. имеющие отрицательную мнимую часть. Пусть

$$\varphi_2 = R[\Phi_2(\theta_2)],\quad \psi_2 = R[\Psi_2(\theta_2')] \tag{75}$$

— потенциалы продольной и поперечной волны, отраженной от $(S_1)$. Комплексные значения $\theta_2$ и $\theta_2'$ из нижней полуплоскости должны совпадать при $y=2f$ с $\theta$. Легко видеть, что $\theta_2$ и $\theta_2'$ должны для этого удовлетворять уравнениям

$$t-\theta_2 x-\sqrt{a^2-\theta_2^2}\,y+\sqrt{a^2-\theta_2^2}\,f=0,$$
$$t-\theta_2' x-\sqrt{b^2-\theta_2'^2}\,y+2\sqrt{b^2-\theta_2'^2}\,f-\sqrt{a^2-\theta_2'^2}\,f=0. \tag{76}$$

Производные функций $\Phi_2$ и $\Psi_2$ определяются через $\Phi_1'(\theta)$ с помощью формул, которые получаются из формул (74), если поменять знак при $\sqrt{a^2-\theta^2}$ во второй из формул (74). Колебания слоя в части $(\Omega)$, ограниченной плоскостями $t=fa$ и $t=3fa$, полностью определяются потенциалами $\varphi$, $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\psi_1$ и $\psi_2$. Для последующих моментов времени мы должны учесть отражение лучей, соответствующих потенциалам $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\psi_1$ и $\psi_2$. Рассмотрим сначала потенциал $\varphi_1$. Соответствующие ему лучи падают на плоскость $(S_1)$ и порождают отраженные продольную и поперечную волны. Введем соответствующие этим колебаниям потенциалы

$$\varphi_3=R[\Phi_3(\theta_3)],\quad \psi_3=R[\Psi_3(\theta_3')], \tag{77}$$

причем комплексные переменные $\theta_3$ и $\theta_3'$ из верхней полуплоскости должны совпадать при $y=2f$ с $\theta_1$, вычисленной с помощью первого из уравнений (73). Легко видеть, что возникающие при этом уравнения имеют вид

$$t-\theta_3 x+\sqrt{a^2-\theta_3^2}\,y-5\sqrt{a^2-\theta_3^2}\,f=0,$$
$$t-\theta_3' x+\sqrt{b^2-\theta_3'^2}\,y-2\sqrt{b^2-\theta_3'^2}\,f-3\sqrt{a^2-\theta_3'^2}\,f=0. \tag{78}$$

Функции $\Phi_3'$ и $\Psi_3'$ определяются через $\Phi_1'$ по формулам, которые получаются из формул (74), если поменять знак $\sqrt{a^2-\theta^2}$ во второй из этих формул.

Введем теперь потенциалы $\varphi_4$ и $\psi_4$ для лучей, которые возникают при отражении от $(S_1)$ пучка лучей поперечных колебаний с потенциалом $\psi_1$:

$$\varphi_4=R[\Phi_4(\theta_4)],\quad \psi_4=R[\Psi_4(\theta_4')], \tag{79}$$

где, как легко видеть, $\theta_4$ и $\theta_4'$ из верхней полуплоскости удовлетворяют уравнениям

$$t-\theta_4 x+\sqrt{a^2-\theta_4^2}\,y-2\sqrt{b^2-\theta_4^2}\,f-3\sqrt{a^2-\theta_4^2}\,f=0,$$
$$t-\theta_4' x+\sqrt{b^2-\theta_4'^2}\,y-4\sqrt{b^2-\theta_4'^2}\,f-\sqrt{a^2-\theta_4'^2}\,f=0. \tag{80}$$

Функции $\Phi_4'$ и $\Psi_4'$ выражаются через $\Psi_1'$ с помощью формул, которые получаются из формул (70), если заменить знак $\sqrt{b^2-\theta^2}$ в первой из этих формул:

$$\Phi_4'(\theta)=\frac{-4\theta(2\theta^2-b^2)\sqrt{b^2-\theta^2}}{F(\theta)}\Psi_1'(\theta),$$
$$\Psi_4'(\theta)=\frac{-(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\sqrt{b^2-\theta^2}}{F(\theta)}\Psi_1'(\theta). \tag{81}$$

Отметим, что область изменения переменной функции $\Psi_1'(\theta)$ состоит из верхней полуплоскости и интервала вещественной оси $(-a, +a)$, причем вещественная часть $\Psi_1'(\theta)$ обращается в нуль на этом интервале. Вполне аналогичные формулы получают и при рассмотрении остальных функций, возникающих при изучении отражения от плоскостей $(S_0)$ и $(S_1)$. Совершенно ясно, какие выкладки необходимы, чтобы получить их.

Случай источника поперечных колебаний требует несколько иных рассмотрений.

**14.** Пусть $\psi=R[\Psi(\theta)]$ задает потенциал в случае источника поперечных колебаний, где переменная $\theta$ определяется из уравнения

$$t-\theta x+\sqrt{b^2-\theta^2}\,y-\sqrt{b^2-\theta^2}\,f=0, \tag{82}$$

причем $\theta$ меняется на комплексной плоскости с разрезом $(-b, +b)$ вдоль вещественной оси. Построим, как обычно, потенциалы $\varphi_1$ и $\psi_1$ волн, отраженных от плоскости $(S_0)$:

$$\varphi_1=R[\Phi_1(\theta_1)],\quad \psi_1=R[\Psi_1(\theta_1')], \tag{83}$$

где

$$\Phi_1'(\theta)=\frac{4\theta(2\theta^2-b^2)\sqrt{b^2-\theta^2}}{F(\theta)}\Psi'(\theta),$$
$$\Psi_1'(\theta)=\frac{-(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\sqrt{b^2-\theta^2}}{F(\theta)}\Psi'(\theta). \tag{84}$$

Вещественным значениям $\theta$, таким, что $a\leqslant|\theta|\leqslant b$, соответствуют лучи продольных колебаний, расположенные в плоскости $(S_0)$ и плоскости, на которых $\Psi_1(\theta)$ равны постоянной, значение которой определяется из уравнений (84).

Величины $\theta_1$ и $\theta_1'$ удовлетворяют уравнениям

$$t-\theta_1 x-\sqrt{a^2-\theta_1'^2}\,y-\sqrt{b^2-\theta_1^2}\,f=0,$$
$$t-\theta_1' x-\sqrt{b^2-\theta_1^2}\,y-\sqrt{b^2-\theta_1'^2}\,f=0. \tag{85}$$

Рассмотрим далее отражение лучей продольной волны от плоскости $(S_1)$. Обозначим потенциалы отраженных продольной и поперечной волн через $\varphi_2$ и $\psi_2$, при этом

$$\varphi_2 = R[\Phi_2(\theta_2)], \quad \psi_2 = R[\Psi_2(\theta_2')]. \tag{86}$$

Для $\theta_2$ и $\theta_2'$ имеют место уравнения

$$\begin{gathered} t - \theta_2 x + \sqrt{a^2 - \theta_2^2}\, y - \sqrt{b^2 - \theta_2^2}\, f - 3\sqrt{a^2 - \theta_2^2}\, f = 0, \\ t - \theta_2' x + \sqrt{b^2 - \theta_2'^2}\, y - 3\sqrt{b^2 - \theta_2'^2}\, f - 2\sqrt{a^2 - \theta_2'^2}\, f = 0, \end{gathered} \tag{87}$$

и функции $\Phi_2'$ и $\Psi_2'$ определяются по формулам

$$\begin{gathered} \Phi_2'(\theta) = \frac{-(2\theta^2 - b^2)^2 + 4\theta^2\sqrt{a^2 - \theta^2}\sqrt{b^2 - \theta^2}}{F(\theta)}\,\Phi_1'(\theta), \\ \Psi_2'(\theta) = \frac{4\theta\sqrt{a^2 - \theta^2}\,(2\theta^2 - b^2)}{F(\theta)}\,\Phi_1'(\theta). \end{gathered} \tag{88}$$

Лучи продольных колебаний, определяемых потенциалом $\varphi_1$, которые соответствуют вещественным значениям $\theta$ из интервалов $a \leqslant |\theta| \leqslant b$, остаются в плоскости $(S_0)$, и, следовательно, областью изменения $\theta_2$ и $\theta_2'$ будут верхняя полуплоскость и интервал $(-a, +a)$. Таким образом, уравнение (88) следует рассматривать в этой области переменной $\theta$, причем в интервале $(-a, +a)$ вещественная часть $\Phi_2'(\theta)$ и $\Psi_2'(\theta)$ обращается в нуль.

Рассмотрим теперь отражение лучей поперечных колебаний потенциала $\psi_1$ от плоскости $(S_1)$. Введем потенциалы для отраженных лучей

$$\varphi_3 = R[\Phi_3(\theta_3)], \quad \psi_3 = R[\Psi_3(\theta_3')], \tag{89}$$

где $$\begin{gathered} t - \theta_3 x + \sqrt{a^2 - \theta_3^2}\, y - 3\sqrt{b^2 - \theta_3^2}\, f - 2\sqrt{a^2 - \theta_3^2}\, f = 0, \\ t - \theta_3' x + \sqrt{b^2 - \theta_3'^2}\, y - 5\sqrt{b^2 - \theta_3'^2}\, f = 0 \end{gathered} \tag{90}$$

и $$\begin{gathered} \Phi_3'(\theta) = \frac{-4\theta(2\theta^2 - b^2)\sqrt{b^2 - \theta^2}}{F(\theta)}\,\Psi_1'(\theta), \\ \Psi_3'(\theta) = \frac{-(2\theta^2 - b^2)^2 + 4\theta^2\sqrt{a^2 - \theta^2}\sqrt{b^2 - \theta^2}}{F(\theta)}\,\Psi_1'(\theta). \end{gathered} \tag{91}$$

Сделаем несколько дополнительных замечаний относительно поведения функций при вещественных $\theta$, удовлетворяющих неравенству $a < |\theta| < b$.

Вещественные части $\Phi_3'(\theta)$ и $\Psi_3'(\theta)$ при таких $\theta$ оказываются отличными от нуля. Из первого уравнения (90) следует, что лучи продольных колебаний, которые соответствуют таким значениям $\theta$, расположены в плоскости $(S_1)$. Второе из уравнений дает семейство плоскостей, на каждой из которых $\Psi_3'(\theta)$ сохраняет постоянное значение. Легко проверить выполнение краевых условий, рассматривая потенциалы в тех частях плоскости $(S_1)$, которые заняты лучами продольных колебаний. Рассмотрим эти области подробнее.

Для каждого вещественного $\theta$, удовлетворяющего неравенству $a < |\theta| < b$, уравнение соответствующего луча, расположенного в плоскости $(S_1)$, имеет вид $t - \theta x - 3\sqrt{b^2 - \theta^2} f = 0$ $(y = 2f)$.

Такое же уравнение получается, если во втором из уравнений (90) заменить $\theta_3'$ на $\theta$ и положить $y = 2f$. Следовательно, рассматриваемый луч продольных колебаний совпадает со следом на плоскости $y = 2f$ плоскости, на которой $\Psi_3(\theta)$ постоянна. Такое же уравнение, очевидно, возникает и в случае, если в уравнении (85) мы положим $y = 2f$. Таким образом, плоскость, на которой $\Psi_1(\theta)$ постоянна, пересекает плоскость $(S_1)$ вдоль того же луча $(l_\theta)$. При отражении лучей потенциала $\varphi_3$ от плоскости $(S_0)$ область изменения $\theta$ представляет собой верхнюю полуплоскость и интервал $(-a, +a)$ вещественной оси, причем на этом интервале вещественная часть $\Phi_3'(\theta)$ равна нулю.

Можно использовать вполне аналогичные соображения для решения задачи с другими граничными условиями, например с условием отсутствия смещения на границе.

**15.** Используя метод, примененный выше для изучения источника внутри среды, легко получить решение (в весьма компактной форме) первой задачи — задачи о плоских колебаниях полупространства под воздействием источника колебаний, сосредоточенного на поверхности.

Пусть, как обычно, источник колебаний расположен в точке $O$ $(x = 0,\ y = 0,\ t = 0)$ пространства $(S)$ и этому источнику соответствуют комплексные потенциалы $\Phi(\theta_1)$ и $\Psi(\theta_1')$ продольных и поперечных колебаний. Рассмотрим два конуса $(T_1)$ и $(T_2)$ с вершинами в точке $O$ и углами при вершине, равными соответственно $\operatorname{arctg}(1/a)$ и $\operatorname{arctg}(1/b)$. Выпишем уравнение на $\theta_1$ и $\theta_1'$:

$$t - \theta_1 x - \sqrt{a^2 - \theta_1^2}\, y = 0, \tag{92}$$

$$t - \theta_1' x - \sqrt{b^2 - \theta_1'^2}\, y = 0. \tag{93}$$

Комплексным значениям $\theta_1$ из верхней полуплоскости соответствуют лучи, выходящие из точки $O$ и идущие внутри конуса $(T_1)$ в той части этого конуса, в которой $y>0$ и $t>0$. Вещественным значениям $\theta_1$, удовлетворяющим неравенству $|\theta_1|>a$, соответствуют лучи, расположенные в плоскости $y=0$, и, наконец, вещественным значениям $\theta_1$ из интервала $(-a, +a)$ соответствуют образующие конуса $(T_1)$. Вполне аналогичное соответствие имеет место для лучей внутри конуса $(T_2)$ с комплексными значениями $\theta_1'$.

Пусть $OA$ и $OA_1$ — образующие конуса $(T_1)$, лежащие в плоскости $y=0$ и $OB$ и $OB_1$ — такие же образующие для $(T_2)$. Используя формулы (38), можно выписать условие, означающее, что во всех точках плоскости $y=0$, лежащих внутри угла $BOB_1$, напряжение равно нулю:

$$
\begin{gathered}
R\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left[2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}\,\Phi'(\theta)+(b^2-2\theta^2)\,\Psi'(\theta)\right]\right\}=0,\\
R\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(b^2-2\theta^2)\,\Phi'(\theta)-2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}\,\Psi'(\theta)\right]\right\}=0.
\end{gathered}
\tag{94}
$$

Отметим, что точкам, находящимся внутри угла $BOB_1$, соответствуют вещественные значения $\theta$, удовлетворяющие неравенству $|\theta|>b$. Рассмотрим теперь углы $AOB$ и $A_1OB_1$. Здесь отличен от нуля потенциал $\Phi_1(\theta)$ продольных колебаний, и для того чтобы удовлетворить краевым условиям, мы должны сложить с продольными колебаниями поперечные колебания. Фактически это соответствует тому, что идущие вдоль поверхности продольные колебания порождают поперечные колебания, распространяющиеся внутрь полупространства. Переменная $\theta$ функции $\Phi_1(\theta)$ принимает в этом случае вещественные значения из интервалов $(a, b)$ или $(-b, -a)$. Для таких значений $\theta$ уравнение (93) дает плоскости, касательные к конусу $(T_2)$, причем мы рассматриваем часть этих плоскостей, заключенную между образующими конуса $(T_2)$ и плоскостью $y=0$.

Обозначим эти части плоскостей через $(U_\theta)$. На каждой $(U_\theta)$ потенциал поперечных колебаний должен быть постоянным, и соответствующую функцию $\omega(\theta)$ надо выбрать таким образом, чтобы краевые условия были выполнены в углах $AOB$ и $A_1OB_1$. Учитывая, что в этих областях $|\theta|<b$, мы можем записать эти условия в виде

$$
\begin{gathered}
R\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left[2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}\,\Phi'(\theta)+(b^2-2\theta^2)\,\omega'(\theta)\right]\right\}=0,\\
R\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(b^2-2\theta^2)\,\Phi'(\theta)-2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}\,\omega'(\theta)\right]\right\}=0.
\end{gathered}
\tag{95}
$$

Из непрерывности потенциала вытекает, что значение $\omega(\theta)$ должно совпадать с вещественной частью $\psi(\theta)$ на образующей конуса $(T_2)$, вдоль которой $(U_\theta)$ касается этого конуса. Тогда условия (95) совпадают с условиями (94). Иначе говоря, соотношения (94) должны быть выполнены также и при $a \leqslant |\theta| \leqslant b$. Используя то, что колебания не могут распространяться со скоростью, большей, чем $1/a$, мы должны потребовать, чтобы при $-a \leqslant \theta \leqslant a$ потенциалы продольных и поперечных колебаний обращались в нуль, т. е. для таких $\theta$ условия (94) также должны быть выполнены. Таким образом, соотношения (94) должны быть выполнены на всей вещественной сси. Найдя функции $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\theta)$ и соответствующие им потенциалы

$$\varphi = R[\Phi(\theta)], \quad \psi = R[\Psi(\theta)],$$

мы можем продолжить $\psi$ во внешность конуса $(T_2)$ вдоль плоскостей $(U_\theta)$.

Требование, чтобы условия (94) выполнялись при всех вещественных $\theta$, существенно для решения первой задачи.

## О ПРИМЕНЕНИИ НОВОГО МЕТОДА К ИЗУЧЕНИЮ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРИ НАЛИЧИИ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ*

*(Совместно с С. Л. Соболевым)*

**1.** В нашей работе „Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний“ мы рассмотрели упругие колебания специального вида, возникающие в плоском случае, и, используя теорию функций комплексной переменной, получили для таких колебаний общий закон отражения от прямолинейной границы. Это позволило нам решить задачу распространения упругих колебаний в полуплоскости или плоскопараллельном слое в случае, когда источник колебаний имеет вид, указанный выше. Источник колебаний при этом может быть расположен как на поверхности, так и внутри среды.

В настоящей работе мы будем изучать, используя результаты предыдущего исследования, распространение упругих колебаний в пространстве с осевой симметрией. Основной целью нашего исследования является, как и в плоском случае, изучение колебаний, полученных суперпозицией плоских колебаний, описанных ранее. Используя закон отражения плоских колебаний, можно получить закон отражения и для случая колеба-

---

* Sur l'application de la méthode nouvelle à l'étude des vibrations élastiques daus l'espace à symétrie axiale.— Труды Сейсмол. ин-та, vol. 26, 1933, p. 1—49.

ний, полученных суперпозицией. Это даст нам возможность решить задачу об упругих колебаниях полупространства и трехмерного плоскопараллельного слоя. Эти задачи решаются аналогично тому, как это было проделано нами в предыдущей работе для двумерного случая. Нами будет также рассмотрена задача M. Lamb'a (Phil. Trans. 203A (1904) „On the Propagation of Tremors...") о вынужденных колебаниях полупространства под действием силы, приложенной к некоторой точке на поверхности полупространства и направленной по нормали к этой поверхности. Задачей, исходной для дальнейшего рассмотрения, была в плоском случае задача о колебаниях, вызываемых действием силы, приложенной к точке плоскости в определенный момент времени (мгновенный удар). В случае пространства исходной задачей будет уже задача о колебаниях, вызываемых действием силы, включаемой в определенный момент времени. Отметим также, что в случае задачи M. Lamb'a мы получаем формулы для смещений, справедливые для любой точки полупространства.

2. Введем цилиндрические координаты ($\rho$, $z$, $\vartheta$) и предположим, что вектор смещений в каждой точке лежит в плоскости, проходящей через эту точку и ось $z$, и что его компоненты $q$ и $w$ вдоль осей $\rho$ и $z$ соответственно не зависят от $\vartheta$. В этом случае, как известно, $q$ и $w$ имеют вид

$$q = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\psi, \tag{1}$$

где $\varphi$ и $\psi$ должны удовлетворять уравнениям

$$a^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}; \tag{2}$$

$$b^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho^2}\psi. \tag{3}$$

Постоянные $a$ и $b$ определяются формулами

$$a = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}, \quad b = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}, \tag{4}$$

где $\lambda$ и $\mu$ — коэффициенты Ламе, а $\rho$ — плотность среды.

Функция $\varphi(\rho, z, t)$ представляет собой скалярный потенциал поля смещений, и соответствующие члены в выражении (1) описывают потенциальную часть этого поля. Уравнение (2) представляет собой волновое уравнение:

$$a^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \nabla^2\varphi, \tag{5}$$

где $\varphi$ не зависит от $\vartheta$.

Члены в выражении (1), содержащие функцию $\psi$, дают соленоидальную часть поля смещений. Эта часть представляет собой ротор некоторого векторного поля, которое называется векторным потенциалом поля смещений. Этот векторный потенциал также должен удовлетворять волновому уравнению

$$b^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \nabla^2 \omega, \tag{6}$$

т. е., иначе говоря, компоненты этого векторного поля вдоль любого направления должны удовлетворять этому уравнению. В осесимметричном относительно оси $z$ случае этот векторный потенциал оказывается направленным вдоль оси $\vartheta$, и функция $\psi$ представляет собой длину этого вектора. Уравнение (3) выражает условие, что векторное поле, образованное векторами длины $\psi$, направленными вдоль оси $\vartheta$, где $\psi$ не зависит от $\vartheta$, удовлетворяет волновому уравнению (6).

3. Построим некоторый класс решений уравнений (2) и (3), который потребуется нам в дальнейшем. Отметим вначале некоторые результаты нашего предыдущего исследования относительно решений волнового уравнения в плоском случае:

$$c^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \quad (c = a \text{ или } b). \tag{7}$$

В указанной работе получен некоторый класс решений этого уравнения. Напомним полученные там результаты. Сконструируем уравнение, которое позволяет определять комплексную переменную $\theta$ как функцию $(x_1, z, t)$:

$$t - \theta x_1 \pm \sqrt{c^2 - \theta^2}\, z = \chi(\theta), \tag{8}$$

где $\chi(\theta)$ — аналитическая функция. Если в некоторой части пространства $(S)$ — трехмерного пространства с координатами $(x, z, t)$ — уравнение (8) имеет комплексный корень, то вещественная и мнимая части произвольной аналитической функции $\theta$ определяют в указанной части пространства $(S)$ некоторое решение уравнения (7). Если в некоторой части $(S)$ уравнение (8) имеет вещественный корень, любая дважды дифференцируемая функция $\theta$ определяет решение уравнения (7). Укажем, наконец, что каждое решение уравнения (7), являющееся функцией однородной степени нуль от переменных $t-\alpha, x_1-\beta, z-\gamma$, может быть получено с помощью указанной процедуры, причем уравнение (8) в этом случае приобретает вид

$$(t-\alpha) - \theta(x_1 - \beta) \pm \sqrt{c^2 - \theta^2}\,(z - \gamma) = 0. \tag{8$_1$}$$

Перейдем к построению некоторого класса решений уравнения (2). Пусть $(x, y, z)$ — ортогональная система координат; тогда

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta, \quad z = z.$$

Выберем на плоскости $Oxy$ ось $Ox_1$ и обозначим через $\mu$ угол между осями $Ox$ и $Ox_1$. В точке $(\rho, z, \vartheta)$ $x_1 = \rho\cos(\vartheta - \mu)$, и мы можем построить решение уравнения (5) в виде вещественной или мнимой части произвольной аналитической функции комплексной переменной $\theta_{\vartheta-\mu}$, которая удовлетворяет уравнению вида

$$t - \theta_{\vartheta-\mu}\rho\cos(\vartheta - \mu) \pm \sqrt{a^2 - \theta_{\vartheta-\mu}^2}\, z = \chi(\theta_{\vartheta-\mu}).$$

Интегрируя это решение по $\mu$, $0 \leqslant \mu \leqslant 2\pi$, мы получаем решение уравнения (5), которое, очевидно, не зависит от $\vartheta$, т. е. мы получаем решение уравнения (2). Мы можем, обозначая $\vartheta - \mu = \lambda$, интегрировать и по $\lambda$ в интервале $(0, 2\pi)$. Таким образом, мы получаем решения уравнения (2) вида

$$\varphi(\rho, z, t) = \int_0^{2\pi} \Phi(\theta_\lambda)\, d\lambda, \tag{9}$$

где $\theta_\lambda$ определяется с помощью уравнения

$$t - \theta_\lambda\rho\cos\lambda \pm \sqrt{a^2 - \theta_\lambda^2}\, z = \chi(\theta_\lambda) \tag{10}$$

и $\Phi(\theta_\lambda)$ — аналитическая функция $\theta_\lambda$. Очевидно, что интервал интегрирования в формуле (9) можно уменьшить до $(0, \pi)$. При этом если мы хотим получить вещественное решение уравнения (2), то нужно в качестве решения выбрать вещественную или мнимую часть выражения (9), т. е.

$$\varphi = \mathrm{R}\int_0^{\pi} \Phi(\theta_\lambda)\, d\lambda \quad \text{или} \quad \varphi = \mathrm{J}\int_0^{\pi} \Phi(\theta_\lambda)\, d\lambda, \tag{11}$$

где R — это символ вещественной, а J — мнимой частей комплексного числа.

Рассмотрим далее уравнение (3). Предположим сначала, что мы имеем дело с плоскими упругими колебаниями и что в системе координат $(x_1, y_1, z)$ смещения не зависят от $y_1$ и вектор смещения лежит в плоскости, параллельной $x_1z$. В этом случае векторный потенциал в каждой точке параллелен оси $y_1$, и его величина удовлетворяет уравнению (7) с $c = b$. Выберем решение этого уравнения в форме, указанной выше, т. е. положим, что величина векторного потенциала равна вещественной или мнимой части аналитической функции $\Psi(\theta_{\vartheta-\mu})$, где $\theta_{\vartheta-\mu}$ определяется из уравнения

$$t - \theta_{\vartheta-\mu}\rho\cos(\vartheta - \mu) \pm \sqrt{b^2 - \theta_{\vartheta-\mu}^2}\, z = \chi(\theta_{\vartheta-\mu}).$$

Компонентами этого вектора на оси $\vartheta$ и $\rho$ будут

$$\mathrm{R}[\Psi(\theta_{\vartheta-\mu})]\cos(\vartheta - \mu) \quad \text{и} \quad \mathrm{R}[\Psi(\theta_{\vartheta-\mu})]\sin(\vartheta - \mu).$$

Интегрируя по $\mu$ в интервале $(0, 2\pi)$ мы получаем векторный потенциал, который не зависит от $\vartheta$ и удовлетворяет уравнению (6). Компонентами его вдоль осей $\vartheta$ и $\rho$ будут

$$\mathrm{R}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta_\lambda)\cos\lambda d\lambda \quad \text{и} \quad \mathrm{R}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta_\lambda)\sin\lambda d\lambda, \tag{12}$$

где $\theta_\lambda$ находится из уравнения

$$t-\theta_\lambda\rho\cos\lambda\pm\sqrt{b^2-\theta_\lambda^2}\,z=\chi(\theta_\lambda). \tag{13}$$

Второй из интегралов (12) равен нулю, так что полученный векторный потенциал оказывается параллельным оси $\vartheta$. Учитывая, что он не зависит от $\vartheta$ и удовлетворяет уравнению (7), можно заключить, что его длина удовлетворяет уравнению (3). Таким образом, мы получили решения уравнения (3) вида

$$\psi=\mathrm{R}\int_0^{\pi}\Psi(\theta_\lambda)\cos\lambda d\lambda \quad \text{и} \quad \psi=\mathrm{J}\int_0^{\pi}\Psi(\theta_\lambda)\cos\lambda d\lambda. \tag{14}$$

3'. Формулы (11) и (14) очевидно не дают общего решения уравнений (2) и (3). Обратимся снова к уравнению (7). Как мы уже отмечали, любое решение этого уравнения, являющееся функцией от $t-\alpha$, $x_1-\beta$, $z-\gamma$ однородной степени нуль, может быть представлено в виде функции от $\theta$, где $\theta$ определено уравнением $(8_1)$. Докажем аналогичную теорему для уравнений (2) и (3). Предположим, что рассматриваемое решение является функцией от $\rho$, $z$, $t$ однородной степени нуль. В этом случае уравнение на $\theta_\lambda$ имеет вид

$$t-\theta_\lambda\rho\cos\lambda\pm\sqrt{a^2-\theta_\lambda^2}\,z=0 \quad (\text{для } c=a). \tag{15}$$

В этом параграфе мы займемся изучением однородных решений уравнения (2). Введем переменные

$$\xi=\rho/t, \quad \eta=z/t \tag{16}$$

и предположим, что функция $\varphi$, являющаяся решением уравнения (2), зависит лишь от $\xi$ и $\eta$. Тогда уравнение (2) можно привести к виду

$$\begin{gathered}(a^2\xi^2-1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+2a^2\xi\eta\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}+(a^2\eta^2-1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\\+2a^2\left(\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=0.\end{gathered} \tag{17}$$

Замена $\xi$ на $(-\xi)$ и $\rho$ на $(-\rho)$ эквивалентна подстановке $(\vartheta+\pi)$ вместо $(\vartheta)$, так что, учитывая осевую симметрию, отсюда получаем, что рассматриваемые нами решения уравнения (7) должны быть четны по $\xi$, т. е. $\varphi(-\xi, \eta)=\varphi(\xi, \eta)$.

Рассмотрим теперь функцию, задаваемую формулой (11), в которой $\theta_\lambda$ определено из уравнения (15), как функцию $\xi$, $\eta$. Тогда формула (11) определяет некоторое решение уравнения (7). Легко видеть, что такие решения четны по $\xi$. Действительно, из уравнения (15) следует, что $\theta_\lambda$ зависит от $\lambda$ через произведение $\xi\cos\lambda$, так что (11) мы можем записать в виде

$$\varphi(\xi, \eta) = \int_0^\pi F(\xi\cos\lambda, \eta)\, d_\lambda,$$

и, следовательно,

$$\varphi(-\xi, \eta) = \int_0^\pi F(-\xi\cos\lambda, \eta)\, d\lambda$$

или, полагая $\lambda_1 = \pi - \lambda$,

$$\varphi(-\xi, \eta) = -\int_\pi^0 F(\xi\cos\lambda_1, \eta)\, d\lambda_1 = \int_0^\pi F(\xi\cos\lambda_1, \eta)\, d\lambda_1 = \varphi(\xi, \eta),$$

что и требовалось доказать.

В дальнейшем мы покажем, что любое решение уравнения (17), являющееся четной функцией $\xi$, может быть представлено в виде (11) и (15), и укажем способ нахождения функции $\Phi(\theta_\lambda)$ по заданному решению $\varphi(\xi, \eta)$.

Для начала рассмотрим внимательнее формулы (11), (15) и решения, определяемые этими формулами. Пусть $T$ — плоскость комплексной переменной $\theta$ с разрезом вдоль действительной оси $(-a, +a)$. Функция $\sqrt{a^2 - \theta^2}$ однозначна в $T$, и мы положим, чтобы эта функция была положительна на положительной мнимой полуоси, т. е. при $\theta = \alpha i\ (\alpha > 0)$. Запишем уравнение (15) как

$$1 - \theta_\lambda \xi \cos\lambda \pm \sqrt{a^2 - \theta_\lambda^2}\ \eta = 0, \tag{18}$$

откуда

$$\theta_\lambda = \frac{\xi\cos\lambda}{\xi^2\cos^2\lambda + \eta^2} - i\,\frac{\eta\sqrt{1 - a^2(\xi^2\cos^2\lambda + \eta^2)}}{\xi^2\cos^2\lambda + \eta^2}. \tag{19}$$

Введем на плоскости переменных $(\xi, \eta)$ круг $K$, определенный неравенством

$$\xi^2 + \eta^2 < 1/a^2. \tag{20}$$

Для таких значений $(\xi, \eta)$ уравнение (17) является эллиптическим. Введем также переменную $\theta$, определяемую уравнением

$$1 - \theta\xi + \sqrt{a^2 - \theta^2}\ \eta = 0 \tag{21}$$

или

$$\theta = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} - i\,\frac{\eta\sqrt{1-a^2(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2}. \qquad (22)$$

Отметим, что в формулах (19), (22) корни понимаются в арифметическом смысле. Пусть сначала $\eta > 0$, и мы имеем дело с верхней частью круга $K$. В силу (21) или (22) таким $\eta$ соответствует нижняя часть области $T$, в которой $J(\theta) < 0$. Обозначим эту часть $T$ через $T_1$. Пусть $\Phi(\theta)$ — функция, голоморфная в $T_1$. Когда параметр $\lambda$ пробегает интервал $0 \leqslant \lambda \leqslant \pi$, переменная $\theta_\lambda$ описывает контур $l$, расположенный в $T_1$, причем контур $l$ симметричен относительно мнимой оси. Отделим вещественную и мнимую части:

$$\theta = \alpha + i\beta,\ \Phi(\theta) = \omega_1(\alpha, \beta) + i\omega_2(\alpha, \beta),$$

введем новую функцию, голоморфную в $T_1$,

$$\Phi_1(\theta) = \omega_1(-\alpha, \beta) - i\omega_2(-\alpha, \beta)$$

и положим

$$\Phi_2(\theta) = \frac{1}{2}\left[\Phi(\theta) + \Phi_1(\theta)\right].$$

Имея в виду определение $\Phi_1$, мы можем утверждать, что $\Phi_2(\theta)$ принимает вещественные значения на мнимой оси и что формула

$$\varphi = \mathrm{R}\int_0^\pi \Phi(\theta_\lambda)\,d\lambda$$

эквивалентна формуле

$$\varphi = \int_0^\pi \Phi_2(\theta_\lambda)\,d\lambda.$$

Поэтому и формулу (11) можно записать в виде

$$\varphi = \int_0^\pi \Phi(\theta_\lambda)\,d\lambda, \qquad (23)$$

где $\Phi(\theta)$ принимает вещественные значения на мнимой оси. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие функции $\Phi(\theta)$.

В последующих вычислениях мы будем вместо $\theta$ использовать новую переменную

$$w = \sqrt{a^2-\theta^2}, \quad w_\lambda = \sqrt{a^2-\theta_\lambda^2} \qquad (24)$$

или

$$w_\lambda = -\frac{\eta}{\xi^2\cos^2\lambda+\eta^2} - i\xi\cos\lambda\,\frac{\sqrt{1-a^2(\xi^2\cos^2\lambda+\eta^2)}}{\xi^2\cos^2\lambda+\eta^2}. \qquad (25)$$

Области $T_1$ соответствует на плоскости $w$ полуплоскость, расположенная слева от мнимой оси с разрезом $(-a, 0)$ вдоль вещественной оси (рис. 1). Обозначим эту полуплоскость с разрезом через $S_1$.

