

Теория упругости

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Leitfäden der angewandten
Mathematik und Mechanik
Band 62

Elastizitätstheorie

**Grundlagen der linearen Theorie und Anwendungen
auf eindimensionale, ebene und räumliche Probleme**

Von Dr. rer. nat. **Hans Georg Hahn**
o. Professor an der Universität Kaiserslautern

Mit 109 Bildern

B. G. Teubner Stuttgart
1985

Х. Хан

Теория упругости

Основы линейной теории и ее применения

Перевод с немецкого
Е. А. Когана
под редакцией
Э. И. Григолюка



Москва «Мир»
1988

ББК 22.21
X19
УДК 531.01

Хан Х.

X19 Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения: Пер. с нем. — М.: Мир, 1988. — 344 с., ил.

ISBN 5-03-000368-1

Книга известного механика (ФРГ), содержащая четкое изложение основ линейной теории упругости и ее применений к решению одномерных, плоских и трехмерных задач. В ней последовательно вводятся основные понятия и результаты, дается обзор точных, приближенных и численных методов решения задач, приводится обширная библиография. Изложение отличается полнотой и доступностью, систематичностью и ясностью интерпретаций.

Для механиков, специалистов по теории упругости, инженеров-исследователей, аспирантов и студентов университетов и вузов.

X $\frac{1703040000-227}{041(01)-88}$ 53-88, ч. 1

ББК 22.21

Редакция литературы по математическим наукам

ISBN 5-03-000368-1 (русск.) © В. G. Teubner, Stuttgart 1985
ISBN 3-519-02364-4 (нем.) © перевод на русский язык, «Мир», 1988

От редактора перевода

Учебники, монографии, курсы по теории упругости многочисленны и у нас, и за рубежом. У нас в стране после книг В. К. Бобылева, Г. И. Белзецкого, И. Г. Бубнова, содержащих изложение начал теории упругости, в 1914—1916 гг. С. П. Тимошенко в Петербурге был выпущен двухтомный курс теории упругости, предназначенный для ознакомления с общими проблемами этой науки и с приложениями к разнообразным техническим задачам. Этот курс, с одной стороны, как бы подытожил огромную работу, проведенную в XIX в. Ж. Ламе, Л. Навье, А. Клебшем, Б. Сен-Венаном, Ф. Грасгофом, В. Ибетсоном, А. Лявом. А. Фёплем и рядом других замечательных исследователей, и, с другой стороны, способствовал во многом выбору вопросов для изложения материала. Не упоминая многих прекрасных книг по теории упругости, вышедших в последующее время (частично они указаны в предлагаемом переводе), отмечу стремление авторов этих книг к специальным исследованиям, посвященным либо применению одного и того же метода решения к проблеме, либо к разработке частных задач.

Книга проф. Ханса Хана содержит опыт изложения результатов теории упругости, полученных различными способами. Автор старается расширить круг вопросов за счет привлечения тех или иных подходов. Обсуждение, представленное в книге, показывает, что автор глубоко владеет всеми описанными им результатами; чувствуется, что он мог бы включить в книгу существенно больше того, что он сделал. Особенность книги состоит не только в сжатом изложении большого объема доставляемых сведений, но и в выработке у читателя желания углубить полученные знания. Это достигается различными способами, в том числе и ретроспективным взглядом на проблему, выявлением родоначальных работ и исследователей, выяснением связи результатов новейших исследований с ранее опубликованными. Это делает изложение напряженным, увлекательным и объективным. Разумеется, пристрастия и симпатии имеются и у автора, но они почти не видны; редактор, будучи также пристрастным, отметил это в комментариях, помещенных в конце книги.

В книге рассматривается линейная задача для однородной и изотропной сплошной среды; малы деформации материала, а также малы и его перемещения. Автор дает вывод дифференциальных уравнений деформирования упругой среды в перемещениях и напряжениях, формулирует основные задачи теории

упругости и представляет основные соотношения не только в декартовой, но и с целью практических приложений в цилиндрической и сферической системах координат. Большое внимание уделяется вариационным принципам теории упругости: принципу возможной работы, принципу возможных перемещений, принципу возможных напряжений, смешанному вариационному принципу; обсуждаются принцип стационарного значения потенциальной энергии, принцип дополнительной энергии. Формулируются теоремы Кастильяно, Менабреа, Энгессера, Бетти—Рэлея.

Существенное внимание уделяется общим методам решения проблем теории упругости. При рассмотрении дифференциальных уравнений Навье в перемещениях вводятся векторный и скалярный потенциалы, потенциал Ламе, вектор Буссинеска, вектор Папковича. Анализируя дифференциальные уравнения в напряжениях Бельтрами—Мичелла, автор вводит функции напряжений Максвелла и Мореры. Подробно показано применение обратного и полуобратного методов Сен-Венана.

Описан метод комплексных функций напряжений Г. В. Колосова для плоской задачи теории упругости. Изложен метод конформных отображений.

Уделено внимание методам интегральных преобразований, приближенным и численным методам — Рэлея—Ритца, Треффтца, Бубнова, конечных и граничных элементов.

Изучаются изгиб и кручение призматических стержней, плоская задача теории упругости (изгиб кругового стержня, задача Ламе для кругового кольца, задача Колосова для эллиптического отверстия в бесконечном растягиваемом листе).

Интересные результаты даны при формулировке пространственной задачи теории упругости. Дано математическое описание (изучено напряженно-деформированное состояние) задачи Кельвина о сосредоточенной силе в бесконечном теле, задачи Буссинеска о нормальной сосредоточенной нагрузке к полупространству, задачи Черрути о касательной сосредоточенной нагрузке на полупространство, задачи Миндлина о сосредоточенной силе внутри полупространства, задачи Ламе о полой сфере, нагруженной радиальными давлениями по внутренней и внешней поверхностям, и задачи Леона о напряжениях в сферической выемке в бесконечном теле при растяжении.

У меня нет сомнений, что книга проф. Хана будет с интересом прочитана лицами, специализирующимися в области механики сплошных сред, и проштудирована теми, кто пожелает изучить математическую трактовку одного из самых увлекательных разделов механики деформируемых твердых тел — теории упругости.

Э. И. Григолюк

Предисловие

«Классическая» линейная теория упругости, которая обсуждается в этой книге, и сегодня является важнейшей основой для большинства прочностных расчетов в технике. В этом состоит ее неоспоримое значение. Это служит также основанием для ее дальнейшего изучения и развития и в настоящее время. Поэтому открываются возможности дальнейшего расширения и улучшения основ расчетов в тех направлениях, где это представляется желательным.

Предлагаемый материал основан на лекциях, которые я с давних пор читал для студентов старших курсов политехнических институтов. Так как в этой книге речь идет о введении в курс, я постоянно стремился к тому, чтобы поставить на передний план наглядность математического аппарата. Для понимания книги достаточно элементарных знаний анализа, а также технической механики в объеме, изучаемом в техническом вузе. Отдельные замечания о содержании книги, а также о способах трактовки материала приведены в введении.

При подготовке рукописи и рисунков, а также корректуры мне помогали мои ассистенты, особенно д-р Х. А. Ричард. Я выражаю сердечную благодарность им, а также г-же Е. Йеблик за труд по переписке и перепечатке. Моя особая благодарность издательству за его согласие на издание этой книги.

Книга посвящается памяти моих университетских учителей

Людвига Фёппля (1887—1976)

Вальтера Кауфмана (1887—1965)

Винфрида Отто Шумана (1888—1974)

Введение

«В механике речь идет о поведении твердых тел при нагружении. Она помогает человеку стать властелином хрупкого земного бытия и подчинить природу своей воле!» Думается, эту выразительную фразу из справочника по физике 1928 г. А. Буземана и О. Фёппля (см. [А5])*) можно было бы предпослать в качестве эпиграфа к краткому обзору содержания предлагаемой книги.

В природе не существует абсолютно твердых, т. е. недеформируемых, тел. Однако в механике оказывается необходимым ввести в качестве абстракции идеализированное понятие абсолютно твердого тела. В статике твердого тела формулируются многие важные закономерности, описывающие равновесие системы тел и лежащие в основе всех прикладных наук. Однако во многих случаях уже нельзя не принимать во внимание деформируемость тела.

Важным свойством твердого тела, которое используется во всех приложениях, является его механическая «устойчивость», т. е. сопротивление, которое оно оказывает изменению своих размеров и формы при действии внешних сил. Это связано с появлением внутренних сил, существование которых можно объяснить только их связью с деформациями.

Упругое поведение материалов характеризуется тем, что деформации остаются конечными (т. е. не появляется текучести), а при разгрузке полностью исчезают («обратимое» поведение). Так как поведение металлов, составляющих большую часть важнейших технических материалов, в широкой области нагружения приближенно может считаться упругим, теория упругости лежит в основе многих расчетных и экспериментальных методов механики деформируемого твердого тела. При этом главной задачей теории упругости является определение возникающих внутренних сил, которые характеризуются напряжениями, а также деформациями. В основном содержание математической теории упругости составляет построение основных диф-

*) Ссылки в прямоугольных скобках относятся к списку литературы (гл. 11).

ференциальных уравнений, а также методов их интегрирования.

В так называемой классической теории упругости ограничиваются в соответствии с большинством практических приложений малыми (бесконечно малыми) деформациями и кладут в основу линейно-упругое поведение материалов согласно идеализированному закону Гука. Преимущество такого подхода состоит прежде всего в том, что математическое описание существенно упрощается благодаря геометрической линейности. Характерным для линейной теории упругости является линейность всех уравнений относительно искомых величин и их производных.

При более общих предположениях можно получить соответственно и более общие условия равновесия и кинематические соотношения для конечных деформаций, которые приводят к нелинейным уравнениям. Можно применять также физически нелинейные законы. Рассмотрение при этом становится более запутанным и связано с преодолением больших математических трудностей.

Наконец, классическую теорию упругости можно трактовать как частный линеаризованный случай общей теории и, следовательно, как некоторый вид приближения. Однако следует четко представлять себе, что линейная теория упругости является полностью замкнутой математической теорией.

Классическая теория упругости в основном была развита в XIX в. О. Коши (1789—1857), А. Навье (1785—1836), С. Д. Пуассоном (1781—1840) и Б. Сен-Венаном (1797—1886) на основе фундаментальных работ Я. Бернулли (1654—1705) и Л. Эйлера (1707—1783). Однако еще Г. Галилей (1564—1642), основоположник современного естествознания, занимался исследованиями прочности и сопротивлением материалов*).

В книге рассматривается геометрически и физически линейная теория изотропного упругого тела, которая и в настоящее время лежит в основе многих приложений, и дается также краткое обсуждение более общих теорий.

Для анализа специальных проблем, например задачи устойчивости, которая возникает в связи с потерей устойчивости и выпучиванием тонкостенных элементов конструкций и систем, должны, естественно, привлекаться нелинейные теории. Но в данной книге они не рассматриваются. Не обсуждаются также динамические задачи теории упругости и теория обобщенных сред (например, континуум Коссера).

*)О весьма богатой истории теории упругости интересующийся читатель найдет сведения в книгах Лява [A17], Вестергарда [A11] и С. П. Тимошенко [B35], а также в недавних трудах Труделла [B36] и Сабо [B37].

Для описания встречающихся в теории упругости векторных и тензорных величин будут параллельно применяться обычная в технической механике форма записи, а также тензорная форма записи, в которой уравнения имеют компактный вид. Но при этом будем ограничиваться тензорами в декартовых координатах, а общее описание в произвольных криволинейных координатах с помощью тензорного исчисления использоваться не будет. Там, где это представляется необходимым, будут применяться цилиндрические и сферические координаты, а иногда отдельные уравнения будут формулироваться в так называемой векторной форме записи (которая во многих разделах механики сплошной среды сегодня является обычной). Физическое содержание теории всегда будет ставиться на передний план и не затемняться математическим формализмом.

В приложении (гл. 10) даны важные правила вычислений с помощью тензоров в декартовых координатах. Список литературы содержит важнейшие учебники и справочники по теории упругости. В тексте также даны ссылки на ряд оригинальных работ, представляющих исторический интерес или имеющих фундаментальный характер.

Основы статики и кинематики

§ 1.1. Сплошная среда и движение сплошной среды

Деформируемые тела (твердые тела и жидкости) меняют свои размеры и форму под действием внешних сил (нагрузок). В твердых телах они вызывают деформации, в жидкостях — течение, и в обоих случаях при этом возникают внутренние силы. Величина и распределение этих сил в рассматриваемых телах зависят как от нагрузки, так и от геометрической формы тел.

Механическое поведение нагруженного тела может быть весьма разнообразным и сложным. Общее описание его базируется на теории сплошной среды. Хорошо известно, что в действительности сплошной среды нет. Но для понимания механического поведения материи в макрообъемах в качестве модели материи можно принять модель сплошной среды. При игнорировании дискретной структуры материала предполагается, что объем, занимаемый телом, непрерывно заполнен материей.

Бесконечно малый объем материала можно рассматривать как «частицу» сплошной среды, причем произвольная делимость материи, так же как и неразличимость отдельных частиц, составляет одно из основных понятий механики сплошной среды. Материя всегда имеется в окрестности любой частицы, она непрерывно распределена в сплошной среде.

Основанием для введения модели сплошной среды является опыт, делающий возможным экспериментальную проверку рассматриваемой теории. При нагружении под действием внешних сил материальные частицы меняют свое положение в пространстве, сплошная среда движется. При этом в частном случае может иметь место равномерное движение всей рассматриваемой сплошной среды как твердого тела, тогда не появляются деформации и, следовательно, внутренние силы. Предполагается также, что движение сплошной среды непрерывно. Это означает, что все величины, определяющие деформирование, являются непрерывными функциями координат.

Описание деформирования твердых тел и жидкостей в механике является чисто геометрической проблемой и совершенно не зависит от поведения материала. Это — задача кинематики сплошной среды, и характер

сил, вызывающих деформацию, не играет при этом никакой роли. Равным образом и силы, возникающие в деформируемом теле, не зависят от свойств материала. Однако принципиальное различие между твердыми телами и жидкостями состоит в том, что в последних в состоянии покоя не появляется никаких сдвигающих усилий.

Вообще механика сплошной среды охватывает очень широкую область. Она включает, с одной стороны, применение общих механических закономерностей для описания движения сплошной среды, а с другой стороны, устанавливает различные идеализированные законы (физические уравнения) для описания упомянутого многообразного механического поведения реальных материалов. Таким образом охватывается, например, упругое, пластическое, вязкое (с учетом влияния времени) поведение материала. Эти иногда очень общие разделы механики сплошной среды не будут рассматриваться в данной книге. Их можно найти, например, в [B5].

Теория упругости является частью механики сплошной среды, которая посвящена изучению упругой сплошной среды и занимается определением деформаций и внутренних сил в упругих телах при заданных нагрузках.

§ 1.2. Напряжения

Применяемые в механике твердого тела и механике материальной точки аксиомы сил переносятся в той же форме в механику сплошной среды. Приведенные ниже соображения справедливы для каждого физического тела, которое можно рассматривать как сплошную среду. Различают:

- распределенные по объему тела силы (объемные и массовые);
- силы, распределенные по поверхности.

Таким образом, внешние силы, действующие на тело (нагрузки), относятся или к объемным (например, силы тяжести, пропорциональные объему), или к поверхностным силам (например, давление, действующее на поверхность, ограничивающую тело).

1.2.1. Принцип напряжений

Важной гипотезой, служащей для механического описания действия внутренних сил в деформируемом теле, является принцип напряжений Эйлера и Коши: *В каждом поперечном сечении, мысленно проведенном внутри тела, имеет место взаимодействие сил такого же характера, как и распределенных по поверхности нагрузок.* Рассмотрим в этой связи деформированное тело, которое под нагрузкой находится в равновесии (рис. 1.1). Воображаемое сечение делит тело на две части объемами V_1 и V_2 . Элемент поверхности ΔA с центром в точке P поперечного сечения характеризуется единичным вектором нор-

мали \mathbf{n} , направленным к V_1 . Действие, оказываемое частью V_1 тела в точке P , на часть V_2 , можно представить вектором силы $\Delta\mathbf{F}$ и вектором момента $\Delta\mathbf{M}$.

В пределе при $\Delta A \rightarrow 0$ (при фиксированном направлении \mathbf{n}) могут быть приняты следующие физически обоснованные предположения:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta A} = \frac{d\mathbf{F}}{dA} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}} \quad (1.1)$$

и, кроме того,

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{M}}{\Delta A} = 0. \quad (1.2)$$

Справедливость этих допущений окончательно может быть установлена лишь опытом. Показано, что все следствия, основанные на принципе напряжений, находятся в соответствии с экспериментальными данными.

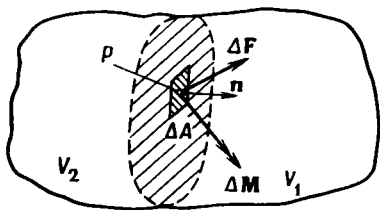


Рис. 1.1. К определению тензора напряжений.

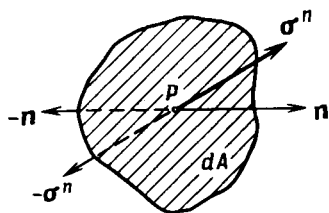


Рис. 1.2. К принципу напряжений.

Определяемый соотношением (1.1) вектор $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}}$ называется вектором напряжений в точке P . Он действует на элемент поверхности с направлением нормали \mathbf{n} . Известно, что векторы напряжений внутри деформируемого тела не образуют векторного поля в обычном смысле, так как напряжения зависят и от ориентации элемента поверхности, на который они действуют. Вектор $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}}$ меняется при изменении направления нормали к ΔA . Для векторов напряжений, действующих в одной и той же точке, но направленных в противоположные стороны от сечения элемента, справедливо равенство

$$\boldsymbol{\sigma}^{-\mathbf{n}} = -\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}}. \quad (1.3)$$

С его помощью, как видно из рис. 1.2, описывается действие части V_2 тела на часть V_1 и обратно.

Соотношение (1.3) можно трактовать как непосредственное выражение третьего закона Ньютона (принцип равенства действия и противодействия). Но оно может быть также

непосредственно выведено из теоремы о количестве движения и из принципа напряжений Коши. Совокупность всех векторов напряжений $\sigma^n(P)$ в точке для всех направлений \mathbf{n} (имеется бесчисленное множество таких векторов напряжений!) определяет напряженное состояние в точке P . Таким образом, принцип напряжений Коши может быть сформулирован следующим образом: *Напряженное состояние в точке деформируемого тела определяется внутренними силами в этой точке.*

1.2.2. Тензор напряжений

1.2.2.1. Нормальные и касательные напряжения. Как известно, в общем случае направление $\sigma^n(P)$ не совпадает с направлением нормали \mathbf{n} . Проекция вектора напряжений $\sigma^n(P)$, действующего в точке P , на произвольное направление (определяемое единичным вектором) называется компонентой вектора напряжений в этом направлении.

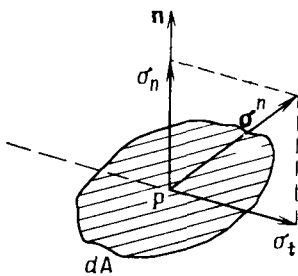


Рис. 1.3. Нормальное и касательное напряжения, действующие на элемент поверхности.

Разложение σ^n на нормальную и касательную к dA компоненты дает так называемые нормальное напряжение σ_n и касательное напряжение σ_t (рис. 1.3). Как видно из рисунка, справедливо соотношение $|\sigma^n|^2 = \sigma_n^2 + \sigma_t^2$. Следует всегда помнить, что величины σ_n и σ_t , определенные подобным образом, не являются компонентами вектора в обычном смысле. Заметим, что целесообразно касательные напряжения σ_t в плоскости элемента dA вновь раскладывать на два ортогональных направления.

1.2.2.2. Напряженное состояние в точке. Далее показано, что бесконечное множество векторов напряжений $\sigma^n(P)$ в точке не являются независимыми друг от друга. Они могут быть вычислены, если в точке P известны векторы напряжений для трех взаимно ортогональных площадок, проходящих через эту точку. Это уже указывает на то, что служащие для описания напряженного состояния величины имеют характер компонент тензора.

В дальнейшем будем применять декартовы координаты x, y, z или соответственно x_i с базисными векторами \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$). Рассмотрим в точке P бесконечно малый элемент объема со сторонами dx_1, dx_2, dx_3 . Векторы напряжений σ^i , действующие на гранях элемента $x_i = \text{const}$, показаны на рис. 1.4.

При этом и последующем рассмотрении должно быть принято во внимание важное предположение о том, что деформированный и недеформированный элементы объема идентичны.

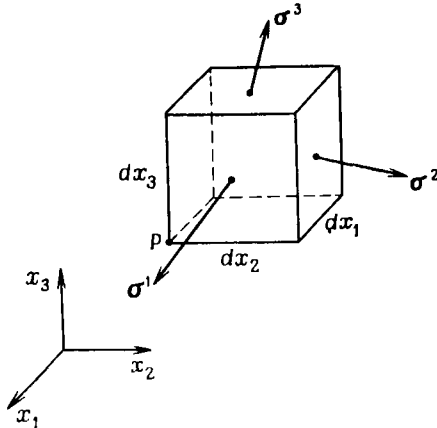


Рис. 1.4. Векторы напряжений на гранях объемного элемента.

Это означает, что допускаются только малые деформации, что является естественным для линейной теории упругости. Разложение, например, вектора напряжений σ^3 (который действует на поверхности элемента $x_3 = \text{const}$) по координатным осям x_i имеет вид (рис. 1.5)

$$\sigma^3 = e_1\sigma_1^3 + e_2\sigma_2^3 + e_3\sigma_3^3 = \sum_{k=1}^3 e_k\sigma_k^3 = e_k\sigma_k^3,$$

причем знак суммы при суммировании по дважды встречающимся индексам может быть опущен*). Величины σ_i^j не являются компонентами вектора в обычном смысле, их целесообразно обозначать двойным индексом σ_{ij} . Тогда в общем случае справедливо равенство

$$\sigma^i = e_j\sigma_j^i = e_j\sigma_{ij}. \quad (1.4)$$

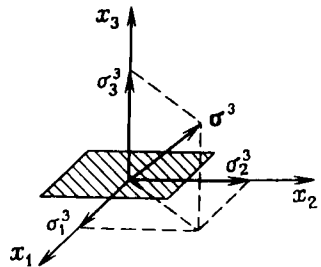


Рис. 1.5. Разложение вектора напряжений σ^3 , действующего на элемент поверхности $x_3 = \text{const}$, на три компоненты (для наглядности они показаны стрелками).

*) Важные правила тензорной формы записи приведены в приложении (гл. 10).

Скалярное умножение на базисный вектор \mathbf{e}_k дает

$$\mathbf{e}_k \sigma^i = \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j \sigma_{ij} = \delta_{kj} \sigma_{ij} \text{ или } \sigma_{ik} = \mathbf{e}_k \sigma^i, \quad (1.5)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Девять компонент напряжений, заданных соотношением (1.5), описывают напряженное состояние в точке деформируемого тела. Они могут быть представлены матрицей напряжений

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix},$$

причем первый индекс указывает номер координатной поверхности, а второй — направление, в котором действует компонента напряжений. Наглядное изображение компонент напряжений, действующих на гранях элемента кубической формы, показано на рис. 1.6.

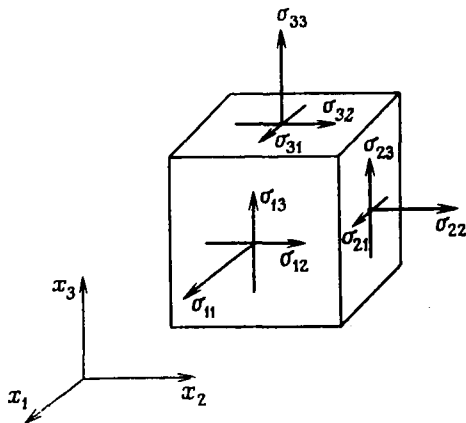


Рис. 1.6. Компоненты напряжений по граням объемного элемента.

Величины σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} называются нормальными напряжениями, σ_{12} , σ_{23} и т. д. — касательными напряжениями. Для нормальных и касательных напряжений употребляются различные обозначения, например (часто применяемые в технической механике) σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} для нормальных напряжений, τ_{xy} , τ_{yz} и т. д. для касательных напряжений.

Девять компонент напряжений σ_{ij} представляют собой в совокупности физическую величину, которая называется тензором напряжений Коши; это тензор второго ранга *).

*) Следовало бы указать на то, что слова «тензор напряжений» представляют собой тавтологию, так как понятие «тензор» было образовано из латинского *tensio* — напряжение. Однако, как это часто бывает, этот плеоназм укоренился.

1.2.2.3. Свойства тензора напряжений. Зная компоненты тензора напряжений в точке, можно вычислить вектор напряжений σ^n на произвольно ориентированной площадке dA , проходящей через эту точку. Это осуществляется посредством формул Коши, которые могут быть выведены различными способами.

Выберем в качестве элемента поверхности dA согласно рис. 1.7 малый треугольник в окрестности точки P , который об-

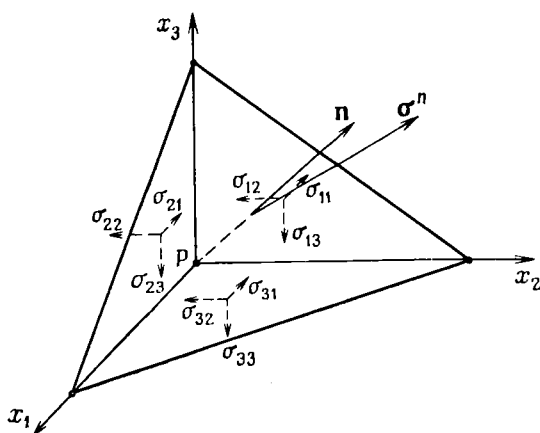


Рис. 1.7. Вектор и компоненты напряжений на поверхностях бесконечно малого тетраэдра.

разует поверхность бесконечно малого тетраэдра (остальными гранями его являются треугольники, лежащие в координатных плоскостях). Для вектора напряжений, действующего на элемент поверхности dA , справедливо равенство

$$\sigma^n = \mathbf{e}_1 \sigma_1^n + \mathbf{e}_2 \sigma_2^n + \mathbf{e}_3 \sigma_3^n.$$

Разложение нормального к dA единичного вектора имеет вид

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 n_1 + \mathbf{e}_2 n_2 + \mathbf{e}_3 n_3$$

и для остальных поверхностей тетраэдра (проекций элемента dA) получаются соотношения

$$dA_i = n_i dA, \quad (1.6)$$

причем компоненты нормали \mathbf{n} являются направляющими косинусами $n_i = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_i)$, удовлетворяющими условию $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$.

Условие равновесия сил, например, в направлении оси x_1 дает

$$\sigma_1^n dA - \sigma_{11} dA_1 - \sigma_{21} dA_2 - \sigma_{31} dA_3 = 0$$

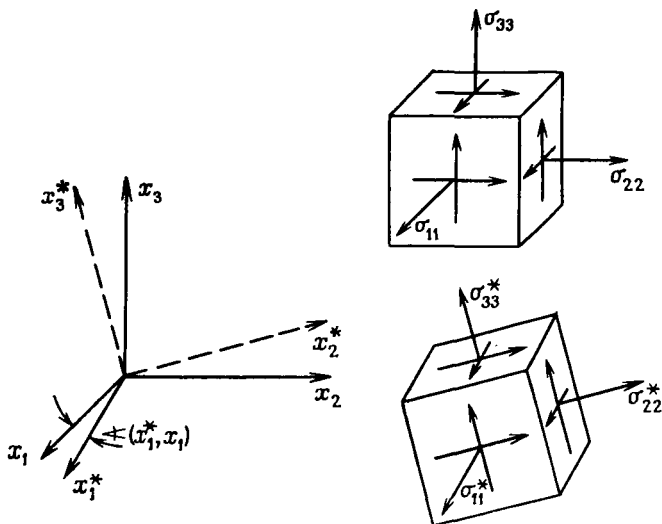


Рис. 1.8. Компоненты напряжений при повороте системы координат.

или с учетом (1.6)

$$\sigma_1^n = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 = \sigma_{k1}n_k.$$

Аналогичные уравнения получаются для остальных двух направлений. Отсюда следуют фундаментальные формулы Коши (в скалярной форме записи)

$$\sigma_i^n = \sigma_{ji}n_j. \quad (1.7)$$

Так как эти соотношения справедливы для произвольно направленного вектора, отсюда также вытекает тензорная природа компонент напряжений. Кроме того, это является доказательством того, что напряженное состояние в точке деформируемого тела полностью определяется девятью компонентами тензора напряжений.

1.2.2.4. Преобразование компонент тензора напряжений.

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} в точке, определенные в декартовых координатах x_1, x_2, x_3 , изменяются при повороте системы координат согласно закону преобразования компонент аффинного тензора второго ранга (рис. 1.8). Формулы преобразования координат имеют вид

$$x_i^* = x_k \cos(x_i^*, x_k) = c_{ik}x_k,$$

причем коэффициенты преобразования $c_{ik} = c_{ki}$ являются направляющими косинусами

$$c_{ik} = \cos(x_i^*, x_k) = \cos(x_k, x_i^*) = c_{ki}.$$

Компоненты напряжений преобразуются как компоненты тензора второго ранга по закону

$$\sigma_{ij}^* = c_{ik} c_{jl} \sigma_{kl}. \quad (1.8)$$

В развернутом виде после выполнения суммирования формулы преобразования (1.8) запишутся, например, так:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^* &= \sigma_{11} c_{11}^2 + \sigma_{22} c_{12}^2 + \sigma_{33} c_{13}^2 + (\sigma_{12} + \sigma_{21}) c_{11} c_{12} + \\ &\quad + (\sigma_{13} + \sigma_{31}) c_{11} c_{13} + (\sigma_{23} + \sigma_{32}) c_{12} c_{13} \text{ и т. д.,} \\ \sigma_{12}^* &= (\sigma_{11} c_{11} + \sigma_{21} c_{12} + \sigma_{31} c_{13}) c_{21} + (\sigma_{12} c_{11} + \sigma_{22} c_{12} + \sigma_{32} c_{13}) c_{22} + \\ &\quad + (\sigma_{13} c_{11} + \sigma_{23} c_{12} + \sigma_{33} c_{13}) c_{23} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

В частности, для плоского случая ($x_1 = x$, $x_2 = y$; поворот системы координат на угол α) получаются известные из элементарных теорий прочности (для случая симметрии тензора напряжений, т. е. $\tau_{xy} = \tau_{yx}$) формулы

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^* &= \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \\ \sigma_{yy}^* &= \sigma_{xx} \sin^2 \alpha + \sigma_{yy} \cos^2 \alpha - 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \\ \tau_{xy}^* &= -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \end{aligned}$$

графическое изображение которых дается кругами Мора.

При преобразовании координат получаются следующие инварианты тензора напряжений, которые представляют собой не зависящие от ориентации системы координат величины

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii} \text{ (след),} \\ J_{11} &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}, \\ J_{111} &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Физическое содержание тензора напряжений выражается именно этими инвариантами.

1.2.3. Уравнения равновесия в напряжениях

До сих пор рассматривалось только напряженное состояние в одной точке деформируемого тела. Если тело нагружено

внешними силами и находится в деформированном состоянии в равновесии, то в нем возникает некоторое непрерывное распределение напряжений. Основные уравнения для их определения получаются из рассмотрения условий статического равновесия.

1.2.3.1. Равновесие сил и моментов для бесконечно малого элемента. Если деформируемое тело находится в состоянии равновесия под действием внешних сил, то и любая произвольно выделенная из него часть тела должна также находиться в равновесии. Пусть тело нагружено заданными поверхностными силами и однородными объемными силами с плотностью

$$\mathbf{f} = e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_3 f_3.$$

Предполагается прежде всего, что компоненты напряжений σ_{ij} , так же как и их первые частные производные, являются непрерывными функциями координат. Далее предполагается, что деформации являются малыми, так что уравнения равновесия можно формулировать для недеформированного элемента.

Для элемента, нагруженного согласно рис. 1.9, компоненты

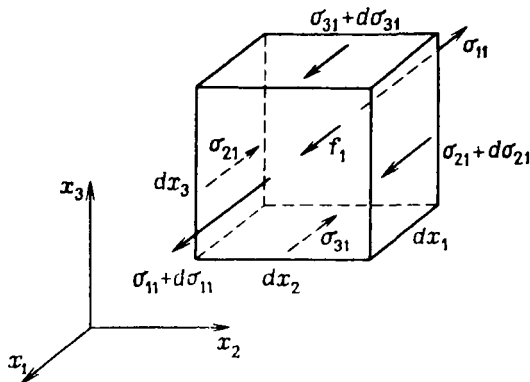


Рис. 1.9. Бесконечно малый объемный элемент с компонентами напряжений в направлении оси x_1 .

напряжений при приращении координат на бесконечно малую величину изменяются известным образом. Например, для нормальных напряжений, действующих в направлении оси x_1 , справедливо равенство

$$d\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1 + dx_1, x_2, x_3) - \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1.$$

Равновесие сил в направлении оси x_1 требует, чтобы

$$\left(\sigma_{11} + \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 - \sigma_{11}\right) dx_2 dx_3 + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 - \sigma_{21}\right) dx_2 dx_3 + \\ + \left(\sigma_{31} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3 - \sigma_{31}\right) dx_1 dx_2 + f_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0,$$

откуда следует

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3} + f_1 = 0.$$

Аналогичные соотношения получаются для двух остальных направлений

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3} + f_2 = 0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = 0.$$

В общем случае эти три уравнения можно записать в форме

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_i = 0, \quad (1.10)$$

или более кратко

$$\sigma_{ij,i} + f_i = 0, \text{ где } \frac{\partial}{\partial x_i}(\dots) = (\dots)_{,i}.$$

Уравнения (1.10) называются *условиями равновесия сил* или *статическими уравнениями*.

Чтобы удовлетворить условию равновесия моментов сил, действующих на выделенный элемент, например, относительно оси, параллельной x_3 и проходящей через центр тяжести элемента (рис. 1.10), требуется выполнение равенства

$$\left(\sigma_{12} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 + \sigma_{12}\right) dx_2 dx_3 \frac{dx_1}{2} - \\ - \left(\sigma_{21} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 + \sigma_{21}\right) dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} = 0,$$

откуда

$$2\sigma_{12} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 = 2\sigma_{21} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2.$$

В пределе при $dx_1 \rightarrow 0$, $dx_2 \rightarrow 0$ из этого выражения следует $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. Аналогичные соотношения относительно осей, параллельных x_2 и x_3 , приводят к равенствам $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ и $\sigma_{13} = \sigma_{31}$. Таким образом, в общем случае справедливо соотношение

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (1.11)$$

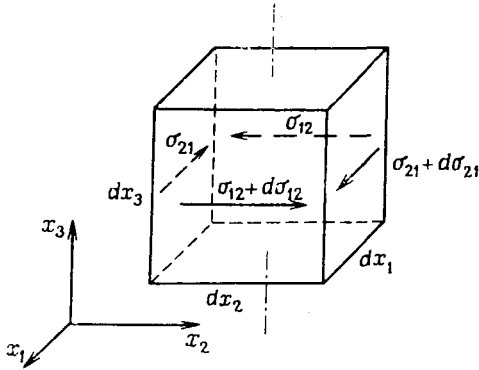


Рис. 1.10. К уравнению равновесия моментов, действующих на гранях бесконечно малого объемного элемента.

Оно означает, что тензор напряжений является симметричным. Этот важный результат иногда называют также *теоремой Больцмана*.

Следует заметить, что в теории обобщенных сред, для которых предельное значение (1.2) предполагается конечным (например, в теории континуума Коссера, когда появляются так называемые *моментные напряжения*), тензор напряжений уже не является симметричным. См., например, соответствующие работы [А3, 2, 3].

Вследствие симметрии тензора напряжений формулы Коши (1.7) и уравнения статического равновесия (1.10) можно также записать в виде

$$\sigma_i^n = \sigma_{ij} n_j \quad \text{и} \quad \sigma_{ij,j} + f_i = 0.$$

1.2.3.2. Другой вывод уравнений равновесия. Уравнения равновесия, полученные выше для бесконечно малого элемента объема, могут быть выведены также, если рассматривать произвольный конечный объем деформированного тела, т. е. тело в целом или любую выделенную мысленно из него часть.

Рассмотрим такой объем V с поверхностью A , изображенный на рис. 1.11. На элемент объема dV действует вектор объемной силы \mathbf{f} , на элемент поверхности dA — вектор напряжений $\boldsymbol{\sigma}^n$. Тогда равнодействующая сил, действующих на объем V (в символической векторной форме), будет равна

$$\mathbf{F}_{\text{равн}} = \int_V \mathbf{f} dV + \int_A \boldsymbol{\sigma}^n dA,$$

или в скалярной форме

$$F_i = \int_V f_i dV + \int_A \sigma_i^n dA. \quad (1.12)$$

Аналогично для результирующего момента приложенных сил относительно начала координат (характеризуемого радиус-вектором \mathbf{r}) получается равенство

$$\mathbf{M}_{(0)} = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}^n dA,$$

или

$$M_{(0)i} = \int_V \varepsilon_{ijk} x_j f_k dV + \int_B \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_k^n dA, \quad (1.13)$$

где ε_{ijk} — тензор Леви-Чивиты (псевдотензор) (см. § 10.3). Из условий равновесия сил и моментов следует $\mathbf{F}_{\text{равн}} = 0$, а также

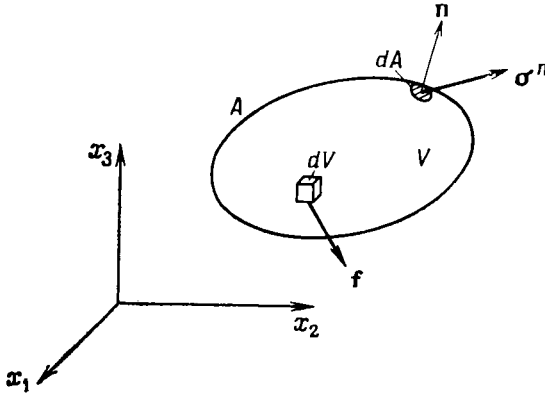


Рис. 1.11. Тело при нагружении объемными и поверхностными силами.

$\mathbf{M}_{(0)} = 0$. Тогда с учетом формул Коши из (1.12) получим

$$\int_V f_i dV + \int_A \sigma_{ij} n_j dA = 0. \quad (1.14)$$

Поверхностный интеграл может быть преобразован в объемный по теореме Гаусса ^{*)}, а именно

$$\int_A \sigma_{ij} n_j dA = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV,$$

и (1.14) принимает вид

$$\int_V (f_i + \sigma_{ij,j}) dV = 0. \quad (1.15)$$

^{*)} См. § 10.6.

Это соотношение справедливо для произвольной части объема деформируемого тела (или вообще для всего тела). Так как подынтегральное выражение предполагалось непрерывным, уравнение (1.15) может быть удовлетворено только тогда, когда подынтегральная функция обращается в нуль. Отсюда вновь следуют уравнения равновесия $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$ (ср. с (1.10)).

Аналогично из (1.13) прежде всего вытекает

$$\int_V \mathbf{e}_{ijk} x_j f_k dV + \int_A \mathbf{e}_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dA = 0. \quad (1.16)$$

Применение формулы Гаусса к поверхностному интегралу приводит к выражению

$$\begin{aligned} \int_A \mathbf{e}_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dA &= \int_V (\mathbf{e}_{ijk} x_j \sigma_{kl})_{,l} dV = \\ &= \int_V \mathbf{e}_{ijk} (x_j \sigma_{kl,l} + \delta_{jl} \sigma_{kl}) dV = \int_V \mathbf{e}_{ijk} (-x_j f_k + \sigma_{kl}) dV, \end{aligned}$$

где использованы (1.10). Таким образом, из (1.16) следует

$$\int_V \mathbf{e}_{ijk} \sigma_{kj} dV = 0.$$

Это равенство также справедливо для произвольного объема, поэтому из непрерывности подынтегральной функции должно следовать $\mathbf{e}_{ijk} \sigma_{kj} = 0$. Выполняя суммирование, получим

$$\sigma_{32} - \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{13} - \sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{21} - \sigma_{12} = 0$$

или уже известный для общего случая результат (1.11): $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Следует заметить, что в механике сплошной среды уравнения равновесия (1.10) и соотношению (1.11) соответствуют уравнения импульсов и моментов.

1.2.3.3. Условия равновесия на границе. Уравнения равновесия (1.10) справедливы всюду внутри деформируемого тела. На границе, т. е. на поверхности тела, должны удовлетворяться условия равновесия в напряжениях. Это означает, что на границе должен выполняться непрерывный переход тензора напряжений к поверхностной нагрузке. Таким образом, из (1.3) следует $\mathbf{p}^n = -\boldsymbol{\sigma}^n = \boldsymbol{\sigma}^n$, причем \mathbf{p}^n означает вектор напряжений на границе, заданных на стороне поверхности, характеризуемой вектором нормали \mathbf{n} .

С помощью формул Коши граничные условия в напряжениях примут вид

$$\mathbf{p}_i^n = \sigma_{ij} n_j, \quad (1.17)$$

и, следовательно, напряжения на границе (поверхностные нагрузки) находятся в равновесии с напряжениями внутри тела.

Уравнения (1.17) записываются в виде

$$p_1^n = \sigma_{11} \cos(n, x_1) + \sigma_{12} \cos(n, x_2) + \sigma_{13} \cos(n, x_3),$$

$$p_2^n = \sigma_{12} \cos(n, x_1) + \sigma_{22} \cos(n, x_2) + \sigma_{23} \cos(n, x_3),$$

$$p_3^n = \sigma_{13} \cos(n, x_1) + \sigma_{23} \cos(n, x_2) + \sigma_{33} \cos(n, x_3),$$

причем компоненты вектора нормали являются направляющими косинусами.

1.2.4. Главные направления и главные напряжения

При преобразовании компонент тензора напряжений вследствие поворота системы координат возникают два важных вопроса: при каком векторе нормали \mathbf{n} вектор напряжений $\boldsymbol{\sigma}^n$ в точке будет параллелен \mathbf{n} и при каком \mathbf{n} нормальные компоненты вектора напряжений будут иметь экстремальные значения? Оба вопроса связаны с определением собственных значений тензора напряжений. Математически это сводится к преобразованию главных осей, и решение задачи достигается так называемой диагонализацией тензора напряжений.

Следует обратить внимание на то, что в каждой точке деформируемого тела имеются такие характерные направления, в которых действуют только нормальные напряжения. Они называются *главными направлениями*, а ортогональные плоскости, свободные от касательных напряжений, — *главными плоскостями*. Нормальные напряжения, действующие в этих плоскостях, называются *главными напряжениями*. Они оказываются собственными значениями тензора напряжений. Координатные оси, соответствующие главным направлениям, называются *главными осями*.

Можно доказать, что существуют три таких главных направления, которые взаимно ортогональны (в особых случаях их может быть больше), и, таким образом, напряженное состояние в точке деформированного тела может характеризоваться также заданием трех главных нормальных напряжений и их направлений.

1.2.4.1. Главные нормальные напряжения. Как уже отмечалось, в общем случае вектор напряжений не перпендикулярен элементу поверхности dA . Если вектором \mathbf{n} задано одно главное направление, то должно быть справедливо равенство

$$\boldsymbol{\sigma}^n = \sigma \mathbf{n}, \quad (1.18)$$

где σ — модуль соответствующего главного напряжения*). После применения формул Коши равенство (1.18) может быть представлено в скалярной форме

$$\sigma_i^n = \sigma_{ij} n_j = \sigma n_i, \text{ или } (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0. \quad (1.19)$$

*) Для общего случая тензора 2-го ранга T уравнению (1.18) соответствует соотношение $T\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A}$, где T — тензор второго ранга, \mathbf{A} — собственный вектор, λ — собственное значение тензора T .

Это основное соотношение для определения собственных чисел и собственных векторов тензора напряжений. В развернутой форме это уравнение запишется так:

$$\begin{aligned}(\sigma_{11} - \sigma) n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 &= 0, \\ \sigma_{21} n_1 + (\sigma_{22} - \sigma) n_2 + \sigma_{23} n_3 &= 0, \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + (\sigma_{33} - \sigma) n_3 &= 0.\end{aligned}$$

Нетривиальные решения n_1, n_2, n_3 этой линейной однородной системы уравнений существуют только, когда определитель системы уравнений обращается в нуль, т. е.

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Это кубическое уравнение называется характеристическим уравнением тензора напряжений и может быть записано в виде

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_{II} \sigma - J_{III} = 0. \quad (1.20)$$

Величины J_1, J_{II}, J_{III} — уже введенные ранее инварианты тензора напряжений. Их можно записать в следующей скалярной форме:

$$\begin{aligned}J_1 &= \sigma_{ii}, \\ J_{II} &= 1/2 (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ji}), \\ J_{III} &= 1/6 (\sigma_{ii} \sigma_{jj} \sigma_{kk} + 2 \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} - 3 \sigma_{ij} \sigma_{ij} \sigma_{kk}).\end{aligned} \quad (1.21)$$

Как видно, речь здесь идет о величинах, которые не зависят от координатной системы, так как все индексы встречаются попарно и, следовательно, по всем ним выполняется суммирование. Три решения характеристического уравнения (1.20) являются главными нормальными напряжениями σ_1, σ_2 и σ_3 . Согласно основной теореме алгебры, с их помощью уравнение (1.20) можно записать в следующей форме:

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0.$$

Отсюда вытекают выражения для инвариантов

$$\begin{aligned}J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ J_{II} &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \\ J_{III} &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.\end{aligned} \quad (1.22)$$

Так как физическое содержание тензора напряжений определяется его тремя инвариантами (не зависящими от системы координат), все величины, зависящие от тензора напряжений, должны быть функциями J_1, J_{II}, J_{III} . Это обстоятельство учитывается в общих теориях механического поведения материалов.

Известно, что собственные значения вещественного симметричного тензора второго ранга являются всегда вещественными числами. Для тензора напряжений это можно непосредственно доказать, если исходить из характеристического уравнения. Один корень кубического уравнения должен быть всегда вещественным. Предположим, что это главное напряжение σ_1 , действующее в главном направлении x_1^* , тогда

$$\sigma_{11}^* = \sigma_1, \quad \sigma_{12}^* = \sigma_{21}^* = \sigma_{13}^* = \sigma_{31}^* = 0.$$

Кубическое уравнение в детерминантной форме может быть записано так:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22}^* - \sigma & \sigma_{23}^* \\ 0 & \sigma_{23}^* & \sigma_{33}^* - \sigma \end{vmatrix} = 0,$$

или $(\sigma_1 - \sigma)[(\sigma_{22}^* - \sigma)(\sigma_{33}^* - \sigma) - \sigma_{23}^{*2}] = 0$. Отсюда получаются два других главных напряжения:

$$\sigma_{2,3} = 1/2[(\sigma_{22}^* + \sigma_{33}^*) \pm \sqrt{(\sigma_{22}^* - \sigma_{33}^*)^2 + 4\sigma_{23}^{*2}}]$$

и следует, что корни всегда вещественны.

Наконец, нужно еще показать, что три главных направления являются ортогональными. Предположим при этом, что три главных напряжения различны по величине, т. е. $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$. Пусть далее главные направления, соответствующие главным напряжениям σ_1 и σ_2 , заданы нормальными векторами $\mathbf{n}^{(1)}$ и соответственно $\mathbf{n}^{(2)}$ (с компонентами $n_i^{(1)}$ и соответственно $n_i^{(2)}$). Тогда $\sigma_{ij}n_j^{(1)} = \sigma_1 n_i^{(1)}$ и после скалярного умножения на $n_i^{(2)}$ получим

$$\sigma_{ij}n_i^{(2)}n_j^{(1)} = \sigma_1 n_i^{(1)}n_i^{(2)}. \quad (1.23)$$

Аналогично

$$\sigma_{ij}n_j^{(2)}n_i^{(1)} = \sigma_2 n_i^{(2)}n_i^{(1)}. \quad (1.24)$$

Вследствие симметрии $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ индексы i и j могут быть переставлены и левые части равенств (1.23) и (1.24) оказываются одинаковыми. Отсюда следует $(\sigma_1 - \sigma_2)n_i^{(1)}n_i^{(2)} = 0$, поэтому для $\sigma_1 \neq \sigma_2$ имеем $\mathbf{n}^{(1)} \perp \mathbf{n}^{(2)}$. Аналогичным образом можно показать, что $\mathbf{n}^{(1)} \perp \mathbf{n}^{(3)}$ и $\mathbf{n}^{(2)} \perp \mathbf{n}^{(3)}$.

Если $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$, то все направления, нормальные к плоскости напряжений σ_2 и σ_3 , являются главными направлениями. В случае $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ все ортогональные направления будут главными. Это напряженное состояние всестороннего растяжения или сжатия называется гидростатическим напряженным состоянием. Если речь идет о всестороннем сжатии, то сжимаю-

щие напряжения действуют перпендикулярно каждому произвольному поперечному сечению, как это имеет место в покоящейся (идеальной или реальной) жидкости.

Остается еще доказать, что главные напряжения соответствуют экстремальным значениям нормальных напряжений в данной точке. Зная вектор напряжений σ , нормальные напряжения можно определить согласно равенству $\sigma_n = \sigma^n n$, соответственно в тензорной форме записи при применении формул Коши (здесь и в дальнейшем в σ_n индекс n не является указателем вектора!)

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_j n_i. \quad (1.25)$$

Тогда экстремальные значения σ_n вычисляются из условий

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial n_1} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_n}{\partial n_2} = 0,$$

причем условие $\partial \sigma_n / \partial n_3$ учитывать не нужно, так как из-за выполнения дополнительного соотношения $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ величина n_3 не может меняться независимым образом.

По сравнению с этим довольно трудоемким способом более предпочтительным является способ множителей Лагранжа. При этом отыскиваются экстремальные значения некоторой функции

$$F(n_1, n_2, n_3) = \sigma_n - \lambda (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1), \quad (1.26)$$

где λ — множитель Лагранжа. Тогда условия экстремума будут иметь вид

$$\frac{\partial F}{\partial n_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial n_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial n_3} = 0. \quad (1.27)$$

Уравнение (1.25) в развернутой форме запишется так:

$$\sigma_n = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^2 + 2(\sigma_{12} n_1 n_2 + \sigma_{23} n_2 n_3 + \sigma_{31} n_3 n_1),$$

и с учетом (1.26) три соотношения (1.27), как легко установить, приводят опять к уравнению (1.19), из которого следует характеристическое уравнение (1.20).

Как правило, главные направления обозначают так, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Тогда по известным главным напряжениям с помощью уравнения (1.19) можно легко вычислить направляющие косинусы главных осей. В системе главных осей (рис. 1.12) матрица компонент (так называемая диагональная матрица) имеет вид

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}.$$

По известным главным напряжениям и главным направлениям определяются компоненты напряжений по произвольным направлениям согласно формуле

$$\sigma_{ij} = \sigma_1 n_i^{(1)} n_j^{(1)} + \sigma_2 n_i^{(2)} n_j^{(2)} + \sigma_3 n_i^{(3)} n_j^{(3)} \quad (1.28)$$

(закон преобразования, выраженный через главные напряжения).

1.2.4.2. Главные касательные напряжения. Из разложения вектора напряжений, действующего на элемент поверхности, на

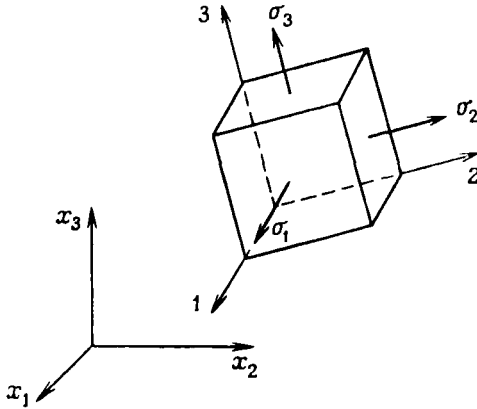


Рис. 1.12. Главные нормальные напряжения.

нормальное и касательное напряжения следует (см. п. 1.2.2.1) $\sigma_t^2 = |\sigma^n|^2 - \sigma_n^2$. Здесь также интересны вопросы о том, при какой ориентации элемента поверхности касательные напряжения σ_t достигают экстремальных значений (так называемые главные касательные напряжения) и как они могут быть вычислены. Расчеты при этом упрощаются, если применять в качестве координатной систему главных осей (рис. 1.13). Тогда компоненты вектора напряжений σ^n будут равны

$$\sigma_1^n = \sigma_1 n_1, \quad \sigma_2^n = \sigma_2 n_2, \quad \sigma_3^n = \sigma_3 n_3, \quad (1.29)$$

поэтому

$$|\sigma^n|^2 = (\sigma_1 n_1)^2 + (\sigma_2 n_2)^2 + (\sigma_3 n_3)^2, \quad (1.30)$$

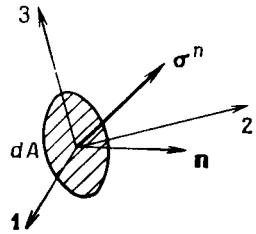


Рис. 1.13. Вектор напряжений и главные оси.

а соотношение (1.25) примет вид

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2. \quad (1.31)$$

Отсюда

$$\sigma_t^2 = (\sigma_1 n_1)^2 + (\sigma_2 n_2)^2 + (\sigma_3 n_3)^2 - [\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2]^2,$$

и с учетом условия $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ получается выражение

$$\sigma_t^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 n_1^2 n_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 n_2^2 n_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n_3^2 n_1^2. \quad (1.32)$$

Из (1.32) вытекает, что главные плоскости являются свободными от касательных напряжений, т. е. $\sigma_t = 0$ для ряда значений

$$\begin{aligned} n_1 = 1, \quad n_2 = n_3 = 0, \quad n_2 = 1, \\ n_3 = 1, \quad n_1 = n_2 = 0, \quad n_3 = n_1 = 0. \end{aligned}$$

Далее следует, что для гидростатического растяжения или сжатия ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) касательные напряжения в этих плоскостях обращаются в нуль.

Чтобы найти направления, в которых достигаются экстремальные значения σ_t , опять образуют функцию G с помощью множителя Лагранжа μ в виде

$$G(n_1, n_2, n_3) = \sigma_t^2 - \mu (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1)$$

и определяют ее экстремальные значения из условий

$$\frac{\partial G}{\partial n_1} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial n_2} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial n_3} = 0.$$

В результате

$$\begin{aligned} n_1 [n_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + n_3^2 (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \mu] &= 0, \\ n_2 [n_3^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + n_1^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \mu] &= 0, \\ n_3 [n_1^2 (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + n_2^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \mu] &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения с учетом условия $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ удовлетворяются для ряда значений

$$\begin{aligned} n_1 = 0, \quad n_2 = n_3 = \sqrt{2}/2, \quad \mu = 1/2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2, \\ n_2 = 0, \quad n_3 = n_1 = \sqrt{2}/2, \quad \mu = 1/2 (\sigma_3 - \sigma_1)^2, \\ n_3 = 0, \quad n_1 = n_2 = \sqrt{2}/2, \quad \mu = 1/2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2. \end{aligned}$$

Подстановка их в (1.32) дает

$$\begin{aligned} \sigma_{t1}^2 = \tau_1^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2, \quad \sigma_{t3}^2 = \tau_2^2 = \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2, \\ \sigma_{t3}^2 = \tau_3^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Величины τ_1, τ_2, τ_3 являются экстремальными значениями касательных напряжений, так называемыми *главными касательными напряжениями*. Они действуют в плоскостях, которые параллельны одной главной оси и образуют с двумя другими угол 45° . Справедливо соотношение $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$.

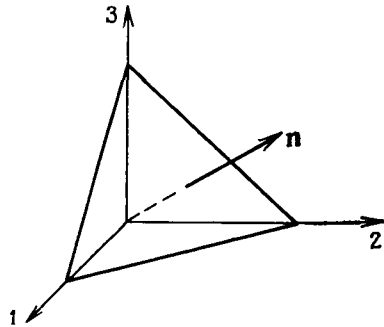


Рис. 1.14. Октаэдрическая поверхность с нормалью \mathbf{n} (равносторонний треугольный элемент поверхности).

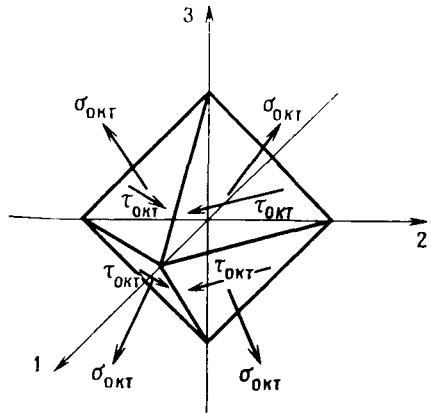


Рис. 1.15. Октаэдрические нормальные и касательные напряжения.

Для $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ имеем $\sigma_1 = \sigma_{n(\max)}$ и $\sigma_3 = \sigma_{n(\min)}$, и, следовательно, максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\max} = 1/2(\sigma_1 - \sigma_3) = |\tau_2|.$$

Оно действует в плоскости, которая делит пополам угол между направлениями максимального и минимального главных нормальных напряжений.

Отметим, что поверхности, на которых действуют главные касательные напряжения, не являются взаимно ортогональными, а образуют стороны правильного додекаэдра. Эти поверхности также не свободны от нормальных напряжений; соответствующие нормальные напряжения при этом равны

$$\sigma_{n(\tau_1)} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \quad \sigma_{n(\tau_2)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad \sigma_{n(\tau_3)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

1.2.4.3. Октаэдрические напряжения. Напряженное состояние в точке деформируемого тела можно также описать заданием нормальных и касательных напряжений, действующих в плоскостях, нормали к которым образуют равные углы с главными осями. Эти напряжения называют *октаэдрическим нормальным* и *октаэдрическим касательным напряжениями*. Единичный век-

тор нормали к указанной плоскости имеет компоненты (рис. 1.14)

$$n_1 = n_2 = n_3 = 1/\sqrt{3}. \quad (1.34)$$

Восемь таких плоскостей образуют поверхность правильного октаэдра (рис. 1.15). Из (1.31) с учетом (1.34) следует выражение для октаэдрического нормального напряжения

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}.$$

Формула же для октаэдрического касательного напряжения получается из (1.32):

$$\tau_{\text{окт}} = 1/3 \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}.$$

Выражая $\tau_{\text{окт}}$ через произвольные компоненты напряжений, получим

$$\tau_{\text{окт}} = 1/3 [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2)]^{1/2}.$$

Соответственно через главные касательные напряжения с учетом (1.33) $\tau_{\text{окт}}$ запишется в виде

$$\tau_{\text{окт}} = 2/3 \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}.$$

Октаэдрические напряжения *) могут быть выражены также через инварианты тензора деформаций, а именно

$$\sigma_{\text{окт}} = 1/2 J_1, \quad \tau_{\text{окт}} = 1/3 \sqrt{2J_1^2 - 6J_{II}}.$$

§ 1.3. Перемещения и деформации

Действие внешних сил вызывает деформации в твердых телах и течение в жидкостях. Задачей механики сплошной среды является, в частности, описание деформирования тел. Это достигается изучением кинематики сплошной среды. Речь идет при этом о чисто геометрической проблеме, причины же деформации и свойства материала не играют никакой роли.

*) Октаэдрические напряжения играют важную роль при вычислении эквивалентных напряжений при сложном напряженном состоянии; они применяются также в теории пластичности для формулировки критериев текучести. Их введением мы обязаны А. Надан.

1.3.1. Движение сплошной среды

Как уже отмечалось в § 1.1, движение сплошной среды (исключая движение твердого тела) сопровождается деформацией. При этом с введением сплошной среды как модели материала связывалось допущение о том, что изменения сплошной среды происходят непрерывно. Это означает, что соседние области остаются смежными и любая конечная область сплошной среды не может деформироваться в объем исчезающе малый или, наоборот, бесконечно большой. Первоначально непрерывно распределенный материал не содержит после деформации разрывов и пустот (т. е. не возникает трещин).

При движении сплошной среды все области среды за конечное время получают перемещения. Метод определения деформаций заключается в том, что по перемещениям вычисляются изменения длин линейных элементов, а также изменения углов между двумя линейными элементами. Вообще определение длин и углов в пространстве связано с его так называемой *метрикой*. Поэтому в общем случае исследование деформаций состоит в сравнении метрик деформированной и недеформированной сред и не зависит от характера и причины деформаций.

Деформации можно также рассматривать как «отображение» тела B (недеформированного) на тело B' (деформированное) (рис. 1.16). Для описания недеформированного, а также деформированного тел применяются в общем случае различные криволинейные системы координат ξ_i и ξ'_i . Однако обе они описывают евклидово (т. е. не искривленное) пространство. Отображение должно быть непрерывным и взаимно однозначным, т. е. справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \xi'_i &= \xi'_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ \xi_i &= \xi_i(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3), \end{aligned} \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.35)$$

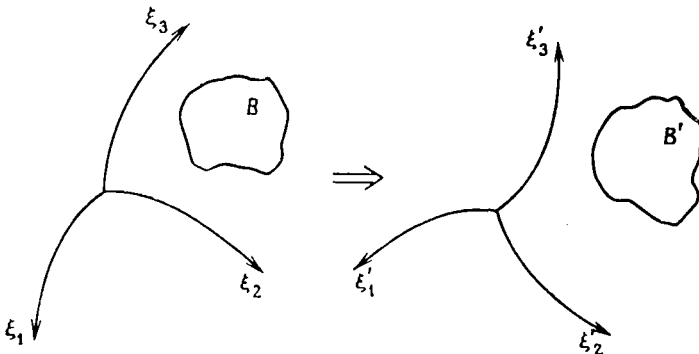


Рис. 1.16. Недеформированное (B) и деформированное (B') тела.

и предполагается, что функции ξ_i и ξ'_i непрерывны и дифференцируемы. При исследовании деформаций они могут быть отнесены либо к начальным ξ_i , либо к конечным ξ'_i координатам. Это приводит к двум различным способам описания кинематики деформируемой среды, которые называют *лагранжевым* или *эйлеровым* (хотя это исторически не совсем точно).

1.3.2. Лагранжево и эйлерово описания деформаций

Вместо того чтобы оперировать различными системами координат, в дальнейшем недеформированное и деформированное тела будут отнесены к произвольной декартовой системе координат с заданными в пространстве базисными векторами e_1, e_2, e_3 (рис. 1.17). Соответственно двум указанным способам описания величины X_i называют лагранжевыми координатами, x_i — эйлеровыми координатами ($i = 1, 2, 3$).

При лагранжевом описании наблюдатель некоторым образом жестко связан с одной материальной частицей. Независимыми пере-

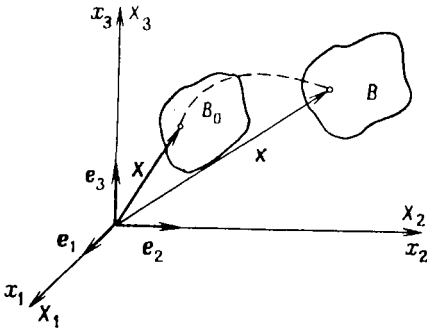


Рис. 1.17. Движение тела: лагранжевы и эйлеровы координаты.

менными являются лагранжевы координаты, т. е. первое соотношение (1.35) принимает вид

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3). \quad (1.36)$$

При этом наблюдают, что происходит с одной определенной материальной частицей или в ее окрестности.

При эйлеровом описании наблюдатель, напротив, находится в неподвижной точке пространства. Независимыми переменными являются эйлеровы координаты, т. е.

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3). \quad (1.37)$$

При этом рассматриваются события, происходящие в данной фиксированной точке пространства или в ее окрестности.

Каждый из этих способов описания кинематики среды обладает определенными преимуществами и применяется в механике сплошной среды. Связь между ними известна и определяется предположениями о непрерывности и взаимной однозначности выражений (1.36) и (1.37). В теории упругости вообще предпочтительным является лагранжево описание, в механике жидкости и газа — эйлерово описание. К сказанному следует добавить,

что при движении сплошной среды в оба способа описания входит время в качестве еще одной независимой переменной.

От изложенных представлений, применяемых в механике сплошной среды, здесь можно отказаться, так как в статической теории упругости временные процессы не рассматриваются и в дальнейшем не будут обсуждаться также упругие динамические явления. Поэтому такие кинематические понятия, как скорость, ускорение, скорость деформаций и субстанциональная производная, здесь вводиться не будут. Не будет также применяться понятие градиента деформаций, которое вводится вообще в механике сплошной среды в качестве исходного для меры деформаций. Наконец, будет также показано, что при ограничении на малость деформаций, которое является естественным в линейной теории упругости, различие между лагранжевым и эйлеровым описаниями исчезает.

1.3.3. Тензоры деформаций как мера деформаций

В дальнейшем прежде всего будут определены тензоры деформаций Лагранжа и Эйлера. Несколько отклоняясь от намеченной схемы изложения, пока никакого ограничения на малость деформаций вводить не будем, так что поэтому все положения могут быть справедливы в качестве исходных для геометрически нелинейной теории.

Как уже упоминалось вначале, все точки сплошной среды получают при деформации перемещения, которые описываются вектором перемещений \mathbf{u} с компонентами u_i . Если при движении тела перемещения всех его точек равны, то различные частицы сплошной среды движутся как одно твердое тело. Такие движения, которые не связаны с изменением расстояния между соседними частицами материала, не вызывают деформаций, так как они не приводят к появлению внутренних сил (напряжений).

Для вектора перемещений справедливо равенство в векторной форме (рис. 1.18) $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$, соответственно в скалярной (индексной) форме

$$u_i = x_i - X_i. \quad (1.38)$$

При лагранжевом описании \mathbf{X} — независимые переменные, следовательно,

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{x}(\mathbf{X}) - \mathbf{X}, \quad (1.39)$$

в то время как при эйлеровом описании справедливо равенство

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}). \quad (1.40)$$

При деформации прямые линии в недеформированном теле становятся в деформированном теле, вообще говоря, кривыми различной длины.

Линейным элементом называют расстояние между двумя соседними бесконечно близкими точками (это — величина, которая

в основном определяет так называемую метрику пространства). Сравнивая между собой метрики деформированного и недеформированного тел, рассматривают разность деформированного ds и недеформированного dS линейных элементов. Математически удобнее оперировать квадратом длины линейного элемента. Итак, в качестве меры деформации вводится разность квадратов

$$(ds)^2 - (dS)^2. \quad (1.41)$$

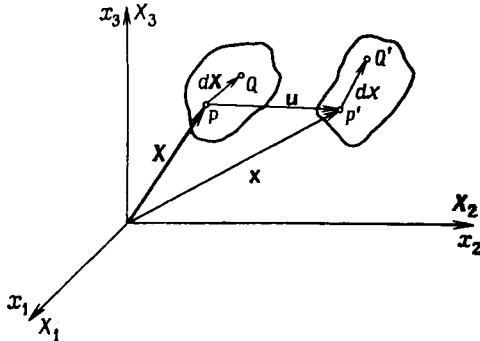


Рис. 1.18. Вектор перемещений и линейный элемент.

Квадрат расстояния dX (соответственно dx между соседними точками $P(X_i)$ и $Q(X_i + dX_i)$ (и соответственно $P'(x_i)$ и $Q'(x_i + dx_i)$) задается в виде

$$(dS)^2 = dX_i dX_i = \delta_{mn} dX_m dX_n, \quad (1.42)$$

$$(ds)^2 = dx_i dx_i = \delta_{mn} dx_m dx_n, \quad (1.43)$$

где δ_{mn} — символ Кронекера.

С другой стороны, из (1.36) и (1.37) следуют выражения

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j, \quad dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j$$

и, таким образом,

$$(dS)^2 = dX_i dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_m} \frac{\partial X_i}{\partial x_n} dx_m dx_n, \quad (1.44)$$

$$(ds)^2 = dx_i dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_m} \frac{\partial x_i}{\partial X_n} dX_m dX_n. \quad (1.45)$$

1.3.3.1. Тензоры деформаций Лагранжа и Эйлера. Лагранжево и эйлерово описания деформаций приводят к двум различным тензорам деформаций. Выражение (1.41) с учетом (1.45)

и (1.42) при лагранжевом описании принимает вид

$$(ds)^2 - (dS)^2 = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_m} \frac{\partial x_i}{\partial X_n} - \delta_{mn} \right) dX_m dX_n = 2E_{mn} dX_m dX_n, \quad (1.46)$$

где

$$2E_{mn} = \frac{\partial x_i}{\partial X_m} \frac{\partial x_i}{\partial X_n} - \delta_{mn} \quad (1.47)$$

— тензор деформаций Лагранжа — Грина.

Аналогично при эйлеровом описании из (1.43) и (1.44) следует

$$(ds)^2 - (dS)^2 = \left(\delta_{mn} - \frac{\partial X_i}{\partial x_m} \frac{\partial X_i}{\partial x_n} \right) dx_m dx_n = 2e_{mn} dx_m dx_n, \quad (1.48)$$

при этом выражение

$$2e_{mn} = \delta_{mn} - \frac{\partial X_i}{\partial x_m} \frac{\partial X_i}{\partial x_n} \quad (1.49)$$

определяет тензор деформаций Эйлера — Альманзи; E_{mn} и e_{mn} являются тензорами второго ранга. Можно показать, что они симметричны (множитель 2 вводится из соображений физической целесообразности). Тензоры деформаций могут выражаться через производные от перемещений.

При лагранжевом описании (1.39) $x_i = X_i + u_i$ и с учетом выражения

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

из (1.47) следует

$$2E_{mn} = \left(\delta_{im} + \frac{\partial u_i}{\partial X_m} \right) \left(\delta_{in} + \frac{\partial u_i}{\partial X_n} \right) - \delta_{mn},$$

или

$$E_{mn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial X_n} + \frac{\partial u_n}{\partial X_m} + \frac{\partial u_i}{\partial X_m} \frac{\partial u_i}{\partial X_n} \right). \quad (1.50)$$

Аналогично при эйлеровом описании (1.40) с учетом $X_i = x_i - u_i$ следует

$$e_{mn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} - \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right). \quad (1.51)$$

Величины E_{mn} и e_{mn} в этих формулах называют соответственно тензорами деформаций Лагранжа *) и Эйлера.

*) Вообще в механике сплошной среды вводятся и другие тензоры деформаций, например тензор Грина (называемый также правым тензором Коши — Грина) или тензор Фингера (называемый также левым тензором Коши — Грина). Эти тензоры деформаций связаны с вышеприведенными и применяются, если система координат не является декартовой.

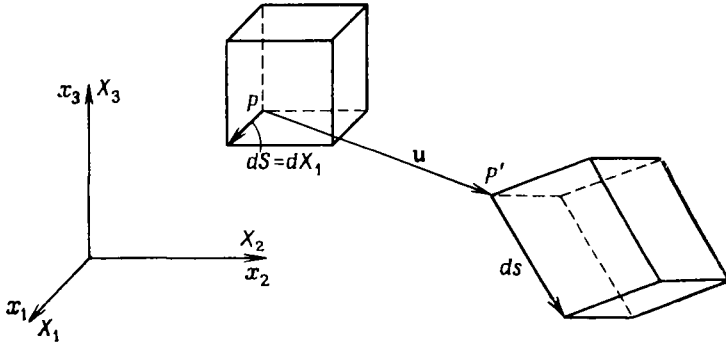


Рис. 1.19. К определению относительных деформаций.

При движении сплошной среды как твердого тела $(ds)^2 = (dS)^2$. Это означает, что $E_{mn} = e_{mn} = 0$. Обращение в нуль тензоров деформаций является, таким образом, необходимым и достаточным условием того, что деформации сплошной среды, а следовательно, и напряжения отсутствуют.

1.3.3.2. Физическое значение деформаций. Наглядная геометрическая интерпретация нелинейных компонент тензоров деформации (1.50) и (1.51) невозможна. Однако можно установить связь с измеряемыми относительными деформациями.

Предположим сначала, что рассматривается тензор деформаций Лагранжа (лагранжево описание). Пусть задан малый недеформированный элемент согласно рис. 1.19. Недеформированный линейный элемент $dS = dX_1$ (при $dX_2 = dX_3 = 0$) переходит в процессе деформации в элемент $ds = dx_i$ с тремя компонентами. Относительная деформация определяется как относительное изменение длины

$$E_1 = (ds - dS)/dS, \quad (1.52)$$

причем, согласно лагранжевому описанию, относительная деформация определяется по отношению к первоначальной длине. Следовательно, $ds = (1 + E_1)dS$ и (1.46) приводится к виду

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2E_{11}(dX_1)^2.$$

Отсюда вытекает $(1 + E_1)^2 = 2E_{11} + 1$, или

$$E_1 = \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1 = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)^2}.$$

Аналогично для других направлений

$$E_2 = \sqrt{1 + 2E_{22}} - 1, \quad E_3 = \sqrt{1 + 2E_{33}} - 1,$$

Следовательно, компоненты E_{ij} при $i = j$ связаны с деформациями.

Покажем далее, что компоненты со смешанными индексами характеризуют изменения узлов. Рассмотрим для этого два недеформированных ортогональных линейных элемента $dS = dX_2$ ($dX_1 = dX_3 = 0$) и соответственно $dS^* = dX_3$ ($dX_1 = dX_2 = 0$), изображенных на рис. 1.20. Они переходят при деформации в

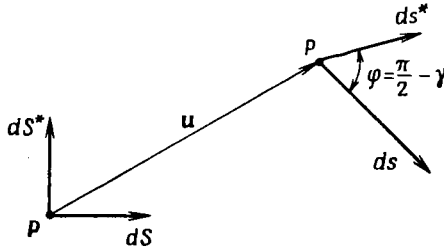


Рис. 1.20. К определению деформаций сдвига.

элементы ds и соответственно ds^* (с компонентами dx_i и dx_i^*) с углом φ между ними. Скалярное произведение линейных элементов после деформации дает

$$ds ds^* \cos \varphi = dx_i dx_i^* = \frac{\partial x_i}{\partial X_m} \frac{\partial X_i}{\partial X_n^*} dX_m dX_n^* = \frac{\partial x_i}{\partial X_2} \frac{\partial x_i}{\partial X_3} dX_2 dX_3,$$

в то же время из (1.47) следует

$$2E_{23} = \frac{\partial x_i}{\partial X_2} \frac{\partial x_j}{\partial X_3}.$$

Поэтому $ds ds^* \cos \varphi = 2E_{23} dx_2 dx_3$, и с учетом равенств

$$\begin{aligned} ds &= (1 + E_2) dS = \sqrt{1 + 2E_{22}} dX_2, \\ ds^* &= (1 + E_3) dS^* = \sqrt{1 + 2E_{33}} dX_3 \end{aligned}$$

из приведенного выше выражения получается формула для изменения угла γ_{23} :

$$\cos \varphi = \sin \gamma_{23} = \frac{2E_{23}}{\sqrt{(1 + 2E_{22})(1 + 2E_{33})}}.$$

Аналогично получаются соответствующие выражения для остальных изменений углов.

Подобный анализ может быть проведен и для тензора деформаций Эйлера (при эйлеровом описании).

1.3.3.3. Малые деформации. Если ограничиться малыми деформациями и считать производные от перемещений малыми по сравнению с единицей, то тензоры конечных деформаций могут быть линеаризованы. Тензоры деформаций Лагранжа и Эйлера принимают вид

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \text{ и соответственно } e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Кроме того, из предположения о малости перемещений следует $X_i \approx x_i$, и различие между лагранжевым и эйлеровым описаниями исчезает, т. е. $E_{ij} = e_{ij} = \epsilon_{ij}$. Величину

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.53)$$

называют *тензором малых деформаций Коши*.

Большое преимущество линейной теории состоит в том, что ее математический аппарат существенно более простой. Это тем более важно, что поведение большинства материалов в довольно широкой области для технических приложений достаточно точно описывается именно в рамках линейной теории. Линейная теория не всегда отражает законы природы. Но ее неоценимым достоинством является возможность применения суперпозиции решений.

Малые деформации записываются в декартовых координатах x, y, z через компоненты перемещений u_x, u_y, u_z (или иногда проще u, v, w) в общеупотребительной форме, а именно относительные деформации выражаются в виде

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (1.54)$$

Относительные деформации сдвига или углы сдвига имеют вид

$$\begin{aligned} \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xy}, \\ \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{yz}, \\ \epsilon_{zx} = \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Матрица компонент тензора малых деформаций имеет вид

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 1/2\gamma_{xy} & 1/2\gamma_{xz} \\ 1/2\gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & 1/2\gamma_{yz} \\ 1/2\gamma_{zx} & 1/2\gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix},$$

причем следует особо подчеркнуть, что компонентами тензора являются половины изменений углов γ_{xy} и т. д.

Тензор малых деформаций Коши является симметричным тензором второго ранга со свойствами, аналогичными уже введенному в п. 1.2.2 тензору напряжений Коши.

Соответственно равенству (1.8) при повороте системы координат справедлив закон преобразования в виде $\epsilon_{ij}^* = c_{ik}c_{jl}\epsilon_{kl}$.

Как и для каждого тензора второго ранга, существуют три инварианта, не зависящие от ориентации системы координат:

$$I_I = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \epsilon_{ii},$$

$$I_{II} = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (\epsilon_{ii}\epsilon_{jj} - \epsilon_{ij}\epsilon_{ij}), \quad (1.56)$$

$$I_{III} = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} (\epsilon_{ii}\epsilon_{jj}\epsilon_{kk} + 2\epsilon_{ij}\epsilon_{jk}\epsilon_{ki} - 3\epsilon_{ij}\epsilon_{ij}\epsilon_{kk}).$$

Как видно, они выражаются через три основных элементарных инварианта $\delta_{ij}\epsilon_{ij}$, $\epsilon_{ij}\epsilon_{ij}$, $\epsilon_{ij}\epsilon_{jk}\epsilon_{ki}$. Первый инвариант I_I имеет простой геометрический смысл. Это относительное изменение объема или дилатация *)

$$e = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\Delta dV}{dV} = \text{div } \mathbf{u}. \quad (1.57)$$

1.3.4. Главные направления и главные относительные деформации

Аналогично тому, как это было выполнено при рассмотрении тензора напряжений, можно изучить, в каких направлениях имеются только относительные деформации и отсутствуют сдвиги. Ниже показано, что эти направления соответствуют также экстремальным значениям относительных деформаций. Эти значения являются *главными относительными деформациями* ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 .

Для определения главных направлений и главных относительных деформаций могут быть использованы соответствующие выражения для тензора напряжений из п. 1.2.4. Справедливы равенства

$$(\epsilon_{ij} - \epsilon\delta_{ij})n_j = 0. \quad (1.58)$$

*) Для тензоров конечных (нелинейных) деформаций такой наглядной интерпретации первого инварианта не существует.

Условия разрешимости этих уравнений приводят к характеристическому уравнению для тензора деформаций

$$\varepsilon^3 - I_1 \varepsilon^2 + I_{II} \varepsilon - I_{III} = 0 \quad (1.59)$$

с коэффициентами, соответствующими (1.56). Уравнение (1.59) можно записать в иной форме, через три действительных решения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (главные деформации)

$$(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_2)(\varepsilon - \varepsilon_3) = 0.$$

Для инвариантов (1.56) получаются выражения

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ I_{II} &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1, \\ I_{III} &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \end{aligned}$$

Три ортогональных главных направления находятся аналогично тому, как это делалось для тензора напряжений. Они определяют систему главных осей деформаций, в которых матрица компонент тензора деформаций принимает простейшую диагональную форму

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}.$$

1.3.5. Бесконечно малое вращение

Рассмотрим поле малых перемещений

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3) \quad (1.60)$$

и исследуем вопрос о физическом смысле антисимметричного тензора

$$\omega_{ij} = 1/2(u_{i,j} - u_{j,i}) = -\omega_{ji}, \quad (1.61)$$

который имеет только три независимые компоненты.

Для наглядности сначала будем рассматривать двумерный случай, а именно плоский элемент $dx dy$, который испытывает поворот как твердое тело на малый угол ω_z (рис. 1.21). При введении перемещений в направлениях осей x и y получается выражение

$$\omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

т. е. речь идет о среднем значении

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

бесконечно малого вращения элемента как твердого тела, при котором деформации не появляются, так как $\epsilon_{xy} = 0$. В общем случае из (1.60) следует

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = \beta_{ij} dx_j, \quad (1.62)$$

где β_{ij} называется градиентом перемещений, или дисторсией. Как градиент вектора эта величина в декартовых координатах является тензором второго ранга, в общем случае асимметрич-

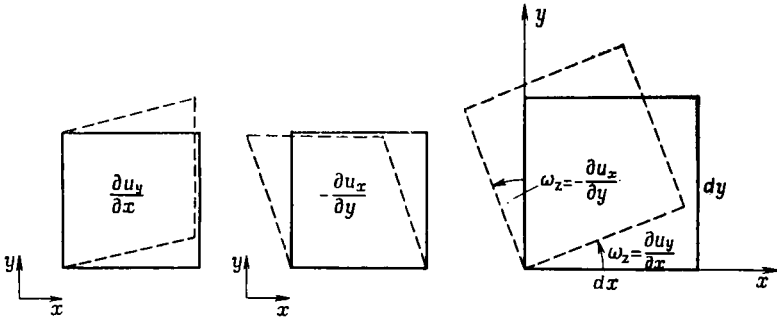


Рис. 1.21. К плоскому вращению твердого тела.

ным. Его можно представить в виде суммы симметричной и антисимметричной частей согласно равенству

$$\beta_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) = \epsilon_{ij} + \omega_{ij}. \quad (1.63)$$

При этом ϵ_{ij} также тензор малых деформаций Коши, в то время как антисимметричный тензор ω_{ij} называется тензором малого вращения или тензором вращения *).

Далее справедливы равенства

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\beta_{ij} + \beta_{ji}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(\beta_{ij} - \beta_{ji}). \quad (1.64)$$

Матрица компонент тензора вращения имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}(u_{1,2} - u_{2,1}) & \frac{1}{2}(u_{1,3} - u_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(u_{2,1} - u_{1,2}) & 0 & \frac{1}{2}(u_{2,3} - u_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(u_{3,1} - u_{1,3}) & \frac{1}{2}(u_{3,2} - u_{2,3}) & 0 \end{vmatrix}.$$

* Иногда в литературе этот тензор определяется также в виде $\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} - u_{i,j})$.

Следовательно, имеются только три независимые компоненты (точно так же, как у вектора). Эти малые повороты относительно координатных осей соответствуют компонентам вектора угловой скорости \mathbf{w} твердого тела (вектора вихря скоростей)

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 1/2(\omega_{32} - \omega_{23}) = \omega_{32} = 1/2(u_{3,2} - u_{2,3}), \\ \omega_2 &= 1/2(\omega_{13} - \omega_{31}) = \omega_{13} = 1/2(u_{1,3} - u_{3,1}), \\ \omega_3 &= 1/2(\omega_{21} - \omega_{12}) = \omega_{21} = 1/2(u_{2,1} - u_{1,2}).\end{aligned}\quad (1.65)$$

Показанная здесь связь между тензором вращения и вектором угловых скоростей вращения тела справедлива в общем случае: *каждому антисимметричному тензору второго ранга может быть поставлен в соответствие так называемый сопряженный (или осевой) вектор*. При этом справедливо равенство

$$\omega_k = 1/2 \epsilon_{kji} \omega_{ij}. \quad (1.66)$$

С другой стороны, выполняется также двойственное соотношение

$$\omega_{ij} = \epsilon_{jik} \omega_k. \quad (1.67)$$

Сопряженный вектор, соответствующий симметричному тензору, обращается в нуль. И наоборот, обращение в нуль сопряженного вектора свидетельствует о симметрии исходного тензора.

Из (1.66) с учетом (1.63) следует связь вектора угловой скорости с перемещениями

$$\omega_k = 1/2 \epsilon_{kji} \omega_{ij} = 1/2 \epsilon_{kji} u_{i,j}, \quad (1.68)$$

или в векторной форме записи $\mathbf{w} = 1/2 \operatorname{rot} \mathbf{u}$.

Между прочим, следует упомянуть, что в нелинейном случае тензоры вращения в лагранжевых и эйлеровых координатах также могут быть определены, но при этом связь их с вращением имеет сложный вид.

В поле малых перемещений с обращаемся в нуль тензором деформаций в некоторой точке при помощи вектора угловой скорости \mathbf{w} задается местное малое вращение окрестности этой точки как твердого тела. Из (1.62) с учетом (1.67) следует

$$du_i = \omega_{ij} dx_j = \epsilon_{jik} \omega_k dx_j = \epsilon_{ijk} \omega_j dx_k,$$

или в векторной форме $d\mathbf{u} = \mathbf{w} \times d\mathbf{x}$, и, как видно, речь идет о малом перемещении твердого тела. При конечном вращении твердого тела вектор угловой скорости для всего рассматриваемого тела постоянный.

Малое местное вращение деформированного тела, описываемое при помощи ω_{ij} или ω_i , является следствием деформаций

других участков тела. Оно получается из деформаций всего рассматриваемого поля перемещений *).

В приведенном выше анализе предполагались малые перемещения соответственно линейной классической теории упругости (т. е. производные перемещений малы по сравнению с единицей). Следствием этого являются малые деформации и вращения. Так как последние не влияют на деформации и тем самым на напряжения, то при решении задач теории упругости они чаще всего игнорируются. Правда, могут представиться случаи, когда деформации повсюду малые, но в некоторых областях могут появляться значительные вращения (например, при изгибе длинного тонкого стержня или при изгибании тонких оболочек).

Существует возможность различных степеней приближений, когда учитываются большие вращения, чем это допускается линейной теорией. Но эти формулировки в дальнейшем не будут рассматриваться.

1.3.6. Определение перемещений по деформациям

Связь между деформациями и перемещениями, задаваемая соотношениями (1.53) (эти соотношения называют также «кинематическими уравнениями»), принципиально не позволяет полностью определить перемещения. С одной стороны, компоненты тензора деформаций должны удовлетворять определенным условиям (так называемым *условиям совместности*), с другой — при интегрировании появляются константы, которые соответствуют перемещениям твердого тела и вращению всего тела.

Из (1.62) и (1.63) следует

$$du_i = \beta_{ij} dx_j = \epsilon_{ij} dx_j + \omega_{ij} dx_j, \quad (1.69)$$

или в развернутой форме записи

$$\begin{aligned} du_1 &= \epsilon_{11} dx_1 + (\epsilon_{12} + \omega_{12}) dx_2 + (\epsilon_{13} + \omega_{13}) dx_3, \\ du_2 &= (\epsilon_{12} + \omega_{12}) dx_1 + \epsilon_{22} dx_2 + (\epsilon_{23} + \omega_{23}) dx_3, \\ du_3 &= (\epsilon_{13} + \omega_{13}) dx_1 + (\epsilon_{23} + \omega_{23}) dx_2 + \epsilon_{33} dx_3. \end{aligned}$$

Интегрированием этих уравнений можно найти перемещения

$$\begin{aligned} u_1^* &= u_{10} - \omega_{30} x_2 + \omega_{20} x_3, \\ u_2^* &= u_{20} - \omega_{10} x_3 + \omega_{30} x_1, \\ u_3^* &= u_{30} - \omega_{20} x_1 + \omega_{10} x_2. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Константы интегрирования u_{i0} и ω_{i0} не влияют на деформации и поэтому при решении задач теории упругости опускаются

*) Зато в уже упоминавшейся моментной теории упругости компоненты вектора угловой скорости вводятся как дополнительные степени свободы к перемещениям.

или известны в конкретных случаях по заданным условиям опирания.

1.3.6.1. Условия совместности. Кинематические уравнения $\epsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$ представляют собой при заданных деформациях шесть дифференциальных уравнений в частных производных для трех компонент вектора перемещений. Следовательно, имеет место переопределенность. Поэтому шесть компонент тензора деформаций ϵ_{ij} не могут быть независимыми друг от друга. Соотношения, существующие между ними, называют условиями совместности или условиями неразрывности.

Их вывод возможен различными способами. С одной стороны, они могут рассматриваться как условия интегрируемости приведенных выше дифференциальных уравнений, с другой — они выражают физический факт, состоящий в том, что все тело до и после деформации непрерывное и сплошное и частицы материала связаны друг с другом. В теле не появляется никаких пустот и пор.

Условия совместности непосредственно получаются как математические тождества при исключении перемещений из кинематических уравнений. Двукратное дифференцирование (1.53) дает

$$\epsilon_{ij,kl} = 1/2(u_{i,jkl} + u_{j,ikl}).$$

Путем перестановки индексов получаются три аналогичных уравнения

$$\epsilon_{kl,ij} = 1/2(u_{k,lij} + u_{l,kij}),$$

$$\epsilon_{il,jk} = 1/2(u_{i,ljk} + u_{l,ijk}),$$

$$\epsilon_{jk,il} = 1/2(u_{j,kil} + u_{k,jil}).$$

Ввиду предполагаемой непрерывности перемещений, а также их производных и перестановочности порядка дифференцирования, линейная комбинация этих уравнений дает

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{il,jk} - \epsilon_{jk,il} = 0. \quad (1.71)$$

Это выражение, представляющее в совокупности 81 уравнение, содержит 6 уравнений совместности и было получено в 1860 г. Б. Сен-Венаном¹⁾. Часть остальных уравнений в (1.71) удовлетворяется тождественно, другая часть повторяется (из-за симметрии компонент деформаций и перестановочности порядка дифференцирования).

Компактная форма записи уравнений совместности получается с помощью тензора Леви-Чивиты ϵ_{ijk} . Соотношение (1.71) при этом принимает вид

$$\epsilon_{mlj}(\epsilon_{ij,kl} - \epsilon_{jk,il}) = 0.$$

Выражение в скобках равно $\epsilon_{nik}\epsilon_{ij,kl}$, и, следовательно, получаем

$$\epsilon_{mij}\epsilon_{nik}\epsilon_{ij,kl} = 0. \quad (1.72)$$

В векторной форме записи это равенство примет вид

$$\text{rot rot } \epsilon \equiv \text{Ink } \epsilon = 0,$$

где ϵ означает тензор деформаций. Оператор $\text{Ink}(\dots)$ называется «несовместностью с (...)» ($\text{Inkompatibilität von } (\dots)$).

Как видно, выражение (1.72) симметрично относительно m и n , следовательно, остается только шесть независимых уравнений. Они получаются, если придать m и n ряд значений 1, 1; 2, 2; 3, 3; 1, 2; 2, 3; 1, 3. В развернутой форме уравнения совместности запишутся так:

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} \text{ и т. д.}, \quad (1.73)$$

или

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \epsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} \right) \text{ и т. д.},$$

Остальные уравнения получаются круговой перестановкой индексов.

Эти уравнения являются необходимыми условиями того, что существует поле перемещений $u_i(x_1, x_2, x_3)$, по которому определяются деформации ϵ_{ij} согласно (1.53). Для односвязной области (т. е. области, ограниченной гладкой кривой и не имеющей отверстий) уравнения совместности Сен-Венана являются также достаточными условиями существования однозначного поля перемещений *).

1.3.6.2. Интеграл Чезаро. Для вывода уравнений совместности с помощью интеграла Чезаро [4] исходят из заданного поля деформаций ϵ_{ij} и применяют в качестве вспомогательной величины поле вращений ω_{ij} . Прежде всего из выражения $\omega_{ij} = 1/2(u_{i,j} - u_{j,i})$ после дифференцирования и добавления выражения, равного нулю, следует

$$\begin{aligned} \omega_{i,j,k} &= 1/2(u_{i,j} - u_{j,i})_{,k} + 1/2(u_{k,i} - u_{k,i})_{,j} = \\ &= 1/2(u_{i,jk} - u_{j,ik} + u_{k,ij} - u_{k,ij}), \end{aligned}$$

* Доказательство этого впервые было получено Буссинеском в 1871 г., другим путем — в 1889 г. Бельтрами, в 1906 г. — Чезаро.

и далее из перестановочности частных производных вытекает

$$\omega_{ij, k} = 1/2(u_{i, k} + u_{k, i})_{, j} - 1/2(u_{j, k} + u_{k, j})_{, i},$$

т. е. получается важное тождество

$$\omega_{ij, k} = \varepsilon_{ik, j} - \varepsilon_{jk, i}. \quad (1.74)$$

Это тождество в векторной форме записи при использовании выражения для вектора угловой скорости \mathbf{w} (1.67) примет вид $\text{grad } \mathbf{w} = \text{rot } \varepsilon$. Если в точке P задан тензор вращения ω_{ij}^P (рис. 1.22), то ω_{ij}^Q в точке Q вычисляется по формуле

$$\omega_{ij}^Q = \omega_{ij}^P + \int_P^Q d\omega_{ij} = \omega_{ij}^P + \int_P^Q \omega_{ij, k} dx_k,$$

причем криволинейный интеграл определяется на спрямляемой кривой от P до Q . С учетом (1.74) получается

$$\omega_{ij}^Q = \omega_{ij}^P + \int_P^Q (\varepsilon_{ik, j} - \varepsilon_{jk, i}) dx_k. \quad (1.75)$$

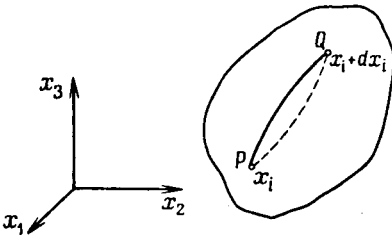


Рис. 1.22. К вычислению вращения и перемещений в точке Q .

Можно доказать непрерывность и однозначность поля перемещений, если криволинейный интеграл в (1.75) не зависит от пути интегрирования, по которому точка P перемещается в Q . Интеграл не зависит от пути интегрирования, если подынтегральная функция есть полный дифференциал или, выражаясь иначе, если по теореме Стокса ротор подынтегральной функции обращается в нуль. Это приводит к условию

$$\varepsilon_{mjk} (\varepsilon_{ik, j} - \varepsilon_{jk, i})_{, l} = 0, \quad (1.76)$$

в котором нетрудно вновь узнать соотношение (1.72). Если оно удовлетворяется, можно однозначно вычислить тензор вращения ω_{ij}^Q по заданному полю деформаций.

