

Vorlesungen über Maschinenelemente

von

Dipl.-Ing. M. ten Bosch

Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich

Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage

Mit 860 Textabbildungen



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.

ISBN 978-3-642-98178-4 ISBN 978-3-642-98989-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-98989-6

Copyright 1940 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1940

Vorwort zur zweiten Auflage.

Obschon der Begriff „Maschinenelemente“ durch Konstruktionsteile, die in gleicher oder ähnlicher Form bei einer Reihe von Maschinen vorkommen, nicht genau umschrieben ist, macht die Abgrenzung des Lehrgebietes im allgemeinen keine Schwierigkeiten. Es ist nach oben begrenzt durch die Maschinengetriebe und durch die vielen Zweige des Maschinen- und Apparatenbaues. Auch die zweifellos gleich wichtigen Elemente der Feinmechanik müssen getrennt behandelt werden¹.

Das so umgrenzte Gebiet ist aber immer noch sehr umfangreich und umfaßt Probleme, die durch ihre Vielseitigkeit überraschen. Man muß sich daran gewöhnen, unter „Maschinenelemente“ nicht etwas einfaches, elementares oder leicht verständliches zu verstehen. Schrauben, Wellen, Lager, Drahtseile, Kupplungen, Schweißverbindungen, Zahnräder usw. sind Bauteile, die der Berechnung oft schwer zugänglich sind.

Die elementare Festigkeitslehre (die als bekannt vorausgesetzt wird) befaßt sich nur mit der Berechnung von prismatischen Stäben in großer Entfernung von den Kraftangriffstellen. Sie muß bei den oft verwickelten Formen der Maschinenteile bei jeder Querschnittsänderung und in der Nähe des Kraftangriffes (der Befestigung) versagen, also gerade dort wo erfahrungsgemäß die Brüche meistens auftreten. Bei der Berechnung der Maschinenteile treten vielfach Probleme auf, die weit außerhalb der Kenntnisse liegen, die im dritten Studiensemester der Technischen Hochschulen vorausgesetzt werden dürfen. Die Hertz'schen Gleichungen z. B. bilden die Grundlagen für die Berechnung der Wälzlager und der Zahnräder; bei Schrumpfverbindungen liegen die Beanspruchungen im plastischen Gebiet; bei Zahnrädern bilden die Geräusche (als Folge der auftretenden Schwingungen) besondere Schwierigkeiten. Bei Schweißverbindungen spielen die Wärmespannungen eine ausschlaggebende Rolle. Die Konstruktion eines guten Abschlußventiles setzt Kenntnisse der Potentialströmung voraus, die Berechnung der Lagererwärmung Kenntnisse der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges usw.

Selbstverständlich kann man diese Vielheit der Probleme in der für den Unterricht der Maschinenelemente üblichen Zeit niemals vollständig behandeln. Die Probleme müssen deshalb weitgehend vereinfacht werden. Daß diese Vereinfachung bisher viel zu weit getrieben wurde, hat man im letzten Jahrzehnt bei der Lösung neuer Aufgaben (z. B. des Leichtbaues) deutlich erfahren; die bisher gebräuchlichen Berechnungsmethoden haben vollständig versagt. Das war vorauszusehen. Im Vorwort der ersten Auflage schrieb ich deshalb:

Bei der raschen Entwicklung des Maschinenbaues und infolge der zunehmenden Spezialisierung werden die Technischen Hochschulen den Unterricht in mancher Beziehung anders gestalten und namentlich den „Elementen“ mehr Aufmerksamkeit schenken müssen.

Diesen Gedanken muß ich auch jetzt wieder unterstreichen. In Deutschland hat sich seither ein Fachausschuß für Maschinenelemente beim Verein Deutscher Ingenieure gebildet, in welchem (neben Professoren) namhafte Vertreter der Industrie mitwirken. Dieser Ausschuß hat von Oktober 1933 bis August 1934 einige „Arbeitsblätter“ als neue Grundlage für die Berechnung der Maschinenteile herausgegeben, das weitere Erscheinen aber (nach der Maschinenelementen-Tagung in Aachen, 1935) wieder eingestellt, weil es sich herausgestellt hat, daß die eigentlichen Grundlagen zur Zeit noch keineswegs geklärt sind. Gewiß ein besonders für die Wissenschaft aber auch für die Praxis recht betrübliches Ergebnis.

Nach dieser Feststellung mag es gewagt erscheinen heute ein Lehrbuch herauszugeben, das sich fast ausschließlich mit den Grundlagen für die Berechnung der Maschinenteile befaßt. Andererseits ist eine kritische Auseinandersetzung mit den grundlegenden Problemen für den technischen Nachwuchs erst recht notwendig.

¹ Richter und Voss: Elemente der Feinmechanik, 2. Aufl. Berlin: VDI-Verlag 1938.

„Vorlesungen“ machen keinen Anspruch auf Vollständigkeit; sie beschränken sich auf das grundsätzlich Wichtige und richten sich nach der vorhandenen Zeit. Das ist zu bedenken, wenn dieses oder jenes vermißt oder zu kurz behandelt wird. Ein Schrifttum-Verzeichnis bei jedem Abschnitt, das besonders die Veröffentlichungen der letzten 10 Jahre berücksichtigt, muß über solche und andere Lücken hinweghelfen. Es macht das Buch auch als Nachschlagewerk für den praktisch tätigen Ingenieur geeignet und ermöglicht eine Vertiefung in die einzelnen Teilaufgaben. Fertige Rezepte und Faustformeln, die sowohl bei den Studenten als auch in der Praxis gleich beliebt sind, wird man in diesem Buch nicht finden. Ich war vielmehr bestrebt die neuesten Forschungen zu berücksichtigen und zu selbständigem Denken anzuregen. Der stark belastete Student findet allerdings nur selten die erforderliche Zeit zur selbständigen Verarbeitung des Stoffes. Ich hoffe deshalb, daß er auch in der Praxis aus diesen „Vorlesungen“ noch Nutzen ziehen wird.

Bei aller Wertschätzung der Berechnung darf nie vergessen werden, daß diese nur ein notwendiges (oft recht einseitiges) Hilfsmittel ist, während das Endziel in der Formgebung und Herstellung liegt, also ein konstruktives und werkstattechnisches Problem ist. Die konstruktive Aufgabe besteht darin, für gegebene Verhältnisse die einfachste und in jeder Beziehung beste Lösung zu finden. Das Abwägen der Vor- und Nachteile der verschiedenen Lösungsmöglichkeiten ist eine vielseitige und verantwortungsvolle Aufgabe, die hohe Anforderungen an den Konstrukteur stellt.

Ich danke meinen Assistenten für das Zeichnen der Abbildungen und für das Lesen der Korrekturen. Besonderen Dank schulde ich allen Firmen, die mich durch Überlassung von Druckstöcken in so freundlicher Weise unterstützt haben.

Zürich, Ende März 1940.

ten Bosch.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.		Seite
Formulierung der konstruktiven Aufgabe		1
Betriebsicherheit		1
Werkstattgerechte Formgebung		2
Wirtschaftlichkeit		6
Anwendungsbeispiel S. 7.		
Die Grundnormen		9
Normzahlen		10
Passungen		11
Sitze S. 11. — Toleranzen S. 12. — Einheitliche Bezugstemperatur S. 13. — Das ISA-Toleranzsystem S. 14. — Gebräuchliche Sitze S. 15.		
 1. Angewandte Festigkeitslehre. 		
11. Die Voraussetzungen der Festigkeitslehre und ihre praktische Bedeutung.		17
Kräfte von Null bis P allmählich steigend S. 17. — Normal- und Schubspannungen (Spannungslinien) S. 17. — Prinzip von de St. Venant S. 18. — Homogene und isotrope Körper S. 18. — Werkstoff besteht aus einzelnen Fasern S. 18. — Ursprünglich spannungsfreier Zustand S. 18. — Längs- und Querdehnung S. 19. — Das Hookesche Gesetz S. 19. — Zusammenhang der Stoffwerte E , G und m S. 19. — Proportionalitäts-, Elastizitäts- und Streckgrenze S. 20. — Zahlentafeln: 11.1 E -Werte S. 21. — 11.2 E -Werte für Stahl bei verschiedenen Temperaturen S. 21. — Bruchdehnung (Einfluß der Stablänge) S. 21. — Kleine Formänderungen S. 22. — Querschnittsform und Größe unverändert S. 22.		
Die Formänderungsarbeit		22
Der Satz von Castigliano S. 22. — Prinzip der virtuellen Arbeit S. 23. — Prinzip des kleinsten Zwanges S. 23. — Die Querschnitte bleiben eben S. 23.		
Das Superpositionsgesetz		24
12. Spannungen und Formänderungen in prismatischen Stäben		24
12.1. Einzelkraft wirkt genau in der Richtung der geraden Stabachse (Zug- resp. Druckbeanspruchung, Spannung S. 24. — Längenänderung S. 24. — Formänderungsarbeit S. 24. — Plötzliche Belastung S. 25. — Einfluß des Eigengewichtes S. 25. — Wirkung der Fliehkräfte S. 25.		24
12.2. Kräfte wirken in einer Ebene, die durch die Stabachse geht (Biegung)		26
12.21. Biegung gerader Stäbe		26
Definition der Querkraft und des Biegemomentes S. 26. — Vernachlässigung der Querkraft S. 26. — Beschränkung auf Querschnitte, symmetrisch zur Kraftebene S. 26. — Biegegleichung S. 27. — Trägheitsmoment S. 27. — Widerstandsmoment S. 27. — Querschnitte, nicht symmetrisch zur Stabachse S. 28. — Anwendung auf Gußeisen S. 28. — Zweckmäßige Querschnittsformen (Leichtbau) S. 28. — Gleichung der elastischen Linie S. 29. — Zahlenbeispiel: 12.1. Berechnung der größten Durchbiegung S. 30. — Formänderungsarbeit S. 30. — Zahlentafel 12.1. Einige Belastungsfälle S. 33. — Rollendes Lastenpaar S. 35.		
12.22. Biegung stark gekrümmter Stäbe		35
Berechnung der Spannung S. 35. — Zahlentafeln: 12.2. λ -Werte für Rechteck S. 36. — 12.3. λ -Werte für Kreis S. 37. — 12.4. Z -Werte für Rechteck und Kreis S. 37. — Berechnung der Formänderung S. 38. — Formänderungsarbeit S. 38. — Formänderung dünnwandiger Rohre S. 39. — Zahlentafeln: 12.5. k -Werte zur Berechnung der Formänderung dünnwandiger Rohre S. 39. — 12.6. β -Werte zur Berechnung der Beanspruchung von dünnwandigen Rohren S. 39. — 12.7. Formänderungen eines kreisförmigen Trägers für verschiedene Belastungen S. 40. — Zahlenbeispiel 12.2 (Berechnung eines Kolbenringes) S. 41.		
12.23. Einfluß der Querkraft		43
Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen S. 43. — Schubspannungen sind am Querschnittsumfang tangential gerichtet S. 43. — Verteilung der Schubspannungen in rechteckigen, kreisförmigen und T -Querschnitten S. 44. — Zusätzliche Formänderung S. 45. — Zahlenbeispiel 12.3. Formänderung eines kurzen Zapfen S. 46.		
12.24. Träger mit veränderlichem Querschnitt		47
Träger gleicher Biegespannung S. 47.		

	Seite
12.3. Kräftepaar wirkt in einer Ebene senkrecht zur Stabachse	47
Der Kreisquerschnitt	47
Andere Querschnittsformen	49
Zahlentafel 12.8	50
Formänderungsarbeit	51
12.4. Zusammengesetzte Beanspruchungen	51
Allgemeine Kraftwirkung	51
Anwendungsbeispiel 12.4: Drehkranfunda- ment.	52
Der allgemeine Spannungszustand	53
Ebener Spannungszustand	53
Spannungskreis für verschiedene Beanspruchungen S. 54. — Isoklinen S. 55. Ebene Formänderungen	55
12.5. Statisch unbestimmte Konstruktionen	55
12.51. Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit	55
Anwendungsbeispiel 12.5 S. 56. — Zahlentafel 12.9. — Verschiedene Belastungsfälle S. 56. 12.52. Satz von Maxwell über die Gegenseitigkeit der Verschiebungen	57
Einflußlinie S. 58. 12.53. Die Clapeyronsche Momentengleichung	58
12.54. Anwendungsbeispiele	59
Günstigste Stützweite S. 60. — Anwendungsbeispiele: 12.6. Fahrbares Krangerüst S. 60. — 12.7. Reibradgetriebe von Krupp S. 61. — 12.8. Kettenglied, Schlingkette S. 62. — 12.9. Kettens- glied beliebig gekrümmt S. 62. — 12.10. Schiffskette mit Steg S. 63. — Stangenköpfe S. 63.	
12.6. Wärmespannungen	64
Gerade Stäbe	64
Zahlentafel 12.10. Längenänderung von Rohrbauwerkstoffen S. 64. — Zahlenbeispiel 12.11. Schrumpfband S. 64. Ebene Wand	64
Rohrleitungen	65
Anwendungsbeispiel 12.12. Expansionsbogen S. 65.	
3. Zulässige Spannungen	67
13.1. Bruchhypothesen	68
Maximale Hauptspannung S. 68. — Maximale Schubspannung S. 68. — Maximale Dehnung S. 69. — Hypothese von Mohr S. 69. — Maximale Gestaltsänderungsenergie S. 72. — Hüllkurve der Mohrschen Hypothese S. 72. — Vergleich der Bruchhypothesen S. 72. — Wahl der zur Zeit geeignetsten Hypothese S. 73. Schrifttum	74
13.2. Lage der Grenzkurve	74
Wiederholte Belastung S. 74. — Dauerstandfestigkeit S. 75. — Ursprungsfestigkeit S. 75. — Wechselspannung S. 75. — Wöhlerlinie S. 76. Abhängigkeit der Dauerfestigkeit: von der Temperatur S. 77. — von der thermischen Behand- lung S. 77. — vom Spannungszustand S. 78. — von der Oberflächenbeschaffenheit (Korrosion) S. 78. — von der Größe des Versuchskörpers S. 80. — von der Form des Stabes S. 81. — Zu- lässige Spannungen S. 81. — Einfluß der Zeit (Kriechgrenze) S. 82. — Kerbzähigkeit S. 82. Schrifttum	83
13.3. Genormte Werkstoffe	83
Auswahl des Werkstoffes S. 83. — Bezeichnung S. 84. — Zahlentafeln: 13.1. Festigkeitswerte von Stahl S. 85. — 13.2. Nickel- und Chromnickelstahl S. 86. — 13.3. Warmstreckgrenze von Stahl S. 86. — 13.4. Dauerstandfestigkeit legierter Stähle S. 87. — 13.5. Gußeisen und Stahl- guß S. 87. — 13.6. Nichteisen-Metalle, gewalzt S. 87. — 13.7. Aluminium-Knetlegierungen S. 88. — 13.8. Rotguß und Messingguß S. 88. — 13.9. Aluminium-Sandguß-Legierungen S. 88.	
14. Der Umdrehungskörper	88
14.1. Dünnwandige Hohlzylinder	88
Unter Innendruck S. 88. — Berechnung dünner Schalen. Differentialgleichung der Seifenhaut S. 89. — Einwirkung der Fliehkraft S. 90.	
14.2. Der ringsum symmetrisch belastete Körper	90
14.3. Dickwandige Hohlzylinder unter Druck	91
Ableitung der allgemeinen Gleichung S. 91. — Spezialfall 1. Nur Innendruck S. 91. — Vergleich der verschiedenen Bruchhypothesen S. 92. — Zahlenbeispiel 14.1. Berechnung eines Guß- zylinders S. 93. — Spezialfall 2. Nur Außendruck S. 94. — Zylinder für sehr hohe Drücke S. 95. — Wärmespannungen S. 95.	
14.4. Dickwandige Zylinder unter Wirkung der Fliehkraft	95
Schmale Scheibe (voll und durchlocht) S. 95. — Breiter Zylinder S. 97. — Scheibe mit ver- änderlicher Breite S. 97. — Scheibe gleicher Festigkeit S. 98. Schrifttum	98
14.5. Die ringsum belastete Kreisplatte	98
Gleichung der Meridiankurve der Mittelfläche S. 99. — Fall 1: Volle Platte, gleichmäßig belastet, frei aufliegend S. 100. — Fall 2: Volle Platte, gleichmäßig belastet, eingespannt S. 100. — Fall 3: Volle Platte, konzentrierte Ringlast, frei aufliegend S. 100. — Fall 4: Volle Platte, kon-	

zentrierte Ringlast, eingespannt S. 102. — Fall 5 bis 9: Gelochte Platte, Ringlast S. 102. — Fall 10 bis 18: Gelochte Platte, gleichmäßig belastet S. 104. — Anwendungsbeispiele: 14.2. Flansche S. 106. — 14.3. Kolben S. 107. — 14.4. Ventilder Feder S. 108.	109
Schrifttum	109
15. Ebene Probleme	109
15.1. Die Airysche Spannungsfunktion	110
Spannungsgleichungen in rechtwinkligen Koordinaten S. 110. — Spannungsgleichungen in Polarkoordinaten S. 110.	
15.2. Symmetrische Beanspruchungen	111
Volle Zylinderscheibe S. 111. — Reine Biegung eines kreisförmigen Stabes S. 111. — Vergleich mit der elementaren Theorie S. 112. — Belastung durch Einzelkraft S. 112. — Zahlentafel 15.1 S. 113. — Zur Berechnung keilförmiger Träger, belastet durch Einzelkraft S. 113. — Zahlentafel 15.2. Zur Berechnung keilförmiger Träger, belastet durch ein Biegemoment S. 114.	
15.3. Nicht-symmetrische Beanspruchungen	115
Allgemeine Lösung S. 115. — Biegung eines kreisförmigen Stabes durch Einzelkräfte S. 115. — Durchlochter Stab S. 115.	
Schrifttum	116
15.4. Die allgemeine Differentialgleichung der elastischen Fläche	116
Zahlentafeln: 15.3 Elliptische Platten S. 118. — 15.4 Rechteckige Platten S. 118. — Wärmespannungen S. 117.	
16. Formgebungselemente	119
Formziffer S. 119. — Erhöhung der statischen Festigkeit S. 119. — Verminderung der Wechsel- festigkeit S. 119.	
16.1. Allgemeine Erläuterungen über das Spannungsfeld	120
Zug, Biegung, Verdrehung S. 120. — Kerbwirkungszahl S. 122. — Empfindlichkeitsziffer S. 122.	
16.2. Ebene und räumliche Kerbe	122
16.3. Stabecke	122
Schrifttum	124
17. Das Torsionsproblem	124
Analogie von L. Prandtl S. 125.	
18. Stabilitätsprobleme	125
18.1. Gerade Stäbe	125
Eulersche Gleichung S. 127. — Gleichung von Tetmayer S. 127. — Das ω -Verfahren S. 127.	
18.2. Dünnwandige Rohre	128
Axiale Kräfte S. 128. — Außendruck S. 128.	
18.3. Biegebeanspruchungen	129
18.4. Gewölbte Böden	130
19. Plastische Verformungen	131
2. Verbindungen.	
21. Vernietungen	133
21.1. Berechnung	133
Abscheren des Nietschaftes S. 134. — Einfluß der Reibung S. 134. — Zahlenbeispiel 21.1. Bolzen- verbindung S. 136. — Lochleibungsdruck S. 136. — Berechnung des Bleches S. 136. — An- ordnung mehrerer Nieten S. 137. — Kleinste Nietteilung S. 138. — Zahlenbeispiel 21.2. Stoß eines Flacheisens S. 138.	
21.2. Feste Vernietungen (Eisenkonstruktionen)	139
Allgemeine Regeln S. 139. — Zahlenbeispiel 21.3. Verbindung eines U-Eisens S. 139. — Ver- bindung überträgt Biegemoment S. 140. — Zahlenbeispiel 21.4. Stehblechstoß S. 140. — Gurt- winkelvernietung eines Vollwandträgers S. 141. — Knickgefahr S. 142. — Fachwerkträger S. 142. — Zahlenbeispiel 21.5. Berechnung der Durchbiegung S. 144. — Leichtmetall-Vernietung S. 145.	
Schrifttum	145
21.3. Feste und dichte Vernietung (Dampfkessel)	146
Zahlentafel 21.1 S. 146.	
22. Keilverbindungen	146
23. Schrauben	149
23.1. Gewinde	149
23.2. Schraubensorten	151
23.3. Schraubensicherungen	153
23.4. Berechnung	155
Vorspannkraft S. 155. — Betriebskräfte S. 158. — Stoßweise Beanspruchung S. 160. — Zu- lässige Schraubenbelastungen S. 161.	
Schrifttum	162
24. Schrumpferverbindungen	162
25. Schweißverbindungen	167
Schrifttum	169
26. Elastische Verbindungen (Federn)	169
26.1. Zug- resp. Druckfedern	170

	Seite
26.2. Biegefedern	170
Blattfedern S. 170. — Zahlenbeispiel 27.1. Tragfeder eines Eisenbahnwagens S. 172. — Gewundene Biegefedern (Spiralfedern) S. 173. — Tellerfedern S. 173.	
26.3. Verdrehungsfedern	173
26.4. Parallel- und Hintereinanderschaltung von Federn	175
Schrifttum	175
3. Wellen.	
31. Gerade Wellen	177
31.1. Festigkeit glatter Wellen	177
31.2. Abgesetzte Wellen	178
Formziffer für Biegebeanspruchung S. 179. — Formziffer für Verdrehbeanspruchung S. 180.	
31.3. Einfluß der befestigten Teile	181
Anwendungsbeispiel 31.1. Eisenbahnradachse S. 181.	
31.4. Keilwellen	183
31.5. Formänderung der Welle	184
Anwendungsbeispiel 31.2. Konstruktion der elastischen Linie ohne und mit Berücksichtigung der Versteigung (Zahlentafeln 31.2, 31.3) S. 185. — Mehrfach gelagerte Wellen S. 187. — Anwendungsbeispiel 31.3 (Zahlentafel 31.4 und 5) S. 189. — Zulässige Formänderungen (Zahlentafel 31.5) S. 189.	
31.6. Lagerentfernung für Transmissionswellen	190
Schrifttum	190
32. Kupplungen	191
32.1. Feste Kupplungen	191
Scheibekupplung S. 191. — Schalenkupplung S. 192. — Hülsenkupplung S. 192.	
32.2. Nachgiebige Kupplungen	192
Ausdehnungs-, elastische und Kreuzgelenk-Kupplung S. 193.	
32.3. Ausrückbare Kupplungen	193
Klauenkupplung S. 193. — Hildebrandtsche Zahnkupplung S. 194.	
NB.: Für Reibkupplungen s. Abschnitt 64.	
33. Kurbelwellen	194
33.1. Festigkeitsrechnung	194
33.2. Formänderung	196
Kräfte wirken in der Kröpfungsebene S. 196. — Kräfte wirken senkrecht zur Kröpfungsebene S. 197.	
33.3. Mehrfach gelagerte und mehrfach gekröpfte Wellen	198
Kräfte in der Kröpfungsebene S. 198. — Kräfte senkrecht zur Kröpfungsebene S. 201.	
34. Kritische Drehzahlen	204
34.1. Kritische Drehzahl für Biegeschwingungen	205
Einzellast S. 205. — Eigenschwingungszahl S. 208. — Beliebige Belastung S. 210. — Höhere kritische Drehzahlen S. 211.	
34.2. Theorie der Auswuchtmaschine (Schwingungsdämpfung)	211
34.3. Kritische Drehzahl für Verdreh-schwingungen	213
Einzelmasse S. 213. — Reduzierte Masse S. 213. — Massenpaar S. 215. — Anwendungen S. 215.	
Schrifttum	217
4. Gleitlager.	
41. Grundlagen für die Berechnung	218
Erwärmung S. 218. — Formänderung S. 218. — Einlaufen S. 219. — Das Newtonsche Abkühlungsgesetz S. 219. — Lagertemperatur im Beharrungszustand S. 220. — Bisherige Berechnungsverfahren S. 220. — Erfahrungswerte für w und $p \cdot v$ (Zahlentafel 41.1) S. 220. — Die Wärmeabgabe des Lagers S. 221. — Das Fouriersche Grundgesetz der Wärmeleitung S. 221. — Künstliche Kühlung S. 223.	
42. Reibung und Schmierung	223
Schrifttum	223
42.1. Übersicht	223
Trockene Reibung S. 223. — Schmiermittel S. 224.	
42.2. Tragfähige Ölschicht bei gradlinig bewegten Gleitflächen	225
Die Newtonsche Hypothese für strömende Flüssigkeiten S. 226. — Zähigkeitszahlen verschiedener Ölsorten S. 227. — Grundgleichungen der flüssigen Reibung S. 227. — Öl wird unter Druck zugeführt S. 230. — Zahlenbeispiel 42.1 S. 231. — Verschiedene Spaltformen zur Erzeugung des Druckes S. 232. — Teilweise Absperrung (Zahlentafel 42.2) S. 232. — Geneigte Platte (Zahlentafel 42.3) S. 234. — Parabolische Gleitfläche (Zahlentafel 42.4 und 5) S. 236. — Gut abgerundete Kanten (Zahlentafel 42.6) S. 238.	
42.3. Tragfähige Ölschicht bei stark gekrümmten Gleitflächen	240
Lager mit Lagerspiel (Zahlentafel 42.8) S. 242.	
42.4. Berücksichtigung der veränderlichen Öltemperatur	247
Zahlentafel 42.9 S. 248.	

Inhaltsverzeichnis.

IX

	Seite
42.5. Endliche Lagerbreite	248
Zahlentafel 42.10 und 11 S. 249.	
42.6. Ein- und Austrittsstelle des Öles	250
43. Vergleich der Theorie mit der Erfahrung	251
Versuche von Striebeck S. 251. — Zahlenbeispiele: 43.1 S. 253. — 43.2 S. 254. — 43.3 S. 255.	
— Versuche von E. Schneider S. 255. — Eintuschierte Lagerschalen S. 256.	
44. Gleitlagerkonstruktionen	256
Schrifttum	256
44.1. Die Schmiermethoden	256
Fettschmierung S. 256. — Ölschmierung S. 258. — Schmiernuten S. 260.	
44.2. Formgebung der Lager	260
45. Berechnung der Gleitlager	265
46. Weitere Reibungs- und Schmierungsprobleme	269
Schrifttum	269
46.1. Teilschmierung	269
46.2. Förderung des Öles durch Nuten	270
46.3. Saugende Wirkung rasch rotierender Scheiben	271
46.4. Schwingende Zapfen	272
5. Wälzlager.	
51. Einbauvorschriften	274
51.1. Lagerarten und deren Eigenschaften	274
51.2. Passungen	276
51.3. Einbauregeln	277
52. Beanspruchung und Formänderung	279
Schrifttum	279
52.1. Die allgemeinen Gleichungen von H. Hertz	279
52.2. Anwendung auf Kugeln	281
52.3. Der unendlich große Umdrehungskörper mit Einzelkraft P in O	283
52.4. Anwendung auf Kugellager	285
Zahlenbeispiel 52.1 S. 285.	
52.5. Längskräfte bei einem Ringlager	287
52.6. Anwendung auf Zylinder	287
52.7. Tragfähigkeit und Lebensdauer	288
Zahlentafeln: 52.1 und 2. Querlager S. 290. — 52.3. Längslager S. 291. — 52.4 und 5. Y -Werte S. 291.	
53. Reibungsverhältnisse	292
6. Reibgetriebe zur Übertragung der Drehbewegung.	
61. Reibräder	295
62. Riementrieb	297
62.1. Anordnung	297
Hauptbedingung für den richtigen Lauf S. 297. — Ausrückbare Riementriebe S. 298. — Wendegetriebe S. 299. — Stufenscheiden S. 300. — Riemenwerkstoffe S. 300.	
62.2. Grenzbedingung für die Verhütung des Gleitens	301
Einfluß der Fliehkräfte S. 304.	
62.3. Berechnung	304
Lebensdauer S. 305. — Günstigste Riemen geschwindigkeit S. 305. — Erfahrungswerte von Gehrckens S. 305. — Reibzahlen S. 306.	
62.4. Erzeugung der Riemen spannung	308
Dehnungsspannung S. 308. — Belastungsspannung (Spannrollen) S. 309. — Zahlenbeispiel 62.1 S. 311.	
62.5. Die Scheiben	311
Normung S. 313. — Festigkeitsrechnung S. 313.	
63. Seiltrieb	314
63.1. Drahtseile	314
Normung S. 314. — Betriebsbeanspruchung S. 315. — Konstruktionsregeln S. 320. — Biege widerstand S. 321.	
63.2. Rollenzüge	322
Feste Rolle S. 322. — Lose Lastrolle S. 322. — Lose Treibrolle S. 322. — Zusammengesetzte Rollenzüge S. 322. — Aufhängung der Last bei Trommelwinden S. 323.	
63.3. Berechnung der Drahtseile	324
63.4. Die Treibscheibe	325
64. Reibkupplungen	326
65. Mechanische Bremsen	328
65.1. Sperrwerke	328
65.2. Handbremsen	329
Backenbremse S. 329. — Bandbremse S. 330.	

	Seite
65.3. Selbsttätige Bremsen	332
Lastdruckbremse S. 332. — Fliehkraftbremse. S. 333.	
66. Die Verhältnisse beim An- und Auslauf von Maschinen	334
Maschinen-Charakteristik S. 334. — Bewegungsgleichungen S. 334. — Reduzierte Masse eines Triebwerkes S. 335. — Der Asynchron-Drehstrommotor S. 336. — Zahlenbeispiel 66.1 S. 339.	
7. Zahnräder.	
71. Stirnräder für parallele Wellen	340
Schrifttum	340
71.1. Das allgemeine Verzahnungsgesetz	341
Konstruktion der Profile S. 341. — Übersetzungsverhältnis S. 341. — Überdeckung S. 342. — Benennung der Zahnteile S. 342. — Triebstockverzahnung S. 345. — Grissongetriebe S. 343.	
71.2. Evolventenverzahnung	343
Eigenschaften der Evolvente (Zahlentafel 71.1. Evolventenfunktion S. 345. — Kleinste Zähne- summe einer Paarung S. 347. — Überdeckung (Zahlentafel 71.2) S. 347. — Grund- und Fuß- kreise fallen zusammen S. 347. — Kleinste Zähnezahl (Zahlentafel 71.3) S. 348.	
71.3. Die praktische Herstellung der Profile	348
Das Formverfahren S. 348. — Zahlentafeln 71.4. Normale Formfräser S. 349. — 71.5. Genormte Modul-Teilungen S. 349. — Abwälzverfahren (Maag, Fellow, Fräsen) S. 349. — Grenzbedingung für Unterschnittfreiheit S. 352.	
71.4. Räder mit kleinen Zähnezahlen (korrigierte Verzahnung)	353
A. E. G.-Korrektur S. 353. — Änderung des Eingriffswinkels (Maag-Korrektur) S. 354. — Her- stellung der Zähne S. 355. — Spielfreiheit S. 355. — Günstige Zahnformen S. 356. — Zahlen- beispiel 71.1 S. 357. — Herstellung einer Keilwelle nach dem Wälzverfahren S. 357.	
71.5. Berechnung der Zähne	358
71.51. Festigkeit.	358
Zahnkraft S. 358. — Zahlenbeispiel 71.2. Berechnung von γ S. 359. — Zusätzliche Beanspru- chung (ξ -Werte) S. 359. — Empirische Gleichung von Buckingham S. 361. — Zahlentafel 71.6. Handelsübliche e-Werte S. 363.	
71.52. Abnutzung	363
Flächenpressung, Grübchenbildung S. 363. — Gleitende Reibung (Abnutzungs-Charakteristik) S. 366.	
71.53. Erwärmung	367
Wirkungsgrad S. 368.	
71.54. Bekämpfung der Geräusche	369
Schrägverzahnung S. 369. — Bogenverzahnung S. 374.	
71.55. Anleitung zur Berechnung der Zahnräder	375
Zahlenbeispiele: 71.3. Triebwagenantrieb S. 376. — 71.4. Schiffsturbine S. 377.	
72. Räder für nicht parallele Wellen	377
Kegelräder S. 377. — Schraubenräder S. 378.	
73. Formgebung und Anordnung der Räder	379
Schrifttum	379
74. Umlaufgetriebe	383
Drehzahlen S. 383. — Drehmomente S. 385. — Wirkungsgrad S. 385. — Anwendungs- beispiele: 74.1. Wälzlager S. 386. — 74.2. Handflaschenzug S. 386. — 74.3. Elektroflaschen- zug S. 387. — 74.4. Bohrspindelvorschub S. 389. — 74.5. Zählwerk mit großer Übersetzung S. 389. — 74.6. Ausgleichgetriebe für Kraftwagen S. 390. — 74.7. Antrieb einer Sichtmaschine S. 390.	
75. Schneckengetriebe.	391
75.1. Verzahnung	391
75.2. Herstellung	392
75.3. Wirkungsgrad	392
75.4. Berechnung und Formgebung	393
Schrifttum	397
76. Kettenräder	397
8. Der Kurbeltrieb.	
81. Definitionen	399
Schrifttum	400
82. Das gerade Schubkurbelgetriebe	400
82.1. Die Kolbenkräfte	400
82.2. Die Kolbenwege	402
82.3. Die Geschwindigkeiten	403
82.4. Die Beschleunigungen	403
82.5. Die Kräfte (Theorie der Ersatzpunkte)	403
82.6. Gleichförmigkeit des Ganges	406
82.7. Schwungräder	407
82.8. Ausgleich der Massenwirkungen	407

	Seite
83. Sonderformen des Kurbeltriebes	408
83.1. Kurbelschleife	408
83.2. Exzenter	408
83.3. Der versetzte Kurbeltrieb	409
83.4. Die Kurbelschwinge	409
84. Schubstangen und Geradföhrungen	411
84.1. Das Kurbelzapfenende	411
84.2. Kreuzkopfbende und Kreuzkopf	413
84.3. Der Schaft	415

9. Rohrleitungen.

91. Normen	417
Zahlentafeln: 91.1. Nennweiten S. 417. — 91.2. Druckstufen S. 417. — 91.3. Geschweißte Rohre S. 419. — 91.4. Nahtlose Stahlrohre S. 419. — 91.5. Gußeiserne Flansche S. 420. — 91.6. Stahlguß-Flansche S. 420.	
91.1. Flanschverbindungen	420
Zahlentafeln: 91.7. Randabstand e für Gußrohre S. 420. — 91.8. Grenze für die Verwendung von Gußrohren S. 421. — 91.9. Lose Flanschen S. 422.	
92. Theoretische Grundlagen	423
92.1. Die Energiegleichung idealer Flüssigkeiten	423
92.2. Ausfluß aus Gefäßen	423
92.3. Laminarströmung in Rohren	425
Kritische Geschwindigkeit S. 425.	
92.4. Turbulente Strömung	425
92.5. Das Ähnlichkeitsprinzip	426
Kennzahlen Re und Eu S. 427. — Schleichende Bewegung (Kennzahl Gü) S. 427. — Wellenbewegung (Kennzahl Fr) S. 427.	
92.6. Laminarströmung in Spalten	428
93. Versuchswerte	429
93.1. Ausflußzahlen	429
93.2. Druckverlust in glatten Rohren	431
93.3. Geschwindigkeitsverteilung	431
93.4. Prandtl'sche Grenzschicht	432
93.5. Druckverlust in rauhen Rohren	433
93.6. Querschnittsänderungen	434
Schrifttum S. 434. — Impulssatz S. 435. — Erweiterungsverlust S. 435.	
93.7. Richtungsänderungen	436
Schrifttum S. 436.	
93.8. Absperrorgane	438
Schrifttum S. 438. — Hähne S. 438. — Ventile S. 439. — Klappen S. 439. — Schieber S. 440.	
94. Berechnung der Rohrleitungen	440
Anwendungsbeispiele: 94.1. S. 441. — 94.2. S. 442.	
94.1. Wirtschaftlicher Rohrdurchmesser	442
94.2. Die äquivalente Düse	443
Zahlenbeispiel 94.4 S. 444.	
94.3. Verzweigte Leitungen	444
Reguliermittel S. 445.	
94.4. Betriebsbeanspruchungen	446
Schrifttum S. 446.	
95. Dichtungen	447
95.1. Der glatte Spalt	447
95.2. Kolbendichtungen	448
95.3. Labyrinth	449
Schrifttum	
	450

Einleitung.

Formulierung der konstruktiven Aufgabe.

Es ist Aufgabe des Konstrukteurs die Bestandteile irgendeiner Maschine (oder eines Apparates) möglichst vollkommen dem Gebrauchszweck anzupassen. Für eine zweckentsprechende Konstruktion müssen demnach die Betriebsbedingungen zuverlässig bekannt sein. Der Konstrukteur darf z. B. nicht einfach irgendein Lager oder Zahnrad konstruieren, sondern muß ein Lager, resp. Rad entwerfen, das für die vorgeschriebenen Betriebsbedingungen am besten geeignet ist. Die Schwierigkeit liegt darin, daß unter „Betriebsbedingungen“ die verschiedenartigsten Einflüsse zusammengefaßt sind. So muß man von einer in Steinbrüchen verwendeten Gesteinbohrmaschine selbstverständlich voraussetzen, daß sie bei dem rohen Betrieb immer gebrauchsfähig bleibt und z. B. beim Herunterfallen keinen erheblichen Schaden erleidet.

Die Formen des gleichen Maschinenteiles wechseln demnach mit dem Gebrauchszweck. Eine Maschine, die in Bergwerken oder in staubhaltigen Betrieben durch ungelernete Arbeiter bedient werden soll, ist unter anderen Gesichtspunkten zu entwerfen, als wenn sie in sauberen Maschinsälen bei sorgfältigster Wartung durch angeleitetes Personal verwendet wird. Ein Motor sieht ganz anders aus, wenn er als stationäre Maschine, als Schiffs-, Automobil- oder als Flugzeugmotor verwendet wird, auch wenn in allen Fällen die Motorstärke gleich bliebe. Eine Exportmaschine wird manchmal in Einzelheiten anders durchkonstruiert werden müssen, um die Transport- und Reparaturmöglichkeiten in abgelegenen Gegenden zu berücksichtigen. In anderen Fällen verlangt der Gebrauchszweck wieder eine möglichst geräuschlose Maschine usw.

Beim Unterricht in den Maschinenelementen kann es sich naturgemäß nur darum handeln, die allgemeinen Gesichtspunkte bei der Berechnung und beim Entwurf zu behandeln. Die endgültige Formgebung ist nur von Fall zu Fall und in Anlehnung an die Erfahrung möglich. Darum ist und bleibt der Maschinenbau eine Erfahrungswissenschaft. Es ist noch nicht sehr lange her, daß der Nachdruck dabei auf Erfahrung lag und die Wissenschaft eine ganz bescheidene Rolle spielte. Doch auch der begabteste Mensch vermöchte nur wenig auszurichten, wenn er nicht auf dem Erfahrungsschatz anderer, und namentlich dem von vergangenen Geschlechtern ererbten, aufbauen könnte. Diese in vielen Jahrhunderten gesammelten Erfahrungen sind in den theoretischen Wissenschaften (Physik, Mechanik, Technologie) zweckmäßig geordnet, und bilden auch das Fundament des Maschinenbaues. Es wird vielleicht auffallen, daß die Mathematik hierbei nicht genannt wurde. Für uns Ingenieure ist die Mathematik weniger eine Wissenschaft als ein Werkzeug und zwar ein unentbehrliches Werkzeug. Wir müssen nur lernen dieses Werkzeug richtig zu benutzen, dann werden wir die größte Freude und auch den größten Nutzen daran haben. Die Mathematik trägt weniger zu neuen Erkenntnissen bei, als daß sie unsere Kenntnisse in einer anderen, für den praktischen Gebrauch geeigneteren Form bringt, indem sie z. B. aus der Differentialgleichung die anschaulichere Lösung ableitet.

Die **Betriebssicherheit** der Maschine erfordert zunächst, daß die Einzelteile während des Betriebes weder brechen oder eine schädlich große Formänderung erleiden, noch sich zu stark erwärmen oder abnutzen. Der Unterricht in den Maschinenelementen befaßt sich hauptsächlich mit solchen Berechnungen, womit aber nur ein Teil der konstruktiven Aufgabe gelöst wird.

Bei diesen Berechnungen muß man voraussetzen, daß die wirkenden Kräfte nach Größe, Angriffspunkt, Richtung und zeitlichem Verlauf genau bekannt seien. Das trifft nur in den seltensten Fällen zu. Man denke z. B. an die Größe der durch Böen verursachten Windkräfte auf die Eisenkonstruktionen von freistehenden Kranen oder auf die Tragflächen von Flugzeugen, an die Stöße, die bei allen Fahrzeugen auftreten und abhängig sind von der (veränderlichen) Beschaffenheit der Fahrbahn und von der Fahrgeschwindigkeit, an die zusätzlichen Kräfte, die bei Zahnradübertragungen auftreten usw. Die unbedingte Betriebssicherheit setzt voraus, daß der Konstrukteur immer die ungünstigsten Betriebsbedingungen bei der Berechnung berücksichtigt.

Nur auf Grund langer Erfahrung gelingt es die wirklich auftretenden Kraftwirkungen richtig abzuschätzen. E. Lehr¹ hat deshalb mit Recht vorgeschlagen, die bei den verschiedenen Maschinen tatsächlich auftretenden Kräfte durch dynamische Dehnungsmessungen im Betrieb systematisch zu gewinnen. Aber auch wenn die Kräfte und damit die Spannungen genau bekannt wären, so versagen heute noch unsere Kenntnisse bei der Beantwortung der Frage, ob der Werkstoff diese Beanspruchungen unter den vorliegenden Betriebsbedingungen gerade noch ertragen kann, ohne daß Bruchgefahr eintritt.

Der Maschinenbau kann deshalb nicht zu den „exakten“ Wissenschaften gerechnet werden; es ist auch durchaus verständlich, daß er anfänglich eine reine „Erfahrungs“-Wissenschaft war, welche die Abmessungen der Teile ausschließlich auf Grund bewährter Ausführungen festlegte. Sie sammelte Erfahrungswerte und Rezepte, beantwortete also nur die Frage „Wie wird es gemacht“ und kümmerte sich wenig um das „Warum“? Diese Methode war bei der anfänglich langsamen Entwicklung des Maschinenbaues recht brauchbar; sie muß aber bei der Lösung neuer Aufgaben naturgemäß versagen, weil die „Erfahrung“ fehlt. Der Ingenieur sucht dann durch Versuche die notwendigen Erfahrungen zu sammeln. Die „systematische Emperie“ ist oft unerlässlich, kennzeichnet aber eine Vorstufe der Wissenschaft und kommt (wenn überhaupt) nur sehr mühsam zum Ziel. Man erkennt dies deutlich z. B. an der Meteorologie (100jährigen Kalender), an der experimentellen Bestimmung des Druckverlustes in Rohrleitungen (praktische Hydraulik), der Reibungszahlen (seit Coulomb), der zulässigen Spannungen usw.

Das Bestreben des modernen Maschinenbaus ist, die auftretenden Spannungen und Formänderungen auf wissenschaftlicher Grundlage (wenn auch nur näherungsweise) zu berechnen.

Der Konstrukteur muß weiter für die Maschinenteile solche Formen wählen, die mit vorhandenen Werkstatteinrichtungen und Werkzeugmaschinen billig hergestellt und bearbeitet werden können.

Die werkstattgerechte Formgebung kann im wesentlichen nur bei den Konstruktionsübungen berücksichtigt werden, die nur dann erfolgreich durchzuführen sind, wenn Vorlesungen über Formgebung durch Gießen, Schweißen, über Metallbearbeitung durch spannabhebende Werkzeuge und Werkzeugmaschinen, verbunden mit besonderen Übungen über die zweckmäßige Formgebung und Bearbeitung von Maschinenteilen vorangegangen sind.

Die Konstruktion von Gußteilen² verlangt insbesondere die Berücksichtigung des Schwindens, d. i. das Kleinerwerden gegenüber dem Modell. Das Schwindmaß, d. i. die lineare Verkleinerung, beträgt für Grauguß 0,7—1%, für Stahl- und Hartguß bis 2%. Die hohe Gießtemperatur des Stahles und seine starke Schwindung begünstigen die Lunkerbildung weit mehr als bei Gußeisen. Das Metall erstarrt nicht gleichmäßig über den ganzen Querschnitt, sondern lagenweise von der Außenseite her. Durch die Abkühlung wird das Volumen verkleinert; kann kein flüssiges Metall mehr nachfließen, so entstehen Hohlräume (Lunker, Abb. 1). Der Lunker läßt sich nicht vermeiden; er muß aber immer dorthin verlegt werden, wo er nicht schadet, also in den Trichter oder in den verlorenen Kopf, die nachträglich entfernt werden. Je größer die kühlende Oberfläche im Ver-

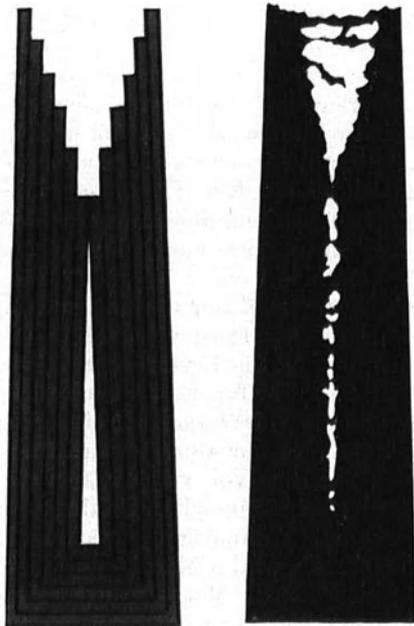


Abb. 1. Erstarrung eines Gußstückes in einer nach oben verjüngten Form (aus Lischka³).

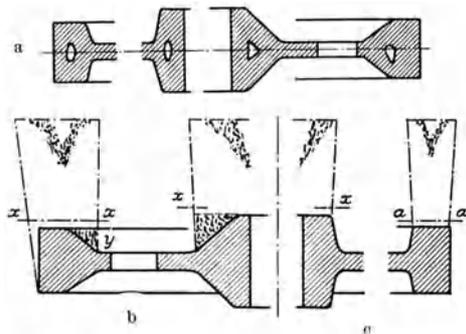


Abb. 2. a bis c (aus Lischka).
a Lunkerbildung in starken Querschnitten,
b Ungünstige Formgebung, weil die Entfernung des verlorenen Kopfes viel Arbeit verursacht,
c Zweckmäßige Formgebung.

¹ Lehr, E.: Wege zu einer wirklichkeitstreuen Festigkeitsberechnung. Z. VDI 75 (1931) S. 1473.

² Pfannenschmidt, C. W.: Beiträge zur Gestaltung gegossener Maschinenteile. Mitt. Forsch.anst. Gutehoffnungsh. 7 (1939) S. 115/43.

³ Lischka, A.: Was muß der Maschineningenieur von der Eisengießerei wissen? Berlin: Julius Springer 1929.

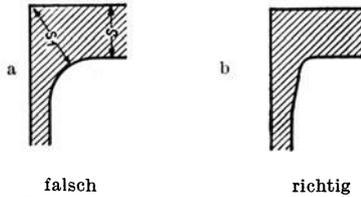


Abb. 3 a, b. Übergänge von schwachen zu starken Querschnitten (aus Volk).

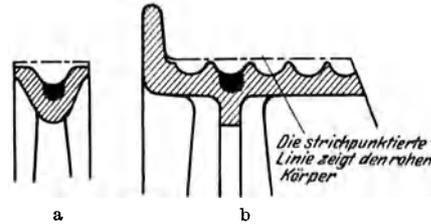


Abb. 4. a, b. Lunkerbildung infolge Materialzugabe für die Bearbeitung (aus Lischka).

hältnis zum Querschnitt ist, um so rascher wird der betreffende Teil eines Gußstückes erstarren. Lunker entstehen deshalb immer in großen Querschnitten (Abb. 2 a).

Soll das Rad nach Abb. 2 b aus Stahl lunkerfrei gegossen werden, so muß der verlorene Kopf sowohl auf die ganze Breite des Kranzes als auch der Nabe aufgesetzt werden. Der Kopf wird nach der Linie *xx* abgeschnitten; das übrigbleibende Material muß in der Dreherei beseitigt werden. Durch Umbildung des Rades nach Abb. 2 c kann die Dreharbeit wegfallen; das Stück wird wesentlich billiger. Der verlorene Kopf muß also immer so angebracht werden, daß seine Entfernung leicht möglich ist.

Der Konstrukteur muß die Formen so entwerfen, daß das Metall im Trichter und im verlorenen Kopf am längsten flüssig bleibt und daß es am Nachfließen nicht durch Querschnittsverminderung verhindert wird. Er soll scharfe Übergänge, an denen sich Werkstoff anhäuft, vermeiden (Abb. 3). Besondere Beachtung verdienen Verstärkungen infolge der Bearbeitungs-zugabe (Abb. 4).

Die Abkühlung der einzelnen Teile eines Gußstückes ist abhängig vom Verhältnis Volumen/Oberfläche und deshalb im allgemeinen für die verschiedenen Teile des Stückes verschieden. Da alle Körper sich mit abnehmender Temperatur zusammenziehen, sollten die verschiedenen Teile, die bei Beginn der Abkühlung gleiche Länge hatten, nun verschiedene Längen erhalten. Da sie aber miteinander verbunden sind, müssen sie sich auf eine gemeinsame Länge einigen. Geschieht dies bei Temperaturen, bei denen das Metall noch bildsam ist, so sind die Form-

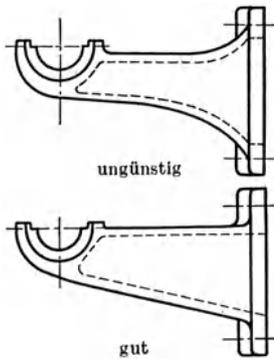


Abb. 5. Geradlinige Begrenzungen der Formen ist billiger, sowohl für den Kern als für die Außenform¹.

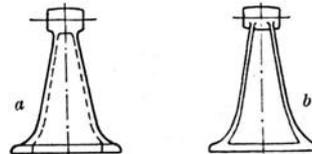


Abb. 6 a, b (aus Lischka).
a Hohlguß mit Kern, b Rippenguß ohne Kern.

änderungen plastisch und der Ausgleich geht ohne Spannungen vor sich. Findet der Vorgang aber bei tieferen Temperaturen statt, so stellen sich „Gußspannungen“ ein, unter deren Einfluß das Gußstück sich verzieht oder reißt. Gußspannungen sind kaum vollständig zu vermeiden. Durch geeignete Querschnittsabmessungen und Formgebung kann der Konstrukteur dafür sorgen, daß alle Teile sich möglichst gleichmäßig abkühlen. Alles was zur Vermeidung von Lunkern nützt, hilft auch die Spannungen vermindern. Namentlich das Auftreffen von Rippen auf Wandflächen führt zu Stoffanhäufung und begünstigt die Ribbildung. Man kann deshalb nicht eindrucklich genug auf die Forderung hinweisen, daß Rippen erheblich schwächer sein müssen als die benachbarten Wände. Namentlich das Gießen von Stahl in Formen (Stahlguß) ist wegen des doppelt so großen Schwindmaßes mit bedeutenden Schwierigkeiten verbunden.

Neben diesen gießtechnischen Regeln sind noch einige

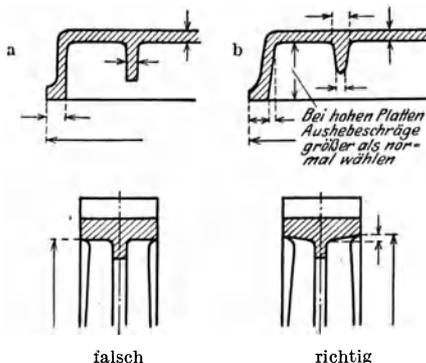


Abb. 7 a, b (aus Lischka).
Ausheberschrägen zeichnen!

¹ Nach A. Erkens: Werkstattgerechtes Konstruieren. Beuth-Verlag.

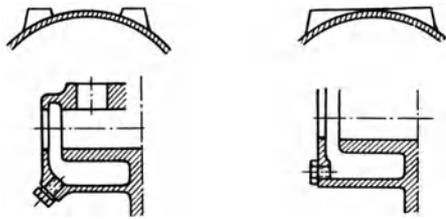


Abb. 8 a, b. Maschinenteile (aus Lischka).
a mit Unterscheidungen, b ohne Unterscheidungen.

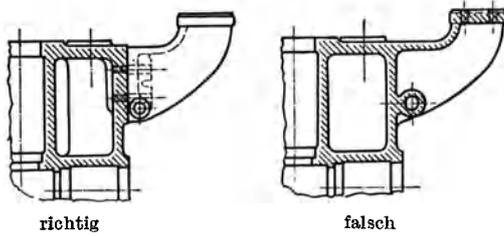


Abb. 10. Schwache Nebenteile trennen und besonders befestigen
(aus Riedler).

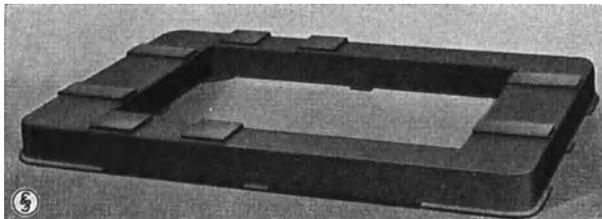


Abb. 11. Geschweißte Stahlplatte.

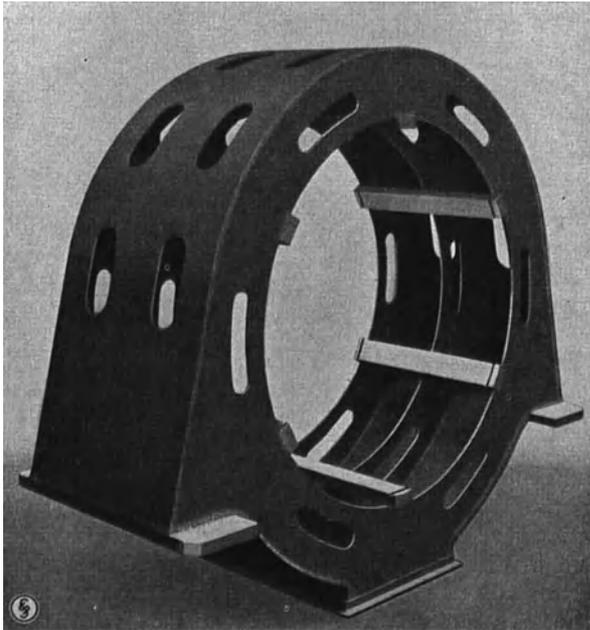


Abb. 12. Geschweißte Gehäuse einer elektrischen Maschine
(Siemens-Schuckertwerke).

hängig von der Lieferzeit der Spezialfirmen. Wenn es sich um Herstellung in Serien handelt,

¹ Lehmann, R.: Wirtschaftlicher konstruieren — billiger gießen! VDI-Verlag 1932. — Gensel, C.: Wirtschaftlich konstruieren. Verlag Fr. Vieweg u. Sohn. Braunschweig 1929.

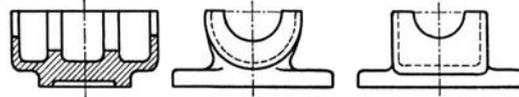


Abb. 9. Lagerunterteil für 3 und 2 Formkasten
(aus Lischka).

formtechnische Bedingungen zu beachten¹. Es ist wohl selbstverständlich, daß für die Modelle nur einfache, möglichst geradlinige Formen oder Drehkörperformen zu wählen sind (Abb. 5). Auch die Kerne müssen einfach sein und sollten ohne Kernstützen sicher gelagert werden können; Kernstützen verteuern die Herstellung und machen den Guß porös.

Rippenguß ist meist billiger als Hohlguß, weil sich bei ihm Kerne leichter vermeiden lassen (Abb. 6). Für staubreiche Betriebe (z. B. bei Vermahlungsmaschinen) ist wegen der Staubanhäufung in den Ecken und wegen der eventuell damit verbundenen Explosionsgefahr immer Hohlguß mit glatter Oberfläche dem Rippenguß vorzuziehen.

Die Kernmasse und die Kerneisen müssen leicht entfernt werden können. Liegt der Kern nicht frei, so müssen besondere Kernlöcher vorgesehen werden, die nachträglich durch Kernstopfen verschlossen werden.

Bei allen Gußstücken muß auf die Möglichkeit zum Ausheben des Modells geachtet werden. Deshalb sind immer Aushebeshrägen vorzusehen (Abb. 7), die um so größer sein müssen, je tiefer das Modell in den Kasten eingreift.

Unterscheidungen in der Form sind zu vermeiden, weil sie entweder einen besonderen Kern (Abb. 8) oder eine Teilung des Modells erfordern (Abb. 9).

Augen und Rippen sind so anzusetzen, daß sie mit dem Modell herausgezogen werden können.

Kleine Teile von verwickelter Form sind nicht aus einem Stück mit großen Teilen zu gießen, sondern aufzuschrauben, da dadurch das Einformen erleichtert und Ausschuß vermieden wird (Abb. 10).

Fast jede Maschinenfabrik hat ihre eigene Gießerei; Hartguß-, Weichguß-, Spritzguß- und Stahlgußteile werden in Spezialgießereien hergestellt. Die Maschinenfabrik muß solche Teile, sowie meist auch Schmiedestücke von auswärts beziehen und wird dadurch ab-

so kann sie sich durch Anlegung eines Vorrates zum Teil wieder unabhängig machen. Bei Einzelanfertigung dagegen kann die Lieferung solcher Teile oft so verzögert werden (namentlich in Zeiten guter Beschäftigung), daß die Fabrik ihrerseits die versprochene Lieferzeit nicht einhalten kann. Die Bedeutung kurzer Lieferzeiten für den kaufmännischen Erfolg einer Fabrik ist so groß, daß der Konstrukteur in solchen Fällen auf die Lieferung von auswärts verzichten und eine andere Lösung suchen muß.

In den letzten Jahren wird Gußeisen immer mehr durch Stahlkonstruktionen in geschweißter Ausführung ersetzt. Erhebliche Gewichts-, Fracht- und Zollersparnisse, Erhöhung der Festigkeit, Unabhängigkeit von oft kostspieligen Modellen und Kürzung der Lieferzeit sind die Hauptvorteile dieser Umstellung (Abb. 11 u. 12). Sie stellt den Konstrukteur vor neue und oft recht schwierige Formgebungsprobleme, denn es kann sich dabei keinesfalls darum handeln, die bewährten Gußformen auf Stahl zu übertragen. Der Gußeisenbau ist durch die Technologie des Formens und Gießens begründet; der Stahlbau dagegen ist durch die Anforderungen der Schweißtechnik bedingt und erfordert ganz andere Bauformen und Gestaltungen¹. Das Schweißen ist eine Kunst, nicht nur vom handwerklichen, sondern auch vom konstruktiven Standpunkt aus. In der Beherrschung der Schrumpfspannungen stehen wir noch am Anfang der Entwicklung.

Für die Bearbeitung und für den Zusammenbau gilt als erste Regel, daß jede Handarbeit als viel zu teuer zu vermeiden ist, und daß die Bearbeitung auf vorhandenen Werkzeugmaschinen erfolgen muß. Dadurch ist z. B. der größte Drehdurchmesser oder die größte Hobelbreite eingeschränkt. Der Konstrukteur soll aber auch die vorhandenen Werkzeuge berücksichtigen, z. B. Normalfräser für die Zähnebearbeitung.

Schmiedearbeiten sind als Handarbeit recht teuer. Schon das Warmmachen eines größeren Werkstückes erfordert viel Zeit und ist kostspielig. Es ist oft billiger, die Form aus einem vollen Stück auf Werkzeugmaschinen herauszuarbeiten, als vorzuschmieden. Das Schmieden kann auch oft durch Auf- und Anschweißen von Teilen ersetzt werden. Wenn die Schmiedearbeit nicht vermieden werden kann, so müssen immer einfache, geradlinig begrenzte Formen gewählt werden. Für Serienarbeiten kommen „Gesenke“ in Frage und bei Massenherstellung sind Preßteile meist billiger als Gußstücke.

Als weitere Regel gilt, daß die Bearbeitung auf die unbedingt notwendigen Flächen zu beschränken ist. Die Bearbeitung einzelner Teile, damit die Maschine „glänzt“, gehört zur Vergangenheit. Abb. 13 zeigt eine Flanschverbindung, bei der der Rand *c* vorsteht, um die Bearbeitung zu ersparen. Die Sitzflächen für die Muttern werden bei *a* ausgefräst; dies setzt voraus, daß die Stellen für den Fräskopf oder Senker zugänglich sind (Abb. 13 a).

Sehr oft ist nicht das eigentliche Spanabheben der teuerste Teil der Bearbeitung, sondern das Aufspannen, namentlich bei ungünstiger Formgebung (Abb. 14). Besondere Aufspanvorrichtungen sind nur bei Serienherstellung wirtschaftlich, sobald die Kosten der Vorrichtung durch Ersparnis an Aufspanzeit gedeckt werden. Der Konstrukteur kann aber immer dafür sorgen, daß rasch und genau aufgespannt werden kann. Hierher gehört z. B. das Anbringen von Vorsprüngen (Nasen), um unhandliche Stücke bequem anfassen und transportieren zu können, oder das Vorsehen von Löchern zum Durchstecken von Spannschrauben, oder auch das Anbringen besonderer Aufspannteile (Füße), die nach der Bearbeitung wieder entfernt werden.

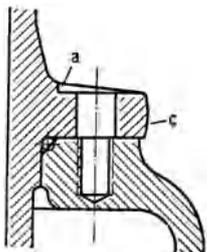


Abb. 13. Gute Ausführungsform, da Flansche bei *c* unbearbeitet bleibt (aus Riedler).

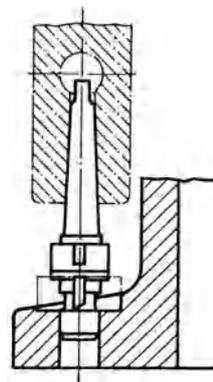


Abb. 13 a. Sitzfläche bei *a* Fräsen (aus Rötcher).

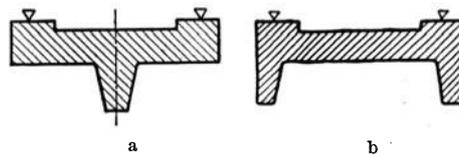


Abb. 14 a, b (aus Volk).
a läßt sich schwer aufspannen, b richtige Ausführung.

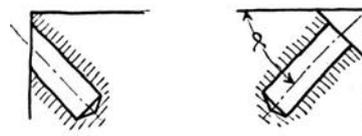


Abb. 15 a, b (aus Volk).

¹ Schrifttum: Hänchen, R.: Schweißkonstruktionen, Heft 9 der Einzelkonstruktionen aus dem Maschinenbau. Berlin: Julius Springer 1939 und Bobek, Metzger, Schmidt: Stahlleichtbau von Maschinen. Berlin: Julius Springer 1939.

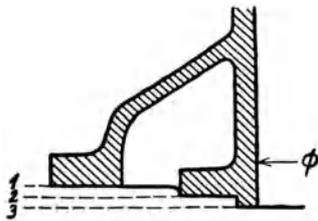


Abb. 16. Ungünstige Formen für die Bearbeitung (aus Volk).