В этой области мы имеем голоморфную функцию $\Phi(w)$, которая принимает вещественные значения при $-\infty < w < -a$ и комплексно-сопряженные значения в комплексно-сопряженных точках. Формула (23) приобретает вид

$$\varphi(\xi, \eta) = \int_0^\pi \Phi(w_\lambda)\, d\lambda. \qquad (26)$$

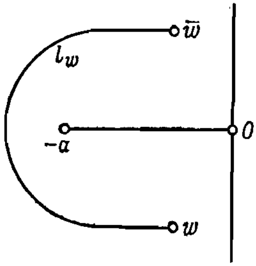



Рис. 1.

Зафиксировав $(\xi, \eta)$, мы получаем для $w$ выражение

$$w = -\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2} - i\,\frac{\xi\sqrt{1-a^2(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2}, \qquad (27)$$

причем при $\lambda$, меняющемся от 0 до $\pi$, $w_\lambda$ описывает контур $l_w$, симметричный относительно вещественной оси, с началом в точке $w$ и концом в точке $\bar{w}$. Этот контур целиком расположен в области $S_1$ (см. рис. 1).

Вернемся к формуле (26) и перейдем от $\lambda$ к новой переменной $w_1$, изменяющейся вдоль контура $l_w$. В силу (24)

$$w_1 = \sqrt{a^2-\theta_\lambda^2} \quad \text{и} \quad \theta_\lambda = -\sqrt{a^2-w_1^2},$$

где $\sqrt{a^2-w_1^2}$ принимает мнимые отрицательные значения при $w_1 > a$. Вместо уравнения (18) мы получаем уравнение

$$1 + \sqrt{a^2-w_1^2}\,\xi\cos\lambda + w_1\eta = 0,$$

откуда

$$\cos\lambda = \frac{-(1+w_1\eta)}{\xi\sqrt{a^2-w_1^2}}, \quad \lambda = \arccos\left(-\frac{1+w_1\eta}{\xi\sqrt{a^2-w_1^2}}\right),$$

и с помощью несложных вычислений мы находим

$$d\lambda = \frac{w_1+a^2\eta}{(a^2-w_1^2)\sqrt{\xi^2(a^2-w_1^2)-(1+w_1\eta)^2}}\,dw_1.$$

Корни уравнения

$$\xi^2(a^2-w_1^2) - (1+w_1\eta)^2 = 0$$

имеют вид

$$w_1 = \frac{-\eta - i\xi\sqrt{1-a^2(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2} = w, \quad w_1 = \frac{-\eta + i\xi\sqrt{1-a^2(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2} = \bar{w},$$

и, следовательно,

$$d\lambda = \frac{w_1 + a^2\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}\left(a^2 - w_1^2\right)\sqrt{(w_1 - w)\,(\overline{w} - w_1)}}\,dw_1,$$

корень $\sqrt{\xi^2+\eta^2} > 0$. Для однозначного определения

$$\sqrt{(w_1 - w)\,(\overline{w} - w_1)} \tag{28}$$

проведем два прямолинейных разреза, параллельных мнимой оси, исходящих из точек $w$ и $\overline{w}$ так, чтобы они не пересекали вещественной оси. Если $\xi$ положительно, точка $w$ расположена в нижней части области $S_1$ в точке, где $l_w$ пересекает луч $(-\infty, -a)$ вещественной оси, $dw_1$ является чисто мнимой с положительной мнимой частью. В этой точке $w_1 < -a$, и, следовательно, $a^2 - w_1^2 < 0$ и $w_1 + a^2\eta < 0$, поскольку $0 < \eta < 1/a$. Значение $d\lambda$ должно оказаться положительным, откуда следует, что в формуле для $d\lambda$ функцию (28) необходимо выбрать таким образом, чтобы она была чисто мнимой с положительной мнимой частью при $w_1 < -a$, если $\xi > 0$. Аналогично можно показать, что эту функцию нужно выбрать мнимой с отрицательной мнимой частью при $w_1 < -a$, если $\xi < 0$. Случай $\xi = 0$ мы разберем несколько позже. В переменных $w_1$ формула (26) записывается в виде

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \int\limits_{l_w} \frac{(w_1 + a^2\eta)\,\Phi(w_1)}{\left(a^2 - w_1^2\right)\sqrt{(w_1 - w)\,(\overline{w} - w_1)}}\,dw_1. \tag{29}$$

Пользуясь теоремой Коши, мы можем продеформировать контур интегрирования $l_w$.

При $\xi = 0$ мы получаем из формул (25) и (26), что

$$\varphi(0, \eta) = \pi\Phi(-1/\eta). \tag{30}$$

Предполагая функцию $\Phi(w)$ непрерывной вплоть до разреза $-a \leqslant w \leqslant 0$, определим значения $\varphi(\xi, \eta)$ на полуокружности

$$\xi^2 + \eta^2 = 1/a^2 \quad (\eta > 0).$$

При этом $w = \overline{w} = -a^2\eta$, и из формулы (29) вытекает, что

$$\varphi(\xi, \eta)\,\big|_{\xi^2+\eta^2=1/a^2} = \mp\,\frac{a}{i}\int\limits_{l_w} \frac{\Phi(w_1)}{a^2 - w_1^2}\,dw_1, \tag{31}$$

где знак „—" соответствует $\xi > 0$, а знак „+" — $\xi < 0$. В первом случае контур $l_w$ идет из точки $w = -a^2\eta$ вдоль нижней границы разреза, а затем вдоль верхней грани разреза до точки $-a^2\eta$. Во втором случае направление обхода вдоль контура $l_w$ заменяется на противоположное (рис. 2).

Нам осталось рассмотреть поведение функции $\varphi(\xi, \eta)$, определенной формулами (26) или (29) на диаметре $\eta = 0$ круга $K$. Формула (25) показывает, что в этом случае ($\eta = 0$) $w_\lambda$ обращается в $\infty$ при $\lambda = \pi/2$, и мы не можем применять формулу (26). Рассмотрим равенство (26), в котором точку $(\xi, \eta)$ устремим к точке $(\xi_0, 0)$. При этом концы контура $l_w$ стремятся к пределам

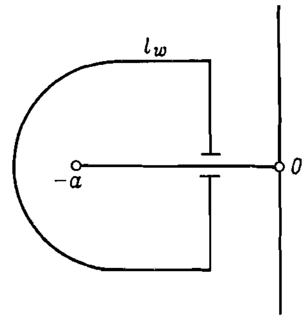



Рис. 2.

$$w_0 = -i\,\frac{\sqrt{1-a^2\xi_0^2}}{\xi_0}, \quad \overline{w}_0 = i\,\frac{\sqrt{1-a^2\xi_0^2}}{\xi_0}.$$

Используя теорему Коши, мы можем продеформировать контур $l_w$ таким образом, чтобы при $(\xi, \eta) \to (\xi_0, 0)$ он находился в ограниченной части $S_1$. При этом очевидно

$$\varphi(\xi_0, 0) = \frac{1}{\xi_0 i}\int\limits_{l_{w_0}} \frac{\Phi(w_1)\, w_1}{\left(a^2 - w_1^2\right)\sqrt{w_1^2 + \beta^2}}\,dw_1, \tag{32}$$

где

$$\beta = \sqrt{1 - a^2\xi_0^2}/\xi_0, \tag{33}$$

и радикал $\sqrt{w_1^2 + \beta^2}$ выбирается положительным при вещественных $w_1$. Контур $l_{w_0}$ с концами в точках $(-i\beta)$ и $(+i\beta)$ должен быть целиком внутри области $S_1$. До сих пор мы рассматривали решение $\varphi(\xi, \eta)$ уравнения (17), определенное формулой (26) для верхней части круга $K$, в которой $\eta > 0$. Рассмотрим теперь нижний полукруг. Формула (22) показывает, что этому полукругу соответствует верхняя часть области $T$ комплексной переменной $\theta$ или в силу (25) та часть плоскости комплексной переменной $w$, которая расположена справа от мнимой оси и имеет разрез $(0, +a)$ вдоль вещественной оси. Обозначим эту область через $S_2$. Применим формулы (26) и (29), предполагая, что функция $\Phi(w)$ голоморфна в $S_2$ и контур $l_w$ целиком расположен в этой области.

Формулы, полученные выше, справедливы (с точностью до замены знаков) и в этом случае. Укажем необходимые изменения. Корень $\sqrt{(w_1 - w)(\overline{w} - w_1)}$ нужно выбрать мнимым с отрицательной мнимой частью при $w_1 > 0$, если $\xi > 0$, и с положительной мнимой частью, если $\xi < 0$. Равенства (30) и (31) остаются справедливыми и в этом случае, а формулу (32) надо заменить на

$$\varphi(\xi_0, 0) = -\frac{1}{\xi_0 i}\int\limits_{l_{w_0}} \frac{\Phi(w_1)\,w_1}{\left(a^2-w_1^2\right)\sqrt{w_1^2+\beta^2}}\,dw_1, \tag{34}$$

где $\beta$ определено (33).

Отметим особую роль диаметра $\eta=0$ при представлении решения уравнения (17), четного по $\xi$, с помощью формул (26) или (29). Предположим, например, что функция $\Phi(w)$ голоморфна во всей комплексной плоскости переменной $w$ с разрезом $(-a, +a)$ и применим формулу (29) в случае полукруга $\eta>0$ и полукруга $\eta<0$. Таким образом, мы получаем два решения уравнения (17):

$$\varphi_1(\xi, \eta)\quad (\eta>0),\qquad \varphi_2(\xi, \eta)\quad (\eta<0).$$

Эти функции, являясь решениями уравнения эллиптического типа вида (17) в круге $K$, представляют собой функции, аналитические по $\xi$ и $\eta$, однако, вообще говоря, $\varphi_2(\xi, \eta)$ не является аналитическим продолжением $\varphi_1(\xi, \eta)$, иначе говоря, аналитическое продолжение функции $\Phi(w)$ через мнимую ось не определяет аналитическое продолжение $\varphi(\xi, \eta)$ через диаметр $\eta=0$. В дальнейшем мы еще вернемся к этому вопросу.

**4.** В предыдущем пункте мы рассмотрели решения уравнения (17), представимые в виде (26) или (29). Сейчас мы докажем, что всякое решение уравнения (17) в круге $K$, четное по $\xi$, может быть представлено в виде (26), и получим способ для определения $\Phi(w)$ по заданному решению $\varphi(\xi,\eta)$.

Рассмотрим вначале полукруг $\eta>0$. Пусть $\varphi(\xi, \eta)$ — некоторое решение (17), четное по $\xi$. Это решение является аналитической функцией $(\xi, \eta)$, и в окрестности луча $\xi=0$ оно может быть представлено в виде

$$\varphi(\xi, \eta) = \varphi_0(\eta) + \varphi_2(\eta)\,\xi^2 + \varphi_4(\eta)\,\xi^4 + \ldots \tag{35}$$

Легко показать, что коэффициенты $\varphi_2(\eta)$, $\varphi_4(\eta)$, ... однозначно определяются по коэффициенту $\varphi_0(\eta)$. Действительно, подставляя разложение (35) в уравнение (17) и приравнивая нулю коэффициенты при $\xi^n$, мы получаем

$$n(n-1)\,a^2\varphi_n(\eta) - (n+2)(n+1)\,\varphi_{n+2}(\eta) + 2a^2 n\varphi_n'(\eta) +$$
$$+ (a^2\eta^2-1)\,\varphi_n''(\eta) + 2a^2 n\varphi_n(\eta) + 2a^2\eta\varphi_n'(\eta) - (n+2)\,\varphi_{n+2}(\eta) = 0.$$

С помощью этих уравнений можно последовательно определить $\varphi_2(\eta)$, $\varphi_4(\eta)$, ... Поэтому решение $\varphi(\xi, \eta)$, удовлетворяющее соотношению

$$\varphi(\xi, \eta)|_{\xi=0} = \varphi_0(\eta), \tag{36}$$

единственно. Функция $\varphi_0(\eta)$, стоящая в правой части (36), должна быть аналитичной при $0<\eta<1/a$, и можно определить функцию $\Phi(w)$ таким образом, чтобы решение, определяемое формулой (26), удовлетворяло (36). Действительно, в силу (30) из равенства (36) вытекает, что

$$\varphi_0(\eta)=\pi\Phi(-1/\eta)$$

или

$$\Phi(w)=\frac{1}{\pi}\varphi_0(-1/w) \text{ при } -\infty<w<-a. \tag{37}$$

Итак, мы получаем значения аналитической функции $\Phi(w)$ на отрезке $-\infty<w<-a$, причем $\Phi(w)$ вещественна на этом отрезке. Функция $\Phi(w)$ в таком случае будет голоморфной в некоторой окрестности этого отрезка, и, следовательно, формула (29) определит функцию $\varphi(\xi, \eta)$ в некоторой окрестности луча $\xi=0$. Однако, как мы видели, условие (36) определяет решение однозначно, так что каждое решение $\varphi(\xi, \eta)$, четное по $\xi$, может быть представлено в виде (26) или (29). Формула (37) позволяет нам определить $\Phi(w)$, если решение $\varphi(\xi, \eta)$ задано. Предположим далее, что решение $\varphi(\xi, \eta)$ аналитично всюду в полукруге $\eta>0$, и покажем, что в этом случае $\Phi(w)$ голоморфна всюду в $S_1$. Введем в формуле (26) вместо $\lambda$ новую переменную

$$\tau=\xi\cos\lambda. \tag{38}$$

При $\xi>0$

$$\varphi(\xi, \eta)=\int_{-\xi}^{\xi}\frac{\Phi(w_\tau)}{\sqrt{\xi^2-\tau^2}}\,d\tau, \tag{39}$$

где $w_\tau=-\dfrac{\eta}{\tau^2+\eta^2}-i\dfrac{\tau\sqrt{1-a^2(\tau^2+\eta^2)}}{\tau^2+\eta^2}$.

Уравнение (39) представляет собой интегральное уравнение Абеля на функцию $\Phi(w)$ и может быть решено традиционным способом. Умножим обе части уравнения (37) на $\xi d\xi/\sqrt{\mu^2-\xi^2}$ и проинтегрируем по $\xi$ от 0 до $\mu$:

$$\int_0^\mu\frac{\varphi(\xi, \eta)\,\xi}{\sqrt{\mu^2-\xi^2}}\,d\xi=\int_0^\mu\left\{\int_{-\xi}^{+\xi}\frac{\Phi(w_\tau)\,d\tau}{\sqrt{\xi^2-\tau^2}}\right\}\frac{\xi d\xi}{\sqrt{\mu^2-\xi^2}}.$$

Меняя порядок интегрирования в правой части этого уравнения и используя известную формулу Дирихле, мы получаем

$$\int_0^{\mu} \frac{\varphi(\xi, \eta)\, \xi}{\sqrt{\mu^2 - \xi^2}}\, d\xi = \int_0^{\mu} \left\{ \int_{\tau}^{\mu} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - \tau^2)(\mu^2 - \xi^2)}} \right\} \Phi(w_{\tau})\, d\tau +$$

$$+ \int_{-\mu}^{0} \left\{ \int_{-\tau}^{\mu} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - \tau^2)(\mu^2 - \xi^2)}} \right\} \Phi(w_{\tau})\, d\tau.$$

Рассмотрим внутренний интеграл в правой части этого равенства. Вводя вместо $\xi$ новую переменную интегрирования $\sigma$:

$$\sigma^2 = \frac{\xi^2 - \tau^2}{\mu^2 - \tau^2} \quad \text{или} \quad \xi^2 = \sigma^2(\mu^2 - \tau^2) + \tau^2,$$

мы получим

$$\int_{\tau}^{\mu} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - \tau^2)(\mu^2 - \xi^2)}} = \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогичный результат имеет место и для внутреннего интеграла второго слагаемого в правой части рассматриваемого уравнения. Таким образом, справедливо равенство

$$\int_0^{\mu} \frac{\varphi(\xi, \eta)\, \xi}{\sqrt{\mu^2 - \xi^2}}\, d\xi = \frac{\pi}{2} \int_{-\mu}^{\mu} \Phi(w_{\tau})\, d\tau,$$

откуда, дифференцируя по $\mu$, получаем

$$\frac{\pi}{2} [\Phi(w_1) + \Phi(w_2)] = \frac{d}{d\mu} \int_0^{\mu} \frac{\varphi(\xi, \eta)\, \xi}{\sqrt{\mu^2 - \xi^2}}\, d\xi, \tag{40}$$

где

$$w_1 = -\frac{\eta}{\mu^2 + \eta^2} - i\, \frac{\mu \sqrt{1 - a^2(\mu^2 + \eta^2)}}{\mu^2 + \eta^2},$$

$$w_2 = -\frac{\eta}{\mu^2 + \eta^2} + i\, \frac{\mu \sqrt{1 - a^2(\mu^2 + \eta^2)}}{\mu^2 + \eta^2}.$$

Если $\xi < 0$, в формуле (39) надо поменять местами пределы интегрирования, но, повторяя вычисления, легко показать, что формула (40) имеет место и при $\xi < 0$.

Заметим, что голоморфная функция $\Phi(w)$, принимающая на отрезке $-\infty < w < -a$ вещественной оси вещественные значения, принимает в комплексно-сопряженных точках $w_1$ и $w_2$ комплексно-сопряженные значения. Заменяя $\xi$ на $\tau$ и $\mu$ на $\xi$, получаем из (40)

$$\mathrm{R}[\Phi(w)] = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_0^{\xi} \frac{\varphi(\tau, \eta)\, \tau}{\sqrt{\xi^2 - \tau^2}}\, d\tau, \tag{41}$$

где

$$w = -\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2} - i\frac{\xi\sqrt{1-a^2(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2}.$$

Вводя вместо $\tau$ новую переменную интегрирования $\sigma$, $\tau = \xi\sigma$, мы можем привести (41) к виду

$$\mathrm{R}[\Phi(w)] = \frac{1}{\pi}\frac{d}{d\xi}\int_0^1 \frac{\varphi(\xi\sigma, \eta)\,\xi\sigma d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}, \tag{42}$$

или, интегрируя по частям, к виду

$$\mathrm{R}[\Phi(w)] = \frac{1}{\pi}\frac{d}{d\xi}[\varphi(\xi, \eta)\,\xi] + \frac{1}{\pi}\frac{d}{d\xi}\int_0^1 \varphi'(\xi\sigma, \eta)\,\xi^2\sqrt{1-\sigma^2}\,d\sigma, \tag{43}$$

где $\varphi'$ обозначает производную $\varphi$ по первому аргументу.

По предположению, функция $\varphi(\xi, \eta)$ аналитична в верхней части круга $K$, откуда вытекает, что первая часть в формуле (43) представляет собой функцию, аналитическую в этой области. При $\xi$, близких к нулю, правая часть формулы (43) определяет очевидно вещественную часть голоморфной функции $\Phi(w)$, выраженной формулой (37), т. е. правая часть формулы (43) задает гармоническую функцию переменных

$$u = -\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}, \quad v = -\frac{\xi\sqrt{1-a^2(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2}.$$

Очевидно, что этот факт имеет место при всех значениях $\xi$ и $\eta$ из верхней части круга $K$, так что формула (43) определяет вещественную часть некоторой голоморфной в $S_1$ функции, которая совпадает в некоторой окрестности луча $\xi = 0$ с функцией $\Phi(w)$, задаваемой формулой (37). Те же рассуждения можно провести и для нижней части круга $K$.

Отметим важный для приложений случай, когда функция $\varphi(\xi, \eta)$ аналитична в круге $K$, за исключением точки $\xi = \eta = 0$. В этом случае наши рассуждения справедливы и в верхней, и в нижней частях круга $K$, и мы получаем две функции $\Phi_1(w)$ и $\Phi_2(w)$, голоморфные соответственно в $S_1$ и $S_2$. При этом $\Phi_2(w)$ не является аналитическим продолжением $\Phi_1(w)$. Это обстоятельство связано с тем, что формула (43) уже не имеет места в рассматриваемом случае при $\eta = 0$. Если функция $\varphi(\xi, \eta)$ не имеет сингулярностей в круге $K$, формула (43) определит нам функцию $\Phi(w)$, голоморфную в области $(S_1 + S_2)$, и в этом случае $\varphi(\xi, \eta)$ может быть представлена в виде (26) во всем круге $K$ с помощью одной аналитической функции $\Phi(w)$.

**5.** Рассмотрим теперь два специальных случая, в которых функция $\varphi(\xi, \eta)$ имеет сингулярность в точке $\xi = \eta = 0$, причем аналитическое продолжение функции $\varphi(\xi, \eta)$ через диаметр $\eta=0$ приводит к простому закону для продолжения $\Phi(w)$.

Предположим сначала, что функция $\varphi(\xi, \eta)$ аналитична в верхней части круга $K$ и на диаметре $\eta=0$, за исключением точки $\xi=\eta=0$, и удовлетворяет при $\eta=0$ уравнению

$$\left.\frac{\partial\varphi(\xi, \eta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}=0. \tag{44}$$

Введем следующее обозначение:

$$\varphi(\xi, \eta)\,|_{\eta=0}=f(\xi). \tag{45}$$

Эта функция $\varphi(\xi, \eta)$ связана, как мы показали выше, с голоморфной в $S_1$ функцией $\Phi(w)$. Мы предположим, что эта функция непрерывна вплоть до мнимой оси. Используя формулу (32) и имея в виду (45), получаем

$$f(\xi)=\frac{1}{\xi i}\int\limits_{l_w}\frac{\Phi(w_1)\,w_1}{(a^2-w_1^2)\sqrt{w_1^2+\beta^2}}\,dw_1, \tag{46}$$

где

$$\beta=\sqrt{1-a^2\xi^2}/\xi,$$

и контур $l_w$, расположенный в $S_1$, соединяет точки $(-i\beta)$ и $(+i\beta)$.

Рассмотрим в $S_2$ голоморфную функцию $\Phi_1(w)$, определенную формулой

$$\Phi_1(w)=\Phi(-w), \tag{47}$$

и решение $\varphi_1(\xi, \eta)$ уравнения (17), аналитическое в нижней части круга $K$:

$$\varphi_1(\xi, \eta)=\int_0^\pi\Phi(w_\lambda)\,d_\lambda.$$

По формуле (34) получаем

$$\varphi_1(\xi, 0)=-\frac{1}{\xi i}\int\limits_{l'_w}\frac{\Phi(w_2)\,w_2}{(a^2-w_2^2)\sqrt{w_2^2+\beta^2}}\,dw_2,$$

где $l'_w$ — контур в $S_2$, соединяющий точки $(-i\beta)$ и $(+i\beta)$. Вводя новую переменную интегрирования $w_1=-w_2$, получим, используя (47):

$$\varphi_1(\xi, 0)=\frac{1}{\xi i}\int\limits_{l_w}\frac{\Phi(w_1)\,w_1}{(a^2-w_1^2)\sqrt{w_1^2+\beta^2}}\,dw_1,$$

т. е. $$\varphi_1(\xi, \eta)|_{\eta=0} = f(\xi). \tag{48}$$

Теперь мы покажем, что $\varphi_1(\xi, \eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\left.\frac{\partial\varphi_1(\xi, \eta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} = 0. \tag{49}$$

Из формул (48) и (49) вытекает, что $\varphi_1(\xi, \eta)$ удовлетворяет на диаметре $\eta = 0$ тем же данным Коши, что и функция $\varphi(\xi, \eta)$, и, следовательно, $\varphi_1(\xi, \eta)$ представляет собой продолжение $\varphi(\xi, \eta)$, иначе говоря, формула (47) определяет в этом случае закон продолжения функции $\Phi(w)$.

Для доказательства равенства (49) необходимо получить выражения производных $\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}$ и $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}$. Приведем для этого формулу (29) к виду

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \int\limits_{l_w} \frac{(w_1 + a^2\eta)\,\Phi(w_1)}{(-w_1+\alpha)(a^2 - w_1^2)}\, d\sqrt{(w_1 - w)(\overline{w} - w_1)},$$

где $\alpha = \frac{-\eta}{\xi^2+\eta^2}$.

Интегрируя по частям, получим

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \int\limits_{l_w} \frac{(w_1 + a^2\eta)\,\Phi(w_1)}{(-w_1+\alpha)(a^2 - w_1^2)} \sqrt{(w_1 - w)(\overline{w} - w_1)}\, dw_1 +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \int\limits_{l_w} \Phi(w_1) \sqrt{(w_1 - w)(\overline{w} - w_1)}\, \frac{d}{dw_1} \times$$

$$\times \left\{ \frac{w_1 + a^2\eta}{(-w_1+\alpha)(a^2 - w_1^2)} \right\} dw_1.$$

Дифференцируя по $\eta$ и полагая $\eta = 0$, имеем

$$\left.\frac{\partial\varphi(\xi, \eta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} = \frac{i(1 - a^2\xi^2)}{\xi^3} \int\limits_{l_w} \frac{\sqrt{w_1^2+\beta^2}\,\Phi'(w_1)}{w_1(a^2 - w_1^2)}\, dw_1 +$$

$$+ \frac{1}{i\xi^3} \int\limits_{l_w} \frac{w_1\,\Phi'(w_1)\, dw_1}{(a^2 - w_1^2)\sqrt{w_1^2+\beta^2}} +$$

$$+ \frac{i(1 - a^2\xi^2)}{\xi^3} \int\limits_{l_w} \frac{(3w_1^2 - a^2)\sqrt{w_1^2+\beta^2}\,\Phi(w_1)}{w_1^2(a^2 - w_1^2)}\, dw_1 +$$

$$+ \frac{1}{i\xi^3} \int\limits_{l_w} \frac{2w_1^2\,\Phi(w_1)}{(a^2 - w_1^2)\sqrt{w_1^2+\beta^2}}\, dw_1,$$

где $\beta$ определено формулой (33), и контур $l_w$, расположенный в $S_1$, соединяет точки $(-i\beta)$ и $(+i\beta)$. Ветвь $\sqrt{w_1^2+\beta^2}$ надо выбрать так, чтобы $\sqrt{w_1^2+\beta^2}$ был положителен при вещественных $w_1$, если $\xi > 0$, и отрицателен, если $\xi < 0$. Аналогичное выражение справедливо и для

$$\left.\frac{\partial \varphi_1(\xi, \eta)}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}.$$

Однако в этом случае вместо функции $\Phi(w_1)$ надо взять функцию $\Phi_1(w_1)$, определенную формулой (47), контур $l'_w$, расположенный в $S_2$, и противоположный знак $\sqrt{w_1^2+\beta^2}$. Меняя в выражении

$$\left.\frac{\partial \varphi_1(\xi, \eta)}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}$$

переменную интегрирования $w_2 = -w_1$ и учитывая формулу (44), мы получаем равенство (49). Если вместо условия (44) мы ставим условие

$$\varphi(\xi, \eta)\,|_{\eta=0} = 0, \tag{50}$$

то формулу (47) надо заменить формулой

$$\Phi_1(w) = -\Phi(-w).$$

Этот случай можно рассмотреть аналогично предыдущему.

**6.** В предыдущих пунктах мы рассмотрели решения уравнения (17) в круге $K$, где уравнение (17) эллиптично. Обратимся к вопросу продолжения этих решений во внешность круга. Пусть, например, $\varphi(\xi, \eta)$ — решение уравнения (17), аналитичное в верхней части круга $K$, включая некоторые дуги полуокружности $\xi^2+\eta^2=\frac{1}{a^2}$ $(\eta > 0)$ и $\Phi(w)$ — соответствующая голоморфная в $S_1$ функция. В силу (43) эта функция будет голоморфна также на отрезках края разреза $(-a, 0)$, которые соответствуют дугам, описанным выше. Для значений $\varphi(\xi, \eta)$ на окружности круга $K$ справедлива формула (31).

Вещественная и мнимая части функции $\Phi(w)$ оказываются функциями $\xi$ и $\eta$ в силу соотношения

$$w = -\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2} - i\,\frac{\xi\sqrt{1-a^2(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2},$$

и, как мы показали в нашей предыдущей работе, эти функции являются решениями уравнения

$$(a^2\xi^2-1)\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + 2a^2\xi\eta\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta} + (a^2\eta^2-1)\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \\ + 2a^2\left(\xi\frac{\partial f}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = 0. \tag{51}$$

Это уравнение, как и уравнение (17), эллиптично в круге $K$ и гиперболично во внешности $K$. В указанной работе мы показали, что характеристики уравнений (51) и (17) являются касательными к окружности $\xi^2+\eta^2=1/a^2$ и что, полагая $f(\xi, \eta)$ постоянной на этих характеристиках, мы получаем решения уравнения (51). Вещественная и мнимая части $\Phi(w)$ непрерывны в круге $K$. Мы можем следующим образом продолжить эти решения во внешность $K$: положим $f(\xi, \eta)$ постоянной на всей части касательной к полуокружности, заключенной между точкой касания и осью $\eta=0$.

Применяя формулы (26) и (29) к функции $\Phi(w_\lambda)$ во внешности круга $K$, мы получаем продолжение решения $\varphi(\xi, \eta)$ уравнения (17). Этот метод продолжения решений имеет непосредственный математический смысл для векторного потенциала, как следует из результатов нашей предыдущей работы.

Рассмотрим подробнее определенное выше продолжение решения. Пусть, например, $M(\xi, \eta)$ — некоторая точка, такая, что

$$\xi>0,\ 1/a>\eta>0,\ \xi^2+\eta^2>1/a^2. \tag{52}$$

Координатами точки касания касательной к полуокружности

$$\xi^2+\eta^2=1/a^2 \quad (\eta>0),$$

проходящей через точку $M$, будут

$$\xi_0=\frac{1}{a^2}\frac{\xi+\eta\sqrt{a^2(\xi^2+\eta^2)-1}}{\xi^2+\eta^2};\quad \eta_0=\frac{1}{a^2}\frac{\eta+\xi\sqrt{a^2(\xi^2+\eta^2)-1}}{\xi^2+\eta^2},$$

и в силу формулы

$$w=-\frac{\eta+i\xi\sqrt{1-a^2(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2}$$

соответствующее значение переменной $w$ будет

$$w=-\frac{\eta_0}{\xi_0^2+\eta_0^2}=-a^2\eta_0=-\frac{\eta+\xi\sqrt{a^2(\xi^2+\eta^2)-1}}{\xi^2+\eta^2}.$$

Следовательно, наш метод продолжения решения определяет значение функции $\Phi(w)$ в точке $M(\xi, \eta)$, равное

$$\Phi\left(-\frac{\eta+\xi\sqrt{a^2(\xi^2+\eta^2)-1}}{\xi^2+\eta^2}\right). \tag{53}$$

Чтобы получить значение функции $\varphi(\xi, \eta)$ в точке $M$, надо в выражении (53) заменить $\xi$ на $\xi\cos\lambda$ и проинтегрировать по $\lambda$ в интервале $(0, \pi)$. В некотором $\lambda=\lambda_0$ корень

$$\sqrt{a^2(\xi^2\cos^2\lambda+\eta^2)-1} \tag{54}$$

становится чисто мнимым, и точка с координатами $(\xi \cos \lambda, \eta)$ будет находиться внутри круга $K$ при $\lambda_0 < \lambda < \pi - \lambda_0$. Для таких $\lambda$ корень (54) надо взять мнимым с отрицательной мнимой частью, так что аргумент в выражении (53) будет комплексным. При $\pi - \lambda_0 < \lambda < \pi$ аргумент будет равен

$$-\frac{\eta - \xi \cos \lambda \sqrt{a^2(\xi^2 \cos^2 \lambda + \eta^2) - 1}}{\xi^2 \cos^2 \lambda + \eta^2},$$

где корень надо брать положительным. Это выражение равно $(-a^2\eta_0)$, где $\eta_0$ — ордината касания касательной к верхней полуокружности, проходящей через точку $(\xi \cos \lambda, \eta)$.

Таким образом, на плоскости комплексной переменной $w$ мы имеем контур $l_w$, исходящий из точки

$$w = -\frac{\eta + \xi \sqrt{a^2(\xi^2 + \eta^2) - 1}}{\xi^2 + \eta^2}$$

на нижнем краю разреза, идущий вдоль этого разреза до точки

$$w' = -\frac{\eta}{\xi^2 \cos^2 \lambda_0 + \eta^2} \qquad (\lambda = \lambda_0),$$

описывающий затем некоторый путь в $S_1$ до той же точки $w'$ на верхнем краю разреза и идущий наконец вдоль верхнего края разреза до точки $w$.

Итак, мы имеем для $\varphi(\xi, \eta)$ следующую формулу:

$$\varphi(\xi, \eta) = \int_0^\pi \Phi\left(-\frac{\eta \pm \xi \cos \lambda \sqrt{a^2(\xi^2 \cos^2 \lambda + \eta^2) - 1}}{\xi^2 \cos^2 \lambda + \eta^2}\right) d\lambda,$$

где правило выбора знака указано выше. Вводя переменную интегрирования $w_1$ вместо $\lambda$, мы получаем, как и в п. 3:

$$d\lambda = \frac{w_1 + a^2\eta}{(a^2 - w_1^2)\sqrt{-(\xi^2 + \eta^2) w_1^2 - 2\eta w_1 + (\xi^2 a^2 - 1)}}\, dw_1$$

или, полагая,

$$w = -\frac{\eta + \xi \sqrt{a^2(\xi^2 + \eta^2) - 1}}{\xi^2 + \eta^2}, \quad w_0 = -\frac{\eta - \xi \sqrt{a^2(\xi^2 + \eta^2) - 1}}{\xi^2 + \eta^2},$$

$$d\lambda = \frac{w_1 + a^2\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\,(a^2 - w_1^2)\sqrt{(w_1 - w)(w_0 - w_1)}}\, dw_1,$$

так что

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \int_{l_w} \frac{(w_1 + a^2\eta)\,\Phi(w_1)}{(a^2 - w_1^2)\sqrt{(w_1 - w)(w_0 - w_1)}}\, dw_1, \qquad (55)$$

где вид контура $l_w$ указан выше.