Аналогично поступают при вычислении перемещений. При заданном перемещении u_i^P в точке P справедливо равенство

$$u_i^Q = u_i^P + \int_P^Q du_i = u_i^P + \int_P^Q \beta_{ij} dx_j = u_i^P + \int_P^Q (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j.$$

Тензор вращения ω_{ij} выносится из-под знака интеграла после интегрирования по частям и учета (1.74):

$$\begin{aligned} \int_P^Q \omega_{ij} dx_j &= \omega_{ij} x_j \Big|_P^Q - \int_P^Q \omega_{ij, k} x_j dx_k = \\ &= \omega_{ij} x_j \Big|_P^Q - \int_P^Q (\epsilon_{ik, j} - \epsilon_{jk, i}) x_j dx_k. \end{aligned}$$

Тогда (после замены индекса j на k в интеграле) получаем

$$u_i^Q = u_i^P + \omega_{ij} x_j \Big|_P^Q + \int_P^Q [\epsilon_{ik} - (\epsilon_{ik, j} - \epsilon_{jk, i}) x_j] dx_k. \quad (1.77)$$

Как только что было доказано, ω_{ij}^Q существует и, следовательно, выражение $\omega_{ij} x_j \Big|_P^Q$ не зависит от пути интегрирования. Условием существования однозначного непрерывного поля перемещений является, таким образом, независимость интеграла в (1.77) от пути. Это приводит к соотношениям

$$\epsilon_{mlk} [\epsilon_{ik} - (\epsilon_{ik, j} - \epsilon_{jk, i}) x_j]_{, l} = 0,$$

или

$$\epsilon_{mlk} [\epsilon_{ik, l} - (\epsilon_{ik, j} - \epsilon_{jk, i}) \delta_{jl} - (\epsilon_{ik, jl} - \epsilon_{jk, il}) x_j] = 0.$$

Согласно условию $\epsilon_{mlk} \epsilon_{ik, i} = 0$, обращаются в нуль первые три члена в прямоугольных скобках и остается условие

$$\epsilon_{mlk} (\epsilon_{ik, jl} - \epsilon_{jk, il}) x_j = 0. \quad (1.78)$$

Таким образом, доказано, что уравнения совместности (1.71) или (1.72) являются необходимыми и достаточными условиями существования однозначного поля перемещений. Для многосвязной области, напротив, условия совместности являются только необходимыми, но не достаточными условиями существования однозначных перемещений. При этом должны удовлетворяться дополнительные условия непрерывности (необходимые сведения даны, например, в [A21]).

Следовало бы еще указать на связь между теорией упругости и теорией дислокаций. При этом контурный интеграл по замкнутому контуру уже не обращается в нуль, как в случае независимости от пути интегрирования. Напротив, при обходе так называемой *линии дислокации* получается ошибка незамыкания b_i

$$\oint du_i = \oint \beta_{ij} dx_j = b_i,$$

которую называют *вектором Бюргерса*. Это — обобщение соотношения (1.72), которое в рассматриваемом случае имеет вид $\epsilon_{mlj}\epsilon_{nik}\epsilon_{ij,kl} = \rho_{mn}$, причем так называемый *тензор несовместности* ρ_{mn} связан с *плотностью дислокаций* согласно теории Крёнера.

В векторной форме записи основное уравнение теории дислокаций имеет вид

$$\alpha = \text{rot } \beta,$$

где α — тензор плотности дислокаций, β — тензор дисторсий.

За дальнейшими сведениями следует обратиться к специальной литературе, например [B24, B25] и [5, 6].

1.3.6.3. Число уравнений совместности. Как уже отмечалось, условия совместности представляют собой шесть дифференциальных уравнений в частных производных относительно шести компонент тензора деформаций ϵ_{ij} . Но так как этих уравнений недостаточно для вычисления деформаций, они не могут быть независимыми друг от друга.

В 1892 г. Бельтрами было доказано, что имеются только три независимых условия совместности. Для получения их из (1.73) запишем выражения

$$\begin{aligned} A_{12} &= -2\epsilon_{12,12} + \epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} = 0 \quad \text{и т. д.,} \\ B_{12} &= \epsilon_{33,12} - (-\epsilon_{12,33} + \epsilon_{23,31} + \epsilon_{13,23})_{,3} = 0 \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

(остальные получаются круговой перестановкой индексов). В результате имеем три соотношения

$$\begin{aligned} A_{12,3} + B_{23,2} + B_{13,1} &= 0, \\ A_{23,1} + B_{13,3} + B_{12,2} &= 0, \\ A_{13,2} + B_{12,1} + B_{23,3} &= 0, \end{aligned} \tag{1.79}$$

которые легко проверить прямыми вычислениями.

В заключение следует еще упомянуть, что уравнения совместности могут быть получены также, если положить в основу физический факт, состоящий в том, что как недеформированная, так и деформированная сплошная среда представляют собой часть евклидова (т.е. неискривленного) пространства. Это означает, что так называемый тензор кривизны Римана, тензор четвертого ранга, который содержит производные метрического тензора, должен обращаться в нуль. Таким путем могут быть выведены также усложненные условия совместности для нелинейных деформаций.

В линейном случае вновь следуют соотношения (1.72) и на основе так называемого тождества Бьянки получается, что фактически существуют только три независимых условия совместности.

Следует еще указать на то, что при формулировке задач теории упругости в компонентах перемещений как основных функций уравнения совместности удовлетворяются автоматически. Однако, если исходить из деформаций, выражая их, например, через напряжения без использования перемещений, то уравнения совместности будут входить в число основных уравнений, которые должны быть удовлетворены.

Связь между напряжениями и деформациями в теории упругости (физический закон)

Предыдущий статический и кинематический анализ справедлив независимо от поведения материалов для всех твердых тел и жидкостей.

Как известно, механическое поведение реальных материалов очень разнообразно и сложно, например деформации твердых тел могут быть упругими или пластическими, зависеть или не зависеть от времени и истории нагружения. Установленные выше соотношения не достаточны для определения всех неизвестных введенных величин, необходимы еще соотношения между величинами напряжений и деформаций. Они учитывают особенности поведения различных материалов.

§ 2.1. Общие сведения о физическом законе

Так как имеется очень много различных материалов, мыслимо и множество физических законов, которые могут описывать то или иное поведение материалов при самых разнообразных условиях. Хотя это и было бы желательным, однако установить универсальный физический закон, которым можно было бы единообразно описать механическое поведение всех материалов, невозможно. Это происходит не только потому, что очень ограничены возможности описания свойств материалов. Общие соотношения получились бы слишком сложными и неудобными для практического применения. Поэтому стремятся установить соотношения, которыми можно было бы описать важнейшие виды поведения материалов при определенных условиях. В результате для материала вводится математическая модель, которая проверяется с помощью опыта для того, чтобы достичь хорошего приближения модели к свойствам реального материала.

Физические законы, которые на общеупотребительном языке механики сплошной среды называют теперь *определяющими соотношениями*, не могут быть выбраны совершенно произвольно. В общей теории сплошных сред установлены фундаментальные принципы, которые должны быть приняты во внимание при построении определяющих соотношений. Физический закон

следует строить так, чтобы он был инвариантен относительно выбора системы координат и кинематических переменных. Кроме того, физически очевидно, что определяющие соотношения не должны зависеть от наблюдателя и соответственно от закона его движения. Физический закон должен отражать однородность и изотропность физического пространства. Известные ограничения налагаются на определяющие соотношения также законами термодинамики *).

Определяющие соотношения описывают в общем виде поведение отдельных материалов (или классов материалов) и в этом смысле служат также для выявления различия между материалами.

Для механики твердого тела важны в первую очередь так называемые физические уравнения, которые связывают напряжения с кинематическими переменными (деформациями или скоростями деформаций). Но определяющие соотношения играют большую роль также в различных областях физики, например для процессов теплопередачи, электрической проводимости, массопереноса и т. д. Так как для многих задач механики сплошной среды взаимодействием между механическими и температурными (или электрическими или химическими) процессами можно пренебречь, возможно ограничиться только физическими уравнениями. Например, часть совершающейся при пластическом деформировании материала работы превращается в тепло, однако при достаточно медленном возрастании нагрузки температура частей тела из-за теплообмена со средой едва меняется (так называемый изотермический процесс). С другой стороны, очень быстрые процессы нагружения (без теплообмена с окружающей средой) могут считаться адиабатическими.

§ 2.2. Упругое поведение материалов

Как известно, многие твердые тела при нагружении претерпевают изменения формы, которые очень незначительны и часто могут быть установлены лишь весьма чувствительными методами измерений. Кроме того, твердые тела обладают по своей природе превосходным естественным состоянием (начальной формой), которое они стремятся сохранить **) и в которое они возвращаются, если приложенные силы перестают действовать и были невелики. Если предполагают далее, что работа, затрачиваемая на деформацию, полностью переходит в потенциальную энергию (т. е. отсутствует диссипация энергии), то говорят об упругом поведении материала.

*) Дальнейшие сведения читатель может найти в книгах по механике сплошной среды, например [B2, B4—B7].

**) Это не относится к жидкостям и газам.

Можно полагать, что в своем начальном состоянии упругое тело свободно от напряжений, имеет постоянную температуру и находится в термодинамическом равновесии со средой. Если деформирование под действием внешних сил происходит достаточно медленно, то в каждый момент времени имеет место термодинамическое равновесие соответственно внешним условиям и процесс деформирования является обратимым. Энергия, требуемая для деформации, расходуется полностью, не переходя в кинетическую энергию. Отсутствует также влияние времени; работа, затрачиваемая на деформацию, на зависит от пути нагружения, т. е. от того, как нагрузки и деформации достигают своих конечных значений.

Следовательно, напряженное состояние в идеально упругом теле зависит только от деформированного состояния. Это означает, что определяющие уравнения можно вывести из выражения для внутренней энергии, причем компоненты деформации ϵ_{ij} или компоненты напряжений σ_{ij} могут быть независимыми переменными состояния.

2.2.1. Энергия деформации и упругий потенциал

Удельной потенциальной энергией деформации называется работа, совершаемая при деформации единицы объема:

$$\bar{U} = \int_{\epsilon_{ij}=0}^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}. \quad (2.1)$$

Вследствие независимости интеграла от пути интегрирования подынтегральная функция должна быть полным дифференциалом. Соотношение (2.1) (ввиду симметрии тензоров σ_{ij} и ϵ_{ij}) можно записать в развернутом виде

$$d\bar{U} = \sigma_{11} d\epsilon_{11} + \sigma_{22} d\epsilon_{22} + \sigma_{33} d\epsilon_{33} + 2(\sigma_{12} d\epsilon_{12} + \sigma_{23} d\epsilon_{23} + \sigma_{13} d\epsilon_{13}), \quad (2.2)$$

и видно, что

$$\sigma_{ij} = \partial\bar{U}/\partial\epsilon_{ij}. \quad (2.3)$$

Удельная потенциальная энергия деформации $\bar{U}(\epsilon_{ij})$ является однозначной функцией деформаций, она называется также упругим потенциалом. Но, с другой стороны, и выражение

$$d\bar{U}^* = \epsilon_{11} d\sigma_{11} + \epsilon_{22} d\sigma_{22} + \epsilon_{33} d\sigma_{33} + 2(\epsilon_{12} d\sigma_{12} + \epsilon_{23} d\sigma_{23} + \epsilon_{13} d\sigma_{13}) \quad (2.4)$$

является полным дифференциалом, т. е.

$$dU + d\bar{U}^* = d(\sigma_{ij}\epsilon_{ij}),$$

поэтому

$$\epsilon_{ij} = \partial \bar{U}^* / \partial \sigma_{ij}. \quad (2.5)$$

Величина \bar{U}^* называется дополнительной удельной потенциальной энергией деформации.

Удельная потенциальная энергия деформации $\bar{U}(\epsilon_{ij})$ была введена впервые в 1839 г. Грином при построении теории распространения света [7].

Допущение о существовании удельной потенциальной энергии деформации находится в соответствии с предположением об обратимости изотермического и адиабатического процессов деформации и определяет тем самым упругое поведение материалов *). Но оно не должно означать обязательно линейную связь между напряжениями и деформациями. Линейность вводится лишь законом Гука.

Удельная потенциальная энергия деформации является положительно определенной величиной (см. п. 2.3.3). Это свойство используется, например, для доказательства единственности решения линейной задачи теории упругости. Кроме того, на этом основаны теоремы о минимуме потенциальной энергии и соответственно дополнительной энергии. В классической линейной теории упругости удельная потенциальная энергия деформации $\bar{U}(\epsilon_{ij})$ является квадратичной функцией компонент деформаций (и благодаря этому достаточно хорошо аппроксимируется).

§ 2.3. Линейно-упругий закон или закон Гука

Из опытов с проволокой Р. Гук установил линейную связь между нагрузкой и перемещением и сформулировал закон «*Ut tensio sic vis*» — «Какова сила, такова деформация», который опубликовал в 1676 г. в форме анаграммы «*ceiijnosssttuv*».

В простейшем случае для опытов на одноосное растяжение или сжатие закон Гука имеет вид

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.6)$$

где σ и ε — осевое напряжение и соответственно осевая деформация. Коэффициент пропорциональности называется модулем упругости **).

*) Иногда его называют упругостью по Грину в противоположность определению упругого поведения материалов, задаваемому в п. 2.3.1, которое называется *упругостью по Коши*.

**) В английской литературе общеупотребительным является термин «модуль Юнга» (по Т. Юнгу, 1807 г.).

Экспериментально установленный феноменологический закон (2.6) можно обосновать из термодинамических соображений, а также при помощи физического анализа.

2.3.1. Обобщенный закон Гука

Следуя Коши, можно обобщить выражение (2.6), предполагая линейную связь между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций в виде

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl}. \quad (2.7)$$

Для однородного материала компоненты тензора модулей упругости 4-го ранга E_{ijkl} являются не зависящими от координат величинами. Но так как напряжения и деформации зависят от ориентации системы координат, то этой зависимости должны подчиняться также и упругие постоянные E_{ijkl} . Они преобразуются соответствующим образом как компоненты тензора. Только для изотропного материала (см. ниже) упругие постоянные не зависят от ориентации системы координат.

Соотношение (2.7) можно рассматривать как линейный член разложения в ряд некоторой общей нелинейной зависимости $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\epsilon_{ij})$, в которой отсутствует постоянное слагаемое ввиду условия $\sigma_{ij} = 0$ при $\epsilon_{ij} = 0$.

В (2.7) содержится, вообще говоря, девять уравнений, имеющих по девять членов каждое, т. е. тензор E_{ijkl} имеет 81 компоненту. Из-за симметрии σ_{ij} и ϵ_{ij} число уравнений уменьшается до шести, и вследствие свойств симметрии

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} = E_{jilk} \quad (2.8)$$

тензор модулей упругости имеет только 36 независимых компонент. Матрица его компонент имеет вид

$$\begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1112} & E_{1113} & E_{1123} \\ E_{2211} & E_{2222} & E_{2233} & E_{2212} & E_{2213} & E_{2223} \\ E_{3311} & E_{3322} & E_{3333} & E_{3312} & E_{3313} & E_{3323} \\ E_{1211} & E_{1222} & E_{1233} & E_{1212} & E_{1213} & E_{1223} \\ E_{1311} & E_{1322} & E_{1333} & E_{1312} & E_{1313} & E_{1323} \\ E_{2311} & E_{2322} & E_{2333} & E_{2312} & E_{2313} & E_{2323} \end{bmatrix}.$$

Дальнейшее уменьшение числа независимых компонент следует из термодинамических соображений, если предполагается существование удельной потенциальной энергии деформации. С учетом (2.7) выражение (2.2) принимает вид

$$d\bar{U} = E_{ijkl} \epsilon_{kl} d\epsilon_{ij} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij}, \quad (2.9)$$

отсюда $\partial \bar{U} / \partial \varepsilon_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ и после повторного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) = E_{ijkl}.$$

Так как порядок дифференцирования может меняться, то

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right) = E_{klij}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = E_{ijkl} = E_{klij}. \quad (2.10)$$

Благодаря этому дополнительному требованию симметрии число независимых компонент тензора упругости уменьшается до 21. Этот случай соответствует наиболее общей анизотропии упругих материалов.

2.3.2. Формула Клапейрона

Для вычисления удельной потенциальной энергии деформации исходят из выражения (2.2). Рассматривают произвольный элемент объема упругого тела, напряженно-деформированное состояние которого задано величинами σ_{ij} и ε_{ij} . Вводят местную систему главных осей для напряжений и деформаций и дают главным напряжениям приращения, одинаковые по отношению к их конечным значениям (так называемое пропорциональное нагружение), тогда совершенная работа, отнесенная к единице объема, равна

$$\bar{W} = 1/2 (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3). \quad (2.11)$$

Она не зависит от пути нагружения и соответствует удельной потенциальной энергии деформации \bar{U} . Для произвольных координатных осей x_i соответственно этому получается

$$\bar{U} = 1/2 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (2.12)$$

Это выражение называется *формулой Клапейрона*. Ее можно записать в следующем развернутом виде:

$$\bar{U} = 1/2 (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \varepsilon_{33}) + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{23} \varepsilon_{23} + \sigma_{13} \varepsilon_{13}.$$

Обобщенный закон Гука (2.7) можно обратить; тогда справедливо равенство

$$\varepsilon_{ij} = D_{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (2.13)$$

Тензор 4-го ранга D_{ijkl} (тензор упругих податливостей) обладает такими же свойствами симметрии, как и тензор модулей

упругости. С учетом (2.7) или (2.13) формула Клапейрона принимает вид

$$\bar{U} = 1/2 E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \quad (2.14)$$

или

$$\bar{U} = 1/2 D_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}. \quad (2.15)$$

Отсюда вытекает

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \sigma_{ij}} &= 1/2 \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (D_{mnkl} \sigma_{mn} \sigma_{kl}) = 1/2 D_{mnkl} (\delta_{im} \delta_{jn} \sigma_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} \sigma_{mn}) = \\ &= 1/2 (D_{ijkl} \sigma_{kl} + D_{mnij} \sigma_{mn}) = D_{ijkl} \sigma_{kl}, \end{aligned}$$

или

$$\partial \bar{U} / \partial \sigma_{ij} = \varepsilon_{ij}. \quad (2.16)$$

Следует заметить, что соотношение (2.16)*) предполагает справедливость закона Гука и потому линейно-упругое поведение материала. Напротив, двойственное соотношение (2.3) следует из общих законов термодинамики. Формулы (2.3) и (2.16) представляют собой частные формулировки теоремы Кастильяно (см. п. 4.4.3).

2.3.3. Другой вывод обобщенного закона Гука из упругого потенциала

Исходным является не линейное выражение (2.7), а предположение о существовании удельной потенциальной энергии деформации $\bar{U}(\varepsilon_{ij})$ с уже рассмотренными выше свойствами $d\bar{U} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ или $\sigma_{ij} = \partial \bar{U} / \partial \varepsilon_{ij}$, благодаря которому устанавливается упругое поведение материала (упругость по Грину). Для $\bar{U}(\varepsilon_{ij})$ в окрестности начального состояния (характеризуемого равенством $\varepsilon_{ij} = 0$) выполняют разложение в степенной ряд по ε_{ij} с удержанием членов до второй степени включительно. Тогда

$$\bar{U} = \bar{U}_0 + E_{ij} \varepsilon_{ij} + 1/2 E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \quad (2.17)$$

причем \bar{U}_0 , E_{ij} , E_{ijkl} — константы, т. е. представляют собой величины, не зависящие от деформаций или напряжений.

Прежде всего константу \bar{U}_0 как несущественную можно положить равной нулю: $\bar{U}_0 = 0$. Далее следует

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\partial \bar{U}}{\partial \varepsilon_{ij}} = E_{kl} \delta_{ki} \delta_{jl} + 1/2 E_{mnkl} (\delta_{mi} \delta_{nj} \varepsilon_{kl} + \delta_{ki} \delta_{lj} \varepsilon_{mn}) = \\ &= E_{ij} + 1/2 E_{ijkl} \varepsilon_{kl} + 1/2 E_{mnij} \varepsilon_{mn}, \end{aligned}$$

* Это соотношение не следует смешивать с очень «похожим» соотношением (2.5), которое, однако, вместо \bar{U} содержит \bar{U}^* .

или

$$\sigma_{ij} = E_{ij} + 1/2(E_{ijkl} + E_{klij})\epsilon_{kl}.$$

Так как в недеформированном состоянии напряжений не возникает (так называемые собственные напряжения не учитываются), $E_{ij} = 0$, и для удельной потенциальной энергии деформации имеем соотношение

$$\bar{U} = 1/2 E_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}, \quad (2.18)$$

для напряжений же имеет место обобщенный закон Гука $\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl}$ [ср. с (2.7)].

Условия симметрии $E_{ijkl} = E_{klij}$ можно установить непосредственно из (2.18). Кроме того, немедленно получается формула Клапейрона $\bar{U} = 1/2 \sigma_{kl} \epsilon_{kl}$. Так как удельная потенциальная энергия деформации, как известно, при $\epsilon_{ij} = 0$ обращается в нуль и при любом деформировании должна совершаться положительная работа, \bar{U} всегда больше нуля: $\bar{U} \geq 0$, и в (2.18) речь идет о положительно определенной квадратичной форме.

§ 2.4. Обобщенный закон Гука для изотропного материала

Многие реальные материалы являются однородными и изотропными, т. е. их механические свойства во всех точках тела и во всех направлениях одинаковы. Это простейший и одновременно важнейший случай, которым будет ограничено последующее изложение.

Важнейшие анизотропные материалы имеют кристаллическое строение. В случае наиболее общей анизотропии (называемой также аэлотропией) тензор модулей упругости E_{ijkl} имеет 21 независимую компоненту. Соотношения между компонентами тензора упругости для различных кристаллических систем получаются из условий упругой симметрии. Благодаря им для материалов с различным кристаллическим строением уменьшается число независимых упругих постоянных. Большинство металлов имеют гексагональное или кубическое кристаллическое строение с пятью или тремя независимыми упругими постоянными.

Для упругого изотропного материала упругие свойства никак не зависят от направления, и число независимых упругих постоянных уменьшается до двух. Это справедливо также в случае, когда материал состоит из произвольно расположенных анизотропных кристаллов (так называемое поликристаллическое строение). Тогда вследствие осреднения по многим произвольно ориентированным кристаллам получается макроскопически квазиизотропное поведение.

Впрочем, опыт показывает, что металл с поликристаллической структурой и после обработки, например вальцовки, становится лишь слабо анизотропным и упругим. Следовательно, модель идеального изотропного материала представляет собой очень важное и нужное приближение.

В случае изотропии тензор модулей упругости E_{ijkl} является изотропным тензором, т. е. он обладает в каждой декартовой системе координат одинаковыми компонентами. Изотропным тензором второго ранга является тензор Кронекера δ_{ij} , такой тензор третьего ранга есть тензор Леви-Чивиты ϵ_{ijk} . Каждый скаляр также может считаться изотропным тензором нулевого ранга. Однако изотропного тензора первого ранга не существует. Тензоры 4-го ранга $\delta_{ij}\delta_{kl}$ и $\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}$ являются изотропными, и обобщенный изотропный тензор четвертого ранга получается их линейной комбинацией.

Таким образом, в случае изотропии тензор модулей упругости можно записать в общем виде

$$E_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{jl} + c\delta_{il}\delta_{jk} \quad (2.19)$$

(a, b, c — константы). Для закона Гука вследствие симметрии ϵ_{ij} имеем

$$\sigma_{ij} = a\delta_{ij}\epsilon_{kk} + b\epsilon_{ij} + c\epsilon_{ji} = a\delta_{ij}\epsilon_{kk} + (b+c)\epsilon_{ij}. \quad (2.20)$$

Как видно, в рассматриваемом случае появляются только две независимые упругие постоянные. Обычно вводят так называемые упругие постоянные Ламе λ и μ , имеющие размерность поверхностных сил. Тогда получается выражение

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{ij}, \quad (2.21)$$

которое подробно записывается в виде

$$\sigma_{11} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + 2\mu\epsilon_{11} \quad \text{и т. д.},$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\epsilon_{12} = \mu\gamma_{12} \quad \text{и т. д.}$$

Тензор модулей упругости имеет вид

$$E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (2.22)$$

его матрица компонент равна

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{vmatrix}.$$

Соотношения (2.21) могут быть разрешены относительно деформаций. Свертывание тензора (приравнивание индексов $i = j$

и последующее суммирование) приводит к выражению

$$\begin{aligned}\sigma_{ii} &= 3\lambda \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ii}, \\ \text{или} \quad s &= (3\lambda + 2\mu) e,\end{aligned}\quad (2.23)$$

где $s = J_1$ и $e = I_1$ — первые инварианты тензора напряжений и соответственно тензора деформаций. Тогда

$$\epsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk}, \quad (2.24)$$

причем должны выполняться условия $2\mu \neq 0$ и $3\lambda + 2\mu \neq 0$.

Из закона Гука в форме (2.21) и (2.24) вытекает, что главные оси напряжений при изотропии совпадают с главными осями деформаций (говорят, что тензоры напряжений и деформаций соосны). Это очевидно, так как по главным направлениям действуют только напряжения растяжения или сжатия, поэтому никакого изменения углов между главными направлениями произойти не может, так как это означало бы анизотропию.

2.4.1. Связь с энергией деформаций

В случае изотропии удельная потенциальная энергия деформации \bar{U} не зависит от направления в пространстве, следовательно, инвариантна относительно поворота системы координат. Поэтому \bar{U} является функцией только инвариантов тензора деформаций, а так как речь идет об однородной квадратичной форме, определяющими будут только два инварианта I_1 и I_{11} (так как I_{111} имеет третью степень). Таким образом, \bar{U} представляется как линейная комбинация

$$\bar{U} = AI_1^2 + BI_{11}, \quad (2.25)$$

причем A и B подчиняются некоторым ограничениям, таким, чтобы удельная потенциальная энергия деформации была положительно определенной. Выражение (2.25) целесообразно записать в форме, содержащей упругие постоянные Ламе,

$$\bar{U} = \left(\mu + \frac{\lambda}{2}\right) I_1^2 - 2\mu I_{11} = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu (I_1^2 - 2I_{11}). \quad (2.26)$$

Отсюда после небольших преобразований следует

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \frac{\lambda}{2} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33})^2 + \mu \left[\epsilon_{11}^2 + \epsilon_{22}^2 + \epsilon_{33}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\epsilon_{12} + \epsilon_{21})^2 + \frac{1}{2} (\epsilon_{23} + \epsilon_{32})^2 + \frac{1}{2} (\epsilon_{13} + \epsilon_{31})^2 \right].\end{aligned}\quad (2.27)$$

Это выражение является положительно определенным, если для констант справедливы условия $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Тогда из (2.27)

с учетом (2.3)*) получается закон Гука

$$\sigma_{11} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \varepsilon_{11}} = \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu \varepsilon_{11} \quad \text{и т. д.},$$

$$\sigma_{12} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \varepsilon_{12}} = 2\mu \varepsilon_{12} \quad \text{и т. д.}$$

2.4.2. Использование других упругих постоянных

Вместо упругих постоянных Ламе часто применяют другие постоянные. При одноосном растяжении отлично от нуля только σ_{11} . Согласно (2.6), соотношением $\sigma_{11}/\varepsilon_{11} = E$ определяется модуль упругости. Из (2.21) с учетом (2.23) следует прежде всего

$$2\mu \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \sigma_{kk}$$

и для одноосного растяжения

$$2\mu \varepsilon_{11} = \sigma_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{11} = \frac{2\mu + 2\lambda}{2\mu + 3\lambda} \sigma_{11},$$

или

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}. \quad (2.28)$$

Кроме того, появляется поперечное удлинение, так как экспериментально установлено, что $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11}$, где постоянная ν называется коэффициентом Пуассона и равна

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}. \quad (2.29)$$

Постоянные Ламе при этом равны

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (2.30)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G. \quad (2.31)$$

Постоянная G называется модулем сдвига, определяемым при чистом сдвиге из соотношения $\sigma_{12}/\gamma_{12} = G$.

Закон Гука в форме (2.21) или (2.24), выраженный через упругие постоянные E , G и ν , имеет вид

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right), \quad (2.32)$$

*) К этому следует добавить, что упругий потенциал $\bar{U}(\varepsilon_{ij})$ должен формулироваться симметрично относительно ε_{ij} .

или

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}]. \quad (2.33)$$

Удельная потенциальная энергия деформации через постоянные E , G и ν записывается так:

$$\bar{U} = G \left[\frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{kk})^2 + \epsilon_{ij}\epsilon_{ij} \right], \quad (2.34)$$

или

$$\bar{U} = \frac{1}{2E} [(1 + \nu)\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \nu(\sigma_{kk})^2]. \quad (2.35)$$

2.4.3. Компоненты девиаторов напряжений и деформаций

Так называемые компоненты девиаторов напряжений и деформаций определяются по формулам

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \bar{s}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}s, \quad (2.36)$$

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \bar{e}_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e, \quad (2.37)$$

где $s = \sigma_{kk} = J_1$, $e = \epsilon_{kk} = I_1$.

Величины \bar{s}_{ij} и \bar{e}_{ij} называют шаровыми тензорами. Как видно, $s_{kk} = 0$, $e_{kk} = 0$.

Закон Гука в форме (2.21) с помощью компонент девиатора можно представить в виде суммы двух частей

$$s_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}s = \lambda\delta_{ij}e + 2\mu(e_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}e),$$

следовательно, для $i = j$

$$s = (2\mu + 3\lambda)e = 3Ke, \quad (2.38)$$

а для $i \neq j$

$$s_{ij} = 2\mu e_{ij}. \quad (2.39)$$

Введенную в (2.38) константу

$$K = \frac{1}{3}(2\mu + 3\lambda) \quad (2.40)$$

называют *объемным модулем*. Значение этой величины устанавливается из рассмотрения частного случая *гидростатического сжатия* $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, которое имеет место в идеальных жидкостях (или в реальных жидкостях, находящихся в состоянии покоя), причем p — гидростатическое давление.

Относительная объемная деформация равна $\epsilon_{kk} = e = dV/V$, а $\sigma_{kk} = s = -3p$ или с учетом (2.38)

$$p/(-\epsilon_{kk}) = K. \quad (2.41)$$

Тогда объемный модуль (размерностью сила/площадь) можно представить также в виде

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (2.42)$$

Иногда применяют величину, обратную K , называемую *сжимаемостью*.

Из закона Гука, представленного в виде (2.38) и (2.39), следует также разделение удельной потенциальной энергии деформации на две независимые друг от друга части:

$$\bar{U}_G = \frac{1}{2} s_{ij} e_{ij} = \frac{1}{4G} \left(\sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{s^2}{3} \right), \quad (2.43)$$

$$\bar{U}_V = \frac{s^2}{18K} = K \frac{e^2}{2}, \quad (2.44)$$

где \bar{U}_G называется *удельной энергией формоизменения*, а \bar{U}_V — *удельной энергией изменения объема* *).

Обе величины играют важную роль, например, при формулировании критериев прочности и законов течения при пластическом деформировании. С помощью введенных в п. 1.2.4.3 октаэдрических напряжений или соответствующих октаэдрических деформаций удельная энергия формоизменения записывается в виде

$$\bar{U}_G = \frac{3}{4G} \tau_{\text{окт}}^2 = \frac{9}{4} G \gamma_{\text{окт}}^2.$$

§ 2.5. Закон термоупругости для изотропного материала

В соотношениях упругости, связывающих напряжения с деформациями, можно учесть влияние изменения температуры. При изменениях температуры ***) тело меняет свой объем. Если этому изменению объема ничто не препятствует и температура всюду одинакова, тело остается свободным от напряжений. При неравномерном распределении температуры это уже несправедливо.

Для упруго и термически изотропного материала изменения длин по всем направлениям при повышении температуры на

*) Следует заметить, что возможность разложения удельной потенциальной энергии деформации на две независимые друг от друга части весьма целесообразна, хотя, собственно говоря, и совершенно неожиданна.

**) Следует рассматривать только температурные изменения вследствие внешних воздействий. Изменениями температуры, появляющимися при деформации самого тела, можно пренебречь (несвязанная задача).

$\Delta T = T - T_0$ равны, появляются только удлинения, а сдвиги отсутствуют. При свободном температурном расширении

$$\epsilon_{ij}^{(th)} = \alpha \Delta T \delta_{ij}. \quad (2.45)$$

Коэффициент линейного температурного расширения является константой материала, не зависящей от температуры в широких пределах ее изменения.

При произвольном распределении температуры в упругом теле из-за неоднородного сжатия возникают дополнительные упругие деформации ϵ'_{ij} (они характеризуют сопротивление материала температурному удлинению), которые связаны с так называемыми температурными напряжениями. Тогда суммарные деформации равны

$$\epsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}) = \epsilon_{ij}^{(th)} + \epsilon'_{ij}. \quad (2.46)$$

Согласно Дюамелю и Нейману, для ϵ'_{ij} справедлив закон Гука в форме (2.24), т. е.

$$\epsilon'_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \delta_{ij} (\sigma_{kk})^2 \right],$$

и с учетом (2.46)

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \left[\frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} (\sigma_{kk})^2 - \alpha \Delta T \right] \delta_{ij}. \quad (2.47)$$

Разрешая эти соотношения относительно напряжений, получим

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + [\lambda (\epsilon_{kk})^2 - (2\mu + 3\lambda) \alpha \Delta T] \delta_{ij}. \quad (2.48)$$

Эти соотношения иногда называют формулами Дюамеля — Неймана²⁾. Формулы (2.47) и (2.48), выраженные через постоянные E и ν , а также $\sigma_{kk} = s$ и $\epsilon_{kk} = e$, запишутся в виде

$$\epsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} (\sigma_{ij} - \nu s \delta_{ij}) + \alpha \Delta T \delta_{ij},$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} e \delta_{ij} \right) - \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha \Delta T \delta_{ij}.$$

В простейшем случае тела кубической формы температурные напряжения возникают, если оно жестко защемлено, так что невозможны никакие изменения длин ребер, а температура повышается на ΔT° . Тогда справедливы равенства

$$\sigma_{11}^{(th)} = \sigma_{22}^{(th)} = \sigma_{33}^{(th)} = - \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha \Delta T.$$

В сложных задачах термоупругости в общем случае предварительно нужно решать также задачу о распределении тепла. За дальнейшими сведениями следует обращаться к специальной литературе, например [B17, B18].

Основные уравнения теории упругости

§ 3.1. Граничные задачи

Для решения задач теории упругости, т. е. для определения 15 неизвестных функций u_i , ε_{ij} , σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), имеются в распоряжении основные уравнения

$$\sigma_{ij,i} + \bar{f}_i = 0, \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3.2)$$

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} e \right), \quad (3.3)$$

или

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} s \right).$$

Следовательно, мы имеем 15 линейных дифференциальных уравнений в частных производных. В некоторых случаях добавляются еще условия совместности

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jk,il} = 0. \quad (3.4)$$

Система основных уравнений называется «полной» в том смысле, что, если решение системы существует, оно является единственным.

Состояние равновесия упругого тела известно, если в каждой его точке известны компоненты тензора напряжений и соответственно тензора деформаций. Напряжения во внутренних точках тела должны при этом непрерывно переходить в напряжения на поверхности («на границе»), т. е. должны быть справедливы соотношения [ср. с (1.17)]

$$\sigma_{ij} n_j = p_i^n. \quad (3.5)$$

Вместо вектора напряжений, который задает граничные условия (3.5) на поверхности рассматриваемого тела, на границе может быть также задан вектор перемещений. Поэтому в общем случае различают два типа граничных задач*):

Первая граничная задача. *Определение напряжений и перемещений внутри упругого тела в состоянии равновесия, если известно распределение сил на поверхности.*

*) В литературе их называют по-разному.

Вторая граничная задача. *Определение напряжений и перемещений внутри упругого тела в состоянии равновесия, если известны перемещения точек поверхности.*

Наряду с ними в некоторых случаях встречается их комбинация, так называемая третья, или смешанная, граничная задача, когда на одной части поверхности заданы поверхностные силы, а на остальной части — перемещения точек поверхности. Кроме того, возможны еще более общие комбинации граничных задач.

Во всех этих случаях объемные или массовые силы предполагались известными, причем, очевидно, что объемные и поверхностные силы не могут быть заданы произвольно, так как должны удовлетворяться интегральные условия равновесия для тела.

Для различных постановок задач естественно формулировать основные дифференциальные уравнения или полностью в напряжениях, или полностью в перемещениях. Кроме того, таким образом можно уменьшить число уравнений за счет исключения неизвестных функций. При этом открываются две возможности.

Исключение деформаций и напряжений позволяет получить три дифференциальных уравнения лишь относительно перемещений (уравнения Навье). Преимущество этого подхода состоит в том, что условия совместности при этом не нужны. С другой стороны, исключение деформаций и перемещений при использовании условий совместности приводит к шести дифференциальным уравнениям лишь относительно напряжений (уравнениям Бельтрами—Мичелла). Полученные таким образом уравнения Навье и соответственно Бельтрами—Мичелла часто называют также основными уравнениями теории упругости.

В зависимости от постановки при решении задачи теории упругости применяется тот или иной путь. Следует заметить, что общего решения, которое применимо для всех случаев, ни для одной из систем основных уравнений не существует.

§ 3.2. Уравнения Навье

Основные уравнения в перемещениях получаются, если в уравнения равновесия (3.1) подставить закон Гука (3.3) и исключить деформации посредством (3.2). Тогда прежде всего следует

$$2G \left(\frac{1}{2} \mu_{i, j} + \frac{1}{2} \mu_{j, i} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} e_{, i} \right) + f_i = 0;$$

обозначая $e_{, i} = \varepsilon_{kk, i} = u_{k, ki} = u_{j, ji}$, получим

$$G \left(u_{i, j} + u_{j, i} + \frac{2\nu}{1-2\nu} u_{i, j} \right) + f_i = 0.$$

Перемена порядка двукратного дифференцирования приводит к уравнениям

$$G \left(u_{i, j j} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j, i j} \right) + f_i = 0. \quad (3.6)$$

Это — уравнения Навье*), три линейных дифференциальных уравнения относительно компонент вектора перемещений. С помощью упругих постоянных Ламе они принимают вид

$$\mu u_{i, j j} + (\lambda + \mu) u_{j, i j} + f_i = 0, \quad (3.7)$$

и в такой форме называются иногда уравнениями Ламе.

Уравнения (3.6), записанные в декартовых координатах, имеют вид

$$G \left[\Delta u_x + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + f_x = 0$$

и т. д. (круговая перестановка индексов), или

$$\begin{aligned} \left[(1-2\nu) \Delta + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] u_x + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + \frac{1-2\nu}{G} f_x &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} + \left[(1-2\nu) \Delta + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] u_y + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} + \frac{1-2\nu}{G} f_y &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial y} + \left[(1-2\nu) \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_z + \frac{1-2\nu}{G} f_z &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения с помощью оператора Лапласа $\Delta(\dots) = (\dots)_{,ii}$ можно записать в компактной форме

$$\left[(1-2\nu) \delta_{ij} \Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right] u_j + \frac{1-2\nu}{G} f_i = 0.$$

Несмотря на простой вид уравнений Навье, их решение является сложной математической проблемой. Действительно, если поставлена первая краевая задача, граничные условия в напряжениях очень неудобны; в соответствии с (3.5) они примет вид

$$p_i^n = G (u_{i, j} + u_{j, i}) n_j + \frac{2G\nu}{1-2\nu} e n_i. \quad (3.8)$$

Для второй краевой задачи граничные условия получаются в виде

$$u_i = g_i(x_1, x_2, x_3)_R \text{ на границе,} \quad (3.9)$$

причем g_i — заданные непрерывные функции координат границы.

*) Составлены в 1821 г. Навье для $\lambda = \mu$ или $\nu = 1/4$, в 1828 г. — Коши для общего случая.

Тем не менее уравнения Навье являются исходными для ряда методов решений, так как при этом не используются условия совместности деформаций.

Другая форма уравнений Навье получается, если применяются следующие тождества для вихревой компоненты вектора перемещений второго порядка:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}(\varepsilon_{klm}u_{m,l})_{,j} &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}u_{m,lj} = \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})u_{m,lj} = u_{j,ij} - u_{i,jj}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В векторной форме они записываются так:

$$\text{rot rot } \mathbf{u} = \text{grad div } \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u},$$

причем заметим, что выражение псевдовектора $\Delta \mathbf{u}$ справедливо только в декартовой системе координат. Таким образом, из (3.6) следует

$$G \left(\frac{2-2\nu}{1-2\nu} u_{j,ij} - \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}u_{m,lj} \right) + f_i = 0. \quad (3.11)$$

С учетом выражения для бесконечно малого вектора вращения w_i , согласно (1.68), получаются уравнения

$$G \left(\frac{2-2\nu}{1-2\nu} u_{j,ij} - 2\varepsilon_{ijk}w_{k,j} \right) + f_i = 0;$$

в векторной форме уравнения Навье (3.6) записываются так:

$$G \left(\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \mathbf{u} \right) + \mathbf{f} = 0.$$

Соответственно формулировке (3.11) имеем

$$G \left(\frac{2-2\nu}{1-2\nu} \text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u} \right) + \mathbf{f} = 0,$$

или

$$G \left(\frac{2-2\nu}{1-2\nu} \text{grad } e - 2 \text{rot } \mathbf{w} \right) + \mathbf{f} = 0.$$

Как видно из выражения $u_{i,i}/(1-2\nu)$, уравнения Навье несправедливы для особого случая несжимаемого материала $\nu = 0,5$. Вычисляя дивергенцию от (3.6), найдем

$$G \left(u_{i,iii} + \frac{1}{1-2\nu} u_{i,iii} \right) + f_{i,i} = 0,$$

или

$$u_{i,iii} + \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \frac{f_{i,i}}{G} = 0. \quad (3.12)$$

В случае $\nu = 0,5$ вместо этого уравнения получается соотношение $u_{i,i} = e = 0$.

Особое значение имеет однородная задача, когда объемные силы можно положить равными нулю. При действии объемных сил (или массовых сил, например силы тяжести или центробежной силы) частные решения всегда можно найти. Они не должны удовлетворять граничным условиям и из-за линейности основных уравнений могут быть просто сложены с решением однородной задачи.

Уравнения Навье для однородной задачи имеют вид

$$u_{i, II} + \frac{1}{1-2\nu} u_{i, II} = 0. \quad (3.13)$$

Отсюда вытекают некоторые важные следствия. Вычисляя дивергенцию [ср. с (3.12)], получаем

$$u_{i, iII} = e_{, II} = \Delta e = 0, \quad (3.14)$$

т. е. первый инвариант тензора деформаций удовлетворяет гармоническому уравнению Лапласа, следовательно, является потенциальной или гармонической функцией.

Согласно зависимости

$$s = 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} e,$$

справедливо также соотношение

$$\Delta s = 0, \quad (3.15)$$

т. е. первый инвариант тензора напряжений также является гармонической функцией. Применяя оператор Лапласа к (3.13), получим

$$u_{i, jkk} = \Delta \Delta u_i = 0, \quad (3.16)$$

т. е. компоненты вектора перемещений удовлетворяют бигармоническому уравнению и, следовательно, являются бигармоническими функциями *).

Так как компоненты тензоров напряжений и деформаций являются линейными комбинациями первых производных от u_i , справедливы также соотношения

$$\Delta \Delta \sigma_{ij} = 0, \quad \Delta \Delta \epsilon_{ij} = 0. \quad (3.17)$$

Если поставлена вторая граничная задача, уравнения (3.16) с граничными условиями (3.9) достаточно для определения перемещений.

Как известно, бигармоническое уравнение является фундаментальным дифференциальным уравнением в теории упругости.

*) Попутно следует заметить, что перемещения являются бигармоническими функциями во всех, в частности в криволинейных, системах координат.

§ 3.3. Уравнения Бельтрами — Мичелла

Вместо того чтобы исходить из перемещений в качестве неизвестных функций (как это рассматривалось до сих пор), можно попытаться сначала решать уравнения равновесия в напряжениях. Деформации тогда находятся из закона Гука. Правда при этом сначала строится точное (и единственное) решение уравнений совместности.

Основные уравнения только в напряжениях получаются, если в условия совместности (3.4) подставляется закон Гука (3.3) с учетом уравнений равновесия (3.1). При этом получаются прежде всего условия совместности в напряжениях

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,kl} + \sigma_{kl,ij} - \sigma_{il,jk} - \sigma_{jk,il} &= \\ &= \frac{\nu}{1+\nu} (\delta_{ij} s_{,kl} + \delta_{kl} s_{,ij} - \delta_{il} s_{,jk} - \delta_{jk} s_{,il}). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Как и для (3.4), речь здесь идет о шести линейных независимых уравнениях.

Образуя линейные комбинации из (3.18) свертыванием тензора (т. е. приравниванием $k = l$ и суммированием!), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,kk} + \sigma_{kk,ij} - \sigma_{ik,jk} - \sigma_{jk,ik} &= \\ &= \frac{\nu}{1+\nu} (\delta_{ij} s_{,kk} + \delta_{kk} s_{,ij} - \delta_{ik} s_{,jk} - \delta_{jk} s_{,ik}). \end{aligned}$$

Вследствие симметрии индексов i, j , здесь также речь идет о шести независимых уравнениях.

С учетом $\sigma_{ik,jk} = -f_{i,i}$ и т. д. отсюда следует

$$\sigma_{ij,kk} + s_{,ij} + f_{i,i} + f_{i,i} = \frac{\nu}{1+\nu} (\delta_{ij} s_{,kk} + s_{,ij}),$$

или

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{\nu}{1+\nu} s_{,ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} s_{,kk} = -(f_{i,i} + f_{j,i}). \quad (3.19)$$

Производя свертывание по i, j , окончательно получаем соотношение между суммой напряжений и дивергенцией объемной силы

$$s_{,ii} = -f_{i,i}; \quad (3.20)$$

следовательно, (3.19) принимает вид

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu} s_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} f_{k,k} - (f_{i,i} + f_{j,i}). \quad (3.21)$$

Эти уравнения представляют собой шесть дифференциальных уравнений Мичелла для компонент тензора напряжений, иногда называемых также уравнениями Бельтрами—Мичелла *).

В декартовых координатах эти уравнения записываются в виде

$$\Delta \sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial f_x}{\partial x} \text{ и т. д.},$$

$$\Delta \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} = -\left(\frac{\partial f_x}{\partial y} + \frac{\partial f_y}{\partial x} \right) \text{ и т. д.}$$

(круговая перестановка индексов).

Для обращаемых в нуль (или постоянных) объемных сил справедливы уравнения Бельтрами

$$\sigma_{ij, kk} + \frac{1}{1+\nu} s_{, ij} = 0, \quad (3.22)$$

которые, впрочем, могут быть непосредственно выведены также из уравнений Навье (3.13).

§ 3.4. Формулировка основных уравнений в криволинейных координатах

Часто весьма целесообразно оперировать основными уравнениями теории упругости в криволинейных ортогональных системах координат. Правда, это требует применения тензорного исчисления в общей форме, от которого в этой книге сознательно отказываются. Однако необходимые для дальнейшего основные соотношения для наиболее часто встречающихся криволинейных координат — цилиндрических и сферических приведены без вывода **).

3.4.1. Цилиндрические координаты

Для цилиндрических координат r, φ, z справедлива следующая связь с декартовыми координатами (рис. 3.1):

$$x_1 = x = r \cos \varphi, \quad x_2 = y = r \sin \varphi, \quad x_3 = z = z.$$

Линейный элемент задается квадратичной формой

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2 + (dz)^2.$$

*) Составлены в 1900 г. Мичеллом, для однородного случая без объемных сил в 1892 г. — Бельтрами.

**) Общие формулы перехода содержатся, например, в [A18].

Компоненты вектора перемещений равны

$$u_1 = u_r, \quad u_2 = u_\varphi, \quad u_3 = u_z,$$

компоненты тензора деформаций суть

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{rr}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{zz},$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{r\varphi}, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{\varphi z}, \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{zr}.$$

Далее справедливы следующие кинематические соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \\ \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Компоненты тензора напряжений суть σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} и $\tau_{r\varphi}$, $\tau_{\varphi z}$, τ_{zr} .

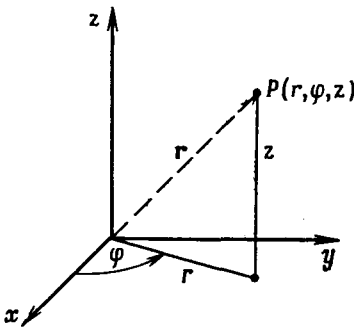


Рис. 3.1. Цилиндрические координаты r , φ , z .

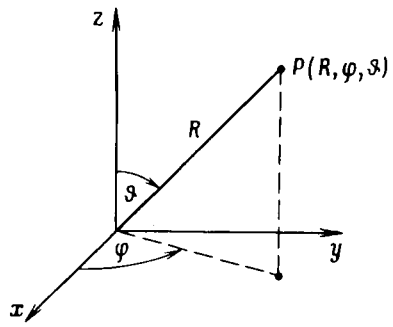


Рис. 3.2. Сферические координаты R , θ , φ .

Закон Гука, выраженный через упругие постоянные Ламе,

$$\sigma_{rr} = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda e \quad \text{и т. д.,}$$

$$\tau_{r\varphi} = 2\mu\varepsilon_{r\varphi} \quad \text{и т. д.,}$$

где относительная объемная деформация $e = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}$.

Уравнения равновесия в напряжениях имеют вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r} + f_r = 0,$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\varphi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + f_\varphi = 0,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0,$$

причем f_r , f_φ , f_z — компоненты вектора объемных сил.

3.4.2. Сферические координаты

Справедливы формулы преобразования (рис. 3.2)

$x_1 = x = R \sin \vartheta \cos \varphi$, $x_2 = y = R \sin \vartheta \sin \varphi$, $x_3 = z = R \cos \vartheta$
с квадратом линейного элемента

$$(ds)^2 = (dR)^2 + R^2 \sin^2 \vartheta (d\varphi)^2 + R^2 (d\vartheta)^2.$$

Перемещения равны

$$u_1 = u_R, \quad u_2 = u_\varphi, \quad u_3 = u_\vartheta.$$

Деформации равны

$$\begin{aligned} e_{11} &= e_{RR}, & e_{22} &= e_{\varphi\varphi}, & e_{33} &= e_{\vartheta\vartheta}, \\ e_{12} &= e_{R\varphi}, & e_{23} &= e_{\varphi\vartheta}, & e_{13} &= e_{\vartheta R}. \end{aligned}$$

Далее справедливы кинематические соотношения

$$\begin{aligned} e_{RR} &= \frac{\partial u_R}{\partial r}, & e_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_R}{R} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{u_\varphi}{R}, \\ e_{\vartheta\vartheta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_R}{R}, \\ e_{R\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial u_R}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{R} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial R} \right), \\ e_{R\vartheta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \vartheta} - \frac{u_\vartheta}{R} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial R} \right), \\ e_{\varphi\vartheta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \vartheta} - \frac{u_\varphi}{R} \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Закон Гука имеет вид формально такой же, как в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \sigma_{RR} &= 2\mu e_{RR} + \lambda e, & \tau_{\varphi\vartheta} &= 2\mu e_{\varphi\vartheta}, \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} &= 2\mu e_{\vartheta\vartheta} + \lambda e, & \tau_{R\varphi} &= 2\mu e_{R\varphi}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2\mu e_{\varphi\varphi} + \lambda e, & \tau_{\vartheta R} &= 2\mu e_{\vartheta R}, \end{aligned}$$

где $e = e_{RR} + e_{\varphi\varphi} + e_{\vartheta\vartheta}$. Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \sigma_{RR}) + \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sigma_{R\varphi} \sin \varphi) + \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{R\vartheta}}{\partial \vartheta} - \\ - \frac{\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\vartheta\vartheta}}{R} + f_R = 0, \\ \frac{1}{R^3} \frac{\partial}{\partial R} (R^3 \tau_{R\varphi}) + \frac{1}{R \sin^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sigma_{\varphi\vartheta} \sin^2 \vartheta) + \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + f_\varphi = 0, \\ \frac{1}{R^3} \frac{\partial}{\partial R} (R^3 \tau_{R\vartheta}) + \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sigma_{\varphi\varphi} \sin \vartheta) + \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\vartheta}}{\partial \varphi} - \\ - \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{R} \sigma_{\varphi\varphi} + f_\vartheta = 0. \end{aligned}$$

Приведенные соотношения существенно упрощаются в случае осевой симметрии (тогда исчезают производные $d/d\varphi$, а также все смешанные производные, содержащие φ).

§ 3.5. Существование и единственность решения граничной задачи теории упругости

При рассмотрении граничных задач теории упругости возникает вопрос о единственности возможных решений, т. е. вопрос о том, возможны ли для упругого тела, находящегося в равновесии при заданных нагрузках и определенных краевых условиях, различные решения основных уравнений.

Прежде всего из физических соображений очевидно, что каждое нагруженное упругое тело при подходящем опирании находится по меньшей мере в одном равновесном состоянии. Кроме того, так как математические формулировки задач теории упругости базируются на немногочисленных фундаментальных физических принципах, следует ожидать, что выводимые из них соотношения не могут привести к абсурдным результатам.

Доказательство единственности решения краевых задач статики упругого тела может быть построено различными способами. Так как напряженное или деформированное состояние может быть единственным или не единственным, доказательство строится на том, что предположение о неединственности приведет к противоречию.

3.5.1. Теорема Клапейрона

Основное значение при доказательстве единственности играют существование и положительная определенность упругой энергии деформации (которая уже вводилась в п. 2.3.3). Исходной при этом является следующая теорема, которая в литературе часто называется теоремой Клапейрона:

Если линейно-упругое тело при заданных объемных и поверхностных силах находится в равновесии, то энергия деформации равна половине работы, которая совершается внешними силами на перемещениях из исходного состояния равновесия в конечное.

Для доказательства рассматриваются напряженное состояние σ_{ij} и соответствующее ему деформированное состояние, которые удовлетворяют основным уравнениям (3.1) — (3.3). Тогда скалярное умножение уравнений равновесия на смещения и последующее интегрирование по объему V упругого тела (с поверхностью A) дают

$$\int_V u_i \sigma_{ij, j} dV + \int_V u_i f_i dV = 0.$$

Подынтегральная функция в первом интеграле преобразуется по формуле

$$(u_i \sigma_{ij}),_j = u_{i,j} \sigma_{ij} + u_i \sigma_{ij,j},$$

и, следовательно,

$$\int_V (u_i \sigma_{ij}),_j dV + \int_V u_i f_i dV = \int_V u_{i,j} \sigma_{ij} dV.$$

Первый интеграл в левой части преобразуется в поверхностный интеграл с помощью формулы Гаусса, при этом для подынтегрального выражения в правой части с учетом соотношения $u_{i,j} = \epsilon_{ij} + \omega_{ij}$ [ср. с (1.63)] и симметрии тензора напряжений получаем

$$u_{i,j} \sigma_{ij} = \epsilon_{ij} \sigma_{ij}.$$

В результате имеем соотношение

$$\int_A u_i \sigma_{ij} n_j dA + \int_V u_i f_i dV = \int_V \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dV,$$

и с учетом граничных условий (3.5)

$$\int_A u_i p_i^n dA + \int_V u_i f_i dV = \int_V \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dV.$$

Подынтегральное выражение в правой части после подстановки закона Гука (3.3) принимает вид

$$\epsilon_{ij} \sigma_{ij} = 2G \left(\epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} e^2 \right) = 2\bar{U},$$

т. е. равно удвоенной удельной энергии деформации [ср. с (2.34)].

Таким образом, теорема Клапейрона имеет вид

$$\int_A u_i p_i^n dA + \int_V u_i f_i dV = 2 \int_V \bar{U} dV. \quad (3.23)$$

В левой части (3.23) стоит работа поверхностных и объемных сил, правая часть пропорциональна энергии упругой деформации.

При этом рассмотрении предполагалось, что речь идет о смещениях как однозначных функциях координат точки.

3.5.2. Доказательство единственности

Доказательство того, что основные уравнения линейной теории упругости имеют только единственное решение (если оно вообще существует), было впервые дано Кирхгофом [8] и основано на положительной определенности энергии деформации.

Предположим, что имеются две системы решений $\sigma_{ij}^{(1)}$, $u_i^{(1)}$ и $\sigma_{ij}^{(2)}$, $u_i^{(2)}$, которые удовлетворяют одним и тем же граничным условиям при одинаковых объемных силах и основным уравнениям (3.1)—(3.3). Тогда

$$\sigma_{ij,i}^{(1)} = \sigma_{ij,i}^{(2)} = -f_i, \quad \sigma_{ij}^{(1)} n_j = \sigma_{ij}^{(2)} n_j = p_i^n. \quad (3.24)$$

Ввиду линейности уравнений разность $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)}$ и соответственно $u'_i = u_i^{(2)} - u_i^{(1)}$, как видно из первого уравнения (3.24), также являются решением основных уравнений для случая $f_i = 0$. Теорема Кляпейрона при этом имеет вид

$$\int_A (p_i^n)^n u'_i dA = 2 \int \bar{U}' dV. \quad (3.25)$$

В случае первой граничной задачи для разности решений благодаря второму уравнению (3.24) обращаются в нуль напряжения на границе тела, для второй граничной задачи — перемещения на границе. Таким образом, из (3.25) следует

$$\int_V \bar{U}' dV = 0.$$

Из-за положительной определенности удельной потенциальной энергии упругой деформации это равенство может быть выполнено только для $\epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij}^{(2)} - \epsilon_{ij}^{(1)} = 0$. Отсюда следует $\epsilon_{ij}^{(1)} = \epsilon_{ij}^{(2)}$ и $\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}$, что и доказывает единственность решения.

Для смешанной граничной задачи справедлива та же самая аргументация. Предполагается только при необходимости, что перемещения являются однозначными функциями координат точки.

Заметим, что в случае первой граничной задачи из равенства $\epsilon_{ij}^{(1)} = \epsilon_{ij}^{(2)}$ не следует равенство перемещений, однако они могут отличаться друг от друга только на величину жесткого перемещения всего тела. Напротив, для второй и смешанной граничных задач перемещения на поверхности заданы однозначно.

Для нелинейной теории и больших деформаций приведенный выше способ доказательства недействителен, так как тогда положительная определенность энергии деформации не должна иметь места.

Вопрос существования решения упругой граничной задачи представляет собой одну из труднейших математических задач теории упругости и в дальнейшем здесь не обсуждается. Вместе с тем при весьма общих условиях доказательство существования решения первой и второй граничных задач установлено. За дальнейшими подробностями следует обращаться к специальной литературе, например [A42].

Общий теоретический анализ единственности решения граничной задачи теории упругости, например, в зависимости от величины упругих постоянных и формы рассматриваемой области здесь не приводится. Относящиеся к этому соображения можно найти в [A32].

Энергетические принципы в теории упругости

В предыдущих главах уже применялись понятия работы и энергии, которые играют важную роль в общей механике. Работа и энергия определенным образом связаны между собой. Силы в механической системе могут совершать работу, система может обладать энергией *). На понятии энергии основаны многие методы механики сплошной среды. Целесообразность их применения следует из того, что энергия представляет собой хорошо изученную инвариантную величину и поэтому не зависит от системы координат. Все различные энергетические принципы взаимосвязаны друг с другом, так как в их основе лежат фундаментальные законы механики сплошной среды.

§ 4.1. Термодинамические соотношения

В термодинамике ***) изучаются изменения механического состояния физической системы, вызываемые изменением температуры (и наоборот), и устанавливаются закономерности таких взаимодействий.

Термодинамика представляет собой феноменологическую теорию материи, так как в ней применяется лишь некоторое число параметров для описания макроскопических систем.

Состояние системы описывается параметрами состояния. В механике сплошной среды механическое состояние, например, покоящейся жидкости задается, как известно, двумя скалярными параметрами состояния — плотностью и давлением, для описания температурного состояния привлекается температура. Для твердого тела вместо плотности или объема появляется тензор деформаций, вместо давления — тензор напряжений.

*) Исторически понятие работы для изучения проблем механики применялось уже Ньютоном, в завуалированной же форме оно встречалось еще в древности (Аристотель).

**) В классической термодинамике занимаются равновесными состояниями или переходами от одного равновесного состояния к другому, которые предполагаются квазистатическими. Ввиду этого более последовательным было бы применение названия «термостатика». Собственно термодинамику, которая занимается неравновесными процессами, сейчас часто называют термодинамикой необратимых процессов.

Состояние равновесия описывается соотношением между параметрами состояния, т. е. уравнением состояния. Его вид для каждой системы должен устанавливаться из опыта.

Для всех изменений состояния в широком смысле справедлив закон сохранения энергии. Он утверждает, что энергия может переходить только из одной формы в другую (включая эквивалентность массы и энергии). Каждому термодинамически равновесному состоянию однородной системы (например, однородному телу постоянной плотности при постоянном давлении и постоянной температуре) соответствует определенное значение так называемой внутренней энергии E системы. Она соответствует содержащейся в системе потенциальной механической энергии и тепловой энергии.

Применительно к процессу деформирования твердых тел можно утверждать согласно первому закону термодинамики, что работа, затрачиваемая на деформацию тела, равна внутренней энергии тела. Если деформированное тело медленно возвращается в исходное состояние, то по меньшей мере часть накопленной энергии деформации может быть опять возвращена. Энергия деформации вычисляется согласно (2.1) как работа внутренних сил в процессе деформирования. Удельная потенциальная энергия упругой деформации в общем случае равна

$$\bar{W}^{(i)} = \int_{\varepsilon_{ij}=0}^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (4.1)$$

Это равенство справедливо независимо от физического закона для материала, однако его можно интегрировать, если только для каждого промежуточного состояния известны напряжения как функции деформаций.

Если процесс деформации обратимый, то поведение материала упругое. Работа внутренних сил не зависит от пути, и величину $\bar{W}^{(i)} = \bar{U}$ можно истолковывать как упругий потенциал. Как было показано в п. 2.3.3, зная \bar{U} , можно получить соотношения между напряжениями и деформациями (упругость по Грину), а именно справедливо равенство

$$\partial \bar{U} / \partial \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}. \quad (4.2)$$

Поведение материала при этом может быть линейным или нелинейным.

В дальнейшем будет кратко показано, что для хорошо изученных адиабатического или изотермического процесса удельную потенциальную энергию деформации \bar{U} можно отождествить

с известными термодинамическими функциями состояния («потенциалами»).

Согласно второму закону термодинамики, в качестве важнейшей характеристики состояния вводится энтропия S по формуле

$$dQ/T = dS, \quad (4.3)$$

где dQ означает для действующей в данный момент времени температуры T (так называемой абсолютной температуры) поток тепла, подводимого или отводимого обратимо от рассматриваемой системы.

Справедливо общее соотношение (называемое «фундаментальным уравнением»)

$$dE = T dS + dW, \quad (4.4)$$

причем под dW понимается механическая работа, совершаемая системой (это в общем случае не параметр состояния, т. е. dW в противоположность dE и dS не является полным дифференциалом). Относя последнее равенство к единице объема^{*} (на это указывают черточки над величинами) деформируемого тела, из (4.4) получаем выражение

$$d\bar{E} = T d\bar{S} + \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}, \quad (4.5)$$

соответственно для упругих материалов

$$d\bar{E} = T d\bar{S} + d\bar{U}. \quad (4.6)$$

Для описания состояния упругого тела достаточно выбрать из четырех переменных величин ϵ_{ij} , σ_{ij} , T , S в качестве независимых переменных две.

Внутренняя энергия может быть представлена как однозначная функция деформаций и энтропии $\bar{E} = \bar{E}(\epsilon_{ij}, \bar{S})$, обладающая свойством $\partial\bar{E}/\partial\epsilon_{ij} = \partial\bar{E}/\partial\epsilon_{ji}$. Далее справедливо равенство

$$d\bar{E} = \left(\frac{\partial\bar{E}}{\partial\epsilon_{ij}} \right)_{\bar{S}} d\epsilon_{ij} + \left(\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{S}} \right)_{\epsilon_{ij}} d\bar{S}, \quad (4.7)$$

причем это выражение представляет собой полный дифференциал. Как обычно в термодинамике, величины, являющиеся постоянными при дифференцировании, приписываются снизу в виде индексов. Если рассматривается *адиабатический* процесс, как это, например, происходит при очень быстром дефор-

^{*} В этом отличие от обычно применяемого в термодинамике подхода, когда параметры состояния относятся к единице массы.

мировании, то $dQ = 0$ и, следовательно, $dS = 0$. Сравнение (4.7) с (4.2) приводит к равенству

$$\left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_{\bar{S}} = \sigma_{ij} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{ij}},$$

из которого видно, что удельная потенциальная энергия деформации при адиабатическом упругом деформировании соответствует внутренней энергии, отнесенной к единице объема. Обратимый адиабатический процесс называют также *изэнтропическим*.

Вводя так называемую свободную энергию

$$\bar{F} = \bar{E} - T\bar{S}, \quad (4.8)$$

получаем из (4.6)

$$d\bar{F} = d\bar{E} - T d\bar{S} - \bar{S} dT = d\bar{U} - \bar{S} dT. \quad (4.9)$$

Свободная энергия является однозначной функцией деформаций и температуры $\bar{F} = \bar{F}(\epsilon_{ij}, T)$, причем $\partial \bar{F} / \partial \epsilon_{ij} = \partial \bar{F} / \partial \epsilon_{ji}$ и величина

$$d\bar{F} = \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_T d\epsilon_{ij} + \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial T} \right)_{\epsilon_{ij}} dT$$

есть полный дифференциал.

Для *изотермического* процесса, который имеет место при очень медленном квазистатическом деформировании, $dT = 0$ и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_T = \sigma_{ij} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{ij}},$$

т. е. удельная потенциальная энергия деформации соответствует в этом случае свободной энергии, отнесенной к единице объема.

В п. 2.3.3 уже использовалось важное свойство энергии упругой деформации, а именно ее положительная определенность. В недеформированном состоянии $\bar{U} = 0$; так как на деформацию затрачивается работа, то $\bar{U} > 0$, и удельная потенциальная энергия упругой деформации оказывается всегда положительной функцией компонент деформаций и напряжений. Это согласуется с законом термодинамического равновесия Гиббса, согласно которому устанавливается положительная определенность как \bar{E} , так и \bar{F} в окрестности начального состояния тела.

Как уже упоминалось в п. 2.2.1, с процессом упругого деформирования можно связать другие величины, которые также

имеют размерность работы. Это дополнительная удельная энергия деформации \bar{U}^* . Она вычисляется согласно выражению

$$\bar{U}^* = \int_{\sigma_{ij}=0}^{\sigma_{ij}} \epsilon_{ij} d\sigma_{ij},$$

причем справедливо равенство

$$\frac{\partial \bar{U}^*}{\partial \sigma_{ij}} = \epsilon_{ij}. \quad (4.10)$$

Следовательно, \bar{U}^* можно рассматривать как упругий потенциал деформации.

Вводя так называемый *потенциал Гиббса* (его называют также *свободной энтальпией*) как функцию компонент напряжений и температуры согласно равенству

$$\bar{G} = \bar{E} - T\bar{S} - \sigma_{ij}\epsilon_{ij} = \bar{F} - \sigma_{ij}\epsilon_{ij}, \quad (4.11)$$

с учетом (4,9) получим

$$d\bar{G} = -\bar{S} dT - \epsilon_{ij} d\sigma_{ij} = -\bar{S} dT - d\bar{U}^*.$$

Здесь $\bar{G} = \bar{G}(\sigma_{ij}, T)$ — однозначная функция компонент напряжений и температуры, причем

$$d\bar{G} = \left(\frac{\partial \bar{G}}{\partial \sigma_{ij}} \right)_T d\sigma_{ij} + \left(\frac{\partial \bar{G}}{\partial T} \right)_{\sigma_{ij}} dT$$

есть полный дифференциал.

Для изотермического процесса сравнение с (4.10) позволяет получить равенство

$$-\frac{\partial \bar{G}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \bar{U}^*}{\partial \sigma_{ij}} = \epsilon_{ij},$$

и поэтому в этом случае дополнительную удельную энергию деформации можно отождествить с отрицательным потенциалом Гиббса, отнесенным к единице объема.

Следует упомянуть, что введенные функции состояния \bar{E} , \bar{F} , \bar{G} относятся к так называемым термодинамическим потенциалам. Этим потенциалам ставятся в соответствие (см., например, [В13, стр. 40]) совершенно определенные независимые переменные. В заключение следует также заметить, что соотношения между упругими напряжениями и деформациями, а также удельная потенциальная энергия деформации не зависят явно от температуры, как это предполагалось при вышеприведенном рассмотрении.

§ 4.2. Энергия деформации для линейно-упругого материала

Как известно, энергия деформации существует не для всех материалов. Как было показано, для упругих материалов удельная потенциальная энергия деформации \bar{U} означает упругий потенциал для напряжений, а дополнительная удельная энергия деформации \bar{U}^* — соответствующий потенциал для деформаций.

Между \bar{U} и \bar{U}^* как в линейном, так и в нелинейном случае справедлива связь*)

$$\bar{U}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \bar{U}^*(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (4.12)$$

причем обозначения аргументов указывают на то, что $\bar{U}(\boldsymbol{\varepsilon})$ выражается через компоненты деформации, а $\bar{U}^*(\boldsymbol{\sigma})$ — через компоненты напряжения. Далее справедливы общие соотношения (ср. с п. 2.2.1)

$$dU(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}, \quad (4.13)$$

$$d\bar{U}^*(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial \bar{U}^*}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}.$$

Рис. 4.1. Удельная потенциальная энергия деформации и дополнительная энергия деформации при одноосном напряженном состоянии.

Значение величин \bar{U} и \bar{U}^* для нелинейно-упругого материала можно наглядно пояснить на примере одноосного напряженного состояния (рис. 4.1). Из рисунка видно, что $\bar{U}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon}$ и со-

ответственно $\bar{U}^*(\boldsymbol{\sigma}) = \int_0^{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\varepsilon} d\boldsymbol{\sigma}$ дополняют друг друга до прямоугольника $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\varepsilon}$ площади под кривой напряжения—деформации и соответственно над этой кривой.

Для линейно-упругого материала, следующего закону Гука, \bar{U} и \bar{U}^* совпадают и справедлива формула Клапейрона

$$\bar{U} = \bar{U}^* = 1/2 E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = 1/2 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (4.14)$$

Впрочем, иногда целесообразно различать \bar{U} и \bar{U}^* и в случае линейно-упругого материала. При этом \bar{U} выражается через

) Переход от $\bar{U}(\boldsymbol{\varepsilon})$ к $\bar{U}^(\boldsymbol{\sigma})$ можно трактовать как так называемое преобразование Лежандра. Иногда его называют также преобразованием Фридрихса.

компоненты деформаций, а \bar{U}^* — через компоненты напряжений в виде [ср. с (2.34) и (2.35)]

$$\bar{U}(\varepsilon) = G \left(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} e^2 \right) = \mu \left(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} e^2 \right),$$

соответственно

$$\bar{U}^*(\sigma) = \frac{1}{4G} \left(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} s^2 \right) = \frac{1}{4\mu} \left(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} s^2 \right).$$

Оба выражения численно равны и являются положительно определенными величинами в деформациях или напряжениях.

§ 4.3. Принцип возможной работы

Все энергетические теоремы теории упругости основаны на принципе возможной (виртуальной) работы. Существуют различные интерпретации этого принципа, которые приводят к теоремам, имеющим большое значение для приложений (см. схему на стр. 90).

Среди различных исследователей, которые занимались разработкой принципа возможной работы и его применения, следует упомянуть прежде всего И. Бернулли, который сформулировал его как общий принцип равновесия механики. В качестве такового принцип возможной работы может трактоваться как аксиома, он справедлив для всех сил при любых физических условиях*).

Принцип, который был сформулирован первоначально для механики материальных точек, гласит:

В состоянии равновесия системы работа всех приложенных к ней сил на любом бесконечно малом изменении конфигурации системы, которое совместимо с кинематическими условиями, равна нулю.

Принцип возможной работы состоит из двух полностью эквивалентных**) принципов: *принципа возможных перемещений и принципа возможных сил*. Их называют в литературе по-разному. Первый принцип иногда называют собственно принципом возможной работы, второй — принципом возможной дополнительной работы или также принципом Кастильяно.

4.3.1. Возможные перемещения, возможная работа

Рассмотрим деформируемое тело, которое находится в равновесии под действием приложенных внешних поверхностных или объемных сил (рис. 4.2). Внутри тела возникают напряже-

*) Общие исследования, посвященные существованию принципа, приведены, например, в [9].

**) Говорят, что оба принципа дополняют друг друга или являются двойственными.

ния и деформации. Исследуется поведение тела, вызванное некоторым возмущением, причина которого не зависит от фактически приложенных сил. Точки тела испытывают так называемые *возможные перемещения* *) δu_i , следствием которых являются *возможные деформации* $\delta \epsilon_{ij}$.

Возможные перемещения являются произвольными непрерывными функциями координат точки (тем самым они удовлетворяют условиям совместности деформаций), они не зависят от времени, являются достаточно малыми и потому не влияют на равновесие внешних сил и внутренних напряжений. Важным

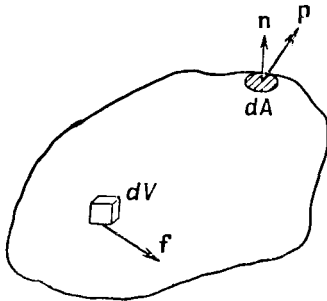


Рис. 4.2. Деформированное тело при нагружении объемными и поверхностными силами.

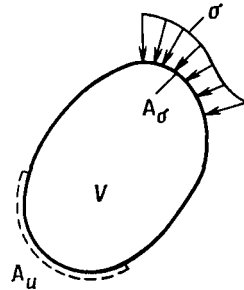


Рис. 4.3. Упругое тело с заданными на границе напряжениями и перемещениями.

свойством возможных перемещений является то, что они находятся в согласии с кинематическими связями, наложенными на тело. Это означает, что δu_i — *кинематически допустимые функции*. В остальном возможные перемещения могут быть произвольными, можно также считать, что действительные перемещения u_i получают произвольные приращения или что δu_i не имеют механического смысла.

Если рассматриваемое тело имеет объем V и площадь поверхности A , то граничные условия в общем случае задаются в виде поверхностных сил на части A_σ и перемещений на части A_u тела (рис. 4.3). Очевидно, $A = A_\sigma + A_u$, причем A_σ или A_u может равняться нулю **). Для кинематически допустимых возможных перемещений это означает, что $\delta u_i = 0$ на A_u . Тогда

*) Возможность здесь означает, что перемещения не зависят от фактически действующих сил; речь идет о воображаемых допустимых перемещениях, которые в действительности могут вовсе не появляться.

***) Части поверхности, на которых не заданы граничные условия относительно поверхностных сил или перемещений, отсутствуют.

для вышеупомянутых возможных деформаций справедливо равенство

$$\delta e_{ij} = 1/2 \delta (u_{i,j} + u_{j,i}) = 1/2 [(\delta u_i)_{,j} + (\delta u_j)_{,i}], \quad (4.15)$$

причем здесь применялось правило перестановки

$$\delta (u_{i,j}) = (\delta u_i)_{,j}. \quad (4.16)$$

Возможной работой является работа, которую действительные силы совершают на возможных, т. е. мыслимых, перемещениях. При этом следует принять во внимание, что действительные силы уже полностью приложены к телу до появления возможных перемещений. Аналогично возможная работа деформаций (возможная внутренняя работа) определяется как работа действительных внутренних напряжений на возможных деформациях.

4.3.2. Принцип возможных перемещений

Для деформированного тела объемом V и с поверхностью $A = A_\sigma + A_u$ (рис. 4.2), нагруженного объемными f_i и поверхностными силами p_i (напряжениями на поверхности) и находящегося в равновесии, справедливы статические соотношения

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \text{ в объеме } V, \quad \sigma_{ij} n_j = p_i \text{ на поверхности } A.$$

Тогда

$$(\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i = 0 \quad (4.17)$$

или после интегрирования по всему объему тела

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i dV = \delta W = 0. \quad (4.18)$$

Покажем, что это выражение соответствует полной возможной работе. Прежде всего для первого слагаемого подынтегральной функции в (4.18) с учетом (4.16) следует

$$\sigma_{ij,j} \delta u_i = (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} - \sigma_{ij} \delta u_{i,j},$$

и тогда (4.18) приводится к виду

$$\delta W = \int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV + \int_V f_i \delta u_i dV - \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV. \quad (4.19)$$

Для первого интеграла по теореме Гаусса и с учетом граничных условий в напряжениях справедливо равенство

$$\int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV = \int_A \sigma_{ij} \delta u_i n_j dA = \int_{A_\sigma} p_i \delta u_i dA,$$

где поверхностный интеграл распространяется только на A_σ , так как $\delta u_i = 0$ на A_u . Подынтегральная функция в третьем интеграле в (4.19) с учетом (4.15) и благодаря симметрии тензора напряжений равна

$$\sigma_{ij} \delta(u_{i,j}) = \sigma_{ij}^{1/2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}.$$

Поэтому окончательно выражение (4.19) примет вид

$$\delta W = \int_{A_\sigma} p_i \delta u_i dA + \int_V f_i \delta u_i dV - \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV. \quad (4.20)$$

Это выражение представляет собой математическую формулировку принципа возможных перемещений для любого деформируемого тела. Выражение

$$\int_{A_\sigma} p_i \delta u_i dA + \int_V f_i \delta u_i dV = \delta W^{(a)} \quad (4.21)$$

означает возможную работу внешних сил, в то время как интеграл

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \delta W^{(i)} \quad (4.22)$$

представляет собой возможную работу внутренних напряжений или возможную работу деформаций. Таким образом, (4.20) принимает вид

$$\delta W = \delta W^{(a)} - \delta W^{(i)} = 0 \quad \text{или} \quad \delta W^{(a)} = \delta W^{(i)}. \quad (4.23)$$

Итак, принцип возможных перемещений гласит:

Для деформируемого тела, находящегося в состоянии равновесия, полная возможная работа внешних сил равна возможной работе деформаций на любых кинематически допустимых перемещениях.

Тот факт, что принцип возможных перемещений приводит к уравнениям равновесия, позволяет обратить это высказывание следующим образом: Деформируемое тело находится в состоянии равновесия тогда и только тогда, когда для любого возможного перемещения, согласуемого с кинематическими связями, полная возможная работа внешних сил равна работе на возможных деформациях.

Следовало бы еще раз подчеркнуть, что соотношения (4.20) или (4.23) не зависят от поведения материала, так как физические уравнения до сих пор еще не использовались.

Для упругого поведения материалов возможная работа деформаций соответствует возможной энергии деформации, т. е.

$$\delta W^{(i)} = \delta U = \int_V \delta \bar{U} dV,$$

где U — удельная потенциальная энергия упругой деформации, обладающая свойством $\partial U / \partial \epsilon_{ij} = \sigma_{ij}$ (упругий потенциал).

4.3.3. Принцип возможных сил

Для этого принципа, двойственного с принципом возможных перемещений (иногда также называемого *принципом возможной дополнительной работы*), вычисляют возможную работу (псевдороботу), которую совершают независимо от действительных сил и напряжений, отвечающих положению равновесия, так называемые возможные силы и напряжения на действительных перемещениях. В каждой точке деформируемого тела заданы перемещения и соответствующее им напряженное состояние, удовлетворяющие уравнениям равновесия внутри тела и условиям на граничной поверхности, т. е.

$$\sigma_{i,j} + \bar{f}_i = 0 \text{ в объеме } V, \quad \sigma_{i,j} n_j = p_i \text{ на поверхности } A_\sigma.$$

В качестве возможных сил и напряжений (*статически допустимых функций*) рассматриваются непрерывные и однозначные функции δf_i , δp_i и $\delta \sigma_{ij}$, для которых также должны быть справедливы уравнения

$$\delta \sigma_{i,j} + \delta f_i = 0 \text{ в объеме } V \text{ и } \delta \sigma_{i,j} n_j = \delta p_i \text{ на поверхности } A_\sigma.$$

Тогда по аналогии с (4.18) определяется величина

$$\delta W^* = \int_V u_i (\delta \sigma_{i,j} + \delta f_i) dV = 0, \quad (4.24)$$

которая является полной возможной дополнительной работой. Для первого слагаемого в подынтегральной функции (4.24) получается

$$u_i \delta \sigma_{i,j} = (\delta u_i \sigma_{i,j})_{,j} - u_{i,j} \delta \sigma_{ij}$$

и на основании теоремы Гаусса из (4.24) следует

$$\delta W^* = \int_A u_i \delta p_i dA - \int_V u_{i,j} \delta \sigma_{ij} dV + \int_V u_i \delta f_i dV. \quad (4.25)$$

Здесь величина

$$\int_A u_i \delta p_i dA + \int_V u_i \delta f_i dV = \delta W^{*(a)}$$

означает возможную внешнюю дополнительную работу. Для первого слагаемого

$$\int_A u_i \delta p_i dA = \int_{A_u} u_i \delta p_i dA,$$

так как здесь должны учитываться только такие возможные поверхностные силы, которые на границе A_σ (где заданы силы), обращаются в нуль. Тогда получается

$$\delta W^{*(a)} = \int_{A_u} u_i \delta p_i dA + \int_V u_i \delta f_i dV. \quad (4.26)$$

Благодаря симметрии $\delta\sigma_{ij}$ далее следует равенство

$$\int_V u_{i,j} \delta\sigma_{ij} dV = \int_V \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} dV = \delta W^{*(i)}, \quad (4.27)$$

определяющее возможную дополнительную работу внутренних (возможных) сил или возможную дополнительную работу деформаций. Из (4.25) окончательно получается выражение

$$\delta W^* = \int_{A_u} u_i \delta p_i dA + \int_V u_i \delta f_i dV - \int_V \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} dV = 0, \quad (4.28)$$

представляющее собой математическую формулировку принципа возможных сил для любого деформируемого тела. Как правило, $\delta f_i = 0$, так как объемные силы обычно задаются постоянными. С учетом (4.26) и (4.27) можно опять записать

$$\delta W^* = \delta W^{*(a)} - \delta W^{*(i)} = 0 \text{ или } \delta W^{*(a)} = \delta W^{*(i)}. \quad (4.29)$$

Итак, принцип возможных сил гласит:

Если полная возможная дополнительная работа внешних сил равна внутренней возможной работе деформаций для любой статически допустимой системы сил и напряжений, то перемещения и деформации в деформируемом теле удовлетворяют условиям совместности и согласуются с граничными условиями.

Вновь следует заметить, что равенства (4.28) и (4.29) справедливы вообще для любого деформируемого тела, независимо от свойств материала.

4.3.4. Значение принципа возможной работы

Двойственный характер обеих частей принципа возможной работы можно выразить в следующей общей форме [A29, стр. 56]:

$$\bar{W} = \int_A \overset{\text{Статически допустимые функции}}{\sigma_{ij} u_i n_j} dA + \int_V \overset{\text{Статически допустимые функции}}{f_i u_i} dV - \int_V \overset{\text{Кинематически допустимые функции}}{\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}} dV = 0. \quad (4.30)$$

При этом \bar{W} означает полную возможную работу или дополнительную работу, причем вычисляется или работа статически допустимых функций на возможных кинематически допустимых функциях (принцип возможных перемещений), или работа возможных статически допустимых функций на кинематически допустимых функциях (принцип возможных сил). Иначе говоря, к принципу возможных сил можно прийти, если в формулировке принципа возможных перемещений заменить понятия «перемещение» и «деформация» понятиями «сила» и «напряжение» и соответственно понятие «равновесие» понятием «совместность».

В трактовке принципа возможной работы, согласно (4.30), не следует предполагать никакой функциональной зависимости между системой статически допустимых и системой кинематически допустимых функций. Напротив, если u_i рассматривают как истинные перемещения в состоянии, характеризуемом напряжениями σ_{ij} (которые связаны друг с другом законом Гука), то (4.30) приводит непосредственно к теореме Клапейрона

$$\int_A u_i p_i dA + \int_V u_i f_i dV = 2 \int_V \bar{U} dV$$

[ср. с (3.23)], где

$$\bar{U} = G \left(\epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} e^2 \right).$$

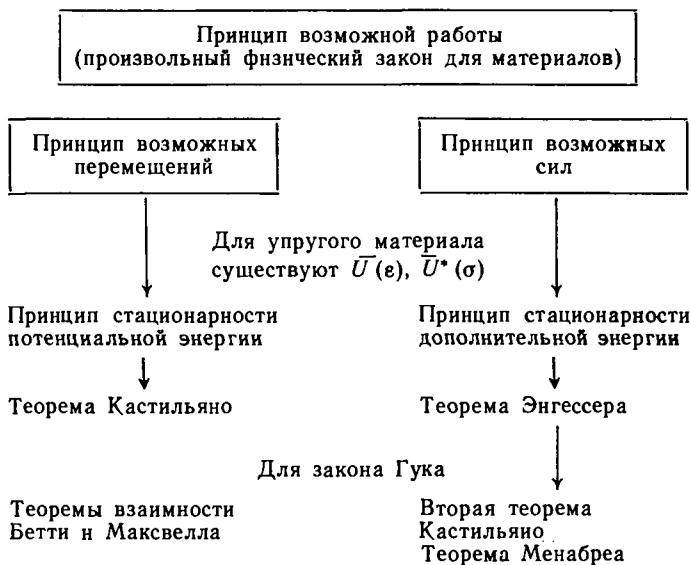
Значение принципа возможной работы в обеих его формах заключается в том, что они эквивалентны основным уравнениям теории упругости:

1. Если подставить в принцип возможных перемещений $\delta W^{(a)} = \delta U$ соотношения между деформациями и перемещениями $\epsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i})$ а также задать геометрические граничные условия u_i на A_u , то из него следуют уравнения равновесия $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$ и, кроме того, статические граничные условия $\sigma_{ij} n_j = p_i$ на A_σ .

2. Если в принцип возможных сил $\delta W^{*(a)} = \delta U^*$ подставить уравнения равновесия и статические граничные условия, то из него следуют соотношения между деформациями и перемещениями и геометрические граничные условия.

Так как принцип возможной работы может быть принят в качестве основного для вариационного вывода исходных уравнений, из него можно получить важные экстремальные и соответственно минимальные принципы, из которых следуют другие

энергетические теоремы, имеющие большое практическое значение для приложений. Они изображены нижеследующей схемой.



Эти вариационные и минимальные принципы имеют большое значение прежде всего потому, что они лежат в основе важных приближенных и численных методов решения. Следует заметить, что существуют широкие возможности для введения обобщенных принципов*). К ним относятся, например, принцип Хеллинджера — Рейсснера, Ху — Вашницу, Прагера — Буфлера, которые могут применяться как для линейно-, так и нелинейно-упругих задач. С другой стороны, из обобщенных принципов получаются в качестве частных случаев классические минимальные принципы теории упругости, обсуждаемые в последующих разделах.

§ 4.4. Следствия из принципа возможной работы

Принципам возможных перемещений и возможных сил могут быть даны также альтернативные формулировки, которые делают возможными и соответствующие интерпретации.

Символ δ , применяемый для возможных приращений, будет пониматься теперь как символ вариации в смысле вариационного исчисления (соответственно значениям первой производной). При последующем рассмотрении в основу будет положено упругое поведение материала, т. е. будет предполагаться суще-

*) Они находят применение, например, при построении так называемых гибридных теорем метода конечных элементов. См. относящиеся сюда работы [10, 12, В45].

ствование удельной потенциальной энергии деформации $\bar{U}(\epsilon)$ и соответственно удельной дополнительной энергии деформации $\bar{U}^*(\sigma)$ и упругих потенциалов.

4.4.1. Принцип стационарности потенциальной энергии

Из принципа возможных перемещений (4.20) с учетом того, что силы и напряжения не варьируются, следует

$$\int_V \delta(\sigma_{ij}\epsilon_{ij}) dV - \int_{A_0} \delta(p_i u_i) dA - \int_V \delta(f_i u_i) dV = 0. \quad (4.31)$$

При этом $\sigma_{ij}\epsilon_{ij} = \bar{U}(\epsilon_{ij})$ и в качестве упругого потенциала вводится накопленная в теле полная энергия обратимой деформации

$$U = \int_V \bar{U} dV = \Pi^{(i)}. \quad (4.32)$$

Далее разность

$$- \int_{A_\sigma} p_i u_i dA - \int_V f_i u_i dV = \Pi^{(a)} \quad (4.33)$$

определяется как потенциал внешних сил *). Суммарный потенциал (или полная потенциальная энергия) тогда равен

$$\Pi = \Pi^{(i)} + \Pi^{(a)}. \quad (4.34)$$

Таким образом, для (4.31) получается более краткая формулировка **)

$$\delta_\epsilon \Pi = 0 \text{ или } \Pi = \text{Extr}. \quad (4.35)$$

Итак, принцип стационарности полной потенциальной энергии гласит:

Из всех допустимых перемещений, удовлетворяющих заданным граничным условиям, истинные перемещения, которые соответствуют состоянию равновесия, доставляют полной потенциальной энергии стационарное значение.

Или короче: Если деформируемая система находится в равновесии, то полная потенциальная энергия имеет стационарное значение.

*) Следует заметить, что введенное здесь выражение не соответствует работе внешних сил при переходе от ненагруженного состояния к конечному. В то время как p_i и f_i представляют собой истинные поверхностные и объемные силы, u_i характеризует произвольное поле перемещений.

**) Индекс при δ_ϵ указывает на то, что силы и напряжения не варьируются.

Можно показать, что в случае устойчивого равновесия экстремальное значение полной потенциальной энергии соответствует минимуму (принцип минимума потенциальной энергии, иногда называемый также принципом Грина — Дирихле). Это легко доказать для линейно-упругой задачи, если сравнить Π в состоянии равновесия со значением Π' в смежном состоянии, характеризуемом величинами $u_i + \delta u_i$ и $\epsilon_{ij} + \delta \epsilon_{ij}$. Тогда устанавливается, что всегда $\Pi' > \Pi$.

В частном случае получается принцип стационарности или минимума энергии деформации, если отсутствуют объемные силы и на всей поверхности тела заданы перемещения u_i . Тогда поверхностный интеграл в (4.33) обращается в нуль, так как $A_\sigma = 0$ и (4.35) примет вид

$$\delta \Pi^{(t)} = \delta U = 0. \quad (4.36)$$

Как уже отмечалось при рассмотрении принципа возможной работы, можно показать, что вариационная формулировка (4.35) эквивалентна основным уравнениям задачи (уравнениям равновесия и граничным условиям). Попутно следует упомянуть, что вариационные принципы имеют большее значение не столько для точных, сколько для приближенных или численных решений (см. § 6.5).

При постановке граничных условий различают условия, заданные с самого начала (если, например, на части поверхности заданы u_i или p_i), и так называемые *естественные граничные условия*. Последние автоматически следуют из вариационного принципа: Если, например, поле перемещений u_i удовлетворяет при заданных значениях \bar{u}_i на A_u вариационному принципу, то напряжения на A_σ , вычисленные по перемещениям u_i , должны соответствовать заданным там напряжениям \bar{p}_i .

Суммарный потенциал

$$\Pi(\epsilon_{ij}) = \int_V \bar{U}(\epsilon) dV - \int_{A_\sigma} \bar{p}_i u_i dA - \int_V f_i u_i dV \quad (4.37)$$

называют *классическим функционалом* теории упругости (в смысле вариационного исчисления). Он связан с принципом возможных перемещений.

Если предполагается существование упругого потенциала в виде удельной потенциальной энергии деформации, нужно учитывать в качестве дополнительных условий

$$\text{кинематические условия } \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ в объеме } V,$$

$$\text{граничные условия } u_i = \bar{u}_i \text{ на поверхности } A_u.$$

Отказ от дополнительных условий возможен, если они входят в функционал с так называемыми множителями Лагранжа.

В результате удается построить расширенный функционал, для которого к варьируемым величинам уже никаких дополнительных требований не предъявляется. Построенный таким образом расширенный функционал имеет, например, вид

$$\widehat{\Pi}(\mathbf{e}_{ij}) = \Pi(\mathbf{e}_{ij}) - \int_{A_u} p_i (u_i - \bar{u}_i) dA. \quad (4.38)$$

Этому функционалу можно придать стационарное значение, причем перемещения теперь не должны удовлетворять граничным условиям. Вычисляя $\delta \widehat{\Pi} = 0$ из (4.38), после некоторых преобразований имеем

$$\int_V (\sigma_{ij, j} + f_i) \delta u_i dV + \int_{A_\sigma} (\bar{p}_i - p_i) \delta u_i dA + \int_{A_u} (u_i - \bar{u}_i) \delta p_i dA = 0. \quad (4.39)$$

В результате, кроме уравнений равновесия, получаются также граничные условия для поверхностных сил и перемещений в виде так называемых естественных граничных условий.

Введение расширенных функционалов связано в основном с Е. Рейсснером. Рассмотрим в этой связи расширенный функционал Рейсснера (который иногда называется также функционалом Хеллинджера — Рейсснера)

$$\begin{aligned} J(\mathbf{e}_{ij}, u_i, \sigma_{ij}) = & \int_V [\bar{U}(\mathbf{e}_{ij}) - f_i u_i] dV - \\ & - \int_V \sigma_{ij} \left[\mathbf{e}_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i, j} + u_{j, i}) \right] dV - \int_{A_\sigma} \bar{p}_i u_i dA - \\ & - \int_{A_u} \sigma_{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i) dA. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Условие $\delta J = 0$ доставляет стационарное значение функционалу, причем теперь вариации δe_{ij} , δu_i , $\delta \sigma_{ij}$ не зависят друг от друга. Из (4.40) прежде всего следует

$$\begin{aligned} \int_V \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial e_{ij}} \delta e_{ij} - f_i \delta u_i \right] dV - \int_V \delta \sigma_{ij} \left[\mathbf{e}_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i, j} + u_{j, i}) \right] dV - \\ - \int_V \sigma_{ij} \left[\delta e_{ij} - \frac{1}{2} (\delta u_{i, j} + \delta u_{j, i}) \right] dV - \int_{A_u} \delta \sigma_{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i) dA - \\ - \int_{A_\sigma} \bar{p}_i \delta u_i dA = 0 \end{aligned}$$

и отсюда после некоторых преобразований

$$\int_V \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \delta \epsilon_{ij} dV - \int_V (\sigma_{i1,j} + f_i) \delta u_i dV - \\ - \int_V \delta \sigma_{ij} \left[\epsilon_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] dV - \int_{A_\sigma} (\bar{p}_i - p_i) \delta u_i dA - \\ - \int_{A_u} \delta p_i (u_i - \bar{u}_i) dA = 0. \quad (4.41)$$

Как видно, из (4.41) теперь получаются основные уравнения:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad (\text{физический закон}), \\ \sigma_{i1,j} + f_i = 0 \quad (\text{уравнения равновесия}), \\ \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{соотношения между деформациями и перемещениями}),$$

а также естественные граничные условия

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i \quad \text{на } A_\sigma, \quad u_i = \bar{u}_i \quad \text{на } A_u.$$

Впрочем, в первоначальной формулировке Рейсснера применялась удельная дополнительная энергия $\bar{U}^*(\sigma)$. К соответствующему функционалу удается прийти, если подставить в (4.40) соотношение

$$\bar{U}(\epsilon) = \epsilon_{ij} \sigma_{ij} - \bar{U}^*(\sigma) \quad (4.42)$$

(преобразование Лежандра), см. замечание в предыдущем разделе.