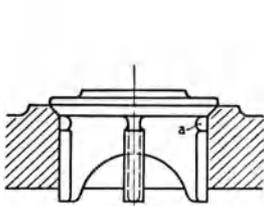
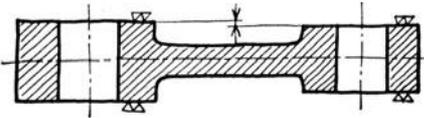
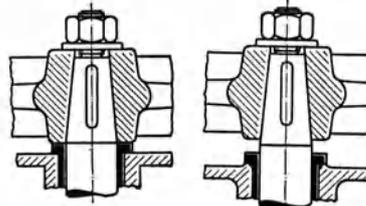


Abb. 17. Eindrehung der Ventildrehung bei a mit Rücksicht auf späteres Nachschleifen (aus Riedler).

falsch richtig
Abb. 18 (aus Riedler).

Die Bearbeitung soll möglichst ohne Umspannen und immer senkrecht oder parallel zur Aufspannfläche erfolgen. Jede schräge Bearbeitung erfordert ein schräges Aufspannen des Werkstückes, was stets zeitraubend und kostspielig ist. Gebohrte Löcher nach Abb. 15 a lassen sich nicht herstellen; damit das Loch vorgekört und der Bohrer gut angesetzt werden kann, ist eine Abflachung vorzusehen (Abb. 15 b).

Arbeitsflächen, die in einer Richtung verlaufen, sollen möglichst in einer Ebene liegen, um ein gemeinsames Bearbeiten (Drehen, Hobeln) zu gestatten (Abb. 16).

Stets ist darauf zu achten,

daß für den Auslauf des Werkzeuges genügend Platz vorhanden ist.

Damit die Teile beim Zusammenbau ohne Nacharbeit richtig zusammenpassen, müssen „Zentrierungen“ (Abb. 13) oder Paßstifte vorgesehen werden (Abb. 12.12). Gewinde ist nie so genau hergestellt, daß es als Zentrierung dienen kann.

Jedes mehrfache Passen ist zu vermeiden. Soll das Rad in Abb. 18 auf der Kegelfläche festsetzen, dann darf es nicht gleichzeitig seitlich aufliegen.

Die Formen des gleichen Maschinenteiles wechseln mit der vorhandenen Bearbeitungsmöglichkeit, die in einer kleinen Maschinenfabrik bescheidener sind als bei den gut fundierten Weltfirmen. Der Konstrukteur muß auch andere Formen wählen, wenn die Maschine in großen Serien oder auf Spezialmaschinen hergestellt werden kann, als wenn es sich um eine Einzelausführung handelt.

Der Ingenieur sollte so konstruieren, daß hohe Betriebssicherheit mit möglichst geringen Kosten an Werkstoff und Löhnen erreicht wird. Für eine erfolgreiche Tätigkeit des Konstrukteurs ist es deshalb auch nützlich, daß er Einsicht in die Selbstkostenberechnung seiner Konstruktionen erhält. Er sieht daraus, welche Faktoren die Herstellung besonders verteuern und ist dann in der Lage, an der richtigen Stelle Verbesserungen anzubringen. In Zweifelsfällen muß er immer bedenken, daß die Betriebssicherheit wichtiger ist als eine Verbilligung der Herstellung, denn schon eine einmalige Reparatur (mit der damit verbundenen Betriebsstörung) kann wesentlich größere Kosten verursachen als eine etwas kräftigere Konstruktion.

Wirtschaftlichkeit. Die Aufgabe des Konstrukteurs ist mit der zweckmäßigen Lösung der aufgezählten Bedingungen noch nicht erfüllt. Die richtig berechnete und billig hergestellte Maschine muß verkauft werden. Die Lebensfähigkeit der Fabrik hängt nun davon ab, daß beim Verkauf Gewinn erzielt wird. Maschinen werden im allgemeinen nur gekauft, wenn der Käufer daraus einen Nutzen zieht, ohne Rücksicht auf die Selbstkosten des Herstellers. Der Käufer ist nur dann gewillt, den geforderten Preis zu bezahlen, wenn er damit wirtschaftliche Vorteile erreichen kann. Er kauft eine Werkzeugmaschine nur, um seine Maschinen billiger bearbeiten zu können, oder eine Transportanlage um seine Transportkosten zu verkleinern, usw. Der Fabrikant (und damit der Konstrukteur) muß also darüber unterrichtet sein, was seine Maschinen anderen Wert ist; die hergestellte Maschine muß also wirtschaftlich sein.

Die grundlegenden Bedingungen zur Beurteilung der Wirtschaftlichkeit sind recht einfach; ihre richtige Beurteilung setzt aber genaue Kenntnisse der tatsächlichen Betriebsbedingungen voraus. Wenn man eine Maschine kauft, so kennt man ihren Preis ab Werk; zu ihm sind noch Verpackungs-, Transport-, Fundament- und Montagekosten, sowie den Preis für Reserveteile hinzuzurechnen um die Gesamtanschaffungskosten am Aufstellungsort zu erhalten. Werden zur Anschaffung von Maschinen fremde Gelder (Obligationen) aufgenommen, so müssen diese verzinst werden. Die Verzinsung darf nicht davon abhängig sein, ob in dem Unternehmen etwas verdient wird, so daß die Kapitalkosten als Unkosten zu betrachten sind. Die Aufnahme fremder Gelder verteuert also die Herstellung und sollte, wenn immer möglich, vermieden werden.

Jede Maschine verliert durch Abnutzung und durch andere Ursachen an Wert. In einem gut geleiteten Unternehmen muß eine Maschine, die aus irgendeinem Grunde nicht mehr gebraucht wird, abgeschrieben sein. Das angelegte Kapital muß dann zurückgezahlt werden oder soll zur Anschaffung neuer Maschinen wieder zur Verfügung stehen.

Die Bedeutung der Entwertung wird dadurch erhöht, daß sie schwerer im voraus zu bestimmen ist. Die Entwertung tritt auch ohne Abnutzung durch den Gebrauch schon durch das Altern allein ein. Sie ist also im Gegensatz zu den Löhnen auch bei Nichtgebrauch nicht zu vermeiden. Die Gebrauchsdauer (Lebensdauer) der Maschinen ist sehr verschieden. Gegen eine plötzliche Entwertung durch Maschinenbruch kann man sich durch Versicherung schützen, aber auch bedeutende Umwälzungen in der Bauart können eine sehr rasche Entwertung zur Folge haben. Während man von einer Dampfmaschine mit vollem Recht erwarten kann, daß sie nach 20 Jahren noch betriebsfähig ist, wäre es sicher unklug gewesen, wenn jemand, der vor 20 Jahren ein Automobil gekauft hat, darauf gerechnet hätte, heute noch damit zu fahren. Ebenso liegen die Verhältnisse bei Werkzeugmaschinen und bei vielen anderen Maschinen, die noch in lebhafter Entwicklung begriffen sind (Flugzeuge), und die durch eingetretene Verbesserungen in kurzer Zeit fast wertlos werden können. Ein vorsichtiger Industrieller tut gut, die Lebensdauer seiner Maschinen nicht zu hoch zu schätzen.

Wird die Lebensdauer einer Maschine oder Anlage z. B. auf 10 Jahre geschätzt, so müssen jährlich 10% des Anschaffungswertes (oder des Anschaffungswertes weniger Alteisenerwert) abgeschrieben werden. Es ist oft gebräuchlich (aber unrichtig), jeweils 10% des Buchwertes abzuschreiben, da dann am Ende des zehnten Jahres die Anlage immer noch mit 35% des Anschaffungswertes statt mit 0% zu Buch steht.

Zu der Verzinsung und Abschreibung des Anlagekapitals A muß jährlich noch ein bestimmter Betrag für den Unterhalt der Anlage gerechnet werden. Ist p der Prozentsatz, mit dem jährlich für Zins, Amortisation und Unterhalt zu rechnen ist, so müssen bei 300 Arbeitstagen im Jahre täglich $\frac{p \cdot A}{100 \cdot 300}$ RM (bzw. Franken) dafür aufgebracht werden, und zwar unabhängig davon, ob die Maschine benützt wird oder nicht. Diese Kosten nennt man die Besitzkosten. Wird die Maschine nur eine Stunde täglich oder 300 Stunden im Jahr verwendet, so muß die eine durchschnittliche tägliche Betriebsstunde mit dem vollen Betrag von $\frac{p \cdot A}{30000}$ RM belastet werden.

Die Betriebsbedingungen der Maschinen sind recht verschieden. Bei den Kraftmaschinen liegen die Verhältnisse meist einfach; sie haben die Aufgabe, die potentielle Energie des Wassers bzw. die chemische Energie des Brennstoffes mit möglichst hohem Wirkungsgrad in mechanische Energie umzuformen. Der Wirkungsgrad ist aber von der Belastung der Maschine abhängig. Sobald diese in weiten Grenzen schwankt, wie es z. B. in einer elektrischen Zentrale zur Deckung der Spitzenleistung vorkommt, ist weniger der höchste Wirkungsgrad bei der normalen Belastung, sondern der mittlere Wirkungsgrad innerhalb der Belastungsgrenzen für die Beurteilung der Wirtschaftlichkeit der Maschine maßgebend. Die Wirkungsgradkurve sollte dann einen von der Belastung möglichst unabhängigen Verlauf haben. Diese selbstverständliche Forderung wird oft (z. B. bei der Wahl des Kesselsystems) übersehen. Verwickelter werden die Überlegungen, wenn neben dem Kraftverbrauch auch Bedarf an Wärme vorhanden ist, oder wenn die Kraftanlage fahrbar sein muß (Lokomotive).

Ganz anders liegen die Verhältnisse bei vielen Arbeitsmaschinen (Vermahlungs-, Sortier-, Werkzeugmaschinen usw.). Dort tritt der Kraftverbrauch gegenüber anderen Faktoren stark zurück. Es wird z. B. verlangt, daß das Mahlprodukt genügend fein und gleichmäßig ausfällt, oder daß die gleiche Maschine die verschiedensten Rohstoffe gleich gut vermahlen soll usw.

Da hier nur wenig Kenntnis des Maschinenbaues vorausgesetzt werden kann, seien die wirtschaftlichen Betrachtungen auf die einfachen Verhältnisse beschränkt, wie sie bei Hebezeugen und Transportanlagen vorliegen. Bei solchen Anlagen müssen die Transportkosten ein Minimum werden. In Abschnitt (94)¹ wird der wirtschaftlichste Durchmesser einer Rohrleitung berechnet.

Anwendungsbeispiel. Unter welchen Verhältnissen ist die Anschaffung neuer Hebezeuge mit elektrischem Antrieb wirtschaftlicher als die Weiterverwendung abgeschriebener Handhebezeuge?

Die vielen Handhebezeuge an Bahnhöfen lassen vermuten, daß die Frage nicht ohne weiteres zugunsten des elektrischen Antriebes beantwortet werden kann.

¹Bei den Hinweisen wird „Abschnitt“ durch „Abschn.“ gekürzt, also (Abschn. 94) geschrieben.

Ein Elektroflaschenzug für eine Tragkraft $L = 1000$ kg (bzw. 5000 kg) kostet ab Werk 1800 RM (bzw. 3200 RM) und fertig installiert z. B. $A = 2500$ RM (4000 RM). Wenn 25% für Verzinsung, Abschreibung und Unterhalt, unabhängig von der Benützungsdauer angenommen wird, so sind die täglichen Besitzkosten $\frac{25A}{30000} = 2,10$ RM ($3,33$ RM). Für den abgeschriebenen Handflaschenzug sind natürlich keine Besitzkosten mehr in Rechnung zu setzen.

Die Dauerleistung eines Arbeiters beträgt höchstens 8 kgm/s. Mit einem guten Handflaschenzug (Wirkungsgrad $\eta = 80\%$) kann er die Last L mit einer Geschwindigkeit von v m/min heben, die aus der Energiegleichung $\frac{L}{\eta} \cdot \frac{v}{60} = 8$ kgm/s folgt, und die für $L = 1000$ (5000) kg sonach $0,385$ ($0,077$) m/min beträgt.

Der Elektrozug mit einem Motor von $1,4$ (5) PS hebt die Last mit einer Geschwindigkeit von 5 ($3,4$) m/min, also 13 (44)mal so schnell. Nun besteht die Tätigkeit des Verladens nicht nur aus Lastheben, sondern die Last muß zuerst angebunden, dann hochgehoben, gedreht oder gefahren und nachher wieder gesenkt und gelöst werden. Wenn die Last 13 (44)mal so schnell gehoben wird, so werden wir nicht gleichviel schneller verladen, sondern weniger, und zwar abhängig von der Zeit des Anbindens und Lösens der Last, von der Hubhöhe, vom Transportweg, usw.

Nehmen wir für einen bestimmten Fall an, daß die Kürzung der Verladezeit nur $\frac{1}{4}$ der Kürzung der Hubzeit beträgt, so müßte, wenn der Elektrozug 1 Stunde in Betrieb ist, der Handflaschenzug $\frac{13}{4}$ ($\frac{44}{4}$) Stunden in Betrieb sein. Wir ersparen demnach mit dem Elektrozug $\frac{13}{4} - 1 = 2,25$ ($\frac{44}{4} - 1 = 10$) Betriebsstunden zu 1 RM Stundenlohn, abzüglich die Kosten des elektrischen Stromes. Wenn 1 PSh (d. i. 1 PS während einer Stunde) $0,12$ RM kostet, so betragen die Stromkosten für $L = 1000$ kg $1,4 \cdot 0,12 = 0,17$ RM und für $L = 5000$ kg Tragkraft $5 \cdot 0,12 = 0,60$ RM, so daß die Ersparnisse $2,25 - 0,17 = 2,08$ RM bzw. $10 - 0,60 = 9,40$ RM für jede Betriebsstunde des Elektrozuges betragen.

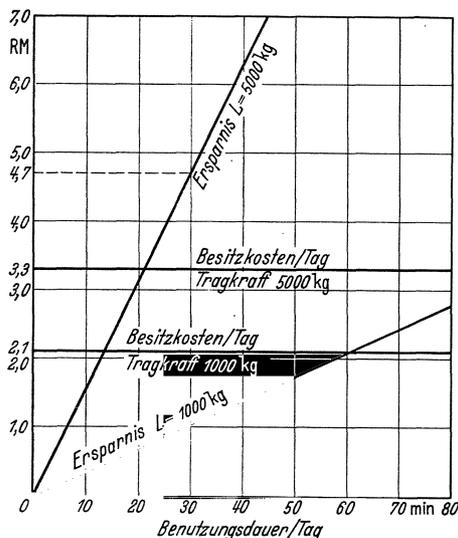


Abb. 19.

Sobald die Ersparnisse die Besitzkosten überschreiten, wird die Anschaffung wirtschaftlich. Aus Abb. 19 folgt, daß der elektrische Antrieb schon bei sehr kurzer Betriebsdauer wirtschaftlich ist.

Bei diesem Vergleich ist folgendes zu beachten: Der Wirkungsgrad der Handflaschenzüge ist meist viel kleiner als 80% und die Durchschnittsleistung eines Arbeiters ist oft nur ein kleiner Bruchteil der angenommenen 8 kgm/s. Dadurch sind die Verhältnisse für den Handflaschenzug zu günstig dargestellt. Andererseits hebt der Elektrozug alle Lasten mit der gleichen Geschwindigkeit; er wird für die größte Tragkraft gekauft und meist durch viel kleinere Lasten beansprucht. Beim Handflaschenzug dagegen können kleine Lasten mit größerer Geschwindigkeit gehoben werden als größere. Dadurch verschiebt sich die Wirtschaftlichkeit wieder etwas zugunsten der Handhebezeuge. Für ein Flaschenzug ist der angenommene Ansatz von 25% für Verzinsung, Amortisation und Unterhalt viel zu wenig; solche kleine Neuanschaffungen werden in einem Jahr vollständig abgeschrieben.

Es bestehen aber keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, diese Faktoren genauer zu berücksichtigen.

Bei diesem Vergleich sind auch die weiteren Ersparnisse nicht berücksichtigt, die durch die schnellere Verladung erzielt werden können. Dient z. B. der Flaschenzug dazu, Kisten auf ein Automobil zu verladen, so steht dieses so lange, bis der Wagen beladen ist. Während dieser Zeit laufen auch die Besitzkosten des Automobils; seine eigentliche Tätigkeit, d. i. das Verfahren der Last wird dadurch stark verkürzt, so daß beim langsamen Verladen durch den Handflaschenzug evtl. die Anschaffung eines zweiten Automobils erforderlich wird. Ähnlich liegen die Verhältnisse beim Be- und Entladen von Eisenbahnwagen. Nach den Statistiken beträgt die durchschnittliche Laufzeit eines Güterwagens nur drei Stunden täglich; sie kann in erster Linie durch Abkürzung des Aufenthaltes beim Be- und Entladen gesteigert werden. Noch viel wichtiger ist die Kürzung der Liegezeiten beim Schiffsverkehr, weil die Besitzkosten der großen Schiffe eine unvergleichlich größere Rolle spielen als die eigentlichen Verladekosten.

Nicht immer liegen die Verhältnisse so klar. Wenn z. B. die Frage geprüft werden soll, ob für einen Kran im Maschinenhaus eines Elektrizitätswerkes elektrischer oder Handantrieb wirtschaftlicher ist, so wird man unter Berücksichtigung des Umstandes, daß dieser Kran nur ganz ausnahmsweise (z. B. bei Reparaturen) verwendet wird, sich für Handantrieb entscheiden. Sollte es aber vorkommen, daß eine Reparatur während der eigentlichen Betriebszeit der Maschine durchgeführt werden muß, so können durch Abkürzung der Reparaturzeit so große Ersparnisse erzielt werden, daß die Mehrkosten des elektrischen Antriebes gar keine Rolle spielen. In ähnlicher Weise wird durch eine Betriebsstörung (z. B. infolge Bruch oder Abnutzung eines Maschinenteiles) die Rentabilitätsrechnung vollständig geändert, weil durch den erzwungenen Stillstand weit größerer Schaden entsteht, als eine etwas sorgfältigere Konstruktion der Maschine gekostet hätte.

Aus den Vergleichsrechnungen folgt weiter, daß die menschliche Arbeitskraft im Verhältnis zur elektrischen Energie außerordentlich teuer ist. Für die Dauerleistung eines guten Arbeiters ($8 \text{ kgm/s} \approx \frac{1}{9} \text{ PS}$) muß 1 RM Stundenlohn bezahlt werden, so daß 1 PSh 9 RM kostet! Wenn man für elektrische Energie diesen hohen Preis bezahlen müßte, so würde jeder (als selbstverständlich) von den Maschinen den allerhöchsten Wirkungsgrad verlangen. Um so unbegreiflicher ist es, daß auch Ingenieure den Wirkungsgrad von Handhebezeugen oft als nebensächlich betrachten (z. B. bei Schraubenhebeböcken, Abb. 23.40). Es gilt daher die Regel: Für Maschinen mit Handbetrieb ist höchster Wirkungsgrad anzustreben (z. B. durch Verwendung von Kugellagern).

Wie das Zahlenbeispiel zeigt, spielen die Stromkosten bei der Beurteilung der Wirtschaftlichkeit des elektrischen Antriebes von Hebezeugen eine untergeordnete Rolle. Deshalb ist es praktisch wichtig, zu untersuchen, ob ein billiger Elektrozug mit schlechtem Wirkungsgrad oder ein teurer mit gutem Wirkungsgrad wirtschaftlicher ist. Die Beantwortung dieser und ähnlicher Fragen hat für den Konstrukteur große praktische Bedeutung; er lernt daraus, wie und was er konstruieren soll. Solche wirtschaftlichen Fragen gehören unbedingt zu den wichtigsten Grundlagen (Elementen) der Konstruktion und spielen z. B. auch bei der Festlegung der zulässigen Spannungen eine Rolle (vgl. Abschn. 62.4, Riemenberechnung).

Die Berechnung besteht nur in seltenen Fällen in der Lösung einer Anzahl Gleichungen. Meist ist die Anzahl der Gleichungen kleiner als die Zahl der Unbekannten, so daß immer unendlich viele Lösungen möglich sind und einzelne Faktoren „beliebig“ gewählt werden dürfen. Jede Wahl gibt eine mathematisch richtige Lösung der gestellten Aufgabe, aber nur wenige sind praktisch brauchbar, und nur diese kommen für den Ingenieur in Frage. Um diese rasch herauszufinden, geht der erfahrene Konstrukteur immer so vor, daß er zuerst eine ihm brauchbar erscheinende Lösung nach freiem Ermessen, aber maßstäblich, skizziert und dann erst nachrechnet, ob seine Annahme auch den Anforderungen in bezug auf Festigkeit, Formänderung, Abnutzung usw. genügt. Da sämtliche Abmessungen dabei festliegen, sind solche Nachrechnungen immer wesentlich einfacher und rascher durchzuführen als die Vorausberechnung mit den vielen Unbekannten.

Auch der Anfänger soll sich diese Methode zu eigen machen. Nur auf diese Weise bildet er systematisch das sog. „technische Gefühl“, mit dem der erfahrene Ingenieur in oft erstaunlicher Weise, ohne Rechnung, die richtigen Abmessungen schätzt. Es ist dabei nützlich, daß er die Kräfte nicht nur als Zahlenwerte betrachtet, sondern sich deren Größe zu veranschaulichen sucht, z. B. durch Vergleich mit dem Gewicht eines Menschen (70 bis 80 kg) oder eines Eisenbahnwagens (10 bis 15 t). Es mag anfänglich recht schwierig erscheinen, eine „brauchbare“ Lösung zu entwerfen, aber es ist auch ziemlich gleichgültig, ob diese erste Annahme sich nachträglich als vollständig unbrauchbar herausstellt, denn die Nachrechnung zeigt sofort, wo der Fehler liegt und wie es besser zu machen ist. Der Entwurf geht der Rechnung voraus. Bei aller Wertschätzung der Rechnung darf nie vergessen werden, daß diese nur ein notwendiges (oft recht einseitiges) Hilfsmittel ist, während das Endziel in der Formgebung und Herstellung liegt, also ein konstruktives und werkstattechnisches Problem ist. Die konstruktive Aufgabe besteht darin, für gegebene Verhältnisse die einfachste und in jeder Beziehung beste Lösung zu finden. Das Abwägen der Vor- und Nachteile der verschiedenen Lösungsmöglichkeiten ist eine vielseitige und verantwortungsvolle Aufgabe, die hohe Anforderungen an den Konstrukteur stellt.

Die Grundnormen.

Die Organisation jedes modernen technischen Betriebes beruht auf einer weitgehenden Arbeitsteilung. Die „Spezialisierung“ der Arbeit ist wirtschaftlich notwendig, weil bei öfterer

Wiederholung die gleiche Arbeit viel rascher, also billiger, ausgeführt wird. Sie führt zur Massenherstellung auf vollständig automatischen Maschinen. So werden Bleche, Rohre, Walzprofile, Schrauben, Niete, Kugellager, Schmierringe, ja ganze Maschinen, wie Elektromotoren, Zentrifugalpumpen, Automobile usw. heute als Marktware hergestellt und sind ab Lager lieferbar. Wie groß der damit erreichbare Erfolg ist, erkennt man z. B. daraus, daß bei Einzelausführung ein Automobil das Zehnfache und mehr kosten würde als bei Massenherstellung.

Die notwendige Vorbedingung für die Herstellung einer großen Anzahl genau gleicher Teile ist eine strenge Normung. Die Normung schafft in erster Linie Ordnung, indem Gegenstände mit unter sich unwesentlichen Abweichungen zusammengefaßt, und die Größenabstufungen systematisch festgelegt werden¹. Im Konstruktionsbüro wird das jedesmalige Aufzeichnen genormter Teile erspart. Die Herstellung auf Spezialmaschinen erhöht den Genauigkeitsgrad, so daß der Verbraucher als weiteren Vorteil neben dem niedrigen Preis noch die Möglichkeit erhält, Ersatzteile zu kaufen, die ohne Nacharbeit austauschbar sind.

Die Bedeutung der Normung anerkennend, haben sich in allen Industrieländern Normenkommissionen gebildet, in denen namhafte Vertreter der Industrie mitwirken. Wenn das Ziel die Herstellung zu verbilligen, klar vor Augen gehalten wird, so hat die zeitraubende und mühselige Kleinarbeit dieser Kommissionen große wirtschaftliche Bedeutung. Ihr Endziel ist die Festlegung internationaler Normen. (ISA = International Federation of the National Standardizing Associations, New York). Periodisch erscheinende Veröffentlichungen unterrichten über den jeweiligen Stand der Normung². Jedermann sollte die einmal festgelegten Normen

Zahlentafel 1. Normzahlen.

$\sqrt[5]{10}$	$\sqrt[10]{10}$	$\sqrt[20]{10}$	$\sqrt[40]{10}$
1	1	1	1
1,6	1,6	1,12	1,06 1,12
		1,25	1,18 1,25
		1,4	1,32 1,4
		1,6	1,5 1,6
2,5	2,5	1,8	1,7 1,8
		2	1,9 2
		2,24	2,12 2,24
		2,5	2,36 2,5
4	4	2,8	2,65 2,8
		3,15	3 3,15
		3,55	3,35 3,55
		4	3,75 4
6,3	6,3	4,5	4,25 4,5
		5	4,75 5
		5,6	5,3 5,6
		6,3	6 6,3
10	10	7,1	6,7 7,1
		8	7,5 8
		9	8,5 9
		10	9,5 10

beachten und verwenden und so zum wirtschaftlichen Erfolg der Normungsarbeit beitragen.

Normzahlen³. Fast gleichzeitig mit der Inangriffnahme der Normen ist die Notwendigkeit erkannt worden, den Aufbau der Reihen gleichartiger Normteile in eine gesetzmäßige Form zu bringen. Aus der unendlich großen Anzahl von rationalen und irrationalen Zahlen sollten eine beschränkte Anzahl herausgegriffen werden, die sich als besonders zweckmäßig in der Verwendung erweisen. Unser Zahlensystem (eine arithmetische Reihe) ist für die Aufstellung technischer Modellreihen ungeeignet. An diese „bevorzugten“ Zahlen sind eine Reihe von Anforderungen zu stellen. So sollen nicht nur lineare Größen (1. Potenz), sondern auch Flächen (2. Potenz), Volumen, Widerstandsmomente (3. Potenz), Trägheitsmomente (4. Potenz) dadurch gleichmäßig abgestuft werden.

Am zweckmäßigsten ist die geometrische Reihe mit konstantem Stufensprung; die Zahlen dieser Reihen haben auch die wünschenswerte Eigenschaft, daß sie bei allen mit ihnen ausgeführten Rechenoperationen stets wiederkehren. Die größte Schwierigkeit war die Festlegung des Stufensprunges; aus wirtschaftlichen Gründen kommt man auch mit einer einzigen Stufung nicht aus. Nach langen Beratungen hat man international folgende Normzahlen festgelegt;

Normzahlen sind die gerundeten Werte geometrischer Reihen mit den Faktoren $\sqrt[5]{10} = 1,6$ (5er Reihe), $\sqrt[10]{10} = 1,25$ (10er Reihe), $\sqrt[20]{10} = 1,12$ (20er Reihe) und $\sqrt[40]{10} = 1,06$ (40er Reihe).

¹ So war es durch Normung z. B. möglich, die Anzahl der Riemenscheibenmodelle von 3600 auf 600 zu verkleinern.

² Normblattverzeichnis DIN, Beuth-Verlag G. m. b. H., Berlin SW, Beuthstr. 8 und Normblattverzeichnis VSM.-Normalienbureau, Zürich, Lavaterstr. 11.

³ Kienzle, O.: Die Normzahlen und ihre Anwendung. Z. VDI 83 (1939) S. 717/24. — Hellmund, R. E.: Wirtschaftliche Auswahl von Typenreihen auf Grund der Normzahlen. Prod. Engng. 3 (1932) S. 353 u. 401 und Z. VDI 77 (1933) S. 789/91.

Bei der geometrischen Stufung genügt es, die Zahlen in einem Intervall von 1 bis 10 festzulegen, die dann mit irgendwelchen ganzzahligen positiven oder negativen Potenzen von 10 multipliziert werden können. Die Normzahlen sollen verwendet werden:

1. Für die Aufstellung von Typenreihen, z. B. Papierformate, Drehzahlen, Geschwindigkeiten, Drücke, Leistungen usw.,

2. wenn möglich für Konstruktionsmaße (Riemenscheiben, Handräder, Anschlußmaße, Achshöhen von Maschinen, usw. Da viele Normblätter (z. B. Wellendurchmesser) schon festgelegt sind, ist zur Zeit eine weitergehende Verwendung der Normzahlen sehr erschwert. Bei jeder Revision der Normblätter ist die Verwendung der Normzahlen ins Auge zu fassen, damit diese im Laufe der Zeit ihre grundlegende Bedeutung erreichen. Sie können zu einem einheitlichen Maßsystem (an Stelle des metrischen und des englischen) im Maschinenbau führen.

Passungen¹. Beim Zusammenbau einer Maschine müssen verschiedene Teile in einer bestimmten Weise zusammenpassen; so sollen z. B. Wellen mehr oder weniger leicht in einem Lager laufen oder es sollen Zapfen in eine Bohrung verschiebbar oder gelenkig passen oder auch fest sitzen. Für alle diese Passungen gab die Zeichnung früher nur ein Maß, das sog. Nennmaß, und dazu die Bearbeitungsangabe. Mit diesen Angaben kann aber der Dreher weder die Bohrung noch die Welle so herstellen, wie es die Wirkungsweise der Maschine erfordert. Er sollte außerdem noch wissen, wie Zapfen und Bohrung zusammenpassen müssen. Man hat dazu verschiedene Benennungen (Sitze genannt) eingeführt, und unterscheidet:

1. Laufsitz für Zapfen, die in einer Bohrung laufen sollen, und zwar weiter, leichter und enger Laufsitz je nach der für den Verwendungszweck erforderlichen Größe des Spieles.

2. Gleitsitz für Teile, die von Hand und betriebsmäßig verschiebbar sein sollen, z. B. Reitstockpinole im Reitstock.

3. Schiebesitz für Teile, die unter leichtem Druck zusammengefügt oder auseinander genommen werden, z. B. Zentriersitze, Paßschrauben.

4. Haftsitz für Teile, die gegenseitig feststutzen sollen, doch ohne erheblichen Kraftaufwand, z. B. mit Blei- oder Holzhammer zusammengefügt werden, wie Kugellagerinnenringe, Schwungradnaben; sie sind gegen Verdrehen zu sichern.

5. Treib- oder Festsitz für Teile, die mit einer gewissen Spannung festsitzen, aber auch gegen Verdrehen zu sichern sind.

6. Preßsitz für fest aufgepreßte Teile.

Die gewünschte Passung zwischen Zapfen und Bohrung kann durch einen geübten Arbeiter nach mehrfachem Probieren und Nachschleifen des Zapfens hergestellt werden. In dieser Weise erreicht man aber niemals oder nur zufällig, daß z. B. ein nachträglich erforderliches Lager ohne Nacharbeit zu einer früher gelieferten Welle paßt. Diese Einzelherstellung ist außerdem sehr teuer. Das war der Zustand, wie er vor etwa 30 Jahren allgemein im Maschinenbau herrschte.

Die Gütererzeugung ist heute meist räumlich und zeitlich getrennt. Als selbstverständlich gilt dabei die Forderung von Erzeuger und Verbraucher, daß die Teile einer Maschine (ohne Nacharbeit) zusammenpassen und daß jedes Stück austauschbar ist.

Um die Entwicklung zu verstehen, muß von der Tatsache ausgegangen werden, daß es werkstattechnisch unmöglich ist, irgendein Maß mathematisch genau einzuhalten. Wenn der Dreher z. B. einen Zapfen von 50 mm Durchmesser gedreht hat, so wird man durch Nachmessen finden, daß der Durchmesser (je nach der Genauigkeit der verwendeten Meßinstrumente) 50,1 oder 50,05 oder 50,042 mm, aber nicht 50,0000 mm ist. Damit der Zapfen brauchbar ist, sollten die Abweichungen vom Nennmaß nur innerhalb praktisch zulässiger Grenzen bleiben, die je nach dem Verwendungszweck mehr oder weniger eng gezogen werden können. Man wird z. B. den Bolzen für irgendeinen Verwendungszweck noch brauchen können, wenn sein Durchmesser zwischen 49,95 und 50,05 mm liegt. Die Abweichung zwischen Größt- und Kleinstmaß wird „Toleranz“ genannt, und auf diese Abweichung kommt es bei der Beurteilung der Brauchbarkeit des Bolzens an. Um sie zu messen, verwendet man sog. Grenzlehren (Abb. 20 u. 21); das Werkstück ist brauchbar, wenn es kleiner als die größere und größer als die kleinere der beiden zusammengehörenden Grenzlehren ist. Diese Überlegungen gelten nicht nur für Bolzendurchmesser und Bohrungen, sondern in gleicher Weise auch für Längen und für irgendwelche andere Maße an einem Maschinenteil.

Will man zwei Teile, z. B. Welle und Bohrung, in vorgeschriebener Weise zusammenpassen, so kann entweder die Bohrung oder die Welle angepaßt werden. Für die genaue Herstellung einer Bohrung sind verschiedene Werkzeuge (Bohrer, Vorreibahle, Präzisionsreibahle) erforderlich, deren Anschaffung teuer ist, während alle Durchmesser des Bolzens mit dem gleichen Werk-

¹ Leinweber, P.: Toleranzen und Lehren, 2. Aufl. Berlin: Julius Springer. 1940.

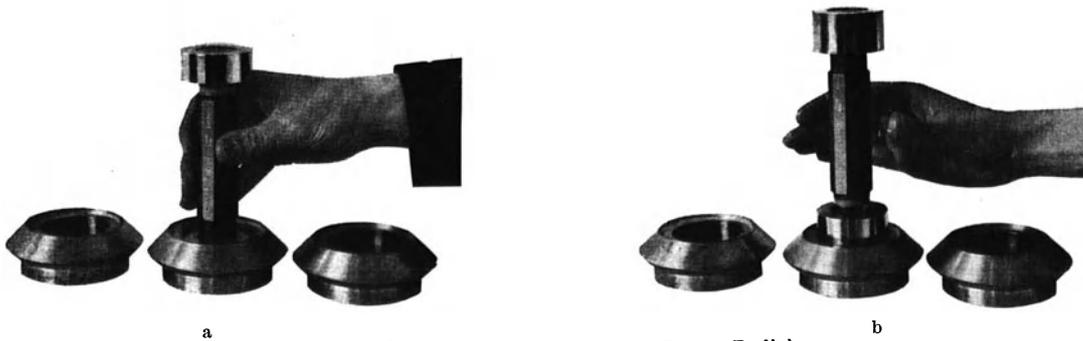


Abb. 20 a, b. Lehren von Bohrungen (L. Loewe, Berlin).
 a Die Gutseite des Kaliberdornes muß sich leicht in die Bohrung einführen lassen.
 b Die Ausschufseite darf nicht in die Bohrung hineingehen sie darf höchstens anschnäbeln.

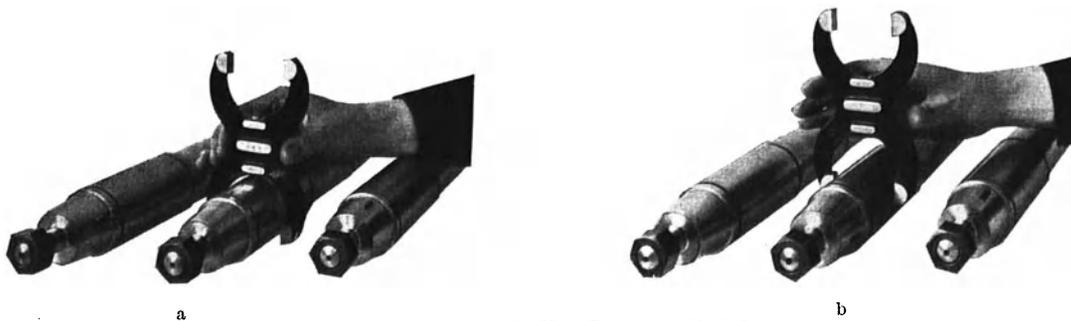


Abb. 21 a, b. Lehren von Wellen (L. Loewe, Berlin).
 a Die (größere) Gutseite der Rachenlehre muß über die Welle bequem hinübergehen.
 b Die Ausschufseite darf nur anschnäbeln.

zeug (Schleifscheibe) hergestellt werden können. Aus wirtschaftlichen Gründen liegt es demnach nahe, für alle Paßarten die Bohrungen gleich groß herzustellen und die Unterschiede in die Bolzenabmessungen zu verlegen. Das ist das System der Einheitsbohrung.

In vereinzelt Fällen ist die Anwendung des Systems der Einheitsbohrung mit einigen Schwierigkeiten verbunden. Bei einer Transmissionswelle z. B. sollen die Lager Laufsitz, die Riemenscheiben Schiebesitz und die Kupplungen Haftsitz aufweisen. Die dadurch bedingten Abweichungen im Durchmesser müßten nach dem System der Einheitsbohrung an der Welle angebracht werden. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei Gelenkbolzen (Abb. 22). Es ist nahe-

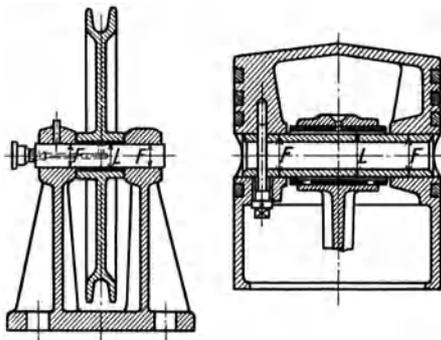


Abb. 22. Gelenkbolzen. System der Einheitswelle.

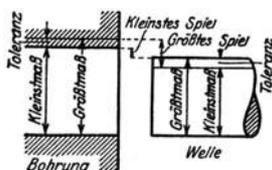


Abb. 23. Toleranzen von Welle und Bohrung (aus Kienzle, Austauschbau).

liegend und in solchen Fällen üblich, die Welle unverändert zu halten und die Bohrungen mit den verschiedenen Abmaßen auszuführen (System der Einheitswelle).

Um das Werkzeugkonto weiter einzuschränken, sind „Normaldurchmesser“ festgelegt, für welche die Grenzlehren im Handel erhältlich sind; sie stimmen heute noch nicht genau mit den Normzahlen überein.

Bei einer Passung liegt also sowohl der Durchmesser des Zapfens als auch der Bohrung zwischen je zwei bestimmten Grenzen (Abb. 23). Außerdem sollte sowohl die kleinste Bohrung mit der größten Welle, als auch die größte Bohrung mit der kleinsten Welle den gewünschten Sitz ergeben. Trägt man für irgendeinen Nenndurchmesser die Größe der Toleranzen von Bohrung und Welle für die verschiedenen Sitze von einer Nulllinie aus auf, so erhält man Abb. 24. Die absolute Größe der beiden Gruppenzahlen ändert sich je nach dem Nennmaß des Durchmessers.

Benennungen. Das Istmaß ist der an einem Werkstück vorhandene, durch Messen gefundene Zahlenwert einer geometrischen Größe.

Das Sollmaß, Nennmaß ist der in einer Zeichnung oder Beschreibung vorgeschriebene Zahlenwert. Da dieser mathematisch genau

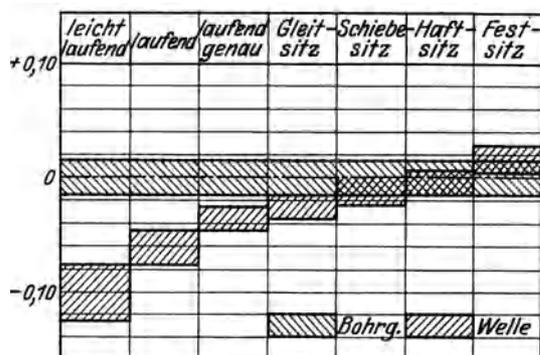


Abb. 24. Einheitsbohrung (Toleranzen in mm).

z. B. das Istmaß liegt in der Mitte des Toleranzfeldes.

Das Abmaß ist der Unterschied zwischen dem wirklichen Maß (Istmaß) und dem Nennmaß (Sollmaß).

Oberes Abmaß = OA = Größtmaß — Nennmaß (z. B. 49,97 — 50 = —0,03).

Unteres Abmaß = UA = Kleinstmaß — Nennmaß (z. B. 49,94 — 50 = —0,06).

Das Gutmaß ist das Maß der Gutlehre, d. h. derjenigen Lehre, die sich über- bzw. einführen lassen muß.

Das Ausschußmaß ist das Maß der Ausschlußlehre, die sich nicht über- bzw. einführen lassen darf.

UA der Bohrung = Gutseite, da bei dessen Vorliegen das Werkstück verwendbar ist.

OA der Bohrung = Ausschußseite. UA der Welle = Ausschuß. OA der Welle = Gutseite.

Der Begriff der Nulllinie bezieht sich auf die graphische Darstellung der Lage der Toleranzen in Abhängigkeit des Nennmaßes. Zweckmäßig ist: Nulllinie = Nennmaß.

Die Herstellungskosten steigen progressiv mit der gewünschten Genauigkeit der Passung, so daß die Toleranzen nie kleiner gewählt werden sollten, als für den richtigen Zusammenbau und für den Betrieb der Maschine erforderlich ist. Man kann in erster Annäherung etwa sagen, daß das Produkt aus Herstellungskosten und Toleranz konstant ist. Man muß deshalb verschiedene Gütegrade der Ausführung festlegen. Das internationale (ISA)-Toleranzsystem hat 16 Gütegrade (Qualitäten) festgelegt, von denen die vier ersten hauptsächlich für Lehren bestimmt sind. Die Qualitäten 5 bis 11 sind für Rundpassungen vorgesehen, während die Qualitäten 12 bis 16 gröbere Toleranzen darstellen, wie sie z. B. für Fräsen, Ziehen, Walzen usw. in Betracht kommen.

Die erste Grundlage dieses Systems ist die einheitliche Bezugstemperatur. Alle Körper dehnen sich bei Erwärmung aus; die Ausdehnung von Stahl beträgt z. B. 0,011—0,012 mm/m °C, was bei einer Länge von 100 mm und einem Temperaturunterschied von 15° C eine Längenänderung von 0,0165—0,018 mm ausmacht, so daß dadurch z. B. Gleitsitz in Laufsitz übergehen kann. Man muß deshalb sorgfältig darauf achten, daß die Temperatur der Lehre möglichst mit der Temperatur des Werkstückes übereinstimmt. Meßlehre oder Werkstück dürfen demnach nicht der direkten Wirkung der Sonne ausgesetzt werden.

Man hat lange darüber beraten, auf welche Temperatur man die Maße der Lehren beziehen sollte. Unser ganzes Meßwesen bezieht sich auf das Pariser Urmeter¹, das seine genaue Länge bei 0° C hat; die Einheit ist das Millimeter (mm); der 1000. Teil eines Millimeters ist das Mikron (μ). Dieser Urmaßstab besitzt manche Nachteile:

1. Es wurden vor allem allmähliche Längenänderungen beobachtet von der Größenordnung 0,5 μ , deren Ursachen noch nicht zuverlässig erforscht sind; das Urmaß genügt deshalb der in manchen Fällen erforderlichen Genauigkeit nicht mehr.

2. In der Bestimmung der Temperatur und der Wärmeausdehnungszahl können bei Vergleichsmessungen Fehler von der gleichen Größenordnung entstehen.

3. Er ist nur einmal vorhanden; auch seine Nachbildungen in jedem Lande bestehen in einer einzigen Ausführung. Die Urmaße einer Werkstatt können deshalb erst auf einem großen

¹ Kösters, W.: Der gegenwärtige Stand der Meterdefinition, des Meteranschlusses und seine internationale Bedeutung für Wissenschaft und Technik. Werkst.-Techn. 32 (1938) S. 527/33.

weder hergestellt noch gemessen werden kann, werden an seiner Stelle meist zwei Grenzmaße angegeben zwischen denen das Istmaß des Werkstückes in der Fertigung beliebig ausfallen darf.

Der Unterschied zwischen den beiden Grenzmaßen ist die Toleranz.

NB. Das Meßverfahren muß natürlich genauer sein als die Werkstücktoleranz.

Das Größtmaß ist das größte zulässige Maß; das Kleinstmaß das kleinste zulässige.

Das Toleranzfeld ist der Bereich zwischen Größt- und Kleinstmaß. Man sagt

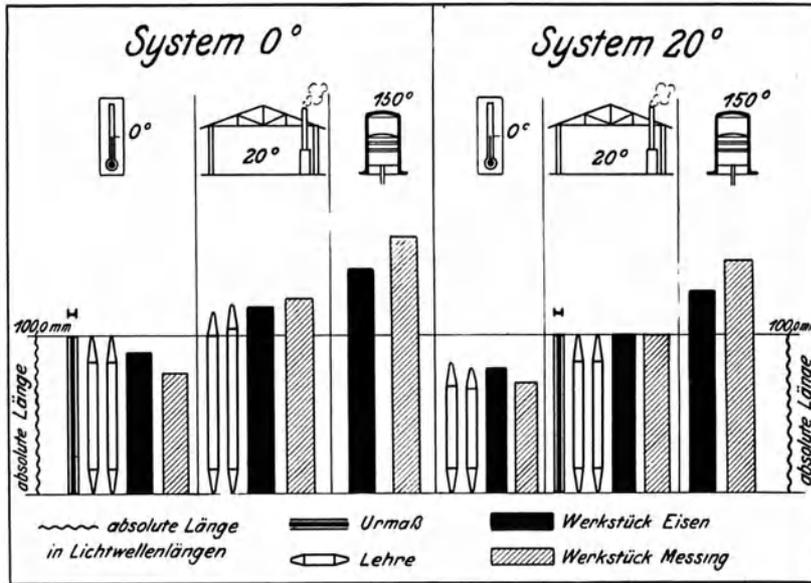


Abb. 25. Werkstücke und Lehren bei Bezugstemperatur 0° u. 20° C (nach Kienzle).

Umwege von dem Urmeter abgeleitet und auch nachgeprüft werden. Jeder Umweg bedeutet eine Fehlerquelle.

Die Herstellung austauschbarer Teile erfordert ein Urmaß, das unveränderlich ist und in jedem entsprechend eingerichteten Laboratorium verfügbar ist. Ein solches Urmaß gibt die Wellenlänge des Lichtes.

International ist festgelegt: die Spektrallinie „Cadmium rot“ hat (unter bestimmten, im einzelnen genau festgelegten physikalischen Bedingungen) eine Wellenlänge von $643,84696 \cdot 10^{-9}$ m, das sind rd. $0,64 \mu$. Man hat sich nun um zwei Systeme gestritten, und zwar ob das Urmaß bei 0° C oder bei 20° C (Werkstatttemperatur) die richtige Nennlänge haben soll.

Haben zwei Stichmaße bei 0° C dieselbe Länge, so werden sie infolge der verschiedenen Ausdehnung des Werkstoffes bei der Werkstatttemperatur schon nicht mehr gleich lang sein. Zwei Körper mit diesen beiden Stichmaßen gemessen sind daher weder bei 0° C noch bei 20° C genau gleich groß (Abb. 25). Heute gilt deshalb allgemein (in Abweichung vom Pariser Urmeter) 20° C (68° F) als normale Bezugstemperatur, weil dann bei der mittleren Werkstatttemperatur Urmaß, Lehren und Werkstücke übereinstimmen. Wie groß die Teile bei 0° C sind, hat meist kein praktisches Interesse.

Die Toleranz muß selbstverständlich mit wachsendem Nennmaß größer werden; erfahrungsgemäß proportional $\sqrt[3]{D}$ (Abb. 26). Für jeden Nenndurchmesser und für jede Qualität sind demnach verschiedene Diagramme, ähnlich Abb. 24 erforderlich. Um die Anzahl der Diagramme zu vermindern und in einem Bild zusammenzufassen, hat man eine neue Maßeinheit (von veränderlicher Größe), eingeführt und die Toleranz stufenweise geändert (Abb. 26).

Im ISA-Toleranz-System gilt für die Größe der Toleranz die internationale Toleranzeinheit:

$$i = 1 \text{ IT } (\mu) = 0,45 \sqrt[3]{D_{\text{mm}}} + 0,001 D_{\text{mm}} .$$

Das zweite Glied, das nur bei großen Durchmessern zur Geltung kommt, trägt der Tatsache Rechnung, daß Meßfehler die auf Temperaturunterschiede und Elastizität der Lehre zurückzuführen sind, proportional mit dem Durchmesser wachsen.

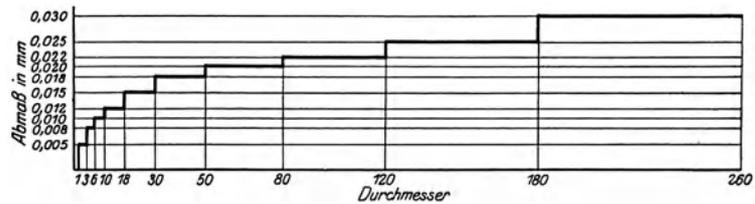


Abb. 26. Zunahme der Toleranz mit dem Durchmesser (aus Kienzle).

Durch Multiplikation der *i*-Werte mit den Normzahlen der 5er Reihe werden die sog. Grundtoleranzen in den 16 Qualitäten festgelegt. Z. B.:

Qualität . . .	5	6	7	8	9	10	11	12	usw.
Toleranz . . .	7	10	16	25	40	64	100	160	<i>i</i>

Bohrungen und Wellen werden je mit einem Buchstaben und einer Zahl bezeichnet und zwar die Bohrungen mit großen und die Wellen mit kleinen Buchstaben. Sie legen die Lage des Toleranzfeldes zur Nulllinie fest. Die Zahl gibt die Größe der Toleranz, also die Qualität der Tolerierung; je höher die Zahl, um so größer die Toleranz.

Wellen		Bohrungen		
<i>a—g</i>	<i>A—G</i>	Laufsitze		
<i>h</i> (OA = Nulllinie)	<i>H</i> (UA = Nulllinie)	Gleitsitz		
<i>j</i>	<i>J</i>	Schiebesitz	} Ruhesitze	
<i>k</i>	<i>K</i>	Haftsitz		
<i>m, n</i>	<i>M, N</i>	Festsitz		
<i>p—z</i> (ohne <i>q, v, y</i>)	<i>P—Z</i>	Preßsitze.		

Der Zusammenhang zwischen der Lage und der Größe der Toleranzfelder von Welle und Bohrung ist dadurch gegeben, daß z. B. die *H*-Bohrungen und die *h*-Wellen an der Nulllinie liegen und in ihrer Größe spiegelbildlich sind.

Bei Sitzkombinationen ist stets die Bohrung zuerst zu schreiben.

Gebräuchliche Sitze.

Durchmesserbereich			30—50 mm		50—80 mm		80—120 mm		120—180 mm		
			30—40	40—50	50—65	65—80	80—100	100—120	120—140	140—160	160—180
Einheitsbohrung H7			+25 μ 0		+30 μ 0		+35 μ 0		+40 μ 0		
Preßsitz	plastisch . .	u6	OA +76 ⁵⁶ ₁	+86 ₆₆	+106 ₈₂	+121 ₉₆	+146 ₁₁₈	+166 ₁₃₈	+195 ₁₆₂	+215 ₁₈₂	+235 ₂₀₂
		UA	+60	+70	+87	+102	+124	+144	+170	+190	+210
	etwa 1‰ . .	t6	OA +64 ₄₄	+70 ₅₀	+85 ₆₀	+94 ₇₀	+113 ₈₄	+126 ₉₈	+147 ₁₁₄	+159 ₁₂₆	+171 ₁₃₈
		UA	+48	+54	+66	+75	+91	+104	+122	+134	+146
Treibsitz		s6	OA +59 ₃₈	+59 ₃₈	+72 ₄₈	+78 ₅₄	+93 ₆₄	+101 ₇₂	+117 ₈₄	+125 ₉₂	+133 ₁₀₀
		UA	+43	+43	+53	+59	+71	+79	+92	+100	+108
		r6	OA +50 ₃₀	+50 ₃₀	+60 ₃₆	+62 ₃₈	+73 ₄₄	+76 ₄₈	+88 ₅₆	+90 ₅₈	+93 ₆₀
		UA	+34	+34	+41	+43	+51	+54	+63	+65	+68
Festsitz ²			+25 4		+30 6		+35 7		+40 8		
Haftsitz			+18 2		+21 4		+25 4		+28 5		
Schiebesitz . . .			+11 10		+12 12		+13 16		+14 18		
Gleitsitz			0 20		0 24		0 28		0 32		
Laufsitze	enger Laufsitz	g6	OA -9 30	-10 34	-12 40	-14 46					
		UA	-25	-29	-34	-39					
	Laufsitz . . .	f7	OA -25 50	-30 60	-36 71	-43 83					
		UA	-50	-60	-71	-83					
	Laufsitz . . .	e8	OA -50 82	-60 98	-72 116	-85 136					
		UA	-89	-106	-126	-148					
	weit. Laufsitz	d8	OA -80 112	-100 138	-120 164	-145 196					
		UA	-119	-146	-174	-208					
" "	c8	OA -120 ¹⁵²	-130 ¹⁶²	-140 ¹⁷⁸	-150 ¹⁸⁸	-170 ²¹⁴	-180 ²²⁴	-200 ²⁵²	-210 ²⁶²	-230 ²⁸²	
	UA	-159	-169	-186	-196	-224	-234	-263	-273	-293	
" "	b8	OA -170 ²⁰²	-180 ²¹²	-190 ²²⁸	-200 ²³⁸	-220 ²⁶⁵	-240 ²⁸⁵	-260 ³¹²	-280 ³³²	-310 ³⁶²	
	UA	-209	-219	-236	-246	-274	-294	-323	-343	-373	
" "	a9	OA -310 ³⁵⁴	-320 ³⁶⁴	-340 ³⁹²	-360 ⁴¹²	-380 ⁴⁴¹	-410 ⁴⁷¹	-460 ⁵³⁰	-520 ⁵⁹⁰	-580 ⁶⁵⁰	
	UA	-372	-382	-414	-434	-467	-497	-560	-620	-680	

¹ Die dritte Zahl in jedem Feld ist das mittlere Gesamtspiel (resp. Übermaß) in μ , gerundet auf ganze μ .
² Gegen Verdrehung sichern.

Wie aus Abb. 27 hervorgeht, ist die Bedingung für eine vollständige Austauschbarkeit der Teile, so daß irgendeine Welle mit irgendeiner Bohrung in der gewünschten Weise zusammenpaßt, nicht erfüllt, denn die einzelnen Toleranzfelder überdecken sich teilweise.

Vollständige Austauschbarkeit wäre nur durch eine wesentliche Verfeinerung der Toleranzen erreichbar, was eine bedeutende Verteuerung der Herstellung zur Folge hätte. Man hilft sich deshalb durch „Aussuchen“. Paßt z. B. ein Bolzen nicht in der gewünschten Weise mit einer vorhandenen Bohrung zusammen, so wählt man aus dem Vorrat einen anderen Bolzen, der höchstwahrscheinlich wohl den richtigen Sitz ergibt. Man kann aber auch systematisch Bohrungen und Bolzen nach der Größe sortieren (z. B. durch Verwendung feinerer Grenzlehren) und dann kleinere Bolzen und kleinere Bohrungen jeweils zusammenpassen.

Ein typisches Beispiel der systematischen Sortierung findet man bei der Herstellung von Kugellagern. Die Kugeln werden aus zylindrischen Scheiben (kalt oder warm) gepreßt, dann vorgeschliffen, gehärtet und zuletzt fertiggeschliffen und poliert. Wenn die Oberfläche genügend poliert ist, wird man aus wirtschaftlichen Gründen die Kugeln nicht noch weiter bearbeiten, auch wenn sie noch etwas zu groß sind. Ebenso wird man Kugeln, die zwar das richtige Maß erreicht haben, aber noch keine genügende Hochglanzpolitur aufweisen, nicht als „Ausschuß“ behandeln, sondern weiter polieren. Deshalb sind die fertigpolierten Kugeln verschieden groß. Da in einem Kugellager nur genau gleich große Kugeln verwendet werden können, werden diese sortiert. Die Kugelsortiermaschine besteht im wesentlichen aus zwei schräg und geneigt gestellten Leisten, auf welchen die Kugeln laufen. Ist der Leistenabstand gleich ihrem Durchmesser, so fallen sie durch und werden in verschiedenen Kästen aufgefangen. Das Spiel wird fünf- bis neunmal wiederholt, und so erhält man Kugeln, die sich im Durchmesser nur um 0,001 bis 0,002 mm unterscheiden. Die Kugeln in einem Kasten sind unter sich im Kugellager austauschbar, aber die Kugeln verschiedener Kästen können unter sich Abweichungen bis 0,02 mm aufweisen. Einzelne Kugeln können demnach niemals nachgeliefert werden.

Normalerweise werden Wellen mit einer Bohrung der nächst größeren Qualität kombiniert, also z. B. H 7 mit Wellen der sechsten Qualität, mit Ausnahme der weiten Laufsitze.

Infolge der Toleranzen für Welle und Bohrung ist die Passung verschieden, ob z. B. die größtzulässige Bohrung mit der kleinstzulässigen Welle oder die kleinste Bohrung mit der größten

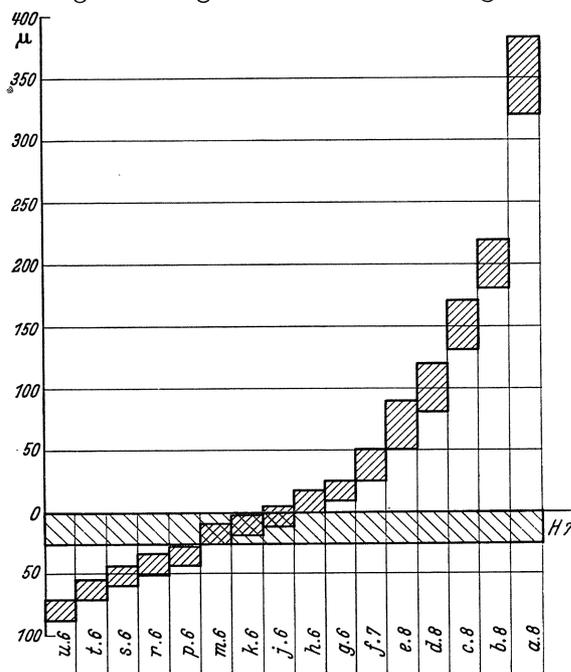


Abb. 27. Gebräuchliche Sitze für $d = 40-50$ mm.

Welle kombiniert wird. Der Schiebesitz H 7/j 6 (Abb. 27) kann z. B. für die Befestigung von Riemenscheiben, Kupplungen, Zahnräder auf die Wellenenden von Elektromotoren dienen. Bei größter Bohrung und kleinster Welle (Spiel 30μ im Durchmesserbereich $30-50$ mm) kann die Scheibe von Hand leicht aufgeschoben werden. Bei den Mittelwerten des Toleranzbereiches (Spiel $9,5 \mu$) kann die Scheibe in leicht eingefettetem Zustande von Hand mit leichtem Druck, aber ohne Schlag aufgesetzt werden. Bei einem Übermaß von 9 (max 15μ) beträgt der Aufpreßdruck 1000 (max 1600) kg. Nach mehrmaligem Ein- und Auspressen fällt der Auf- = Abpreßdruck auf ca. 840 kg infolge Glättung der Oberflächen.

Dennoch kann man in der Praxis mit hoher Wahrscheinlichkeit doch mit einer einheitlichen Passung rechnen, weil der Arbeiter erfahrungsgemäß nach der Mitte des Toleranzfeldes arbeitet.

Über die Wahl der Laufsitze siehe (Abschn. 43), Kugellagersitze (Abschn. 54.2), Preßsitze (Abschn. 24), Keile (Abschn. 22).

Schrifttum: Streiff, F.: Das ISA-Toleranzsystem und seine Einführung in die Praxis. Schweiz. techn. Z. 14 (1939) S. 485/91. — Gottschalk, E. u. W. Lutze: Einführung der ISA-Passungen in der deutschen Industrie. Techn. Mitt. Krupp (Techn. Ber.) 1938 S. 151/66. — Streiff, F.: Die Preßsitze i. ISA-Passungssystem. Schweiz. techn. Z. 9 (1934) S. 497. — Kienzle, O.: Die Preßsitze im ISA-Passungssystem. Werkst.-Techn. 32 (1938) S. 421/28. — Streiff, F.: Die Lauf-Sitze im ISA-Toleranz-System. Schweiz. techn. Z. 9 (1934) S. 545/52. — Streiff, F.: Zweckmäßige Sitze für Riemenscheiben, Kupplungen und Zahnräder auf Wellenenden. Werkst.-Techn. 32 (1938) S. 25/32. — Zollinger: Das ISA-Toleranzsystem. Schweiz. Techn. Z. 8 (1933) Heft 50/51.

1. Angewandte Festigkeitslehre.

11. Die Voraussetzungen der Festigkeitslehre und ihre praktische Bedeutung.

Streng genommen sind alle Rechnungen „Näherungslösungen“, denn die technischen Probleme sind (auch bei den Elementen) sehr verwickelt. Auch die sog. „exakte“ Lösung geht von verschiedenen Voraussetzungen aus, die zum Teil von der Wirklichkeit erheblich abweichen. Eine mathematisch richtige Lösung braucht deshalb noch nicht unbedingt und zuverlässig mit der Wirklichkeit überein zu stimmen. Die Annäherung an die Wirklichkeit wird um so größer, je mehr Einflüsse rechnerisch erfaßt werden können. Die Rechenarbeit steigt aber vielfach progressiv mit der erstrebten Genauigkeit.

Die geforderte Wirtschaftlichkeit seiner Konstruktionen zwingt den Ingenieur dazu, die Probleme zu vereinfachen um Näherungslösungen zu erhalten, die in kurzer Zeit durchgeführt werden können. Nur in Ausnahmefällen kann die Maschine eine Preiserhöhung infolge erhöhter Rechenarbeit ertragen. Der Ingenieur muß deshalb unter Außerachtlassung alles Unwesentlichen die Auswahl der in Rechnung zu stellenden Annahmen so treffen, daß die Rechenarbeit und die erreichte Annäherung an die Wirklichkeit in einem vernünftigen Verhältnis zu dem Verwendungszweck des Konstruktionsteiles steht. Er macht deshalb in ausgedehntem Maße Gebrauch von dem Rechenschieber bei den Zahlenrechnungen.

In den letzten Jahren haben verschiedene Forscher wertvolle Beiträge geliefert zur vertieften Erkenntnis der Faktoren, welche die Festigkeit der Maschinenteile wesentlich beeinflussen. Immer deutlicher zeigt es sich, daß die gebräuchliche „elementare“ Festigkeitslehre als Grundlage für die Berechnung versagt und naturgemäß versagen muß. Je tiefer man in die einzelnen Aufgaben eindringt, um so deutlicher erkennt man, daß die Größtzahl der praktisch wichtigsten Grundlagen des Maschinenbaus zur Zeit noch gar nicht geklärt sind. Man spricht und schreibt von einer „Krisis in der Festigkeitslehre“ und rüttelt an dem mathematisch festgefügteten und in sich geschlossenen Aufbau der Elastizitätstheorie. Das ganze wissenschaftliche Fundament für die Berechnung der Maschinenteile scheint zu wanken und wenig tragfähig (sumpfig) zu sein.

Der Konstrukteur steht deshalb den Ergebnissen der Elastizitätstheorie oft mit Mißtrauen gegenüber und stützt sich wieder mehr auf die Erfahrung (den Versuch). Allgemein hört man auch aus der Praxis den Ruf nach einer „wirklichkeitsgetreuen“ Berechnung der Maschinenteile. Dieser Ruf ist nicht neu; schon Prof. C. von Bach war immer bestrebt die Berechnung mit der Erfahrung in Übereinstimmung zu bringen. Die Theorie kann nur so lange gültig sein, als ihre Voraussetzungen praktisch erfüllt sind.