Сделаем еще одно предположение относительно функции $\varphi(\xi, \eta)$. Мы предположим, что эта функция аналитична и равна нулю на дуге полуокружности

$$\xi^2 + \eta^2 = 1/a^2 \quad (\eta > 0),$$

симметричной относительно оси $\xi = 0$. Формула (30) показывает, что в этом случае $\Phi(w)$ голоморфна и однозначна в окрестности точки $w = -a$ и

$$\Phi(-a) = 0. \tag{56}$$

Действительно, входящая в эту формулу функция $\varphi(0, \eta)$ является функцией, аналитической по $\eta$ при комплексных $\eta$ в окрестности точки $-a^{-1}$; так как $\xi = 0$, $\eta = -a^{-1}$ — это точка, находящаяся в середине дуги $AA_1$. По предположению $\varphi(\xi, \eta)$ аналитична на дуге $AA_1$, и, следовательно, $\Phi(w)$ аналитична на краях разреза, соответствующих этой дуге. Но, как мы видели, эта функция однозначна в окрестности $w = -a$, и по принципу аналитического продолжения функция $\Phi(w)$ голоморфна и однозначна на участке $(-a, c)$ разреза, где точка $c$ соответствует точкам $A$ и $A_1$ полуокружности.

Вернемся к формуле (55), полагая, что касательная к полуокружности, проходящая через точку $(\xi, \eta)$, касается ее в точке дуги $AA_1$. В этом случае концы контура $l_w$ располагаются на отрезках $(-a, c)$ разреза. В силу (56) функция под знаком интеграла не имеет полюса в точке $w_1 = -a$, и ее точки ветвления $w_1 = w$ и $w_1 = w_0$ расположены одна на контуре, а другая — во внешности контура. Следовательно, из (56) вытекает, что в силу теоремы Коши $\varphi(\xi, \eta) = 0$, т. е., согласно нашему правилу продолжения решений, значения $\varphi(\xi, \eta)$ равны нулю на касательных к полуокружности, имеющих точку касания на дуге $AA_1$, симметричной относительно оси $\xi = 0$ и такой, что $\varphi(\xi, \eta)$ обращается на ней в нуль. Аналогичные результаты можно получить и для $\eta < 0$.

**7.** Чтобы сделать указанную теорию более ясной, приведем некоторые примеры.

Рассмотрим решение уравнения (2), зависящее только от $r/t$, где $r$ — расстояние до начала координат: $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$. В этом случае мы можем положить $\varphi(\xi, \eta) = f(\omega)$, где $\omega = \xi^2 + \eta^2$.

Тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = f'(\omega)\, 2\xi; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = f'(\omega)\, 2\eta;$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} = f'(\omega)\, 2 + f''(\omega)\, 4\xi^2; \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta} = f''(\omega)\, 4\xi\eta;$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} = f'(\omega)\, 2 + f''(\omega)\, 4\eta^2.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (17), получаем уравнение

$$f''(\omega)\,[4\xi^2(a^2\xi^2-1)+8a^2\xi^2\eta^2+4\eta^2(a^2\eta^2-1)]+$$
$$+f'(\omega)\,[2(a^2\xi^2-1)+2(a^2\eta^2-1)+4a^2(\xi^2+\eta^2)-2]=0$$

или

$$2\omega f''(\omega)+3f'(\omega)=0.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\varphi(\xi, \eta)=C_1/\sqrt{\xi^2+\eta^2}+C_2.$$

Выберем решение, обращающееся в нуль на окружности $\xi^2+\eta^2=1/a^2$:

$$\varphi(\xi, \eta)=1/\sqrt{\xi^2+\eta^2}-a. \tag{57}$$

Это решение имеет сингулярность в точке $\xi=\eta=0$. Определим соответствующую функцию $\Phi(w)$. В верхнем полукруге $\eta>0$, в силу (30)

$$1/\eta-a=\pi\Phi(-1/\eta),$$

откуда немедленно следует, что

$$\Phi(w)=-(1/\pi)(w+a)\quad(\eta>0). \tag{$57_1$}$$

В полукруге $\eta<0$

$$-1/\eta-a=\pi\Phi_1(-1/\eta),$$

и, следовательно,

$$\Phi_1(w)=(1/\pi)(w-a). \tag{$57_2$}$$

Легко видеть, что решение (57) удовлетворяет уравнению

$$\left.\frac{\partial\varphi(\xi, \eta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}=0$$

и что функции $(57_1)$ и $(57_2)$ удовлетворяют условию (47). Во внешности круга $K$ решение (57), согласно нашему правилу продолжения, равно нулю.

Рассмотрим теперь решение уравнения (17), зависящее только от $\eta$. Соответствующее уравнение имеет вид

$$(a^2\eta^2-1)\frac{d^2\varphi(\eta)}{d\eta^2}+2a^2\eta\frac{d\varphi(\eta)}{d\eta}=0,$$

и мы возьмем его решение вида

$$\varphi = C \lg \frac{1 - a\eta}{1 + a\eta}. \tag{58}$$

Согласно формуле (30)

$$C \lg \frac{1 - a\eta}{1 + a\eta} = \pi \Phi \left( -\frac{1}{\eta} \right),$$

так что, следовательно, внутри круга $K$

$$\Phi(w) = \frac{C}{\pi} \lg \frac{1 + a/w}{1 - a/w}. \tag{59}$$

Заметим, что решение (58) не имеет сингулярных точек внутри $K$, и соответственно функция $\Phi(w)$ аналитична в $S_1 + S_2$. Решение (58) удовлетворяет также условию $\varphi(\xi, \eta)|_{\eta=0} = 0$ и значения функции (59) в точках, симметричных относительно $w = 0$, удовлетворяют соотношению $\Phi(w) = -\Phi(-w)$, отмеченному в п. 5.

Выпишем еще одно решение уравнения (17), не имеющее сингулярностей в круге $K$:

$$\varphi(\xi, \eta) = \eta / \sqrt{1 - a^2 \xi^2}. \tag{60}$$

Формула (30) в этом случае имеет вид

$$\eta = \pi \Phi(-1/\eta),$$

откуда

$$\Phi(w) = -1/(\pi w). \tag{61}$$

**8.** Рассмотрим теперь решения уравнения (3), являющиеся функциями, однородными степени нуль от переменных $\rho$, $z$ и $t$, т. е. функции аргументов

$$\xi = \rho/t, \quad \eta = z/t.$$

Вместо уравнения (17) мы будем иметь уравнение

$$(b^2\xi^2 - 1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2b^2 \xi\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + (b^2\eta^2 - 1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} +$$
$$+ 2b^2 \left( \xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \psi = 0. \tag{62}$$

В силу осевой симметрии мы будем рассматривать только те решения уравнения (62), для которых компонента смещения $w$ является функцией, четной по $\xi$ или $\rho$. Поэтому, имея в виду второе из уравнений (1), мы получаем, что такие решения должны быть нечетными по $\xi$, т. е.

$$\psi(-\xi, \eta) = -\psi(\xi, \eta). \tag{63}$$

Введем функцию $\xi$ и $\eta$:

$$\psi = \mathrm{R} \int_0^\pi \Psi(\theta_\lambda) \cos\lambda d\lambda, \tag{64}$$

где $\theta_\lambda$ определено уравнением

$$\begin{aligned} &t - \theta_\lambda \rho \cos\lambda \pm \sqrt{b^2 - \theta_\lambda^2}\, z = 0 \\ \text{или} \qquad &1 - \theta_\lambda \xi \cos\lambda \pm \sqrt{b^2 - \theta_\lambda^2}\, \eta = 0. \end{aligned} \tag{65}$$

Функции $\psi$, задаваемые формулой (64), представляют собой решения уравнения (62). Легко видеть, что эти решения являются функциями, нечетными по $\xi$. Действительно, из уравнения (65) следует, что $\theta_\lambda$ зависит от $\lambda$ через произведение $\xi\cos\lambda$, и мы можем записать формулу (64) в виде

$$\psi(\xi, \eta) = \int_0^\pi F(\xi\cos\lambda, \eta) \cos\lambda d\lambda,$$

и, следовательно,

$$\psi(-\xi, \eta) = \int_0^\pi F(-\xi\cos\lambda, \eta) \cos\lambda d\lambda.$$

Полагая $\lambda_1 = \pi - \lambda$, имеем

$$\psi(-\xi, \eta) = \int_\pi^0 F(\xi\cos\lambda_1, \eta) \cos\lambda_1 d\lambda_1 =$$

$$= -\int_0^\pi F(\xi\cos\lambda_1, \eta)\cos\lambda_1 d\lambda_1 = -\psi(\xi, \eta),$$

что и требовалось доказать.

Вводя вместо $\theta$ новую переменную

$$w = \sqrt{b^2 - \theta^2}, \quad w_1 = \sqrt{b^2 - \theta_\lambda^2},$$

мы можем записать (64) следующим образом:

$$\psi(\xi, \eta) = R \int_0^\pi \Psi(w_1) \cos\lambda d\lambda, \tag{66}$$

где

$$w = -\frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} - i\,\frac{\xi\sqrt{1 - b^2(\xi^2 + \eta^2)}}{\xi^2 + \eta^2} \tag{67}$$

и

$$w_1 = -\frac{\eta}{\xi^2 \cos^2\lambda + \eta^2} - i\,\frac{\xi \cos\lambda \sqrt{1 - b^2(\xi^2\cos^2\lambda + \eta^2)}}{\xi^2\cos^2\lambda + \eta^2}.$$

Когда переменная $\lambda$ меняется в интервале $(0, \pi)$, $w_1$ описывает контур, симметричный относительно вещественной оси, причем симметричным точкам соответствуют значения $\cos\lambda$, одинаковые по абсолютному значению, но имеющие противоположные знаки.

Отделяя действительную и мнимую части, мы можем написать:

$$w = \alpha + i\beta, \quad \Psi(w) = \omega_1(\alpha, \beta) + i\omega_2(\alpha, \beta).$$

Введем голоморфные функции

$$\Psi_1(w) = \omega_1(\alpha, -\beta) - i\omega_2(\alpha, -\beta),$$

$$\Psi_2(w) = \frac{1}{2}\left[\Psi(w) + \Psi_1(w)\right].$$

Тогда очевидно мы можем записать вместо (66) следующее равенство:

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{1}{i}\int_0^\pi \Psi_2(w_1)\cos\lambda d\lambda,$$

где $\Psi_2(w)$ вещественна на вещественной оси. Таким образом, мы всегда можем положить

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{1}{i}\int_0^\pi \Psi(w_1)\cos\lambda d\lambda, \tag{68}$$

где функция $\Psi(w)$ принимает комплексно-сопряженные значения в комплексно-сопряженных точках.

Последующие рассуждения будут вполне аналогичны случаю потенциала $\varphi(\xi, \eta)$. Как мы показали выше,

$$\cos\lambda = \frac{1 + w_1\eta}{\xi\sqrt{b^2 - w_1^2}},$$

и вместо формулы (29) имеем

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{i}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}\int_{l_w} \frac{(w_1 + b^2\eta)(1 + \eta w_1)\Psi(w_1)}{(b^2 - w_1^2)\sqrt{b^2 - w_1^2}\sqrt{(w_1 - w)(\overline{w} - w_1)}}\,dw_1, \tag{69}$$

где вид контура $l_w$ и знак корня $\sqrt{(w_1 - w)(\bar{w} - w_1)}$ указаны выше в п. 3. Корень $\sqrt{b^2 - w_1^2}$ надо выбрать положительным, если $w_1$ лежит на верхней половине мнимой оси. Если в (68) положить $\xi = 0$, то

$$\psi(0, \eta) = \frac{1}{i} \int_0^{\pi} \Psi\left(-\frac{1}{\eta}\right) \cos \lambda d\lambda = 0.$$

Дифференцируя (68) по $\xi$ и полагая $\xi = 0$, мы получим в силу (67)

$$\left.\frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = -\int_0^{\pi} \Psi'\left(-\frac{1}{\eta}\right) \frac{\sqrt{1 - b^2\eta^2}}{\eta^2} \cos^2 \lambda d\lambda$$

или

$$\left.\frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = -\frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{1 - b^2\eta^2}}{\eta^2} \Psi'\left(-\frac{1}{\eta}\right). \tag{70}$$

Эта формула аналогична формуле (30). Она определяет функцию $\Psi(w)$ с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Но, как легко видеть, подстановка $\Psi(w) = \mathrm{const}$ в формулу (68) приводит к $\psi(\xi, \eta) = 0$, так что указанная неопределенность в выборе $\Psi(w)$ несущественна.

Для значений $\psi(\xi, \eta)$ на окружности $\xi^2 + \eta^2 = 1/b^2$ вместо формулы (31) имеет место формула

$$\psi(\xi, \eta)\big|_{\xi^2+\eta^2=1/b^2} = \mp \frac{b}{\xi} \int_{l_w} \frac{(1 + \eta w_1) \Psi(w_1)}{(b^2 - w_1^2)\sqrt{b^2 - w_1^2}} dw_1 \quad (\eta > 0), \tag{71}$$

где верхний знак соответствует случаю $\xi > 0$, нижний — случаю $\xi < 0$, а вид контура $l_w$ тот же, что и для формулы (31). Наконец, формула (32) заменяется на

$$\psi(\xi, 0) = \frac{1}{\xi i} \int_{l_w} \frac{w_1 \Psi(w_1)}{(b^2 - w_1^2)^{3/2} \sqrt{w_1^2 + \beta^2}} dw_1, \tag{72}$$

где $\beta = \sqrt{1 - b^2\xi^2}/\xi$ и корень $\sqrt{w_1^2 + \beta^2}$ выбирается положительным при вещественных $w_1$. Если $\eta < 0$, то мы будем иметь аналогичные формулы с некоторыми изменениями знаков входящих в них выражений, как и в случае потенциала $\varphi$.

**9.** В предыдущем параграфе мы изучили решения уравнения (62), имеющие вид (68) или (69). Покажем теперь, что любое решение уравнения (62), нечетное по $\xi$, может быть представлено в круге $K$:

$$\xi^2 + \eta^2 = 1/b^2,$$

в виде (68), и укажем способ нахождения функции $\Psi(w)$ по заданному решению $\psi(\xi, \eta)$. Наши рассуждения будут аналогичны рассуждениям п. 4.

Рассмотрим полукруг $\eta > 0$. Пусть $\psi(\xi, \eta)$ — некоторое решение уравнения (62), нечетное по $\xi$. В окрестности луча $\xi = 0$ это решение может быть разложено в ряд

$$\psi(\xi, \eta) = \psi_1(\eta)\xi + \psi_3(\eta)\xi^3 + \psi_5(\eta)\xi^5 + \ldots \tag{73}$$

Подставляя это разложение в уравнение (62) и приравнивая нулю коэффициенты при $\xi^n$, получим

$$\begin{gathered} n(n-1)b^2\psi_n(\eta) + (n+2)(n+1)\psi_{n+2}(\eta) + 2b^2n\psi_n'(\eta) + \\ + (b^2\eta^2 - 1)\psi_n''(\eta) + 2b^2n\psi_n(\eta) + 2b^2\eta\psi_n'(\eta) - \\ - (n+2)\psi_{n+2}(\eta) - \psi_{n+2}(\eta) = 0. \end{gathered}$$

Эти уравнения позволяют единственным образом последовательно определить $\psi_3(\eta), \psi_5(\eta)$ и т. д., если нам известно

$$\left.\frac{\partial\psi(\xi, \eta)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = \psi_1(\eta). \tag{74}$$

Функция $\psi_1(\eta)$ в условии (74) должна быть функцией, аналитической по $\eta$ при $0 < \eta < 1/b$, и можно также, аналогично тому, как это было сделано в п. 4, определить функцию $\Psi(w)$. Действительно, в силу (70)

$$\psi_1(\eta) = -\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{1-b^2\eta^2}}{\eta^2}\Psi'\left(-\frac{1}{\eta}\right) \tag{75}$$

или для $\eta > 0$

$$\Psi'(w) = -\frac{2}{\pi}\frac{\psi_1(-1/w)}{w\sqrt{w^2-b^2}} = \frac{2}{\pi}\frac{\psi_1(-1/w)}{w\sqrt{b^2-w_1^2}},$$

где $\sqrt{w^2-b^2}$ выбирается положительным при $w < -b$, а $\sqrt{b^2-w_1^2}$ чисто мнимым с положительной мнимой частью при $w < -b$.

Формула (75) определяет $\Psi(w)$ в интервале $-\infty < w < -b$ вещественной оси, причем $\Psi(w)$ голоморфна в некоторой окрестности этого интервала.

Можно далее показать, что $\Psi(w)$ голоморфна всюду в $S_1$, если $\psi(\xi, \eta)$ аналитична и не имеет сингулярностей в полукруге $\eta > 0$.

Введем в качестве переменной интегрирования в формуле (68) $\tau = \xi\cos\lambda$ вместо $\lambda$. Тогда при $\xi > 0$

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{1}{i}\int_{-\xi}^{+\xi}\frac{\Psi(w_\tau)\tau}{\xi\sqrt{\xi^2-\tau^2}}d\tau, \tag{76}$$

где $w_\tau = -\frac{\eta}{\tau^2+\eta^2} - i\frac{\tau\sqrt{1-b^2(\tau^2+\eta^2)}}{\tau^2+\eta^2}$.

Умножая обе части равенства (76) на $\xi^2 d\xi/\sqrt{\mu^2-\xi^2}$ и интегрируя по $\xi$ в интервале $(0, \mu)$, мы получаем с помощью выкладок, аналогичных проведенным в п. 4,

$$\int_0^\mu \frac{\psi(\xi, \eta)\xi^2}{\sqrt{\mu^2-\xi^2}} d\xi = \frac{\pi}{2i}\int_{-\mu}^{+\mu} \Psi(w_\tau)\tau d\tau$$

или, дифференцируя по $\mu$ и заменяя $\xi$ на $\tau$ и $\mu$ на $\xi$,

$$J[\Psi(w)] = \frac{i}{\pi\xi}\frac{d}{d\xi}\int_0^\xi \frac{\psi(\tau, \eta)\tau^2}{\sqrt{\xi^2-\tau^2}} d\tau, \tag{77}$$

где

$$w = -\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2} - i\frac{\xi\sqrt{1-b^2(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2}. \tag{78}$$

Формула, аналогичная формуле (42) п. 4, будет иметь вид

$$J[\Psi(w)] = \frac{i}{\pi\xi}\frac{d}{d\xi}\int_0^1 \frac{\psi(\xi\sigma, \eta)\xi^2\sigma^2 d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}, \tag{79}$$

откуда, как и в п. 4, следует, что $\Psi(w)$ голоморфна в $S_1$, если $\psi(\xi, \eta)$ аналитична и не имеет сингулярностей в полукруге $\eta > 0$.

Если функция $\psi(\xi, \eta)$ аналитична вплоть до некоторых дуг на полуокружности

$$\xi^2 + \eta^2 = 1/b^2 \quad (\eta > 0),$$

то функция $\Psi(w)$ будет аналитична вплоть до соответствующих отрезков разреза $(-b, 0)$.

Предположим, например, что $\psi(\xi, \eta)$ аналитична на дуге $AA_1$, содержащей точку $\xi = 0$, $\eta = 1/b$.

В этом случае функция $\psi_1(\eta)$ будет аналитична в окрестности точки $\eta = 1/b$, и формула (75) определит значения функции $\Psi(w)$ в окрестности точки $w = -b$:

$$\Psi'(w) = f_1(w)/\sqrt{b^2-w^2},$$

где $f_1(w)$ голоморфна вблизи $w = -b$. При интегрировании можно положить $\Psi(-b) = 0$, так что для $\Psi(w)$ мы получаем следующее выражение:

$$\Psi(w) = \sqrt{b^2-w^2}\, f(w), \tag{80}$$

где $f(w)$ голоморфна в точке $w = -b$.

Предположим теперь, что $\psi(\xi, \eta)$ обращается в нуль на дуге $AA_1$, симметричной относительно луча $\xi = 0$. В этом случае можно аналитически продолжить функцию

$$f(w) = \Psi(w)/\sqrt{b^2 - w^2}$$

на интервалы, соответствующие верхнему и нижнему краю разреза $(-b, 0)$ от точки $-b$ до точки, соответствующей $A$ и $A_1$.

Однако, как мы показали выше, функция $f(w)$ голоморфна и однозначна в точке $w = -b$, соответствующей середине дуги $AA_1$, и, следовательно, эта функция принимает одинаковые значения на верхнем и нижнем краях разреза.

Легко показать, что в этом случае $f(-b) = 0$. Действительно, применим формулу (71) к точкам дуги $AA_1$:

$$\psi(\xi, \eta)\,|_{\xi^2+\eta^2=1/b^2} = -\frac{b}{\xi}\int\limits_{l_w} \frac{(1 + \eta w_1) f(w_1)}{b^2 - w_1^2} dw_1,$$

где $l_w$ — замкнутый контур, внутри которого функция $f(w)$, как мы показали выше, голоморфна и однозначна. Вычисляя вычет подынтегральной функции в точке $w = -b$, мы получаем

$$\psi(\xi, \eta)\,|_{\xi^2+\eta^2=1/b^2} = -\frac{b}{\xi}\,\frac{(1 - \eta b) f(-b)}{2b}.$$

Однако согласно предположению левая часть равна нулю, откуда $f(-b) = 0$.

Нам осталось определить продолжение решения $\psi(\xi, \eta)$ за пределы круга $\xi^2 + \eta^2 < 1/b^2$.

Для этого можно использовать тот же способ, что и в случае скалярного потенциала $\varphi(\xi, \eta)$, поскольку вещественная и мнимая части функции $\Psi(w)$ также удовлетворяют уравнению (51), в котором надо только заменить $a$ на $b$. Мы можем взять $\Psi(w)$ постоянной на отрезке любой касательной к полукругу, заключенном между точкой касания и осью $\eta = 0$, полагая в качестве этой постоянной значение $\Psi(w)$ в точке касания. Тогда формула (55) заменится для точек $(\xi, \eta)$, таких, что

$$\xi > 0, \quad \frac{1}{b} > \eta > 0, \quad \xi^2 + \eta^2 > 1/b^2,$$

на формулу

$$\psi(\xi, \eta) = -\frac{1}{\xi\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\, i}\int\limits_{l_w} \frac{(w_1 + b^2\eta)(1 + \eta w_1)\,\Psi(w_1)\,dw_1}{(b^2 - w_1^2)\sqrt{b^2 - w_1^2}\,\sqrt{(w_1 - w)(\overline{w} - w_1)}},$$

где контур $l_w$ указан в п. 6 и

$$w = -\frac{\eta + \xi\sqrt{b^2(\xi^2+\eta^2)-1}}{\xi^2+\eta^2}, \quad w_1 = \frac{-\eta + \xi\sqrt{b^2(\xi^2+\eta^2)-1}}{\xi^2+\eta^2}.$$

Повторяя рассуждения п. 6, можно показать, что функция $\psi(\xi, \eta)$ обращается в нуль на отрезках касательных дуге $AA_1$, симметричной относительно $\xi = 0$ и такой, что $\psi(\xi, \eta) = 0$ на этой дуге. Все полученные выше результаты имеют место также и при $\eta < 0$.

**10.** Приведем некоторые примеры. Полагая, что решение уравнения (62) имеет вид

$$\psi(\xi, \eta) = \xi^n f(\xi^2 + \eta^2),$$

мы можем с помощью несложных выкладок получить, в частности, следующее решение уравнения (62):

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{1 - b^2(\xi^2+\eta^2)}{(\xi^2+\eta^2)^{3/2}}\,\xi, \tag{81}$$

являющееся функцией, нечетной по $\xi$. Для этого решения

$$\psi_1(\eta) = \left.\frac{\partial\psi(\xi, \eta)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = \frac{1-b^2\eta^2}{\eta^3} \qquad \text{при } \eta > 0,$$

$$\psi_1(\eta) = \left.\frac{\partial\psi(\xi, \eta)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = -\frac{1-b^2\eta^2}{\eta^3} \qquad \text{при } \eta < 0.$$

Применяя формулу (75), мы имеем для $\eta > 0$

$$\frac{1-b^2\eta^2}{\eta^3} = -\frac{\pi}{2}\,\frac{\sqrt{1-b^2\eta^2}}{\eta^2}\,\Psi'\left(-\frac{1}{\eta}\right),$$

откуда, полагая

$$w = -1/\eta, \quad \eta = -1/w \quad (w < 0)$$

и учитывая, что $\sqrt{1-b^2\eta^2}$ должен быть выбран положительным, получаем

$$w(b^2 - w^2) = \frac{\pi}{2}\sqrt{w^2 - b^2}\;\Psi'(w)\,w,$$

где корень $\sqrt{w^2-b^2}$ положителен при $w < -b$. Это равенство можно записать также в виде

$$w(b^2 - w^2) = -i\frac{\pi}{2}\,w\sqrt{b^2-w^2}\;\Psi'(w),$$

где корень $\sqrt{b^2-w^2}$ мнимый с положительной мнимой частью при $w<-b$. Таким образом

$$\Psi'(w)=\frac{2}{\pi}\sqrt{b^2-w^2}\,i.$$

При $\eta<0$ имеем

$$w(b^2-w^2)=-\frac{\pi}{2}\sqrt{w^2-b^2}\,w\Psi'(w),$$

где $\sqrt{w^2-b^2}$ положителен при $w<-b$. Если выбрать корень $\sqrt{b^2-w^2}$ мнимым с положительной мнимой частью при $w<-b$, то мы должны считать его мнимым с отрицательной мнимой частью при $w>b$, так что предыдущая формула примет вид

$$w(b^2-w^2)=-i\frac{\pi}{2}\sqrt{b^2-w^2}\,w\Psi'(w),$$

и, следовательно, при $\eta<0$

$$\Psi'(w)=\frac{2}{\pi}\sqrt{b^2-w^2}\,i,$$

иначе говоря, при $\eta<0$ и $\eta>0$ мы получаем одну и ту же аналитическую функцию $w$.

Отметим, что решение (81) обращается в нуль всюду на окружности

$$\xi^2+\eta^2=1/b^2,$$

и, следовательно, его продолжение во внешность круга равно нулю при $|\eta|\leqslant 1/b$. Мы положим $\psi(\xi,\eta)=0$ также и при $|\eta|>1/b$. Мы всегда будем предполагать выполненным это условие в случае, если $\psi(\xi,\eta)=0$ на дуге $AA_1$ окружности $\xi^2+\eta^2=1/b^2$, симметричной относительно $\xi=0$.

**11.** Мы переходим теперь к изучению некоторых проблем механики и для начала поясним механический смысл решений уравнений (2) и (3), однородных порядка однородности нуль, которыми мы будем заниматься в дальнейшем. Как мы показали в нашей предыдущей работе, в плоском случае однородные потенциалы описывают, к примеру, упругие колебания, порожденные силой, сосредоточенной в некоторый момент времени в некоторой точке. В рассматриваемом трехмерном случае однородные потенциалы описывают упругие колебания, вызванные действием силы, приложенной к точке пространства и включаемой в некоторый момент времени. Не умаляя общности, можно положить, что этой точкой является начало координат, а моментом времени — $t=0$. Аналогично тому, как это было сделано для плоского случая, мы можем рассматривать силу, сосредоточенную в некоторой точке как предел сил, действующих на некоторую поверхность при стремлении этой поверхности к рассматриваемой точке.

Рассмотрим некоторую поверхность вращения

$$f(\rho, z) = 0,$$

где $\rho$ и $z$ изменяются в некоторых ограниченных интервалах, и введем гомотетичные поверхности $S_\varepsilon$:

$$f(\rho/\varepsilon, z/\varepsilon) = 0, \tag{82}$$

где параметр $\varepsilon \to 0$. Мы можем рассматривать точки поверхности $S_{\varepsilon_1}$ и $S_{\varepsilon_2}$ как соответствующие, если координаты этих точек связаны преобразованием подобия:

$$x_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} x_1, \quad y_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} y_1, \quad z_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} z_1.$$

Предположим, что при $t = 0$ к точкам поверхности $S_\varepsilon$ приложено напряжение, не зависящее от угла $\vartheta$, с компонентами, представимыми в виде произведения $1/\varepsilon^2$ на функцию, не зависящую от $\varepsilon$ и остающуюся постоянной для соответствующих точек поверхностей $S_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$. Предположим также, что начальное положение упругой среды в момент времени $t = 0$ — это состояние покоя. В этом случае для каждого значения $\varepsilon$ мы имеем осесимметричные упругие колебания среды с соответствующими потенциалами $\varphi_\varepsilon(\rho, z, t)$ и $\psi_\varepsilon(\rho, z, t)$.

Эти потенциалы должны удовлетворять уравнениям (2) и (3), причем компоненты вектора напряжений на поверхности $S_\varepsilon$ заданы. В пределе эти условия на поверхности имеют вид

$$D_1(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} X(x, y, z), \quad D_2(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} Y(x, y, z),$$
$$D_3(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} Z(x, y, z), \tag{83}$$

где $D_1$, $D_2$, $D_3$ — линейные однородные функции с постоянными коэффициентами от производных второго порядка функций $\varphi_\varepsilon$ и $\psi_\varepsilon$ по $x$, $y$, $z$, а $X$, $Y$, $Z$ — функции, заданные на $S_\varepsilon$ и не зависящие от $\varepsilon$. Нужно учесть также начальные условия, определяющие состояние покоя при $t = 0$. Функции $\varphi_\varepsilon$ и $\psi_\varepsilon$ удовлетворяют, таким образом, уравнениям (2) и (3), условиям, имеющим при $\varepsilon \to 0$ вид (83) и указанным выше начальным условиям. Введем функцию

$$\varphi(\rho, z, t) = \varphi_\varepsilon(k\rho, kz, kt), \quad \psi(\rho, z, t) = \psi_\varepsilon(k\rho, kz, kt), \tag{84}$$

где $k$ — некоторая постоянная. Мы имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{\partial \varphi_\varepsilon (k\rho, kz, kt)}{\partial (k\rho)} k, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon (k\rho, kz, kt)}{\partial (k\rho)^2} k^2,$$

так что функции (84) удовлетворяют очевидно уравнениям (2) и (3). Учитывая, что $D(\varphi, \psi)$ — это линейная однородная функция с постоянными коэффициентами от вторых производных $\varphi$ и $\psi$ по $x$, $y$ и $z$, мы можем получить, что

$$D_l (\varphi, \psi)\,|_{x, y, z} = k^2 D_l (\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon)\,|_{(kx, ky, kz)},$$

где индексы $(x, y, z)$ и $(kx, ky, kz)$ обозначают точки, в которых надо рассматривать соответствующие выражения. Но функции $\varphi_\varepsilon$ и $\psi_\varepsilon$ удовлетворяют условиям (83), откуда

$$D_1 (\varphi, \psi) = \frac{1}{(\varepsilon/k)^2} X (kx, ky, kz), \quad D_2 (\varphi, \psi) = \frac{1}{(\varepsilon/k)^2} Y (kx, ky, kz),$$
$$D_3 (\varphi, \psi) = \frac{1}{(\varepsilon/k)^2} Z (kx, ky, kz),$$

т. е. $\varphi$ и $\psi$ удовлетворяют предельным условиям на поверхности $S_{\varepsilon/k}$, точки которой имеют координаты

$$x' = kx, \quad y' = ky, \quad z' = kz,$$

где $(x, y, z)$ — точка $S_\varepsilon$, соответствующая точке $(x', y', z')$ поверхности $S_{\varepsilon/k}$. Для потенциалов $\varphi_\varepsilon (\rho, z, t)$ и $\psi_\varepsilon (\rho, z, t)$ начальным состоянием по условию является состояние покоя.

Очевидно, что потенциалы $\varphi$ и $\psi$ удовлетворяют тем же начальным данным. Итак, мы можем утверждать, что $\varphi$ и $\psi$ удовлетворяют тем же условиям, что и потенциалы $\varphi_{\varepsilon/k}$, $\psi_{\varepsilon/k}$, так что

$$\varphi_\varepsilon (k\rho, kz, kt) = \varphi_{\varepsilon/k}(\rho, z, t), \quad \psi_\varepsilon (k\rho, kz, kt) = \psi_{\varepsilon/k} (\rho, z, t).$$

Устремляя $\varepsilon$ к 0, мы получаем потенциалы $\varphi_0 (\rho, z, t)$, $\psi_0 (\rho, z, t)$, соответствующие случаю силы, приложенной к началу координат в момент времени $t = 0$. Согласно предыдущим формулам

$$\varphi_0 (k\rho, kz, kt) = \varphi_0 (\rho, z, t), \quad \psi_0 (k\rho, kz, kt) = \psi_0 (\rho, z, t),$$

иначе говоря, функции $\varphi_0 (\rho, z, t)$ и $\psi_0 (\rho, z, t)$ являются однородными степени однородности нуль по переменным $\rho$, $z$, $t$, что и требовалось доказать.

Заметим в заключение, что мы выбрали компоненты приложенного к поверхности $S_\varepsilon$ вектора напряжений пропорциональными $1/\varepsilon^2$, так как площадь поверхности $S_\varepsilon$ равна произведению $\varepsilon^2$ на постоянную, не зависящую от $\varepsilon$.

**12.** Рассмотрим теперь, к примеру, задачу о колебаниях полупространства $z > 0$ под действием силы, приложенной в момент времени $t = 0$ к точке $\rho = 0$, $z = f$, и предположим, что эта сила осесимметрична и порождает продольные колебания. Такой источник колебаний определяется потенциалом $\varphi$, являющимся, как мы показали выше, однородной степени нуль функцией от аргументов $\rho$, $z$, $t$, т. е. этот потенциал является функцией аргументов $\xi = \frac{\rho}{t}$, $\eta = \frac{(z-f)}{t}$.

Учитывая, что в момент времени $t = 0$ среда покоилась, мы можем утверждать, что эту функцию $\varphi(\xi, \eta)$ достаточно определить лишь в круге

$$\xi^2 + \eta^2 \leqslant 1/a^2,$$

а во внешности этого круга она должна аннулироваться. При этом окружность рассматриваемого круга соответствует фронту распространяющейся продольной волны. Как мы показали, мы можем представить потенциал $\varphi$ в виде

$$\varphi(\xi, \eta) = \int_0^\pi \Phi(\theta_\lambda)\, d\lambda, \tag{85}$$

$$\theta_\lambda = \frac{\xi \cos\lambda - i\eta \sqrt{1 - a^2(\xi^2\cos^2\lambda + \eta^2)}}{\xi^2\cos^2\lambda + \eta^2}. \tag{86}$$

Потенциал (85) описывает движение в среде при $0 < t < af$.