4.4.2. Принцип стационарности дополнительной энергии

Аналогично преобразованиям, выполненным в последнем разделе, из принципа возможных сил (4.29) (так как перемещения при этом не варьируются) получим выражение

$$\delta \int_V \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dV - \delta \int_{A_u} u_i p_i dA - \delta \int_V u_i f_i dV = 0, \quad (4.43)$$

причем теперь $\sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \bar{U}^*(\sigma_{ij})$ и вводится потенциал дополнительной внутренней энергии в виде

$$U^* = \int_V \bar{U}^* dV = \Pi^*(t). \quad (4.44)$$

Аналогично вводят *)

$$-\int_{A_u} u_i p_i dA - \int_V u_i f_i dV = \Pi^{*(a)} \quad (4.45)$$

и с учетом

$$\Pi^* = \Pi^{*(i)} + \Pi^{*(a)} \quad (4.46)$$

удается прийти к соотношению, двойственному с (4.35) (индекс при δ_σ указывает на то, что варьируются только напряжения и силы)

$$\delta_\sigma \Pi^* = 0 \text{ или } \Pi^* = \text{Extr.} \quad (4.47)$$

Итак, принцип стационарности дополнительной энергии гласит:

Из всех сил и напряжений, которые удовлетворяют уравнениям равновесия, те, которые соответствуют истинному деформированному состоянию, сообщают суммарной дополнительной потенциальной энергии стационарное значение.

На основании этого принципа можно также заключить, что в случае устойчивого равновесия экстремальное значение Π^* соответствует минимуму **).

Короче это можно выразить так:

Среди всех напряженных состояний, которые удовлетворяют уравнениям равновесия, действительным является такое, для которого дополнительная энергия достигает минимума.

В частном случае, когда p_i заданы на всей поверхности $A_\sigma + A_u$, δp_i обращаются в нуль и на A_u . Если далее $\delta f_i = 0$, из (4.45) следует $\delta \Pi^{*(a)} = 0$ и, таким образом,

$$\delta \Pi^* = \delta U^* = 0 \quad (4.48)$$

(принцип стационарности или минимума дополнительной энергии деформации).

Функционал

$$\Pi^*(\sigma_{ij}) = \int_V \bar{U}^* dV - \int_{A_u} p_i u_i dA, \quad (4.49)$$

двойственный с (4.37), называют *вторым классическим функционалом теории упругости*, причем предполагается существование дополнительной энергии деформации и справедливость дополнительных условий

*) При этом чаще всего второй член можно опустить, так как f_i обычно задаются постоянными.

**) Это положение в литературе иногда называется принципом Кастильяно.

$\sigma_{ij,j} + f_i = 0$ в объеме V , а также $p_i = \bar{p}_i$ на поверхности A_σ . Функционал Π^* связан с принципом возможных сил. Здесь также удастся прийти к расширенному функционалу, вводя дополнительные условия в классический функционал.

В качестве примера рассмотрим функционал Рейсснера

$$J^* = \int_V [\sigma_{ij} \epsilon_{ij} - \bar{U}^*(\sigma) - f_i u_i] dV - \int_{A_\sigma} \bar{p}_i u_i dA - \int_{A_u} p_i (u_i - \bar{u}_i) dA. \quad (4.50)$$

Условие стационарности $\delta J^* = 0$ дает сначала выражение

$$\int_V (\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} + \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} - \frac{\partial U^*}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} - f_i \delta u_i) dV - \int_{A_\sigma} \bar{p}_i \delta u_i dA - \int_{A_u} \delta p_i (u_i - \bar{u}_i) dA = 0,$$

где $\delta \bar{p}_i = 0$ на A_σ , $\delta \bar{u}_i$ на A_u . После некоторых преобразований окончательно получаем

$$\int_V (\epsilon_{ij} - \frac{\partial U^*}{\partial \sigma_{ij}}) \delta \sigma_{ij} dV - \int_V (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i dV + \int_{A_\sigma} (p_i - \bar{p}_i) \delta u_i dA - \int_{A_u} \delta p_i (u_i - \bar{u}_i) dA = 0. \quad (4.51)$$

Из этого выражения следуют опять физический закон, уравнение равновесия, а также граничные условия в напряжениях на A_σ и в перемещениях на A_u . Если в функционале Рейсснера варьировать только σ_{ij} (т. е. принять $\delta u_i = 0$), то из него вновь будет следовать принцип стационарности дополнительной потенциальной энергии.

Большое преимущество расширенного функционала заключается в том, что перемещения и напряжения могут варьироваться одновременно и независимо друг от друга, так что неизбежные для классического функционала ограничения на варьируемые функции отпадают. Известны многочисленные весьма общие функционалы, которые применяются в различных приближенных методах во многих областях механики сплошной среды. За дальнейшими подробностями следует обращаться к специальной литературе, см., например, [12, В45].

4.4.3. Теоремы Кастильяно, Энгессера и Менабреа

На принципе возможной работы или на минимальных принципах основаны некоторые важные теоремы о работе, которые имеют большое практическое значение, особенно в сопротивлении материалов для расчета деформаций в статически опреде-

лимых системах, а также для определения опорных реакций в статически неопределимых системах.

Рассмотрим упругое тело (находящееся в устойчивом состоянии равновесия), которое неподвижно оперто на две малые части своей поверхности (рис. 4.4). Объемными силами часто пренебрегается, и нагрузка задается поверхностными силами в виде сосредоточенных сил $F_{(r)}$ или сосредоточенных моментов $M_{(s)}$, реализуемых, например, парой сил^{*)}.

Перемещения, соответствующие силам $F_{(r)}$, обозначаются через $d_{(r)}$, поворот $\varphi_{(s)}$ соответствует крутящим моментам $M_{(s)}$. Тогда напряжения и деформации, а также энергия деформации определяются как функции $d_{(r)}$ и $\varphi_{(s)}$.

Первая теорема Кастильяно гласит

$$\frac{\partial U}{\partial d_{(r)}} = F_{(r)} \text{ и соответственно } \frac{\partial U}{\partial \varphi_{(s)}} = M_{(s)}. \quad (4.52)$$

Этот вывод следует из принципа возможной работы, если рассматривают только одно возможное перемещение $\delta d_{(r)}$ в направлении силы $F_{(r)}$. Тогда справедливо соотношение $\delta U = F_{(r)} \delta d_{(r)}$, откуда предельным переходом получается первое соотношение (4.52). Второе соотношение (4.52) строится аналогичным образом.

Данный вывод предполагает существование энергии деформации $U = U(d_{(r)})$. Поэтому теорема справедлива также для нелинейно-упругого поведения материалов. Первую теорему Кастильяно можно, вообще говоря, использовать, например, для расчета статически неопределимых несущих конструкций, но ее значение для практических приложений невелико.

Большее значение имеет вторая теорема Кастильяно. Для линейно-упругих материалов она имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial F_{(r)}} = d_{(r)} \text{ и соответственно } \frac{\partial U}{\partial M_{(s)}} = \varphi_{(s)}, \quad (4.53)$$

причем теперь $U = U(F, M)$ означает энергию деформации, выраженную через внешние силы и моменты (в предположении справедливости закона Гука).

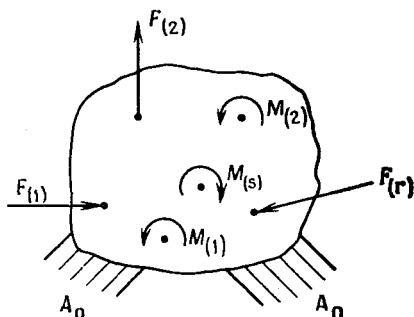


Рис. 4.4. Упругое тело, нагруженное сосредоточенными силами и сосредоточенными моментами.

^{*)} Индексы, заключенные в скобках, означают теперь нумерацию сил и моментов.

Эта теорема позволяет очень просто вычислять деформации в точках приложения сил для статически определимых и статически неопределимых несущих конструкций. Для расчета деформаций в произвольных точках вводятся фиктивные вспомогательные силы (вспомогательные моменты), которые затем полагаются равными нулю.

Частный случай второй теоремы Кастильяно представляет собой теорема Менабреа³⁾, которая применяется для вычисления опорных реакций в статически неопределимых линейно-упругих системах

$$\partial U / \partial X_{(t)} = 0. \quad (4.54)$$

Здесь $X_{(t)}$ — подлежащие определению опорные реакции (силы или моменты), а $U = U(F, M, X_{(t)})$ — выраженная через внешние нагрузки и неизвестные реакции энергия деформации.

Вторая теорема Кастильяно является частным случаем общей теоремы Энгессера^{*}). Эта теорема основана на принципе возможной дополнительной работы и гласит

$$\frac{\partial U^*}{\partial F_{(r)}} = d_{(r)} \quad \text{или} \quad \frac{\partial U^*}{\partial M_{(s)}} = \Phi_{(s)}. \quad (4.55)$$

При этом U^* — дополнительная энергия деформации, и соотношения (4.55) справедливы в общем случае нелинейно-упругого материала. Соответствующее обобщение^{**)} (4.54) имеет вид

$$\partial U^* / \partial X_{(t)} = 0. \quad (4.56)$$

Вывод теоремы Энгессера (при отсутствии объемных сил) следует из принципа возможных сил, если рассматривают только одну вариацию $\delta F_{(r)}$. Если $d_{(r)}$ означает компоненту перемещения в точке приложения силы $F_{(r)}$ в направлении $F_{(r)}$, то справедливо соотношение

$$\delta U^* = \frac{\partial U^*}{\partial F_{(r)}} \delta F_{(r)} = d_{(r)} \delta F_{(r)},$$

откуда следует (4.55).

4.4.4. Теоремы взаимности

С понятием работы могут быть связаны некоторые важные теоремы для линейно-упругого материала, которые очень полезны для приложений.

^{*}) Обе теоремы Кастильяно приведены в его книге 1879 г. [A1], теорема Менабреа была опубликована в 1858 г., обобщение Энгессера дано в 1889 г. [13].

^{**)} Иногда его называют второй теоремой Энгессера.

4.4.4.1. Теорема Бетти. Речь идет об одной общей теореме взаимности, которая связывает друг с другом различные состояния равновесия линейно-упругого тела при разнообразных нагрузках [14]. Рассмотрим для упругого тела (объемом V и поверхностью A) два состояния равновесия, называемые соответственно I и II, характеризуемые величинами $u_i^I, \varepsilon_{ij}^I, \sigma_{ij}^I$, вызванными силами f_i^I и p_i^I , а также $u_i^{II}, \varepsilon_{ij}^{II}, \sigma_{ij}^{II}$, вызванными силами f_i^{II} и p_i^{II} .

Прежде всего справедливо тождество

$$\sigma_{ij}^I \varepsilon_{ij}^{II} = \sigma_{ij}^{II} \varepsilon_{ij}^I, \quad (4.57)$$

которое сразу может быть проверено при линейном соотношении между напряжениями и деформациями $\sigma_{ij}^I = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^I$ и соответственно $\sigma_{ij}^{II} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{II}$ (в случае симметрии тензоров модулей упругости $E_{ijkl} = E_{klij}$). Из (4.57) следует равенство

$$\int_V \sigma_{ij}^I \varepsilon_{ij}^{II} dV = \int_V \sigma_{ij}^{II} \varepsilon_{ij}^I dV, \quad (4.57')$$

которое уже является одной из форм теоремы Бетти. Левая часть (4.57) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij}^I \frac{1}{2} (u_{i,j}^{II} + u_{j,i}^{II}) dV &= \int_V \sigma_{ij}^I u_{i,j}^{II} dV = \\ &= \int_V (\sigma_{ij}^I u_i^{II})_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij,j}^I u_i^{II} dV. \end{aligned}$$

С помощью формулы Гаусса и уравнений равновесия получим

$$\int_V \sigma_{ij}^I \varepsilon_{ij}^{II} dV = \int_A p_i^I u_i^{II} dA + \int_V f_i^I u_i^{II} dV.$$

Правая часть (4.57') может быть преобразована аналогичным образом. В результате приходим к теореме Бетти

$$\int_A p_i^I u_i^{II} dA + \int_V f_i^I u_i^{II} dV = \int_A p_i^{II} u_i^I dA + \int_V f_i^{II} u_i^I dV, \quad (4.58)$$

иногда называемой также теоремой взаимности Бетти — Рэлея ⁴⁾.

Она гласит:

Работа системы внешних сил I на перемещениях, вызываемых системой II, равна работе системы внешних сил II на перемещениях, вызываемых системой I.

Значение теоремы Бетти заключается в том, что с помощью произвольно выбранной системы II получают соотношение между приложенными силами и перемещениями системы I. Система II (вспомогательная) может

быть при этом выбрана очень простой (например, однородное напряженное состояние), и теорема дает тогда объяснение различных свойств решения I. В форме (4.57') или (4.58) теорема Бетти важна для установления интегральных представлений линейной теории упругости; кроме того, она служит в качестве исходной для так называемого метода граничных интегральных уравнений*).

Теорема Бетти справедлива также, если упругое тело нагружено сосредоточенными силами (рис. 4.5). При отсутствии массовых сил, например если действуют только две сосредоточенные силы в точках P и Q , согласно (4.58) справедливо равенство $F^I d^{II} = F^{II} d^I$, где d^{II} — перемещение точки приложения

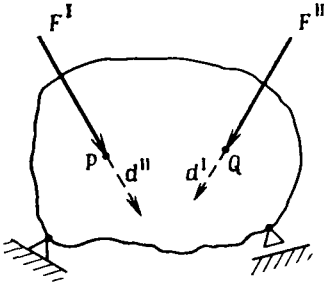


Рис. 4.5. К теореме Бетти.

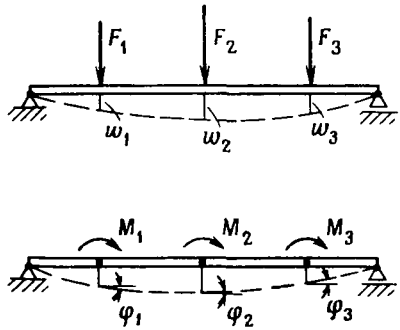


Рис. 4.6. Упругие балки при нагружении сосредоточенными силами и сосредоточенными моментами.

силы F^I (в направлении F^I) вследствие действия силы F^{II} ; соответственно d^I — перемещение точки приложения силы F^{II} (в направлении F^{II}) от действия силы F^I . Если действует множество сил, то

$$\sum_r F_{(r)}^I d_{(r)}^{II} = \sum_s F_{(s)}^{II} d_{(s)}^I. \quad (4.59)$$

Соответствующие зависимости получаются также для сосредоточенных крутящих моментов и углов поворота.

4.4.4.2. Теорема Максвелла. Если в примере, показанном на рис. 4.5, обе сосредоточенные силы равны по величине, то равны также и соответствующие перемещения. Это утверждение может быть обобщено на случай большого числа сосредоточенных сил и моментов и приводит к теореме Максвелла о сим-

*) Он представляет собой (наряду с методом конечных элементов) очень важный численный метод решения сложных задач теории упругости (см. п. 6.5.3).

метрии чисел влияния, которая является прямым следствием теоремы Бетти.

Для пояснения рассмотрим нагруженную сосредоточенными силами и моментами упругую изгибаемую балку. Между прогибами точек приложения сил 1, 2, 3, ... (рис. 4.6) и силами существует линейная зависимость

$$\omega_r = \sum_s \alpha_{rs} F_s, \quad (4.60)$$

соответственно между углами поворота и моментами

$$\varphi_r = \sum_s \beta_{rs} M_s. \quad (4.61)$$

Коэффициенты α_{rs} и β_{rs} называются *коэффициентами податливостей* (или числами влияния при единичных силах). Далее справедливы обратные соотношения

$$F_r = \sum_s a_{rs} \omega_s \quad \text{и} \quad M_s = \sum_s b_{rs} \varphi_s,$$

причем коэффициенты a_{rs} и b_{rs} называются *обратными числами влияния* или *жесткостными коэффициентами влияния* (упругими жесткостями). Из теоремы Бетти следует, что числа влияния всегда симметричны

$$\begin{aligned} \alpha_{rs} &= \alpha_{sr}, & a_{rs} &= a_{sr}, \\ \beta_{rs} &= \beta_{sr}, & b_{rs} &= b_{sr} \end{aligned} \quad (4.62)$$

(теорема Максвелла). Так как, с другой стороны, силы, приложенные к балке, вызывают также повороты, а соответственно моменты — прогибы, то вышеприведенные соотношения обобщаются следующим образом:

$$\omega_r = \sum_s (\alpha_{rs} F_s + \gamma_{rs} M_s), \quad \varphi_r = \sum_s (\delta_{rs} F_s + \beta_{rs} M_s),$$

соответственно

$$F_r = \sum_s (a_{rs} \omega_s + c_{rs} \varphi_s), \quad M_r = \sum_s (d_{rs} \omega_s + b_{rs} \varphi_s).$$

При этом для «смешанных» чисел влияния справедливы равенства

$$\gamma_{rs} = \delta_{sr} \quad \text{соответственно} \quad c_{rs} = d_{sr}. \quad (4.63)$$

Если имеет место линейно-упругое поведение, то приведенные здесь соотношения между нагрузками и деформациями при изгибе балок справедливы для всех видов нагрузок и могут быть определены соответствующие числа влияния. Они весьма полезны с практической точки зрения в статике и динамике несущих конструкций и систем. Для вычисления чисел влияния выгодно привлекать вторую теорему Кастильяно.

Общие методы решения основных уравнений теории упругости

Общего решения, а также пригодного для всех случаев метода решения уравнений Навье и Бельтрами — Мичелла (так называемых основных уравнений теории упругости) не существует.

Однако построение этих уравнений привело к разработке многочисленных методов решений, которые широко применяются для различных частных задач теории упругости (и иногда называются «общими» решениями). Большое значение имеет линейность основных уравнений, так как она открывает возможность наложения решений.

В дальнейшем без ограничения общности можно пренебречь объемными силами (в основном силами тяжести или центробежными силами, например, для вращающихся тел). Тогда могут быть указаны частные решения (не зависящие от граничных условий!), которые должны суммироваться с общими решениями однородных уравнений (удовлетворяющими граничным условиям в напряжениях или перемещениях).

Плодотворный путь получения решений основных уравнений теории упругости состоит во введении вспомогательных функций, которые связаны с перемещениями или напряжениями. Различают при этом функции перемещений и функции напряжений.

§ 5.1. Функции перемещений

Исходными являются уравнения Навье для перемещений (без объемных сил)

$$u_{i, jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j, ii} = 0. \quad (5.1)$$

В качестве функций перемещений применяют гармонические и бигармонические функции. Они часто могут быть найдены более просто как прямые решения сложных уравнений (5.1). Компоненты вектора перемещений сами являются бигармоническими функциями, т. е. удовлетворяют уравнению $\Delta\Delta u_i = 0$. Они представляются как комбинации производных от функций перемещений. Тогда и эти функции должны удовлетворять гармони-

ческому или бигармоническому уравнениям. Такие функции известны в большом числе, основные трудности каждый раз состоят в удовлетворении граничных условий.

5.1.1. Скалярный и векторный потенциалы

Для любого непрерывного векторного поля, которое достаточно быстро затухает на бесконечности, справедливо общее представление

$$u_i = \phi_{,i} + \varepsilon_{ijk}\psi_{k,j}, \quad (5.2)$$

или в векторной форме $\mathbf{u} = \text{grad } \phi + \text{rot } \psi$ (теорема Гельмгольца или разложение Кельвина). Речь идет о наложении безвихревого и свободного от источников полей, поэтому справедливы известные соотношения

$$\text{rot grad } \phi = 0, \quad \text{div rot } \psi = 0. \quad (5.3)$$

Скалярная функция ϕ называется *скалярным потенциалом*, векторная функция ψ_i — *векторным потенциалом*. Для однозначного определения ψ_i принимают без ограничения общности, что

$$\psi_{i,i} = 0 \quad \text{или} \quad \text{div } \psi = 0. \quad (5.4)$$

Если под u_i понимать вектор перемещений, то из (5.2), вычисляя дивергенцию, получим

$$u_{i,i} = e_{ii} = \phi_{,ii} + \varepsilon_{ijk}\psi_{k,ii} = \phi_{,ii},$$

следовательно, для относительной объемной деформации справедливо равенство

$$e = \phi_{,ii} = \Delta\phi. \quad (5.5)$$

С другой стороны, образуя вихрь из (5.2) с учетом (5.3) и (5.4), найдем

$$\varepsilon_{ijk}u_{k,j} = \varepsilon_{ijk}\phi_{,kj} + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\psi_{m,lj} = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\psi_{m,lj} = -\psi_{i,jj}.$$

Поэтому с учетом (1.68) справедлива следующая связь с вектором угловой скорости:

$$2\omega_i = -\psi_{i,jj}. \quad (5.6)$$

Подставляя (5.2) и (5.5) в уравнения Навье

$$\phi_{,ijj} + \varepsilon_{ijk}\psi_{k,ij} + \frac{1}{1-2\nu}\phi_{,jji} = 0,$$

получим

$$\left(1 + \frac{1}{1-2\nu}\right)\phi_{,ijj} + \varepsilon_{ijk}\psi_{k,ij} = 0,$$

или

$$\frac{2-2\nu}{1-2\nu}(\Delta\phi)_{,i} + \varepsilon_{ijk}(\Delta\psi_k)_{,j} = 0. \quad (5.7)$$

Функции ϕ и ψ_k (скалярный и соответственно векторный потенциалы), которые удовлетворяют этому уравнению, образуют, согласно (5.2), поле перемещений, которое удовлетворяет уравнениям Навье*). Частными решениями (5.7) являются

$$\Delta\phi = \text{const}, \quad \Delta\psi_k = \text{const} \quad (5.8)$$

(здесь речь идет, естественно, не об общем решении).

5.1.2. Потенциал деформаций Ламе

Если принять согласно (5.8)

$$\Delta\phi = \text{const}, \quad \psi_k = 0, \quad (5.9)$$

то перемещения получаются дифференцированием только одной скалярной функции по формуле

$$2Gu_i = \phi_{,i}, \quad (5.10)$$

где ϕ называется потенциалом деформаций Ламе (решение в такой форме Ламе исследовал в 1852 г.). Из (5.10) следует

$$2Ge = \Delta\phi, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\phi_{,ij} \quad (5.11)$$

и для напряжений

$$\sigma_{ij} = \phi_{,ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\Delta\phi \quad \text{или} \quad \sigma_{ij} = \phi_{,ij} + \lambda\delta_{ij}e. \quad (5.12)$$

В частном случае для (5.9) можно принять

$$\Delta\phi = 0, \quad (5.13)$$

тогда потенциал деформаций удовлетворяет гармоническому уравнению Лапласа и ϕ является гармонической функцией. Поэтому справедливы равенства

$$e = 0, \quad \sigma_{ij} = \phi_{,ij}, \quad (5.14)$$

и ϕ уместно назвать функцией напряжений.

Эти соотношения очень полезны для практического применения в криволинейных координатах. Например, для цилиндри-

*) Вычисление дивергенции от (5.7) приводит к уравнению $\Delta\Delta\phi = 0$, а вычисление вихря — к уравнению $\Delta\Delta\psi_k = 0$, т. е. ϕ и декартовы компоненты ψ_k являются бигармоническими функциями.

ческих координат r, φ, z получаются равенства

$$\begin{aligned}\Delta\phi &\equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = 0, \\ 2Gu_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad 2Gu_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}, \quad 2Gu_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \\ \sigma_{rr} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_{zz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left(\frac{\phi}{r} \right), \quad \tau_{\varphi z} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi \partial z}, \quad \tau_{rz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z}.\end{aligned}$$

В частном случае осесимметричной задачи функция $\phi = \phi(r)$ не зависит от z , и гармоническое уравнение (5.13) принимает вид

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} = 0.$$

Оно имеет общее решение $\phi = A \ln r + Br^2$, где A и B — константы.

В сферических координатах R, ϑ, φ для частного случая, когда нет зависимости от угла φ (осевая симметрия), $\phi = \phi(R, \vartheta)$. Тогда гармоническое уравнение (5.13) запишется в виде

$$\Delta\phi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \phi = 0$$

и для компонент перемещений и напряжений имеем

$$\begin{aligned}2Gu_R &= \frac{\partial \phi}{\partial R}, \quad 2Gu_\vartheta = \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}, \quad u_\varphi = 0, \\ \sigma_{RR} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{R^2} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}, \quad \tau_{R\vartheta} = \frac{\partial^2}{\partial R \partial \vartheta} \left(\frac{\phi}{R} \right).\end{aligned}$$

В заключение рассмотрим важный для приложений пример длинного полого цилиндра, нагруженного постоянным внутренним и внешним давлением p_i и p_a (с внешним и внутренним радиусами, равными соответственно r_a и r_i). Потенциал деформаций Ламе при этом равен

$$\phi = C_1 \ln \left(\frac{r}{a} \right) + C_2 r^2 \quad (5.15)$$

(второе слагаемое соответствует равномерному распределению напряжений). Так как ϕ не зависит от φ и z , действующие напряжения равны

$$\sigma_{rr} = \frac{d^2 \phi}{dr^2} = -\frac{C_1}{r^2} + 2C_2, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} = \frac{C_1}{r^2} + 2C_2. \quad (5.16)$$

Произвольные постоянные определяются из граничных условий; тогда окончательно получим

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -p_i \frac{(r_a/r)^2 - 1}{(r_a/r_i)^2 - 1} - p_a \frac{1 - (r_i/r)^2}{1 - (r_i/r_a)^2}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= p_i \frac{(r_a/r)^2 + 1}{(r_a/r_i)^2 - 1} - p_a \frac{1 + (r_i/r)^2}{1 - (r_i/r_a)^2}.\end{aligned}\quad (5.17)$$

Это решение, называемое решением Ламе, играет также важную роль в плоской задаче теории упругости (см. п. 8.5.2). Используя потенциал деформаций Ламе, можно получить другие элементарные решения, например

$$\phi = A/R, \quad A = \text{const}, \quad R = x^2 + y^2 + z^2$$

для задачи о сфере и полый сфере,

$$\phi = A \ln(R + z)$$

для тела вращения (с осью вращения z).

5.1.3. Вектор Буссинеска ⁵⁾

При применении потенциала деформаций Ламе перемещения представляются первыми производными одной скалярной функции. Однако более общие решения, имеющие широкие приложения, можно получить, если ввести производные высшего порядка от векторной функции. В уравнениях Навье присутствуют два дифференциальных оператора второго порядка, не зависящих от направления координат. Это, видимо, навело Б. Г. Галёркина [15] *) на мысль представить общее решение в форме

$$u_i = kF_{i,11} - F_{i,11} \quad (5.18)$$

(k — некоторая константа). Три функции F_x, F_y, F_z , через которые выражаются перемещения, называются *функциями деформаций*. Отметим, что интерпретация этих функций как компонент вектора дана П. Ф. Папковичем [16]. Б. Г. Галёркин пришел к своим результатам несколько иным путем, указанным ниже.

К формуле (5.18) можно прийти, если заменить векторный потенциал ψ_i , фигурирующий в теореме Гельмгольца, другим векторным потенциалом

$$\psi_k = -\epsilon_{klm} k \bar{F}_{m,1}. \quad (5.19)$$

*) Критическое изучение источников позволило достоверно установить, что этот метод решения был известен еще Буссинеску (1885 г.) и повторно найден Сомильяной в 1889 г. (см. [A32]). Тем не менее установившимся является название «решение Галёркина».

Тогда из выражения $u_i = \phi_{,i} + \varepsilon_{ijk}\psi_{k,j}$ следует

$$u_i = \phi_{,i} - \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}k\bar{F}_{m,ij} = \phi_{,i} - k\bar{F}_{j,ji} + k\bar{F}_{i,jj}. \quad (5.20)$$

При этом $k\bar{F}_{i,j}$ — скалярная функция, которая может быть выбрана так, что функция ϕ уже не будет входить в решение. Тогда из (5.20) следует (5.18). Подстановка в уравнения Навье дает

$$\begin{aligned} kF_{i,jjj} - F_{j,ijj} + \frac{1}{1-2\nu}(kF_{k,jjk} - F_{j,jkk})_{,i} = \\ = kF_{i,jjj} - F_{j,ijj} + \frac{k-1}{1-2\nu}F_{i,kkj} = 0, \end{aligned}$$

или

$$kF_{i,jjj} + \left(\frac{k-1}{1-2\nu} - 1\right)F_{i,kkj} = 0.$$

Здесь второй член обращается в нуль, если постоянную k положить равной $k = 2(1 - \nu)$. Тогда формула Буссинеска в виде

$$2Gu_i = 2(1 - \nu)H_{i,jj} - H_{j,ji} \quad (5.21)$$

удовлетворяет уравнениям Навье, если только компоненты вектора Буссинеска (который теперь переименован в H_i) удовлетворяют бигармоническому уравнению

$$H_{i,jjk} = 0. \quad (5.22)$$

Следовательно, вектор Буссинеска — это бигармоническая векторная функция в декартовых координатах. В результате решение уравнений Навье сводится к определению трех функций H_i .

В случае не равных нулю объемных сил вместо (5.22) получаются неоднородные уравнения $H_{i,jjk} = -f_i/(1 - \nu)$. Каждая компонента вектора Буссинеска удовлетворяет одному уравнению, которое не зависит от двух других компонент.

С учетом (5.21) для относительной объемной деформации имеем

$$2Ge = 2Gu_{k,k} = (1 - 2\nu)H_{k,kj}, \quad (5.23)$$

а напряжения определяются с помощью закона Гука

$$\sigma_{ij} = \left(\nu\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_l} - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)H_{k,k} + (1 - \nu)(H_{i,j} + H_{j,i})_{,kk}. \quad (5.24)$$

Далее для суммы напряжений получаем

$$s = \sigma_{kk} = (1 + \nu) H_{k, kll}. \quad (5.25)$$

В развернутой форме уравнения (5.21), (5.23)—(5.25) в декартовых координатах запишутся в виде

$$2Gu_1 = 2(1 - \nu)\Delta H_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3} \right) \text{ и т. д.}$$

(круговая перестановка индексов),

$$2Ge = (1 - 2\nu)\Delta \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3} \right),$$

$$\sigma_{11} = \left(\nu\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3} \right) + 2(1 - \nu)\Delta \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \text{ и т. д.,}$$

$$s = (1 + \nu)\Delta \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3} \right),$$

где

$$\Delta(\dots) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right)(\dots).$$

Решение с помощью вектора Буссинеска пригодно главным образом при рассмотрении трехмерных задач. К элементарным задачам теории упругости, которые с его помощью могут быть решены, относятся:

- сосредоточенная сила в бесконечно протяженном теле (задача Кельвина),
- нормальная или касательная сила на поверхности полупространства (задача Буссинеска или Черрути),
- сосредоточенная сила внутри полупространства (задача Миндлина).

Об этих решениях, а также о других методах решения речь будет идти позднее (см. гл. 9).

5.1.4. Частные случаи вектора Буссинеска, функция перемещений Лява

Если компоненты вектора Буссинеска H_i являются не только бигармоническими, но также и гармоническими функциями, т. е. удовлетворяют уравнению

$$\Delta H_i = 0, \quad (5.26)$$

то выражение (5.21) принимает более простой вид

$$2Gu_i = -H_{i, ii}. \quad (5.27)$$

Сравнение с (5.10) показывает, что тогда

$$H_{i, i} = -\phi \quad (5.28)$$

и существует связь с потенциалом деформаций Ламе.

В некоторых случаях вектор Буссинеска можно представить в виде суммы бигармонической и гармонической векторных функций. Таким способом могут быть решены некоторые из задач, упомянутые в конце предыдущего пункта.

Следующий частный случай имеет место, если у вектора Буссинеска только одна ненулевая компонента в направлении оси x_3 :

$$H_3 = aZ, \quad H_1 = H_2 = 0. \quad (5.29)$$

Тогда уравнение $\Delta\Delta Z = 0$ справедливо в декартовых или цилиндрических координатах (при этом x_3 — продольная координата)*).

Формулы для перемещений в декартовых координатах (x, y, z) имеют вид

$$\begin{aligned} 2Gu_x &= -\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}, & 2Gu_y &= -\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial z}, \\ 2Gu_z &= \left[2(1-\nu)\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z, \end{aligned} \quad (5.30)$$

где

$$\Delta(\dots) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)(\dots),$$

соответственно в круговых цилиндрических координатах (r, φ, z) :

$$\begin{aligned} 2Gu_r &= -\frac{\partial^2 Z}{\partial r \partial z}, & 2Gu_\varphi &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 Z}{\partial \varphi \partial z}, \\ 2Gu_z &= \left[2(1-\nu)\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z, \end{aligned} \quad (5.31)$$

где

$$\Delta(\dots) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)(\dots).$$

Далее

$$2Ge = (1-2\nu)\Delta \frac{\partial Z}{\partial z}. \quad (5.32)$$

*) Если имеются объемные силы, допускается только одна компонента объемной силы в направлении x_3 . Впрочем, можно также применять эллиптические или параболические цилиндрические координаты.

С учетом закона Гука следуют равенства для напряжений в декартовых координатах

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) Z, \\
 \sigma_{yy} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \Delta - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) Z, \\
 \sigma_{zz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) Z, \\
 \tau_{xy} &= - \frac{\partial^3 Z}{\partial x \partial y \partial z}, \\
 \tau_{yz} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 - \nu) \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z, \\
 \tau_{zx} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 - \nu) \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

и в цилиндрических координатах

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \Delta - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) Z, \\
 \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \Delta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) Z, \\
 \sigma_{zz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z, \\
 \tau_{r\varphi} &= - \frac{\partial^3}{\partial r \partial \varphi \partial z} \left(\frac{Z}{r} \right), \\
 \tau_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[(1 - \nu) \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z, \\
 \tau_{zr} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z.
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Далее

$$s = (1 + \nu) \Delta \frac{\partial Z}{\partial z}, \tag{5.35}$$

причем для оператора Лапласа должны применяться соответствующие выражения в зависимости от системы координат. Для тела вращения при осесимметричном нагружении

$$Z = Z(r, z), \tag{5.36}$$

и соотношения (5.31) и (5.34) соответственно упрощаются. Тогда функция Z тождественна функции перемещений Лява, которая была введена для решения различных задач. Для сферических координат R, ϑ, φ в частном случае, когда нет зависимости от угла φ , функция перемещений Лява будет $Z = Z(R, \vartheta)$,

5.1.5. Решение Папковича и Нейбера

В то время как в решении Буссинеска для интегрирования уравнений Навье привлекаются бигармонические функции, теперь будут построены решения, содержащие гармонические функции (которые уже применялись в частных случаях для скалярного и векторного потенциалов согласно (5.2)).

Вектор перемещений представляется комбинацией гармонических функций в виде

$$u_i = A(\phi_0 + x_j \phi_j)_{,i} + B\phi_i, \quad (5.37)$$

причем $\phi_{0,ii} = 0$, $\phi_{i,jj} = 0$ (A и B — константы). Эта формула была получена различными способами П. Ф. Папковичем [17] и независимо от него Нейбером [18]. В частном случае осевой симметрии соответствующее решение указал в 1885 г. Буссинеск. Как показано Миндлином [19], существует тесная связь между решением Папковича и Нейбера и вектором Буссинеска. Покажем ее исходя из (5.21). Если положить

$$H_{i,ii} = 2\phi_i \text{ и } H_{i,j} = \psi, \quad (5.38)$$

то формула Буссинеска принимает вид

$$2Gu_i = 2(1 - \nu)H_{i,ii} - H_{i,ii}. \quad (5.39)$$

Из условия $H_{i,iii} = 0$ следует

$$\phi_{i,ii} = 0, \quad (5.40)$$

т. е. ϕ_i — гармоническая функция. Кроме того, справедливо равенство $H_{i,ijj} = 2\phi_{i,i} = \psi_{,ii}$ и из (5.40) вытекает

$$\psi_{,iii} = 0, \quad (5.41)$$

т. е. ψ — бигармоническая функция. Легко убедиться в том, что дифференциальное уравнение $\psi_{,ii} = 2\phi_{i,i}$ имеет общее решение

$$\psi = x_i \phi_i + \phi_0, \quad (5.42)$$

причем ϕ_0 — произвольная гармоническая функция. Соотношением (5.42) устанавливается тот факт, что каждая бигармоническая функция может быть выражена через гармонические функции*). Подстановка в (5.39) приводит к выражению

$$2Gu_i = 4(1 - \nu)\phi_i - (x_j \phi_j + \phi_0)_{,i}, \quad (5.43)$$

которое представляет собой решение Папковича и Нейбера. Иная форма этого решения имеет вид

$$2Gu_i = (3 - 4\nu)\phi_i - x_j \phi_{j,i} - \phi_{0,i}. \quad (5.43')$$

* При ограничении, что речь идет об односвязной области, в которой определены функции.

Таким образом, в общем случае поле перемещений может быть представлено четырьмя гармоническими функциями, которые удовлетворяют уравнениям Навье. Как было показано Нейбером, число необходимых гармонических функций можно уменьшить до трех (так называемая «формула трех функций»). Подстановкой

$$\phi_0 = 4(1 - \nu)\bar{\phi}_0 - x_j\bar{\phi}_{0,j}, \quad \phi_i = \bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{0,i} \quad (5.44)$$

можно исключить ϕ_0 , и тогда из (5.43') следует

$$2Gu_i = (3 - 4\nu)\bar{\phi}_i - x_j\bar{\phi}_{j,i}. \quad (5.45)$$

При этом должно быть доказано условие существования гармонических функций $\bar{\phi}_i$, которые ставятся в соответствие функциям $\bar{\phi}_i$ и соответственно ϕ_0 . Об этом можно прочитать в оригинальной литературе (см., например, [A14, стр. 331]).

Из решения Папковича и Нейбера (5.43) для относительной объемной деформации получается выражение

$$2Ge = 2(1 - 2\nu)\phi_{l,i} = (1 - 2\nu)N_{,il}. \quad (5.46)$$

Здесь было введено обозначение

$$N = x_j\phi_j + \phi_0. \quad (5.47)$$

С учетом закона Гука для напряжений следует

$$\sigma_{ij} = 2(1 - \nu)(\phi_{i,j} + \phi_{j,i}) - N_{,ij} + \nu\delta_{ij}N_{,kk}. \quad (5.48)$$

В развернутой форме выражения (5.43), дающие решение Папковича и Нейбера в декартовых координатах x, y, z , имеют вид

$$2Gu_x = 4(1 - \nu)\phi_x - \frac{\partial N}{\partial x} \text{ и т. д.} \quad (5.49)$$

(круговая перестановка индексов), где $N = x\phi_x + y\phi_y + z\phi_z + \phi_0$. Относительная объемная деформация равна

$$2Ge = 2(1 - 2\nu)\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x} + \frac{\partial\phi_y}{\partial y} + \frac{\partial\phi_z}{\partial z}\right) = (1 - 2\nu)\Delta N, \quad (5.50)$$

а напряжения записываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 4(1 - \nu)\frac{\partial\phi_x}{\partial x} + \left(\nu\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)N = \\ &= 2(1 - \nu)\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x} - \frac{\partial\phi_y}{\partial y} - \frac{\partial\phi_z}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)N \text{ и т. д.,} \\ \tau_{xy} &= 2(1 - \nu)\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial y} + \frac{\partial\phi_y}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (5.51)$$

Существенно, что решение Папковича и Нейбера может быть представлено в криволинейных координатах *) и в этом отношении оно предпочтительнее решения Буссинеска, которое оказывается очень неудобным всюду, за исключением цилиндрических координат.

Формулы (5.43), например, в круговых цилиндрических координатах r, φ, z имеют вид

$$2Gu_r = 4(1 - \nu) [\phi_1 \cos \varphi + \phi_2 \sin \varphi] - \frac{\partial N}{\partial r},$$

$$2Gu_\varphi = 4(1 - \nu) [-\phi_1 \sin \varphi + \phi_2 \cos \varphi] - \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial \varphi},$$

$$2Gu_z = 4(1 - \nu) \phi_3 - \frac{\partial N}{\partial z},$$

где $N = \phi_0 + \phi_1 r \cos \varphi + \phi_2 r \sin \varphi + \phi_3 z$. В сферических координатах R, ϑ, φ

$$2Gu_R = 4(1 - \nu) [(\phi_1 \cos \varphi + \phi_2 \sin \varphi) \sin \vartheta + \phi_3 \cos \vartheta] - \frac{\partial N}{\partial R},$$

$$2Gu_\vartheta = 4(1 - \nu) [(\phi_1 \cos \varphi + \phi_2 \sin \varphi) \cos \vartheta - \phi_3 \sin \vartheta] - \frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \vartheta},$$

$$2Gu_\varphi = 4(1 - \nu) [-\phi_1 \sin \varphi + \phi_2 \cos \varphi] - \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial N}{\partial \varphi},$$

где $N = \phi_0 + R [(\phi_1 \cos \varphi + \phi_2 \sin \varphi) \sin \vartheta + \phi_3 \cos \vartheta]$.

Следует далее подчеркнуть, что при применении решения Папковича и Нейбера уравнения Навье удовлетворяются гармоническими функциями, множество из которых известно. Однако трудности при этом также связаны с удовлетворением граничных условий. Кажущиеся вполне безобидными крайевые условия для первой граничной задачи (формулы Коши) $p_i = \sigma_{ij} n_j$ принимают, согласно решению Папковича и Нейбера, вид

$$2G [\phi_{0, ij} - 2\nu \delta_{ij} \phi_{k, k} - (1 - 2\nu) (\phi_{i, j} + \phi_{j, i}) + x_k \phi_{k, ij}] n_j = p_i.$$

Отсюда видны трудности решения граничной задачи теории упругости по сравнению со стандартной граничной задачей теории потенциала.

Преимущество решения Папковича и Нейбера по сравнению с решением Буссинеска состоит в том, что необходимы только четыре (три) гармонические функции вместо трех бигармонических или соответственно шести гармонических функций. Кроме того, перемещения выражаются через первые, а не через вторые производные от функций, входящих в решение.

*) Таким способом Нейберу удалось впервые решить важную задачу о концентрации напряжений в пространстве с полостью в сфероидальных координатах (см. гл. 9).

5.1.6. Осесимметричная задача, метод решения Буссинеска

Как уже упоминалось, идея метода решения Папковича и Нейбера уже значительно раньше применялась Буссинеском для частного случая осевой симметрии без кручения. Тогда в цилиндрической системе координат r, φ, z гармонические функции ϕ_i и ϕ_0 зависят только от r и z , производные по φ исчезают и перемещения u_φ обращаются в нуль. Поэтому справедливы равенства

$$\phi_1 = \phi_2 = 0, \quad \phi_3 = \phi_3(r, z), \quad \phi_0 = \phi_0(r, z) \quad (5.52)$$

и далее $N = \phi_0 + z\phi_3$. В результате частное решение ($\phi_3 = \phi_z$) получается в виде

$$2Gu_r = -\frac{\partial N}{\partial r}, \quad 2Gu_z = 4(1 - \nu)\phi_z - \frac{\partial N}{\partial z}. \quad (5.53)$$

Отсюда для относительной объемной деформации получаем

$$2Ge = (1 - 2\nu)\Delta N = 2(1 - 2\nu)\frac{\partial \phi_z}{\partial z}, \quad (5.54)$$

а напряжения с учетом закона Гука будут равны

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\nu \frac{\partial \phi_z}{\partial z} - \frac{\partial^2 N}{\partial r^2}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2\nu \frac{\partial \phi_z}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial r}, \\ \sigma_{zz} &= 2(2 - \nu) \frac{\partial \phi_z}{\partial z} - \frac{\partial^2 N}{\partial z^2}, \\ \tau_{rz} &= 2(1 - \nu) \frac{\partial \phi_z}{\partial r} - \frac{\partial^2 N}{\partial r \partial z}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Этим методом впервые была решена задача о действии нормальной сосредоточенной силы на границе упругого полупространства (задача Буссинеска, см. § 9.2).

Замечание. Так же как во многих случаях, решение Папковича и Нейбера предпочтительно по сравнению с решением Буссинеска; для осесимметричной задачи доказывается, что решение Буссинеска лучше функций перемещения Лява.

§ 5.2. Функции напряжений

Введением функций напряжений открывается следующая возможность упростить основные уравнения теории упругости. Исходными являются уравнения равновесия (без учета объем-

ных сил)

$$\sigma_{i,j,i} = 0 \quad (5.56)$$

или уравнения Бельтрами, представляющие собой условия совместности

$$\sigma_{i,j,ii} + \frac{1}{1+\nu} s_{,ij} = 0. \quad (5.57)$$

Последние очень сложны в математическом отношении, поэтому применяют вспомогательные функции, которые тождественно удовлетворяют уравнениям (5.56).

Впервые такая процедура была осуществлена Эри [20] в 1863 г., представившим компоненты напряжений для частного случая двумерного напряженного состояния с помощью скалярной функции координат (впрочем, эта процедура не применялась для решения задачи теории упругости, см. § 8.2). Обобщение на трехмерный случай выполнено Максвеллом [21] и независимо от него Морерой [22].

5.2.1. Функции напряжений Максвелла

При применении декартовых координат вводятся три скалярные функции U_{11} , U_{22} , U_{33} трех переменных по формулам

$$\sigma_{11} = U_{22,33} + U_{33,22}, \quad \sigma_{22} = U_{33,11} + U_{11,33}, \quad \sigma_{33} = U_{11,22} + U_{22,11}, \quad (5.58)$$

$$\sigma_{12} = -U_{33,12}, \quad \sigma_{23} = -U_{11,23}, \quad \sigma_{31} = -U_{22,13},$$

тождественно удовлетворяющие уравнениям равновесия.

При выборе функций напряжений остается определенный произвол. Во всяком случае должны удовлетворяться уравнения Бельтрами. После подстановки в (5.57) получается

$$[(1+\nu)\Delta U_{22} - s]_{,33} + [(1+\nu)\Delta U_{33} - s]_{,22} = 0 \text{ и т. д.}$$

(круговая перестановка индексов) или

$$- [(1+\nu)\Delta U_{33} - s]_{,12} = 0 \text{ и т. д.} \quad (5.59)$$

(круговая перестановка индексов), причем здесь было учтено, что $s_{,ii} = 0$. Отсюда с учетом свойств функции напряжений получаются три независимых соотношения (см., например, [A18, стр. 128])

$$\Delta U_{11} = \Delta U_{22} = \Delta U_{33} = \frac{s}{1+\nu},$$

или

$$\Delta U_{11} = \Delta U_{22} = \Delta U_{33} = \frac{U_{11,11} + U_{22,22} + U_{33,33}}{2-\nu}. \quad (5.60)$$

Из первого из этих уравнений после применения закона Гука $\varepsilon_{ij} = (\sigma_{ij} - \nu \delta_{ij}s)/E$ следует

$$(1 + \nu)(U_{11,11} - U_{22,11} - U_{33,11}) = s - (1 + \nu)(\sigma_{22} + \sigma_{33}) = E\varepsilon_{11}. \quad (5.61)$$

Два других соответствующих уравнения получают круговой перестановкой индексов. Интегрирование этих соотношений приводит к следующему представлению для перемещений:

$$u_1 = \frac{1 + \nu}{E}(U_{11} - U_{22} - U_{33})_1 \text{ и т. д.} \quad (5.62)$$

(круговая перестановка индексов). Всегда имеются три такие функции напряжений, которые удовлетворяют уравнениям равновесия и условиям совместности.

Для решения задач теории упругости функции Максвелла используются очень редко, кроме того, приведенные соотношения справедливы только в декартовых координатах.

5.2.2. Функции напряжений Мореры

Другая формула, также с тремя скалярными функциями напряжений $U_{12} = U_{21}$, $U_{23} = U_{32}$, $U_{31} = U_{13}$, была предложена Морерой

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -2U_{23,23} \text{ и т. д.,} \\ \sigma_{12} &= (U_{23,1} + U_{31,2} - U_{12,3})_3 \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (5.63)$$

(круговая перестановка индексов).

Эти функции напряжений можно также выбирать произвольно, но и они должны удовлетворять уравнениям Бельтрами. Правда, построить их не так просто, как функции напряжений Максвелла. Формулы (5.63) справедливы также только в декартовых координатах и оказываются малоприменимыми для решения задач теории упругости.

5.2.3. Общие решения Бельтрами, Финци и Вебера

Решение ^{*}), удовлетворяющее уравнениям равновесия не только в декартовых координатах, получается наложением функций напряжений Максвелла и Мореры. Решение имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= U_{22,33} + U_{33,22} - 2U_{23,23} \text{ и т. д.,} \\ \sigma_{12} &= U_{23,13} + U_{31,23} - U_{12,33} - U_{33,12} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (5.64)$$

(круговая перестановка индексов).

^{*}) Это решение получено Бельтрами [23], в литературе иногда оно приписывается Финци [24], который впервые на него указал в 1934 г. В 1948 г. решение было вновь открыто Вебером [25].

Введенные шесть функций напряжений от трех пространственных переменных оказываются компонентами симметричного тензора функций напряжений $U_{ij} = U_{ji}$. В общем случае выражения (5.64) можно записать в виде

$$\sigma_{ij} = \epsilon_{imr} \epsilon_{jns} U_{rs, mn}, \quad (5.65)$$

или в символической форме $\sigma_{ij} = (\text{Ink } U)_{ij}$, где оператор $\text{Ink}(\dots)$ определяется как «несовместность с (...)» (см. п. 1.3.6.1). Общая формула (5.65), как уравнение в тензорах, справедлива во всех системах координат, кроме того, она пригодна в качестве общего решения уравнений равновесия при $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ и, следовательно, применима не только для упругого поведения материала. Эта формула получается, если предположить существование величин A_{ij} , которые, согласно равенству

$$\sigma_{ij} = \epsilon_{jst} A_{it, s}, \quad (5.66)$$

удовлетворяют уравнениям равновесия. Тогда из условия симметрии напряжений из (5.66) следует (5.65). В частности, из формул Бельтрами (5.65) получаются при $U_{ij} = 0$ для $i \neq j$ формулы Максвелла, при $U_{11} = U_{22} = U_{33} = 0$ — формулы Мореры.

Формулы (5.65) для решения прикладных задач теории упругости применяют тоже очень редко, так как дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять функции напряжений, очень сложны. Вместе с тем функции напряжений имеют большое значение для относительно новых областей континуальной теории дислокаций, которые уже не могут быть причислены к классической теории упругости. Деформации при этом не могут быть выведены из поля перемещений и для определения внутренних напряжений по пространственному полю дислокаций незаменимы функции напряжений (см. [B24]). Как было показано многими авторами [26, 27], существует тесная связь между функциями напряжений Максвелла — Мореры и функциями перемещений Папковича — Нейбера.

В заключение следует упомянуть, что в рамках данной книги проблема полноты рассмотренных функций перемещений и функций напряжений, а также их зависимости от физических уравнений не обсуждается. Относящиеся к этому интересные в теоретическом отношении вопросы можно найти, например, в [A32].

Обзор различных методов решения уравнений теории упругости

Как уже упоминалось, точные решения основных уравнений теории упругости при заданных граничных условиях получить очень сложно. Но все же с помощью общих методов, обсуждавшихся в предыдущей главе, во многих случаях удается решить фундаментальные и важные для приложений задачи теории упругости.

Наряду с ними имеются другие точные и приближенные, аналитические и численные методы решения, которые во многих случаях приводят к цели. При этом все возрастающее значение приобретают приближенные численные методы благодаря постоянному совершенствованию вычислительных машин (компьютеров). Все эти методы, однако, основаны на строгих законах механики, знание которых необходимо для понимания приближенных методов.

Не слишком вдаваясь в детали, обсудим ниже некоторые методы решения пространственных и плоских задач.

§ 6.1. Обратный и полуобратный методы

Обратным методом называют процедуру, состоящую в том, что частное решение считается известным заранее (или угадано) и затем выясняется, какая именно задача при этом может быть решена. Это означает, что исходя из решения проверяют, какие могут быть удовлетворены граничные условия, и в результате получают возможные виды нагрузок. Такой способ, который предполагает наличие известной интуиции, привел к решению многочисленных элементарных задач.

Дальнейшим его развитием является *полуобратный метод*, предложенный Сен-Венаном, который нашел очень широкое применение. При этом не пытаются одновременно удовлетворить всем основным уравнениям и граничным условиям, а напротив, принимаются правдоподобные допущения о величинах некоторых напряжений и деформаций, которые затем вводятся в основные уравнения. Благодаря этому получают более простые дифференциальные уравнения, из которых и определяются остальные неизвестные величины. Если с помощью принятых допущений могут быть удовлетворены все основные уравнения, а также граничные условия, то по теореме единственности ре-

шения уравнений теории упругости корректность исходных допущений и, следовательно, точное решение задачи гарантированы.

Таким способом в 1855 г. Ж. Сен-Венаном впервые была точно решена задача кручения призматического стержня произвольного поперечного сечения (раньше Сен-Венана из-за несоответствующих действительности допущений при решении этой задачи потерпел неудачу Навье).

В этой связи следует сформулировать важнейший принцип Сен-Венана или «принцип статической эквивалентности систем нагрузок», например, следующим образом:

Если тело находится в равновесии под действием двух различных, но статически эквивалентных систем нагрузок, приложенных в малой области, то эти системы нагрузок будут оказывать одинаковое действие на те части тела, которые далеко удалены от места их приложения.

Статически эквивалентными системами усилий являются при этом такие, для которых будут равны равнодействующая сила и момент. Справедливость принципа Сен-Венана подтверждается прежде всего опытом (см. [A2, 28, 29]).

Для практического применения этого принципа существенно, что в некоторых случаях система нагрузок может быть заменена более простой статически эквивалентной системой. Таким способом можно иногда обойти трудности удовлетворения граничных условий. Хотя при этом получаются приближенные решения, они, однако, достаточно точны. Различные применения полуобратного метода позднее еще будут обсуждаться.

§ 6.2. Метод комплексных функций напряжений в плоской задаче теории упругости

Для важного класса плоских (двумерных) задач теории упругости перемещения, деформации и напряжения зависят только от двух координат на плоскости. Основные уравнения, а также общие методы решения, обсуждавшиеся в гл. 5, получаются как частный случай из соотношений для трехмерной сплошной среды. Это подробно обсуждается в гл. 8. Применение функций напряжений в плоской теории упругости имеет большое практическое значение. Весьма плодотворным является при этом введение комплексной переменной и использование методов теории аналитических функций, приводящих к эффективному методу решения. В основном он был построен Г. В. Колосовым [30] и позднее развит Н. И. Мусхелишвили (см. [31, 32], а также [A7, A30]).

Способ основан на том, что каждая бигармоническая функция может быть представлена двумя аналитическими функциями комплексной переменной. При применении декартовых координат $x_1 = x$, $x_2 = y$ компоненты напряжений и перемещений в плоском случае σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} и $u_x = u$, $u_y = v$ могут рассмат-

риваться как функции комплексных переменных $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ (где $i = \sqrt{-1}$, а черта над буквой означает комплексно сопряженную величину). Как известно, вещественная и мнимая части всякой комплекснозначной аналитической функции

$$f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

являются гармоническими функциями двух переменных, и для них справедливы условия Коши — Римана

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Отсюда сразу следует, что всякую вещественную гармоническую функцию двух переменных можно представить в общем случае в виде

$$H(z, \bar{z}) = \phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z}) = 2 \operatorname{Re} \{ \phi(z) \}, \quad (6.1)$$

где $\phi(z)$ — аналитическая функция. Этот факт может быть успешно использован при формулировании и решении задачи кручения (см. § 7.5).

С другой стороны, можно показать, что для всякой вещественной бигармонической функции на плоскости справедливо общее представление (формула Гурса) с помощью двух аналитических функций $\phi(z)$ и $\chi(z)$:

$$F(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} [\bar{z}\phi(z) + z\bar{\phi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z})] = \operatorname{Re} \{ \bar{z}\phi(z) + \chi(z) \}. \quad (6.2)$$

Это соответствует общему решению бигармонического дифференциального уравнения $\Delta\Delta F(x, y) = 0$ на плоскости.

Таким образом, можно представить всякую бигармоническую функцию напряжений относительно двух переменных в форме (6.2). Следовательно, плоскую задачу теории упругости можно свести к определению двух аналитических функций. Таким способом в 1909 г. Г. В. Колосов впервые решил важные задачи определения напряжений (например, о концентрации напряжений на эллиптическом отверстии в бесконечно протяженной растягиваемой пластине). Позднее этот способ был повторен независимо от него Стивенсоном [33] ⁽⁶⁾.

Компоненты напряжений и перемещений связаны с комплексными функциями напряжений $\phi(z)$ и $\psi(z)$ (которые иногда называют также комплексными потенциалами) формулами Колосова

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2 [\phi'(z) + \bar{\phi}'(\bar{z})] = 4 \operatorname{Re} \{ \phi'(z) \}, \\ \sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\tau_{xy} &= -2 [z\bar{\phi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})], \\ 2G(u + iv) &= \kappa\phi(z) - z\bar{\phi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}). \end{aligned} \quad (6.3)$$

При этом κ зависит от упругих постоянных; кроме того, введено обозначение $\chi'(z) = \psi(z)$, а штрих, как обычно, означает производную по аргументу функции.

Если комплексные функции напряжений известны, то действительная и мнимая части соотношений (6.3) дают реальные физические величины, т. е. напряжения и перемещения. Для определения комплексных функций напряжений привлекаются общие теоремы теории аналитических функций, причем важным вспомогательным средством при расчетах являются так называемые *интегралы типа Коши*. Решения получаются частично элементарным способом, частично сводятся к сложным интегральным уравнениям. Для многих задач способ комплексных функций напряжений может рассматриваться как «прямой» метод решения.

Для вычислений в криволинейных координатах лучше всего подходит способ конформного отображения с помощью комплексных аналитических функций. Криволинейные координаты, применяемые в зависимости от формы границы, весьма целесообразны при точном и приближенном рассмотрении многочисленных задач теории упругости (см. п. 8.4.4.1).

Следует также упомянуть, что комплексные функции напряжений Колосова не только непосредственно связаны с вещественной функцией напряжений Эри, но существует также связь с решением Папковича и Нейбера для плоского случая.

Упомянем еще метод Собrero [34] решения плоской задачи теории упругости с помощью гиперкомплексных функций напряжений; он малоэффективен (см. относящиеся к этому вопросу работы [35, 36]).

§ 6.3. Решения с помощью интегральных преобразований

Применение интегральных преобразований дает полезный метод решения прежде всего плоских, а также пространственных задач теории упругости. Существенно при этом, что может быть уменьшено число независимых переменных в дифференциальных уравнениях с частными производными. Роль соответствующих независимых переменных переходит к параметрам, и, таким образом, удается привести дифференциальные уравнения с частными производными относительно многих переменных к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

6.3.1. Общие сведения об интегральных преобразованиях

Рассмотрим сначала одномерное интегральное преобразование. Для функции $f(x)$ оно определяется интегральным урав-

нением *)

$$J\{f(x)\} = \tilde{f}(\lambda) = \int_a^b f(x) K(\lambda, x) dx, \quad (6.4)$$

где $K(\lambda, x)$ — заданная функция x и параметра λ , называемая *ядром интегрального преобразования*. При конечных пределах интегрирования (6.4) называют *конечным* интегральным преобразованием. В приложениях часто $a = 0$, $b = \infty$ или $a = -\infty$, $b = \infty$.

Исходная задача приводится к задаче для так называемой трансформанты неизвестной функции $\tilde{f}(\lambda) = J\{f(x)\}$. Ее, очевидно, решить проще, чем для искомой функции. Следовательно, сначала получается вспомогательное решение в форме $\tilde{f}(\lambda)$. Из этого решения после выполнения обратного преобразования $J^{-1}\{\tilde{f}(\lambda)\}$ следует искомое решение для $f(x)$. При этом обратное преобразование сводится в общем случае к решению интегральных уравнений, которое может быть получено точными или чаще всего приближенными численными методами.

В зависимости от типа ядра существуют различные интегральные преобразования, например *преобразование Лапласа*

$$K(\lambda, x) = e^{-\lambda x},$$

экспоненциальное преобразование Фурье

$$K(\lambda, x) = e^{i\lambda x}, \quad i = \sqrt{-1},$$

преобразование Меллина

$$K(\lambda, x) = x^{\lambda-1},$$

преобразование Ханкеля или Бесселя

$$K(\lambda, x) = J_n(\lambda x) x,$$

причем $J_n(\lambda x)$ означает функцию Бесселя первого рода n -го порядка. Для решения задач теории упругости наиболее важны три последних преобразования.

Преобразование Фурье является не только наиболее давним, но и важнейшим интегральным преобразованием вследствие весьма разнообразных возможностей применения. Классическое экспоненциальное преобразование Фурье (с вещественным параметром λ) определяется следующим образом:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx. \quad (6.5)$$

*) При этом на функции, подлежащие преобразованию, в общем случае налагаются определенные ограничения.

Предполагается, что исходная функция абсолютно интегрируема, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$.

Функция $f(x)$ должна обращаться в нуль на бесконечности, должна быть ограниченной и иметь только конечное число точек разрыва первого рода (удовлетворять так называемым условиям Дирихле)*). Формула обратного преобразования для (6.5) имеет вид

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \tilde{f}(\lambda) \} = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (6.6)$$

Ее вывод, который производится с помощью интеграла Фурье, можно найти в учебниках по математике (см., например, [В41]).

Иногда в литературе вместо множителя $1/\sqrt{2\pi}$ в формулах для прямого и обратного преобразований употребляется множитель $1/(2\pi)$ только в формуле обратного преобразования (или множитель 2π стоит в экспоненте ядра). Некоторые авторы применяют также формулу преобразования, в которой экспонента имеет противоположный знак по сравнению с принятым в книге. В литературе, таким образом, нет единообразия в определении преобразования; здесь выбрана формулировка Снеддона.

Наряду с экспоненциальным преобразованием Фурье (6.5) для прямой $f(x)$ и обратной $\tilde{f}(\lambda)$ функций рассматриваются косинус- или синус-преобразования Фурье

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{F}_c \{ f(x) \} \\ \mathcal{F}_s \{ f(x) \} \end{array} \right\} = \tilde{f}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} (\lambda x) dx, \quad (6.7)$$

для которых формулы обратного преобразования имеют вид

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{F}_c^{-1} \{ \tilde{f}(\lambda) \} \\ \mathcal{F}_s^{-1} \{ \tilde{f}(\lambda) \} \end{array} \right\} = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{f}(\lambda) \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} (x\lambda) d\lambda. \quad (6.8)$$

Так как преобразование Фурье должно применяться для решения дифференциальных уравнений, важно знать, как преобразуется производная от функции. Из (6.5) после интегрирования по частям в предположении, что $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$ по-

* Эти строгие ограничения сужают область применимости классического преобразования Фурье (см. § 8.6).

лучают

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = -\frac{1}{i\lambda\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{i\lambda x} dx,$$

или

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{i\lambda x} dx = -i\lambda \mathcal{F}\{f(x)\}. \quad (6.9)$$

Таким образом, трансформанту Фурье для производной от функции можно выразить через трансформанту Фурье самой функции. Для старших производных соответственно получается *)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^m}{dx^m} f(x) e^{i\lambda x} dx = \frac{(-i\lambda)^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx,$$

или

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^m}{dx^m} f(x)\right\} = \tilde{f}^{(m)}(\lambda) = (-i\lambda)^m \tilde{f}(\lambda). \quad (6.10)$$

Попутно следует упомянуть, что для преобразования Фурье произведения двух функций $f(x)$ и $g(x)$ справедлива так называемая *теорема о свертке*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda) \tilde{g}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) f(x - \xi) d\xi,$$

где выражение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) f(x - \xi) d\xi = f * g$$

называется *сверткой функций* f и g (или произведением типа свертки) на интервале $(-\infty, \infty)$.

Двумерное преобразование Фурье, т. е. преобразование заданной функции $f(x, y)$ двух независимых переменных (по каждой из них) получается последовательным применением одномерного преобразования. Например, после преобразования по координате x имеем

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = \tilde{f}(\lambda, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i\lambda x} dx, \quad (6.11)$$

*) При условии что первые $(m-1)$ производных от $f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ обращаются в нуль. Если при этом функция произвольное число раз дифференцируема и все ее производные обращаются в нуль на бесконечности, она иногда называется основной функцией.

причем иногда (для пояснения) записывают

$$\mathcal{F} \{f(x, y); x \rightarrow \lambda\} = \tilde{f}(\lambda, y).$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\mathcal{F}^{-1} \{\tilde{f}(\lambda, y); \lambda \rightarrow x\} = f(x, y).$$

После повторного преобразования по y из (6.11) получим

$$\mathcal{F} \{\tilde{f}(\lambda, y); y \rightarrow \mu\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda, y) e^{i\mu y} dy,$$

или

$$\tilde{\tilde{f}}(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i(\lambda x + \mu y)} dx dy. \quad (6.12)$$

Это двумерное преобразование Фурье, для которого справедлива формула обратного преобразования

$$\mathcal{F}^{-1} \{\tilde{\tilde{f}}(\lambda, \mu)\} = f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\tilde{f}}(\lambda, \mu) e^{-i(\lambda x + \mu y)} d\lambda d\mu. \quad (6.13)$$

Для частных производных по каждой из переменных справедливы в этом случае соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(x, y); x \rightarrow \lambda \right\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(x, y) e^{i\lambda x} dx = \\ &= \tilde{f}^{(m)}(\lambda, y) = (-i\lambda)^m \tilde{f}(\lambda, y), \end{aligned} \quad (6.14)$$

или

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x, y); y \rightarrow \mu \right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x, y) e^{i\mu y} dy = \\ &= \tilde{f}^n(x, \mu) = (-i\mu)^n \tilde{f}(x, \mu), \end{aligned}$$

а для смешанных частных производных

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x, y) \right\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x, y) e^{i(\lambda x + \mu y)} dx dy = \\ &= \tilde{\tilde{f}}^{(m)(n)}(\lambda, \mu) = (-i\lambda)^m (-i\mu)^n \tilde{\tilde{f}}(\lambda, \mu). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Совершенно аналогично можно построить преобразование Фурье по трем переменным:

$$\mathcal{F}\{f(x, y, z)\} = \tilde{f}(\lambda, \mu, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{\infty} f e^{i(\lambda x + \mu y + \nu z)} dx dy dz;$$

обратное преобразование будет иметь вид

$$\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(\lambda, \mu, \nu)\} = f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{\infty} f e^{-i(x\lambda + y\mu + z\nu)} d\lambda d\mu d\nu.$$

Из приведенных формул видно, как по мере надобности исключается каждая независимая переменная после выполнения преобразования и что ее роль берет на себя соответствующий параметр.

Наряду с классическим преобразованием Фурье в вещественной области, согласно (6.5), большое значение для приложений сегодня имеет комплексное преобразование Фурье [37]. При этом могут быть ослаблены требования, налагаемые на исходные функции, подлежащие преобразованию. Если трансформанту Фурье рассматривают как аналитическую функцию, то от вещественных значений параметра λ переходят к комплексным значениям $\alpha = \sigma + i\tau$.

Для вещественных функций $f(x, y)$, обладающих свойством

$$|f(x, y)| \leq \begin{cases} ae^{\tau_- x} & x \rightarrow \infty, \\ be^{\tau_+ x} & x \rightarrow -\infty, \end{cases} \text{ при}$$

комплексное преобразование Фурье запишется в виде

$$\mathcal{F}\{f(x, y); x \rightarrow \alpha\} = \hat{f}(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i(\sigma + i\tau)x} dx,$$

причем теперь $\hat{f}(\alpha, y)$ представляет собой аналитическую функцию в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$. Для каждого τ_0 из полосы, в которой функция регулярна, справедлива формула обратного преобразования

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\alpha, y); \alpha \rightarrow x\} = f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + i\tau_0}^{\infty + i\tau_0} \hat{f}(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Применение ее связано со значительно меньшими ограничениями, чем формулы (6.6) классического обратного преобразования. Аналогично (6.10) для данного случая справедлива формула дифференцирования

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^m}{\partial x^m} f(x, y); x \rightarrow \alpha\right\} = \hat{f}^m(\alpha, y) = (-i\alpha)^m \hat{f}.$$

6.3.2. Применение к задачам теории упругости

В зависимости от постановки для решения задач теории упругости могут применяться различные интегральные преобразования. При этом получаются точные решения для напряжений и перемещений в форме несобственных интегралов, сходимость которых обеспечена. Обычно они оцениваются численно, в замкнутой форме обратное преобразование возможно лишь в частных случаях. Некоторые примеры обсуждаются в последующих параграфах 8.6 и 9.6.

Для плоских задач с помощью преобразования Фурье можно построить решения первой и второй граничных задач для бесконечной и полубесконечной областей, с помощью синус- или косинус-преобразования Фурье для полосы конечной ширины, а также для слоистых пластин. При рассмотрении в полярных координатах удобным является преобразование Меллина; с его помощью получаются, например, решения для клиновидной области. Впрочем, существует тесная связь между преобразованием Меллина и комплексным преобразованием Фурье.

Пространственные осесимметричные задачи могут решаться применением преобразования Ханкеля, например, полупространство, нагруженное усилиями, симметричными относительно оси симметрии и приложенными нормально к границе, или нагруженное сосредоточенной силой внутри области (задача Миндлина). Для задачи о сплошном или полом конусе при различных нагрузках на границе можно использовать многомерное преобразование Фурье.

Нужно отметить также, что как в плоском, так и в пространственном случае с помощью интегральных преобразований может быть найдено решение смешанной граничной задачи, например задачи о действии штампа или общей контактной задачи. Способ здесь в общем случае является очень сложным, так как формулировка граничных условий приводит к так называемым парным интегральным уравнениям, решение которых (если его вообще удается получить в замкнутой форме) не всегда просто. Следует также назвать в качестве важного еще так называемый метод Винера—Хопфа [В43]. Интегральные преобразования позволяют также получить решения элементарных задач теории трещин, которые лежат в основе линейной механики разрушения для плоского и пространственного случаев [В30] (так называемых трещин Гриффитса, или дискообразных трещин).

§ 6.4. Приближенные и численные методы

Возможности построения точных решений задач теории упругости ограничены. Как для пространственных, так и для плоских задач точные решения можно получить описанными выше методами только для областей с геометрически простыми границами (и чаще всего только для бесконечных и полубесконечных областей).

Очень трудным или почти невозможным является получение точных решений для областей конечных размеров. Основную трудность составляет при этом не подбор функций, дающих решение уравнений, а скорее удовлетворение их граничным

условиям. По этой причине уже давно была осознана необходимость эффективных приближенных методов. Они могут быть разделены в основном на аналитические (непрерывные) и численные (дискретные), но возможны также смешанные методы.

Аналитические методы, в которых варьируемыми всегда являются независимые переменные, базируются в основном на том, что бесконечно большое число степеней свободы сплошной среды заменяется конечным числом степеней свободы. При этом подбираются функции, дающие такое математическое упрощение решения, чтобы оно по возможности приближалось к точному решению, т. е. чтобы наилучшим образом удовлетворялись условия задачи. В основе этих методов лежат преимущественно энергетические и вариационные принципы механики, и поэтому они часто называются *вариационными*. Основным и наиболее известным методом этого типа является метод Ритца *)⁷⁾.

Метод Ритца получил существенное развитие и видоизменение, а лежащая в его основе идея в модифицированной форме применяется в *методе конечных элементов*, который сегодня может рассматриваться, пожалуй, как важнейший численный метод вообще в теории поля.

В *дискретных приближенных методах* неизвестные функции с самого начала заменяются их значениями в отдельных точках. При этом различными способами получают прямые приближенные решения основных уравнений, и в процессе вычислений постоянно оперируют численными значениями основных переменных. Иногда в качестве недостатка этих методов указывают на то, что нет аналитического выражения («формул») зависимости переменных друг от друга, а получаются только численные значения искомого функций в определенных точках (поэтому эти методы называются также *сеточными*). При применении теории упругости к практическим задачам это обстоятельство часто не является помехой, так как обычно и без того граничные значения, например, нагрузки, действующей на элементы конструкций, известны по измерениям в конечном числе точек.

Наиболее известным и широко применяемым приближенным численным методом является метод конечных разностей в различных модификациях. Основные дифференциальные уравнения и граничные условия при этом преобразуются в разностные уравнения.

Общим для всех приближенных методов является то, что они сводятся к системам алгебраических уравнений, причем при применении численных методов речь идет часто о системах уравнений очень высокого порядка соответственно с большим числом неизвестных. Возможности решения при этом существенно прогрессируют с повышением быстродействия вычислительных машин (компьютеров). Это справедливо прежде всего для уже названного метода конечных элементов, а также в рав-

*) Основная идея, лежащая в основе этого метода, была использована уже в 1877 г. лордом Рэлеем для приближенного определения собственных частот механических колебательных систем. Поэтому его часто называют методом Рэля — Ритца.

ной мере для метода граничных интегральных уравнений, которые являются промежуточными между аналитическими и численными методами.

6.4.1. Приближенные аналитические методы

Различные приближенные аналитические методы связаны с вариационными формулировками и основываются на том, что существует тесная связь между вариационными проблемами и соответствующими краевыми задачами, выражаемая дифференциальными уравнениями Эйлера — Лагранжа. Эта взаимосвязь имеет большое значение для теории (см. гл. 4). Для краевой задачи всегда можно сформулировать соответствующую вариационную задачу и искать затем ее решение. При этом были развиты численные методы, чтобы решать вариационную задачу, не применяя дифференциальных уравнений Эйлера — Лагранжа, а посредством так называемых прямых методов вариационного исчисления.

6.4.1.1. Метод Ритца. Поясним кратко этот метод для одномерного случая. Пусть ставится задача отыскания неизвестной функции $y(x)$, являющейся решением вариационной задачи

$$J\{y(x)\} = \int_a^b F(x, y, y') dx = \text{Ext} \quad (6.16)$$

с граничными условиями $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$. Функция $y(x)$ называется *экстремалью* вариационной задачи. В функционале $J\{f(x)\}$ F — заданная функция аргументов, штрих при этом означает производную по независимой переменной x (могут иметься также производные более высокого порядка).

По Ритцу предлагается строить приближенное решение для экстремали в виде сходящейся последовательности аппроксимирующих функций $\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ (так называемой «минимизирующей последовательности»). Для этого применяется формула Ритца

$$\tilde{y}_N = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(x), \quad (6.17)$$

где $\varphi_0(x)$ и $\varphi_k(x)$ — известные функции, называемые координатными функциями, а c_k — вещественные параметры (параметры Ритца). При этом справедливы соотношения $\varphi_0(a) = y_a$, $\varphi_0(b) = y_b$, т. е. функция $\varphi_0(x)$ удовлетворяет неоднородным граничным условиям (она отсутствует, если неоднородных граничных условий нет), а остальные координатные функции выбираются так, чтобы $\varphi_k(a) = 0$, $\varphi_k(b) = 0$. Тогда формула Ритца

(6.17) независимо от параметров c_k удовлетворяет граничным условиям задачи.

Для численной реализации и для улучшения характера сходимости уравнений метода Ритца важно подобрать такие координатные функции, которые являются частью линейно независимой и полной бесконечной системы функций.

Линейная независимость означает, что ни одна из функций, входящих в решение, не может быть представлена в виде линейной комбинации конечного числа других функций, в то время как полнота означает, что всякую функцию $f(x)$ с произвольной точностью можно приблизить линейной комбинацией конечного множества функций. Полнота функций, образующих решение, имеет принципиальное значение, так как в противном случае возникает большая погрешность при нахождении результата и аппроксимация даже большим числом членов может сильно отличаться от точного решения.

При практическом применении метода в качестве координатных функций целесообразно выбирать последовательности тригонометрических или степенных функций. С учетом формулы (6.17) функционал (6.16) принимает вид

$$J\{\tilde{y}_N\} = \int_a^b F(x, \tilde{y}_N, \tilde{y}'_N) dx,$$

и после интегрирования приходим к вариационной задаче

$$J(c_1, c_2, \dots, c_N) = \text{Extr}. \quad (6.18)$$

Функционал становится функцией параметров Ритца, которые могут быть определены из условий

$$\frac{\partial J}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial c_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial J}{\partial c_N} = 0. \quad (6.19)$$

Если речь идет о квадратичном функционале вариационной задачи, то из (6.19) получают линейные уравнения для определения c_k . Построенные таким образом приближенные решения $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_N$ составляют минимизирующую последовательность

$$J\{\tilde{y}_1\} \geq J\{\tilde{y}_2\} \geq \dots \geq J\{\tilde{y}_N\} \geq m, \quad (6.20)$$

причем для экстремали вариационной задачи (6.16) $J\{y^*\} = m$ соответствует точному решению $y^*(x)$.

К сожалению, нет полной уверенности в том, что построенная таким образом минимизирующая последовательность действительно сходится к правильному результату (даже если установлено существование решения). Хотя справедливо равенство $\lim_{N \rightarrow \infty} J\{\tilde{y}_N\} = m$, но в общем случае следствием этого не является соотношение $\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{y}_N = y^*$. Тем не менее решение \tilde{y}_N принимается в качестве подходящей аппроксимации экстрема-

ли, причем чаще всего можно ограничиваться малым числом членов.

Метод Ритца оказывается полезным для решения практических задач, даже если сходимость проверить затруднительно и используемые оценки применимы только для узкого круга задач *).

Обычно стремятся обеспечить практическую сходимость результатов и получение приближенных решений с достаточной точностью при малом числе координатных функций. Важен при этом подходящий выбор системы функций с учетом лежащего в основе функционала.

6.4.1.2. Развитие и видоизменение метода Ритца. Прежде всего следует заметить, что метод Ритца аналогичным образом может быть реализован для двумерных задач. Для лежащей в его основе вариационной задачи

$$J\{u(x, y)\} = \iint F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dy = \text{Ext} \quad (6.21)$$

с соответствующими граничными условиями формулу Ритца применяют в виде

$$\tilde{u}(x, y) = \varphi_0(x, y) + \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(x, y) \quad (6.22)$$

и вновь определяют неизвестные параметры из условий

$$\frac{\partial J\{\tilde{u}\}}{\partial c_k} = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (6.23)$$

При этом справедливы замечания и оговорки, аналогичные уже упомянутым в п. 6.4.1.1.

Выбор подходящих координатных функций и удовлетворение граничным условиям, естественно, в рассматриваемом случае значительно сложнее, чем в одномерном. Нужно вообще заметить, что сходимость метода Ритца с увеличением числа независимых переменных ухудшается.

Обобщение метода на случай многих независимых переменных было предложено в 1932 г. Л. В. Канторовичем. Вместо постоянных параметров при координатных функциях вводятся неизвестные функции одной независимой переменной. Тем самым достигается большая гибкость и можно ожидать более точного приближения. Например, для вариационной задачи (6.21) может быть применена формула для $\tilde{u}_N(x, y)$ в виде

$$\tilde{u}_N(x, y) = \sum_{k=1}^N a_k(x) \varphi_k(x, y),$$

*) Посвященные этому статьи имеются, например, у Н. М. Крылова (1918 г.). Всестороннее рассмотрение вопроса содержится в [В42].

где $a_k(x)$ — переменные коэффициенты. Величины $a_k(x)\varphi_k(x, y)$ также удовлетворяют граничным условиям, как и $u(x, y)$. После подстановки их в функционал (6.21) и интегрирования по y получим

$$J\{\tilde{u}_N\} = J\left\{\sum_k a_k(x)\varphi_k(x, y)\right\} = \int F^*[a_k(x), a'_k(x), x] dx, \quad (6.24)$$

т. е. новый функционал, который зависит только от функций одной переменной. Функции $a_k(x)$ определяются так, что они минимизируют функционал (6.24). Этим методом могут быть решены некоторые, в том числе трехмерные, задачи теории упругости (см. [B42]).

Общий анализ метода Ритца показывает, что приближенное решение вариационной задачи $J\{y\} = \text{Min}$ получается с помощью минимизирующей последовательности (6.20). В то время как в методе Ритца минимизирующая последовательность дает верхнюю границу значений функционала, Трефтц в своей работе [38] преследовал цель построить минимизирующую последовательность, соответствующую нижней границе,

$$J\{\tilde{z}_1\} \leq J\{\tilde{z}_2\} \leq \dots \leq J\{\tilde{z}_N\} \leq m,$$

чтобы получить двухстороннюю оценку точного значения функционала. При этом также применяется формула, аналогичная формуле Ритца, но координатные функции теперь должны удовлетворять только основному дифференциальному уравнению (или уравнению Эйлера вариационной задачи). Неизвестные коэффициенты определяются из граничных условий.

Метод Трефтца очень эффективен, им могут быть решены некоторые задачи теории упругости (например, задачи кручения), причем можно задать ошибку аппроксимации. В качестве недостатка этого метода по сравнению с методом Ритца можно указать на его медленную сходимость.

В заключение следует еще упомянуть метод Бубнова — Галёркина *)⁸⁾. Хотя он не связан прямым образом с вариационной задачей в смысле метода Ритца, но зато возможности его применения к различным областям физики (в том числе к нелинейным задачам) очень широки. Более полные сведения о нем содержатся в [B42].

Нужно также отметить, что все приближенные методы, обсуждавшиеся выше, базируются на том, что происходит уменьшение числа степеней свободы, и всегда приводят к вспомогательной системе, жесткость которой

*) Впервые идея этого метода была предложена И. Г. Бубновым в 1913 г. применительно к задачам теории упругости и затем развита в 1915 г. Б. Г. Галёркиным. Вообще этот метод может быть назван *проекционным методом*.

выше, чем жесткость действительной системы. Поэтому деформации, приближенно вычисляемые таким образом, всегда меньше истинных деформаций. Если затем по деформациям вычисляют напряжения, можно вообще не указывать характер ошибки.

6.4.2. Метод конечных элементов

В основе этого метода лежит дискретизация решаемой задачи, которая осуществляется иным способом, нежели в методе сеток. Классическим предшественником метода конечных элементов в теории упругости был приближенный метод на основе так называемой ферменной аналогии, которая была предложена Хренниковым [39] и Мак Генри [40].

При этом упругая пластина заменялась стержневой моделью, и напряженное состояние в упругой сплошной среде представлялось статически эквивалентными силами на концах стержней.

Применение к модели методов вычислений, используемых в строительной механике стержней, позволяет приближенно решать задачи теории пластин, дисков и оболочек. После того как приблизительно с начала 50-х гг. стали появляться быстродействующие вычислительные машины, начали развиваться матричные методы в статике упругих систем для расчета сложных конструкций. Возникли различные вычислительные методы для анализа многократно статически неопределимых систем. Аргирис [В19] в особенности довел методы перемещений и сил в матричной форме до эффективных общих вычислительных методов расчета статики и динамики сложных систем (например, конструкций самолетов). Примерно к тому же времени относится обобщение этих методов благодаря идее расчленения сплошной среды на конечное множество частей с последующим применением к ним вычислительных матричных методов. В различных работах [41, 42] впервые появилось понятие «конечного элемента» и последовало применение метода сначала к плоским задачам теории упругости с использованием треугольных или прямоугольных конечных элементов⁹⁾.

Чтобы ясно представлять суть метода конечных элементов, обсудим прежде всего на примере плоской задачи теории упругости так называемый *метод перемещений*, который был развит чисто интуитивно из матричных методов статики упругих систем. Затем будет еще показано, что метод конечных элементов в качестве вариационного метода получает строгое механико-математическое обоснование.

6.4.2.1. Метод конечных элементов в форме метода перемещений. Рассмотрим двумерную плоскую задачу, причем введем простейший способ записи координат $x_1 = x$, $x_2 = y$, перемещений $u_1 = u$, $u_2 = v$ и напряжений $\sigma_{11} = \sigma_{xx}$, $\sigma_{22} = \sigma_{yy}$, $\sigma_{12} = \tau_{xy}$.

Рассматриваемая сплошная среда, согласно рис. 6.1, расчленяется воображаемыми линиями на конечные элементы произвольной формы (например, треугольники). Они могут иметь отнюдь не одинаковые размеры или форму и ограничиваться прямыми или кривыми линиями.

Отдельные элементы связаны друг с другом в конечном множестве узловых точек. Узловые точки в простейшем случае располагаются в вершинах элементов, но для сложных конечных элементов могут лежать на сторонах элемента.

В качестве основных независимых переменных рассматриваются перемещения узловых точек («метод перемещений»), а деформации отдельных элементов и нагрузки на них приближенно могут быть выражены через перемещения узловых точек и приложенные к ним силы. Таким образом строится идеализированная сплошная среда, физические свойства которой определяются так, чтобы они возможно ближе соответствовали свойствам реальной сплошной среды. На основе аппроксимаций для отдельных элементов получается приближенное решение для всей идеализированной области.

Так как истинные деформации конечного элемента неизвестны, для перемещений принимают простые функции, с помощью которых поле перемещений представляется через перемещения узловых точек. Простей-

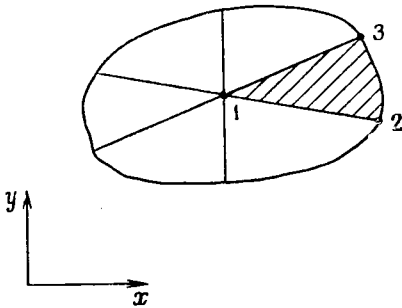


Рис. 6.1. Разбиение плоского диска на конечные элементы (узлы 1, 2, 3).

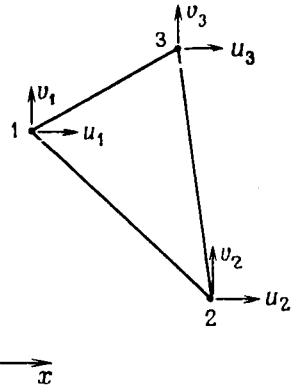


Рис. 6.2. Перемещения узлов в простом треугольном элементе.

шие возможные формулы для перемещений задаются в виде линейных зависимостей от координат *)

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad v(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y, \quad (6.25)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ — константы. Отсюда для простого треугольного элемента (рис. 6.2), обозначая координаты узлов через x_i, y_i ($i = 1, 2, 3$), получим перемещения узловых точек в виде

$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i, \quad v_i = \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i. \quad (6.26)$$

При построении метода конечных элементов весьма целесообразна матричная форма записи. Перемещения любой точки внутри элемента определяются матрицей-столбцом u , переме-

*) Эти формулы учитывают одновременно возможные движения элемента как твердого тела, которые не сопровождаются деформациями.

щения каждой узловой точки — матрицей \mathbf{d}_i ; для простого треугольного элемента они описываются матрицей-столбцом \mathbf{d} :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix}.$$

Формула перемещений может быть представлена в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}, \quad (6.27)$$

где \mathbf{N} — матрица функций формы. Простые вычисления для функций формы дают

$$N_i = (1/2A)(a_i + b_i x + c_i y), \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad b_1 = y_2 - y_3, \quad c_1 = x_3 - x_2 \text{ и т. д.},$$

причем A — площадь треугольника. Видно, что перемещения внутри каждого элемента однозначно выражаются через перемещения узловых точек и обеспечена совместность перемещений на границе двух соседних элементов.

Формула для перемещений в форме (6.27) справедлива, вообще говоря, как для плоского, так и для пространственного элементов с произвольным числом узловых точек, если соответствующим образом расширить матрицы. Деформации находятся дифференцированием перемещений и равны

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d}, \quad (6.28)$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Матрицей-столбцом

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

описываются компоненты напряжений, связанные с деформациями согласно закону Гука

$$\sigma = E\epsilon, \quad (6.29)$$

причем, например, для плоского напряженного состояния (см. п. 8.1.2)

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}.$$

Поэтому связь между напряжениями и перемещениями узлов будет иметь вид

$$\sigma = E\epsilon = Ebd = Sd, \quad (6.30)$$

где S — матрица напряжений.

Теперь поле деформаций элемента приближенно представляется через перемещения узловых точек и соответствующие силы, действующие в узлах (узловые силы). Каждая узловая сила F_i (для простого треугольного элемента) имеет такое же число компонент, как соответствующее узловое перемещение d_i . Кроме того, компоненты F_i и d_i должны совпадать по одинаковым направлениям. Для элемента справедливы соотношения

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3), \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

Узловые силы статически эквивалентны напряжениям в элементе. Для их определения рассматриваются уравнения равновесия элемента. При отсутствии объемных и поверхностных сил узловые силы являются единственными внешними нагрузками, приложенными к элементу *).

Для записи условий равновесия можно использовать, например, равенство работ **) внешних и внутренних сил, т. е.

$$\frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{F} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{e}^T \sigma dV. \quad (6.32)$$

С учетом (6.28) и (6.29) получим

$$\mathbf{e}^T \sigma = (\mathbf{Bd})^T Ebd,$$

и, следовательно ***) ,

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{B}^T E \mathbf{B} dV d. \quad (6.33)$$

*) В противном случае узловые силы должны определяться из условия статической эквивалентности объемным и поверхностным силам.

**) Символ \mathbf{d}^T означает матрицу, транспонированную к \mathbf{d} .

***) Следует принять во внимание правило действий над матрицами $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$.

Это соотношение, связывающее внешние силы с перемещениями, зависит от жесткости элемента. Его записывают в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{k}\mathbf{d}, \quad (6.34)$$

где

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (6.35)$$

— матрица жесткости элемента; она всегда симметрична. Соотношения (6.33)—(6.35) справедливы вообще для элемента произвольной формы и для произвольной формулы перемещений.

Для простого треугольного элемента при линейном распределении перемещений матрица \mathbf{B} постоянна и матрица жесткости для элемента постоянной толщины t с площадью треугольника A получается равной $\mathbf{k} = At\mathbf{B}^T\mathbf{E}\mathbf{B}$.

После того как получены матрицы жесткости для всех элементов, составляется общее соотношение между усилиями и перемещениями для всей идеализированной среды*). Для обеспечения равновесия всего тела формулируются условия равновесия для каждой узловой точки. Прежде всего перемещения всех узловых точек располагаются в виде матрицы-столбца

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \end{bmatrix}, \quad \text{где } \mathbf{r}_i = \mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, m,$$

причем m — общее число узлов. Оно связано с нумерацией узловых точек элемента, так что перемещения каждого узла встречаются в матрице-столбце \mathbf{r} только один раз. Внешние нагрузки, которые должны быть приложены только в узлах, описываются матрицей-столбцом

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_m \end{bmatrix}, \quad \text{где } \mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} R_{xi} \\ R_{yi} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, m.$$

*) При расчете характеристик элемента чаще всего применяют местную систему координат для каждого элемента. Рассмотрение всего тела происходит относительно соответствующей глобальной системы координат. Поэтому должны использоваться необходимые для этого формулы преобразования координат.

Тогда, используя соотношения между силами и перемещениями для каждого элемента (n — число конечных элементов)

$$\mathbf{F}^{(j)} = \mathbf{k}^{(j)} \mathbf{d}^{(j)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

и составляя условия равновесия для всех узлов

$$\sum_j \mathbf{F}_i^{(j)} = \mathbf{R}_i, \quad j = 1, \dots, m, \quad (6.36)$$

окончательно получают общее соотношение, связывающее усилия и перемещения для всего тела

$$\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{R}, \quad (6.37)$$

причем суммирование в (6.36) распространяется на все элементы, связанные друг с другом в соответствующих узловых точках, и внутренние узловые силы при этом обращаются в нуль.

Входящая в (6.37) общая матрица жесткости \mathbf{K} также всегда симметрична и образуется наложением матриц жесткости элементов путем суммирования согласно (6.36).

Построенная таким образом общая матрица жесткости сингулярна^{*}, так как общим соотношением (6.37) описывается поведение идеализированной сплошной среды как твердого тела, перемещения узлов которого никоим образом не ограничены. Постановка подходящих граничных условий и условий опирания позволяет получить так называемую редуцированную матрицу жесткости $\mathbf{K}_{\text{ред}}$, которая является невырожденной и может быть обращена.

Решение системы уравнений, определяемых соотношением (6.37), формально представляется в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}_{\text{ред}}^{-1} \mathbf{R}. \quad (6.38)$$

Зная перемещения узловых точек, можно далее с помощью выражений (6.28) и (6.30) вычислить приближенные значения деформаций и напряжений в каждом элементе.

Общее решение задач теории упругости сводится к последовательности вычислительных процедур матричной алгебры, которые подходящим образом могут быть запрограммированы для реализации на вычислительной машине. Как и другие численные методы, метод конечных элементов сводится к решению больших систем уравнений с многими неизвестными. Для этого разработаны многочисленные алгоритмы (прямые или итерационные методы вычислений).

6.4.2.2. Метод конечных элементов как вариационный метод. Методом конечных элементов в форме метода перемещений,

^{*} Это означает, что определитель матрицы обращается в нуль, поэтому нельзя образовать обратную матрицу.

описанным в предыдущем разделе, на начальном этапе его применения к задачам теории упругости были достигнуты заслуживающие внимания результаты, хотя было мало оценок сходимости метода.

После того как на многих задачах была показана пригодность метода конечных элементов, стали обсуждаться лежащие в основе метода связи с энергетическими принципами. Обнаружилась ясная связь метода конечных элементов с классическим методом Ритца. Это привело к общим и далеко идущим постановкам, кроме того, метод получил строгое математическое и механическое обоснование и к нему могут быть применены общие теоремы о сходимости (см. [43, 44]).

Для тела в целом справедлива формула для перемещений всех элементов

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{r}, \quad (6.39)$$

которая обеспечивает на границах элементов совместность перемещений. В \mathbf{r} входят перемещения всех узловых точек, матрица $\tilde{\mathbf{N}}$ содержит в качестве подматриц все матрицы функций формы отдельных элементов.

Для приближенного удовлетворения уравнений равновесия может быть использован принцип минимума полной потенциальной энергии (см. § 4.4), и вновь получены общие соотношения между усилиями и перемещениями для рассматриваемой среды.

Из (6.39) получаем соотношения для деформаций и напряжений

$$\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{r} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{r}. \quad (6.40)$$

Внешние силы, которые должны быть приложены только в узловых точках, вновь описываются матрицей-столбцом \mathbf{R} . В этом случае полная потенциальная энергия (объемными силами пренебрегается), согласно (4.37), в матричной форме запишется так:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{e}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \mathbf{r}^T \mathbf{R},$$

или с учетом (6.40)

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r}^T \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{E}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{r} dV - \mathbf{r}^T \mathbf{R}. \quad (6.41)$$

Это означает, что потенциальная энергия приближенно выражается через перемещения узловых точек конечных элементов.

Неизвестные параметры в формуле для перемещений (6.39), т. е. узловые перемещения, определяются из условия минимума

приближенного выражения для потенциальной энергии (6.41) (m — число узловых точек), т. е.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}_m} \end{bmatrix} = 0.$$

В результате с помощью общей матрицы жесткости

$$\mathbf{K} = \int_V \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{B}} dV$$

вновь получают основные уравнения (6.37) для вычисления неизвестных узловых перемещений.

Возможна иная формулировка метода конечных элементов, следующая из представления о том, что для любого точного или приближенного метода решения задачи теории упругости должны быть удовлетворены уравнения равновесия и условия совместности. В изложенном выше *методе перемещений* распределение перемещений предполагается таким, что совместность их обеспечивается, поэтому при приближенном решении уравнения равновесия удовлетворяются неточно.