Die Festigkeitsrechnung geht von der Voraussetzung aus, daß die Kräfte, die auf den Körper wirken, allmählich von Null bis zum Höchstwert P steigen, den Körper dadurch (ohne Schwingungen zu erzeugen) verformen, jedoch nicht groß genug sind, diesen zu zerbrechen. Nach vollendeter Formänderung halten sich die Kräfte an dem Körper das Gleichgewicht.

Gleichgewicht ist immer vorhanden, wenn der Körper in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung ist. Bei einem beliebig bewegten Körper (z. B. beim Anlauf und Bremsen von Maschinen) kann durch das Anbringen der d'Alembertschen Massenkräfte das statische Gleichgewicht hergestellt werden.

Bei den Formänderungen entstehen zwischen den Molekülen innere Kräfte, die man als Flächenkräfte auffaßt; der innere Aufbau (Molekularstruktur) des Stoffes wird also nicht berücksichtigt, was durchaus zulässig ist, da die Kristalle sehr klein sind und Millionen in 1 cm^3 gehen. Die Kraft je Flächeneinheit wird Spannung genannt (kg/mm^2). Die Spannungen, die an irgendeiner Stelle des Körpers wirken, ändern sich von Punkt zu Punkt; sie sind im all-

gemeinen schräg zur Fläche gerichtet und können in zwei Komponenten zerlegt werden, normal zur Fläche (Normalspannungen σ) und in der Fläche liegend (Schubspannungen τ).

Das ganze Spannungsbild (Spannungsfeld), das durch die Oberfläche des Körpers begrenzt ist, kann durch Spannungslinien (Trajektorien) wiedergegeben werden, deren Richtung in jedem Punkt mit der Richtung der dort herrschenden (Normal- oder Schub-) Spannung übereinstimmt.

Es ist gebräuchlich, die Kräfte durch Pfeile darzustellen, die in einem Punkt angreifen. Für die Festigkeitsrechnung ist diese vereinfachte Darstellung der Kraftwirkung nur mit einer (praktisch sehr wichtigen) Einschränkung zulässig, denn endliche Kräfte würden im Angriffspunkt, also in einer unendlich kleinen Fläche immer unendlich große Spannungen erzeugen, die der Werkstoff nicht ertragen kann. In der Festigkeitslehre muß also vorausgesetzt werden, daß die Kraft auf einer endlichen Fläche wirkt; der Pfeil stellt dann die Resultierende dieser Teilkräfte dar. Die Spannungsberechnung muß also vollständig versagen in der unmittelbaren Nähe der Angriffstelle einer als Pfeil dargestellten Kraft. Mit dieser Einschränkung ist (nach dem Prinzip von de Saint Venant)¹ die vereinfachte Darstellung der Kraftwirkung auch in der Festigkeitslehre zulässig. Dieses Prinzip lautet:

Wirkt an einem ausgedehnten Körper, innerhalb eines eng begrenzten Bezirks, eine äußere Kraft, so kann diese durch eine andere gleichwertige Kraftverteilung ersetzt werden, die natürlich den Gleichwertigkeitsbedingungen auch genügen muß, und wodurch nur in der unmittelbaren Nähe des Bezirkes allein, geänderte Spannungen und Dehnungen hervorgerufen werden.

Vom Werkstoff des Körpers wird vorausgesetzt, daß er homogen und isotrop ist, d. h. daß er das Volumen stetig erfüllt und in allen Punkten und Richtungen gleiches Verhalten zeigt. Nach dieser Voraussetzung dürfen keine Unstetigkeiten, Löcher, Einkerbungen oder plötzliche Querschnittsänderungen vorkommen. Hierin liegt eine weitere, erhebliche Einschränkung für die Gültigkeit der Festigkeitslehre, die um so verhängnisvoller ist, weil erfahrungsgemäß die Brüche gerade bei solchen Unstetigkeiten auftreten. Aber die Einschränkung der Stetigkeit hat noch viel tiefergehende Bedeutung. Die Metallographie zeigt deutlich, daß wir es keineswegs mit homogenen, aus einzelnen Molekülen aufgebauten Körpern zu tun haben, sondern daß die Metalle in festem Zustand ein Haufwerk von kristallinen Molekulargruppen sind, die wirtt einander liegen und durch Wärmebehandlung eine Umwandlung erfahren können (Ferrit, Perlit, Zementit, Martensit). Alle Kristalle sind aber anisotrop; sie haben an einzelnen Stellen eine große Kohäsion, an anderen dagegen überhaupt keinen Zusammenhalt; die Bedingung der Homogenität ist deshalb nicht erfüllt.

Wenn die Werkstoffe auch nicht vollständig isotrop sind, so sind sie doch quasi-isotrop, denn die einzelnen Kristalle treten nicht besonders hervor, weil sie im Verhältnis zum Stabquerschnitt meist äußerst klein sind. In der technischen Festigkeitslehre müssen wir uns mit dem Begriff des homogenen und isotropen Körpers abfinden, denn es wird wohl kaum je eine andere, ebenso einfache Grundlage gefunden werden, die dem tatsächlichen Verhalten der Baustoffe besser entspricht. Manche Erscheinungen weisen aber deutlich auf die Inhomogenität des Werkstoffes hin.

Die „elementare“ Festigkeitslehre vereinfacht den Aufbau der Körper noch weiter, indem angenommen wird, daß der Werkstoff aus einzelnen, dünnen Fasern besteht, die sich gegenseitig nicht beeinflussen. Dieses vereinfachte Bild stimmt natürlich nicht mit der Wirklichkeit überein, ist aber (wie die Erfahrung zeigt) in vielen Fällen durchaus zulässig und hat den großen Vorteil, die Spannungsberechnung erheblich zu vereinfachen.

Die Theorie setzt voraus, daß der Körper ursprünglich spannungsfrei ist. Durch die Behandlung des Materials (Härten) oder durch Formgebung (Gießen, Schweißen) können aber bedeutende Anfangsspannungen auftreten, deren Größe nicht leicht zu bestimmen ist. (Vgl. S. 3).

Zur Spannungsberechnung geht man von der allgemeinen Überlegung aus, daß nicht nur der ganze Körper, sondern auch jedes beliebige daraus abgetrennte Stück im Gleichgewicht ist, wenn die an der Trennfläche wirkenden Spannungen daran als äußere Kräfte angebracht werden.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen für den abgetrennten Teil können Beziehungen zwischen den Spannungen und den äußeren Kräften abgeleitet werden, die aber zur Berechnung der Spannungen nicht ausreichen, weil nicht bekannt ist, wie diese auf der Trennfläche verteilt sind. Jede angenommene Spannungsverteilung, die den Gleichgewichtsbedingungen genügt, ist eine mögliche Lösung des Problems. Die Statik allein reicht zur Spannungsberechnung nicht aus; die Aufgabe ist statisch unbestimmt. Um die Spannungsverteilung zu berechnen, müssen die Formänderungen des Körpers berücksichtigt werden.

¹ Mém. Savants étrangers. Vol. 14 (1885).

Die Normalspannung σ ruft eine Längenänderung hervor; wenn ds die ursprüngliche Länge in der Richtung der Spannung σ ist und Δds die Längenänderung, so wird $\Delta ds/ds = \varepsilon$ die Dehnung (in der Richtung von σ) genannt. Die Erfahrung (Beobachtung) zeigt, daß die Zugspannung nicht nur eine Dehnung, sondern infolge des allseitigen Zusammenhanges des Werkstoffes gleichzeitig senkrecht zur Dehnung auch Querkontraktionen ε_q hervorruft (Abb. 11.1) die der Normalspannung σ proportional sind, und zwar ist:

$$\frac{\varepsilon}{-\varepsilon_q} = m \quad \text{oder} \quad -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon} = 1/m = \nu. \quad (11.1)$$

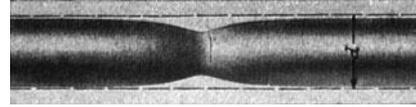


Abb. 11.1 . Querkontraktion (aus Graf).

Die Poissonsche Zahl m (resp. die Querszahl ν) hängt vom Werkstoff ab. Sie nimmt mit zunehmender Temperatur langsam ab und nähert sich gegen die Schmelztemperatur dem unteren Grenzwert 2 für plastische Verformung. Für Stahl bei Zimmertemperatur ist es gebräuchlich $m = 10/3$ zu setzen. Die Schubspannung τ verursacht eine Winkeländerung γ .

Zwischen den Spannungen und den Formänderungen, die beide durch die äußeren Kräfte verursacht werden, muß ein Zusammenhang vorhanden sein. Das Hookesche Gesetz¹ (das allen Festigkeitsrechnungen zugrunde liegt) sagt nun aus, daß die Spannungen den Formänderungen proportional sind:

$$\sigma = \varepsilon E \quad (11.2)^2$$

und

$$\tau = \gamma G \quad (11.3)^2$$

In diesen Gleichungen sind E und G Proportionalitätsfaktoren, also vom Material abhängige Erfahrungszahlen; da ε und γ dimensionslose Größen sind, haben E (Spannungsmodul) und G (Schubmodul) die Dimension einer Spannung.

Die drei Stoffwerte E , G und m sind nicht unabhängig voneinander; für isotrope Körper ist

$$G = \frac{m}{2(m+1)} E \quad \text{und mit } m = 10/3 \text{ (Stahl) ist } G = 0,385 E. \quad (11.4)$$

Das Hookesche Gesetz, richtiger die Hypothese des englischen Physikers Hooke wurde bis etwa gegen 1890 als ein allgemein gültiges Naturgesetz angesehen. Professor C. von Bach (Stuttgart) hat zuerst experimentell festgestellt, daß diese Annahme nur für wenige Baustoffe und innerhalb enger Grenzen gültig ist. Seither hat man in den Materialprüfanstalten ausgedehnte Versuche durchgeführt, um den wirklichen Zusammenhang zwischen Spannungen und Formänderungen zu erforschen.

Wird ein Flußeisenstab in einer Materialprüfmaschine eingespannt, welche die Linie der Längenänderungen selbsttätig aufzeichnet, so erhalten wir etwa das in Abb. 11.2 dargestellte Bild. Die Gestalt der Kurve ändert sich nicht, wenn an Stelle der Kräfte die Spannungen $\sigma = P/f$ und an Stelle der Längenänderungen die Dehnungen $\varepsilon = \Delta l/l$ aufgetragen werden. Wie daraus ersichtlich, nehmen die Dehnungen tatsächlich anfänglich geradlinig mit den Span-

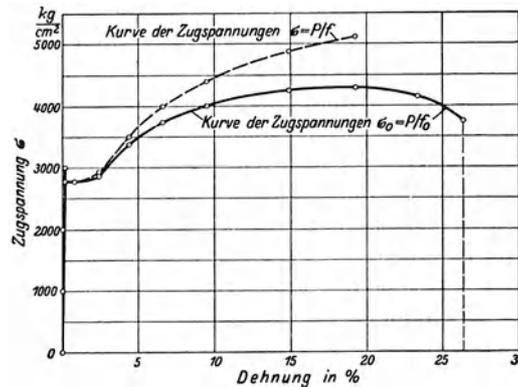


Abb. 11.2. Spannungs-Dehnungslinie für weichen Stahl (aus Nadai, Werkstoffe).

¹ Hooke hat das Gesetz im Jahre 1660 gefunden, aber erst 1676 unter dem Anagramm ceiiinossttuv (ut tensio sic vis) und 1678 in seinem Buch veröffentlicht.

² Prof. C. v. Bach hat $1/E = \alpha$, die Dehnungszahl, und $\beta = 1/G$ (Schubzahl), als Proportionalitätsfaktoren vorgeschlagen. Sein Sohn (Prof. Julius Bach, Chemnitz) tritt ebenfalls lebhaft für die „anschaulichere“ Dehnungszahl ein (Masch.-Konstr.-Betr.-Techn. Bd. 63 [1930] Heft 8), die darauf beruht, daß die Dehnungen um so größer werden, je größer α ist; α ist demnach ein Maß für die Elastizität des Werkstoffes ($\varepsilon = \alpha \cdot \sigma$). Der umgekehrte Begriff $E = 1/\alpha$ ist ein Maß für die Starrheit und sagt aus, daß die Spannungen um so größer werden, je größer E ist. Deshalb der Namen „Spannungsmodul“; die Bezeichnung Elastizitätsmodul, die fast immer gebraucht wird, ist natürlich irreführend, weil darunter ebenfalls ein Maß für die Elastizität verstanden werden könnte, was natürlich nicht der Fall ist. Auch Starrheits- oder Steifigkeitsmodul ist vorgeschlagen worden; man kann auch einfach „E-Wert“ sagen. Beide Begriffe α und E sind aber gleich anschaulich und auch gleichberechtigt; die Dehnungszahl α bei Betrachtung der Formänderungen, der Spannungsmodul E bei der Berechnung der Spannungen.

nungen zu, bis zur sog. Proportionalitätsgrenze (σ_p)¹. Dann biegt die Linie etwas ab, bis zur Streck-, Fließ- oder Plastizitätsgrenze, wo die Dehnungen sehr rasch zunehmen, ohne Zunahme (oft sogar bei Abnahme) der Belastung. Wird die Belastung weiter fortgesetzt, so findet schließlich ein Zerreißen des Stabes nach vorheriger Einschnürung statt. Die maximale Spannung (K_z oder σ_B) wird Bruchfestigkeit genannt.

Für homogene Werkstoffe ist zu erwarten, daß diese Stoffwerte unabhängig von der Größe und von der Form des Querschnittes sind. Versuche mit reinem Aluminiumblech (hart) von 2 und 5 mm Dicke ergaben z. B. folgende Werte:

$$s = 2 \text{ mm}, \quad K_z = 16,5 \text{ kg/mm}^2, \quad \delta_{10} = 2,5\%, \quad \sigma_s = 15,9 \text{ kg/mm}^2.$$

$$5 \quad \quad \quad 13,8 \quad \quad \quad 3,5 \quad \quad \quad 13,4$$

Der Unterschied läßt sich durch die Änderung der Festigkeitseigenschaften der äußeren Schichten beim Kaltwalzen, also durch Inhomogenität erklären.

P. Oberhofer und W. Poensgen² haben gußeiserne Probestäbe von verschiedenem Durchmesser untersucht, wobei äußerste Sorgfalt darauf verwendet wurde, daß die Zusammensetzung des Eisens in allen Fällen die gleiche war. Das Ergebnis ist in Abb. 11.3 dargestellt und zeigt eine sehr starke Abnahme der Zugfestigkeit mit dem Stabdurchmesser. Auch diese Erscheinung läßt sich durch die Inhomogenität des Stabmaterials erklären. Die eingeschlossenen Graphitplättchen machen sich bei den kleinen Querschnitten nämlich sehr stark bemerkbar.

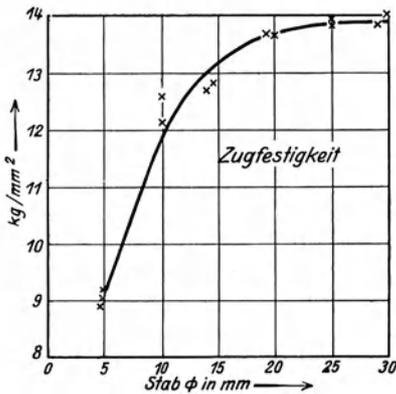


Abb. 11.3. Einfluß der Querschnittsform auf die Bruchfestigkeit von Gußeisen.

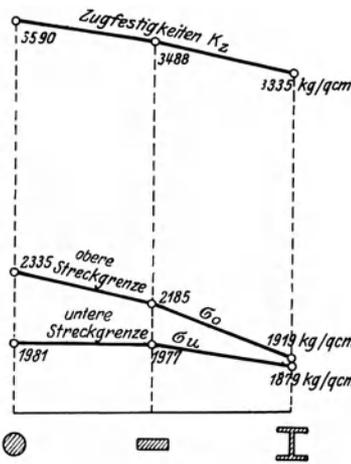


Abb. 11.4. Einfluß der Querschnittsform auf die Bruchfestigkeit von Schmiedeeisen (aus Bach-Baumann).

Die eingeschlossenen Graphitplättchen machen sich bei den kleinen Querschnitten nämlich sehr stark bemerkbar.

Versuche von v. Bach (Abb. 11.4) zeigten, daß selbst beim homogenen Flußeisen die Festigkeitseigenschaften (Streckgrenze, Bruchfestigkeit) von der Querschnittsform abhängen. Die oberen Streckgrenzen für Rundeisen und I-Eisen weichen um $\frac{2335 - 1919}{1919} \times 100 = 20\%$ voneinander ab. Diese Abweichungen lassen sich durch die gegenseitige Beeinflussung der einzelnen Fasern erklären. An der Gleichung $\sigma = P/f$ ändert sich nichts, wenn P von einem Stab von 10 cm^2 oder von 1000 Stäben à 1 mm^2 getragen wird, da f in beiden Fällen gleich 10 cm^2 ist. In Wirklichkeit ist dennoch ein Unterschied vorhanden, denn die 1000 Stäbe von je 1 mm^2 können sich unabhängig voneinander zusammenziehen; sie werden, wenn sie sich vorher gerade berührten, die Berührung infolge der Querkontraktion aufgeben. Die einzelnen Fasern des Stabes von 10 cm^2 besitzen diese Unabhängigkeit nicht, d. h. sie wirken senkrecht zur Stabachse aufeinander ein. Diese Einwirkung ist verschieden, je nach der Form des Querschnittes, und zwar um so kräftiger, je kleiner der Umfang im Vergleich zur Querschnittsfläche ist, z. B. beim Kreis intensiver als beim I-Profil. Der Spannungszustand ist also, genau gesehen, auch beim einfachen Zugversuch nicht einachsrig (in der Richtung der Faser), sondern räumlich.

Aus Abb. 11.2 folgt, daß die auf Grund der Hookeschen Annahme berechneten Spannungen niemals bis zur Bruchfestigkeit gelten. Der Flächeninhalt der Schaulinie stellt die zur Formänderung (resp. Bruch) aufgewandte Arbeit, das Arbeitsvermögen \mathcal{A} des Baustoffes dar, bezogen auf die Volumeneinheit.

Für Beanspruchungen innerhalb der Proportionalitätsgrenze sind die Formänderungen klein. Die Festigkeitsrechnung muß immer kleine Formänderungen voraussetzen, damit die Kräftezerlegung am verformten Teil durch die am unverformten ersetzt werden darf und damit der

¹ Unold, G.: Die Bezeichnungsweise in der Festigkeitslehre. Masch.-Bau 7 (1928) S. 308/310. — Kommerell: Der Werdegang des Normblattes 1350. Zeichen der Statik, Festigkeitslehre, Werkstoffprüfung. Masch.-Bau 8 (1929) S. 192/97. — Bach, J.: Stand der Neubearbeitung der Zeichen für die Festigkeitslehre. Masch.-Bau 11 (1932) S. 362/66.

² Stahl u. Eisen 1922, S. 1190.

Querschnitt sich bei der Verformung weder nach Größe noch nach Form ändert¹. Man vernachlässigt also bei der Festigkeitsrechnung, daß z. B. die Querschnittsfläche des Zugstabes infolge der Querkontraktion, kleiner wird und bezieht die Spannung auf den ursprünglichen Querschnitt f . Für die technologische Untersuchung der Werkstoffeigenschaften dagegen muß die Querschnittsänderung unbedingt berücksichtigt werden (Abb. 11,2).

Die Proportionalitätsfaktoren E (Zahlentafel 11.1) und G sind durch die verwickelte Kraftwirkung der Moleküle bedingt und müssen experimentell bestimmt werden. Die Genauigkeit der gemessenen Werte ist nicht groß (kleiner als $1 \div 2\%$). Nicht nur die chemische Zusammensetzung des Werkstoffes, sondern auch der Umstand ob er gegossen, gezogen, gehärtet oder kalt bearbeitet ist, hat einen erheblichen Einfluß auf E . Mit zunehmender Temperatur nimmt E stetig ab (Zahlentafel 11.2).

Zahlentafel 11.1. E -Werte in kg/mm^2 bei 15°C .

Iridium	52 700	Marmor	3000
Korund	52 000	Granit	2400
Topas	29 000	Blei	1500
Stahl	21 500	Holz	500—1250
Platin	16 500	Elfenbein	900
Kupfer	12 000	Sandstein	800
Gold	9 000	Eis	300
Gußeisen	7—10 000	Paraffin	170
Duralumin	6500—8000	Wachs	50
Glas	4700—8200	Kautschuk	0,02—0,8
Zinn	4500	Gelatine	0,02

Zahlentafel 11.2.
 E -Werte in kg/mm^2 für Stahl, legiert, bei verschiedenen Temperaturen.

15°C ist $E = 21\,500 \text{ kg/mm}^2$	
100	21 200
200	20 500
300	19 000
400	19 000
500	17 600
600	15 600
700	13 100

Die Bruchdehnung $\delta = 100 \frac{\Delta l}{l}$ (in Abb. 11.2 etwa 26%) gilt als Maß für die Zähigkeit des Werkstoffes. Wie die Beobachtung zeigt, tritt kurz vor der Bruchgrenze eine starke örtliche Einschnürung des Stabes ein, die mit einer verhältnismäßig großen Dehnung an dieser Stelle verbunden ist. Die Bruchdehnung setzt sich also aus der Dehnung des ganzen Stabes und aus der Dehnung an der Einschnürung zusammen, und ist demnach von der ursprünglichen Länge abhängig. Um allgemein gültige Vergleichswerte zu erhalten, verwendet man Normalstäbe. Früher waren dafür Rundstäbe mit einer Länge $l = 10 d$ gebräuchlich, die für viele Zwecke zu teuer (hochwertige Stähle) oder unmöglich sind (Unfälle). Darum gehört zu dem Wert δ immer die Angabe der Länge².

Nicht alle Baustoffe zeigen ein ähnliches Verhalten zwischen Spannungen und Dehnungen wie Flußeisen. Man unterscheidet aber zwei Gruppen von Materialien: Zähhe, die sich ähnlich wie Flußeisen, und spröde, die sich etwa wie Gußeisen verhalten (Abb. 11.5). Diese haben keine so ausgesprochene Streckgrenze und auch viel kleinere Dehnungen bis zum Bruch. Zwischen den beiden extremen Fällen können natürlich alle möglichen Zwischenwerte vorkommen.

Die Streckgrenze ist aber ein praktisch sehr wichtiger Begriff, denn es ist ja klar, daß die Materialien in Maschinen jedenfalls nicht bis zur Streckgrenze beansprucht werden dürfen, da sonst große bleibende Formänderungen auftreten. Es ist daher in der Praxis üblich, allgemein von einer Streckgrenze zu sprechen, die dadurch festgelegt ist, daß die Dehnung einen bestimmten Betrag erreicht. Das Maß dieser Dehnung ist dann willkürlich, und so nimmt z. B. Krupp eine Dehnung von 0,3% ($\epsilon_s = 0,003$) an der Streckgrenze an.

Für Gußeisen gilt das Hookesche Gesetz nicht, das darf nicht vergessen werden, wenn Festigkeitsrechnungen an gußeisernen Körpern durchgeführt werden. Die Poissonsche Zahl ist nicht konstant und größer als für Flußeisen; $m = 5$ bis 9. Man hat versucht, das Hookesche Gesetz durch eine andere Beziehung zwischen Spannung und Dehnung zu ersetzen, die bis zur Bruchgrenze gültig bleibt. Aus diesem Wunsche ist das Potenzgesetz entstanden: $\sigma^n = \epsilon E$, das namentlich für spröde Werkstoffe, gute Übereinstimmung mit der

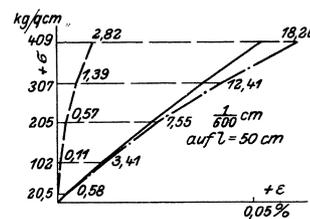


Abb. 11.5. Spannungs-Dehnungslinie für Gußeisen (aus Bach-Baumann, Festigkeitseigenschaften).

¹ Kürzlich hat L. Föppel: Eine neue elastische Materialkonstante, Ing.-Arch. Bd. 7 (1936) S. 229/236, darauf hingewiesen, daß es für die Erklärung mancher Erscheinung, insbesondere bei einer ungleichmäßigen Formänderung des Körpers (Biegung, Kerbwirkung, usw.) zweckmäßiger ist, die Spannung auf das „verformte“ Flächenelement zu beziehen.

² Umrechnung von $l = 10 d$ auf $l = 5 d$ im VDI-Forschungsheft Nr. 215, Dr. Rudeloff, $\delta_{5d} = 1,25 \delta_{10d}$.

Erfahrung zeigt. Nun hat aber eine solche Beziehung nur dann praktischen Wert, wenn die Werte E und n für ein und dasselbe Material auch wirklich unveränderliche Stoffwerte sind. Wie genaue Untersuchungen zeigen, ist das jedoch nicht der Fall, so daß die Praxis kein Interesse hat, dieses verwickeltere Gesetz als Grundlage für die Rechnungen zu wählen. Man kann aber immer (mit mehr oder weniger Genauigkeit) Teilstrecken einer Kurve durch eine Gerade ersetzen und so den E -Wert innerhalb bestimmter Spannungsgrenzen festlegen. Er ist dann eine veränderliche vom Spannungszustand abhängige Größe, die außerdem noch von der Gußqualität abhängt (Abb. 11.6), z. B. für Gußeisen: $E = 8000$ bis 14000 kg/mm^2 .

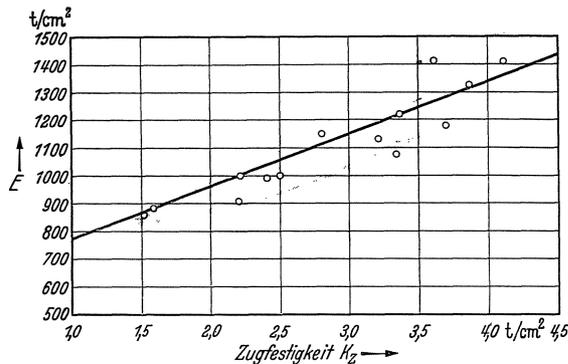


Abb. 11.6. E -Wert für Gußeisen in Abhängigkeit von K_2 . (Diskussionsbericht Nr. 37 der EMPA, Zürich, 1928).

Formänderungen so klein sind, daß sie als praktisch zulässig anzusehen sind. Die Spannung, die zu dieser Dehnung gehört, wird dann auch als Elastizitätsgrenze bezeichnet. Wie aus dieser Definition hervorgeht, ist die Elastizitätsgrenze dann nicht nur durch die Natur der Materialien bestimmt, sondern durch die Empfindlichkeit der Meßinstrumente oder durch die eigentlich beliebige Annahme einer kleinen, zulässigen, bleibenden Formänderung. Nach Festsetzung des Internationalen Materialprüfungskongresses (Brüssel 1906) darf die bleibende Formänderung an der Elastizitätsgrenze 0,001% betragen. Dieser Wert ist aber für die Praxis viel zu klein; Krupp bezeichnet als Elastizitätsgrenze diejenige Spannung, bei der die bleibende Dehnung 0,03% erreicht, also zehnmal so klein ist als die ähnlich definierte Streckgrenze.

Nach der gegebenen Definition hat jeder Werkstoff seine Elastizitätsgrenze, während z. B. Gußeisen keine Proportionalitätsgrenze hat. Wenn man (wie es oft geschieht) von der Elastizitäts- oder Proportionalitätsgrenze spricht, so ist das in dieser allgemeinen Form jedenfalls nicht richtig; nur für Stahl fallen beide Grenzwerte nahezu zusammen.

Formänderungsarbeit. Der Ingenieur interessiert sich in vielen Fällen weniger für das ganze Spannungsfeld oder für die Formänderung der ganzen Stabachse, sondern es genügt ihm die größten (gefährlichsten) Spannungen und Formänderungen zu kennen, die bei seiner Konstruktion auftreten. Dadurch kann die Berechnung oft erheblich vereinfacht werden. Bei der Berechnung der Formänderungen bietet dann der Satz von Castigliano bedeutende Vorteile. Auf einen Körper, der anfänglich spannungslos ist, wirken beliebige von Null an wachsende Kräfte

$$Q_1, Q_2 \dots Q_i \dots Q_n,$$

die den Körper verformen und dadurch eine Formänderungsarbeit \mathfrak{A} leisten. Nennen wir die Verschiebungen der Angriffspunkte in den Richtungen der Kräfte

$$q_1, q_2 \dots q_i \dots q_n,$$

dann sagt der Satz von Castigliano:

$$q_i = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial Q_i} \quad (11.5)$$

Die Verschiebung des Angriffspunktes einer Kraft in Richtung der Kraft ist gleich der *partiellen* Ableitung der Formänderungsarbeit nach dieser Kraft.

Beweis: Nachdem die Formänderung stattgefunden hat, läßt man die Kraft Q_i noch um den Betrag dQ_i zunehmen, wodurch sich die Angriffspunkte der Kräfte verschieben. Die hierbei

verrichtete Arbeit hat die Größe $d\mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial Q_i} dQ_i^*$, so daß die gesamte Formänderungsarbeit nun

$$\mathfrak{A} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial Q_i} dQ_i$$

ist. Derselbe Formänderungszustand kann noch in einer anderen Weise erreicht werden. Man läßt zuerst die Kraft dQ_i allein wirken. Dabei wird eine Arbeit verrichtet, die unendlich klein zweiter Ordnung ist, und gegenüber den anderen Formänderungsarbeiten vernachlässigt werden kann. Nun bringen wir wieder die Kräfte $Q_1, Q_2 \dots Q_i \dots Q_n$ an, von Null an wachsend, wobei die verrichtete Arbeit wieder gleich \mathfrak{A} ist. Während diese Kräfte wachsen, bleibt die Kraft dQ_i beständig wirksam, und der Angriffspunkt dieser Kraft wird also um die Strecke q_i verschoben. Die totale Formänderungsarbeit ist nun

$$\mathfrak{A} + q_i dQ_i.$$

Da in beiden Fällen der Endzustand derselbe ist, muß $\mathfrak{A} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial Q_i} dQ_i = \mathfrak{A} + q_i dQ_i$

oder $q_i = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial Q_i}$ (q. e. d.) sein.

In ähnlicher Weise läßt sich beweisen, daß die Verdrehung durch ein Moment gleich der partiellen Ableitung der Formänderungsarbeit nach dem Momente ist, also:

$$\gamma_i = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial M_i} \tag{11.6}$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit gehört zu den bekanntesten Sätzen der Statik und sagt aus, daß Kräfte, die alle an einem Punkte oder an einem starren Körper angreifen, sich das Gleichgewicht halten, wenn für jede virtuelle Verschiebung, die den vorgeschriebenen Bedingungen genügt, die algebraische Summe der Arbeiten aller Kräfte gleich Null ist:

$$\Sigma (P \cdot s) = 0.$$

Dieser Satz gilt auch für den elastischen Körper, da jeder davon abgetrennte Teil in Gleichgewicht ist, wenn an der Trennfläche die inneren Spannungen als äußere Kräfte angebracht werden. Diese inneren Spannungen leisten aber bei der elastischen Formänderung eine Arbeit, die Formänderungsarbeit $\delta \mathfrak{A}$, d. i. die Änderung (Variation) der Formänderungsarbeit infolge irgendeiner möglichen (virtuellen, aber nun sehr kleinen) Verschiebung. Das Prinzip lautet dann:

$$\int \sigma \cdot \delta s \cdot df = \delta \mathfrak{A}$$

und gilt wieder für jede (nun sehr kleine) Verschiebung, welche den Bedingungen genügt: Man kann aus den vielen möglichen Verschiebungen auch solche wählen, bei denen die Angriffspunkte aller äußeren Kräfte überhaupt keine Verschiebungen erfahren, also reine Formänderungen des Körpers. Dann vereinfacht sich das Prinzip zu

$$\delta \mathfrak{A} = 0. \tag{11.7}$$

Diese Gleichung kann dazu benutzt werden, um daraus die Gestalt der elastischen Linie des Körpers abzuleiten, und sagt aus: Die wahre Gestalt der elastischen Linie folgt aus der Bedingung, daß beim Übergang von irgendeiner Nachbarlinie die Formänderungsarbeit zu einem Extremum wird. Soll aber die Gleichgewichtslage stabil sein, so muß \mathfrak{A} ein Minimum (also $\delta^2 \mathfrak{A}$ positiv) werden, damit stets Arbeit äußerer Kräfte geleistet werden muß, um die Gleichgewichtslage zu stören, also: Für die wirkliche Gestaltsänderung ist die Formänderungsarbeit ein Minimum. (Prinzip des kleinsten Zwanges.)

Es ist gebräuchlich über die Formänderung des Körpers eine andere, einfachere Aussage zu machen, indem auf Grund der Beobachtungen festgestellt wird, daß ursprünglich ebene Querschnitte bei der Formänderung eben bleiben. Es läßt sich auch nachweisen, daß die Querschnitte nur dann eben bleiben können, wenn die Formänderungen durch die Schubspannungen

* Die Formänderungsarbeit \mathfrak{A} ist von allen Kräften Q abhängig, oder $\mathfrak{A} =$ Funktion $(Q_1, Q_2 \dots Q_i \dots Q_n)$. Nach den Regeln der Mathematik ist dann die Ableitung

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dQ_i} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial Q_1} \cdot \frac{dQ_1}{dQ_i} + \dots + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial Q_i} \cdot \frac{dQ_i}{dQ_i} + \dots + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial Q_n} \cdot \frac{dQ_n}{dQ_i}.$$

Nun sind alle Kräfte voneinander unabhängig, so daß $\frac{dQ_1}{dQ_i} = 0 = \frac{dQ_n}{dQ_i}$, mit Ausnahme von $\frac{dQ_i}{dQ_i} = 1$. Damit wird

$$d\mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial Q_i} dQ_i.$$

gegenüber denen durch die Normalspannungen vernachlässigt werden dürfen. Die Voraussetzung, daß die Querschnitte eben bleiben ist bei Zug- und Biegebeanspruchung des prismatischen Stabes fast immer zulässig; sie versagt aber (mit Ausnahme des Kreisquerschnittes) bei Verdrehungsbeanspruchung (vgl. Abschn. 12.3).

Das eben bleiben der Querschnitte ist als allgemeine Grundlage für die Formänderung auch unabhängig von der Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes. Es gilt, wie C. von Bach durch sorgfältige Versuche nachgewiesen hat, auch für Gußeisen. Ja sogar im plastischen Gebiet wird das eben bleiben der Querschnitte durch Biegeversuche von Eugen Meyer¹ bestätigt.

Die „elementare“ Festigkeitslehre befaßt sich weiter ausschließlich mit der Berechnung von sehr einfachen Körpern, insbesondere von prismatischen Stäben. Wenn sie auch in fast allen Hand- und Lehrbüchern stillschweigend auf veränderliche Querschnitte angewandt wird, so zeigt Theorie und Erfahrung, daß hier die allergrößte Vorsicht am Platz ist.

Sie gestattet die Berechnung der Spannungen und der Formänderungen für folgende drei einfache Belastungsfälle des Stabes:

1. Eine Einzelkraft wirkt in der Richtung der geraden Stab-(Schwer-)achse. (Zug- resp. Druckbeanspruchung. Abschn. 12.1).
2. Die Kräfte wirken in einer Ebene, die durch die Stabachse geht und stehen senkrecht zur Stabachse (Biegung. Abschn. 12.2).
3. Die Kräfte wirken in einer Ebene, senkrecht zur Stabachse und bilden ein Kräftepaar (Verdrehung. Abschn. 12.3).

Der allgemeine Fall, daß auf einen Stab beliebig gerichtete Kräfte wirken, läßt sich immer durch Übereinanderlagerung (Superposition) dieser drei Grundfälle lösen (Abschn. 12.4).

Superpositionsgesetz. Erfährt ein Körper unter dem Einfluß irgendeiner Belastung eine elastische Formänderung und verursacht eine zweite Belastung (die von der ersten völlig verschieden sein kann), ebenfalls nur elastische Formänderungen, so überlagern sich beim Zusammenwirken beider Belastungen die Formänderungen und Spannungen ungestört.

Die Superposition, die meist als Erfahrungstatsache bezeichnet wird, ist eine Eigenschaft der linearen Differentialgleichungen mit homogenen Randbedingungen; sie gilt bei vollkommen elastischen Formänderungen nur innerhalb des Hooke'schen Gesetzes.

12. Spannungen und Formänderungen in prismatischen Stäben.

12.1. Einzelkraft wirkt genau in der Richtung der geraden Stabachse (Zug- resp. Druckbeanspruchung).

Wenn wir genügend weit von den Kraftangriffsstellen (Kopf oder Auge, Abb. 12.1) entfernt bleiben, folgt aus der Bedingung, daß die ursprünglich ebenen Querschnitte senkrecht zur Stabachse eben bleiben, in Verbindung mit dem Hooke'schen Gesetz, daß die Spannungen in dem prismatischen Stab gleichmäßig über den Querschnitt verteilt sind.

$$\sigma = P/f. \quad (12.1)$$

Die Verlängerung Δl der ursprünglichen Stablänge l folgt aus der Definition der Dehnung in Verbindung mit dem Hooke'schen Gesetz zu

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{\sigma}{E} l = \frac{P \cdot l}{f \cdot E}. \quad (12.2)$$

Druckbeanspruchung kann, solange keine Knickgefahr vorhanden ist, als eine Umkehrung des Zugversuches betrachtet werden. Die Druckspannungen werden negativ, $\sigma = \frac{-P}{f}$ und auch die Dehnungen sind entgegengesetzt gerichtet. Die Spannungsdehnungslinie wird also einfach ins negative Gebiet verlängert; man spricht von der Quetschgrenze an Stelle der Fließgrenze.

Da P von Null an stetig zunimmt, ist die Formänderungsarbeit (Abb. 12.2)

$$\mathfrak{A} = \frac{P \cdot \Delta l}{2} = \frac{P^2}{2fE} \cdot l = \frac{\sigma^2}{2E} f \cdot l = \frac{\sigma^2}{2E} V. \quad (12.3)$$

worin $V = f \cdot l$ das Stabvolumen ist.

Nach dem Satz von Castigliano ist die Längenänderung:

$$\Delta l = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{P^2}{2f \cdot E} \cdot l \right) = \frac{Pl}{f \cdot E}$$

in Übereinstimmung mit Gl. (2).

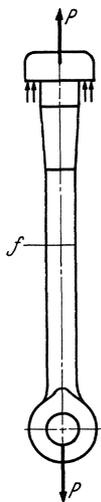


Abb. 12.1.
Zugversuch.

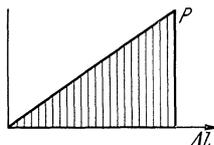


Abb. 12.2.
Formänderungsarbeit
für Zug.

¹ Z. VDI 1908, S. 197.

Wird der Stab plötzlich (ohne Stoß) der Einwirkung der ganzen Kraft P ausgesetzt, so treten größere Spannungen auf. Nennen wir die maximale Verlängerung in diesem Fall Δl_d , dann ist die Arbeit der Kraft P gleich $P \times \Delta l_d$. Zunächst sieht man leicht ein, daß $\Delta l_d > \Delta l$ für die allmählich gesteigerte Kraft P sein muß, denn wenn die elastische Formänderung Δl erreicht ist, hat P die Arbeit $P \cdot \Delta l$ geleistet, die nach den früheren Untersuchungen doppelt so groß ist wie die bei dieser Formänderung aufgespeicherte potentielle Energie. Die andere Hälfte muß sich daher in kinetischer Energie der Massen umgesetzt haben, wodurch Schwingungen um die Gleichgewichtslage entstehen, die erfahrungsgemäß rasch ausklingen. Wie groß müßte eine allmählich aufgebrauchte Last P' sein, um die gleiche Verlängerung Δl_d hervorzubringen? Das folgt aus dem Vergleich der Arbeiten:

$$P' \frac{\Delta l_d}{2} = P \cdot \Delta l_d \quad \text{oder} \quad P' = 2 P .$$

Beim plötzlichen Aufbringen der Last wird der Stab doppelt so stark beansprucht, als wenn er dieselbe Last im Gleichgewichtszustande trägt.

Da die Formänderungsarbeit dem Quadrat der Spannung proportional ist, wird sie bei plötzlicher Belastung viermal so groß als bei statischer Belastung:

$$W_d = 4 \cdot \frac{\sigma^2}{2E} \cdot V .$$

Bei sehr langen Stäben (Drahtseilen) ist auch das Eigengewicht zu berücksichtigen. Bei Förderseilen, die mit 20 t am Ende belastet sind, kann das Seilgewicht 15 t betragen und darf dann sicher nicht mehr vernachlässigt werden. Die größte Zugspannung ist dann:

$$\sigma_{max} = (P + G)/f \tag{12.4}$$

und die totale Verlängerung, aus der Superposition von P und G :

$$\Delta l = \frac{PL}{fE} + \frac{Gl}{2fE} = \frac{l}{fE} \left(P + \frac{G}{2} \right) . \tag{12.5}$$

Wirkung der Fliehkräfte. Der Stab drehe sich nun mit der Winkelgeschwindigkeit ω (Abb. 12.3). Die Fliehkraft, die den Querschnitt im Abstände x vom Stabende auf Zug beansprucht ist $m_x r \omega^2$, worin $m_x = x f \gamma / g$ die Masse und $r_x = (r_i + l - x/2)$ der Schwerpunktsradius des abgetrennten Teiles ist. Die Spannung in dem Schnitt x

$$\sigma_x = \frac{\gamma}{g} \omega^2 \left(r_i + l - \frac{x}{2} \right) x$$

wird im prismatischen Teil des Stabes am größten für $x = l$:

$$\sigma_{max} = \frac{\gamma l}{g} \left(r_i + \frac{l}{2} \right) \omega^2 . \tag{12.6}$$

Die Verlängerung Δdx der Strecke dx folgt aus:

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon = \frac{\sigma_x}{E} \quad \text{zu} \quad \Delta dx = \frac{\sigma_x}{E} dx$$

und die totale Verlängerung

$$\Delta l = \int_0^l \frac{\sigma_x}{E} dx = \frac{1}{E} \frac{\gamma \omega^2}{g} \int_0^l \left(r_i + l - \frac{x}{2} \right) x dx = \frac{\gamma \omega^2 l^2}{gE} \left(\frac{r_i}{2} + \frac{l}{3} \right) . \tag{12.7}$$

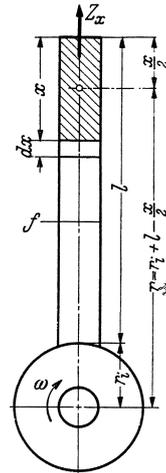


Abb. 12.3. Wirkung der Fliehkräfte.

Diese Gleichungen werden z. B. verwendet für die Berechnung der Arme eines Schwungrades oder von Propellerflügeln. Der Arm- resp. Flügelquerschnitt nimmt aber nach außen hin ab, so daß die Aufgabe dann am zweckmäßigsten graphisch gelöst wird¹. Man vergißt aber dabei, daß diese Gleichungen nur für den prismatischen Stab gültig sind und die Bruchgefahr bei verjüngten Stäben stark unterschätzen. Schon bei der einfachen Zugbeanspruchung zeigt die Überlegung, daß, wenn die einzelnen Querschnitte bei einem verjüngten Stab eben bleiben, also die Dehnungen der einzelnen Fasern gleich sind, die Spannungen dann nicht mehr gleichmäßig über den Querschnitt verteilt sein können (vgl. Abschn. 15.2). Außerdem treten gleichzeitig Schubspannungen auf, so daß die elementare Festigkeitslehre nicht in der Lage ist, in solchen Fällen die wirklich auftretenden Beanspruchungen mit der erforderlichen Genauigkeit zu berechnen.

¹ Vgl. z. B. Tolle: Regelung der Kraftmaschinen, 3. Aufl. S. 303. Berlin: Julius Springer 1921.

12.2. Die Kräfte wirken in einer Ebene, die durch die Stabachse geht.

12.21. Biegung gerader Stäbe. Der beidseitig unterstützte Stab (Abb. 12.4) wird sich unter der Wirkung dieser Kräfte, die beliebig zur Stabachse gerichtet sein können, verformen und zwar so, daß die oberen Fasern verkürzt (Spannungen negativ) und die unteren gedehnt werden (Spannungen positiv). Irgendwo muß also in jedem Querschnitt eine Stelle vorhanden sein, wo die Spannung gleich Null wird. Die Verbindungslinie dieser Stellen heißt neutrale Faserschicht; die gebogene Stabachse wird elastische Linie genannt.

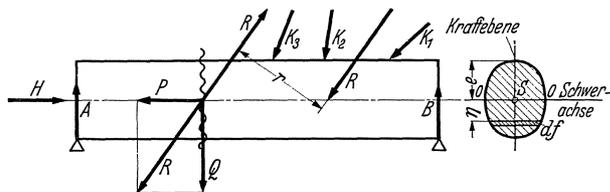


Abb. 12.4.

Wir schneiden den Stab nun in zwei Teile durch einen ebenen Schnitt, senkrecht zur Stabachse. Da der Stab vor dem Zerschneiden im Gleichgewicht war, so ist jeder Teil nach dem Zerschneiden wieder im Gleichgewicht, sofern die inneren Spannungen als äußere Kräfte an der Trennfläche angebracht werden. Wenden wir darauf die Gleichgewichtsbedingungen an, so muß 1. die Summe der Kräfte und 2. die Summe der Momente gleich Null sein.

Die äußeren Kräfte auf einer Seite des Schnittes, einschließlich der Reaktion B , können wir (nach der Lehre der Statik) immer zusammenfassen durch eine durch den Schwerpunkt des Schnittes gehende Resultierende R und durch ein Kräftepaar mit dem Momente $M = Rr$. Die Kraft R kann weiter in zwei Komponenten zerlegt werden, wovon die eine in der Schnittebene wirkt und Querkraft, Scherkraft oder Schubkraft genannt wird. Die Wirkung der anderen senkrecht zur Schnittebene wirkende Komponente P , die den Stab auf Zug-, resp. Druck beansprucht, ist in (Abschn. 12.1) schon behandelt und kann jetzt vernachlässigt werden. Wir nehmen also an, daß die äußeren Kräfte senkrecht zur Stabachse wirken. Das Moment M wird Biegemoment genannt.

Die Querkraft ist also gleich der Resultierenden sämtlicher Kräfte auf einer Seite des Schnittes, und das Biegemoment = Summe der Momente sämtlicher Kräfte, ebenfalls auf einer Seite des Schnittes. Bei diesen Definitionen liegt der Nachdruck auf dem Wort „sämtliche“, wobei zu den äußeren Kräften immer auch die Reaktionen zu rechnen sind. Es ist natürlich gleichgültig, auf welcher Seite des Schnittes die Summe genommen wird, da der Stab sich im Gleichgewicht befindet. Der Ingenieur muß (aus wirtschaftlichen Gründen) immer zuerst überlegen, von welcher Seite die Berechnung von Q und M am raschesten zum Ziel führt, und diese Werte immer von der „bequemsten“ Seite des Schnittes aus berechnen.

Zwischen Biegemoment M und Querkraft Q besteht eine einfache Beziehung: Legen wir nämlich einen unendlich benachbarten Schnitt, so muß Q um den kleinen Betrag dx parallel zu sich verschoben werden. Dabei tritt ein Kräftepaar Qdx auf, das die Änderung des Momentes darstellt, also $dM = Qdx$, oder

$$Q = \frac{dM}{dx}. \quad (12.8)$$

Bei der zweiten Gleichgewichtsbedingung genügt es nicht, daß das statische Moment des aus den Spannungen gebildeten Kräftepaares der Größe nach gleich dem Biegemomente M sei, sondern beide Kräftepaare müssen auch in derselben Ebene liegen, welche Ebene — nach der Voraussetzung — durch die Stabachse geht. Wenn der Querschnitt des Stabes symmetrisch in bezug auf die Kräfteebene oder zentrisch symmetrisch in bezug auf den Schwerpunkt (Z-Querschnitt) ist, so ist diese Bedingung immer erfüllt. Die weiteren Betrachtungen beschränken sich also darauf, daß die Kräfte in einer Symmetrieebene wirken.

Die nächste Vereinfachung, die wir machen, ist, daß die Schubkraft Q zunächst vernachlässigt wird, d. h., wir vernachlässigen die in der Trennungsebene liegenden Komponenten der Spannungen, die Schubspannungen. Dadurch sind alle Spannungen parallel, nämlich senkrecht zur Schnittebene gerichtet, und die Gleichgewichtsbedingungen vereinfachen sich zu:

$$1. \int \sigma df = 0 \quad \text{und} \quad 2. \int \sigma \eta df = M,$$

wenn mit σ die Spannung im Flächenelement df in der Entfernung η von der Stabachse bezeichnet wird. Zur Integration dieser Gleichungen sollte die Spannungsverteilung über die Querschnittsfläche bekannt sein.

Da der ursprünglich ebene Querschnitt nach der Formänderung eben geblieben ist, sind die Dehnungen proportional mit den Entfernungen von der neutralen Faserschicht. Setzen

wir weiter die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes voraus, und daß E für den ganzen Querschnitt, d. h. sowohl für die Druck- als die Zugseite den gleichen Wert hat, dann folgt daraus, daß auch die Spannungen der Entfernung von der neutralen Faserschicht proportional sind, also $\sigma = \sigma_e \eta/e$, worin e die größte Entfernung von der neutralen Faserschicht und σ_e die darin auftretende Spannung ist (Abb. 12.5).

Diese letzte Voraussetzung schließt Gußeisen aus den Festigkeitsrechnungen aus, und wenn Versuche zeigen, daß für kleine Biegungen die Querschnitte auch hier eben bleiben, dann folgt daraus, daß für Gußeisen der Spannungsverlauf nicht geradlinig sein kann.

Führt man die Beziehung $\sigma = \sigma_e \eta/e$ in die Gleichgewichtsbedingungen ein, so wird:

$$1) \quad \int \sigma_e \frac{\eta}{e} df = \frac{\sigma_e}{e} \int \eta df = 0, \quad \text{oder} \quad \int \eta df = 0,$$

d. i. die Schwerpunktsbedingung, aus welcher folgt, daß die neutrale Faserschicht mit der Schwerachse zusammenfällt.

$$2) \quad \frac{\sigma_e}{e} \int \eta^2 df = M.$$

$\int \eta^2 df = J$ wird das Flächenträgheitsmoment [cm⁴] des Querschnittes in bezug auf die Biegeachse OO , und $J/e = W$ das Widerstandsmoment [cm³] genannt. Die Gleichung:

$$\sigma_e = \frac{M}{J} e = \frac{M}{W} \quad (12.9)$$

nennt man die Biegegleichung.

Für den Kreisquerschnitt (Abb. 12.6) ist

$$J = \frac{\pi}{64} d^4 \quad \text{und} \quad W = \frac{\pi}{32} d^3 = 0,1 d^3.$$

Für den Hohlkreis:

$$J = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) \quad \text{und} \quad W = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)/D$$

und bei kleinen Wandstärken: $s = \frac{1}{2} (D - d)$ und $d_m = \frac{1}{2} (D + d)$:

$$W = 0,78 s d_m^2.$$

Für den Rechteckquerschnitt (Abb. 12.7) ist:

$$J = \frac{1}{12} b h^3 \quad \text{und} \quad W = \frac{1}{6} b h^2.$$

Für andere Querschnittsformen s. Hütte, Bd. I (26. Aufl. 1931) S. 603/5 und für Normalprofile S. 763/786.

Aus Gl. (9) folgt, daß die größte Biegespannung (von welcher die Sicherheit der Konstruktion abhängt) an der Stelle des größten Biegemomentes auftritt, da für den prismatischen Stab $W = \text{konstant}$ ist. Der Konstrukteur zeichnet deshalb in erster Linie den Verlauf der Momente längs der Stabachse auf, d. i. die sog. Momentenfläche (vgl. Zahlentafel 12.1). Zur Konstruktion der Momentenfläche (und der Querkraftfläche) reichen die auf Seite 26 gegebenen Definitionen vollständig aus. Verwickelte Belastungen werden im mer auf bekannte, einfache Fälle zurückgeführt und dann superponiert.

Kreisquerschnitte nützen den Werkstoff sehr schlecht aus, da die größte (höchstzulässige) Spannungen nur in zwei Punkten A und B auftreten; bei Rechteckquerschnitten werden nur die äußersten Faserschichten AA und BB voll ausgenützt. Der Konstrukteur sollte bei Biegebeanspruchungen unbedingt zweckmäßigere Querschnittsformen wählen, das sind solche, die möglichst viel Werkstoff in großer Entfernung von der neutralen Faserschicht aufweisen, also z. B. Blechträger (Abb. 12.8). Die Aufgabe ist meist so gestellt, daß zu einem berechneten Widerstandsmoment (W cm³) ein passender Querschnitt zu wählen ist. Die Schwierigkeit der Aufgabe liegt darin, daß unendlich viele Lösungen der Aufgabe möglich sind. Wenn f die Fläche der angenieteten Teile ist, die durch ein dünnes Stehblech miteinander verbunden sind, so setzt sich das Trägheitsmoment aus zwei Teilen zusammen:

$$J = 2 J_f + J_{\text{steg}},$$

worin $J_f = J_s + F e^2$, wenn e die Entfernung des Schwerpunktes der Fläche von der Biegeachse und J_s das Trägheitsmoment der Fläche f in bezug auf ihre eigene Schwerachse, ist. Nun ist J_s klein im Verhältnis zu $f \cdot e^2$. Um eine einfache und übersichtliche Rechnung zu erhalten,

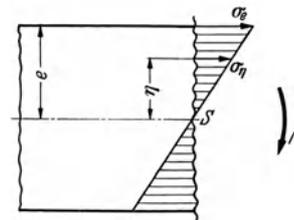


Abb. 12.5. Biegespannungen in einem geraden Stab.

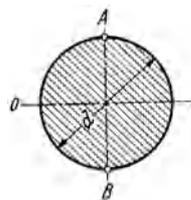


Abb. 12.6.

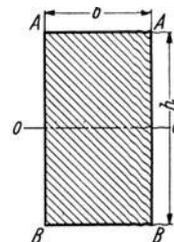


Abb. 12.7.

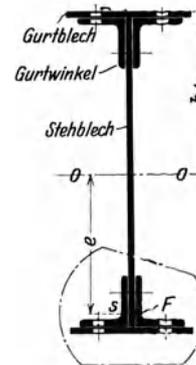


Abb. 12.8. Zweckmäßige Querschnittsform für Biegung.

Abb. 12.11 eingetragene Form. Die Spannungen in der Nähe der Schwerpunktsachse tragen nun um so mehr zur Übertragung des Biegemomentes bei, je mehr Material dort ist, z. B. für den Kreisquerschnitt mehr als für I. Wenn wir nun die Spannungen nach der Biegegleichung (9) rechnen (Linie ZOD), so folgt aus der Abbildung, daß die Zugspannung in der äußersten Faserschicht größer berechnet wird als die tatsächlich dort auftretende Spannung ist. Das ist eine äußerst wichtige Schlußfolgerung, denn da die größte Zugspannung die Tragfähigkeit des Balkens einschränkt, so folgt daraus, daß die übliche (hier falsche) Biegegleichung die Tragfähigkeit unterschätzt. Darin liegt eine Sicherheit, von der man gerne Gebrauch macht und die bei der Wahl der zulässigen Biegespannung wieder etwas ausgeglichen werden kann. Die Unterschätzung ist um so größer, je mehr Werkstoff in der Nähe der Schwerachse liegt.

Da die zulässige Druckspannung für Gußeisen 3- bis 4 mal so groß ist als die zulässige Zugspannung, so gibt man Gußteile, die auf Biegung beansprucht werden, mit Vorteil die in Abb. 12.12 dargestellte Querschnittsform. Wechselt aber das Biegemoment im Betrieb die Richtung, so kommen auch für Gußeisen nur Querschnitte in Frage, die symmetrisch zur Biegeachse sind.

Zur Berechnung der Formänderung betrachten wir ein Körperelement von der Länge dx (Abb. 12.13). Die Dehnung der äußersten Faserschicht ist:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{e d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{e}{\rho} \quad \text{und die Spannung} \quad \sigma_e = \varepsilon E = \frac{e E}{\rho}. \quad (12.10)$$

Den Wert von σ aus der Biegegleichung (9) eingesetzt, wird für kleine Durchbiegungen:

$$\frac{1}{\rho} = \pm y'' [1 + (y')^2]^{-3/2} \approx \pm \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{J E}, \quad (12.11)^1$$

d. i. die Gleichung der elastischen Linie. Wird der Stab kreisförmig gebogen ($\rho = \text{konst.} = D/2$), so folgt daraus mit der Biegegleichung und mit $e = \delta/2$ gleich der halben Dicke des Stabes:

$$\sigma = \frac{M}{J} \cdot \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{D} E. \quad (12.12)$$

Die Differentialgleichung der elastischen Linie ist nur dann leicht zu integrieren, wenn M/J eine einfache Funktion von x ist. In anderen Fällen führt die graphische Methode von Mohr rasch zum Ziel. Mohr vergleicht die Gleichung der elastischen Linie mit der Gleichung der Seillinie. Die Seillinie ist die Gleichgewichtslage eines vollkommen biegsamen Seiles, welches in zwei Punkten befestigt und nach einem bestimmten Gesetze belastet ist; p ist die Ordinate der Belastungskurve, und H der Horizontalzug.

Schneiden wir das Seil an irgendeiner Stelle A_1 und an der tiefsten Stelle durch, und bringen dort die Seilkraft S und H (Abb. 12.14) an, so ist das geschnittene Seil wieder im Gleichgewicht. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$$H = S \cos \alpha \quad \text{und} \quad \int_0^{A_1} p dx = S \sin \alpha$$

$$\text{oder} \quad \frac{S \sin \alpha}{S \cos \alpha} = \frac{\int p dx}{H} = \text{tg } \alpha = \frac{dy}{dx}. \quad (12.13)$$

Durch nochmalige Differentiation erhält man:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{p}{H}, \quad (12.14)^2$$

d. i. die Gleichung der Seillinie, die in bekannter Weise aus dem Kräfte- und Seilpolygon konstruiert werden kann. Diese Gleichung wird identisch mit der Gleichung der elastischen Linie, wenn $p = M$ und $H = J E$ ist. Satz von Mohr: Man kann die elastische Linie eines auf Biegung beanspruchten Körpers als eine Seillinie betrachten, deren Belastungsfläche mit der Momentenfläche übereinstimmt und deren Poldistanz $= J E$ ist.

Ist nun J veränderlich, so müßte man bei der Konstruktion der Seillinie jedesmal die Pol-

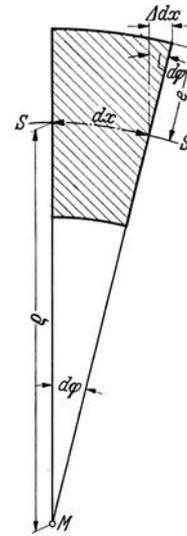


Abb. 12.13. Formänderung.

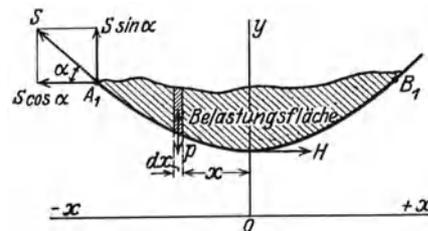


Abb. 12.14. Zur Gleichung der Seilcurve.

¹ Vgl. z. B. Hütte, Bd. 1, 26. Aufl., S. 113.

² Beide Differentialgleichungen gelten unter der Annahme, daß die Durchbiegungen klein sind.

distanz ändern. Das ist umständlich; deshalb formen wir die Gleichung der elastischen Linie etwas um, indem Zähler und Nenner mit dem beliebigen Faktor J_0 multipliziert wird:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{J_x E} = \frac{M J_0 / J_x}{J E_0}. \quad (12.15)$$

Die Gleichungen (11) u. (15) werden nun wieder identisch, wenn $p = M \cdot J_0 / J_x$ ist, d. h. wenn die Momente im Verhältnis J_0 / J_x verzerrt aufgezeichnet werden (verzerrte Momentenfläche)¹.

Eine kleine Schwierigkeit besteht darin, die „wirkliche“ Größe der Durchbiegung und des Neigungswinkels in den Auflagerstellen aus der konstruierten elastischen Linie zu entnehmen. Diese erhält man durch folgende Überlegung, wobei zu beachten ist, daß der Polabstand $H = JE$ die gleiche Dimension wie der Inhalt der verzerrten Momentenfläche hat, nämlich $\text{kg} \cdot \text{cm}^2$. Würde man beide Größen im Polygon im gleichen Maßstab zeichnen, so erhielte man die elastische Linie in der natürlichen Lage, was unzweckmäßig wäre, da diese nur sehr wenig von einer Geraden abweicht. Nimmt man dagegen für den Polabstand nur einen Bruchteil von JE , z. B. $H = JE/1000$, so erscheinen die Durchbiegungen 1000fach vergrößert. Ist der Längenmaßstab z. B. 1:50, so findet man den Biegepeil der konstruierten elastischen Linie im Maßstab 1000/50, also 20fach vergrößert (Anwendungsbeispiele in Abschn. 31.5).

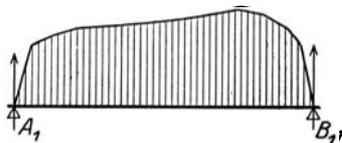


Abb. 12.15.

Aus der Gleichgewichtsbedingung der Seillinie (13) folgt mit $H = JE$:

$$J E \operatorname{tg} \alpha = A_1, \quad (12.16)$$

wenn A_1 die Auflagerreaktion eines mit der Momentenfläche belasteten Trägers $A_1 B_1$ ist. Die Stelle der größten Durchbiegung liegt dort, wo die Querkraft der Momentenfläche gleich Null wird.

Zahlenbeispiel 12.1. Wo tritt die größte Durchbiegung auf bei einem auf zwei Stützen frei gelagerten Träger mit Einzellast (Belastungsfall 4, Zahlentafel 12.1)? Wie groß ist die größte Durchbiegung und die Neigung bei der Auflagerstelle A ?

Man berechnet zuerst die Auflagerreaktion A_1 eines mit der dreieckigen Momentenfläche belasteten Trägers. Aus der Momentengleichung in bezug auf B_1 folgt:

$$A_1 \cdot l = \frac{P a^2 b}{2l} \left(\frac{a}{3} + b \right) + \frac{P a b^2}{2l} \cdot \frac{2}{3} b \quad \text{und} \quad A_1 = \frac{P a b}{2l^2} \cdot \frac{(a+b)(a+2b)}{3}.$$

Die Querkraft dieses Trägers wird zu Null, wenn

$$A_1 = \frac{P a b}{l} \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{x}{2} = \frac{P a b}{2l} \cdot \frac{a+2b}{3}$$

ist, also für $x_1 = a \sqrt{\frac{a+2b}{3a}}$.