Для времени $t \geqslant af$ мы должны добавить еще два потенциала, соответствующих отраженным волнам: один — для отраженных продольных волн, а другой — для отраженных поперечных волн. Эти отраженные потенциалы могут быть определены из условия отсутствия напряжений на поверхности $z = 0$. Мы можем представить их как комбинацию потенциалов, соответствующих плоскому случаю, т. е. в виде суммы потенциалов, описанных в нашей предыдущей работе. Для таких потенциалов имеют место выражения

$$\varphi_1 = \int_0^\pi \Phi_1(\theta_\lambda^{(1)})\, d\lambda, \qquad \psi_1 = \int_0^\pi \Psi_1(\theta_\lambda^{(2)}) \cos\lambda\, d\lambda,$$

где $\theta_\lambda^{(1)}$ и $\theta_\lambda^{(2)}$ определяются из уравнений

$$t - \theta_\lambda^{(1)}\rho\cos\lambda - \sqrt{a^2 - \theta_\lambda^{(1)^2}}\,(z + f) = 0,$$

$$t - \theta_\lambda^{(2)}\rho\cos\lambda - \sqrt{b^2 - \theta_\lambda^{(2)^2}}\, z - \sqrt{a^2 - \theta_\lambda^{(2)^2}}\, f = 0,$$

причем $\Phi_1(\theta)$ и $\Psi_1(\theta)$ определены следующим образом:

$$\Phi_1'(\theta) = \frac{-(2\theta^2 - b^2)^2 + 4\theta^2\sqrt{a^2 - \theta^2}\sqrt{b^2 - \theta^2}}{(2\theta^2 - b^2)^2 + 4\theta^2\sqrt{a^2 - \theta^2}\sqrt{b^2 - \theta^2}}\,\Phi'(\theta),$$

$$\Psi_1'(\theta) = \frac{-4\theta(2\theta^2 - b^2)\sqrt{a^2 - \theta^2}}{(2\theta^2 - b^2)^2 + 4\theta^2\sqrt{a^2 - \theta^2}\sqrt{b^2 - \theta^2}}\Phi'(\theta). \qquad (87)$$

Аналогично можно рассмотреть случай источника поперечных колебаний. В этом случае функция $\psi_1$, представляющая потенциал отраженной поперечной волны, является функцией аргументов $\xi_1 = \rho/t$, $\eta_1 = (z+f)/t$, причем эта функция отлична от нуля на двух дугах полуокружности $\xi_1^2 + \eta_1^2 = 1/b^2$ $(\eta_1 > 0)$, опирающихся на диаметр $\eta_1 = 0$. Продолжения $\psi_1$ во внешность полукруга $\xi_1^2 + \eta_1^2 < 1/b^2$ определят нам поперечные колебания, порождаемые продольными колебаниями, распространяющимися вдоль поверхности $z = 0$ со скоростью, большей, чем скорость поперечных колебаний. В нашей предыдущей работе мы уже рассматривали аналогичное явление для плоского случая. Предложенный нами метод позволяет также решить задачу о колебаниях слоя под действием источника, описанного выше.

Сделаем несколько существенных замечаний об отражении упругих волн в трехмерном пространстве с аксиальной симметрией. Предположим, что потенциал падающих продольных волн $\varphi(\xi, \eta)$ обращается в нуль на окружности $\xi^2 + \eta^2 = 1/a^2$, или на полуокружности, или даже просто на дуге $AA_1$, симметричной относительно точки $\xi = 0$ на окружности. Как мы видели (п. 6), в этом случае при представлении $\varphi(\xi, \eta)$ в форме интеграла

$$\varphi(\xi, \eta) = \int_0^\pi \Phi(w_\lambda)\, d\lambda$$

функция $\Phi(w)$, принимающая вещественные значения на интервале $(-\infty, -a)$ вещественной оси,будет регулярной также и в точке $w = -a$ и, следовательно, вещественной и регулярной на целом интервале $(-\infty, -c)$, где $-a < -c \leqslant 0$. Если $\varphi(\xi, \eta)$ равна нулю на полуокружности, то $c = 0$. Кроме того, при этом $\Phi(-a) = 0$, т. е. в окрестности точки $w = -a$ $\Phi(w)$ представима в виде ряда

$$\Phi(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w + a)^n,$$

где коэффициенты $a_n$ вещественны. Наоборот, если это разложение имеет место для функции $\Phi$, то $\varphi(\xi, \eta)$ обращается в нуль на некоторой дуге $AA_1$. Используя переменную $\theta$

$$w = \sqrt{a^2 - \theta^2},$$

где точке $w = -a$ соответствует $\theta = 0$, мы можем представить функцию $\Phi(\theta)$ в виде ряда

$$\Phi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \theta^{2n},$$

где коэффициенты $b_n$ вещественны. Оба разложения функции $\Phi$ эквивалентны. В аналогичном случае, когда потенциал $\varphi(\xi, \eta)$ обращается в нуль на некоторой дуге $AA_1$, на которой значения $\theta$ удовлетворяют условию $-b \leqslant \theta \leqslant b$, мы получим разложение вида (п.9)

$$\Psi(w) = (b^2 - w^2)^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w + b)^n,$$

где $a_n$ вещественны, или, в силу того что $w = \sqrt{b^2 - \theta^2}$ и точке $w = -b$ соответствует $\theta = 0$,

$$\Psi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \theta^{2n+1}$$

с вещественными коэффициентами. И наоборот, если $\Psi(\theta)$ представима в виде такого разложения, то $\psi(\xi, \eta)$ обращается в нуль на некоторой дуге $AA_1$.

До сих пор мы рассматривали случай, когда уравнение, из которого определяется $\theta$ как функция $(t, x, z)$, таково, что вещественным $\theta$, $-a \leqslant \theta \leqslant a$ или $-b \leqslant \theta \leqslant b$ соответствует полуокружность. Однако в случае отражения это уже не всегда имеет место, но, как легко проверить, предыдущий результат сохраняет силу. Дуга $AA_1$ в этом случае соответствует некоторой части фронта распространения волны. Принимая во внимание, что частные, фигурирующие в формулах (87) и аналогичных формулах для случая поперечной волны, представляют собой функции, регулярные при $\theta = 0$, четные либо нечетные по $\theta$, мы можем утверждать, что после отражения функции $\Phi_1(\theta)$ и $\Psi_1(\theta)$ в окрестности $\theta = 0$ представимы в виде рядов указанного типа, так что отраженные потенциалы $\varphi(x, y, t)$ и $\psi(x, y, t)$ обращаются в нуль на тех частях волнового фронта, которые соответствуют значениям $\theta$, описывающим до отражения дугу $AA_1$, т. е. $-a \leqslant \theta \leqslant a$.

Этот результат можно сформулировать еще одним способом, а именно: если мнимая часть $\Phi(\theta)$ обращается в нуль на интервале $-c < \theta < +c$ $(c \leqslant a)$ вещественной оси и $\Phi(0) = 0$, то

$$\mathrm{R} \int_0^{\pi} \Phi(\theta_\lambda)\, d\lambda,$$

где $\theta_\lambda$ представляет собой корень уравнения вида

$$t - \theta_\lambda \rho \cos\lambda \pm \sqrt{a^2 - \theta_\lambda^2}\, z - \chi(\theta_\lambda) = 0,$$

задает потенциал продольной волны, обращающейся в нуль на поверхности, получаемой вращением вокруг оси $z$ дуги $AA_1$, соответствующей интервалу $-c < \theta < +c$ в силу уравнения $t - \theta x \pm \sqrt{a^2 - \theta^2}\, z - \chi(\theta) = 0$.

Функция $\chi(\theta)$ считается вещественной на указанном интервале. Аналогичный результат справедлив и для поперечных волн. В дальнейшем мы еще вернемся к более детальному рассмотрению этого вопроса.

Укажем наконец, что в случае, когда сила, приложенная к точке $\rho=z=0$, является заданной функцией времени, мы можем рассматривать ее как сумму сил, включаемых в указанной точке в различные моменты времени. Потенциал в этом случае будет задаваться интегралом Стилтьеса выражений вида

$$\varphi dQ_1(t-\tau_1) \quad \text{и} \quad \psi dQ_2(t-\tau_1),$$

где $\varphi$ и $\psi$ — это элементарные потенциалы, порождаемые силой, включаемой в момент времени $\tau_1$.

**13.** Перейдем к рассмотрению задачи M. Lamb'a (Phil. Trans. Vol. 203, 1904, pp. 1—42) о колебаниях полупространства $z>0$ под действием силы, приложенной к точке $\rho=z=0$ и направленной вдоль оси $z$. Используем переменную $\theta$ и потенциалы $\varphi$ и $\psi$ в виде

$$\varphi=\int_0^\pi \Phi(\theta_1)\,d\lambda, \quad \psi=\int_0^\pi \Psi(\theta_2)\cos\lambda\,d\lambda, \tag{88}$$

где $\theta_1$ и $\theta_2$ определяются из уравнений

$$\begin{gathered}\delta_1\equiv t-\theta_1\rho\cos\lambda-\sqrt{a^2-\theta_1^2}\,z=0,\\ \delta_2\equiv t-\theta_2\rho\cos\lambda-\sqrt{b^2-\theta_2^2}\,z=0.\end{gathered} \tag{89}$$

Знак корня в этих уравнениях выбирается таким образом, чтобы лучам, исходящим из начала координат и идущим в полупространство $z>0$, соответствовали значения $\theta$ из верхней полуплоскости. Мнимая часть функции $\Phi(\theta)$ является функцией нечетной в точках, расположенных симметрично относительно мнимой оси. То же справедливо для вещественной части функции $\Psi(\theta)$. Эти свойства функций $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\theta)$ являются следствием того обстоятельства, что мнимая ось переменной $\theta$ соответствует вещественной оси переменной $w$, и в выражении для $\psi$ отсутствует множитель $1/i$.

Пусть $u$, $v$, $w$ — компоненты вектора смещений вдоль осей $\rho$, $\vartheta$, $z$. Компоненты тензора деформации определяются, как известно, по формулам

$$\varepsilon_\rho=\frac{\partial u}{\partial\rho};\quad \varepsilon_\vartheta=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\vartheta}+\frac{u}{\rho};\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z};$$

$$\gamma_{\rho\vartheta}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\vartheta}+\frac{\partial v}{\partial\rho}-\frac{v}{\rho};\ \gamma_{\vartheta z}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\vartheta};\ \gamma_{z\rho}=\frac{\partial w}{\partial\rho}+\frac{\partial u}{\partial z}.$$

В осесимметричном случае $v=0$, и компоненты $u=q$ и $w$ не зависят от $\vartheta$, так что

$$\varepsilon_\rho=\frac{\partial q}{\partial\rho};\quad \varepsilon_\vartheta=\frac{q}{\rho};\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z};$$

$$\gamma_{\rho\vartheta}=\gamma_{\vartheta z}=0;\ \gamma_{z\rho}=\frac{\partial w}{\partial\rho}+\frac{\partial q}{\partial z}.$$

Для компонент тензора напряжений имеют место формулы

$$T_{zz}=\lambda\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho q)+\frac{\partial w}{\partial z}\right]+2\mu\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$T_{\rho z}=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial\rho}+\frac{\partial q}{\partial z}\right),$$

$$T_{\vartheta z}=0,$$

или в силу (1)

$$\frac{1}{\mu}T_{zz}=\frac{\lambda}{\mu}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}-\rho\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]+2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right),$$

$$\frac{1}{\mu}T_{\rho z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\rho}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{1}{\rho^2}\psi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\partial z}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$

Отсюда с помощью несложных вычислений получаем

$$\frac{1}{\mu}T_{zz}=\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right),$$

$$\frac{1}{\mu}T_{\rho z}=2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\partial z}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho^2}\psi.$$

Используя уравнения (2) и (3) и равенство $\lambda/\mu=b^2/a^2-2$, мы получаем

$$\begin{gathered}\frac{1}{\mu}T_{zz}=\frac{(b^2-2a^2)}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\partial z}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial z},\\ \frac{1}{\mu}T_{\rho z}=2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\partial z}+b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.\end{gathered}\tag{90}$$

Получим теперь выражения для производных $\varphi$ и $\psi$ по $\rho$ и $z$, используя формулы (88). В нашей предыдущей работе мы рассмотрели уравнение

$$\delta\equiv t-\theta x-\sqrt{c^2-\theta^2}y=0$$

и получили выражение производных произвольной функции $f(\theta)$ переменной $\theta$ по $x$, $y$ и $t$:

$$\frac{\partial f(\theta)}{\partial y}=f'(\theta)\frac{\sqrt{c^2-\theta^2}}{\delta'};\quad \frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial x^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[f'(\theta)\frac{\theta^2}{\delta'}\right];$$

$$\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial x\partial y}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[f'(\theta)\frac{\theta\sqrt{c^2-\theta^2}}{\delta'}\right];\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[f'(\theta)\frac{c^2-\theta^2}{\delta'}\right];$$

$$\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial t^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[f'(\theta)\frac{1}{\delta'}\right],$$

где $\delta'=\frac{\partial\delta}{\partial\theta}=-x+\frac{\theta}{\sqrt{c^2-\theta^2}}y.$

Применяя эти формулы к случаю уравнения (89), получаем для функции $\Phi(\theta_1)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi(\theta_1)}{\partial\rho\partial z}&=\frac{1}{\delta_1'}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left[\Phi'(\theta_1)\frac{\theta_1\sqrt{a^2-\theta_1^2}}{\delta_1'}\right]\cos\lambda,\\
\frac{\partial^2\Phi(\theta_1)}{\partial z^2}&=\frac{1}{\delta_1'}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left[\Phi'(\theta_1)\frac{a^2-\theta_1^2}{\delta_1'}\right],\\
\frac{\partial^2\Phi(\theta_1)}{\partial t^2}&=\frac{1}{\delta_1'}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left[\Phi'(\theta_1)\frac{1}{\delta_1'}\right],
\end{aligned}\tag{91}$$

и для функции $\Psi(\theta_2)$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Psi(\theta_2)}{\partial z}=\Psi'(\theta_2)\frac{\sqrt{b^2-\theta_2^2}}{\delta_2'};\quad \frac{\partial^2\Psi(\theta_2)}{\partial\rho\partial z}=\frac{1}{\delta_2'}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left[\Psi'(\theta_2)\frac{\theta_2\sqrt{b^2-\theta_2^2}}{\delta_2'}\right]\cos\lambda;\\
&\frac{\partial^2\Psi(\theta_2)}{\partial z^2}=\frac{1}{\delta_2'}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left[\Psi'(\theta_2)\frac{b^2-\theta_2^2}{\delta_2'}\right];\quad \frac{\partial^2\Psi(\theta_2)}{\partial t^2}=\frac{1}{\delta_2'}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left[\Psi'(\theta_2)\frac{1}{\delta_2'}\right].
\end{aligned}\tag{92}$$

Обозначим через $T_{\rho z}^{(1)}$, $T_{zz}^{(1)}$ те части напряжения, которые порождены потенциалом $\varphi$, и через $T_{\rho z}^{(2)}$, $T_{zz}^{(2)}$ — те, что порождены потенциалом $\psi$. В силу (88), (90) и (91) мы имеем

$$\frac{1}{\mu}T_{\rho z}^{(1)}=\int_0^\pi\frac{1}{\delta_1'}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left[\Phi'(\theta_1)\frac{2\theta_1\sqrt{a^2-\theta_1^2}}{\delta_1'}\right]\cos\lambda d\lambda,$$

$$\frac{1}{\mu}T_{zz}^{(1)}=\int_0^\pi\frac{1}{\delta_1'}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left[\Phi'(\theta_1)\frac{b^2-2a^2}{\delta_1'}\right]d\lambda+\int_0^\pi\frac{1}{\delta_1'}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left[\Phi'(\theta_1)\frac{2a^2-2\theta_1^2}{\delta_1'}\right]d\lambda,$$

или

$$\frac{1}{\mu}T_{\rho z}^{(1)}=\int_0^\pi\frac{1}{\delta_1'}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left[\Phi'(\theta_1)\frac{2\theta_1\sqrt{a^2-\theta_1^2}}{\delta_1'}\right]\cos\lambda d\lambda,\tag{93}$$

$$\frac{1}{\mu} T_{zz}^{(1)} = \int_0^{\pi} \frac{1}{\delta_1'} \frac{\partial}{\partial\theta_1} \left[ \Phi'(\theta_1) \frac{b^2 - 2\theta_1^2}{\delta_1'} \right] d\lambda.$$

Аналогично, используя (88), (90), (92), получаем

$$\frac{1}{\mu} T_{\rho z}^{(2)} = \int_0^{\pi} \frac{1}{\delta_2'} \frac{\partial}{\partial\theta_2} \left[ \Psi'(\theta_2) \frac{b^2}{\delta_2'} \right] \cos\lambda d\lambda - \int_0^{\pi} \frac{1}{\delta_2'} \frac{\partial}{\partial\theta_2} \left[ \Psi'(\theta_2) \frac{2b^2 - 2\theta_2^2}{\delta_2'} \right] \cos\lambda d\lambda,$$

или

$$\frac{1}{\mu} T_{\rho z}^{(2)} = \int_0^{\pi} \frac{1}{\delta_2'} \frac{\partial}{\partial\theta_2} \left[ \Psi'(\theta_2) \frac{2\theta_2^2 - b^2}{\delta_2'} \right] \cos\lambda d\lambda \tag{94}$$

и

$$\frac{1}{\mu} T_{zz}^{(2)} = \int_0^{\pi} \frac{1}{\delta_2'} \frac{\partial}{\partial\theta_2} \left[ \Psi'(\theta_2) \frac{2\theta_2 \sqrt{b^2 - \theta_2^2}}{\delta_2'} \right] \cos^2\lambda d\lambda + \\ + \frac{2}{\rho} \int_0^{\pi} \Psi_2'(\theta_2) \frac{\sqrt{b^2 - \theta_2^2}}{\delta_2'} \cos\lambda d\lambda. \tag{95}$$

Интегрируя второй интеграл по частям и учитывая, что

$$\delta_2' = -\rho\cos\lambda + \frac{\theta_2}{\sqrt{b^2 - \theta_2^2}} z$$

зависит от $\lambda$ через $\cos\lambda$ и через зависимсть $\theta_2$ от $\lambda$, получаем

$$\frac{2}{\rho} \int_0^{\pi} \Psi'(\theta_2) \frac{\sqrt{b^2 - \theta_2^2}}{\delta_2'} \cos\lambda d\lambda = \frac{2}{\rho} \int_0^{\pi} \sin\lambda \Psi'(\theta_2) \frac{\sqrt{b^2 - \theta_2^2}}{(\delta_2')^2} \sin\lambda d\lambda - \\ - \frac{2}{\rho} \int_0^{\pi} \sin\lambda \frac{\partial}{\partial\theta_2} \left[ \Psi'(\theta_2) \frac{\sqrt{b^2 - \theta_2^2}}{\delta_2'} \right] \frac{\partial\theta_2}{\partial\lambda} d\lambda.$$

Но очевидно

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial\lambda} = -\frac{\theta_2 \rho \sin\lambda}{\delta_2'},$$

и, следовательно,

$$\frac{2}{\rho} \int_0^{\pi} \Psi'(\theta_2) \frac{\sqrt{b^2 - \theta_2^2}}{\delta_2'} \cos\lambda d\lambda = 2 \int_0^{\pi} \left\{ \frac{\theta_2}{\delta_2'} \frac{\partial}{\partial\theta_2} \left[ \Psi'(\theta_2) \frac{\sqrt{b^2 - \theta_2^2}}{\delta_2'} \right] + \\ + \frac{1}{\delta_2'} \Psi'(\theta_2) \frac{\sqrt{b^2 - \theta_2^2}}{\delta_2'} \right\} \sin^2\lambda d\lambda = \\ = \int_0^{\pi} \frac{2}{\delta_2'} \frac{\partial}{\partial\theta_2} \left[ \Psi'(\theta_2) \frac{\theta_2 \sqrt{b^2 - \theta_2^2}}{\delta_2'} \right] \sin^2\lambda d\lambda.$$

Подставляя это выражение в равенство (95), мы получаем

$$\frac{1}{\mu} T_{zz}^{(2)} = \int_0^{\pi} \frac{1}{\delta_2'} \frac{\partial}{\partial\theta_2} \left[ \Psi'(\theta_2) \frac{2\theta_2 \sqrt{b^2 - \theta_2^2}}{\delta_2'} \right] d\lambda, \tag{96}$$

и формулы (93), (94) и (96) дают нам следующие выражения для напряжения внутри полупространства:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\mu} T_{\rho z} = \int_0^{\pi} \Bigg\{ \frac{1}{\delta_1'} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left[ \Phi'(\theta_1) \frac{2\theta_1 \sqrt{a^2-\theta_1^2}}{\delta_1'} \right] + \\ + \frac{1}{\delta_2'} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left[ \Psi'(\theta_2) \frac{2\theta_2^2 - b^2}{\delta_2'} \right] \Bigg\} \cos \lambda d\lambda, \\ \frac{1}{\mu} T_{zz} = \int_0^{\pi} \Bigg\{ \frac{1}{\delta_1'} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left[ \Phi'(\theta_1) \frac{b^2 - 2\theta_1^2}{\delta_1'} \right] + \\ + \frac{1}{\delta_2'} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left[ \Psi'(\theta_2) \frac{2\theta_2 \sqrt{b^2-\theta_2^2}}{\delta_2'} \right] \Bigg\} d\lambda,\end{aligned}\right\} \quad (97)$$

где

$$\delta_1' = \frac{\theta_1 z - \sqrt{a^2-\theta_1^2}\, \rho \cos \lambda}{\sqrt{a^2-\theta_1^2}}, \quad \delta_2' = \frac{\theta_2 z - \sqrt{b^2-\theta_2^2}\, \rho \cos \lambda}{\sqrt{b^2-\theta_2^2}}. \quad (98)$$

Получим теперь выражения для пределов (97) при $z \to 0$, т. е. выражения для напряжений на поверхности $z = 0$. Рассмотрим, например, первую часть выражения для $T_{zz}$:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\delta_1'} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left[ \Phi'(\theta_1) \frac{b^2 - 2\theta_1^2}{\delta_1'} \right] d\lambda. \quad (99)$$

Введем вместо $\lambda$ новую переменную интегрирования $\theta_1$. Тогда первое из уравнений (89) показывает, что

$$\cos \lambda = \frac{t - \sqrt{a^2-\theta_1^2}\, z}{\rho \theta_1}, \quad \lambda = \arccos \frac{t - \sqrt{a^2-\theta_1^2}\, z}{\rho \theta_1} = \\ = \arccos \frac{1 - \sqrt{a^2-\theta_1^2}\, \eta}{\xi \theta_1},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}d\lambda = \pm \frac{a^2 z - t\sqrt{a^2-\theta_1^2}}{\theta_1 \sqrt{a^2-\theta_1^2}} \frac{1}{\sqrt{\rho^2\theta_1^2 - (t - \sqrt{a^2-\theta_1^2}\, z)^2}} d\theta_1 = \\ = \pm \frac{a^2 \eta - \sqrt{a^2-\theta_1^2}}{\theta_1 \sqrt{a^2-\theta_1^2}} \frac{1}{\sqrt{\xi^2\theta_1^2 - (1 - \sqrt{a^2-\theta_1^2}\, \eta)^2}} d\theta_1.\end{aligned}\right\} \quad (100)$$

Выражение $\xi^2\theta_1^2 - (1 - \sqrt{a^2-\theta_1^2}\eta)^2$, если ввести вместо $\theta_1$ переменную $w = \sqrt{a^2-\theta_1^2}$, переходит в $-(\xi^2 + \eta^2) w_1^2 - 2\eta w_1 + (a^2\xi^2 - 1)$, имеющее корни вида

$$w = \frac{\eta \pm i\xi \sqrt{1 - a^2(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2} = \frac{zt \pm i\rho \sqrt{t^2 - a^2(\rho^2+z^2)}}{\rho^2+z^2}.$$

Аналогично выражение $\xi^2\theta_1^2 - (1 - \sqrt{a^2 - \theta_1^2}\,\eta)^2$ имеет корни

$$\theta = \frac{\xi + i\eta\sqrt{1 - a^2(\xi^2 + \eta^2)}}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \theta^* = \frac{-\xi + i\eta\sqrt{1 - a^2(\xi^2 + \eta^2)}}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Это немедленно вытекает из равенства $w = \sqrt{a^2 - \theta^2}$, устанавливающего соответствие между верхней полуплоскостью переменной $\theta$ и областью $S_1$ переменной $w$. Точки $\theta$ и $\theta^*$ являются точками ветвления выражения (100) в верхней полуплоскости, и мы выберем разрезы таким образом, чтобы из точек $\theta$ и $\theta^*$ они шли на бесконечность вдоль вещественной оси, не пересекая мнимой оси. Для $\theta_1$ мы имеем

$$\theta_1 = \frac{\xi\cos\lambda + i\eta\sqrt{1 - a^2(\xi^2\cos^2\lambda + \eta^2)}}{\xi^2\cos^2\lambda + \eta^2}. \tag{101}$$

Полагая $\lambda = \pi/2$, получаем

$$\theta_1^{(0)} = i\,\frac{\sqrt{1 - a^2\eta^2}}{\eta}, \quad \sqrt{a^2 - \theta_1^{(0)^2}} = \frac{1}{\eta},$$

так что для такого $\lambda$ $d\theta_1$ вещественно и отрицательно при $\xi > 0$ и положительно при $\xi < 0$. Из формулы (100)

$$d\lambda = \frac{a^2\eta - 1/\eta}{i\,\dfrac{\sqrt{1 - a^2\eta^2}}{\eta}} \cdot \frac{d\theta_1}{\sqrt{\xi^2\theta_1^{(0)^2} - (1 - \sqrt{a^2 - \theta_1^{(0)^2}}\,\eta)^2}}.$$

Разность $a^2\eta - 1/\eta$ отрицательна, и мы должны положить корень

$$\sqrt{\xi^2\theta_1^{(0)^2} - (1 - \sqrt{a^2 - \theta_1^{(0)^2}}\,\eta)^2}$$

мнимым с отрицательной мнимой частью при $\xi > 0$ и с положительной мнимой частью при $\xi < 0$.

Это правило очевидно должно сохраняться для корня

$$\sqrt{\xi^2\theta_1^2 - (1 - \sqrt{a^2 - \theta_1^2}\,\eta)^2}$$

при мнимых $\theta_1$, с положительной мнимой частью. Тогда интеграл (99) примет вид

$$\int_{l_\theta} \frac{1}{\delta_1'}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left[\Phi'(\theta_1)\frac{b^2 - 2\theta_1^2}{\delta_1'}\right]\frac{a^2\eta - \sqrt{a^2 - \theta_1^2}}{\theta_1\sqrt{a^2 - \theta_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi^2\theta_1^2 - (1 - \sqrt{a^2 - \theta_1^2}\,\eta)^2}}\,d\theta_1, \tag{102}$$

где контур $l_\theta$ идет от точки $\theta$ к точке $\theta^*$. На плоскости $w$ этому контуру соответствует контур $l_w$, описанный выше. Отметим, наконец, что $\delta_1'$ задается формулой

$$\delta_1' = \frac{\theta_1 z - \sqrt{a^2-\theta_1^2}\,\rho\cos\lambda}{\sqrt{a^2-\theta_1^2}} = \frac{\theta_1 z - \rho\sqrt{a^2-\theta_1^2}\,\dfrac{t-\sqrt{a^2-\theta_1^2}\,z}{\rho\theta}}{\sqrt{a^2-\theta_1^2}} =$$

$$= \frac{a^2 z - t\sqrt{a^2-\theta_1^2}}{\theta_1\sqrt{a^2-\theta_1^2}},$$

причем эта функция не обращается в нуль в верхней полуплоскости, и, следовательно, выражение под знаком интеграла в (102) является функцией, голоморфной выше прямой $\theta\theta^*$. Таким образом, мы можем в силу теоремы Коши продеформировать контур интегрирования $l_\theta$, взяв его, к примеру, в виде верхней части полуокружности, для которой отрезок $\theta\theta^*$ представляет собой диаметр. Устремляя $z$ к нулю, мы получаем

$$\eta \to 0,\ \delta_1' \to -1/\theta_1,\ \theta \to 1/\xi,\ \theta^* \to -1/\xi,\ \cos\lambda \to t/(\rho\theta_1),$$

так что выражение (102) переходит в выражение

$$-\frac{1}{t^2}\int_{1/\xi}^{-1/\xi} \frac{\partial}{\partial\theta_1}\left[\Phi'(\theta_1)\,\theta_1\,(b^2-2\theta_1^2)\right]\frac{d\theta_1}{\sqrt{\xi^2\theta_1^2-1}},$$

где корень $\sqrt{\xi^2\theta_1^2-1}$ мнимый с отрицательной мнимой частью, если $\xi > 0$ и $\theta_1$ находится на положительной мнимой полуоси, и с положительной мнимой частью, если $\xi < 0$.

Аналогично для второй части выражения $T_{zz}$ мы имеем предел при $z \to 0$:

$$-\frac{1}{t^2}\int_{1/\xi}^{-1/\xi} \frac{\partial}{\partial\theta_2}\left[\Psi'(\theta_2)\,2\theta_2^2\sqrt{b^2-\theta_2^2}\right]\frac{\partial\theta_2}{\sqrt{\xi^2\theta_2^2-1}},$$

и, обозначая переменные интегрирования единым символом $\theta_1$, получим

$$-\frac{1}{\mu}T_{zz} = \frac{1}{t^2}\int_{1/\xi}^{-1/\xi}\frac{\omega_1(\theta_1)\,d\theta_1}{\sqrt{\xi^2\theta_1^2-1}},$$

где

$$\omega_1(\theta_1) = \frac{\partial}{\partial\theta_1}\left[\Phi'(\theta_1)\,\theta_1\,(b^2-2\theta_1^2) + \Psi'(\theta_1)\,2\theta_1^2\sqrt{b^2-\theta_1^2}\right]. \quad (103)$$

Для напряжения $T_{\rho z}$ мы получаем

$$-\frac{1}{\mu}T_{\rho z} = \frac{1}{t\rho}\int_{1/\xi}^{-1/\xi}\frac{\omega_2(\theta_1)\,d\theta_1}{\theta_1\sqrt{\xi^2\theta_1^2-1}},$$

где

$$\omega_2(\theta_1) = \frac{\partial}{\partial\theta_1}\left[\Phi'(\theta_1)\,2\theta_1^2\sqrt{a^2-\theta_1^2} + \Psi'(\theta_1)\,\theta_1\,(2\theta_1^2-b^2)\right]. \quad (104)$$

Граничные условия на поверхности $z=0$ приводят к соотношениям

$$\int_{1/\xi}^{-1/\xi} \frac{\omega_1(\theta_1)\, d\theta_1}{\sqrt{\xi^2\theta_1^2 - 1}} = 0, \quad \int_{1/\xi}^{-1/\xi} \frac{\omega_2(\theta_1)\, d\theta_1}{\theta_1 \sqrt{\xi^2\theta_1^2 - 1}} = 0. \qquad (105)$$

В плоском случае проблемы М. Lamb'а, как мы показали в нашей предыдущей работе, фронт продольной волны представляет собой окружность $x^2 + y^2 = \frac{1}{a^2} t^2$, а фронт поперечной волны — некоторую дугу окружности $x^2 + y^2 = \frac{1}{b^2} t^2$, симметричную относительно оси $y$, и пару отрезков, касательных к этой окружности в точках конца дуги. Это показывает, что в настоящем случае потенциал $\varphi(\xi, \eta)$ обращается в нуль всюду на полуокружности

$$\xi^2 + \eta^2 = 1/a^2 \quad (\eta > 0),$$

а потенциал $\psi(\xi, \eta)$ — на дуге полуокружности

$$\xi^2 + \eta^2 = 1/b^2 \quad (\eta > 0),$$

симметричной относительно оси $\xi = 0$. Однако, как мы показали в п. 6, функция $\Phi(w)$ в этом случае имеет корень $w = -a$ и может быть представлена в окрестности этой точки в виде

$$\Phi(w) = \alpha_1 (w + a) + \alpha_2 (w + a)^2 + \ldots,$$

а функция $\Psi(w)$ может быть представлена в окрестности точки $w = -b$ в виде (п. 9)

$$\Psi(w) = \sqrt{b^2 - w^2}\, [\beta_1(w + b) + \beta_2 (w + b)^2 + \ldots].$$

Вводя вместо $w$ новую переменную $\theta$:

$$w = \sqrt{a^2 - \theta^2}, \quad w + a = \gamma_2\theta^2 + \gamma_4\theta^4 + \ldots,$$

мы получаем в окрестности $\theta = 0$ следующее выражение для $\Phi(\theta)$:

$$\Phi(\theta) = \alpha_2'\theta^2 + \alpha_4'\theta^4 + \ldots,$$

и аналогично, вводя для $\Psi(w)$ имеем

$$w = \sqrt{b^2 - \theta^2},$$

$$\Psi(\theta) = \beta_3'\theta^3 + \beta_5'\theta^5 + \ldots$$

Тогда из формул (103) и (104) вытекает, что

$$\begin{aligned}\omega_1(\theta) &= \alpha_1''\theta + \alpha_3''\theta^3 + \ldots,\\ \omega_2(\theta) &= \beta_2''\theta^2 + \beta_4''\theta^4 + \ldots,\end{aligned} \tag{106}$$

причем мы предполагаем, что эти функции не имеют сингулярностей на конечных расстояниях.