В вариационной формулировке, двойственной с рассмотренной и называемой *методом сил*, принимается распределение напряжений в пределах каждого элемента, удовлетворяющее уравнениям равновесия. Кинематические условия совместности удовлетворяются приближенно с помощью *принципа возможных сил*, т. е. минимизацией дополнительной потенциальной энергии.

Как видно, оба классических функционала (4.37) и (4.49), обсуждавшиеся в п. 4.4.1 и 4.4.2, могут быть положены в основу вариационной формулировки метода конечных элементов.

Дальнейшее развитие метода конечных элементов связано с так называемым *гибридным методом напряжений*. Для каждого элемента применяются формулы для напряжений, которые удовлетворяют уравнениям равновесия элемента. Независимо от этого выбираются формулы для перемещений, обеспечивающие совместность перемещений на границах элементов, причем распределение перемещений на границах должно однозначно устанавливаться по перемещениям узловых точек. При вариационной формулировке оперируют принципами минимума потенциальной энергии и минимума дополнительной энергии деформации или расширенным вариационным принципом (привлекается модифицированный принцип дополнительной энергии Пиана [44, 45]).

В некоторых случаях гибридный метод в отношении вычислительных затрат и достигаемой точности оказывается лучше, чем метод перемещений, однако это случается далеко не всегда.

Подводя итог сказанному, можно констатировать, что сегодня методом конечных элементов могут быть решены с большой точностью многие плоские и пространственные задачи теории упругости, причем иногда применяются очень сложные деформируемые плоские или трехмерные конечные элементы. Нужно упомянуть также широкую применимость метода, которая выходит далеко за рамки линейной теории упругости.

6.4.3. Метод граничных интегральных уравнений (метод граничных элементов)

Речь идет также о методе дискретизации, который появился в последнее время наряду с методом конечных элементов и успешно применяется для решения задач теории упругости. Суть метода состоит в том, что основные уравнения теории упругости, которые описывают поведение неизвестных функций внутри и на границе рассматриваемой области, сводятся к интегральному уравнению. Неизвестные граничные значения связаны с известными значениями на контуре области через граничное интегральное уравнение. Впервые этот подход был применен к решению задачи кручения с помощью так называемых прямых методов теории потенциала (см. [46])¹⁰⁾. Развитием этой работы явился метод интегральных уравнений Риццо [47] для плоских задач теории упругости, который позднее был распространен Крузом [48] на пространственные задачи. О дальнейших деталях применения метода можно узнать из новейшей литературы (см., например, [49, 50]). Однако следует упомянуть об особом преимуществе метода граничных интегральных уравнений. А именно, в отличие от метода конечных элементов в методе граничных интегральных уравнений должна дискретизироваться только поверхность рассматриваемого упругого тела. Благодаря этому получается существенно меньше узловых точек и подлежащих определению неизвестных, чем в сетке из конечных элементов. Аппроксимация и решения строятся только для поверхностных величин, поэтому пространственная задача сводится к рассмотрению поверхности, т. е. размерность задачи уменьшается на единицу.

Не останавливаясь подробно на деталях численной процедуры, отметим, что хотя система алгебраических уравнений в методе граничных интегральных уравнений существенно меньше, чем в аналогичных задачах, решаемых методом конечных элементов, но матрица коэффициентов системы уравнений оказывается полной, несимметричной, а также не обязательно положительно определенной. Правда, путем разбиения на подобласти можно привести матрицу коэффициентов к ленточной структуре, так что принципиально возможно решение задачи с произвольным числом степеней свободы.

С полным правом можно сказать, что метод конечных элементов и метод граничных интегральных уравнений относятся к наиболее эффективным приближенным численным методам, которыми мы сегодня располагаем, и что оба метода дополняют друг друга и лучше всего комбинировать их в приложениях. Оба метода решения предполагают, однако, наличие мощных вычислительных машин¹¹⁾.

В заключение следует еще отметить, что как методы конечных элементов и граничных интегральных уравнений, так и различные другие обсуждавшиеся выше приближенные методы могут классифицироваться как частные случаи методов, называемых сегодня *проекционными* (см. [B23]).

Одномерные задачи: осевое нагружение, изгиб и кручение призматического стержня

В технических приложениях теории упругости важное место занимают одномерные твердые тела. Речь идет о телах, которые являются существенно протяженными только в одном направлении и размеры поперечного сечения которых малы по сравнению с длиной. Такие призматические тела с прямой осью и постоянным поперечным сечением произвольной формы называются *стержнями*. Они являются не только простейшими, но также и важнейшими элементами строительных конструкций, и для них уже давно были получены простейшие приближенные решения.

§ 7.1. Задача Сен-Венана для однородного призматического тела (цилиндра)

Вместо произвольных координат x_i ($i = 1, 2, 3$) в этом параграфе опять будут применяться обозначения $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ и т. д.

Рассмотрим призматическое тело длиной l , к которому в концевых сечениях приложены равнодействующие силы Q_x , Q_y , F_z и моменты M_x , M_y , M_z (рис. 7.1). Задание равнодействующей силы и момента на одном конце призматического тела определяет также соответствующие величины на другом конце, так как при нагружении должны быть в равновесии различные элементы тела и должны удовлетворяться условия равновесия твердого тела в целом. Объемные силы не учитываются, боковая поверхность призматического тела считается свободной от внешних нагрузок.

Сформулированная таким образом задача по Клебшу называется задачей Сен-Венана и в общей трехмерной постановке является одной из труднейших в теории упругости. Преодоление математических трудностей возможно с помощью принципа Сен-Венана (см. § 6.1); при этом в качестве метода решения напришивается так называемый полуобратный метод.

Простейший (почти тривиальный) случай имеет место при нагружении осевой растягивающей или сжимающей силой; в

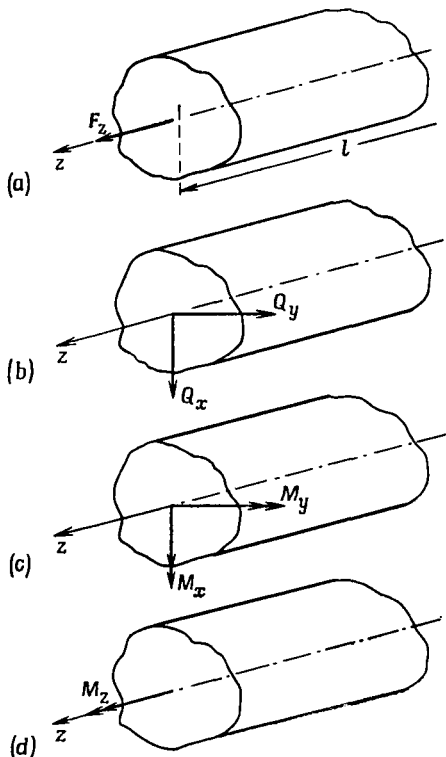


Рис. 7.1. Нагрузки в конечном поперечном сечении призматического стержня в задаче Сен-Венана.

случае нагружения приложенными в конечных сечениях изгибающими моментами M_x и M_y имеет место так называемый *чистый изгиб*, в то время как при нагружении силами Q_x и Q_y речь идет о *поперечном изгибе*. При приложении момента M_z призматическое тело нагружается *чистым кручением* (депланации ничто не препятствует). Все эти случаи (рис. 7.1) имеют большое практическое значение, элементарны и обсуждаются в теории сопротивления материалов.

Впервые решение было получено Сен-Венаном с помощью полуобратного метода. Предположения относительно напряжений таковы, что удовлетворяются все уравнения, а именно: уравнения равновесия, кинематические уравнения, закон Гука, граничные условия на боковой поверхности и в торцевых поперечных сечениях, условия совместности.

Если рассматриваемое призматическое тело предполагается достаточно длинным по сравнению с линейными размерами по-

перечного сечения, не нужно знать точное распределение напряжений в концевых поперечных сечениях. Достаточно знания величины равнодействующих силы и момента, которые там приложены, так как именно они определяют решение во всем теле, за исключением малых областей вблизи концевых поперечных сечений. Во многих практически важных случаях фактическое распределение напряжений в местах приложения нагрузки вообще неизвестно, поэтому решение может быть распространено на многочисленные возможные случаи нагружения с помощью принципа Сен-Венана.

Прежде всего подробно запишем в соответствующей форме основные уравнения, которые должны быть удовлетворены (при $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ и т. д.):

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{7.1}$$

Кинематические уравнения после подстановки в них закона Гука

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \text{ и т. д.,}\tag{7.2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} \text{ и т. д.}$$

(круговая перестановка индексов).

Граничные условия на боковой поверхности *)

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) &= 0, \\ \tau_{yx} \cos(n, x) + \sigma_{yy} \cos(n, y) &= 0, \\ \tau_{zx} \cos(n, x) + \tau_{zy} \cos(n, y) &= 0.\end{aligned}\tag{7.3}$$

Пусть далее в концевых поперечных сечениях $z=0$, $z=l$ напряжения $\tau_{zx}(x, y)$, $\tau_{zy}(x, y)$, $\sigma_{zz}(x, y)$ являются заданными функциями от x и y .

*) Направляющие косинусы соответствуют компонентам нормального единичного вектора.

Условия совместности, выраженные в напряжениях (уравнения Бельтрами)

$$\Delta\sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0 \text{ и т. д.}, \quad (7.4)$$

$$\Delta\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} = 0 \text{ и т. д.}$$

(круговая перестановка индексов).

Допущение Сен-Венана для решения задачи, показанной на рис. 7.1, означает, что волокна в направлении продольной оси стержня (тонкие продольные призмочки) не оказывают друг на друга никакого поперечного давления (т. е. не вызывают поперечного растяжения) и не передают в поперечном направлении никаких сдвигающих сил. Это означает, что можно положить*)

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0. \quad (7.5)$$

Соотношения для равнодействующих силы и момента в конечном поперечном сечении с площадью A имеют вид

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_A \tau_{zx} dA, \quad Q_y = \int_A \tau_{zy} dA, \quad F_z = \int_A \sigma_{zz} dA, \\ M_x &= \int_A \sigma_{zz} y dA, \quad M_y = - \int_A \sigma_{zz} x dA, \quad M_z = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Ниже будут рассмотрены прежде всего простейший случай осевого растяжения или сжатия, сразу после этого чистый изгиб и свободное кручение и, наконец, поперечный изгиб.

§ 7.2. Осевое нагружение

Для равнодействующей осевых сил справедливо равенство

$$F_z = \int_A \sigma_{zz} dA = \int_A p_z(x, y) dA, \quad (7.7)$$

причем, согласно принципу Сен-Венана, возможны различные распределения $p_z(x, y)$ в конечном поперечном сечении (рис. 7.2). Поскольку эти распределения напряжений, фигури-

*) Эквивалентное допущение (по Фойгту или Мичеллу), которое приводит к тем же результатам, заключается в том, что напряженное состояние не зависит от продольной координаты (при осевом нагружении, чистом изгибе и кручении) или зависит от нее линейно (при поперечном изгибе).

рующие под знаком интеграла (7.7), дают одну и ту же равнодействующую силу, речь идет о статически эквивалентной системе сил в смысле принципа Сен-Венана.

При простейшем распределении, показанном на рис. 7.2(а), для $z=l$ имеем $\sigma_{zz} = F_z/A = \text{const}$, $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$. Если ось z проходит через центр тяжести поперечного сечения, то, согласно (7.6), для моментов получится $M_x = M_y = M_z = 0$, так как

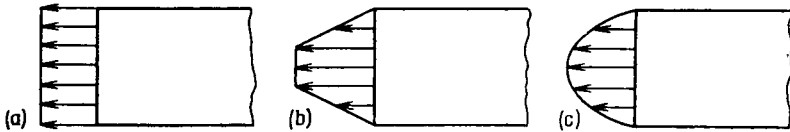


Рис. 7.2. Различные возможные распределения напряжений в конечном поперечном сечении при осевом нагружении.

тогда для так называемого статического момента поперечного сечения справедливо равенство

$$\int_A x dA = \int_A y dA = 0.$$

Уравнения равновесия (7.1), а также граничные условия (7.3), как легко видеть, удовлетворяются. Из (7.2) следует

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_{zz}}{E}.$$

или после интегрирования для перемещений

$$u = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz} x, \quad v = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz} y, \quad w = \frac{\sigma_{zz}}{E} Z, \quad (7.8)$$

причем перемещениями стержня как твердого тела пренебрегают. Далее следует $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$.

Так как основные уравнения удовлетворены, то имеет место точное решение задачи в смысле Сен-Венана. Рассмотренный случай так называемого одноосного растяжения играет очень важную роль для приложений. Независимо от действующей нагрузки в длинном стержне при достаточном удалении от мест приложения нагрузки устанавливается однородное напряженное состояние $\sigma_{zz} = \text{const}$.

Если форма поперечного сечения изменяется скачкообразно, например вследствие сверления или насечки, то нарушается равномерное распределение напряжений и тогда в поперечном сечении возникает концентрация напряжений. Однако так называемое влияние надреза (см., например, [B14 — B16]) носит местный характер, при этом справедлив закон затухания Нейбера.

При изменении направления осевой силы F_x на противоположное получается нагружение призматического стержня сжатием.

В технических приложениях учитывают, что в прямолинейном сжатом стержне равновесное состояние может стать неустойчивым. Существует опасность выпучивания (потери устойчивости), которое должно быть исследовано отдельно. Этим занимается теория устойчивости, которая, однако, в данной книге не обсуждается.

§ 7.3. Чистый изгиб

Прежде всего будем предполагать, что поперечное сечение стержня произвольное и несимметричное. Этот случай соответствует так называемому косому изгибу. Пусть в конечном по-

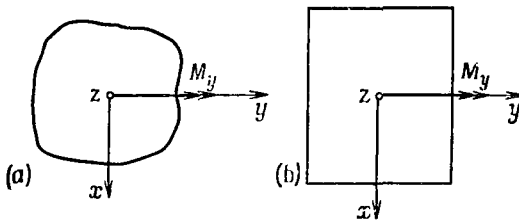


Рис. 7.3. Нагрузка в конечном поперечном сечении при чистом изгибе: (а) произвольное поперечное сечение, (б) поперечное сечение с двумя осями симметрии.

перечном сечении $z = l$ действует равнодействующий момент относительно оси y (рис. 7.3(а))

$$M_y = M = - \int_A \sigma_{zz} x \, dA, \quad (7.9)$$

а все остальные равнодействующие силы и моменты обращаются в нуль, так как $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$. При допущении о линейном распределении напряжений

$$\sigma_{zz} = ax + by \quad (a = \text{const}, \quad b = \text{const}) \quad (7.10)$$

уравнения равновесия (7.1), а также граничные условия (7.3) тождественно удовлетворяются. Если доказать, что распределение напряжений (7.10) дает нагрузку в конечном поперечном сечении, которая статически эквивалентна моменту M , то получим точное решение задачи изгиба.

Если ось z центральная, то соотношения (7.16) дают

$$Q_x = Q_y = 0, \quad F_z = a \int_A x \, dA + b \int_A y \, dA = 0 \quad (7.11)$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} M_x &= a \int_A xy \, dA + b \int_A y^2 \, dA = 0, \\ -M_y &= a \int_A x^2 \, dA + b \int_A xy \, dA = -M, \quad M_z = 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Из (7.12) для определения констант a и b имеем соотношения

$$-aJ_{xy} + bJ_{xx} = 0, \quad aJ_{yy} - bJ_{xy} = -M, \quad (7.13)$$

где величины

$$J_{xx} = \int_A y^2 \, dA, \quad J_{yy} = \int_A x^2 \, dA, \quad J_{xy} = J_{yx} = - \int_A xy \, dA$$

означают осевые моменты инерции и соответственно центробежный момент инерции поперечного сечения площадью A . Для коэффициентов a и b получаются выражения

$$a = - \frac{J_{xx}}{J_{xx}J_{yy} - J_{xy}^2} M, \quad b = - \frac{J_{xy}}{J_{xx}J_{yy} - J_{xy}^2} M, \quad (7.14)$$

и, таким образом, распределение напряжений имеет вид

$$\sigma_{zz} = - \frac{J_{xx}x + J_{xy}y}{J_{xx}J_{yy} - J_{xy}^2} M. \quad (7.15)$$

В дальнейшем будет рассматриваться случай, когда оси x и y являются главными осями поперечного сечения при из-

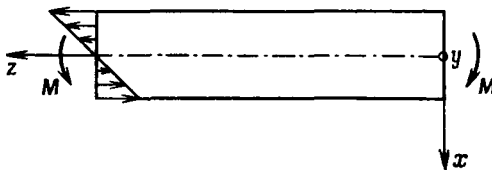


Рис. 7.4. Линейное распределение напряжений при чистом изгибе.

гибе, т. е. когда центробежный момент J_{xy} обращается в нуль (рис. 7.3(b)). Тогда выражение (7.15) упрощается и принимает вид

$$\sigma_{zz} = - (M/J_{yy}) x. \quad (7.16)$$

Как видно, в каждом поперечном сечении имеет место не зависящее от z линейное распределение нормальных напряжений (рис. 7.4), равнодействующая которых в концевом поперечном сечении статически эквивалентна моменту M . Волокна стержня при $x < 0$ удлиняются, при $x > 0$ укорачиваются. Между ними в плоскости y, z находится так называемый нейтральный слой, который остается недеформированным.

7.3.1. Деформации при чистом изгибе

Для деформаций из (7.2) следуют равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\nu M}{EJ_{yy}} x, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{M}{EJ_{yy}} x, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Отсюда интегрированием можно получить перемещения. Прежде всего из второго или пятого и четвертого соотношений (7.17) получим

$$w = -\frac{M}{EJ_{yy}} xz + w_0(x, y) \quad (7.18)$$

или

$$u = \frac{M}{2EJ_{yy}} z^2 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + u_0(x, y), \quad v = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} + v_0(x, y), \quad (7.19)$$

где $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w_0(x, y)$ — произвольные функции интегрирования. Первое соотношение (7.17) и (7.19) дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\nu M}{EJ_{yy}} x = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\nu M}{EJ_{yy}} x = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

и видно, что

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0. \quad (7.21)$$

После интегрирования выражений (7.20) получаем

$$u_0 = \frac{\nu M}{2EJ_{yy}} x^2 + f_2(y), \quad v_0 = \frac{\nu M}{EJ_{yy}} xy + f_1(x). \quad (7.22)$$

Далее из (7.19) следует

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x},$$

и с учетом (7.22) из третьего соотношения (7.17) вытекает

$$-2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\nu M}{EJ_{yy}} y + \frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dy} = 0. \quad (7.23)$$

Так как в (7.23) только первый член зависит от z , должно выполняться условие

$$\partial^2 w_0 / \partial x \partial y = 0, \quad (7.24)$$

и поэтому равенство (7.23) примет вид

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\nu M}{EJ_{yy}} y = -\frac{df_1}{dx}.$$

Левая и правая части этого выражения должны быть равны одной и той же константе γ_1 , т. е.

$$\frac{df_1}{dx} = -\gamma_1, \quad \frac{df_2}{dy} = -\frac{\nu M}{EJ_{yy}} y + \gamma_1,$$

или после интегрирования

$$f_1(x) = -\gamma_1 x + \delta, \quad f_2(y) = -\frac{\nu M}{2EJ_{yy}} y^2 + \gamma_1 y + \gamma. \quad (7.25)$$

Из (7.21) и (7.24) следует $w_0 = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta$, а из (7.22) и (7.25) имеем

$$u_0 = \frac{\nu M}{2EJ_{yy}} (x^2 - y^2) + \gamma_1 y + \gamma, \quad v_0 = \frac{\nu M}{EJ_{yy}} xy - \gamma_1 x + \delta.$$

В результате для перемещений в соответствии с (7.18) получаем равенства

$$\begin{aligned} u &= \frac{M}{2EJ_{yy}} [\nu(x^2 - y^2) + z^2] + \gamma_1 y - \beta_1 z + \gamma, \\ v &= \frac{\nu M}{EJ_{yy}} xy - \gamma_1 x - \beta_2 z + \delta, \\ w &= -\frac{M}{EJ_{yy}} xz + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Появляющиеся в (7.26) произвольные постоянные и члены, линейно зависящие от координат, соответствуют перемещениям и повороту всего стержня как твердого тела. Они исключаются при выполнении условий $u = v = w = 0$, $\partial u / \partial z = \partial v / \partial z = \partial w / \partial x = 0$ для $x = y = z = 0$, и окончательно перемещения принимают вид

$$\begin{aligned} u &= \frac{M}{2EJ_{yy}} [\nu(x^2 - y^2) + z^2], \\ v &= \frac{\nu M}{EJ_{yy}} xy, \quad w = -\frac{M}{EJ_{yy}} xz. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Точки на оси стержня ($x = y = 0$) переходят в

$$x^* = x + u, \quad y^* = y + v, \quad z^* = z + w,$$

т. е.

$$x^* = \frac{M}{2EJ_{yy}} z^2, \quad y^* = 0, \quad z^* = z,$$

и лежат в плоскости x, z (так называемой *плоскости изгиба*).

Уравнение деформированной оси стержня (так называемой *упругой линии*) имеет вид

$$x^* = \frac{M}{2EJ_{yy}} z^{*2}. \quad (7.28)$$

Упругая линия есть парабола, кривизна k которой (радиус кривизны R) равна

$$= \frac{1}{R} = \frac{d^2 x^* / dz^*}{[1 + (dx^* / dz^*)^2]^{3/2}},$$

или для $dx^* / dz^* \ll 1$ приближенно

$$k = \frac{1}{R} = \frac{d^2 x^*}{dz^{*2}}. \quad (7.29)$$

Поэтому для малых углов наклона

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 x^*}{dz^{*2}} = \frac{M}{EJ_{yy}}.$$

Это выражение соответствует уравнению упругой линии, которое устанавливается в элементарной теории изгиба балок (и иногда называется законом Бернулли — Эйлера о пропорциональности между кривизной и изгибающим моментом). Лежащая в основе этой теории гипотеза Бернулли о поперечном сечении, остающемся плоским после деформации, вытекает, таким образом, из полученного выше общего решения теории упругости.

Для поперечного сечения $z = c$ стержня после деформации имеем

$$z^* = c + w = c \left(1 - \frac{M}{EJ_{yy}} x \right),$$

или для $x \approx x^*$ (малые деформации)

$$z^* = c \left(1 - \frac{M}{EJ_{yy}} x^* \right) = c \left(1 - \frac{x^*}{R} \right).$$

При изгибе в двух плоскостях (нагрузкой в виде изгибающих моментов M_x и M_y относительно главных осей согласно рис. 7.5), который соответствует произвольному положению равнодействующей вектора момента,

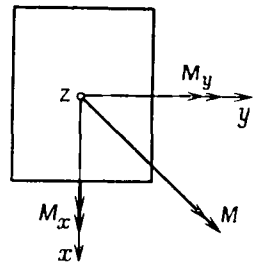


Рис. 7.5. Нагрузка в концевом поперечном сечении при двухосном (косом) изгибе относительно главных осей.

решение получается наложением приведенных выше соотношений.

В общем случае несимметричного поперечного сечения (см. рис. 7.3(а)) при распределении напряжений (7.15) вместо (7.27) справедливы следующие выражения для перемещений:

$$u = -\frac{a}{2} \frac{z^2}{E} - \frac{\nu}{E} \left[\frac{a}{2} (x^2 - y^2) + bxy \right],$$

$$v = -\frac{b}{2} \frac{z^2}{E} - \frac{\nu}{E} \left[axy + \frac{b}{2} (y^2 - x^2) \right],$$

$$w = \frac{1}{E} (ax + by) z,$$

причем константы a и b определяются согласно (7.14).

Прежде чем излагать общий случай поперечного изгиба стержня, следует сначала обсудить нагружение призматического стержня кручением, так как результаты решения задачи кручения используются при поперечном изгибе.

§ 7.4. Кручение призматического стержня

7.4.1. Основные положения

Решение задачи кручения призматического стержня с круговым или кольцевым поперечным сечением было получено Кулоном.

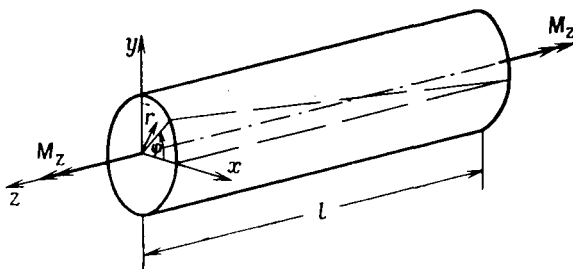


Рис. 7.6. Чистое кручение стержня кругового поперечного сечения.

Чистое (или свободное) кручение возникает при приложении крутящих моментов M_z в концевых поперечных сечениях (рис. 7.6). При этом в произвольном поперечном сечении будут действовать только касательные напряжения. Основные допущения, которые положены в основу решения, состоят в следующем:

— поперечные сечения поворачиваются как жесткие диски, не деформируясь,

— поперечные сечения остаются при деформации плоскими, т. е. не появляется *депланация*.

Если через φ обозначить угол закручивания концевое поперечного сечения, то $\vartheta = d\varphi/dz$ — так называемый относительный угол закручивания (т. е. угол закручивания на единицу длины). Для чистого кручения с постоянным крутящим моментом на конце $M_z = M_T$

$$\vartheta = \varphi/l \quad (l \text{ — длина стержня}).$$

Наряду с основными допущениями (7.5), принимается также $\sigma_{zz} = 0$. Касательные напряжения равны

$$\tau_{zx} = -G\vartheta y, \quad \tau_{zy} = G\vartheta x, \quad (7.30)$$

равнодействующая касательных напряжений распределена вдоль радиуса по линейному закону и справедливо соотношение

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = G\vartheta \sqrt{x^2 + y^2} = G\vartheta r.$$

Для крутящего момента следует

$$M_T = G\vartheta J_p, \quad (7.31)$$

где $J_p = \int r^2 dA$ — полярный момент инерции поперечного сечения. Для тонкого кругового кольца (с внешним радиусом r_a и внутренним r_i) J_p следует принимать равным $J_p = (\pi/2)(r_a^4 - r_i^4)$.

При кручении тонкостенной трубы круговой формы (со средним радиусом a) касательные напряжения по толщине h распределены примерно постоянно, и крутящий момент будет равен

$$M_T = \oint \tau h r ds = 2\tau h A, \quad (7.32)$$

где A — площадь, ограниченная средним радиусом.

Если ввести *поток касательных напряжений* $t = \tau h$, то соотношение (7.32) будет справедливо и для тонкостенной скручиваемой трубы произвольной формы (рис. 7.7). Непрерывность потока касательных напряжений требует соблюдения условия $t = \text{const}$, и поэтому вновь справедливо равенство

$$t = M_T/2A, \quad (7.33)$$

где A означает площадь, ограниченную средней линией профиля. Толщина стенки h может быть переменной. Следует принять во внимание, что для произвольного профиля некруговой формы появляется *депланация* ω , которой нельзя воспрепят-

ствовать. Соотношение (7.33) известно в сопротивлении материалов как *первая формула Бредта*.

Вторая формула Бредта для вычисления относительного угла закручивания имеет вид

$$\vartheta = \frac{t}{2GA} \oint \frac{ds}{h} = \frac{M_T}{4GA^2} \oint \frac{ds}{h}. \quad (7.34)$$

Обе формулы Бредта справедливы также для поперечных сечений более сложного вида, чем двухсвязный контур, например

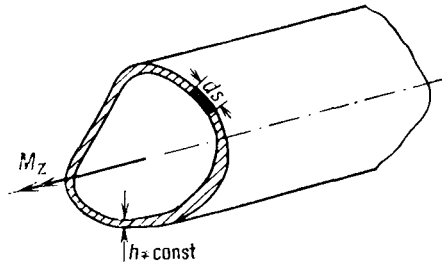


Рис. 7.7. Тонкостенная скручиваемая труба произвольного профиля.

для скручиваемых труб с внутренними поперечными ребрами (см., например, [A29]).

7.4.2. Некруговое поперечное сечение, функция депланации

Как и в элементарном случае кручения кругового цилиндрического стержня, в поперечном сечении появляются касательные напряжения τ_{zx} и τ_{zy} , нормальные напряжения σ_{zz} , по-прежнему равны нулю: $\sigma_{zz} = 0$.

Если деформирование может происходить беспрепятственно (кручение не стесненное), то при нагружении постоянным моментом M_z речь идет о чистом кручении*). Поперечное сечение поворачивается вновь, не деформируясь (т. е. форма поперечного сечения сохраняется), но появляются перемещения w в продольном направлении, т. е. депланация. При применении полуобратного метода исходят из формул для перемещений. Условия совместности удовлетворяются тогда автоматически и их привлекать не нужно.

При чистом кручении

$$\varphi = \vartheta z, \quad (7.35)$$

*) Если депланация ограничена, то, например, при жестком заземлении появляются изгибные напряжения, обусловленные кручением, и возникают дополнительные нормальные напряжения σ_{zz} в направлении оси стержня.

следовательно, поперечные сечения, находящиеся на равных расстояниях друг от друга, закручиваются на равные углы. Точка поперечного сечения P переходит в точку P' (рис. 7.8) и для перемещений справедливы формулы

$$-u = r \cos \alpha - r \cos(\alpha + \varphi), \quad v = r \sin(\alpha + \varphi) - r \sin \alpha,$$

соответственно для малого угла закручивания φ после линеаризации $u = -r \sin \alpha \cdot \varphi$, $v = r \cos \alpha \cdot \varphi$, или

$$u = -\varphi y = -\vartheta yz, \quad v = \varphi x = \vartheta xz. \quad (7.36)^*)$$

Для депланации принимается

$$\omega = \vartheta \phi(x, y); \quad (7.37)$$

она должна быть в каждом поперечном сечении одинаковой, иначе не обеспечивалась бы непрерывность материала. Функция $\phi(x, y)$ называется *функцией депланации*.

Из (7.36) и (7.37) для деформаций имеем

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \gamma_{xy} = 0,$$

остаются только

$$\begin{aligned} \gamma_{zx} &= \vartheta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right), \\ \gamma_{zy} &= \vartheta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right). \end{aligned} \quad (7.38)$$

С помощью закона Гука получают формулы для напряжений

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\vartheta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right), \\ \tau_{zy} &= G\vartheta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right). \end{aligned} \quad (7.39)$$

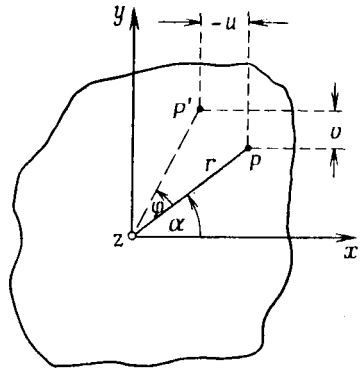


Рис. 7.8. Перемещения при кручении поперечного сечения произвольной формы.

Следовательно, определяющим является только чистый сдвиг $\tau_{zx}(x, y)$, $\tau_{zy}(x, y)$ во всех точках поперечного сечения, т. е. принятое выше основное допущение о закручивании поперечного сечения без деформаций получает дополнительное подтверждение.

Из уравнений равновесия остаются только

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0,$$

*) К этим соотношениям можно прийти непосредственно, если потребовать, чтобы компонента z вектора угловой скорости (см. п. 1.3.5) была равна углу закручивания φ . Условие $\omega_z = 1/2(\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)$ удовлетворяется при $u = -\varphi y$ и $v = \varphi x$.

а также

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0. \quad (7.40)$$

Из (7.40) с учетом (7.39) следует так называемое гармоническое уравнение Лапласа

$$\Delta \phi(x, y) = 0, \quad (7.41)$$

где

$$\Delta(\dots) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\dots)$$

— оператор Лапласа. Следовательно, показано, что функция депланации должна быть потенциальной (или гармонической функцией).

Согласно граничному условию, поверхность цилиндрического стержня должна быть свободной от нагрузки, поэтому касательное напряжение на границе τ_R должно быть направлено по касательной к граничному контуру (рис. 7.9). Из (7.3) с учетом (7.39) следует

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right) \cos(n, x) + \\ & + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right) \cos(n, y) = 0. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Выражение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cos(n, y) = \\ & = \frac{d\phi}{dn} \end{aligned} \quad (7.43)$$

называется *нормальной производной*. Поэтому граничное условие (7.42) запишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{d\phi}{dn} = [y \cos(n, x) - \\ & - x \cos(n, y)]_R. \end{aligned} \quad (7.44)$$

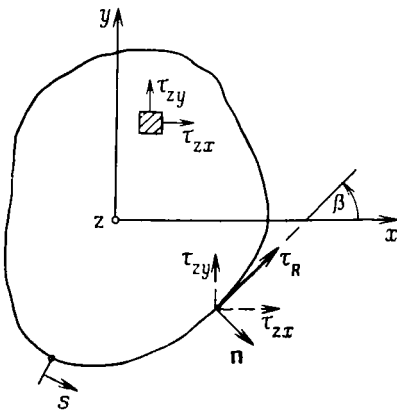


Рис. 7.9. К формулировке граничных условий при кручении.

Таким образом, задача кручения соответствует так называемой *краевой задаче Неймана* (или второй краевой задаче) теории гармонических функций (теории потенциала):

Требуется найти функцию депланации $\phi(x, y)$, которая внутри рассматриваемой области поперечного сечения является гармонической, по заданной на границе области нормальной производной.

По формуле Гаусса

$$\int_A \Delta \phi \, dA = \oint_R \frac{d\phi}{dn} \, ds, \quad (7.45)$$

и, ввиду того что $\Delta \phi = 0$ в A , для существования решения необходимо, чтобы

$$\oint_R \frac{d\phi}{dn} \, ds = 0. \quad (7.46)$$

Как видно, это условие удовлетворяется, если граничное условие подставить в (7.46) с учетом

$$\frac{dx}{ds} = \sin(n, x) = -\cos(n, y), \quad \frac{dy}{ds} = \cos(n, x). \quad (7.47)$$

Тогда

$$\oint_R \frac{d\phi}{dn} \, ds = \oint_R \left(y \frac{\partial y}{\partial s} + x \frac{\partial x}{\partial s} \right) ds = \oint_R d \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) = 0.$$

Впрочем, граничное условие (7.44) можно преобразовать. Так как $x dx + y dy$ есть полный дифференциал, то из вышеприведенного выражения следует

$$\frac{d\phi}{dn} = y \frac{\partial y}{\partial s} + x \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{d}{ds} (x dx + y dy) = \frac{d}{ds} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)_R, \quad (7.48)$$

т. е. касательная производная задается на границе функцией $(x^2 + y^2)/2$.

Легко видеть, что для равнодействующей напряжений на торцевой поверхности получается

$$\int_A \tau_{zx} \, dA = 0, \quad \int_A \tau_{zy} \, dA = 0; \quad (7.49)$$

далее равнодействующий крутящий момент выражается в виде

$$M_z = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) \, dA = G\theta \int_A \left(x^2 + y^2 + \frac{\partial \phi}{\partial y} x - \frac{\partial \phi}{\partial x} y \right) dA. \quad (7.50)$$

Из (7.50) после преобразования подынтегральной функции (см. [А30]) вытекает другая форма для M_z :

$$M_z = G\theta \left\{ J_p - \int_A \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dA \right\}.$$

Выражение (7.50) можно записать также в виде

$$M_z = M_T = G\theta J_T \quad (7.51)$$

и получить в результате обобщение элементарного соотношения (7.31). Величина J_T (которая, как известно, не тождественна полярному моменту инерции J_p) называется *постоянной кручения* *).

Таким образом, задача кручения стержня произвольного поперечного сечения полностью решена, если известна функция депланации $\phi(x, y)$. С учетом допущений о перемещениях показано, что основные уравнения полностью удовлетворены.

Прежде чем рассмотреть решения для различных частных видов поперечного сечения, целесообразно обсудить иную формулировку задачи кручения.

7.4.3. Функция кручения Прандтля

При альтернативной формулировке [51] получается упрощение граничных условий. Уравнение равновесия (7.40) можно тождественно удовлетворить с помощью функции напряжений $\psi(x, y)$ согласно формулам

$$\tau_{zx} = G\theta \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -G\theta \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (7.52)$$

Здесь $\psi(x, y)$ называется *функцией кручения Прандтля* **).

Если исключить из выражений (7.39) для напряжений функцию депланации $\phi(x, y)$, то прежде всего получим $\partial \tau_{zx} / \partial y - \partial \tau_{zy} / \partial x = -2G\theta$ и отсюда с учетом (7.52)

$$\Delta \psi(x, y) = -2, \quad (7.53)$$

т. е. функция кручения $\psi(x, y)$ должна удовлетворять неоднородному гармоническому уравнению Пуассона. Подставляя ее в граничное условие $\tau_{zx} dy - \tau_{zy} dx = 0$, получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0, \quad (7.54)$$

или

$$\psi_R = \text{const}. \quad (7.55)$$

Для односвязного сплошного поперечного сечения константа в (7.55) может быть произвольной, например ее можно положить равной нулю. Для многосвязного поперечного сечения (скручиваемый стержень с продольными сверлениями), напротив, ее можно считать произвольной только на одной границе. Легко убедиться в том, что равнодействующие напряже-

*) Произведение GJ_T в сопротивлении материалов называется *жесткостью при кручении*.

**) Впрочем, она получается как частный случай функции напряжений Максвелла (см. § 5.2).

ний τ_{zx} и τ_{zy} в торцевом сечении опять обращаются в нуль. Равнодействующий крутящий момент равен

$$\begin{aligned} M_z &= -G\theta \int_A \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} x + \frac{\partial \psi}{\partial y} y \right) dA = \\ &= -G\theta \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} (\psi x) + \frac{\partial}{\partial y} (\psi y) \right] dA + 2G\theta \int_A \psi dA, \end{aligned} \quad (7.56)$$

или после преобразования по формуле Гаусса

$$M_z = -G\theta \oint_R \psi [x \cos(n, x) + y \cos(n, y)] ds + 2G\theta \int_A \psi dA.$$

Первый интеграл обращается в нуль при $\psi_R = 0$ и остается

$$M_z = 2G\theta \int_A \psi(x, y) dA, \quad (7.57)$$

причем выражение

$$2 \int_A \psi(x, y) dA = J_T$$

соответствует постоянной кручения.

Следует заметить, что в задаче кручения положение начала координат в поперечном сечении несущественно (для малых углов закручивания в рамках линейной теории). Параллельный перенос оси стержня означает лишь перемещение скручиваемого стержня как твердого тела, которое не связано с появлением напряжений.

7.4.4. Связь между функцией депланации и функцией кручения Прандтля

Сравнивая (7.39) и (7.52), получим

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} - y = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} + x = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (7.58)$$

Функция депланации $\phi(x, y)$ представляет собой, как известно, гармоническую функцию. Для нее существует так называемая сопряженная гармоническая функция $\chi(x, y)$, причем они связаны условиями Коши — Римана, известными из теории аналитических функций

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \chi}{\partial x}. \quad (7.59)$$

Поэтому из (7.58) следует

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial x} - x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial y} - y. \quad (7.60)$$

После интегрирования интересующая нас связь может быть представлена в виде

$$\psi(x, y) = \chi(x, y) - \frac{x^2 + y^2}{2} + \text{const.} \quad (7.61)$$

Обе функции $\phi(x, y)$ и $\chi(x, y)$, являясь гармоническими функциями, представляют собой вещественную и мнимую части комплексной аналитической функции. Этот факт позднее еще будет использован.

На основании (7.61) задачу кручения можно сформулировать также следующим образом:

Требуется найти гармоническую функцию $\chi(x, y)$, которая принимает заданное значение на границе рассматриваемой области.

Следовательно, справедливо уравнение $\Delta\chi(x, y) = 0$ с граничным условием $\chi_R = (x^2 + y^2)/2 + \text{const.}$ В результате задача кручения в такой постановке сведена к так называемой задаче Дирихле (или первой краевой задаче теории гармонических функций). В общем случае доказано, что эта задача имеет единственное решение, и с помощью подходящих гармонических функций могут быть получены многочисленные точные решения задач кручения для некруговых поперечных сечений.

7.4.5. Примеры решения задачи кручения для поперечных сечений различной формы

7.4.5.1. Эллиптическое поперечное сечение. Уравнение контура эллиптического поперечного сечения с полуосями a и b (рис. 7.10(а)) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Если принять функцию кручения Прандтля в виде

$$\psi = k \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right),$$

где k — константа, то она будет удовлетворять граничному условию $\psi_R = 0$. Дифференциальное уравнение (7.53) удовлетворяется при $k = -a^2b^2/(a^2 + b^2)$; следовательно, решение имеет вид

$$\psi = -\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (7.62)$$

Касательные напряжения равны

$$\tau_{zx} = -\frac{2G\theta a^2}{a^2 + b^2} y, \quad \tau_{zy} = \frac{2G\theta b^2}{a^2 + b^2} x. \quad (7.63)$$

Для крутящего момента имеем выражение

$$M_T = G\theta \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} \pi,$$

так что (7.63) можно также записать в форме

$$\tau_{zx} = -\frac{2M_T}{\pi a b^3} y, \quad \tau_{zy} = \frac{2M_T}{\pi a^3 b} x.$$

При $b < a$ максимальное касательное напряжение равно

$$(\tau_{zx})_{y=\pm b} = \pm \frac{2M_T}{\pi a b^2} = \pm \frac{2G\theta a^2 b}{a^2 + b^2}$$

и действует в рассматриваемом случае на концах малой полуоси. Так называемые траектории касательных напряжений

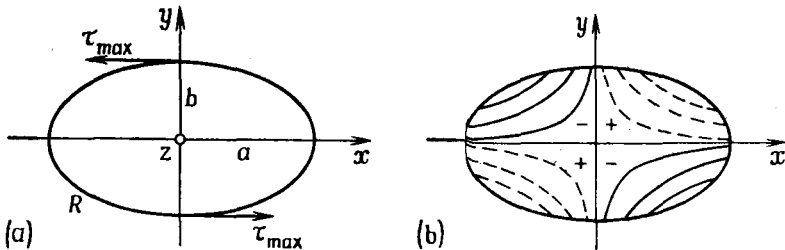


Рис. 7.10. Эллиптическое поперечное сечение при кручении: (а) положение максимальных касательных напряжений, (б) линии уровня депланации.

задаются кривой $\psi(x, y) = \text{const}$. Результирующее касательное напряжение равно

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = G\theta \sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2} = \frac{2G\theta}{a^2 + b^2} \sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}.$$

При вычислении депланации будем исходить из (7.39), тогда с учетом (7.37) получим

$$\tau_{zx} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta y \right),$$

или

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{zx}}{G} + \theta y = \frac{M_T}{G} \left(-\frac{2}{\pi a b^3} + \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3} \right) y.$$

После интегрирования получим

$$w(x, y) = M_T \frac{b^2 - a^2}{\pi a b^3 G} xy.$$

Это — уравнение так называемой седловой поверхности (гиперболический параболоид или гипар). На рис. 7.10(б) депланация изображена с помощью линий уровня. Депланация рав-

на нулю на осях x и y , а максимальные ее значения достигаются на границе при $x = \pm a/\sqrt{2}$ и соответственно при $y = \pm b/\sqrt{2}$; они равны

$$\omega_{\max} = \pm M_T \frac{b^2 - a^2}{2\pi a^2 b^2 G}.$$

Элементарное решение для кругового сечения получается при $a = b$. Как видно, в этом случае не возникает никакой деформации.

7.4.5.2. Приближенное решение для узкого прямоугольника.

Решение для прямоугольника с произвольным отношением сторон (рис. 7.11) в замкнутой форме невозможно (см. п. 7.4.5.4). Для очень узкого прямоугольника с $b \ll a$ удается получить очень полезное приближение при допущении $\tau_{zx} \ll \tau_{zy}$. Граничное условие $\psi_R = 0$ удовлетворяется, если для функции кручения Прандтля принять $\psi = -x^2 + b^2$. Эта формула удовлетворяет также гармоническому уравнению Пуассона (7.53). Тогда касательные напряжения получаются равными $\tau_{zx} = 0$, $\tau_{zy} = 2G\theta x$, далее крутящий момент равен $M_T = (16/3)\theta ab^3$ *, а деформация выражается в виде

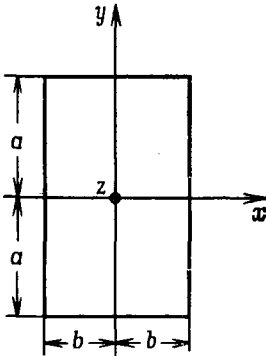


Рис. 7.11. Прямоугольное поперечное сечение.

$$\omega = \frac{3}{16} \frac{M_T}{G a b^3} x y.$$

7.4.5.3. Поперечное сечение в виде равностороннего треугольника. Граничное условие (рис. 7.12(a)) имеет вид

$$(x - a)[(x + 2a)^2 - 3y^2] = 0.$$

Если положить гармоническую функцию $\chi(x, y)$, которая на границе принимает значение $\chi_R = 1/2(x^2 + y^2)$, равной

$$\chi(x, y) = \frac{2a^2}{3} - \frac{x^3 - 3xy^2}{6a},$$

то для функции кручения Прандтля имеем

$$\psi = \chi - \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{(x - a)[(x + 2a)^2 - 3y^2]}{6a},$$

чем и достигается решение задачи.

* Приведенное здесь выражение для крутящего момента верно, однако касательные напряжения τ_{yz} и τ_{zx} дают в него для длинного прямоугольника одинаковый вклад. Касательные напряжения τ_{zx} действительно малы, но плечо их велико. Поэтому полагать τ_{zx} равным нулю нельзя. — Прим. ред.

Касательные напряжения равны

$$\tau_{zx} = \frac{G\phi}{a}(x-a)y, \quad \tau_{zy} = \frac{G\phi}{2a}(x^2 + 2ax - y^2).$$

В вершинах, а также в центре тяжести треугольника касательные напряжения равны нулю, максимальное касательное напряжение получается на границе в серединах сторон треуголь-

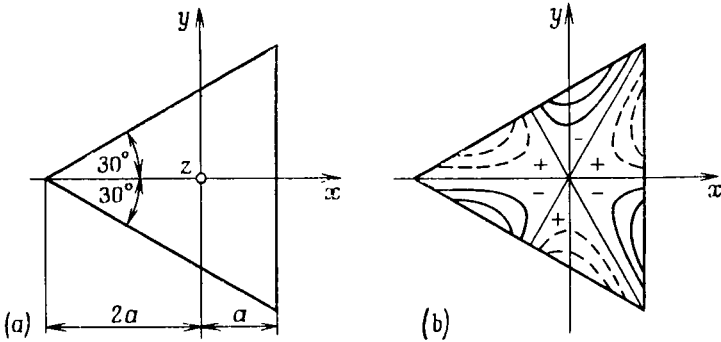


Рис. 7.12. Равностороннее треугольное поперечное сечение (а), линии уровня деформации (б).

ника $\tau_{\max} = 3/2 G\phi a$. Для крутящего момента получаем выражение

$$M_T = (9 \sqrt{3}/5) G\phi a^4,$$

а деформация

$$w(x, y) = \frac{M_T}{6GaJ_T} (3x^2y - y^3) = \frac{\phi}{6a} (3x^2y - y^3).$$

Линии уровня изображены на рис. 7.12(б). На центральных осях треугольника деформация равна нулю.

7.4.5.4. Прямоугольное поперечное сечение. Решение задачи кручения для прямоугольного сечения удается получить только в виде ряда Фурье. При этом можно отыскивать в виде ряда или решение гармонического уравнения Лапласа для функции деформации ϕ , или решение уравнения Пуассона для ψ . Пусть прямоугольная область задана при $-b < x < b$, $-a < y < a$ (см. рис. 7.11). Вследствие симметрии функция кручения Прандтля должна быть четной относительно x и y . Для дифференциального уравнения $\Delta\psi = 0$ с граничным условием $\psi_R = 0$ функция $(b^2 - x^2)$ как частное решение для узкого прямоугольника при $b \ll a$ уже рассматривалась. Естественно поэтому ввести

функцию кручения по формуле

$$\psi = b^2 - x^2 + T(x, y), \quad (7.64)$$

где $T(x, y)$ означает четную относительно x и y функцию, которая должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\Delta T(x, y) = 0 \quad (7.65)$$

и граничным условиям

$$T = 0 \quad \text{для } x = \pm b, \quad T = x^2 - b^2 \quad \text{для } y = \pm a. \quad (7.66)$$

Представляя $T(x, y)$ в виде произведения

$$T(x, y) = f(x)g(y), \quad (7.67)$$

получим

$$\Delta T = \frac{d^2 f}{dx^2} g + f \frac{d^2 g}{dy^2} = 0,$$

или после разделения переменных

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \frac{1}{f} = - \frac{d^2 g}{dy^2} \frac{1}{g}.$$

Полагая обе части этого выражения равными постоянной $-\lambda^2$, найдем для каждого из обыкновенных дифференциальных уравнений для $f(x)$ и $g(y)$ решения

$$f(x) = \alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x, \quad g(y) = \gamma \operatorname{ch} \lambda y + \delta \operatorname{sh} \lambda y.$$

Таким образом, для четной относительно x и y функции $T(x, y)$ получается

$$T(x, y) = A \cos \lambda x \operatorname{ch} \lambda y. \quad (7.68)$$

Первое граничное условие (7.66) удовлетворяется при $\cos \lambda b = 0$, т. е. при $\lambda = n\pi/2b$, где $n = 1, 3, 5, \dots$. Вместо решения (7.68) теперь применим общее выражение

$$T(x, y) = \sum_n A_n \cos n \frac{\pi x}{2b} \operatorname{ch} n \frac{\pi y}{2b} \quad (7.69)$$

в виде бесконечного ряда. Каждый член этого ряда удовлетворяет первому граничному условию (7.66). Формула (7.69) удовлетворяет гармоническому уравнению Лапласа в рассматриваемой области, поскольку ряд сходящийся и почленно дифференцируемый. Эти предположения хорошо известны.

Для выполнения второго граничного условия должно быть справедливо равенство

$$\sum_n A_n \cos \frac{n\pi x}{2b} \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b} = x^2 - b^2. \quad (7.70)$$

Речь идет о разложении в ряд Фурье по x с периодом $4b$. Коэффициенты Фурье определяются известным образом из выражения

$$\sum_n \int_{-b}^b A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b} \cos \frac{n\pi x}{2b} \cos \frac{m\pi x}{2b} dx = \int_{-b}^b (x^2 - b^2) \cos \frac{m\pi x}{2b} dx.$$

В левой части отличен от нуля только член, соответствующий $m = n$, поэтому

$$A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b} \cdot \frac{2b}{n\pi} \int_{-b}^b \cos^2 \frac{n\pi x}{2b} d\left(\frac{n\pi x}{2b}\right) = \int_{-b}^b (x^2 - b^2) \cos \frac{n\pi x}{2b} dx,$$

причем интеграл в левой части равен $n\pi/2$. Таким образом,

$$A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b} = \frac{1}{b} \int_{-b}^b (x^2 - b^2) \cos \frac{n\pi x}{2b} dx = \frac{2}{b} \int_0^b (x^2 - b^2) \cos \frac{n\pi x}{2b} dx \quad (7.71)$$

и окончательно получим *)

$$A_n = \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{\pi^3 n^3} \frac{32b^2}{\operatorname{ch}(n\pi a/2b)}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Функция кручения Прандтля (7.65) становится равной

$$\psi(x, y) = b^2 - x^2 + \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_n \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{n^3} \frac{\cos \frac{n\pi x}{2b} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}}, \quad (7.72)$$

$$n = 1, 3, 5, \dots$$

Этот ряд можно записать также в виде

$$\psi(x, y) = b^2 - x^2 + \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_m \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)^3} \frac{\cos(2m+1) \frac{\pi x}{2b} \operatorname{ch}(2m+1) \frac{\pi y}{2b}}{\operatorname{ch}(2m+1) \frac{\pi a}{2b}},$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

При $a/b \rightarrow \infty$ из (7.72) опять следует указанное выше приближенное решение для узкого прямоугольника.

*) $\sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^{(n-1)/2} = -(-1)^{(n+1)/2}$ для $n = 1, 3, 5, \dots$

Касательные напряжения равны (при $n=1, 3, 5, \dots$)

$$\tau_{zx} = G\theta \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{16G\theta b}{\pi^2} \sum_n \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{n^2} \frac{\cos \frac{n\pi x}{2b} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{2b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}},$$

$$\tau_{zy} = -G\theta \frac{\partial \psi}{\partial x} = G\theta \left[2x + \frac{16b}{\pi^2} \sum_n \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{n^2} \frac{\sin \frac{n\pi x}{2b} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \right].$$

Максимальное касательное напряжение τ_{zy} при $y=0$, $x = \pm b$ составляет

$$|\tau_{\max}| = 2G\theta b \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_n \frac{1}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \right), \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Распределение касательных напряжений схематично показано на рис. 7.13.

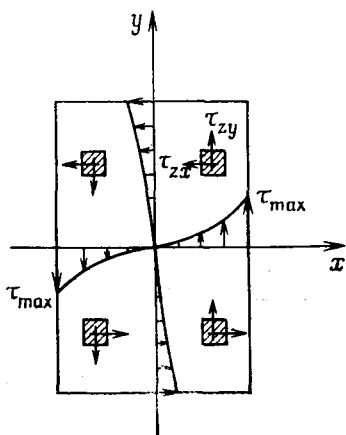


Рис. 7.13. Касательные напряжения в скручиваемом прямоугольном поперечном сечении.

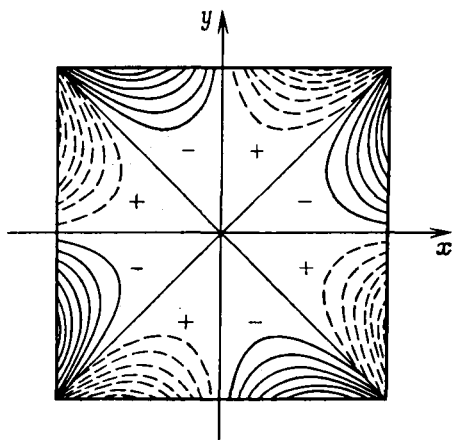


Рис. 7.14. Линии уровня депланации при кручении квадратного поперечного сечения.

Согласно (7.57), для крутящего момента получается выражение

$$M_T = 2G\theta b^2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[1 - \frac{x^2}{b^2} + \frac{32}{\pi^3} \sum_n \frac{(-1)^{(n+1)/2} \cos \frac{n\pi x}{2b} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2b}}{n^3 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \right] dx dy,$$

$$n = 1, 3, 5, \dots$$

или

$$M_T = \frac{1}{3} G\theta (2a) (2b)^3 \left[1 - \frac{192b}{\pi^5 a} \sum_n \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{n\pi a}{2b} \right].$$

При $a \gg b$ справедлива приближенная формула

$$M_T = \frac{1}{3} G\theta (2a) (2b)^3 \left(1 - 0,63 \frac{b}{a} \right).$$

Вычисление депланации из (7.39) с учетом (7.37) приводит к выражению

$$w = \theta \left[xy + \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_n \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{n^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi y}{2b} \sin \frac{n\pi x}{2b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \right], \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

При численных расчетах интересующих нас величин во многих случаях достаточно учета только первых членов соответствующих рядов.

В заключение укажем формулы для касательных напряжений, крутящего момента и депланации в случае квадратного поперечного сечения со сторонами $2a$ ($n = 1, 3, 5, \dots$)

$$\tau_{zx} = G\theta \frac{16a}{\pi^2} \sum_n \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{n^2} \frac{\cos \frac{n\pi x}{2a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi}{2}},$$

$$\tau_{zy} = G\theta \left[2x + \frac{16a}{\pi^2} \sum_n \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{n^2} \frac{\sin \frac{n\pi x}{2a} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi}{2}} \right],$$

$$\tau_{\max} = 2G\theta a \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_n \frac{1}{n^2} \frac{1}{\operatorname{ch} n\pi/2} \right) \approx 1,351G\theta a,$$

$$M_T = \frac{1}{3} G\theta (2a)^4 \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \sum_n \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{n\pi}{2} \right) \approx 0,1406G\theta (2a)^4,$$

$$w = \theta \left[xy + \frac{8(2a)^2}{\pi^3} \sum_n \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{n^3} \frac{\sin \frac{n\pi x}{2a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi}{2}} \right].$$

Графическое изображение депланации с помощью линий уровня дано на рис. 7.14. Депланация равна нулю на осях симметрии.

§ 7.5. Формулировка задачи кручения с помощью функций комплексной переменной

Функция депланации $\phi(x, y)$, а также функция $\chi(x, y)$, связанная с функцией кручения Прандтля $\psi(x, y)$, являются гармоническими функциями. Поэтому они могут быть представлены в виде вещественной и мнимой частей так называемой аналитической функции комплексной переменной. Такая формулировка задачи кручения оказывается весьма целесообразной, так как для решения задачи тогда можно привлечь общие теоремы теории аналитических функций *).

7.5.1. Комплексная переменная и аналитические функции

Прежде всего следует кратко напомнить основные понятия. *Комплексным числом* **), представляемым на числовой плоскости (рис. 7.15), называют число

$$Z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi},$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Вещественная часть комплексного числа Z равна x , мнимая часть y ; их записывают в виде $x = \operatorname{Re}\{Z\}$, $y = \operatorname{Im}\{Z\}$. Модуль комплексного числа равен $|Z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

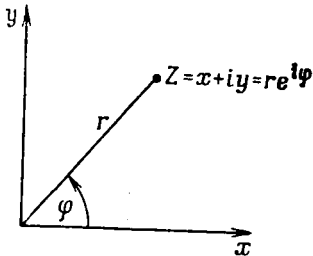


Рис. 7.15. Комплексная плоскость.

Комплексным числом, *сопряженным* с Z (обозначаемым чертой сверху), называют число $\bar{Z} = x - iy = re^{-i\varphi}$, т. е. знак перед i меняется на противоположный.

Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} Z + \bar{Z} &= 2 \operatorname{Re}\{Z\} = 2x, \\ Z - \bar{Z} &= i2 \operatorname{Im}\{Z\} = 2iy, \\ Z\bar{Z} &= x^2 + y^2 = r^2. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Две непрерывные функции $\phi(x, y)$ и $\chi(x, y)$ независимых переменных x и y можно представить в виде комплекснознач-

*) Методы теории аналитических функций являются очень ценными и приводят к многочисленным решениям двумерных (плоских) задач теории упругости (см. § 6.2 и 8.4). [См. монографию Колосова Г. В. Применение комплексной переменной к теории упругости. — Л. — М.: ОНТИ, 1935 и монографию [А30]. — Прим. ред.]

**) Чтобы не смешивать с обозначением оси z , комплексную переменную здесь временно обозначают прописной буквой Z .

ной функции $\phi(x, y) + i\chi(x, y)$, которую, согласно выражениям

$$x = \frac{1}{2}(Z + \bar{Z}), \quad y = \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z}),$$

можно понимать как функцию комплексных переменных Z и \bar{Z} . Чтобы образованная подобным образом комплексная функция была функцией только от Z (и, следовательно, не зависела от \bar{Z}), т. е.

$$\phi(x, y) + i\chi(x, y) = f(Z), \quad (7.74)$$

функции $\phi(x, y)$ и $\chi(x, y)$ должны удовлетворять определенным условиям. Комплексная функция $f(Z)$ должна быть однозначной и иметь однозначную производную

$$\frac{df}{dZ} = \lim_{\delta Z \rightarrow 0} \frac{f(Z + \delta Z) - f(Z)}{\delta Z}.$$

Это означает, что определенная таким образом производная не зависит от направления, по которому точка Z стремится к точке $Z + \delta Z$. Условиями этого, как известно, являются уже упоминавшиеся ранее условия Коши — Римана

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \chi}{\partial x}.$$

Из них непосредственно следуют уравнения

$$\Delta \phi(x, y) = 0, \quad \Delta \chi(x, y) = 0,$$

которые означают, что ϕ и χ потенциальные (или гармонические) функции.

Комплексную функцию (7.74), удовлетворяющую условиям Коши — Римана, называют *аналитической*, или *регулярной*, функцией. Эти функции играют очень важную роль в приложениях.

Комплексная функция, сопряженная с аналитической функцией $f(Z)$, обозначается через $\bar{f}(\bar{Z})$. Она появляется, если знак перед i заменить на противоположный. Аналогично (7.73), справедливы соотношения

$$\begin{aligned} f(Z) + \bar{f}(\bar{Z}) &= 2 \operatorname{Re} \{f(Z)\}, \\ f(Z) - \bar{f}(\bar{Z}) &= i 2 \operatorname{Im} \{f(Z)\}. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Очень важными также являются следующие правила вычислений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial \bar{Z}}, & \frac{\partial}{\partial y} &= i \left(\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} \right), \\ \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial Z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), & \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Применение их к функции (7.74) дает (штрих означает производную по аргументу функции)

$$\frac{df}{dZ} = f'(Z) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\phi + i\chi) - i \frac{\partial}{\partial y} (\phi + i\chi) \right],$$

или с учетом условий Коши — Римана

$$f'(Z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y} - i \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (7.76)$$

7.5.2. Основные уравнения кручения в комплексной форме

Введенную выше аналитическую функцию $f(Z) = \phi + i\chi$ при рассмотрении задачи кручения называют иногда *комплексным потенциалом*. Ее вещественной и соответственно мнимой частями являются функция депланации ϕ , применяемая в п. 7.4.2, и сопряженная ей функция χ .

Комплексное перемещение равно

$$u + iv = -\theta yz + i\theta xz = i\theta zZ.$$

Комплексным напряжением называют комбинацию напряжений $\tau_{zx} + i\tau_{zy}$. Из выражений (7.39), условий Коши — Римана, а также правил вычислений (7.76) следует

$$\tau_{zx} + i\tau_{zy} = G\theta [\bar{f}'(\bar{Z}) + iZ]. \quad (7.77)$$

Крутящий момент при этом равен

$$M_T = G\theta \operatorname{Re} \left\{ i \int_A [Z f'(Z) - i\bar{Z}Z] dA \right\}$$

или после преобразования по теореме Стокса выражается через контурный интеграл

$$M_T = \frac{1}{4} G\theta \operatorname{Re} \left\{ \int_R Z\bar{Z} [2f'(Z) - i\bar{Z}] dZ \right\}. \quad (7.78)$$

Таким образом, решение задачи кручения сводится к определению комплексного потенциала $f(Z)$. Для этого существуют различные методы.

Граничное условие для функции χ , сопряженной с функцией депланации ϕ , будет иметь вид (см. п. 7.4.4)

$$\chi_R = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \text{const.}$$

Комплексный потенциал $f(Z)$ необходимо определить таким образом, чтобы удовлетворялось граничное условие

$$\operatorname{Im} \{f(Z)\}_R = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

С учетом того что $Z\bar{Z} = x^2 + y^2$, а также второго соотношения (7.75) получаем

$$\chi_R = \operatorname{Im} \{f(Z)\}_R = 1/2 (Z\bar{Z})_R;$$

окончательно граничное условие в комплексной форме запишется так:

$$\hat{f}(Z) - \bar{\hat{f}}(\bar{Z}) = iZ\bar{Z} + \operatorname{const} \quad \text{на } Z_R. \quad (7.79)$$

В такой форме граничное условие используется при решении многочисленных задач кручения.

Соотношение между Z и \bar{Z} составляют для точек контура поперечного сечения, т. е. уравнение $y = y(x)$ контура выражают через комплексные величины. Его можно привести к виду

$$(Z\bar{Z})_R = h(Z) + \bar{h}(\bar{Z}), \quad (7.80)$$

причем $h(Z)$ есть функция, аналитическая внутри контура поперечного сечения. Тогда комплексный потенциал означает, что решение задачи кручения может быть установлено в виде

$$\hat{f}(Z) = ih(Z) + \operatorname{const}. \quad (7.81)$$

Доказательство этого утверждения получается непосредственно, если учесть, что выражение (7.81) удовлетворяет граничному условию (7.79).

7.5.3. Примеры определения комплексного потенциала

Для эллиптического поперечного сечения (см. п. 7.4.5.1) преобразование уравнения контура

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в комплексную форму дает

$$Z\bar{Z} = \frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2} + \frac{a^2 - b^2}{2(a^2 + b^2)}(Z^2 + \bar{Z}^2),$$

и для комплексного потенциала, согласно (7.81), вытекает выражение (несущественные для определения напряжений константы опущены)

$$\hat{f}(Z) = i \frac{a^2 - b^2}{2(a^2 + b^2)} Z^2 = \frac{a^2 - b^2}{2(a^2 + b^2)} [-2xy + i(x^2 - y^2)].$$

Напряжения вычисляются согласно (7.77), а депланация находится из уравнения $\phi = \operatorname{Re}\{f(Z)\}$. В итоге получаются уже приведенные выше результаты.

Для равностороннего треугольника (рис. 7.12) с уравнением контура $(x - a) [(x + 2a)^2 - 3y^2] = 0$ имеем

$$Z\bar{Z} = \sqrt[4]{3}a^2 - (Z^3 + \bar{Z}^3)/6a.$$

Поэтому комплексный потенциал $f(Z) = -iZ^3/6a$, и вновь приходим к полученным ранее результатам.

Следует заметить, что уравнение контура квадрата со стороной $2a$

$$(x^2 - a^2)(y^2 - a^2) = 0$$

в комплексной форме имеет вид

$$Z\bar{Z} = -\frac{1}{16a^2}(Z^2 - \bar{Z}^2)^2 + a^2.$$

Оно не приводится к виду, требуемому согласно (7.80), и поэтому решение рассмотренным способом невозможно. Напротив, для кругового вала с продольной выточкой можно указать решение*). Форма поперечного сечения показана на рис. 7.16. Контур получается пересечением двух кругов с радиусами a и b , начало координат которых расположено в центре малого круга. Тогда уравнение контура имеет вид

$$[(x - a)^2 + y^2 - a^2](x^2 + y^2 - b^2) = (x^2 + y^2 - 2ax)(x^2 + y^2 - b^2) = 0.$$

В комплексной форме уравнение контура принимает вид

$$Z\bar{Z} = a(Z + \bar{Z}) - ab^2\left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{\bar{Z}}\right) + b^2$$

и для комплексного потенциала следует $f(Z) = iaZ - iab^2/Z$. Выражение $1/Z$ допустимо и не содержит никакой особенности, так как точка $Z = 0$ лежит вне рассматриваемого поперечного сечения.

Вычисление напряжений дает

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= G\theta \left[\frac{2ab^2xy}{(x^2 + y^2)^2} - y \right], \\ \tau_{zy} &= G\theta \left[-\frac{ab^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + x - a \right],\end{aligned}$$

а для крутящего момента получим

$$M_T = G\theta \int_A \left(x^2 + y^2 - ax - \frac{ab^2x}{x^2 + y^2} \right) dA.$$

*) Впервые решение этой задачи другим способом было дано Вебером [55].

Вычисления целесообразно производить в полярных координатах r и φ , указанных на рис. 7.16. Тогда $M_T = 2G\theta Da^4$, причем

$$D = \frac{1}{24} (\sin 4\alpha + 8 \sin 2\alpha + 12\alpha) - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^2 (\sin 2\alpha + 2\alpha) + \\ + \frac{4}{3} \left(\frac{b}{a}\right)^3 \sin \alpha - \frac{1}{4} \left(\frac{b}{a}\right)^4 \alpha,$$

где $b/a = 2 \cos \alpha$.

Максимальное напряжение получается при $x = b$, $y = 0$ в основании выточки

$$\tau_{\max} = -G\theta(2a - b) = -\frac{M_T}{2Da^4}(2a - b).$$

Следовательно, по сравнению с полным круговым поперечным

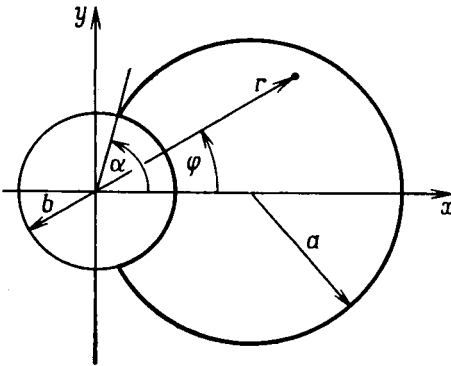


Рис. 7.16. Круговой стержень с продольной выточкой при кручении.

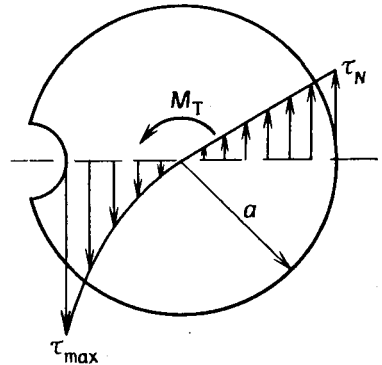


Рис. 7.17. Распределение касательных напряжений в поперечном сечении кругового стержня с продольной выточкой.

сечением с максимальным напряжением на контуре $\tau_0 = 2M_T/\pi a^3$ в рассматриваемом случае возникает концентрация напряжений

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_0} = \frac{\pi(2a - b)}{4Da},$$

которая в пределе для $b \ll a$ дает коэффициент концентрации напряжений $\tau_{\max}/\tau_N = 2$ ($\tau_0 = \tau_N$ — так называемое номинальное напряжение, к которому отнесен коэффициент концентрации напряжений).

Распределение касательных напряжений по диаметру схематично показано на рис. 7.17. Как видно, возмущение в распределении напряжений, которое возникает из-за выточки,

ограничивается узкой областью. Это одинаково справедливо для всех задач о выточках.

Заметим, что решения другим способом получены и для иных форм поперечного сечения с выточками. Возможны также аналитические решения для сечений с множеством выточек. В заключение следует отметить, что дальнейшие возможности решения задачи кручения могут быть связаны с применением конформного отображения. Об этом можно прочитать в [A16], в книге данный вопрос обсуждаться не будет.

§ 7.6. Поперечный изгиб

Проблема изгиба стержня, нагруженного на одном конце поперечной силой, сложнее, чем задача о чистом изгибе, поскольку теперь наряду с изгибом может иметь место также кручение стержня. При этом в поперечном сечении изгибаемого стержня возникают кроме нормальных еще и касательные напряжения.

7.6.1. Общая постановка задачи изгиба и определение распределения касательных напряжений

Рассмотрим стержень длиной l , изображенный на рис. 7.18(a), одно концевое поперечное сечение которого жестко зашпелено,

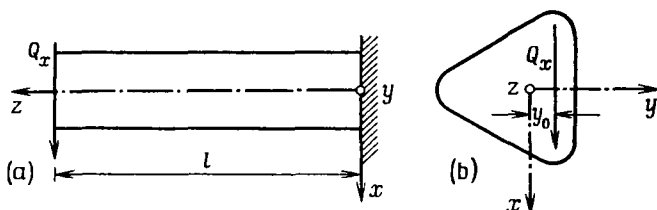


Рис. 7.18. Стержень, нагруженный поперечной силой (а); поперечное сечение (б).

а напряжения, действующие в другом концевом поперечном сечении, эквивалентны силе Q_x (поперечной силе), перпендикулярной продольной оси стержня. Будем предполагать, что поперечное сечение стержня, согласно рис. 7.18(b), симметрично относительно оси y , а в остальном имеет произвольную форму*). Равнодействующая поперечная сила Q_x действует парал-

*) Следует напомнить при этом, что ось симметрии поперечного сечения с одной плоскостью симметрии и перпендикулярная к ней ось являются всегда главными осями, прсходящими через центр тяжести.

тельно оси x , ее точное положение пока неизвестно. Направление оси x выбрано таким образом, что прогиб в направлении оси x положителен. Плоскость x, z является главной, и в ней происходит прямой одноосный изгиб.

В соответствии с принятым подходом при полуобратном методе вводятся допущения о напряжениях, действующих в поперечных сечениях, которые должны находиться в согласии с уравнениями равновесия, условиями совместности и граничными условиями.

Равнодействующая поперечная сила Q_x приводит к моменту, вызывающему поворот каждого поперечного сечения стержня относительно оси y (изгибающему моменту)

$$M_y = Q_x (l - z). \quad (7.82)$$

Аналогично предыдущему рассмотрению чистого изгиба (§ 7.3) можно принять, что нормальные напряжения*) распределены вдоль оси z по формуле

$$\sigma_{zz} = - \frac{M_y}{J_{yy}} x = - \frac{Q_x (l - z)}{J_{yy}} x, \quad (7.83)$$

причем знак минус указывает на то, что растягивающие напряжения получаются при отрицательных значениях x . С помощью формулы (7.83) задача поперечного изгиба может быть полностью решена, причем отличие от случая чистого изгиба связано только с появлением в поперечном сечении касательных напряжений τ_{zx} и τ_{zy} .

Из общих предположений (см. § 7.5) $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$ прежде всего вытекает, что уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0,$$

откуда следует, что касательные напряжения одинаковы во всех поперечных сечениях стержня. Последнее уравнение равновесия с учетом (7.83) приводится к виду

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{Q_x x}{J_{yy}} = 0. \quad (7.84)$$

*) В общем случае, когда оси x и y не являются главными осями поперечного сечения, для распределения напряжений справедливо выражение

$$\sigma_{zz} = - Q_x (l - z) \frac{J_{xx}x + J_{xy}y}{J_{xx}J_{yy} - J_{xy}^2},$$

которое, впрочем, лишь несущественно усложняет вычисления.

Из условий совместности, которые могут быть приняты в форме уравнений Бельтрами (3.22), получаем при $s = \sigma_{zz}$

$$\Delta\tau_{zx} + \frac{Q_x}{(1+\nu)J_{yy}} = 0 \quad \text{и} \quad \Delta\tau_{zy} = 0. \quad (7.85)$$

Далее следует учесть граничное условие (боковая поверхность цилиндрического стержня свободна от напряжений)

$$\tau_{zx} \cos(n, x) + \tau_{zy} \cos(n, y) = 0. \quad (7.86)$$

Если все эти условия могут быть удовлетворены, принятые выше допущения приводят к точному решению задачи изгиба.

Прежде всего (7.84) можно записать в следующей форме *):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_{zx} + \frac{Q_x x^2}{2J_{yy}} \right) + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0. \quad (7.87)$$

Уравнение равновесия (7.87) удовлетворяется введением функции напряжений при изгибе $B(x, y)$ по формуле

$$\tau_{zx} = \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{Q_x}{2J_{yy}} x^2, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial B}{\partial x}. \quad (7.88)$$

Свойства функции напряжений $B(x, y)$ устанавливаются из уравнений Бельтрами (7.85). Из них следует

$$\frac{\partial}{\partial y} (\Delta B) = \frac{\nu Q_x}{(1+\nu)J_{yy}}, \quad \frac{\partial}{\partial x} (\Delta B) = 0,$$

и после интегрирования получаем

$$\Delta B = \frac{\nu Q_x}{(1+\nu)J_{yy}} y + C. \quad (7.89)$$

Произвольная постоянная интегрирования C остается неопределенной до тех пор, пока не будет установлена линия действия Q_x **) в концевом поперечном сечении. Но константу C можно найти из физических соображений. Если исходить из компоненты z вектора угловой скорости (см. п. 1.3.5)

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

то для его изменения в направлении оси z прежде всего получается выражение

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right).$$

*) Следуя С. П. Тимошенко, к выражению в скобках (7.87) можно добавить еще произвольную функцию $f(y)$. Таким образом, для определенных форм поперечного сечения получается упрощение решения (см. п. 7.6.4).

**) Каждому положению линии действия Q_x соответствует определенное значение C . Оно устанавливается из того условия, что должен иметь место только изгиб стержня без кручения.

Это равенство можно записать также в виде

$$\frac{\partial w_z}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y},$$

и из него с помощью закона Гука получаем

$$\frac{\partial w_z}{\partial z} = \frac{1}{2G} \left(\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} \right).$$

Тогда, используя выражение для напряжений согласно (7.88), получим $\partial w_z / \partial z = -(1/2G) \Delta B$ и с учетом (7.89)

$$-2G \frac{\partial w_z}{\partial z} = \frac{\nu Q_x}{(1+\nu) J_{yy}} y + C. \quad (7.90)$$

Видно, что $\partial w_z / \partial z$ означает местный поворот точек поперечного сечения и что константа C может быть приравнена повороту относительно центра тяжести поперечного сечения. Она соответствует вращению поперечного сечения как твердого тела *) (аналогично углу закручивания θ при кручении). В результате (7.89) записывается в виде

$$\Delta B = \frac{\nu Q_x}{(1+\nu) J_{yy}} y - 2G\theta. \quad (7.91)$$

Как легко убедиться, теперь функция напряжений при изгибе

$$B(x, y) = f(x, y) + \frac{\nu Q_x}{6(1+\nu) J_{yy}} y^3 - \frac{1}{2} G\theta (x^2 + y^2) \quad (7.92)$$

с вновь введенной гармонической функцией $f(x, y)$ является частным решением дифференциального уравнения (7.91).

Для последующего рассмотрения целесообразно ввести сопряженную с $f(x, y)$ гармоническую функцию $g(x, y)$, используя условия Коши — Римана

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}.$$

Выражения (7.88) для касательных напряжений принимают тогда вид

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= -\frac{\partial g}{\partial x} - G\theta y + \frac{Q_x}{2(1+\nu) J_{yy}} [\nu y^2 - (1+\nu)x^2], \\ \tau_{zy} &= -\frac{\partial g}{\partial y} + G\theta x. \end{aligned} \quad (7.93)$$

Отсюда для касательных напряжений следуют формулы, которые уже встречались при кручении призматического стержня

*) Можно показать, что среднее значение $\partial w_z / \partial z$ в поперечном сечении равно $\frac{1}{A} \int_A \frac{\partial w_z}{\partial z} dA = \theta$.

(ср. с соотношениями (7.39) в п. 7.4.2). Если использовать введенную там функцию депланации $\phi(x, y)$, то гармоническую функцию $g(x, y)$ можно представить в виде

$$g(x, y) = -G\theta\phi(x, y) - \frac{Q_x}{2(1+\nu)J_{yy}}\phi_1(x, y), \quad (7.94)$$

где гармоническая функция $\phi_1(x, y)$ называется *функцией изгиба*. Окончательно для касательных напряжений получается представление в виде

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\theta \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - y \right) + \frac{Q_x}{2(1+\nu)J_{yy}} \left[\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \nu y^2 - (1+\nu)x^2 \right], \\ \tau_{zy} &= G\theta \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} + x \right) + \frac{Q_x}{2(1+\nu)J_{yy}} \frac{\partial\phi_1}{\partial y}. \end{aligned} \quad (7.95)$$

Чтобы описать изгиб, свободный от кручения, угол закручивания θ нужно определить таким образом, чтобы появлялся только изгиб.

Видно, что задача изгиба (характеризуемая гармонической функцией изгиба ϕ_1) связана с задачей кручения (характеризуемой гармонической функцией депланации ϕ). Общее решение задачи поперечного изгиба состоит, таким образом, в определении двух гармонических функций ϕ и ϕ_1 .

Кроме того, для них следует рассмотреть еще граничные условия. Граничное условие (7.86), которое должно быть удовлетворено, запишется с учетом (7.94) в виде

$$\begin{aligned} G\theta \left[\frac{\partial\phi}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial\phi}{\partial y} \cos(n, y) - y \cos(n, x) + x \cos(n, y) \right]_R + \\ + \frac{Q_x}{2(1+\nu)J_{yy}} \left\{ \frac{\partial\phi_1}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial\phi_1}{\partial y} \cos(n, y) - \right. \\ \left. - [(1+\nu)x^2 - \nu y^2] \cos(n, x) \right\}_R = 0. \end{aligned}$$

Здесь можно ввести уже применявшуюся выше [см. (7.43)] нормальную производную и получить

$$\begin{aligned} G\theta \left\{ \frac{d\phi}{dn} - [y \cos(n, x) - x \cos(n, y)] \right\}_R + \\ + \frac{Q_x}{2(1+\nu)J_{yy}} \left\{ \frac{d\phi_1}{dn} - [(1+\nu)x^2 - \nu y^2] \cos(n, x) \right\}_R = 0. \end{aligned} \quad (7.96)$$

Первая часть этого выражения соответствует граничному условию на функцию депланации при кручении [см. (7.44)], в то время как граничное условие, которому удовлетворяет функция изгиба, имеет вид

$$\frac{d\phi_1}{dn} = \{ [(1+\nu)x^2 - \nu y^2] \cos(n, x) \}_R. \quad (7.97)$$

Таким образом, общая задача поперечного изгиба сводится к математической краевой задаче Неймана теории гармонических функций (ср. с п. 7.4.2), согласно которой требуется найти гармоническую функцию в некоторой области по заданной на границе области нормальной производной от этой функции.

Прежде всего для равнодействующей касательных напряжений в каждом поперечном сечении [если использовать условие равновесия (7.84)] имеем

$$\int_A \tau_{zx} dA + \int_A \left[\tau_{zx} + x \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{Q_x x}{J_{yy}} \right) \right] dA.$$

Подынтегральную функцию можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} (x\tau_{zx}) + \frac{\partial}{\partial y} (x\tau_{zy}) + \frac{Q_x x^2}{J_{yy}},$$

и тогда поверхностный интеграл с помощью теоремы Гаусса (для двумерного случая) можно преобразовать в контурный интеграл. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_A \tau_{zx} dA &= \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} (x\tau_{zx}) + \frac{\partial}{\partial y} (x\tau_{zy}) + \frac{Q_x x^2}{J_{yy}} \right] dA = \\ &= \int_R x [\tau_{zx} \cos(n, x) + \tau_{zy} \cos(n, y)] ds + \frac{Q_x}{J_{yy}} \int x^2 dA. \end{aligned}$$

Первый интеграл обращается в нуль вследствие граничного условия (7.86) и тогда

$$\int_A \tau_{zx} dA = Q_x, \quad \text{аналогично} \quad \int_A \tau_{zy} dA = 0.$$

Далее легко видеть, что

$$M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA = 0, \quad M_y = - \int_A \sigma_{zz} x dA = Q_x (l - z).$$

7.6.2. Центр сдвига

Как уже упоминалось, в общем случае изгиб стержня, нагруженного поперечной силой, сопровождается кручением. Это зависит от формы поперечного сечения, а также от положения линии действия равнодействующей поперечной силы Q_x . При этом весьма целесообразно введение так называемого *центра сдвига* (или *центра изгиба*). Эта точка связана с понятием сво-

бодного от кручения изгиба *), которое может быть определено различным образом.

Прежде всего следует иметь в виду, что при изгибе стержня с поперечным сечением, имеющим две оси симметрии, кручение не возникает, если линия действия равнодействующей поперечной силы Q_x проходит через центр тяжести (рис. 7.19(a)).

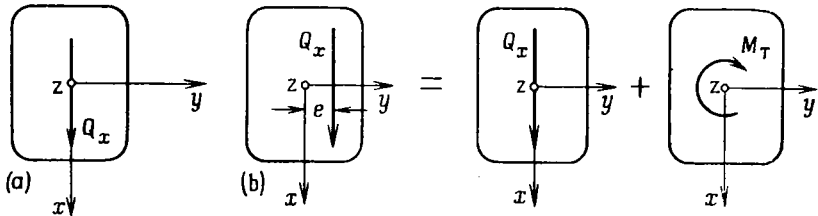


Рис. 7.19. Поперечное сечение с двумя осями симметрии при поперечном изгибе: (а) без кручения, (б) с кручением.

Тогда $\vartheta = 0$ и момент касательных напряжений относительно оси z обращается в нуль

$$M_z = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA = 0.$$

Касательные напряжения, согласно (7.95), принимают вид

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{Q_x}{2(1+\nu)J_{yy}} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x} - x^2 - \nu(x^2 - y^2) \right], \\ \tau_{zy} &= \frac{Q_x}{2(1+\nu)J_{yy}} \frac{\partial \phi_1}{\partial y}. \end{aligned} \quad (7.98)$$

Тогда постоянная интегрирования C в (7.89) с самого начала равна нулю.

Во всех остальных случаях наряду с изгибом появляется дополнительно кручение стержня. К ним относится, например, случай, когда в поперечном сечении стержня, имеющем две оси симметрии, линия действия Q_x не проходит через центр тяжести поперечного сечения (см. рис. 7.19(b)). На рисунке показано, что общая задача изгиба может быть представлена наложением двух задач: о прямом изгибе (нагружение поперечной силой, проходящей через центр тяжести) и о кручении. То же самое происходит, если линия действия силы Q_x , хотя и проходит через центр тяжести поперечного сечения, симметричного относительно одной оси y , но при этом ось x не является осью симметрии (рис. 7.20(a)). Касательные напряжения определяются при этом общими соотношениями (7.95).

*) Впрочем, изгиб без кручения и понятие центра сдвига Сен-Венаном не рассматривались.

Чтобы имел место изгиб, не сопровождающийся кручением, не должно быть закручивания относительно оси z и равнодействующий момент касательных напряжений должен обращаться в нуль. Для этого следует подходящим образом выбирать константу ϕ в (7.95). Это означает, что линия действия поперечной силы Q_x должна проходить на определенном расстоянии e от центра тяжести, таком, чтобы уравновешивался имеющийся крутящий момент. Из этого условия определяется положение центра сдвига, который в рассматриваемом случае лежит на оси y . Следовательно, в общем случае при решении задачи изгиба поперечная сила заменяется равной ей силой, приложенной в центре сдвига, и крутящим моментом (см. рис. 7.20 (b)).

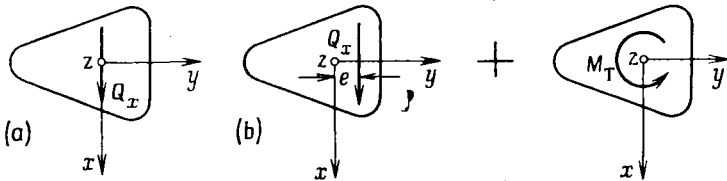


Рис. 7.20. Поперечное сечение с одной осью симметрии при поперечном изгибе: (а) с кручением, (б) без кручения.

Оба вышеприведенных примера показывают, что общая задача поперечного изгиба может быть представлена в виде суммы двух более простых задач.

Задача о чистом изгибе. Относительный угол закручивания ϕ принимается равным нулю $\phi = 0$. Линия действия равнодействующей поперечной силы Q_x определяется из условия

$$\int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA = -Q_x e \quad (7.99)$$

и проходит через центр сдвига. Касательные напряжения находятся из (7.98).

Задача о чистом кручении. Относительный угол закручивания ϕ определяется из соотношения *)

$$\int_A (\hat{\tau}_{zy}x - \hat{\tau}_{zx}y) dA = Q_x e. \quad (7.100)$$

Касательные напряжения находятся из выражений

$$\hat{\tau}_{zx} = G\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right), \quad \hat{\tau}_{zy} = G\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right).$$

*) Для ясности напряжения в рассматриваемой задаче, обусловленные кручением, обозначаются через $\hat{\tau}_{zx}$ и $\hat{\tau}_{zy}$.

Для примера, показанного на рис. 7.20, расстояние e от центра изгиба до оси x получается равным

$$e = - \frac{1}{2(1+\nu)J_{yy}} \int_A \left[x \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - y \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + (1+\nu)x^2y - \nu y^3 \right] dA.$$

Для поперечного сечения, имеющего одну ось симметрии, центр сдвига всегда лежит на оси симметрии; для поперечного сечения с двумя осями симметрии он совпадает с центром тяжести. Для поперечных сечений несимметричной формы существует точка, являющаяся центром сдвига, которая не обязательно должна лежать на одной из главных осей поперечного сечения. Возможны также случаи, когда центр сдвига лежит вне области поперечного сечения.

Альтернативное определение свободного от кручения изгиба основано на энергетических соображениях [53] и приводит к различным выражениям для положения центра сдвига. В некоторых случаях играют роль упругие постоянные, в других нет. Однозначно определить положение центра сдвига удается, если принимаются во внимание граничные условия в защемленном поперечном сечении стержня. Это, однако, завело бы нас слишком далеко; подробно этот вопрос изложен в [54].

В заключение следует заметить, что положение центра сдвига играет особо важную роль в приложениях, если речь идет о стержнях с поперечным сечением в виде тонкостенного открытого профиля. При этом важно правильное расположение плоскости нагружения, чтобы не могли появляться деформации, связанные с потерей устойчивости.

7.6.3. Деформации при поперечном изгибе

Напряжения при поперечном изгибе, определяемым согласно (7.83) и (7.95), соответствуют по закону Гука следующие деформации:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\nu Q_x(l-z)}{EJ_{yy}} x, & \epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{Q_x(l-z)}{EJ_{yy}} x, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \vartheta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right) + \frac{Q_x}{EJ_{yy}} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \nu y^2 - (1+\nu)x^2 \right], \\ \gamma_{zy} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \vartheta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right) + \frac{Q_x}{EJ_{yy}} \frac{\partial \phi_1}{\partial y}. \end{aligned} \quad (7.101)$$

Интегрированием этих уравнений, как и при чистом изгибе, можно определить перемещения. Они получаются равными

$$\begin{aligned} u &= -\vartheta yz + \frac{Q_x}{EJ_{yy}} \left[\frac{\nu}{2}(l-z)(x^2 - y^2) + \left(l - \frac{z}{3}\right) \frac{z^2}{2} \right], \\ v &= \vartheta_{xz} + \frac{Q_x}{EJ_{yy}} \nu(l-z)xy, \\ w &= \vartheta \phi + \frac{Q_x}{EJ_{yy}} \left[\phi_1 - \left(1 + \frac{\nu}{2}\right) \frac{x^3}{3} + \frac{\nu}{2} xy^2 - \left(l - \frac{z}{2}\right) xz \right], \end{aligned} \quad (7.102)$$

где ϕ и соответственно ϕ_1 — функции деформации и изгиба. Общие выражения для перемещений содержат еще постоянные и линейно зависящие от координат члены, которые характеризуют перемещения стержня как твердого тела. Они исключаются подходящим выбором опорного сечения $z = 0$.

Из соотношений (7.101), во-первых, видно, что вследствие равенства $\epsilon_{zz} = 0$ при $x = 0$ нейтральный слой соответствует плоскости x, y , во-вторых, из (7.102) следует, что ось стержня (т. е. линия, которая связывает центры тяжести поперечных сечений) после деформации остается в плоскости x, z . Точки $x = y = 0$ на оси стержня переходят после деформации в точки $x^* = x + u, y^* = y + v, z^* = z + w$,

$$\text{т. е.} \quad x^* = \frac{Q_x}{EJ_{yy}} \left(l - \frac{z}{3} \right) \frac{z^2}{2}, \quad y^* = 0, \quad z^* = z.$$

Уравнение изогнутой оси стержня, т. е. уравнение упругой линии, имеет вид

$$x^* = \frac{Q_x}{EJ_{yy}} \left(\frac{l}{2} z^{*2} - \frac{z^{*3}}{6} \right). \quad (7.103)$$

Отсюда для кривизны упругой линии получаем выражение

$$\frac{d^2 x^*}{dz^{*2}} = \frac{Q_x}{EJ_{yy}} (l - z) = \frac{M_y}{EJ_{yy}}.$$

Оно вновь согласуется с уравнением упругой линии, следующим из гипотезы Бернулли — Эйлера. Напротив, гипотеза Бернулли, согласно которой при чистом изгибе поперечное сечение остается плоским, при поперечном изгибе не подтверждается. Поперечное сечение изгибаемого стержня не остается ни плоским, ни перпендикулярным оси стержня¹²⁾. Из (7.102) находим для поперечного сечения $z = c$

$$z^* = c + w = c + \phi + \frac{Q_x}{EJ_{yy}} \left[\phi_1 - \left(1 + \frac{\nu}{2} \right) \frac{x^3}{3} - \frac{\nu}{2} xy^2 - \left(lc - \frac{c^2}{2} \right) x \right],$$

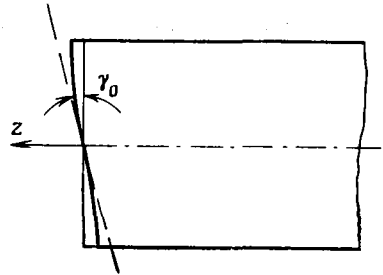


Рис. 7.21. Искривление поперечного сечения при поперечном изгибе.

и видно, что даже при $\phi = 0$ появляется деформация поперечного сечения. Вертикально действующие касательные напряжения τ_{zx} для $x = y = 0$ выражаются в виде

$$(\tau_{zx})_0 = \frac{Q_x}{2(1 + \nu)J_{yy}} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)_0$$

и соответственно изменение первоначально прямого угла (рис. 7.21)

$$\gamma_0 = \frac{Q_x}{EJ_{yy}} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)_0. \quad (7.104)$$

В общем случае депланацию поперечного сечения можно представить в виде

$$\omega = \theta \phi - \frac{Q_x}{EJ_{yy}} \left(l - \frac{z}{2} \right) xz + \gamma_0 x + \frac{Q_x}{EJ_{yy}} \left[\phi_1 - \left(1 + \frac{\nu}{2} \right) \frac{x^3}{3} + \frac{\nu}{2} xy^2 - x \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)_0 \right],$$

где первый член соответствует кручению, второй обусловлен наклоном упругой линии к оси z , третий соответствует депланации поперечного сечения согласно (7.104), а четвертый связан с неравномерным распределением касательных напряжений.

7.6.4. Примеры

В данном разделе будет рассмотрено несколько элементарных примеров поперечного изгиба для сечений различной формы, которые были решены еще Сен-Венаном [55]. При этом будет применяться указанный С. П. Тимошенко [56] метод построения решения, непосредственно использующий граничное условие на функцию напряжений при изгибе $B(x, y)$ и приводящий к упрощению решения для определенных форм поперечного сечения.