Diese Gleichung ist nur gültig so lange $x_1 < a$, also $b < a$ ist. Für $b > a$ ist: $x_2 = b \sqrt{\frac{b+2a}{3b}}$. Denkt man den Träger nun an der Stelle der größten Durchbiegung eingespannt und durch die Reaktion A belastet, so folgt sofort aus Belastungsfall 1, Zahlentafel 12.1:

$$\alpha_A = \frac{P \frac{b}{l} \cdot x_1^2}{2JE} = \frac{P a b (a+2b)}{6JE l} \quad \text{und} \quad f_{\max} = \frac{P \frac{b}{l} x_1^3}{3JE} = \frac{P b a^3}{3JE l} \sqrt{\left(\frac{a+2b}{3a} \right)^3}.$$

Formänderungsarbeit. Da die Querkraft Q zunächst vernachlässigt wird, treten bei der Biegebeanspruchung nur Normalspannungen auf. Für ein unendlich kleines Volumenelement $dV = df \cdot dx$ ist die Formänderungsarbeit gleich $\frac{\sigma^2}{2E} dV$ [Gl. (3)]. Mit $\sigma = \frac{M}{J} \cdot \eta$ [Gl. (9)] wird

$$d^2 \mathfrak{A} = \frac{M^2}{2J^2 E} \eta^2 df \cdot dx.$$

Durch Integration über die ganze Querschnittsfläche f , bei welcher M , E und J als unveränderlich vor das Integralzeichen gesetzt werden, erhält man: $d\mathfrak{A} = \frac{M^2}{2J^2 E} dx \int \eta^2 df = \frac{M^2}{2JE} dx$

¹ Die graphische Konstruktion der Momentenfläche, wenn mehrere Kräfte auf dem Balken wirken, wird hier als bekannt vorausgesetzt (vgl. z. B. Taschenbuch „Hütte“ Bd. I, 26. Aufl. S. 215).

und durch Integration über die Länge l :

$$\mathfrak{U} = \int_0^l \frac{M^2}{2JE} dx = \frac{1}{2JE} \int_0^l M^2 dx. \quad (12.17)$$

Die Formänderungsarbeit eines auf Biegung beanspruchten prismatischen Stabes ($J = \text{konstant}$) hängt bei gegebener Querschnittsform nur vom Verlauf der Momentenfläche ab.

Aus dem Satz von Castigliano (S. 22) kann die Verschiebung q_i oder die Winkeländerung γ_i an jeder Stelle berechnet werden, wo eine Kraft, resp. ein Moment wirkt. Dabei ist zu beachten, daß die Zahlenrechnung erheblich vereinfacht wird, wenn die Differentiation $\partial \mathfrak{U} / \partial Q_i$ resp. $\partial \mathfrak{U} / \partial M_i$ unter dem Integralzeichen durchgeführt wird; also zuerst differenzieren und dann integrieren.

$$f = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial Q_i} = \frac{1}{JE} \int_0^l M_x \frac{\partial M_x}{\partial Q_i} dx. \quad (12.18)$$

Für den einseitig eingespannten Stab mit einer Einzellast P am Ende (Belastungsfall 1, Zahlentafel 12.1) ist $M_x = Px$, $\partial M_x / \partial P = x$ und

$$f = \frac{1}{JE} \int_0^l Px^2 dx = \frac{Pl^3}{3JE}.$$

Sehr oft ist es aber notwendig die Formänderungen an Stellen zu berechnen, wo keine Kraft (resp. kein Moment) wirkt. In solchen Fällen führt man eine fiktive Kraft ($X = 0$) resp. ein fiktives Moment ($M_0 = 0$) ein. Will man z. B. die Winkeländerung des Stabendes in Be-

lastungsfall 1 (Zahlentafel 12.1) berechnen, so ist $\alpha = \frac{1}{JE} \int_0^l \left[M_x \frac{\partial M_x}{\partial M_0} \right]_{M_0=0} dx$.

$$\text{Aus } M_x = M_0 + Px \text{ folgt } \frac{\partial M}{\partial M_0} = 1 \text{ und } \alpha = \frac{1}{JE} \int_0^l (M_0 + Px)_{M_0=0} dx = \frac{1}{JE} \int_0^l Px dx = \frac{Pl^2}{2JE}.$$

Die Hilfsgröße $M_0 = 0$ wird also schon vor der Integration gestrichen und dient ausschließlich zur Berechnung von $\partial M_x / \partial M_0$.

In dieser Weise sind die in Zahlentafel 12.1 zusammengestellten Formänderungen berechnet.

Es gibt noch eine zweite Methode die Formänderung an einer Stelle zu berechnen, wo keine Kraft resp. kein Moment wirkt. In irgendeinem Punkt des Stabes können bei beliebig gerichteter Kraftwirkung immer die Normalkraft P (als Summe der normalen Komponenten der verschiedenen Kräfte Q) und das Biegemoment (als Summe der einzelnen Momente) berechnet werden, nämlich

$$P = \sum Q_i \cos \gamma_i \quad \text{und} \quad M = \sum Q_i a_i.$$

Die Summenbildung erstreckt sich selbstverständlich nur auf einer Seite des Querschnittes. Für eine bestimmte Kraft Q_i im Punkte i wirkend ist dann

$$\frac{\partial P}{\partial Q_i} = \cos \gamma_i \quad \text{und} \quad \frac{\partial M}{\partial Q_i} = a_i.$$

Denken wir nun alle Belastungen weg und lassen am Stab im Punkte i und in der Richtung der dort wirkenden Kraft Q_i nur eine Einzelkraft wirken. Für einen beliebigen Schnitt nennen wir die Normalkraft und das Biegemoment, die durch diese Einzelkraft = *Krafteinheit* entstehen, \bar{P} und \bar{M} , so ist

$$\bar{P} = \cos \gamma_i = \frac{\partial P}{\partial Q_i} \quad \text{und} \quad \bar{M} = a_i = \frac{\partial M}{\partial Q_i}.$$

Die Formänderung an der Stelle i und in der Richtung von Q_i ist nach dem Satz von Castigliano:

$$q_i = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial Q_i} = \int_0^l \frac{P}{fE} \frac{\partial P}{\partial Q_i} dx + \int_0^l \frac{M}{JE} \frac{\partial M}{\partial Q_i} dx = \int_0^l \frac{P\bar{P}}{fE} dx + \int_0^l \frac{M\bar{M}}{JE} dx. \quad (12.19)$$

Diese Gleichung ist auch gültig, wenn $Q_i = 0$ ist; sie gilt also für jede Stelle des Stabes. Von dieser Gleichung wird z. B. mit Vorteil Gebrauch gemacht bei der Berechnung der Formänderung von Fachwerkträgern (Zahlenbeispiel 21.5).

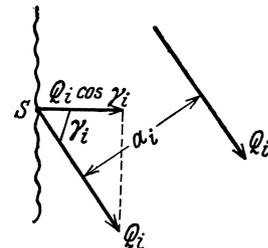


Abb. 12.16.

Da die Formänderungen (f resp. α) umgekehrt proportional mit $J \cdot E$ sind, und $E_{\text{stahl rd.}}$ 2,5 mal so groß als $E_{\text{Guß}}$ ist, wird der Stahlbau bei gleicher Steifigkeit immer viel leichter als die Gußform. Außerdem sind bei Stahl dünnere Wandstärken möglich, die bei Guß oft aus gießereitechnischen Gründen festgelegt sind; man kann also bei Stahl günstigere (leichtere) Querschnittsformen wählen.

Bei der Berechnung der Formänderung an irgendeiner Stelle des Stabes ist immer zu beachten, daß nach dem Satz von Castigliano über das ganze Stabvolumen zu integrieren ist. Man kann aber auch jeden beliebig abgetrennten Teil eines Stabes wieder als Stab auffassen, wenn an der Trennstelle die dort wirkenden Spannungen nun als äußere Kräfte angebracht werden, damit der abgetrennte Teil im Gleichgewicht bleibt. Damit ist oft eine Vereinfachung in der Berechnung möglich, indem die Integration nur bis zu der Stelle durchgeführt wird, an welcher die Formänderung berechnet werden soll.

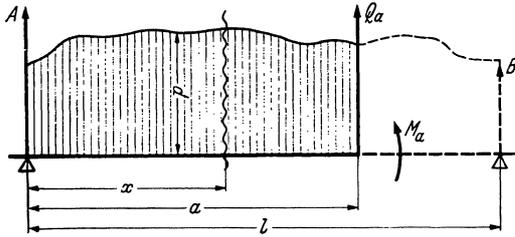


Abb. 12.17.

Will man z. B. die Winkeländerung an irgendeiner Stelle a des Stabes (Abb. 12.17) berechnen, so muß der abgetrennte Teil zuerst durch Anbringen des Momentes M_a und der Querkraft Q_a an der Trennstelle in Gleichgewicht gebracht werden. Zur Berechnung des Momentes ist es gleichgültig, von welcher Seite des Schnittes wir ausgehen; rechts von der Schnittfläche x ausgehend folgt sofort $\partial M_x / \partial M_a = 1$ und damit

$$\gamma = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial M_0} = \frac{1}{J E} \int_0^a M_x \frac{\partial M_x}{\partial M_a} dx = \frac{1}{J E} \int_0^a M_x dx. \quad (12.20)$$

Der Winkel γ wird immer gemessen von der Tangente an der Anfangsstelle der Integration. Bei symmetrischer Beanspruchung legt man deshalb immer eine Integrationsgrenze in der Mitte, weil die Tangente dort unverändert bleibt. Die Verschiebung y an der Stelle a , ebenfalls von der Anfangstangente gemessen, ist mit $\frac{\partial M_x}{\partial Q_a} = x$:

$$y = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial Q_a} = \frac{1}{J E} \int_0^a M_x \cdot \frac{\partial M_x}{\partial Q_a} dx = \frac{1}{J E} \int_0^a M_x x dx. \quad (12.21)$$

Für manche Betrachtungen, insbesondere bei stoßweiser Beanspruchung und bei Federn (Abschn. 26) ist die gesamte Formänderungsarbeit, die der Stab aufnehmen kann, von Bedeutung. Führt man in der Gleichung für die Formänderungsarbeit für ein Volumenelement $d^2 \mathfrak{A} = \frac{\sigma^2}{2 E} df \cdot dx$, die geradlinige Spannungsverteilung bei Biegung $\sigma = \sigma_e \cdot \eta / e$ ein, so ist

$$\mathfrak{A} = \int_0^l \frac{\sigma_e^2}{2 E e^2} dx \int_f \eta^2 df = \int_0^l \frac{\sigma_e^2 \cdot J}{2 E e^2} dx. \quad (12.22)$$

Setzt man $J = i \cdot f \cdot e^2$, so ist i eine nur von der Querschnittsform abhängige Zahl.

Für das Rechteck ist: $J = bh^3/12 = i \cdot bh \cdot (h/2)^2$, also $i = 1/3$,

für den Kreis: $J = \pi d^4/64 = i \cdot \pi (d/2)^2 \cdot (d/2)^2$ und $i = 1/4$, und

für den Kreisring ist: $\frac{J}{f} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64} = \frac{1}{16} (D^2 + d^2) = i \cdot e^2 = i \cdot \frac{D^2}{4}$, also $i = (1 + d^2/D^2)/4$.

Für $d/D = 0,1$ (dickwandiges Rohr) ist $i = 1/4$ und für $d/D = 0,9$ (dünnwandiges Rohr) $i \approx 0,45$.

Für \mathbf{I} ist $J = 2 \cdot f \cdot e^2 = i \cdot f \cdot e^2$, also $i = 2$.

Mit $J = i f e^2$ wird

$$\mathfrak{A} = \frac{i f}{2 E} \int_0^l \sigma_e^2 \cdot dx. \quad (12.23)$$

Daraus folgt, daß für einen bestimmten Werkstoff (σ_e) und bei gleichem Werkstoffverbrauch ($f \cdot l$) der \mathbf{I} -Querschnitt die größte und der Kreis die kleinste Formänderungsarbeit bei Biegung aufnehmen kann.

Zahlentafel 12.1. Einige Belastungsfälle¹.

<p>1</p> <p>Freitragler mit Einzellast</p> <p>Querkräfte</p> <p>Biegemomente</p>		$M = P \cdot x; Q = P$ $M_{\max} = M_A = P \cdot l$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{J E} \int_0^l P x \cdot dx = \frac{P l^2}{2 J E}$ $f = \frac{1}{J E} \int_0^l P \cdot x^2 dx = \frac{P l^3}{3 J E}$ $\mathfrak{A} = \frac{1}{2 E} \int_0^l \sigma_{\max}^2 \frac{x^2}{l^2} dx = \frac{i}{6 E} \sigma_{\max}^2 V.$
<p>2</p> <p>Freitragler mit Einzelmoment</p> <p>Querkräfte</p> <p>Momentenfläche</p>		$M = \text{konst.}; Q = 0$ $\rho = \text{konst.}: \text{Elastische Linie} = \text{Kreis}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{J E} \int_0^l M dx = \frac{M l}{J E}$ $f = \frac{1}{J E} \int_0^l M x dx = \frac{M l^2}{2 J E}$ $\mathfrak{A} = \frac{i}{2 E} \sigma_{\max}^2 \cdot V$
<p>3</p> <p>Freitragler mit gleichmäßig verteilter Belastung</p> <p>Querkräfte</p> <p>Momentenfläche</p>		$M = \frac{p x^2}{2}; Q = p x$ <p>NB. Parabelkonstruktion nach der Tangentenmethode. Hütte, Bd. I, S. 123.</p> $M_{\max} = \frac{p l^2}{2}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{J E} \int_0^l \frac{p x^2}{2} dx = \frac{p l^3}{6 J E}$ $f = \frac{1}{J E} \int_0^l \frac{p x^3}{2} dx = \frac{p l^4}{8 J E}$
<p>4</p> <p>Zwei Stützen Einzellast beliebig</p> <p>Querkräfte</p> <p>Momentenfläche</p>		<p>Für $x = 0$ bis a: $M_x = P \frac{b}{l} x$</p> <p>$= 0$ bis b: $M_x = P \frac{a}{l} x$</p> <p>$M_{\max} = A a = P \frac{a b}{l}$, kommt immer im Querschnitt der Kraft vor.</p> $f_p = \frac{1}{J E} \left[\int_0^a P \cdot \frac{b^2}{l^2} x^2 dx + \int_0^b P \frac{a^2}{l^2} x^2 dx \right]$ $= \frac{P}{3 J E} \frac{a^2 b^2}{l}$

NB. Bei der Integration über das ganze Stabvolumen wird immer der bequemste Weg gewählt, also hier rechts von P von 0 bis b und links von P von 0 bis a .

¹ Ausführliche Zusammenstellung im Taschenbuch „Hütte“ 26. Aufl. Bd. I, 1931 S. 612/19. Die Momenten- und Querkraftfläche für zusammengesetzte Belastungen bestimmt man am einfachsten durch Superposition.

Zahlentafel 12.1 (Fortsetzung).

<p>5</p> <p>Zwei Stützen Einzellast überhängend</p> <p>Querkräfte</p> <p>Momenten- fläche</p>		$A = Pa/l$ $f_P = \int_0^a \frac{Px^2 dx}{JE} + \int_0^l \frac{P \cdot a^2/l^2 \cdot x^2 dx}{JE}$ $= P \frac{a^2(a+l)}{3JE}$ <p>NB. Beachte wieder die Integrationswege!</p>
<p>6</p> <p>Zwei Stützen Einzelmoment</p> <p>Querkraft</p> <p>Momenten- fläche</p>		$A = -B = \frac{M}{l}$ $\text{tg } \alpha_1 = \int_0^l \frac{M \frac{x}{l} \cdot \frac{x}{l} dx}{JE} = + \frac{Ml}{3JE}$ $\text{tg } \alpha_2 = \int_0^l \frac{M \cdot x/l(1-x/l) dx}{JE}$ $= \frac{Ml}{6JE}$
<p>7</p> <p>Zwei Stützen Einzellast in der Mitte</p>		$M_{\max} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4}$ $f = \frac{P}{2} \cdot \frac{(l/2)^3}{3JE} = \frac{Pl^3}{48JE}$ $\text{tg } \alpha = \frac{P}{2} \cdot \frac{(l/2)^2}{2JE} = \frac{Pl^2}{16JE}$
<p>8</p> <p>Zwei Stützen; gleichmäßige Belastung</p>		<p>Durch Superposition erhält man:</p> $M_{\max} = \frac{pl}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{pl}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{pl^2}{8}$ $f = \frac{Pl^3}{48JE} - \frac{pl^4}{16 \cdot 8JE} = \frac{5pl^4}{384JE}$ $\text{tg } \alpha = \frac{pl^3}{16JE} - \frac{pl^3}{8 \cdot 6JE} = \frac{pl^3}{24JE}$
<p>9</p> <p>Überhängende Belastung</p>		$JE \cdot f = P \int_0^a x^2 dx + Pa^2 \int_0^{l/2} dx = P \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^2 l}{2} \right)$ <p>Nur über die halbe Stablänge integriert.</p>

Die symmetrische Belastung eines auf zwei Stützen gelagerten Balkens kann auf Fall 1, resp. 3 zurückgeführt werden, indem der halbe Balken in der Mitte als eingespannt betrachtet wird.

Bei einem rollenden Lastenpaar (Fahrzeug, Kranlaufkatze usw.) ändert sich sowohl die Querkraft- als auch die Momentenfläche mit der Stellung der Last. Für den Konstrukteur ist es nun wichtig die Höchstwerte der Querkraft und des Momentes zu kennen, die in irgend einem Querschnitt auftreten können. Es ist dabei zweckmäßig, die (unbekannten) Raddrücke P_1 und P_2 (Abb. 12.18a) zu der resultierenden Last L zu vereinigen, die in der Entfernung $2e = P_2 \cdot a/L$ von P_1 angreift. Die Auflagerkraft A folgt aus der Momentengleichung in bezug auf B zu:

$$A = \frac{L}{l} (l - 2e - x).$$

Für jeden Wert von x ist die Querkraft

$$Q_x = A = \frac{L}{l} (l - 2e - x).$$

Das ist die Gleichung einer Geraden, die für $x=0$ den Wert $Q_0 = \frac{L}{l} (l - 2e)$ hat und für $x = l - 2e$ zu Null wird (Abb. 12.18b).

Bei jeder Stellung x des rollenden Lastenpaares treten die größten Biegemomente dort auf, wo die Räder stehen, denn die Momentenfläche ist durch gerade Linien begrenzt. An der Stelle x ist das Biegemoment

$$M_x = A \cdot x = \frac{L}{l} (l - 2e - x) x.$$

Das ist die Gleichung einer Parabel; für $x=0$ und für $x = l - 2e$ wird $M_x = 0$. Der Größtwert des Momentes für $x = \frac{1}{2}(l - 2e)$ ist:

$$M_{\max} = \frac{L}{l} \left(\frac{l - 2e}{2} \right)^2. \quad (12.24)$$

Die Parabel (maximale Momentenfläche) wird nach der Tangentenmethode konstruiert (Abb. 12.18c).

12.22. Biegung stark gekrümmter Träger. Die äußeren Kräfte, die in der Symmetrieebene wirken, aber beliebig zur gekrümmten Stabachse gerichtet sind, lassen sich — auf einer Seite eines beliebigen Schnittes — durch ein Kräftepaar mit dem Momente M und eine Normalkraft P (im Schwerpunkte des Querschnittes angreifend) ersetzen, wenn die Querkraft Q wieder vernachlässigt wird (Abb. 12.19). Die neutrale Faserschicht fällt nicht mit der Schwerpunktsachse zusammen.

Die Normalkraft P ist positiv, wenn Zug, negativ, wenn Druckbeanspruchung auftritt. Das Biegemoment M ist positiv, wenn es die Krümmung vermehrt, negativ, wenn es die Krümmung vermindert. Der Abstand η von der Faserschicht bis zur Schwerpunktsachse ist positiv auf der konvexen Seite der Stabachse, negativ auf der konkaven Seite.

Weiter setzen wir wieder kleine Formänderungen voraus, so daß die Entfernung von der ursprünglichen Schwerachse gleich der Entfernung von der verformten ist, und daß die ursprünglich ebenen Querschnitte nach der Formänderung eben geblieben sind.

Betrachten wir ein Balkenelement, begrenzt durch zwei Querschnitte in der Entfernung $ds = r d\varphi$, in der Stabachse gemessen, dann ändert sich die Länge ds bei der Formänderung um den Betrag Δds , so daß die Dehnung $\varepsilon_0 = \frac{\Delta ds}{ds}$ und die Spannung in der Stabachse $\sigma_0 = \varepsilon_0 E$ ist. Eine Faserschicht in der Entfernung η von der Stabachse hat die ursprüngliche Länge $ds' = (r + \eta) d\varphi = r d\varphi + \eta d\varphi = ds + \eta d\varphi$ und ändert sich bei der Verformung um den Betrag $\Delta ds'$. Da die Querschnitte eben bleiben, folgt aus der Abb. 12.19

$$\Delta ds' = \Delta ds + \eta \Delta d\varphi.$$

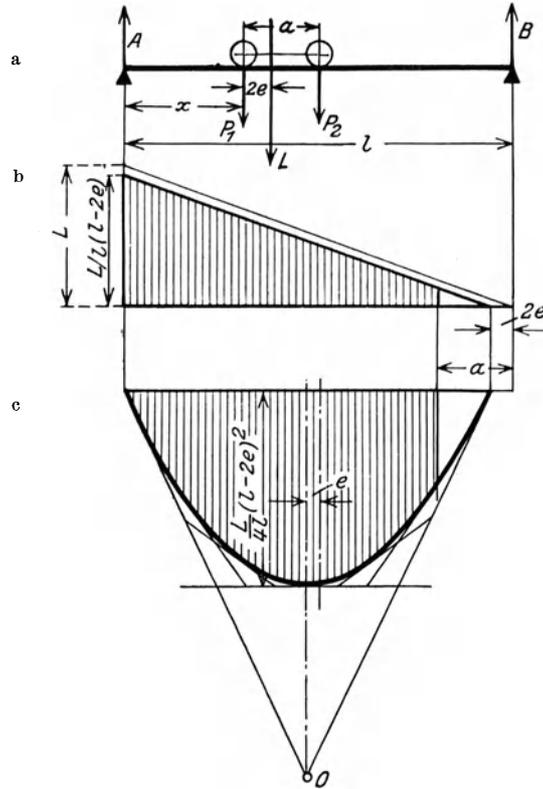


Abb. 12.18. Rollendes Lastenpaar.
b Max. Querkraftfläche. c Max. Momentenfläche.

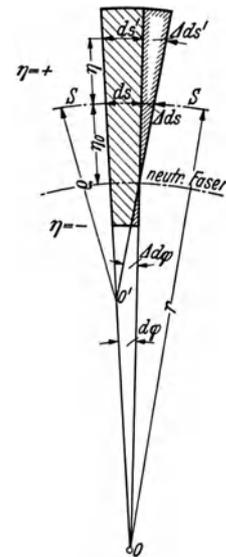


Abb. 12.19.

Die Dehnung ist:

$$\varepsilon = \frac{\Delta ds'}{ds'} = \frac{\Delta ds + \eta \Delta d\varphi}{ds \cdot \frac{r + \eta}{r}} = \frac{\Delta ds}{ds \cdot \frac{r + \eta}{r}} + \frac{\eta \Delta d\varphi}{r \Delta d\varphi \frac{r + \eta}{r}} = \varepsilon_0 \frac{r}{r + \eta} + \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{\eta}{r + \eta} + \varepsilon_0 \left(\frac{\eta}{r + \eta} - \frac{\eta}{r + \eta} \right)$$

und die Spannung (nach dem Hookeschen Gesetz):

$$\sigma = \varepsilon E = E \left\{ \varepsilon_0 + \frac{\eta}{r + \eta} \left(\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \varepsilon_0 \right) \right\}.$$

Sie ist bestimmt, sobald die Werte ε_0 und $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$ bekannt sind, die aus den Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \int \sigma df = P = E \int \left\{ \varepsilon_0 + \frac{\eta}{r + \eta} \left(\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \varepsilon_0 \right) \right\} df, \\ 2. \quad & \int \sigma \eta df = M = E \int \left\{ \varepsilon_0 \eta + \frac{\eta^2}{r + \eta} \left(\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \varepsilon_0 \right) \right\} df. \end{aligned}$$

folgen. Bei der Integration über die Querschnittsfläche sind ε_0 und $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$ konstant. Nun ist:

$$\int \varepsilon_0 df = \varepsilon_0 f \quad \text{und} \quad \int \frac{\eta}{r + \eta} df = -\lambda \cdot f,$$

worin λ ein noch unbekannter Zahlenfaktor ist, abhängig von der Querschnittsform.

$$\int \varepsilon_0 \eta df = \varepsilon_0 \int \eta df = 0 \quad (\text{Schwerpunktsbedingung}) \quad \text{und}$$

$$\int \frac{\eta^2}{r + \eta} df = \int \left(\frac{r\eta + \eta^2}{r + \eta} - \frac{r\eta}{r + \eta} \right) df = \int \eta df - r \int \frac{\eta}{r + \eta} df = \lambda f \cdot r.$$

Setzen wir diese Werte der Integrale ein, so wird:

$$1. \quad P = E \left\{ \varepsilon_0 f - \left(\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \varepsilon_0 \right) f \cdot \lambda \right\} \quad \text{und} \quad 2. \quad M = E f r \lambda \left(\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \varepsilon_0 \right).$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{fE} \left(P + \frac{M}{r} \right) = \frac{P_0}{fE} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \varepsilon_0 = \frac{M}{f r \lambda E}; \quad (12.25)$$

die Spannung, mit $P_0 = P + \frac{M}{r}$

$$\sigma = \frac{P_0}{f} + \frac{M}{f r \lambda} \frac{\eta}{r + \eta} \quad (12.26)$$

zeigt einen hyperbolischen Verlauf. Für die Stabachse ($\eta = 0$) ist

$$\sigma_0 = P_0 / f. \quad (12.27)$$

Der Faktor $\lambda = -\frac{1}{f} \int \frac{\eta}{r + \eta} df$ kann für einfache Querschnittsformen berechnet werden: z. B. ist für ein Rechteck (Abb. 12.20):

$$\lambda = -1 + \frac{r}{2e} \ln \frac{r + e}{r - e}. \quad (12.28)$$

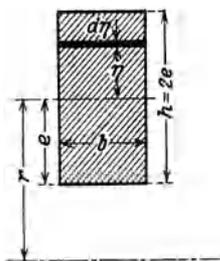


Abb. 12.20.

Zahlentafel 12.2. λ -Werte für Rechteck.

Für $\frac{e}{r} = 0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
$\lambda = 0,003354$	0,01366	0,0317	0,0591	0,0986	0,1552	0,2390	0,3733	0,6358	0,92819

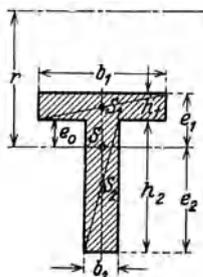


Abb. 12.21.

Für zusammengesetzte Querschnitte folgt aus der Eigenschaft des bestimmten Integrals:

$$\lambda f = \lambda_1 f_1 \pm \lambda_2 f_2 \pm \lambda_3 f_3 \pm \dots$$

z. B. für Abb. 12.21:

$$\lambda f = -b_1 h_1 + r b_1 \ln \frac{r - e_0}{r - e_1} - b_2 h_2 + r b_2 \ln \frac{r + e_2}{r - e_0}, \quad (12.29)$$

wobei die Grenzen genau zu beachten sind.

Für den Kreisquerschnitt¹ ist $\lambda = \text{tg}^2 \omega$, mit $\sin 2\omega = e/r$.

¹ Lindner, G.: Biegung krummer Stäbe. Z. M. M. 14 (1934) S. 43/50.

Zahlentafel 12.3. λ -Werte für Kreis.

Für $\frac{e}{r} = 0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
$\lambda = 0,0025126$	0,010205	0,0236	0,0436	0,0718	0,1111	0,1668	0,2500	0,3929	0,5241

Diese Werte gelten auch für die Ellipse, wenn e die Halbachse in der Kraftebene ist¹.

Der kleine Faktor λ kommt im Nenner der Spannungsgleichung vor und sollte deshalb recht genau berechnet werden. Für praktische Anwendung ist folgende Umrechnung der Spannungsgleichung zweckmäßig. Aus der Definition $\int \frac{\eta^2}{r + \eta} df = \lambda f \cdot r$ folgt

$$\lambda f r^2 = \int \frac{\eta^2 df}{1 + \eta/r} = Z, \tag{12.30}$$

worin Z die Dimension eines Trägheitsmomentes hat. Durch Reihenentwicklung erhält man:

$$Z = \int \eta^2 \left(1 - \frac{\eta}{r} + \frac{\eta^2}{r^2} - \dots \right) df = J - \frac{1}{r} \int \eta^3 df + \frac{1}{r^2} \int \eta^4 df - \frac{1}{r^3} \int \eta^5 df \dots$$

Die Rechnung vereinfacht sich, wenn die Biegeachse auch eine Symmetrieachse ist. Dann liefern zwei Flächenelemente df , die auf verschiedener Seite der Biegeachse, in der Entfernung η , liegen (Abb. 12.22), Beiträge $+\eta^3 df$ und $-\eta^3 df$, die sich gegenseitig aufheben. Für zur Biegeachse symmetrischer Querschnitte ist:

$$Z = J + \frac{1}{r^2} \int \eta^4 df + \frac{1}{r^4} \int \eta^6 df + \dots \text{ also immer größer als } J.$$

Für das Rechteck ist:

$$Z = J \left\{ 1 + \frac{3}{5} \left(\frac{h}{2r} \right)^2 + \frac{3}{7} \left(\frac{h}{2r} \right)^4 + \frac{3}{9} \left(\frac{h}{2r} \right)^6 + \dots \right\}.$$

Für den Kreisquerschnitt mit dem Durchmesser $d = 2e$:

$$Z = J \left\{ 1 + \frac{3}{6} \left(\frac{e}{r} \right)^2 + \frac{3 \cdot 5}{6 \cdot 8} \left(\frac{e}{r} \right)^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{6 \cdot 8 \cdot 10} \left(\frac{e}{r} \right)^6 + \dots \right\}.$$

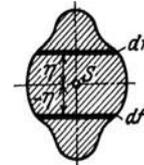


Abb. 12.22.

Zahlentafel 12.4. Z -Werte für Rechteck und Kreis.

Für $\frac{e}{r} =$	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
Z Rechteck	1,0062	1,0245	1,04	1,06	1,108	1,183	1,293	1,46	1,76 J
Z Kreis	1,0050	1,0205	1,0314	1,0489	1,090	1,149	1,234	1,306	1,56 J

Aus der Zahlentafel folgt, daß für $e/r < 0,3$, $Z \sim J$ ist. Ist die Biegeachse keine Symmetrieachse des Querschnittes, fallen also die negativen Glieder bei der Reihenentwicklung nicht weg, so kann auch für $e/r > 0,3$, $Z = J$ gesetzt werden.

Für beliebig begrenzte Querschnitte, die aber immer symmetrisch zur Kraftebene sein müssen, kann Z graphisch bestimmt werden. Man kann aus dem gegebenen Querschnitt eine Fläche ableiten, deren Trägheitsmoment, bezogen auf die Schwerachse, gleich Z ist. Mit $df = b d\eta$ wird

$$Z = \int \frac{r}{r + \eta} \cdot \eta^2 df = \int \frac{br}{r + \eta} \eta^2 d\eta = \int b' \eta^2 d\eta = J.$$

Wir konstruieren nun $b' = b \frac{r}{r + \eta}$ (Abb. 12.23). Das Trägheitsmoment kann graphisch bestimmt werden. Dabei ist zu beachten, daß die Schwerpunkte der neuen und der ursprünglichen Fläche nicht zusammenfallen.

Die Spannungsgleichung (26) kann durch Einführung von Z auch so geschrieben werden:

$$\sigma = \frac{P_0}{f} + \frac{M}{Z} \cdot \frac{\eta}{1 + \frac{\eta}{r}} \approx \frac{P_0}{f} + \frac{M}{J} \cdot \frac{\eta}{1 + \frac{\eta}{r}}. \tag{12.31}$$

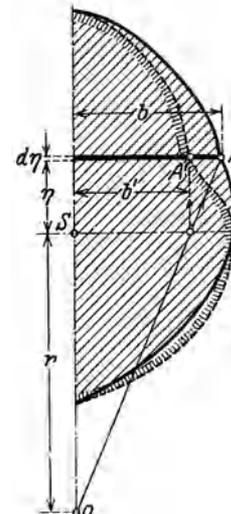


Abb. 12.23. Zur Konstruktion der Größe Z .

¹ Für Trapez- und Dreieckquerschnitte, siehe Hütte I, S. 663.

Die weitere Vereinfachung mit $r = \infty$ führt zu der Gleichung für gerade Stäbe:

$$\sigma = \frac{P}{f} + \frac{M}{J} \eta$$

und verursacht Fehler, die um so größer sind, je stärker der Stab gekrümmt ist.

Das erste Glied der Gl. (31) kann oft gegenüber dem zweiten vernachlässigt werden. Nennen wir $r_a = r + e$ und $r_i = r - e$, so sind die Spannungen in den äußersten Fasern:

$$\sigma_a = \frac{M}{W} \cdot \frac{r}{r_a} \quad \text{resp.} \quad \sigma_i = \frac{M}{W} \cdot \frac{r}{r_i}. \quad (12.32)$$

Mit diesen Gleichungen ist die Berechnung eines gekrümmten Trägers ebenso einfach geworden, wie die Berechnung eines geraden Stabes; nur ist das Vorzeichen von M zu berücksichtigen. Für $r_i = 0$, wird σ_i unendlich groß.

Da die Schubspannungen vernachlässigt werden, wirkt auf ein unendlich kleines Volumenelement $df \cdot ds'$ nur die Normalspannung σ . Die Formänderungsarbeit für dieses Element ist deshalb mit $ds' = \frac{r + \eta}{r} ds$,

$$d^2\mathfrak{A} = \frac{\sigma^2}{2E} dV = \frac{\sigma^2}{2E} ds' \cdot df \quad \text{und} \quad d\mathfrak{A} = \frac{ds}{2E} \int \sigma^2 \frac{r + \eta}{r} \cdot df.$$

Den Wert von σ aus Gl. (30) einsetzen,

$$\begin{aligned} d\mathfrak{A} &= \frac{ds}{2E} \int \left(\frac{P_0}{f} + \frac{M}{Z} \frac{r\eta}{r + \eta} \right)^2 \frac{r + \eta}{r} \cdot df = \frac{ds}{2E} \left\{ \int \frac{P_0^2}{f^2} + \frac{M^2}{Z^2} \frac{r^2 \eta^2}{(r + \eta)^2} + 2 \frac{P_0}{f} \cdot \frac{M}{Z} \frac{r\eta}{r + \eta} \right\} \frac{r + \eta}{r} df \\ &= \frac{ds}{2E} \left\{ \frac{P_0^2}{f^2} \int \left(1 + \frac{\eta}{r} \right) df + \frac{M^2 r}{Z^2} \int \frac{\eta^2}{r + \eta} df + 2 \frac{P_0}{f} \cdot \frac{M}{Z} \int \eta df \right\} = \frac{ds}{2E} \left\{ \frac{P_0^2}{f^2} \cdot f + \frac{M^2}{Z} \right\} \end{aligned}$$

und integriert, wird

$$\mathfrak{A} = \int_0^l \frac{P_0^2}{2fE} ds + \int_0^l \frac{M^2}{2ZE} ds. \quad (12.33)$$

Wenn mit ϱ der Krümmungsradius nach der Formänderung bezeichnet wird, dann ist die Länge der verformten Stabachse gleich $ds + \Delta ds = \varrho (d\varphi + \Delta d\varphi)$ oder

$$1 + \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\varrho}{r} \left(1 + \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \right) = 1 + \varepsilon_0 \quad \text{und} \quad \frac{r}{\varrho} = \frac{1 + \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}}{1 + \varepsilon_0} = 1 + \frac{\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0}.$$

Die Werte von ε_0 und $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$ aus den Gl. (25) einsetzen: $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} + \frac{M}{r^2 \lambda (fE + P_0)}$.

P_0 kann gegenüber fE vernachlässigt werden: dann ist:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} + \frac{M}{ZE} \approx \frac{1}{r} + \frac{M}{JE}. \quad (12.34)$$

Diese Gleichung, die aussagt, daß die Stabachse sich um den gleichen Betrag mehr krümmt, als ein ursprünglich gerader Stab, läßt sich leicht im Gedächtnis einprägen; sie reicht aber nicht aus, um die verformte Stabachse genau aufzuzeichnen. Es genügt aber dazu noch die größte Verschiebung resp. Winkeländerung nach Castigliano

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial Q_i} = \int_0^l \frac{P_0}{fE} \cdot \frac{\partial P_0}{\partial Q_i} ds + \int_0^l \frac{M}{ZE} \cdot \frac{\partial M}{\partial Q_i} ds = q_i \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial M_0} = \int_0^l \frac{P_0}{fE} \cdot \frac{\partial P_0}{\partial M_0} ds + \int_0^l \frac{M}{ZE} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_0} ds = \gamma \quad (12.35)$$

zu berechnen. Die ersten Glieder dieser Gleichungen (Formänderungen infolge Beanspruchung durch Zug resp. Druck) dürfen in vielen Fällen gegenüber den zweiten Gliedern (Formänderungen infolge Biegung) vernachlässigt werden. Man erkennt das von Fall zu Fall leicht durch die Umformung: $Z \sim J = i \cdot f \cdot e^2$.

In Zahlentafel 12.7 sind diese für verschiedene Belastungen eines kreisförmigen Trägers zusammengestellt. Für andere Belastungen können die Formänderungen daraus durch einfache Superposition berechnet werden.

A. Bantlin¹ hat durch sorgfältige Messungen die wirklichen Formänderungen mit den berechneten verglichen und gefunden, daß für einen Stab mit rechteckigem Querschnitt, sowie

¹ Bantlin, A.: Formänderung und Beanspruchung federnder Ausgleichsrohre. Z. VDI (1910) S. 43 oder Mitt. Forsch.-Arb. Heft 96.

für ein Gußrohr von 200 mm lichte Weite und $s = 18$ mm Wandstärke, Rechnung und Versuch sehr gut übereinstimmen. Beim dünnwandigen Stahlrohr von 202 mm Innendurchmesser und $s = 6,75$ mm Wandstärke dagegen war die gemessene größte Durchbiegung 4,9mal so groß als die berechnete. Bantlin vermutete die Ursache der großen Formänderungen in der großen Anzahl Wellen und Falten, die das gebogene Stahlrohr auf der Druckseite aufwies. Th. Kármán¹ hat aber nachgewiesen, daß die großen Abweichungen zwischen Theorie und Versuch eine ganz andere Ursache haben.

Die Biegetheorie setzt voraus, daß der Querschnitt des Stabes bei der Biegung unverändert bleibt. Wenn aber ein ursprünglich krummer Stab gebogen wird, so liefern die Zug- und Druckspannungen radiale Resultierende (Abb. 12.24), die die äußeren Fasern gegen die neutrale Achse zusammendrücken versuchen. Bei dünnwandigen Rohren tritt dadurch eine Abplattung des Querschnittes ein, wodurch die Dehnung vermindert wird. Beträgt die Abplattung $a a_1 = \delta$, so ist die Dehnung

$$\varepsilon = \frac{a_1 b_1 - ab}{ab} = \frac{a_1 e_1 + e_1 b_1 - ab}{ab}$$

Nun ist $a_1 e_1 = (R + r - \delta) d\varphi$,

$$e_1 b_1 = (r + \xi) \Delta d\varphi$$

und $ab = (R + r) d\varphi$.

Mit diesen Werten wird

$$\varepsilon = \frac{(r + \xi) \Delta d\varphi}{(R + r) d\varphi} - \frac{\delta}{R + r}$$

Das erste Glied dieser Gleichung gibt die Dehnung der äußeren Faserschicht nach der gebräuchlichen Biegungstheorie. Das zweite Glied gibt die Abnahme der Dehnung infolge der Abplattung des Querschnittes. Ist z. B. $\delta = 0,5$ mm und $R + r = 700$ mm, so entspricht das einer Abnahme der Spannung von

$$\frac{\delta}{R + r} E = \frac{0,5}{700} \cdot 2100000 = 1500 \text{ at!}$$

Die kleine Abplattung des Querschnittes verursacht demnach eine wesentliche Entlastung der äußersten Fasern, die nach der Biegungstheorie die größten Zug- und Druckspannungen zu übertragen hätten. Da aber die Gleichgewichtsbedingung $M = \int \sigma \eta df$ bestehen bleibt, so müssen die anderen Fasern mehr gespannt werden.

Das Ergebnis der theoretischen Untersuchung von v. Kármán ist, daß die Formänderung dünnwandiger Rohre aus den Gl. (35) berechnet werden kann, wenn an Stelle von Z resp. J der Wert $k \cdot J$ eingeführt wird. Der Faktor k , der nur vom Verhältnis $s \cdot R/r^2$ abhängt, kann aus Zahlentafel 12.5 entnommen werden.

Zahlentafel 12.5.

k -Werte zur Berechnung der Formänderung dünnwandiger, gekrümmter Rohre.

Für $s \cdot R/r^2 = 0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	1,0	1,5	2	3
ist $k = 0,06$	0,09	0,18	0,24	0,31	0,59	0,757	0,845	0,926

Die gemessenen Formänderungen² zeigen 10—20% Abweichung von den berechneten Werten, was durch einige Vernachlässigungen bei der Rechnung zu erklären ist.

Geht man zur Berechnung der größten Beanspruchung von der maximalen Schubspannung aus, dann ist mit $Z = J$:

$$\tau_{\max} = \beta \frac{M_b \cdot r}{J} \tag{12.36}$$

mit den β -Werten aus Zahlentafel 12.6.

Zahlentafel 12.6. β -Werte zur Berechnung der größten Beanspruchung in dünnwandigen, gekrümmten Röhren.

Für $s \cdot R/r^2 = 0,5$	1,0	1,5	2	2,5	3
ist $\beta = 2,5$	2,2	1,85	1,7	1,55	1,5

¹ Kármán, Th. v.: Über die Formänderung dünnwandiger Rohre. Z. VDI 1911 S. 1889/95.

² Wahl, M. A.: Trans. Am. Soc. Mech. Eng. Vol. 49/50, Part I, Fuels and Steam Power 1927/28, S. 241.

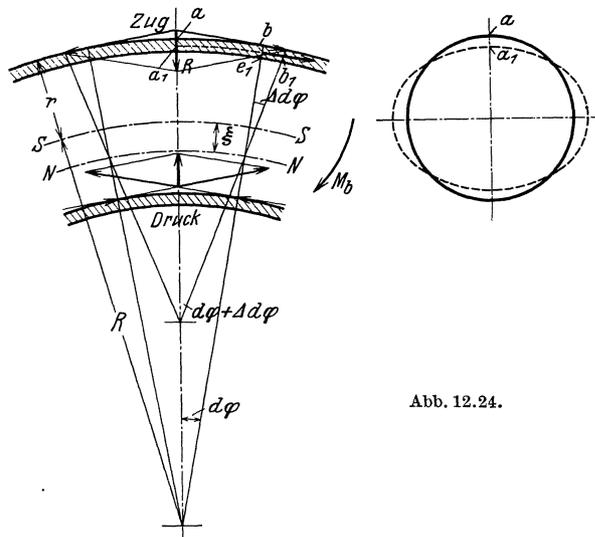


Abb. 12.24.

Zahlentafel 12.7.

Formänderungen eines kreisförmigen Trägers für verschiedene Belastungen.

1. Einzelkraft parallel zur X-Achse bei Winkel β .Für $\varphi > \beta$: $M = \pm Pr (\sin \varphi - \sin \beta)$ und $P_0 = \mp P \sin \beta$.Für $\varphi = 0$ bis α : $\delta_x = \frac{Pr^3}{ZE} \left[\frac{1}{4} (\sin 2\beta - \sin 2\alpha) + \frac{1}{2} (\alpha - \beta) + \sin \beta (\cos \alpha - \cos \beta) \right]$

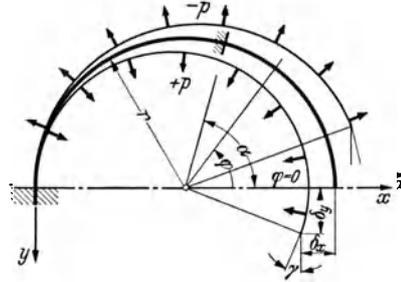
$$\delta_y = -\frac{Pr(\alpha - \beta)}{fE} \sin \beta + \frac{Pr^3}{ZE} \left[-\cos \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - \sin \beta (\alpha - \sin \alpha - \beta + \frac{1}{2} \sin \beta) + \cos \beta \right]$$

$$\gamma = -\frac{P(\alpha - \beta)}{fE} \sin \beta + \frac{Pr^2}{ZE} [-\cos \alpha - \sin \beta (\alpha - \beta) + \cos \beta].$$

Für $\beta = 0$: $\delta_x = \frac{Pr^3}{ZE} \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$

$$\delta_y = \frac{Pr^3}{ZE} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - \cos \alpha \right)$$

$$\gamma = \frac{Pr^2}{ZE} (1 - \cos \alpha).$$

2. Einzelkraft parallel zur y-Achse bei Winkel β .Für $\varphi > \beta$: $M = \pm Pr (\cos \beta - \cos \varphi)$ $P_0 = \pm P \cos \beta$.Für $\varphi = 0$ bis α :

$$\delta_y = \frac{Pr(\alpha - \beta)}{fE} \cos \beta + \frac{Pr^3}{ZE} \left[\cos \beta (\alpha - \sin \alpha - \beta + \sin \beta) + \frac{1}{4} (\sin 2\alpha - \sin 2\beta) + \frac{1}{2} (\alpha - \beta) - \sin \alpha + \sin \beta \right]$$

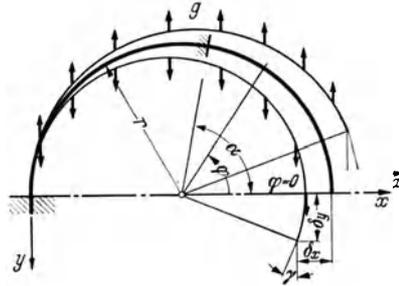
$$\delta_x = \frac{Pr^3}{ZE} \left(-\cos \beta \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha + \cos^2 \beta + \frac{1}{2} \sin^2 \beta \right)$$

$$\gamma = \frac{P(\alpha - \beta)}{fE} \cos \beta + \frac{Pr^2}{ZE} [\cos \beta (\alpha - \beta) - \sin \alpha + \sin \beta]$$

Für $\beta = 0$: $\delta_x = -\frac{Pr^3}{ZE} \left(\cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right)$

$$\delta_y = \frac{Pr}{fE} \alpha + \frac{Pr^3}{ZE} \left(\frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right)$$

$$\gamma = \frac{P}{fE} \alpha + \frac{Pr^2}{ZE} (\alpha - \sin \alpha).$$

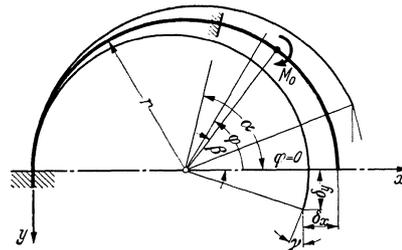
3. Moment bei Winkel β .Für $\varphi = 0$ bis α : $\gamma = \frac{M_0(\alpha - \beta)}{rfE} + \frac{M_0 r(\alpha - \beta)}{ZE}$

$$\delta_x = \frac{M_0 r^2}{ZE} (-\cos \alpha + \cos \beta)$$

$$\delta_y = \frac{M_0(\alpha - \beta)}{fE} + \frac{M_0 r^2}{ZE} (\alpha - \sin \alpha - \beta + \sin \beta).$$

Für $\beta = 0$: $\delta_x = -\frac{M_0 r^2}{ZE} (\cos \alpha - 1)$ $\gamma = \frac{M_0}{E} \left(\frac{1}{rf} + \frac{r}{Z} \right) \alpha$.

$$\delta_y = \frac{M_0}{fE} \alpha + \frac{M_0 r^2}{ZE} (\alpha - \sin \alpha)$$



4. Gleichmäßige Außen- und Innenbelastung.

$$M = \pm p r^2 (1 - \cos \varphi) \quad P_0 = 0.$$

$$\begin{aligned} \varphi = 0 \text{ bis } \alpha: \delta_x &= \frac{p r^4}{Z E} \left(1 - \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right), \\ \delta_y &= \frac{p r^4}{Z E} \left(\frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right), \\ \gamma &= \frac{p r^3}{Z E} (\alpha - \sin \alpha). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi = 0 \text{ bis } \frac{\pi}{2}: \delta_x &= + \frac{p r^4}{2 Z E}, \quad \delta_y = + \frac{p r^4}{Z E} \left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right), \\ \gamma &= + \frac{p r^3}{Z E} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

$$\varphi = 0 \text{ bis } \pi: \delta_x = + \frac{2 p r^4}{Z E}, \quad \delta_y = + \frac{3\pi p r^4}{2 Z E}, \quad \gamma = + \frac{\pi p r^3}{Z E}.$$

5. Belastung durch Eigengewicht.

$$M = \pm g r^2 \varphi \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} - \cos \varphi \right) \quad P_0 = \pm g r \sin \varphi.$$

$$\begin{aligned} \varphi = 0 \text{ bis } \alpha: \delta_x &= \frac{g r^4}{Z E} \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\alpha - \frac{1}{8} (\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha) \right] \\ \delta_y &= \frac{g r^2}{f E} (1 - \cos \alpha) + \frac{g r^4}{Z E} \left(\frac{15}{8} - 2 \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - \alpha \sin \alpha + \frac{\alpha}{4} \sin 2\alpha + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{1}{8} \cos 2\alpha \right) \\ \gamma &= \frac{g r}{f E} (1 - \cos \alpha) + \frac{g r^3}{Z E} (2 - 2 \cos \alpha - \alpha \sin \alpha) \end{aligned}$$

$$\varphi = 0 \text{ bis } \frac{\pi}{2}:$$

$$\delta_x = + \frac{\pi g r^4}{8 Z E};$$

$$\varphi = 0 \text{ bis } \pi:$$

$$\delta_x = + \frac{\pi g r^4}{4 Z E};$$

$$\delta_y = + \frac{g r^2}{E} \left[\frac{1}{f} + \frac{r^2}{16 Z} (22 - 8\pi + \pi^2) \right]; \quad \delta_y = + \frac{g r^2}{E} \left[\frac{2}{f} + \frac{r^2}{4 Z} (16 + \pi^2) \right];$$

$$\gamma = + \frac{g r}{E} \left[\frac{1}{f} + \frac{r^2}{2 Z} (4 - \pi) \right]; \quad \gamma = + \frac{2 g r}{E} \left(\frac{1}{f} + \frac{r^2}{Z} \right).$$

NB. Bei den Anwendungen sind die Vorzeichen der Verschiebungen und Verdrehungen sorgfältig zu beachten; sie sind immer positiv in der Richtung der Kräfte, resp. Momente.

Zahlenbeispiel 12.2. Kolbenringe (Abb. 12.25) dienen zur Abdichtung des Kolbens und müssen zu diesem Zweck mit einer gleichmäßigen Pressung p an die Zylinderwand anliegen. Bei der Berechnung der größten Spannung nach Gl. (12.31) kann, da $h/2r = 1/30$ bis $1/50$ ist, $Z = J$ gesetzt werden. Für den gefährlichsten Querschnitt AB ist das Biegemoment $M_b = p \cdot b \cdot D \cdot D/2$ positiv, da die Krümmung bei der Beanspruchung vermehrt wird.

$P_0 = P + M_b/r = -p \cdot b \cdot D + p \cdot b \cdot D = 0$,
so daß die größte Spannung nach Gl. (12.32)

$$\sigma_b = 6 \cdot M_b / b h^2 = 12 p \left(\frac{r}{h} \right)^2 \quad (a)$$

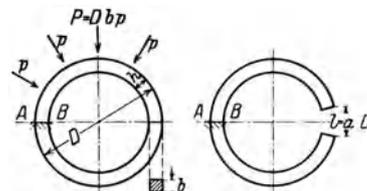


Abb. 12.25.
Zur Berechnung der Kolbenringe.

ist. Die in der Literatur angegebenen Werte von p , die zum einwandfreien Abdichten erforderlich sind, weichen sehr stark voneinander ab; sie liegen zwischen 0,1 und 0,5 at. Wenn als zulässige Spannung für Gußeisen 400 at angenommen wird¹, so folgt aus dieser Gleichung daß

$$\text{für } p = 0,1 \text{ at } r/h = 18 \quad \text{und für } p = 0,4 \text{ at } r/h = 9$$

sein sollte, damit die zulässige Spannung nicht überschritten wird. Da die Ringe meist mit

¹ In der Literatur (z. B. Dubbel: Ölmaschinen) wird $\sigma_{\max} = 800$ bis 1200 at für Gußeisen angegeben, was natürlich viel zu hoch ist.

$r/h = 15$ bis 25 ausgeführt werden, ertragen sie dauernd keine wesentlich höhere Pressung als etwa $0,1$ at, die, wenn der Ring überall gleichmäßig anliegt, zur Dichtung ausreichend ist.

Die Stoßstelle (das Schloß des Ringes) wird meist abgeschrägt oder auch als Überlappung ausgebildet (Abb. 12.26). Die Länge a , die aus dem ungespannten Ring herausgeschnitten werden muß, damit er sich unter dem gleichmäßigen Druck gerade schließt, folgt aus Zahlentafel 12.7 Pos. 4 zu

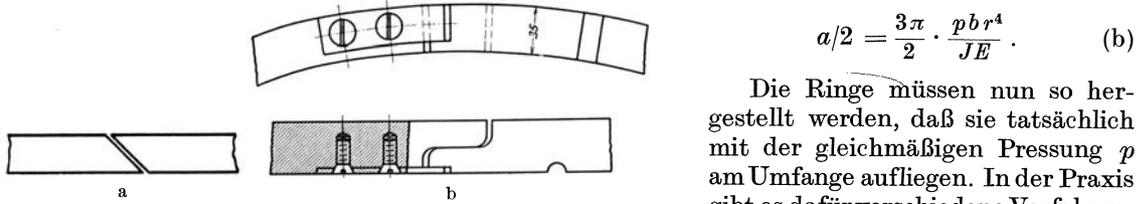


Abb. 12.26. Schloß des Ringes. a Abgeschrägt, b überlappt.

Die Ringe müssen nun so hergestellt werden, daß sie tatsächlich mit der gleichmäßigen Pressung p am Umfange aufliegen. In der Praxis gibt es dafür verschiedene Verfahren.

Stark verbreitet ist das Verfahren, bei dem die nötige Spannung nach dem Aufschneiden des Ringes durch Hämmern der Innenfläche erreicht wird, wobei die Schläge nach den Ringenden zu an Stärke abnehmen. Es hängt hier also wesentlich von der Übung und Geschicklichkeit des Arbeiters ab, ob die gleichmäßige Pressung erreicht wird.

Die Form des ungespannten Ringes läßt sich aber aus dem Krümmungsradius nach Gl. (12.34) eindeutig bestimmen, denn es ist:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} + \frac{M}{JE} = \frac{1}{r} + \frac{pbr^2(1 - \cos \varphi)}{1/12 \cdot bh^3 \cdot L} = y''.$$

Durch graphische Integration kann daraus die Form des ungespannten Ringes bestimmt werden, nach welcher eine Schablone zur Herstellung der Ringe angefertigt werden kann. Die Überlegenheit so hergestellter Ringe (Bennet-Ringe¹) gegenüber den gehämmerten ist durch zahlreiche Versuche nachgewiesen. Bei einem Versuch an einer Heißdampf-Verbund-Schnellzuglokomotive der Schwedischen Staatsbahnen war nach einer Versuchsdauer von $80\,000$ km die Abnutzung des Zylinders:

mit Bennet Ringen		mit gehämmerten Ringen	
horizontal 0,01 mm	vertikal 0,01 mm	horizontal 0,01 mm	vertikal 0,15 mm

Die größte Beanspruchung des Ringes entsteht aber beim Überstreifen über den Kolben. Nach Gl. (34) ist $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r_0} = \frac{M}{JE} = \frac{2\sigma}{Eh}$, worin $r_0 = r + \frac{a}{2\pi}$ der Krümmungsradius des ungespannten Ringes, r der Zylinderradius und a der herausgeschnittene Teil ist. Zum Überstreifen muß der Krümmungsradius ρ mindestens gleich $r + h$ sein, so daß

$$\frac{1}{r+h} - \frac{1}{r + a/2\pi} = -\frac{2\sigma}{E \cdot h} \sim \frac{a/2\pi - h}{r^2} \text{ ist, woraus mit Gl. (a) u. (b):}$$

$$\sigma = \frac{E}{2} \left(\frac{h}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{a}{2\pi h}\right) = \frac{E}{2} \cdot \left(\frac{h}{r}\right)^2 - \frac{ap}{2} \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 = \frac{E}{2} \left(\frac{h}{r}\right)^2 - \frac{3}{8} \sigma_{\max}$$

folgt. Mit $r/h = 18$, $\sigma_{\max} = 400$ und $E = 800\,000$ kg/cm² wird $\sigma = 1000$ kg/cm². Diese Spannung

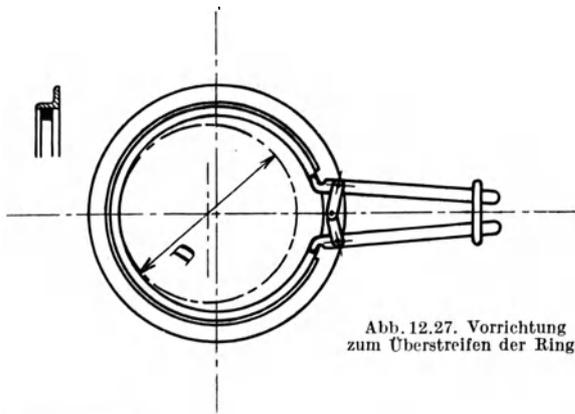


Abb. 12.27. Vorrichtung zum Überstreifen der Ringe.

liegt nahe an der Bruchgrenze von Gußeisen, so daß das Einbringen der Ringe mit der größten Sorgfalt geschehen muß, weil sie sonst zerbrechen. Die Vorrichtung nach Abb. 12.27 verhindert ein zu starkes Aufspreizen der Ringe und damit eine übergroße Beanspruchung.

Um die Überbeanspruchung der Ringe zu vermeiden, wird der Kolben mehrteilig ausgeführt (Abb. 12.28), so daß die Ringe seitlich eingeführt werden können.

Abb. 12.28. Geteilter Kolben (aus Dubbel, Taschenbuch).

¹ Z. VDI (1924) S. 253.

Federformen (Abb. 12.29 a, b), wie sie bei Reibkupplungen vorkommen, werden in ähnlicher Weise berechnet, so lange es sich um prismatische Stäbe handelt.

12.23. Einfluß der Querkraft Q. Um die Bedeutung der Querkräfte beurteilen zu können, müssen noch die dadurch verursachten Spannungen und Formänderungen berechnet werden. Die Gleichgewichtsbedingung in der Richtung von Q liefert die eine Gleichung:

$$Q = \int \tau_{xy} df^* ,$$

worin noch unbekannt ist, wie die Schubspannungen über die Querschnittsfläche verteilt sind. Um diese Spannungsverteilung zu beurteilen, müßten wieder die dadurch verursachten Formänderungen bekannt sein. Diese sind bei Schubsbeanspruchungen viel schwieriger zu überblicken und zweifellos auch viel verwickelter als bei der Beanspruchung durch Normalspannungen.

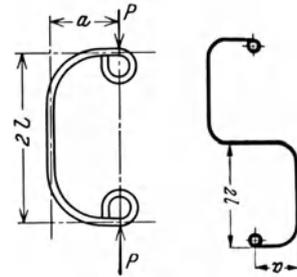


Abb. 12.29 a. Abb. 12.29 b.

Von den Schubspannungen kennen wir den allgemeinen Satz der Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen, der aussagt, daß die Schubspannungen in zwei zueinander senkrechten Schnitten gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind; sie treten immer paarweise auf. Der Beweis dieses Satzes folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen an einem Parallelepiped (Momentengleichung in bezug auf O, Abb. 12.30). Aus diesem Satz läßt sich ein weiterer, ganz allgemeiner Satz über die Schubspannungen ableiten. Betrachten wir an einem beliebig begrenzten Querschnitt eine am Rande liegende Fläche df (Abb. 12.31). Nehmen wir an, daß die Schubspannung dort beliebig gerichtet sei, so läßt sie sich immer in zwei Richtungen zerlegen, von denen die eine in die Richtung der Umrißlinie fällt, τ_t , und die andere senkrecht dazu steht, τ_n . Jeder dieser beiden Komponenten läßt sich eine gleich große zugeordnete Schubspannung gegenüberstellen. An einem unendlich kleinen Parallelepiped, von dem df eine Seitenfläche bildet, würde jedoch die der Komponente τ_n zugeordnete Schubspannung an einer zur freien Staboberfläche gehörigen Seitenfläche angreifen. Da aber dort nichts mehr angrenzt, was eine Kraft übertragen könnte, muß τ_n zu Null werden, um das Gleichgewicht gegen Drehen herbeizuführen. Daraus folgt:

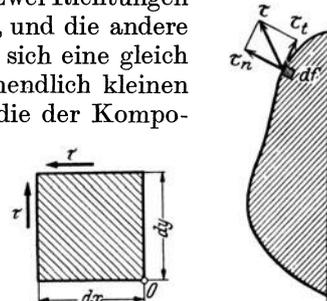


Abb. 12.30. Abb. 12.31.

Am Querschnittsumfang sind die Schubspannungen tangential gerichtet.

Da über die Schubspannungsverteilung in der Querschnittsebene weiter nichts positives ausgesagt werden kann, versucht man es mit den zugeordneten Schubspannungen. Legt man an einer beliebigen Stelle in der Entfernung η von der neutralen Faserschicht einen Schnitt (Abb. 12.32), so sind die dort auftretenden horizontalen Schubspannungen gleich den an dieser Stelle in dem Querschnitt auftretenden Schubspannungen. Von diesen horizontalen Schubspannungen wird nun angenommen, daß sie gleichmäßig über die Breite verteilt sind. Das ist eine Annahme (Hypothese), deren Richtigkeit aber gar nicht nachgewiesen ist. Die genaue Lösung des Problems für einen rechteckigen Querschnitt¹ zeigt dann auch, daß sie nicht zutrifft.

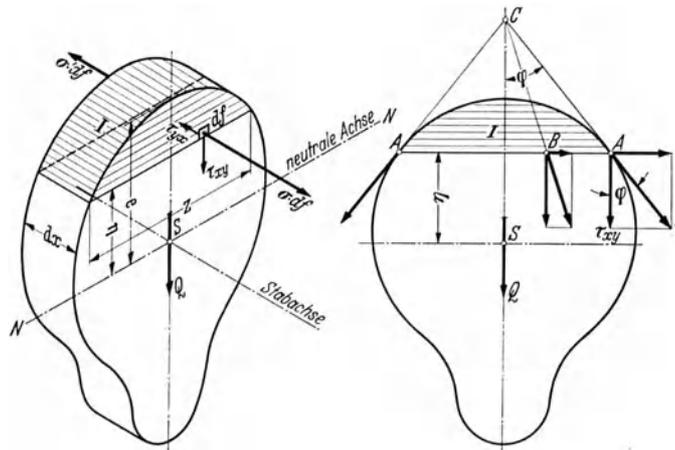


Abb. 12.32. Schubspannungen im gebogenen Stab.

Damit wäre die vertikale Komponente der in dem Querschnitt wirkenden Schubspannung bestimmt. Die am Umfange tangential gerichteten Schubspannungen schneiden die Symmetrieachse im Punkte C.

* Bei dieser Bezeichnung stimmt der erste Zeiger mit der Richtung der Normalen des Flächenelementes überein, die zweite zeigt die Richtung an, in der die Schubspannung zu nehmen ist.

¹ Timoschenko: Proc. Math. Soc. London, Serie 2, Bd. 20 S. 404.