По условию мнимая часть функции $\Phi(\theta)$ и вещественная часть функции $\Psi(\theta)$ должны обращаться в нуль на мнимой оси, откуда в силу (103) и (104) вещественная часть $\omega_1(\theta_1)$ и мнимая часть $\omega_2(\theta_1)$ должны обращаться в нуль на мнимой оси. Поэтому коэффициенты $\alpha_n''$ и $\beta_n''$ должны быть вещественными. Граничные условия (105) тогда очевидно выполняются. При подстановке выражений (106) в формулы (103) и (104) мы получаем следующие уравнения для $\Phi'(\theta)$ и $\Psi'(\theta)$:

$$(b^2 - 2\theta^2)\,\Phi'(\theta) + 2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}\,\Psi'(\theta) = \omega_3(\theta),$$

$$2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}\,\Phi'(\theta) - (b^2 - 2\theta^2)\,\Psi'(\theta) = \omega_4(\theta),$$

где

$$\omega_3(\theta) = \frac{1}{2}\alpha_1''\theta + \frac{1}{4}\alpha_3''\theta^3 + \ldots;\ \omega_4(\theta) = \frac{1}{3}\beta_2''\theta^2 + \frac{1}{5}\beta_4''\theta^4 + \ldots \tag{107}$$

Из предыдущих равенств вытекает, что

$$\begin{aligned}\Phi'(\theta) &= \frac{(b^2-2\theta^2)\,\omega_3(\theta) + 2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}\,\omega_4(\theta)}{F(\theta)},\\ \Psi'(\theta) &= \frac{2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}\,\omega_3(\theta) - (b^2-2\theta^2)\,\omega_4(\theta)}{F(\theta)},\end{aligned} \tag{108}$$

где

$$F(\theta) = (b^2 - 2\theta^2)^2 + 4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\sqrt{b^2-\theta^2}. \tag{109}$$

Функции $\Phi'(\theta)$ и $\Psi'(\theta)$ имеют полюса в точках, где $F(\theta)$ обращается в нуль. Эти точки соответствуют, как мы показали в нашей предыдущей работе, волнам Rayleigh'а. Кроме того, функции (108) имеют особенность в точке $\theta = \infty$, которая соответствует $\xi = \eta = 0$, т. е. точке приложения силы. Потребуем, чтобы эта точка являлась полюсом, причем порядок этого полюса постараемся сделать возможно малым. Уравнения (107) и (108) показывают, что для этого необходимо потребовать

$$\omega_4(\theta) = 0;\ \alpha_3'' = \alpha_5'' = \ldots = 0.$$

Число $(1/2)\alpha_1''$ является вещественным. Обозначая его через $\beta$, получим

$$\Phi'(\theta)=\beta\frac{\theta(b^2-2\theta^2)}{F(\theta)},\quad \Psi'(\theta)=\beta\frac{2\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}}{F(\theta)}. \tag{110}$$

**14.** Получим выражения для компонент вектора смещений $q$ и $w$. Потенциалы выражаются формулами

$$\varphi=\int_0^\pi\Phi(\theta_1)\,d\lambda,\qquad \psi=\int_0^\pi\Psi(\theta_2)\cos\lambda d\lambda, \tag{111}$$

где $\theta_1$ и $\theta_2$ определяются из уравнений

$$\begin{gathered}\delta_1\equiv t-\theta_1\rho\cos\lambda-\sqrt{a^2-\theta_1^2}z=0,\\ \delta_2\equiv t-\theta_2\rho\cos\lambda-\sqrt{b^2-\theta_1^2}\,z=0.\end{gathered} \tag{112}$$

В силу формул (1) мы имеем

$$q=\int_0^\pi\Phi'(\theta_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho}d\lambda-\int_0^\pi\Psi'(\theta_2)\frac{\partial\theta_2}{\partial z}\cos\lambda d\lambda,$$

$$w=\int_0^\pi\Phi'(\theta_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\,d\lambda+\int_0^\pi\Psi'(\theta_2)\frac{\partial\theta_2}{\partial\rho}\cos\lambda d\lambda+\frac{1}{\rho}\int_0^\pi\Psi(\theta_2)\cos\lambda d\lambda.$$

Интегрируя по частям последний из интегралов, мы получаем

$$w=\int_0^\pi\Phi'(\theta_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial z}d\lambda+\int_0^\pi\Psi'(\theta_2)\frac{\partial\theta_2}{\partial\rho}\cos\lambda d\lambda-\frac{1}{\rho}\int_0^\pi\Psi'(\theta_2)\frac{\partial\theta_2}{\partial\lambda}\sin\lambda d\lambda.$$

Используя (112), мы получаем следующие равенства для производных:

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial t}=-\frac{1}{\delta_1'},\quad \frac{\partial\theta_1}{\partial\rho}=\frac{\theta_1\cos\lambda}{\delta_1'}=-\theta_1\cos\lambda\frac{\partial\theta_1}{\partial t},$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial z}=\frac{\sqrt{a^2-\theta_1^2}}{\delta_1'}=-\sqrt{a^2-\theta_1^2}\,\frac{\partial\theta_1}{\partial t},$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial t}=-\frac{1}{\delta_2'},\quad \frac{\partial\theta_2}{\partial\rho}=-\theta_2\cos\lambda\frac{\partial\theta_2}{\partial t},\quad \frac{\partial\theta_2}{\partial z}=-\sqrt{b^2-\theta_2^2}\frac{\partial\theta_2}{\partial t},$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial\lambda}=-\frac{\theta_2\rho\sin\lambda}{\delta_2'}=\theta_2\rho\sin\lambda\frac{\partial\theta_2}{\partial t}.$$

Подставляя эти выражения в интегралы, определяющие $q$ и $w$, находим

$$q=\int_0^\pi\left[-\theta_1\Phi'(\theta_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial t}+\sqrt{b^2-\theta_2^2}\Psi'(\theta_2)\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\right]\cos\lambda d\lambda,$$

$$w=\int_0^{\pi}\left[-\sqrt{a^2-\theta_1^2}\,\Phi'(\theta_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial t}-\theta_2\Psi'(\theta_2)\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\right]d\lambda,$$

или в силу (110)

$$q=\beta\int_0^{\pi}\left[\frac{\theta_1^2(2\theta_1^2-b^2)}{F(\theta_1)}\frac{\partial\theta_1}{\partial t}+\frac{2\theta_2^2\sqrt{a^2-\theta_2^2}\sqrt{b^2-\theta_2^2}}{F(\theta_2)}\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\right]\cos\lambda d\lambda,$$

$$w=\beta\int_0^{\pi}\left[\frac{\theta_1(2\theta_1^2-b^2)\sqrt{a^2-\theta_1^2}}{F(\theta_1)}\frac{\partial\theta_1}{\partial t}-\frac{2\theta_2^3\sqrt{a^2-\theta_2^2}}{F(\theta_2)}\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\right]d\lambda. \qquad (113)$$

Чтобы определить $\beta$, надо связать ее с величиной силы, приложенной к точке $\rho=z=0$. Пусть $P$ — значение этой силы. Вычислим асимптотику $w$ и $q$ при $t\to\infty$. Переходя к пределу, мы должны получить компоненты вектора смещений для статической задачи, в которой вертикальная сила $P$ приложена к точке $\rho=z=0$ полупространства $z>0$. Решение этой проблемы статики известно (Love. Lehrbuch der Elastizität, 1907, p. 206):

$$q=u\cos\vartheta+v\sin\vartheta=\frac{P}{4\pi\mu}\left\{\frac{\rho z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}+\frac{a^2}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{z}{\rho\sqrt{\rho^2+z^2}}\right)\right\},$$

$$w=\frac{P}{4\pi\mu}\left(\frac{z^2}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}-\frac{b^2}{a^2-b^2}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right). \qquad (114)$$

Разложим теперь выражения под знаками интегралов в (113) в ряды по степеням $1/t$. В силу уравнения для $\theta_1$

$$t-\theta_1\rho\cos\lambda-\sqrt{a^2-\theta_1^2}\,z=0 \qquad (115)$$

мы получаем в окрестности $t=\infty$ следующее разложение:

$$\theta_1=c_1t+c_0+c_{-1}\frac{1}{t}+\ldots;\quad \frac{\partial\theta_1}{\partial t}=c_1-c_{-1}\frac{1}{t^2}-\ldots \qquad (116)$$

Уравнение (115) можно записать в виде

$$t-\theta_1\rho\cos\lambda+i\theta_1(1-a^2/\theta_1^2)^{1/2}z=0$$

или
$$t-\theta_1\rho\cos\lambda+i\theta_1z-i\frac{a^2z}{2\theta_1}-i\frac{a^4z}{8\theta_1^3}-\ldots=0,$$

и, подставляя в это уравнение разложение (116), мы можем получить следующее равенство:

$$t-\left(\rho\cos\lambda-iz\right)\left(c_1t+c_0+c_{-1}\frac{1}{t}+\ldots\right)-$$
$$-i\frac{a^2z}{2c_1t}\left[1+\left(\frac{c_0}{c_1t}+\frac{c_{-1}}{c_1t^2}+\ldots\right)\right]^{-1}+\ldots=0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $t$, $t^0$ и $t^{-1}$, мы получаем

$$c_1 = 1/(\rho\cos\lambda - iz),\ c_0 = 0,\ c_{-1} = -a^2z/2. \tag{117}$$

Разложим функцию

$$\frac{\theta_1^2(2\theta_1^2-b^2)}{(b^2-2\theta_1^2)^2+4\theta_1^2\sqrt{a^2-\theta_1^2}\sqrt{b^2-\theta_1^2}}$$

в ряд по степеням $\theta_1$ или $t$ в окрестности $\theta_1=\infty$ или $t=\infty$:

$$\frac{\theta_1^2(2\theta_1^2-b^2)}{(b^2-2\theta_1^2)^2+4\theta_1^2\sqrt{a^2-\theta_1^2}\sqrt{b^2-\theta_1^2}} = \frac{2\theta_1^4-b^2\theta_1^2}{(2a^2-2b^2)\theta_1^2+[(b^2-a^2)^2/2+b^4]+\ldots} =$$

$$= \frac{\theta_1^2}{a^2-b^2}+\frac{a^4+b^4}{4(a^2-b^2)^2}+\ldots = \frac{c_1^2}{a^2-b^2}t^2+\left[\frac{2c_1c_{-1}}{a^2-b^2}-\frac{a^4+b^4}{(a^2-b^2)^2}\right]+\ldots,$$

откуда

$$\frac{\theta_1^2(2\theta_1^2-b^2)}{F(\theta_1)}\frac{\partial\theta_1}{\partial t} = \frac{c_1^3}{a^2-b^2}t^2+\left[-\frac{c_1^2c_{-1}}{a^2-b^2}+\frac{2c_1^2c_{-1}}{a^2-b^2}-\frac{a^4+b^4}{4(a^2-b^2)^2}\right]+\ldots$$

Аналогично

$$\theta_2 = d_1t+d_0+d_{-1}\frac{1}{t}+\ldots,\quad \frac{\partial\theta_2}{\partial t} = d_1-d_{-1}\frac{1}{t^2}-\ldots,$$

где

$$d_1 = \frac{1}{\rho\cos\lambda - iz}, \tag{118}$$

и

$$\frac{2\theta_2^2\sqrt{a^2-\theta_2^2}\sqrt{b^2-\theta_2^2}}{F(\theta_2)} = \frac{1}{2}-\frac{(b^2-2\theta_2^2)^2}{2F(\theta_2)} =$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{4\theta_2^4-4b^2\theta_2^2+b^4}{2(2a^2-2b^2)\theta_2^2+[(b^2-a^2)^2+2b^4]+\ldots} = -\frac{1}{a^2-b^2}\theta_2^2+$$

$$+\frac{b^4-2a^2b^2+3a^4}{4(a^2-b^2)^2}+\ldots = -\frac{d_1^2}{a^2-b^2}t^2+\left[-\frac{2d_1d_{-1}}{a^2-b^2}+\frac{b^4-2a^2b^2+3a^4}{4(a^2-b^2)^2}\right]+\ldots,$$

откуда

$$\frac{2\theta_2^2\sqrt{a^2-\theta_2^2}\sqrt{b^2-\theta_2^2}}{F(\theta_2)}\frac{\partial\theta_2}{\partial t} = -\frac{d_1^3}{a^2-b^2}t^2+$$

$$+\left[\frac{d_1^2d_{-1}}{a^2-b^2}-\frac{2d_1^2d_{-1}}{a^2-b^2}+\frac{d_1(b^4-2a^2b^2+3a^4)}{4(a^2-b^2)^2}\right]+\ldots$$

Подставляя выражения (117) и (118) для $c_1$, $c_{-1}$ и $d_1$, $d_{-1}$, мы получаем

$$\frac{\theta_1^2(2\theta_1^2-b^2)}{F(\theta_1)}\frac{\partial\theta_1}{\partial t}+\frac{2\theta_2^2\sqrt{a^2-\theta_2^2}\sqrt{b^2-\theta_2^2}}{F(\theta_2)}\frac{\partial\theta_2}{\partial t} = \frac{c_1^2c_{-1}+d_1^2d_{-1}}{a^2-b^2}+$$

$$+\frac{2a^4-2a^2b^2}{4(a^2-b^2)^2}c_1+\ldots=-\frac{iz}{2(\rho\cos\lambda-iz)^2}+\frac{a^2}{2(a^2-b^2)(\rho\cos\lambda-iz)}+\ldots=$$
$$=\frac{a^2\rho\cos\lambda-iz(2a^2-b^2)}{2(a^2-b^2)(\rho\cos\lambda-iz)^2}+\ldots,$$

где невыписанные члены имеют порядок $1/t$. Следовательно, в силу первой из формул (113) мы имеем

$$q\,|_{t=\infty}=\beta\int_0^\pi\frac{a^2\rho\cos\lambda-iz(2a^2-b^2)}{2(a^2-b^2)(\rho\cos\lambda-iz)^2}\cos\lambda d\lambda.$$

Аналогичные вычисления показывают, что

$$w\,|_{t=\infty}=\beta\int_0^\pi\frac{ib^2\rho\cos\lambda-z(a^2-2b^2)}{2(a^2-b^2)(\rho\cos\lambda-iz)^2}\,d\lambda.$$

Интегрируя по $\lambda$, мы получаем

$$q\,|_{t=\infty}=\frac{\pi\beta}{2}\left[\frac{\rho z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}+\frac{a^2}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{z}{\rho\sqrt{\rho^2+z^2}}\right)\right],$$
$$w\,|_{t=\infty}=\frac{\pi\beta}{2}\left[\frac{z^2}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}-\frac{b^2}{a^2-b^2}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right].$$

Используя формулы (114), мы можем определить постоянную $\beta$:

$$\beta=P/(2\pi^2\mu). \tag{119}$$

Подставляя это значение $\beta$ в формулы (113), мы получаем формулы, определяющие решение задачи M. Lamb'a.

Эти формулы для точек на поверхности $z=0$ приведены в указанной работе M. Lamb'a, и для общего случая, когда $z$ произвольно, такие формулы получены с помощью метода, отличного от метода настоящей работы, в работе С. Л. Соболева [1].

### Литература

1. С. Л. Соболев. Применение теории плоских волн к задаче M. Lamb'a.// Труды Сейсмол. ин-та АН СССР. 1948. № 18.

## О СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЯХ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЙ УПРУГОСТИ*

1. В работе С. Соболева и автора „О применении нового метода к изучению упругих колебаний в аксиально-симметричных средах" приводится новый метод построения класса реше-

* Sur les solutions singulières de l'équation d'ondes et d'équations d'élasticité. — Труды Сейсмол. ин-та, vol. 78, 1936, p. 1—30.

ний волнового уравнения и уравнений теории упругости. В настоящей работе мы применим этот метод к построению фундаментальных сингулярных решений таких уравнений.

Опишем сначала некоторые результаты работы [1]. Начнем со случая волнового уравнения

$$a^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \Delta\varphi. \tag{1}$$

Вводя цилиндрические координаты ($\rho$, $z$, $\vartheta$) и учитывая, что функция $\varphi$ не зависит от угла $\vartheta$, мы можем записать уравнение (1) в виде

$$a^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \tag{2}$$

Здесь мы будем рассматривать решения этого уравнения, однородные степени нуль, т. е. решения, являющиеся функциями двух переменных

$$\xi = \rho/t, \quad \eta = z/t. \tag{3}$$

В этом случае уравнение (2) принимает вид

$$(a^2\xi^2 - 1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + 2a^2\xi\eta\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta} + (a^2\eta^2 - 1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + $$
$$+ 2a^2\left(\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) - \frac{1}{\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = 0. \tag{4}$$

В силу аксиальной симметрии $\varphi$ должна быть функцией, четной по $\rho$ или по $\xi$, т. е.

$$\varphi(-\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta), \tag{5}$$

так как замена $\rho$ на $(-\rho)$ эквивалентна замене $\vartheta$ на $(\vartheta + \pi)$. Как было показано в [1], такие решения внутри круга

$$\xi^2 + \eta^2 \leqslant 1/a^2 \tag{6}$$

могут быть представлены в виде

$$\varphi(\xi, \eta) = \int_0^\pi \Phi(w_1)\, d\lambda, \tag{7}$$

где $\Phi(w)$ — произвольная аналитическая функция, принимающая комплексно-сопряженные значения в комплексно-сопряженных $w$ и

$$w_1 = -\frac{\eta}{\xi^2\cos^2\lambda + \eta^2} - i\xi\cos\lambda\frac{\sqrt{1 - a^2(\xi^2\cos^2\lambda + \eta^2)}}{\xi^2\cos^2\lambda + \eta^2}. \tag{8}$$

Отметим, что формула

$$w = -\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2} - i\xi\frac{\sqrt{1-a^2(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2} \tag{9}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками круга (6) и точками комплексной плоскости $w$, причем кругу (6) соответствует плоскость $w$ с разрезом $(-a, +a)$ вдоль вещественной оси, окружности этого круга соответствует разрез $(-a, +a)$ и точке $\xi=\eta=0$ соответствует бесконечно удаленная точка $w=\infty$.

Известно [1], что интеграл (7) может быть представлен как интеграл вдоль некоторого контура $l_w$ на плоскости $w$, проходящей между точкой $w$, определяемой формулой (9), и точкой $\overline{w}$, где через $\overline{w}$ мы обозначили число, комплексно-сопряженное $w$.

Уравнение круга (6) можно записать в виде

$$\rho^2 + z^2 \leqslant t^2/a^2 \quad \text{или} \quad r \leqslant t^2/a^2,$$

так что этот круг представляет собой область, заполненную колебаниями, исходящими от источника, помещенного в начало координат $r=0$ и включенного в момент времени $t=0$, если $1/a$ — это скорость распространения этих колебаний. Окружность круга (6) соответствует фронту этих колебаний.

Мы будем рассматривать решения уравнения (4) с единственной сингулярной точкой $\xi=\eta=0$ в замкнутом круге (6). Эти решения будут использованы при построении сингулярных решений уравнений упругости. Известно, что таким решениям сопоставляются две аналитические функции $\Phi(w)$, которые в силу (9) соответствуют заданному решению $\varphi(\xi, \eta)$, причем одна из них — $\Phi_1(w)$ — отвечает решению в полукруге $\eta > 0$, а другая — $\Phi_2(w)$ — в полукруге $\eta < 0$. Функция $\Phi_1(w)$ должна быть регулярной слева от мнимой оси, а $\Phi_2(w)$ — справа от этой оси [1, п. 4]. Предположим, что $\Phi_1(w)$ и $\Phi_2(w)$ регулярны и на мнимой оси, которая соответствует диаметру $\eta=0$. Эти функции могут быть определены однозначно по функции $\varphi(\xi, \eta)$ по формулам [1, п. 4]:

$$\begin{aligned} \varphi(0, \eta) &= \pi\Phi_1\left(-\frac{1}{\eta}\right) \qquad \left(0 < \eta \leqslant \frac{1}{a}\right), \\ \varphi(0, \eta) &= \pi\Phi_2\left(-\frac{1}{\eta}\right) \qquad \left(-\frac{1}{a} \leqslant \eta < 0\right) \end{aligned} \tag{10}$$

или

$$\begin{aligned} \Phi_1(w) &= \frac{1}{\pi}\varphi\left(0, -\frac{1}{w}\right) \qquad (-\infty < w < -a), \\ \Phi_2(w) &= \frac{1}{\pi}\varphi\left(0, -\frac{1}{w}\right) \qquad (a < w < +\infty). \end{aligned} \tag{11}$$

Покажем теперь, что функции $\Phi_1$ и $\Phi_2$ связаны простым соотношением

$$\Phi_2(w) = -\Phi_1(w) + C, \tag{12}$$

где $C$ — вещественная постоянная. Для доказательства этого обратимся к формулам (32) и (34) работы [1] и запишем эти формулы в виде

$$\varphi(\xi_0, 0) = \frac{1}{\xi_0 i}\int_{-\beta i}^{+\beta i} \frac{\Phi_1(w)\, w dw}{(a^2 - w^2)\sqrt{w^2+\beta^2}} = -\frac{1}{\xi_0 i}\int_{-\beta i}^{+\beta i} \frac{\Phi_2(w)\, w dw}{(a^2 - w^2)\sqrt{w^2+\beta^2}}, \tag{13}$$

где

$$\beta = \frac{\sqrt{1 - a_0^2\xi_0^2}}{\xi_0},$$

причем интегрировать можно вдоль мнимой оси. Учитывая, что $\Phi_1(w)$ и $\Phi_2(w)$ принимают комплексно-сопряженные значения в точках, симметричных относительно вещественной оси, мы можем переписать предыдущее равенство в виде

$$\frac{1}{2}\xi_0\varphi(\xi_0, 0) = \int_0^{\beta i} \frac{J[\Phi_1(w)]\, w dw}{(a^2 - w^2)\sqrt{w^2+\beta^2}} = -\int_0^{\beta i} \frac{J[\Phi_2(w)]\, w dw}{(a^2 - w^2)\sqrt{w^2+\beta^2}},$$

где $J[a]$ — символ мнимой части комплексного числа $a$. Вводя новую переменную интегрирования $t = -iw$, получаем

$$\frac{1}{2}\xi_0\varphi(\xi_0, 0) = -\int_0^{\beta} \frac{J[\Phi_1(ti)]\, t dt}{(a^2+t^2)\sqrt{\beta^2 - t^2}} = \int_0^{\beta} \frac{J[\Phi_2(ti)]\, t dt}{(a^2+t^2)\sqrt{\beta^2 - t^2}}. \tag{14}$$

В силу (13) $\xi_0$ является функцией $\beta$; левая часть формулы (14) — заданная функция $\beta$, так что эта формула очевидно представляет собой два интегральных уравнения Абеля. Решая эти уравнения [1, п. 4], мы получаем для $-J[\Phi_1(ti)]$ и $J[\Phi_2(ti)]$ одинаковые выражения, т. е. на мнимой оси

$$J[\Phi_2(w)] = -J[\Phi_1(w)]. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь выражение для

$$\left.\frac{\partial\varphi(\xi, \eta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=0},$$

полученное в нашей предыдущей работе [1, п. 5]. Записывая третий член в этом выражении в виде

$$\frac{i(1 - a^2\xi^2)}{\xi^3}\int_{l_w} \sqrt{w^2+\beta^2}\,\Phi_1(w)\, d\frac{1}{w(a^2 - w^2)}$$

и интегрируя по частям, после несложных преобразований мы приходим к следующей формуле:

$$\left.\frac{\partial\varphi(\xi_0, \eta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} = \frac{i}{\xi_0}\int_{-\beta i}^{+\beta i}\frac{\Phi_1'(w)\,w\,dw}{\sqrt{w^2+\beta^2}} = -\frac{i}{\xi_0}\int_{-\beta i}^{+\beta i}\frac{\Phi_2'(w)\,w\,dw}{\sqrt{w^2+\beta^2}}.$$

Вводя новую переменную интегрирования $t = -iw$ и решая уравнения Абеля, мы получим, как и выше, что на мнимой оси

$$J[\Phi_2'(w)] = -J[\Phi_1'(w)].$$

Интегрируя вдоль мнимой оси, находим

$$R[\Phi_2(w)] = -R[\Phi_1(w)] + C, \tag{16}$$

где $C$ — вещественная постоянная. Из формул (15) и (16) вытекает, что аналитические функции $\Phi_2(w)$ и $-\Phi_1(w)+C$ принимают одинаковые значения на мнимой оси и согласно теории аналитических функций $\Phi_1(w)$ и $\Phi_2(w)$ аналитически продолжимы в правую и левую полуплоскости комплексной переменной $w$, причем равенство (12) имеет место на всей комплексной плоскости. Итак, функции $\Phi_1(w)$ и $\Phi_2(w)$ регулярны во всей комплексной плоскости, т. е. являются целыми функциями. Заметим, что сингулярная точка $w=\infty$ этих целых функций соответствует в силу (9) сингулярной точке $\xi=\eta=0$ функции $\varphi(\xi, \eta)$. Таким образом, можно утверждать, что, подставляя в формулу (7) на место $\Phi(w)$ целые функции, принимающие действительные значения на вещественной оси, мы получим решения $\varphi(\xi, \eta)$ с единственной сингулярной точкой $\xi = \eta = 0$.

Очевидно, достаточно построить решение $\varphi(\xi, \eta)$ при $\eta > 0$, так что всюду в дальнейшем мы будем писать $\Phi(w)$ вместо $\Phi_1(w)$. Если положить $\Phi(w) = C_1$, где $C_1$—постоянная, формула (7) определит тривиальное решение $\varphi(\xi, \eta) = \mathrm{const} = \pi C_1$. Известно также, что $\varphi(\xi, \eta)$ обращается в нуль на окружности круга (6), если функция $\Phi(w)$ удовлетворяет равенству

$$\Phi(-a) = 0. \tag{17}$$

В общем случае функция $\varphi(\xi, \eta)$ принимает на этой окружности постоянное значение $\pi\Phi(-a)$.

**2.** Построим теперь фундаментальные сингулярные решения, выбирая в качестве $\Phi(w)$ полиномы, удовлетворяющие условиям (17),

$$\frac{1}{\pi}[(-w)-a], \ \frac{1}{\pi}[w^2-a^2], \ \ldots, \ \frac{1}{\pi}[(-w)^m - a^m].$$

Тогда в силу (7) мы получаем следующие решения:

$$\varphi_m(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{(\eta + i\cos\lambda\xi\sqrt{1-a^2\tau})^m}{\tau^m} d\lambda - a^m \quad (m=1, 2, \ldots), \quad (18)$$

где положили для краткости

$$\tau = \xi^2\cos^2\lambda + \eta^2. \quad (19)$$

В дальнейших вычислениях мы будем использовать следующую элементарную формулу:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\lambda}{q + p\cos^2\lambda} = \frac{1}{\sqrt{q}\sqrt{p+q}}, \quad (20)$$

где $q > 0$, $p + q > 0$, $\sqrt{q} > 0$, $\sqrt{p+q} > 0$.

При $m = 1$ вследствие формул (18) и (20)

$$\varphi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} - a = \frac{t - ar}{r}, \quad (21)$$

где $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$.

Это известное решение М. Вольтерра.

Построим теперь порождающую функцию для решений $\varphi_m(\xi, \eta)$. Пусть $u$ — произвольный параметр. Имеем очевидно

$$\sum_{m=1}^\infty \varphi_m(\xi, \eta)u^m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\tau d\lambda}{(\tau - \eta u) - i\xi\cos\lambda\sqrt{1-a^2\tau}\,u} - \frac{1}{1-au} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\tau(\tau-\eta u)\,d\lambda}{(\tau-\eta u)^2 + \xi^2\cos^2\lambda(1-a^2\tau)u^2} - \frac{1}{1-au},$$

или в силу (19)

$$\sum_{m=1}^\infty \varphi_m(\xi, \eta)u^m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{(\xi^2\cos^2\lambda + \eta^2 - \eta u)\,d\lambda}{\xi^2(1-a^2u^2)\cos^2\lambda + (\eta-u)^2} - \frac{1}{1-au},$$

откуда, используя формулу (20),

$$\sum_{m=1}^\infty \varphi_m(\xi, \eta)u^m = \frac{1}{1-a^2u^2} + \frac{u(1-a^2\eta u)}{(1-a^2u^2)\sqrt{(1-a^2\xi^2)u^2 - 2\eta u + (\xi^2+\eta^2)}} - \frac{1}{1-au}.$$

Таким образом, в качестве порождающей функции для решений $\varphi(\xi, \eta)$ следует взять

$$\frac{-au}{1-a^2u^2} + \frac{u(1-a^2\eta u)}{(1-a^2u^2)\sqrt{(1-a^2\xi^2)u^2 - 2\eta u + (\xi^2+\eta^2)}} = \sum_{m=1}^\infty \varphi_m(\xi, \eta)u^m,$$

что можно записать в виде

$$-au + \frac{u(1-a^2\eta u)}{\sqrt{(1-a^2\xi^2)u^2 - 2\eta u + (\xi^2+\eta^2)}} = \sum_{m=1}^\infty [\varphi_m(\xi, \eta) - a^2\varphi_{m-2}(\xi, \eta)]u^m, \quad (22)$$

где следует положить

$$\varphi_0(\xi, \eta) = \varphi_{-1}(\xi, \eta) = 0.$$

Но очевидно

$$\frac{1}{\sqrt{(1-a^2\xi^2)u^2-2\eta u+(\xi^2+\eta^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-a^2\xi^2}{\xi^2+\eta^2}\right)^{\frac{n}{2}} \times$$

$$\times P_n\left(\frac{\eta}{\sqrt{1-a^2\xi^2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right) u^n,$$

где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра. Подставляя это выражение в формулу (22) и приравнивая коэффициенты при $u^m$, мы получаем связь между решениями $\varphi_m(\xi, \eta)$:

$$\varphi_m(\xi, \eta) = a^2\varphi_{m-2}(\xi, \eta) + \frac{(1-a^2\xi^2)^{\frac{m-1}{2}}}{(\xi^2+\eta^2)^{m/2}} P_{m-1}\left(\frac{\eta}{\sqrt{1-a^2\xi^2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right) -$$

$$- a^2\eta \frac{(1-a^2\xi^2)^{\frac{m}{2}-1}}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{m-1}{2}}} P_{m-2}\left(\frac{\eta}{\sqrt{1-a^2\xi^2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right) \quad (m=2, 3, \ldots). \tag{23}$$

Введем вместо решений $\varphi_m(\xi, \eta)$ новые решения

$$\psi_m(\xi, \eta) = \varphi_m(\xi, \eta) - a^2\varphi_{m-2}(\xi, \eta) = \frac{(1-a^2\xi^2)^{\frac{m-1}{2}}}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{m}{2}}} P_m\left(\frac{\eta}{\sqrt{1-a^2\xi^2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right) -$$

$$- a^2\eta \frac{(1-a^2\xi^2)^{\frac{m}{2}-1}}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{m-1}{2}}} P_{m-2}\left(\frac{\eta}{\sqrt{1-a^2\xi^2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right) \quad (m = 2, 3, \ldots).$$

Используя формулы (3) и обозначая через $\theta$ угол между радиус-вектором и осью $z$, получаем

$$\psi_m(\xi, \eta) = \psi_m(t, \rho, z) =$$

$$= t\frac{(t^2-a^2\rho^2)^{\frac{m-1}{2}}}{r^m} P_{m-1}\left(\frac{t\cos\theta}{\sqrt{t^2-a^2\rho^2}}\right) - a^2 z \frac{(t^2-a^2\rho^2)^{\frac{m}{2}-1}}{r^{m-1}} \times$$

$$\times P_{m-2}\left(\frac{t\cos\theta}{\sqrt{t^2-a^2\rho^2}}\right); \quad \psi_1(t, \rho, z) = \frac{t-ar}{r}. \tag{24}$$

Для решений $\varphi_m(\xi, \eta)$

$$\Phi(w) = \frac{1}{\pi}\left[(-w)^m - a^m\right],$$

и, следовательно, для решений $\psi_m(\xi, \eta) = \varphi_m(\xi, \eta) - a^2\varphi_{m-2}(\xi, \eta)$

$$\Phi(w) = \frac{1}{\pi}[(-w)^m - a^m] - \frac{a^2}{\pi}[(-w)^{m-2} - a^{m-2}] =$$
$$= \frac{(-1)^m}{\pi}(w^m - a^2w^{m-2}) \qquad (m = 2, 3, \ldots).$$

Пусть $\Phi(w)$ — произвольная целая функция, вещественная на вещественной оси. Мы можем представить эту функцию в виде ряда, равномерно сходящегося на любом компактном подмножестве плоскости $w$:

$$\Phi(w) = \gamma_0 + \gamma_1(w + a) + \sum_{m=2}^{\infty}\gamma_m(w^m - a^2w^{m-2}),$$

и, следовательно, решение $\varphi(\xi, \eta)$, соответствующее этой функции, выражается через решения (2. 4):

$$\frac{1}{\pi}\varphi(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\gamma_m\psi_m(\xi, \eta).$$

Используя равенство (17) и формулу (43) работы [1], можно показать, что формулы (24) описывают все решения с единственной сингулярностью (полюсом) при $r = 0$ в круге $\xi^2 + \eta^2 \leqslant 1/a^2$. Отметим наконец, что, полагая в формулах (24) $a = 0$, мы получаем аксиально-симметричные решения уравнения Лапласа с единственной сингулярностью в начале координат:

$$\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

3. Будем теперь изучать однородные решения уравнения (2), порядок однородности которых есть целое число, отличное от нуля. Сначала рассмотрим случай, когда порядок однородности равен — 1. При этом

$$\varphi = \frac{1}{t}\omega(\xi, \eta),$$

и, подставляя последнее выражение в уравнение (1), мы получаем для функции $\omega(\xi, \eta)$ вместо уравнения (4) уравнение

$$(a^2\xi^2 - 1)\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2} + 2a^2\xi\eta\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta} + (a^2\eta^2 - 1)\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2} +$$
$$+ 4a^2\left(\xi\frac{\partial\omega}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right) - \frac{1}{\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\xi} + 2a^2\omega = 0. \qquad (25)$$

Это уравнение эллиптического типа внутри круга (6), причем, как и раньше, необходимо брать решения этого уравнения, четные по $\xi$, т. е. решения вида

$$\omega(\xi, \eta) = \omega_0(\eta) + \omega_2(\eta)\xi^2 + \omega_4(\eta)\xi^4 + \ldots \qquad (26)$$

Подставляя это выражение в уравнение (25) и приравнивая нулю коэффициенты при $\xi^n$, можно получить рекуррентную цепочку уравнений

$$\begin{gathered} n(n-1)a^2\omega_n(\eta) - (n+2)(n+1)\omega_{n+2}(\eta) + 2a^2n\omega_n'(\eta) + \\ + (a^2\eta^2 - 1)\omega_n''(\eta) + 4a^2n\omega_n(\eta) + 2a^2n\omega_n'(\eta) - \\ - (n+2)\omega_{n+2}(\eta) + 2a^2\omega_n(\eta) = 0, \end{gathered}$$

из которой последовательно определяются $\omega_2(\eta)$, $\omega_4(\eta), \ldots$ Следовательно, может существовать лишь одно решение, удовлетворяющее условию

$$\omega(\xi, \eta)\big|_{\xi=0} = \omega_0(\eta). \qquad (27)$$

Покажем теперь, что всегда можно построить решение, удовлетворяющее (27), где $\omega_0(\eta)$ — произвольная функция, аналитическая при $0 < \eta < 1/a$, причем это решение может быть получено дифференцированием некоторого решения уравнения (2) порядка однородности, равной нулю. Действительно, если продифференцировать решение порядка нуль

$$\varphi(\xi, \eta) = \varphi_0(\eta) + \varphi_2(\eta)\xi^2 + \varphi_4(\eta)\xi^4 + \ldots \qquad (28)$$

по $z$, то получим

$$\frac{\partial\varphi(\xi, \eta)}{\partial z} = \frac{1}{t}[\varphi_0'(\eta) + \varphi_2'(\eta)\xi^2 + \varphi_4'(\eta)\xi^4 + \ldots],$$

и мы должны приравнять

$$\frac{\partial\varphi(\xi, \eta)}{\partial z} = \frac{1}{t}[\varphi_0'(\eta) + \varphi_2'(\eta)\xi^2 + \ldots] = \frac{1}{t}[\omega_0(\eta) + \omega_2(\eta)\xi^2 + \ldots],$$

откуда, в частности,

$$\varphi_0'(\eta) = \omega_0(\eta). \qquad (29)$$

Но ввиду (10) мы можем выбрать в качестве $\varphi_0(\eta)$ произвольную аналитическую функцию. Если функция $\omega_0(\eta)$ задана, то функция $\varphi_0(\eta)$ определена с точностью до произвольной аддитивной постоянной, что несущественно, так как из $\varphi_0(\eta) = \mathrm{const}$ вытекает, что $\varphi(\xi, \eta) = \mathrm{const}$. Следовательно, любое решение порядка однородности — 1 может быть получено дифференцированием по $z$ некоторого решения порядка однородности нуль.