7.6.4.1. Круговое поперечное сечение. Выражение (7.87) с помощью произвольной функции $f(y)$ можно записать в иной форме

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\tau_{zx} + \frac{Q_x x^2}{2J_{yy}} + f(y) \right] + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0, \quad (7.105)$$

и для случая поперечного сечения с двумя осями симметрии ($C = 0$) (7.89) принимает вид

$$\Delta B = \frac{\nu Q_x}{(1 + \nu) J_{yy}} y - \frac{df}{dy}. \quad (7.106)$$

Согласно граничному условию (7.86), требуется, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial B}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial B}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{dB}{ds} = \left[\frac{Q_x x^2}{2J_{yy}} - f(y) \right] \frac{dy}{ds}.$$

Отсюда можно вычислить значение функции напряжений при изгибе B на контуре, если подходящим образом выбрать функцию $f(y)$. Если линию контура поперечного сечения принять

в форме $f(y) = Q_x x^2 / (2J_{yy})$, то граничное условие будет иметь вид

$$B(x, y) = 0. \quad (7.107)$$

В частности, для кругового поперечного сечения с уравнением контура $x^2 + y^2 = a^2$ принимают

$$f(y) = \frac{Q_x}{2J_{yy}} x^2 = \frac{Q_x}{2J_{yy}} (a^2 - y^2).$$

Тогда (7.106) приводится к виду

$$\Delta B = \frac{1 + 2\nu}{1 + \nu} \frac{Q_x y}{J_{yy}}.$$

Легко видеть, что это дифференциальное уравнение и граничное условие (7.107) удовлетворяются, если

$$B = \frac{(1 + 2\nu) Q_x}{8(1 + \nu) J_{yy}} (x^2 + y^2 - a^2) y.$$

Отсюда при помощи модифицированных соотношений (7.88) для касательных напряжений имеем

$$\tau_{zx} = \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{Q_x x^2}{2J_{yy}} + f(y), \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial B}{\partial x}$$

и с учетом $J_{yy} = \pi a^4 / 4$

$$\tau_{zx} = \frac{(3 + 2\nu) Q_x}{2(1 + \nu) \pi a^4} \left(a^2 - x^2 - \frac{1 - 2\nu}{3 + 2\nu} y^2 \right),$$

$$\tau_{zy} = -\frac{(1 + 2\nu) Q_x}{(1 + \nu) \pi a^4} xy.$$

На горизонтальном диаметре $x = 0$ (нейтральный слой) касательные напряжения получаются равными

$$(\tau_{zx})_{x=0} = \frac{(3 + 2\nu) Q_x}{2(1 + \nu) \pi a^4} \left(a^2 - \frac{1 - 2\nu}{3 + 2\nu} y^2 \right), \quad (\tau_{zy})_{x=0} = 0.$$

Максимальное касательное напряжение *)

$$(\tau_{zx})_{\max} = \frac{(3 + 2\nu) Q_x}{y^2 (1 + \nu) \pi a^4}$$

появляется в центре тяжести кругового поперечного сечения, в то время как касательные напряжения на границе будут равны

$$(\tau_{zx})_{y=\pm a} = \frac{1 + 2\nu}{1 + \nu} \frac{Q_x}{\pi a^2}.$$

*) Для $\nu = 0,3$ следует $\tau_{\max} = 1,38 Q_x / (\pi a^2)$, в то время как элементарная теория, основанная на предположении о постоянстве касательных напряжений вдоль горизонтального диаметра, дает $\tau = 1,33 Q_x / (\pi a^2)$.

Функция изгиба, применяемая при общей постановке, для кругового поперечного сечения имеет вид

$$\phi_1 = \frac{3+2\nu}{4} a^2 x + \frac{1+2\nu}{12} (x^3 - 3xy^2).$$

Отсюда можно вычислить дефлекцию поперечного сечения.

7.6.4.2. Эллиптическое поперечное сечение. Процедура решения аналогична применяемой для кругового поперечного сечения. Для эллиптического контура

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

принимают

$$f(y) = \frac{Q_x}{2J_{yy}} \left(a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2 \right).$$

Дифференциальное уравнение для B запишется в форме

$$\Delta B = \frac{Q_x y}{J_{yy}} \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{\nu}{1+\nu} \right).$$

Его решение имеет вид

$$B = k \left(x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 - a^2 \right) y, \text{ где } k = \frac{(1+\nu) a^2 + \nu b^2}{2(1+\nu)(3a^2 + b^2)} \frac{Q_x}{J_{yy}}.$$

Для касательных напряжений (при $J_{yy} = \pi a^3 b/4$) имеем

$$\tau_{zx} = \frac{2(1+\nu) a^2 + b^2}{(1+\nu)(3a^2 + b^2)} \frac{2Q_x}{\pi a^3 b} \left[a^2 - x^2 - \frac{(1-2\nu) a^2 y^2}{2(1+\nu) a^2 + b^2} \right],$$

$$\tau_{zy} = - \frac{(1+\nu) a^2 + \nu b^2}{(1+\nu)(3a^2 + b^2)} \frac{2Q_x}{\pi a^3 b} xy.$$

Их максимальные значения в центре тяжести поперечного сечения равны

$$(\tau_{zx})_{\max} = \frac{2Q_x}{\pi a b} \frac{2(1+\nu) a^2 + b^2}{(1+\nu)(3a^2 + b^2)},$$

а на контуре при $x = \pm a/\sqrt{2}$, $y = \pm b/\sqrt{2}$

$$(\tau_{zy})_{\max} = \frac{2Q_x}{\pi a^2} \frac{(1+\nu) a^2 + \nu b^2}{(1+\nu)(3a^2 + b^2)}.$$

Функция изгиба для эллиптического поперечного сечения

$$\phi_1(x, y) = \frac{2(1+\nu) a^2 + b^2}{3a^2 + b^2} a^2 x + \frac{a^2 + \nu(a^2 + b^2)}{3(3a^2 + b^2)} (x^3 - 3xy^2).$$

7.6.4.3. Прямоугольное поперечное сечение. Уравнение контура имеет вид $(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0$.

Как видно из рис. 7.22, касательное напряжение τ_{zx} должно быть четной функцией относительно x и y , в то время как τ_{zy} —

нечетная функция относительно y . Отсюда следует, что, согласно выражениям

$$\tau_{zx} = \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{Q_x x^2}{2J_{yy}} + f(y), \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial B}{\partial x},$$

функция напряжений при изгибе $B(x, y)$ должна быть четной относительно x и нечетной относительно y .

Граничное условие (7.107) удовлетворяется на кромках $x = \pm a$, если $f(y) = Q_x a^2 / 2J_{yy}$. С другой стороны, на кромках $y = \pm b$ всегда $dy/ds = 0$. Таким образом, граничное условие $B = 0$ удовлетворено и дифференциальное уравнение (7.106) имеет вид

$$\Delta B = \frac{\nu Q_x}{(1 + \nu) J_{yy}} y.$$

Для функции напряжений при изгибе принимают

$$B(x, y) = B_1(y) + B_2(x, y), \quad (7.108)$$

причем $B_2(x, y)$ — некоторая вновь введенная гармоническая функция. Для B_1 справедливы дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 B_1}{dy^2} = \frac{\nu Q_x}{(1 + \nu) J_{yy}} y$$

и граничное условие $B_1 = 0$ на $y = \pm b$. Частное решение этого уравнения имеет вид

$$B_1 = \frac{\nu Q_x}{6(1 + \nu) J_{yy}} (y^3 - b^2 y).$$

Гармоническая функция $B_2(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta B_2 = 0, \quad (7.109)$$

а граничное условие (7.107) на функцию напряжений при изгибе требует, чтобы, согласно (7.108),

$$B_2(x, \pm b) = 0, \quad B_2(\pm a, y) = -B_1(y). \quad (7.110)$$

Для решения уравнения (7.109) применяется разделение переменных $B_2 = f_1(x)f_2(y)$. Это прежде всего приводит (ср. с п. 7.4.5.4) к выражению для

$$B_2(x, y) = (\alpha \operatorname{ch} kx + \beta \operatorname{sh} kx)(\gamma \cos ky + \delta \sin ky)$$

и вследствие вышеуказанных свойств $B_2(x, y)$ должно быть

$$B_2(x, y) = A \operatorname{ch}(kx) \sin(ky), \quad (7.111)$$

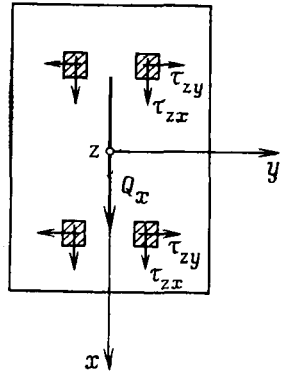


Рис. 7.22. Касательные напряжения в прямоугольном поперечном сечении при поперечном изгибе.

где A и k — константы. Из первого граничного условия (7.110) следует

$$A \sin kb = 0, \text{ т. е. } k = n\pi/b \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Решение (7.111) представляется затем в виде ряда Фурье

$$B_2(x, y) = \sum_n A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (7.112)$$

Тогда второе граничное условие (7.110) дает

$$\sum_n A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} = \frac{\nu Q_x}{6(1+\nu)J_{yy}} (b^2 y - y^3).$$

Вычисление коэффициентов Фурье $A_n \operatorname{ch}(n\pi a/b) = \rho_n$ приводит к равенству

$$\sum_n \rho_n \int_{-b}^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{m\pi y}{b} dy = \frac{\nu Q_x}{6(1+\nu)J_{yy}} \int_{-b}^b (b^2 y - y^3) \sin \frac{m\pi y}{b} dy,$$

после интегрирования которого имеем

$$\rho_n = \frac{(-1)^n}{n^3} \frac{4\nu Q_x b^3}{\pi^3 (1+\nu)J_{yy}}$$

и, согласно (7.108), окончательно получаем функцию напряжений при изгибе в виде

$$B(x, y) = \frac{\nu Q_x}{6(1+\nu)J_{yy}} \left[y^3 - b^2 y - \frac{12b^3}{\pi^3} \sum_n \frac{(-1)^n}{n^3} \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b} \right],$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.113)$$

Как и в случае кручения прямоугольного поперечного сечения, здесь ряд сходится очень быстро.

Касательные напряжения получают равными

$$\tau_{zx} = \frac{Q_x}{2J_{yy}} (a^2 - x^2) +$$

$$+ \frac{\nu Q_x}{6(1+\nu)J_{yy}} \left[3y^2 - b^2 - \frac{12b^2}{\pi^2} \sum_n \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \cos \frac{n\pi y}{b} \right],$$

$$\tau_{zy} = \frac{2Q_x \nu b^2}{\pi^2 (1+\nu)J_{yy}} \sum_n \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

В частности, при $x=0$ имеем (если, кроме того, положить $J_{yy} = 4a^3b/3$)

$$(\tau_{zx})_{x=0} = \frac{3Q_x}{8ab} \left\{ 1 + \frac{\nu}{1+\nu} \left[\frac{3y^2 - b^2}{3a^2} - \frac{4b^2}{\pi^2 a^2} \sum_n \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\cos \frac{n\pi y}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \right] \right\},$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Максимальное значение напряжений будет в центре тяжести:

$$(\tau_{zx})_{\max} = \frac{3Q_x}{8ab} \left\{ 1 - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{b^2}{a^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_n \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \right] \right\},$$

а значение на границе $y = \pm b$ равно

$$(\tau_{zx})_R = \frac{3Q_x}{8ab} \left\{ 1 + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{b^2}{a^2} \left[\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_n \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \right] \right\}.$$

Аналогично при $y=0$ получаем

$$(\tau_{zx})_{y=0} = \frac{3Q_x}{8a^3b} (a^2 - x^2) - \frac{\nu Q_x b}{8(1+\nu)a^3} \left[1 + \frac{12}{\pi^2} \sum_n \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \right].$$

В сопротивлении материалов распределение касательных напряжений вычисляют приблизительно (без учета условий совместности). В результате получается постоянное значение по ширине балки и зависимость от x в виде $\tau_{zx} = [3Q_x/8a^3b] (a^2 - x^2)^{1/3}$. Как видно, это выражение представляет собой первый член вышеприведенного соотношения для τ_{zx} .

Следует заметить, что в случае $b \ll a$ дополнительные члены в выражениях для напряжений практически несущественны и, следовательно, приближенное решение элементарной теории оказывается достаточно точным.

В заключение следует привести еще общее выражение функции изгиба ϕ_1 для прямоугольного поперечного сечения, оно имеет вид

$$\phi_1(x, y) = \left[(1+\nu)a^2 - \frac{\nu}{3}b^2 \right] x - \frac{4\nu b^3}{\pi^3} \sum_n \frac{(-1)^n}{n^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \cos \frac{n\pi y}{b},$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Пользуясь им, можно также вычислить касательные напряжения и другие характеризующие изгиб величины.

Плоская (двумерная) задача теории упругости

Еще большее значение для приложений имеют задачи, в которых искомые функции зависят от двух координат. При этом различают два случая, математическое описание которых совпадает: плоское деформированное состояние и плоское напряженное состояние.

Первый случай соответствует длинному призматическому телу (с продольной осью координат z , как для одномерной задачи), которое нагружается поверхностными силами, не зависящими от z и не имеющими составляющей в направлении оси z . В качестве примера на рис. 8.1 представлены линейно

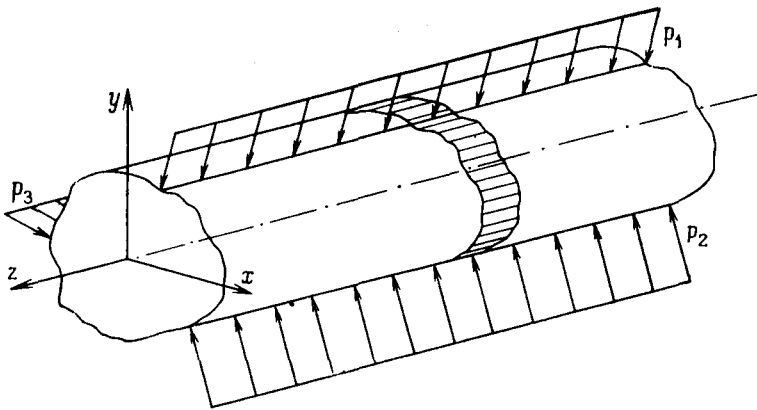


Рис. 8.1. Плоское деформированное состояние в призматическом теле.

распределенные вдоль образующей цилиндра нагрузки p_1 , p_2 и p_3 . При этом упругое тело может быть или бесконечно длинным или оно имеет конечную длину и его края соответствующим образом закреплены. В каждом поперечном сечении тела определяющим является тогда плоское деформированное состояние.

Во втором случае речь идет о плоском упругом теле малой толщины (так называемой пластине), которое нагружается только силами в своей плоскости, причем нормальные напряжения в направлении толщины отсутствуют (рис. 8.2 с

внешними силами F_1 , F_2 и F_3). Приложенные силы или равномерно распределены по толщине и, следовательно, не зависят от z (что с хорошим приближением всегда выполняется для тонких пластин), или распределены симметрично относительно так называемой *срединной плоскости* (воображаемая поверхность, которая делит пополам толщину пластины). Тогда может быть

введено их среднее по толщине пластины значение (см. ниже, п. 8.1.2). В такой пластине, которая соответствующим образом закреплена, основным является плоское напряженное состояние.

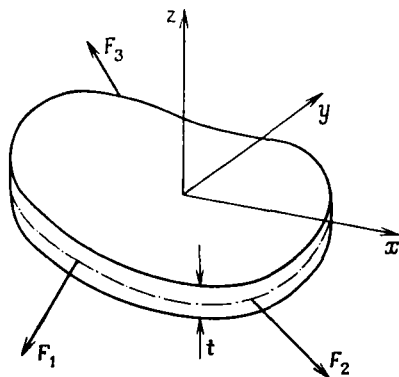


Рис. 8.2. Плоское напряженное состояние в тонкой пластине.

§ 8.1. Основные уравнения теории упругости для плоского деформированного состояния и плоского напряженного состояния

Основные уравнения теории упругости для общего случая (см. гл. 3) соответствующим образом упрощаются для плоской задачи, причем различие между плоским деформированным состоянием и плоским напряженным состоянием становится заметным только в физическом законе *).

8.1.1. Плоское деформированное состояние

Для плоского деформированного состояния перемещения (в декартовых координатах) имеют вид

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \quad v = v(x, y), \\ w &= \text{const или } w = 0; \end{aligned} \quad (8.1)$$

кроме того, обращаются в нуль все производные по z , т. е. $\partial/\partial z = 0$. При этом кинематические уравнения запишутся

*) В дальнейшем будут применяться упрощенные соотношения и только лишь для компактности формул будет использоваться индексная форма записи.

в виде

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (8.2)$$

Далее следуют равенства

$$\epsilon_{zz} = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0. \quad (8.3)$$

Остается только одно условие совместности деформаций (8.2):

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (8.4)$$

Ненулевыми компонентами тензора напряжений являются σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} , а также σ_{zz} . Для закона Гука получаются соотношения

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= (1/E) [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], \\ \epsilon_{yy} &= (1/E) [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})], \quad \gamma_{xy} = \tau_{xy}/G, \end{aligned} \quad (8.5)$$

причем

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}). \quad (8.6)$$

Деформации (8.5) могут быть представлены также в виде

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= (1/2G) [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], \\ \epsilon_{yy} &= (1/2G) [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]. \end{aligned} \quad (8.5')$$

Обращение формул (8.5) дает

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}], \quad (8.7)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_{yy} + \nu\epsilon_{xx}], \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy};$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}). \quad (8.8)$$

Первые два уравнения (8.7) могут быть записаны также в иной форме:

$$\sigma_{xx} = 2G \left[\epsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \right],$$

$$\sigma_{yy} = 2G \left[\epsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \right].$$

В тензорной форме записи уравнения (8.5) и соответственно (8.7) при $x, y = i, j$ примут вид

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} s \right),$$

причем $s = (1+\nu)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ и соответственно

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} e \right),$$

при этом $e = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$ (первый инвариант тензора деформаций). Из уравнений равновесия остаются

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad (8.9)$$

причем объемные силы здесь не учитываются*).

Граничные условия для напряжений [ср. с (1.17)], если на краю цилиндра заданы напряжения p_x и p_y (первая граничная задача) имеют вид

$$\begin{aligned} p_x^n &= \sigma_{xx} \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y), \\ p_y^n &= \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_{yy} \cos(n, y), \\ p_z^n &= 0. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Если речь идет о призматическом теле длиной l , концевые сечения которого оперты, то для них справедливы граничные условия $w(x, y, 0) = w(x, y, l) = 0$. Тогда силы, действующие в концевых поперечных сечениях, равны

$$F_z = \int_A \sigma_{zz} dA,$$

причем напряжения интегрируются по поперечному сечению призматического тела.

Пусть, наконец, основные уравнения в перемещениях или в напряжениях задаются соответственно в форме уравнений Навье или Бельтрами — Мичелла. Они запишутся в виде

$$\begin{aligned} \Delta u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0, \\ \Delta v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned}$$

и соответственно

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= 0, \\ \Delta \sigma_{yy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} &= 0, \\ \Delta \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} &= 0, \end{aligned}$$

где $s = (1 + \nu) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$.

*) Если имеются объемные силы, они не должны зависеть от компоненты z .

8.1.2. Плоское напряженное состояние

При плоском напряженном состоянии в плоскости x, y имеются компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y), \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y), \quad \tau_{xy} = \tau(x, y), \quad (8.11)$$

$$\sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0. \quad (8.12)$$

Тогда компоненты перемещений u, v и w вообще не зависят от z . При этом кинематические уравнения соответствуют уравнениям (8.2) для плоского деформированного состояния, условия совместности — уравнению (8.4), уравнения равновесия — уравнениям (8.9), а краевые условия — условиям (8.10) в напряжениях для первой граничной задачи.

Различие между плоским деформированным состоянием и плоским напряженным состоянием проявляется при рассмотрении деформаций, например в законе Гука. Из него следует

$$e_{xx} = (1/E)(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}), \quad e_{yy} = (1/E)(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}), \quad \gamma_{xy} = \tau_{xy}/G, \quad (8.13)$$

$$e_{zz} = -(\nu/E)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}). \quad (8.14)$$

Обращение (8.13) дает

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(e_{xx} + \nu e_{yy}), \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(e_{yy} + \nu e_{xx}), \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad (8.15)$$

а также

$$e_{zz} = -\frac{\nu}{1+\nu}(e_{xx} + e_{yy}). \quad (8.16)$$

Другое представление для нормальных напряжений (8.15) запишется в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G \left[e_{xx} + \frac{\nu}{1-\nu}(e_{xx} + e_{yy}) \right], \\ \sigma_{yy} &= 2G \left[e_{yy} + \frac{\nu}{1-\nu}(e_{xx} + e_{yy}) \right]. \end{aligned}$$

В тензорной форме записи уравнения (8.13) и соответственно (8.15) имеют вид

$$e_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} s \right),$$

причем $s = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ и соответственно

$$\sigma_{ij} = 2G \left(e_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} e \right),$$

где

$$e = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{1-2\nu}{E} s.$$

Как уже упоминалось, плоское напряженное состояние реализуется не точно, а лишь приближенно в очень тонких пластинах. Как было показано Файлоном [57], можно рассмотреть обобщенный случай и модифицировать приведенные выше соотношения. При этом предполагается, что приложенные силы симметрично распределены относительно срединной плоскости.

Если предположить, что напряжения σ_{zz} в пластине отсутствуют, а τ_{zx} и τ_{zy} на наружной и внутренней поверхностях пластины равны нулю, то для основных величин, например напряжений σ_{xx} , можно ввести их средние значения по толщине пластины

$$\bar{\sigma}_{xx} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} dz.$$

Этот случай, следуя Ляву, называют *обобщенным* плоским напряженным состоянием. Он имеет большое практическое значение.

В заключение следует упомянуть, что из уравнения совместности деформаций (8.4) при подстановке напряжений для плоского деформированного состояния или плоского напряженного состояния получается одно и то же соотношение, а именно *)

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \quad (8.17)$$

Это означает, что сумма напряжений является гармонической функцией.

8.1.3. Основные уравнения для плоского деформированного состояния и плоского напряженного состояния в полярных координатах

При переходе от плоской декартовой системы координат к полярной справедливы (рис. 8.3) известные формулы преобразования $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, а также формулы для произ-

*) В случае, когда имеются объемные силы, вместо (8.17) справедливы уравнения

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right)$$

для плоского деформированного состояния и

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(1+\nu) \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right)$$

для плоского напряженного состояния.

ВОДНЫХ

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}.\end{aligned}\quad (8.18)$$

Компоненты перемещений будут u_r и u_φ , а для деформаций следуют формулы

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \quad \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}, \quad (8.19)$$

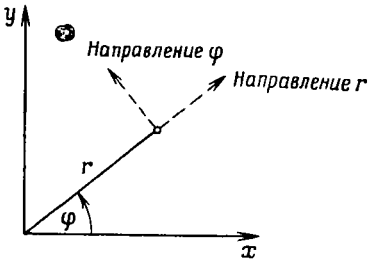
причем недифференциальное

слагаемое u_r/r (соответственно u_φ/r) соответствует удлинению в окружном направлении при радиальном и соответственно окружном перемещениях.

Условие совместности деформаций имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r} - \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \gamma_{r\varphi}}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \gamma_{r\varphi}}{\partial \varphi}.\end{aligned}\quad (8.20)$$

Рис. 8.3. Полярные координаты на плоскости r, φ .



Для уравнений равновесия в компонентах напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\tau_{r\varphi}$ получаются выражения

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\varphi}}{r} = 0.\end{aligned}\quad (8.21)$$

Закон Гука для плоского деформированного состояния имеет вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_{rr} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{\varphi\varphi} \right), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_{\varphi\varphi} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{rr} \right), \\ \gamma_{r\varphi} = \frac{\tau_{r\varphi}}{G}.\end{aligned}\quad (8.22)$$

или

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_{\varphi\varphi} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{rr}) \right], \quad \tau_{r\varphi} = G \gamma_{r\varphi};\end{aligned}\quad (8.23)$$

для плоского напряженного состояния

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\varphi\varphi}), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{E} (\sigma_{\varphi\varphi} - \nu \sigma_{rr}), \quad \gamma_{r\varphi} = \frac{\tau_{r\varphi}}{G}, \quad (8.24)$$

или

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\varphi\varphi}), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu \varepsilon_{rr}), \quad \tau_{r\varphi} = G \gamma_{r\varphi}. \quad (8.25)$$

В соответствующей форме можно представить также уравнения Навье относительно перемещений u_r и u_φ и уравнения Бельтрами — Мичелла для компонент напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ и $\tau_{r\varphi}$ (однако более подробно это обсуждаться здесь не будет).

Наконец, для условий совместности, выраженных в напряжениях, имеем

$$\Delta(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) = 0, \quad (8.26)$$

где оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta(\dots) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) (\dots). \quad (8.27)$$

Приведенные соотношения упрощаются соответствующим образом для случая осевой симметрии относительно оси z ($u_\varphi = 0$, $\partial/\partial\varphi = 0$).

§ 8.2. Функция напряжений Эри

Как уже упоминалось, математическая трактовка двумерных задач теории упругости без учета объемных сил идентична для плоского деформированного состояния и плоского напряженного состояния.

8.2.1. Представление в декартовых координатах

Уравнения равновесия (8.9) тождественно удовлетворяются введением функции напряжений $F(x, y)$ по формулам

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (8.28)$$

Эти формулы впервые были установлены Эри (но применены не для решения задач теории упругости), и $F(x, y)$ называют *функцией напряжений Эри*¹⁴⁾. Как видно, речь здесь идет о частном случае обсуждавшихся в п. 5.2.3 общих формул. Соотношения (8.28) соответствуют формуле (5.64), если в ней положить U_{33} равным нулю.

Функция напряжений Эри должна также удовлетворять условию совместности (8.17). Это приводит к основному дифференциальному уравнению

$$\Delta \Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0, \quad (8.29)$$

которое впервые было получено Максвеллом. Дифференциальное уравнение (8.29) называют бигармоническим уравнением, а его решения — бигармоническими функциями. Как уже упоминалось (см. гл. 3), появление бигармонического уравнения является характерным для теории упругости.

Известны многочисленные частные решения уравнения (8.29) ^{*}), каждое из которых соответствует определенному напряженному состоянию, удовлетворяющему уравнениям равновесия и совместности. Основная трудность при построении решения состоит в подборе функций, удовлетворяющих граничным условиям. Наложением их были решены многочисленные задачи теории упругости, имеющие большое практическое значение. Впрочем, следует заметить, что общего решения бигармонического уравнения не существует и отсутствуют также общие методы его решения. Существенное продвижение дает способ комплексных функций напряжений Колосова, который подробно обсуждается в § 8.4.

Краевые условия в напряжениях для первой граничной задачи теперь можно выразить через функцию напряжений Эри. Напряжения на границе $p_x(s)$ и $p_y(s)$ задаются как функции координаты контура s (рис. 8.4). Для компонент нормального единичного вектора (направляющих косинусов), как видно из рис. 8.4, запишем

$$\cos(n, x) = \cos(t, y) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = -\cos(t, x) = -\frac{dx}{ds}. \quad (8.30)$$

Теперь из (8.10) имеем

$$\sigma_{xx} dy - \tau_{xy} dx = p_x ds, \quad \sigma_{yy} dx - \tau_{xy} dy = -p_y ds$$

и с учетом (8.28) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx &= p_x ds, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dy &= -p_y ds. \end{aligned}$$

^{*}) В декартовых координатах это, например, функции

$$\begin{aligned} x^2, y^2, xy, x^3, y^3, x^2y, xy^2, \dots, \\ x^2 - y^2, x^4 - y^4, x^2y^2 - \frac{1}{3}y^4, \dots, \end{aligned}$$

$$\cos(\lambda x) \operatorname{ch}(\lambda y), \cos(\lambda y) \operatorname{ch}(\lambda x), x \cos(\lambda x) \operatorname{ch}(\lambda y), \dots$$

или их линейные комбинации. Решениями бигармонического уравнения являются также все гармонические функции.

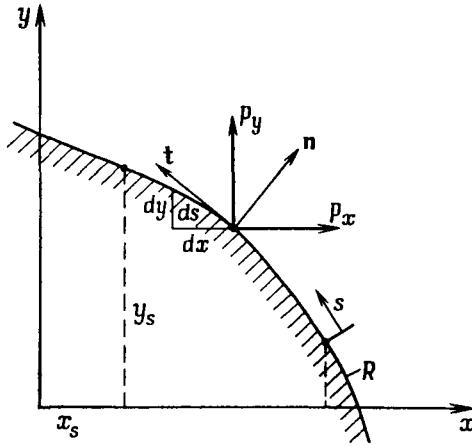


Рис. 8.4. К формулировке краевых условий для первой граничной задачи (n или t — соответственно нормальный или касательный вектор на границе).

Эти выражения можно записать также в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) dy &= d \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = p_x ds, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) dy &= d \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = -p_y ds, \end{aligned} \quad (8.31)$$

так как они представляют собой полные дифференциалы. Интегрируя вдоль контура, найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= - \int_0^s p_y ds = f_x(s) + C_1, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \int_0^s p_x ds = f_y(s) + C_2, \end{aligned} \quad (8.32)$$

где $f_x(s)$ и $f_y(s)$ — заданные функции *).

Теперь можно математически сформулировать первую граничную задачу плоской теории упругости следующим образом:

Требуется найти бигармоническую функцию в области, если на границе заданы производные функции по обеим координатам.

Иная формулировка может быть получена, если вычислить функцию напряжений F , а также ее нормальную производную

* Опасность перепутать их с компонентами объемных сил (см. примечание к стр. 195) здесь, вероятно, невелика.

dF/dn через $f_x(s)$ и $f_y(s)$. Из выражения

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = f_x(s) dx + f_y(s) dy$$

следует

$$F = \int_0^s \left[f_x(s) \frac{dx}{ds} + f_y(s) \frac{dy}{ds} \right] ds = g(s) + \text{const.} \quad (8.33)$$

Граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dn} &= \frac{dF}{dx} \cos(n, x) + \frac{dF}{dy} \cos(n, y) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dx}{ds} = h(s) + \text{const.} \end{aligned} \quad (8.34)$$

При определении напряжений константа не существенна.

Таким образом, *первая граничная задача* может быть сформулирована также следующим образом:

Требуется найти бигармоническую функцию в области по заданным на границе значениям самой функции и ее нормальной производной.

Величины F и dF/dn определяются через напряжения на контуре, и им можно дать статическое (механическое) толкование. Функция напряжений $F(s)$ соответствует равнодействующему моменту внешних сил, действующих на контуре области от $s=0$ до s относительно точки отсчета s . Это можно показать, если интеграл в (8.33) проинтегрировать по частям. Тогда

$$F(s) = \int_0^s (f_x dx + f_y dy) = (f_x x + f_y y) \Big|_0^s - \int_0^s (x df_x + y df_y)$$

и с учетом $df_x = -p_y ds$ и $df_y = p_x ds$ имеем

$$\begin{aligned} F(s) &= f_x(s) x_s + f_y(s) y_s + \int_0^s (p_y x - p_x y) ds = \\ &= \int_0^s [-(x_s - x) p_y + (y_s - y) p_x] ds. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Нормальная производная $(dF/dn)_R$ соответствует проекции внешних сил, действующих на контуре области от $s=0$ до s , на направление касательной к границе (так называемый *поток сил* в касательном направлении).

В приложениях часто встречаются задачи со свободными от нагрузки границами. При этом для получения решения очень

полезны простейшие граничные условия

$$(F)_R = 0, \quad (dF/dn)_R = 0. \quad (8.36)$$

Если появляются объемные силы, например силы тяжести или центробежные силы при вращении тела, их можно ввести с помощью потенциала V по формулам

$$f_x = -\partial V/\partial x, \quad f_y = -\partial V/\partial y$$

(следует учесть при этом примечание на стр. 195). Тогда формулы для напряжений (для плоского деформированного состояния и плоского напряженного состояния) будут иметь вид

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + V, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + V, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (8.37)$$

Если обратиться к общим уравнениям совместности (см. примечание на стр. 195), то дифференциальные уравнения относительно F для случаев плоского деформированного состояния и плоского напряженного состояния оказываются различными. Вместо однородного бигармонического уравнения получаются уравнения

$$\Delta \Delta F = \begin{cases} -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \Delta V & \text{для плоского деформированного} \\ & \text{состояния,} \\ -(1-\nu) \Delta V & \text{для плоского напряженного} \\ & \text{состояния.} \end{cases}$$

8.2.2. Представление в полярных координатах

При преобразовании к полярным координатам (см. п. 8.1.3) функция напряжений Эри $F(r, \varphi)$ оказывается функцией координат r и φ . Уравнения равновесия (8.21) удовлетворяются при

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right). \quad (8.38)$$

Из условий совместности (8.26) при пренебрежении объемными силами вновь получаем бигармоническое уравнение в полярных координатах

$$\Delta \Delta F = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 F = 0. \quad (8.39)$$

Решения этого дифференциального уравнения можно представить в общей форме $f(r) \sin(n\varphi)$ или $f(r) \cos(n\varphi)$, причем $f(r)$ являются степенными функциями от r . Но могут существовать также решения $r\varphi \sin \varphi$, $r\varphi \cos \varphi$, $r^2\varphi$, а также $\ln r$, $r \ln r$, $r^2 \ln r$. Общая формула в виде ряда Фурье, содержащая функ-

ции такого вида, была получена Мичеллом (см. [A.26], где содержится обсуждение этого решения). Она имеет вид

$$\begin{aligned}
 F(r, \varphi) = & A_0 \ln r + B_0 r^2 \ln r + C_0 r^2 + D_0 r^2 \varphi + A'_0 + \\
 & + \frac{1}{2} A_1 r \varphi \sin \varphi + \left(B_1 r^3 + \frac{A'_1}{r} + B'_1 r \ln r \right) \cos \varphi - \\
 & - \frac{1}{2} C_1 r \varphi \cos \varphi + \left(D_1 r^3 + \frac{C'_1}{r} + D'_1 r \ln r \right) \sin \varphi + \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n r^{n+2} + \frac{A'_n}{r^n} + B'_n r^{2-n} \right) \cos n\varphi + \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \left(C_n r^n + D_n r^{n+2} + \frac{C'_n}{r^n} + D'_n r^{2-n} \right) \sin n\varphi. \quad (8.40)
 \end{aligned}$$

В частном случае осевой симметрии относительно оси z функция напряжений Эри зависит только от r и (8.39) становится обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 F = 0, \quad (8.41)$$

или

$$F'''' + \frac{2}{r} F''' - \frac{1}{r^2} F'' + \frac{1}{r^3} F' = 0, \quad (8.42)$$

где $(\dots)' = d/dr(\dots)$.

С помощью экспоненциальной подстановки можно привести (8.42) к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, общее решение которого имеет вид

$$F(r) = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D. \quad (8.43)$$

Компоненты напряжений тогда определяются по формулам

$$\sigma_{rr} = (1/r) F'(r), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = F''(r), \quad (8.44)$$

а $\tau_{r\varphi} = 0$. Из этих соотношений можно получить ряд практически важных решений. Они обсуждаются в п. 8.5.2. Могут быть, впрочем, случаи, когда напряжения не зависят от φ , а перемещения являются функциями φ .

§ 8.3. Перемещения

Из компонент напряжений с помощью закона Гука можно определить компоненты деформаций и затем интегрированием кинематических уравнений получить перемещения. При этом перемещения твердого тела должны быть исключены из перемещений упругого тела.

С другой стороны, перемещения могут быть определены также с помощью функции напряжений Эри. При этом должны использоваться общие соотношения. Вычисления для конкретных случаев будут обсуждаться позднее при рассмотрении различных примеров (см. § 8.5).

8.3.1. Представление в декартовых координатах

При плоском деформированном состоянии целесообразно исходить из закона Гука в форме (8.5'). С учетом кинематических уравнений (8.2) получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2G} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{2G} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_{xy}}{G}.\end{aligned}$$

Вводя функцию напряжений Эри, найдем

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2G} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \Delta F \right] = \frac{1}{2G} \left[(1 - \nu) \Delta F - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right], \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{2G} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \Delta F \right] = \frac{1}{2G} \left[(1 - \nu) \Delta F - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right], \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{G} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (8.45)$$

Интегрирование (8.45) приводит к общим соотношениям для u и v в виде

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{2G} \int \left[(1 - \nu) \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] F(x, y) dx + f_1(y), \\ v &= \frac{1}{2G} \int \left[(1 - \nu) \Delta - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] F(x, y) dy + f_2(x),\end{aligned}\quad (8.46)$$

где $f_1(y)$ и $f_2(x)$ — функции интегрирования. Они определяются из третьего уравнения (8.45).

При плоском напряженном состоянии исходим из закона Гука (8.13). В результате получаем соотношения

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}), \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\tau_{xy}}{G},\end{aligned}$$

интегрирование которых приводит к выражениям

$$\begin{aligned}Eu &= \int (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) dx + g_1(y), \\ Ev &= \int (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) dy + g_2(x),\end{aligned}\quad (8.47)$$

где $g_1(y)$ и $g_2(x)$ — функции интегрирования. Если подставить (8.47) в третье кинематическое соотношение, то прежде всего найдем

$$\int \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} - \nu \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) dx + \int \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} - \nu \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right) dy + \frac{dg_2}{dx} + \frac{dg_1}{dy} = \\ = 2(1 + \nu) \tau_{xy}.$$

Это выражение может быть преобразовано следующим образом:

$$\int \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} dx + \int \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} dy - \\ - \nu \left[\int \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dy - \int \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) dx + \frac{dg_1}{dy} + \frac{dg_2}{dx} \right] = \\ = 2\tau_{xy}.$$

Интегралы в прямоугольных скобках обращаются в нуль, так как содержат уравнения равновесия; окончательно имеем

$$\int \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} dx + \int \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} dy + \frac{dg_1}{dy} + \frac{dg_2}{dx} = 2\tau_{xy}, \quad (8.48)$$

или с помощью функции напряжений Эри

$$\int \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} dx + \int \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} dy + \frac{dg_1}{dy} + \frac{dg_2}{dx} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0. \quad (8.49)$$

Это основное соотношение для определения функций $g_1(y)$ и $g_2(x)$, которые могут быть получены интегрированием равенства

$$\frac{dg_1(y)}{dy} + \frac{dg_2(x)}{dx} = G_1(y) + G_2(x)$$

для установления перемещений как твердого тела.

8.3.2. Представление в полярных координатах

Ниже ограничимся рассмотрением частного случая осевой симметрии, соответствующего бигармоническому уравнению (8.41) с общим решением (8.43). Компоненты напряжений записываются в виде

$$\sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C, \\ \tau_{r\varphi} = 0, \quad (8.50)$$

где A , B , C — константы. Видно, что для сплошной круговой пластины только решение, соответствующее однородному напряженному состоянию $\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \text{const}$, не содержит особенности при $r = 0$.

Общие решения получаются только для областей круговой формы, которые не содержат точку $r=0$. Покажем, как при этом могут быть вычислены перемещения u_r . Для плоского напряженного состояния справедлив закон Гука в форме (8.24), кинематические уравнения в случае осевой симметрии принимают вид

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} = \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\varphi\varphi}), \quad (8.51)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = \frac{1}{E} (\sigma_{\varphi\varphi} - \nu\sigma_{rr}), \quad \gamma_{r\varphi} = 0.$$

Учитывая (8.50), прежде всего получим

$$\frac{du_r}{dr} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \frac{A}{r^2} + 2(1 - \nu) B \ln r + (1 - 3\nu) B + 2(1 - \nu) C \right], \quad (8.52)$$

$$\frac{u_r}{r} = \frac{1}{E} \left[-(1 + \nu) \frac{A}{r^2} - 2(1 - \nu) B \ln r + (3 - \nu) B + 2(1 - \nu) C \right]. \quad (8.53)$$

Интегрирование (8.52) позволяет найти u_r с точностью до константы K :

$$u_r = \frac{1}{E} \left[-(1 + \nu) \frac{A}{r} + 2(1 - \nu) B r \ln r - B(1 + \nu)r + 2(1 - \nu)Cr + K \right]. \quad (8.54)$$

Вычисляя величину u_r/r из (8.54) и сравнивая ее с (8.53), из условия совпадения этих выражений найдем

$$K = 4Br. \quad (8.55)$$

Чтобы это равенство было справедливо для произвольного r , необходимо принять $K = B = 0$.

Таким образом, для радиального перемещения в случае осевой симметрии имеем выражение

$$u_r = \frac{1}{E} \left[-(1 + \nu) \frac{A}{r} + (1 - \nu) 2Cr \right], \quad (8.56)$$

причем еще не найденные произвольные постоянные определяются из граничных условий.

Соответствующее выражение для плоского деформированного состояния имеет вид

$$u_r = \frac{1}{E} \left[-(1 + \nu) \frac{A}{r} + 2C(1 - \nu - 2\nu^2)r \right]. \quad (8.57)$$

Другая возможность определения перемещений в случае осевой симметрии состоит в том, что вычисляют сначала пере-

мещение u_φ , которое при этом не будет однозначным. Затем следует потребовать выполнения однозначности перемещений, что позволит прийти к тем же результатам, которые были приведены выше.

§ 8.4. Метод комплексных функций напряжений

В § 6.2 уже обсуждался кратко метод комплексных функций напряжений и отмечалось его значение для решения плоской задачи теории упругости. К этому можно добавить, что пионерские работы Г. В. Колосова и основанные на них последующие исследования Н. И. Мухелишвили представляют собой важнейший вклад в развитие плоской задачи теории упругости в XX столетии.

В § 7.5 было показано, что теория комплексных функций комплексного переменного с успехом может быть применена для формулировки и решения задачи кручения. В дальнейшем при применении комплексных функций будут использоваться приведенные там основные соотношения.

8.4.1. Основные уравнения плоской задачи теории упругости в комплексной форме

По аналогии с § 7.5 вводится комплексная переменная $z = x + iy = re^{i\varphi}$ и компоненты перемещений и напряжений представляются как функции переменной z .

8.4.1.1. Закон Гука и уравнения равновесия. Компоненты перемещений в направлениях x и y описываются комплексным перемещением

$$D = u + iv. \quad (8.58)$$

Тогда по правилам вычислений, указанным в § 7.5,

$$\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}}. \quad (8.59)$$

Вводя комбинации напряжений $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ и $\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\tau_{xy}$, получаем для соотношений между напряжениями и деформациями, согласно закону Гука,

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu} \left(\frac{\partial D}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}} \right) \quad (8.60)$$

для плоского напряженного состояния,

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\partial D}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}} \right) \quad (8.61)$$

для плоского деформированного состояния, а также

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\tau_{xy} = 4G\partial D/\partial \bar{z} \quad (8.62)$$

для плоского напряженного и плоского деформированного состояний. Уравнения равновесия в комплексной форме будут иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\tau_{xy}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \quad (8.63)$$

8.4.1.2. Формулы Колосова. Чтобы установить связь между компонентами напряжений и перемещений и комплексными функциями напряжений, можно исходить из формулы Гурса [58]. Она показывает, что произвольную вещественную бигармоническую функцию на плоскости можно представить двумя аналитическими функциями комплексной переменной. Формула Гурса имеет вид

$$F(z, \bar{z}) = 1/2 [\bar{z}\phi(z) + z\bar{\phi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z})] = \text{Re} \{ \bar{z}\phi(z) + \chi(z) \} \quad (8.64)$$

и представляет собой общее решение в вещественной форме бигармонического дифференциального уравнения $\Delta\Delta F = 0$ на плоскости.

Формальный вывод (8.64) в предположении, что функция напряжений Эри $F(x, y)$ является аналитической функцией $F(z, \bar{z})$, основан на бигармоническом дифференциальном уравнении, выраженном в комплексной форме

$$\frac{\partial^4 F}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0 \quad (8.65)$$

с использованием правил вычислений, приведенных в п. 7.5.1. Последовательное интегрирование (8.65) позволяет получить соотношения

$$\frac{\partial^3 F}{\partial z^2 \partial \bar{z}} = g_1(z),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \bar{z}g_1(z) + g_2(z),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \bar{z}g_1^*(z) + g_2^*(z) + g_3(\bar{z}),$$

$$F = \bar{z}g_1^{**}(z) + g_2^{**}(z) + zg_3(\bar{z}) + g_4(\bar{z}),$$

где $g_1^*(z) = \int g_1(z) dz$ и т. д. Окончательно можно записать

$$F(z, \bar{z}) = f_1(z) + \bar{z}f_2(z) + f_3(\bar{z}) + zf_4(\bar{z}),$$

где f_1, \dots, f_4 — произвольные комплексные функции соответствующего аргумента.

Так как при рассмотрении функции напряжений Эри $F(z, \bar{z})$ речь идет о вещественной функции, должны быть справедливы равенства $f_3(\bar{z}) = \bar{f}_1(\bar{z})$, а также $f_4(\bar{z}) = \bar{f}_2(\bar{z})$. В результате по-

сле переименования функций и применения более удобной формы записи их двумя аналитическими функциями $\phi(z)$ и $\chi(z)$ получается соотношение (8.64).

Иной вывод формулы Гурса приведен у Н. И. Muskhelishvili (см. [A30]). При этом бигармоническая функция не предполагается с самого начала аналитической, напротив, это свойство следует само собой из комплексного представления.

Итак, все функции, входящие в решение плоской задачи теории упругости, могут быть выражены через две аналитические функции. Эти зависимости даются формулами Колосова, которые могут быть выведены различными способами.

Если, как уже было принято выше, $F(z, \bar{z})$ — функция напряжений Эри, введенная в § 8.2, то справедливы равенства

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= - \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2 F(z, \bar{z}), \\ \sigma_{yy} &= \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2 F(z, \bar{z}), \\ \tau_{xy} &= -i \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) F(z, \bar{z}).\end{aligned}\quad (8.66)$$

В результате для комбинаций напряжений получаем формулы

$$\sigma_{xx} + i\tau_{xy} = \phi'(z) + \bar{\phi}'(\bar{z}) - z\bar{\phi}''(\bar{z}) - \bar{\chi}''(\bar{z}), \quad (8.67)$$

$$\sigma_{yy} - i\tau_{xy} = \phi'(z) + \bar{\phi}'(\bar{z}) + z\bar{\phi}''(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z}). \quad (8.68)$$

Составляя сумму и разность выражений (8.67) и (8.68), получаем первые две формулы Колосова

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[\phi'(z) + \bar{\phi}'(\bar{z})] = 4 \operatorname{Re} \{ \phi'(z) \}, \quad (8.69)$$

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\tau_{xy} = -2[z\bar{\phi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z})], \quad (8.70)$$

содержащие две комплексные функции напряжений $\phi(z)$ и $\psi(z) = \chi'(z)$.

Третья формула Колосова, которая связывает компоненты перемещений с комплексными функциями напряжений, имеет различный вид для плоского напряженного и плоского деформированного состояний. Прежде всего из (8.62) и (8.70) следует

$$2G \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = -z\bar{\phi}''(\bar{z}) - \bar{\psi}'(\bar{z}),$$

и после интегрирования

$$2GD = -z\bar{\phi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}) + f(z), \quad (8.71)$$

где $f(z)$ — произвольная функция интегрирования. Теперь для плоского напряженного состояния, согласно (8.60) и (8.69),

справедливо равенство

$$2G \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial D}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}} \right) = 2[\phi'(z) + \bar{\phi}'(\bar{z})].$$

Вычисляя производные от левой части (8.71) и подставляя их, получим

$$\frac{1+\nu}{1-\nu} [-\bar{\phi}'(z) + f'(z) - \phi'(z) + \bar{f}'(\bar{z})] = 2[\phi'(z) + \bar{\phi}'(\bar{z})].$$

Следовательно,

$$f'(z) + \bar{f}'(\bar{z}) = \frac{3-\nu}{1+\nu} [\phi'(z) + \bar{\phi}'(\bar{z})].$$

Отсюда вытекает

$$f'(z) = \frac{3-\nu}{1+\nu} \phi'(z) \text{ и } f(z) = \frac{3-\nu}{1+\nu} \phi(z).$$

Таким образом, из (8.71) следует третья формула Колосова для плоского напряженного состояния

$$2GD = \frac{3-\nu}{1+\nu} \phi(z) - z\bar{\phi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}). \quad (8.72)$$

Аналогично находят для плоского деформированного состояния

$$2GD = (3-4\nu) \phi(z) - z\bar{\phi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}). \quad (8.73)$$

Чаще всего (8.72) и (8.73) записывают в виде

$$2G(u+iv) = \kappa \phi(z) - z\bar{\phi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}), \quad (8.74)$$

где

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{для плоского напряженного состояния,} \\ 3-4\nu & \text{для плоского деформированного состояния.} \end{cases} \quad (8.75)$$

Приведенные три формулы Колосова были выведены им в 1909 г. [30] другим путем и записаны в несколько иной форме. Они лежат в основе метода комплексных функций напряжений.

Для компонент деформации справедливы соотношения

$$\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} = 4 \frac{1-\nu}{E} \operatorname{Re} \{ \phi'(z) \} \quad \text{для плоского напряженного состояния,} \quad (8.76)$$

$$\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} = 4 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \operatorname{Re} \{ \phi'(z) \} \quad \text{для плоского деформированного состояния} \quad (8.77)$$

и

$$\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy} + 2i\epsilon_{xy} = -2 \frac{1+\nu}{E} [z\bar{\phi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})] \quad (8.78)$$

для плоского деформированного и плоского напряженного состояний. Легко можно вывести также полезное соотношение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -\frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\tau_{xy}).$$

8.4.1.3. Граничные условия. Как было показано выше, плоская задача теории упругости сводится к определению двух комплексных аналитических функций $\phi(z)$ и $\psi(z)$, удовлетворяющих граничным условиям.

Для первой граничной задачи, т. е. при заданных напряжениях на границе, это означает, что производные от функции напряжений Эри являются известными функциями координат контура (см. п. 8.2.1). Будем исходить из соотношения

$$\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} = - \int (p_y - ip_x) ds + \text{const.}$$

В соответствии с приведенными выше правилами вычислений левую часть можно записать в виде $2\partial F/\partial \bar{z}$ и с учетом представления (8.64) для функции напряжений Эри получим

$$2 \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \phi(z) + z\bar{\phi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}) = - \int (p_y - ip_x) ds + \text{const} \quad (8.79)$$

(при этом принято $\chi'(z) = \psi(z)$).

Интеграл в правой части представляет собой заданную комплексную функцию координат контура, и из (8.79) следует граничное условие в форме Мусхелишвили*) (переменная z пробегает вдоль контура)

$$\phi(z) + z\bar{\phi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}) = f_1 + if_2. \quad (8.80)$$

Для гладкого непрерывного контура константу можно положить равной нулю.

Для важнейшего частного случая свободного от нагрузки контура выражение (8.80) принимает вид

$$\phi(z) + z\bar{\phi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}) = 0. \quad (8.81)$$

Таким образом, при заданной функции $\phi(z)$ можно вычислить вторую комплексную функцию напряжений $\psi(z)$.

Соотношение для так называемого *потока сил*, т. е. равнодействующей внешних сил, действующих на конечной части границы AB , в комплексной форме запишется так:

$$(X + iY)_{AB} = \int_A^B (p_x + ip_y) ds = -i [\phi(z) + z\bar{\phi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})]_A^B \quad (8.82)$$

*) Иная форма граничного условия по Колосову будет приведена ниже.

и соответственно для равнодействующего момента относительно начала координат

$$M_{AB} = [\operatorname{Re} \{ \chi(z) - z\psi(z) - z\bar{z}\bar{\phi}'(z) \}]_A^B. \quad (8.83)$$

Формулы (8.82) и (8.83) были впервые получены Н. И. Мусхелишвили в 1932 г.

Для второй граничной задачи, т. е. для заданных перемещений на границе $u = g_1(s)$, $v = g_2(s)$, граничное условие следует непосредственно из третьей формулы Колосова (8.74)

$$\kappa\phi(z) - z\bar{\phi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}) = 2G(g_1 + ig_2). \quad (8.84)$$

Объединяя граничные условия (8.80) и (8.84), можно записать их в следующем виде:

$$K\phi(z) + z\bar{\phi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}) = h_1 + ih_2, \quad (8.85)$$

причем $K = 1$, $h_1 = f_1$, $h_2 = f_2$ для первой, $K = -\kappa$, $h_1 = -2Gg_1$, $h_2 = -2Gg_2$ для второй граничных задач.

8.4.1.4. Поворот системы координат. При повороте системы координат, согласно рис. 8.5, перемещения $u = u_x$ и $v = u_y$ переходят в u_ξ и соответственно в u_η , и для компонент вектора справедлив закон преобразования в комплексной форме

$$u_\xi + iu_\eta = e^{-i\alpha}(u_x + iu_y). \quad (8.86)$$

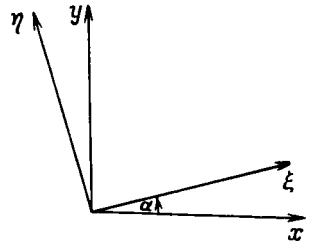


Рис. 8.5. Поворот системы координат.

Компоненты напряжений σ_{xx} , σ_{yy} и τ_{xy} переходят в $\sigma_{\xi\xi}$, $\sigma_{\eta\eta}$ и $\tau_{\xi\eta}$, а известные формулы преобразования компонент тензора второго ранга в комплексной форме будут иметь вид (они были получены в 1909 г. Г. В. Колосовым)

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy}, \\ \sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta} + 2i\tau_{\xi\eta} &= e^{-2i\alpha}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\tau_{xy}). \end{aligned} \quad (8.87)$$

Из этих соотношений получают краевое условие для первой граничной задачи в иной форме, если заданы нормальная p_n и касательная p_t компоненты напряжений на контуре в точках, нормали к которым образуют с осью x угол α . Если положить $\sigma_{\xi\xi} = p_n$ и $\tau_{\xi\eta} = p_t$, то из (8.87) после суммирования величин

$$2(p_n + ip_t) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + e^{-2i\alpha}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\tau_{xy})$$

с учетом первых двух формул Колосова для граничного условия получаем

$$\phi'(z) + \bar{\phi}'(\bar{z}) - e^{-2i\alpha} [z\bar{\phi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})] = (p_n + ip_t)_R. \quad (8.88)$$

Краевое условие для первой граничной задачи в такой форме было получено Г. В. Колосовым. Иногда удобнее применять это выражение, а не выражение, приведенное в п. 8.4.1.3.

8.4.1.5. Преобразование к полярным координатам. Перемещения u, v переходят в u_r, u_φ , а компоненты напряжений $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ — в $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \tau_{r\varphi}$. Формулам (8.86) и (8.87) соответствуют следующие формулы преобразования:

$$u_r + iu_\varphi = e^{-i\varphi}(u + iv), \quad (8.89)$$

а также

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} + 2i\tau_{r\varphi} = e^{-2i\varphi}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\tau_{xy}), \quad (8.90)$$

где $e^{-2i\varphi} = \bar{z}/z$.

Комплексные функции напряжений $\phi(z)$ и $\psi(z)$ становятся функциями комплексной переменной $z = re^{i\varphi}$, и соответствующие формулы Колосова примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} &= 2[\phi'(z) + \bar{\phi}'(\bar{z})], \\ \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} + 2i\tau_{r\varphi} &= -2[\bar{z}\bar{\phi}''(\bar{z}) + (\bar{z}/z)\bar{\psi}'(\bar{z})], \\ 2G(u_r + iu_\varphi) &= e^{-i\varphi}[\kappa\phi(z) - z\bar{\phi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z})]. \end{aligned} \quad (8.91)$$

Краевое условие для первой граничной задачи, согласно (8.88), запишется следующим образом:

$$\phi'(z) + \bar{\phi}'(\bar{z}) - [\bar{z}\bar{\phi}''(\bar{z}) + (\bar{z}/z)\bar{\psi}'(\bar{z})] = (p_r + ip_\varphi)_R.$$

Таким образом, полностью построены основные соотношения метода комплексных функций напряжений. Примеры их применения обсуждаются в § 8.5.

8.4.2. Общее представление комплексных функций напряжений

Комплексные функции при общем представлении одной би-гармонической функции, согласно формуле Гурса, могут быть произвольными.

Произвол в выборе этих функций ограничивается формулами Колосова. При этом можно установить общую структуру комплексных функций напряжений. Потребуем, чтобы компоненты напряжений и перемещений в упругом теле были непрерывными и однозначными функциями координат. При этом должна быть учтена топология рассматриваемой области.

8.4.2.1. Односвязная конечная область. Односвязная замкнутая область характеризуется тем, что имеет только одну границу R и произвольная замкнутая кривая L внутри этой области может быть непрерывно стянута в точку (рис. 8.6).

Из первых двух формул Колосова непосредственно следует, что $\phi'(z)$ и $\psi'(z)$ являются однозначными и дифференцируемыми, т. е. аналитическими функциями. Поэтому $\phi(z)$ и $\psi(z)$ имеют такой же характер и могут быть представлены в односвязной области в виде разложений в степенные ряды:

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{и} \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k. \quad (8.92)$$

Можно доказать, что для определенного распределения напряжений в области B комплексная функция напряжений $\phi(z)$ выражается с точностью до некоторой линейной функции $ciz + \alpha$, где c — вещественная, α — комплексная постоянная, а комплексная функция напряжений $\psi(z)$ определяется с точностью до одной комплексной постоянной β . Это означает, что если $\phi(z)$ или $\psi(z)$ заменить на $\phi^*(z) = \phi(z) + ciz + \alpha$ или соответственно на $\psi^*(z) = \psi(z) + \beta$, то напряженное состояние в области B , описываемое этими функциями, будет тем же самым.

Для заданного напряженного состояния можно однозначно определить комплексные функции напряжений, если при подходящем выборе констант c , α , β

$$\phi(0) = 0, \quad \text{Im} \{ \phi'(0) \} = 0, \quad \psi(0) = 0.$$

Если речь идет об определенном распределении перемещений в области B , то $\phi(z)$ или $\psi(z)$ можно заменить на $\phi^*(z) = \phi(z) + \alpha$ или на $\psi^*(z) = \psi(z) + k\alpha$, где $k = \text{const}$. В этом случае для однозначного определения $\phi(z)$ и $\psi(z)$ достаточно задать равенство $\phi(0) = 0$ подходящим выбором константы α .

8.4.2.2. Многосвязная конечная область. Это — область с отверстиями, которая характеризуется тем, что имеет более одной границы (рис. 8.7(a)). Такую область можно привести к односвязной, если ввести разрезы (указанные пунктиром на рис. 8.7(a)), которые связывают внутренние границы R_i с внешней границей R . Если для этого требуется m таких разрезов, область B называется $(m + 1)$ -связной.

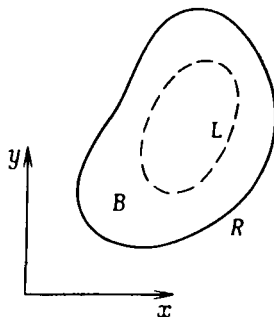


Рис. 8.6. Односвязная конечная область B с границей R (L — замкнутый контур внутри B).

В многосвязной области комплексные функции напряжений $\phi(z)$ и $\psi(z)$ не должны быть однозначными. Однако общее представление для них можно указать, если потребовать однозначности напряжений и перемещений. Продемонстрируем это прежде всего для двухсвязной, так называемой кольцевой области (рис. 8.7(b)).

Из первой формулы Колосова $\sigma_{xx} + \sigma_{\varphi\varphi} = 4 \operatorname{Re}\{\phi'(z)\}$ видно, что вещественная часть $\phi'(z)$ однозначна, если предполагается однозначность напряжений. Напротив, мнимая часть

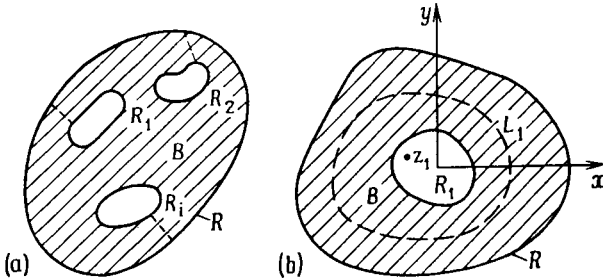


Рис. 8.7. (а) многосвязная конечная область B (с внешней границей R и внутренними границами R_i); (б) двухсвязная конечная область (z_1 — произвольная внутренняя точка в R_1).

$\phi'(z)$ при обходе по замкнутому контуру L_1 , который охватывает внутренний контур R_1 , получает постоянное чисто мнимое приращение, которое обозначают через $2\pi iA$ (A — вещественное число).

Если рассмотреть функцию $A \ln(z - z_1)$, где z_1 — произвольная точка внутри R_1 (следовательно, вне области B), то приращение этой функции при обходе вокруг начала координат равно именно $2\pi iA$. Таким способом в соответствии с выражением

$$f(z) = \phi'(z) - A \ln(z - z_1) \quad (8.93)$$

можно образовать функцию, которая в двухсвязной области B однозначна и дифференцируема и, следовательно, аналитична.

Интегрирование $\phi'(z)$ в (8.93) позволяет получить окончательно *) для первой функции напряжений

$$\phi(z) = zA \ln(z - z_1) + \gamma \ln(z - z_1) + \phi_0(z), \quad (8.94)$$

где γ — комплексная постоянная, а $\phi_0(z)$ представляет собой аналитическую функцию в B .

*) Подробности этой и последующих выкладок можно найти у Н. И. Мусхелишвили [А30].

Аналогичным образом находят для второй функции напряжений

$$\psi(z) = \gamma' \ln(z - z_1) + \psi_0(z), \quad (8.95)$$

где γ' также комплексная постоянная, а $\psi_0(z)$ — аналитическая функция в B .

Однозначность перемещений в двухсвязной области требует, чтобы в третьей формуле Колосова

$$2G(u + iv) = \kappa \phi(z) - z \bar{\phi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z})$$

приращение правой части при обходе по замкнутому контуру L_1 обращалось в нуль. С учетом (8.94) и (8.95) это приводит к условию

$$2\pi i [(1 + \kappa)Az + \kappa\gamma + \bar{\gamma}'] = 0. \quad (8.96)$$

Оно удовлетворяется при

$$A = 0, \quad \kappa\gamma + \bar{\gamma}' = 0. \quad (8.97)$$

Следуя Н. И. Мухелишвили, можно выразить константы γ и γ' через поток сил на внутреннем контуре R_1 (см. п. 8.4.1.3)

$$(X + iY)_{R_1} = -i[\phi(z) + z\bar{\phi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})]_{R_1}.$$

Так как

$$(X + iY)_{R_1} = -2\pi(\gamma - \bar{\gamma}'), \quad (8.98)$$

то окончательно из (8.97) и (8.98) получаем

$$\gamma = -\frac{(X + iY)_{R_1}}{2\pi(1 + \kappa)}, \quad \gamma' = \frac{\kappa(X - iY)_{R_1}}{2\pi(1 + \kappa)}, \quad (8.99)$$

Таким образом, общее представление (8.94) и (8.95) комплексных функций напряжений для кольцевой области имеет вид

$$\phi(z) = -\frac{(X + iY)_{R_1}}{2\pi(1 + \kappa)} \ln(z - z_1) + \phi_0(z), \quad (8.100)$$

$$\psi(z) = \frac{\kappa(X - iY)_{R_1}}{2\pi(1 + \kappa)} \ln(z - z_1) + \psi_0(z).$$

Аналитические функции $\phi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ представимы в кольцевой области в виде разложения в ряд Лорана с положительными и отрицательными степенями, т. е.

$$\phi_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_1)^k, \quad \psi_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (z - z_1)^k. \quad (8.101)$$

Все приведенные представления обобщаются на случай $(m + 1)$ -связной области. Тогда соотношения (8.100) прини-

мают вид

$$\phi(z) = -\frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{l=1}^m (X + iY)_{R_l} \ln(z - z_l) + \phi_0(z), \quad (8.102)$$

$$\psi(z) = \frac{\kappa}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{l=1}^m (X - iY)_{R_l} \ln(z - z_l) + \psi_0(z).$$

8.4.2.3. Бесконечная область. Из многочисленных практически важных решений рассмотрим прежде всего бесконечно протяженные области с отверстиями.

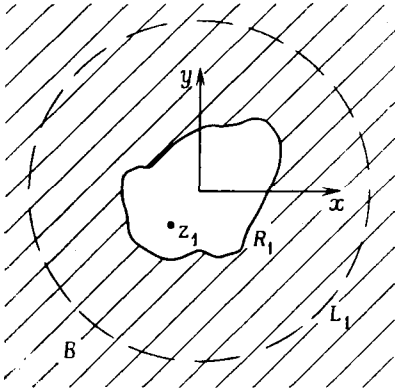


Рис. 8.8. Бесконечная плоскость с отверстием (L_1 — круговой контур, охватывающий границу R_1).

Сначала исследуем бесконечную плоскость с одним отверстием, которая получается, если внешнюю границу R (см. рис. 8.7(b)) устремить в бесконечность. Соотношения, указанные в п. 8.4.2.2 для многосвязной области B , справедливы также для произвольной конечной подобласти. В качестве контура L_1 , охватывающего контур отверстия R_1 , выбирают круг достаточно большого радиуса (рис. 8.8). Тогда для всех точек вне L_1

справедливо равенство $|z| > |z_1|$ и для введенной выше логарифмической функции имеем

$$\begin{aligned} \ln(z - z_1) &= \ln\left(1 - \frac{z_1}{z}\right) = \ln z + \ln\left(1 - \frac{z_1}{z}\right) = \\ &= \ln z - \left[\frac{z_1}{z} + \frac{1}{2}\left(\frac{z_1}{z}\right)^2 + \dots\right]. \end{aligned}$$

Выражение в прямоугольных скобках соответствует функции $\phi_{00}(z)$, аналитической вне области L_1 , которая может быть представлена в виде разложения в ряд Лорана

$$\phi_{00}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k.$$

Согласно (8.100), прежде всего получается представление комплексной функции напряжений (причем $X + iY$ — равнодей-

ствующая внешних напряжений на контуре отверстия)

$$\phi(z) = -\frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa)} \ln z + \phi_{00}(z),$$

$$\psi(z) = \frac{\kappa(X - iY)}{2\pi(1 + \kappa)} \ln z + \psi_{00}(z).$$

Дальнейшие результаты для бесконечно протяженной области можно получить лишь в том случае, если ввести дополнительное условие относительно распределения напряжений на бесконечности. Напряжения во всей области B , в том числе на бесконечности, должны оставаться ограниченными (т. е. конечными), тогда удастся получить окончательно следующее представление комплексных функций напряжений (начало координат находится внутри R_1):

$$\phi(z) = -\frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa)} \ln z + (B + iC)z + \phi_0^*(z), \quad (8.103)$$

$$\psi(z) = \frac{\kappa(X - iY)}{2\pi(1 + \kappa)} \ln z + (B' + iC')z + \psi_0^*(z).$$

При этом $\phi_0^*(z)$ и $\psi_0^*(z)$ — однозначные аналитические функции, которые и на бесконечности, т. е. при достаточно больших $|z|$, имеют разложения вида

$$\phi_0^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}, \quad \psi_0^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}; \quad (8.104)$$

a_0 и b_0 всегда можно положить равными нулю: $a_0 = b_0 = 0$, т. е. $\phi_0^*(\infty) = \psi_0^*(\infty) = 0$.

Постоянные $B + iC$ и $B' + iC'$ в (8.103) связаны с напряжениями σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} на бесконечности. Из первых двух формул Колосова в пределе при $|z| \rightarrow \infty$ следует

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 4B,$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\tau_{xy}) = -2(B' - iC'),$$

поэтому

$$B = 1/4(\sigma_{xx}^{\infty} + \sigma_{yy}^{\infty}), \quad B' = -1/2(\sigma_{xx}^{\infty} - \sigma_{yy}^{\infty}), \quad C' = \tau_{xy}^{\infty}. \quad (8.105)$$

Постоянная C , не влияющая на напряжения, соответствует вращению твердого тела на бесконечности и может быть принята равной нулю. Требование ограниченности напряжений на бесконечности имеет своим следствием не только то, что перемещения тоже остаются конечными. При этом дополнительно

должны быть справедливы равенства $B = B' = C' = 0$, $C = 0$ и $(X + iY)_{R_l} = 0$.

Соотношения (8.103) можно обобщить на случай многосвязной области с большим числом отверстий, если ввести сумму равнодействующих напряжений на контурах отверстий по формуле

$$X + iY = \sum_{l=1}^m (X_l + iY_l)_{R_l}.$$

Аналогично можно указать общее представление комплексных функций напряжений для полубесконечной области (например, для полуплоскости). На этом, однако, в дальнейшем останавливаться не будем.

В заключение следует заметить, что для односвязной области при заданной на границе нагрузке решение для напряжений не зависит от упругих постоянных. Для многосвязной области напряжения не зависят от упругих постоянных, если только

$$(X + iY)_{R_l} = 0.$$

8.4.3. Изменение комплексных функций напряжений при преобразовании координат

Рассмотрим прежде всего параллельный перенос системы координат на $z_0 = x_0 + iy_0$ (рис. 8.9(a)). Обозначим $z^* = z - z_0$,

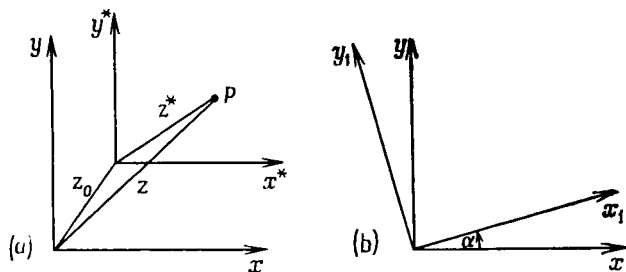


Рис. 8.9. Параллельный перенос (а) и поворот (б) координатной системы (ср. с рис. 8.5).

а функции напряжений для системы координат x^* , y^* через ϕ^* и ψ^* . Так как напряжения не зависят от положения начала координат, на основании первой формулы Колосова справедливо равенство $\text{Re}\{\phi'(z)\} = \text{Re}\{\phi^{*'}(z^*)\}$ и с точностью до некоторой постоянной

$$\phi'(z) = \phi^{*'}(z - z_0). \quad (8.106)$$

Соответственно вторая формула Колосова дает

$$z\bar{\phi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z}) = z^*\bar{\phi}^{*''}(\bar{z}^*) + \bar{\psi}^{*'}(\bar{z}^*),$$

или

$$\bar{\psi}'(\bar{z}) = (z - z_0)\bar{\phi}^{*''}(\bar{z}^*) - z\bar{\phi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}^{*'}(\bar{z}^*),$$

и отсюда с учетом (8.106) следует

$$\bar{\psi}'(\bar{z}) = -z_0\bar{\phi}^{*''}(\bar{z}^*) + \bar{\psi}^{*'}(\bar{z}^*). \quad (8.107)$$

Тогда после интегрирования (8.106) и (8.107) получаются формулы

$$\begin{aligned} \phi(z) &\equiv \phi^*(z - z_0), \\ \psi(z) &\equiv \psi^*(z - z_0) - \bar{z}_0\phi^{*'}(z - z_0). \end{aligned} \quad (8.108)$$

Они позволяют вычислять комплексные функции напряжений для нового (смещенного) начала координат по заданным значениям этих функций. Соотношениями (8.108) устанавливается также независимость перемещений от выбора системы координат. Это можно показать и с помощью третьей формулы Колосова.

Аналогичным образом можно учесть влияние поворота системы координат на угол α (рис. 8.9(b)). В отличие от п. 8.4.1.4, в котором уже обсуждались соответствующие преобразования компонент напряжений и деформаций, теперь повернутые оси координат будут обозначаться через x_1 и y_1 . Покажем, как производится пересчет комплексных функций напряжений при таком повороте. Справедливы равенства

$$x + iy = (x_1 + iy_1)e^{i\alpha}, \text{ или } z_1 = ze^{-i\alpha}. \quad (8.109)$$

Функции напряжений для повернутой системы координат обозначаются через ϕ_1 и ψ_1 . Так как сумма напряжений $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ инвариантна относительно поворота системы координат, из первой формулы Колосова вновь следует равенство $\operatorname{Re}\{\phi'(z)\} = \operatorname{Re}\{\phi_1'(z_1)\}$ и отсюда с точностью до чисто мнимой постоянной

$$\phi'(z) = \phi_1'(ze^{-i\alpha}). \quad (8.110)$$

Далее с помощью формул преобразования (8.87) из второй формулы Колосова следует

$$z\bar{\phi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z}) = [z_1\bar{\phi}_1''(\bar{z}_1) + \bar{\psi}_1'(\bar{z}_1)]e^{2i\alpha}.$$

Подставляя в левую часть этого выражения вторую производную из (8.110), т. е.

$$\phi''(z) = \phi_1''(ze^{-i\alpha})e^{-i\alpha},$$

получим

$$\bar{\psi}'(\bar{z}) = \bar{\psi}'_1(\bar{z}e^{i\alpha})e^{2i\alpha}. \quad (8.111)$$

После интегрирования (8.110) и (8.111) окончательно найдем с точностью до некоторых постоянных (которые не влияют на величину напряжений)

$$\phi(z) \equiv \phi_1(ze^{-i\alpha})e^{i\alpha}, \quad \psi(z) \equiv \psi_1(ze^{-i\alpha})e^{-i\alpha}. \quad (8.112)$$

8.4.4. Применение конформного отображения

Для решения плоской задачи теории упругости иногда очень эффективно применение криволинейных координат, которые удобны для описания границ различного вида. Для этого наиболее пригодно конформное отображение с помощью комплексных аналитических функций.

Правда, плоские поля напряжений в отличие от потенциальных полей в механике жидкости или электростатике не отображаются конформно прямым образом. Напротив, для решения граничной задачи теории упругости прежде всего необходимо конформно отобразить заданную область на более простую основную область. Для нее уже следует решать модифицированную граничную задачу с преобразованными граничными условиями, а результаты должны быть отображены обратно в исходную область.

8.4.4.1. Конформное отображение. Аналитическая функция

$$z = z(\zeta) \quad (8.113)$$

с $z = x + iy$ и $\zeta = \xi + i\eta$ осуществляет конформное отображение односвязной области плоскости ζ на аналогичную область

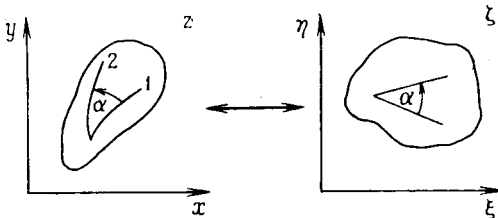


Рис. 8.10. Конформное, т. е. сохраняющее углы, отображение области плоскости ζ на плоскость z .

плоскости z (рис. 8.10). Конформность при этом означает, что угол α , заключенный между двумя кривыми в точке их пересечения, и его ориентация (т. е. направление отсчета) сохраняются. При этом производная $z'(\zeta)$ в области значений функции не должна обращаться в нуль, так как иначе отображение не будет конформным.

Конформное отображение (8.113) обратимо, т. е. соотношение

$$\zeta = \zeta(z) \tag{8.114}$$

устанавливает также конформное отображение плоскости z на плоскость ζ .

Существование конформного отображения в определенных пределах доказывается следующей общей теоремой отображения Римана:

Всякую некоторым образом ограниченную односвязную область (конечную или бесконечную) можно конформно отобразить на другую, также произвольно ограниченную односвязную область.

При практическом применении способ пока имеет определенные границы, так как построение отображающих функций может быть связано для совершенно произвольных областей с непреодолимыми трудностями.

К простейшим основным областям, на которые производится конформное отображение в теории упругости, относятся, например, единственный круг, полуплоскость, бесконечная плоскость с круговым отверстием, а также кольцевая область или полоса. Существенно при этом, что в основной области нет нулей производной $z'(\zeta)$, так как в противном случае, как уже упоминалось, отображение в этих точках перестает быть конформным и соответствующие решения будут обладать особенностями.

Конформное отображение (8.113) вообще соответствует введению криволинейных ортогональных координат в плоскости z (рис. 8.11). Таким образом, уравнение граничной кривой заданной области в плоскости z можно представить в новых координатах в более простой форме. Если рассматриваемая область имеет замкнутый граничный контур (рис. 8.12), то при конформном отображении на единичный круг в плоскости ζ с помощью функции $\zeta = re^{i\varphi}$ можно добиться того, что граничная кривая будет описываться уравнением $\rho = 1$. В плоскости ζ применяются полярные координаты ρ, φ . Этот частный случай будет рассматриваться в дальнейшем, так как позволяет получить простые решения.

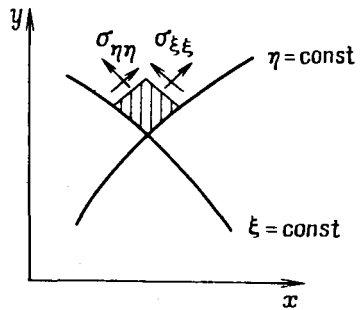


Рис. 8.11. Введение криволинейных координат на плоскости z .

8.4.4.2. Преобразование формул Колосова и граничных условий при конформном отображении на единичный круг. В ос-

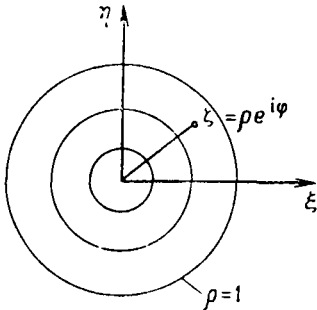
нове лежит конформное отображение на внутренность единичного круга в плоскости ζ . Для конечной области в плоскости z (с центром в точке $z = 0$) отображающую функцию можно представить в виде

$$z(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^k, \quad |\zeta| \leq 1. \tag{8.115}$$

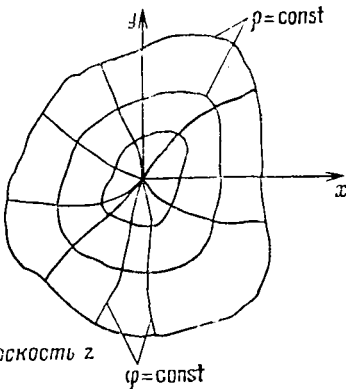
При этом точка $z = 0$ соответствует точке $\zeta = 0$. В круговой области плоскости ζ $z'(\zeta) \neq 0$, если кривизна граничной кривой области в плоскости z не меняется (нет излома).

Для бесконечной области с отверстием отображающая функция имеет вид

$$z(\zeta) = \frac{c_{-1}}{\zeta} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^k, \quad |\zeta| \leq 1, \tag{8.116}$$



Плоскость ζ



Плоскость z

причем бесконечно удаленная точка плоскости z соответствует точке $\zeta = 0$.

В общем случае ряды (8.115) и (8.116) имеют бесчисленное множество членов. При ограничении полиномами с конечным числом членов получают приближенное решение, поскольку истинная область отображается приближенно. Вообще же установленные таким образом решения являются точными. Впрочем, возможны также приближенные конформные преобразования.

Если в плоскости z рассматривается произвольный вектор \mathbf{A} , то его компоненты в декартовых координатах преобразуются в компоненты относительно криволинейных координат

$\rho = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ по формуле

$$A_\rho + iA_\varphi = e^{-i\alpha} (A_x + iA_y), \tag{8.117}$$

Рис. 8.12. Конформное отображение односвязной конечной области плоскости z на внутренность единичного круга в плоскости ζ .

причем множитель $e^{i\alpha}$ определяется видом отображающей функции. Из рис. 8.13 видно, что перемещению dz вдоль кри-

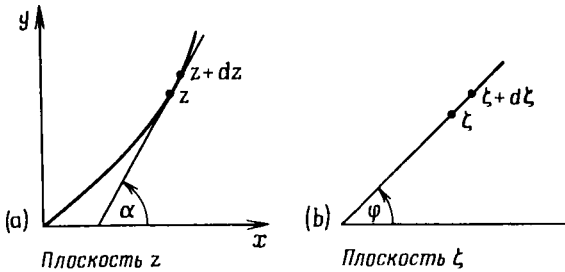


Рис. 8.13. К конформному отображению на единичный круг плоскости ζ .

вой $\varphi = \text{const}$ соответствует перемещение $d\zeta$. Тогда получается

$$dz = |dz| e^{i\alpha}, \quad d\zeta = |d\zeta| e^{i\varphi}.$$

Таким образом, при $dz = z'(\zeta) d\zeta$

$$e^{i\alpha} = \frac{z'(\zeta) d\zeta}{|z'(\zeta)| |d\zeta|} = \frac{z'(\zeta) e^{i\varphi}}{|z'(\zeta)|},$$

или при $\zeta = \rho e^{i\varphi}$

$$e^{i\alpha} = \frac{\zeta}{\rho} \frac{z'(\zeta)}{|z'(\zeta)|}. \tag{8.118}$$

В результате из (8.117) следует

$$A_\rho + iA_\varphi = \frac{\bar{\zeta} \bar{z}'(\bar{\zeta})}{\rho |z'(\zeta)|} (A_x + iA_y). \tag{8.119}$$

Особенно важно это соотношение для компонент перемещений.

Аналогичным образом преобразуются компоненты напряжений. Для пересчета компонент напряжений в криволинейных координатах справедливы соотношения

$$\sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}, \tag{8.120}$$

$$\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi} + 2i\tau_{\rho\varphi} = e^{-2i\alpha} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\tau_{xy}).$$

Будем теперь комплексные функции напряжений, выразившиеся по формулам Колосова в декартовых координатах, обозначать через $\phi^*(z)$ и $\psi^*(z)$. С помощью конформного отображения $z = z(\zeta)$ они становятся функциями нового аргумента ζ , т. е.

$$\phi^*[z(\zeta)] = \phi(\zeta), \quad \psi^*[z(\zeta)] = \psi(\zeta). \tag{8.121}$$

Для производной от первой функции напряжений тогда следует равенство $\phi'(\zeta) = \phi^*(z) z'(\zeta)$,

$$\text{или} \quad \phi^{**}(z) = \phi'(\zeta)/z'(\zeta). \quad (8.122)$$

Аналогично для второй функции напряжений

$$\psi^{**}(z) = \psi'(z)/z'(\zeta). \quad (8.123)$$

Вводя обозначение $\phi^{**}(z) = \Omega^*(z)$ или $\Omega(\zeta) = \phi'(\zeta)/z'(\zeta)$, получим с учетом $\Omega(\bar{\zeta}) = \Omega^*[z(\bar{\zeta})]$ для второй производной от первой функции напряжений выражение $\Omega'(\bar{\zeta}) = \Omega^{**}(z)z'(\zeta)$, или

$$\phi^{***}(z) = \Omega'(\zeta)/z'(\zeta). \quad (8.124)$$

Выражения (8.122) и (8.123) подставляются в первые две формулы Колосова:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\varphi\varphi} &= 2[\phi^{**}(z) + \bar{\phi}^{**}(\bar{z})], \\ \sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi} + 2i\tau_{\rho\varphi} &= -e^{-2i\alpha}[z\bar{\phi}^{***}(\bar{z}) + \bar{\psi}^{**}(\bar{z})], \end{aligned}$$

причем из (8.118) следует

$$e^{-2i\alpha} = \frac{\bar{\zeta}^2}{\rho^2} \frac{\bar{z}'(\bar{\zeta})\bar{z}'(\bar{\zeta})}{|z'(\zeta)|^2} = \frac{\bar{\zeta}^2}{\zeta\bar{\zeta}} \frac{\bar{z}'(\bar{\zeta})\bar{z}'(\bar{\zeta})}{z'(\zeta)z'(\bar{\zeta})} = \frac{\bar{\zeta}}{\zeta} \frac{\bar{z}'(\bar{\zeta})}{z'(\zeta)}.$$

В результате первые две формулы Колосова после преобразования примут вид

$$\sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\varphi\varphi} = 2[\Omega(\zeta) + \bar{\Omega}(\bar{\zeta})] = 4 \operatorname{Re}\{\Omega(\zeta)\}, \quad (8.125)$$

$$\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi} + 2i\tau_{\rho\varphi} = -2 \frac{\bar{\zeta}}{\zeta z'(\bar{\zeta})} [z(\zeta)\bar{\Omega}'(\bar{\zeta}) + \bar{\psi}'(\bar{\zeta})].$$

Третья формула Колосова получается непосредственно из (8.119):

$$2G(u_\rho + iu_\varphi) = \frac{\bar{\zeta}\bar{z}'(\bar{\zeta})}{\rho|z'(\bar{\zeta})|} [\kappa\phi(\zeta) - z(\zeta)\bar{\Omega}(\bar{\zeta}) - \bar{\psi}(\bar{\zeta})]. \quad (8.126)$$

Краевое условие для первой граничной задачи

$$\phi^*(z) + z\bar{\phi}^{**}(\bar{z}) + \bar{\psi}^*(\bar{z}) = f_1 + if_2$$

преобразуется после рассматриваемого здесь конформного отображения на единичный круг (рис. 8.12) к виду

$$\phi(\zeta) + z(\zeta)\bar{\Omega}(\bar{\zeta}) + \bar{\psi}(\bar{\zeta}) = F(\varphi) \text{ для } |\zeta|=1. \quad (8.127)$$

Правая часть соответствует функции, заданной для первоначального граничного контура $f_1 + if_2$ и после конформного отображения становится функцией, определяемой на единичном круге.

Соответственно для второй граничной задачи имеем

$$\kappa\phi(\zeta) - z(\zeta)\bar{\Omega}(\bar{\zeta}) - \bar{\psi}(\bar{\zeta}) = G(\varphi) \text{ для } |\zeta|=1. \quad (8.128)$$

Краевое условие для первой граничной задачи в форме Колосова [ср. с (8.88)] будет иметь вид

$$\Omega(\zeta) + \bar{\Omega}(\bar{\zeta}) - \frac{\bar{\zeta}}{\zeta z'(\zeta)} [z(\zeta) \bar{\Omega}'(\bar{\zeta}) + \bar{\psi}'(\bar{\zeta})] = N(\varphi) + iT(\varphi), \quad (8.129)$$

причем в правой части опять стоят известные функции.

Граничные условия (8.127) — (8.129) можно записать также в иной форме, вводя вместо значения ζ на единичном круге величину γ : $\zeta = e^{i\varphi} = \gamma$, где $\bar{\gamma} = 1/\gamma$.

Если конформное отображение, в частности на единичный круг в плоскости ζ (как это рассматривалось до сих пор), невыполнимо, то вводят в общем случае криволинейные координаты $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$ в плоскости z (см. рис. 8.11). При этом получаются несколько более общие выражения для преобразуемых величин. Однако здесь на этом останавливаться больше не будем.

§ 8.5. Примеры решений с помощью вещественных и комплексных функций напряжений

Ниже приведен ряд практически важных решений, причем функция напряжений Эри или комплексные функции напряжений формулируются поочередно в декартовых и полярных координатах.

8.5.1. Элементарное напряженное состояние

Простейшая функция напряжений Эри, которая описывает возможное напряженное состояние, имеет вид $F = by^2$, где $b = \text{const}$. Это соответствует элементарному однородному одноосному состоянию одноосного растяжения бесконечной пластины в направлении оси x (рис. 8.14(a) при $\alpha = 0$): $\sigma = \sigma_{xx} = 2b$, $\sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$.

Для комплексных функций напряжений (причем для более общего случая одноосного растяжения под углом α к оси x) справедливо представление

$$\phi(z) = 1/4\sigma z, \quad \psi(z) = -1/2\sigma z e^{-2i\alpha}. \quad (8.130)$$

Напряжения получают отсюда простейшим способом с помощью формул Колосова.

Функция напряжений Эри $F = ax^2 + by^2$ описывает при $a = \sigma_{yy}/2$ и $b = \sigma_{xx}/2$ двухосное растяжение (рис. 8.14(b)). При $a = b$ получается так называемое всестороннее растяжение (рис. 8.15(a), (b)), которое называют также *гидростатическим*

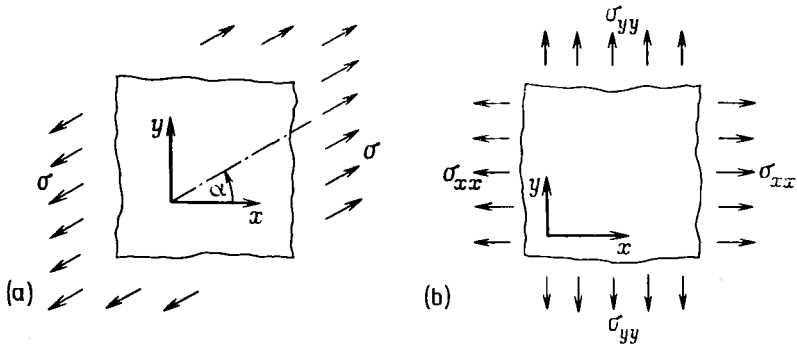


Рис. 8.14. Одноосное (а) и двухосное (б) растяжение бесконечной пластины.

напряженным состоянием. Этот случай соответствует приведенному в п. 8.2.2 общему решению (8.43) в полярных координатах при $A=B=0$, т. е. $F(r) = Cr^2$, где $C = \sigma/2$; $\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma$.

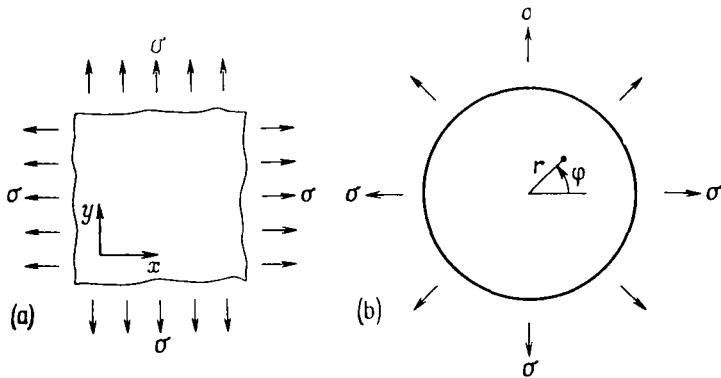
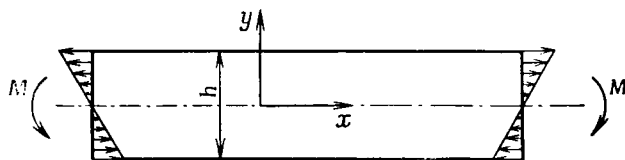


Рис. 8.15. Всестороннее растяжение бесконечной пластины; (а) декартовы координаты, (б) полярные координаты.

Для комплексных функций напряжений в случае всестороннего растяжения из (8.130) следуют выражения $\phi(z) = 1/2\sigma z$, $\psi(z) = 0$, где $z = x + iy$ или $z = re^{i\varphi}$.

Для задач о действии сил на пластину конечных размеров приведенные выше решения не могут быть использованы, так как для рассматриваемых неограниченных пластин перемещения на бесконечности получаются бесконечно большими.

Наконец, из функции напряжений Эри вида $F = cy^3$ для напряжений получаем $\sigma_{xx} = 6cy$, $\sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$. Это соответствует полосе произвольной длины (плоскому стержню) при изгибном нагружении, вызывающем чистый изгиб (рис. 8.16).



Толщина равна 1

Рис. 8.16. Чистый изгиб полосы (изгиб стержня).

Изгибающий момент получается равным

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} y \, dy = ch^3/2.$$

8.5.2. Осесимметричное нагружение кругового кольца и толстостенной трубы (решение Ламе)

Приведенное в п. 8.2.2 общее решение (8.43) бигармонического уравнения в осесимметричном случае позволяет определить напряжения и перемещения для различных практически важных задач. В общем случае напряжения получаются из выражения (8.50).

Рассмотрим прежде всего область кольцевой формы (рис. 8.17) при равномерном внутреннем и внешнем давлении. Граничные условия при этом имеют вид

$$\sigma_{rr} = -p_i \text{ при } r = r_i,$$

$$\sigma_{rr} = -p_a \text{ при } r = r_a.$$

Тогда из общих выражений для напряжений (8.50) при $B = 0$ (см. п. 8.3.2) для констант получаем формулы

$$A = \frac{(p_a - p_i) r_i^2 r_a^2}{r_a^2 - r_i^2},$$

$$2C = \frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}.$$

(8.131)

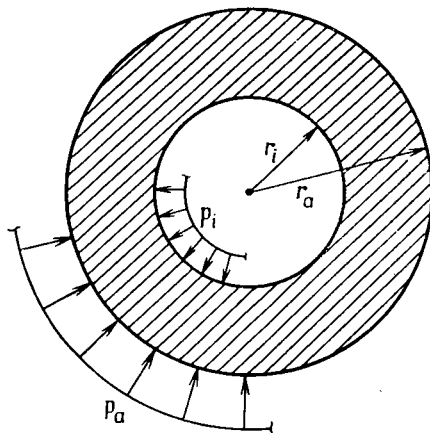


Рис. 8.17. Плоское круговое кольцо при нагружении внутренним и внешним давлением.

Функция напряжений Эри (8.43) в этом случае выражается в виде

$$F(r) = \frac{(p_a - p_i) r_i^2 r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \ln r + \frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{2(r_a^2 - r_i^2)} r^2. \quad (8.132)$$

Отсюда вытекают формулы для напряжений

$$\sigma_{rr} = \frac{(p_a - p_i) r_i^2 r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{(p_a - p_i) r_i^2 r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}.$$
(8.133)

Они дают решение задачи, которое другим путем было получено Ламе [59]. Как видно из (8.133), сумма напряжений

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} = 2 \frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} = \text{const}$$

в кольцевой области не зависит от r .

Радиальное перемещение u_r получается из соотношений (8.56) или (8.57) для плоского напряженного состояния (тон-

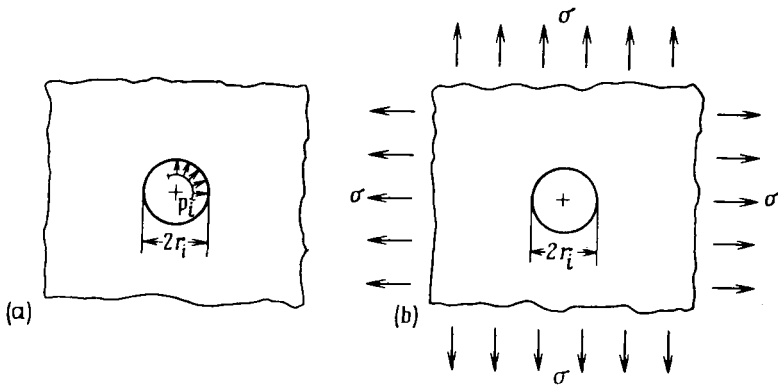


Рис. 8.18. Бесконечная пластина с круговым отверстием: (а) при постоянном внутреннем давлении, (б) при всестороннем растяжении.

кое кольцо) и соответственно для плоского деформированного состояния (толстостенная труба) при значениях констант A и C согласно формулам (8.131). Соответствующие комплексные функции напряжений для решения Ламе имеют вид $\phi(z) = Cz$, $\psi(z) = A/z$, где A и C — вещественные константы, определяемые по (8.131). Переходя к пределу при $r_a \rightarrow \infty$, можно получить решение для неограниченной области с круговым отверстием. В частности, при граничных условиях вида (рис. 8.18(a))

$$\sigma_{rr} = -p_i \quad \text{при } r = r_i,$$

$$\sigma_{rr} = 0 \quad \text{при } r = \infty$$

решение для напряжений имеет вид

$$\sigma_{rr} = -p_i (r_i/r)^2, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = p_i (r_i/r)^2.$$

Как видно, радиальное напряжение σ_{rr} всегда сжимающее, окружное напряжение $\sigma_{\varphi\varphi}$ всегда растягивающее. На бесконечности напряжения исчезают. Радиальное перемещение в этом случае для плоского напряженного и плоского деформированного состояний выражается в виде

$$u_r = -\frac{1+\nu}{E} p_i \frac{r_i^2}{r}.$$

Отсюда можно легко вычислить деформации.