Ein beliebiger Punkt B der Faserschicht AA erfährt eine Schubspannung, die ebenfalls nach dem Punkt C der Z -Achse gerichtet ist. Auch diese Annahme ist zwar nicht sicher begründet, aber sie ist die einfachste, die man machen kann. Die größte Schubspannung tritt dann am Umfang auf und ist:

$$\tau = \frac{\tau_{xy}}{\cos \varphi} \tag{12.37}$$

Wenn an den Schnittflächen die Spannungen angebracht werden, muß der abgeschnittene Teil I im Gleichgewicht sein. An der Stirnfläche x greifen die Normalspannungen σ an, deren Summe $= \int_{\eta}^e \sigma df$ ist. In der um dx entfernten Stirnfläche wirken die Normalspannungen, deren Summe $= \int_{\eta}^e \sigma' df$ ist, und in der horizontalen Grenzfläche die Schubspannungen τ_{yx} mit der Summe $\tau_{yx} dx \cdot z$, wenn z die Stabbreite in der Entfernung η ist. Die Gleichgewichtsbedingung in horizontaler Richtung liefert die Gleichung:

$$\tau_{yx} dx \cdot z = \int_{\eta}^e \sigma' df - \int_{\eta=z}^e \sigma df.$$

Diese Kräfte haben nicht den gleichen Angriffspunkt, weil der Körper noch auf Biegung beansprucht wird. Da die Normalspannungen proportional mit der Entfernung von der neutralen Faserschicht zunehmen, wird:

$$\tau_{yx} dx \cdot z = \frac{\sigma'_{\max}}{e} \int_{\eta=y}^{\eta=e} \eta df - \frac{\sigma_{\max}}{e} \int_{\eta=y}^{\eta=e} \eta df.$$

$\int_{\eta=y}^{\eta=e} \eta df = S_y$ ist das statische Moment des abgeschnittenen Teiles in bezug auf die Schwerpunktsachse des Querschnittes. Da wir einen prismatischen Körper vorausgesetzt haben, ist S_y für den ganzen Träger konstant und $z \tau_{yx} dx = \frac{S_y}{e} (\sigma'_{\max} - \sigma_{\max})$.

Da nach der Biegegleichung $\sigma = \frac{M}{J} e$ und $\sigma' = \frac{M + dM}{J} e$ ist, wird mit $Q = \frac{dM}{dx}$

$$\tau_{yx} dx \cdot z = \frac{S_y}{e} \cdot \frac{e}{J} (M + dM - M) = \frac{S_y}{J} dM$$

und

$$\tau_{yx} = \frac{S_y}{J} \cdot \frac{Q}{z} \tag{12.38}$$

S_y ist Null für $y = e$ und am größten für $y = \text{Null}$; die Schubspannung wird in der neutralen Faserschicht am größten und ist in den äußersten Fasern gleich Null.

Gl. (38) gilt natürlich nicht in der Nähe der Kraftangriffsstelle.

a) Für den rechteckigen Querschnitt ist (Abb. 12.33): $J = \frac{1}{12} b h^3$.

$$S_y = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad \text{und} \quad \tau_{xy} = \tau = \frac{Q}{b} \cdot \frac{\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{\frac{1}{12} b h^3} = \frac{6 Q}{b h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

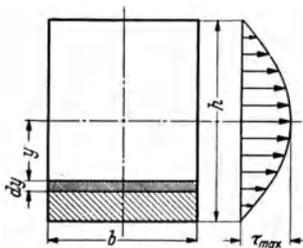


Abb. 12.33.

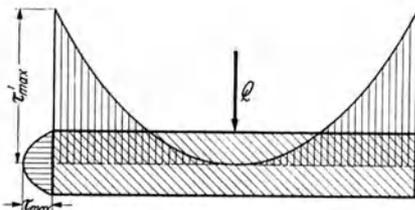


Abb. 12.34.

Das ist die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel auf der neutralen Achse des Querschnittes liegt.

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{b h} \tag{12.39}$$

Die Lösung von Timoshenko¹ zeigt, daß die Schubspannungen nicht gleichmäßig

über den Querschnitt verteilt sind (Abb. 12.34); ihre Größtwerte τ'_{\max} treten in den Endpunkten der neutralen Faserschicht auf, und zwar ist $\tau'_{\max} = \alpha \tau_{\max}$;

¹ Fußnote ¹ S. 43.

für b/h	0,5	1	2	4
ist α	1,03	1,13	1,4	2

b) Für den Kreisquerschnitt (Abb. 12.35) ist: $J = \frac{\pi}{4} r^4$

Mit $z = 2r \cos \varphi$, $\eta = r \sin \varphi$ und $d\eta = r \cos \varphi d\varphi$, wird

$$S_y = \int_{\eta}^e \eta df = 2r^3 \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{3} r^3 \cos^3 \varphi$$

und damit
$$\tau_{xy} = \frac{Q \cdot \frac{2}{3} r^3 \cos^3 \varphi}{\frac{\pi}{4} r^4 2 r \cos \varphi} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi r^2} \cos^2 \varphi.$$

Nach Gl. (37) ist:
$$\tau = \frac{\tau_{xy}}{\cos \varphi} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi r^2} \cos \varphi \quad (12.40)$$

und
$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{f}. \quad (12.40 a)$$

c) Für einen I-Querschnitt (Abb. 12.36). Kann man die Querschnittsfläche als die Differenz zweier Rechtecke bh und $b_1 h_1$ auffassen. Wenn auch infolge der plötzlichen Änderung der Breite die Voraussetzungen der Theorie nicht genau erfüllt sind, erhält man als angenäherten Wert der Schubspannung in einem Schnitt durch den Flansch:

$$\tau = \frac{Q}{J} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Für einen Schnitt durch den Steg ist:

$$\tau = \frac{Q}{J} \frac{1}{b - b_1} \left\{ \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \frac{b}{2} - \left(\frac{h_1^2}{4} - y^2 \right) \frac{b_1}{2} \right\}.$$

Die beiden Gleichungen von τ werden durch Parabeln dargestellt, von welcher die letztere sehr flach ist, da das konstante Glied überwiegt. Aus der Abbildung ist zu entnehmen, daß die Schubspannung in einem I-Querschnitt fast gleichmäßig über die Steghöhe verteilt ist.

Da in der neutralen Faserschicht die Biegespannung zu Null wird, könnte man glauben, dort ohne Schaden Material auf eine gewisse Strecke herausnehmen zu dürfen. Das Anbringen von Schlitzten oder Löchern verhindert dort aber die stetige Übertragung der Schubspannungen, die in der neutralen Achse gerade am größten sind. Man kann sich von der Größe der Schwächung durch folgende Überlegung ein Bild machen: Wäre die Trennung in der neutralen Achse auf die ganze Stablänge durchgeführt, so könnte jede Stabhälfte für sich frei durchbiegen. Dabei ändert sich aber das Widerstandsmoment des Trägers wesentlich. Bei den von C. Pfleiderer¹ unter-

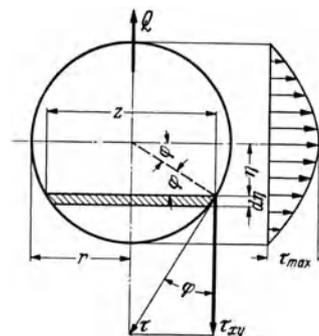


Abb. 12.35.

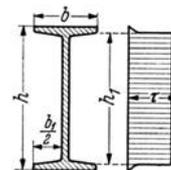


Abb. 12.36.

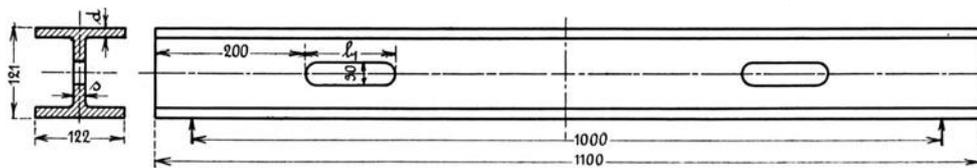


Abb. 12.37 (aus Bach-Baumann).

suchten gußeisernen Trägern (Abb. 12.37) war $J = 1100 \text{ cm}^4$ und $W = 184 \text{ cm}^3$. Für die durch den Schlitz getrennten zwei Querschnittshälften: $W_1 = 2 \cdot 16 = 32 \text{ cm}^3$. Die größte Biegespannung müßte also auf das Fünffache steigen; C. Pfleiderer hat bei seinen Versuchen auch Spannungserhöhungen von dieser Größenordnung gefunden.

Die Schubspannungen haben auch zur Folge, daß die elastische Linie sich etwas ändert. Zwei benachbarte Schnitte erfahren eine Senkung $d\zeta$, wodurch Q eine Arbeit $\frac{1}{2} Q d\zeta$ geleistet hat, die gleich der Deformationsarbeit durch die Schubspannungen sein muß

$$dx \int_F \frac{\tau^2}{2G} df = \frac{1}{2} Q d\zeta,$$

$$\zeta = \frac{1}{G} \int_0^l \frac{dx}{Q} \int_F \tau^2 df. \quad (12.41)$$

¹ VDI-Forschungsbericht Nr. 97.

Für einen rechteckigen Querschnitt ist $\tau = \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$ und $df = bdy$, also:

$$\int \tau^2 df = \frac{36bQ^2}{b^2h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dy = \frac{6Q^2}{5bh}. \quad (12.42)$$

Für den Belastungsfall 1 (Zahlentafel 12.1) z. B. ist Q unabhängig von x gleich P , und

$$\zeta = \frac{1}{G} \int_0^l \frac{6}{5} \frac{P}{bh} dx = \frac{6Pl}{5bh \cdot G}. \quad (12.43)$$

Die Durchbiegung f , aus der Gleichung der elastischen Linie bestimmt, war $f = \frac{Pl^3}{3JE} = \frac{4Pl^3}{bh^3E}$, so daß die totale Durchbiegung mit $G = 0,385E$ (Gl. 11.4):

$$f_t = \frac{Pl}{bhE} \left\{ \frac{4l^2}{h^2} + 3,1 \right\} \quad (12.44)$$

ist. Für $l = 5h$ verursachte die Vernachlässigung der Scherkraft einen Fehler von 3,1%. Für $l = h$ dagegen beträgt der Fehler fast 80%. Für I-Träger, bei welchen die Schubspannungen gleichmäßig über den Querschnitt verteilt sind, ist der Einfluß von τ etwa 25% größer. Bei der genauen Bestimmung der Formänderung von Zapfen muß die Schubkraft jedenfalls berücksichtigt werden.

Anwendungsbeispiel 12.3. Wie groß ist die größte Formänderung eines einseitig eingespannten runden Trägers bei gleichmäßiger Belastung (Abb. 12.38)?

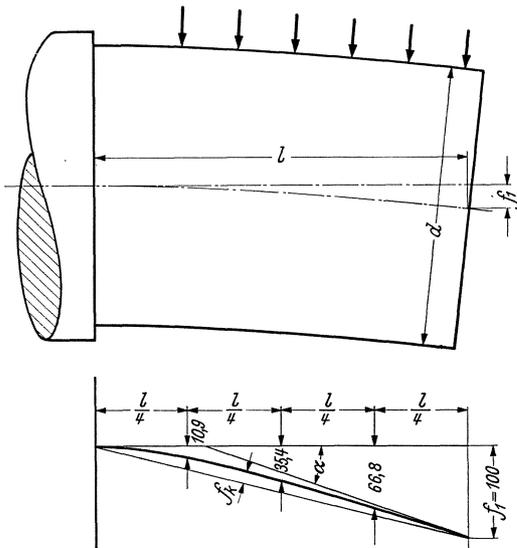


Abb. 12.38. Formänderung eines Zapfens.

Die Durchbiegung durch die Normalspannungen allein ist nach Zahlentafel 12.1 Pos. 3

$$\text{mit } J = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$f_1 = \frac{pl^4}{8JE} = \frac{2,5pl^4}{Ed^4}. \quad (a)$$

Die Verbindung der beiden Endpunkte der elastischen Linie (Abb. 12.38) gibt die mittlere Schrägstellung gegenüber dem Ende, während die größte Wölbung durch f_k dargestellt ist. Aus der Konstruktion der elastischen Linie folgt:

$$f_k = 0,16f_1 = 0,4 \frac{pl^4}{Ed^4}. \quad (b)$$

Durch die Querkraft entsteht nach Gl. (41) noch eine zusätzliche Senkung

$$\zeta = \frac{1}{G} \int_0^l \frac{dx}{Q} \int_{Fl} \tau_{xy}^2 df,$$

worin τ_{xy} die Komponente der Schubspannung in der Q -Richtung ist. Für den kreisförmigen Querschnitt ist

$$\eta = r \sin \varphi, \quad d\eta = r \cos \varphi d\varphi, \quad df = 2r \cos \varphi d\eta = 2r^2 \cos^2 \varphi d\varphi \quad \text{und} \quad \tau_{xy} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi r^2} \cos^2 \varphi. \quad (\text{Gl. 40})$$

Damit wird:

$$\int_{Fl} \tau_{xy}^2 df = 2 \left(\frac{4}{3} \right)^2 \frac{Q^2}{(\pi r^2)^2} \cdot r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi d\varphi.$$

Das bestimmte Integral hat den Wert $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\pi}{2}$, so daß $\zeta = \frac{1}{G} \cdot \frac{5}{9\pi r^2} \int_0^l Q dx$ ist.

Für einen gleichmäßig belasteten Balken ist die Querkraft $Q = p \cdot x$, und mit $G = 0,385E$:

$$\zeta = \frac{1}{G} \cdot \frac{5}{9\pi r^2} \cdot \frac{pl^2}{2} = \frac{5}{3,465E} \cdot \frac{pl^2}{2\pi r^2}. \quad (c)$$

¹ Madelung, E.: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Berlin: Julius Springer 1922.

Die totale Durchbiegung mit Berücksichtigung der Scherkraft wird:

$$f_t = f_1 + \zeta = \frac{p \cdot l^2}{2 \pi r^2 E} \left(\frac{l^2}{r^2} + 1,45 \right). \quad (d)$$

Für $l = d$ ist f_t 36% größer als bei Vernachlässigung der Querkkräfte. Für $l = 2d$ beträgt der Fehler immer noch 9%. Der Balken stellt sich demnach bedeutend schräger, und auch die Krümmung ist größer als die Gl. (b) ergibt. Man kann ungefähr setzen:

$$f_k \approx 0,6 \frac{p l^4}{E \cdot d^4}.$$

12.24. Träger mit veränderlichem Querschnitt. Bei einem prismatischen Stab tritt die größte Biegespannung nur im Querschnitt des größten Momentes auf und dort nur in den äußersten Fasern. Alle andere Querschnitte werden weniger beansprucht und dürfen deshalb schwächer gemacht werden. Eine bessere Werkstoffausnutzung erhält man, wenn in allen Querschnitten die maximalen Biegespannungen gleich groß werden (Träger gleicher Biegespannung)¹.

Es ist aber zu beachten, daß wir bisher prismatische Stäbe mit unveränderlichen Querschnitten vorausgesetzt haben. Die Berechnung der Spannungen bei veränderlichen Querschnitten ist nur bei einfachen Formen möglich und zeigt z. B. bei keilförmigen Trägern (vgl. Abschn. 15.2), daß die Biegespannungen mit ausreichender Genauigkeit auch für veränderliche Querschnitte nach der elementaren Theorie berechnet werden dürfen. Die Schubspannungen dagegen erhalten einen ganz anderen Verlauf und ihre Vernachlässigung bedeutet bei veränderlichen Querschnitten eine grobe Unterschätzung der Bruchgefahr.

Für Belastungsfall 1, Zahlentafel 12.1, ist zum Beispiel:

$$M_x = P x \quad \text{und} \quad \sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} e_x = \frac{P e_x}{J_x} \cdot x; \quad (12.45)$$

soll σ_{\max} konstant sein, so muß $\frac{P e_x}{J_x} x$ konstant werden. Diese eine Gleichung mit den beiden Unbekannten J_x und e_x reicht zur eindeutigen Bestimmung des Körpers nicht aus. Wir können irgendeine weitere beliebige Bedingung über den Querschnitt annehmen, z. B. Rechteck mit unveränderlicher Höhe h . Dann ist

$$J = \frac{1}{12} b_x h^3, \quad \text{und} \quad \frac{6 P x}{b_x h^2} = \text{konstant}, \quad (12.46)$$

oder b muß mit x proportional sein (Abb. 12.39).

Da die Spannungen in den einzelnen Querschnitten größer werden als für den prismatischen Träger, sind die Durchbiegungen natürlich auch größer. Körper gleicher Biegespannung dürfen nur dann gewählt werden, wenn die Durchbiegung groß werden darf (z. B. bei Federn).

Mit der Bedingung $\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} e_x = \text{konstant}$, wird die Formänderungsarbeit für Körper gleicher Biegespannung Gl. (17): $\mathfrak{A} = \int \frac{M_x^2}{2 J_x E} dx = \frac{\sigma_{\max}^2}{2 E} \int \frac{J_x}{e_x^2} dx$ und mit $J_x = i f_x e_x^2$:

$$\mathfrak{A} = \frac{\sigma_{\max}^2}{2 E} \int i f_x dx = \frac{\sigma_{\max}^2}{2 E} i \int dV = \frac{\sigma_{\max}^2}{2 E} i \cdot V, \quad (12.47)$$

d. h. die Formänderungsarbeit eines Körpers gleicher Biegespannung von bestimmter Querschnittsform ist unabhängig von der Art der Unterstützung und der Belastung.

Die Bedingung, daß alle Querschnitte gleich große Biegespannungen erfahren, ist praktisch nie genau zu erfüllen, da in den Momentennullpunkten die Spannung immer gleich Null wird.

12.3. Kräftepaar wirkt in einer Ebene senkrecht zur Stabachse.

Der Körper ist dann auf Verdrehung beansprucht, wobei nur Schubspannungen auftreten. Der kreisförmige Querschnitt ist besonders einfach, weil dann zu erwarten ist, daß alle Punkte,

¹ Im Schrifttum meist Körper gleicher Biegefestigkeit genannt; diese Bezeichnung ist nur irreführend. Nur die größten Biegespannungen in den verschiedenen Schnitten sind gleich groß. Die Schubspannungen dagegen hängen von der Gestalt des Körpers ab und können z. B. für keilförmige Körper berechnet werden (Abschn. 15.2).

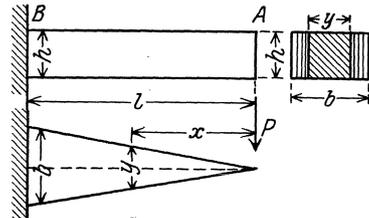


Abb. 12.39. Körper gleicher Biegespannung (aus Winkel).

die vorher in einer Querschnittsebene lagen auch nach der Verdrehung noch in einer zur Stabachse senkrechten Ebene liegen. Der Symmetrie wegen könnte der Kreisquerschnitt kaum nach irgendeiner Richtung eine besondere Abweichung zeigen (vgl. Abb. 12.40 a). Je zwei in gleichen Abständen aufeinanderfolgende Querschnitte verdrehen sich immer gleichviel gegeneinander. Wenn $d\varphi$ die Verdrehung für eine Länge dx ist, so ist $d\varphi/dx = \vartheta$ der verhältnismäßige Verdrehungswinkel, d. i. der Verdrehungswinkel je Längeneinheit. Schneiden wir ein Stabelement von der Länge dx heraus (Abb. 12.40 b) und wählen im Innern eine Faser AB in der Entfernung ρ vom Mittelpunkt, dann ist die Verschiebung $AC = \rho d\varphi$. Aber AC ist auch gleich

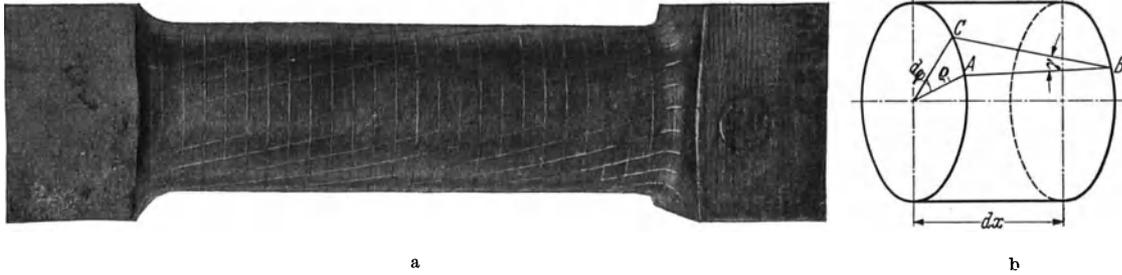


Abb. 12.40. Verdrehung eines runden Stabes.

γdx , so daß durch Gleichsetzen beider Werte $\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx} = \rho \vartheta$ wird. Da, nach dem Hookeschen Gesetze, die Spannungen mit den Verschiebungen proportional sind, ist

$$\tau = G\gamma = G\rho\vartheta, \quad (12.48)$$

worin G der Schubmodul ist. Die Schubspannung τ steht senkrecht zum Radius, weil die elastische Verschiebung in diesem Sinne erfolgt, und ist proportional mit ρ :

$$\tau = \tau_{\max} \frac{\rho}{r}. \quad (12.49)$$

Nach der Gleichgewichtsbedingung muß die Summe der Momente der Spannungen gleich und entgegengesetzt dem Drehmomente sein. Auf ein Flächenelement $df = 2\pi\rho d\rho$ wirkt die Schubspannung τ , so daß

$$M_d = \int_0^r \tau \cdot df \cdot \rho = \frac{\tau_{\max}}{r} \int_0^r \rho^2 df = \tau_{\max} \cdot \frac{J_p}{r} = \tau_{\max} \cdot W_p \quad (12.50)$$

ist, wenn mit $J_p = \int_0^{d/2} \rho^2 df = \frac{\pi}{32} d^4$ das polare Flächenträgheitsmoment und mit W_p das polare Widerstandsmoment des Querschnittes bezeichnet wird. Die größte Schubspannung ist

$$\tau_{\max} = \frac{M_d}{\frac{\pi}{16} d^3} \sim \frac{5 M_d}{d^3} \quad (12.51)$$

und der Verdrehungswinkel:

$$\vartheta = \frac{\tau_{\max}}{Gr} = \frac{M_d}{J_p \cdot G}. \quad (12.52)$$

Die Gleichungen für die Berechnung der größten Spannung (50) und der Formänderung (52) haben also für Verdrehung den gleichen Aufbau wie die entsprechenden Gleichungen (9) u. (11) für Biegung.

Für eine Hohlwelle mit den Radien r_i und r_a wird

$$\begin{aligned} M_d &= 2\pi \frac{\tau_{\max}}{r_a} \int_{r_i}^{r_a} \rho^3 d\rho = \frac{2\pi\tau_{\max}}{r_a} \cdot \frac{r_a^4 - r_i^4}{4} = \frac{\pi(d_a^4 - d_i^4)}{16 d_a} \tau_{\max} \\ &= \frac{\pi(d_a^2 + d_i^2)(d_a + d_i)(d_a - d_i)}{16 d_a} \tau_{\max} \approx \frac{\pi}{2} \cdot d_m^2 \cdot s \cdot \tau_{\max}, \end{aligned} \quad (12.53)$$

worin d_m der mittlere Durchmesser und s die Wandstärke der Hohlwelle ist.

Für die Berechnung der Abmessungen ist das größte Drehmoment maßgebend. Um einen Überblick über die Beanspruchung zu erhalten, kann man die Drehmomente in ähnlicher Weise längs der Stabachse auftragen, wie wir es bei der Biegemomentenfläche getan haben. Abb. 12.41a zeigt eine Welle, die nur zwischen den Riemenscheiben 1 und 2 ein Drehmoment überträgt; Abb. 12.41b eine Welle, bei der die Antriebs Scheibe in der Mitte liegt, und das Drehmoment nach beiden Seiten abgegeben wird.

Hat der Stab einen allmählich veränderlichen kreisförmigen Querschnitt, so muß der Verdrehungswinkel für ein Längenelement dx :

$$d\varphi = \vartheta dx = \frac{M_d}{J_p \cdot G} dx,$$

über die totale Länge summiert werden, um den Verdrehungswinkel $\varphi = \vartheta l$ zu erhalten:

$$\varphi = \frac{1}{G} \int_0^l \frac{M_d}{J_p} dx,$$

welche Gleichung immer graphisch integriert werden kann.

Für alle anderen Querschnittsformen gelten keine so einfachen Beziehungen, weil die Voraussetzung, daß die Querschnitte eben bleiben nicht erfüllbar ist. Das erkennt man sofort, wenn man z. B. einen Stab von quadratischem Querschnitt betrachtet (Abb. 12.42). Würde sich dieser wie der Kreiszyylinder verformen, so müßte jeder Punkt des Querschnittes gegenüber dem unendlich benachbarten einen kleinen Kreisbogen beschreiben, der senkrecht zu dem vom Mittelpunkt des Quadrates nach ihm gezogenen Halbmesser steht. Die dadurch erzeugte Schubspannungsverteilung verstößt gegen die wichtige Randbedingung, daß die Schubspannungen am Umfang des Querschnittes tangential gerichtet sind, also keine Komponente senkrecht dazu haben dürfen. Daher kommt es, daß sich keine allgemeine für alle Querschnittsformen verwendbare Lösung der Verdrehungsaufgabe angeben läßt. Für jede Querschnittsform muß wieder eine neue Lösung gesucht werden¹.

Wenn alle Querschnitte bei der Verdrehung eben bleiben würden (nach der alten Theorie von Navier), so wäre für alle Querschnittsformen $J_t = J_p$. Zwei gleich lange Stäbe, der eine rund mit 20 mm \varnothing , der andere rechteckig 37 \times 3,7 mm (Abb. 12.43), welche das gleiche polare Trägheitsmoment haben, müßten dann durch das gleiche Drehmoment M_d um den gleichen Winkel verdreht werden. Jedermann kann den Versuch z. B. mit Holzstäben machen und finden, daß das Rechteck um einen vielfach größeren Winkel verdreht wird. Das eben bleiben der Querschnitte gibt demnach keinesfalls eine brauchbare Näherungslösung! Seit der französische Mathematiker de Saint Venant die erste genaue Lösung gefunden hat, wurde das Problem für alle Querschnitte gelöst.

Es ist gebräuchlich für die Berechnung der Spannung und der Formänderung bei allen Querschnittsformen, ähnliche Gleichungen wie für den Kreisquerschnitt zu verwenden:

$$\tau_{\max} = \frac{M_d}{W_t} \quad \text{resp.} \quad \vartheta = \frac{M_d}{J_t \cdot G}. \quad (12.54)$$

Man nennt W_t das Widerstandsmoment gegen Verdrehung. $J_t G$ ist ein Maß für die Drehsteifigkeit des Stabes, so wie $J E$ ein Maß für die Biegesteifigkeit war. Für den Kreisquerschnitt ist $J_t = J_p$ und $W_t = W_p$; für andere Querschnittsformen können J_t und W_t aus Zahlentafel 12.8 entnommen werden.

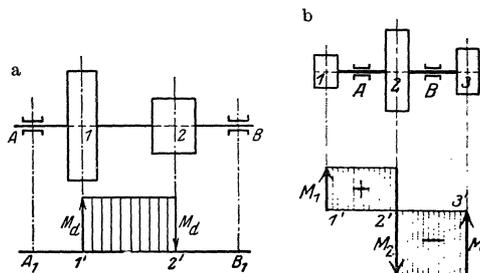


Abb. 12.41. Drehmomentenfläche (aus Winkel).

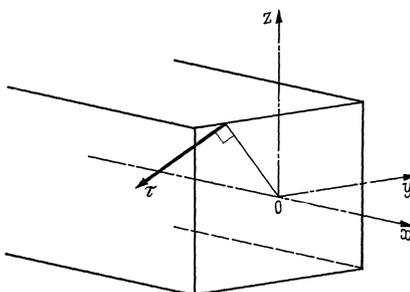


Abb. 12.42.

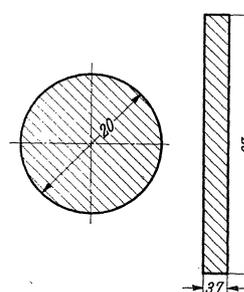
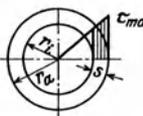
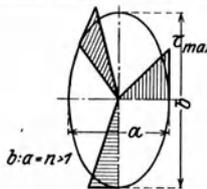
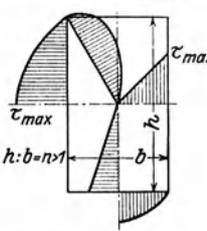
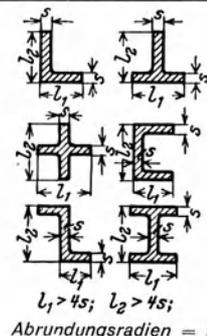
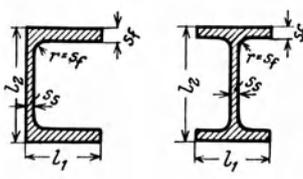
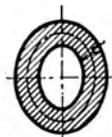


Abb. 12.43. J_p für Kreis und Rechteck gleich groß.

¹ Pöschl, Th.: Bisherige Lösungen des Torsionsproblems. Z. M. M. 1 (1921) S. 312/28 und 2 (1922) S. 137/147.

Zahlentafel 12.8. Verdrehung.

	Querschnitt	Spannung	Verdrehungswinkel ϑ																						
1		$M_d = \frac{1}{5} d^3 \tau_{\max}$	$\tau_{\max} = r_a G \vartheta$ $\vartheta = \frac{M_d}{J_p G}$																						
2		$M_d = \frac{\pi}{16} \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} \tau_{\max}$ $\approx 1,6 d_m^2 s \tau_{\max}$ (wenn s klein ist)	$\tau_{\max} = r_a G \vartheta$ $\vartheta = \frac{M_d}{J_p G}$																						
3		$M_d = \frac{1}{5} a^2 b \tau_{\max}$	$\tau_{\max} = \frac{n^2}{n^2 + 1} a G \vartheta$																						
4		$M_d = \psi h b^2 \tau_{\max}$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"><tr><td>n = 1</td><td>2</td><td>4</td><td>10</td><td>>10</td></tr><tr><td>ψ = 0,209</td><td>0,245</td><td>0,282</td><td>0,312</td><td>0,33</td></tr></table> Näherungswert: $\psi = \frac{2}{9}$	n = 1	2	4	10	>10	ψ = 0,209	0,245	0,282	0,312	0,33	$\tau_{\max} = \psi_1 b G \vartheta$. $\vartheta = \psi_2 \frac{M_d}{h b^3 G}$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"><tr><td>n = 1</td><td>1,5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>ψ₁ = 0,675</td><td>0,85</td><td>0,927</td><td>0,985</td></tr><tr><td>ψ₂ = 7,09</td><td>5,08</td><td>4,37</td><td>3,80</td></tr></table>	n = 1	1,5	2	3	ψ ₁ = 0,675	0,85	0,927	0,985	ψ ₂ = 7,09	5,08	4,37	3,80
n = 1	2	4	10	>10																					
ψ = 0,209	0,245	0,282	0,312	0,33																					
n = 1	1,5	2	3																						
ψ ₁ = 0,675	0,85	0,927	0,985																						
ψ ₂ = 7,09	5,08	4,37	3,80																						
5		$M_d = \frac{1}{3} \cdot l_t s^2 \tau_{\max}$ $\perp l_t = l_1 + l_2 - 1,6 s$ $\perp l_t = l_1 + l_2 - 0,9 s$ $+ l_t = l_1 + l_2 - 0,15 s$ $\square l_t = 2 l_1 + l_2 - 2,6 s$ $\perp l_t = 2 l_1 + l_2 - 1,2 s$ <i>l₁ > 4s; l₂ > 4s; Abrundungsradien = s</i>	$\tau_{\max} \approx s G \vartheta$. τ_{\max} in den Punkten der Begrenzungslinie, mit Ausnahme der Enden. In den Abrundungen wird τ etwa 60% größer ¹ . $\vartheta = \frac{M_d}{\frac{1}{3} l_t s^3 G}$																						
6		$M_d = \frac{1}{3} \frac{l_{t1} s_1^3 + l_{t2} s_2^3}{s_f} \tau_{\max}$ $\square l_{t1} = 2 l_1 - s_f$ $\square l_{t2} = l_2 - 1,6 s_f$ $\perp l_{t1} = 2 l_1 - 1,26 s_f$ $\perp l_{t2} = l_2 - 1,67 s_f + 1,76 s_s$	$\tau_{\max} \approx s G \vartheta$																						
7	 Beliebiges Ring von unveränderlicher Breite s.	$M_d \approx 2 F_m \cdot s \cdot \tau_{\max}$ $F_m = \frac{F_a + F_i}{2} = \text{mittl. Fläche}$ $U_m = \frac{U_a + U_i}{2} = \text{mittl. Umfang}$	$\tau_{\max} = 2 \frac{F_m}{U_m} G \cdot \vartheta$ $\vartheta \approx \frac{M_d}{4 F_m s^2 G}$																						

Anm.: Abb. unter Pos. 5 bis 7 aus C. Weber: Drehungsfestigkeit (VDI-Forschungsheft Nr. 249).

¹ Uebel, Fr.: Zur Berechnung von drillbeanspruchten Stäben mit rechteckigem und aus Rechtecken zusammengesetzten Profilen (Walzträger). Forschung 10 (1939) S. 123/41 (mit Literaturangaben). — Engelmann, Fr.: Verdrehung von Stäben mit einseitig-ringförmigem Querschnitt. VDI-Forsch.-Heft 6 (1935) S. 146/154.

Die größte Schwierigkeit für den Konstrukteur bei der Beurteilung der Tragfähigkeit eines Querschnittes gegenüber Torsionsbeanspruchung liegt darin, daß er sich im allgemeinen kein klares Bild über die Spannungsverteilung machen kann. Sobald dies möglich wäre, würde er auch die Tragfähigkeit besser beurteilen können.

Wie stark man sich irren kann, wenn man allgemein annehmen wollte, daß auch für Torsion das Material möglichst weit von der Achse angeordnet werden sollte, zeigt folgender Vergleich: Die Querschnitte 1 und 2 (Abb. 12.44) sind für Biegung fast gleichwertig. Für Torsion ist für Querschnitt 1:

$$M_d = \frac{1}{3} l_t s^2 \tau_{\max}, \quad l_t = 2 \cdot 6 + 10 - 1,2 \cdot 0,8 = 21 \text{ cm}, \quad \text{und} \quad \tau_{\max} = \frac{M_d}{\frac{1}{3} \cdot 21 \cdot 0,64} = \frac{M_d}{4,48} \text{ at.}$$

$$\text{Für Querschnitt 2: } M_d = 2F_m \cdot s \cdot \tau_{\max} = 2 \frac{6 \cdot 10 + 4,4 \cdot 8,4}{2} \cdot 0,8 \tau_{\max} \quad \text{und} \quad \tau_{\max} = \frac{M_d}{77,6}.$$

Die Torsionsspannung ist also für den ersten Querschnitt $\frac{77,6}{4,48} = 17$ mal so groß als für Querschnitt 2.

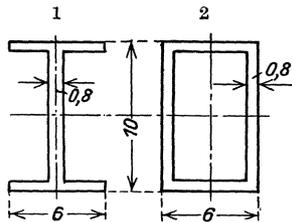


Abb. 12.44. Für Biegung beide Querschnitte gleichwertig. Für Verdrehung I-Querschnitt ungeeignet.

Es gibt nun ein einfaches Hilfsmittel, von Prof. L. Prandtl (Göttingen) vorgeschlagen, um die Spannungsverteilung anschaulicher zu machen:

Man denke sich aus einem Blech ein Loch ausgeschnitten, von der Gestalt des Querschnittes, für den die Torsionsbeanspruchung beurteilt werden soll, und über dem Loch eine Membran gespannt. Eine Membran ist eine Haut, die gar keine Biegesteifigkeit hat, z. B. eine Seifenhaut. Wenn auf beiden Seiten der Haut der Druck gleich groß ist, so bleibt die Haut eben. Wenn wir aber den Druck auf der einen Seite erhöhen, so wölbt sich die Haut, und das Gefälle des Hügels entspricht an jeder Stelle der Größe der dort auftretenden Schubspannung.

Der Beweis für diese Analogie liegt darin, daß beide Probleme auf die gleichen Differentialgleichungen zurückzuführen sind¹. Man kann in die Querschnitte die Niveaulinien leicht einzeichnen und danach die Spannungsverteilung beurteilen (Abb. 12.45).

Die Formänderungsarbeit ist für alle Querschnittsformen gleich Moment mal halben Verdrehungswinkel, also

$$\mathfrak{A} = M_d \cdot \vartheta \cdot l/2. \quad (12.55)$$

Die Werte von M_d und ϑ können für den Kreisquerschnitt aus den Gl. (51 u. 52) und für andere Querschnittsformen aus Zahlentafel 12.8 entnommen werden. Für den Kreisquerschnitt ist mit $V = f \cdot l = \pi/4 \cdot d^2 \cdot l$

$$\mathfrak{A} = \frac{\tau_{\max}^2}{4G} \cdot V. \quad (12.56)$$

12.4. Zusammengesetzte Beanspruchungen.

Jede allgemeine Kraftwirkung kann auf eine Überlagerung der drei grundlegenden Belastungsfälle 12.1 (Zug, Druck), 12.2 (Biegung) und 12.3 (Verdrehung) zurückgeführt werden. Wirkt auf den prismatischen Körper (Abb. 12.46) eine beliebige Kraft P , so kann diese immer in zwei Komponenten P_z und P_{xy} zerlegt werden, indem durch die Kraft eine Ebene senkrecht

¹ Für den Beweis siehe Abschnitt 17.

zur XY -Ebene (die durch die Stabachse geht) gelegt wird. Durch Überbringung dieser beiden Komponenten nach der Schwerachse SS' des Stabes, erhalten wir folgende Beanspruchungen:

1. Ein Drehmoment $P_z \cdot a$, in einer Ebene senkrecht zur Stabachse wirkend;
2. eine Kraft P_z in S ;
3. ein Moment $P_{xy} \cdot b$ in einer Ebene wirkend, die durch die Stabachse geht, den Stab also verbiegt;

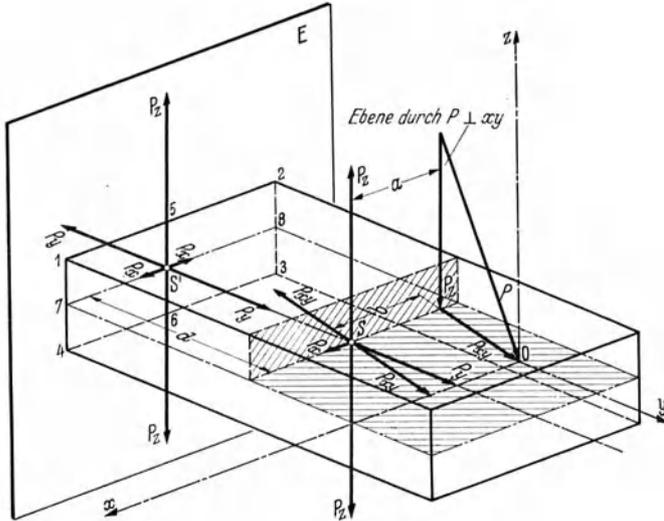


Abb. 12.46.

4. eine Einzelkraft P_{xy} in S , welche in den Komponenten P_x und P_y zerlegt werden kann, die beide in der XY -Ebene wirken.

Wollen wir z. B. die Beanspruchungen in der Einspannstelle E berechnen, so erhalten wir:

1. eine Torsionsbeanspruchung durch das Moment $P_z \cdot a$, das in den Punkten 5,6 die größten Torsionsspannung $\tau_{\max} = M_a/\psi h b^2$ und in 7, 8 $\tau'_{\max} = M_a/\psi b h^2$ erzeugt;

2. die in S wirkende Kraft P_z beansprucht den Einspannquerschnitt auf Biegung; 7—8 ist die neutrale Faserschicht, die größten Biegespannungen treten in 1—2 und 3—4 auf. Die in der Einspannebene noch wirkende Querkraft P_z wird meistens vernachlässigt;

3. das Moment $P_{xy} \cdot b$, das in der XY -Ebene wirkt, beansprucht den Stab auch auf Biegung, mit 5—6 als neutrale Faserschicht und den größten Biegespannungen in den Fasern 1—4 und 2—3;

4. die Komponente P_y in der Stabachse wirkend beansprucht den Stab auf Zug, gleichmäßig über den Querschnitt verteilt. Die Kraft P_x (in der XY -Ebene) erzeugt nochmals Biegung mit 5—6 als neutrale Faserschicht. Die in S' wirkende Querkraft P_x wird wieder vernachlässigt.

Anwendungsbeispiel 12.4. Berechnung des Fundamentes eines freistehenden Drehkrans. Die Kräfte (Abb. 12.47)

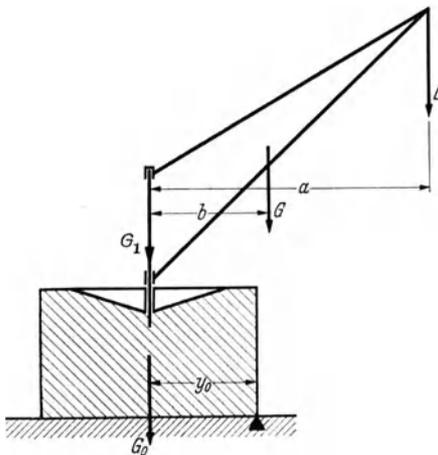


Abb. 12.47.

- L = Last an der Spitze des Auslegers wirkend (Hebelarm a),
- G = Gewicht des drehbaren Auslegers, am Hebelarm b wirkend,
- G_1 = Gewicht der feststehenden Kranteile in der Mittellinie der Säule,
- G_0 = Fundamentgewicht,

können immer zu einer Resultierenden

$$S = L + G + G_1 + G_0$$

vereinigt werden, deren Entfernung a_s von der Drehachse aus der Gleichung:

$$L \cdot a + G \cdot b = S \cdot a_s$$

berechnet werden kann. Der Boden ist erstens durch die Kraft S in der Schwerachse wirkend gleichmäßig auf Druck beansprucht:

$$\sigma_d = -S/f$$

und zweitens infolge des Biegemomentes $S \cdot a_s$ durch eine geradlinig verteilte Pressung mit den Extremalwerten

$$\sigma_b = \mp S \cdot a_s/W$$

wenn angenommen wird, daß für den Boden das Hoochesche Gesetz gültig ist. Beide gleichgerichtete Normalspannungen können addiert werden; die größte Kantenpressung $-\sigma_d + \sigma_b$ darf einen von den Bodenverhältnissen abhängigen Grenzwert (etwa 2—2,5 kg/cm²) nicht überschreiten. Da das Erdreich keine Zugspannungen aufnehmen kann, muß auch die kleinste

Flächenpressung $\sigma_a - \sigma_b$ positiv bleiben. Die Standsicherheit erfordert, daß das Kippmoment $L(a - y_0) + G(b - y_0)$ kleiner als das Stabilitätsmoment $(G_0 - G_1) y_0$ ist. Es ist gebräuchlich das Fundamentgewicht zwei- bis dreimal so groß zu machen als aus der Gleichung: Kippmoment = Stabilitätsmoment folgen würde.

Der allgemeine Spannungszustand. Wir leiten zunächst die Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte ab, die an einem (an der Stelle x, y, z herausgeschnittenen) Würfel mit den Seitenlängen dx, dy und dz wirken (Abb. 12.48). Von den Spannungskomponenten sind zur X -Achse parallel: die Normalspannung σ_x und die Schubspannungen τ_{yx} und τ_{zx} . Aus dem Satz der zugeordneten Schubspannungen (vgl. S. 43) folgt:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_y \quad \text{und} \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} = \tau_x.$$

Es gibt somit nur drei voneinander verschiedene Schubspannungen.

Bei der Bildung der Komponentensumme in der X -Richtung ist jede dieser Spannungen mit der Fläche zu multiplizieren, auf die sie wirkt. Dabei ist zu beachten, daß die gleichbezeichneten Beiträge, die von zwei parallelen Seitenflächen stammen, sich um ein Differential voneinander unterscheiden. Unter der Annahme, daß ein Element keine Massenkkräfte wirken, lautet die Gleichgewichtsbedingung in der X -Richtung:

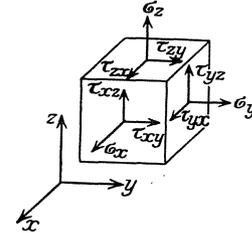


Abb. 12.48.

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left(\tau_z + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} dy\right) dz dx - \tau_z dz dx + \left(\tau_y + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} dz\right) dx dy - \tau_y dx dy = 0.$$

Sie liefert die erste der drei Gleichungen:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = 0, \quad (12.57)$$

deren folgende durch zyklische Vertauschung der Zeiger x, y und z aus der ersten hervorgehen.

Bei der Gestaltänderung erfahren die Koordinaten x, y, z Änderungen ξ, η, ζ , die als unendlich klein angesehen werden dürfen. Eine kleine Strecke dx erfährt die Änderung $d\xi$, so daß

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \text{ebenso} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{und} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

ist. Die Strecke dx und dy , die vor der Formänderung rechtwinklig zueinander standen, erfahren eine Winkeländerung γ_{xy} (Abb. 12.49).

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad \text{ebenso} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad \text{und} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (12.58)$$

Aus dem Hookeschen Gesetz für den isotropen Körper folgen die sechs Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} E\varepsilon_x &= \sigma_x - \frac{1}{m}(\sigma_y + \sigma_z), & \tau_z &= G\gamma_{xy} \\ E\varepsilon_y &= \sigma_y - \frac{1}{m}(\sigma_z + \sigma_x), & \tau_x &= G\gamma_{yz} \\ E\varepsilon_z &= \sigma_z - \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_y), & \tau_y &= G\gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (12.59)$$

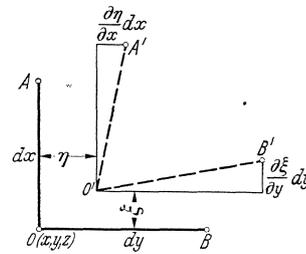


Abb. 12.49.

und durch Addition die räumliche Dehnung:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{m-2}{mE}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (12.60)$$

Durch Auflösen der Gleichungen (59) nach den Spannungen erhält man:

$$\sigma_x = 2G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2}\right), \quad \sigma_y = 2G\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{e}{m-2}\right) \quad \text{und} \quad \sigma_z = 2G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{e}{m-2}\right). \quad (12.61)$$

Der ebene Spannungszustand, der dadurch gekennzeichnet ist, daß alle Spannungen in einer Ebene wirken, hat (wie wir später sehen werden) eine große praktische Bedeutung. Die Gleichgewichtsbedingungen (57) vereinfachen sich dann mit $\sigma_z = 0, \tau_y = \tau_x = 0$ und $\tau_z = \tau$ zu:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0. \quad (12.62)$$

Betrachtet man ein rechtwinkliges Volumenelement (Abb. 12.50) auf dessen Kathetenflächen nur die Normalspannungen σ_1 und σ_2 wirken, so können die Spannungen σ_φ und τ_φ in der Hypo-

thenusenfläche df aus der Bedingung berechnet werden, daß das aus dem Körper herausgeschnittene Volumenelement in Gleichgewicht sein muß. In der X -Richtung wirken die Kräfte

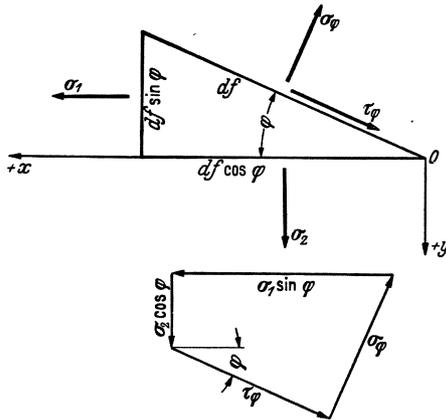


Abb. 12.50. Der ebene Spannungszustand.

$\sigma_1 df \sin \varphi$, $\tau_\varphi \cos \varphi df$ und $\sigma_\varphi \sin \varphi df$
und in der Y -Richtung:

$\sigma_2 df \cos \varphi$, $\tau_\varphi \sin \varphi df$ und $\sigma_\varphi \cos \varphi df$.

Die Gleichgewichtsbedingungen in beiden Richtungen liefern die Gleichungen:

$$\sigma_1 \sin \varphi - \tau_\varphi \cos \varphi - \sigma_\varphi \sin \varphi = 0, \text{ und}$$

$$\sigma_2 \cos \varphi + \tau_\varphi \sin \varphi - \sigma_\varphi \cos \varphi = 0$$

und daraus die Spannungen:

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\varphi \quad (12.63)$$

und

$$\tau_\varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\varphi. \quad (12.64)$$

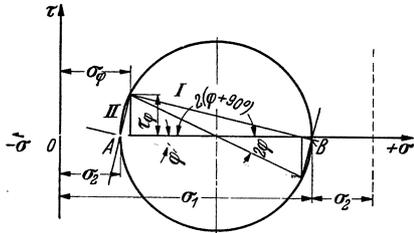


Abb. 12.51. Spannungskreis.

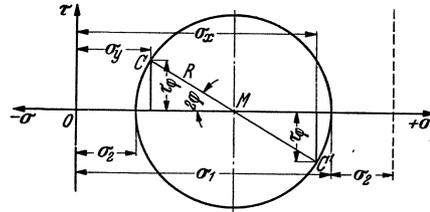


Abb. 12.52. Spannungen in zwei zueinander senkrechten Schnitten.

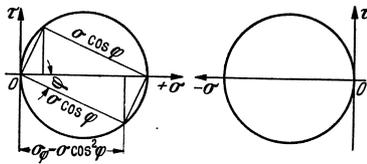


Abb. 12.53. Zug-, Druck- resp. Biegebeanspruchung.

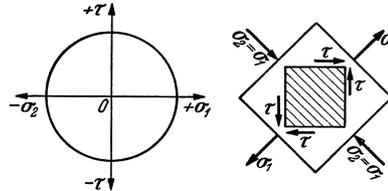


Abb. 12.54. Reine Schubbeanspruchung.

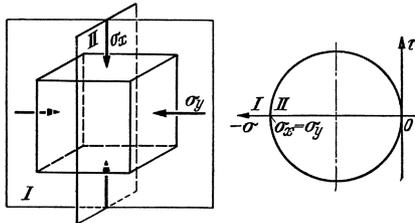


Abb. 12.55. Umschlingung (Würfel auf 4 Seiten gedrückt, während zwei unbelastet bleiben).

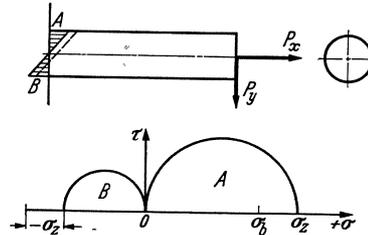


Abb. 12.56. Zug- und Biegung.

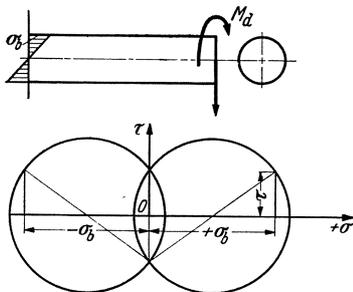


Abb. 12.57. Biegung und Verdrehung. NB. Die Scher- oder Stanzbeanspruchung wird durch den gleichen Kreis (Druckseite) klargestellt.

Die Schubspannung wird am größten für $\sin 2\varphi = 1$, also für $\varphi = 45^\circ$.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (12.64a)$$

Die übersichtlichste Darstellung des ebenen Spannungszustandes rührt von Prof. C. Culman¹ her. Man trage auf einer Abszissenachse vom Ursprung 0 die beiden Span-

¹ In der Literatur wird diese Darstellung meist als Mohrscher Kreis bezeichnet. Prof. C. Culmann (Eidg. Techn. Hochschule in Zürich) hat sie aber schon viel früher (1875) verwendet.

nungen $\sigma_2 = OA$ und $\sigma_1 = OB$ unter Berücksichtigung der Vorzeichen ab (Abb. 12.51). Schlägt man über AB als Durchmesser einen Kreis, so stellt dieser Kreis den ebenen Spannungszustand dar. Um die Spannung in einem Schnitt unter dem Winkel zu bestimmen, zieht man vom Mittelpunkt M (Abb. 12.52) die Linie MC , die den Winkel 2φ mit der Abszissenachse einschließt; die Koordinaten von C geben die Spannungen σ_φ und τ_φ . Der Beweis liegt in der Figur selbst; der Mittelpunkt M hat die Abszisse $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ und der Radius ist gleich $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$. Noch etwas anschaulicher erhält man die Spannung in einem Schnitt unter dem Winkel φ zur σ_2 -Richtung und senkrecht dazu, wenn diese beiden Winkel von A aus aufgetragen werden. Aus der Abbildung ist auch der Satz der zugeordneten Schubspannungen (in den Punkten C und C') deutlich ersichtlich.

Um den Spannungszustand zu zeichnen, müssen die Spannungen in zwei beliebigen, aber zueinander senkrechten Schnitten bekannt sein; diese beiden Punkte (C und C' , Abb. 12.52) liegen auf einem Durchmesser des Spannungskreises. Sind diese Spannungen bekannt, so findet man die Richtungen der Hauptspannungen aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} 2 \varphi_1 = \pm \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (12.65)$$

und der Hauptschubspannungen aus:

$$\operatorname{tg} 2 \varphi_2 = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau}. \quad (12.66)$$

Für $\varphi = \text{konstant}$ sind das die Gleichungen der Isoklinen.

In den Abb. 12.53—57 sind einige oft vorkommende Spannungszustände dargestellt.

Ebene Formänderungen sind dadurch gekennzeichnet, daß alle Punkte, die im unverzerrten Zustande z. B. auf einer zur XY -Ebene parallelen Ebene sich befunden haben, auch nach der Verzerrung auf einer solchen liegen. Es ist also $\zeta = 0$ und die Verschiebungen ξ und η nur noch Funktionen von x und y . Von den Spannungen verschwinden τ_y und τ_x , so daß mit $\tau_z = \tau$ aus den Gleichgewichtsbedingungen (57) folgt:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0. \quad (12.67)$$

Das sind die gleichen Gleichungen wie für ebene Spannungszustände.

Weiter folgt aus Gl. (59): $E \varepsilon_z = \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}$ oder

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} = 0,3 (\sigma_x + \sigma_y). \quad (12.68)$$

12.5. Statisch unbestimmte Konstruktionen

sind solche, bei denen die Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der Reaktionen nicht ausreichen und die Formänderungen berücksichtigt werden müssen. Bei der Lösung solcher Probleme geht man am zweckmäßigsten von der Formänderungsarbeit aus.

12.51. Dem allgemeinen Satz von Castigliano:

$$q_i = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial Q_i} \quad \text{resp.} \quad \gamma_i = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial M_i} \quad (11.5 \text{ resp. } 6)$$

schließt sich ein zweiter an, der durch eine einfache Schlußfolgerung daraus abgeleitet wird. Ist nämlich unter den Kräften eine (Q_0 resp. M_0), von der wir wissen, daß ihr Angriffspunkt keine Verschiebung (resp. keine Verdrehung) erfährt, so muß

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial Q_0} = 0 \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial M_0} = 0 \quad (12.69)$$

sein. Damit erhalten wir eine Gleichung, die zur Bestimmung dieser Kräfte (resp. Momente) benutzt werden kann; solche Kräfte sind die Auflagerreaktionen und die Einspannmomente. Gleichung (69) sagt also aus: Die statisch unbestimmten Größen machen die Formänderungsarbeit zu einem Minimum (Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit).

Es läßt sich nämlich nachweisen, daß ein Minimum und kein Maximum vorliegt. Allgemein ist die Formänderungsarbeit bei einem auf Biegung beanspruchten Körper:

$$\mathfrak{A} = \int \frac{P_0^2}{2fE} ds + \int \frac{M^2}{2ZE} ds$$

und

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial Q_i} = \int \frac{P_0}{fE} \frac{\partial P_0}{\partial Q_i} ds + \int \frac{M}{ZE} \frac{\partial M}{\partial Q_i} ds = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial Q_i^2} = \int \frac{P_0}{fE} \cdot \frac{\partial^2 P_0}{\partial Q_i^2} ds + \int \frac{1}{fE} \left(\frac{\partial P_0}{\partial Q_i} \right)^2 ds + \int \frac{M}{ZE} \frac{\partial^2 M}{\partial Q_i^2} ds + \int \frac{1}{ZE} \left(\frac{\partial M}{\partial Q_i} \right)^2 ds.$$

Da P_0 und M lineare Funktionen von Q_i sind, werden die zweiten Differentialquotienten zu Null, so daß

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial Q_i^2} = \int \frac{1}{fE} \left(\frac{\partial P_0}{\partial Q_i} \right)^2 ds + \int \frac{1}{ZE} \left(\frac{\partial M}{\partial Q_i} \right)^2 ds > 0.$$

Dieser Ausdruck ist sicher immer positiv, so daß \mathfrak{U} ein Minimum wird.

Anwendungsbeispiel 12.5. Die Gleichgewichtsbedingungen des in Abb. 12.58 skizzierten Trägers:

$$A + B = p \cdot l \quad \text{und} \quad B \cdot l - \frac{pl^2}{2} + M_0 = 0$$

geben zwei Gleichungen mit drei Unbekannten, A , B und M_0 . Nach dem Satz von Castigliano erhält man die drei gleichwertigen Gleichungen:

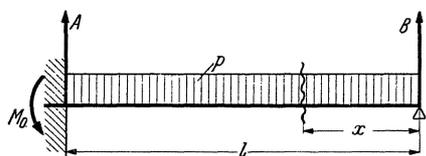


Abb. 12.58.

1. Balken in B unterstützt: $\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial B} = \int_0^l M \cdot \frac{\partial M}{\partial B} dx = 0;$

2. Balken in A eingespannt: $\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial M_0} = \int_0^l M \cdot \frac{\partial M}{\partial M_0} dx = 0,$

und

3. Balken in A unterstützt: $\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial A} = \int_0^l M \cdot \frac{\partial M}{\partial A} dx = 0.$

Es ist grundsätzlich gleichgültig, welche der drei Gleichungen wir wählen; sie unterscheiden sich nur durch die partielle Ableitung des Momentes nach der statisch unbestimmten Größe.

1. $M = Bx - p \frac{x^2}{2}; \quad \frac{\partial M}{\partial B} = x. \quad \int_0^l (Bx - p \frac{x^2}{2}) x dx = B \frac{l^3}{3} - \frac{pl^4}{8} = 0,$ woraus $B = \frac{3}{8} pl$

und mit der zweiten Gleichgewichtsbedingung: $M_0 = -\frac{pl^2}{8}.$

2. Um $\frac{\partial M}{\partial M_0}$ zu berechnen, muß in der Gleichung $M = Bx - \frac{px^2}{2}$, die zweite Gleichgewichtsbedingung $Bl = \frac{pl^2}{2} - M_0$ eingesetzt werden. Daraus folgt dann: $\frac{\partial M}{\partial M_0} = \frac{x}{l}.$

3. $M = (pl - A)x - \frac{px^2}{2}; \quad \frac{\partial M}{\partial A} = -x.$ Die drei Gleichungen führen also zum gleichen Ergebnis.

Die Neigung in B ist $\alpha = \text{tg } \alpha = \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial M_B} \right)_{M_B=0}.$

$$\alpha = \frac{1}{JE} \int_0^l (Bx - \frac{px^2}{2}) \cdot dx = \frac{1}{JE} \left(\frac{3}{16} pl^3 - \frac{1}{6} pl^3 \right) = \frac{1}{48} \cdot \frac{pl^3}{JE}.$$

Die Momentenfläche konstruiert man am einfachsten aus der Superposition eines beidseitig frei gelagerten und gleichmäßig belasteten Balkens mit einer einseitigen Belastung durch M_0 .

In ähnlicher Weise können die statisch unbestimmten Träger in Zahlentafel 12.9 berechnet werden.

Zahlentafel 12.9. Statisch unbestimmte Träger.

1	El-Linie		$A = \frac{5}{16} P; \quad B = \frac{11}{16} P$ $M_0 = \frac{3}{16} P l = M_{\max}$ $M_p = -\frac{5}{32} P l$ $f_p = \frac{7}{768} \frac{Pl^3}{JE}; \quad f_{\max} = \frac{1}{107,3} \frac{Pl^3}{JE}$ $\text{tg } \alpha = \frac{Pl^2}{32JE} \quad (\text{In } A.)$
	Momentenfläche		

Zahlentafel 12.9 (Fortsetzung).

<p>2</p> <p>Mo- menten- fläche</p>		$A = \frac{3}{8} p l; \quad B = \frac{5}{8} p l$ $M_0 = M_{\max} = \frac{1}{8} p l^2$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p l^3}{48 J E}$ $f_{\max} = \frac{p l^4}{185 J E}$
<p>3</p> <p>El-Linie</p> <p>Mo- menten- fläche</p>		<p>Der Neigungswinkel in P ist gleich Null; die Superposition von $P/2$ und M_p gibt:</p> $\alpha_p = 0 = \frac{P/2 \cdot (l/2)^2}{2 J E} - \frac{M_p l/2}{J E} \quad \text{und}$ $M_p = M_{\max} = \frac{1}{8} P l = M_A$ $f = \frac{P l^3}{192 J E}$
<p>4</p> <p>Mo- menten- fläche</p>		$A = B = \frac{p l}{2}$ $M_{\max} = M_0 = \frac{1}{12} p l^2$ $f = \frac{p l^4}{384 J E}$

Wenn viele Kräfte auftreten, und das Trägheitsmoment veränderlich ist, müssen bei der Anwendung des Satzes von Castigliano sehr viele Teilintegrale berechnet werden, was jedenfalls zeitraubend ist. Wenn das Trägheitsmoment sich nicht nach einer einfachen mathematischen Gleichung ändert, kann die Integration außerdem große Schwierigkeiten bereiten. Unter solchen Umständen, die meist bei mehrfach gestützten und beliebig belasteten Wellen mit veränderlichen Durchmessern vorliegen (Abschn. 31.5), macht man mit Vorteil von einer graphischen Methode Gebrauch, die aus dem Satze von Maxwell abgeleitet wird.

12.52. Satz von Maxwell über die Gegenseitigkeit der Verschiebungen. Ein Körper sei fest unterstützt, so daß bei der Formänderung die Reaktionen keine Arbeit leisten. Auf den Körper wirken in den Punkten 1 und 2 zwei beliebige, von Null an stetig zunehmende Kräfte. Dann ist die Formänderungsarbeit: $\mathfrak{A} = Q_1 \frac{q_1}{2} + Q_2 \frac{q_2}{2}$, worin q_1 und q_2 sowohl von Q_1 als Q_2 abhängen.

Aus $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial Q_1} = q_1 = \frac{q_1}{2} + \frac{Q_1}{2} \frac{\partial q_1}{\partial Q_1} + \frac{Q_2}{2} \frac{\partial q_2}{\partial Q_1}$ folgt $q_1 = Q_1 \frac{\partial q_1}{\partial Q_1} + Q_2 \frac{\partial q_2}{\partial Q_1}$,

Für den Fall, daß nur Q_2 allein wirkt, d. h. $Q_1 = 0$ ist, wird für Punkt 1; da $q_2 = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial Q_2}$ ist:

$$q_{1,2} = Q_2 \frac{\partial q_2}{\partial Q_1} = Q_2 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial Q_1 \cdot \partial Q_2}.$$

In ähnlicher Weise finden wir: $q_2 = Q_1 \frac{\partial q_1}{\partial Q_2} + Q_2 \frac{\partial q_2}{\partial Q_2}$.

und wenn Q_1 allein wirkt, d. h. $Q_2 = 0$ ist, wird für Punkt 2:

$$q_{2,1} = Q_1 \frac{\partial q_1}{\partial Q_2} = Q_1 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial Q_1 \cdot \partial Q_2}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{q_{2,1}}{Q_1} = \frac{q_{1,2}}{Q_2} \quad \text{oder} \quad q_{1,2} Q_1 = q_{2,1} Q_2.$$

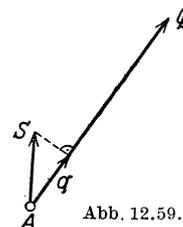


Abb. 12.59.