Рассмотрим теперь решения однородные, порядка однородности $(-k)$, где $k$ — натуральное. В этом случае

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{t^k} \omega(\xi, \eta), \tag{30}$$

и вместо (25) мы имеем уравнение

$$(a^2\xi^2 - 1)\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2} + 2a^2\xi\eta\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta} + (a^2\eta^2 - 1)\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2} +$$

$$+ (2 + 2k)\,a^2\left(\xi\frac{\partial\omega}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right) - \frac{1}{\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\xi} + k(k+1)\,a^2\omega = 0. \tag{31}$$

Для $\omega(\xi, \eta)$ имеет место разложение

$$\omega(\xi, \eta) = \omega_0(\eta) + \omega_2(\eta)\,\xi^2 + \ldots,$$

причем эта функция определяется единственным образом по своим данным при $\xi = 0$ (27). В то же время, дифференцируя решение (28) порядка нуль $k$ раз по $z$, мы получим

$$\frac{\partial^k\varphi(\xi, \eta)}{\partial z^k} = \frac{1}{t^k}\left[\varphi_0^{(k)}(\eta) + \varphi_2^{(k)}(\eta)\,\xi^2 + \ldots\right],$$

так что для получения решения (30) достаточно положить

$$\varphi_0^{(k)}(\eta) = \omega_0(\eta). \tag{32}$$

Следовательно, каждое решение порядка однородности $-k$ может быть получено дифференцированием по $z$ $k$ раз некоторого решения порядка однородности нуль.

Если функция $\omega_0(\eta)$ задана, то функция $\varphi_0(\eta)$ восстанавливается с точностью до произвольного аддитивного полинома степени $k-1$. Но, как легко доказать, если в качестве $\varphi_0(\eta)$ взять такой полином, то и функция (28) окажется полиномом по $\eta$ степени $k-1$, и, следовательно, произвольный полином в выражении $\varphi_0(\eta)$ несуществен при построении решения (30). Достаточно показать, что если в качестве $\varphi_0(\eta)$ взять $\varphi_0(\eta) = \eta^m$, где $m$ — натуральное, то и функция (28) окажется полиномом по $\eta$ степени $m$. Действительно, в силу (11) в этом случае

$$\Phi_1(w) = 1/(\pi(-w)^m), \tag{33}$$

так что функция (28) с точностью до мультипликативной постоянной будет равна

$$\varphi_m(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\tau^m}{(\eta + i\xi\cos\lambda\sqrt{1 - a^2\tau})^m}\,d\lambda.$$

Построим, как и выше, порождающую функцию для этих решений.

После очевидных выкладок мы получаем

$$a^2 + \frac{a^2\eta u - u^2}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2)u^2 - 2\eta u + (1-a^2\xi^2)}} = \sum_{m=0}^{\infty} [a^2\varphi_m(\xi, \eta) - \varphi_{m-2}(\xi, \eta)]u^m,$$

где следует положить

$$\varphi_{-2}(\xi, \eta) = \varphi_{-1}(\xi, \eta) = 0, \quad \varphi_0(\xi, \eta) = 1.$$

Рассуждая, как и выше, получаем следующую рекуррентную формулу:

$$a^2\varphi_m(\xi, \eta) = \varphi_{m-2}(\xi, \eta) + \frac{a^2\eta}{\sqrt{1-a^2\xi^2}} \frac{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{m-1}{2}}}{(1-a^2\xi^2)^{\frac{m-1}{2}}} P_{m-1}\left(\frac{\eta}{\sqrt{1-a^2\xi^2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{1-a^2\xi^2}} \frac{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{m}{2}-1}}{(1-a^2\xi^2)^{\frac{m}{2}-1}} P_{m-2}\left(\frac{\eta}{\sqrt{1-a^2\xi^2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right),$$

откуда вытекает наше утверждение, что $\varphi_m(\xi, \eta)$ — полином по $\eta$ степени $m$.

Отметим, что в этом случае $\varphi_m(\xi, \eta)$ имеет сингулярности в точках $\xi = \pm 1/a$, $\eta = 0$ на окружности круга (6) и что эти сингулярности отвечают сингулярности функции (33) в начале координат $w = 0$.

**4.** Рассмотрим подробнее решения, имеющие порядок однородности $-1$ и $-2$. Чтобы получить решения порядка однородности $-1$, необходимо продифференцировать формулу (7) по $\eta$. Для $w_1$, определяемой равенством (8), справедливо уравнение [1, п. 3]

$$1 + \sqrt{a^2 - w_1^2}\,\xi \cos\lambda + w_1\eta = 0, \tag{34}$$

откуда

$$\cos\lambda = -\frac{1 + w_1\eta}{\xi\sqrt{a^2 - w_1^2}} \tag{35}$$

и

$$\frac{\partial w_1}{\partial \eta} = -\frac{w_1(a^2 - w_1^2)}{w_1 + a^2\eta}, \tag{36}$$

и, следовательно, дифференцируя (7), мы находим

$$\frac{\partial\varphi(\xi, \eta)}{\partial\eta} = -\int_0^\pi \Phi'(w_1) \frac{w_1(a^2 - w_1^2)}{w_1 + a^2\eta} d\lambda,$$

$$\frac{\partial^2\varphi(\xi, \eta)}{\partial\eta^2} = \int_0^\pi \Phi'(w_1) \frac{w_1(a^2 - w_1^2)(-2w_1^3 - 3a^2\eta w_1^2 + a^2 w_1 + 2a^4\eta)}{(w_1 + a^2\eta)^3} d\lambda +$$

$$+ \int_0^\pi \Phi''(w_1) \frac{w_1^2(a^2 - w_1^2)^2}{(w_1 + a^2\eta)^2} d\lambda.$$

Обозначая через $\Phi_0(w_1)$ аналитическую функцию $\Phi'(w_1)$, мы получаем следующие общие выражения для решения порядка однородности $-1$ и $-2$:

$$\varphi^{(-1)} = -\frac{1}{t}\int_0^{\pi}\Phi_0(w_1)\,\frac{w_1(a^2-w_1^2)}{w_1+a^2\eta}\,d\lambda,$$

$$\varphi^{(-2)} = \frac{1}{t^2}\int_0^{\pi}\Phi_0(w_1)\,\frac{w_1(a^2-w_1^2)(-2w_1^3-3a^2\eta w_1^2+a^2w_1+2a^4\eta)}{(w_1+a^2\eta)^3}\,d\lambda+$$
$$+\frac{1}{t^2}\int_0^{\pi}\Phi_0'(w_1)\,\frac{w_1^2(a^2-w_1^2)^2}{(w_1+a^2\eta)^2}\,d\lambda. \qquad (37)$$

Вместо $\lambda$ в качестве переменной интегрирования можно взять $w_1$, определяемую формулой (8), причем мы имеем [1, п. 3]

$$d\lambda = \frac{(w_1+a^2\eta)\,dw_1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,(a^2-w_1^2)\sqrt{(w_1-w)(\overline{w}-w_1)}},$$

где $w$ определено формулой (9) и корень $\sqrt{(w_1-w)(\overline{w}-w_1)}$ надо брать с положительной мнимой частью при $w_1<-a$, если $\xi>0$, и с отрицательной мнимой частью, если $\xi<0$. Тогда формулы (37) примут вид

$$\varphi^{(-1)} = -\frac{1}{t\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\int_w^{\overline{w}}\Phi_0(w_1)\,\frac{w_1}{\sqrt{(w_1-w)(\overline{w}-w_1)}}\,dw_1,$$

$$\varphi^{(-2)} = \frac{1}{t^2\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\int_w^{\overline{w}}\Phi_0(w_1)\,\frac{w_1^2(-2w_1^3-3a^2\eta w_1^2+a^2w_1+2a^4\eta)}{(w_1+a^2\eta)^2\sqrt{(w_1-w)(\overline{w}-w_1)}}\,dw_1+$$
$$+\frac{1}{t^2\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\int_w^{\overline{w}}\Phi_0'(w_1)\,\frac{w_1^2(a^2-w_1^2)}{(w_1+a^2\eta)\sqrt{(w_1-w)(\overline{w}-w_1)}}\,dw_1, \qquad (38)$$

где вид контура интегрирования указан в нашей предыдущей работе.

Решение $\varphi^{(-1)}$ разлагают в ряд

$$\varphi^{(-1)} = \frac{1}{t}\left[\omega_0(\eta)+\omega_2(\eta)\,\xi^2+\ldots\right].$$

Используя формулу (37), можно найти значения аналитической функции $\Phi_0(w_1)$ для вещественных $w_1<-a$.

Полагая $\xi=0$, мы получаем $w_1=-1/\eta$, и, следовательно,

$$\omega_0(\eta) = \frac{\pi}{\eta^2}\Phi_0\left(-\frac{1}{\eta}\right);\quad \Phi_0(w_1) = \frac{1}{\pi w_1^2}\,\omega_0\left(-\frac{1}{w_1}\right)\quad (w_1<-a). \qquad (39)$$

Аналогично для $\varphi^{(-2)}(\xi,\eta)$ имеет место разложение

$$\varphi^{(-2)} = \frac{1}{t^2}\left[\omega_0(\eta)+\omega_2(\eta)\,\xi^2+\ldots\right],$$

и формула (38) показывает, что

$$\omega_0(\eta) = \frac{\pi}{\eta^4}\Phi_0'\left(-\frac{1}{\eta}\right) - \frac{2\pi}{\eta^3}\Phi_0\left(-\frac{1}{\eta}\right),$$

или

$$\Phi_0'(w_1) + \frac{2}{w_1}\Phi_0(w_1) - \frac{1}{\pi w_1^4}\omega_0\left(-\frac{1}{w_1}\right) = 0,$$

откуда

$$\Phi_0(w_1) = \frac{1}{\pi w_1^2}\int \frac{1}{w_1^2}\omega_0\left(-\frac{1}{w_1}\right)dw_1. \tag{40}$$

В качестве аддитивного слагаемого в этом выражении выступает $Cw_1^{-2}$, которое несущественно, так как, полагая $\Phi_0(w_1) = Cw_1^{-2}$ в формуле (37), мы получим $\varphi^{(-2)} = 0$.

Дифференцируя решения (24) по $z$, мы находим решения порядка однородности $-1$ с единственной сингулярной точкой $r = 0$, так что решения

$$\frac{\partial\psi_m(t, \rho, z)}{\partial z} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

имеют в $r = 0$ полюс порядка $m+1$. У нас имеется также решение порядка однородности $-1$ с полюсом в $r = 0$ первого порядка:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{t}\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}},$$

для которого $\Phi_0(w_1) = 1/w_1$.

Решение $1/r$ можно получить, дифференцируя по $z$ решение порядка однородности нуль

$$\varphi(\xi, \eta) = \lg(\eta + \sqrt{\xi^2+\eta^2}) - \lg\xi$$

или дифференцируя по $t$ решение

$$\psi_1(\xi, \eta) = (t - ar)/r.$$

Аналогичным способом можно построить решения порядка однородности $-2$ с единственной сингулярностью в $r = 0$.

**5.** Рассмотрим теперь решения уравнения (2), являющиеся функциями, однородными по $t$, $\rho$, $z$, порядка однородности $k$, где $k$ — целое положительное число. В некоторой окрестности точки $\xi = 0$ для этих решений имеет место разложение

$$\varphi = t^k[\omega_0(\eta) + \omega_2(\eta)\xi^2 + \ldots] = t^k\omega(\xi, \eta), \tag{41}$$

где $\omega(\xi, \eta)$ должна удовлетворять уравнению, которое можно получить, заменяя в уравнении (31) $k$ на $(-k)$:

$$(a^2\xi^2-1)\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+2a^2\xi\eta\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}+(a^2\eta^2-1)\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}+$$
$$+(2-2k)a^2\left(\xi\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+k(k-1)a^2\omega=0. \quad (42)$$

Дифференцируя решения (41) $k$ раз по $z$, получаем решения порядка однородности нуль. Можно, обратно, построить решения (41), исходя из решений порядка однородности нуль.

Изучим подробнее процедуру интегрирования решений уравнения (2). Пусть

$$\varphi^{(l)}=t^l\omega_l(\xi, \eta)$$

— некоторое решение уравнения (2) порядка однородности $l$. Рассмотрим функцию

$$t^{l+1}\int_{\eta_0}^{\eta}\omega_l(\xi, \eta)\,d\eta, \quad (43)$$

причем мы предполагаем, что $\omega(\xi, \eta)$ регулярна в точке $\eta=\eta_0$.

Функция (43), вообще говоря, не является решением уравнения (2), т. е. функция

$$\int_{\eta_0}^{\eta}\omega_l(\xi, \eta)\,d\eta \quad (44)$$

не удовлетворяет, вообще говоря, уравнению

$$(a^2\xi^2-1)\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+2a^2\xi\eta\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}+(a^2\eta^2-1)\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}-$$
$$-2la^2\left(\xi\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+l(l+1)a^2\omega=0, \quad (45)$$

которое можно получить, заменяя в уравнении (42) $k$ на $l+1$. Однако легко поверить, что, подставляя функцию (44) вместо $\omega$ в левую часть уравнения (45), мы получаем функцию только одной переменной $\xi$, причем эта функция оказывается четной по $\xi$. Обозначим ее через $f(a^2\xi^2)$. Чтобы получить решение порядка однородности $l+1$, следует добавить к функции (43) выражение $t^{l+1}y(\xi)$, где $y(\xi)$ — некоторое решение уравнения

$$(a^2\xi^2-1)\frac{d^2y}{d\xi^2}-2a^2l\xi\frac{dy}{d\xi}-\frac{1}{\xi}\frac{dy}{d\xi}+l(l+1)a^2y+f(a^2\xi^2)=0. \quad (46)$$

Если начальное решение $\varphi^{(l)}$ имеет вид ряда

$$\varphi^{(l)}=t^l[\omega_0(\eta)+\omega_2(\eta)\xi^2+\ldots],$$

то и функция $f(a^2\xi^2)$ имеет вид ряда

$$f(a^2\xi^2) = a_0 + a_2\xi^2 + \dots \tag{47}$$

Введем вместо $\xi$ новую переменную $\tau = a^2\xi^2$. Тогда уравнение (46) преобразуется к виду

$$\tau(\tau-1)\frac{d^2y}{d\tau^2} + \left[\left(\frac{1}{2}-l\right)\tau - 1\right]\frac{dy}{d\tau} + \frac{l(l+1)}{4}y + f(\tau) = 0. \tag{48}$$

Соответствующее однородное уравнение — это уравнение Гаусса с параметрами $\alpha = -l/2$, $\beta = -(l+1)/2$, $\gamma = 1$, и решением этого уравнения является полином степени $l/2$ или $(l+1)/2$. Теория уравнений Гаусса позволяет получить простое явное выражение для этих полиномов

$$Q_k(\tau) = (\tau-1)^{\frac{2l+3}{2}}\frac{d^k}{d\tau^k}\left[\tau^k(\tau-1)^{-\frac{2l+3}{2}+k}\right],$$

где $k$ равно $l/2$ или $(l+1)/2$.

Если функция $f(a^2\xi^2)$ имеет вид (47), решение уравнения (46) можно также искать в виде ряда по степеням $\xi^2$, причем к полученному решению можно прибавлять $CQ_k(a^2\xi^2)$, где $C$ — произвольная постоянная. В частности, если в качестве начального решения порядка однородности нуль взять константу, указанная процедура интегрирования приведет нас к решениям, являющимся полиномами по $t$, $z$ и $\rho^2$. Таким способом можно построить $n+1$ полиномов степени $n$.

Если рассмотреть решение (22), уравнения (4) и применить указанную выше процедуру интегрирования, мы получим порождающую функцию для решений порядка однородности 1 с единственной сингулярностью при $r=0$. В этих вычислениях мы отбросим член $-au$ и сомножитель $u$. Интегрируя по $\eta$, мы получаем функцию

$$a^2u\sqrt{(1-a^2\xi^2)u^2 - 2\eta u + (\xi^2+\eta^2)} +$$
$$+ (a^2u^2-1)\lg\left[\eta - u + \sqrt{(1-a^2\xi^2)u^2 - 2\eta u + (\xi^2+\eta^2)}\right], \tag{49}$$

подстановка которой в левую часть уравнения

$$(a^2\xi^2-1)\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2} + 2a^2\xi\eta\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta} + (a^2\eta^2-1)\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\xi} = 0$$

приводит к постоянной $a^2(1-a^2u^2)$, так что уравнение (46) в этом случае имеет вид

$$(a^2\xi^2-1)\frac{d^2y}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi}\frac{dy}{d\xi} + a^2(1-a^2u^2) = 0.$$

Общим интегралом этого уравнения является

$$y=\frac{1}{2}(1-a^2u^2)\lg\xi^2+C_1\left(2\sqrt{1-a^2\xi^2}+\lg\frac{1-\sqrt{1-a^2\xi^2}}{1+\sqrt{1-a^2\xi^2}}\right)+C_2. \tag{50}$$

Складывая функции (49) и (50) и умножая на $t$, мы получаем порождающую фукцию для решений порядка однородности 1. Разлагая эту функцию в ряд по степеням $u$, мы получаем сами эти решения. Все эти решения, исключая коэффициенты при $u^0$ и $u^2$, имеют единственную сингулярную точку $r=0$.

**6.** Нашей целью является нахождение решений уравнений теории упругости. Эти решения можно представить в виде

$$\mathbf{u}=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi},$$

где $\mathbf{u}$ — вектор смещения твердого тела; $\varphi$ (скалярный потенциал) удовлетворяет волновому уравнению, где скорость равна скорости распространения продольных волн; $\boldsymbol{\psi}$ (векторный потенциал) — вектор, компоненты которого вдоль любого фиксированного направления удовлетворяют волновому уравнению, где скорость равна скорости распространения поперечных волн.

Введем, как и выше, цилиндрические координаты ($\rho$, $z$, $\vartheta$). Компонента вектора $\boldsymbol{\psi}$ вдоль оси $z$ должна удовлетворять волновому уравнению, однородные решения которого мы рассмотрели раньше. Компоненты вектора $\boldsymbol{\psi}$ на оси $\rho$ и $\vartheta$ должны удовлетворять аналогичному уравнению [1, п. 1]

$$b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho^2}\psi+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}, \tag{51}$$

где $1/b$ — скорость распространения поперечных волн. Как и выше, мы рассматриваем только аксиально-симметричный случай. Таким образом, мы должны вначале изучить однородные решения уравнения (51). Это изучение аналогично проведенному нами для случая уравнения (2).

Отметим (с необходимыми для дальнейшего добавлениями) некоторые результаты работы [1]. Однородные порядка нуль решения уравнения (51) — это функции $\xi$, $\eta$. Из аксиальной симметрии вытекает, что нас интересуют только функции, нечетные по $\xi$. В дальнейшем мы будем рассматривать только функции, нечетные по $\xi$. Для таких решений имеет место общая формула

$$\psi(\xi,\eta)=\frac{1}{i}\int_0^\pi\Psi(w_1)\cos\lambda d\lambda, \tag{52}$$

где $w_1$ определена формулой (8), $\Psi(w_1)$ — аналитическая функция, принимающая комплексно-сопряженные значения в точках, симметричных относительно вещественной оси. Если принять $w_1$ за переменную интегрирования, то вместо (52) мы получим формулу

$$\psi(\xi,\ \eta) = \frac{i}{\xi\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \int_w^{\overline{w}} \frac{(w_1+b^2\eta)(1+\eta w_1)\Psi(w_1)\,dw_1}{(b^2-w_1^2)\sqrt{b^2-w_1^2}\sqrt{(w_1-w)(\overline{w}-w_1)}}, \qquad (53)$$

где $w$ определена формулой (9), а контур интегрирования указан в работе [1].

Функция $\psi(\xi,\ \eta)$ должна удовлетворять уравнению

$$(b^2\xi^2-1)\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + 2b^2\xi\eta\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta} + (b^2\eta^2-1)\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} +$$
$$+ 2b^2\left(\xi\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) - \frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{1}{\xi^2}\psi = 0, \qquad (54)$$

которое является эллиптическим в круге

$$\xi^2+\eta^2 \leqslant 1/b^2. \qquad (55)$$

Подставляя в уравнение (54) разложение

$$\psi(\xi,\ \eta) = \psi_1(\eta)\,\xi + \psi_3(\eta)\,\xi^3 + \ldots, \qquad (56)$$

можно увидеть, что решение $\psi(\xi, \eta)$ однозначно определяется коэффициентом $\psi_1(\eta)$, который связан с аналитической функцией $\Psi(w)$ по формуле

$$\psi_1(\eta) = \left.\frac{\partial\psi(\xi,\ \eta)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = -\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{1-b^2\eta^2}}{\eta^2}\Psi'\left(-\frac{1}{\eta}\right). \qquad (57)$$

Из формулы (52) вытекает, что

$$\psi(\xi,\ \eta) = -\frac{1}{i}\int_w^{\overline{w}}\Psi'(w_1)\sin\lambda\,d\lambda,$$

где

$$\sin\lambda = \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\xi}\,\frac{\sqrt{(w_1-w)(\overline{w}-w_1)}}{\sqrt{b-w_1^2}},$$

причем $\sqrt{(w_1-w)(\overline{w}-w_1)}$ выбирается с положительной мнимой частью в полупространстве $w_1 < -b$, если $\xi > 0$ и $\eta > 0$, и с отрицательной мнимой частью, если $\xi < 0$ и $\eta > 0$, и $\sqrt{b^2-w_1^2}$ выбирается с положительной мнимой частью при $w_1 < -b$. При этом

$$\psi(\xi,\ \eta) = \frac{i\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\xi}\int_w^{\overline{w}}\frac{\sqrt{(w_1-w)(\overline{w}-w_1)}}{\sqrt{b^2-w_1^2}}\Psi'(w_1)\,dw_1.$$

Мы будем рассматривать решения, имеющие в замкнутом круге (55) единственную сингулярность в точке $\xi=\eta=0$.

Если ввести вместо координат $\xi$ и $\eta$ полярные координаты $\xi=R\sin\alpha$, $\eta=R\cos\alpha$, то уравнение (54) примет вид

$$(b^2R^2-1)R^2\frac{\partial^2\psi}{\partial R^2}+2(b^2R^2-1)R\frac{\partial\psi}{\partial R}-$$
$$-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}+\operatorname{ctg}\alpha\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}-\frac{1}{\sin^2\alpha}\psi\right)=0. \tag{58}$$

Обозначим через $\psi_0(\alpha)$ значения функции $\psi(\xi,\eta)$ на окружности круга (55). Полагая в предыдущем уравнении $R=1/b$, мы получаем для функции $\psi_0(\alpha)$ уравнение

$$\frac{d^2\psi_0}{d\alpha^2}+\operatorname{ctg}\alpha\frac{d\psi_0}{d\alpha}-\frac{1}{\sin^2\alpha}\psi_0=0,$$

откуда

$$\psi_0(\alpha)=\frac{C_1}{\sin\alpha}+C_2\operatorname{ctg}\alpha.$$

Но, как мы предположили, функция $\psi(\xi,\eta)$ не должна иметь сингулярностей на окружности круга (55), и, следовательно, $C_1=C_2=0$, т. е. интересующие нас решения должны обращаться в нуль на этой окружности.

Мы видели, что для таких решений функция $\Psi'(w_1)$, входящая в формулу (58), должна иметь вид

$$\Psi'(w_1)=\sqrt{b^2-w_1^2}\,f(w_1), \tag{59}$$

где $f(w_1)$ — функция регулярная слева от мнимой оси при $\eta>0$ и справа от этой оси при $\eta<0$. В этих двух случаях функция $f(w_1)$, вообще говоря, различна. Итак,

$$\psi(\xi,\eta)=\frac{i\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\xi}\int_w^{\overline{w}}\sqrt{(w_1-w)(\overline{w}-w_1)}\,f(w_1)\,dw_1. \tag{60}$$

Из этой формулы вытекает, что

$$\left.\begin{aligned}\psi(\xi,0)&=\mp\int_{-\beta_1 i}^{+\beta_1 i}\sqrt{w_1^2+\beta_1^2}\,f(w_1)\,dw_1,\\ \left.\frac{\partial\psi(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}&=\mp\frac{1}{\xi^2}\int_{-\beta_1 i}^{+\beta_1 i}\frac{w_1 f(w_1)}{\sqrt{w_1^2+\beta_1^2}}\,dw_1,\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

где $\beta_1=\dfrac{\sqrt{1-b^2\xi^2}}{\xi^2}$ и $\sqrt{w_1^2+\beta_1^2}$ положителен при вещественных $w_1$.

Знак (—) соответствует случаю, когда $f(w_1)$ регулярна слева от мнимой оси, а знак (+) — противоположному случаю.

Обозначим через $f_1(w_1)$ и $f_2(w_1)$ функцию $f(w_1)$ в этих двух случаях. Используя формулу (61), можно показать, так же как это было сделано выше для функции $\varphi(\xi, \eta)$, что в предположении аналитичности $f_1(w_1)$ и $f_2(w_1)$ на мнимой оси эти функции являются целыми, причем $f_2(w_1) = -f_1(w_1)$.

Из формулы (57) вытекает, что в случае $\eta > 0$ функция $\Psi'(w_1)$ должна быть вещественной при $w_1 < -b$ и в силу (59) $f(w_1)$ должна быть чисто мнимой при таких $w_1$.

Таким образом, мы получим полную систему решений однородных уравнений порядка нуль с единственной сингулярностью в точке $\xi = \eta = 0$, если положим

$$f(w_1) = \frac{1}{i}; \quad \frac{w_1}{i}; \quad \frac{w_1^2}{i}; \ \ldots, \tag{62}$$

так что имеем

$$\psi_n(\xi, \eta) = \frac{i\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\xi} \int_w^{\overline{w}} \sqrt{(w_1 - w)(\overline{w} - w_1)}\, w_1^n dw_1. \tag{63}$$

Построим порождающую функцию для этих решений:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\xi, \eta) v^n = \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\xi} \int_w^{\overline{w}} \frac{-w_1^2 + (w+\overline{w})\, w_1 - w\overline{w}}{(1 - w_1 v)\sqrt{-w_1^2 + (w+\overline{w})\, w_1 - w\overline{w}}}\, dw_1,$$

откуда

$$\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\xi, \eta)\, v^n = \frac{\pi}{v}\left[\frac{1}{v} - \frac{w+\overline{w}}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{v}\sqrt{1 - (w+\overline{w})\, v + w\overline{w} v^2}\right],$$

т. е. выражение $(\xi/\sqrt{\xi^2+\eta^2})\,\psi_n(\xi, \eta)$ является с точностью до мультипликативной постоянной коэффициентом при $v^{n+1}$ в разложении функции $\sqrt{1 - (w+\overline{w})\, v + w\overline{w} v^2}$.

Однако известно (см., например: Whittaker a Watson. A course of modern analysis. 1927, p. 329), что

$$\sqrt{1 - 2hz + h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n C_n(z),$$

где $C_n(z)$ являются полиномами Якоби. Эти полиномы $C_n(z)$ с точностью до мультипликативной постоянной равны

$$Q_n(z) = \frac{(-1)^n}{n!\, 2^n}(1 - z^2)\frac{d^n}{dz^n}\{(1 - z^2)^{n-1}\}. \tag{64}$$

Мы можем записать

$$\sqrt{1 - (w+\overline{w})\, v + w\overline{w} v^2} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\sqrt{(\xi^2+\eta^2) - 2\eta v + (1 - b^2\xi^2) v^2}.$$

Полагая $v=\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\sqrt{1-b^2\xi^2}}h$, получаем

$$\sqrt{1-(w+\overline{w})v+w\overline{w}v^2}=\sqrt{1-\frac{2\eta}{\sqrt{1-b^2\xi^2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}}h+h^2}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}h^nC_n\left(\frac{\eta}{\sqrt{1-b^2\xi^2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right),$$

так что для сингулярных решений $\psi_n(\xi, \eta)$ оказывается справедливой формула

$$\psi_n(\xi, \eta)=\frac{(1-b^2\xi^2)^{\frac{n}{2}+1}}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{n+1}{2}}\xi}Q_{n+2}\left(\frac{\eta}{\sqrt{1-b^2\xi^2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right)\quad (n=0,1,2,\ldots), \tag{65}$$

или

$$\psi_n(t, \rho, z)=\frac{(t^2-b^2\rho^2)^{\frac{n}{2}+1}}{\rho r^{n+1}}Q_{n+2}\left(\frac{t\cos\theta}{\sqrt{t^2-b^2\rho^2}}\right). \tag{66}$$

Отметим, что точки $\xi=0$, $\eta\neq 0$ не являются точками сингулярности функции $\psi_n(\xi, \eta)$, так как при $\xi=0$ аргумент $\eta/(\sqrt{1-b^2\xi^2}\sqrt{\xi^2+\eta^2})$ равен 1 и в силу (64) $Q_n(\pm 1)=0$. Решение $\psi_n(t, \rho, z)$ имеет в точке $r=0$ полюс порядка $(n+2)$. Следовательно, не имеется решения с полюсом порядка 1 в точке $r=0$. Этот факт можно проверить непосредственно, исходя из уравнения (54).

Мы можем записать решение (65) несколько иным способом. Действительно, в силу (64) вместо $Q_n(z)$ можно написать $(1-z^2)P'_{n-1}(z)$, где $P_n(z)$ — полином Лежандра. Подставляя это выражение в (65), мы получим

$$\psi_n(\xi, \eta)=\frac{\xi\,[1-b^2(\xi^2+\eta^2)]\,(1-b^2\xi^2)^{\frac{n}{2}}}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{n+3}{2}}}P'_{n+1}\left(\frac{\eta}{\sqrt{1-b^2\xi^2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right) \tag{67}$$

или

$$\psi_n(t, \rho, z)=\frac{\rho\,(t^2-b^2r^2)\,(t^2-b^2\rho^2)^{n/2}}{r^{n+3}}P'_{n+1}\left(\frac{t\cos\theta}{\sqrt{t^2-b^2\rho^2}}\right). \tag{68}$$

**7.** Рассуждая так же, как и выше, легко показать, что можно получить решения однородные, целого отрицательного порядка однородности, дифференцируя решения однородные порядка нуль по $z$. Можно получить также общее выражение для решений однородных порядка $(-1)$:

$$\psi^{(-1)}=-\frac{ti}{\xi\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\int_w^{\overline{w}}\frac{w_1(1+w_1\eta)}{\sqrt{b^2-w_1^2}\sqrt{(w_1-w)(\overline{w}-w_1)}}\Psi'(w_1)\,dw_1.$$

Дифференцируя решения (66) по $z$, мы находим решения порядка однородности ($-1$) с единственной сингулярностью в точке $r=0$. К этим решениям необходимо добавить также решение, для которого

$$\Psi'(w_1)=\sqrt{b^2-w_1^2}\,\frac{1}{iw_1}.$$

Это решение

$$\psi=\frac{\xi}{t\,(\xi^2+\eta^2)^{3/2}}=\frac{t\rho}{r^3}$$

можно получить, дифференцируя первое из решений (66) $-\psi_0(t,\rho,z)$ по $t$.

Решения однородные целого положительного порядка однородности $k$ имеют вид

$$t^k\left[\omega_1(\eta)\,\xi+\omega_3(\eta)\,\xi^3+\ldots\right]=t^k\omega,$$

где функция $\omega$ удовлетворяет уравнению

$$(b^2\xi^2-1)\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+2b^2\xi\eta\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}+(b^2\eta^2-1)\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}+$$
$$+(2-2k)\,b^2\left(\xi\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\left[k(k-1)\,b^2+\frac{1}{\xi^2}\right]\omega=0.$$

Чтобы получить эти решения, можно применить указанную выше процедуру интегрирования, причем уравнение (46) заменяется уравнением

$$(b^2\xi^2-1)\frac{d^2y}{d\xi^2}+(2-2k)\,b^2\xi\frac{dy}{d\xi}-\frac{1}{\xi}\frac{dy}{d\xi}+$$
$$+\left[k(k-1)\,b^2+\frac{1}{\xi^2}\right]y+f(\xi)=0,$$

которое подстановкой $y=\xi v$, $\tau=b^2\xi^2$ сводится к уравнению Гаусса.