Граничные условия (см. рис. 8.18 (b))

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 0 && \text{при } r = r_i, \\ \sigma_{rr} &= -p_a = \sigma && \text{при } r_a = \infty \end{aligned}$$

позволяют получить решение для бесконечной области с ненагруженным круговым отверстием при всестороннем растяжении. Это соответствует фундаментальной задаче о концентрации напряжений*); тогда для напряжений имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma (1 - r_i^2/r^2), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma (1 + r_i^2/r^2). \end{aligned} \quad (8.134)$$

Максимальное окружное напряжение на контуре кругового отверстия $(\sigma_{\varphi\varphi})_{\max} = 2\sigma$ при $r = r_i$. Таким образом, круговое отверстие вызывает возмущение однородного напряженного состояния всесторонне растянутой пластины, возникает концентрация напряжений, равная $\sigma_{\max}/\sigma = 2$.

С помощью решения (8.43) и соответственно (8.50) можно также рассмотреть чистый изгиб кольцевого сектора (рис. 8.19). Граничные условия имеют вид

$$\sigma_{rr} = 0 \quad \text{при } r = r_i \text{ и } r = r_a. \quad (8.135)$$

Кроме того, справедливы соотношения

$$\int_{r_i}^{r_a} \sigma_{\varphi\varphi} dr = 0, \quad \int_{r_i}^{r_a} \sigma_{\varphi\varphi} r dr = M. \quad (8.136)$$

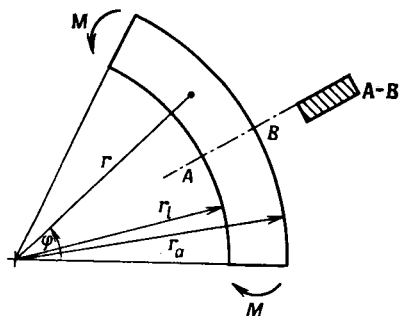


Рис. 8.19. Чистый изгиб кольцевого сектора.

*) Практическое решение впервые было получено Грюблером [60].

Как видно, первое соотношение (8.136) должно удовлетворять граничному условию (8.135), поэтому получим

$$\int_{r_i}^{r_a} \sigma_{\varphi\varphi} dr = \int_{r_i}^{r_a} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} dr = \int_{r_i}^{r_a} d\left(\frac{dF}{dr}\right) = \left(\frac{dF}{dr}\right)_{r_a} - \left(\frac{dF}{dr}\right)_{r_i} = 0.$$

Постоянные A , B и C в (8.50) вычисляются из условий

$$\frac{A}{r_i^2} + B(1 + 2 \ln r_i) + 2C = 0,$$

$$\frac{A}{r_a^2} + B(1 + 2 \ln r_a) + 2C = 0.$$

Далее второе соотношение (8.136) дает

$$\int_{r_i}^{r_a} \sigma_{\varphi\varphi} r dr = \int_{r_i}^{r_a} \frac{d^2 F}{dr^2} r dr = r \frac{dF}{dr} \Big|_{r_i}^{r_a} - \int_{r_i}^{r_a} \frac{dF}{dr} dr = M,$$

или

$$A(\ln r_i - \ln r_a) + C(r_i^2 - r_a^2) + B(r_i^2 \ln r_i - r_a^2 \ln r_a) = M.$$

Отсюда следует

$$A = -\frac{M}{N} \left(4r_i^2 r_a^2 \ln \frac{r_a}{r_i}\right), \quad B = -\frac{2M}{N} (r_a^2 - r_i^2),$$

$$C = \frac{M}{N} [r_a^2 - r_i^2 + 2(r_a^2 \ln r_a - r_i^2 \ln r_i)],$$

где

$$N = (r_a^2 - r_i^2)^2 - 4r_i^2 r_a^2 (\ln(r_a/r_i))^2.$$

Тогда напряжения равны

$$\sigma_{rr} = \frac{4M}{N} \left(\frac{r_i^2 r_a^2}{r^2} \ln \frac{r_a}{r_i} + r_a^2 \ln \frac{r}{r_a} + r_i^2 \ln \frac{r_i}{r} \right), \quad (8.137)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{4M}{N} \left(-\frac{r_i^2 r_a^2}{r^2} \ln \frac{r_a}{r_i} + r_a^2 \ln \frac{r}{r_a} + r_i^2 \ln \frac{r_i}{r} + r_a^2 - r_i^2 \right).$$

Это решение справедливо в предположении, что напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$, соответствующие моменту M , распределены в концевом поперечном сечении согласно выражению (8.137). Для нагрузки, распределенной в концевом поперечном сечении иным образом, вышеприведенное решение будет справедливо на основании принципа Сен-Венана вдали от места ее приложения.

8.5.3. Решения с особенностями

Существуют решения основных уравнений, которые удовлетворяют всем необходимым условиям, но приводят к бесконечно большим величинам напряжений или перемещений в особых точках.

Исследование этих особых (сингулярных) решений связано с представлением о сосредоточенных нагрузках (конечных по величине силах и моментах, действующих на бесконечно малый участок поверхности) как о некоторых абстракциях. Эти решения могут быть получены путем предельного перехода от распределенных нагрузок (см., например, относящуюся к этому вопросу работу [61]). Точку приложения силы P на границе (рис. 8.20) полагают особой и рассматривают ограниченную линию, на которую переносится сила, например малую окружность вокруг точки приложения силы. На ней имеет место распределение напряжений p , равнодействующая которых соответствует сосредоточенной силе. По принципу Сен-Венана статически эквивалентные виды нагрузок при достаточном удалении от точек их приложения вызывают одинаковое напряженное состояние.

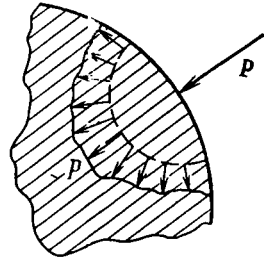


Рис. 8.20. Статическая эквивалентность сосредоточенной силы и распределенной нагрузки на границе области.

8.5.31. Полу плоскость, нагруженная на границе (задача Фламана), и родственные решения. Рассмотрим следующие функции напряжений Эри в полярных координатах:

$$F = Cr\varphi \cos \varphi, \quad (8.138)$$

а также

$$F = Cr\varphi \sin \varphi. \quad (8.139)$$

С помощью (8.138) представляется решение для полубесконечной плоскости $y \geq 0$ (полуплоскости), нагруженной сосредоточенной силой P , нормальной к границе (рис. 8.21). С учетом (8.38) для напряжений имеем соотношения

$$\sigma_{rr} = -2C \sin \varphi / r, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \tau_{r\varphi} = 0. \quad (8.140)$$

Постоянная C получается из условия равновесия внешней силы P и напряжений, перенесенных на полуокружность вокруг начала координат произвольного радиуса $r = R$, т. е.

$$\int_0^\pi \sigma_{rr} \sin \varphi \cdot R d\varphi + P = 0.$$

Для C тогда следует $C = P/\pi$ и, таким образом, справедливо равенство

$$F = (P/\pi) r\varphi \cos \varphi, \quad (8.141)$$

а напряжение равно

$$\sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi} \frac{\sin \varphi}{r}.$$

Как видно, речь идет о чисто радиальном напряженном состоянии^{*)}. Напряжения σ_{rr} всегда сжимающие и обращаются в нуль на бесконечности. В декартовых координатах формула (8.141) имеет вид

$$F(x, y) = (Px/\pi) \operatorname{arctg}(y/x). \quad (8.142)$$

В точке приложения сосредоточенной силы, которая здесь совпадает с началом координат, напряжение σ_{rr} становится

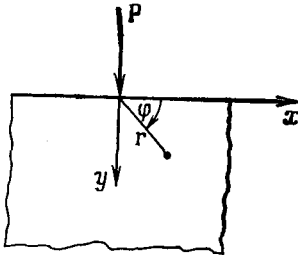


Рис. 8.21. Сосредоточенная сила, приложенная нормально к границе полуплоскости (задача Фламана).

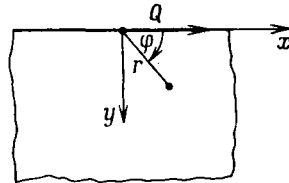


Рис. 8.22. Сосредоточенная сила, касательная к границе полуплоскости.

бесконечно большим. Эта особенность связана с идеализированным представлением о сосредоточенной силе (как о силе конечной величины, приложенной на бесконечно малом участке поверхности).

Геометрическим местом точек, в которых действуют постоянные напряжения σ_{rr} , являются окружности, которые проходят через начало координат и центры которых находятся на оси y ^{**)}. Из выражения

$$|\sigma_{rr}| \pi / 2P = \text{const} = y / (x^2 + y^2)$$

следует $x^2 + y^2 = \text{const} \cdot y$ или $x^2 + (y - a)^2 = a^2$, где $a = P / (\pi |\sigma_{rr}|)$.

Аналогично функция (8.139) дает решение для полуплоскости, нагруженной сосредоточенной силой Q , касательной к гра-

^{*)} Это решение было дано в 1892 г. А. Фламаном, использовавшим соответствующее решение пространственной задачи, полученное в 1885 г. Ж. Буссинеском (см. § 9.2).

^{**)} При оптических исследованиях напряжений кривые, которые соответствуют постоянным главным касательным напряжениям, становятся видимыми. Они называются *изохромами*.

нице (рис. 8.22). При этом справедливо равенство

$$F = - (Q/\pi) r\varphi \sin \varphi, \quad (8.143)$$

а напряжения равны

$$\sigma_{rr} = - \frac{2Q}{\pi} \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Они также описывают чисто радиальное напряженное состояние.

Комплексные функции напряжений для обоих рассмотренных случаев имеют вид

$$\phi(z) = - \frac{Q + iP}{2\pi} \ln z, \quad \psi(z) = \frac{Q - iP}{2\pi} \ln z, \quad (8.144)$$

и отсюда с помощью формул Колосова вновь могут быть получены напряжения.

В качестве более общего случая может быть рассмотрена область в форме клина (с углом раствора 2α) с сосредоточенной силой P , приложенной в вершине вдоль оси симметрии, или силой Q в перпендикулярном к оси направлении (рис. 8.23). Для первого случая применима функция напряжений (8.138); константа C определяется из условия

$$\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha} \sigma_{rr} \sin \varphi \cdot R d\varphi + P = 0.$$

Тогда

$$F = \frac{P}{2\alpha + \sin 2\alpha} r\varphi \cos \varphi \quad (8.145)$$

и, следовательно,

$$\sigma_{rr} = - \frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\sin \varphi}{r}.$$

При нагружении сосредоточенной силой Q соответственно получается

$$F = - \frac{Q}{2\alpha - \sin 2\alpha} r\varphi \sin \varphi \quad (8.146)$$

и

$$\sigma_{rr} = - \frac{2Q}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Напряженные состояния, описываемые формулами (8.145) и (8.146), также являются чисто радиальными.

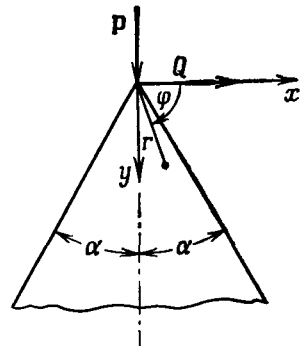


Рис. 8.23. Сосредоточенная сила в острове клина.

Случай сосредоточенной силы, которая приложена внутри полуплоскости, сложнее и обсуждается в п. 8.5.3.3.

8.5.3.2. Полуплоскость, нагруженная моментом на границе. Прежде всего рассмотрим случай, когда сосредоточенная сила, нормальная к границе полуплоскости, приложена не в начале координат (рис. 8.24 (а)). Тогда для функции напряжений Эри

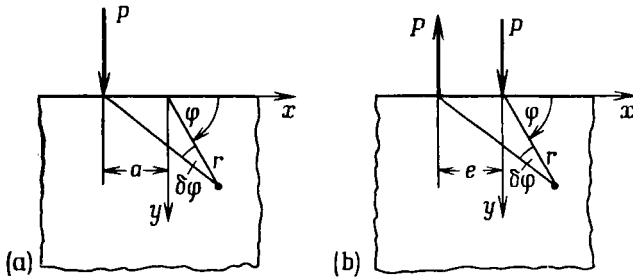


Рис. 8.24. (а) сосредоточенная сила, перенесенная относительно начала координат, на границе полуплоскости; (б) пара сил на границе полуплоскости (плечо e).

вместо (8.142) или (8.141) будет справедлива формула

$$F = (P/\pi) (x + a) \operatorname{arctg} [y/(y + a)] = (P/\pi) (x + a) (\varphi - \delta\varphi). \quad (8.147)$$

С ее помощью можно просуммировать действие произвольного числа сосредоточенных сил на границе полуплоскости. В частности, при нагружении парой сил (согласно рис. 8.24 (б)) функция напряжений Эри записывается в виде

$$F = (P/\pi) x \operatorname{arctg} (y/x) - (P/\pi) (x + e) \operatorname{arctg} [y/(x + e)],$$

или

$$F = (P/\pi) [x\varphi - (x + e)(\varphi - \delta\varphi)]. \quad (8.148)$$

Момент пары сил равен $M = Pe$, предельный переход выполняется так, что величина Pe остается постоянной. Как видно из рис. 8.24 (б), для малых e справедливо соотношение $r\delta\varphi = e \sin \varphi$, и после пренебрежения малыми членами более высокого порядка из (8.148) получают

$$F = \frac{Pe}{\pi} \left(x \frac{\delta\varphi}{e} - \varphi \right) = \frac{M}{\pi} \left(x \frac{\sin \varphi}{r} - \varphi \right),$$

или

$$F = (M/2\pi) (\sin 2\varphi - 2\varphi). \quad (8.149)$$

Это — функция напряжений Эри для сосредоточенного момента, приложенного на границе полуплоскости в начале координат.

нат (рис. 8.25(а)). Напряжения будут равны

$$\sigma_{rr} = -\frac{2M}{\pi} \frac{\sin 2\varphi}{r^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 0, \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{2M}{\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{r^2}.$$

Как видно, чисто радиальное напряженное состояние уже не имеет места; в сечении, проходящем через начало координат, появляются касательные напряжения $\tau_{r\varphi}$. Стоит заметить, что напряжения затухают теперь как $1/r^2$. Как и в решении для сосредоточенной силы, здесь также в точке приложения момента имеется особенность (сосредоточенный момент представляет собой идеализацию). Так же как для сосредоточенных

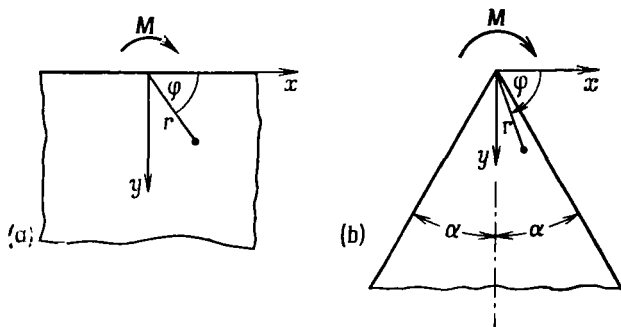


Рис. 8.25. (а) сосредоточенный момент на границе полуплоскости; (б) сосредоточенный момент в вершине клиновидной области (задача Каротерса).

сил, приложенных к контуру, можно суммировать действие многих сосредоточенных моментов.

Комплексные функции напряжений для нагрузки в виде моментов на границе полуплоскости имеют вид

$$\phi(z) = -i \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z}, \quad \psi(z) = -i \frac{M}{\pi} \frac{1}{z}.$$

Вышеприведенное решение может быть распространено и на клиновидную область с моментной нагрузкой в вершине (рис. 8.25(б)).

Функция напряжений Эри для задачи Каротерса определяется по формуле

$$F = -\frac{M}{2} \frac{\sin 2\varphi + 2\varphi \cos 2\alpha}{2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha}.$$

При $\alpha = \pi/2$ отсюда вновь следует решение (8.149) для полуплоскости. Длительное время оставалось незамеченным, что это решение несправедливо для произвольного угла раствора клиновидной области. При $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\alpha$ (т. е. при $2\alpha = 257^\circ 24'$)

появляется особенность, и все напряжения становятся бесконечно большими.

Этот факт привел к различным дискуссиям. Точное решение задачи с помощью преобразования Меллина было дано Штернбергом и Койтером [62]. Нейбер [63] путем анализа приложения сил дал физическое объяснение реализации сосредоточенного момента в вершине клина.

8.5.3.3. Сосредоточенная сила внутри бесконечной плоскости и в полуплоскости. Функция напряжений Эри (8.145) дает при $\alpha = \pi$ решение для бесконечной плоскости, разрезанной вдоль отрицательной полуоси y при действии сосредоточенной силы в начале координат. Но для неразрезанной полной плоскости, согласно рис. 8.26 (а), одного только этого решения недостаточ-

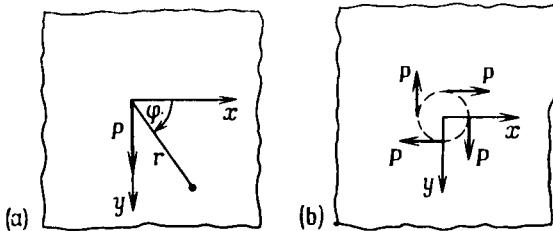


Рис. 8.26. Сосредоточенная сила (а) и сосредоточенный момент (б) внутри бесконечной плоскости.

но, так как радиальное напряженное состояние уже не реализуется.

Функция напряжений Эри для плоского напряженного состояния имеет вид

$$F = \frac{P}{2\pi} r\varphi \cos \varphi + \frac{1-\nu}{2} \frac{P}{2\pi} r \ln r \sin \varphi. \quad (8.150)$$

Первый член соответствует решению для разрезанной плоскости и характеризует равновесие при нагрузке, второй член — так называемому самоуравновешенному напряженному состоянию и определяется из условия однозначности перемещений. Так как речь идет о двухсвязной области, то появляется коэффициент Пуассона ν .

В то время как ось y представляет собой ось симметрии, относительно оси x напряженное состояние несимметрично. Компоненты напряжений следуют из (8.150):

$$\sigma_{rr} = -\frac{3+\nu}{4\pi} \frac{P \sin \varphi}{r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \sin \varphi}{r}, \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \cos \varphi}{r}.$$

Видно, что нагрузка P распределяется поровну на верхнюю полуплоскость $y < 0$ и на нижнюю полуплоскость $y > 0$. Первая нагружается растяжением, последняя — сжатием. Компоненты напряжений в декартовых координатах имеют вид

$$\sigma_{xx} = \frac{P \sin \varphi}{4\pi r} [(1 - \nu) - 2(1 + \nu) \cos^2 \varphi],$$

$$\sigma_{yy} = \frac{P \sin \varphi}{4\pi r} [-(3 + \nu) + 2(1 + \nu) \cos^2 \varphi],$$

$$\tau_{xy} = -\frac{P \cos \varphi}{4\pi r} [(1 - \nu) + 2(1 + \nu) \sin^2 \varphi].$$

Дальнейшие решения могут быть получены из решения для сосредоточенной силы наложением. Действие пары сил, состав-

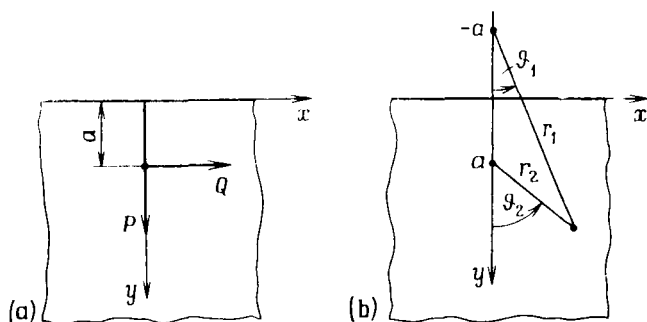


Рис. 8.27. (а) сосредоточенная сила внутри полуплоскости (задача Мелана); (б) биполярные координаты r_1 , r_2 , φ_1 , φ_2 .

ляющие которой направлены параллельно оси x или оси y (рис. 8.26(b)), соответствует нагружению сосредоточенным моментом M . Для этого случая справедлива функция напряжений Эри

$$F = (M/2\pi) \varphi, \quad (8.151)$$

напряжения равны $\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = 0$, $\tau_{r\varphi} = M/(2\pi r^2)$. Как видно, напряженное состояние не зависит от угла φ и нормальные напряжения в радиальном и тангенциальном направлениях относительно начала координат не появляются.

Задача о сосредоточенной силе внутри полуплоскости (рис. 8.27) была решена впервые Меланом [64] *). Позднее решение было получено с помощью комплексных функций напряжений [33], а также методом интегральных преобразований [B41]. Для случая когда нагрузка соответствует рис. 8.27(a),

*). См. в этой связи работу [A26].

функция напряжений Эри при плоском напряженном состоянии представляется в виде

$$F = -\frac{P}{\pi} \left[\frac{x}{2} (\vartheta_1 + \vartheta_2) - \frac{1-\nu}{4} (y-a) \ln \frac{r_2}{r_1} - \frac{1+\nu}{2} \frac{ay(y+a)}{r_1^2} \right] + \\ + \frac{Q}{\pi} \left[\frac{y-a}{2} (\vartheta_1 + \vartheta_2) + \frac{1-\nu}{4} x \ln \frac{r_2}{r_1} - \frac{1+\nu}{2} \frac{axy}{r_1^2} \right], \quad (8.152)$$

причем, согласно рис. 8.27 (b), введены биполярные координаты

$$r_1, \vartheta_1, r_2, \vartheta_2, \text{ так что } \operatorname{tg} \vartheta_1 = x/(y+a), \operatorname{tg} \vartheta_2 = x/(y-a) \text{ и} \\ r_1 = \sqrt{x^2 + (y+a)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + (y-a)^2}. \quad (8.153)$$

Общие выражения для компонент напряжений очень громоздки. В частности, на границе полуплоскости ($y=0$) $r_1 = r_2 = r = \sqrt{x^2 + a^2}$, и тогда

$$\sigma_{xx} = -\frac{2P}{\pi} \left[(1+\nu) \frac{a^3}{r^4} - \nu \frac{a}{r^2} \right] - \frac{2Q}{\pi} \left[(1+\nu) \frac{a^2x}{r^4} + \frac{x}{r^2} \right] = \\ = -\frac{2P}{\pi} \frac{a^3 - \nu ay^2}{r^4} - \frac{2Q}{\pi} \frac{x^3 - \nu a^2x}{r^4}, \\ \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0.$$

Комплексные функции напряжений (см. [A13]) для задачи Мелана (для плоского напряженного и плоского деформированного состояний) равны

$$\phi(z) = -\frac{Q+iP}{2\pi(1+\kappa)} [\ln(z-ia) + \kappa \ln(z+ia)] + \frac{Q-iP}{2\pi(1+\kappa)} \frac{z-ia}{z+ia}, \\ \psi(z) = \frac{Q+iP}{2\pi(1+\kappa)} \left(\frac{\kappa z}{z+ia} - \frac{ia}{z-ia} \right) + \\ + \frac{Q-iP}{2\pi(1+\kappa)} \left[\ln(z+ia) + \kappa \ln(z-ia) - \frac{2iaz}{(z+ia)^2} \right]. \quad (8.154)$$

При $a=0$ из (8.152) и (8.154) вновь следуют соответствующие решения для полуплоскости, нагруженной на границе (при этом следует учесть введенный здесь угол $\vartheta = \pi/2 - \varphi$).

8.5.4. Изгиб заделанного на торце кольцевого сектора

Для этого случая применяются функции напряжений Эри в виде $f(r) \sin \varphi$, $f(r) \cos \varphi$, что соответствует обобщению задачи изгиба, обсуждавшейся в п. 8.5.2.

Если кольцевой сектор заделан на торце и нагружен поперечной силой Q согласно рис. 8.28(a), то функция напряжений

Эри равна

$$F(r, \varphi) = f(r) \sin \varphi. \quad (8.155)$$

Из общего бигармонического уравнения $\Delta\Delta F = 0$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение для $f(r)$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\right)^2 f = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$f(r) = Ar^3 + B/r + Cr + Dr \ln r.$$

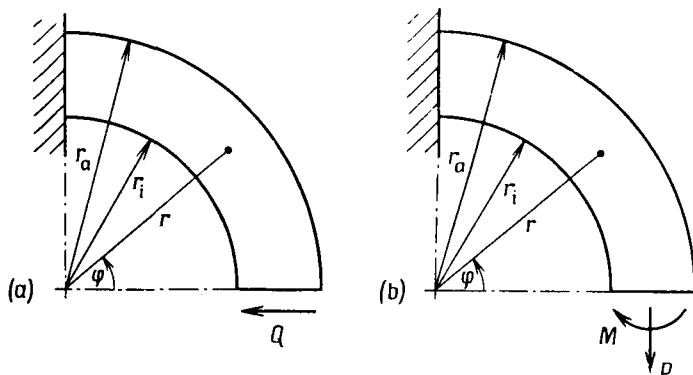


Рис. 8.28. Заделанный на торце кольцевой круговой сектор при нагружении поперечной силой (а), а также растягивающей силой и изгибающим моментом (б).

Тогда соответствующие компоненты напряжений выражаются в виде

$$\sigma_{rr} = \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) \sin \varphi, \quad (8.156)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) \sin \varphi, \quad \tau_{r\varphi} = -\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) \cos \varphi,$$

причем постоянные интегрирования определяются из граничных условий. Последние имеют вид $\sigma_{rr} = \tau_{r\varphi} = 0$ при $r = r_i$, $r = r_a$.

Далее справедливо условие

$$\int_{r_i}^{r_a} \tau_{r\varphi} dr = Q.$$

Отсюда следует

$$A = \frac{Q}{N}, \quad B = -\frac{Qr_i^2 r_a^2}{2N}, \quad D = -\frac{Q}{N}(r_i^2 + r_a^2),$$

где $N = r_i^2 - r_a^2 + (r_i^2 + r_a^2) \ln(r_a/r_i)$, что позволяет однозначно вычислить напряжения (8.156). В частности, для $\varphi = 0$ имеем

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 0, \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{Q}{N} \left[r + \frac{r_i^2 r_a^2}{r^3} - \frac{1}{r} (r_i^2 + r_a^2) \right],$$

а напряжения в месте заделки равны

$$\tau_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{Q}{N} \left[3r - \frac{r_i^2 r_a^2}{r^3} - \frac{1}{r} (r_i^2 + r_a^2) \right].$$

Естественно, это решение справедливо, если только напряжения, соответствующие поперечной силе Q и приложенные в нагруженном сечении при $\varphi = 0$, имеют вышеуказанное распределение.

Совершенно аналогично можно получить решение для заделанного на торце кольцевого сектора при нагружении согласно рис. 8.28(b). Функция напряжений Эри при этом принимается в форме

$$F(r, \varphi) = f(r) \cos \varphi. \quad (8.157)$$

Граничные условия будут $\sigma_{rr} = \tau_{r\varphi} = 0$ при $r = r_i$, $r = r_a$. Кроме того,

$$\int_{r_i}^{r_a} \sigma_{\varphi\varphi} dr = P, \quad \int_{r_i}^{r_a} \sigma_{\varphi\varphi} r dr = M.$$

Вычисление напряжений производится по аналогии с приведенной выше задачей.

8.5.5. Концентрация напряжений на отверстиях круговой формы в пластине, растягиваемой в одном направлении (задача Кирша)

Задача, соответствующая рис. 8.29(a), впервые была решена Киршем [65] в 1898 г. и представляет собой одну из фундаментальных задач о концентрации напряжений.

Отверстие круговой формы вносит возмущение в однородное напряженное состояние в одноосно растянутой бесконечно протяженной пластине, такое, что происходит повышение напряжений. Правда, возмущения в распределении напряжений сказываются только в непосредственной близости от отверстия и быстро затухают уже при умеренном удалении от него ($r > 3a$). Таким образом, на большом расстоянии от начала координат определяющим является однородное распределение напряжений $\sigma_{xx} = \sigma$ независимо от того, имеется отверстие или

нет. Соответствующие напряжения в полярных координатах равны

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_{xx} \cos^2 \varphi = (\sigma/2) (1 + \cos 2\varphi), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{xx} \sin^2 \varphi = (\sigma/2) (1 - \cos 2\varphi), \\ \tau_{r\varphi} &= -\sigma_{xx} \sin \varphi \cos \varphi = -(\sigma/2) \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (8.158)$$

Согласно (8.158), от напряжений σ_{rr} и $\tau_{r\varphi}$ на внешней границе кругового кольца (с достаточно большим радиусом r_a) возникает такое распределение напряжений, которое может быть разделено на осесимметричную и неосесимметричную ча-

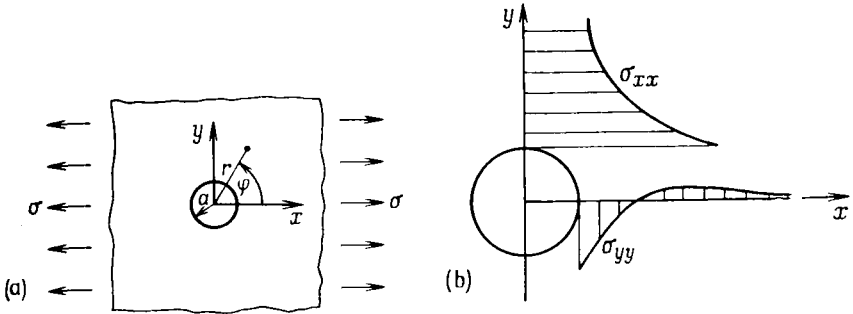


Рис. 8.29. (а) пластина с круговым отверстием при одноосном растяжении (задача Кирша); (б) распределение напряжений σ_{xx} и σ_{yy} на оси x и y в окрестности кругового отверстия.

сти. Таким образом, решение задачи Кирша получается путем наложения решения Ламе для кольца при всестороннем растяжении $\sigma/2$ со свободной от нагрузки внутренней границей и решения для кольца с напряжениями на внешней границе

$$\sigma_{rr} = (\sigma/2) \cos 2\varphi, \quad \tau_{r\varphi} = -(\sigma/2) \sin 2\varphi. \quad (8.159)$$

Для всестороннего растяжения из (8.132) для $p_i = 0$, $p_a = -\sigma/2$ при $r_a \rightarrow \infty$ получается функция напряжений Эри в виде

$$F_1(r) = (\sigma/4)(r^2 - 2a^2 \ln r). \quad (8.160)$$

Для напряжений, согласно (8.159), действительна неосесимметричная функция напряжений Эри

$$F_2(r, \varphi) = f(r) \cos 2\varphi. \quad (8.161)$$

Из общего бигармонического уравнения $\Delta\Delta F_2 = 0$ следует обыкновенное дифференциальное уравнение для $f(r)$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2} \right) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$f(r) = Ar^4 + Br^2 + C/r^2 + D.$$

Постоянные интегрирования из условий на свободном от нагрузки контуре отверстия: $\sigma_{rr} = 0$, $\tau_{r\varphi} = 0$ при $r = a$, а также из условий (8.159) (после выполнения предельного перехода $r_a \rightarrow \infty$) получаются в виде

$$A = 0, \quad B = -\sigma/4, \quad C = -(\sigma/4)a^4, \quad D = (\sigma/2)a^2.$$

В результате для (8.161) имеем выражение

$$F_2(r, \varphi) = -\frac{\sigma}{4} \left(r^2 + \frac{a^4}{r^2} - 2a^2 \right) \cos 2\varphi.$$

Окончательно с учетом (8.160) функция напряжений Эри для одноосно растянутой пластины с круговым отверстием примет вид

$$F(r, \varphi) = \frac{\sigma}{4} \left[r^2 - 2a^2 \ln r - \frac{(r^2 - a^2)^2}{r^2} \cos 2\varphi \right]. \quad (8.162)$$

Отсюда вытекают формулы для напряжений (формулы Кирша)

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\sigma}{2} \left[\left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \left(1 - 4\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\sigma}{2} \left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right], \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{\sigma}{2} \left(1 + 2\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{a^4}{r^4} \right) \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (8.163)$$

Например, для $x = 0$, $\varphi = \pi/2$, $y \geq a$ получаем

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{xx} = \sigma \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{y^2} + \frac{3}{2} \frac{a^4}{y^4} \right).$$

На контуре отверстия $r = a$ для окружных напряжений справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma(1 - 2 \cos 2\varphi), \quad \text{где } (\sigma_{\varphi\varphi})_{\max} = 3\sigma \text{ для } \varphi = \pm \pi/2, \\ (\sigma_{\varphi\varphi})_{\min} &= -\sigma \text{ для } \varphi = 0 \text{ и } \varphi = \pi. \end{aligned}$$

Теперь видно, что напряжения на контуре отверстия повышаются и соответствующий коэффициент концентрации напряжений равен трем. Этот факт имеет большое практическое значение.

Как показано на рис. 8.29(b), возмущения напряжений вдоль осей x и y затухают вне отверстия очень быстро.

В заключение укажем еще перемещения для задачи Кирша

$$u_r = \frac{\sigma}{8Gr} \left\{ (\kappa - 1)r^2 + 2a^2 + 2 \left[(\kappa + 1)a^2 + r^2 - \frac{a^4}{r^2} \right] \cos 2\varphi \right\},$$

$$u_\varphi = -\frac{\sigma}{4Gr} \left[(\kappa - 1)a^2 + r^2 + \frac{a^4}{r^2} \right] \sin 2\varphi.$$

В частности, на контуре отверстия они равны

$$u_t = \frac{1 + \kappa}{8G} \sigma a (1 + 2 \cos 2\varphi), \quad u_\varphi = \frac{1 + \kappa}{4G} \sigma a \sin 2\varphi,$$

причем κ , согласно (8.75), содержит коэффициент Пуассона.

Наложением вышеприведенных решений для растяжения в направлениях x и y вновь получают уже рассмотренное ранее решение для кругового отверстия в бесконечной пластине при всестороннем растяжении.

Решение задачи Кирша можно получить также с помощью комплексных функций напряжений. Это продемонстрировано в п. 8.5.6, где указано общее решение для области с круговым отверстием¹⁵⁾.

8.5.6. Общее решение для бесконечной пластины с круговым отверстием с помощью конформного отображения

Отображающая функция при конформном отображении внешности круга (радиуса R) в плоскости z на внутренность единичного круга в плоскости ζ имеет вид

$$z(\zeta) = R/\zeta. \quad (8.164)$$

Из общего выражения (8.103) для комплексных функций напряжений в плоскости z с учетом (8.164) получаем для плоскости ζ

$$\phi(\zeta) = \frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa)} \ln \zeta + \frac{BR}{\zeta} + \phi_0(\zeta), \quad (8.165)$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{\kappa(X - iY)}{2\pi(1 + \kappa)} \ln \zeta + (B' + iC') \frac{R}{\zeta} + \psi_0(\zeta),$$

где $\phi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ представляют собой однозначные аналитические функции на единичном круге в плоскости ζ *). Решение

*) Общие выражения (8.165) справедливы, впрочем, также при отображении пластины с отверстием произвольной формы с помощью отображающей функции (8.116) на внутренность единичного круга. При этом R заменяется на c_{-1} , бесконечные ряды в выражениях для ϕ_0 и ψ_0 исчезают.

для первой граничной задачи вытекает из граничного условия (8.127). С учетом (8.165) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \ln \gamma + \frac{BR}{\gamma} + \phi_0(\gamma) + \\ & + \frac{z(\gamma)}{\bar{z}'(\bar{\gamma})} \left[\frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{\bar{\gamma}} - \frac{BR}{\bar{\gamma}^2} + \bar{\phi}'_0(\bar{\gamma}) \right] - \\ & - \frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)} \ln \bar{\gamma} + (B' - iC') \frac{R}{\bar{\gamma}} + \bar{\psi}_0(\bar{\gamma}) = F(\gamma), \end{aligned} \quad (8.166)$$

или в сокращенном виде

$$\phi_0(\gamma) + \frac{z(\gamma)}{\bar{z}'(\bar{\gamma})} \bar{\phi}'_0(\bar{\gamma}) + \bar{\psi}_0(\bar{\gamma}) = F_0(\gamma), \quad (8.167)$$

где

$$\begin{aligned} F_0(\gamma) = F(\gamma) - \frac{X+iY}{2\pi} \ln \gamma - \frac{z(\gamma)}{\bar{z}'(\bar{\gamma})} \left[\frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)} \gamma - BR\gamma^2 \right] - \\ - (B' - iC') R\gamma. \end{aligned}$$

Комплексные функции напряжений $\phi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ представляются в виде

$$\phi_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^k, \quad \psi_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^k.$$

С учетом (8.164) $z(\gamma)/\bar{z}'(\bar{\gamma}) = -1/\gamma^3$, и граничное условие (8.167) для определения функций $\phi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ принимает вид

$$\phi_0(\gamma) - \bar{\gamma}^3 \bar{\phi}'_0(\bar{\gamma}) + \bar{\psi}_0(\bar{\gamma}) = F_0(\gamma). \quad (8.168)$$

Правая часть граничного условия (8.166) соответствует контурной нагрузке и представляется в виде разложения в ряд Фурье в комплексной форме на плоскость единичного круга

$$F(\varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k \gamma^k = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k e^{i\varphi k},$$

где

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) e^{-ik\varphi} d\varphi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Далее применяется разложение в ряд

$$\begin{aligned} \ln \gamma &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k \gamma^k = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \gamma^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_{-k} \gamma^{-k} = \\ &= i\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (\gamma^{-k} - \gamma^k). \end{aligned} \quad (8.169)$$

После подстановки в (8.168) и приравнивания коэффициентов окончательно найдем

$$\begin{aligned} a_1 &= A_1 + \frac{X + iY}{2\pi} - (B' - iC')R, \\ a_k &= A_k + \frac{1}{k} \frac{X + iY}{2\pi}, \quad k > 1, \\ \bar{b}_0 &= A_0 - \frac{i}{2}(X + iY), \quad \bar{b}_1 = A_{-1} - \frac{X + iY}{2\pi} - 2BR, \\ \bar{b}_2 &= A_{-2} + \frac{X - iY}{2\pi(1 + \kappa)} - \frac{X + iY}{4\pi} - (k - 2)\bar{a}_{k-2} + \bar{b}_k = \\ &= A_{-k} - \frac{1}{k} \frac{X + iY}{2\pi}, \quad k > 2. \end{aligned} \tag{8.170}$$

Этими величинами определяется общее решение в виде ряда для бесконечной пластины с круговым отверстием.

Существенное упрощение получается, если контурная нагрузка является уравновешенной ($X + iY = 0$). Тогда коэффициенты (8.170) будут равны

$$\begin{aligned} a_1 &= A_1 - (B' - iC')R, \quad a_k = A_k, \quad k > 1, \\ b_0 &= \bar{A}_0, \quad b_1 = \bar{A}_{-1} - 2BR, \quad b_2 = \bar{A}_{-2}, \\ b_k &= \bar{A}_{-k} - (k - 2)a_{k-2}, \quad k > 1. \end{aligned} \tag{8.171}$$

Для растягиваемой бесконечной пластины с нагруженным отверстием круговой формы (задача Кирша) $X = Y = 0$ и, кроме того, $F(\gamma) = 0$, т. е. $A_k = 0$. Остающиеся коэффициенты в (8.171) равны

$$\begin{aligned} a_1 &= -(B' - iC')R, \quad b_1 = -2BR, \quad b_3 = (B' - iC')R, \\ a_k &= 0 \text{ для } k > 1, \quad b_0 = 0, \quad b_2 = 0, \\ b_k &= 0 \text{ для } k > 3. \end{aligned}$$

Для растягивающего напряжения $\sigma_{xx}^\infty = \sigma$ в направлении оси x из (8.105) имеем

$$B = \sigma/4, \quad B' = -\sigma/2, \quad C' = 0$$

и, таким образом,

$$a_1 = \sigma R/2, \quad b_1 = -\sigma R/2, \quad b_3 = -\sigma R/2.$$

Поэтому

$$\phi_0(\xi) = \frac{\sigma R}{2} \xi, \quad \psi_0(\xi) = -\frac{\sigma R}{2} (\xi - \xi^3)$$

и общие соотношения (8.165) примут вид

$$\phi(\xi) = \frac{\sigma R}{4} \left(\frac{1}{\xi} + 2\xi \right), \quad \psi(\xi) = -\frac{\sigma R}{2} \left(\frac{1}{\xi} + \xi - \xi^3 \right).$$

После обратного преобразования на плоскость z с учетом (8.164) получим комплексные функции напряжений

$$\phi(z) = \frac{\sigma}{4} \left(z + 2 \frac{R^2}{z} \right), \quad \psi(z) = -\frac{\sigma}{2} \left[z + R^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{R^2}{z^3} \right) \right], \quad (8.172)$$

через которые известным образом по формулам Колосова вновь могут быть выражены напряжения и перемещения, уже полученные в п. 8.5.5*).

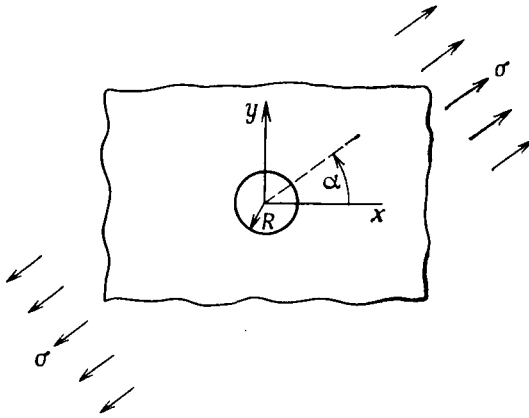


Рис. 8.30. Пластина с круговым отверстием при одноосном растяжении под произвольным углом к оси x .

Для более общего случая, когда имеет место одноосное растяжение под углом α к оси x (рис. 8.30), вместо (8.172) справедливы формулы

$$\phi(z) = \frac{\sigma}{4} \left(z + 2 \frac{R^2}{z} e^{2i\alpha} \right), \quad \psi(z) = -\frac{\sigma}{2} \left(ze^{-2i\alpha} + \frac{R^2}{z} - \frac{R^2}{z} e^{2i\alpha} \right).$$

8.5.7. Бесконечная пластина с эллиптическим отверстием

Способ, изложенный в предыдущем пункте, можно развить в виде общего способа неопределенных коэффициентов с тем, чтобы применить его к областям с произвольной границей и отверстиями, если имеется подходящая функция, осуществляющая конформное отображение. В общем случае этот способ очень трудоемкий, особенно для определения второй комплексной функции напряжений, и может быть заменен более общими методами теории аналитических функций. Однако для пластины

*). Заметим, что здесь через R обозначен радиус отверстия.

с эллиптическим отверстием при растяжении решение получается очень просто элементарным способом.

Уравнение контура эллиптической полости имеет вид

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,$$

где a и b — полуоси эллипса. Функция, осуществляющая кон-

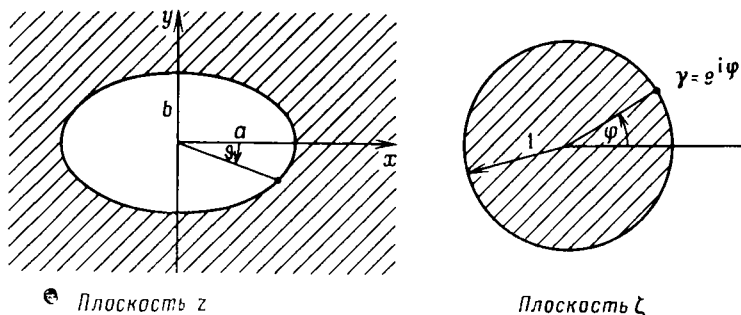


Рис. 8.31. Конформное отображение эллиптического отверстия в бесконечной пластине на внутренность единичного круга.

формное отображение согласно рис. 8.31, будет

$$z(\zeta) = A \left(\frac{1}{\zeta} + c\zeta \right), \text{ где } A = \frac{a+b}{2}, \quad c = \frac{a-b}{a+b}. \quad (8.173)$$

Эллиптический контур задается координатами

$$x = A(1+c) \cos \varphi \text{ и } y = -A(1-c) \sin \varphi.$$

Положение произвольной точки на контуре отверстия описывается углом

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{y(\varphi)}{x(\varphi)} = -\frac{1-c}{1+c} \operatorname{tg} \varphi.$$

Для ненагруженного эллиптического отверстия, согласно (8.165), получаются следующие общие выражения для функций напряжений *)

$$\phi(\zeta) = \frac{BA}{\zeta} + \phi_0(\zeta), \quad \psi(\zeta) = (B' + iC') \frac{A}{\zeta} + \psi_0(\zeta).$$

В граничном условии, которое по форме совпадает с (8.167),

$$\phi_t(\gamma) + \frac{z(\gamma)}{\bar{z}'(\bar{\gamma})} \bar{\phi}'_0(\bar{\gamma}) + \bar{\psi}_0(\bar{\gamma}) = F_0(\gamma) \quad (8.174)$$

*) См. примечание на стр. 243.

теперь функция $F_0(\gamma)$ выражается в виде

$$F_0(\gamma) = -\frac{BA}{\gamma} + \frac{z(\gamma)}{z'(\bar{\gamma})} BA\gamma^2 - (B' - iC') A\gamma. \quad (8.175)$$

С помощью отображающей функции (8.173) получим

$$\begin{aligned} \frac{z(\gamma)}{z'(\bar{\gamma})} &= \frac{1}{\gamma} \frac{1 + c\gamma^2}{c - \gamma^2} = -\frac{1 + c\gamma^2}{\gamma^3(1 - c/\gamma^2)} = \\ &= -\frac{1 + c\gamma^2}{\gamma^3} \left(1 + \frac{c}{\gamma^2} + \frac{c^2}{\gamma^4} + \dots\right). \end{aligned}$$

Для растягивающего напряжения $\sigma_{yy}^\infty = \sigma$ в направлении оси y $B = \sigma/4$, $B' = \sigma/2$, $C = 0$. Поэтому (8.175) принимает вид

$$F_0(\gamma) = -\frac{\sigma A}{4} \left[\frac{1}{\gamma} + 2\gamma + \frac{1 + c\gamma^2}{\gamma^3} \left(1 + \frac{c}{\gamma^2} + \frac{c^2}{\gamma^4} + \dots\right) \right].$$

Для функций напряжений $\phi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ вновь справедливо представление

$$\phi_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^k, \quad \psi_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^k.$$

Подставляя эти ряды в граничное условие (8.174) и приравнявая коэффициенты сначала для положительных степеней γ , найдем

$$a_1 = -\frac{\sigma A}{4} (2 + c), \quad a_k = 0 \text{ для } k > 1.$$

В результате сразу получим первую комплексную функцию напряжений

$$\phi(\zeta) = \frac{\sigma A}{4} \left[\frac{1}{\zeta} - (2 + c)\zeta \right]. \quad (8.176)$$

Рассмотрение отрицательных степеней γ дает

$$b_1 = -\frac{\sigma A}{4} (2 + c^2) + ca_1 = -\frac{\sigma A}{2} (1 + c + c^2),$$

$$\bar{b}_2 = \bar{b}_4 = \dots = 0,$$

$$-\bar{a}_1(1 + c^2) + \bar{b}_3 = -\frac{\sigma A}{4}(c + c^3), \text{ т. е. } b_3 = -\frac{\sigma A}{2}(1 + c^2)(1 + c),$$

$$-\bar{a}_1(c + c^3) + \bar{b}_5 = -\frac{\sigma A}{4}(c^2 + c^4), \text{ т. е. } b_5 = cb_3,$$

$$b_7 = cb_5 = c^2b_3 \text{ и т. д.}$$

Таким образом, получим

$$\psi_0(\zeta) = -\frac{\sigma A}{2} \{ (1 + c + c^2)\zeta + (1 + c^2)(1 + c)\zeta^3 [1 + c^2\zeta^2 + c^2\zeta^4 + \dots] \}.$$

Выражение в прямоугольных скобках соответствует геометрической прогрессии, которую можно просуммировать, т. е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (c\xi^2)^k = \frac{1}{1-c\xi^2}.$$

Следовательно, вторая комплексная функция напряжений будет равна

$$\psi(\xi) = \frac{\sigma A}{2} \left[\frac{1}{\xi} - \frac{(1+c+c^2)\xi + \xi^3}{1-c\xi^2} \right]. \quad (8.177)$$

Обращение функций напряжений (8.176) и (8.177) на плоскость z невозможно, поэтому вычисление напряжений проводится в точках плоскости ξ и затем выполняется обратное преобразование. Вдоль контура отверстия $\sigma_{\rho\rho} = 0$ для окружного напряжения из первой формулы Колосова (8.125) справедливо выражение $\sigma_{\varphi\varphi} = 4 \operatorname{Re}\{\Omega(\gamma)\}$. Тогда получим

$$\Omega(\xi) = \frac{\phi'(\xi)}{z'(\xi)} = \frac{\sigma}{4} \frac{1 + (2+c)\xi^2}{1-c\xi^2},$$

и с учетом $\gamma = e^{i\varphi}$ распределение напряжений на контуре представляется в виде

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma \frac{1 - (2+c)c + 2 \cos 2\varphi}{1 + c^2 - 2c \cos 2\varphi}.$$

Максимальные напряжения имеют место при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, т. е. на концах большой полуоси. При этом справедливо равенство

$$(\sigma_{\varphi\varphi})_{\max} = \sigma \left(1 + 2 \frac{1+c}{1-c} \right) = \sigma \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right). \quad (8.178)$$

Эта так называемая *формула эллипса* имеет большое практическое значение для оценки эффекта концентрации напряжений¹⁶⁾.

Минимальное окружное напряжение появляется при $\varphi = \pm\pi/2$, т. е. на концах малой полуоси. Независимо от формы эллипса всегда $(\sigma_{\varphi\varphi})_{\min} = -\sigma$.

Распределение напряжений $\sigma_{xx} = \sigma_{\rho\rho}$ и $\sigma_{yy} = \sigma_{\varphi\varphi}$ вдоль оси x для эллипса с $a/b = \sqrt{5}$ ($c = 0,38197$) показано на рис. 8.32. На нем также нанесено распределение напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}/\sigma$ на границе отверстия.

Решение описанной задачи впервые*) было получено несколько другим путем в 1909 г. Г. В. Колосовым. Общее решение для случая, когда растягивающее напряжение действует под углом β к оси x (рис. 8.33), впервые было указано в 1919 г. Н. И. Мухелишвили.

*) Позднее это решение различными способами было повторено Ч. Инглисом, Л. Фёпфлем, Г. Нейбером, Т. Пёшлем и др.

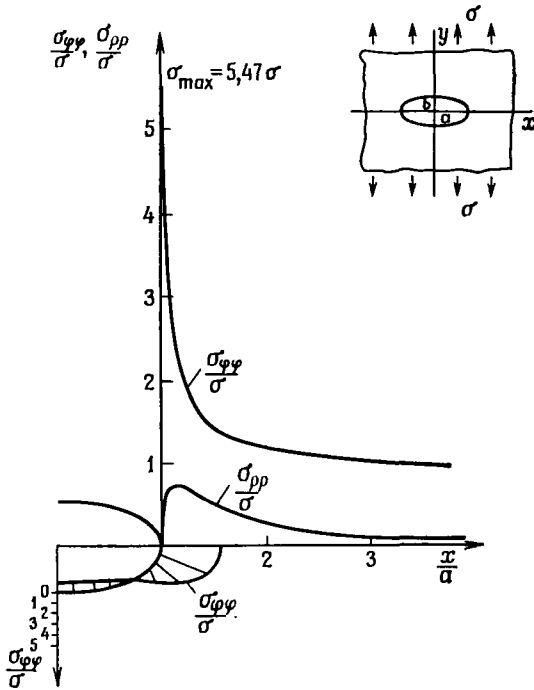


Рис. 8.32. Распределение напряжений в окрестности эллиптического отверстия в растягиваемой бесконечной пластине.

Комплексные функции напряжений для этого случая равны

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) &= \frac{\sigma A}{4} \left[\frac{1}{\zeta} + (2e^{2i\beta} - c) \zeta \right], \\ \psi(\zeta) &= -\frac{\sigma A}{2} \left[\frac{e^{-2i\beta}}{\zeta} + \frac{(1 - e^{2i\beta}c + c^2)\zeta - e^{2i\beta}\zeta^3}{1 - c\zeta^2} \right]. \end{aligned} \quad (8.179)$$

Путем наложения решений для $\beta = 0$ и $\beta = \pi/2$ можно рассмотреть случай пластины с эллиптической полостью при всестороннем растяжении. Для комплексных функций напряжений тогда из (8.179) получаем

$$\phi(\zeta) = \frac{\sigma A}{2} \left(\frac{1}{\zeta} - c\zeta \right), \quad \psi(\zeta) = -\sigma A \frac{(1 + c^2)\zeta}{1 - c\zeta^2}.$$

Окружное напряжение на контуре отверстия при этом определяется по формуле

$$\sigma_{\phi\phi} = \sigma \frac{2(1 - c^2)}{1 + c^2 - 2c \cos 2\varphi}.$$

Оно всегда положительно, а максимальное и минимальное значения равны $(\sigma_{\phi\phi})_{\max} = 2\sigma a/b$ и $(\sigma_{\phi\phi})_{\min} = 2\sigma b/a$ и достигаются на концах большой и соответственно малой полуосей.

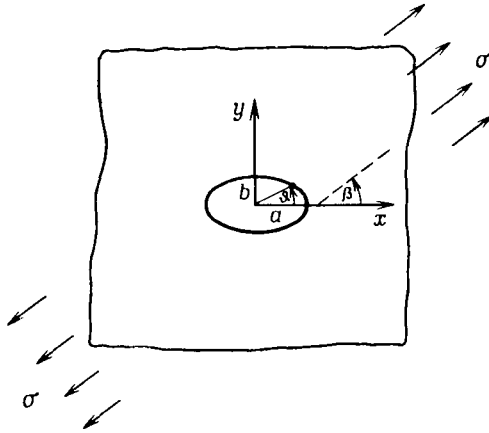


Рис. 8.33. Пластина с эллиптическим отверстием при одноосном растяжении под произвольным углом к оси x .

Приведем еще без вывода комплексные функции напряжений для двух других задач о пластине с эллиптическим отверстием. Если контур эллиптического отверстия нагружается постоянным внутренним давлением, а напряжения затухают на бесконечности, то функции напряжений будут иметь вид

$$\phi(\zeta) = -pAc\zeta, \quad \psi(\zeta) = -pA \frac{(1+c^2)\zeta}{1-c\zeta^2}. \quad (8.180)$$

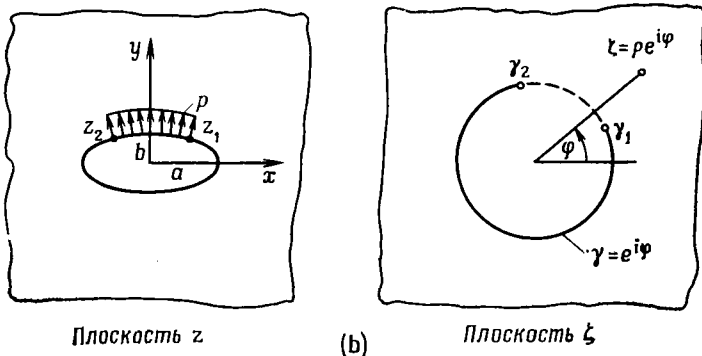
Общее решение, которое содержит только что указанный случай как частный, было получено Н. И. Мусхелишвили. Речь идет об эллиптическом отверстии в бесконечной пластине, нагруженной на части границы постоянным давлением p (рис. 8.34), причем напряжения на бесконечности должны затухать. При этом комплексные функции напряжений можно записать в несколько более удобной форме, если осуществить конформное отображение внешней области эллипса на внешность единичного круга в плоскости ζ . Пусть $z(\zeta) = A(\zeta + c/\zeta)$, где A и c имеют те же значения, что и раньше. Тогда комплексные функции напряжений будут равны

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) &= \frac{p}{2\pi i} \left\{ -\frac{cA}{\zeta} \ln \frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \left[A \left(\zeta + \frac{c}{\zeta} \right) - z_2 \right] \ln (\gamma_2 - \zeta) - \right. \\ &\quad \left. - \left[A \left(\zeta + \frac{c}{\zeta} \right) - z_1 \right] \ln (\gamma_1 - \zeta) - \frac{\kappa(z_1 - z_2)}{1 + \kappa} \ln \zeta \right\}, \\ \psi(\zeta) &= \frac{p}{2\pi i} \left\{ -\frac{A(1+c^2)\zeta}{\zeta^2 - c} \ln \frac{\gamma_2}{\gamma_1} + A(\gamma_1 - \gamma_2) \frac{1+c\zeta^2}{\zeta^2 - c} - \right. \\ &\quad \left. - \bar{z}_2 \ln (\gamma_2 - \zeta) + \bar{z}_1 \ln (\gamma_1 - \zeta) - \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{1 + \kappa} \ln \zeta - \frac{z_1 - z_2}{1 + \kappa} \frac{1+c^2}{\zeta^2 - c} \right\}. \end{aligned} \quad (8.181)$$

При этом для сокращения введены обозначения

$$z_1 = A \left(\gamma_1 + \frac{c}{\gamma_1} \right), \quad z_2 = A \left(\gamma_2 + \frac{c}{\gamma_2} \right).$$

Если нагружена вся граница эллиптического отверстия, то $z_1 = z_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$, $\ln(\gamma_2/\gamma_1) = 2\pi i$ и из (8.181) вновь получаются выражения (8.180) для функций напряжений.



(a)

Плоскость z

(b)

Плоскость ζ

Рис. 8.34. Нагруженное на части контура эллиптическое отверстие в бесконечной пластине.

Другой частный случай следует из решения (8.181) при предельном переходе к силе P , нагружающей эллиптическое отверстие в бесконечной плоскости согласно рис. 8.35*).

Функции напряжений тогда равны

$$\phi(\zeta) = \frac{P}{2\pi i} \ln \frac{\zeta - i}{\zeta + i},$$

$$\psi(\zeta) = \frac{P}{2\pi i} \left[\ln \frac{\zeta - i}{\zeta + i} - \zeta \frac{1 + c\zeta^2}{\zeta^2 - c} \left(\frac{1}{\zeta - i} - \frac{1}{\zeta + i} \right) \right].$$

Интересно, что окружное напряжение на контуре отверстия на концах большой полуоси $\sigma_{\perp\phi} = 2P/plb$ не зависит от отношения длин осей эллипса.

В заключение следует отметить, что множество решений для областей с разнообразными границами можно получить с помощью конформных отображений при использовании *интеграла Коши*.

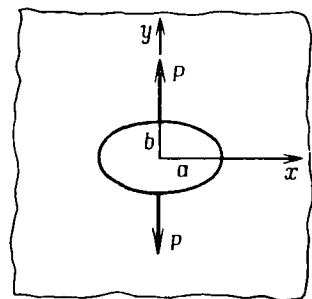


Рис. 8.35. Бесконечная пластина с эллиптическим отверстием, нагруженная двумя сосредоточенными силами.

*). Эта задача решена другим способом Нейбером [66].

За дальнейшими сведениями следует обращаться к работам [A14, A30, A31].

8.5.7.1. Напряжения и перемещения для трещины Гриффитса.

Из решения, обсуждавшегося в предыдущем разделе, можно получить важные результаты о распределении напряжений на трещинах, которые обсуждаются в линейной механике разрушения.

Первые исследования о поведении трещин в хрупких телах принадлежат А. Гриффитсу, которого можно считать основоположником количественной теории трещин и механики разрушения (см. [67]).

В качестве модели при изучении устойчивого поведения единичной трещины А. Гриффитс положил в основу вырожденное эллиптическое отверстие с исчезающе малой полуосью (рис. 8.36). Такую конфигурацию трещины в бесконечной пластине сегодня называют *трещиной Гриффитса*. Речь идет о разрезе в плоскости z , в котором концы трещины при $x = \pm a$ являются особыми точками решения. Однако это решение оказывается чрезвычайно полезным в механике разрушения.

Исходя из решения для пластины с эллиптическим отверстием, можно найти напряжения и перемещения для трещины. Отображающая функция (8.173) для трещины (при $b = 0$ и $c = 1$) становится равной

$$z(\xi) = (a/2)(1/\xi + \xi). \quad (8.182)$$

Комплексные функции напряжений (8.176) и (8.177) в плоскости ξ получаются при этом в виде

$$\phi(\xi) = \frac{\sigma a}{8} \left(\frac{1}{\xi} - 3\xi \right), \quad \psi(\xi) = \frac{\sigma a}{4} \frac{1 - 4\xi^2 - \xi^4}{\xi(1 - \xi^2)}. \quad (8.183)$$

Далее их можно простым способом отобразить на плоскость z и представить напряжения у трещин. Из (8.182) следует $\xi = z/a - \sqrt{(z/a)^2 - 1}$, и после подстановки в (8.183) и простых преобразований можно найти комплексные функции напряжений для трещины Гриффитса в плоскости z при растяжении в направлении оси y :

$$\phi(z) = \frac{\sigma a}{4} \left[2 \sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1} - \frac{z}{a} \right], \quad \psi(z) = -\frac{\sigma a}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{(z/a)^2 - 1}} - \frac{z}{a} \right].$$

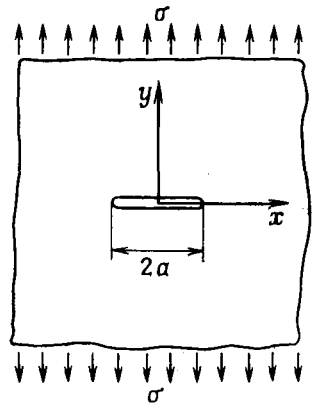


Рис. 8.36. Бесконечная пластина с трещиной длиной $2a$ при одноосном растяжении (трещина Гриффитса).

Напряжения в случае трещины Гриффитса можно очень легко вычислить по формулам Колосова. Для приложений механики разрушения прежде всего важны напряжения вдоль оси x (в вершине трещины). При этом $y = 0$, $z = \bar{z} = x$ и тогда получают

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} \sigma \left[\frac{x/a}{\sqrt{(x/a)^2 - 1}} - 1 \right], & x > a, \\ -\sigma, & x < a, \end{cases}$$

$$\sigma_{yy} = \begin{cases} \sigma \frac{x/a}{\sqrt{(x/a)^2 - 1}}, & x > a, \\ 0, & x < a. \end{cases}$$

Видно, что напряжения σ_{xx} и σ_{yy} в вершине трещины бесконечно велики. Это обусловлено тем, что в соответствии с моделью рассматриваемой здесь трещины в ее вершине не определен радиус кривизны. Поэтому возникает математическая особенность, и решение в этих точках несправедливо. Но для применения теории это не имеет значения. Особенность в решении, основанном на теории упругости, для вершины трещины (когда определяющей становится структура материала на атомном уровне) передает до некоторой степени характер взаимодействия между областью, где проявляются силы сцепления между атомами, и лежащей вне ее сплошной средой. Впрочем, построены также модели трещин, в которых особенностей в вершине трещин удастся избежать [68]*).

Для вычисления перемещений на контуре трещины привлекается третья формула Колосова. В общем случае для контура трещины (обозначаемого индексом R) справедливо соотношение

$$2G(u + iv)_R = [\kappa\phi(z) - \bar{\phi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z})]_R. \quad (8.184)$$

С другой стороны, граничное условие для контура трещины, свободного от нагрузки, имеет вид

$$[\phi(z) + z\bar{\phi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})]_R = 0.$$

Поэтому из (8.184) следует

$$2G(u + iv)_R = (1 + \kappa)\phi(z_R).$$

Большое значение имеют перемещения границы трещины в направлении оси y при $z_R = x \leq a$, которые характеризуют раскрытие трещины. При этом справедливо соотношение

$$2Gv_R = (1 + \kappa) \operatorname{Im} \{\phi(x)\}.$$

*) Математическое описание модели хрупкого разрушения см. в статье М. Я. Леонова и В. В. Панасюка: Развитие мельчайших трещин в твердом теле. — Прикладная механика, 1959, т. 5, № 4, с. 391—401 (на укр. яз.). См. также работу: Леонов М. Я. Элементы теории хрупкого разрушения. Журнал прикл. мех. и техн. физ., 1961, № 3. — Прим. ред.

Отсюда для трещины Гриффитса при одноосном (а также при всестороннем) растяжении получим

$$v_R = [(1 + \kappa)/4G] \sigma \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Более полные сведения о теории трещин и механике разрушения можно найти в специальной литературе, например [B27 — B29].

§ 8.6. Решения плоской задачи теории упругости с помощью интегральных преобразований

Как уже отмечалось в § 6.3, многочисленные задачи теории упругости могут быть решены методом интегральных преобразований. В зависимости от постановки задачи открываются различные возможности.

Ниже представлено применение классического преобразования Фурье как важнейшего интегрального преобразования. Оно состоит в том, что строятся трансформанты искомых функций, и тогда решение задачи становится более простым. Искомые функции должны при этом удовлетворять условиям Дирихле в области $(-\infty, \infty)$ и быть абсолютно интегрируемыми, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

В п. 8.6.4 кратко указаны трудности, которые возникают, если эти предположения не выполняются, и показывается, как может быть расширена область применимости преобразования Фурье.

8.6.1. Формальное решение бигармонического уравнения

Применение преобразования Фурье согласно (6.11) по одной переменной позволяет свести бигармоническое уравнение относительно функции напряжений Эри

$$\Delta \Delta F(x, y) = 0, \quad (8.185)$$

где

$$\Delta(\dots) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\dots),$$

к обыкновенному дифференциальному уравнению. Прежде всего определим трансформанту Фурье

$$\mathcal{F} \{ \Delta F(x, y); x \rightarrow \lambda \}.$$

Применение правила дифференцирования (6.14) дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta F(x, y) e^{i\lambda x} dx = \left(-\lambda^2 + \frac{d^2}{dy^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \Delta F(x, y) e^{i\lambda x} dx.$$

Повторное применение (6.14) приводит к выражению

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \Delta F(x, y) e^{i\lambda x} dx &= \left(-\lambda^2 + \frac{d^2}{dy^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \Delta F(x, y) e^{i\lambda x} dx = \\ &= \left(-\lambda^2 + \frac{d^2}{dy^2} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) e^{i\lambda x} dx. \end{aligned} \quad (8.186)$$

Если ввести трансформанту Фурье для функции напряжений Эри по формуле

$$\mathcal{F} \{F(x, y); x \rightarrow \lambda\} = \tilde{F}(\lambda, y) \equiv G(\lambda, y), \quad (8.187)$$

то вместо дифференциального уравнения в частных производных (8.185) получится обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $G(\lambda, y)$:

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \lambda^2 \right)^2 G(\lambda, y) = 0, \quad (8.188)$$

или

$$\frac{d^4}{dy^4} G(\lambda, y) - 2\lambda^2 \frac{d^2}{dy^2} G(\lambda, y) + \lambda^4 G(\lambda, y) = 0.$$

Общее решение уравнения (8.188) имеет вид

$$G(\lambda, y) = (C_1 + C_2 y) e^{-|\lambda| y} + (C_3 + C_4 y) e^{|\lambda| y}, \quad (8.189)$$

причем появляющиеся произвольные постоянные C_1, \dots, C_4 зависят от параметра λ и определяются из граничных условий задачи.

После выполнения обратного преобразования для (8.187) получают интегральное представление функции напряжений Эри

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda, y) e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (8.190)$$

Далее трансформанты Фурье для напряжений имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xx} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} e^{i\lambda x} dx = \frac{d^2}{dy^2} G(\lambda, y), \\ \bar{\sigma}_{yy} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} e^{i\lambda x} dx = -\lambda^2 G(\lambda, y), \\ \bar{\tau}_{xy} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} e^{i\lambda x} dx = i\lambda \frac{d}{dy} G(\lambda, y),\end{aligned}\quad (8.191)$$

и отсюда после обращения преобразования Фурье получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2}{dy^2} G(\lambda, y) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_{yy}(x, y) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 G(\lambda, y) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \frac{d}{dy} G(\lambda, y) e^{-i\lambda x} d\lambda.\end{aligned}\quad (8.192)$$

Точно так же могут быть представлены компоненты перемещений. Для плоского напряженного состояния из закона Гука (8.13) с учетом (8.2) $E\varepsilon_{xx} = E\partial u/\partial x = \sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}$ после умножения на $e^{i\lambda x}$ и интегрирования по x

$$-i\lambda E \int_{-\infty}^{\infty} u e^{i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) e^{i\lambda x} dx$$

для трансформанты Фурье компоненты перемещений u находим

$$E\bar{u}(\lambda, y) = \frac{i}{\lambda} \left[\frac{d^2}{dy^2} G(\lambda, y) + \nu\lambda^2 G(\lambda, y) \right]. \quad (8.193)$$

Соответственно из выражения

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{xy}$$

для перемещения v получаем

$$E\bar{v}(\lambda, y) = \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{d^3}{dy^3} G(\lambda, y) - (2 + \nu)\lambda^2 \frac{d}{dy} G(\lambda, y) \right]. \quad (8.194)$$

После обращения (8.193) и (8.194) окончательно следует

$$u(x, y) = \frac{i}{E\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d^2}{dy^2} G(\lambda, y) + \nu\lambda^2 G(\lambda, y) \right] e^{-ix\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (8.195)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{E\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d^3}{dy^3} G(\lambda, y) - (2 + \nu)\lambda^2 \frac{d}{dy} G(\lambda, y) \right] e^{-ix\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda^2}. \quad (8.196)$$

Соответствующие выражения для плоского деформированного состояния будут иметь вид

$$u(x, y) = \frac{i(1 + \nu)}{E\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(1 - \nu) \frac{d^2}{dy^2} G(\lambda, y) + \nu\lambda^2 G(\lambda, y) \right] e^{-ix\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (8.197)$$

$$v(x, y) = \frac{1 + \nu}{E\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(1 - \nu) \frac{d^3}{dy^3} G(\lambda, y) - (2 - \nu)\lambda^2 \frac{d}{dy} G(\lambda, y) \right] e^{-ix\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda^2}. \quad (8.198)$$

Соотношения (8.192) и (8.195), а также (8.196) и соответственно (8.197) и (8.198) дают формальное решение для компонент напряжений и перемещений при плоском деформированном и плоском напряженном состояниях, если в них подставить выражение для $G(\lambda, y)$ согласно (8.189). Эти решения можно применять для конкретных задач, если на границах $y = \text{const}$ заданы напряжения или перемещения, в частности, например, для задачи о полуплоскости.

Для неограниченной полосы конечной ширины целесообразно решение дифференциального уравнения (8.188) представить в иной форме через гиперболические функции [69]:

$$G(\lambda, y) = A(\lambda) \text{ch } \lambda y + B(\lambda) \text{sh } \lambda y + y [C(\lambda) \text{ch } \lambda y + D(\lambda) \text{sh } \lambda y].$$

8.6.2. Распределенные нагрузки на границе полуплоскости

Рассмотрим полуплоскость $y \geq 0$, к границе которой приложена распределенная нормальная нагрузка $p(x)$ согласно рис. 8.37. Решение при этом может быть получено с помощью преобразования Фурье, если применить формулы, приведенные в предыдущем пункте. Но возможно также решение задачи и без использования функции напряжений Эри и ее трансформанты.

Чтобы продемонстрировать последний подход, выполним преобразование Фурье по координате x (ось x — граница по-

луплоскости) уравнений равновесия и закона Гука, например, для плоского напряженного состояния:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0, \\ \sigma_{xx} &= 2G \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right], \\ \sigma_{yy} &= 2G \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right], \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Тогда получим пять однородных линейных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $\tilde{u}(\lambda, y)$, $\tilde{v}(\lambda, y)$, $\tilde{\sigma}_{xx}(\lambda, y)$, $\tilde{\sigma}_{yy}(\lambda, y)$ и $\tilde{\tau}_{xy}(\lambda, y)$:

$$\begin{aligned} -i\lambda \tilde{\sigma}_{xx} + \frac{d}{dy} \tilde{\tau}_{xy} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \tilde{\sigma}_{yy} - i\lambda \tilde{\tau}_{xy} &= 0, \\ \tilde{\sigma}_{xx} &= 2G \left[-i\lambda \frac{1}{1-\nu} \tilde{u} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{d}{dy} \tilde{v} \right], \\ \tilde{\sigma}_{yy} &= 2G \left[-i\lambda \frac{\nu}{1-\nu} \tilde{u} + \frac{1}{1-\nu} \frac{d}{dy} \tilde{v} \right], \\ \tilde{\tau}_{xy} &= G \left(\frac{d}{dy} \tilde{u} - i\lambda \tilde{v} \right). \end{aligned} \tag{8.199}$$

Совместность этих уравнений требует, чтобы определитель, образованный из коэффициентов и дифференциального оператора d/dy , применяемого к каждой из пяти неизвестных функций, обращался в нуль. Это вновь приводит к дифференциальному уравнению относительно неизвестной функции для плоского деформированного состояния

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \lambda^2 \right)^2 (\dots) = C, \tag{8.200}$$

общее решение которого дается формулой (8.189).

В случае полуплоскости $y \geq 0$, согласно рис. 8.37, при нормальной нагрузке $p(x)$, приложенной на конечном интервале от α до β , в общем решении (8.189) из условия

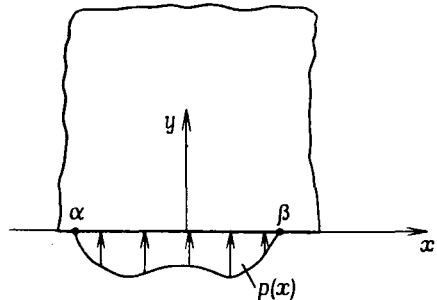


Рис. 8.37. Полуплоскость с нормальной нагрузкой, приложенной на конечном отрезке.

обращения в нуль напряжений и перемещений при $y \rightarrow \infty$ постоянные C_3 и C_4 должны быть равны нулю. Граничные условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yy} &= -p(x) \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } y=0, \quad (8.201)$$

соответственно в преобразованном виде они будут

$$\bar{\sigma}_{yy} = -\bar{p}(\lambda), \quad \frac{d}{dy} \bar{\sigma}_{yy} = 0 \quad \text{при } y=0.$$

Из решения дифференциального уравнения (8.200) для $\bar{\sigma}_{yy}$, т. е. для $\bar{\sigma}_{yy} = (C_1 + C_2 y) e^{-|\lambda|y}$, получаем для постоянных: $C_1 = -\bar{p}(\lambda)$, $C_2 = |\lambda| \bar{p}(\lambda)$. Для других решений получаются, естественно, другие значения постоянных.

Таким способом удается построить следующие интегральные представления, в которых трансформанта Фурье граничной нагрузки обозначена через $\mathcal{F}\{p(x)\} = \bar{p}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\lambda) (1 + |\lambda|y) e^{-|\lambda|y - i x \lambda} d\lambda, \\ \sigma_{yy} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\lambda) (1 + |\lambda|y) e^{-|\lambda|y - i x \lambda} d\lambda, \\ \tau_{xy} &= -\frac{iy}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \bar{p}(\lambda) e^{-|\lambda|y - i x \lambda} d\lambda, \end{aligned} \quad (8.202)$$

а также для плоского деформированного состояния

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1+\nu}{E} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}(\lambda)}{|\lambda|} (1 - 2\nu - |\lambda|y) e^{-|\lambda|y - i x \lambda} d\lambda, \\ v &= \frac{1+\nu}{E} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}(\lambda)}{|\lambda|} [2(1-\nu) + |\lambda|y] e^{-|\lambda|y - i x \lambda} d\lambda. \end{aligned} \quad (8.203)$$

Аналогичным образом получают решение с помощью функции напряжений Эри, рассмотренной в предыдущем пункте. Согласно (8.189), для полуплоскости $G(\lambda, y) = (C_1 + C_2 y) e^{-|\lambda|y}$. С учетом (8.191) из граничных условий (8.201) следует

$$-\lambda^2 G(\lambda, y) = -\bar{p}(\lambda), \quad i\lambda \frac{d}{dy} G(\lambda, y) = 0$$

и отсюда $C_1 = \bar{p}(\lambda)/\lambda^2$, $C_2 = \bar{p}(\lambda)/|\lambda|$. Поэтому

$$G(\lambda, y) = \frac{\bar{p}(\lambda)}{\lambda^2} (1 + |\lambda|y) e^{-|\lambda|y}. \quad (8.204)$$

Подставляя в (8.192), вновь получим решение (8.202).

Для нагрузки на полуплоскость, симметричной относительно оси y , решение (8.202) упрощается, так как при этом применимо косинус-преобразование Фурье, т. е. справедливы равенства

$$\sigma_{xx} = -\sqrt{2/\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\lambda)(1 - \lambda y) e^{-\lambda y} \cos(\lambda x) d\lambda \quad \text{и т. д.}, \quad (8.205)$$

причем теперь

$$\bar{p}(\lambda) = \sqrt{2/\pi} \int_0^{\infty} p(x) \cos(\lambda x) dx. \quad (8.206)$$

8.6.2.1. Равномерная нормальная нагрузка, примененная на части границы полуплоскости. В качестве примера рассмотрим

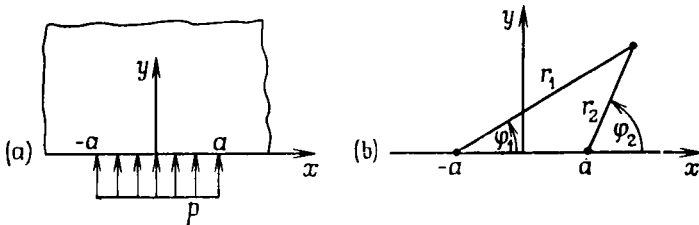


Рис. 8.38. (а) полуплоскость с равномерно распределенной нагрузкой, нормальной к границе, (б) биполярная система координат для полуплоскости.

случай постоянной нормальной нагрузки p_0 , примененной на интервале $-a < x < a$, согласно рис. 8.38(а). Из (8.206) следует

$$\bar{p}(\lambda) = \sqrt{2/\pi} p_0 \int_0^a \cos(\lambda x) dx = \sqrt{2/\pi} p_0 (\sin \lambda a)/\lambda,$$

и, таким образом, из (8.205) сначала найдем для напряжений

$$\sigma_{xx} = -\frac{2p_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \lambda y}{\lambda} e^{-\lambda y} \sin(\lambda a) \cos(\lambda x) d\lambda,$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{2p_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + \lambda y}{\lambda} e^{-\lambda y} \sin(\lambda a) \cos(\lambda x) d\lambda,$$

$$\tau_{xy} = \frac{2p_0}{\pi} y \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} \sin(\lambda a) \sin(\lambda x) d\lambda.$$

После интегрирования получим

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{p_0}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} + \frac{(x-a)y}{(x-a)^2+y^2} - \frac{(x+a)y}{(x+a)^2+y^2} \right], \\ \sigma_{yy} &= -\frac{p_0}{\pi} \left[\operatorname{ctgtg} \frac{y}{x+a} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} - \frac{(x-a)y}{(x-a)^2+y^2} + \frac{(x+a)y}{(x+a)^2+y^2} \right], \\ \tau_{xy} &= \frac{p_0}{\pi} \left[\frac{y^2}{(x+a)^2+y^2} - \frac{y^2}{(x-a)^2+y^2} \right].\end{aligned}$$

Удобное представление получается с помощью биполярных координат $r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2$ согласно рис. 8.38 (б):

$$\begin{aligned}\sin \varphi_1 &= \frac{y_1}{r_1}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{y}{r_2}, \quad \cos \varphi_1 = \frac{x+a}{r_1}, \quad \cos \varphi_2 = \frac{x-a}{r_2}, \\ r_1 &= \sqrt{(x+a)^2+y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-a)^2+y^2}.\end{aligned}$$

Окончательно формулы для напряжений будут иметь вид

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{p_0}{2\pi} [2(\varphi_2 - \varphi_1) + \sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1], \\ \sigma_{yy} &= -\frac{p_0}{2\pi} [2(\varphi_2 - \varphi_1) - \sin 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_1], \quad (8.207) \\ \tau_{xy} &= \frac{p_0}{2\pi} (\cos 2\varphi_2 - \cos 2\varphi_1)\end{aligned}$$

(здесь p_0 — равномерно распределенная нагрузка на единицу толщины пластины). Вдоль нагруженной границы, т. е. при $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi$, справедливы равенства $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -p_0, \tau_{xy} = 0$ и имеет место, следовательно, гидростатическое напряженное состояние. Это вообще справедливо, если задана произвольно распределенная на границе нагрузка $p(x)$.

Из приведенного выше решения после предельного перехода получается решение задачи Фламана о сосредоточенной силе на границе полуплоскости, обсуждавшейся в п. 8.5.3.1. Могут быть рассмотрены также другие случаи нагружения, например сосредоточенная сила внутри полуплоскости (задача Мелана, задача о полосе конечной ширины (см. [B41])). Решение для сосредоточенной силы, приложенной внутри полосы, впервые было дано таким способом Юнгом [70].

8.6.2.2. Применение к теории трещин. Фундаментальное значение для линейной механики разрушения имеет знание напряжений и перемещений в окрестности трещины (см. п. 8.5.7.1).

Такие решения для трещины Гриффитса с помощью интегральных преобразований впервые были получены И. Снеддоном и Г. Эллиотом в 1946 г. Решение Снеддона [71] относилось к трещине Гриффитса, нагруженной постоянным внутренним давлением; оно было распространено на случай переменного внутреннего давления Снеддоном и Эллиотом [72].

В принятом за основу решении Снеддона задача о трещине рассматривается как смешанная краевая задача для полуплоскости (рис. 8.39).

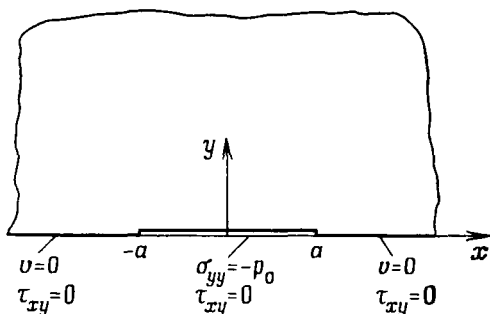


Рис. 8.39. Смешанная краевая задача для полуплоскости с трещиной Гриффитса при внутреннем давлении.

Благодаря симметрии относительно оси x справедливы следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= -p(x) & \text{при } y=0, x \leq a, \\ v &= 0 & \text{при } y=0, x \geq a, \\ \tau_{xy} &= 0 & \text{при } y=0, -\infty < x < \infty, \end{aligned} \quad (8.208)$$

причем все напряжения на бесконечности обращаются в нуль.

Тогда после косинус-преобразования Фурье нагрузки (см. (8.205) и (8.206)) получается следующее интегральное представление для напряжений и перемещений:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{p}(\lambda) (1 - \lambda y) e^{-\lambda y} \cos \lambda x d\lambda, \\ \sigma_{yy} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{p}(\lambda) (1 + \lambda y) e^{-\lambda y} \cos \lambda x d\lambda, \\ \tau_{xy} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{p}(\lambda) \lambda e^{-\lambda y} \sin \lambda x d\lambda; \\ u &= -\frac{1}{2G} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\bar{p}(\lambda)}{\lambda} [(1 - 2\nu - \lambda y)] e^{-\lambda y} \sin \lambda x d\lambda, \\ v &= -\frac{1}{2G} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\bar{p}(\lambda)}{\lambda} [2(1 - \nu) + \lambda y] e^{-\lambda y} \cos \lambda x d\lambda. \end{aligned}$$

Из граничных условий (8.208) окончательно следуют парные интегральные уравнения, решение которых известно. Не останавливаясь на деталях этого решения, приведем результаты для $p(x) = p_0$. Важнейшей величиной является напряжение σ_{yy} «перед трещиной», т. е. при $y = 0$ и $x > a$. Для него имеем

$$\sigma_{yy} = p_0 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - 1 \right), \quad x > a.$$

Перемещения в направлении оси y (так называемое раскрытие трещины) будут равны

$$v_R = \frac{1 - \nu}{G} p_0 \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Видно, что напряжения σ_{yy} при $x = a$, т. е. в вершине трещины, неограниченно возрастают. Эта особенность свойственна применяемой модели трещины, в которой предполагается, что трещина представляет собой разрез от $-a$ до a в плоской пластине.

Снеддоном были получены следующие асимптотические представления для компонент напряжений, справедливые только в малой окрестности вершины трещины («поле в окрестности трещины»):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= p_0 \left[\sqrt{\frac{a}{2\rho}} \cos \frac{\psi}{2} \left(1 - \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{3\psi}{2} \right) - 1 \right], \\ \sigma_{yy} &= p_0 \left[\sqrt{\frac{a}{2\rho}} \cos \frac{\psi}{2} \left(1 + \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{3\psi}{2} \right) - 1 \right], \\ \tau_{xy} &= p_0 \sqrt{\frac{a}{2\rho}} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{3\psi}{2}, \end{aligned}$$

где ρ и ψ — местные полярные координаты в вершине трещины ($\rho \ll a$). В этих выражениях для напряжений появляется особенность в вершине трещины.

Аналогичные соотношения справедливы для трещины Гриффитса, свободной от нагрузки, в одноосном поле растягивающих напряжений в направлении оси y . Тот факт, что для всех задач теории трещин в приведенных выражениях для напряжений имеет место всегда одинаковая зависимость от ρ и ψ^* , нашел свое отражение в введенном Дж. Р. Ирвином в механику разрушения понятии *коэффициента интенсивности напряжений* (см., например, [B27]).

С помощью интегральных преобразований было решено большое количество задач о трещинах в постановке теории упругости. Этому посвящена обширная литература (см., например, [B30]).

* Это справедливо также для напряжений в окрестности трещины в трехмерном случае.

8.6.3. Преобразование Меллина, применение для полярных координат

Решение для бесконечной клиновидной области может быть получено с помощью преобразования Меллина [В46]. Бигармоническое дифференциальное уравнение относительно функции напряжений Эри в полярных координатах

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)^2 F(r, \varphi) = 0 \quad (8.209)$$

в области $0 < r < \infty$, $-\alpha < \varphi < \alpha$ после применения преобразования Меллина по координате r (здесь преобразуемая величина также обозначается волнистой чертой)

$$\mathcal{M}\{F(r, \varphi); r \rightarrow p\} = \tilde{F}(p, \varphi) = \int_0^{\infty} F(r, \varphi) r^{p-1} dr \quad (8.210)$$

переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение, общее решение которого известно. При этом требуется обращение в нуль при $r \rightarrow \infty$ некоторого дифференциального выражения для $F(r, \varphi)$. После интегрирования (8.210) по частям находим, что, например,

$$\int_0^{\infty} r \frac{\partial^{m+1}}{\partial r \partial \varphi^m} F(r, \varphi) r^{p-1} dr = -p \frac{d^n}{d\varphi^n} \tilde{F}(p, \varphi), \quad n = 0, 1, 2,$$

$$\int_0^{\infty} r^4 \frac{\partial^4}{\partial r^4} F(r, \varphi) r^{p-1} dr = p(p+1)(p+2)(p+3) \tilde{F}(p, \varphi) \text{ и т. д.}$$

Тогда из (8.209) следует обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left\{ \frac{d^4}{d\varphi^4} + [(p+2)^2 + p^2] \frac{d^2}{d\varphi^2} + p^2(p+2)^2 \right\} \tilde{F}(p, \varphi) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\tilde{F}(p, \varphi) = C_1 \sin p\varphi + C_2 \cos p\varphi + C_3 \sin(p+2)\varphi + C_4 \cos(p+2)\varphi.$$

Здесь произвольные постоянные зависят от p и угла клина α и определяются из граничных условий. После обращения преобразования Меллина окончательно получаются следующие ин-

тегральные представления для напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \tilde{F}(p, \varphi) - p\tilde{F}(p, \varphi) \right] r^{-p-2} dp, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} p(p+1) \tilde{F}(p, \varphi) r^{-p-2} dp, \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (p+1) \frac{d}{d\varphi} \tilde{F}(p, \varphi) r^{-p-2} dp.\end{aligned}$$

Дальнейшие сведения о решении задач для клина под действием нагрузок, приложенных к боковым поверхностям, можно найти в литературе [73, В41].

В заключение следует заметить, что существует тесная связь между преобразованием Меллина и комплексным преобразованием Фурье. Имеются случаи, особенно при сингулярных нагрузках на клиновидную область, когда применение преобразования Фурье может оказаться предпочтительнее.

8.6.4. Преобразование Фурье и обобщенные функции

Классическое преобразование Фурье, которое обсуждалось в предыдущих разделах, может успешно применяться для решения многочисленных задач математической физики. Правда, должно выполняться требование о том, что используемые функции должны быть абсолютно интегрируемыми и удовлетворять условиям Дирихле. Это сильно ограничивает применимость преобразования Фурье, так как можно оперировать только такими функциями, для которых все их производные являются конечными функциями или достаточно быстро стремятся к нулю на бесконечности. Кроме того, имеются различные элементарные функции, например постоянные или произвольные периодические функции, а также степенные функции, полиномы и экспоненциальные функции, которые не обладают трансформантой Фурье в обычном смысле, так как интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

расходится.

Этих трудностей можно избежать, если к классу рассматриваемых функций отнести так называемые *обобщенные функции* (или *распределения*). Общая математическая теория обобщенных функций была построена Шварцем [В47]. Еще раньше

П. Дирак ввел так называемую дельта-функцию $\delta(x)$ как псевдофункцию для применения в квантовой механике. Из-за связи δ -функции с распределением масс и зарядов класс обобщенных функций называют вообще распределениями. δ -функция имеет следующие свойства *):

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x \neq 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1,$$

а также для любой «достаточно» непрерывной функции $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0).$$

Функции с такими свойствами, понимаемые в обычном смысле, отсутствуют, но можно определить δ -функцию как предел последовательности обычных функций $F_n(x)$ со свойствами

$$F_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \text{при фиксированном } x \neq 0.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_n(x) dx = 1 \quad \text{при всех } n.$$

Примером является функция

$$F_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-n^2 x^2/2}, \quad (8.211)$$

которая с ростом n при $x = 0$ имеет постоянно «растущую» вершину и становится все тоньше, так что площадь под кривой остается равной единице. Последовательность функций (8.211) можно в известном смысле рассматривать как модель δ -функции (существуют и другие модели).

Опуская детали **), отметим, что распространение функций в обычном смысле на класс обобщенных функций позволяет сильно расширить область применимости классического интегрального преобразования Фурье. Тогда становится возможным построить для всех функций трансформанты Фурье в обобщенном смысле, которые трактуются как так называемые предель-

*) Выражение $\delta(x)$ само по себе не имеет значения, но все же обычно о δ -функции говорят как о действительной функции в обычном смысле с указанными выше особыми свойствами.

**) Здесь можно сослаться на специальную литературу; см., например, работы [B48—B50].

ные значения распределений

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x) e^{i\lambda x} dx.$$

В этом смысле трансформанты Фурье также являются обобщенными функциями.

Если трансформанта Фурье, понимаемая в обычном смысле, существует, то она совпадает с трансформантой Фурье для соответствующей обобщенной функции. Для примера приведем следующие трансформанты Фурье:

$$\begin{aligned} f(x) = \delta(x), \quad \mathcal{F}\{f(x); \lambda\} &= 1/\sqrt{2\pi}, \\ f(x) = 1, \quad \mathcal{F}\{f(x); \lambda\} &= \sqrt{2\pi} \delta(x). \end{aligned}$$

В заключение укажем на то, что применимость преобразования Фурье в вещественной области к решению краевых задач теории упругости не ограничивается только лишь связью с теорией обобщенных функций. Можно показать, что для частных задач таким способом можно построить обратное преобразование в замкнутой форме. При применении комплексного преобразования Фурье (см. п. 6.3.1) не возникает сложностей с обеспечением сходимости, которые требуют обращения к обобщенным функциям, если используют вещественное преобразование Фурье [37].

Пространственные задачи теории упругости

Ниже обсуждаются некоторые фундаментальные решения пространственных задач теории упругости, которые были найдены описанными в гл. 5 общими методами, а также другие основные решения.

§ 9.1. Сосредоточенная сила в бесконечно протяженном теле (задача Кельвина)

Пусть внутри бесконечно протяженной упругой среды действует, согласно рис. 9.1, сосредоточенная сила F в направлении оси z . Напряжения на бесконечности должны затухать. Вследствие осевой симметрии естественно применение цилиндрических координат. Для решения можно использовать функцию перемещений Лява (см. п. 5.1.4)

$$Z = Z(r, z) = BR \quad (9.1)$$

(где $R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2$ и $B = \text{const}$), которая соответствует частному случаю вектора Буссинеска только с одной компонентой. Легко проверить, что $\Delta(1/R) = 0$ и $\Delta R = 2/R$, поэтому, как и требуется, $\Delta\Delta R = 0$, где $\Delta(\dots)$ — оператор Лапласа в декартовой или цилиндрической системах координат. Из (9.1) следует для произ-

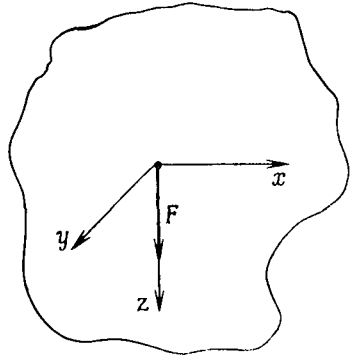


Рис. 9.1. Сосредоточенная сила в бесконечно протяженном теле (задача Кельвина).

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial r} &= B \frac{r}{R}, & \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} &= B \frac{R^2 - r^2}{R^3} = B \frac{z^2}{R^3}, \\ \frac{\partial Z}{\partial z} &= B \frac{z}{R}, & \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} &= B \frac{r^2}{R^3}, \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial r \partial z} &= -B \frac{rz}{R^3}, & \Delta Z &= \frac{2B}{R}. \end{aligned}$$

9. Пространственные задачи теории упругости

Тогда компоненты перемещений и напряжений в цилиндрических координатах можно найти из соотношений (5.31) и (5.33) при $\partial/\partial\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} 2Gu_r &= B \frac{rz}{R^3}, \quad 2Gu_\varphi = 0, \\ 2Gu_z &= B \left[2(1-\nu) \frac{z}{R} - \frac{r^2}{R^3} \right] = B \left[(1-2\nu) \frac{z}{R} + \frac{1}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right]. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Выполненное преобразование u_z оказывается удобным, если хотят рассмотреть решение задачи для частного случая $\nu = 0,5$, так как при этом оно будет иметь более простой вид. Соответственно для напряжений получаются формулы

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= B \left[(1-2\nu) \frac{z}{R^3} - 3 \frac{r^2 z}{R^5} \right], \quad \sigma_{\varphi\varphi} = B(1-2\nu) \frac{z}{R^3}, \\ \sigma_{zz} &= -B \left[(1-2\nu) \frac{z}{R^3} + 3 \frac{z^3}{R^5} \right], \\ \tau_{rz} &= -B \left[(1-2\nu) \frac{r}{R^3} + 3 \frac{rz^2}{R^5} \right], \end{aligned} \quad (9.3)$$

кроме того, $\tau_{r\varphi} = \tau_{z\varphi} = 0$.

Напряжения обладают свойством симметрии, они обращаются в нуль на бесконечности и имеют особенность в начале координат. Эта особенность соответствует вертикальной сосредоточенной силе.