Satz: Das virtuelle Moment der Kraft Q_1 für die Verschiebung des Angriffspunktes 1, hervorgebracht durch Q_2 , ist gleich dem virtuellen Moment der Kraft Q_2 für die Verschiebung des Angriffspunktes 2, hervorgebracht durch Q_1 .

Wenn s irgendeine Verschiebung des Angriffspunktes ist, die aber gar nicht zu bestehen braucht (virtuelle Verschiebung), wird das Produkt $Q \cdot q$ das virtuelle Moment der Kraft Q genannt (Abb. 12.59).

Bei einer in drei Punkten gestützten Welle kann die Reaktion auch durch einfache Superposition bestimmt werden. Wenn C bekannt wäre, dann hätten wir einen statisch bestimmten Träger AB , so belastet durch die Kräfte P_1 , P_2 und $-C$, daß die Durchbiegung in C zu Null würde. Wir denken uns nun die Stütze C weg und bestimmen zuerst die Durchbiegung in C , wenn P_1 allein wirkt. Da innerhalb des Hooke'schen Gesetzes die Durchbiegungen mit den Kräften proportional sind, können wir auch die Krafteinheit (1 t oder 1 kg) als Belastung nehmen, und die elastische Linie dafür konstruieren (nach Mohr) (Abb. 12.60 a). Dann ist in C die Durchbiegung $P_1 y_1$. In ähnlicher Weise finden wir die Durchbiegung in C , wenn P_2 allein wirkt, zu $P_2 y_2$, und wenn $-C$ allein wirkt, zu $-C y_c$. Da nach der Voraussetzung die gesamte Durchbiegung in C zu Null wird, muß

$$P_1 y_1 + P_2 y_2 - C y_c = 0$$

sein. Das ist eine Gleichung zur Bestimmung von C . Dazu war es allerdings notwendig, drei elastische Linien zu konstruieren, was umständlich ist. Nun folgt aber aus dem Satze von Maxwell, daß die Durchbiegungen y_1 und y_2 auch aus der Abb. 12.60 c zu entnehmen sind. Wir brauchen demnach die beiden ersten elastischen Linien nicht zu zeichnen, sondern nur die Linie für $C = 1$. Diese Linie nennt man die Einflußlinie.

Diese Methode führt immer rasch zum Ziel, wieviel Kräfte auch auf die Welle wirken. Wir brauchen nur die Summe $\sum Py$, unter Berücksichtigung der Vorzeichen, zu bestimmen, und

$$\sum Py - C y_c = 0 \tag{12.70}$$

zu setzen. Der Maßstab, in welchem die Einflußlinie konstruiert wird, spielt bei der Ermittlung von C aus dieser Gleichung keine Rolle.

Liegen die drei Lager nicht in einer Linie, sondern ist das Mittellager C um $-f$ mm nach oben, oder um $+f$ mm nach unten verschoben, so liefert die Gleichung

$$\sum Py - Cy = \pm f \tag{12.71}$$

sofort die gesuchte Reaktion C . Hier muß aber der Maßstab der Einflußlinie berücksichtigt werden.

Hat die Welle zwei oder mehr Mittellager, so ist die Einflußlinie für jede Mittelstütze zu konstruieren. Wir erhalten dann immer so viele Gleichungen ersten Grades als Mittelstützen vorhanden sind (Abb. 12.61):

$$\sum Py' - Cy'_c - Dy'_d = 0, \quad \sum Py'' - Cy''_c - Dy''_d = 0 \tag{12.72}$$

Die Reaktionen sind damit eindeutig bestimmt.

Wenn das Trägheitsmoment konstant und der Träger vielfach unterstützt ist, macht man oft mit Vorteil Gebrauch von der

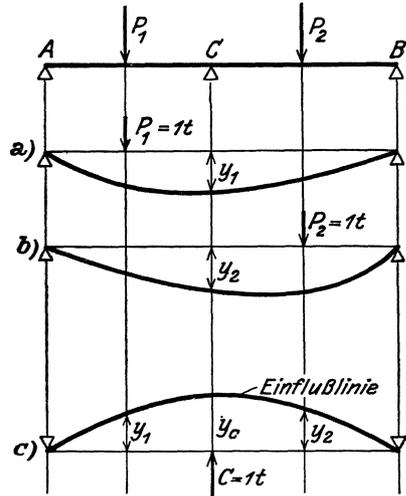


Abb. 12.60.

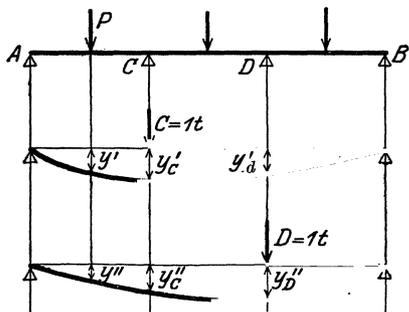


Abb. 12.61.

12.53. Clapeyronsche Momentengleichung. Die Methode beruht darauf, daß die Biegelinien für zwei aufeinander folgende Öffnungen im gemeinsamen Stützpunkt die gleiche Tangente haben müssen (Abb. 12.62). Dabei ist zu beachten, daß die Tangente der r -ten Öffnung entgegengesetzt gerichtet ist zur Tangente der $(r + 1)$ -ten Öffnung.

$$\varphi = -\varphi'$$

Es hat sich dabei als zweckmäßig herausgestellt, als Unbekannte des Problems nicht die Auflagerreaktionen, sondern die Momente in den Schnitten durch die Stützpunkte (die Stützenmomente) zu wählen. Wir denken uns den Träger in den Stützpunkten zerschnitten, und die dort wirkenden Spannungen durch äußere Kräfte ersetzt. Dadurch ist jede Öffnung auf einen einfachen Balken zurückgeführt, für den sofort (durch Superposition) die Momentenflächen gezeichnet werden können (Abb. 12.62). Daraus folgt folgende allgemeine

Regel: Wir heben die Kontinuität auf, und zeichnen die Momentenflächen des nicht kontinuierlichen Trägers für die einzelnen Öffnungen, die M_0 -Fläche. Die wirkliche Momentenfläche wird dann durch die Verbindungslinie der Stützenmomente abgetrennt.

Ohne weiteren Beweis für die allgemeine Gültigkeit leitet man daraus ein Näherungsverfahren für die Berechnung mehrfach gestützter Träger ab, indem man annimmt, daß die Stützenmomente niemals größer werden können als das größte Moment der M_0 -Fläche. Wenn man also die einzelnen Teile als freiaufliegend betrachtet, so rechnen wir zu sicher.

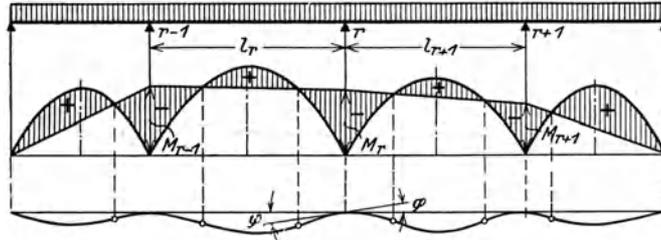


Abb. 12.62. Konstruktion der Momentenfläche mehrfach gelagerter Träger (aus Winkel).

Jeder statisch unbestimmte Träger mit konstantem Trägheitsmoment darf für die Festigkeitsrechnung als in den einzelnen Stützen frei aufliegend betrachtet werden. Selbstverständlich gibt diese Methode niemals die richtige Lage des größten Biegemomentes an, und sie darf deshalb auch nicht verwendet werden, um die Formänderungen der Welle zu bestimmen.

Aus der Momentenfläche läßt sich der Neigungswinkel in dem Stützpunkte bestimmen:

$$JE \operatorname{tg} \varphi = B_1, \tag{12.16}$$

worin B_1 der Auflagerdruck des mit der Momentenfläche belasteten Trägers $A_1 B_1$ ist. Ohne Berücksichtigung des Vorzeichens der verschiedenen Momente folgt aus Abb. 12.63:

$$B_1 = \frac{L_r}{l_r} + \frac{M_{r-1}}{2} \cdot \frac{l_r}{3} + \frac{M_r}{2} \cdot \frac{2}{3} l_r,$$

worin L_r das statische Moment der M_0 -Momentenfläche der r -ten Öffnung in bezug auf den linken Stützpunkt ist, so daß

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L_r}{l_r JE} + \frac{M_{r-1} l_r}{6 JE} + \frac{M_r l_r}{3 JE}.$$

Ebenso finden wir für die $(r+1)$ -te Öffnung:

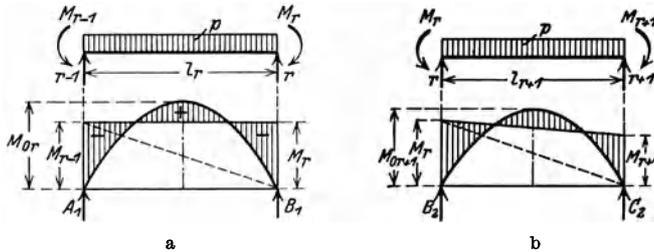


Abb. 12.63. Zur Bestimmung der Neigungswinkel an den Auflagerstellen (aus Winkel).

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{R_{r+1}}{l_{r+1} JE} + \frac{M_{r+1} l_{r+1}}{6 JE} + \frac{M_r l_{r+1}}{3 JE}.$$

Hierin ist R_{r+1} das statische Moment der M_0 -Momentenfläche der $(r+1)$ -ten Öffnung in bezug auf den rechten Stützpunkt.

Durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichung $\varphi = -\varphi'$ erhalten wir:

$$M_{r-1} l_r + 2 M_r (l_r + l_{r+1}) + M_{r+1} l_{r+1} = -6 \left(\frac{L_r}{l_r} + \frac{R_{r+1}}{l_{r+1}} \right) \tag{12.73}$$

d. i. die Dreimomentengleichung von Clapeyron. Bei n Öffnungen erhalten wir $n - 2$ solcher Gleichungen, und wenn der Balken an den Enden frei aufliegt, ist $M_1 = M_n = 0$. Die Clapeyronschen Gleichungen reichen also vollständig aus, um die Stützenmomente zu bestimmen. Diese Berechnungsmethoden gelten unter der ausdrücklichen Voraussetzung, daß keine Verschiebung in den Auflagerstellen eintritt, also für starre Lagerung.

12.54. Anwendungsbeispiele. Bei allen statisch unbestimmten Problemen ist zu beachten, daß ihre Berechnung von der Voraussetzung ausgeht, daß die Formänderungen ausschließlich durch die bekannten äußeren Kräfte erfolgt. Haben wir z. B. einen auf drei Stützen gelagerten Dampfkessel (Abb. 12.64), so können die Auflagerreaktionen A , B und C nach den angegebenen Methoden berechnet werden. Wird nun der Kessel in Betrieb gesetzt (geheizt), so erwärmt sich das Wasser und damit die verschiedenen Teile des Mantels ungleichmäßig; die obere Kesselhälfte kann bis zu 100°C wärmer



Abb. 12.64. Formänderung infolge ungleichmäßiger Erwärmung.

werden als die untere. Der Kessel muß sich infolge der verschiedenen Ausdehnung verziehen, was zur Folge hat, daß er, trotz der dreifachen Lagerung, dann nur auf zwei Stützen ruhen kann. In solchen Fällen gilt als Konstruktionsregel den Körper nur zweifach, also statisch bestimmt zu lagern, um Überlastungen der Stützen nach der Inbetriebsetzung zu vermeiden.

Man kann auch sehr lange Körper auf zwei Stützen, ohne große Biegemomente günstig lagern, wenn die Stützweite l_0 zweckmäßig gewählt wird (Abb. 12.65). Die Momentenfläche c findet man durch Superposition der Teilbelastungen a und b . Die Biegebeanspruchungen werden am günstigsten, wenn das Stützmoment M_A gleich dem Moment M_m in der Trägermitte ist, also für

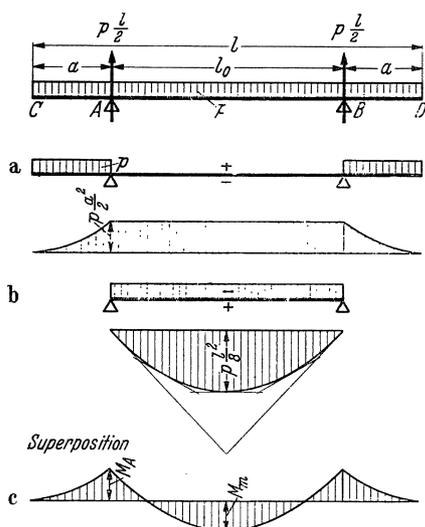


Abb. 12.65. Günstigste Stützweite.

$p \cdot a^2/2 = p \cdot l_0^2/8 - p \cdot a^2/2$ oder für $a^2 = l_0^2/8$,
 d. h. für $a = 0,3535 l_0 = 0,207 l$. Das größte Biegemoment $p \cdot a^2/2 = 0,0215 p \cdot l^2$ ist nur rd. ein Sechstel des Momentes, das auftreten würde, wenn der Kessel an den beiden Enden unterstützt würde.

Anwendungsbeispiel 12.6. Berechnung eines fahrbaren Krangerüstes (Bockkran, Abb. 12.66). Der Träger III sei beliebig belastet und in A und B starr (d. h. ohne Winkeländerung) mit den Stützen I und II verbunden. C und D sind feste Drehpunkte, da die Lauf­räder auf dem Schienenkopf frei drehbar und durch den Spurkranz gegen seitlicher Verschiebung gesichert sind; es treten dort also vertikale und horizontale Reaktionen auf. Die vertikalen Reaktionen V_1 und V_2 können aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden, während die horizontale Reaktion H von der Formänderung des Trägers abhängt und aus dem Satz von Castigliano:

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial H} = 0 = \int \frac{P}{f \cdot E} \frac{\partial P}{\partial H} dx + \int \frac{M}{JE} \frac{\partial M}{\partial H} dx$$

berechnet werden kann, wobei über das ganze Stabvolumen, also über die drei Stäbe I, II und III integriert werden muß. Dabei darf das erste Glied dieser Gleichung (das sind die Formänderungen durch die Längskräfte) gegenüber dem zweiten Glied (das sind die Verformungen durch Biegung) vernachlässigt werden.

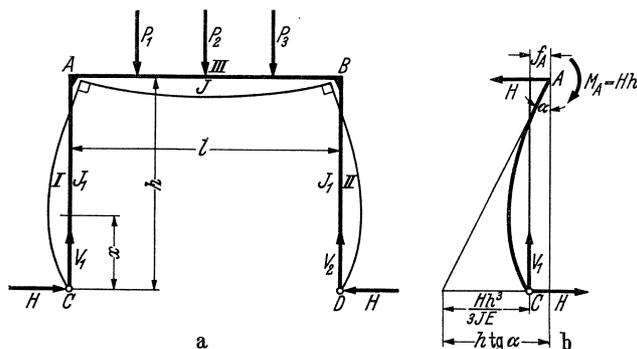


Abb. 12.66. Krangerüst.

Für die Stäbe I und II ist $M = H \cdot x$,

$$\frac{\partial M}{\partial H} = x \text{ und}$$

$$\frac{1}{J_1 E} \int_0^h M \cdot \frac{\partial M}{\partial H} dx = \frac{H}{J_1 E} \int_0^h x^2 dx = \frac{H h^3}{3 J_1 E}$$

Für Stab III ist das Biegemoment an einer beliebigen Stelle x :

$$M = -H \cdot h + M_x$$

$$\text{und} \quad \frac{\partial M}{\partial H} = -h,$$

worin M_x das Biegemoment für den bei A und B frei aufliegenden Träger ist.

$$\int_0^l M \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{1}{JE} \int_0^l - (H \cdot h + M_x) h dx = \frac{H h^2}{JE} \cdot l - \frac{h}{JE} \int_0^l M_x dx$$

Nach dem Satz von Castigliano muß also: $\frac{2H h^3}{3 J_1 E} + \frac{H h^2}{JE} \cdot l - \frac{h}{JE} \int_0^l M_x dx = 0$ sein, wobei $\int_0^l M_x dx$ der Inhalt der bekannten Momentenfläche für den frei aufliegenden Stab III ist.

Daraus folgt: $H = \frac{\int_0^l M_x dx}{h l + \frac{2}{3} h^2 \cdot \frac{J}{J_1}}$. Damit die Spurkranzreibung nicht zu groß wird, sollte H klein sein.

Anwendungsbeispiel 12.7. Beim Reibradgetriebe der Firma F. Krupp A.-G. in Essen (Abb. 12.67) wird der Anpreßdruck durch die Spannung in einem geschlossenen Ring erzeugt, so daß die Lager entlastet sind. Wird die treibende Rolle in Pfeilrichtung gedreht, so bleibt die getriebene Rolle zunächst in Ruhe, weil die Vorspannung des Ringes zur Übertragung des Drehmomentes nicht ausreicht. Der Ring wird dadurch bei F etwas gehoben, und die Berührungspunkte fallen nun in eine Sehne des Ringes. Die Folge ist, daß die Anpressung der Rollen sich

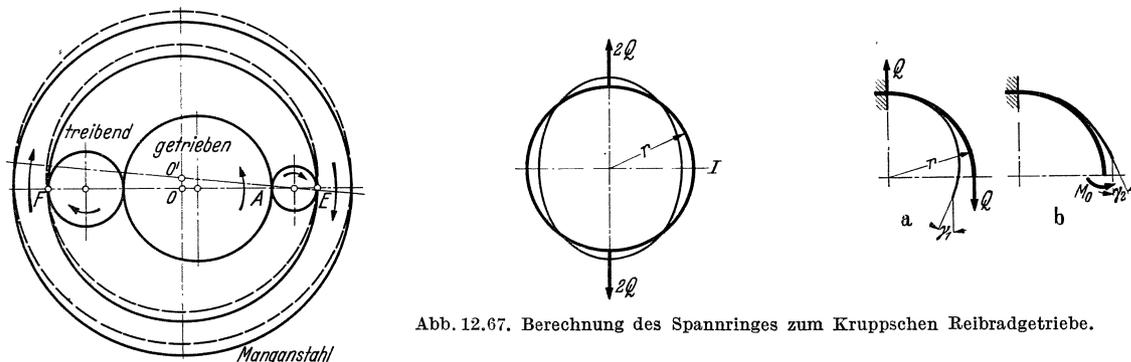


Abb. 12.67. Berechnung des Spannrings zum Kruppschen Reibradgetriebe.

selbsttätig vergrößert, und zwar so lange, bis sie zur Übertragung der in Frage kommenden Leistung genügt. Die Kraft, mit der der Ring die drei Rollen zusammenpreßt, ist beschränkt durch die Stärke des Ringes.

Wenn von der kleinen Abweichung der Verbindungslinie EF von der Mittellinie des Ringes abgesehen wird, so liegt eine symmetrische Belastung vor, so daß die Untersuchung auf $1/4$ -Kreis beschränkt werden kann. Das statisch unbestimmte Moment M_0 erhält man aus der Bedingung, daß im Querschnitt I — aus Symmetriegründen — die Verdrehung gleich Null ist, also nach dem Satz von Castigliano $\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial M_0} = 0$ wird. Durch Zerlegung in zwei Teilaufgaben a und b findet man aus der Zahlentafel 12.7 die Verdrehung des Querschnittes I infolge der Kraft Q :

$$\gamma_1 = \frac{Q}{E} \left[\frac{\pi}{2F} + \frac{r^2}{Z} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right]$$

und infolge des unbekanntes Momentes M_0 :

$$\gamma_2 = \frac{M_0}{E} \cdot \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{rF} + \frac{r}{Z} \right)$$

Da die totale Verdrehung gleich Null, also $\gamma_1 = \gamma_2$ ist, erhält man nach einfacher Umformung:

$$M_0 = Q \cdot r \left(1 - \frac{2}{\pi(\lambda + 1)} \right).$$

Die Rechnung gibt nur die Größe des Momentes M_0 , dessen Richtung durch den Pfeil in Abb. 12.67 b festgelegt ist. In unserem Fall ist M_0 negativ, weil die Krümmung des Stabes dadurch vermindert wird.

$\frac{e}{r}$	λ	$\frac{2}{(1 + \lambda)\pi}$	M_0
0,1	0,00335	0,634	-0,366 Qr
0,2	0,01366	0,628	-0,372 Qr
0,4	0,0591	0,601	-0,399 Qr
0,8	0,3733	0,464	-0,536 Qr

Für den rechteckigen Ringquerschnitt sind die Werte M_0 der obenstehenden Zahlentafel zusammengestellt. Vernachlässigen wir die Formänderungen der Normalkräfte gegenüber den Biegungen, dann ist $M_0 = Q \cdot r \cdot (1 - 2/\pi) = 0,363 Q \cdot r$, welche Vernachlässigung für $e/r < 1/5$ zulässig ist

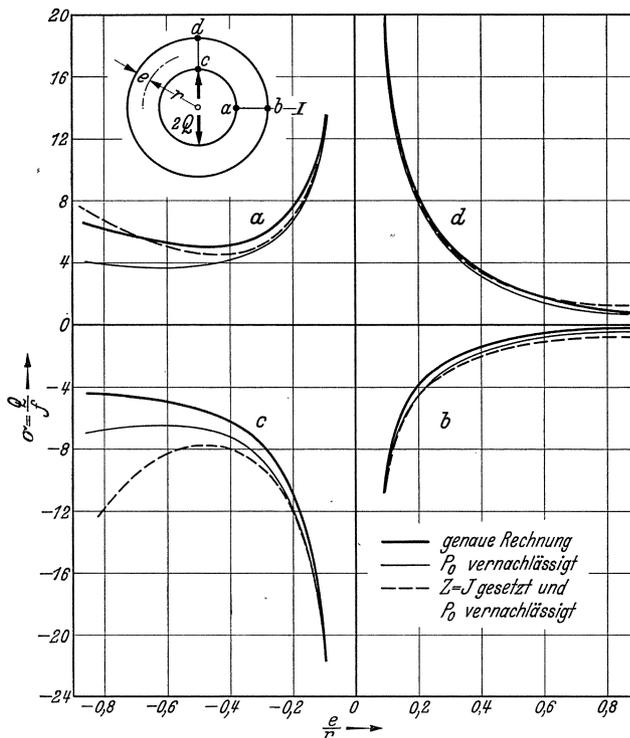


Abb. 12.68. Spannungsverlauf in einem geschlossenen Ring.

(größter Fehler 3%). Die nach Gleichung 12.31 berechneten Spannungen in den Querschnitten I ($M = M_0, P_0 = Q - \frac{M_0}{r}$) und II ($M = -M_0 + Q \cdot r$ und $P_0 = Q - \frac{M_0}{r}$) können aus Abb. 12.68 entnommen werden.

Anwendungsbeispiel 12.8. Für ein Kettenglied nach Abb. 12.69 findet man durch Zerlegung in drei Teilaufgaben (von denen die beiden ersten schon im Beispiel 12.7 berechnet sind), mit

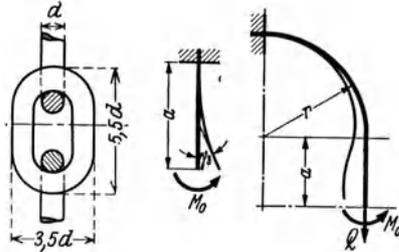


Abb. 12.69. Schlingkettenglied.

$$\gamma_3 = \frac{M_0}{J E} \cdot d \cdot \left(-1 + \frac{\pi}{2} (1 + \lambda) \right)$$

$$M_0 = Q \cdot r \frac{\frac{\pi}{2} (1 + \lambda) + \frac{d f r \lambda}{J}}{\frac{\pi}{2} (1 + \lambda) + \frac{d f r \lambda}{J}}$$

Für die Rundeisenkette ist $f = \pi a^2, J = \frac{\pi}{4} a^4$ und $\frac{f}{J} = \frac{4}{a^2}$. Nach den Normen ist $a/r = 0,4$, so daß nach Zahlentafel 12.3 $\lambda = 0,0436$ ist. Mit diesen Zahlenwerten wird:

$$M_0 = 0,255 Q \cdot r$$

Im Schnitt I ist $M = -M_0$ (Krümmung wird vermindert) und $P_0 = P - \frac{M}{r} = 0,745 Q$.

Die größten Spannungen sind dort nach Gl. (12.30) für

$$\eta = +a, \sigma = \frac{Q}{f} \left(0,745 - \frac{0,255}{0,0436} \cdot \frac{+a}{3,5a} \right) = -0,926 \frac{Q}{f}$$

$$\eta = -a, \sigma = \frac{Q}{f} \left(0,745 - \frac{0,255}{0,0436} \cdot \frac{-a}{1,5a} \right) = 4,629 \frac{Q}{f}$$

Im Schnitt II ist $M = -M_0 + Q \cdot r = 0,745 Q \cdot r$ und $P_0 = 0,745 Q$.

Die Spannungen sind: für $\eta = +a: \sigma_a = \frac{Q}{f} \left(0,745 + \frac{0,745}{0,0436} \cdot \frac{+a}{3,5a} \right) = 5,627 \frac{Q}{f}$

und für $\eta = -a: \sigma_i = \frac{Q}{f} \left(0,745 + \frac{0,745}{0,0436} \cdot \frac{-a}{1,5a} \right) = -10,65 \frac{Q}{f}$

Anwendungsbeispiel 12.9. Ist die Mittellinie des Kettengliedes beliebig gekrümmt (Abb. 12.70), dann müssen die Integrale graphisch gelöst werden. Vernachlässigen wir die Formänderungen durch P_0 , so folgt aus dem Satz von Castigliano:

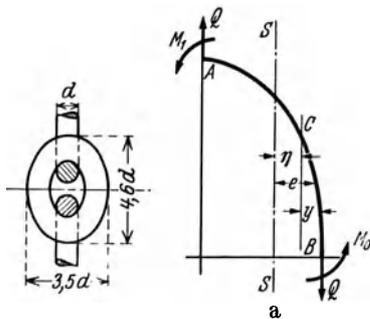


Abb. 12.70. Lastkettenglied.

$$\int_B^A M \cdot \frac{\partial M}{\partial M_0} ds = 0$$

Mit $M = -M_0 - Q \cdot y$ und $\partial M / \partial M_0 = -1$ muß

$$\int_B^A (Q \cdot y - M_0) ds = 0 \text{ oder } M_0 = Q \frac{\int_B^A y ds}{\int_B^A ds}$$

sein. Ist SS die den Kräften Q parallele Schwerachse des Bogens BA , im Abstände e von B , so wird einfach $M_0 = Q \cdot e$. Die Längenänderung δ des Kettengliedes in der Richtung der Kräfte Q ist

$$\delta = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial Q} = \frac{2}{Z E} \int_B^A M \cdot \frac{\partial M}{\partial Q} ds$$

Nun ist $M = -Q(e - y) = -Q \cdot \eta$ und

$$\partial M / \partial Q = -\eta, \text{ so daß}$$

$$\delta = \frac{2 Q}{Z E} \int_B^A \eta^2 ds$$

ist. Setzt man $\int \eta^2 ds = T$, das Trägheitsmoment des Bogens BA in bezug auf die Schwerachse, so ist $\delta = 2 Q \cdot T / Z E$. Die Lage der Schwerachse SS und

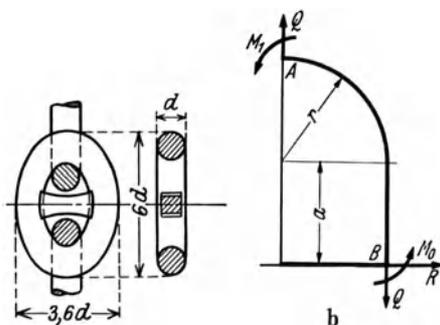


Abb. 12.71. Ankerkettenglied.

das Trägheitsmoment T findet man am einfachsten zeichnerisch mit Hilfe von Seilpolygonen (vgl. z. B. Taschenbuch Hütte, Bd. I).

Anwendungsbeispiel 12.10. Für die Schiffskette mit Steg (Abb. 12.71) kommt die Stegkraft R als neue statisch unbestimmte Größe hinzu. Die beiden Gleichungen zur Berechnung von M und R lauten dann:

Winkeländerung γ in $B = 0$ und

$$\text{Verschiebung in Richtung von } R \text{ ist } \delta = \frac{R \cdot r}{F_S E}.$$

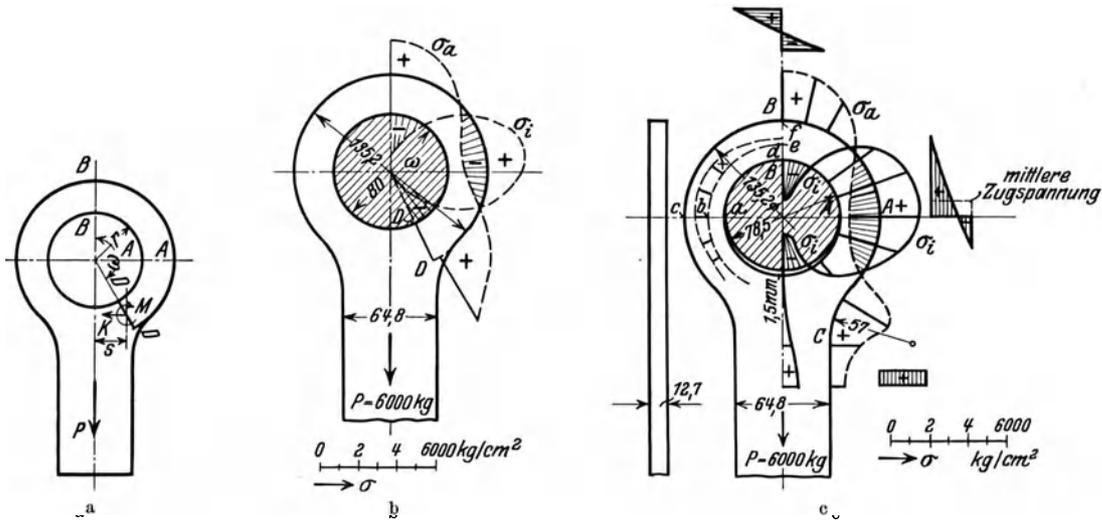


Abb. 12.72. Spannungsverteilung in einem Auge (a); b) berechnet; c) aus Dehnungsmessungen bestimmt.

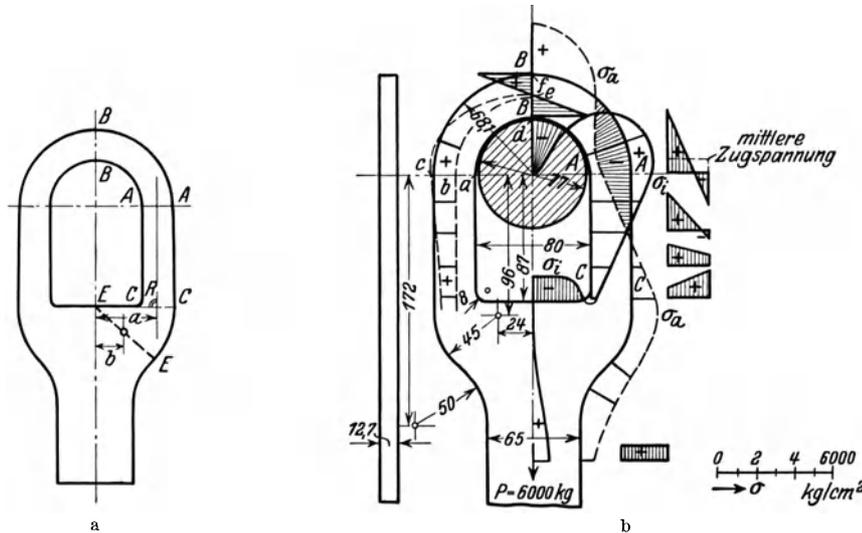


Abb. 12.73. Spannungsverteilung in einem geschlossenen Stangenkopf mit Zapfenspiel (nach Messungen von J. Mathar).

Auch der geschlossene Schubstangenkopf kann als statisch unbestimmter, stark gekrümmter Träger berechnet werden. Die größte Schwierigkeit besteht dabei in der Festlegung der Randbedingungen, die natürlich in Übereinstimmung mit der Wirklichkeit gewählt werden müssen. Das einfache Auge (Abb. 12.72 a) kann z. B. in BB und DD als eingespannt betrachtet werden. Der Bolzen drückt gegen die Innenfläche AB des Auges mit einer Kraft, die von B nach A abnimmt. Da die Kraftverteilung von der Formänderung des Auges abhängt und deshalb zunächst nur geschätzt werden kann, wird zur Vereinfachung der Rechnung — entweder eine über den Durchmesser gleichmäßig verteilte Belastung oder eine in B konzentrierte Einzelkraft angenommen. Die unter der Voraussetzung einer gleichmäßig verteilten Belastung (von Dr. Mathar¹) berechneten Spannungen sind in Abb. 12.72 b eingetragen und mit den tatsächlich auftretenden

¹ Mathar, J.: Spannungsverteilung in Schubstangenköpfen. VDI-Forsch.-Heft 306, 1928.

(aus den beobachteten Formänderungen berechneten) verglichen (Abb. 12.72 c). Die Berechnung setzt voraus, daß die Formänderung des Auges durch den Zapfen nicht behindert wird; der Zapfen muß also mit genügendem Spiel ausgeführt werden. Diese Voraussetzung ist in Wirklichkeit nur dann erfüllt, wenn die berechneten Formänderungen innerhalb des Zapfenspielen liegen. Unter dieser Voraussetzung ist die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch befriedigend. Wird dagegen die Formänderung durch den Bolzen gehindert, wie z. B. bei einer Vernietung, so sind die Beanspruchungen viel kleiner. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei der Kopfform nach Abb. 12.73.

Vgl. auch die Rechnungsweise von J. M. Bernhard: Z. VDI 1930, S. 945, der das Auge als geschlossenen Kreis berechnet und zwei Einzelkräfte annimmt, die etwas seitlich von Stangenmitte angreifen. Watzinger, Prof. A. (Die Spannungsverteilung in geschlossenen Schubstangenköpfen. Z. VDI 1909, S. 1033/36) berechnet die Spannungen unter der (nicht zutreffenden) Voraussetzung, daß der Schwerpunkt des Schnittes EE (Abb. 12.73 a) sich frei verschieben kann, während Matsumura, T. (Festigkeit geschlossener Schubstangenköpfe. Z. VDI 1911, S. 460/65) voraussetzt, daß die Entfernung b konstant bleibt, so daß im Schwerpunkt noch eine horizontale Kraft wirken muß.

Reissner, H. und F. Strauch: Ringplatte und Augenstab. Ing.-Arch. 4 (1933) S. 481/505. (Exakte math. Lösung.) — Lehr, E. und K. H. Bussmann: Dauerfestigkeit von Stabköpfen. Z. VDI 83 (1939) S. 513/4. — Thum, A. und E. Bruder: Gestaltung und Dauerhaltbarkeit von geschlossenen Stabköpfen. VDI-Verlag 1939.

12.6. Wärmespannungen.

Gerade Stäbe. Unter dem Einfluß der Wärme erfährt der Stab eine Längenänderung:

$$\Delta l = \beta l (t - t_0),$$

worin β die lineare Ausdehnungszahl (für Eisen $\beta = 0,0000115 = 11,5 \cdot 10^{-6}$),

Zahlentafel 12.10. Längenänderungen in mm verschiedener Rohrbauwerkstoffe von je 1 m Länge bei $t_0 = 0^\circ$ bei der Erwärmung auf $t^\circ \text{C}$ (aus Arch. Wärmewirtsch. 1937 S. 251).

Temperatur $t \cdot \text{C}$	Mo-Cu-C- St.	Sicromal C-St. Jzett-St.	Cr-Mo-St.	Cu-Mo-St.
100	1,11	1,12	1,19	1,30
200	2,30	2,45	2,60	2,80
300	3,60	3,85	4,10	4,40
400	5,00	5,30	5,70	6,10
500	6,55	6,95	7,40	7,85
600	8,15	8,60	9,20	9,90

l die ursprüngliche Länge,

t die erhöhte, und t_0 die ursprüngliche Stabtemperatur ist. Werden die Endpunkte des Stabes so festgehalten, daß er sich bei der Erwärmung nicht ausdehnen kann, so treten Wärmespannungen auf:

$$\sigma = -\frac{\Delta l}{l} E = -\beta E (t - t_0). \quad (12.74)$$

Für $E = 21\,500 \text{ kg/mm}^2$ und $\beta = 0,0000115$ wird $\sigma = -0,25 \text{ kg/mm}^2, ^\circ\text{C}$.

Praktische Bedeutung erhalten diese Spannungen z. B. bei Drahtseilen oder elek-

trischen Leitungen, die zwischen zwei Festpunkten gespannt sind und (im Sommer montiert) bei scharfer Kälte und Schneelast vielfach höher beansprucht werden.

Zahlenbeispiel 12.11. Soll beim Schrumpfband (Abb. 12.74), das zur Verbindung zweier Radhälften dient, die Elastizitätsgrenze σ_{el} nicht überschritten werden, so folgt die durch die Abkühlung oder durch das Aufpressen erzwungene Längenänderung λ aus dem Hookeschen Gesetz:

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l} = \frac{\sigma_{el}}{E}.$$

Mit $\sigma_{el} = 15 \text{ kg/mm}^2$ und $E = 21\,000 \text{ kg/mm}^2$ wird $\lambda/l = 1/1400$ oder für $l = 140 \text{ mm}$ ist $\lambda = 0,1 \text{ mm}$.

Man erkennt daraus, daß Schrumpfbänder eine sehr große Genauigkeit bei der Herstellung erfordern, denn wäre bei der Ausführung $\lambda = 0,2 \text{ mm}$, so würde $\sigma = 30 \text{ kg/mm}^2$ betragen, d. h. es müßten bleibende Formänderungen auftreten.

Die Schrumpfbänder müssen bei der Drehung des Rades außerdem noch die Fliehkraft einer Radhälfte übertragen. Die Gesamtspannung durch Aufschumpfen und durch die Fliehkraft muß unterhalb der Elastizitätsgrenze bleiben; das Schrumpfmaß λ/l also wesentlich kleiner als $1/1400$ sein.

Ebene Wand. Der Temperaturverlauf wird als bekannt vorausgesetzt (Abb. 12.75); er kann nach der Lehre der Wärmeleitung von Fall zu Fall berechnet werden¹.

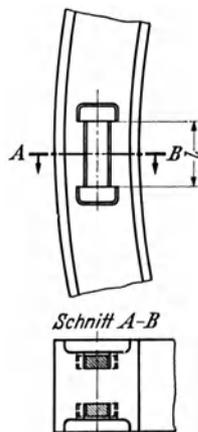


Abb. 12.74.

¹ Vgl. z. B. ten Bosch: Die Wärmeübertragung, 3. Aufl. Abschnitt Wärmeleitung. Berlin: Julius Springer. 1936.

Eine Faserschicht in der Entfernung x habe die Temperatur t ; die dadurch mögliche Verlängerung gegenüber der Grenzfaserschicht mit der Temperatur t_1 wäre $l\beta(t - t_1)$. Wenn die wirkliche Längenänderung aller Fasern infolge des Zusammenhanges der einzelnen Fasern und der Grenzbedingungen Δl ist, so wird die mögliche Verlängerung um den Betrag

$$\Delta l' = l\beta(t - t_1) - \Delta l$$

zurückgedrückt, wodurch eine Spannung entsteht:

$$\sigma = -E \frac{\Delta l'}{l}, = E \{\varepsilon - \beta(t - t_1)\}. \quad (12.75)$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung in der Richtung der Spannungen folgt, wenn an den Endflächen keine äußeren Kräfte wirken:

$$\int \sigma df = 0 = E \int \{\varepsilon - \beta(t - t_1)\} df, \quad \text{wurin } df = b dx,$$

oder
$$\int \sigma df = \varepsilon \delta - \beta \int t dx + \beta t_1 \int dx = 0$$

und:
$$\varepsilon = \frac{\beta}{\delta} \int_0^\delta t dx - \beta t_1. \quad (12.76)$$

Da $\frac{1}{\delta} \int_0^\delta t dx = t_m$ die mittlere Wandtemperatur ist, wird $\varepsilon = \beta(t_m - t_1)$ und mit Gl. (12.75)

$$\sigma = E\beta(t_m - t_1). \quad (12.77)$$

Der Spannungsverlauf kann also aus dem Temperaturverlauf sofort abgelesen werden.

Bei der Ableitung dieser Gleichung war vorausgesetzt, daß alle Fasern die gleiche Länge behalten, also gerade bleiben. Kann die Wand sich aber frei ausdehnen, so wird sie sich krümmen, da die wärmeren Schichten sich mehr ausdehnen als die kälteren. Für kleine Krümmungen erhält man dann immer eine geradlinige Spannungsverteilung über den Querschnitt. Die Biegespannungen folgen sofort aus den Dehnungen zu:

$$\sigma_{\max} = \varepsilon E = \beta E(t_2 - t'_m), \quad (12.78)$$

wurin t'_m die Temperatur in der neutralen Faserschicht ist.

Die für die ebene Platte abgeleiteten Gleichungen gelten auch für ein dünnwandiges Rohr. Besonders gefährlich sind plötzliche Temperaturänderungen in schlechten Wärmeleitern, da die mittlere Temperatur dann wenig von der ursprünglichen Temperatur abweicht, und dadurch $t - t_m$ groß wird (Abb. 12.76).

Rohrleitungen. Die Berechnung der Wärmespannungen ist immer ein statisch unbestimmtes Problem, bei welchem die Randbedingungen (Einspannung, Führung oder freie Drehbarkeit) einen bedeutenden Einfluß auf die Formänderungen und damit auf die Spannungen haben. Auch ohne Berechnung kann man sofort die wichtige Schlußfolgerung ziehen, daß überall dort, wo große Wärmedehnungen auftreten (Kesselbau, Dampfleitungen), eine möglichst nachgiebige Befestigung (Aufhängung) anzustreben ist.

Anwendungsbeispiel 12.12. Berechnung eines Expansionsbogens (Abb. 12.77), der an den Enden a und b so befestigt ist, daß dort nur ein Moment M_0 und eine Längskraft Q aber keine Querkraft auftreten kann. Infolge der symmetrischen Formänderung kann die Untersuchung auf den halben Bogen be-

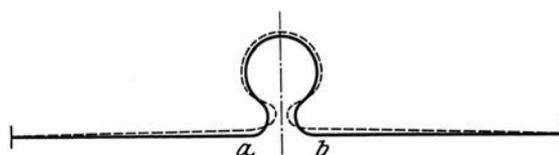


Abb. 12.77. Expansionsbogen.

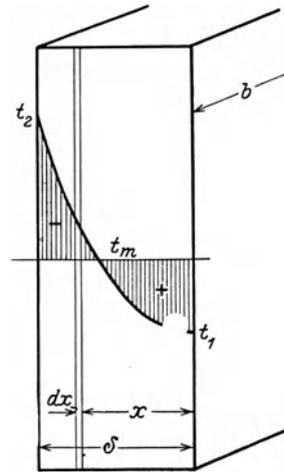


Abb. 12.75.

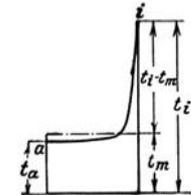


Abb. 12.76. Wärmespannungen bei plötzlicher Temperaturänderung (nach Winkel).

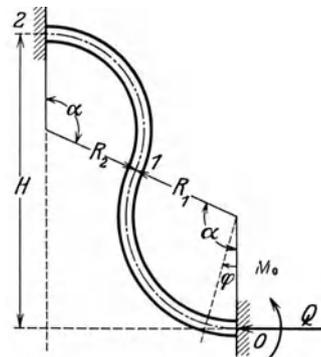


Abb. 12.78.

schränkt werden (Abb. 12.78). Bei der Berechnung dürfen wieder Zug- resp. Druckbeanspruchungen gegenüber der Biegung vernachlässigt werden. Nach dem Satz von Castigliano

muß also

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial M_0} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial Q} = \frac{\delta}{2}.$$

sein. Für die Strecke 0 bis 1 ist $M_\varphi = M_0 - Q R_1 (1 - \cos \varphi)$,

$$\frac{\partial M}{\partial M_0} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial M_\varphi}{\partial Q} = -R_1 (1 - \cos \varphi).$$

Das Moment M_0 ist positiv einzusetzen, weil bei der gezeichneten Drehrichtung die Krümmung vermehrt wird

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial M_0} = \frac{1}{J E} \int_0^\alpha [M_0 - Q R_1 (1 - \cos \varphi)] R_1 d\varphi = \frac{R_1}{J E} [M_0 \alpha - Q R_1 (\alpha - \sin \alpha)].$$

Für die Strecke 1 bis 2 ist $M_\varphi = -M_0 + Q [H - R_2 (1 - \cos \varphi)]$,

$$\frac{\partial M_\varphi}{\partial M_0} = -1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial M_\varphi}{\partial Q} = H - R_2 (1 - \cos \varphi).$$

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial M_0} = -\frac{1}{J E} \int_\alpha^0 (-M_0 + Q H - Q R_2 + Q R_2 \cos \varphi) R_2 d\varphi = \frac{R_2}{J E} [M_0 \alpha - Q H \alpha + Q R_2 \alpha - Q R_2 \sin \alpha].$$

$$\text{Aus } \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial M_0} = 0 \text{ folgt: } (R_1 + R_2) \cdot M_0 \alpha = Q [H R_2 \alpha - (R_2^2 - R_1^2) (\alpha - \sin \alpha)]$$

$$\text{oder} \quad M_0 = Q \left[H \frac{R_2}{R_1 + R_2} - (R_2 - R_1) \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha} \right].$$

Nun ist $H = \frac{R_1 + R_2}{H \cdot n} (1 - \cos \alpha)$. Setzt man $\frac{R_1}{R_2} = n$, dann wird $R_2 = \frac{H}{(1+n)(1-\cos \alpha)}$ und $R_1 = \frac{H \cdot n}{(1+n)(1-\cos \alpha)}$. Damit wird

$$M_0 = Q H \left[\frac{1}{1+n} - \frac{1-n}{1+n} \cdot \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha (1 - \cos \alpha)} \right] = f Q H. \quad (\text{a})$$

Für $R_1 = R_2$ ist $n = 1$ und

$$M_0 = \frac{Q H}{2} \quad (\text{b})$$

unabhängig von α . Für andere Werte von n und α ist der Klammerausdruck praktisch ebenfalls unabhängig von α und hängt nur wenig von n ab, so daß Gl. (b) mit einer Genauigkeit von mindestens 10% für alle eingespannten Ausgleichrohre verwendet werden kann.

Für die Strecke 0 bis 1 ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial Q} &= \frac{1}{J E} \int_0^\alpha M \frac{\partial M}{\partial Q} R_1 d\varphi = \frac{-1}{J E} \int_0^\alpha [M_0 - Q R_1 (1 - \cos \varphi)] R_1^2 (1 - \cos \varphi) d\varphi \\ &= -\frac{R_1^2}{J E} [M_0 (\alpha - \sin \alpha) - Q R_1 (\frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha)]^*. \end{aligned}$$

Für die Strecke 1 bis 2 ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial Q} &= \frac{1}{J E} \int_\alpha^0 [-M_0 + Q H - Q R_2 + Q R_2 \cos \varphi] [H - R_2 (1 - \cos \varphi)] R_2 d\varphi \\ &= -\frac{R_2}{J E} [M_0 (H \alpha - R_2 \alpha + R_2 \sin \alpha) \\ &\quad - Q (H^2 \alpha + \frac{3}{2} R_2^2 \alpha - 2 H R_2 \alpha + 2 H R_2 \sin \alpha - 2 R_2^2 \sin \alpha + \frac{1}{4} R_2^2 \sin 2\alpha)]. \end{aligned}$$

* $\int_0^\alpha (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{\alpha}{2}$.

Da für die gesamte Strecke (von 0 bis 2), $\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial Q} = \frac{\delta}{2}$ ist, so wird

$$\begin{aligned} -\frac{JE\delta}{2} &= M_0 \{R_1^2 (\alpha - \sin \alpha) + R_2 (H\alpha - R_2\alpha + R_2 \sin \alpha)\} \\ &- Q \{R_2 H^2 \alpha + \frac{3}{2} R_2^3 \alpha - 2H R_2^2 \alpha + 2H R_2^2 \sin \alpha - 2R_2^3 \sin \alpha + \frac{1}{4} R_2^3 \sin 2\alpha \\ &+ (\frac{3}{2} R_1^3 \alpha - 2R_1^3 \sin \alpha + \frac{1}{4} R_1^3 \sin 2\alpha)\} \\ &= M_0 \{(R_1^2 - R_2^2) (\alpha - \sin \alpha) + R_2 H \alpha\} \\ &- Q \left\{ \left(\frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right) (R_2^3 + R_1^3) + \alpha H R_2 \left(H - 2 R_2 \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (c)$$

Setzt man, was praktisch gebräuchlich ist, $R_1 = R_2 = R$ und $\alpha = 90^\circ$, so wird mit $M_0 = Q \cdot H/2$

$$JE \cdot \delta = QH^3/2,54 \quad \text{oder} \quad Q = 2,54 \delta JE/H^3 \quad (d)$$

Für stark gekrümmte, dünnwandige Rohre muß das Ovalwerden des Querschnittes durch Einführen des Faktors k (vgl. S. 39) berücksichtigt werden.

Man kann aus dieser Untersuchung die allgemeine Schlußfolgerung ziehen, daß Q , M_0 und damit die Beanspruchungen im Rohr klein werden, wenn H groß gewählt wird und zwar muß H um so größer sein, je höher die Betriebstemperatur ist. Wenn die Enden nicht eingespannt, sondern frei drehbar gelagert werden, so vermindert sich Q auf den dritten Teil.

Die Berechnung der Kräfte und Spannungen wird durch die Linientafeln 102 und 103 im Handbuch der Rohrleitungen von F. Schwedler und H. v. Jürgensonn, 2. Aufl. 1939 (Berlin: Julius Springer) erleichtert.

Für andere Verfahren siehe E. Schwenk: Festigkeitsberechnung von Hochdruckdampfleitungen. Arch. Wärmewirtsch. 17 (1936) S. 273/78 (mit Literaturangaben).

13. Zulässige Spannungen.

Mit den abgeleiteten Beziehungen ist es möglich die Spannungen in prismatischen Körpern zu berechnen. Für den Konstrukteur tritt nun die wichtige Frage auf, welche Spannungen für seine Konstruktionen zulässig sind? Die Beurteilung der zulässigen Spannungen geschah anfänglich rein empirisch. Man wußte (auf Grund der Erfahrung) wie die Maschinenteile bemessen sein mußten, damit unter den gegebenen Verhältnissen ein Bruch sicher vermieden wird.

Bei der späteren Entwicklung der Berechnungsmethoden stellte man fest, welcher Wert der Beanspruchung in der angewandten Rechnungsformel diesen Abmessungen entspricht und bezeichnete diesen Betrag als „zulässige“ Beanspruchung für den betreffenden Fall. Schließlich setzte man diesen Wert in Beziehung zur Bruchfestigkeit K_z des Werkstoffes und nannte das Verhältnis $S = K_z/\sigma_{zul}$ „Sicherheitsgrad“. Auch heute geht man in manchen Fällen noch in gleicher Weise vor, wie z. B. bei den Dampfkesselnormen, bei der Berechnung der Drahtseile usw. Diese Methode ist einfach, gibt aber niemals einen Einblick in die „wirkliche“ Sicherheit.

Diese durch Prof. C. von Bach gesammelten Erfahrungswerte waren wertvoll und praktisch brauchbar. Man kann sie leider auf die heutigen Verhältnisse im Maschinenbau nicht ohne weiteres übertragen, weil diese z. T. ganz andere sind, als die bei welchen die Erfahrungswerte gesammelt wurden. Durch den Leichtbau, durch die wesentlich höheren Drehzahlen und auch durch den viel schärferen Konkurrenzkampf ist der Konstrukteur gezwungen, die zulässige Grenze immer höher zu wählen. Dadurch sind die Mängel dieser Berechnungsmethode offensichtlich geworden. Infolge Qualitätsverbesserung und vertiefter Kenntnis der Eigenschaften der Baustoffe ist eine Höherlegung der Grenzen oft zulässig. Bei einzelnen Maschinenteilen dagegen ist eine 20- bis 30fache „Sicherheit“ noch ungenügend den Bruch zu verhindern. Man kann sagen, daß je höher die Sicherheitszahl gewählt werden kann, um so kleiner ist unser Wissen über die tatsächlich auftretenden Beanspruchungen, so daß sie zweckmäßiger als „Unwissenheitsgrad“ bezeichnet wird. Aus wirtschaftlichen Gründen können die zulässigen Spannungen heute nicht mehr von Fall zu Fall durch den Versuch bestimmt werden, sondern es sind (wenn möglich) allgemeingültige Richtlinien dafür aufzustellen.

Hier sind zunächst die Fälle auszuschneiden, bei denen nicht die Spannung selbst, sondern die damit verbundene Formänderung für die Brauchbarkeit der Konstruktion ausschlaggebend ist. Ein typisches Beispiel ist die Werkzeugmaschine, die nur dann für genaue Bearbeitung brauchbar ist, wenn ihre wichtigsten Teile überhaupt keine Formänderungen erleiden. Die Nei-

gung der Wellen in den Lagerstellen darf nicht zu groß werden, weil die Lager sonst heiß laufen (vgl. Abschn. 31 und 41). Auch bei den Eisenkonstruktionen (Kranträger Abschn. 22) wird die zulässige Spannung durch die vorgeschriebene zulässige Formänderung eingeschränkt. Alle diese Fälle, sowie auch die Beschränkung der Spannung mit Rücksicht auf die Abnutzung (Zahnräder Abschn. 71.42) scheiden natürlich bei der Festlegung der Spannungsgrenze aus Festigkeitsgründen aus. Zulässige Spannung und zulässige Formänderung sind aber nicht unabhängig voneinander. Durch geeignete Wahl der Querschnittsform ist es möglich für beide gleichzeitig die Höchstgrenze zu erreichen. Für den einseitig eingespannten Träger (Zahlen-
 tafel 12.1, Pos. 1) z. B. ist $f_{zul} = Pl^3/3JE$ und $M = P \cdot l$, so daß mit $\sigma_{zul} = M \cdot h/2J$ ($h =$ Trägerhöhe)

$$\frac{f_{zul}}{l} = \frac{M}{J} \cdot \frac{l}{3E} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_{zul}}{E} \cdot \frac{l}{h}.$$

wird. Mit den vorgeschriebenen Werten von σ_{zul} und f_{zul} ist die Trägerhöhe h eindeutig festgelegt.

Wenn wir dem Konstrukteur bessere Grundlagen geben wollen, so daß er in der Lage ist für jeden Fall die richtige Wahl der „höchstzulässigen“ Grenze zu treffen, dann kann es sich niemals darum handeln, die Zahlenwerte von C von Bach einfach durch andere zu ersetzen, sondern der Begriff der Zulässigkeit muß wesentlich vertieft und erweitert werden. Wir müssen uns deshalb zuerst mit der Bruchursache befassen.

13.1. Bruchhypothesen.

Der Bruch eines Körpers beginnt dort, wo die günstigsten Bedingungen dafür vorliegen. Die Frage, welche Größe für die Bruchgefahr unmittelbar entscheidend ist, kann nur auf Grund der Erfahrung beantwortet werden. Trotz der zahlreichen Versuche in den Werkstoff-Prüfanstalten fehlen dazu auch heute noch gesicherte Erfahrungsgrundlagen. Man hat so ziemlich alle Möglichkeiten herangezogen, die dabei eine Rolle spielen.

Aus dem bekannten einfachen statischen Zugversuch folgt, daß der Bruch oder eine große bleibende Formänderung nach Überschreiten eines Höchstwertes der Normalspannung eintritt. Das ist die maximale Hauptspannungshypothese (Lamé, Clapeyron), die aussagt, daß die größte Normalspannung kleiner als ein Grenzwert sein muß. Als Grenzwert kann die Bruchfestigkeit K_z , die Streckgrenze σ_s oder auch die Elastizitätsgrenze σ_e eingesetzt werden, je nachdem man den Bruch, eine unzulässig große Formänderung oder auch kleine, bleibende Formänderungen vermeiden will. Diese älteste Bruchhypothese kann aber manche Erscheinungen, die vor dem Bruch oder vor merkba-

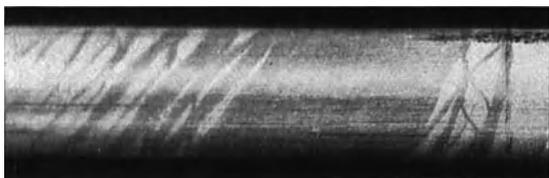


Abb. 13.1. Fließfiguren (aus Winkel).

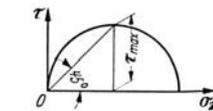


Abb. 13.2. Spannungskreis für Zug. Größte Schubspannung unter 45°.

ren Erscheinungen, die vor dem Bruch oder vor merkba-
 ren Formänderungen eintreten, nicht erklären, z. B. Fließfiguren, die etwa unter 45° zur Stabachse geneigt, sind (Abb. 13.1). Diese Erscheinung führt zur Untersuchung der in der schrägen Richtung auftretenden Spannungen, was am einfachsten mit Hilfe des Spannungskreises erfolgt. Aus Abb. 13.2 geht hervor, daß die Schubspannung τ bei $\varphi = 45^\circ$, d. i. in der Richtung

der Fließlinien einen Höchstwert $= \sigma_z/2$ erreicht. Aus dieser Überlegung hat Coulomb schon im Jahre 1780 die Auffassung abgeleitet, daß es bei allen Stoffen, die ähnliche Fließfiguren zeigen, nicht die größte Normalspannung ist, die selbst unmittelbar eine Beschädigung oder den Bruch herbeiführt, sondern die (nur halb so große) Schubspannung (maximale Schubspannungshypothese). Für den einfachen Zugversuch, d. i. für den einachsigen Spannungszustand, sind beide Hypothesen gleichwertig.

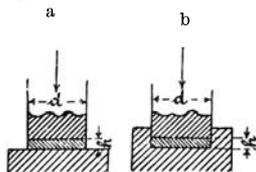


Abb. 13.3 aus Bach-Baumann.

Eine andere Erfahrungstatsache, welche die größte Hauptspannungshypothese nicht erklären kann, ist folgende: Beim Druckversuch (Abb. 13.3a) wird die Bleiplatte bei einer Spannung von -125 at herausgequetscht, während bei der Anordnung nach Abb. 13.3b bedeutend höhere Druckspannungen ohne Bruchgefahr zulässig sind. Diese Beobachtungen führten zu einer neuen Hypothese (Mariotte,

Poncelet), nach welcher die größte (positive) Dehnung als Bruchursache anzusehen sei. Durch de St. Venant, Grashof, C. von Bach hat die Dehnungshypothese als Grundlage für die Festigkeitsrechnungen im Maschinenbau eine weite Verbreitung gefunden. Sie geht von der einfachen, physikalischen Vorstellung aus, daß die Bruchursache in der Überschreitung eines gewissen Maßes der Entfernung der Einzelteilchen zu suchen ist (Trennungsbruch). Für die einachsige Beanspruchung sind Dehnungs- und Hauptspannungshypothese identisch, weil (nach dem Hookeschen Gesetz) Spannungen und Dehnungen proportional sind. Für den räumlichen Spannungszustand aber nicht.

Beim Druckversuch b in Abb. 13.3 ist die Gesamtdehnung kleiner als im Fall a und dadurch wird die Bruchfestigkeit erhöht.

Wenn die Dehnung ε nun als Maß für die Beanspruchung gilt, so ist das Rechnen mit dieser kleinen Größe doch unbequem. Darum vergleicht man den Spannungszustand, dessen Zulässigkeit untersucht werden soll, mit der einachsigen Zug- oder Druckbelastung, deren Dehnung gleich der gesamten Dehnung des untersuchten ist. Man rechnet dann nicht mit der Dehnung selbst, sondern mit dem Wert $\varepsilon_x E = \sigma_x - (\sigma_y + \sigma_z)/m = \sigma_{\text{red}}$, der als reduzierte Spannung bezeichnet wird. Die Dehnungshypothese wurde bis vor wenigen Jahren in allen Hand- und Lehrbüchern über Maschinenbau als Grundlage für die Festigkeitsrechnungen verwendet, obschon schon im Jahre 1888 Wehage¹ darauf hingewiesen hat, daß diese Hypothese mit verschiedenen Beobachtungen nicht übereinstimmt. Mohr hat im Jahre 1899 auf den Widerspruch hingewiesen, daß nach der Dehnungshypothese die Zugfestigkeit eines jeden Werkstoffes sich zur Druckfestigkeit verhalten müßte, wie die Querkontraktion zur Längsdehnung, also wie $m = 10/3$, was nicht zutrifft. Für reine Schubbeanspruchung (Abb. 12.54) ist $\sigma_1 = +\tau$ und $\sigma_2 = -\tau$; wird nun τ so gewählt, daß die Anstrengung des Werkstoffes gerade an der zulässigen Grenze liegt, so müßte nach der Dehnungshypothese $\sigma_{\text{red}} = \frac{m+1}{m} \tau$ gleich σ_{zul} , oder mit $m = 10/3$, $\tau_{\text{zul}} = \frac{m}{m+1} \sigma_{\text{zul}} = 0,77 \sigma_{\text{zul}}$ sein. Die zahlreichen Versuche ergeben aber $\tau_{\text{zul}} = 0,57 \sigma_{\text{zul}}$.

Wenn die größte Dehnung als Bruchursache anzusehen wäre, müßte auch die Umschlingungsfestigkeit (Abb. 12.55) größer ausfallen, als die einfache Druckfestigkeit, weil beim Umschlingungsversuch die reduzierte Spannung: $\varepsilon_x E = \sigma_x - \frac{1}{m} \sigma_y$, kleiner ist als beim Druckversuch: $\varepsilon_x E = \sigma_x$. Nach den Versuchen von A. Föppl (München) ist die Umschlingungsfestigkeit aber ebenso groß wie die Druckfestigkeit.

Diese Widersprüche werden durch die Bruchhypothese von Mohr vermieden. Im allgemeinen ist der Spannungszustand räumlich (mit den drei Hauptspannungen σ_1, σ_2 und σ_3) und kann durch die drei Hauptkreise dargestellt werden (Abb. 13.4). Setzt man voraus, daß die Bruchgefahr von der Normalspannung σ (Trennung) und der Schubspannung τ (Schiebung) abhängt, die in einem Flächenelement übertragen werden, so treten die günstigsten Bedingungen für den Bruch in solchen Schnitten auf, in denen σ oder τ oder beide zusammen in irgendeiner Verbindung den größten vorkommenden Wert erreichen. Aus der Abbildung ist nun ersichtlich, daß dies der Fall ist für die Punkte die auf dem größten der drei Kreise liegen. Mohr schließt daraus, daß es auf die mittlere Hauptspannung σ_3 überhaupt nicht ankommt und daß die Bruchgefahr in jener Hauptebene liegt, die durch die algebraisch größte und kleinste Hauptspannung gelegt ist. Die Hypothese hat also den Vorteil, daß bei der Untersuchung der Bruchgefahr nur „ebene“ Spannungszustände zu berücksichtigen sind, die durch Kreise eindeutig und anschaulich darstellbar sind.

Diese Annahme erklärt z. B. schon die Übereinstimmung der Umschließungs- und Druckfestigkeit; für Druckbeanspruchung ist: $\sigma_1 = -p$, $\sigma_3 = 0$, $\sigma_2 = 0$,
und für die Umschlingung: $\sigma_1 = -p$, $\sigma_3 = -p$, $\sigma_2 = 0$;
die mittlere Hauptspannung σ_3 spielt eben keine Rolle.