8. Перейдем к рассмотрению сингулярных решений уравнений упругости. Как мы уже отмечали выше, эти решения могут быть представлены в виде

$$\mathbf{u}=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi},\tag{69}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор смещения; $\varphi$ — скалярный потенциал и $\boldsymbol{\psi}$ — векторный потенциал. Пусть $(q, s, w)$ — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ вдоль осей $(\rho, \vartheta, z)$ и $(\psi_\rho, \psi_\vartheta, \psi_z)$ — компоненты $\boldsymbol{\psi}$. В теории упругости для случая аксиальной симметрии получены следующие формулы:

$$q = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} - \frac{\partial\psi_\vartheta}{\partial z},$$

$$s = \frac{\partial\psi_\rho}{\partial z} - \frac{\partial\psi_z}{\partial\rho}, \tag{70}$$

$$w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\psi_\vartheta$$

и для компонент тензора напряжений:

$$\frac{1}{\mu}T_{\rho\rho} = (b^2 - 2a^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} - 2\frac{\partial^2\psi_\vartheta}{\partial z\partial\rho},$$

$$\frac{1}{\mu}T_{\rho z} = b^2\frac{\partial^2\psi_\vartheta}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\partial z} - 2\frac{\partial^2\psi_\vartheta}{\partial z^2},$$

$$\frac{1}{\mu}T_{\vartheta\vartheta} = (b^2 - 2a^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} - 2\frac{\partial\psi_\vartheta}{\partial z},$$

$$\frac{1}{\mu}T_{zz} = (b^2 - 2a^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2\psi_\vartheta}{\partial\rho\partial z} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial\psi_\vartheta}{\partial z}, \tag{71}$$

$$\frac{1}{\mu}T_{\rho\vartheta} = -\frac{\partial^2\psi_z}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi_z}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\psi_\rho}{\partial\rho\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi_\rho}{\partial z},$$

$$\frac{1}{\mu}T_{\vartheta z} = -\frac{\partial^2\psi_z}{\partial\rho\partial z} + \frac{\partial^2\psi_\rho}{\partial z^2},$$

где $1/a$ — скорость распространения продольных, а $1/b$ — поперечных волн и $\mu$ — постоянная Ламэ.

Как было показано в работе [1], случаю силы, включенной в момент $t=0$ в начале координат, соответствуют потенциалы, однородные порядка 0. Аналогично можно показать, что потенциалы подобной природы соответствуют моменту сил, приложенному в начале координат в момент $t=0$, направленному вдоль оси $z$ и линейно растущему по $t$ при $t>0$.

Как будет показано ниже, случаю включенной силы соответствует $\psi_z = \psi_\rho = 0$, а второму случаю — случаю момента, пропорционального $t$, соответствует $\varphi = \psi_\vartheta = 0$.

Рассмотрим сначала случай $\psi_z = \psi_\rho = 0$. Для сокращения записи будем писать $\psi$ вместо $\psi_\vartheta$. Тогда по формулам (70) и (71)

$$q = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad s = 0, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\psi \tag{72}$$

и

$$\frac{1}{\mu}T_{\rho\rho} = (b^2 - 2a^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\rho},$$

$$\frac{1}{\mu} T_{\rho z} = b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho \partial z} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2},$$

$$\frac{1}{\mu} T_{\vartheta\vartheta} = (b^2 - 2a^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - 2 \frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{73}$$

$$\frac{1}{\mu} T_{zz} = (b^2 - 2a^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial z} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

$$T_{\rho\vartheta} = T_{z\vartheta} = 0.$$

Обозначим через $\mathbf{t}_m$ вектор напряжений, действующий на элемент поверхности с нормалью $m$. Если окружить точку $r = 0$ сферой, то вектор напряжений на поверхности этой сферы запишется в виде

$$t_{-r} = -\frac{\rho}{r} \mathbf{t}_\rho - \frac{z}{r} t_z, \tag{74}$$

и, следовательно, компоненты $R_0$, $\Theta_0$, $Z_0$ вектора $\mathbf{t}_{-r}$ вдоль осей $(\rho, \vartheta, z)$ будут

$$R_0 = \frac{\rho T_{\rho\rho} + z T_{zz}}{r}, \quad \Theta_0 = 0, \quad Z_0 = -\frac{\rho T_{\rho z} + z T_{zz}}{r} \tag{75}$$

и компоненты $X_0$, $Y_0$, $Z_0$ этого вектора вдоль осей $(x, y, z)$ будут

$$X_0 = R_0 \cos\vartheta, \quad Y_0 = R_0 \sin\vartheta, \quad Z_0 = -\frac{\rho T_{\rho z} + z T_{zz}}{r}. \tag{76}$$

Компоненты результирующего вектора и результирующего момента на всей сфере будут

$$\begin{aligned}
X &= r^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} X_0 \sin\theta d\theta d\vartheta, \\
Y &= r^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_0 \sin\theta d\theta d\vartheta, \\
Z &= r^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Z_0 \sin\theta d\theta d\vartheta, \\
M_x &= r^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (yZ_0 - zY_0) \sin\theta d\theta d\vartheta, \\
M_y &= r^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (zX_0 - xZ_0) \sin\theta d\theta d\vartheta, \\
M_z &= r^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (xY_0 - yX_0) \sin\theta d\theta d\vartheta,
\end{aligned} \tag{77}$$

где $\theta$, как и выше, угол между радиус-вектором и направлением оси $z$. Учитывая, что компоненты тензора напряжений не зависят от $\vartheta$, мы получаем в силу (76) и (77), что

$$X = Y = M_x = M_y = M_z = 0$$

и

$$Z = 2\pi r^2 \int_0^\pi Z_0 \sin\theta d\theta = -2\pi r \int_0^\pi (\rho T_{\rho z} + z T_{zz}) \sin\theta d\theta. \tag{78}$$

Чтобы получить решения с единственной сингулярностью при $r=0$, надо в качестве функций $\varphi$ и $\psi$ взять функции, определенные выше. Запишем эти решения, несколько изменив обозначения, в виде

$$\varphi_1 = \frac{t-ar}{r},$$

$$\varphi_m = \frac{t\,(t^2-a^2\rho^2)^{\frac{m-1}{2}}}{r^m} P_{m-1}\left(\frac{tz}{r\sqrt{t^2-a^2\rho^2}}\right) - $$

$$- a^2 z \frac{(t^2-a^2\rho^2)^{\frac{m}{2}-1}}{r^{m-1}} P_{m-2}\left(\frac{tz}{r\sqrt{t^2-a^2\rho^2}}\right) \quad (m=2, 3, \ldots), \qquad (79)$$

$$\psi_m = \frac{\rho\,(t^2-b^2r^2)\,(t^2-b^2\rho^2)^{\frac{m}{2}-1}}{r^{m+1}} P'_{m-1}\left(\frac{tz}{r\sqrt{t^2-b^2\rho^2}}\right) \quad (m=2, 3, \ldots). \qquad (80)$$

Функции $\varphi_m$ и $\psi_m$ имеют в точке $r=0$ полюс порядка $m$; и эти функции являются полиномами по $t$ степени $m$, причем коэффициент при $t^k$ имеет в точке $r=0$ полюс порядка $k$. При нечетном $m$ эти полиномы нечетны по $t$, а при четных $m$ — четны по $t$ (за исключением случая $m=1$).

Несложные вычисления показывают, что члены в $\varphi_m$ и $\psi_m$, содержащие $t$, приводят к тому, что $Z=0$. Таким образом, при нечетных $m$ потенциалы $\varphi_m$ и $\psi_m$ таковы, что $Z=0$. При четных $m\,Z$, соответствующее $\varphi_m$ и $\psi_m$, — это постоянная, не зависящая от $t$ и $r$.

**9.** После общих рассуждений предыдущего параграфа перейдем к изучению отдельных частных случаев. Рассмотрим сначала скалярный потенциал вида

$$\varphi_1 = \frac{t-ar}{r} = \frac{t}{\sqrt{\rho^2+z^2}} - a. \qquad (81)$$

В этом случае компонентами вектора напряжений на сфере будут

$$X_0 = \frac{4\mu t}{r^3} \sin\theta\cos\vartheta, \quad Y_0 = \frac{4\mu t}{r^3}\sin\theta\sin\vartheta, \quad Z_0 = \frac{4\mu t}{r^3}\cos\theta, \qquad (82)$$

и, следовательно, точка $r=0$ оказывается центром сжатия величины

$$-\frac{16\pi\mu t}{r}. \qquad (83)$$

Если продифференцировать это решение по $t$, мы получим статический центр сжатия (Love. Lehrbuch der Elastizität, 1907, p. 211).

Смещения в этом случае будут направлены вдоль радиус-вектора $r$ и будут иметь величину $-t/r^2$, так что в этом случае $Z=0$. Полученное решение — это известное решение Рэлея.

Рассмотрим теперь $\varphi_2$ и $\psi_2$. В силу (79) и (80)

$$\varphi_2=\frac{(t^2-a^2r^2)\,z}{r^3},\quad \psi_2=\frac{(t^2-b^2r^2)\,\rho}{r^3} \tag{84}$$

или

$$\varphi_2=-t^2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}-a^2\frac{\partial r}{\partial z},\quad \psi_2=-t^2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\rho}-b^2\frac{\partial r}{\partial\rho}. \tag{85}$$

Если взять одновременно оба потенциала $\varphi_2$ и $\psi_2$, то при $t>br$, т. е. после того, как поперечная волна дойдет до рассматриваемой точки, смещение будет стационарным:

$$q=(b^2-a^2)\frac{\partial^2 r}{\partial\rho\partial z},\quad s=0,\quad w=-a^2\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}-b^2\left(\frac{\partial^2 r}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial r}{\partial\rho}\right),$$

или

$$q=(a^2-b^2)\frac{\rho z}{r^3},\quad s=0,\quad w=-a^2\frac{\rho^2}{r^3}-b^2\frac{(\rho^2+2z^2)}{r^3},$$

причем это смещение создается постоянной силой, включенной при $t=0$. Для компонент тензора напряжений справедливы следующие выражения:

$$\frac{1}{\mu}T_{\rho z}=\frac{6b^2\rho z^2+2a^2\rho\,(\rho^2-2z^2)}{r^5},$$

$$\frac{1}{\mu}T_{zz}=\frac{6b^2z^3+2a^2z\,(\rho^2-2z^2)}{r^5},$$

так что

$$Z_0=-\frac{6b^2z^2+2a^2\,(\rho^2-2z^2)}{r^4}\mu$$

и

$$Z=4\pi\mu a^2\int_0^\pi(2\cos^2\theta-\sin^2\theta)\sin\theta d\theta-12\pi b^2\mu\int_0^\pi\cos^2\theta\sin\theta d\theta=$$
$$=-8\pi\mu b^2.$$

Таким образом, в случае включаемой силы величиной 1 потенциалы определяются следующим образом:

$$\varphi=\frac{a^2}{8\pi\mu b^2}\frac{z}{r}-\frac{1}{8\pi\mu b^2}\frac{t^2z}{r^3};\quad \psi=\frac{1}{8\pi\mu}\frac{\rho}{r}-\frac{1}{8\pi\mu b^2}\frac{t^2\rho}{r^3}.$$

Но $\mu b^2=\sigma$, где $\sigma$ — плотность твердого тела, так что можно записать

$$8\pi\sigma\varphi=a^2\frac{z}{r}-\frac{t^2z}{r^3},\quad 8\pi\sigma\psi=b^2\frac{\rho}{r}-\frac{t^2\rho}{r^3}, \tag{86}$$

а для компонент вектора смещений получаются известные формулы

$$8\pi\sigma q=(b^2-a^2)\frac{\rho z}{r^3},\quad s=0,\quad 8\pi\sigma w=a^2\frac{\rho^2}{r^3}+b^2\frac{\rho^2+2z^2}{r^3}.$$

В интервале времени $ar<t<br$ следует положить $\psi=0$, так что возникает режим, зависящий от $t$.

Легко показать, что рассмотренный выше случай — это единственный случай, когда при $t>br$ режим стационарен. Рассматривая потенциалы $\varphi_m$ и $\psi_m$, мы получаем в точке $r=0$ полюс порядка $m$. Коэффициенты при $t^m$ у этих потенциалов согласно (79) и (80) имеют вид

$$p=\frac{1}{r^m}P_{m-1}\left(\frac{z}{r}\right),\quad q=-\frac{\rho}{r^{m+1}}P'_{m-1}\left(\frac{z}{r}\right),$$

так что легко показать, используя формулы (72) и дифференциальное уравнение для полиномов Лежандра $P_n(x)$, что, беря в качестве потенциалов $(m-1)\varphi_m$ и $\psi_m$, мы можем добиться того, чтобы члены при $t^m$ в выражениях (72) для $q$ и $w$ аннулировались; однако член при $t^{m-2}$, имеющий при $r=0$ полюс порядка $(m-2)$, останется. Отсюда вытекает, что это будет случай, аналогичный отмеченному выше случаю Рэлея. Это случай потенциалов $2\varphi_3$ и $\psi_3$, при котором смещения $q$ и $w$ пропорциональны $t$ и имеют в точке $r=0$ полюс второго порядка. В этом случае, как и в случае Рэлея, $Z=0$. Проведем вычисления для этого случая.

Потенциалы будут иметь вид

$$2\varphi_3=\frac{(2z^2-\rho^2)}{r^5}t^3+\frac{a^2(\rho^2-2z^2)}{r^3}t,\quad \psi_3=\frac{3\rho z}{r^5}t^3-\frac{3b^2\rho z}{r^3}t.$$

К потенциалу $\varphi_3$ можно прибавить выражение

$$-2a^3+\frac{2a^2(\rho^2+z^2)}{r^3}t=-2a^2\varphi_1,$$

так, чтобы получить потенциалы

$$\varphi=-2a^3+\frac{3a^2\rho^2t}{r^3}+\frac{(2z^2-\rho^2)}{r^5}t^3,\quad \psi=-\frac{3b^2\rho z}{r^3}t+\frac{3\rho z}{r^5}t^3$$

и компоненты вектора смещений

$$q=\frac{3(b^2-a^2)\rho(\rho^2-2z^2)}{r^5}t,\quad w=\frac{-9a^2\rho^2z+3b^2z(\rho^2-2z^2)}{r^5}t.$$

При $ar<t<br$ отличен от нуля только потенциал $\varphi$, и компоненты вектора смещений будут иметь в $r=0$ полюс третьего порядка. Заметим в заключение, что если компоненты вектора смещений имеют в $r=0$ полюс порядка большего,

чем 2, результирующие вектор и момент будут существенно зависеть от формы поверхности, окружающей точку $r=0$.

В противоположном случае, когда порядок полюса меньше либо равен 2, результирующие вектор и момент стремятся при стремлении поверхности к точке $r=0$ к некоторому пределу, равному этому пределу в случае сферы.

**10.** Перейдем к рассмотрению случая $\varphi=\psi_\theta=0$. Для сокращения записи будем писать $\varphi$ вместо $\psi_z$ и $\psi$ вместо $\psi_\rho$. Из формул (70) и (71) следует, что

$$q=w=0, \quad s=\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\frac{\partial\psi}{\partial z}; \tag{87}$$

$$\frac{1}{\mu}T_{\rho\vartheta}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\partial z}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

$$\frac{1}{\mu}T_{\vartheta z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\partial z}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}, \tag{88}$$

$$T_{\rho\rho}=T_{\rho z}=T_{\vartheta\vartheta}=T_{zz}=0.$$

Вместо формул (75) справедливы формулы

$$R_0=Z_0=0, \quad \Theta_0=-\frac{\rho T_{\rho\vartheta}+zT_{\vartheta z}}{r}, \tag{89}$$

и вместо (76)

$$X_0=-\Theta_0\sin\vartheta, \quad Y_0=\Theta_0\cos\vartheta. \tag{90}$$

Принимая во внимание, что $\Theta_0$ не зависит от $\vartheta$, мы получаем в силу (77)

$$X=Y=Z=M_x=M_y=0,$$

$$M_z=-2\pi r^2\int_0^\pi(\rho T_{\rho\vartheta}+zT_{z\vartheta})\sin\theta d\theta. \tag{91}$$

В качестве $\varphi$ и $\psi$ надо взять функции, определенные равенствами (79) и (80), причем в выражении для $\varphi_m$ следует заменить $a^2$ на $b^2$.

Рассмотрим отдельные случаи. Пусть сначала

$$\varphi=t/r-b. \tag{92}$$

Тогда по предыдущим формулам

$$\Theta_0=\frac{3\mu\rho}{r^4}t, \quad M_z=3\pi^2\mu t, \quad s=-\frac{3t}{r^3}. \tag{93}$$

Таким образом, мы получаем момент, пропорциональный $t$.

Если продифференцировать это решение по $t$, мы получаем статическое решение, для которого напряжения на поверхности сферы эквивалентны постоянному моменту. Это решение было указано М. Дугалом (Math. Loc. Proc., Edinbourg, 1898) и может быть названо центром вращения относительно оси $z$ (Love. Lehrbuch der Elastizität, 1907, p. 221).

Изучим теперь потенциалы $\varphi_2$ и $\psi_2$, определенные формулами (84) или (85), в которых в выражении для $\varphi_2$ следует заменить $a^2$ на $b^2$:

$$\varphi_2 = -t^2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - b^2 \frac{\partial r}{\partial z}, \quad \psi_2 = -t^2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \rho} - b^2 \frac{\partial r}{\partial \rho}.$$

В силу (87), для того чтобы аннулировать члены с $t^2$, мы должны взять

$$\varphi = -t^2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - b^2 \frac{\partial r}{\partial z}, \qquad \psi = t^2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \rho} + b^2 \frac{\partial r}{\partial \rho},$$

однако в этом случае $s$ в формуле (87) обращается в нуль: $s=0$, так что решение будет тривиальным.

Рассмотрим теперь потенциалы $\varphi_3$ и $\psi_3$. Чтобы аннулировать члены с $t^3$, надо взять потенциалы

$$\varphi = \frac{(2z^2-\rho^2)}{r^5} t^3 + \frac{b^2(\rho^2-2z^2)}{r^3} t,$$

$$\psi = -\frac{3\rho z}{r^5} t^3 + \frac{3b^2\rho z}{r^3} t.$$

В силу (87) в этом случае $s = \frac{2b^2\rho}{r^3} t$, т. е. с точностью до мультипликативной постоянной это решение совпадает с решением (93), полученным с помощью потенциала (92).

В общем случае, как легко проверить, для аннулирования члена с $t^m$ в выражении для $s$ надо брать $-(m-1)\varphi_m$ и $\psi_m$.

11. Мы изучили случай приложенной силы и момента, пропорционального $t$. В настоящем параграфе мы разберем случай, когда силы или момент являются произвольными функциями времени. Обозначим через $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ потенциалы (79) и (80), рассмотренные выше, и построим с их помощью новые потенциалы.

Например, положим

$$\overline{\varphi} = \int_{-\infty}^{t-ar} \varphi(t-\tau)\chi(\tau)\,d\tau, \tag{94}$$

где $\chi(\tau)$ — непрерывная функция, обращающаяся в нуль при достаточно больших отрицательных $\tau$. Обозначим через $k$ любую из переменных $t$, $x$, $y$, $z$. Тогда, учитывая, что $\varphi(t)$ обращается в нуль при $t=ar$, получим

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial k} = \int_{-\infty}^{t-ar} \frac{\partial \varphi(t-\tau)}{\partial k} \chi(\tau)\,d\tau$$

и

$$\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial k \partial l} = \int_{-\infty}^{t-ar} \frac{\partial^2\varphi(t-\tau)}{\partial k \partial l} \chi(\tau)\, d\tau + \frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial k}\Big|_{\tau=t-ar} \chi(t-ar) \frac{\partial(t-ar)}{\partial l}.$$

Функция $\varphi(t)$ удовлетворяет волновому уравнению, и, следовательно,

$$a^2 \frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial t^2} - \Delta\bar{\varphi} = \Big[a^2 \frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial t} + a\frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial x}\frac{x}{r} +$$

$$+ a\frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial y}\frac{y}{r} + a\frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial z}\frac{z}{r}\Big]_{\tau=t-ar} \chi(t-ar).$$

Учитывая, что $\varphi(t)$ — это функция однородная порядка нуль по переменным $t$, $x$, $y$, $z$, получим

$$\frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial x}\frac{x}{r} + \frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial y}\frac{y}{r} + \frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial z}\frac{z}{r} = -\frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial t}\frac{(t-\tau)}{r},$$

и, следовательно,

$$a^2 \frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial t^2} - \Delta\bar{\varphi} = \left\{\frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial t}\left[a^2 - a\frac{t-\tau}{r}\right]\right\}\Big|_{\tau=t-ar} \chi(t-ar) = 0,$$

т. е. функция (94) также удовлетворяет волновому уравнению. Аналогично можно показать, что функция

$$\bar{\psi} = \int_{-\infty}^{t-br} \psi(t-\tau)\chi(\tau)\, d\tau \tag{95}$$

удовлетворяет уравнению (51).

Возьмем функцию (94) в качестве скалярного потенциала. Чтобы определить компоненты тензора напряжений, нам нужно продифференцировать выражение (94) под знаком интеграла и добавить возникающие внеинтегральные члены. Эти внеинтегральные члены для компоненты $Z_0$ вектора напряжений, действующего на поверхности сферы, будут

$$\left[\frac{a^2\mu z}{r}\frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial t}\Big|_{\tau=t-ar} - 2a\mu\frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial z}\Big|_{\tau=t-ar}\right]\chi(t-ar), \tag{96}$$

и аналогичные выражения имеют место для компонент $X_0$ и $Y_0$. Производные $\partial\varphi(t-\tau)/\partial k|_{\tau=t-ar}$ имеют в точке $r=0$ полюс первого порядка, и, следовательно, после интегрирования выражения (96) по поверхности сферы мы получаем член, стремящийся к нулю при $r$, стремящемся к нулю, т. е. эти дополнительные внеинтегральные члены в выражении для компонент тензора напряжений не играют существенной роли для напряжений в окрестности $r=0$. Это обстоятельство имеет место для всех разобранных выше случаев, что может быть проверено с помощью несложных вычислений.

Рассмотрим сначала случай включенной силы, и пусть потенциал $\varphi(t)$ таков, что $Z=C_1$, а $\psi(t)$ определены тем, что $Z=C_2$.

Определим потенциалы

$$\overline{\varphi}=\int_{-\infty}^{t-ar}\varphi(t-\tau)\,\omega'(\tau)\,d\tau,\quad \overline{\psi}=\int_{-\infty}^{t-br}\psi(t-\tau)\,\omega'(\tau)\,d\tau, \qquad (97)$$

где мы записали $\chi(\tau)$ в виде $\omega'(\tau)$. Для этих потенциалов

$$\lim_{r\to 0} X=\lim_{r\to 0} Y=0$$

и

$$Z=C_1\int_{-\infty}^{t-ar}\omega'(\tau)\,d\tau+C_2\int_{-\infty}^{t-br}\omega'(\tau)\,d\tau=C_1\omega(t-ar)+C_2\omega(t-br),$$

так что

$$\lim_{r\to 0} Z=(C_1+C_2)\omega(t).$$

Заметим, что функция $\omega'(t)$ может иметь разрывы. Так, например, если

$$\omega(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t<0,\\ t \text{ при } t\geqslant 0,\end{cases} \quad \text{то } \omega'(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t<0,\\ 1 \text{ при } t\geqslant 0.\end{cases}$$

Если записать интеграл (97) в виде интеграла Стилтьеса

$$\overline{\varphi}=\int_{-\infty}^{t-ar}\varphi(t-\tau)\,d\omega(\tau),$$

мы можем получить более общий случай приложенной силы.

Рассмотрим теперь момент, пропорциональный $t$, и пусть потенциал $\varphi(t)$ таков, что возникающий момент равен $Ct$. Запишем $\omega''(\tau)$ вместо $\chi(\tau)$ и определим потенциал

$$\overline{\varphi}=\int_{-\infty}^{t-br}\varphi(t-\tau)\,\omega''(\tau)\,d\tau. \qquad (98)$$

Для этого потенциала

$$\lim_{r\to 0} X=\lim_{r\to 0} Y=\lim_{r\to 0} Z=\lim_{r\to 0} M_x=\lim_{r\to 0} M_y=0$$

и

$$M_z=C\int_{-\infty}^{t-br}(t-\tau)\,\omega''(\tau)\,d\tau=bCr\omega'(t-br)+C\omega(t-br), \qquad (99)$$

откуда

$$\lim_{r\to 0} M_z=C\omega(t).$$

Вместо (98) мы можем написать

$$\overline{\varphi}=\int_{-\infty}^{t-br}\varphi(t-\tau)\,d\omega'(\tau),$$

причем функция $\omega'(\tau)$ может иметь разрывы. Легко видеть, что точке разрыва самой функции $\omega(t)$ соответствует случай постоянного момента.

Эти общие рассмотрения могут быть применены к различным частным случаям. Так, если взять в качестве скалярного потенциала

$$\varphi = t/r - a, \tag{100}$$

то возникает потенциал вида

$$\overline{\varphi} = \int_{-\infty}^{t-ar} \varphi(t-\tau)\,\omega''(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t-ar}\left(\frac{t-\tau}{r} - a\right)\omega''(\tau)\,d\tau = \frac{\omega(t-ar)}{r} \tag{101}$$

(Love. Lehrbuch der Elastizität, 1907, p. 355).

Потенциал (100), как мы видели, порождает давление $-\frac{16\pi\mu t}{r}$, и, следовательно, потенциал (101) порождает давление, равное в силу (99)

$$-16\pi\mu\left(a\omega'(t-ar) + \frac{\omega(t-ar)}{r}\right),$$

которое при малых $r$ ведет себя как $-\frac{16\pi\mu}{r}\omega(t)$.

В случае единичной приложенной силы мы имеем потенциалы

$$8\pi\sigma\varphi = a^2\frac{z}{r} - \frac{z}{r^3}t^2,\ 8\pi\sigma\psi = b^2\frac{\rho}{r} - \frac{\rho}{r^3}t^2,$$

так что в качестве потенциалов, определяющих силу, меняющуюся со временем по закону $\omega(t)$, необходимо взять

$$8\pi\sigma\overline{\varphi} = a^2\frac{z}{r}\int_{-\infty}^{t-ar}\omega'(\tau)\,d\tau - \frac{z}{r^3}\int_{-\infty}^{t-ar}(t-r)^2\omega'(\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{2z}{r^3}\int_{+\infty}^{ar} t'\omega(t-t')\,dt',$$

или

$$8\pi\sigma\overline{\varphi} = -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\int_{+\infty}^{ar} t'\omega(t-t')\,dt'$$

и аналогично

$$8\pi\sigma\overline{\psi} = -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\rho}\int_{+\infty}^{br} t'\omega(t-t')\,dt'.$$

Применяя формулу (72), мы получаем хорошо известные формулы для компонент вектора смещений. Наконец, потенциал

$\psi_z = \frac{1}{3\pi^2\mu}\left(\frac{t}{r} - b\right)$ определяет момент, равный $t$ при $t \geqslant 0$, так что, следовательно, потенциал

$$\overline{\psi}_z = \frac{1}{3\pi^2\mu}\int_{-\infty}^{t-br}\left(\frac{t-\tau}{r} - b\right)\omega''(\tau)\,d\tau = \frac{1}{3\pi^2\mu}\,\frac{\omega(t-br)}{r}$$

определяет момент, изменяющийся по закону

$$\int_{-\infty}^{t-br}(t-\tau)\,\omega''(\tau)\,d\tau = br\omega'(t-br) + \omega(t-br),$$

и при $r \to 0$ мы получаем $\omega(t)$ (Love. Lehrbuch der Elastizität, 1907, p. 355).

## УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ


1. В. И. Смирнов, С. Л. Соболев. Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний. Наст. изд., с. 146—184.


# РЕШЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ КРУГА И СФЕРЫ *

Рассмотрим сначала волновое уравнение в плоском случае

$$a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}. \tag{1}$$

Легко показать, что если $\varphi[t, M(x, y)]$ есть решение уравнения (1), однородное нулевой степени относительно переменных $(t, x, y)$, которое обращается в нуль на окружности $ar = t$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, то выражение

$$\int_0^{t-ar}\omega(\tau)\,\varphi(t-\tau, M)\,d\tau, \tag{2}$$

где $\omega(\tau)$ — произвольная непрерывная функция, есть также решение уравнения (1). Мы можем написать решения уравнения (1), удовлетворяющие указанным выше свойствам. Эти решения имеют вид

$$\left[\left(\frac{t}{ar} + \sqrt{\frac{t^2}{a^2r^2} - 1}\right)^m - \left(\frac{1}{ar} - \sqrt{\frac{t^2}{a^2r^2} - 1}\right)^m\right]\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix}$$

$$(m = 1, 2, \ldots;\quad t \geqslant ar),$$

что может быть написано с точностью до постоянного множителя в виде

---


* Докл. АН СССР, том 14, № 1, 1937, с. 13—16.

$$\sqrt{\frac{t^2}{a^2r^2}-1}\; U_{m-1}\left(\frac{t}{ar}\right)\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix} \qquad (m=1, 2, \ldots;\ t \geqslant ar), \tag{3}$$

где

$$U_m(x) = \frac{1}{(m+1)^2}\, T'_{m+1}(x),\quad T_m(x) = \cos(m \arccos x)$$

и $(r, \varphi)$ — полярные координаты точки $M$. В случае $m=0$ вместо (3) мы имеем решение Volterra

$$\log\left(\frac{t}{ar}+\sqrt{\frac{t^2}{a^2r^2}-1}\right). \tag{4}$$

Поставим задачу: найти решение уравнения (1) в области $r>1$, если

$$\varphi_m(t, M)\Big|_{t=0} = \frac{\partial\varphi_m(t, M)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{5}$$

и условие на окружности $r=1$ имеет вид

$$\varphi_m(t, M)\,|_{r=1} = f_m(t)\begin{cases}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi.\end{cases} \tag{6}$$

Для дальнейшего достаточно предположить, что заданная функция $f_m(t)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка и что имеют место условия $f_m(0)=f'_m(0)=0$. Мы будем искать это решение в виде

$$\varphi_m(t, M) = \int\limits_0^{t-ar+a} \omega_m(\tau)\sqrt{\frac{(t-\tau+a)^2}{a^2r^2}-1}\; U_{m-1}\left(\frac{t-\tau+a}{ar}\right)d\tau\begin{cases}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi.\end{cases} \tag{7}$$

Мы не можем дифференцировать два раза под знаком интеграла, но, интегрируя по частям, легко показать, что формула (7) дает нам решение уравнения (1). Это решение удовлетворяет условиям (5) и имеет на фронте волны прерывность не выше второго порядка. Условие (6) дает нам интегральное уравнение для $\omega_m(\tau)$

$$\int\limits_0^t \omega_m(\tau)\sqrt{\frac{(t-\tau+a)^2}{a^2}-1}\; U_{m-1}\left(\frac{t-\tau+a}{a}\right)d\tau = f_m(t) \qquad (t \geqslant 0),$$

или, дифференцируя по $t$, мы будем иметь эквивалентное уравнение

$$\int\limits_0^t \omega_m(\tau)\frac{T_m\left(\frac{t-\tau+a}{a}\right)}{\sqrt{(t-\tau+a)^2-a^2}}\,d\tau = f'_m(t) \quad (m=0, 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Для волнового уравнения с четырьмя независимыми переменными

$$a^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

решения, удовлетворяющие указанным выше условиям, имеют вид

$$Q_{n+1}\left(\frac{t}{ar}\right) P_n^{(m)}(\cos\vartheta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} \quad (n = 0, 1, \ldots; \ m = 0, 1, \ldots, n), \tag{9}$$

где $P_n^{(m)}(\cos\vartheta)\cos m\varphi$ и $P_n^{(m)}(\cos\vartheta)\sin m\varphi$ суть сферические функции, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$Q_{n+1}(x) = \int_1^x P_n(x)\,dx$$

и $P_n(x)$—полиномы Лежандра. В этом случае для предельных условий вида

$$\varphi(t, M)\,|_{r=1} = f_{m,n}(t)\, P_n^{(m)}(\cos\vartheta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} \tag{10}$$

надо положить

$$\varphi(t, M) = \int\limits_1^{t-ar+a} \omega_{m,n}(\tau)\, Q_{n+1}\left(\frac{t-\tau+a}{ar}\right) d\tau \times P_n^{(m)}(\cos\vartheta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}, \tag{11}$$

и для функции $\omega_{m,n}(\tau)$ мы будем иметь интегральное уравнение

$$\int_0^t \omega_{m,n}(\tau)\, P_n\left(\frac{t-\tau+a}{a}\right) d\tau = a f'_{m,n}(t) \quad (t > 0). \tag{12}$$

Уравнение (8) принадлежит к типу уравнений, рассмотренных еще в 1884 г. Сониным [1]. Уравнение (12) в предположении, что существует непрерывная производная $f''_{m,n}(t)$, преобразуется в интегральное уравнение Volterra второго вида с ядром, зависящим от разности аргументов [2].

Мы можем очевидно предположить $a = 1$ и, применяя обычные методы, мы будем иметь решение уравнения (8) в виде

$$\omega_m(\tau) = \int_0^\tau H_m(\tau - x) f''_m(x)\,dx, \tag{13}$$

где ядро $H_m(z)$ $(z > 0)$ выражается формулой

$$H_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{sz}\, \frac{e^{-s}}{sR_m(s)}\,ds. \tag{14}$$

В этой формуле $c$ есть достаточно большое положительное число, и, чтобы получить функцию $R_m(s)$, надо в полином

$T_m(t)$ подставить $(-1)^p K_0^{(p)}(s)$ вместо $t^p$, где $K_0(s)$ есть известная из теории функций Бесселя функция Macdonald'a. Легко показать, что при $z \to +0$ функция $H_m(z)$ стремится к бесконечности порядка $1/\sqrt{z}$.

Решение уравнения (12) выражается формулой

$$\omega_{m,n}(\tau) = f''_{m,n}(\tau) - \int_0^\tau H_{m,n}(\tau - x) f''_{m,n}(x)\,dx, \qquad (15)$$

где $H_{m,n}(z)$ равна сумме вычетов функции:

$$X(s) = \frac{-s^n}{s^n + s^{n-1}P'_n(1) + s^{n-2}P''_n(1) + \ldots + P_n^{(n)}(1)} e^{sz}$$

по отношению к нулям знаменателя.