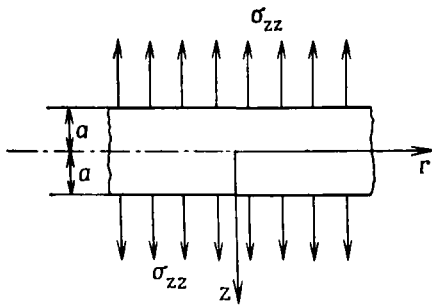


Рис. 9.2. Равновесие цилиндра в задаче Кельвина.

Не определенная еще константа B вычисляется из условия равновесия относительно оси z цилиндра высотой $2a$ (рис. 9.2), причем радиус цилиндра может стремиться к бесконечности. Напряжения, действующие на поверхности цилиндра, уравновешивают сосредоточенную силу F , т. е.

$$F - 2\pi \int_0^\infty (\sigma_{zz})_{-a} r dr + 2\pi \int_0^\infty (\sigma_{zz})_a r dr = 0.$$

Для поверхности $z = \text{const}$ имеем $rdr = R dR$ и с учетом выражения (9.3) для σ_{zz} находим

$$F = 4\pi B \left[(1 - 2\nu) a \int_a^\infty \frac{R dR}{R^3} + 3a^2 \int_a^\infty \frac{R dR}{R^5} \right],$$

и отсюда

$$B = F/[8\pi(1 - \nu)]. \quad (9.4)$$

Касательные напряжения τ_{rz} , действующие на боковой поверхности рассматриваемого цилиндра в направлении оси z , исчезают при $r \rightarrow \infty$ и определяются из рассмотрения условия равновесия. Видно, что в плоскости $z = 0$ все нормальные напряжения обращаются в нуль, в то время как касательные напряжения будут равны

$$(\tau_{rz})_{z=0} = -\frac{F}{8\pi} \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \frac{1}{r^2}.$$

Используя соотношения (5.30) и (5.33), можно выразить компоненты перемещений и напряжений в декартовых координатах. С учетом выражения (9.4) для константы B получим

$$\begin{aligned} 2Gu &= B \frac{xz}{R^3}, & 2Gv &= B \frac{yz}{R^3}, \\ 2Gw &= B \left[(3 - 4\nu) \frac{1}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right] \end{aligned} \quad (9.5)$$

и далее

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= B \left[(1 - 2\nu) \frac{z}{R^3} - 3 \frac{x^2 z}{R^5} \right], \\ \sigma_{yy} &= B \left[(1 - 2\nu) \frac{z}{R^3} - 3 \frac{y^2 z}{R^5} \right], \\ \sigma_{zz} &= B \left[(1 - 2\nu) \frac{z}{R^3} + 3 \frac{z^3}{R^5} \right], \\ \tau_{xy} &= -B \frac{3xyz}{R^5}, \\ \tau_{yz} &= -B \left[(1 - 2\nu) \frac{y}{R^3} + 3 \frac{yz^2}{R^5} \right], \\ \tau_{zx} &= -B \left[(1 - 2\nu) \frac{x}{R^3} + 3 \frac{xz^2}{R^5} \right]. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Решение задачи Кельвина можно построить также с помощью формул Папковича и Нейбера (см. п. 5.1.5). Тогда из выражений (5.49) в декартовых координатах для рассматриваемого случая имеем

$$\phi_0 = \phi_x = \phi_y = 0, \quad N = z\phi_z, \quad \phi_z = \frac{F}{8\pi(1 - \nu)} \frac{1}{R}.$$

и в результате для перемещений и напряжений вновь получаются приведенные выше выражения (9.5) и (9.6).

9.1.1. Тензорная функция Грина

Впервые указанное в 1848 г. лордом Кельвином (В. Томсоном) решение задачи, названной его именем, было дано в форме частного интеграла неоднородных уравнений Навье (см. § 3.2)

$$G \left(u_{i, II} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j, II} \right) + f_i = 0.$$

При равномерном распределении объемных сил $f_i(x_i^*)$ в бесконечно протяженной среде для перемещений $u_i(x)$ в произвольной точке поля $x = (x_1, x_2, x_3)$ справедливо равенство

$$u_i(x) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \int_{(V)} \left[(3-4\nu) \frac{f_i(x^*)}{\bar{R}} - (x_j - x_j^*) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\bar{R}} \right) f_j(x^*) \right] dV^*. \quad (9.7)$$

При этом $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ — так называемый источник, а \bar{R} — расстояние между произвольной точкой поля и источником, т. е.

$$\bar{R} = \sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - x_2^*)^2 + (x_3 - x_3^*)^2}.$$

Для решения задачи о сосредоточенной силе выделяют малую сферу вокруг источника, вне которой объемные силы обращаются в нуль. Сосредоточенную же силу, приложенную в источнике, можно получить подходящим предельным переходом. Корректный предельный переход, с помощью которого из распределенных сил получается сосредоточенная сила, требует соблюдения определенных условий, прежде всего порядка особенности (см. относящуюся к этому вопросу работу [61]). Но на этих деталях здесь останавливаться не будем.

Если предполагать, что сосредоточенная сила с компонентами F_i приложена в источнике $x^* = 0$ (в начале координат), то указанный предельный переход после интегрирования (9.7) дает

$$u_i(x) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \frac{F_i}{R} - x_j F_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{R} \right) \right], \quad (9.8)$$

где $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Для рассмотренного выше частного случая сосредоточенной силы F в направлении $x_3 = z$ из (9.8) при $F_1 = F_2 = 0$, $F_3 = F$ сразу получаются формулы (9.5).

В различных приложениях, например в теории дислокаций или при применении метода граничных интегральных уравнений (см. п. 6.4.3) часто записывают решение (9.8) в форме $u_i = U_{ij}F_j$. При этом величину

$$\begin{aligned} U_{ij} &= \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu)\delta_{ij}\frac{1}{R} - x_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{R}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu)\delta_{ij}\frac{1}{R} + \frac{x_ix_j}{R^3} \right] = \\ &= \frac{1}{8\pi G} \left[\delta_{ij}\Delta R - \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 R}{\partial x_i\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (9.9)$$

называют *тензорной функцией Грина* *) для задачи Кельвина.

Это соотношение получается, например, в электростатике, где соответствующая функция Грина характеризует потенциал точечного заряда. Вообще, метод функций Грина (по Дж. Грину, 1793—1841) играет очень важную роль в математической физике при решении неоднородных краевых задач **).

Обобщение (9.9) на случай произвольного источника $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ с сосредоточенной силой F_i приводит к функции

$$\begin{aligned} U_{ij}(x) &= \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu)\frac{\delta_{ij}}{R} + \frac{(x_i-x_i^*)(x_j-x_j^*)}{R^3} \right] = \\ &= \frac{1}{8\pi G} \left[\delta_{ij}\Delta\bar{R} - \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2\bar{R}}{\partial x_i\partial x_j} \right]. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Таким образом, компоненты тензора U_{ij} представляют собой перемещения произвольной точки поля $x = (x_1, x_2, x_3)$ в i -м направлении от единичной силы, приложенной в источнике x^* в направлении j . Это наглядно видно на рис. 9.3. Как видно, тензорная функция Грина всегда симметрична.

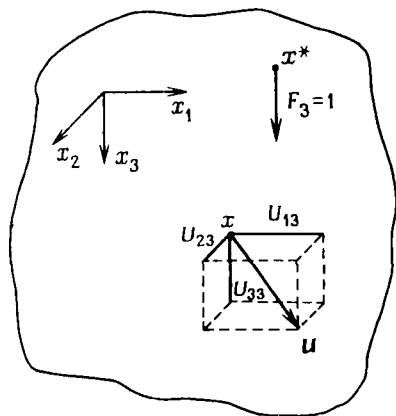


Рис. 9.3. Компоненты перемещений U_{13} , U_{23} , U_{33} , вызванных сосредоточенной силой F_3 , приложенной в источнике x^* .

9.3 для сосредоточенной силы $F_3 = 1$. Как видно, тензорная функция Грина всегда симметрична.

*) Иногда ее называют тензором Кельвина—Сомильяны.

***) В сопротивлении материалов функцию Грина называют *функцией влияния*.

Полученное представление можно также распространить на случаи действия сил с особенностями более высокого порядка (диполи, квадруполь и т. д.). Такие силы применяются при численной реализации метода граничных интегральных уравнений [74].

Тензорную функцию Грина можно указать также для обобщающегося в п. 8.5.3.3 случая сосредоточенной силы в бесконечной плоскости. Для плоского деформированного состояния она будет иметь вид

$$G = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu)\delta_{ij} \ln \bar{r} - \frac{(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*)}{\bar{r}^2} \right],$$

где теперь $\bar{r} = \sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - x_2^*)^2}$, а i и j принимают только значения 1 и 2. Отсюда вновь можно вычислить перемещения в бесконечной плоскости от сосредоточенной силы. Замечательно, что появляющаяся при этом логарифмическая особенность при $r \rightarrow \infty$ (которая, впрочем, имеет место и в задаче для полуплоскости), в трехмерном случае отсутствует.

§ 9.2. Нормальная сосредоточенная сила на поверхности полупространства (задача Буссинеска)

Пусть на поверхности полубесконечного упругого тела с плоской границей $z = 0$ (так называемое полупространство) действует в начале координат нормальная сосредоточенная сила (рис. 9.4). Речь идет об осесимметричной задаче. На бесконечности напряжения должны обращаться в нуль. Решение удастся получить с помощью формул Буссинеска (см. п. 5.1.6) при использовании гармонических функций. Согласно (5.52), имеем

$$\phi_0 = A \ln(R + z), \quad \phi_3 = B/R, \quad (9.11)$$

где $R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2$. Легко убедиться в том, что $\Delta\phi_0 = 0$. Подставляя (9.11) в формулы Буссинеска (5.53) и (5.55), получим перемещения

$$2Gu_r = -A \frac{r}{R(r+z)} + B \frac{rz}{R^3},$$

$$2Gu_z = 4(1-\nu) \frac{B}{R} - \frac{A}{R} - B \frac{r^2}{R^3}$$

и напряжения

$$\sigma_{rr} = -2\nu B \frac{z}{R^3} + A \left[\frac{1}{R(R+z)} - \frac{z}{R^3} \right] + B \left(\frac{z}{R^3} - 3 \frac{r^2 z}{R^5} \right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -2(2-\nu) B \frac{z}{R^3} - A \frac{1}{R(R+z)} + B \frac{z}{R^3},$$

$$\sigma_{zz} = -2(2-\nu) B \frac{z}{R^3} + A \frac{z}{R^3} + 3B \frac{r^2 z}{R^5},$$

$$\tau_{rz} = -2(2-\nu) B \frac{r}{R^3} + A \frac{r}{R^3} + B \left(\frac{r}{R^3} - 3 \frac{r z^2}{R^5} \right).$$

Для определения произвольных постоянных A и B привлекаются граничные условия, а также условия статического рав-

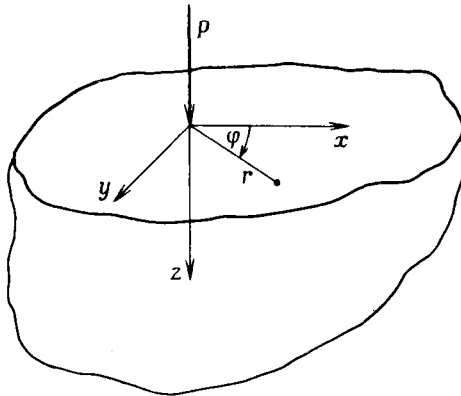


Рис. 9.4. Сосредоточенная сила, нормальная к границе полупространства (задача Буссинеска), $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$.

новесия. При $z=0$ ($R=r$) напряжения σ_{zz} и τ_{rz} должны обращаться в нуль. Отсюда следует $A=(1-2\nu)B$ и, таким образом,

$$\sigma_{zz} = -3Bz^3/R^5, \quad (9.12)$$

т. е. граничное условие для σ_{zz} удовлетворено.

Уравнение равновесия в направлении оси z для плоскости $z = \text{const}$ дает

$$P + 2\pi \int_0^{\infty} \sigma_{zz} r \, dr = 0.$$

и с учетом (9.12) для произвольной постоянной B находим $B = P/2\pi$. Тогда перемещения и напряжения будут равны

$$2Gu_r = \frac{P}{2\pi R} \left[\frac{rz}{R^2} - (1 - 2\nu) \frac{r}{R+z} \right], \quad u_\varphi = 0,$$

$$2Gu_z = \frac{P}{2\pi R} \left[\frac{z^2}{R^2} + 2(1 - \nu) \right],$$

$$\sigma_{rr} = \frac{P}{2\pi R^2} \left[-3 \frac{r^2 z}{R^3} + (1 - 2\nu) \frac{R}{R+z} \right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = (1 - 2\nu) \frac{P}{2\pi R^2} \left[\frac{z}{R} - \frac{R}{R+z} \right],$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{R^5}, \quad \tau_{rz} = -\frac{3P}{2\pi} \frac{rz^2}{R^5}.$$

Видно, что перемещения и напряжения стремятся к нулю на бесконечности как $1/R$ и соответственно $1/R^2$.

Напряжения σ_{zz} и τ_{rz} в плоскости $\varphi = \text{const}$ сводятся к равнодействующей σ_R (рис. 9.5), которая равна

$$\sigma_R = \sqrt{(\sigma_{zz})^2 + (\tau_{rz})^2} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^2}{R^4} \quad (9.13)$$

и $\sigma_{zz}/\tau_{rz} = \lg \vartheta = z/r$. Из (9.13) следует, что

$$r^2 + z^2 = z \sqrt{3P/(2\pi\sigma_R)},$$

и видно, что $\sigma_R = \text{const}$ на сферах радиуса $1/2 \sqrt{3P/(2\pi\sigma_R)}$, которые касаются начала координат и центры которых лежат на оси z (ср. с аналогичной двумерной задачей в п. 8.5.3.1).

Компоненты перемещений и напряжений в декартовых координатах для задачи Буссинеска выражаются в виде

$$2Gu = \frac{P}{2\pi R} \left[\frac{xz}{R^2} - (1 - 2\nu) \frac{x}{R+z} \right],$$

$$2Gv = \frac{P}{2\pi R} \left[\frac{yz}{R^2} - (1 - 2\nu) \frac{y}{R+z} \right],$$

$$2Gw = \frac{P}{2\pi R} \left[\frac{z^2}{R^2} + 2(1 - \nu) \right],$$

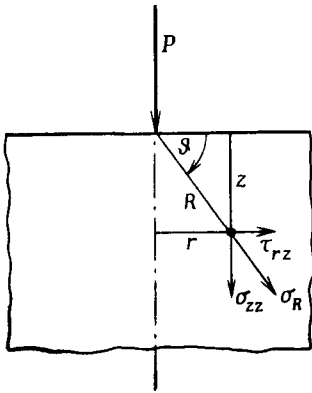


Рис. 9.5. К определению напряженного состояния в задаче Буссинеска.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{P}{2\pi} \left\{ -3 \frac{x^2 z}{R^5} + (1 - 2\nu) \left[\frac{x^2 (2R + z)}{R^3 (R + z)^2} - \frac{R^2 - Rz - z^2}{R^3 (R + z)} \right] \right\}, \\ \sigma_{yy} &= \frac{P}{2\pi} \left\{ -3 \frac{y^2 z}{R^5} + (1 - 2\nu) \left[\frac{y^2 (2R + z)}{R^3 (R + z)^2} - \frac{R^2 - Rz - z^2}{R^3 (R + z)} \right] \right\}, \\ \sigma_{zz} &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{R^5}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{P}{2\pi} \left[3 \frac{xyz}{R^5} - (1 - 2\nu) \frac{xy (2R + z)}{R^3 (R + z)^2} \right], \\ \tau_{yz} &= \frac{3P}{2\pi} \frac{yz^2}{R^5}, \quad \tau_{zx} = \frac{3P}{2\pi} \frac{xz^2}{R^5}.\end{aligned}$$

Решение задачи Буссинеска можно получить иным способом, комбинируя вектор Буссинеска

$$H_3 = BR \quad (9.14)$$

с потенциалом деформаций Ламе

$$\phi = C \ln(R + z). \quad (9.15)$$

Первый применялся при решении задачи Кельвина (см. § 9.1). Для потенциала Ламе из общих соотношений, указанных в п. 5.1.2, в случае осевой симметрии имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{Cz}{R^3} - \frac{C}{R(R+z)}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{C}{R(R+z)}, \\ \sigma_{zz} &= -\frac{Cz}{R^3}, \quad \tau_{rz} = -\frac{Cr}{R^3}, \\ 2Gu_r &= C \frac{r}{R(R+z)}, \quad 2Gu_z = \frac{C}{R}.\end{aligned}$$

Из граничного условия $\tau_{rz} = 0$ при $z = 0$ для констант B и C в (9.14) и (9.15) находим

$$B(1 - 2\nu) + C = 0,$$

а из условия равновесия получаем

$$4\pi(1 - \nu)B + 2\pi C = P.$$

После решения этих двух уравнений и определения B и C вновь получим уже приведенные выше выражения для перемещений и напряжений.

В заключение следует еще упомянуть, что решение задачи Буссинеска может быть получено также с помощью бигармонической функции

$$Z = AR + Bz \ln(R + z), \quad (9.16)$$

соответствующей функции перемещений Лява (см. п. 5.1.4). При этом определяющими являются соотношения (5.31) и (5.34)

для случая $\partial/\partial\varphi = 0$ (так называемые формулы Лява). Произвольные постоянные A и B , фигурирующие в (9.16), вновь находятся из граничных условий и уравнения равновесия.

Возможность решения задачи Буссинеска с помощью интегрального преобразования показана в п. 9.6.3.

§ 9.3. Касательная сосредоточенная сила на поверхности полупространства (задача Черрути)

Пусть на поверхности $z = 0$ полупространства в начале координат приложена сосредоточенная сила Q в направлении оси x согласно рис. 9.6 (в остальном поверхность свободна от нагрузки).

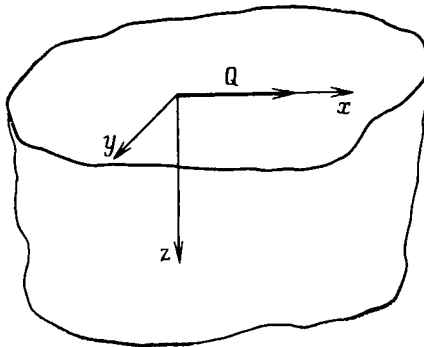


Рис. 9.6. Сосредоточенная сила, касательная к границе полупространства (задача Черрути).

В рассматриваемом случае задача уже не является осесимметричной. Решение, однако, можно получить аналогично тому, как это делалось для задачи Буссинеска, комбинированием потенциала деформаций Ламе

$$\phi = Ax/(R + z) \quad (9.17)$$

и вектора Буссинеска с компонентами

$$H_x = BR, \quad H_y = 0, \quad H_z = C \ln x(R + z), \quad (9.18)$$

причем A , B и C — произвольные постоянные (имеющие другие значения, нежели приведенные в предыдущем разделе). Применим соотношения, указанные в п. 5.1.2 и 5.1.3. Из (5.10) и

(5.21) получаются выражения для перемещений

$$2Gu = \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2(1 - \nu)\Delta H_x - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) \text{ и т. д.},$$

а из (5.12) и (5.24) для напряжений

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \Delta \phi + \left(\nu \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) + \\ + 2(1 - \nu) \frac{\partial}{\partial x} \Delta H_x \text{ и т. д.}$$

Постоянные A , B , C определяются из граничных условий $\sigma_{zz} = \tau_{yz} = 0$ при $z = 0$, а также из условия равновесия (касательных сил в направлении оси x на плоскости $z = \text{const}$ и силы Q) и будут равны

$$A = \frac{Q(1 - 2\nu)}{2\pi}, \quad B = \frac{Q}{4\pi(1 - \nu)}, \quad C = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \frac{Q}{4\pi}.$$

В результате получаем формулы в декартовых координатах для компонент перемещений

$$2Gu = \frac{Q}{2\pi} \left\{ \frac{1}{R} + \frac{x^2}{R^3} + (1 - 2\nu) \left[\frac{1}{R+z} - \frac{x^2}{R(R+z)^2} \right] \right\}, \\ 2Gv = \frac{Q}{2\pi} \left[\frac{xy}{R^3} - (1 - 2\nu) \frac{xy}{R(R+z)^2} \right], \\ 2Gw = \frac{Q}{2\pi} \left[\frac{xz}{R^3} + (1 - 2\nu) \frac{x}{R(R+z)} \right] \quad (9.19)$$

и напряжений

$$\sigma_{xx} = \frac{Qx}{2\pi R^3} \left[-\frac{3x^2}{R^2} + \frac{1 - 2\nu}{(R+z)^2} \left(R^2 - \frac{2Ry^2}{R+z} - y^2 \right) \right], \\ \sigma_{yy} = \frac{Qx}{2\pi R^3} \left[-\frac{3y^2}{R^2} + \frac{1 - 2\nu}{(R+z)^2} \left(3R^2 - \frac{2Rx^2}{R+z} - x^2 \right) \right], \\ \sigma_{zz} = -\frac{3Qxz^2}{2\pi R^5}, \\ \tau_{xy} = \frac{Qy}{2\pi R^3} \left[-\frac{3x^2}{R^2} - \frac{1 - 2\nu}{(R+z)^2} \left(R^2 - \frac{2Rx^2}{R+z} - x^2 \right) \right], \\ \tau_{yz} = -\frac{3Qxyz}{2\pi R^5}, \quad \tau_{zx} = -\frac{3Qx^2z}{2\pi R^5}. \quad (9.20)$$

§ 9.4. Сосредоточенная сила внутри полупространства (задача Миндлина)

Пусть ось z направлена внутрь упругого полупространства и в точке на расстоянии h от поверхности приложена сосредоточенная сила в направлении оси z или перпендикулярно ей (в направлении оси x), см. рис. 9.7(а). Впервые решение этой задачи было дано Миндлином [75].

Целесообразно принять начало координат на расстоянии $z = h$ над поверхностью полупространства, зеркально отразив точку приложения нагрузки (рис. 9.7(b)). Тогда $R_1 = \sqrt{r^2 + z_1^2}$, причем $z_1 = z - 2h$ — координата, отсчитываемая от точки приложения силы.

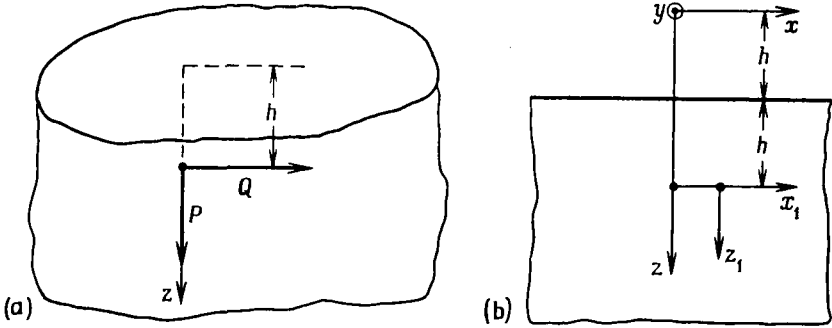


Рис. 9.7. Полупространство с сосредоточенной силой, приложенной к внутренней точке (задача Миндлина); (а) положение точки приложения силы, (б) система координат.

Решение задачи для силы P в направлении оси z получается наложением вектора Буссинеска H_z и потенциала деформаций Ламе, определяемых следующим образом:

$$\begin{aligned} H_z^{(1)} &= \frac{R}{8\pi(1-\nu)} R_1, & H_z^{(2)} &= -\frac{P}{8\pi(1-\nu)} R, \\ H_z^{(3)} &= -\frac{P}{4\pi(1-\nu)} \frac{hz}{R}, & H_z^{(4)} &= \frac{P}{2\pi} R, \end{aligned} \quad (9.21)$$

а также

$$\begin{aligned} \phi^{(1)} &= -(1-2\nu) \frac{P}{2\pi} \ln(R+z), \\ \phi^{(2)} &= \frac{1-2\nu}{2\pi(1-\nu)} \frac{h}{R}, & \phi^{(3)} &= \frac{P}{4\pi(1-\nu)} \frac{h^2 z}{R^3}. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Видно, что $H_z^{(1)}$ представляет собой решение задачи Кельвина для силы, приложенной в заданной точке. Остальные слагаемые содержат особенности, которые лежат вне упругого полупространства. Таким образом, комбинация $H_z^{(4)}$ и $\phi^{(1)}$ соответствует решению задачи Буссинеска для силы P на поверхности полупространства $z \geq 0$. Возникающие при этом перемещения и напряжения уже приводились выше.

Первые три вектора Буссинеска в (9.21) дают функцию перемещений Лява

$$Z(r, z) = \frac{P}{8\pi(1-\nu)} \left(R_1 - R - 2h \frac{z}{R} \right), \quad (9.23)$$

в то время как из остающихся в (9.22) потенциалов деформаций получается

$$\phi = \frac{P}{8\pi(1-\nu)} \left[4(1-2\nu) \frac{h}{R} + 2h^2 \frac{z}{R^3} \right]. \quad (9.24)$$

Решение задачи Буссинеска, а также формулы (9.23) и (9.24) позволяют удовлетворить граничным условиям рассматриваемой задачи $\sigma_{zz} = \tau_{rz} = 0$ при $z = h$. Выражения для перемещений и напряжений можно получить суммированием уже указанных решений. Вводя обозначение $\bar{P} = P/[8\pi(1-\nu)]$, найдем

$$\begin{aligned} 2Gu_r &= \bar{P} \left[\frac{z_1}{R_1^3} - \frac{4(1-2\nu)(1-\nu)}{R(R+z)} + (3-4\nu) \frac{z_1}{R^3} + \frac{6hz(z-h)}{R^5} \right], \\ 2Gu_z &= \bar{P} \left[\frac{z_1^2}{R_1^3} + \frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{5-12\nu+8\nu^2}{R} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(3-4\nu)z^2 - 2hz + 2h^2}{R^3} + \frac{6hz^2(z-h)}{R^5} \right], \end{aligned} \quad (9.25)$$

а также

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \bar{P} \left[\frac{3z_1^3}{R_1^5} - 2(1+\nu) + \frac{z_1}{R_1^3} + \frac{4(1-2\nu)(1-\nu)}{R(R+z)} - \frac{2(5-7\nu)z - 12(1-\nu)h}{R^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(3-4\nu)z^3 - 6(7-2\nu)hz^2 + 24h^2z}{R^5} + \frac{30hz^3(z-h)}{R^7} \right], \\ \sigma_{zz} &= \bar{P} \left[-3 \frac{z_1^3}{R_1^5} - (1-2\nu) \frac{z_1}{R_1^3} + (1-2\nu) \frac{z-2h}{R^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3(3-4\nu)z^5 - 12(2-\nu)hz^2 + 18h^2z}{R^5} - \frac{30hz^3(z-h)}{R^7} \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \bar{P} \left[(1-2\nu) \frac{z_1}{R_1^3} - \frac{4(1-2\nu)(1-\nu)}{R(R+z)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-2\nu)(3-4\nu)z - 6(1-2\nu)h}{R^3} + \frac{6(1-2\nu)hz^2 - 6h^2z}{R^5} \right], \\ \tau_{rz} &= \bar{P} \left[-3 \frac{z_1^2}{R_1^5} - \frac{1-2\nu}{R_1^3} + \frac{1-2\nu}{R^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3(3-4\nu)z^2 - 6(3-2\nu)hz + 6h^2}{R^5} - \frac{30hz^2(z-h)}{R^7} \right]. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Видно, что (9.25) и (9.26) при $h=0$, т. е. $z_1 = z$ и $R_1 = R$, переходят в решение задачи Буссинеска. Решение задачи для силы Q в направлении оси x устанавливается наложением векторов Буссинеска H_x и H_z :

$$\begin{aligned} H_x^{(1)} &= \frac{QR}{4\pi(1-\nu)}, & H_z^{(1)} &= \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} Qx \ln(R+z), \\ H_x^{(2)} &= \frac{1-2\nu}{2\pi} Q[z \ln(R+z) - R], & H_x^{(3)} &= \frac{Q}{8\pi(1-\nu)} R_1, \\ H_x^{(4)} &= -\frac{Q}{8\pi(1-\nu)} R, & H_x^{(5)} &= -\frac{Q}{8\pi(1-\nu)} \frac{2h^2}{R}, & H_z^{(6)} &= \frac{Q}{8\pi(1-\nu)} \frac{2hx}{R}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Гармонические функции $H_x^{(2)}$ и $H_x^{(5)}$ можно заменить согласно (5.28) соответствующими потенциалами деформаций Ламе

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} &= -\frac{\partial}{\partial x} H_x^{(2)} = \frac{1-2\nu}{2\pi} \frac{Qx}{R+z}, \\ \phi^{(5)} &= -\frac{\partial}{\partial x} H_x^{(5)} = -\frac{Q}{8\pi(1-\nu)} \frac{2h^2x}{R^3}. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Легко видеть, что $H_x^{(1)}$ и $H_z^{(1)}$, а также $\phi^{(2)}$ соответствуют решению задачи Черрути для касательной силы Q , действующей в направлении оси x на полупространство $z \geq 0$ (см. § 9.3). Окончательно общее решение получается суммированием решения задачи Черрути с векторами Буссинеска

$$H_x = \frac{Q}{8\pi(1-\nu)} (R_1 - R), \quad H_z = \frac{Q}{8\pi(1-\nu)} \frac{2hx}{R}$$

и с потенциалом деформаций

$$\phi = -\frac{Q}{8\pi(1-\nu)} \frac{2h^2x}{R^3}.$$

Таким образом, можно удовлетворить граничным условиям $\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ при $z = h$.

Выражения для перемещений и напряжений вновь могут быть составлены из уже известных решений. Полученные таким способом значения должны быть просуммированы с перемещениями и напряжениями (9.19) и (9.20) для задачи Черрути (причем для сокращения введено обозначение $\bar{Q} = Q/[8\pi(1-\nu)]$):

$$\begin{aligned} 2Gu &= \bar{Q} \left[\frac{x^2}{R_1^3} + \frac{3-4\nu}{R_1} - \frac{3-4\nu}{R} - \frac{x^2 - 2h(z-h)}{R^3} - \frac{6hx^2(z-h)}{R^5} \right], \\ 2Gv &= \bar{Q} \left[\frac{xy}{R_1^3} - \frac{xy}{R^3} - \frac{6hxy(z-h)}{R^5} \right], \\ 2Gw &= \bar{Q} \left[\frac{xz_1}{R_1^3} - \frac{xz + 2(3-4\nu)hx}{R^3} - \frac{6hxz(z-h)}{R^5} \right], \end{aligned} \quad (9.29)$$

а также

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \bar{Q}x \left[-3 \frac{x^2}{R_1^5} - \frac{1-2\nu}{R_1^3} + \frac{1-2\nu}{R^3} + \frac{3x^2 - 6(3-2\nu)hx + 18h^2}{R^5} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{30hx^2(z-h)}{R^7} \right], \\ \sigma_{yy} &= \bar{Q}x \left[-3 \frac{y^2}{R_1^5} + \frac{1-2\nu}{R_1^3} - \frac{1-2\nu}{R^3} + \frac{3y^2 - 6(1-2\nu)hy + 6h^2}{R^5} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{30hy^2(z-h)}{R^7} \right], \\ \sigma_{zz} &= \bar{Q}x \left[-3 \frac{z_1^2}{R_1^5} + \frac{1-2\nu}{R_1^3} - \frac{1-2\nu}{R^3} + \frac{3z^2 + 6(1-2\nu)hz + 6h^2}{R^5} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{30hz^2(z-h)}{R^7} \right], \\ \tau_{xy} &= \bar{Q}y \left[-3 \frac{x^2}{R_1^5} - \frac{1-2\nu}{R_1^3} + \frac{1-2\nu}{R^3} + \frac{3x^2 - 6h(z-h)}{R^5} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{30hx^2(z-h)}{R^7} \right], \\ \tau_{zx} &= \bar{Q} \left[-3 \frac{x^2 z_1}{R_1^5} - \frac{(1-2\nu)z_1}{R_1^3} + \frac{(1-2\nu)z_1}{R^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3x^2 z + 6(1-2\nu)hx^2 - 6hx(z-h)}{R^5} + \frac{30hx^2 z(z-h)}{R^7} \right], \\ \tau_{zy} &= \bar{Q}xy \left[-3 \frac{z_1}{R_1^5} + \frac{3z + 6(1-2\nu)h}{R^5} + \frac{30hz(z-h)}{R^7} \right]. \end{aligned} \quad (9.30)$$

При $h=0$ все выражения (9.29) и (9.30) обращаются в нуль, и вновь получается решение задачи Черрути.

§ 9.5. Пространственные задачи о концентрации напряжений

Выше уже обсуждались отдельные задачи о концентрации напряжений или об «эффekte выреза»*) (см. п. 7.5.3, 8.5.5, 8.5.7).

Такие возмущения однородного распределения напряжений, которые связаны с появлением пиков напряжений в локальной

*) Понятие «эффект выреза» (или надреза) впервые было сформулировано в 1910 г. А. Леонном.

очень ограниченной области, играют весьма важную роль в приложениях. Характерным для концентрации напряжений является непостоянство или внезапное изменение формы, которое может быть связано, например, с отверстием или полостью, надрезом или вырезом в элементе конструкции *). Для некоторых подобных трехмерных задач известны точные решения.

Ниже будут рассмотрены сначала основные элементарные решения, а затем кратко проанализированы решения для пространственных задач о вырезе или трещине, которые не могут быть получены элементарным способом.

9.5.1. Задача Ламе для полой сферы

Рассмотрим прежде всего основную задачу вычисления напряжений в толстостенной полый сфере (рис. 9.8) при нагрузу-

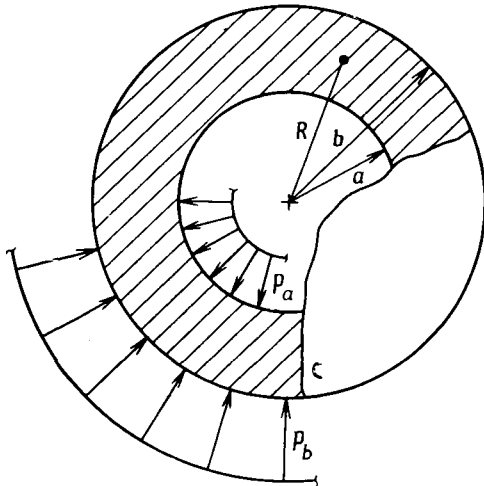


Рис. 9.8. Толстостенная полый сфера под действием равномерного внутреннего и внешнего давления (задача Ламе).

жении постоянным внутренним и внешним давлением. Здесь идет речь о полярно симметричном напряженно-деформированном состоянии; поэтому целесообразно применить сферические координаты R, ϑ, φ , где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (см. п. 3.4.2). В рассматриваемом случае имеется только радиальное перемещение $u_R(R)$, все компоненты деформаций и напряжений,

*) Из обширной литературы здесь следует назвать, например, работы [B14—B16], а также обзоры литературы Штернберга [76] и Нейбера и Хана [77].

кроме $\varepsilon_{RR} = du_R/dR$, $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = u_R/R$, а также $\sigma_{RR}, \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$, равны нулю.

Для решения привлекается потенциал деформаций Ламе (см. п. 5.1.2) в виде

$$\phi(R) = A/R + \text{const}, \quad (9.31)$$

где

$$\Delta\phi = \left(\frac{d^2}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d}{dR} \right) \phi = 0.$$

Из (9.31) следует

$$2Gu_R = \frac{d\phi}{dR} = -\frac{A}{R^2}, \quad (9.32)$$

и видно, что

$$2G \left(\frac{d}{dR} + \frac{2}{R} \right) u_R = \frac{d}{dR} \Delta\phi = e = 0.$$

С учетом (9.31) для компонент напряжений получаются выражения

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_{RR} &= \frac{d^2\phi}{dR^2} = \frac{2A}{R^3}, \\ \overset{\circ}{\sigma}_{\theta\theta} &= \overset{\circ}{\sigma}_{\varphi\varphi} = \overset{\circ}{\sigma}_{TT} = \frac{1}{R} \frac{d\phi}{dR} = -\frac{A}{R^3}, \end{aligned} \quad (9.33)$$

где T — направление произвольной касательной к сферической поверхности $R = \text{const}$.

Наложением произвольного гидростатического напряженного состояния $\sigma_R = \sigma_T = B = \text{const}$ находим напряжения в радиальном и тангенциальном направлениях

$$\sigma_{RR} = \frac{2A}{R^3} + B, \quad \sigma_{TT} = -\frac{A}{R^3} + B. \quad (9.34)$$

Они приводят к дополнительной деформации в радиальном направлении $(1 - 2\nu)B/E$, поэтому перемещения с учетом (9.32) будут равны

$$u_R = \frac{1}{2G} \left(-\frac{A}{R^2} + \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} BR \right). \quad (9.35)$$

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{2A}{a^3} + B &= -p_a \quad \text{при } R = a, \\ \frac{2A}{b^3} + B &= -p_b \quad \text{при } R = b, \end{aligned}$$

и отсюда для произвольных постоянных находим

$$A = \frac{(p_a - p_b) a^3 b^3}{2(a^3 - b^3)}, \quad B = \frac{p_b b^3 - p_a a^3}{2(a^3 - b^3)}.$$

В результате компоненты напряжений будут определяться по формулам

$$\sigma_{RR} = \frac{p_a a^3 - p_b b^3}{b^3 - a^3} - \frac{a^3 b^3}{R^3} \frac{p_a - p_b}{b^3 - a^3}, \quad (9.36)$$

$$\sigma_{TT} = \frac{p_a a^3 - p_b b^3}{b^3 - a^3} + \frac{a^3 b^3}{2R^3} \frac{p_a - p_b}{b^3 - a^3}, \quad (9.37)$$

а перемещение — по формуле

$$2Gu_R = R \left[\frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{p_a a^3 - p_b b^3}{b^3 - a^3} + \frac{a^3 b^3}{2R^3} \frac{p_a - p_b}{b^3 - a^3} \right]. \quad (9.38)$$

Для частного случая только внутреннего давления в полый сфере ($p_b = 0$) справедливы равенства

$$\sigma_{RR} = \frac{p_a a^3}{b^3 - a^3} \left(1 - \frac{b^3}{R^3} \right), \quad \sigma_{TT} = \frac{p_a a^3}{b^3 - a^3} \left(1 + \frac{b^3}{2R^3} \right). \quad (9.39)$$

Максимальное окружное нормальное напряжение

$$(\sigma_{TT})_{\max} = \frac{p_a}{2} \frac{2a^3 + b^3}{b^3 - a^3}$$

появляется на внутренней поверхности.

Для тонкостенной полый сферы с толщиной стенки $h = b - a$ (средний радиус $a \approx b$) элементарное рассмотрение условия равновесия приводит к известному результату $\sigma_{TT} = p_a a / (2h)$ («котельная формула» в сопротивлении материалов).

В предельном случае $b \rightarrow \infty$ из (9.39) для напряжений имеем

$$\sigma_{RR} = -p_a a^3 / R^3, \quad \sigma_{TT} = p_a a^3 / (2R^3),$$

а перемещения будут равны

$$u_R = \frac{p_a}{4G} \frac{a^3}{R^2}.$$

Напряжения и перемещения затухают на бесконечности.

Решение для элементарной задачи о концентрации напряжений в окрестности пространственной сферической полости в бесконечно протяженной среде при всестороннем растяжении получается из (9.36) и (9.37) для $p_a = 0$, $p_b = -\sigma$ при $b \rightarrow \infty$. Нормальные напряжения при этом равны

$$\sigma_{RR} = \sigma (1 - a^3 / R^3), \quad \sigma_{TT} = \sigma (1 + a^3 / (2R^3)).$$

Видно, что для окружных нормальных напряжений на поверхности сферической полости коэффициент концентрации напряжений равен 1,5, а соответствующее перемещение выражается в виде

$$u_R = \frac{\sigma R}{2G} \left[\frac{1-2\nu}{1-\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{R} \right)^3 \right].$$

9.5.2. Полость сферической формы в бесконечно протяженном теле при одноосном растяжении (задача Леона)

Эта элементарная задача о концентрации напряжений была впервые решена в 1908 г. А. Леоном, который при этом использовал результаты решения Стефана [78, 79].

Впрочем, Леона следует считать первым исследователем, который много занимался теоретическими решениями задач о концентрации напряжений и который осознал также их практическое значение, хотя в литературе его вклад не отражен. Решение названной задачи часто приписывается Саусвеллу и Гафу [80] (они представили его без вывода с помощью функции перемещений Лява в цилиндрических координатах).

Решение задачи Леона целесообразно представить в сферических координатах (рис. 9.9). Вследствие осевой симметрии $u_\varphi = 0$ и деформации равны

$$\begin{aligned} \epsilon_{RR} &= \frac{\partial u_R}{\partial R}, \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_R}{R}, \\ \epsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{u_R}{R} + \frac{u_\theta \operatorname{ctg} \theta}{R}, \\ \epsilon_{R\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_R}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial R} - \frac{u_\theta}{R} \right). \end{aligned}$$

Отличны от нуля только компоненты напряжений σ_{RR} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$ и $\tau_{R\theta}$. На бесконечности (практически при достаточно большом удалении от сферической полости) в направлении оси z ($\theta = 0, \pi$) действуют равномерные растягивающие напряжения $\sigma_z^\infty = \sigma$. В сферических координатах соответствующее напряженное состояние представляется в виде

$$\sigma_{RR}^0 = \sigma \cos^2 \theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^0 = \sigma \sin^2 \theta, \quad \tau_{R\theta}^0 = -\sigma \sin \theta \cos \theta. \quad (9.40)$$

К нему следует присоединить решения, с помощью которых могут быть удовлетворены граничные условия на поверхности полости и получены напряжения, затухающие на бесконечности.

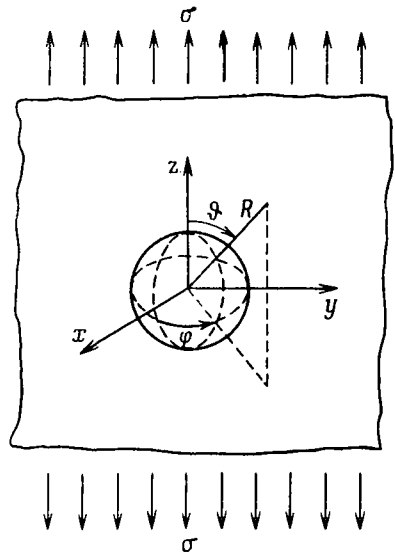


Рис. 9.9. Сферическая полость в бесконечно протяженном теле при одноосном растяжении (задача Леона).

Эти решения получаются из функции перемещений Лява

$$Z = Az/R = A \cos \vartheta \quad (9.41)$$

и потенциала деформаций Ламе *)

$$\phi(R, \vartheta) = \frac{B}{R} + \frac{C}{R^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1). \quad (9.42)$$

С учетом (9.41) справедливы следующие соотношения для перемещений в сферических координатах:

$$\begin{aligned} 2Gu_R &= 2(1-\nu) \cos \vartheta \Delta Z - \frac{\sin \vartheta}{R^2} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta}, \\ 2Gu_\vartheta &= -2(1-\nu) \sin \vartheta \Delta Z + \frac{\cos \vartheta}{R^2} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} + \frac{\sin \vartheta}{R} \frac{\partial^2 Z}{\partial \vartheta^2}, \end{aligned} \quad (9.43)$$

а также для напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{RR} &= (2-\nu) \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial R} \Delta Z + \frac{\sin \vartheta}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{2Z}{R^2} - \nu \Delta Z \right), \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} &= \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial R} \left(\nu \Delta Z - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \vartheta^2} \right) - \\ &\quad - \frac{\sin \vartheta}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[(2-\nu) \Delta Z + \frac{2Z}{R^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \vartheta^2} \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\sin \vartheta}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[(1-\nu) \Delta Z - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \vartheta^2} \right], \\ \tau_{R\vartheta} &= \frac{\cos \vartheta}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[(1-\nu) \Delta Z - \frac{2Z}{R^2} \right] - \\ &\quad - \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial R} \left[(1-\nu) \Delta Z - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \vartheta^2} \right], \end{aligned} \quad (9.44)$$

где оператор Лапласа

$$\Delta(\dots) = \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) (\dots).$$

Соответственно из общих формул для потенциала деформаций Ламе (см. п. 5.1.2) с учетом (9.42) вытекают следующие выражения для перемещений и напряжений:

$$2Gu_R = \frac{\partial \phi}{\partial R}, \quad 2Gu_\vartheta = \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}, \quad (9.45)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{RR} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2}, & \sigma_{\vartheta\vartheta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{R^2} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}, & \tau_{R\vartheta} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial R \partial \vartheta} \left(\frac{\phi}{R} \right). \end{aligned} \quad (9.46)$$

*) Появляющиеся при этом гармонические функции $1/R$ и $(1/R^3) \times (3 \cos^2 \vartheta - 1)$ называются также *зональными сферическими функциями*.

По этим формулам с учетом (9.41) и (9.42) находим

$$2Gu_R = \frac{A-B}{R^2} + \frac{3C}{R^4} + \left[-(5-4\nu)\frac{A}{R^2} - \frac{9C}{R^4} \right] \cos^2 \vartheta, \quad (9.47)$$

$$2Gu_\vartheta = \left[(2-4\nu)\frac{A}{R^2} - \frac{6C}{R^4} \right] \sin \vartheta \cos \vartheta,$$

$$\sigma_{RR} = -2(1+\nu)\frac{A}{R^3} + \frac{2B}{R^3} - \frac{12C}{R^5} + \left[(10-2\nu)\frac{A}{R^3} + \frac{36C}{R^5} \right] \cos^2 \vartheta,$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = -(1-2\nu)\frac{A}{R^3} - \frac{B}{R^3} + \frac{9C}{R^5} - \left[(1-2\nu)\frac{A}{R^3} + \frac{21C}{R^5} \right] \cos^2 \vartheta,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = (1-2\nu)\frac{A}{R^3} - \frac{B}{R^3} + \frac{3C}{R^5} - \left[(3-6\nu)\frac{A}{R^3} + \frac{15C}{R^5} \right] \cos^2 \vartheta, \quad (9.48)$$

$$\tau_{R\vartheta} = \left[(2-2\nu)\frac{A}{R^3} + \frac{24C}{R^5} \right] \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Неизвестные пока произвольные постоянные определяются из граничных условий на поверхности сферической полости $\sigma_{RR} = \tau_{R\vartheta} = 0$ при $R = a$, $0 < \vartheta < \pi$. Вместе с формулами (9.40) и (9.48) для напряжений получают три уравнения для определения A , B и C , решение которых дает

$$A = -\frac{5a^3\sigma}{2(7-5\nu)}, \quad B = \frac{(1-5\nu)a^3\sigma}{2(7-5\nu)}, \quad C = \frac{a^5\sigma}{2(7-5\nu)}.$$

Суммирование найденных таким образом напряжений (9.48) и напряжений, соответствующих однородному напряженному состоянию (9.40), приводит к формулам Леона

$$\sigma_{RR} = \frac{\sigma}{7-5\nu} \left\{ 6 \left[\left(\frac{a}{R} \right)^3 - \left(\frac{a}{R} \right)^5 \right] + \right.$$

$$\left. + \left[(7-5\nu) - 5(5-\nu) \left(\frac{a}{R} \right)^3 + 18 \left(\frac{a}{R} \right)^5 \right] \cos^2 \vartheta \right\},$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{\sigma}{2(7-5\nu)} \left\{ 2(7-5\nu) + (4-5\nu) \left(\frac{a}{R} \right)^3 + 9 \left(\frac{a}{R} \right)^5 + \right.$$

$$\left. + \left[-2(7-5\nu) + 5(1-2\nu) \left(\frac{a}{R} \right)^3 - 21 \left(\frac{a}{R} \right)^5 \right] \cos^2 \vartheta \right\},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{3\sigma}{2(7-5\nu)} \left\{ -(2-5\nu) \left(\frac{a}{R} \right)^3 + \left(\frac{a}{R} \right)^5 + \right.$$

$$\left. + 5 \left[(1-2\nu) \left(\frac{a}{R} \right)^3 - \left(\frac{a}{R} \right)^5 \right] \cos^2 \vartheta \right\}, \quad (9.49)$$

$$\tau_{R\vartheta} = \frac{\sigma}{7-5\nu} \left[-(7-5\nu) - 5(1+\nu) \left(\frac{a}{R} \right)^3 + 12 \left(\frac{a}{R} \right)^5 \right] \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Перемещения получаются наложением перемещений (9.47) и перемещений, возникающих вследствие однородного напря-

женного состояния, т. е.

$$2G\dot{u}_R = \sigma R \left(\cos^2 \vartheta - \frac{\nu}{1+\nu} \right), \quad 2G\dot{u}_\vartheta = -\sigma R \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

В результате следуют полученные Леоном формулы

$$\begin{aligned} 2Gu_R &= \frac{\sigma R}{2(7-5\nu)} \left\{ -\frac{2\nu}{1+\nu}(7-5\nu) - (6-5\nu) \left(\frac{a}{R}\right)^3 + 3 \left(\frac{a}{R}\right)^5 + \right. \\ &\quad \left. + \left[2(7-5\nu) + 5(5-4\nu) \left(\frac{a}{R}\right)^3 - 9 \left(\frac{a}{R}\right)^5 \right] \cos^2 \vartheta \right\}, \\ 2Gu_\vartheta &= \frac{\sigma R}{7-5\nu} \left[-(7-5\nu) + 5(1-2\nu) \left(\frac{a}{R}\right)^3 + \right. \\ &\quad \left. + 3 \left(\frac{a}{R}\right)^5 \right] \sin \vartheta \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (9.50)$$

Отличные от нуля напряжения на поверхности сферического отверстия ($a/R = 1$) равны

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta\vartheta} &= \frac{3\sigma}{2(7-5\nu)} (9-5\nu-10\cos^2\vartheta), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{3\sigma}{2(7-5\nu)} (-1+5\nu-10\nu\cos^2\vartheta). \end{aligned}$$

Максимальные напряжения появляются на экваторе ($\vartheta = \pi/2$) и оказываются равными

$$\begin{aligned} (\sigma_{\vartheta\vartheta})_{\max} &= \frac{3(9-5\nu)}{2(7-5\nu)} \sigma = 2,045\sigma, \\ (\sigma_{\varphi\varphi})_{\max} &= \frac{3(-1+5\nu)}{2(7-5\nu)} \sigma = 0,1485\sigma. \end{aligned}$$

Здесь численные значения справедливы для $\nu = 0,3$.

Видно, что для окружных нормальных напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ имеет место концентрация напряжений. При этом они почти вдвое превосходят напряжения, соответствующие невозмущенному состоянию. Этот эффект концентрации напряжений имеет существенно местный характер, на расстоянии $3a$ от центра сферы возмущения в распределении напряжений практически затухают. Точно так же окружные нормальные напряжения сильно уменьшаются при удалении от экватора к полюсу.

Для нормальных напряжений на полюсах сферической полости ($\vartheta = 0, \pi$) имеем выражение

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{3(1+5\nu)}{2(7-5\nu)} \sigma = -0,682\sigma$$

(численное значение при $\nu = 0,3$).

Путем наложения указанных решений для трех ортогональных направлений вновь получается обсуждавшееся в предыдущем разделе решение Ламе для всестороннего растяжения, для которого коэффициент концентрации напряжений равен 1,5.

С другой стороны, наложением растягивающего напряжения в одном направлении и такого же по величине сжимающего напряжения в перпендикулярном к нему направлении удается получить решение для чистого сдвига в направлении под углом 45° к соответствующим осям. При этом не может быть и речи о существовании напряженного состояния с осевой симметрией. Тогда коэффициент концентрации касательных напряжений составляет

$$15(1 - \nu)/(7 - 5\nu) = 1,91$$

(численное значение для $\nu = 0,3$). Это значение впервые было найдено в 1892 г. А. Лявом в первом теоретическом исследовании задачи о концентрации напряжений [81]¹⁷⁾.

В заключение следует отметить, что на основе представленных здесь решений могут также обсуждаться элементарные смешанные задачи для жестко впаиванного включения сферической формы в бесконечно протяженное упругое тело. Таким же образом могут быть решены смешанные задачи для нежестких сферических включений, но на этих вопросах здесь больше останавливаться не будем (см., например, [82]).

9.5.3. Решения Нейбера в координатах эллипсоида вращения

Речь идет о решениях в произвольных криволинейных координатах, которые, однако, в данной книге не вводились. Поэтому ниже будут даны только краткое описание путей решения и обсуждение некоторых практически значимых результатов.

Решение задачи Леона, обсуждавшейся в предыдущем разделе, позднее было осуществлено Нейбером другим путем [83]. В рассматриваемом случае решение в сферических координатах имеет вид (см п. 5.1.5)

$$2Gu_R = 4(1 - \nu)\phi_3 \cos \vartheta - \frac{\partial N}{\partial R},$$

$$2Gu_\vartheta = -4(1 - \nu)\phi_3 \sin \vartheta - \frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \vartheta},$$

а разрешающие функции равны (см. [B14])

$$\phi_0 = \left[\frac{\nu}{2(1 + \nu)} \sigma R^2 + \frac{B}{R^3} \right] (3 \sin^2 \vartheta - 2) + \frac{A}{R},$$

$$\phi_1 = \phi_2 = 0, \quad \phi_3 = \left(\frac{\sigma R}{2 + 2\nu} + \frac{C}{R^2} \right) \cos \vartheta.$$

Поэтому

$$N = \left[-\frac{1 - 3\nu}{2 + 2\nu} \sigma R^2 + \frac{3B}{R^3} - \frac{C}{R} \right] \sin^2 \vartheta + \frac{1 - 2\nu}{2 + 2\nu} \sigma R^2 - \frac{2B}{R^3} + \frac{A + C}{R}.$$

Константы определяются из граничных условий, а напряжения — дифференцированием N .

Таким путем удалось получить решения для задач о сферической полости в бесконечно протяженном теле при различных видах нагружения (изгиб, сдвиг, кручение). Распространение

этих решений на случай полости в виде эллипсоида вращения (сплюснутого или вытянутого), впервые было дано Нейбером [84].

Для положенной в основу сфероидальной системы координат (системы координат эллипсоида вращения) справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} x &= ch \eta \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= ch \eta \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= sh \eta \cos \theta. \end{aligned} \quad (9.51)$$

Поверхности $\eta = \text{const}$ соответствуют сплюснутым эллипсоидам вращения (рис. 9.10), поверхности $\theta = \text{const}$ — однополостным гиперboloидам вращения, а поверхности $\varphi = \text{const}$ — меридиональным плоскостям, проходящим через ось z^* .

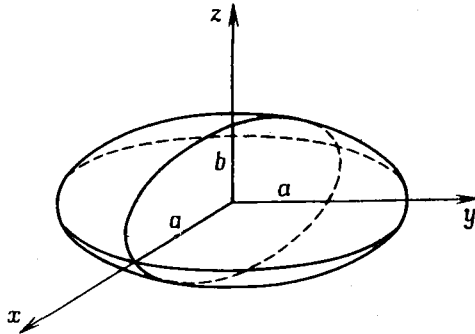


Рис. 9.10. Сплюснутый эллипсоид вращения (сфероид) с экваториальной полуосью a и полярной полуосью b .

Уравнение эллипсоида вращения, характеризуемого координатой $\eta = \eta_0$, имеет вид

$$\frac{x^2}{ch^2 \eta_0} + \frac{y^2}{ch^2 \eta_0} + \frac{z^2}{sh^2 \eta_0} = 1,$$

где $a = ch \eta_0$ и $b = sh \eta_0$ — экваториальная и полярная полуоси, а

$$\rho = b^2/a = th \eta_0 sh \eta_0$$

— радиус кривизны в конце экваториальной полуоси.

*) Координаты эллипсоида вращения используются также при решении задач об ударе и погружении в жидкость кругового диска и различных тел вращения (см. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. — Л.: Судостроение, 1976. — 199 с. — Прим. ред.).

На деталях данного Нейбером решения гармонического уравнения в координатах эллипсоида вращения здесь останавливаться не будем. Приведем лишь важные для технических приложений формулы Нейбера для максимальных напряжений на границе пространственной полости в виде эллипсоида вращения в бесконечном теле при одноосном растяжении (рис. 9.11).

Окружные нормальные напряжения в меридиональном направлении достигают наибольшего значения на конце экваториальной полуоси

$$(\sigma_{\theta\theta})_{\max} = \frac{\sigma}{D} \left\{ 2 \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 - \left(\frac{3}{2} - \nu \right) \frac{a}{\rho} + 1 - \nu + \left[\nu - \left(\frac{3}{2} + \nu \right) \frac{a}{\rho} \right] \frac{a}{\rho} c \right\}, \quad (9.52)$$

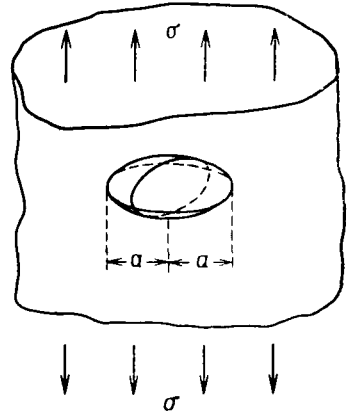


Рис. 9.11. Полость в виде эллипсоида вращения в бесконечно протяженном теле при одноосном растяжении (приближение для цилиндра конечного радиуса).

так же как и кольцевые нормальные напряжения, действующие в направлении, перпендикулярном растяжению,

$$(\sigma_{\phi\phi})_{\max} = \frac{\sigma}{D} \frac{a}{\rho} \left\{ \frac{3}{2} - 2\nu + 2\nu \left(\frac{a}{\rho} \right) + \left[-1 + 2\nu - \left(\frac{1}{2} - 2\nu \right) \frac{a}{\rho} \right] c \right\}, \quad (9.53)$$

где

$$D = 1 - \nu + \frac{a}{\rho} - \left(2 - 2\nu - \frac{a}{\rho} \right) \frac{a}{\rho} c - (1 - \nu) \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 c^2, \quad (9.54)$$

$$c = \frac{\arctg \sqrt{a/\rho - 1}}{\sqrt{a/\rho - 1}}, \quad \frac{a}{\rho} > 1.$$

Указанное решение можно легко преобразовать для случая вытянутого эллипсоида вращения. Тогда $a/\rho < 1$ и вместо (9.54) будет справедлива формула

$$c' = \frac{\ln(1 + \sqrt{1 - a/\rho}) - 1/2 \ln(a/\rho)}{\sqrt{1 - a/\rho}}.$$

Численные результаты показывают, что возмущения, вносимые пространственной полостью в равномерное распределение напряжений, также очень быстро затухают во всех направлениях. Поэтому с хорошим приближением можно исполь-

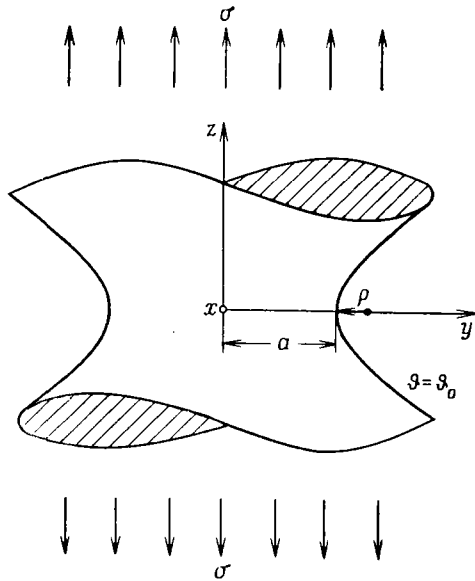


Рис. 9.12. Глубокая выточка в виде гиперboloида вращения в бесконечно протяженном теле при одноосном растяжении (решение Нейбера).

зовать решение для полости в виде эллипсоида вращения в растягиваемом цилиндре (см. рис. 9.11). Для случая $a/\rho = 1$ предельным переходом с помощью разложения в ряд (9.52) и (9.53) вновь получают результаты Леона.

Другие решения, полученные впервые Нейбером, относятся к пространственной полости в виде эллипсоида вращения в цилиндре при чистом изгибе, чистом сдвиге и кручении. Соответствующие формулы и графики содержатся в [B14].

В системе координат (9.51) Нейберу удалось также получить решение задачи о распределении напряжений в растягиваемом в осевом направлении бесконечно протяженном теле с глубокой выточкой в виде гиперboloида вращения (рис. 9.12).

Если гиперboloид вращения характеризуется координатой $\vartheta = \vartheta_0$, то его уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{\sin^2 \vartheta_0} + \frac{y^2}{\sin^2 \vartheta_0} - \frac{z^2}{\cos^2 \vartheta_0} = 1$$

и радиус в наиболее узком поперечном сечении равен $a = \sin \vartheta_0$, а радиус кривизны в этом месте будет $\rho = \cos \vartheta_0 / \operatorname{tg} \vartheta_0$.

Нормальные напряжения вдоль границы выреза достигают своего наибольшего значения в основании выреза при $\vartheta = \pi/2$

и равны

$$(\sigma_{\eta\eta})_{\max} = \frac{\sigma}{D} \left[\frac{a}{\rho} \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + \left(\frac{1}{2} + \nu \right) \frac{a}{\rho} + (1 + \nu) \left(1 + \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} \right) \right],$$

так же как и кольцевые нормальные напряжения

$$(\sigma_{\varphi\varphi})_{\max} = \frac{\sigma}{D} \frac{a}{\rho} \left(\frac{1}{2} + \nu \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} \right),$$

причем

$$D = \frac{a}{\rho} + 2 \left(1 + \nu \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} \right).$$

В основании выточки как вдоль поверхности выточки, так и внутри и вне ее имеет место быстрое затухание напряжений. Поэтому приведенные выше формулы Нейбера можно использовать в качестве приближенных и для выточки в виде гиперболоида вращения в цилиндре конечного радиуса. Существенное влияние на концентрацию напряжений оказывает так называемая *заостренность* выточки a/ρ .

Другие решения Нейбера относятся к выточкам в виде поверхностей вращения при нагружении, вызывающем изгиб, сдвиг и кручение. Все эти очень удобные формулы для концентрации напряжений имеют большое практическое значение в технических приложениях. Естественно, что общие решения дают также компоненты напряжений и перемещений во всей области, окружающей выточку.

9.5.4. Другие решения для полостей в виде эллипсоидов и соответствующих включений в бесконечном растягиваемом теле

Для задачи о пространственной полости в форме вытянутого эллипсоида вращения, согласно рис. 9.13, применимы сфероидальные или эллипсоидальные координаты *)

$$\begin{aligned} x &= \text{sh } \eta \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= \text{sh } \eta \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= \text{sh } \eta \cos \vartheta. \end{aligned} \tag{9.55}$$

Здесь поверхности $\eta = \text{const}$ соответствуют вытянутым эллипсоидам вращения, поверхности $\vartheta = \text{const}$ — двухполостным гиперболоидам вращения и поверхности $\varphi = \text{const}$ — плоскостям, проходящим через ось z .

*) Следует помнить о том, что преобразование координат (9.55) получается простым переходом из (9.51).

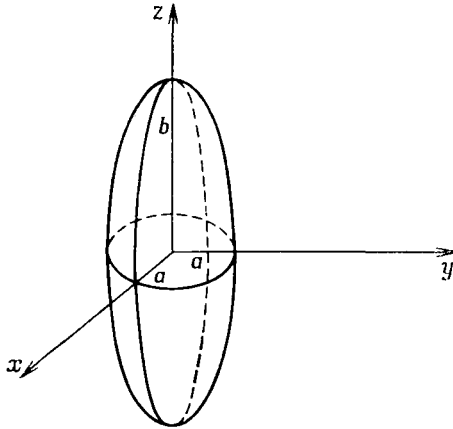


Рис. 9.13. Вытянутый эллипсоид вращения (сфероид) с экваториальной полуосью a и полярной полуосью b .

Впервые распределение напряжений в бесконечно протяженном теле с пространственной полостью в форме вытянутого эллипсоида вращения при произвольном плоском напряженном состоянии в направлении, перпендикулярном полярной оси эллипсоида (т. е. параллельном экваториальной плоскости), было найдено Садовским и Штернбергом [85].

Решение строится с помощью формул Папковича и Нейбера в эллипсоидальных координатах (9.55) при применении основных сфероидальных гармонических функций. Результаты при этом представляются в виде громоздких формул и получены лишь в численном виде.

Дальнейшие решения получены Эдвардсом [86], который наряду с растяжением и сдвигом в направлении, перпендикулярном полярной оси пространственной полости, рассмотрел также одноосное растяжение в направлении полярной оси, а, кроме того, указал соответствующие решения для сфероидального включения и исследовал термоупругие задачи.

Обобщение этих результатов, а именно решение задачи о пространственной полости в форме трехосного эллипсоида в бесконечном растягиваемом теле при нагружении параллельно осям эллипсоида, также было дано Садовским и Штернбергом [87].

В основу положены общие эллиптические координаты, в которых координатные поверхности являются софокусными эллипсоидами, а также одно- и двухполостными гиперболами. Формулы преобразования координат выражаются через эллиптические функции Якоби (т. е. обратные функции эллиптических интегралов), и основные гармонические функции определяются в эллиптических координатах. Эти результаты также могут быть представлены только в численном виде.

Относительно простое решение задачи было построено А. И. Лурье [88], который представил функции Папковича и Нейбера в декартовых координатах и использовал только эллиптические интегралы, но не эллиптические функции. Для определения напряжений при этом также требуются трудоемкие численные процедуры.

§ 9.6. Решение осесимметричной задачи теории упругости с помощью интегральных преобразований

Для важного класса осесимметричных пространственных задач теории упругости оказывается выгодным применение преобразования Ханкеля.

Математический анализ проблемы позволяет выявить определенную аналогию с рассмотрением плоской задачи при помощи преобразования Фурье (§ 8.6). Соотношения, однако, получаются несколько более запутанными, так как при применении рассматриваемого преобразования для производных различают формулы двух разных типов.

9.6.1. Общие сведения о преобразовании Ханкеля

Преобразование Ханкеля n -го порядка функции $f(x)$ определяется формулой

$$\mathcal{H}_n \{f(x)\} = \tilde{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} x f(x) J_n(\lambda x) dx, \quad (9.56)$$

где $J_n(\lambda x)$ — функция Бесселя или цилиндрическая функция первого рода n -го порядка *). Обратное преобразование (9.56) имеет вид

$$\mathcal{H}_n^{-1} \{\tilde{f}(\lambda)\} = f(x) = \int_0^{\infty} \lambda \tilde{f}(\lambda) J_n(\lambda x) d\lambda. \quad (9.57)$$

Предполагается, что $\int_0^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ и функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки x .

Иногда формулы для преобразования Ханкеля и обратного преобразования содержат множитель $1/(2\pi)$ и соответственно 2π . Свойства преобразования Ханкеля и формулы для преобра-

*) Эта функция, введенная в 1824 г. Ф. В. Бесселем, является частным решением так называемого дифференциального уравнения Бесселя $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$. Она обладает интегральным представлением (интеграл Бесселя)

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$$

(n — целочисленный параметр).

зуемых величин могут быть выведены или непосредственно, или с помощью преобразования Фурье (см. [В41]).

Для функции $f(r, z)$ преобразование Ханкеля (9.56) по координате r запишется в виде

$$\mathcal{H}_n \{f(r, z); r \rightarrow \lambda\} = \tilde{f}_n(\lambda, z) = \int_0^{\infty} r f(r, z) J_n(r\lambda) dr,$$

а обратное преобразование — в виде

$$\mathcal{H}_n^{-1} \{f(\lambda, z); \lambda \rightarrow r\} = f(r, z) = \int_0^{\infty} \lambda f(\lambda, z) J_n(r\lambda) d\lambda.$$

Для обсуждаемых задач теории упругости важен только частный вид преобразования Ханкеля нулевого и первого порядка. Для трансформанты Фурье производной от функции $f(r, z)$ справедливы формулы

$$\mathcal{H}_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial r} f(r, z); r \rightarrow \lambda \right\} = -\lambda \mathcal{H}_0 \{f(r, z); r \rightarrow \lambda\}, \quad (9.58)$$

где

$$\mathcal{H}_0 \{f(r, z); r \rightarrow \lambda\} = \tilde{f}_0(\lambda, z) = \int_0^{\infty} r f(r, z) J_0(\lambda r) dr;$$

далее

$$\mathcal{H}_0 \{\Delta f(r, z); r \rightarrow \lambda\} = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \lambda^2 \right) \mathcal{H}_0 \{f(r, z)\}, \quad (9.59)$$

где

$$\Delta(\dots) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\dots),$$

а также

$$\mathcal{H}_0 \{\Delta \Delta f(r, z); r \rightarrow \lambda\} = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \lambda^2 \right)^2 \mathcal{H}_0 \{f(r, z)\}, \quad (9.60)$$

$$\mathcal{H}_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \Delta f(r, z); r \rightarrow \lambda \right\} = -\lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \lambda^2 \right) \mathcal{H}_0 \{f(r, z)\}. \quad (9.61)$$

Эти соотношения предполагаются справедливыми, если для соответствующей формулы $rf(r, z) \rightarrow 0$ и $r(\partial/\partial r)f(r, z) \rightarrow 0$ при $r = 0$ и $r = \infty$.

С помощью (9.59) и (9.60) гармоническое и бигармоническое уравнения в цилиндрических координатах для осесимметричной задачи можно привести к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

9.6.2. Общие соотношения для осесимметричной задачи теории упругости

Для тела вращения при осесимметричном деформировании справедливо представление компонент перемещений и напряжений в цилиндрических координатах r, φ, z [см. (5.31) и (5.34)] с помощью функции перемещений Лява $Z(r, z)$:

$$\begin{aligned} 2Gu_r &= -\frac{\partial^2 Z}{\partial r \partial z}, & 2Gu_z &= \left[2(1-\nu)\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z, \\ \sigma_{rr} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu\Delta - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) Z, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu\Delta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) Z, \\ \sigma_{zz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\nu)\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z, & \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\nu)\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z, \end{aligned} \quad (9.62)$$

где

$$\Delta(\dots) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\dots).$$

Функция перемещений Лява удовлетворяет бигармоническому дифференциальному уравнению

$$\Delta\Delta Z(r, z) = 0. \quad (9.63)$$

После применения преобразования Ханкеля нулевого порядка (9.60) по координате r уравнение (9.63) становится обыкновенным дифференциальным уравнением; координата r при этом заменяется параметром λ . Тогда

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \lambda^2 \right)^2 \int_0^\infty r Z(r, z) J_0(\lambda r) dr = 0,$$

или *)

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \lambda^2 \right)^2 \tilde{Z}_0(\lambda, z) = 0 \quad (9.64)$$

где

$$\tilde{Z}_0(\lambda, z) = \mathcal{H}_0 \{ Z(r, z); r \rightarrow \lambda \}.$$

Интегрирование (9.64) позволяет получить

$$\tilde{Z}_0(\lambda, z) = (A + B\lambda z) e^{-\lambda z} + (C + D\lambda z) e^{\lambda z}, \quad (9.65)$$

где появляющиеся постоянные интегрирования A, B, C, D зависят от параметра λ . Они окончательно определяются из граничных условий решаемой задачи. Для получения решения правые части соотношений (9.62) для перемещений и напряжений должны быть выражены через функцию $\tilde{Z}(\lambda, z)$ и ее производные.

*) Здесь записывают d/dz , а не $\partial/\partial z$, так как \tilde{Z}_0 является функцией только одной переменной z .

водные. При этом, согласно (9.58), (9.59) и (9.61), нужно различать преобразования Ханкеля первого и нулевого порядков.

Для первого уравнения (9.62) с помощью (9.58) получим

$$\begin{aligned} 2G\mathcal{H}_1\{u_r\} &= 2G \int_0^\infty r u_r J_1(\lambda r) dr = -\frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty r \frac{\partial Z}{\partial r} J_1(\lambda r) dr = \\ &= -\frac{d}{dz} \mathcal{H}_0\{Z(r)\} = \lambda \frac{d}{dz} \tilde{Z}_0(\lambda, z). \end{aligned} \quad (9.66)$$

Применяя формулу обратного преобразования, найдем

$$2Gu_r = 2G\mathcal{H}_1^{-1}\{u_r\} = \int_0^\infty \lambda^2 \frac{d\tilde{Z}_0}{dz} J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (9.67)$$

Таким же образом после применения соответствующего преобразования Ханкеля к левой и правой частям второго, пятого и шестого уравнений (9.62) получим

$$2G\mathcal{H}_0\{u_z\} = (1 - 2\nu) \frac{d^2\tilde{Z}_0}{dz^2} - 2(1 - \nu) \lambda^2 \tilde{Z}_0, \quad (9.68)$$

соответственно

$$2Gu_z = \int_0^\infty \lambda \left[(1 - 2\nu) \frac{d^2\tilde{Z}_0}{dz^2} - 2(1 - \nu) \lambda^2 \tilde{Z}_0 \right] J_0(\lambda r) d\lambda; \quad (9.69)$$

далее

$$\mathcal{H}_0\{\sigma_{zz}\} = (1 - \nu) \frac{d^3\tilde{Z}_0}{dz^3} - (2 - \nu) \lambda^2 \frac{d\tilde{Z}_0}{dz}, \quad (9.70)$$

соответственно

$$\sigma_{zz} = \int_0^\infty \lambda \left[(1 - \nu) \frac{d^3\tilde{Z}_0}{dz^3} - (2 - \nu) \lambda^2 \frac{d\tilde{Z}_0}{dz} \right] J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (9.71)$$

а также

$$\mathcal{H}_1\{\tau_{rz}\} = \nu \lambda \frac{d^2\tilde{Z}_0}{dz^2} + (1 - \nu) \lambda^3 \tilde{Z}_0, \quad (9.72)$$

$$\tau_{rz} = \int_0^\infty \lambda^2 \left[\nu \frac{d^2\tilde{Z}_0}{dz^2} + (1 - \nu) \lambda^2 \tilde{Z}_0 \right] J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (9.73)$$

Соотношения для напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ должны рассматриваться отдельно, так как к правым частям соответствующих выражений должны применяться одновременно преобразования Ханкеля нулевого и первого порядка. Для σ_{rr} после представ-

ления оператора Лапласа в виде

$$\Delta Z = \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$$

сначала получим выражение

$$\sigma_{rr}(r, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - (1 - \nu) \Delta Z \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}.$$

К первому слагаемому в правой части следует применить преобразование Ханкеля нулевого порядка, а ко второму — первого порядка. После выполнения обратного преобразования каждого из слагаемых окончательно находим

$$\sigma_{rr} = \int_0^{\infty} \lambda \left[\nu \frac{d^3 \tilde{Z}_0}{dz^3} + (1 - \nu) \lambda^2 \frac{d\tilde{Z}_0}{dz} \right] J_0(\lambda r) d\lambda - \frac{1}{r} \int_0^{\infty} \lambda^2 \frac{d\tilde{Z}_0}{dz} J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (9.74)$$

Аналогично

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \nu \int_0^{\infty} \lambda \left(\frac{d^3 \tilde{Z}_0}{dz^3} - \lambda^2 \frac{d\tilde{Z}_0}{dz} \right) J_0(\lambda r) d\lambda + \frac{1}{r} \int_0^{\infty} \lambda^2 \frac{d\tilde{Z}_0}{dz} J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (9.74)$$

Итак, для рассмотрения конкретных задач в нашем распоряжении имеются приведенные выше соотношения для перемещений и напряжений, а также решение (9.65).

9.6.3. Решение Терадзавы для осесимметрично нагруженного полупространства *)

Рассмотрим полупространство $z \geq 0$ при осесимметричной нагрузке $p(r)$, приложенной нормально к поверхности. Граничные условия имеют вид

$$\sigma_{zz} = -p(r), \quad \tau_{rz} = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (9.76)$$

Так как все перемещения и напряжения на бесконечности должны затухать, в решении (9.65) следует положить $C = D = 0$, и для $\tilde{Z}_0(\lambda, z)$ будет справедливо равенство

$$\tilde{Z}_0(\lambda, z) = (A + B\lambda z) e^{-\lambda z}. \quad (9.77)$$

Обозначая трансформанту Ханкеля нагрузки через

$$\mathcal{H}_0\{p(r); r \rightarrow \lambda\} = \tilde{p}_0(\lambda) = \int_0^{\infty} r p(r) J_0(\lambda r) dr,$$

*) Общее решение Терадзавы [89] учитывает произвольную нормальную нагрузку на поверхности полупространства.

из (9.76) и соответствующих выражений (9.70) и (9.72) получим для напряжений

$$(1 - \nu) \frac{d^3 \tilde{Z}_0}{dz^3} - (2 - \nu) \lambda^2 \frac{d\tilde{Z}_0}{dz} = -\bar{p}_0(\lambda)$$

при $z = 0$

$$\nu \frac{d^2 \tilde{Z}_0}{dz^2} + (1 - \nu) \lambda^2 \tilde{Z}_0 = 0.$$

С учетом (9.77) для постоянных найдем

$$A = -2\nu \frac{\bar{p}_0(\lambda)}{\lambda^3}, \quad B = -\frac{\bar{p}_0(\lambda)}{\lambda^3}.$$

В результате решение, полученное впервые Терадзавой, будет иметь вид

$$2Gu_r = - \int_0^{\infty} (1 - 2\nu - \lambda z) \bar{p}_0(\lambda) e^{-\lambda z} J_1(\lambda r) d\lambda,$$

$$2Gu_z = \int_0^{\infty} [2(1 - \nu) + \lambda z] \bar{p}_0(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda,$$

$$\sigma_{rr} = - \int_0^{\infty} \lambda (1 - \lambda z) \bar{p}_0(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda +$$

(9.78)

$$+ \frac{1}{r} \int_0^{\infty} [1 - 2\nu - \lambda z] \frac{\bar{p}_0(\lambda)}{\lambda} e^{-\lambda z} J_1(\lambda r) d\lambda,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -2(1 + \nu) \int_0^{\infty} \lambda \bar{p}_0(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda - (\sigma_{rr} + \sigma_{zz}),$$

$$\sigma_{zz} = - \int_0^{\infty} \lambda (1 + \lambda z) e^{-\lambda z} \bar{p}_0(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda,$$

$$\tau_{rz} = -z \int_0^{\infty} \lambda^2 \bar{p}_0(\lambda) e^{-\lambda z} J_1(\lambda r) d\lambda.$$

Для произвольной осесимметричной нагрузки вычисление интегралов в общем случае является непростым. В частном случае нагрузки, равномерно распределенной по кругу,

$$p = \text{const} = P/(\pi a^2) \quad \text{при } 0 < r \leq a,$$

$$p = 0 \quad \text{при } r > a,$$

имеем

$$\tilde{p}_0(\lambda) = \frac{P}{\pi a^2} \int_0^{\infty} r J_0(\lambda r) dr = \frac{P}{\pi a} J_1(\lambda a).$$

Переход к сосредоточенной силе ($a \rightarrow 0$, но величина $pa^2\pi$ остается конечной) приводит к выражению

$$\tilde{p}_0(\lambda) = \frac{P}{\pi} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{J_1(\lambda a)}{a} = \frac{P\lambda}{2\pi},$$

и отсюда вновь получают уже известные соотношения для задачи Буссинеска (см. § 9.2).

Совершенно аналогично можно рассмотреть также случай осесимметричной касательной нагрузки.

9.6.4. Другие решения с помощью преобразования Ханкеля

Указанным способом можно получить решения других осесимметричных задач. Можно, например, осуществить решение задачи Миндлина для сосредоточенной силы, приложенной внутри полупространства (см. § 9.4). Снеддоном впервые были построены решения для осесимметрично нагруженных толстых пластин, обсуждались также задачи термоупругости; пространство на слоистые пластины было выполнено Буфлером [90].

В заключение следует упомянуть также смешанные краевые задачи для полупространства. К ним относится прежде всего так называемая задача о штампе, т. е. определение перемещений и напряжений при вдавливании жестких тел вращения различного очертания в полупространство (важная для приложений в механике грунтов). Нужно указать при этом на то, что для смешанных краевых задач из граничных условий получаются парные интегральные уравнения, решение которых часто оказывается очень сложным. Этим методом возможны также решения пространственных задач теории трещин. Дальнейшие сведения содержатся, например, в [В30].

Приложение. Тензоры в декартовых координатах

Для описания конкретных задач в механике сплошной среды вводят различные физические величины: скаляры, векторы или тензоры. Скалярные величины не зависят от системы координат, векторы и тензоры как не скалярные величины характеризуются компонентами, которые изменяются при переходе от одной системы координат к другой.

Количественное изучение явлений связано обычно с введением системы координат. При этом во многих случаях достаточно декартовых (прямолинейных ортогональных) координат. Введение произвольных криволинейных координат потребовало бы применения тензорного исчисления в общем виде, что, однако, в этой книге не предусматривалось.

Для декартовых координат будет применяться так называемая индексная («тензорная») форма записи, с помощью которой уравнения можно записать в компактной форме. Для этого иногда используют также символическую (векторную) форму записи.

§ 10.1. Координаты и векторы

Координатная система является системой отсчета в физическом трехмерном евклидовом (не искривленном) пространстве, относительно которой определяется положение и движение материальных частиц.

Вектор представляет собой направленную величину и характеризуется указанием абсолютной величины (модуля) и направления или заданием своих компонент. Ниже будет также дано иное, более общее определение.

Согласно рис. 10.1, декартова система координат определяется базисными векторами \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z , которые образуют правую систему. Базисные векторы суть единичные векторы, обладающие свойством $|\mathbf{e}_x| = |\mathbf{e}_y| = |\mathbf{e}_z| = 1$.

Положение точки в пространстве характеризуется радиус-вектором \mathbf{r} , компонентами которого являются координаты x , y , z , т. е. $\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z$.

В общем случае справедливо представление произвольного вектора \mathbf{A} в координатной форме

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z, \quad (10.1)$$

где компоненты A_x , A_y , A_z являются проекциями вектора на оси координат. Модуль вектора равен

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (10.2)$$

Можно ввести произведение векторов, которое обладает некоторыми (но не всеми) свойствами обычного произведения чисел. При *скалярном произведении* двух векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} получается скалярная величина, равная

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = C = AB \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}), \quad (10.3)$$

где $\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ — косинус угла, заключенного между двумя векторами. Справедливо равенство $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A}$. Далее видно, что скалярное произведение двух ортогональных векторов равно нулю. Поэтому для базисных векторов имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z &= 1, \\ \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \mathbf{e}_x &= 0 \end{aligned}$$

и скалярное произведение (10.3) в координатной форме будет иметь вид

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (10.4)$$

Векторным произведением двух векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} называется вектор, определяемый по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{e}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{e}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{e}_z (A_x B_y - A_y B_x). \end{aligned} \quad (10.5)$$

Вектор \mathbf{C} перпендикулярен параллелограмму, образованному векторами \mathbf{A} и \mathbf{B} , причем векторы \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} в такой последовательности образуют правую систему. Модуль векторного про-

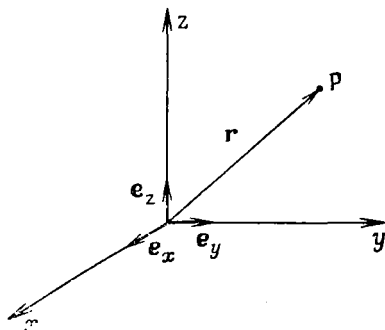


Рис. 10.1. Декартова система координат с базисными векторами \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z .

изведения равен

$$|\mathbf{C}| = C = AB \sin(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

Справедливо равенство $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$. Как видно из определения, векторное произведение двух параллельных векторов обращается в нуль. Применяя эти соотношения к базисным векторам, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = 0, \\ \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

§ 10.2. Тензорная форма записи координат, векторы и тензоры

Для декартовых координат целесообразна запись $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ или вообще x_i , где $i = 1, 2, 3$. В выражении для суммы

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \sum_{i=1}^3 a_ix_i = a_ix_i$$

можно опустить знак суммы, если условиться, что по дважды встречающемуся индексу обязательно производится суммирование (правило суммирования Эйнштейна и Риччи). Индекс суммирования (так называемый немой индекс) может при этом обозначаться произвольно, т. е.

$$a_ix_i = a_mx_m = a_nx_n \text{ и т. д.}$$

Выражение вида $a_ib_ix_i$, согласно этому правилу, не определено. Если должна быть образована соответствующая сумма, следует применить знак суммы. Это будет указываться далее во всех случаях, в которых правило суммирования недействительно.

Аналогично для двойной суммы справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j$$

(при $n = 3$ получается всего 9 членов).

С помощью так называемого символа Кронекера, обладающего свойством

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad (10.6)$$

вводится очень удобный и важный тензор второго ранга (так называемый единичный тензор) При этом справедливы соотношения $\delta_{ik}a_k = a_i$, $\delta_{ik}a_{kj} = a_{ij}$.

Для скалярного произведения базисных векторов можно записать

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}. \quad (10.7)$$

При применении тензорной формы записи нужно принимать во внимание некоторые правила, важнейшие из которых ниже кратко указаны.

Если в выражение $a_i = A_{im}x_m$ подставляется выражение $x_i = B_{im}y_m$, то в последнем требуется произвести переименование индексов $i \rightarrow m$ и $m \rightarrow k$. Тогда $x_m = B_{mk}y_k$ и, следовательно, $a_i = A_{im}B_{mk}y_k$. Это справедливо также для векторного произведения векторов $\mathbf{a} = a_i x_i$ и $\mathbf{b} = b_i y_i$, которое следует записать в виде $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_i x_i b_j y_j$.

Аналогично для скалярного произведения двух векторов $\mathbf{A} = \mathbf{e}_i A_i$ и $\mathbf{B} = \mathbf{e}_i B_i$ с учетом (10.7) получаем

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{e}_i A_i) (\mathbf{e}_j B_j) = (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) A_i B_j = A_i B_i.$$

Если речь идет о том, чтобы из выражения вида

$$T_{ij}n_j - \lambda n_i = 0 \quad (10.8)$$

(где λ — скалярный множитель) «выделить» вектор n_i , записывают $n_i = \delta_{ij}n_j$ и тогда из (10.8) получают

$$T_{ij}n_j - \lambda \delta_{ij}n_j = (T_{ij} - \lambda \delta_{ij})n_j = 0.$$

Часто встречающейся вычислительной операцией является *свертывание тензора*. Оно состоит в том, что в величине с двумя индексами они приравниваются и затем по ним производится суммирование. Это означает, например, что величина T_{ij} при $i = j$ ($i, j = 1, 2, 3$) будет равна $T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$. Для тензора Кронекера свертывание дает $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$.

Резюмируя сказанное, можно отметить, что в одном уравнении при корректной тензорной форме записи один и тот же индекс в каждом члене должен встречаться только дважды (и по нему должно производиться суммирование). Если в некотором слагаемом фигурирует только один индекс, то во всех других членах он также должен встречаться только один раз.

§ 10.3. Тензор Леви-Чивиты, или символ перестановки

Этот тензор (называемый также *псевдотензором*) играет важную роль и определяется следующим образом *):

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{при } i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2, \\ -1 & \text{при } i, j, k = 1, 3, 2; 3, 2, 1; 2, 1, 3, \\ 0 & \text{при } i = j, i = k, j = k. \end{cases} \quad (10.9)$$

Речь идет в данном случае о тензоре третьего ранга. Для него справедливы равенства

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ikj}.$$

Для векторного произведения базисных векторов имеем

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k, \quad (10.10)$$

и поэтому векторное произведение двух векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} запишется в виде

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\mathbf{e}_i A_i) \times (\mathbf{e}_j B_j) = A_i B_j (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j),$$

или $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k = \varepsilon_{ijk} A_i B_j \mathbf{e}_k$.

Справедливо важное соотношение

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnl} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{il} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jl} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kl} \end{vmatrix}.$$

В частности, $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mjik} = 2\delta_{im}$, а также $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$.

§ 10.4. Производные и векторные дифференциальные операции

Дифференциал функции $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n независимых переменных равен

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10.11)$$

*) Величина ε_{ijk} соответствует так называемому *смешанному произведению* базисных векторов, для которого

$$(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_k = (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_i.$$

Для частных производных обычно употребляется сокращение

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\dots) = (\dots)_{,i}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\dots) = (\dots)_{,ij}.$$

Тогда трехмерный оператор Лапласа может быть записан в виде

$$\Delta(\dots) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) (\dots) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (\dots) = (\dots)_{,ii},$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Важными векторными дифференциальными операциями являются *градиент*, *дивергенция* и *ротор* (вихрь). Для них в тензорной форме записи получаются соотношения

$$\text{grad}(\dots) = \left[\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right] (\dots) \rightarrow (\dots)_{,i}, \quad (10.12)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \rightarrow A_{i,i}, \quad (10.13)$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \rightarrow \mathbf{e}_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \mathbf{e}_{ijk} A_{k,j}. \quad (10.14)$$

§ 10.5. Преобразование компонент вектора и тензора при повороте системы координат

Преобразование координат при переходе от x_i к x_i^* (рис. 10.2) $x_i^* = x_i^*(x_1, x_2, x_3)$ задается следующим образом:

$$x_i^* = \sum_k x_k \cos(x_i^*, x_k) = c_{ik} x_k, \quad (10.15)$$

причем коэффициенты преобразования являются так называемыми направляющими косинусами $c_{ik} = c_{ki}$.

Соответствующий (10.15) закон преобразования для дифференциала координат будет иметь вид

$$dx_i^* = \frac{\partial x_i^*}{\partial x_k} dx_k = x_{i,k}^* dx_k = c_{ik} dx_k.$$

К иному определению вектора можно прийти, если в основу положить закономерность изменения компонент вектора при повороте системы координат. Преимущество такого способа рассмотрения состоит в том, что он может быть распространен на не скалярные величины более высокого порядка (что с по-

мощью данного выше определения вектора как направленного отрезка невозможно).

При переходе от x_i к x_i^* компоненты вектора преобразуются аналогично дифференциалам координат, т. е. для произвольного вектора \mathbf{A} справедливо равенство

$$A_i^* = \frac{\partial x_i^*}{\partial x_k} A_k = c_{ik} A_k. \quad (10.16)$$

Вектор называют также *тензором первого ранга*. Соответственно этому компоненты тензора второго ранга в декартовых координатах определяются так, что они преобразуются при повороте системы координат как произведение двух векторов. Закон преобразования имеет вид

$$T_{ij}^* = \frac{\partial x_i^*}{\partial x_k} \frac{\partial x_j^*}{\partial x_l} T_{kl} = c_{ik} c_{jl} T_{kl}. \quad (10.17)$$

Аналогично получаются формулы преобразования для компонент тензора третьего и более высокого рангов.

Чтобы описать конкретный тензор, задают значения его компонент относительно базиса. Обычно совокупность компонент тензора второго ранга

Рис. 10.2. Поворот декартовой системы координат.

для наглядности записывают в форме матрицы компонент; например, в трехмерном случае

$$T_{ij} \rightarrow \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}. \quad (10.18)$$

В отличие от вектора тензору нельзя приписать абсолютную величину, или модуль. Впрочем, имеются определенные выражения, например определитель матрицы (10.18) тензора второго ранга, которые инвариантны при повороте системы координат, т. е. ведут себя как скаляр.

Различают симметричные тензоры $T_{ij} = T_{ji}$ и антисимметричные (кососимметричные) тензоры $T_{ij} = -T_{ji}$. Каждый произвольный тензор второго ранга можно однозначно разложить на симметричную и антисимметричную части:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}). \quad (10.19)$$

Как видно из закона преобразования (10.17), при повороте системы координат компоненты тензора изменяются.

Однако тензор как таковой, являясь выражением некоторой физической величины, не зависит от координатной системы и, следовательно, представляет собой неизменяющуюся величину (инвариант). Поэтому естественно стремление формулировать все физические законы в форме тензорных уравнений, которые справедливы для всех координатных систем. Эта так называемая *ковариантная* формулировка следует в общем случае из тензорного анализа (называвшегося ранее абсолютным дифференциальным исчислением), причем ограничения на декартовы координаты отпадают.

§ 10.6. Производные от тензора.

Интегральные теоремы Гаусса и Стокса

Дифференцированием тензора в декартовых координатах образуются тензоры более высокого ранга. В общем случае дифференцирование скаляра (тензора нулевого ранга) по координатам вектора (тензора первого ранга) дает

$$\partial U / \partial x_i = U_{,i} = \text{grad } U.$$

Это соответствует операции образования градиента [ср. с (10.12)].

Соответственно дифференцирование вектора (тензора первого ранга) приводит к тензору второго ранга $\partial A_i / \partial x_j = A_{i,j}$ и т. д. (для тензоров более высокого ранга). Это, однако, справедливо только для декартовых координат.

Для преобразования поверхностного интеграла в объемный и наоборот служит важная теорема Гаусса. Эта теорема в различных формах впервые была дана Ж. Лагранжем (1762 г.), К. Ф. Гауссом (1813 г.), А. Е. Грином (1828 г.), М. В. Остроградским (1831 г.) и соответствующим образом называется. Ее также называют иногда *теоремой о дивергенции*.

В общем случае для произвольной выпуклой правильной*) области объемом V и с поверхностью A справедливо равенство

$$\oint_A T dA_i = \oint_A T n_i dA = \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} T dV, \quad (10.20)$$

где T — тензор произвольного ранга. Интеграл в левой части распространяется на всю поверхность (интеграл по поверхности).

Приведем некоторые примеры применения теоремы Гаусса (в векторной и тензорной форме записи)

*) Это означает, что поверхность состоит из конечного множества частей, внешние нормали к которым образуют непрерывное векторное поле.

для скаляра ϕ

$$\oint_A \phi \mathbf{n} dA = \int_V \text{grad } \phi dV, \text{ или } \oint_A \phi n_i dA = \int_V \phi_{,i} dV; \quad (10.21)$$

для вектора \mathbf{B}

$$\oint_A \mathbf{B} \mathbf{n} dA = \int_V \text{div } \mathbf{B} dV, \text{ или } \oint_A B_i n_i dA = \int_V B_{i,i} dV, \quad (10.22)$$

а также

$$\oint_A \mathbf{B} \times \mathbf{n} dA = \int_V \text{rot } \mathbf{B} dV,$$

или

$$\oint_A \varepsilon_{ijk} B_k n_j dA = \int_V \varepsilon_{ijk} B_{k,j} dV. \quad (10.23)$$

В частности, для области, представляющей собой некоторую поверхность, например для плоскости x_1, x_2 , двумерный аналог теоремы Гаусса для вектора B_i ($i = 1, 2$) имеет вид

$$\oint_R B_i n_i ds = \int_A B_{i,i} dA,$$

где интеграл по замкнутому контуру в левой части равенства берется по всей граничной кривой R поверхности A . Для пре-

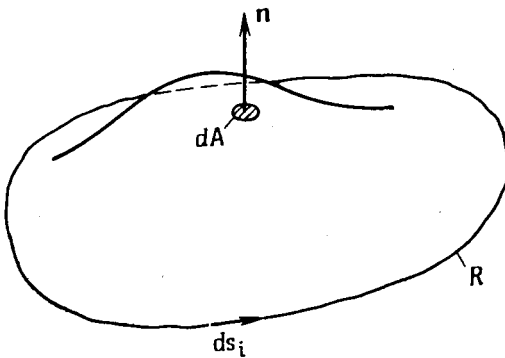


Рис. 10.3. К теореме Стокса.