Versuche zur Prüfung dieser Hypothese wurden u. a. von Guest, v. Karman, R. Böcker durchgeführt, welche alle zugunsten der Mohrschen Hypothese ausfielen; Versuche von Lode sowie von Ros und Eichinger zeigten jedoch einen Einfluß der mittleren Hauptspannung auf die Bruchgefahr. Die Frage ist aber auch durch die neuesten Versuche noch nicht endgültig

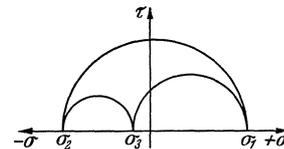


Abb. 13.4. Der räumliche Spannungszustand.

¹ Wehage; Mitt. mech.-techn. Versuchsanst. Berlin. Heft 3 (1888) S. 89.

geklärt, da die Bruchgefahr nicht nur von den örtlichen Spannungen, sondern in hohem Maße auch vom Spannungsfeld in der unmittelbaren Nähe abhängt (vgl. S. 71).

Im übrigen ist die Mohrsche Hypothese sehr allgemein und vorsichtig abgefaßt. Man denke sich die Kreise aller Spannungszustände, die an der Elastizitäts- (oder Bruch-)Grenze liegen in dem gleichen σ , τ -Koordinatensystem aufgetragen. Dann läßt sich eine Grenzkurve G ziehen (Abb. 13.5), die alle diese Kreise einhüllt. Wollen wir die Bruchgefahr vermeiden, so muß der

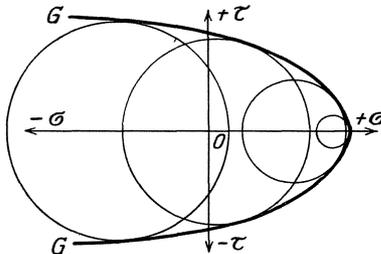


Abb. 13.5. Grenzkurve nach der Bruchhypothese von Mohr.

Spannungszustand innerhalb dieser Grenzkurve liegen. Über die Gestalt der Grenzkurve sagt die Mohrsche Hypothese nichts aus; es ist Aufgabe der experimentellen Forschung diese näher zu bestimmen, wobei die Grenzkurve für verschiedene Werkstoffe auch verschieden ausfallen kann, und zwar nicht nur in den absoluten Werten, sondern auch dem Charakter nach.

Diese allgemeine Fassung der Hypothese hat den Vorteil, daß sie sich den jeweiligen Versuchsergebnissen gut anpassen kann. Aber solange die Gestalt der Grenzkurve nicht bekannt ist, kann der Ingenieur wenig damit anfangen, und das ist wohl der Hauptgrund, weshalb die Mohrsche Hypothese in Ingenieurkreisen zunächst keine Verbreitung gefunden hat.

Für jene Spannungszustände, die zwischen der einfachen Zug- und Druckbeanspruchung liegen und mit denen der Ingenieur bei den praktischen Anwendungen gewöhnlich zu tun hat, kann die Grenzkurve in erster Annäherung durch die Gerade ersetzt werden, welche Zug- und Druckkreis berührt (vgl. Abb. 13.6). Für solche Werkstoffe, die gleich große Zug- und Druckspannungen ertragen (z. B. Stahl), liegen dann die Verhältnisse besonders einfach, indem die Grenzlinie parallel zur σ -Achse liegt. Wird in der Abbildung noch der Spannungskreis für reine Schubbeanspruchung eingetragen (Mittelpunkt in 0), so folgt daraus, daß $\tau_{zul} = \frac{1}{2} \sigma_{zul}$, was besser mit den Versuchen übereinstimmt als bei der Dehnungshypothese. Aber auch für alle Spannungszustände, die zwischen Zug- und Druckbeanspruchung liegen, kann dann die einfache Bedingung für die Bruchgefahr aufgestellt werden, daß die größte Schubspannung eine festgelegte Grenze nicht überschreiten darf. In diesem Fall ist die Mohrsche Hypothese identisch mit der viel älteren Hypothese von Coulomb. Da τ_{max} gleich der halben Differenz der beiden Hauptspannungen ist (l. 12.64 a), kommt es auf das gleiche hinaus, wenn man sagt, daß die Differenz der beiden Hauptspannungen eine bestimmte Grenze nicht überschreiten darf. In dieser Form, als „Maximum Stress-Difference Theory“ oder auch als „Guest law“, ist diese Hypothese in der englischen Literatur verbreitet.

Die Hypothese von Mohr hat den Nachteil, daß sie nicht aus allgemeinen physikalischen Gesichtspunkten abgeleitet ist; sie ist also kein Naturgesetz. Eine andere, allgemeinere Hypothese von Griffith lautet: „Da unmittelbar vor dem Überschreiten der Elastizitätsgrenze ein labiles Gleichgewicht herrscht, so muß hier das allgemeine mechanische Kriterium gelten, daß die potentielle Energie (Formänderungsarbeit) ein Maximum sein muß.“

Für den räumlichen Spannungszustand ist die spezifische Formänderungsarbeit:

$$\mathcal{U}_v = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3).$$

Ersetzt man hierin die Dehnungen durch die Spannungen, mit Hilfe der Gleichungen:

$$E \varepsilon_1 = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}, \quad E \varepsilon_2 = \sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{m}, \quad \text{und} \quad E \varepsilon_3 = \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m},$$

so erhält man:

$$\mathcal{U}_v = \frac{1}{2E} \left\{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{m} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right\}. \quad (13.1)$$

Dieser Wert dürfte nach der obigen Labilitätsbedingung einen Grenzwert nicht überschreiten. (Hypothese von Beltrani und von Haigh.) Die gesamte, in Form von elastischer Energie bis zur Erreichung einer Plastizitätsgrenze aufgespeicherte Arbeit kann aber keine Bedeutung

haben, weil aus den Versuchen unter hohem statischem Druck hervorgeht, daß in den Körpern sehr große Mengen elastischer Energie sich aufspeichern lassen, ohne daß Brüche oder bleibende Formänderungen aufzutreten brauchen¹. Berechnet man nun die Arbeit, die zur Veränderung des Rauminhaltes verbraucht wird, nämlich: $\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \cdot \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2} \cdot *$, und setzt die Werte

von ε_1 , ε_2 und ε_3 ein, so wird diese Arbeit gleich $\frac{1 - \frac{2}{m}}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$. Zieht man diese von der Arbeit \mathfrak{A} ab, so bleibt der Teil übrig, der für die Gestaltänderung aufzuwenden ist, nämlich:

$$\mathfrak{A}'_v = \frac{m+1}{3mE} \{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \}$$

$$\mathfrak{A}'_v = \frac{m+1}{6mE} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \} = \frac{1}{3G} (\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2). \quad (13.2)$$

In der Form, daß der Klammerausdruck einen bestimmten Grenzwert nicht überschreiten darf, ist die Hypothese zuerst von M. T. Huber vorgeschlagen worden; später und unabhängig davon durch Hencky und R. von Mises. Sie steht für zähe Werkstoffe mit den neueren Versuchen in besserer Übereinstimmung als die Schubspannungshypothese.

Man rechnet mit dieser Bruchhypothese wieder durch Vergleich mit dem bekannten einfachen Zugversuch ($\sigma_1 = \sigma_0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$), für welchen

$$\mathfrak{A}'_v = \frac{m+1}{3mE} \sigma_0^2 \quad (13.3)$$

ist. Durch Gleichsetzen erhält man die Vergleichsspannung σ_0 , die an der zulässigen Grenze liegt:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_0^2 \quad (13.4)$$

Für reine Schubbeanspruchung (Abb. 12.54) ist $\sigma_1 = +\tau$, $\sigma_2 = -\tau$ und

$$\mathfrak{A}'_v = \frac{m+1}{mE} \tau^2. \quad (13.5)$$

Wenn in beiden Fällen (Zugversuch und reine Schubbeanspruchung) bis zur zulässigen Grenze gegangen wird, so muß

$$\frac{m+1}{3mE} \sigma_{zul}^2 = \frac{m+1}{mE} \tau_{zul}^2 \quad \text{oder} \quad \tau_{zul} = \frac{\sigma_{zul}}{\sqrt{3}} = 0,578 \sigma_{zul}$$

sein, was mit zahlreichen Versuchen übereinstimmt.

Aber auch die Theorie der Gestaltänderungsenergie, die heute oft bevorzugt wird, kann nicht als eine allgemein gültige Hypothese angesehen werden. Alle bisherigen Hypothesen gehen davon aus, daß irgendeine Größe (Normalspannung, Schubspannung, Spannungskreis, Gestaltänderungsenergie usw.) an einer bestimmten Stelle einen festen Grenzwert nicht überschreiten darf. Es ist eigentlich schwer vorstellbar, daß der Bruch nur in einem Punkte entstehen kann; die bekannten Fließfiguren (Abb. 13.1) z. B. entstehen plötzlich in einem weiten Gebiet. Die Versuche von A. Thum und F. Wunderlich zeigen deutlich, daß die Fließgrenze keinen eindeutig festgelegten Wert hat, sondern abhängig ist von der Art der Beanspruchung, resp. vom Spannungsfeld. Der Werkstoff kann in einem Punkte nur dann gleiten, wenn auch die Umgebung nachgibt. Je größer die Kräfte sind, die den übrigen Teil am Fließen hindern, um so höher liegt die Fließgrenze. Die Fließgrenze in den Randfasern eines gebogenen Stabes wird durch die Querschnittsform beeinflusst. Stäbe mit quadratischem Querschnitt z. B. zeigen, auf eine Fläche gelegt, eine um 36—45%, auf eine Kante gelegt eine um 74—83% höhere Streckgrenze als ein glatter, auf Zug beanspruchter Stab aus dem gleichen Werkstoff. Auch Versuche mit anderen Querschnittsformen zeigten, daß sich die Biege-Streckgrenze in den Randfasern um so mehr erhöht, je mehr sich der Werkstoff um die neutrale Faser anhäuft. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei Verdrehbeanspruchung. Alle diese Versuchsergebnisse beweisen, daß die bisherigen Theorien der Bruchgefahr bei ungleichmäßiger Spannungsverteilung nicht gültig sind, weil die Werkstoffe schichtenweise gleiten. Zur Beurteilung der

¹ Prof. Ljungberg (Stockholm) hat diese Hypothese etwas allgemeiner gestaltet, indem er sie bis zur Bruchgrenze erweitert. Er hat durch Versuche nachgewiesen, daß die Arbeit je Volumeneinheit zur Herbeiführung des Bruches konstant sei, unabhängig davon, ob die Belastung ruhend oder wechselnd sei. (Vgl. Prof. Dr.-Ing. Durrer, Z. VDI Bd. 73 (1929) S. 830, 32.)

* Das Volumen $dx \cdot dy \cdot dz$ wird nach der Formänderung $dx(1 + \varepsilon_1) \cdot dy(1 + \varepsilon_2) \cdot dz(1 + \varepsilon_3) = dx \cdot dy \cdot dz (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$, und die mittlere Spannung ist $\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$.

Bruchgefahr muß demnach unbedingt das Spannungsfeld in der unmittelbaren Nähe der gefährdeten Stelle herangezogen werden.

Bei den Versuchen, die zur Stützung der Gestaltänderungshypothese herangezogen werden, hat man die Bruchgefahr der gleichmäßigen Zug- resp. Druckbeanspruchung mit ungleichmäßigen Spannungsverteilungen (Verdrehung, Rohr unter Innendruck usw.) verglichen, was nicht zulässig ist. Diese Hypothese ist jedenfalls noch nicht mit ausreichender Sicherheit durch die Erfahrung bestätigt. Die Bedingungsgleichung besteht außerdem ausschließlich

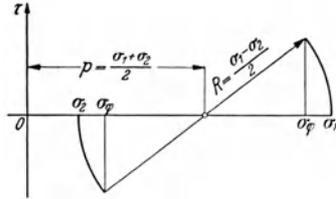


Abb. 13.7.

aus quadratischen Gliedern, d. h. durch Umkehrung der Vorzeichen der Spannungen ändert sich der Grenzwert nicht. Die Bruchgefahr müßte deshalb für Zug- und Druckbeanspruchung gleich groß sein, was z. B. für Stahl zutrifft, für Gußeisen aber nicht. Sie gibt auch für allseitigen Zug den gleichen Grenzwert wie für allseitigen Druck, in Widerspruch mit der Erfahrung, die zeigt, daß für Körper unter allseitigem Druck keine Bruchgefahr besteht, während alle Körper bei allseitigem Zug zerstört werden.

Man kann aus der Hypothese, daß die Gestaltsänderungsenergie als Bruchursache anzusehen ist, die Form der Grenzkurve G bei der Mohrschen Hypothese berechnen. Die Gleichung des Mohrschen Kreises lautet (Abb. 13.7):

$$\sigma_\varphi = p \pm \sqrt{R^2 - \tau^2} \quad \text{oder} \quad (\sigma - p)^2 = R^2 - \tau^2. \quad (13.6)$$

Die Gestaltsänderungs-Energie für ebene Spannungszustände ($\sigma_3 = 0$), folgt aus Gl. (3):

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_0^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1 \sigma_2, \quad (13.7)$$

Aus der Abbildung folgt: $\sigma_1 = p + R$, $\sigma_2 = p - R$ und $\sigma_1 \sigma_2 = p^2 - R^2$.

in Gl. (7) eingesetzt $\sigma_0^2 = 4 R^2 + (p + R)(p - R)$ oder $R^2 = \frac{\sigma_0^2 - p^2}{3}$.

In Gl. (6) eingesetzt, findet man die Kreise, die an der Grenze liegen

$$(\sigma - p)^2 = \frac{\sigma_0^2 - p^2}{3} - \tau^2 \quad \text{resp.} \quad F(\sigma, \tau, p) = 0.$$

Die Gleichung der Hüllkurve erhält man durch Eliminierung von p aus den Gleichungen

$$\frac{\partial F(\sigma, \tau, p)}{\partial p} = 0 \quad \text{und} \quad F(\sigma, \tau, p) = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = -2(\sigma - p) + \frac{2p}{3} = 0 = -2\sigma + \frac{8}{3}p, \quad \text{ergo} \quad p = \frac{3}{4}\sigma$$

in $F(\sigma, \tau, p)$ eingesetzt:

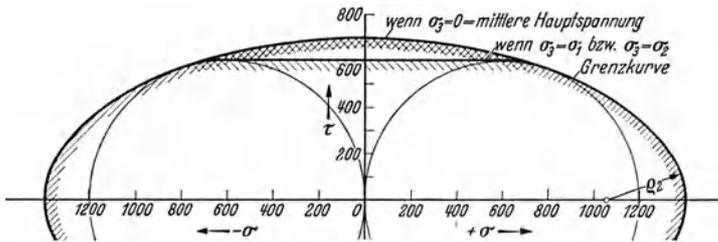
$$\frac{1}{16}\sigma^2 = \frac{\sigma_0^2 - \frac{9}{16}\sigma^2}{3} - \tau^2 \quad \text{oder}$$

$$\tau^2 + \frac{\sigma^2}{4} - \frac{\sigma_0^2}{3} = 0 \quad (13.8)$$

(Gleichung der Hüllkurve).

Sie ist eine Ellipse mit den

$$\text{Halbaxen: } \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} = 0,577 \sigma_0$$

Abb. 13.8. Hüllkurve G der Mohrschen Hypothese.

und $\frac{2\sigma}{\sqrt{3}} = 1,154 \sigma_0$, gültig, solange $\sigma_3 = 0$, die mittlere Hauptspannung ist, also wenn

$$\sigma_1 = + \quad \text{und} \quad \sigma_2 = -, \quad \text{resp. } 0 \text{ ist.}$$

Für $\sigma_3 = \sigma_2$ ist die gestaltsändernde Energie $(\sigma_1 - \sigma_2) = \sigma_0 = 2R$

in (6) eingesetzt: $(\sigma - p)^2 - \frac{\sigma_0^2}{4} + \tau^2$ resp. $F(\sigma, \tau, p) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = -2(\sigma - p) = 0, \quad \text{oder} \quad \sigma = p.$$

In $F(\sigma, \tau, p)$ einsetzen: $\tau = \frac{\sigma_0}{2} = \text{konstant}$ (die Hüllkurve ist eine Gerade).

Vergleich der Bruchhypothesen für ebene Spannungszustände. Die mittlere Hauptspannung wird Null oder gleich einer der beiden anderen.

1. Max.-Hauptspannung: σ_1 resp. σ_2 kleiner als einen Grenzwert k . Grenzfläche = Quadrat (Abb. 13.9).
2. Max.-Dehnung: $\sigma_{\text{red}} = \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{m} \geq k$ resp. $\sigma_2 - \frac{\sigma_1}{m} \geq k$, das sind Geraden mit den Neigungen m und $1/m$ (Abb. 13.10).

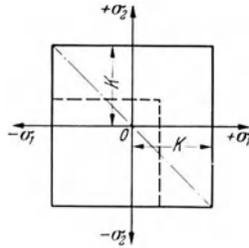


Abb. 13.9.

— für Stahl $k_z = k_d$
 - - - - für Gußeisen $k_z < k_d - \sigma_1$
 - · - · reine Schubbeanspruchung ($\sigma_1 = -\sigma_2$).

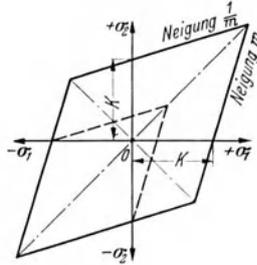


Abb. 13.10.

— für $k_z = k_d$
 - - - - für $k_z < k_d$.

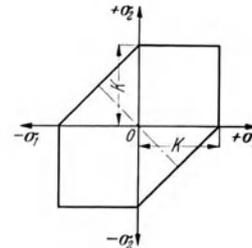


Abb. 13.11.

3. Max.-Schubspannung, resp. Mohr, wenn die Grenzkurve zwischen Zug- und Druckbeanspruchung parallel zur σ -Achse liegt (Abb. 13.11). $\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \geq k/2$ resp. $\sigma_1 - \sigma_2 = k$.

a) Haben σ_1 und σ_2 verschiedene Vorzeichen, so wird $\sigma_1 + \sigma_2 = k$, d. h. die Grenzfläche ist durch Geraden unter 45° begrenzt.

b) Haben σ_1 und σ_2 gleiche Vorzeichen, so ist $\sigma_3 = 0$ die kleinste Hauptspannung, also σ_1 resp. $\sigma_2 = k$, wie bei der maximalen Hauptspannungshypothese.

4. Gestaltänderungsenergie. Für ebene Spannungszustände ist:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \leq 2k^2 \text{ oder } \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 \leq k^2,$$

d. i. die Gleichung einer Ellipse (Abb. 13.12) mit den Halbachsen $a = k\sqrt{2}$ und $b = k\sqrt{2/3}$ unter 45° geneigt zu den σ_1 und σ_2 -Achsen. Aus dem in dieser Abbildung durchgeführten Vergleich geht deutlich hervor, daß die in der Literatur noch vielfach verwendete Dehnungshypothese die Bruchgefahr stark unterschätzt.

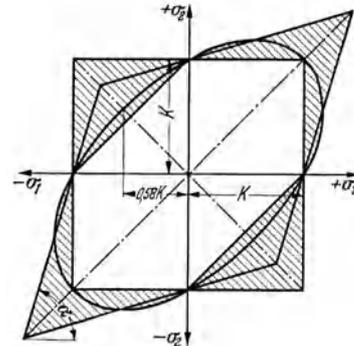


Abb. 13.12. Vergleich der Bruchhypothesen.

Zusammenfassend ist festzustellen, daß zur Zeit leider noch keine allgemein gültige Erklärung der Bruchursache bekannt ist und in absehbarer Zeit auch nicht zu erwarten ist. Dennoch sollte der Ingenieur die Frage der Bruchgefahr klar übersehen können, um auch bei hohen Beanspruchungen volle Sicherheit der Konstruktion gewährleisten zu können. Er muß deshalb zunächst aus den vorliegenden Bruchhypothesen die für seine Zwecke geeignetste wählen. Gestützt darauf, daß

1. es noch nicht mit ausreichender Sicherheit durch Versuche nachgewiesen ist, daß die Hypothese der Gestaltänderungsenergie der Mohrschen Hypothese überlegen ist;
 2. die Hypothese der Gestaltsänderungsenergie für Werkstoffe mit stark verschiedenen Festigkeitswerten für Zug und Druck versagt;
 3. die Bruchhypothese von Mohr, infolge ihrer allgemeinen Fassung sich den jeweiligen neuen Forschungen am besten anpassen kann;
 4. diese Bruchhypothese die Bruchgefahr gegenüber allen anderen Hypothesen am engsten einschränkt (vgl. Abb. 13.12), also die sicherste Hypothese ist und sich nur wenig von der Hypothese der Gestaltsänderung unterscheidet;
 5. das Rechnen mit dieser Hypothese auch die für praktische Zwecke erforderliche Einfachheit und Übersichtlichkeit aufweist,
- entscheide ich mich für die Bruchhypothese von Mohr als Grundlage für alle Festigkeitsrechnungen.

Schrifttum.

Thum, A. und F. Wunderlich: Fließgrenze bei behinderter Formänderung; ihre Bedeutung für das Dauerfestigkeits-Schaubild. *Forschung* 3 (1932) S. 261/70 mit Literaturangaben. — Kuntze, W.: Einfluß ungleichförmig verteilter Spannungen auf die Festigkeit von Werkstoffen. *Masch.-El.-Tagung Aachen 1935*. VDI-Verlag. — Prager, W.: Die Fließgrenze bei behinderter Formänderung. *Forschung* 4 (1933) S. 95/97. — Pfender, M.: Das Verhalten der Werkstoffe bei behinderter Verformungsmöglichkeit. *Arch. Eisenhüttenwes.* 11 (1938) S. 595/606. — Thum, A.: Gewaltbruch, Zeitbruch und Dauerbruch. Bruchaussehen und Bruchverlauf bei Zug-, Biege- und Verdrehbeanspruchung. *Forschung* 9 (1938) S. 57/67 mit Literaturangaben. — Kuntze, W.: Zur Frage der Festigkeit bei räumlichen Spannungszuständen. *Stahlbau* 10 (1937) S. 177/180. — Mason, W.: Notes on certain combined alternating stress systems and a stress criterion on the fatigue limit. *Phil. Mag.* 24 (1937) 162 S. 695/703. — Weibull, W.: A statistical theory of the strength of materials. *Handling. Ing. Vetensk. Akad. Stockholm* Nr. 161 (1939). — Crowan, C.: Theory of the fatigue of metals. *Proc. Roy. Soc. London Serie A.* 171 (1939) 944 S. 78/106. — Smekal, A. Bruchtheorie spröder Körper. *Z. f. Physik* 103 (1936) S. 495/525. — Bridgman, F. W.: Reflections on rupture. *J. appl. Physica* 9 (1938) S. 517/28. — Föppl, L.: Ausblick für eine neue Theorie der Anstrengung des Werkstoffes. *Forschung* 7 (1936) S. 209/20. — Föppl, L.: Eine neue elastische Materialkonstante. *Ing. Arch.* 7 (1936) S. 229/36. — Lode, W.: Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle. *VDI-Forschungsheft* Nr. 303 (1928). Diese Arbeit enthält eine Zusammenstellung der verschiedenen Bruchhypothesen und der Versuche zur Klärung der Bruchgefahr. — Maier, A.: Einfluß des Spannungszustandes auf das Formänderungsvermögen der metallischen Werkstoffe. VDI-Verlag 1935. — Leon, A.: Über die Rolle des Trennbruches im Rahmen der Mohrschen Hypothese. *Baug.* (1934) S. 318/324. — Roß, M. und A. Eichinger: Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr I, II und III. *Diskussionsberichte* 14 (September 1926), 28 (Juni 1928) und 34 (Februar 1929) der EMPA. Zürich. — Fränkel, H. W.: Die Verfestigung der Metalle durch mechanische Beanspruchung. Die bestehenden Hypothesen und ihre Diskussion. Berlin: Julius Springer 1920. — Guest, J.: *Philos. Mag.* Bd. 50 (1900) S. 69/132. — Karman, Th. v.: Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck. *VDI-Forsch.-Heft* 118 (1912). — Böker, R.: Die Mechanik der bleibenden Formänderung in kristallinisch aufgebauten Körpern. *VDI-Forsch.-Heft* 175/76 (1915). — Griffith: *Phil Trans. Royal Soc. (London)* 1920. — Sandel, G. D.: Über die Festigkeitsbedingungen. Ein Beitrag zur Lösung der Frage der zulässigen Anstrengung der Konstruktionsmaterialien. Leipzig: Max Jänicke Verlag 1925. — Thum, A. und K. Federn: *Spannungszustand und Bruchausbildung*. Berlin: Julius Springer 1939.

13.2. Lage der Grenzkurve bei Wechsellast.

Zur Festlegung der Grenzkurve müssen die Festigkeitseigenschaften der Werkstoffe bekannt sein. Aus dem einfachen Zugversuch kann die Bruchfestigkeit K_z eines Werkstoffes zuverlässig

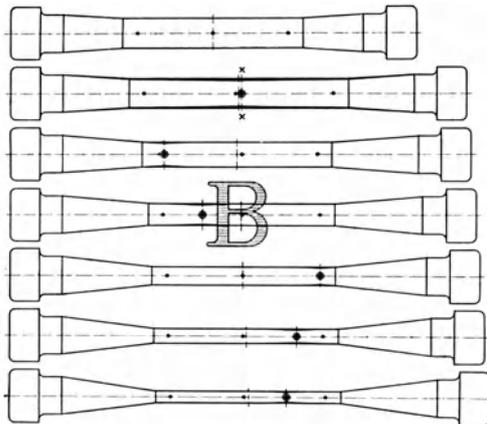


Abb. 13.13. Das Wandern der Einschnürstelle (aus Lasche-Kieser, Konstruktion u. Material).

bestimmt werden. Auf Grund der Erfahrung weiß man aber schon lange, daß der Bruch durch viel kleinere Belastungen (Kräfte, Spannungen) herbeigeführt werden kann, wenn man diese nur öfter anbringt und wieder entfernt. Die Maschinenteile unterliegen fast ausnahmslos einer solchen wechselnden Beanspruchung; ruhende Belastung kommt streng genommen nur durch das Eigengewicht vor.

Die Vorausbestimmung der Bruchgefahr wird weiter dadurch erschwert, daß die Eigenschaften des Werkstoffes sich bei der Beanspruchung ändern können. Besonders interessant ist folgender Versuch von O. Lasche (AEG) (Abb. 13.13 u. 13.14). Bei der erstmaligen Belastung eines normalen Probestabes entstand an der Stelle x die örtliche Einschnürung. Der Versuch wurde nun abgebrochen und der Stab über seine volle Meßlänge

auf den an der Einschnürstelle entstandenen Durchmesser abgedreht und wiederum belastet, bis er sich von neuem kräftig einschnürte. Diese Prüfung wurde

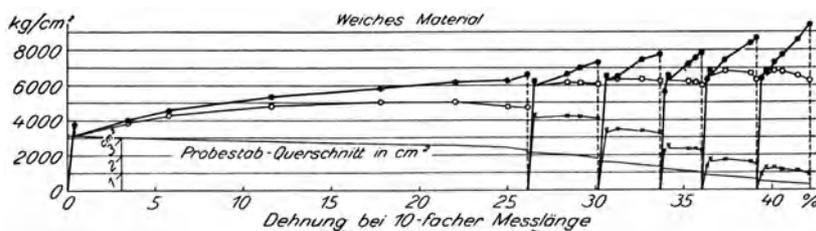


Abb. 13.14. Zerreißfestigkeit eines Probestabes „B“, der nach mehrfach erfolgter Einschnürung jeweils wieder nachgedreht wurde (Lasche-Kieser).

fünfmal wiederholt und zeigte durch das Wandern der Stelle der Einschnürung über die ganze Stablänge, daß das Material durch das Recken nicht zerstört, sondern im Gegenteil fester wurde. Abb. 13.14 zeigt in dem obersten Linienzug das Ansteigen

der Festigkeit des Materials; die mittlere Linie gibt die Spannung, auf den ursprünglichen Querschnitt bezogen.

Die Tatsache, daß der Werkstoff durch Beanspruchung, oberhalb der Streckgrenze fester, aber auch spröder wird, ist altbekannt; bei der Kaltbearbeitung (Drahtziehen) macht man wiederholt davon Gebrauch. Die Festigkeitseigenschaften beim Eintreten eines Bruches sind demnach abhängig von der ganzen Vorgeschichte der Beanspruchungen. Daraus erkennt man die großen, fast unüberwindlichen Schwierigkeiten, die bei der Beurteilung der Bruchgefahr auftreten.

Deshalb sind auch Dauerversuche mit allmählich gesteigerten Belastungen nicht geeignet, die Dauerfestigkeit der Werkstoffe zu bestimmen, da bei einer solchen Versuchsdurchführung eine sehr erhebliche „Trainierwirkung“ auftreten kann. Die so gefundenen Dauerfestigkeitszahlen liegen besonders bei Kohlenstoffstählen niedriger Festigkeit etwa um 20—30% zu hoch.

F. Wöhler hat zuerst (1866) die Bruchfestigkeit von Eisenbahnachsen bei Dauerbeanspruchung durch Versuche bestimmt und dabei drei typische Belastungsfälle unterschieden:

1. ruhende Belastung (Dauerstandfestigkeit);
2. schwellende Belastung, von O bis P (Ursprungsfestigkeit) und
3. Wechselbelastung, von $-P$ bis $+P$ (Wechselfestigkeit).

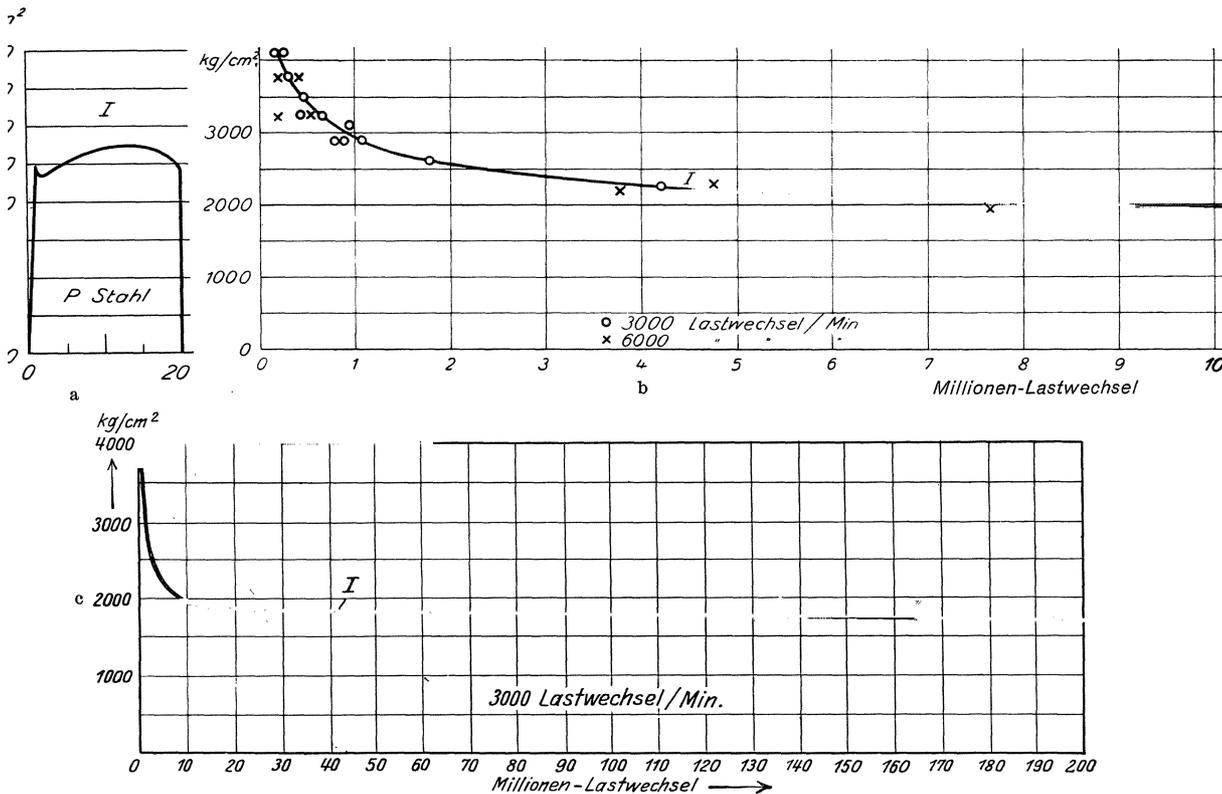


Abb. 13.15. a Zugversuch; b Wöhlerlinie bis 10^7 und c Wöhlerlinie bis $2 \cdot 10^8$ Lastwechsel der gleichen Stahlsorte (aus Lasche-Kieser).

Die Dauerfestigkeit im Belastungsfall 3 stimmte ungefähr mit der Lage der Elastizitätsgrenze überein, die in dieser Weise viel zuverlässiger zu bestimmen ist als durch die früher gegebenen Definitionen. Auf Grund seiner Versuche stellte er fest, daß die zulässigen Spannungen sich in diesen drei Fällen verhalten wie 3 : 2 : 1. Durch das klassische Buch von C. von Bach über „Maschinenelemente“ sind diese Verhältniszahlen in fast allen Hand- und Lehrbüchern übernommen.

Versuche über wiederholte Beanspruchung sind seither in großer Zahl durchgeführt worden, ohne daß man bis heute zu einem abgeschlossenen Ergebnis gekommen ist. Beim statischen Zugversuch, wie bei allen Gewaltbrüchen (Schlagzerreiß- und Kerbschlagversuch) bricht der Probekörper an der schwächsten Stelle auf einmal unter Dehnung und Einschnürung. Bei Wechselbeanspruchungen (Dauerbruch) wird der Werkstoff an der schwächsten Stelle zuerst zermürbt, worauf ein kleiner Anriß entsteht, der allmählich fortschreitet und schließlich (nach einigen

Millionen Lastwechsel) zur Trennung führt, ohne vorherige Verformung der umliegenden Werkstoffteilchen. Der Dauerbruch erinnert an einen Trennungsbruch bei spröden Werkstoffen; man erkennt dabei deutlich zwei Zonen, die glatte Dauerbruchzone von der Anrißstelle ausgehend und die meist körnige Restbruchzone (Gewaltbruch), wenn der noch nicht getrennte Querschnitt die Last nicht mehr übertragen kann. Die Größe der Restbruchfläche ist maßgebend für die Größe der Überbeanspruchung. Abb. 13.15 a zeigt die Spannungs-Dehnungslinie einer Stahlsorte beim einfachen Zugversuch; Abb. 13.15 b den Verlauf der Bruchspannungen bei Wechselbelastung in Abhängigkeit der Lastwechselzahl (Wöhlerlinie) und zwar bis 10^7 Lastwechsel. Wird der Versuch noch weiter fortgesetzt (Abb. 13.15 c bis $2 \cdot 10^8$ Wechsel) so zeigt sich, daß die Bruchspannung immer kleiner wird, so daß die Frage auftritt, ob überhaupt eine Spannung existiert, welche der Werkstoff dauernd aushält. Infolge der unvermeidlichen Streuung der Versuchsergebnisse ist es schwer festzustellen, ob die Kurve wirklich asymptotisch verläuft.

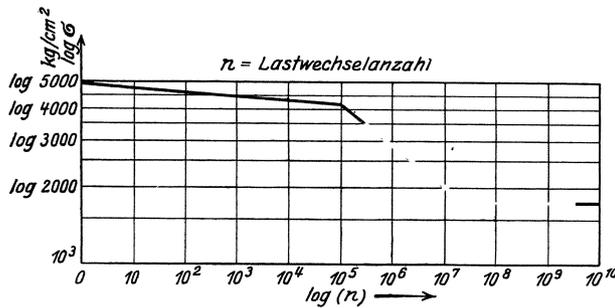


Abb. 13.16. Wöhlerlinie für St 50 im logarithmischen Maßstab.

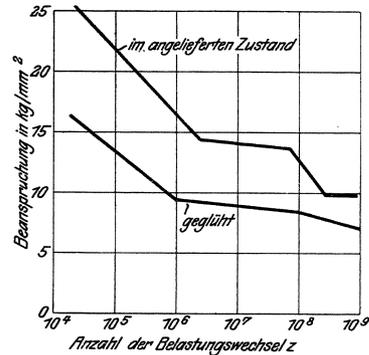


Abb. 13.17. Wöhlerlinie für Duralumin (Werkstoffausschuß VDE).

Wenn aber das Diagramm im logarithmischen Maßstab aufgetragen wird (Abb. 13.16), erkennt man viel leichter, daß tatsächlich eine untere Grenze vorhanden ist. Eine Turbinenwelle, die 3000 Umdrehungen in der Minute macht, erfährt 180000 Belastungswechsel in der Stunde oder rd. $540 \cdot 10^6$ im Jahr. Die Drehzahl von 3000/min wird heute schon in vielen Fällen bedeutend überschritten (10000 bis 30000/min), so daß der Maschinenbau tatsächlich ein praktisches Interesse hat an Versuchen mit sehr hoher Lastwechselzahl.

Nicht alle Metalle zeigen einen so einfachen Verlauf der Wöhlerlinie, wie z. B. Abb. 13.17 für Duralumin zeigt, wo scheinbar gar keine Grenze für die Dauerwechselfestigkeit vorliegt. Es ist vielfach die irrtümliche Ansicht verbreitet, daß Maschinenteile, die einige Millionen Lastwechsel ertragen ohne zu Bruch zu gehen, überhaupt nicht mehr brechen können. Das ist, wie die Wöhlerkurve zeigt, bei den Leichtmetallen (Flugzeuge), keineswegs der Fall, wo besondere Vorsicht bei der Wahl der zulässigen Belastung notwendig ist, insbesondere bei langer Lebensdauer.

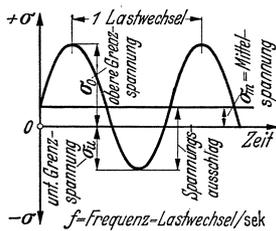


Abb. 13.18.

Der Bruchversuch ist deshalb wohl geeignet ein Material zu kennzeichnen (Werkstoffprüfung), aber nicht um die zulässigen Belastungen für den Maschinenbau festzulegen.

Zur eindeutigen Verständigung hat der Fachausschuß für Maschinenelemente bei VDI folgende Fachaussdrücke festgelegt:

1. Unter einer „wechselnden Beanspruchung“ versteht man jede Beanspruchung, die zwischen zwei Grenzwerten (obere, resp. untere Grenzspannung, σ_0 , τ_0 resp. σ_u , τ_u) in einem bestimmten Rhythmus pendelt (Abb. 13.8), der bei Maschinenteilen meist in einem einfachen Verhältnis zur Drehzahl der Maschine steht. Die Art des zeitlichen Verlaufs — im Idealfall sinusförmig — ist dabei von untergeordneter Bedeutung.

¹ Graf, O.: Dauerfestigkeit der Werkstoffe. Berlin: Julius Springer, 1929.

2. Der arithmetische Mittelwert von oberer und unterer Grenzspannung heißt Mittelspannung (σ_m, τ_m); die halbe Differenz der Grenzwerte heißt Spannungsausgleich (σ_a, τ_a).

3. Eine volle Periode des Spannungsverlaufes heißt ein Lastwechsel; die Anzahl der Lastwechsel in einer Sekunde, Frequenz.

4. Die Wöhlerkurve (Abb. 13.15) wird also aus wirtschaftlichen Gründen an irgendeiner Stelle abgebrochen, die als Grenzwechsellast bezeichnet wird. Sie beträgt bei Stahl 5 bis $10 \cdot 10^6$, bei Leichtmetallen 30 bis $50 \cdot 10^6$ Lastwechsel, was nicht immer ausreicht (Abb. 13.17).

5. Die Dauerfestigkeit eines Werkstoffes (σ_D, τ_D) ist diejenige wechselnde Beanspruchung, die beliebig lange ertragen wird. Sie wird in einem Schaubild (Abbildung 13.19) dargestellt, in welchem die experimentell bestimmten Grenzspannungen (σ_o, σ_u) in Abhängigkeit der Mittelspannung σ_m aufgetragen sind. Das Schaubild wird bei der Streckgrenze abgebrochen, weil die Beanspruchung stets so gewählt werden muß, daß plastische Formänderungen vermieden werden.

Die Grenzlinie verläuft nahezu geradlinig; ihr Schnittpunkt mit der Streckgrenze teilt das Schaubild in zwei Zonen. Zone I ist für den Maschinenbau ausschlaggebend und gibt einen Dauerbruch ohne plastische Verformung; Zone II mit plastischer Verformung kommt bei Eisenbau (und auch bei Schrumpfverbindungen) in Betracht.

Die Dauerfestigkeit ist keine eindeutige, den Werkstoff kennzeichnende Zahl, sondern von einer Anzahl Faktoren abhängig, deren Einfluß zur Zeit leider oft noch wenig erforscht ist.

1. Von der Temperatur. Die Dauerfestigkeitsversuche werden meist bei Zimmertemperatur durchgeführt, während die Werkstoffe in zahlreichen Maschinen und Apparaten ganz anderen Temperaturen ausgesetzt sind: Brücken, Eisenbahnschienen, Kältemaschinen bis -30°C , Gasverflüssigungsanlagen bis -200°C und tiefer, im Dampfüberhitzer kommen Temperaturen bis $+400^\circ \text{C}$ vor, bei Automobilmotoren befinden sich die Ventilteller oft in rotglühendem Zustand. Der Konstrukteur muß deshalb auch das Verhalten der Materialien bei anderen Temperaturen kennen. In Abb. 13.20 sind die Festigkeitswerte von weichem Stahl in Abhängigkeit von der Temperatur dargestellt¹.

2. Von der thermischen Behandlung des Werkstoffes (Ausglühen, Härten, Abschrecken, Vergüten usw.). Abb. 13.21 zeigt als Beispiel, welchen Einfluß nur die Veränderung der Anlaßtemperatur auf die statischen Festigkeitswerte einer Stahlsorte haben kann. Auch durch kalte Vorbehandlung des Werkstoffes können die Festigkeitswerte beeinflußt werden (vgl. Abb. 13.14).

Die Dauerfestigkeit eines Werkstoffes kann sich demnach im Laufe der Zeit ändern und zwar ist diese Änderung von der Beanspruchung

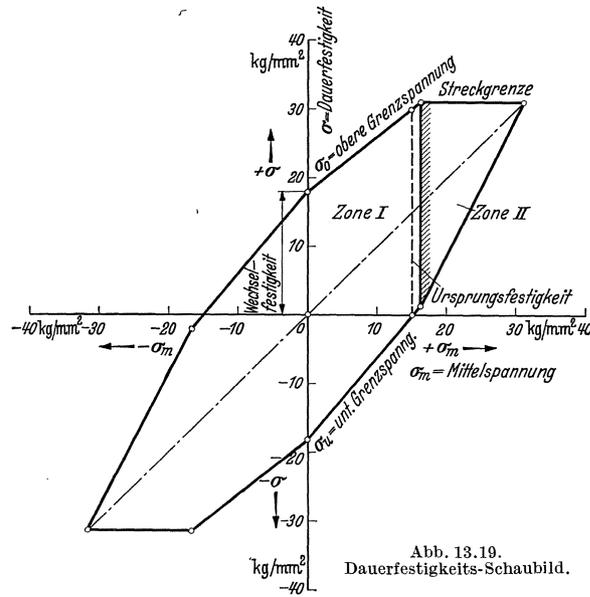


Abb. 13.19. Dauerfestigkeits-Schaubild.

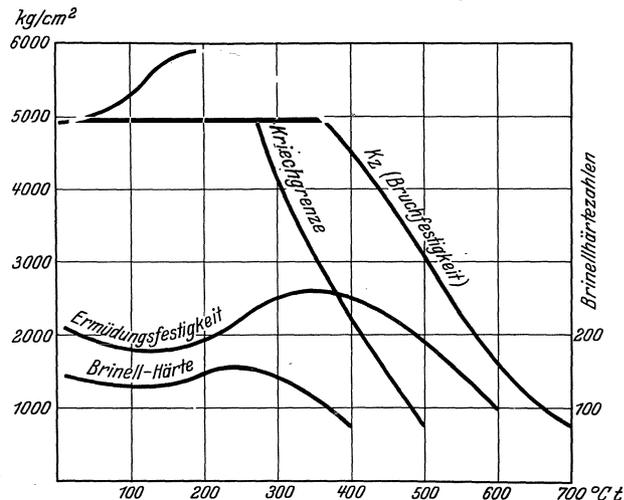


Abb. 13.20. Festigkeitswerte von St. C. 24 in Abhängigkeit von der Temperatur (nach Versuchen von H. J. Tapsell und W. J. Clenshain, Engg. Res. spec. Report I, 1927).

¹ Schrimming, W.: M. Knoch u. K. Uhlemann: Wechselfestigkeit und Kerbempfindlichkeit der Stähle bei hohen Temperaturen. Z. VDI 78 (1934). S. 1469/76.

des Werkstoffes abhängig; sie ist für verschiedene Werkstoffe verschieden. Im allgemeinen kann von der Verfestigung zäher Werkstoffe abgesehen werden, da diese nur bei erheblichem Überschreiten der Streckgrenze auftritt und im normalen Betrieb der Maschine nicht vorkommen sollte. Diese Vernachlässigung bildet eine stille Reserve für ausnahmsweise auftretende höhere Belastungen als der Rechnung zugrunde gelegt wurde (Schienenstöße, Böen). Bei Edelstahl und Gußeisen tritt keine Verfestigung auf.

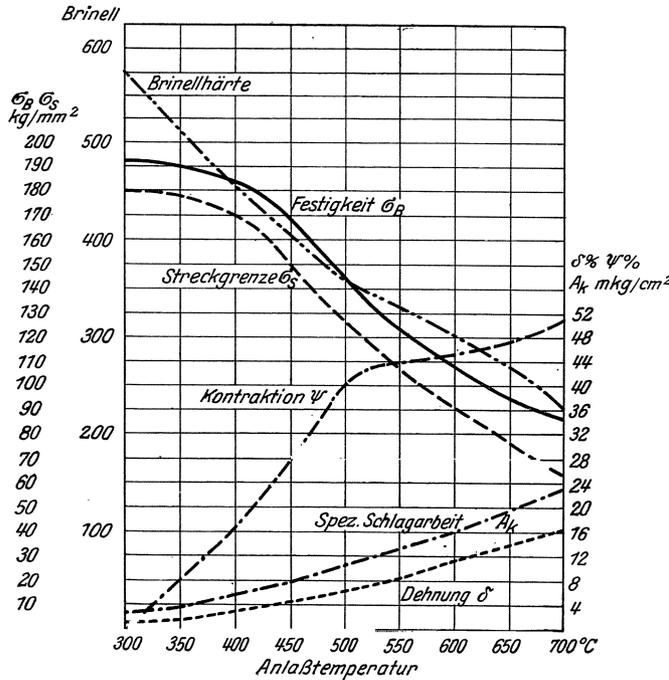


Abb. 13.21. Mangan-Silicium-Stahl (0,8 C; 1,18 Mn; 1,24 Si) gehärtet bei 820° C und in Öl bei verschiedenen Temperaturen angelassen.

3. Spannungszustand.
Die Dauerfestigkeit eines Werkstoffes ist unter sonst gleichen Verhältnissen nicht eindeutig durch den Spannungskreis an der gefährdeten Stelle bestimmt, sondern sie ist auch abhängig vom Spannungszustand der umgebenden Teilchen (vgl. S. 71). Das vollständige Dauerfestigkeitsschaubild eines Werkstoffes müßte deshalb die Kurven der Grenzspannungen für die einfachen Belastungsfälle, Zug-, Druck-, Biege- und Drehbeanspruchung enthalten.

Aus den vom Fachausschuß für Maschinenelemente beim VDI zusammengestellten Werten kann mit praktisch ausreichender Genauigkeit die Erfahrungstatsache abgeleitet werden, daß für die genormten Stahlorten:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{wz} &= 0,72 \sigma_{wb} \\ \text{und } \tau_w &= 0,58 \sigma_{wb} \end{aligned} \right\} (13.9)$$

ist. Dadurch wird es möglich die Dauerfestigkeit-Schaubilder zu vereinfachen und auf die am zu-

verlässigsten bekannten Biegefestigkeitswerte zu beschränken.

4. Die Dauerfestigkeit ist praktisch unabhängig von der Frequenz zwischen 1 und 500/sec.

5. Die Dauerfestigkeit ist in hohem Maße abhängig von der Oberflächenbeschaffenheit des Werkstückes und von der Korrosion (Abb. 13.22). Dieser Einfluß ist namentlich bei den hochwertigen Stahlorten am größten; Edelstähle sollten deshalb nie an Stellen mit großer Korrosionsgefahr verwendet werden (landwirtschaftliche Maschinen, Meerschiffe usw.). Die billigsten Baustoffe St 37 bis 40 und Gußeisen sind fast unempfindlich gegen Korrosion.

Der Ingenieur ist meist geneigt, sich die Oberfläche eines Körpers als ein zweidimensionales geometrisches Gebilde vorzustellen. Die Oberflächen wirklicher Körper sind dünne, räumliche Gebilde von bestimmter Form und besonderen Eigenschaften, die für den Ingenieur von großer praktischer Bedeutung sind. Nicht nur die Dauerfestigkeit, sondern auch die Reibung, Korrosion, die Strömung an Wänden, Passungen, Wärmeübergang durch Strahlung, Leitung und Konvektion usw. hängen alle von der Feingestalt der Oberfläche ab. Der Ingenieur sollte deshalb den Vorgängen an den Grenzflächen die größte Beachtung schenken¹.

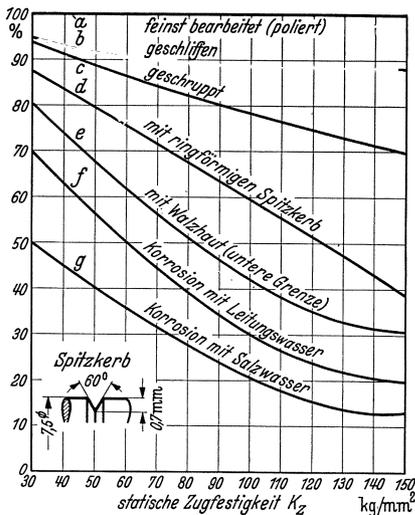


Abb. 13.22. Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit auf die Dauerbiegefestigkeit.

¹ Vgl. hierzu das ausgezeichnete Buch von G. Schmaltz: Technische Oberflächenkunde. Berlin: Julius Springer 1936.

Man kann die technischen Oberflächen, je nach ihrer Unregelmäßigkeit, nach Rauheitsklassen unterteilen. „Unregelmäßigkeit“ ist hier der senkrechte Abstand H der höchsten und niedrigsten Punkte der Profilkurven der Oberfläche.

1. Rohe Oberflächen von gegossenen oder geschmiedeten Teilen; $H = 1$ bis 2 mm.
2. Geschruppte Flächen, bei denen die Bearbeitungsriefen deutlich sichtbar und fühlbar sind; $H = 0,2$ bis 2 mm.
3. Geschlichtete Flächen, bei denen die Riefen noch mit bloßem Auge erkennbar sind; $H = 0,05$ bis $0,2$ mm.
4. Feingeschlichtet oder geschliffen; $H = 10$ bis 5μ .
5. Feinstgeschliffene Flächen zeigen schon einen ausgesprochenen Glanz; $H = 5 \mu$ bis $0,5 \mu$.
6. Normalgeläppt¹ und poliert; $H < 1 \mu$.
7. Hochglanzpoliert; $H < 0,5 \mu$.

Bei Körpern, die eine mechanische Bearbeitung, sei es eine spanabhebende oder eine spanlose durchgemacht haben, ist das Gefüge bis zu einer gewissen Tiefe gestört und von den tieferen

Schichten deutlich verschieden (Abb. 13.23). Diesen Bereich nennt Schmalz die „innere Grenzschicht“ des Körpers. Daß dies grundsätzlich so sein muß, ergibt sich aus der Tatsache, daß sowohl die spanlose Formgebung als auch die Spanabhebung plastische Verformungen sind, die naturgemäß nicht unmittelbar an der neu entstandenen Oberfläche haltmachen. Die Beurteilung der Oberflächenbeschaffenheit setzt also die Kenntnis voraus, durch welchen Bearbeitungsvorgang eine bestimmte Oberfläche zustande gekommen ist. Zum Beispiel geben eine mit feinem Drehstahl hergestellte flache runde Rille, eine eingeschliffene und polierte und schließlich eine durch Walzen oder Drücken hergestellte Rille keineswegs dieselben Festigkeitswerte, auch wenn sie anscheinend das gleiche Profil haben.

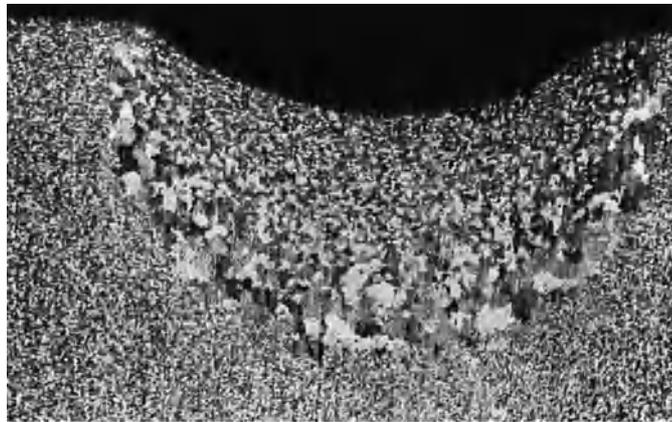


Abb. 13.23. Ausbildung der inneren Grenzschicht im reinen Eisen, welches der Brinelldruckprobe unterworfen war (aus Schmalz).

Bei der zerspanenden Verformung reicht die innere Grenzschicht bis etwa um den Betrag der früheren Spanstärke in die Tiefe des Werkstoffes hinab und ist bei den feinsten Bearbeitungen (wie Läppen und Polieren) von der Größenordnung von $0,01$ mm. Innerhalb dieser Grenzschicht findet man deutliche Spuren von Kornzertrümmerungen, welche die Festigkeitseigenschaften beeinflussen. Der so unerwünschte Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit läßt sich zum Teil auch durch die Inhomogenität des Werkstoffes in der Grenzschicht erklären.

Man weiß aus Versuchen mit Federstahl (S. 170), daß die Festigkeit durch Abschleifen der Oberflächenschicht bedeutend erhöht wird. Der Grund für die Festigkeitsverminderung durch die Oberflächenschicht dürfte einerseits in kleinen Rissen und sonstigen Beschädigungen der Oberfläche zu suchen sein, andererseits in einer während der Wärmebehandlung eintretenden Entkohlung. Durch chemische Analyse wurde z. B. bei einem SiMn-Stahl festgestellt, daß in der obersten Schicht von $0,157$ mm Dicke ein C-Gehalt von nur $0,17\%$ vorlag, während er sich in der zweiten Schicht von gleicher Dicke auf $0,45\%$ erhöhte und erst in der dritten Schicht den vollen Durchschnitt von $0,54\%$ erreichte.

Man kann die Dauerhaltbarkeit durch Oberflächendrücken steigern; die feinen Risse in der Oberfläche schließen sich dabei und gleichzeitig tritt auch eine Verfestigung auf. Auch

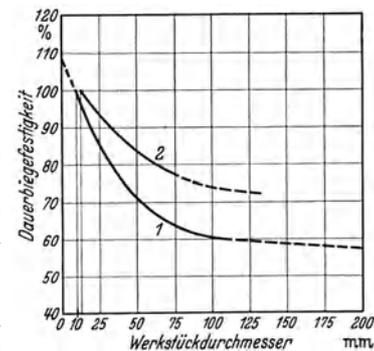


Abb. 13.24. Abnahme der Dauerfestigkeit in Abhängigkeit von der Werkstückgröße.
1. Für Biegung (Vorschlag E. Lehr, Masch.-El.-Tagung Aachen 1935).
2. Für Verdrehung (Versuche von W. Bautz, Masch.-El.-Tagung, Aachen 1935)

¹ Läppen ist ein Feinstschleifen zur Erzeugung höchster Oberflächengüte.

das Nitrierverfahren von Krupp steigert die Dauerhaltbarkeit. Die Teile (aus Sonderstahl) werden in einem Kasten kürzere oder längere Zeit, je nach der gewünschten Härtetiefe, der Einwirkung eines Ammoniakstroms bei 500 bis 550° C ausgesetzt; das Gas zersetzt sich und gibt Stickstoff an die Randschichten des Werkstücks ab. Eine Abschreckung wird vermieden, so daß kein Verziehen des Teiles zu befürchten ist; die Oberfläche wird sehr hart.

6. Die Dauerfestigkeit des Werkstoffes scheint auch abhängig zu sein von der Größe des Versuchskörpers (Abb. 13.24), und zwar soll sie mit zunehmendem Durchmesser des Rundstabes rasch abnehmen. Eine Abnahme in diesem Ausmaß kann nicht durch die größere Inhomogenität der größeren Stücke erklärt werden. Sie steht auch in Widerspruch mit der üblichen Auffassung, daß die Festigkeitseigenschaften unabhängig von der Werkstückgröße sein sollten. Die Versuche, auf welchen die Kurven in dieser Abbildung beruhen, sind mit abgesetzten, resp. durchbohrten Wellen durchgeführt. Der Einfluß kleiner Abweichungen in den Rundungen, in der Oberflächen-

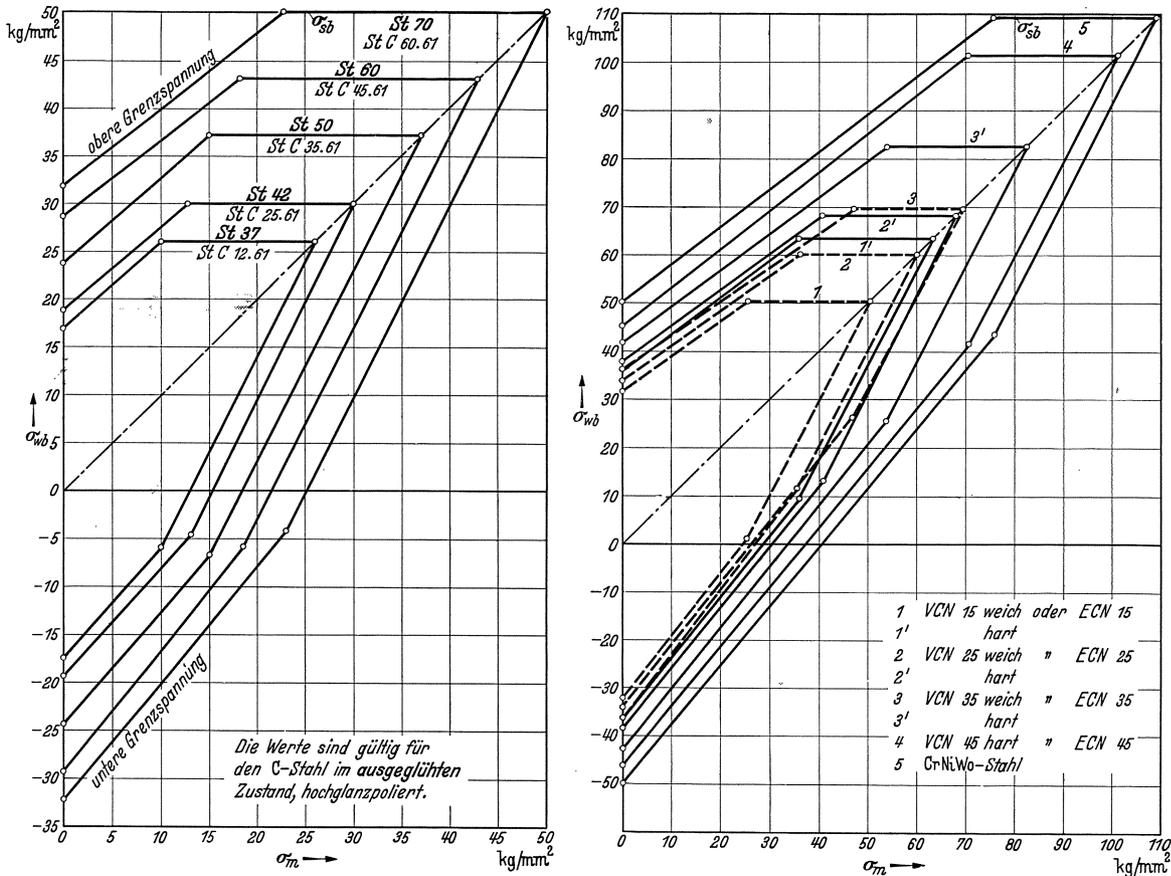


Abb. 13.25. Dauerfestigkeits-Schaubilder (für Biegung) der genormten Stähle.

beschaffenheit usw. kann das Versuchsergebnis verschleiert haben. Zur Klärung dieser Frage wären neue Versuche notwendig, die alle Faktoren berücksichtigen müssen, z. B. auch die Herstellungsart der Wellen und den Einfluß evtl. Spannungen. Man wäre sonst geneigt zu glauben, daß die zunehmende Festigkeit bei den Versuchen von Lasche (Abb. 13.13, 14) auf abnehmenden Durchmesser des Probestabes zurückzuführen ist.

Weniger bekannt ist die Tatsache, daß die Ursprungsfestigkeit bei Druck wesentlich höher ist als die bei Zugbeanspruchung. Eingehende Versuche an gehärtetem Federstahl haben gezeigt, daß die Dauerfestigkeit auf Druck gleich der Streckgrenze ist und daß sie durch Oberflächenverletzung oder Korrosion nicht beeinflusst wird. Die Zuger müdung dagegen liegt bedeutend tiefer und ist außerdem äußerst empfindlich gegen solche Einflüsse. Auch bei weicheren Stählen besteht ein erheblicher Unterschied. Die Dauerfestigkeitschaubilder sind also nicht symmetrisch in bezug auf den Nullpunkt.

Die in Abb. 13.25 für Stahl eingetragenen Festigkeitswerte gelten für runde Vollstäbe mit 7,5 bis 15 mm Durchmesser, mit feinstbearbeiteter Oberfläche und bei Zimmertemperatur. Diese Dauerfestigkeitswerte sind nicht zu verwechseln mit den „zulässigen“ Spannungen, denn

1. die Oberflächenbeschaffenheit und ihre Änderung während des Betriebes,
2. Zufälligkeiten, wie Oberflächenbeschädigungen, Seigerungen, Schlackeneinschlüsse, poröse Stellen usw.,
3. Eigenspannungen beim Gießen, Härten, Schweißen oder durch Bearbeitung usw.
4. Wärmespannungen während des Betriebes, usw.

müssen von Fall zu Fall bei der Wahl der „zulässigen“ Spannung durch Einführung von Sicherheitsfaktoren berücksichtigt werden. Die obengenannten Einflüsse beziehen sich auf den Werkstoff an sich. Andere, mindestens so wichtige hängen von der Form des Probekörpers, insbesondere bei allmählichen oder plötzlichen Querschnitts- und Richtungsänderungen und von den Betriebsbedingungen durch aufgesetzte Teile ab. Diese werden unter (Abschn. 15 u. 16) erläutert und bei den einzelnen Maschinenteilen gesondert behandelt.