Сингулярные решения (3) и (8) могут быть получены естественным образом путем применения общей теории, данной С. Л. Соболевым и автором [3].

Отметим наконец, что можно применить сингулярные решения, указанные выше, к решению задачи для внутренней части сферы и круга. Рассмотрим, например, случай сферы и условия (9) на поверхности этой сферы. Надо взять решение в виде

$$\varphi = \int_0^{r+t-1} \omega_{m,n}(\tau)\, Q_{n+1}\left(\frac{1+\tau-t}{r}\right) d\tau \times P_n^{(m)}(\cos\vartheta) \cos m\varphi, \qquad (16)$$

где мы положили $a = 1$. Функция $\omega_{m,n}(\tau)$ может быть определена, как и выше. Решение (16) имеет место при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Затем надо применить формулу Пуассона, чтобы привести к нулю начальные данные. Эта формула Пуассона дает нам решение при $1 \leqslant t \leqslant 2$. Для интервала $2 \leqslant t \leqslant 3$ надо применить решение вида (16), изменяя предельные условия при помощи формулы Пуассона.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА


1. N. Sonine. Acta Mathem., 1834. vol. 4, N 171.
2. V. Volterra. Leçons sur les equat. integr. Paris, 1913. P. 52—56.
3. В. Смирнов и С. Соболев. Труды Сейсмол. ин-та АН СССР. 1933, №29.С. 1—5.


## РЕШЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В СЛУЧАЕ КРУГА И СФЕРЫ*

В предыдущей статье [1] мы дали решение предельной задачи для волнового уравнения в случае круга и сферы. В этой статье мы будем рассматривать аналогичные проблемы теории упругости.

* Докл. АН СССР, том 14, № 2, 1937, с. 69—72.

Начиная с плоского случая, рассмотрим колебания части плоскости, находящейся вне окружности $r=1$, если при $t=0$ имеются нулевые начальные условия, и на окружности $r=1$ мы имеем заданные смещения. Составляющие смещения на полярные координатные оси $(r, \theta)$ выражаются формулами

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi}{\partial r}, \tag{1}$$

где $\varphi$ и $\psi$ должны удовлетворять уравнениям

$$a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \Delta\varphi, \; b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \Delta\psi \tag{2}$$

и $1/a$, $1/b$ суть скорости распространения продольных и поперечных волн. Предположим, что предельные условия имеют вид

$$u_r\,|_{r=1} = u_m(t)\, e^{im\theta}, \quad u_\theta|_{r=1} = \nu_m(t)\, e^{im\theta}. \tag{3}$$

Возьмем решения уравнений (2)

$$\varphi_m = \int_0^{t-ar+a} \Phi_m(\tau)\sqrt{\frac{(t-\tau+a)^2}{a^2r^2} - 1}\, U_{m-1}\left(\frac{t-\tau+a}{ar}\right) d\tau \times e^{im\theta},$$

$$\psi_m = \int_0^{t-br+b} \Psi_m(\tau)\sqrt{\frac{(t-\tau-b)^2}{b^2r^2} - 1}\, U_{m-1}\left(\frac{t-\tau+b}{br}\right) d\tau \times e^{im\theta},$$

где

$$U_m(x) = \frac{1}{(m+1)^2}\, T_{m+1}(x); \quad T_m(x) = \cos(m \arccos x).$$

Для неизвестных комплексных функций $\Phi_m(\tau)$ и $\Psi_m(\tau)$ мы имеем в силу предельных условий систему интегральных уравнений

$$\begin{gathered} -\int_0^t \Phi_m(\tau)\frac{(t-\tau+a)\, T_m\left(\frac{t-\tau+a}{a}\right)}{\sqrt{(t-\tau+a)^2 - a^2}}\, d\tau + \\ + im\int_0^t \Psi_m(\tau)\sqrt{\frac{(t-\tau+b)^2}{b^2} - 1}\; U_m\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right) d\tau = u_m(t), \\ im\int_0^t \Phi_m(\tau)\sqrt{\frac{(t-\tau+a)^2}{a^2} - 1}\; U_{m-1}\left(\frac{t-\tau+a}{a}\right) d\tau + \\ + \int_0^t \Psi_m(\tau)\frac{(t-\tau+b)\, T_m\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)}{\sqrt{(t-\tau+b)^2 - b^2}}\, d\tau = \nu_m(t). \end{gathered} \tag{4}$$

Мы будем рассматривать сейчас случай пространства только в предположении осевой симметрии. Пусть $(u_r, u_\vartheta, u_\theta)$ — составляющие смещения на сферические оси $(r, \vartheta, \theta)$, и предположим сначала, что $u_\theta=0$. В этом случае, пользуясь формулами теории упругости, легко показать, что

$$u_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}+\frac{\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}\psi,\quad u_\vartheta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}-\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{1}{r}\psi,$$

где $\varphi$ и $\psi$ не зависят от $\theta$ и должны удовлетворять уравнениям

$$a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\Delta\varphi; \tag{5}$$

$$b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\Delta\psi-\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\psi. \tag{6}$$

Предположим, что предельные условия имеют вид

$$u_r\big|_{r=1}=u_m(t)\,P_m(\cos\vartheta),\quad u_\vartheta\big|_{r=1}=\nu_m(t)\sin\vartheta\,P_m'(\cos\vartheta),$$

где $P_m(x)$ — полиномы Лежандра. Для уравнения (5) берем решения вида [1]

$$\varphi_m=\int_0^{t-ar+a}\Phi_m(\tau)\,Q_{m+1}\left(\frac{t-\tau+a}{ar}\right)d\tau\times P_m(\cos\vartheta), \tag{7}$$

где

$$Q_{m+1}(x)=\int_t^x P_m(x)\,dx.$$

Для уравнения (6) основные решения имеют вид

$$Q_{m+1}\left(\frac{t}{br}\right)\sin\vartheta\,P_m'(\cos\vartheta),$$

и мы положим

$$\psi_m=\int_0^{t-br+b}\Psi_m(\tau)\,Q_{m+1}\left(\frac{t-\tau+b}{br}\right)d\tau\times\sin\vartheta P_m'(\cos\vartheta). \tag{8}$$

Подставляя (7), (8) в предельные условия, имеем систему интегральных уравнений для функций $\Phi_m(\tau)$ и $\Psi_m(\tau)$:

$$\begin{gathered}-\int_0^t\Phi_m(\tau)\,\frac{t-\tau+a}{a}P_m\left(\frac{t-\tau+a}{a}\right)d\tau+\\+m(m+1)\int_0^t\Psi_m(\tau)\,Q_{m+1}\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)d\tau=u_m(t),\\-\int_0^t\Phi_m(\tau)\,Q_{m+1}\left(\frac{t-\tau+a}{a}\right)d\tau+\\+\int_0^t\Psi_m(\tau)\left[\frac{t-\tau+b}{b}P_m\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)-Q_m\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)\right]d\tau=\nu_m(t).\end{gathered} \tag{9}$$

Функция $\psi$, указанная выше, есть составляющая векторного потенциала на ось $\theta$.

Рассмотрим теперь случай, когда $u_r = u_\vartheta = 0$, и возьмем предельные условия в виде

$$u_\theta|_{r=1} = W_m(t) \sin\vartheta \, P_m(\cos\vartheta).$$

В этом случае введем составляющие векторного потенциала на оси $\rho$ и $z$ цилиндрических координат $(\rho, z, \theta)$ и положим $\varphi = \psi_z$ и $\psi = \psi_\rho$. Функция $\varphi$ должна удовлетворять уравнению (5), где надо подставить $b$ вместо $a$, и функция $\psi$ должна удовлетворять уравнению (6). Мы имеем для $u_\theta$ формулу

$$u_\theta = \sin\vartheta \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} + \cos\vartheta \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}.$$

Возьмем функцию $\varphi$ в виде (7), где надо только писать $b$ вместо $a$, и функцию $\psi$ в виде (8). Мы будем иметь для функций $\Phi_m(\tau)$ и $\Psi_m(\tau)$ следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{gathered}
-\int_0^t \Phi_m(r)\frac{t-\tau+b}{b} P_m\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)d\tau - \\
-m(m+1)\int_0^t \Psi_m(\tau) Q_{m+1}\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)d\tau = W_m(t), \\
-\int_0^t \Phi_m(\tau)\, Q_{m+1}\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)d\tau + \\
+\int_0^t \Psi_m(\tau)\left[Q_{m+1}\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right) - \frac{t-\tau+b}{b} P_m\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)\right]d\tau = 0.
\end{gathered} \tag{10}$$

Применяя обычные методы, можно решить системы (4), (9) и (10) в конечном виде, что мы сделали в явной форме для одного интегрального уравнения в предыдущей заметке.

Можно применить тот же метод для внутренних задач, как это мы уже сделали для одного уравнения [1], но в настоящем случае вместо формулы Пуассона мы должны взять известную формулу Стокса.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. Смирнов. Докл. АН СССР. 1937. Том I, № 1.

## О РАБОТАХ В. И. СМИРНОВА В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН

*(В. М. Бабич)*

В. И. Смирнов (совместно с его учеником С. Л. Соболевым) открыл очень интересные классы решений различных уравнений математической физики. Эти решения он назвал функционально инвариантными. Их характерная особенность состоит в том, что произвольная гладкая функция от такого решения остается решением изучаемого уравнения. Обратимся для примера к волновому уравнению с двумя пространственными переменными. Пусть $l(\tau)$, $m(\tau)$, $n(\tau)$, $p(\tau)$ — некоторые аналитические функции комплексного переменного $\tau$, $c = \mathrm{const} > 0$, причем $(m^2 + n^2) c^2 \equiv l^2$, тогда функция $\tau(x, y, t)$, определяемая неявным уравнением

$$l(\tau) t + m(\tau) x + n(\tau) y + p(\tau) = 0, \qquad (1)$$

будет решением волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \qquad (2)$$

в окрестности каждой точки $x$, $y$, $t$, в которой

$$\frac{\partial l}{\partial \tau} t + \frac{\partial m}{\partial \tau} x + \frac{\partial n}{\partial \tau} y + \frac{\partial p}{\partial \tau} \neq 0. \qquad (3)$$

Более того, любая аналитическая функция от $\tau(x, y, t)$

$$f(\tau) = f(\tau(x, y, t)) \qquad (4)$$

тоже будет решением уравнения (2).

В силу того, что правила дифференцирования одинаковы в случае как аналитических, так и вещественных функций, аналогичные результаты справедливы и для вещественных функций с очевидным изменением формулировок.

Это замечательное наблюдение явилось отправной точкой для создания метода В. И. Смирнова — С. Л. Соболева, называемого также методом функционально-инвариантных (ф-и) решений, который составил целую эпоху в математической теории распространения волн и привел к эффективному решению ряда ее задач. Сформулированное выше утверждение было впервые опубликовано В. И. Смирновым и С. Л. Соболевым в начале тридцатых годов [1, 2].

Причина эффективности метода ф-и решений — в сочетании трех обстоятельств. Во-первых, совокупность ф-и решений содержит многие важные решения. Это связано, в частности, с тем, что при $p = 0$ функции $\tau(x, y, t)$ и $f(\tau(x, y, t))$ очевидно однородны нулевой степени. Можно доказать, что на этом пути получаются все однородные решения. Такие известные решения, как решение Вольтерра, плоская волна $\theta(t-\alpha x-\beta y)$ $(\alpha^2+\beta^2=1/c^2)$, где $\theta$ — функция Хевисайда: $\theta(\zeta)=1$, $\zeta>0$, $\theta(\zeta)=0$, $\zeta<0$, однородны нулевой степени. Во-вторых, класс ф-и решений замкнут относительно отражения и преломления (отражающие и преломляющие границы прямолинейны, граничные условия — классические, волновой процесс в каждой среде описывается уравнением (2) со своим постоянным $c$). Под замкнутостью здесь понимается следующее свойство: отражая или преломляя ф-и решение, мы опять получаем ф-и решение. В-третьих, для нахождения нужных ф-и решений можно применять мощный аппарат теории функций комплексной переменной.

Эти обстоятельства дают возможность решить в явном виде задачу о точечном нестационарном источнике колебаний внутри или на границе упругой полуплоскости [1—3]. Полученные выражения допускают подробное исследование. Из аналитического представления вектора смещения удается выделить формулы, описывающие продольные, поперечные, головные и рэлеевы волны. Результаты работ [1—3] позволяют выписать в квадратурах решение задачи динамической теории упругости для полуплоскости при известных объемных силах и силах, заданных на поверхности. Другое применение ф-и решений может быть еще более естественное, чем предыдущее, — это нахождение решения задачи дифракции плоских волн на углах или прямолинейных экранах. Основные идеи этого применения проиллюстрированы во второй части третьего тома „Курса высшей математики“ В. И. Смирнова на примере дифракции волны с фронтом, параллельным оси ординат, на экране, совпадающем с биссектрисой первого координатного угла.

Однородные решения — это подкласс класса ф-и решений, содержащий важные сингулярные решения, соответствующие точечным источникам колебаний. Нахождению сингулярных решений волнового уравнения и уравнений динамической теории упругости посвящена работа [7].

Суммируя ф-и решения, можно получить любое осесимметричное решение уравнений динамики упругого тела и решить осесимметричную задачу о колебаниях упругого полупространства [4—5].

В последующие годы метод ф-и решений позволил получить ряд замечательных результатов. Особенно он оказался эффективным в случае задач дифракции плоских волн на прямолинейных экранах. В конце 40-х годов М. М. Фридман [12—13], применяя метод ф-и решений, свел задачу дифракции плоской упругой волны на прямолинейной трещине в однородной упругой среде к одномерным сингулярным интегральным уравнениям, допускающим решение в квадратурах. Позднее А. Ф. Филиппову [14] удалось решить эту задачу более просто, используя разбиение искомых функций на симметричные и антисимметричные относительно трещины слагаемые. Камнем преткновения для метода ф-и решений (а также и для других методов явного решения задач математической физики) явилась важная своими приложениями в сейсмике задача об упругом угле. Несмотря на усилия многих исследователей, решения ее в замкнутой форме в случае классических краевых условий найти не удалось. По-видимому, явного ее решения не существует, а волны, испытавшие дифракцию на угле, следует находить численно. Для неклассических краевых условий — нормальное смещение и касательное напряжение равно нулю (так называемый „скользкий клин") — явное решение найти можно [15]. Следует, однако, отметить, что работа [15] содержит существенную ошибку, полученное там „решение" не удовлетворяет так называемому условию Мейкснера — условию отсутствия источника колебаний в вершине угла. Ошибка работы [15] была исправлена Б. В. Костровым [16], который первым вывел правильные формулы для волнового поля.

Трехмерным аналогом угла является конус (не обязательно прямой круговой). Возникает мысль — если метод ф-и решений оказался столь эффективным при решении плоских скалярных дифракционных задач в случае угла, не существует ли какого-нибудь аналога метода ф-и решений при дифракции плоской волны на конусе. Задача дифракции плоской волны на угле сводится к некоторой краевой задаче для регулярной функции комплексного переменного, т. е., другими словами, к краевой задаче для двумерной гармонической функции. Искомый аналог должен, по-видимому, состоять в сведении дифракционной задачи к краевой задаче для трехмерной гармонической функции. Такой аналог, полученный в [17], приводит к задаче Дирихле для уравнения Лапласа. Область, для которой нужно решать задачу Дирихле, представляет собой шар с центром в начале координат, из которого удалены точки, принадлежащие конусу, на котором дифрагирует плоская волна (5).

Другое направление обобщений метода ф-и решений состоит в замене волнового уравнения (2) более сложным уравнением или системой таких уравнений. В случае системы сразу встает вопрос: что является аналогом ф-и решений. Чтобы ответить на него, рассмотрим подход к ф-и решениям, отличный от подхода, намеченного в начале нашей статьи. Пусть $f(\tau)$ — произвольная регулярная функция. Рассмотрим семейство плоских волн — решений уравнения (2):

$$\ln\left[l(\tau)\,t + m(\tau)\,x + n(\tau)\,y + p(\tau)\right],\quad c^2(m^2+n^2) = l^2. \qquad (5)$$

Пусть $l$, $m$, $n$, $p$ — аналитические функции и, кроме того, выполнено условие (3); тогда, очевидно,

$$f(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\ln(lt+mx+ny+p) \qquad (6)$$

— тоже решение, там, где $lt+mx+ny+p\neq 0$. Пусть в некоторой точке $\tau_0 \in C$, при фиксированных $x$, $y$, $t$ обращается в нуль $lt+mx+ny+p$. Интегрируя выражение (6) по произвольному малому замкнутому контуру $\Gamma$, окружающему $\tau_0$, мы опять получим решение уравнения (2). Тем самым,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\tau)\,\frac{l't+m'x+n'y+p'}{lt+mx+ny+p}\,d\tau$$

— решение уравнения (2). Применяя теорему о вычетах, получим, что $f(\tau(x, y, t))$, где $\tau$ — решение уравнения (1), будет решением уравнения (2). Мы пришли к ф-и решениям. Поскольку понятие плоской волны легко обобщается на систему уравнений однородного анизотропного тела, то и приведенное рассуждение тоже обобщается на эту систему уравнений. Мы приходим к естественному аналогу понятия ф-и решений в интересующем нас случае. Именно этот аналог ф-и решений рассмотрен В. А. Свекло в работе [18], посвященной динамическим уравнениям теории упругости для анизотропной однородной упругой среды. Рассмотрения В. А. Свекло ближе к классическим (см. [1—3]). С выводом ф-и решений, которое было здесь только что изложено, нас познакомил профессор Г. И. Петрашень.

Существуют и другие результаты, относящиеся к ф-и решениям. Оказалось, что уже для волнового уравнения с тремя пространственными переменными кроме ф-и решений, получающихся с помощью методики В. И. Смирнова — С. Л. Соболева, существуют и другие ф-и решения. В работе Н. П. Еругина [19] найдены все ф-и решения уравнения $u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}-u_{zz}=0$. М. М. Смирнов [20] обобщил результаты Н. П. Еругина на случай четырех пространственных переменных.

Другое развитие идей метода ф-и решений принадлежит самому В. И. Смирнову, установившему тесную связь этих решений с теорией так называемых изотропных конгруенций и сопряженных функций [11].

Создатели метода ф-и решений столкнулись с его недостаточной общностью: отражая ф-и решение от криволинейной границы, мы уже не получим ф-и решение. Здесь требовались иные идеи. Чрезвычайно плодотворной оказалась идея неполного разделения переменных, высказанная В. И. Смирновым в работах [9, 10], посвященных колебаниям круга и сферы. При решении задач для этих областей можно выделять множители, зависящие от угловых переменных (в случае сферы — это сферические функции, в случае круга — тригонометрические функции полярного угла). Оставшиеся множители зависят от радиуса и времени. Краевые задачи для них В. И. Смирнов исследует, уже не отделяя время. Оказывается, множители можно найти, решая интегральные уравнения Вольтерра и разностными ядрами.

Идея неполного разделения переменных была позднее применена профессором Г. И. Петрашенем и его учениками к задачам для слоистых полуплоскости и полупространства (см. [21] и указанную там литературу). В этих работах сначала делается преобразование Фурье по пространственным переменным, после чего задача сводится к решению смешанной двумерной нестационарной задачи. Эту нестационарную задачу можно решать, используя преобразование Лапласа. В результате получается удобное интегральное представление решения, используя которое, можно найти сингулярности решений с точечными источниками колебаний, перейти от интегральных представлений к той форме, которая получается с помощью ф-и решений, подсчитать волновое поле с помощью ЭВМ. Эти рассмотрения допускают обобщение на цилиндрические и сферические границы раздела, некоторые классы анизотропных сред.

Идея неполного разделения оказалась весьма полезной уже в наши дни: решение двумерной нестационарной задачи можно находить численно на ЭВМ. Делая (тоже численно) преобразование Фурье, мы придем к (численному) решению интересующей нас первоначальной дифракционной задачи. На этих идеях базируется работа [22], послужившая основой многочисленных расчетов сейсмических волновых полей на ЭВМ.

## УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

### Работы В. И. Смирнова по математическим вопросам теории распространения волн

1. О новом методе решения плоской задачи упругих колебаний: Тезисы доклада//Международная сессия Научного совета Сейсмологического института АН СССР. Бюллетень № 1. (Тр. Сейсмол. ин-та. 1931. № 16). С. 14—15. (Совместно с С. Л. Соболевым.)

2. Sur une méthode nouvelle dans le problème plan des vibration élastiques. (Тр. Сейсмол. ин-та. 1932. № 20). С. 4. (Совместно с С. Л. Соболевым.)

3. Sur le problème plan des vibrations élastiques//C. R. Acad. Sci. Paris. 1932. T. 194. P. 1437—1439. (Совместно с С. Л. Соболевым.)

4. Sur l'application de la méthode nouvelle à l'étude des vibration élastiques dans l'espace à symétrie axiale// Тр. Сейсмол, ин-та. 1933. №29. 49 с. (Совместно с С. Л. Соболевым.)

5. Однородные решения волнового уравнения и уравнений с осевой симметрией: Тезисы доклада//Бюллетень Второго Всесоюзного съезда математиков в Ленинграде 23—30 июня 1934 г. Л., 1934. С. 86.

6. О работах теоретического отдела Сейсмологического института//Тр. Сейсмол. ин-та. 1936. № 67. С. 3—7. (Совместно с С. Л. Соболевым.)

7. Sur les solutions singulières de l'équation d'onde et des équations d'élastic// Тр. Сейсмол. ин-та. 1936. № 78. С. 300.

8. Однородные решения волнового уравнения//Труды Второго Всесоюзного математического съезда. Ленинград 24—30 июня 1934. 1936. Т. 2. С. 365.

9. Решение предельной задачи для волнового уравнения в случае круга и сферы//Докл. АН СССР. 1937. Т. 14, № 1. С. 13—16.

10. Решение предельных задач теории упругости в случае круга и сферы//Докл. АН СССР. 1937. Т. 14, № 2. С. 69—72.

11. О сопряженных функциях. I//Вестн. Ленингр. ун-та. 1953. № 8. С. 3—12; II//Вестн. Ленингр. ун-та. 1953. № 11. С. 12; III//Вестн. Ленингр. ун-та. 1954. № 5. С. 3—17.

### Работы, развивающие идеи работ В. И. Смирнова

12. Фридман М. М. Дифракция плоской упругой волны относительно прямолинейной жестко заделанной щели//Уч. зап. Ленингр. ун-та, сер. матем. наук. 1949. Т. 17. С. 72—94.

13. Фридман М. М. Дифракция плоской упругой волны относительно полубесконечного прямолинейного разреза, свободного от колебаний//Докл. АН СССР. 1949. Т. 66, № 1. С. 21—24.

14. Филиппов А. Ф. Некоторые задачи дифракции плоских упругих волн//Прикл. мат. и мех. 1956. Т. 20, вып. 6. С. 688—703.

15. Свекло В. А., Сюкияйнен В. А. Дифракция плоской упругой волны относительно угла//Докл. АН СССР. 1958. Т. 119, № 6. С. 1122—1125.

16. Костров Б. В. Дифракция плоской волны на жестком клине// Прикл. мат. и мех. 1966. Т. 30, вып. 1. С. 198—203.

17. Боровиков В. А. О сведении некоторых трехмерных задач дифракции к задаче Дирихле для уравнения Лапласа//Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. № 23. С. 527—530.

18. Свекло В. А. Упругие колебания анизотропного тела//Уч. зап. Ленингр. ун-та, сер. мат. маук. 1949. Т. 17, С. 28—72.

19. Еругин Н. П. О функционально-инвариантных решениях//Уч. зап. Ленингр. ун-та, сер. мат. наук. 1948. Т. 15. С. 101—134.

20. Смирнов М. М. Функционально-инвариантные решения волнового уравнения//Уч. зап. Ленингр. ун-та, сер. мат. наук. 1950. Т. 21. С. 127—202.

21. Петрашень Г. И., Молотков Л. А., Краукпис П. В. Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах. Л., 1982. 289 с.

22. Алексеев А. С., Михайленко Б. Г. Решение задачи Лемба для вертикально-неоднородного полупространства//Изв. АН СССР, сер. Физика Земли. 1976. Т. 12, № 1. С. 11—25.

## О работах теоретического отдела сейсмологического института

*Совместно с С. Л. Соболевым*

Теоретическую работу, проведенную в течение трех с лишним лет существования теоретического отдела, трудно охватить во всей полноте в небольшом очерке. Эта работа, являясь единым целым, разветвляется, однако, по различным областям теоретической сейсмологии. Мы обрисуем здесь лишь одну из важнейших ветвей, которая до настоящего времени охватывает собою значительно больше половины всех проведенных исследований. Мы имеем в виду общую теорию распространения упругих волн и новый метод решения задач о распространении волн в слоистой среде, основанный на законах отражения и преломления.

Кроме вопросов, связанных с этим новым методом, в круг исследований теоретического отдела вошли еще задачи, касающиеся теории дифракции при неустановившихся колебательных процессах, теории распространения возмущений в неоднородной среде с непрерывно меняющимися свойствами, статические задачи теории упругости и т. д. Обзору этих вопросов будет посвящена отдельная статья.

Распространение упругих волн в безграничной среде было изучено уже давно. Как всем хорошо известно, эти исследования привели к установлению двух типов колебаний — продольных и поперечных, распространяющихся с различными скоростями. Однако на практике большею частью приходится иметь дело с тем случаем, когда среда имеет границу, и разыскивать такие решения общих уравнений теории упругости, которые удовлетворяют определенным предельным условиям на границе среды. В наиболее простом и часто встречающемся случае эта граница представляет собою свободную поверхность, и при этом предельные условия выражаются отсутствием напряжений на этой поверхности. Для того чтобы полностью определить картину движения среды, кроме предельных условий мы должны еще иметь так называемые «начальные условия», т. е. картину движения (распределение смещений и скоростей) в некоторый начальный момент времени $t=0$. Практически наиболее важен тот случай, когда при $t=0$ возмущение имеет место лишь в некоторой ограниченной части упругой среды. При этом возмущение будет распространяться по всей среде, встретив границу, отразится по некоторому закону и т. д. В предельном случае, когда упомянутая часть упругой среды с заданным начальным возмущением сводится к точке, мы имеем сосредоточенное возмущение (толчок) в покоящейся среде.

Полное решение задачи, удовлетворяющее общим уравнениям теории упругости, предельным и начальным условиям, представляет значительные трудности. Большей частью ищут частные решения задачи в виде гармонических колебаний определенной частоты.

При этом всегда удовлетворяют уравнениям упругости и предельным условиям, но совершенно не принимают во внимание каких бы то ни было начальных условий. Получаемый таким образом установившийся колебательный процесс не соответствует, конечно, строго говоря, фактической картине движения. При таком решении не имеем даже никакого распространения возмущений, и если здесь говорят о скорости распространения, то при этом имеют в виду лишь скорость распространения фазы рассматриваемого колебательного процесса.

К такого рода установившимся процессам в полупространстве относятся, например, известные волны Rayleigh'a, а для случая слоя — волны Love, так называемые $Q$-волны. Основным результатом работ теоретического отдела является рассмотрение задачи во всей ее полноте для случая полупространства и среды, состоящей из ряда параллельных слоев. Такое полное решение задачи стало возможным только после того, как теоретическому отделу удалось построить общий закон отражения от плоской границы колебаний некоторого специального типа, из которых, как оказалось, могут быть получены и колебания общего типа. Первая попытка перейти к исследованию более широкого класса задач принадлежит H. Lamb'у.

В своих знаменитых мемуарах «On the Propagation of Tremors...» Lamb получает полное решение задачи в результате сложения установившихся режимов. Этот метод представляется весьма громоздким. В самих мемуарах Lamb'a разобрана до конца лишь задача о колебаниях полупространства, когда сила действует на поверхности полупространства. Формулы для смещений получены также только для точек поверхности.

Одной из первых работ теоретического отдела было распространение формул Lamb'a на все упругое полупространство. Это удалось сначала сделать при помощи новой, построенной также теоретическим отделом, теории плоских волн, с изложения которой мы и начнем.

Под плоской волной в общем смысле этого слова мы подразумеваем такое решение уравнений упругости, удовлетворяющее предельным условиям, при котором картина движения остается неизменной в некоторой координатной системе, совершающей прямолинейное равномерное движение. Общая теория таких плоских волн была выработана теоретическим отделом для случая упругого полупространства, граница которого свободна от напряжений. В качестве одного из следствий этой теории явилось построение нового типа поверхностных волн и, в частности, было выяснено принципиальное значение Rayleigh'евской скорости без всякой искусственной связи с установившимся колебательным режимом, как это было у Rayleigh'a.

Возвращаясь к мемуарам Lamb'a, отметим, что решение, данное им для поверхности колеблющегося полупространства, может быть получено, как оказалось, наложением плоских волн указанного выше общего типа. Это дает возможность непосредственно обобщить формулы на все полупространство, о чем мы упоминали выше.

Мы переходим теперь к выяснению основного в работах теоретического отдела, а именно — к изложению нового метода решения задач о распространении упругих колебаний.

Из-за недостатка места ограничимся лишь самыми общими указаниями. Основная идея нового метода состоит в следующем: установившиеся колебательные процессы, при всей их наглядности и простоте, представляют собою все же крайне неудобный материал для построения общего решения задачи, и необходимо найти другие основные решения уравнений упругости, из которых можно было бы путем наложения составлять более общие решения.

Для простоты ограничимся рассмотрением плоской задачи, когда вся картина движения не зависит от координаты $z$, ось которой параллельна границе среды, и когда составляющая смещения на эту ось равна нулю. В этом случае достаточно исследовать явление в плоскости $xy$. Как известно, при этом составляющие смещения $u$ и $v$ на оси $x$ и $y$ могут быть выражены по формулам

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{1}$$

где $\varphi$ и $\psi$ суть потенциалы продольных и поперечных волн, которые должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right), \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = b^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right), \tag{2}$$

где $a = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}}; \qquad b = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}};$

$\lambda$ и $\mu$ суть постоянные Ламе, а $\rho$ — плотность среды.

Таким образом, теоретически говоря, задача сводится к построению решений так называемого волнового уравнения

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right), \tag{3}$$

где $c$ — некоторая постоянная.

В этом отношении новый метод основан на следующей простой теореме, дающей некоторый класс решений уравнения (3).

Пусть $\theta$ определяется как функция от $x$, $y$, $t$ уравнением вида

$$t - \theta x \pm \sqrt{\frac{1}{c^2} - \theta^2}\, y + \chi(\theta) = 0, \tag{4}$$

где $\chi(\theta)$ — заданная произвольно аналитическая функция от $\theta$. При этом вещественная часть любой аналитической функции от $\theta$ будет как функция $x$, $y$, $t$ удовлетворять уравнению (3).

При частном выборе функции $\chi(\theta)$ построенные таким образом решения волнового уравнения имеют простой механический смысл, а именно, им соответствуют колебания полупространства под влиянием силы, сосредоточенной в данном месте и в данный момент времени. Существенную роль во всем дальнейшем играет общая теория отражения от прямолинейной границы, которая была построена теоретическим отделом для колебаний указанного типа. Положим, для примера, что мы имеем продольные колебания указанного выше типа, т. е. в формулах (1) функция $\psi=0$, а функция $\varphi$ определяется описанным выше способом при $c=a$. Когда такое колебание дойдет до поверхности тела, то оказывается, что при соответствующем подборе функции $\chi$ можно присоединить к этому колебанию два других колебания тоже описанного выше типа, одно продольное и другое поперечное, так, что все они совместно дадут решение, удовлетворяющее предельным условиям и не меняющее картины движения до отражения. Можно написать простые формулы, при помощи которых отраженные потенциалы $\varphi$ и $\psi$ определяются через падающий потенциал $\varphi$. Такой же простой закон отражения можно указать и для случая падения поперечных волн. Коротко говоря, построенный класс решений имеет простой механический смысл, а также допускает простые законы отражения от прямолинейной границы.

Описанный метод был применен к большому количеству случаев. В частности, при помощи этого метода весьма просто решается упомянутая выше задача Lamb'а, а также не решенная до конца Lamb'ом задача о колебании полупространства под влиянием внутреннего источника. Принципиальное значение имеет новый метод для задачи колебания слоя конечной толщины.

Здесь до настоящего времени не представлялось возможным дать какое-либо решение задачи, кроме частных типов установившихся колебательных режимов. Имея общий закон отражения, мы можем, например, решение задачи о колебаниях под воздействием внутреннего сосредоточенного источника представить при помощи нового метода в виде суммы волн, происшедших в результате отражения от границ. В настоящее время все вышеуказанные проблемы разобраны также и для трехмерного случая при наличии осевой симметрии в картине движения.

Кроме того, в настоящее время уже окончены работы по применению нового метода к самой общей основной задаче о колебании полупространства или слоя при любых начальных условиях.

Одной из следующих проблем, которая, естественно, стоит перед теоретическим отделом, является проблема о дифракции упругих волн, т. е. проблема о ходе этих волн при наличии препятствий к их распространению. Эта проблема имеет большое как теоретическое, так и практическое значение.

В настоящее время уже разобрана задача дифракции любого начального возмущения в плоском случае относительно угла для одного волнового уравнения, т. е. для того случая, когда движение может быть составлено из волн одного типа (продольных или поперечных). В общем случае теории упругости мы имеем, как упоминали выше, два волновых уравнения, но здесь задача представляет гораздо большие трудности. Разбор этой общей задачи стоит в ближайшем плане работ Института.

*Апрель 1933 г.*

Научное издание

*СМИРНОВ ВЛАДИМИР ИВАНОВИЧ*

**ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ**

**Комплексный анализ.
Математическая теория дифракции**

Редактор З. И. Царькова

Художественный редактор А. Г. Голубев

Обложка художника В. А. Тюлюкина

Технический редактор Е. И. Егорова

Корректоры К. Я. Евнина, В. А. Латыгина

ИБ № 2647

Сдано в набор 01.12.86. Подписано в печать 10.11.88. М-38377. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 17,5. Усл. кр.-отт. 17,63. Уч.-изд. л. 16,35. Тираж 1590 экз. Заказ 406. Цена 3 р. 30 к.

Издательство ЛГУ 199034 Ленинград, Университетская наб., 7/9

Республиканская ордена «Знак Почета» типография им. П. Ф. Анохина Государственного комитета Карельской АССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 185630, г. Петрозаводск, ул. «Правды», 4