образования криволинейного интеграла в поверхностный и обратно применяется теорема Стокса. Для вектора \mathbf{B} она имеет

ВИД

$$\oint_R \mathbf{B} ds = \int_A \operatorname{rot} \mathbf{Bn} dA,$$

или

$$\oint_R B_i ds_i = \int_A \epsilon_{ijk} B_k, j n_i dA, \quad (10.24)$$

причем A — произвольная поверхность, которая ограничена кривой R с линейным элементом ds_i (рис. 10.3).

Если речь идет о замкнутой поверхности A , то интеграл по поверхности обращается в нуль, т. е.

$$\oint_A \operatorname{rot} \mathbf{Bn} dA = 0. \quad (10.25)$$

Левая часть равенства (10.24) иногда называется *циркуляцией*.

Дальнейшие сведения, особенно доказательства теорем Гаусса и Стокса, содержатся в учебниках по математике, например [B38 — B40].

Литература

Нижеследующий перечень, ни в коей мере не претендующий на полноту, содержит ряд основных учебников и справочников, а также интересные в историческом аспекте и основополагающие оригинальные работы, на которые в тексте даны ссылки.

§ 11.1. Основные учебники и справочники по теории упругости (А), а также труды прикладного и математического характера (В)

- A1. Castigliano A. Theorie de l'equilibre des systemes elastiques et ses applications. — Turin, 1879. Перевод на англ. яз.: The theory of equilibrium of elastic systems and its applications. — New York: Dover, 1966.
- A2. Boussinesq M. J. Application des potentiels. — Paris: Gauthier-Villars, 1885.
- A3. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. — Paris: A. Hermann, 1909.
- A4. Föppl A., Föppl L. Drang und Zwang. Bd. 1 und 2. — Berlin, 1924—1928. [Имеется перевод: Фёппль А., Фёппль Л. Сила и деформация. Прикладная теория упругости. Т. 1—2. — М. — Л.: Гостехтеориздат, 1933.]
- A5. Busemann A., Föppl O. Physikalische Grundlagen der Elastomechanik. — In: [A40], 1—46.
- A6. Trefftz E. Mathematische Elastizitätstheorie. — In: [A40], 47—140. [Имеется перевод: Треффц Е. Математическая теория упругости. — Л. — М.: Гостехтеориздат, 1932.]
- A7. Колосов Г. В. Применение комплексной переменной к теории упругости. — М. — Л.: Глав. ред. общетехн. дисциплин, 1935, 224 с.
- A8. Southwell R. V. An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists. — Oxford, 1936. [Имеется перевод: Саусвелл Р. В. Введение в теорию упругости. Для инженеров и физиков. — М.: ИЛ, 1948.]
- A9. Föppl L. Drang und Zwang. Dritter Band: Der ebene Spannungszustand. — München: Leibniz-Verlag, 1947.
- A10. Den Hartog J. P. Advanced strength of materials. — New York: McGraw Hill, 1952.
- A11. Westergaard H. M. Theory of elasticity and plasticity. — New York: Dover, 1952.
- A12. Wang C. T. Applied elasticity. — New York: McGraw Hill, 1953.
- A13. Green A. E., Zerna W. Theoretical elasticity. — Oxford: Clarendon Press, 1954.
- A14. Sokolnikoff I. S. Mathematical theory of elasticity. — New York: McGraw Hill, 1956.

- A15. Sneddon I. N., Berry D. S. The classical theory of elasticity. — In: [A41], 1—126. [См. также: Снеддон И. Н. Классическая теория упругости. — М.: Физматгиз, 1961.]
- A16. Weber C., Günther W. Torsionstheorie. — Braunschweig: Vieweg, 1958.
- A17. Love A. E. H. A treatise on the mathematical theory of elasticity, 4th edition. — Cambridge: Univ. Press, 1959. [Имеется перевод: Ляв А. Э. Х. Математическая теория упругости. — М. — Л.: ОНТИ, Глав. ред. общетехн. лит-ры и номотрафии, 1935.]
- A18. Pearson C. E. Theoretical elasticity. — Cambridge: Harvard Univ. Press, 1959.
- A19. Новожилов В. В. Теория упругости. — Л.: Судпромгиз, 1958.
- A20. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. — М.: Гостехиздат, 1955.
- A21. Fung Y. C. Foundations of solid mechanics. — Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1965.
- A22. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости, 3-е изд. — М.: Наука, 1965.
- A23. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости. — М.: Физматгиз, 1959.
- A24. Chou P. C., Pagano N. J. Elasticity. — Princeton: Van Nostrand, 1967.
- A25. Leipholz H. Einführung in die Elastizitätstheorie—Karlsruhe: G. Braun, 1968.
- A26. Timoshenko S. P., Goodier J. N. Theory of elasticity, 3rd edition. — Tokyo: McGraw Hill, 1970. [Имеется перевод: Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1975.]
- A27. Teodorescu P. P. Probleme spatiale in teoriei elasticitatii. — Bucuresti: Ed. Acad., 1970.
- A28. Dugdale D. S., Ruiz C. Elasticity for engineers. — London: McGraw Hill, 1971.
- A29. Neuber H. Technische Mechanik. Zweiter Teil: Elastostatik und Festigkeitslehre. — Berlin: Springer, 1971.
- A30. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. 5-е изд. — М.: Наука, 1966.
- A31. England A. H. Complex variable methods in elasticity. — London: Wiley, 1971.
- A32. Gurtin M. E. The linear theory of elasticity. — In [A42], 1—295.
- A33. Wang C. C., Truesdell C. Introduction to rational elasticity. — Leyden: Noordhoff, 1973.
- A34. Saada A. S. Elasticity theory and applications. — New York: Pergamon Press, 1974.
- A35. Boreisi A. P., Lynn P. B. Elasticity in engineering mechanics. — Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1974.
- A36. Купрадзе В. Д. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. — М.: Наука, 1976.
- A37. Fraeijs de Veubeke B. M. A course of elasticity. — New York: Springer, 1979.
- A38. Atkin R. J., Fox N. An introduction to the theory of elasticity. — London: Longman, 1980.
- A39. Eschenauer H., Schnell W. Elastizitätstheorie I. Mannheim: Bibl. Inst., 1981.
- A40. Handbuch der Physik (Hrsg. H. Geiger und K. Scheel). Bd. VI. Mechanik der elastischen Körper. — Berlin: Springer, 1928.
- A41. Handbuch der Physik (Hrsg. S. Flügge). Bd. VI. Elastizität und Plastizität — Berlin: Springer, 1958.
- A42. Handbuch der Physik (Hrsg. S. Flügge). Bd. VIa/2. Festkörpermechanik II. — Berlin: Springer, 1972.
- B1. Morgenstern D., Szabo I. Vorlesungen über theoretische Mechanik. — Berlin: Springer, 1961.

- B2. Prager W. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. — Basel: Birkhäuser, 1961. [Имеется перевод: Прагер В. Введение в механику сплошных сред. — М.: ИЛ, 1963.]
- B3. Schaefer M (Hrsg.). *Miszellaneen der angewandten Mechanik (Tollmien-Festschrift)*. — Berlin: Akad.-Verlag, 1962.
- B4. Müller I. *Thermodynamik. Die Grundlagen der Materialtheorie*. — Düsseldorf: Bertelsmann, 1973.
- B5. Becker E., Bürger W. *Kontinuumsmechanik*. ZAMM, Bd. 20. — Stuttgart: Teubner, 1975.
- B6. Spencer A. J. M. *Continuum Mechanics*. — London: Longman, 1980.
- B7. Gurtin M. E. *An introduction to continuum mechanics*. — New York: Acad. Press, 1981.
- B8. McClintock F. A., Argon A. S. *Mechanical behaviour of materials*. — Reading: Addison Wesley, 1966. [Имеется перевод: Макклиток Ф. Э., Аргон А. С. Деформация и разрушение материалов. — М.: Мир, 1970.]
- B9. Oden J. T. *Mechanics of elastic structures*. — New York: McGraw Hill, 1967.
- B10. Timoshenko S. P., Gere J. M. *Theory of elastic stability*. — New York: McGraw Hill, 1961.
- B11. Leipholz H. *Stabilitätstheorie*, LAMM Bd. 10. — Stuttgart: Teubner, 1968.
- B12. Sommerfeld A. *Vorlesungen über theoretische Physik*. Bd. II, 5. Aufl., Kap. 9 von E. Kröner. — Leipzig: Akad. Verl. Ges., 1964.
- B13. Sommerfeld A. *Vorlesungen über theoretische Physik*. Bd. V. — Wiesbaden: Diederich, 1952.
- B14. Neuber H. *Kerbspannungslehre*, 2 Aufl. — Berlin: Springer, 1958.
- B15. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. — М. — Л.: Гостехтеориздат, 1951. См. также: Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. — Киев: Наукова думка, 1968.
- B16. Peterson R. E. *Stress concentration factors*. — New York: Wiley, 1974.
- B17. Melan E., Parkus H. *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder*. — Wien: Springer, 1953. [Имеется перевод: Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. — М.: Физматгиз, 1958.]
- B18. Nowacki W. *Thermoelasticity*. — London, 1962. [Имеется перевод: Новацкий В. Вопросы термоупругости. — М.: Изд-во АН СССР, 1962.]
- B19. Argyris J. H., Kelsey G. *Energy theorem and structural analysis*. — London: Butterworth, 1960.
- B20. Zienkiewicz O. C. *Methode der finiten Elemente*. — München: Hanser, 1975. [Имеется перевод: Зенкевич О. К. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975.]
- B21. Schwarz H. R. *Methode der finiten Elemente*. 2 Aufl., LAMM, Bd. 47. — Stuttgart: Teubner, 1984.
- B22. Hahn H. G. *Methode der finiten Elemente in der Festigkeitslehre*. 2 Aufl. — Wiesbaden: Akad. Verl. Ges., 1982.
- B23. Brebbia C. A., Walker S. *Boundary element techniques in engineering*. — London: Newnes-Butterworth, 1980. [Имеется перевод: Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. — М.: Мир, 1983.]
- B24. Kröner E. *Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*. — Berlin: Springer, 1958. [Имеется перевод: Крёнер Э. Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. — М.: Мир, 1965.]
- B25. Hirth J. P., Lothe J. *Theory of dislocations*. — New York: McGraw Hill, 1968.
- B26. Irwin G. R., *Fracture*. — In: [A41], 551—590.
- B27. Hahn H. G. *Bruchmechanik*, LAMM, Bd. 30. — Stuttgart: Teubner, 1976.
- B28. Черепанов Г. П. *Механика хрупкого разрушения*. — М.: Наука, 1974.

- B29. Schwalbe K. H. Bruchmechanik metallischer Werkstoffe. — München: Hanser, 1980.
- B30. Sneddon I. N., Lowengrub M. Crack problems in the classical theory of elasticity. — New York: Wiley, 1969.
- B31. Sih G. C. (Ed.). Methods of analysis and solution of crack problems. — Leyden: Noordhoff, 1973.
- B32. Handbuch der Physik (Hrsg. S. Flügge). Bd. III/1. Prinzipien der klassischen Mechanik und Feldtheorie (J. L. Synge, C. Truesdell und R. A. Toupin). — Berlin: Springer, 1960.
- B33. Handbuch der Physik. (Hrsg. S. Flügge). Bd. III/3. Die nichtlinearen Feldtheorien der Mechanik (C. Truesdell und W. Noll). — Berlin: Springer, 1965.
- B34. Truesdell C., Toupin R. A. The classical field theories. — In: [B32], 226—793.
- B35. Timoshenko S. P. History of strength of materials. — New York. McGraw Hill, 1953. [Имеется перевод: Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. — М.: Гостехтеориздат, 1957.]
- B36. Truesdell C. Essays in the history of mechanics. — Berlin: Springer, 1968.
- B37. Szabo I. Gesichte der mechanischen Prinzipien. — Basel: Birkhäuser, 1977.
- B38. Sokolnikoff I. S. Tensor analysis, theory and applications. — New York: Wiley, 1951. [Имеется перевод: Сокольников И. Тензорный анализ. — М.: Наука, 1971.]
- B39. Duschek A., Hochrainer A. Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung. Teil I—III. — Wien: Springer, 1948/1955.
- B40. Temple G. Cartesian tensors. — London: Methuen, 1960.
- B41. Sneddon I. N. Fourier transforms. — New York: McGraw Hill, 1951. [Имеется перевод: Снеддон И. Н. Преобразования Фурье. — М.: ИЛ, 1955.]
- B42. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. 2-е изд. — Л. — М.: Гостехтеориздат, 1941. См. также: 5-е изд. — М. — Л.: Физматгиз, 1962.
- B43. Noble B. Methods based on the Wiener-Hopf-technique. — London: Pergamon Press, 1958.
- B44. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. 1-е изд. — М.: Наука, 1957. См. также: 2-е изд. — М.: Наука, 1970.
- B45. Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity. — Oxford: Pergamon Press, 1968. [Имеется перевод: Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. — М.: Мир, 1987.]
- B46. Tranter D. J. Integral transforms in mathematical physics. — London: Methuen, 1956. [Имеется перевод: Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. — М.: Гостехтеориздат, 1956.]
- B47. Schwartz L. Theorie des distributions I, II. — Paris: Herrmann, 1950/51.
- B48. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматгиз, 1958.
- B49. Lighthill M. J. Einführung in die Theorie der Fourieranalysis und der verallgemeinerten Funktionen. — Mannheim: Bibl. Inst., 1966.
- B50. Zemanian A. H. Distribution theory and transform analysis. — New York, 1965.

§ 11.2. Оригинальные работы (в порядке, в котором они встречаются в тексте)

1. Cauchy A. L. De la pression ou tension dans un corps solide. — Exercices de Mathematique, 1827, 2, 42—56.

2. Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums. — *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.*, 1958, **10**, 195—213.
3. Schaefer H. Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen ebenen Cosserat-Kontinuums. — In [B3], 277—292.
4. Cesaro E. Sulle formole del Volterra, fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche. — *R. C. Accad. Sci. Fis. Math. Napoli*, 1906, **12**, 311—321.
5. Zorski H. Theory of discrete defects. — *Arch. Mech. Stos.* — 1966, **18**, 301—372.
6. Mura T. The continuum theory of dislocations. — *Adv. Math. Res.*, 1968, **3**, 1—108.
7. Green G. On the laws of reflection and refraction of light at the common surface of two non-crystallized media. — *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 1838/1842, **7**, 1—24.
8. Kirchhoff G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes. — *J. Reine und angew. Mathematik (Crelles J.)*, 1859, **56**, 285—313.
9. Bufler H. Erweiterung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen und des Prinzips der virtuellen Kräfte. — *ZAMM*, 1970, **50**, 104—108.
10. Bufler H. Variationsgleichungen und finite Elemente. — *Sitz.-Ber. Bayer. Akad. der Wiss.*, 1975, 155—187.
11. Reissner E. On a variational theorem in elasticity. — *J. Math. and Phys.*, 1950, **29**, 90—95.
12. Bufler H. Zur Variationsformulierung nichtlinearer Randwertprobleme. — *Ing.-Archiv*, 1976, **45**, 17—39.
13. Engesser F. Über statisch unbestimmte Träger. — *Z. Architekt. Ing. Verein Hannover*, 1889, **35**, 733—744.
14. Betti E. Teoria dell'elasticity. — *Il Nuovo Cimento (2)*, 1872, **7/8**, 5—21.
15. Галеркин Б. Г. К вопросу об исследовании напряжений и деформаций в упругом изотропном теле. — *Докл. АН СССР*, 1930, с. 353—358. См. также: Галеркин Б. Г. *Собрание сочинений*, т. 1. — М.: Изд-во АН СССР, 1952.
16. Papkovitch P. F. Expressions générales des composantes des tensions, ne renfermant comme fonctions arbitraires que des fonctions harmoniques. — *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1932, **195**, 754—756.
17. Папкович П. Ф. Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции. — *Изв. АН СССР*, VII сер., Отд. матем. и естеств. наук, 1932, № 10, с. 1425—1435.
18. Neuber H. Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel. — *ZAMM*, 1934, **14**, 203—212.
19. Mindlin R. D. Note on the Galerkin and Papkovitch stress functions. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1936, **42**, 373—376.
20. Airy G. B. On the strains in the interior of beams. — *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 1863, **153**, 49—80.
21. Maxwell J. C. On reciprocal diagrams in space and their relation to Airy's function of stress. — *Proc. London Math. Soc.*, 1865/69, **2**, 58—60.
22. Morera G. Soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo. — *Atti Acad. Lincei R. C.*, 1892, **1**, 137—141.
23. Beltrami E. Osservazioni sulla nota precedente. — *Atti Accad. Lincei R. C.*, 1892, **1**, 141—142.
24. Finzi B. Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui. — *Atti Acad. Lincei R. C.*, 1934, **19**, 578—584, 620—623.
25. Weber C. Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums. — *ZAMM*, 1948, **28**, 193—197.
26. Kröner E. Die Spannungsfunktionen der dreidimensionalen Elastizitätstheorie. — *Z. für Phys.*, 1954, **139**, 175—188.

27. Schaefer H. Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums und des elastischen Körpers. — ZAMM, 1953, 33, 356—362.
28. von Mises R. On St-Venant's principle. — Bull. Amer. Math. Soc., 1945, 51, 555—562.
29. Sternberg E. On St. Venant's principle. — Quart. Appl. Math., 1954, 11, 393—402.
30. Колосов Г. В. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче теории упругости. — Юрьев, тип. К. Маттисена, 1909, 187 с.
31. Kolossoff G. V. Über einige Eigenschaften des ebenen Problems der Elastizitätstheorie. — Z. für Math. und Phys., 1914, 62, 384—409.
32. Muskhelishvili N. Praktische Lösung der fundamentalen Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie in der Ebene für einige Berandungsformen. — ZAMM, 1933, 13, 264—282.
33. Stevenson A. C. Some boundary problems of two-dimensional elasticity. — Philos. Mag., 1943, 34 (VII), 766—793. См. также: Complex potentials in two-dimensional elasticity. — Proc. Roy. Soc. London, 1945, A184, 129—179, 218—229.
34. Sobrero L. Theorie der ebenen Elastizität. — Hamburger Math. Einzelschr., 1934, 17.
35. Schmidt K. Behandlung ebener Elastizitätsprobleme mit Hilfe hyperkomplexer Singularitäten. — Ing.-Arch., 1951, 19, 324—341.
36. Stahl K. Über die Lösung ebener Elastizitätsaufgaben in komplexer und hyperkomplexer Darstellung. — Ing.-Arch., 1954, 22, 1—20.
37. Kuhn G. Lösung elastischer Riß- und Stempelprobleme mittels Integraltransformationen unter Verwendung der Wiener-Hopf-Technik. — Habil.-Schr. TU München, 1977.
38. Trefftz E. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. — Math. Ann., 1928, 100, 503—521.
39. Hrennikoff A. Solution of problems in elasticity by the framework method. — J. Appl. Mech., 1941, 6, 169—175.
40. McHenry D. A lattice analogy for the solutions of plane stress problems. — J. Inst. Civ. Eng., 1943, 21, 59—82.
41. Turner M. J., Clough R. W., Martin H. C., Topp L. J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. — J. Aeron. Sci., 1956, 23, 805—823.
42. Clough R. W. The finite element method in plane stress analysis. — Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation. Pittsburgh, 1960, S. 345—378.
43. Tong P., Pian T. H. H. The convergence of finite element method in solving linear elastic problems. — Int. J. Sol. and Struct., 1967, 3, 865—879.
44. Pian T. H. H., Tong P. Basis of finite element methods for solid continua. — Int. J. Num. Meth. Eng., 1969, 1, 3—28.
45. Schnack E. Beitrag zur Berechnung rotationssymmetrischer Spannungskonzentrationsprobleme mit der Methode der finite Elemente. — Dr.-Ing. Diss. TU München, 1973.
46. Jaswon M. A., Porter A. R. An integral equation solution of the torsion problem. — Proc. Roy. Soc. London, 1963, A273, 246—273.
47. Rizzo F. J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. — Quart. Appl. Math., 1967, 25, 83—95.
48. Cruse T. A. Numerical solutions in three-dimensional elastostatics. — Int. J. Sol. and Struct., 1969, 5, 1259—1274.
49. Neureiter W., Kuhn G. Boundary-Element-Methode mit Strukturtechnik. — ZAMM, 1981, 61, T112—T114.
50. Kuhn G., Möhrmann W. Boundary element method in elastostatics: theory and applications. — Appl. Math. Modelling, 1983, 7, 97—105.

51. Prandtl L. Zur Torsion von prismatischen Stäben. — *Phys. Z.*, 1903, 4, 758—770.
52. Weber C. Die Lehre von der Drehfestigkeit. — *VDJ-Forsch.*, 1921, Heft 249.
53. Trefftz E. Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken. — *ZAMM*, 1935, 15, 220—225.
54. Weinstein A. The center of shear and the center of twist. — *Quart. Appl. Math.*, 1947, 5, 97—99.
55. St. Venant B. Memoire sur la flexion des prismes. — *J. Math. Pure et Appl.*, 2 ser., 1856, T1, 89—189.
56. Тимошенко С. П. Применение функций напряжений к исследованию изгиба и кручения призматических стержней. — Сборник ин-та инженеров путей сообщения. СПб, 1913, вып. 82, 1—21. Отд. оттиск: СПб, 1913, 22 с.; см. также: Тимошенко С. П. Прочность и колебания элементов конструкций. — М.: Физматгиз, 1975, с. 264—283.
57. Filon L. N. G. On an approximative solution for the bending of a beam of rectangular section under any system of load. — *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 1903, A201, 63—155.
58. Goursat E. Sur l'equation $\Delta\Delta u = 0$. — *Bull. Soc. Math. France*, 1898, 26, 236—237.
59. Lamé G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité. — Paris: Bachelier, 1852.
60. Grübler M. Der Spannungszustand in Schleifsteinen und Schmirgelscheiben. — *Z. VDI*, 1897, 41, 860—864.
61. Sternberg E., Eubanks R. A. On the concept of concentrated loads and an extension of the uniqueness theorem in the linear theory of elasticity. — *J. Rat. Mech. Anal.*, 1955, 4, 135—168.
62. Sternberg E., Koiter W. The wedge under a concentrated couple: A paradox in the two-dimensional theory of elasticity. — *J. Appl. Mech.*, 1958, 25, 575—581. [Имеется перевод: Штернберг Э., Койтер В. — В сб.: Механика. — М.: ИЛ, 1959, № 3, с. 97—115.]
63. Neuber H. Lösung des Carothers-Problems mittels Prinzipien der Kraftübertragung. — *ZAMM*, 1963, 43, 211—228.
64. Melan E. Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im innern beanspruchten Halbscheibe. — *ZAMM*, 1932, 12, 343—346.
65. Kirsch G. Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. — *Z. VDI*, 1898, 42, 797—807.
66. Neuber H. Gekerbte und gelochte Scheiben mit Kraft- und Versetzungssingularitäten. — *Ing.-Arch.*, 1968, 37, 1—9.
67. Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. — *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 1921, A221, 163—198.
68. Barenblatt G. I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. — *Adv. Appl. Mech.*, 1962, 7, 55—129.
69. Буфлер H. Der Spannungszustand in einer geschichteten Scheibe. — *ZAMM*, 1961, 41, 155—180.
70. Jung H. Über eine Anwendung der Fouriertransformation in der Elastizitätstheorie. — *Ing.-Arch.*, 1950, 18, 263—271.
71. Sneddon I. N. The distribution of stress in the neighborhood of a crack in an elastic solid. — *Proc. Roy. Soc. London*, 1946, A187, 229—260.
72. Sneddon I. N., Elliot H. A. The opening of a Griffith-crack under internal pressure. — *Quart. Appl. Math.* 1946/47, 4, 262—267.
73. Tranter C. J. The use of the Mellin-transform in finding the stress-distribution in an infinite wedge. — *Quart. J. Appl. Math.*, 1948, 1, 125—130.
74. Mayr M. Ein Integralgleichungsverfahren zur Lösung rotationssymmetrischer Elastizitätsprobleme. — *Dr.-Ing. Diss. TU München*, 1975.
75. Mindlin R. D. Force at a point in the interior of a semiinfinite solid. — *Physics*, 1936, 7, 195—202.

76. Sternberg E. Three-dimensional stress concentrations in the theory of elasticity. — *Appl. Mech. Rev.*, 1958, **11**, 1—4.
77. Neuber H., Hahn H. G. Stress concentration in scientific research and engineering. — *Appl. Mech. Rev.*, 1966, **19**, 187—199.
78. Leon A. Über die Störungen der Spannungsverteilung, die in elastischen Körpern durch Bohrungen und Bläschen entstehen. — *Österr. Wochenschr. für den öffentl. Baudienst*, 1908, **9**, 1—18.
79. Stefan J. Über das Gleichgewicht eines festen elastischen Körpers von ungleichförmiger und veränderlicher Temperatur. — *Sitz. ber. K. Akad. der Wiss. Wien, Math. Naturw. Klasse*, 1881, 549—575.
80. Southwell R. V., Gough H. J. On the concentration of stress in the neighborhood of a small spherical flaw. — *Philos. Mag.*, VII, 1926, **1**, 71—97.
81. Larmor J. The influence of flaws and air-cavities on the strength of materials (Appendix by A. E. Love). — *Philos. Mag.*, V, 1892, **33**, 76—78.
82. Goodier J. N. Concentration of stress around spherical and cylindrical inclusions and flaws. — *Trans. ASME*, 1933, **55**, 39—44.
83. Neuber H. Beiträge für den achssymmetrischen Spannungszustand. — *Dr.-Ing. Diss. TH München*, 1932.
84. Neuber H. Der räumliche Spannungszustand in Umdrehungskerbten. — *Ing.-Arch.*, 1935, **6**, 133—156.
85. Sadowsky M. A., Sternberg E. Stress concentration around an ellipsoidal cavity in an infinite body under arbitrary plane stress perpendicular to the axis of revolution of the cavity. — *J. Appl. Mech.*, 1947, **14**, 191—201.
86. Edwards R. H. Stress concentrations around spheroidal inclusions and cavities. — *J. Appl. Mech.*, 1951, **18**, 19—30.
87. Sadowsky M. A., Sternberg E. Stress concentration around a triaxial ellipsoidal cavity. — *J. Appl. Mech.*, 1949, **16**, 149—157.
88. Лурье А. И. Напряженное состояние вокруг эллипсоидальной полости. — *Докл. АН СССР*, 1952, **87**, № 5, 709—710.
89. Terazawa K. On the elastic equilibrium of a semi-infinite solid under given boundary conditions, with some applications. — *J. of College of Sci. Imperial Univ. Tokyo*, 1916, **37**, Art. 7, 1—64.
90. Буфлер Н. Der Spannungszustand in einem geschichteten Körper bei axial-symmetrischer Belastung. — *Ing.-Arch.*, 1961, **30**, 417—430.

Комментарии редактора перевода

¹⁾ (К стр. 46.) Эти зависимости приведены Барре де Сен-Венаном (1797—1886) в его комментариях к конспекту лекций Луи Навье (1785—1836), первое издание которого вышло в 1826 г., второе — в 1833 г., третье — в 1864 г. под редакцией Сен-Венана, при этом первоначальный текст Навье вырс в третьем издании в десять раз (Navier L. *Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de le mécanique à l'établissement des constructions et des machines. Premier Partie. De la résistance des corps solides. Troisième édition avec des notes et des appendices par M. Barré de Saint-Venant.* — Paris: Carilian-Goeury, 1864, 1100 p.) См. приложение III на стр. 541—617, где изложена общая теория упругости. Указанный в основном тексте год 1860 объясняется тем, что комментарии на стр. 497—688 книги Навье были выполнены Сен-Венаном именно в этом году.

²⁾ (К стр. 64.) Ж. Дюамель (1797—1872), ученик Шарля Фурье, распространил аналитическую теорию (тепла в твердых телах), разработанную Ш. Фурье, на случай учета деформации тел при изменении температуры. Он, в частности, заметил, что температурные напряжения линейно независимы от напряжений, возникающих от объемных и поверхностных сил, и рассмотрел температурные напряжения в центрально симметричной полой сфере и осесимметричном круговом цилиндре при температуре, зависящей от радиуса (Duhamel J. M. C. *Mémoire sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements de température dans les corps solides.* — *Mémoires par divers Savant*, 1838, t. 5, p. 440—498). Эта работа была доложена в Академии наук Франции 23 февраля 1835 г. См. также его работу: *Second memoire sur les phénomènes thermo-mécaniques.* — *J. l'École Polytechnique*, 1837, t. 15, 25. p. 1—57. Франц Нейман (1798—1895) (Neumann F. E. *Die Gesetze der Doppelbrechung des Licht in Comprimirten oder ungleichförmig erwärmten unkrystallischen Körpern.* — *Abhandlungen der Königlische Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, Aus dem Jahre 1841, Bd. 2, Berlin, 1843, S. 1—254) так же, как и Дюамель, дал вывод уравнений равновесия пространственной задачи теории упругости с учетом изменения температуры, нашел температурные напряжения в центрально-симметричной сфере и показал оптическим методом, что имеет место соответствие теории и опыта. Эти результаты содержатся также в курсе лекций Неймана по теории упругости (Neumann F. *Vorlesungen über die Theorie der Elastizität der festen Körper und des Lichtäthers.* Herausgegeben O. E. Meyer. — Leipzig, 1885, S. 133—163).

Дифференциальные уравнения теории изотропной однородной упругости в перемещениях известны ныне как уравнения Дюамеля — Неймана. Предположения о том, что компоненты суммарной деформации (суммы упругой и температурной) выражаются через компоненты перемещений известными соотношениями Коши, а компоненты упругой деформации и компоненты суммарного напряжения связаны законом Гука, называются гипотезами Неймана.

³⁾ (К стр. 98.) Луиджи Фредерико Менабреа (1809—1896), итальянский инженер, определял статически неопределимые усилия в ферме с идеальными шарнирами из условия минимума энергии деформации, не дав, как считалось впоследствии, своим выкладкам необходимого обоснования (Ménabréa L. F. *Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques.*—*Comptes Rendus.* 1858, t. 46. 1 Semestre, No. 22, p. 1056—1060).

⁴⁾ (К стр. 99.) Энрико Бетти (1823—1892), итальянский инженер и математик, опубликовал свое исследование о теореме взаимности при статических перемещениях в 1872 г. (Betti E. *Teoria della elasticità. Il nuovo cimento.* Ser. 2a. 1872, t. 7—8, Juglio, p. 5—21; Agosto, p. 69—97; Settembre, p. 158—180; Novembre, p. 357—367).

Рэлей опубликовал в 1873 г. теорему взаимности для колеблющейся системы, в двух точках которой приложены силы, изменяющиеся во времени гармонически (Lord Rayleigh (Strutt J. W.) *Some general theorems relating to vibrations.*—*Proc. London Math. Soc.*, 1873, v. 4, No. 63, p. 357—368). Эта статья перепечатана в первом томе шеститомного собрания работ Рэлей (Strutt J. W. *Scientific papers.*—London: Cambridge University Press, 1899, v. 1, 562 p., p. 170—181). Из теоремы взаимности при бесконечно большом периоде изменения сил, как отметил Рэлей, получается формулировка и статического принципа взаимности. В следующей работе (A *statical theorem.*—*Philos. Mag.*, 4th Ser., 1874, v. 48, p. 452—456; 1875, v. 49, p. 183—185; перепечатка этой статьи — в упомянутом первом томе на с. 223—229) Рэлей развил формулировку теоремы взаимности на случай податливостей и жесткостей, введя понятие обобщенных сил и обобщенных перемещений. Эти вопросы вошли в первый том его известного двухтомника по теории звука (Lord Rayleigh (Strutt J. W.) *Theory of sound.* V. 1, 1877.—London, 326 p.; см. перевод: Стретт Дж. (лорд Рэлей). *Теория звука.*—М.—Л.: Гостехтеориздат, 1955.

⁵⁾ (К стр. 106.) В книге автор говорит о векторе Галёркина (1930); в переводе мы называем его вектором Буссинеска, поскольку ученик Сен-Венана Жозеф Валентэн Буссинеск (1842—1929) впервые представил компоненты перемещений в упругом изотропном однородном теле посредством трех бигармонических функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям равновесия Навье. Он же в случае осесимметричного тела указал на возможность использования гармонических функций для построения общего решения. Эти результаты описаны в широкоизвестной монографии по применению теории потенциалов для изучения равновесия и движения жидких и упругих твердых тел (Boussinesq J. V. *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, principalement au calcul des déformations et des pressions que produisent, dans ces solides, des efforts quelconques exercés sur une petite partie de leur surface ou de leur intérieur; Mémoire suivie de notes étendues sur divers points de physique mathématique et d'analyse.*—Paris: Gautiers-Villars, 1885, 721 p.) Эта монография составляет 13-й том работы «Recueil de la Société des Sciences de Lille. Lille, 1885». Отдельные части были опубликованы прежде в журнале *Comptes Rendus* в 1878—1883, t. 86, p. 1260—1263; t. 87, p. 402—405, 519—522, 687—689, 978—979, 1077—1078; t. 88, p. 277—279, 331—333, 375—378, 701—704, 741—743; t. 93, p. 703—706, 783—785; t. 95, p. 1052—1054, 1149—1150; t. 96, p. 245—248. См. также дополнение, написанное Буссинеском «Complément à la Note finale du § 46 de M. Boussinesq» и помещенное Сен-Венаном на стр. 881—888 французского перевода книги А. Клебша по упругости (Clebsch A. *Theorie der Elastizität fester Körper.*—Leipzig: B. G. Teubner, 1862, 424 S.; Clebsch A. *Théorie de l'élasticité des corps solides. Tracluite par Barre de Saint-Venant et A. Flamant.*—Paris: Dunod, 1883, 980 p.) Общее решение уравнений теории изотропной упругости находится на стр. 276—295; представления для перемещений записаны на стр. 281.

⁶⁾ (К стр. 120.) А. Стивенсон в 1945 г. привел без ссылок вывод формул Колосова в случае массовых сил, имеющих потенциал. Г. В. Колосов впервые опубликовал свой результат в 1908—1909 гг. на французском языке «О проблемах теории упругости двух измерений» (Kolossoff G. Sur les problèmes d'élasticité à deux dimensions. — C. R. Acad. Sci., 1908, t. 146, No. 10, p. 522—525; 1909, t. 148, No. 19, p. 1242—1244; 1909, t. 148, No. 25, p. 1706), затем на русском в виде монографии [30], позднее (в 1914 г.) в немецком журнале *Z. für Math. und Phys.* «О свойствах плоских задач теории упругости» (см. [31]). В этих работах объемные силы предполагались отсутствующими. В следующей монографии [A7] (1935 г.), как и ранее, получены общие формулы для составляющих напряжения и перемещения в случае объемных сил, не обладающих потенциалом. На результаты Г. В. Колосова имеются указания в широкоизвестных книгах С. П. Тимошенко по теории упругости, даже в ранней из них — в первом томе петербургского «Курса теории упругости» (1914 г.); метод Колосова нашел применение в первых изданиях известной монографии по математической теории упругости Н. И. Мусхелишвили [A30], а также в его статье 1932 г. в немецком журнале *ZAMM* (см. [32]). Этот перечень можно было бы расширить.

Г. В. Колосов не был первым исследователем, использовавшим для решения задачи теории упругости метод комплексной переменной, но он был первым исследователем, давшим эффективное решение для плоского случая, которое легко для приложений. Состояние вопроса об использовании до Г. В. Колосова функций комплексного переменного в теории упруго деформированного твердого тела содержится в известном обзоре Тедоне — Тимпе (Tedone O., Timpe A. Spezielle Ausführungen zur Statik elastischer Körper. *Encyklopedia der mathematischen Wissenschaften.* — Leipzig: B. G. Teubner, Bd. 4, H. 2, 1907, Art. IV—25, S. 125—214, см. стр. 163). Заметим, что при описании задачи Сен-Венана А. Клебш в 1862 г. в известном курсе теории упругости (Clebsch A. *Theorie der Elastizität der festen Körper.* — Leipzig: B. G. Teubner, 1862) применил комплексную переменную. А. Ляв в первом томе своего курса теории упругости (Love A. E. H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity.* — Cambridge: University Press, v. 1, 1892) приводит выражение для составляющих перемещения через две аналитические функции, но это не комплексные потенциалы Колосова. Сейчас же, после Г. В. Колосова, нетрудно выписать зависимость между аналитическими функциями Лява и комплексными потенциалами Колосова и сделать, таким образом, решение эффективным. Более того, А. Ляв полагал вообще нецелесообразным использование комплексной переменной для обсуждаемого круга задач. Отметим также громоздкое общее решение в комплексной форме двумерной задачи теории упругости, предложенное в 1903 г. Л. Файлоном (Filon L. N. *On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load, with special reference to points of concentrated or discontinuous loading.* — *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A*, 1903, v. 201, No. 334, p. 63—155); это решение не нашло применения даже у самого автора.

⁷⁾ (К стр. 128.) Лорд Рэлей (Джон Уиллиам Стретт (1842—1919)) дал многочисленные применения энергетического метода, который и изложен им, в частности, в его книге «Теория звука» (Strutt John William (Lord Rayleigh). *The theory of sound.* 2nd ed. — New York: Dover Publications, 1945, v. 1, 504 p.; v. 2, 480 p.). Первое английское издание вышло в 1877 г. (v. 1, 326 p.) и в 1878 г. (v. 2, 302 p.), второе — в 1894—1896 гг., третье — в 1926 г. Русский перевод с третьего английского издания: Стретт Дж. (лорд Рэлей). *Теория звука.* — М. — Л.: Гостехтеориздат, 1955. Интересно отметить, что Рэлей применял свой метод и для определения низших частот упругих колебаний (Rayleigh J. W. *Some general theorems relating to vibrations.* — *Proc. London Math. Soc.*, 1873, v. 4, p. 357—368. *Scientific papers.* Vol. 1. — Cam-

bridge, University Press, 1899, p. 170—181), и для нахождения высших частот (Rayleigh J. W. On the calculation of the frequency of vibration of a system in its gravest mode, with an example from hydrodynamics.—Philos. Mag., Ser. 5, 1899, v. 47, p. 556—572; Scientific papers. Vol. 4.—Cambridge: University Press, 1903, p. 407—412; Rayleigh J. W. On the calculation of Chladni's figures for a square plate.—Philos. Mag., Ser. 6, 1911, v. 22, p. 225—229; Scientific papers. Vol. 6.—Cambridge: University Press, 1920, p. 47—50). Заметим, что Рэлей искал минимум частоты колебаний, а не минимум энергии системы.

Математическое обоснование этого метода было дано швейцарским физиком Вальтером Ритцем (1878—1909) (Ritz W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik.—J. reine und angew. Math. (Crelle), 1908, Bd. 135, No. 1, S. 1—61, Gesammelte Werke.—Paris: Gautier-Villars, 1911, s. 192—250). В. Ритц в своих работах основывался на идее Рэрея о задании характера деформированной формы рассматриваемого объекта и вычислении потенциальной энергии с помощью этой заданной формы, а затем требовал стационарности значения потенциальной энергии путем минимизации потенциальной энергии по неизвестным параметрам заданных перемещений. Приравнивая частные производные потенциальной энергии от перемещения по каждому из неизвестных параметров нулю, он получил систему уравнений для определения искомого параметров аналогично тому, как Рэлей, минимизируя частоту колебаний по неизвестным параметрам выбранных перемещений. В работе 1911 г. Рэлей огорчился: «Как мог он (В. Ритц) назвать мой метод новым?». Несмотря на блестящую работу В. Ритца, следует заметить, что основания для такого высказывания у Рэрея были, потому что именно он разорвал замкнутый круг, когда попытка поставить задачу вариационного исчисления для искомой проблемы приводила вновь к заданному дифференциальному уравнению задачи, поэтому он предложил аппроксимировать вид деформируемой поверхности конструкции, а вводимые неизвестные параметры определять путем минимизации.

⁸⁾ (К стр. 132.) Метод Бубнова в первоначальной формулировке состоит в том, что решение исходного дифференциального уравнения заменяется условием ортогональности левой части этого уравнения, в которую внесено выбранное представление для искомой функции, к самой функции. Этот метод был предложен Иваном Григорьевичем Бубновым (1872—1919) в 1911 г. и опубликован впервые в печати в 1913 г. (Бубнов И. Г. Отзыв о работе проф. С. П. Тимошенко «Об устойчивости упругих систем». — Сб. С.-Петербургского института инженеров путей сообщения. 1913, вып. 81, с. 33—36; см. также: Бубнов И. Г. Избранные труды. — Л.: Судпромгиз, 1956, с. 136—139). Более сложную проблему при помощи своего метода И. Г. Бубнов изучил позднее (Строительная механика корабля. Часть II. С.Пб, Типография морского министерства, 1914, § 22, с. 513—514), рассмотрев устойчивость прямоугольной свободной опертой пластины конечной длины при действии по кромкам равномерных касательных сил и при неоднородном одноосном сжатии этой пластины. И. Г. Бубнов дал две формулировки своего метода — в одном случае дифференциальное уравнение в частных производных сводилось к алгебраическим уравнениям, в другом — к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Метод Бубнова нашел большое применение к решению линейных и нелинейных уравнений и их систем. Развитие этого метода было очень плодотворным. Б. Г. Галёркин опубликовал в 1915 г. статью о применении метода Бубнова (Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок. — Вестник инженеров, 1915, т. 1, № 19, 1 октября, с. 897—908). Он рассмотрел менее общий случай уравнений — уравнение малого прогиба пластин. Его статья хорошо продумана и тщательно написана. Эта работа не содержит прямых указаний о предшественнике, ни на один из вышеуказанных результатов в статье ссылки нет.

Автор предпочитает говорить о развитии метода Навье. Редактор перевода считает, что обсуждаемый метод должен сохранить имя основоположника. Подробнее о методе Бубнова, его истории и развитии см. работу Э. И. Григолока (О методе Бубнова. К шестидесятилетию его создания. — В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек, вып. II, Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1975, с. 3—41).

⁹⁾ (К стр. 133.) Имеется обширная библиография работ по методу конечных элементов, включающая свыше 8000 источников до 1976 года: Norris D. H., Vries G. de. Finite element bibliography. — New York: Plenum Press, 1976, 686 p.

¹⁰⁾ (К стр. 141.) Хорошо известно, что интегральное уравнение теории потенциала вывел Георг Грин (Green G. An assay on the application of mathematical analysis to the theory of electricity and magnetism. — Nottingham, 1828). Широкое применение получил метод интегральных граничных уравнений, ведущий свое начало от исследования Фредгольма (Fredholm I. Sur une classe d'équations fonctionnelles. — Acta Mathematica, 1903, v. 27, p. 365—390), в котором был доказан факт существования решения уравнения с помощью способа предельной дискретизации. Позднее, в 1906 г., Фредгольм использовал первый метод теории потенциала и теорию линейных интегральных уравнений для решения статической задачи теории упругости однородных тел, когда на границе заданы перемещения (первая основная краевая задача). Современные возможности численной реализации позволили расширить и улучшить формулировку проблемы; это коснулось интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода, а также интегральных уравнений нефредгольмовского типа. В. Д. Купрадзе (Методы теории потенциала в теории упругости. — М.: Физматгиз, 1963, 472 с.), используя гипотетическое распределение плотности источников на границе, сформулировал зависимость перемещений и напряжений на поверхности линейно упругой среды. Более ранняя публикация относится к 1953 г.: Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории установившихся колебаний. — Успехи матем. н., 1953, т. 8, № 3 (55), с. 21—74. Предложенные В. Д. Купрадзе прямая и позднее непрямая [47] формулировки задачи, а также доказательство их эквивалентности показали возможности метода граничных интегральных уравнений. Связь этого метода с методом граничных элементов описана в статье К. Бреббия и С. Уокера 1978 г. (Brebbia C. A., Walker S. Simplified boundary element for radiation problems. — Appl. Math. Modelling, 1978, v. 2, № 2) и их монографии 1980 г. (Brebbia C. A., Walker S. Boundary element techniques in engineering. — London: Newnes-Butterworth., 1980, 210 p.; см. перевод на русский язык: Бреббия К., Уокер С. Применение граничных элементов в технике. — М.: Мир, 1982, 248 с.) и нашла заметное применение к ряду проблем механики, к сожалению, главным образом к уже решенным задачам.

¹¹⁾ (К стр. 141.) Метод граничных элементов объединил в себе и метод интегральных уравнений, и метод конечных элементов и, таким образом, он включает в себе и аналитический метод, и численный расчет. Поведение внутренней области описывается в методе граничных элементов граничными интегральными уравнениями, граница области представляется конечными элементами. Право на существование метода граничных элементов дает его эффективность для весьма удлиненных областей и тел, когда метод конечных элементов неэффективен из-за невозможности с необходимой точностью описать поведение модели при ее дискретизации. Это подробно проиллюстрировано при решении дифференциальных уравнений Лапласа, Пуассона, Гельмгольца с различными краевыми условиями. Существенным ограничением метода граничных элементов является то, что он пригоден только для решения линейных задач.

¹²⁾ (К стр. 183.) Гипотеза плоских сечений для плоского изгиба прямой упругой балки восходит к работе Якова Бернулли (1654—1705), рассмотревшего изгиб консольного стержня концевой поперечной силой и получившего правильную с точностью до значения изгибной жесткости зависимость кривизны стержня в произвольной точке оси стержня от изгибающего момента в той же точке (см. его статью «Veritable hypothèse de la résistance des solides, avec la démonstration de la courbe des corps qui font ressort» в собрании трудов: Bernoulli J. Basileensis, Opera, Geneva, Simptibus haredum Cramer fratrum Philibert, 1744, t. 2, p. 976—989.)

¹³⁾ (К стр. 189.) Впервые поперечные касательные напряжения в стержне прямоугольного поперечного сечения при плоском изгибе в рамках гипотез Бернулли нашел русский ученый, мостостроитель Дмитрий Иванович Журавский (1821—1891) (Результаты исследования системы Гау, примененной к мостам С.-Петербурго-Московской железной дороги. — Журнал Главного управления путей сообщения и публичных зданий. Книга 1, 1850; книги 2, 5, 1852, книги 3—6, 1855.) Касательным напряжениям посвящена статья 7, 1855, книга 6, т. 22, с. 190—197 этого журнала. Эта часть издана во Франции: Jouravski D. Remarques sur la résistance d'un corps prismatique et d'une piece composée en bois ou en tôle de fer a une force perpendiculaire à leur longueur. — Annales des ponts et chaussées, memoires et documents, 3 ser., 1856, t. 12, part 2, No. 150, p. 328—351. Рассмотренная Сен-Венаном задача изгиба прямого плоского стержня, заделанного на одном конце и нагруженного на другом поперечной силой, решена им полуобратным методом: продольные нормальные напряжения задаются согласно теории изгиба стержней Бернулли — Эйлера, а изменение касательных напряжений отыскивается так, чтобы выполнялись все соотношения теории упругости. Полученные таким образом максимальные касательные напряжения показывают высокую точность формулы Журавского.

¹⁴⁾ (К стр. 197.) Работа Георга Бидделла Эри [20], как следует из заглавия, посвящена исследованию напряжений в прямоугольных тонких балках. К сожалению, эта знаменитая работа не корректна — автор выбрал для балки функцию напряжений, удовлетворяющую граничным условиям, но не удовлетворяющую уравнению совместности деформаций.

Джемс Кларк Максвелл (1831—1879) (см. [20] или стр. 200 собрания его трудов: Maxwell J. C. The scientific papers. — Cambridge University Press, 1890, v. 2) обратил внимание на это обстоятельство и получил дифференциальное уравнение совместности для плоской задачи относительно функции напряжений Эри (см. уравнение (8.29)).

¹⁵⁾ (К стр. 243.) Напряжения в равномерно растянутой бесконечно широкой пластине с малым круговым отверстием обсуждаются также в работе П. А. Велихова (Влияние отверстий на распределение напряжений в растянутой полосе. — Изв. Императорского московского инженерного училища. Часть II. Научные труды, 1907, вып. 1, стр. 11—91). П. А. Велихов привел и результаты своих экспериментов. Вполне возможно, что П. А. Велихов, как и Г. Кирш, получил выражения для напряжений путем подбора — оба они не приводят решения задачи, а ограничиваются конечным результатом. С. П. Тимошенко (1878—1972) (О влиянии круглых отверстий на распределение напряжений в пластинках. — Изв. Киевского политех. ин-та, 1907, год 7, книга 3, с. 95—113. Отд. оттиск: Киев, 1907, 21 с.; статья перепечатана на с. 106—123 сборника: Тимошенко С. П. Прочность и колебания элементов конструкций. — М.: Физматгиз, 1975, 704 с.) приводит общий интеграл для функции напряжений в полярных координатах, удовлетворяющий бигармоническому уравнению задачи, и для пластины с круговым вырезом рассматривает растяжение или сжатие в одном или в двух направлениях, а также совместное действие двустороннего растяжения и равномерных касательных сил; изучается также случай пластины конечной ширины.

¹⁶⁾ (К стр. 249.) См. работы: Inglis C. E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. — Trans. Inst. Naval Arch., 1913, v. 105, part 1, p. 219—230; discussion: p. 231—241; Pöschl Th. Über eine partikuläre Lösung des biharmonischen Problems für den Aussenraum der Ellipse. — Math. Z., 1921, Bd. 11, S. 89—96; Wolf K. Beiträge zur ebenen Elastizitätstheorie. — Z. techn. Physik, 921, Jahrgang 2, No. 8. S. 209—216.

¹⁷⁾ (К стр. 291.) Разумеется, автор оговорился. Первые результаты — это определение напряжений в толстостенном круговом цилиндре и сфере при воздействии внутреннего и внешнего равномерного давлений, выполненное в 1852 г. Габриэлем Ламе (1795—1870) [59].

Именной указатель

- Альманзи (Almansì E.) 37
Аргирис (Argyris J. H.) 133
Аристотель (Aristotel) 77
- Бельтрами (Beltrami E.) 47, 50, 66,
70, 71, 103, 115—117, 145, 176, 193,
197
Бернулли И. (Bernoulli John) 83
Бернулли Я. (Bernoulli Jacob) 9, 151,
183
Бессель (Bessel F. W.) 122, 297
Бетти (Betti F.) 90, 99—101
Больцман (Boltzmann L.) 22
Бредт (Bredt R.) 154
Бубнов И. Г. 132
Буземан (Busemann A.) 8
Буссинеск (Boussinesq J.) 47, 106—
109, 111, 113, 114, 232, 269, 274—
278, 280—282, 303
Буфлер (Bufler H.) 90, 303
Бюргерс (Bürgers J. M.) 50
Бьянки (Bianchi) 50
- Вашицу (Washizu K.) 90
Вебер (Weber C.) 116, 172
Вестергард (Westergaard H. M.) 9
Винер (Wiener N.) 127
- Галёркин Б. Г. 106, 132
Галилей Галилео (Galilei Galileo) 9
Гаусс (Gauss C. F.) 23, 24, 75, 85,
99, 157, 159, 179, 311—313
Гаф (Gough H. J.) 287
Гельмгольц (Helmholtz H.) 103, 106
Гиббс (Gibbs J. W.) 80, 81
Горшков А. Г. 292
Григолюк Э. И. 292
Грин Дж. (Green G.) 37, 54, 57, 78,
92, 272—274, 311
Гриффитс (Griffith A. A.) 127, 253—
255, 262—264
- Грюблер (Grübler M.) 229
Гук (Hooke R.) 9, 54, 57—63, 70, 72—
73, 75, 82, 89, 97, 107, 110, 112, 114,
116, 143, 144, 155, 177, 182, 192,
194, 196, 202, 203, 205, 206, 257,
259
Гурса (Goursat E.) 120, 207, 208, 212
- Дирак (Dirac P.) 267
Дирихле (Lejeune-Dirichlet G. P.) 92,
123, 160, 255, 266
Дюамель (Duhamel J. M. C.) 64
- Инглис (Inglis C. E.) 249
Ирвин (Irwin G. R.) 264
- Канторович Л. В. 131
Каротерс (Carothers S. D.) 235
Кастильяно (Castigliano C. A. P.) 57,
83, 90, 95—98, 101
Кельвин, Томсон В. (Lord Kelvin,
Thomson W.) 103, 108, 269—273,
277, 280
Кирхгоф (Kirchhoff G. R.) 75
Киш (Kirsch G.) 240—243
Клапейрон (Clapeyron P. E.) 56, 58,
74—76, 82, 89
Клебш (Clebsch A.) 142
Койтер (Koiter W. T.) 236
Колосов Г. В. 119—121, 168, 198,
206—215, 217—219, 221, 223—225,
233, 246, 249, 254
Коссера (Cosserat E., Cosserat F.) 22
Коши (Cauchy A. L.) 9, 12, 14, 16—
18, 22—25, 28, 37, 40, 41, 43, 54,
55, 67, 113, 120, 121, 159, 169, 170,
177, 241, 252
Крёнер (Kröner E.) 50
Кронекер (Kronecker L.) 16, 36, 59,
306, 307

- Круз (Cruse T. A.) 141
 Крылов Н. М. 131
 Кулон (Coulomb Ch. A.) 152
- Лагранж Ж. (Lagrange J. L.) 28, 30, 34—40, 92, 129, 311
 Ламе (Lame G.) 59—61, 67, 72, 104—106, 109, 227, 228, 241, 277, 278, 280, 282, 284, 285, 288, 290
 Лаплас (Laplace P. S.) 67, 69, 104, 110, 122, 156, 163, 164, 197, 288, 301, 309
 Леви-Чивита (Levi-Civita T.) 23, 46, 59, 308
 Лежандр (Legendre A. M.) 94
 Леон (Leon A.) 283, 287, 289—291, 294
 Леонов М. Я. 254
 Лоран (Laurent P. A.) 215, 216
 Лурье А. И. 296
 Ляв (Love A. E. H.) 9, 108, 110, 114, 195, 269, 277, 278, 280, 287, 288, 291, 299
- Мак Генри (McHenry D.) 133**
 Максвелл (Maxwell J. C.) 90, 100, 101, 115—117, 158, 198
 Мелан (Melan E.) 237, 238, 262
 Меллин (Mellin R. H.) 122, 236, 265, 266
 Менабреа (Menabrea L. F.) 90, 96, 98
 Миндлин ((Mindlin R. D.) 108, 111, 279, 280, 303
 Мичелл (Michell A. G. M.) 66, 70, 71, 103, 145, 193, 197, 202
 Мор (Mohr O.) 19
 Морера (Morera G.) 115—117
 Мухелишвили Н. И. 119, 206, 208, 210, 211, 214, 215, 249, 251
- Навье (Navier H.) 9, 66—69, 71, 103—107, 111, 113, 119, 193, 197, 272**
 Надаи (Nadai A.) 32
 Нейбер (Neuber H.) 111—114, 117, 146, 236, 249, 252, 271, 284, 291—296
 Нейман (Neumann J.) 64, 156, 179
 Ньютон (Newton J.) 13, 77
- Панасюк В. В. 254**
 Папкович П. Ф. 106, 111—114, 117, 271, 296
 Пёшль (Pöschl T.) 249
 Пиан (Pian T. H. H.) 140
 Прагер (Prager W.) 90
 Прандтль (Prandtl L.) 158—160, 162, 163, 165, 168
 Пуассон (Poisson S. D.) 9, 61, 158, 162, 163, 236
- Рейсснер (Reissner E.) 90, 93, 94, 96**
 Риман (Riemann B.) 50, 120, 159, 169, 170, 177, 221
 Ритц (Ritz W.) 128—132, 139
 Риццо (Rizzo F. J.) 141
 Риччи (Ricci M. A.) 306
 Рэлей (Rayleigh J. W. S.) 99, 128
- Сабо (Szabo I.) 9**
 Садовски (Sadovsky M. A.) 296
 Саусвелл (Southwell R.) 287
 Сен-Венан (Saint-Venant, Barre de) 9, 46, 118, 119, 142—146, 180, 184, 230, 231
 Снеддон (Sneddon I. N.) 123, 262—264, 303
 Собrero (Sobrero L.) 121
 Сомильяна (Somigliana C.) 106
 Стефан (Stefan J.) 287
 Стивенсон (Stevenson A. C.) 120
 Стокс (Stokes G. G.) 48, 170, 311—313
- Терадзава (Terazawa K.) 301, 302**
 Тимошенко С. П. 9, 176, 184
 Трефц (Treffitz E.) 132
 Трусделл (Truesdell C. A.) 9
- Файлон (Filon L. N. G.) 195**
 Фёппль (Föppl L.) 8, 249
 Фингер (Finger J.) 37
 Финци (Finzi B.) 116
 Фламан (Flamant A.) 231, 232, 262
 Фойгт (Voigt W.) 145
 Фридерихс (Friederichs) 82
 Фурье (Fourier J. B.) 122—127, 163, 165, 188, 201, 244—258, 260, 261, 263, 266—268, 297, 298
- Остроградский М. В. 311**

- Хан (Hahn H. G.) 284
Ханкель (Hankel H.) 122, 297—301, 303
Хеллинджер (Hellinger E.) 90, 93
Хопф (Hopf E.) 127
Хренников (Hrennikoff A.) 133
Ху (Hu) 90
- Чезаро (Cesaro E.) 47
Черрути (Cerruti V.) 108, 278, 282, 283
- Шварц (Schwarz H.) 266
Штернберг (Sternberg E.) 236, 284, 296
- Эдвардс (Edwards R. H.) 296
Эйлер Л. (Euler L.) 9, 12, 34—36, 37, 39, 40, 129, 151, 183
Эйнштейн (Einstein A.) 306
Эллиот (Elliot H. A.) 262
Энгессер (Engesser F.) 90, 96, 98
Эри (Airy G. B.) 115, 121, 197, 198, 201—204, 207, 210, 225, 227, 231, 234—241, 242, 255, 256, 258, 260, 265
- Юнг (Young Th.) 54, 262
- Якоби (Jacobi C. G.) 296

Предметный указатель

- Адиабатический процесс (adiabatische Vorgang) 79, 80
Аналитические функции (analytische Funktionen) 119, 168, 169, 207
- Базисные векторы (Basisvektoren) 305
Бесконечная пластина с эллиптическим отверстием (elliptisch gelochte unendliche Scheibe) 246
Бесконечно малое вращение (infinitesimale Rotation) 42
Бигармоническое уравнение (biharmonische Gleichung, Bipotentialgleichung) 69
решение методом преобразования *Фурье* (Lösung mittels Fourier-Transformation) 255
- Вектор *Буссинеска* (Vektor von Bousinesq) 106
— *Бюргера* (Burgersvektor) 50
— напряжений (Spannungsvektor) 13
— сопряженный (dualer Vektor) 44
— угловой скорости (вихря скорости) (Drehvektor) 44
Векторы (Vektoren) 304
Влияние надреза (Kerbwirkung) 146, 283
Внутренняя энергия (innere Energie) 78
Возможные деформации (Virtuelle Verzerrungen) 84
— перемещения (\sim Verschiebungen) 83
Вращение твердого тела, малое (Starrkörperdrehung, infinitesimale) 44
Выточка в виде гиперболоида вращения (hyperbolische Außenkerbe) 294
- Гармоническое уравнение *Лапласа* (Laplacische Potentialgleichung) 156
- Гибридный метод напряжений (Hybridspannungsmethode) 138
Гидростатическое напряженное состояние (hydrostatischer Spannungszustand) 27, 225
Гиперболический параболоид (гипар) (Hyperfläche) 161
Гиперкомплексные функции напряжений (hyperkomplexe Spannungsfunktionen) 121
Главные касательные напряжения (Hauptschubspannungen) 29
— направления для напряжений (Haupttrichtungen der Spannungen) 25
— — деформаций ($\sim \sim$ Verzerrungen) 41
— напряжения (Hauptspannungen) 25
— — нормальные (Hauptnormalspannungen) 25
— относительные деформации (Hauptdehnungen) 41
Градиент деформаций (Deformationsgradient) 35
— перемещений (Verschiebungsgradient)
- Граничная задача вторая (Zweites Randwertproblem) 66
— — первая (erstes \sim) 65
— — смешанная (третья) (gemischtes oder drittes \sim) 66
Граничные условия в комплексной форме (\sim in komplexer Form) 210
— — — напряжениях (Randbedingungen der Spannungen) 24
— — естественные (\sim natürliche) 92
- Депланация (Verwölbung) 153
Деформации (Verzerrungen) 32
— малые (\sim infinitesimale) 40
— физическое значение (\sim physikalische Deutung) 38
Деформированное состояние плоское (Verzerrungszustand ebener) 190

- Дилатация (Dilatation) 41
 Дислокация (Versetzungen) 49
 Дисторсия (Distorsion) 43
 Доказательство единственности *Кирхгофа* (Eindeutigkeitsbeweis von Kirchhoff) 75
- Единственность решения** (Eindeutigkeit der Lösungen) 74
- Задача Буссинеска** (Problem von Boussinesq) 274
 — *Дирихле* (Dirichletsches Problem) 160
 — *Каротерса* (Problem von Carothers) 235
 — *Кельвина* ($\sim \sim$ Kelvin) 269
 — *Кирша* ($\sim \sim$ Kirsch) 244
 — *Ламе* для полой сферы ($\sim \sim$ Lamé für die Hohlkugel) 284
 — *Леона* ($\sim \sim$ Leon) 287
 — *Мелана* ($\sim \sim$ Melan) 237
 — *Миндлина* ($\sim \sim$ Mindlin) 279
 — *Неймана* теории гармонических функций (Neumannsches Problem der Potentialtheorie) 156, 179
 — *Сен-Венана* (Problem von St. Venant) 142
 — *Фламана* ($\sim \sim$ Flamant) 231
 — *Черрути* ($\sim \sim$ Cerruti) 278
 Закон *Гука* (Hookesches Gesetz) 54
 — — обобщенный ($\sim \sim$ verallgemeinertes) 55
 — — для изотропного материала ($\sim \sim \sim$ für isotropes Material) 58
 — термодинамического равновесия *Гиббса* (Gleichgewichtssatz von Gibbs) 80
 — термоупругости (thermoelastisches Stoffgesetz) 63
 — физический (Stoffgesetz) 51
- Изгиб двухосный** (Biegung, zweiachsig) 151
 — заделанного на торце кольцевого сектора (\sim eingespannter Kreisringsektoren) 238
 — одноосный (\sim einachsig) 175
 — призматического стержня (\sim prismatischer Stabe) 142, 147
 — чистый (reine Biegung) 147
- — деформации ($\sim \sim$ Verformungen) 149,
 Изотермический процесс (isotherme Vorgang) 80
 Изотропный материал (isotropes Material) 58
 Интеграл *Чезаро* (Cesaro-Integral) 47
 Интегральные преобразования (Integraltransformationen) 121, 255
 — теоремы *Гаусса* и *Стокса* (Integral-sätze von Gauß und Stokes) 311
- Касательные напряжения** (Schubspannungen) 14, 16
 Квадратное поперечное сечение, кручение (Quadratquerschnitt bei Torsion) 166
 Клиновидная область, решение с помощью преобразования *Меллина* (keilförmiger Bereich, Lösung mit Mellin-Transformation) 265
 Кольцевой сектор (Kreisringsektor) 229, 238
 Комплексное перемещение (komplexe Verschiebung) 170, 206
 Комплексные переменные (komplexe Veränderliche) 120, 168
 — функции напряжений (\sim Spannungsfunktionen) 120
 — — общее представление ($\sim \sim$ allgemeine Struktur) 212
 Компоненты девиаторов напряжений (Deviatorkomponenten der Spannungen) 62
 — — деформаций ($\sim \sim$ Verzerrungen) 62
 Континуум *Коссера* (Cosserat-Kontinuum) 9, 22
 Конформное отображение (konforme Abbildung) 121, 174, 220
 — преобразование граничных условий (\sim Transformation der Randbedingung) 221
 — — формул *Колосова* ($\sim \sim \sim$ Kolossoffschen Formeln) 221
 Концентрация напряжений (Spannungskonzentration) 146, 283
 — на отверстии круговой формы в бесконечной пластине (\sim am kreisförmigen Loch in der unendlichen Scheibe) 240
 Координаты (Koordinaten) 304
 — криволинейные (\sim krummlinige) 71

- лагранжевы (\sim Lagrangesche) 34
- сферические (Kugelkoordinaten) 72
- сферондальные (эллипсоида вращения) (Sphäroidkoordinaten) 292
- цилиндрические (Zylinderkoordinaten) 71
- эйлеровы (Eulersche Koordinaten) 34
- эллипсоидальные (Ellipsoidkoordinaten) 295
- Косинус- или синус-преобразование Фурье (Fourier-Kosinus- bzw Sinus-Transformation) 123
- Коэффициент линейного температурного расширения (Wärmedehnzahl) 64
- Пуассона (Poissonsche Zahl) 61
- Круговое кольцо и толстостенная труба (Kreisring und dickwandiges Rohr) 227
- поперечное сечение, поперечный изгиб (Kreisquerschnitt bei Querkraftbiegung) 184
- Круговой стержень с продольной выточкой при кручении (Kreiswelle mit Längsnut bei Torsion) 173
- Крутящий момент (Torsionsmoment) 152, 157
- Кручение призматического стержня (Torsion prismatischer Stäbe) 142, 152
- — — поперечное сечение квадратное ($\sim \sim \sim$ Quadratquerschnitt) 166
- — — — круговое с продольной выточкой ($\sim \sim \sim$ Kreisquerschnitt mit Längsnut) 173
- — — — прямоугольное ($\sim \sim \sim$ Rechteckquerschnitt) 163
- — — — треугольное ($\sim \sim \sim$ Dreieckquerschnitt) 163, 172
- — — — эллиптическое ($\sim \sim \sim$ elliptischer Querschnitt) 160, 171
- — — приближенное решение для узкого прямоугольника ($\sim \sim \sim$ Näherung für schmalen Rechteckquerschnitt) 162
- Лагранжево описание (Lagrangesche Darstellung) 34
- Линейно-упругий закон (linear-elastisches Gesetz) 54
- Матрица жесткости (Steifigkeitsmatrix) 137
- — редуцированная (\sim reduzierte) 138
- компонент тензора второго ранга (Komponentenmatrix eines, Tensors 2. Stufe) 310
- Метод Бубнова (Bubnovsches Verfahren) 132, 135
- Бубнова — Галёркина (Bubnov — Galerkinsches \sim) 132
- Винера — Хонфа (Wiener — Hopf Technik) 127
- граничных интегральных уравнений — граничных элементов (Randintegralgleichungsverfahren oder Boundary Element Method) 141, 273
- Канторовича (Verfahren von Kantorovich) 131
- комплексных функций напряжений (Methode der komplexen Spannungsfunktionen) 119, 206
- конечных элементов ($\sim \sim$ finiten Elemente — MFE) 133
- — — как вариационный метод ($\sim \sim \sim \sim$ als Variationsmethode) 138
- обратный (inverse Methode) 118
- перемещенный (Verschiebungsmethode) 133
- полуобратный (semi-inverse Methode) 118
- Ритца (Ritzsches Verfahren) 129
- сил при формулировке метода конечных элементов (Kraft-oder Gleichgewichtsmethode der MFE) 140
- Трефтица (Verfahren von Trefftz) 132
- Модуль сдвига (Schubmodul) 61
- упругости (Elastizitätsmodul) 54
- Юнга (Young's modulus) 54
- Направляющие косинусы (Richtungskosinus) 19
- Напряженное состояние в точке (Spannungszustand in einem Punkt) 14
- — плоское (\sim ebener) 190
- — радиальное (\sim radialer oder strahlenförmiger) 232
- Напряжения (Spannungen) 12
- касательные (Schubspannungen) 14, 16
- моментные (Momentenspannungen) 22
- нормальные (Normalspannungen) 14
- октаэдрические касательные (Oktaeder-Schubspannungen) 31

- — нормальные (Oktaeder-Normalspannungen) 31
- — температурные (Wärmespannungen) 64
- Несовместность с... (Inkompatibilität von...) 47
- Нормальная производная (Normalenableitung) 156
- Обобщенные функции (распределения) (Distributionen) 266
- — и преобразование Фурье (verallgemeinerte Funktionen und Fourier-Transformation) 266
- Общие методы решения основных уравнений (allgemeine Lösungssätze für die Grundgleichungen) 102
- — решения *Бельтрами*, *Финци* и *Вебера* (Ansatz von Beltrami, Finzi und Weber) 116
- Объемные силы (Volumenkräfte) 12, 195
- Объемный модуль (Kompressionsmodul) 62
- Одномерные задачи (eindimensionale Probleme) 142
- Одноосное растяжение (einachsiger Zug) 146
- Осевое нагружение призматического стержня (Axialbelastung prismatischer Stäbe) 142, 145
- Осевой вектор (axialer Vektor) 44
- Осесимметрично нагруженное полупространство (Axialsymmetrisch belasteter Halbraum) 301
- Основные уравнения теории упругости (Grundgleichungen der Elastizitätstheorie) 65
- — — — — в напряжениях
- — — — — (~ ~ ~ in Spannungen) 70
- — — — — криволинейных координатах (~ ~ ~ krummlinigen Koordinaten) 71
- — — — — перемещениях
- — — — — (~ ~ ~ Verschiebungen) 66
- — — — — для плоской задачи
- — — — — (~ ~ ~ ebenen Elastizitätstheorie) 191
- — — — — в комплексной форме (~ ~ ~ ~ in komplexer Darstellung) 206
- Особенности (Singularitäten) 231
- Относительная деформация (Dehnung) 38
- Относительное изменение объема (Volumenänderung) 41
- Относительные деформации сдвига (Schubverformungen) 40
- Параметры состояния (Zustandgrößen) 77
- Перемещения (Verschiebungen) 32, 202
- — — — — определение по деформациям (~ Berechnung aus den Verzerrungen) 45
- Плоское деформированное состояние (ebener Verzerrungszustand) 190
- — — — — напряженное состояние (ebener Spannungszustand) 190
- Плотность дислокаций (Versetzungsdichte) 50
- Поворот системы координат (Drehung des Koordinatensystemes) 211, 218, 310
- Поле в окрестности трещины (Rißnahfeld) 264
- Полость в виде эллипсоида вращения в бесконечном теле (rotationsellipsoidischer Hohlraum im unendlichen Körper) 293
- Полость сферической формы в бесконечно протяженном теле (kugelförmiger Hohlraum im unendlichen Körper) 287
- Полуплоскость (Halbscheibe) 231
- — — — — нагруженная (~ belastete) 231, 234
- Полупространство (Halbraum) 274
- Поперечный изгиб (Querkraftbiegung) 174
- — — — — деформации (~ Verformung) 182
- — — — — поперечное сечение круговое (~ Kreisquerschnitt) 184
- — — — — прямоугольное (~ Rechteckquerschnitt) 186
- — — — — эллиптическое (~ Elliptischer Querschnitt) 186
- Постоянная кручения (Torsionsträgheitsmoment oder Drillwiderstand) 158
- Потенциал векторный (Vektorpotential) 103
- — — — — *Гиббса* (Gibbsches Potential) 81
- — — — — деформаций *Ламе* (Lamesches Dehnungspotential) 104
- — — — — комплексный при кручении (komplexes Potential bei Torsion) 170
- — — — — скалярный (Skalarpotential) 103
- — — — — упругий (elastisches Potential) 53
- Поток касательных напряжений (Schubfluß) 153
- — — — — сил (Krafftfluß) 200, 210
- Правило суммирования (Summationskonvention) 306
- Преобразование компонент вектора и тензора (Transformation von Vektor und Tensorkomponenten) 309

- *Лапласа* (Laplace-Transformation) 122
- *Лежандра* (Legendresche Transformation) 82, 94
- *Меллина* (Mellin-Transformation) 122, 265
- *Фурье* (Fourier-Transformation) 255
- — и обобщенные функции ($\sim \sim$ und verallgemeinerte Funktionen) 266
- — экспоненциальное (Fourier Exponential-Transformation) 122
- *Ханкеля* или *Бесселя* (Hankel- oder Bessel-Transformation) 122, 297
- Приближенные методы (Näherungsverfahren) 127
 - — аналитические (\sim analytische) 129
 - — дискретные (\sim diskrete) 128
- Принцип возможной дополнительной энергии (Prinzip vom stationären Wert der Ergänzungsenergie) 94
 - — работы (\sim der virtuellen Arbeit) 83
 - — возможных сил (\sim der virtuellen Kräfte) 83, 87
 - — перемещений ($\sim \sim \sim$ Verschiebungen) 83, 85
 - *Грина* — *Дирихле* (Green-Dirichlet-sches Prinzip) 92
 - *Кастильяно* (Castiglianosches Prinzip) 83
 - напряжений (Spannungsprinzip) 12
 - обобщенный (\sim Verallgemeinerte) 90
 - *Сен-Венана* (\sim von St. Venant) 119
 - — — значение ($\sim \sim \sim \sim$ Bedeutung) 88
 - стационарности потенциальной энергии (\sim vom stationären Wert der potentiellen Energie) 91
- Произведение векторное (vektorielles Produkt) 305
 - скалярное (skalares Produkt) 305
- Работа** возможная (Arbeit virtuelle) 83
 - — дополнительная (virtuelle Ergänzungsarbeit) 88
- Равновесие** моментов (Momenten-gleichgewicht) 20
 - сил (Kräftegleichgewicht) 20
- Радиус-вектор** (Ortsvektor) 304
- Разложение** в ряд *Фурье* (Fourier Reihenentwicklung) 165
 - *Кельвина* (Kelvinsche Zerlegung) 103
- Раскрытие** трещины (Rißöffnung) 264
- Распределенные** нагрузки на границе полуплоскости (verteilte Lasten am Rand der Halbscheibe) 258
- Расширенный** функционал *Рейсснера* (erweitertes Funktional von Reissner) 93
- Решение** *Буссинеска* (Lösungsansatz von Boussinesq) 114
 - *Ламе* (Lösung von Lamé) 227
 - *Папковича* и *Нейбера* (Lösungsansatz von Papkovich und Neuber) 111
 - *Терадзавы* (Lösung von Terazawa) 301
- Решения** Нейбера в координатах эллипсоида вращения (Lösungen von Neuber in Rotationsellipsoid Koordinaten) 291
 - с особенностями (\sim mit Singularitäten) 231
- Свертывание** тензора (Verjüngung oder Kontraktion) 307
- Свободная** энергия (freie Energie) 80
 - энтальпия (freie Enthalpie) 81
- Сжимаемость** (Kompressibilität) 63
- Символ** *Кронекера* (Kronecker-Symbol) 306
- Средоточенная** сила в бесконечно протяженном теле (Einzelkraft im unendlich ausgedehnten Körper) 269
 - — внутри бесконечной плоскости и в полуплоскости ($\sim \sim$ Innern der unendlichen Scheibe und der Halbscheibe) 236
 - — касательная к границе полупространства (\sim tangential in der Oberfläche des Halbraums) 278
 - — нормальная к границе полупространства (\sim Normal an der Oberfläche des Halbraums) 275
- Сплошная** среда (Kontinuum) 11
 - — движение (\sim Bewegungen des) 11, 33
- Существование** решения (Existenz der Lösungen) 74
- Тензор** вращения (Rotationstensor) 43

- — малого (Verdrehungstensor, infinitesimaler) 43
- деформаций (Verzerrungstensor) 42
- инварианты (\sim Invarianten) 41
- — *Лагранжа* (\sim Lagrangescher) 37
- — *Лагранжа — Грина* (\sim Largange-Greenscher) 37
- — характеристическое уравнение (\sim charakteristische Gleichung) 42
- — *Эйлера* (\sim Eulerscher) 36
- — *Эйлера—Альманси* (\sim Euler-Almansischer) 37
- изотропный (isotroper Tensor) 59
- *Кельвина — Сомильяны* (Kelvin-Somiglianascher Tensor) 273
- *Кронекера* (Kroneker-Tensor) 59
- *Леви-Чивиты* (псевдотензор) (Levi-Civita-Tensor, Alternator), 23, 308
- малых деформаций *Коши* (infinitesimaler Cauchyscher Verzerrungstensor) 40
- модулей упругости (Elastizitätstensor) 55
- напряжений (Spannungstensor) 14
- — инварианты (\sim Invarianten) 19
- — *Коши* (\sim Cauchyscher) 16
- — преобразование компонент (\sim Transformation der Komponenten) 18
- — собственные значения (\sim Eigenwerte) 25
- — характеристическое уравнение (\sim charakteristische Gleichung) 26
- перестановки (Permutationssymbol) 308
- упругих податливостей (Nachgiebigkeitstensor) 56
- шаровой (Kugeltensor) 62
- Тензорная форма записи (Indizeschreibweise) 10, 306
- функция *Грина* (Greensche Tensorfunktion) 272
- Тензоры в декартовых координатах (kartesisches Tensoren) 305
- Теорема *Бетти* (Satz von Betti) 99
- *Больцмана* (Boltzmannsches Axiom) 22
- *Гельмгольца* (Helmholtzscher Satz) 103
- *Клапейрона* (Satz von Clapeyron) 74
- *Максвелла* ($\sim \sim$ Maxwell) 100
- *Менабреа* ($\sim \sim$ Menabrea) 98
- *Энгессера* ($\sim \sim$ Engesser) 98
- Теоремы взаимности (Reziprozitätssätze) 98
- *Кастильяно* (Sätze von Castigliano) 96
- — частные формулировки ($\sim \sim \sim$ örtliche Formulierungen) 57
- Теория аналитических функций (Funktionentheorie) 119, 168
- трещин (Rißprobleme) 262
- Термодинамика (Thermodynamik) 77
- Термоупругость (Thermoelastizität) 63
- Трещина *Гриффитса*, напряжения и перемещения (Griffith-Riß, Spannungen und Verschiebungen am) 253
- Углы сдвига (Schiebungen) 40
- Удельная потенциальная энергия деформации (Verzerrungsenergie-dichte) 53, 82
- — — — — дополнительная (Verzerrungs-Ergänzungsenergie-dichte) 54, 82
- Удельная энергия изменения объема (Volumenänderungsenergie-dichte) 63
- — — — — формоизменения (Gestaltänderungs-energie-dichte) 63
- Упругие постоянные другие (Elastizitätskonstanten, alternative) 61
- — *Ламе* (Lamesche Elastizitätskonstanten) 59
- Упругое поведение материалов (elastisches Materialverhalten) 52
- Упругость по *Грину* (Green-Elastizität) 54, 78
- — *Коши* (Cauchy-Elastizität) 54
- Уравнение *Пуассона* (Poissonsche Gleichung) 158
- Уравнения *Бельтрами—Мичелла* (Beltrami—Michellsche Gleichungen) 70
- кинематические (kinematische Gleichungen) 46, 191
- *Ламе* (Lamesche Gleichungen) 67
- *Навье* (Naviersche Gleichungen) 66
- — для однородной задачи ($\sim \sim$ beim homogenen Problem) 69
- равновесия в комплексной форме (\sim in komplexer Form) 206
- — — — — напряжениях (Gleichgewichtsbedingungen der Spannungen) 19, 22
- Условия *Коши—Римана* (Cauchy-Riemannsches Gleichungen) 120, 169
- равновесия на границе (Gleichgewichtsbedingungen am Rand) 24

- совместности (Verträglichkeitsbedingungen) 46
- — число (\sim Anzahl) 50
- Формула Гурса** (Formel von Goursat) 120, 207
- **Клапейрона** (Clapeyronsche Formel) 56, 82
- трех функций **Нейбера** (Dreifunktionsansatz von Neuber) 112
- эллипса (Ellipsenformel) 249
- Формулы Бредта** (Bredtsche Formeln) 154
- **Колосова** (Kolossofsche Formeln) 120, 207
- — в полярных координатах ($\sim \sim$ für Polarkoordinaten) 212
- — преобразование при конформном отображении ($\sim \sim$ Transformation bei konformer Abbildung) 221
- **Коши** (Formel von Cauchy) 17, 22
- Фундаментальное уравнение термодинамики** (Fundamentalgleichung der Thermodynamik) 79
- Функции напряжений** (Spannungsfunktionen) 114
- — комплексные (\sim komplexe) 120, 206
- — **Максвелла** (Maxwellsche Spannungsfunktionen) 115
- — перемещений (Verschiebungsfunktionen) 102
- Функционал Хеллинджера—Рейсснера** (Hellinger-Reissnersches Funktional) 93
- Функция бигармоническая** (Bipotentialfunktion oder biharmonische Funktion) 69
- влияния (Einflussfunktion) 273
- гармоническая (потенциальная) (harmonische oder Potentialfunktion) 69
- деформации (Verwölbungsfunktion) 154
- изгиба (Biegefunktion) 178
- кручения **Прандтля** (Prandtlsche Torsionfunktion) 158
- — — связь с функцией депланации ($\sim \sim$ Zusammenhang mit Verwölbungsfunktion) 159
- — напряжений **Мореры** (Morerasche Spannungsfunktion) 116
- — при изгибе (Biegungs-Spannungsfunktion) 176
- — **Эри** (Airysche Spannungsfunktion) 115, 197
- — — в декартовых координатах ($\sim \sim$ in kartesischen Koordinaten) 197
- — — полярных координатах ($\sim \sim$ ebenen Polar-koordinaten) 201
- — — интегральное представление ($\sim \sim$ Integraldarstellung) 256
- — перемещений **Лява** (Lovesche Verschiebungsfunktion) 108
- Характеристическое уравнение тензора деформаций** (charakteristische Gleichung des Verzerrungstensors) 42
- — — напряжений ($\sim \sim \sim$ Spannungstensors) 26
- Центр изгиба** (Biegemittelpunkt) 179
- сдвига (Schubmittelpunkt) 179
- Численные методы** (numerische Verfahren) 127
- Эйлера** описание (Eulersche Darstellung) 34
- Энергетические принципы** в теории упругости (Energiesätze der Elastizitätstheorie) 77
- Энергия деформаций** (Verzerrungsenergie) 53, 82
- Энтропия** (Entropie) 79

Оглавление

От редактора перевода	5
Предисловие	7
0. Введение	8
1. Основы статики и кинематики	11
§ 1.1. Сплошная среда и движение сплошной среды	11
§ 1.2. Напряжения	12
1.2.1. Принцип напряжений	12
1.2.2. Тензор напряжений	14
1.2.2.1. Нормальные и касательные напряжения	14
1.2.2.2. Напряженное состояние в точке 1.2.2.3. Свойства тензора напряжений. 1.2.2.4. Преобразование компонент тензора напряжений.	
1.2.3. Уравнения равновесия в напряжениях	19
1.2.3.1. Равновесие сил и моментов для бесконечно малого элемента. 1.2.3.2. Другой вывод уравнений равновесия. 1.2.3.3. Условия равновесия на границе.	
1.2.4. Главные направления и главные напряжения	25
1.2.4.1. Главные нормальные напряжения. 1.2.4.2. Главные касательные напряжения. 1.2.4.3. Октаэдрические напряжения.	
§ 1.3. Перемещения и деформации	32
1.3.1. Движение сплошной среды	33
1.3.2. Лагранжево и эйлерово описания деформаций	34
1.3.3. Тензоры деформаций как мера деформаций	35
1.3.3.1. Тензоры деформаций Лагранжа и Эйлера.	
1.3.3.2. Физическое значение деформаций. 1.3.3.3. Малые деформации.	
1.3.4. Главные направления и главные относительные деформации	41
1.3.5. Бесконечно малое вращение	42
1.3.6. Определение перемещений по деформациям	45
1.3.6.1. Условия совместности. 1.3.6.2. Интеграл Чезаро.	
1.3.6.3. Число уравнений совместности.	
2. Связь между напряжениями и деформациями в теории упругости (физический закон)	51
§ 2.1. Общие сведения о физическом законе	51
§ 2.2. Упругое поведение материалов	52
2.2.1. Энергия деформации и упругий потенциал	53
§ 2.3. Линейно-упругий закон или закон Гука	54
2.3.1. Обобщенный закон Гука	55
2.3.2. Формула Клапейрона	56

2.3.3. Другой вывод обобщенного закона Гука из упругого потенциала	57
§ 2.4. Обобщенный закон Гука для изотропного материала	58
2.4.1. Связь с энергией деформаций	60
2.4.2. Использование других упругих постоянных	61
2.4.3. Компоненты девиаторов напряжений и деформаций	62
§ 2.5. Закон термоупругости для изотропного материала	63
3. Основные уравнения теории упругости	65
§ 3.1. Граничные задачи	65
§ 3.2. Уравнения Навье	66
§ 3.3. Уравнения Бельтрами — Мичелла	70
§ 3.4. Формулировка основных уравнений в криволинейных координатах	71
3.4.1. Цилиндрические координаты	71
3.4.2. Сферические координаты	73
§ 3.5. Существование и единственность решения граничной задачи теории упругости	74
3.5.1. Теорема Клапейрона	74
3.5.2. Доказательство единственности	75
4. Энергетические принципы в теории упругости	77
§ 4.1. Термодинамические соотношения	77
§ 4.2. Энергия деформации для линейно-упругого материала	82
§ 4.3. Принцип возможной работы	83
4.3.1. Возможные перемещения, возможная работа	83
4.3.2. Принцип возможных перемещений	85
4.3.3. Принцип возможных сил	87
4.3.4. Значение принципа возможной работы	88
§ 4.4. Следствия из принципа возможной работы	90
4.4.1. Принцип стационарности потенциальной энергии	91
4.4.2. Принцип стационарности дополнительной энергии	94
4.4.3. Теоремы Кастильяно, Энгессера и Менабреа	96
4.4.4. Теоремы взаимности	98
4.4.4.1. Теорема Бетти. 4.4.4.2. Теорема Максвелла.	
5. Общие методы решения основных уравнений теории упругости	102
§ 5.1. Функции перемещений	102
5.1.1. Скалярный и векторный потенциалы	103
5.1.2. Потенциал деформаций Ламе	104
5.1.3. Вектор Буссинеска	106
5.1.4. Частные случаи вектора Буссинеска, функции перемещений Лява	108
5.1.5. Решение Папковича и Нейбера	111
5.1.6. Осесимметричная задача, метод решения Буссинеска	114
§ 5.2. Функции напряжений	114
5.2.1. Функции напряжений Максвелла	115
5.2.2. Функции напряжений Мореры	116
5.2.3. Общие решения Бельтрами, Финци и Вебера	116
6. Обзор различных методов решения уравнений теории упругости	118
§ 6.1. Обратный и полуобратный методы	118
§ 6.2. Метод комплексных функций напряжений в плоской задаче теории упругости	119

§ 6.3. Решения с помощью интегральных преобразований	121
6.3.1. Общие сведения об интегральных преобразованиях	121
6.3.2. Применение к задачам теории упругости	127
§ 6.4. Приближенные и численные методы	127
6.4.1. Приближенные аналитические методы	129
6.4.1.1. Метод Ритца. 6.4.1.2. Развитие и видоизменение метода Ритца.	
6.4.2. Метод конечных элементов	133
6.4.2.1. Метод конечных элементов в форме метода перемещений. 6.4.2.2. Метод конечных элементов как вариационный метод.	
6.4.3. Метод граничных интегральных уравнений (метод граничных элементов)	141
7. Одномерные задачи: осевое нагружение, изгиб и кручение призматического стержня	142
§ 7.1. Задача Сен-Венана для однородного призматического тела (цилиндра)	142
§ 7.2. Осевое нагружение	145
§ 7.3. Чистый изгиб	147
7.3.1. Деформации при чистом изгибе	149
§ 7.4. Кручение призматического стержня	152
7.4.1. Основные положения	152
7.4.2. Некруговое поперечное сечение, функция депланации	154
7.4.3. Функция кручения Прандтля	158
7.4.4. Связь между функцией депланации и функцией кручения Прандтля	159
7.4.5. Примеры решения задачи кручения для поперечных сечений различной формы	160
7.4.5.1. Эллиптическое поперечное сечение. 7.4.5.2. Приближенное решение для узкого прямоугольника.	
7.4.5.3. Поперечное сечение в виде равностороннего треугольника. 7.4.5.4. Прямоугольное поперечное сечение.	
§ 7.5. Формулировка задачи кручения с помощью функций комплексной переменной	168
7.5.1. Комплексная переменная и аналитические функции	168
7.5.2. Основные уравнения кручения в комплексной форме	170
7.5.3. Примеры определения комплексного потенциала	171
§ 7.6. Поперечный изгиб	174
7.6.1. Общая постановка задачи изгиба и определение распределения касательных напряжений	174
7.6.2. Центр сдвига	179
7.6.3. Деформации при поперечном изгибе	182
7.6.4. Примеры	184
7.6.4.1. Круговое поперечное сечение. 7.6.4.2. Эллиптическое поперечное сечение. 7.6.4.3. Прямоугольное поперечное сечение.	
8. Плоская (двумерная) задача теории упругости	190
§ 8.1. Основные уравнения теории упругости для плоского деформированного состояния и плоского напряженного состояния	191
8.1.1. Плоское деформированное состояние	191
8.1.2. Плоское напряженное состояние	194
8.1.3. Основные уравнения для плоского деформированного состояния и плоского напряженного состояния в полярных координатах	195

§ 8.2. Функция напряжений Эри	197
8.2.1. Представление в декартовых координатах	197
8.2.2. Представление в полярных координатах	201
§ 8.3. Перемещения	202
8.3.1. Представление в декартовых координатах	203
8.3.2. Представление в полярных координатах	204
§ 8.4. Метод комплексных функций напряжений	206
8.4.1. Основные уравнения плоской задачи теории упругости в комплексной форме	206
8.4.1.1. Закон Гука и уравнения равновесия. 8.4.1.2. Формулы Колосова. 8.4.1.3. Граничные условия. 8.4.1.4. Поворот системы координат. 8.4.1.5. Преобразование к полярным координатам.	
8.4.2. Общее представление комплексных функций напряжений	212
8.4.2.1. Односвязная конечная область. 8.4.2.2. Многосвязная конечная область. 8.4.2.3. Бесконечная область.	
8.4.3. Изменение комплексных функций напряжений при преобразовании координат	218
8.4.4. Применение конформного отображения	220
8.4.4.1. Конформное отображение. 8.4.4.2. Преобразование формул Колосова и граничных условий при конформном отображении на единичный круг.	
§ 8.5. Примеры решений с помощью вещественных и комплексных функций напряжений	225
8.5.1. Элементарное напряженное состояние	225
8.5.2. Осесимметричное нагружение кругового кольца и толстостенной трубы (решение Ламе)	227
8.5.3. Решения с особенностями	231
8.5.3.1. Полуплоскость, нагруженная на границе (задача Фламана) и родственные решения. 8.5.3.2. Полуплоскость, нагруженная моментом на границе. 8.5.3.3. Сосредоточенная сила внутри бесконечной плоскости и в полуплоскости.	
8.5.4. Изгиб заданного на торце кольцевого сектора	238
8.5.5. Концентрация напряжений на отверстиях круговой формы в пластине, растягиваемой в одном направлении (задача Кирша)	240
8.5.6. Общее решение для бесконечной пластины с круговым отверстием с помощью конформного отображения	243
8.5.7. Бесконечная пластина с эллиптическим отверстием	246
8.5.7.1. Напряжения и перемещения для трещины Гриффитса	253
§ 8.6. Решения плоской задачи теории упругости с помощью интегральных преобразований	255
8.6.1. Формальное решение бигармонического уравнения	255
8.6.2. Распределенные нагрузки на границе полуплоскости	258
8.6.2.1. Равномерная нормальная нагрузка, приложенная на части границы полуплоскости. 8.6.2.2. Применение к теории трещин.	
8.6.3. Преобразование Меллина, применение для полярных координат	265
8.6.4. Преобразование Фурье и обобщенные функции	266
9. Пространственные задачи теории упругости	269
§ 9.1. Сосредоточенная сила в бесконечно протяженном теле (задача Кельвина)	269

9.1.1. Тензорная функция Грина	272
§ 9.2. Нормальная сосредоточенная сила на поверхности полупространства (задача Буссинеска)	274
§ 9.3. Касательная сосредоточенная сила на поверхности полупространства (задача Черрути)	278
§ 9.4. Сосредоточенная сила внутри полупространства (задача Миндлина)	279
§ 9.5. Пространственные задачи о концентрации напряжений	283
9.5.1. Задача Ламе для полый сферы	284
9.5.2. Полость сферической формы в бесконечно протяженном теле при одноосном растяжении (задача Леона)	287
9.5.3. Решения Нейбера в координатах эллипсоида вращения	291
9.5.4. Другие решения для полостей в виде эллипсоидов и соответствующих включений в бесконечном растягиваемом теле	295
§ 9.6. Решение осесимметричной задачи теории упругости с помощью интегральных преобразований	297
9.6.1. Общие сведения о преобразовании Ханкеля	297
9.6.2. Общие соотношения для осесимметричной задачи теории упругости	299
9.6.3. Решение Терадзавы для осесимметрично нагруженного полупространства	301
9.6.4. Другие решения с помощью преобразования Ханкеля	303
10. Приложение. Тензоры в декартовых координатах	304
§ 10.1. Координаты и векторы	304
§ 10.2. Тензорная форма записи координат, векторы и тензоры	306
§ 10.3. Тензор Леви-Чивиты или символ перестановки	308
§ 10.4. Производные и векторные дифференциальные операции	308
§ 10.5. Преобразование компонент вектора и тензора при повороте системы координат	309
§ 10.6. Производные от тензора. Интегральные теоремы Гаусса и Стокса	311
11. Литература	314
§ 11.1. Основные учебники и справочники по теории упругости (А), а также труды прикладного и математического характера (В)	314
§ 11.2. Оригинальные работы (в порядке, в котором они встречаются в тексте)	317
Комментарии редактора перевода	322
Именной указатель	329
Предметный указатель	332

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Учебное издание

Ханс Георг Хан

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Основы линейной теории и ее применения

Заведующий редакцией доктор физ.-мат. наук профессор Б. В. Шабат

Зам. зав. редакцией А. С. Попов
Ст. научн. редактор П. Я. Корсоюцкая
Мл. научн. редактор Р. И. Пяткина
Художник М. Н. Кузьмина
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Л. В. Козлова
Корректор Т. М. Подгорная

ИБ № 6595

Сдано в набор 24.08.87. Подписано к печати 12.04.88. Формат 60×90^{1/16}. Бумага кн.-журн. сыкт. Печать высокая. Гарнитура литературная. Объем 10,75 бум. л. Усл. печ. л. 21,50. Усл. кр.-отт. 21,50. Уч. изд. л. 19,81. Изд. № 1/5698. Тираж 5900 экз. Зак. № 1080. Цена 2 р. 30 к.

Издательство «МИР» 129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2

Отпечатано с набора Ленинградской типографии № 2 головного предприятия ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29 в Ленинградской типографии № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 191126, Ленинград, Социалистическая ул., 14.