Die zulässige Spannung kann unter sonst gleichen Verhältnissen um so höher gewählt werden, je niedriger die Lastwechselzahl im Leben des Maschinenteiles ist, z. B. für wenig gebrauchte, langsam laufende Maschinen, einzelne Krantypen usw. Auch wirtschaftliche Gesichtspunkte sind bei der Wahl der zulässigen Spannung zu berücksichtigen; der Konstrukteur wird die Spannung um so höher wählen, wenn damit bedeutende Ersparnisse erzielt werden können. Wenn bei einer Antriebsmaschine eine Störung entsteht, steht der ganze Betrieb still, wodurch in ganz kurzer Zeit weit größerer Schaden verursacht wird, als eine etwas kräftigere Konstruktion der Maschine gekostet hätte. In solchen Fällen setzt man mit Recht die Betriebssicherheit in allererster Linie. Man kann allerdings die Betriebsstörungen durch Bereithaltung von Ersatzteilen verkleinern. Wie weit man hierin in einzelnen Branchen des Maschinenbaues geht, zeigt typisch die Automobilindustrie: in jeder kleinen Ortschaft sind Ersatzteile für Autos zu haben. Je größer die Kosten für die sichere Konstruktion sind, um so vorsichtiger muß die zulässige Grenze gewählt werden. Der Ingenieur sollte so konstruieren, daß große Sicherheit mit möglichst geringen Kosten erreicht wird. Je schwerer die Folgen eines Bruches sind, um so vorsichtiger sei die Wahl der zulässigen Spannung; der Konstrukteur soll sich seiner schweren Verantwortung bewußt sein, besonders wenn Leben und Gesundheit von Menschen dabei gefährdet werden. Dasselbe gilt für die Ersetzbarkeit eines Konstruktionsteiles; wenn diese im Falle eines Versagens entweder sehr schwierig oder sehr teuer oder praktisch überhaupt nicht möglich erscheint muß er besonders vorsichtig bei der Wahl der zulässigen Spannungen sein.

Schließlich müssen auch die Voraussetzungen der Festigkeitsberechnungen bei der Festlegung der zulässigen Grenze berücksichtigt werden. Je genauer die berechnete Spannung mit der im Betrieb tatsächlich auftretenden übereinstimmt, um so näher darf die zulässige Spannung bei der Dauerfestigkeit des Werkstoffes liegen. Die Formgebung muß deshalb so gewählt werden, daß über die auftretenden Spannungen vollständig Klarheit herrscht.

Es wird demnach wohl niemals möglich sein, allgemeingültige Zahlenwerte für die zulässigen Spannungen anzugeben, sondern der Ingenieur muß von Fall zu Fall und unter Berücksichtigung der obenstehenden Gesichtspunkte eine Wahl treffen. Um dem Anfänger die Wahl zu erleichtern, kann man etwa folgende Grenzwerte festlegen, die genügend Sicherheit gegen Bruch gewähren und die man nicht ohne besondere Begründung überschreiten sollte:

Für ruhende oder wenig oft wechselnde Belastung: $\sigma_{zul} =$ Dauerwechselfestigkeit; für sehr oft wechselnde Belastung etwa die Hälfte davon.

Einfluß der Zeit. Stoßweise Beanspruchung. Jeder Körper, der durch Kräfte beansprucht wird, erleidet eine Formänderung, zu deren Ausbildung eine gewisse Zeit erforderlich ist. Bis jetzt war vorausgesetzt, daß die Belastung „allmählich“, d. h. so langsam gesteigert werde, daß zu jeder Zeit Gleichgewicht zwischen Kraft und Formänderung vorhanden ist. Eine solche Formänderung kann als statische bezeichnet werden. Wird nun dem Körper zur Formänderung nicht genügend Zeit gelassen, so müssen sich ähnliche Erscheinungen bemerkbar machen, wie beim Hindern der Querkontraktion, d. h. es wird eine Erhöhung der Bruchfestigkeit eintreten.

Flußeisen:	Dauer des Versuches	2,5 min	$K_z = 3925$ at.
		75 "	3700 "
Kupfer:		2 "	1480 "
		lang "	820 "

Man schreibt deshalb, um brauchbare Vergleichswerte zu erhalten bei der Materialprüfung
ten Bosch, Maschinenelemente. 2. Aufl.

von Leder und Textilfasern, eine bestimmte Streckgeschwindigkeit vor. Bei höheren Betriebstemperaturen hat diese Frage auch für Eisen praktische Bedeutung: die Beobachtung zeigt, daß Eisen unter dauernd wirkender Belastung dann schon bei ziemlich kleinen Spannungen anfängt zu „kriechen“. Die Kriechgrenze ist aus dem einfachen Zugversuch bei dieser Temperatur nicht mit Sicherheit zu bestimmen. Jedenfalls erhalten wir bei rascher Belastung eine andere Spannungsdehnungslinie als beim gewöhnlichen Zugversuch. Diese Frage ist namentlich wichtig bei stoßweiser Belastung, die dadurch gekennzeichnet ist, daß dem Maschinenteil plötzlich eine bestimmte Energiemenge zugeführt wird, die sich in Formänderungsarbeit umsetzt. Das Integral $P \cdot d(\Delta l)$ ist dann über die dynamische Spannungsdehnungslinie zu integrieren¹. Bei einer dauernden Wiederholung der Stöße kann eine viel kleinere Stoßenergie den Stab zum Bruch bringen. Soll die Stoßenergie dauernd ertragen werden, dann darf der Wert, den die Formänderungsarbeit an der Elastizitätsgrenze hat, nicht überschritten werden.

Die Kerbzähigkeit. Es ist eine bekannte Erscheinung, daß manche Werkstoffe gegen statische Beanspruchung sehr widerstandsfähig sind, während sie durch geringfügige Stöße zerstört werden (Hartpech). So lassen sich unverletzte Eisenbahnschienen bei einem Biegeversuch fast so weit zusammenbiegen, daß die beiden Schenkel aufeinander zu liegen kommen; beim Stoßbiegeversuch bricht die Schiene dagegen ohne große Formänderung.

Wenn auch eigentliche Schlagarbeit nur bei wenigen Maschinen vorkommt (Schmiedehammer, Schwungrad- und Exzenterpressen), und man allgemein die Stoßwirkung nach Möglichkeit zu vermeiden oder zu mildern versucht, so treten doch bei allen Maschinen wechselnde Belastungen auf, die es sehr erwünscht erscheinen lassen, durch Versuche diejenigen Materialeigenschaften zu bestimmen, die dafür maßgebend sind.

In den Materialprüfanstalten hat dafür die sog. Kerbschlagprobe eine weite Verbreitung gefunden. Durch einen Pendelhammer wird die Schlagarbeit A gemessen. Das Probestück (Abb. 13.26), erhält eine Einkerbung, und wird durch einen einzigen Schlag gebrochen. Wenn mit b die Breite, mit h die Höhe des Querschnittes an der Kerbstelle bezeichnet wird, so nennt man $Z = \frac{A}{bh}$ die Kerbzähigkeit [kgm/cm²] des Materials. Die Schlagarbeit wird also gleichmäßig über den Bruchquerschnitt verteilt gedacht, eine Annahme, die jedenfalls nicht zutrifft, und die sich wohl nur deshalb eingebürgert hat, weil die Spannungen beim Kerbschlagversuch so verwickelter Natur sind, daß eine genauere Verfolgung und Verwertung der Schlagarbeit nicht leicht möglich ist.

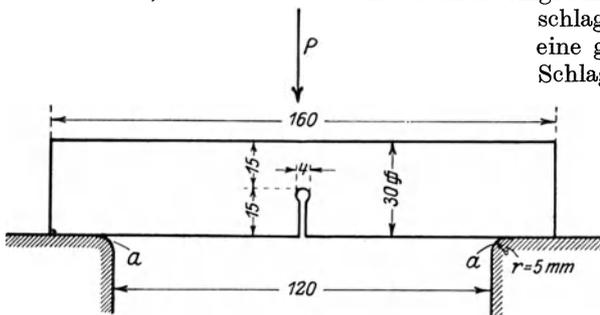


Abb. 13.26. Probestab für Kerbschlagproben aus Wawrziniok.

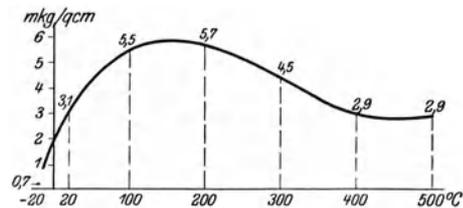


Abb. 13.27. Kerbzähigkeit von St. 37 bei verschiedenen Temperaturen (aus Bach-Baumann).

Gegen die Durchführung der Kerbschlagversuche in der beschriebenen Form ist in erster Linie einzuwenden, daß die Zerstörung eines Maschinenteiles durch einen einzigen Schlag praktisch kaum vorkommt, und daß ebensowenig wie die Bruchfestigkeit auch die so gefundene Kerbzähigkeit für den Konstrukteur maßgebend sein kann. Aber auch abgesehen davon, ist die Kerbzähigkeit in hohem Maße von der Form der Kerbe und des Stabes abhängig. Wenn sich z. B. der Lochdurchmesser im Probestab ändert von 1,3 auf 2, 3 und 4 mm, so ändert sich die Kerbzähigkeit von 0,83 auf 2,7, 4,64 und 5,94 kgm/cm².

Man muß natürlich eine strenge Normung der Probestäbe durchführen, um für verschiedene Werkstoffe brauchbare Vergleichswerte zu erhalten. Daß der gewöhnliche Zugversuch dazu nicht ausreicht, zeigt Abb. 13.27, worin die Kerbzähigkeit von St. 37 bei verschiedenen Temperaturen eingetragen ist. Auffallend ist die starke Abnahme zwischen +20 und -20° C, die nach dem Zugversuch nicht zu erwarten war². Darum hat der Kerbschlagversuch für die

¹ Plank, R.: Dynamische Zugbeanspruchung. Z. VDI. 1912 S. 17.

² Schwinning, W.: Die Festigkeitseigenschaften der Werkstoffe bei tiefen Temperaturen. Z. VDI. 79 (1935) S. 35/40.

Materialuntersuchung sicher seine Berechtigung. Professor Fillinger (Wien) hat durch Versuche nachgewiesen¹, daß die Kerbzähigkeit nach der Gleichung

$$Z = \frac{A}{b \cdot h} = \delta y + 2 \omega$$

in weiten Grenzen unabhängig von der Stabform wird. Hierin sind δ , die Schlagfestigkeit [kg/cm²] und 2ω , die Spaltfestigkeit [kg/cm] zwei neue Materialkonstanten (Abbildung 13.29).

Für sehr sprödes Material ist $\delta = 0$ und $Z = 2 \omega$. Für sehr zähes Material ist $2 \omega = 0$ und $Z = \delta y$.

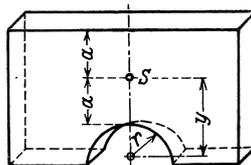


Abb. 13.28.

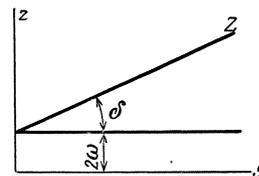


Abb. 13.29. Kerbzähigkeit nach Prof. Fillinger.

Schrifttum.

Dauerfestigkeit. Thum, A. und W. Buchmann: Dauerfestigkeit und Konstruktion. Mitt. d. Materialprüfungsanstalt der T. H. Darmstadt. Heft 1. 1932. — Oschatz, H.: Gesetzmäßigkeit des Dauerbruchs und Wege zur Steigerung der Dauerhaltbarkeit. Mitt. d. MPA. a. d. T. H. Darmstadt. Heft 2. 1933. — Thum, A. und W. Bautz: Steigerung der Dauerhaltbarkeit von Formelementen durch Kaltverformung. Mitt. d. MPA. a. d. T. H. Darmstadt. Heft 8, 1936. — Thum, A. und H. Ochs: Korrosion und Dauerfestigkeit. Mitt. d. MPA. a. d. T. H. Darmstadt. Heft 9 1937. VDI-Verlag mit 139 Literaturangaben. — Graf, O.: Die Dauerfestigkeit der Werkstoffe und der Konstruktionselemente. Berlin: Julius Springer 1929. — Zander, W.: Der Einfluß von Oberflächenbeschädigungen auf die Biegeschwingungsfestigkeit. NEM-Verlag Berlin 1928. — Moore, H. F. und J. B. Koppers: The Fatigue of metals. Mc. Graw-Hill Book Co. New York 1927. — Herold, W.: Wechselfestigkeit. Berlin: Julius Springer 1934. — Kaufmann, E.: Wechselfestigkeit. Berlin: Julius Springer 1931. — Mailänder, R. und W. Bauersfeld: Einfluß der Probengröße und Probenform auf die Dreh-Schwingungsfestigkeit von Stahl. Techn. Mitt. Krupp. (1934) S. 143. — Bollenrath, F., H. Cornelius und W. Siedenburg: Einfluß der Querschnittsform auf die Dauerfestigkeit von weichem Flußstahl. Luft-Forschung 15 (1934) S. 214/217. — Fischer, E.: Das Verhalten von Werkstoffen gegenüber schnellverlaufender Drehungsbeanspruchung. Diss. T. H. Dresden 1937. — Koppers, J. B.: Overstressing and understressing in fatigue. Engg. 143 (1937) S. 620/22 und 676/78. — Bollenrath, F.: Zeit- und Dauerfestigkeit der Werkstoffe. Jahrb. Deutsch. Luftfahrtforschung. 1938. Erg.-Bd. S. 147/157. — Armbruster, E.: Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit auf den Spannungsverlauf und die Schwingungsfestigkeit. VDI-Verlag 1931. — Barner, G.: Der Einfluß von Bohrungen auf die Dauerzugfestigkeit von Stahlstäben. VDI-Verlag 1931. — Graf, O.: Dauerfestigkeit von Stählen mit Walzhaut, ohne und mit Bohrung, von Niet- und Schweißverbindungen. VDI-Verlag 1931. — Seeger, G.: Wirkung der Druckvorspannungen auf die Dauerfestigkeit metallischer Werkstoffe. VDI-Verlag 1935.

Sicherheit und zulässige Spannung. Volk, C.: Sicherheit und zulässige Spannung. Elektroschweißung 8 (1937) S. 173/75. — Thum, A.: Zur Frage der Sicherheit in der Konstruktionslehre. Z. VDI 75 (1931) S. 705. — Soderberg, C. R.: Factor of safety and working stresses. Trans. A. S. M. E. 52, I (1930) APM. 52—2 p. 13/28. — Buchmann, W.: Die Kerbempfindlichkeit der Werkstoffe. Forschung 6 (1935) S. 36/48. — Bock: Zulässige Spannungen der im Maschinenbau verwendeten Werkstoffe. Maschbau 9 (1930) S. 637 und 10 (1931) S. 66/83. — Garlepp, B.: Zulässige Spannungen und Dauerfestigkeit im Kran- und Verladebrückenbau. Masch.-Bau 10 (1931) S. 86/90.

13.3. Genormte Werkstoffe.

Die Vielseitigkeit der Faktoren, welche die Dauerfestigkeit beeinflussen, zwingt zu einer Einschränkung. Der Konstrukteur sollte deshalb „genormte“ Werkstoffe verwenden, deren Dauerfestigkeitswerte genügend genau bekannt sind. Die Werkstatt soll die Vergütungsvorschriften des Lieferanten genau beachten und einhalten.

Auswahl des Werkstoffes. Die Kenntnis der Eigenschaften der Werkstoffe, der Behandlung, der Bearbeitungs- und Verarbeitungsmöglichkeiten, sowie auch der Werkstoffprüfung vermittelt die mechanische Technologie. Diese Wissenschaft bildet deshalb eine wichtige Grundlage für den Maschinenbau, und ihre Bedeutung nimmt mit der Zunahme der Werkstoffsorten und mit der Vertiefung unsrer Kenntnisse in den Faktoren, die ihre Eigenschaften beeinflussen, immer mehr zu.

Bei der Auswahl des bestgeeigneten Baustoffes scheiden bei der Behandlung der Elemente alle diejenigen Faktoren aus, die nur durch genaue Kenntnis der Maschine richtig beurteilt werden können, so z. B. die Leitfähigkeit für elektrische, magnetische oder Wärmeströmungen (elektrische Maschinen), die Gefahr von Korrosionen (Kondensatoren, Maschinen für die chemische Industrie), das Rosten (Wasserpumpen) oder auch das spezifische Gewicht (bei allen beweglichen Maschinen) usw.

Aus der überaus großen Anzahl verschiedener Werkstoffe, die fast mit jeder gewünschten

¹ Schweiz. Bauztg. 1923 S. 275 u. 285.

Eigenschaft hergestellt und verkauft werden, kann die Maschinenfabrik aus wirtschaftlichen Gründen nur wenige, für ihren Betrieb „normale“ Werkstoffe wählen und auf Lager halten. Der Konstrukteur wird sich im allgemeinen an diese Sorten halten müssen, denn es lohnt sich niemals, für vereinzelte Teile eine besondere Legierung herzustellen oder ein kleines Stück hochwertigen Spezialstahles zu kaufen.

Der Konstrukteur wird seine Wahl meist nach den Beanspruchungen treffen, die in dem Maschinenteil auftreten. Als Regel gilt dabei, daß er keinesfalls eine höhere Werkstoffqualität vorschreiben darf als unbedingt erforderlich ist, denn mit steigender Güte nehmen naturgemäß auch die Anschaffungs- und Bearbeitungskosten zu.

Bezeichnung des Werkstoffes = Buchstaben \times erste \times zweite Zifferngruppe.

Die Buchstaben dienen zur Kennzeichnung,

z. B. St	= Stahl, auf flüssigem Wege gewonnenes schmiedbares Eisen,	
Stg	= Stahlguß,	Ms = Messing
Ge	= Gußeisen,	Cu = Kupfer, usw.
Te	= Temperguß	

Die erste Zifferngruppe gibt entweder die Mindestzugfestigkeit in kg/mm² (z. B. St. 50) oder den Legierungsbestandteil (z. B. St. C. 35 für 0,35 % C).

Die zweite Zifferngruppe besteht immer aus zwei Zahlen; die Zehnerzahl weist für Stahl auf eine der zehn Hauptgruppen.

1 Baustahl,	6 Sonderstahl,
2 Bleche, Rohre,	7 Werkzeugstahl,
3 Eisenbahnoberbaustoffe,	8 Stahlguß,
4 Fahrzeugbaustoffe,	9 Gußeisen (auch Temperguß).
5 Verschiedenes.	

Die Einerzahl gibt die Untergruppe an, die noch nicht für alle Hauptgruppen festgelegt sind.

z. B. 11 Maschinenbaustahl,	29 Rohre,
12 Formeisen, Stabeisen, Breiteisen,	61 Unlegierter Einsatz- und Vergütungsstahl,
13 Schraubeneisen, Nieteisen,	62 Ni- und Cr-Stähle.
21 Bleche,	

Die in den Normen (Zahlentafel 13.1) angegebenen Festigkeitseigenschaften gelten für gut durchgeschmiedeten oder gewalzten Stahl, der vom Rohblock aus auf mindestens ein Drittel seines Querschnittes heruntergearbeitet wurde und zwar für den ausgeglühten Zustand. Die Werkstoffe können im Anlieferungszustand durch Kaltbearbeitung, Vergüten usw. ganz andere Eigenschaften aufweisen (vgl. z. B. Abschn. 23.2, Schraubenstahl).

Ausglühen ist ein gleichmäßiges Erhitzen auf eine Temperatur kurz oberhalb des oberen Umwandlungspunktes und mit folgendem Erkaltenlassen in ruhiger Luft.

Härten. Unlegierter Stahl wird durch Erhitzen über seinen oberen Umwandlungspunkt und nachfolgendes Abschrecken in einer Härtingsflüssigkeit (Wasser, Öl) gehärtet. Die Härtingsfähigkeit wächst mit dem C-Gehalt; der Stahl wird durch die Härtung fester, aber auch spröder.

Einsetzen. Beim Einsetzen des Stahles wird gewöhnlich C-armen Stahl umgeben von kohlenstoffabgebenden Mitteln in der Nähe des oberen Umwandlungspunktes so lange geglüht, bis der Kohlenstoff bis zur gewünschten Höhe seines Gehaltes und bis zur beabsichtigten Tiefe in den Stahl eingedrungen ist. Härtet man alsdann den Stahl durch Abschrecken aus etwa 750° C, so wird nur die mit Kohle angereicherte Außenhaut hart. Je kleiner der C-Gehalt, um so zäher bleibt der Kern nach dem Abschrecken, aber um so höher ist im allgemeinen auch der Preis.

Vergüten. Das Vergüten erfolgt durch Härten mit darauffolgendem Wiedererwärmen (Anlassen) des Stahles bis höchstens an die Temperatur des unteren Umwandlungspunktes. Die Zähigkeit (vor allem die Kerbzähigkeit) nimmt zu. Durch das Vergüten tritt eine Kornverfeinerung ein. Die in der Zahlentafel unter „vergütet“ angeführten Werte werden durch Abschrecken aus 30—50° C oberhalb des oberen Umwandlungspunktes mit darauf folgendem Anlassen bis auf etwa 600° C erreicht. Gewöhnlich wird weniger hoch angelassen und die erreichbaren Zahlenwerte sind dann andere; insbesondere liegen die Werte der Streckgrenze und der Zugfestigkeit dann höher (Abb. 13.21).

Zahlentafel 13.1. Festigkeitswerte von Stahl, geschmiedet oder gewalzt, unlegiert.

Bezeichnung	Reinheit	Zustand	mittlere Analyse nicht bindend	Zug- festigkeit K_z kg/mm ²	Dehnung δ_{10} %	Brinelle- Härte H kg/mm ²	Kerb- Zähigkeit kg/cm ²	Eigenschaften	Verwendung
St 00 11 12 21 29	A		Ohne Angaben von mechanischen Eigenschaften					weder kalt- noch rotbrüchig	Handelsware nur für untergeordnete Zwecke
St 34 11 12 13 29	B		C = 0,12	34 ÷ 42 34 ÷ 42 34 ÷ 42 34 ÷ 45	25 20 ÷ 15 ³ 25 ÷ 18 ³ 20			leicht bearbeit- bar feuerschweißbar	
St 37 11 12 21 29	A			37 ÷ 45	20 20—18 ³ 20			schweißt nicht immer gut und zuverlässig	Baustahl, Formeisen Stabeisen Breiteisen Baublech I Rohre } (übliche Güte)
St 38.13	B		C = 0,06 ÷ 0,13	38 ÷ 45	20 ÷ 15 ³		8		Schraubeneisen, Nieteisen
St C 10.61	B	w g	Mn < 0,5 Si < 0,35	38 ¹ 56	25			Einsatzstahl	Eingesetzt für Zapfen, Bolzen, Büchsen
St 42 11 12 21	B		C = 0,25	42 ÷ 50	20 20 ÷ 16 ³				Baustahl, Formeisen u. Baublech II
St C 16.61	B	w	C = 0,1 ÷ 0,18 Mn < 0,4 Si < 0,35	42 ¹	23			Einsatzstahl, wenn Kern be- reits hart sein darf	Eingesetzt für Zapfen, Bolzen, Büchsen
St C 25.61	B	w v	C = 0,25 Mn < 0,8 Si < 0,35	42 ÷ 50 47 ÷ 55	22 20	÷ 125 ÷ 142		Vergütungs- stahl	Abb. 13.20
St C 25.29	B			45 ÷ 55	17	÷ 142			Rohre (Abb. 13.20), Zahlentafel 13.3
St 50.11	B			50 ÷ 60	18	125 ÷ 150	6		Wellenstahl, Hebel, Stangen, Schrauben
St 55.29	B			55 ÷ 65	14				Rohre, Zahlentafel 13.3
St C 35.61	B	w v		50 ÷ 60 55 ÷ 65	19 18	÷ 150 ÷ 142	7	Vergütungs- stahl	Schrauben
St 60.11	B			60 ÷ 70	14	150 ÷			Wellenstahl, Kolben- stangen, Steuerhebel, Keile f. höher beanspr. Teile, Paßstifte
St C 45.61	B	w v		60 ÷ 70 65 ÷ 75	16 15	150 ÷ ÷ 230		Vergütungs- stahl	
St 65.29	B			65 ÷ 80					
St 70.11	B			70 ÷ 85	10	180 ÷			Ritzel, Schnecken
St C 60.11	B	w v		70 ÷ 85 75 ÷ 90	13 12	180 ÷ 200 ÷ 260		Vergütungsstahl Hoch härtbar Bearbeitg. teuer	

¹ Mindestwerte. ² Am Kurzstab $\delta_5 \sim 1,25 \delta_{10}$. ³ Je nach Probedicke.

Reinheit: A = ohne Zahlenangaben über Ph- und S-Gehalt,
B = Ph und S je < 0,06%; Ph + S < 0,1%.

w = weich, ausgeglüht
g = blank gezogen
v = vergütet

NB.: Die Stähle St 34 ÷ 70 werden im allgemeinen nicht eingesetzt und vergütet. Einsatz- und Vergütungsstähle erhalten die Bezeichnung St C 10 ÷ C 60.

Zahlentafel 13.2. Nickel- und Chromnickelstahl für mechanisch hoch beanspruchte Teile.

Bezeichnung N = Nickel C = Chrom w = weich h = hart	Geglüht		Gehärtet bzw. vergütet			Chemische Zusammensetzung in %					
	Brinell- härte H kg/mm ² höchst.	Zug- festig- keit kg/mm ² höchst.	Zug- festigkeit K _Z kg/mm ²	Streck- grenze σ _S kg/mm ²	Bruch- dehnung %	C	Ni	Cr	Mn	Si höchst.	
E = Einsatzstähle											
EN 15	162	55	60—80 Wasser	39—52	20—10	0,10—0,17	1,5	höchstens 0,2	höchstens 0,5	0,35	
ECN 25	206	70	80—100 Öl 90—110 Wasser	42—70 Öl 67—82 Wasser	20—14 Öl 16—10 Wasser	0,10—0,17	2,5	0,75±0,2	höchstens 0,5	0,35	
ECN 35	220	75	90—120 Öl	67—90	16—9	0,10—0,17	3,5	0,75±0,2	höchstens 0,5	0,35	
ECN 45	240	83	120—140 Öl	90—105	14—7	0,10—0,17	4,5	1,1±0,2	höchstens 0,5	0,35	
V = Vergütungsstähle											
VCN 15	w	206	70	65—75	42—49	24—18	0,25—0,32	1,5	0,5	0,4—0,8	0,35
	h			75—85	52—59	22—16	über 0,32—0,40				
VCN 25	w	220	75	70—85	49—59	20—14	0,25—0,32	2,5	0,75	0,4—0,8	0,35
	h			80—95	56—66	16—10	über 0,32—0,40				
VCN 35	w	235	80	75—90	56—67	20—14	0,20—0,27	3,5	0,75	0,4—0,8	0,35
	h			90—105	67—69	16—10	über 0,27—0,35				
VCN 45		265	90	100—115	80—92	15—9	0,30—0,40	4,5	1,3	0,4—0,8	0,35

Die Härte ist eine für die praktische Verwendung des Werkstoffes sehr wichtige Eigenschaft. Härte im Sinne des täglichen Lebens ist ein schwer zu bestimmender Begriff, der sich einer genauen mathematischen Umfassung entzieht. Man nennt denjenigen von zwei Körpern den härteren, der dem Eindringen eines dritten Körpers den größeren Widerstand entgegensetzt. Wichtig ist dabei, daß nur bleibende Formänderungen beobachtet werden, also die Elastizitätsgrenze überschritten wird; die Festigkeitslehre reicht deshalb zur genaueren Beschreibung des Härtebegriffes nicht aus. Die älteste Unterscheidung erfolgte nach dem Ritzverfahren, das aber ungenau ist, denn man kann mit einem scharf zugespitzten Körper selbst einen etwas härteren Stoff ritzen. Um zu einem genaueren Härtemaß zu gelangen, muß eine Vereinbarung über die geometrische Gestalt der Körper getroffen werden. Der schwedische Ingenieur Brinell, der die Härteprüfung in der Praxis eingeführt hat, drückt eine Stahlkugel von 1 cm Durchmesser auf die Metallplatte, deren Härte man untersuchen will. Als Härtezahlgilt die auf 1 mm² der Eindruckfläche kommende Last¹.

Die Härte ist namentlich zur Beurteilung der Abnutzung wichtig. Wenn zwei Teile ohne ausreichende Schmierung aufeinander gleiten, so ist eine Abnutzung unvermeidlich. Der Konstrukteur verlegt diese dann auf einen möglichst einfachen Teil aus weicherem Metall, der leicht ersetzt werden kann (z. B. Lagerbüchsen).

Zahlentafel 13.3. Warmstreckgrenze kg/mm².

Werkstoff	100°	150°	200°	250°	300°	350°
St 35.29	22	20,5	19	17	15	13
St 45.29	25	23	21	19	17	15
St 55.29	28	25,5	23	21	19	17

Die Dauerstandfestigkeit der Werkstoffe, die niedriger liegt als die Zugfestigkeit, aber höher als die Streckgrenze, ist besonders bei höheren Temperaturen wichtig für die Verwendungsmöglichkeit (Zahlentafel 13.4).

¹ Seither haben sich auch andere Verfahren eingeführt. Für die Umrechnung der verschiedenen Härteziffern. Vgl. Masch-Bau (1933), Heft 3.

Gußeisen gilt namentlich wegen des zufälligen Auftretens von Lunkern an hochbeanspruchten Stellen oft als ein wenig zuverlässiger Werkstoff. Wenn auch gut eingerichtete Gießereien in der Lage sind, einwandfreien und hochwertigen Guß herzustellen, so sollte Gußeisen doch nicht für Teile verwendet werden, die fast ausschließlich auf Zug beansprucht sind oder durch deren Bruch Menschenleben gefährdet werden können (Hebezeuge). In solchen Fällen darf die zulässige Zugspannung für Gußeisen 100 at nicht wesentlich überschreiten, während für Stahl 10 mal größere Spannungen, d. h. 10 mal kleinere Querschnitte zulässig sind.

Zahlentafel 13.4. Dauerstandsfestigkeitszahlen¹ in kg/mm² legierter Stähle bei Temperaturen von 350—600°.

Werkstoff	400°	450°	500°	550°	600°
Sieromal 8	26,0	21,0	15,0	8,8	4,0
Cr-Mo-St.	21,0	19,0	16,0	7,0	2,0
Cu-Mo-C _{0,15} -St.	15,0	13,8	12,0	6,3	
Cu-Mo-St 38—45 kg/mm ²	14,0	12,0	9,0	4,0	2,0
Cu-Mo-St 45—55 kg/mm ²	17,0	15,0	12,0	5,0	
Stg 38.81	9,0	7,0	4,5		
Stg 45.81	13,0	11,0	9,0		
Pygnos-Stg.			10,0		

Wird Gußeisen längere Zeit auf Temperaturen oberhalb etwa 350° C erhitzt, so tritt in seinem Gefüge eine Umwandlung ein, da das Eisenkarbid unter Ausscheidung von Graphit zerfällt. Dieser Vorgang ist mit einer Volumenzunahme verbunden; man sagt das Gußeisen wächst. Die Längenzunahme kann mehrere Prozent betragen und kälter bleibende Teile sprengen. Man verwendet deshalb für Temperaturen über 350° C immer Stahlguß.

Zahlentafel 13.5. Gußeisen und Stahlguß.

Bezeichnung	Spez. Gewicht	E	Biege-	Bruch-	Brinell-	Streck-	Wechsel-	Spez.-Arbeits-
	γ		festig-	deh-	härte	grenze	festig-	
	kg/dm ³	kg/mm ²	k _b	nung	H	σ_s	keit	σ_p
¹ Zugfestigkeit in kg/mm ²			kg/mm ²	δ_s	%	kg/mm ²	kg/mm ²	kg/mm ²
Gußeisen:								
Maschinenguß Ge 12 ¹	7,26 ÷ 7,30	7000—10000				170		0,07 ÷ 0,13
Zylinderguß Ge 14			28		180	7		
Ge 18			34		195			
Ge 22			40		210			
Ge 26			46		225			
Stahlguß								
Stg 38	7,85	20 500		20		18		7
Stg 45				16		22	18	
Stg 52				12		25	23	

Zahlentafel 13.6. Nichteisen-Metalle, gewalzt.

Bezeichnung	γ	E	K _z	δ_s %	σ_s	σ_e	σ_p	Verwendung
² Die Zahl gibt den Cu-Gehalt an	kg/dm ³	kg/mm ²	kg/mm ²		kg/mm ²	kg/mm ²	kg/cm ²	
Kupfer:								
ausgeglüht	8,9	11 500	25	50	5 ÷ 8	3	1,1	Blech und Stangen
kalt gezogen			39	6		25		
Messing:								
Ms 58. Hartmessing ²	8,5	8 000	bis 70	bis 2	6			Stangen Drähte Bleche Schraubmessing für Rohre für Ziehzwecke Turbinenschaufeln
Ms 60. Münzmetall								
Ms 63. Druckmessing			30	35				
Ms 72. Schaufelmessing	8,6		25 ÷ 50	35 ÷ 10				
Walzbronze:								
geglüht	8,73		40	50				Stangen Drähte Bleche
halbhart			50	15				
hart			60	10				
federhart			80	5				
doppelfederhart			90	2				
Oerlikoner-Bronze:								
(Stahlbronze)		12 000	44 ÷ 56	15 ÷ 25		18 ÷ 30		
(überschmiedet)								
Elektron	1,8		26 ÷ 38	2 ÷ 15	15 ÷ 34	6 ÷ 20		Flugzeugbau. Leichtmaschinenbau.

¹ Tofaute, W. und W. Ruttmann: Warmfeste Werkstoffe für Temperaturen bis zu 600° C. Die Wärme 60 (1937) S. 703/09.

Zahlentafel 13.7. Festigkeitseigenschaften einiger Aluminium-Knetlegierungen. $\gamma=2,75$.
* Bei 10, 20 und 60 Millionen Lastwechsel.

Legierung	Elastizitätsgrenze	Streckgrenze	Zugfestigkeit	E	Brinellhärte	Dehnung	Wechselbiegefestigkeit		
	$\sigma_{0,02}$ kg/mm ²	$\sigma_{0,2}$ kg/mm ²	K_z kg/mm ²				$\sigma_{wb 10^*}$ kg/mm ²	$\sigma_{wb 20^*}$ kg/mm ²	$\sigma_{wb 60^*}$ kg/mm ²
Avional 22 M ∅ 23 mm	37,8	38,7	50,5	7240	112	15,3	19,0	17,7	15,8
Avional 411 ∅ 22 mm	34,3	39,8	46,0	6950	135	11,9	16,0	15,3	14,4
Avional D ∅ 35/22 mm	24,6	25,8	42,7	7050	—	22,7	17,4	16,4	15,0
Anticorodal A ∅ 22 mm	16,4	18,0	28,2	6950	82	23,0	12,1	11,2	9,7
Anticorodal B ∅ 22 mm	30,6	32,5	35,2	7060	110	10,4	11,8	10,8	9,3
Anticorodal B ∅ 35/22 mm	27,0	30,2	36,8	6900	113	13,3	16,2	15,3	14,0
	11,0	12,3	25,6	6800	55	14,0	13,5	13,0	12,3

Zahlentafel 13.8. Rotguß und Messingguß.

Bezeichnung	Spez. Gewicht	E	Zugfestigkeit	Bruchdehnung	Brinellhärte	Streckgrenze	Wechselfestigkeit	Spez. Arbeitsvermögen
	γ kg/dm ³		K_z kg/mm ²	δ_s %				
Rotguß								
Maschinenbronze	7,8 ÷ 8,2	9000	16 ÷ 20	20 ÷ 6				0,23
Phosphorbronze			35 ÷ 45	30 ÷ 10				
Messingguß	8,5	8000	15	13				

Zahlentafel 13.9. Festigkeitswerte einiger Aluminium-Sandguß-Legierungen (1, 10, 20 Millionen Lastwechsel) aus: von Zeerleder, A.: Technologie des Aluminiums, S. 81. Leipzig 1938.

Legierung	Streckgrenze	Zugfestigkeit	Brinellhärte	Dehnung	Wechselbiegefestigkeit			Bemerkungen
	$\sigma_{0,2}$ kg/mm ²	K_z kg/mm ²			$\sigma_{wb 1}$ kg/mm ²	$\sigma_{wb 10}$ kg/mm ²	$\sigma_{wb 20}$ kg/mm ²	
Anticorodal	12,0	15,0	65	2,0	8,7	7,0	6,7	unausgehärtet
Alufont II	12	16,5	—	1,6	9,4	8,4	8,2	unausgehärtet
Alufont II	22	27	85	1,5	10,1	9,1	8,9	geglüht u. abgeschreckt
Alufont II	31	33	105	0,8	~11,5	8,8	8,2	geglüht u. abgeschreckt, 12 Std. warmgehärtet
Alufont hart	25,3	25,3	115	9	7,1	6,0	5,8	geglüht u. abgeschreckt
Silumin	7,8	15,3	63	1,5	6,0	5,0	4,6	unveredelt

14. Der Umdrehungskörper.

Neben der in Abschn. 12 behandelten Berechnung von stabförmigen Körpern, müssen im Maschinenbau Umdrehungskörper, wie Hohlzylinder, Scheiben, Platten, Flanschen, Schalen usw. berechnet werden.

Definitionen: Eine Platte ist ein Körper, der durch zwei benachbarte ebene Flächen begrenzt ist und durch quer zur Mittelebene wirkende Kräfte beansprucht wird. Die durch ein System von Kräften, nur in ihrer Ebene verzerrte (nicht verbogene) Platte heißt Scheibe.

Eine Schale ist ein plattenförmiger Körper, dessen Mittelebene im unbelasteten Zustand gewölbt ist.

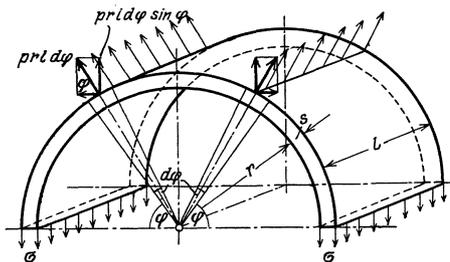


Abb. 14.1.

14.1. Dünnwandige Hohlzylinder.

Besonders einfach ist die Berechnung von dünnwandigen Zylindern unter Druck (Abb. 14.1) solange wir annehmen dürfen, daß die Spannungen gleichmäßig über die Wandstärke verteilt sind.

Da der Druck in einer ruhenden Flüssigkeit nach allen Richtungen gleich groß ist, ist der Gesamtdruck

auf die abgetrennte Zylinderhälfte gleich dem Druck auf der Mittelebene, also

$$P = p \cdot l \cdot D \tag{14.1}$$

unabhängig von der Form des Gefäßes; p ist der Überdruck in atü. Aus der Gleichgewichtsbedingung folgt dann:

$$p \cdot l \cdot D = 2 s \cdot l \cdot \sigma_t$$

$$\sigma_t = p \cdot D / 2 s \text{ (Kesselformel) .} \tag{14.2}$$

Für den geschlossenen Zylinder folgt die Hauptspannung in axialer Richtung in ähnlicher Weise zu:

$$\sigma_x = \frac{\pi}{4} D^2 p / \pi D s = p D / 4 s; \tag{14.3}$$

sie ist nur halb so groß wie in tangentialer Richtung¹. Die dritte Hauptspannung (radial) ist am Innenrand des Zylinders gleich $-p$ atü und außen gleich -1 at. Die axiale Spannung ist also die mittlere Hauptspannung. Streng genommen, gibt demnach die Kesselformel nicht die größte Beanspruchung (nach Mohr). In den Normen für die Berechnung der Wandstärken zylindrischer Kessel

$$s = \frac{p D_i}{2 \sigma_{zul}} + 0,1 \text{ cm} \tag{14.4}$$

ist noch ein Zuschlag von 1 mm vorgesehen, um Abrostungen zu berücksichtigen. Die im Kesselbau zulässigen Spannungen sind durch behördliche Vorschriften festgelegt. Das Kesselblech darf keine geringere Zugfestigkeit als 34 kg/mm² und in der Regel keine größere als 51 kg/mm² haben und soll folgende Dehnungen aufweisen:

	Feuerblech			Mantelblech I			Mantelblech II		
$K_z =$	34	35	36	37—41	42	43	44	45	46—51 kg/mm ² ,
Bruchdehnung =	28	27	26	25	24	23	22	21	20 % .

Für Feuerblech ($K_z = 34$ bis 41 kg/mm²) darf nur mit 36 kg/mm², für Mantelblech I (40 bis 47 kg/mm²) nur mit 40 kg/mm² und für Mantelblech II (44 bis 51 kg/mm²) nur mit 44 kg/mm² gerechnet werden. Die Angabe der Grenzwerte, die um je 7 kg/mm² auseinander liegen, ist dadurch bedingt, daß bei Blechtafeln von bedeutender Größe wesentliche Unterschiede in den Festigkeitseigenschaften vorkommen können.

Der Sicherheitsfaktor = $\frac{\text{Bruchfestigkeit}}{\text{zulässige Spannung}}$ ist für die

	Handnietung	Maschinennietung
bei Überlappung	4,75	4,5
bei Lasche	4,25	4,0

In einiger Entfernung von den durch Böden versteiften Enden, dehnt sich der Zylinder radial um den Betrag Δr ; der gespannte Umfang ist $2 \pi (r + \Delta r)$. Da die ursprüngliche Länge des Umfanges = $2 \pi r$ war, so hat der Ring sich um den Betrag $2 \pi \Delta r$ gedehnt. Aus der Definition der Dehnung folgt, mit dem Hookeschen Gesetz: $\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{2 \pi \Delta r}{2 \pi r} = \frac{\sigma}{E}$ oder

$$\Delta r = \frac{\sigma}{E} r . \tag{14.5}$$

Der Zylinder dehnt sich in radialer Richtung genau so, als ob die Spannung σ in einem radialen Stab wirken würde. Diese Gleichung kann z. B. auch für die Berechnung von Schrumpfringen (Radbandagen) verwendet werden. Diese werden in der Praxis meist mit einem Schrumpfmaß $\Delta r/r = 0,001$ ausgeführt; daraus folgt für Stahl die Spannung $\sigma = 21$ kg/mm².

Die gleichen Überlegungen können auch auf die Berechnung schwach gewölbter Böden angewandt werden, solange diese keine Biegesteifigkeit aufweisen, wie z. B. eine Seifenhaut, ein Membran oder Ballonhülle. Am Rande eines Flächenelementes $dy \cdot dz$ der Seifenhaut (Abb. 14.2) wirken die Spannungen S für die Längeneinheit, unabhängig von der Gestalt der Fläche. Die Zugkraft längs der Kante dz ($S \cdot dz$) hat eine Komponente in der X -Richtung gleich $-S dz \cdot \partial_x / \partial_y$, da für den kleinen Neigungswinkel φ , $\sin = \text{tg}$ gesetzt werden kann. An der gegenüberliegenden Kante wirkt die gleiche Kraft aber mit entgegengesetztem Pfeil und unter einem um $d\varphi = \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} dy$ größeren Winkel. Für das

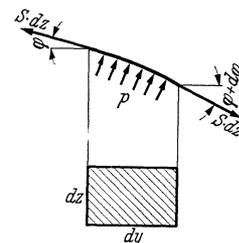


Abb. 14.2.

¹ In kugelförmigen Gefäßen ist die tangentielle Spannung in allen Richtungen gleich $p D / 4 s$.

Gleichgewicht in der X -Richtung kommt es daher nur auf den Unterschied $S dz \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} dy$ an. In ähnlicher Weise findet man für die Kanten dy als X -Komponente: $S dy \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} dz$.

Demgegenüber wirkt der Druck p auf die Fläche $dy \cdot dz$, so daß die Gleichgewichtsbedingung lautet:

$$S \cdot dy \cdot dz \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) = p \cdot dy dz$$

oder

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = p/S. \quad (14.6)$$

Einwirkung der Fliehkräfte. Wenn ein freischwebender Ring mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$ gedreht wird, so dehnen die Fliehkräfte den Ring. Unter der Voraussetzung, daß die Höhe des Ringes — in radialer Richtung gemessen — klein im Verhältnis zum Radius ist, kann eine einfache Gleichung für die im Ring entstehende Spannung abgeleitet werden. Schneidet man ein unendlich schmales Element heraus (Abb. 14.3), so ist für dasselbe die Fliehkraft $dZ = dm r \omega^2$ und $dm = \frac{\gamma}{g} f r d\varphi$, wenn f die Querschnittsfläche des Ringes ist.

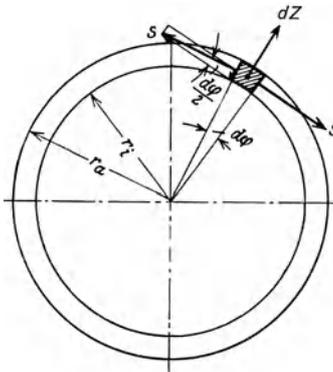


Abb. 14.3. Zur Berechnung der Spannungen in rotierenden Ringen.

oder

$$dZ = \frac{\gamma}{g} r^2 \omega^2 f d\varphi.$$

Aus Symmetriegründen muß der Ring sich nach allen Richtungen gleich dehnen: die Kräfte S sind also Normalkräfte. Die Gleichgewichtsbedingung in radialer Richtung lautet:

$$2 S \sin \frac{d\varphi}{2} = S d\varphi = dZ = \frac{\gamma}{g} r^2 \omega^2 f d\varphi$$

$$\sigma_u = \frac{S}{f} = \frac{\gamma}{g} r^2 \omega^2 = \frac{\gamma}{g} u^2, \quad (14.7)$$

da die Umfangsgeschwindigkeit $u = \omega \cdot r$ ist.

Die Zugspannung hängt demnach nur vom spezifischen Gewicht des Werkstoffes und von der Umfangsgeschwindigkeit ab; sie ist an jeder Stelle des Ringes gleich groß. Die radiale Dehnung folgt aus Gl. (5.)

14.2. Der ringsum symmetrisch belastete Umdrehungskörper.

Jede Meridianebene ist eine Symmetrieebene sowohl hinsichtlich der Gestalt als auch der Belastung. Es können darin deshalb keine Schubspannungen und nur die Normalspannungen σ_t übertragen werden. Aus den Gleichgewichtsbedingungen zwischen den auf einem Volumenelement (Abb. 14.4) wirkenden Kräften folgen die Beziehungen: In der X -Richtung:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) r d\varphi dr - \sigma_x r d\varphi dr + \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\varphi dx - \tau r d\varphi dx = 0$$

oder

$$r \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \tau + r \frac{\partial \tau}{\partial r} = 0 = r \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} (r\tau). \quad (14.8)$$

In der R -Richtung:

$$\left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\varphi dx - \sigma_r r d\varphi dx - 2 \sigma_t r dx \sin \frac{d\varphi}{2} + \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial x} dx \right) r d\varphi dr - \tau r d\varphi dx = 0$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_r) - \sigma_t + r \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0. \quad (14.9)$$

Wirkt auf das Volumenelement noch die Fliehkraft $dZ = dm r \omega^2 = \frac{\gamma}{g} r^2 \omega^2 d\varphi dr \cdot dx$ so folgt aus der Gleichgewichtsbedingung in radialer Richtung:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \sigma_r) - \sigma_t + r \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 = 0. \quad (14.10)$$

Die elastische Formänderung des Umdrehungskörpers muß ebenfalls ringsum symmetrisch sein; sie wird daher durch zwei Funktionen $\xi(x, r)$ und $\rho(x, r)$, die die Verschiebungen irgend eines Punktes (x, r) angeben, vollständig beschrieben. Betrachten wir eine Faser $AB = ds$,

Abb. 14.5, so müssen, nach der Formänderung, die Punkte $A' B'$ wieder auf einem Kreis liegen. Daraus folgt die Dehnung in tangentialer Richtung:

$$\epsilon_t = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{A' B' - AB}{AB} = \frac{(r + \varrho) d\varphi - r d\varphi}{r d\varphi} = \frac{\varrho}{r}. \quad (14.11)$$

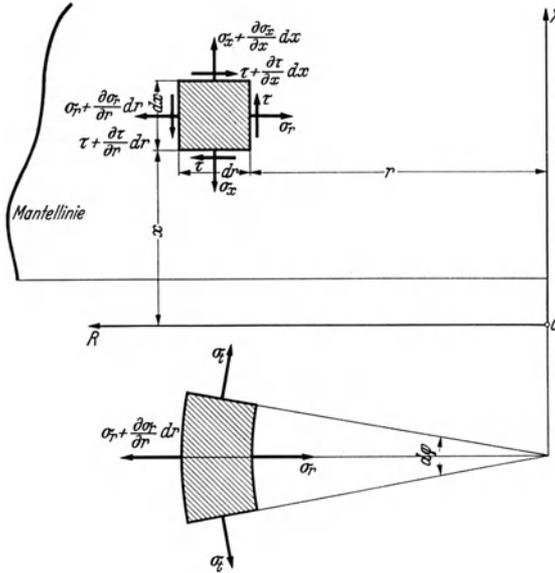


Abb. 14.4.

Weiter bestehen die Definitionen:

$$\epsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \epsilon_r = \frac{\partial \varrho}{\partial r}. \quad (14.12)$$

Wenn wir uns auf zylindrische Körper beschränken, die sich in der X -Richtung vollständig gleich verformen, so fallen in den Gl. (8) und (9 resp. 10) die τ -Werte

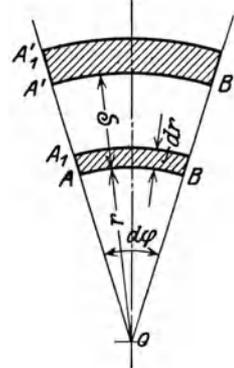


Abb. 14.5.

fort. Wir erhalten dann die einfachere Beziehungen:

$$r \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0, \quad (14.13)$$

d. h. σ_x ist unabhängig von x , also konstant.

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \sigma_r) - \sigma_t = 0, \quad \text{oder} \quad \sigma_t - \sigma_r = r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \quad (14.14)$$

resp.

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \sigma_r) - \sigma_t + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 = 0. \quad (14.15)$$

14.3. Dickwandige Hohlzylinder unter Druck.

Wegen der symmetrischen Beanspruchung bleiben die Querschnitte bei der Verformung eben. In der X -Richtung muß also $E \epsilon_x = \sigma_x = \frac{\sigma_t + \sigma_r}{m}$ konstant sein. Da σ_x konstant ist, folgt daraus:

$$\sigma_t + \sigma_r = \text{konst.} = 2 A. \quad (14.16)$$

Durch Subtraktion (16) — (14) erhält man:

$$2 A - 2 \sigma_r = r \frac{d \sigma_r}{d r} \quad \text{oder} \quad \frac{2 d r}{r} = \frac{d \sigma_r}{A - \sigma_r}$$

und nach Integration: $2 \ln r + \ln (A - \sigma_r) = \text{konst.}$ oder $r^2 (A - \sigma_r) = B$, also

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} \quad \text{und} \quad \sigma_t = A + \frac{B}{r^2} \quad (14.17)$$

Die radialen und die tangentialen Spannungen haben einen hyperbolischen Verlauf. Die Konstanten A und B sind aus den Grenzbedingungen zu bestimmen.

Spezialfall 1: Nur Innendruck. Dann ist:

$$\text{für } r = r_i, \quad \sigma_r = -p = A - \frac{B}{r_i^2}$$

$$\text{für } r = r_a, \quad \sigma_r = 0 = A - \frac{B}{r_a^2},$$

woraus

$$A = p \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \quad \text{und} \quad B = A r_a^2 = p \frac{r_i^2 r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}.$$

Damit wird die tangentielle Spannung:

$$\sigma_t = p \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_a^2}{r^2} \right), \quad (14.18)$$

sie ist immer positiv. Die radiale Spannung

$$\sigma_r = p \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_a^2}{r^2} \right) \quad (14.19)$$

ist immer negativ. Für $r = r_i$ und $r_a/r_i = a$ ist

$$(\sigma_t)_{\max} = p \frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} = p \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1}, \quad (14.20)$$

d. h.: die größte Zugspannung tritt an der inneren Wandfläche auf und ist tangential gerichtet.

Aus der Spannungsverteilung in Abb. 14.6 ist zu sehen, daß die äußeren Fasern nur wenig zur Festigkeit beitragen. Darum ist leicht zu verstehen, daß außen angebrachte Rippen wenig oder gar nichts nützen¹.

Mit den Werten von σ_r und σ_t für $r = r_i$ folgt aus Gl. (12.59) die radiale Erweiterung an der Innenseite eines offenen Zylinders ($\sigma_x = 0$, $\sigma_y = \sigma_t$, $\sigma_z = \sigma_r$):

$$\varepsilon_t E = \sigma_t - \frac{1}{m} \sigma_r = \frac{p}{r_i} E = p \left[\frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{1}{m} \right] = p \left(\frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} + \frac{1}{m} \right). \quad (14.21)$$

Diese Gleichung bildet die Grundlage für die Berechnung von Schrumpfringen.

Je nach der Bruchhypothese, von der ausgegangen wird, erhält man verschiedene Gleichungen für die Berechnung des Hohlzylinders. Für die maximale Dehnungshypothese darf die reduzierte Spannung $\sigma_{\text{red}} = \left(\sigma_t - \frac{1}{m} \sigma_r \right)$ den Grenzwert k nicht überschreiten. Werden die Werte

von σ_t und σ_r darin eingesetzt, so erhält man mit $\frac{r_a}{r_i} = a$ für die Innenseite:

$$p \frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{p}{m} = \sigma_{\text{zul}} = k \quad \text{oder} \quad p a^2 + p = k a^2 - k - \frac{p}{m} a^2 + \frac{p}{m}, \quad (14.22)$$

$$\text{woraus} \quad \frac{r_a}{r_i} = a = \sqrt{\frac{k + \frac{m-1}{m} p}{k - \frac{m+1}{m} p}} \quad \text{und mit } m = \frac{10}{3}: \quad a = \frac{r_a}{r_i} = \sqrt{\frac{k + 0,7 p}{k - 1,3 p}} \quad (14.23)$$

(Gleichung von Grashof).

Die „Hütte“ gab seit Jahren eine andere Formel zur Berechnung dickwandiger Hohlzylinder², die auch von der maximalen Dehnung als Bruchgefahr ausgeht, aber voraussetzt, daß auch in der Längsrichtung Kräfte wirken, wie es z. B. bei geschlossenen Gefäßen (Sauerstoffflaschen) oder bei doppeltwirkenden Maschinen der Fall ist. In diesem Fall ist

$$\sigma_x = \frac{\pi r_i^2}{\pi (r_a^2 - r_i^2)} p \neq 0 \quad \text{und die reduzierte Spannung: } \sigma_{\text{red}} = \sigma_t - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m},$$

Die Beanspruchung in der Längsrichtung des Zylinders hat eine Verminderung der tangentialen Dehnung zur Folge, so daß die Bruchgefahr in diesem Fall kleiner würde. Nach Einsetzen der Spannungen erhält man:

$$\frac{r_a}{r_i} = \sqrt{\frac{k + \frac{m-2}{m} p}{k - \frac{m+1}{m} p}} \quad \text{und mit } m = \frac{10}{3}: \quad a = \frac{r_a}{r_i} = \sqrt{\frac{k + 0,4 p}{k - 1,3 p}} \quad (\text{Hütte}). \quad (14.24)$$

¹ Vgl. die Versuche von Bach: Mitt. Forsch.-Arb. Heft 70.

² 25. Aufl. Bd. 1, S. 675.

Die maximale Hauptspannungshypothese wird in der französischen und zum Teil auch in der englischen Literatur verwendet:

$$(\sigma_t)_{\max} = p \frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} = \sigma_{\text{zul}} = k,$$

$$a = \frac{r_a}{r_i} = \sqrt{\frac{k+p}{k-p}} \quad (\text{Gleichung von Lamé oder Rankine.}) \quad (14.25)$$

Im allgemeinen haben wir einen räumlichen Spannungszustand mit den Hauptspannungen:

$$(\sigma_r)_i = -p, \quad (\sigma_t)_i = +p \frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \quad \text{und} \quad \sigma_x = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p.$$

Nach der Hypothese von Mohr spielt die, algebraisch genommene, mittlere Hauptspannung σ_x keine Rolle. Die maximale Schubspannung ist:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_t - \sigma_r) = \frac{p}{2} \left(1 + \frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \right) = p \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} = \frac{\sigma_{\text{zul}}}{2} = \frac{k}{2}$$

und

$$a = \frac{r_a}{r_i} = \sqrt{\frac{\tau}{\tau - p}}. \quad (14.26)$$

Schließlich folgt noch aus der Hypothese der Gestaltänderungsenergie:

$$A'_v = \frac{m+1}{3mE} \sigma^2 = \frac{m+1}{6mE} \{ (\sigma_t - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_t)^2 \} \quad (13.1)$$

für den geschlossenen Zylinder: $a = \sqrt{\frac{k}{k-p\sqrt{3}}} \quad (14.27)$

und für den offenen: $\frac{k}{p} = \frac{\sqrt{1+3a^4}}{a^2-1}. \quad (14.28)$

In Abb. 14.7 sind die verschiedenen Gleichungen für die Berechnung eines Hohlzylinders verglichen. Der Vergleich zeigt, welche bedeutende Unterschiede in den Wandstärken aus den einzelnen Bruchhypothesen folgt.

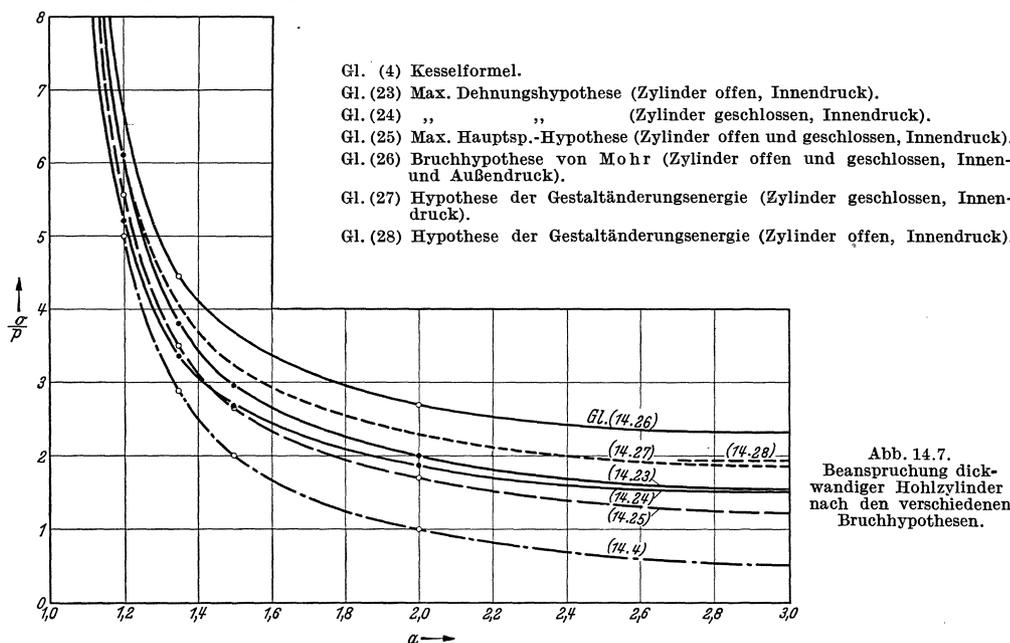


Abb. 14.7. Beanspruchung dickwandiger Hohlzylinder nach den verschiedenen Bruchhypothesen.

Zahlenbeispiel 14.1. Wie dick muß die Wandstärke eines gußeisernen Preßzylinders von 400 mm Bohrung für 220 at sein, wenn für den Werkstoff bei ungleichmäßiger Spannungsverteilung die zulässige Zugspannung 3 kg/mm² und die zulässige Druckspannung 9 kg/mm² beträgt?

Allerdings gilt für Gußeisen das Hookesche Gesetz nicht, so daß die theoretische Gleichung dafür ungültig ist. Versuche von Dr. Krüger¹ haben gezeigt, daß für Gußeisen die Spannungsverteilung etwas gleichmäßiger ist, als die Theorie ergibt, so daß gußeiserne Zylinder etwas mehr Innendruck aushalten.

Die größte Beanspruchung tritt an der Innenseite auf, wo $\sigma_t = +p \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1}$ und $\sigma_r = -p$ ist. Der Spannungskreis kann nur gezeichnet werden, wenn a bekannt wäre, d. h. die Aufgabe muß durch Probieren gelöst werden.

z. B. $a = 2,2$, $\sigma_t = 5,84/3,84 = 1,52 p$.

Der Mittelpunkt der Spannungskreise für alle Werte von p ist damit bestimmt; der Kreis, der die Grenzkurve berührt entspricht $p = 150 \text{ at}$.

$a = 2,5$, $\sigma_t = 7,25/5,25 = 1,38 p$ und $p_{\max} = 170 \text{ at}$,
 $a = 3$, $\sigma_t = 10/8 = 1,25 p$ und $p_{\text{zul}} = 180 \text{ at}$ (Abb. 14.8).

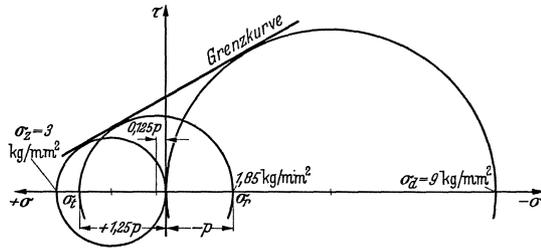


Abb. 14.8. Zum Zahlenbeispiel 14.1.

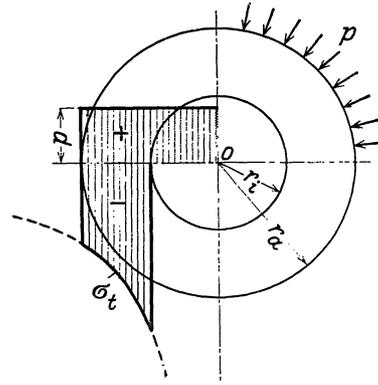


Abb. 14.9. Spannungsverteilung in dicken Hohlzylindern bei Außendruck.

Die Wandstärke $s = r_a - r_i$ muß also aber für 180 at gleich $2 r_i = 300 \text{ mm}$ sein! In diesem Fall ist es sicher zweckmäßiger, den Zylinder aus Stahlguß herzustellen.

Gerade bei der Berechnung dicker Rohre ist die Dehnungshypothese als Grundlage für die Berechnung noch weit verbreitet und besonders gefährlich (z. B. im Taschenbuch „Dubbel“, 7. Aufl. 1939). In der 25. Auflage der Hütte, Bd. I S. 676 war die Wandstärke dieses Zylinders mit dem viel zu hohen Wert von $\sigma_{\text{zul}} = 6 \text{ kg/mm}^2$ zu nur 96 mm berechnet!

Auch K. Laudin gibt in seinem bekanntesten Lehrbuch über Maschinenelemente, 5. Aufl. 1931 Bd. I S. 340 ein Zahlenbeispiel unter Benutzung der Dehnungshypothese und kommt zu viel zu kleinen Wandstärken.

Spezialfall 2. Nur außen Druck (Abb. 14.9). Die Randbedingungen lauten nun:

$$\text{für } r = r_i, \quad \sigma_r = 0 = A - \frac{B}{r_i^2} \quad \text{oder} \quad B = A r_i^2,$$

und

$$\text{für } r = r_a, \quad \sigma_r = -p = A - \frac{B}{r_a^2} = A \left(1 - \frac{r_i^2}{r_a^2} \right),$$

Mit diesen Werten von A und B wird:

$$\sigma_t = -\frac{p r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) < 0 \text{ (Druck)}, \quad \text{und} \quad \sigma_r = -p \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) < 0.$$

Die größte Spannung ist die tangentielle Druckspannung an der Innenseite der Wandung. Die drei Hauptspannungen sind dort:

$$(\sigma_t) = -2 p \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}, \quad (\sigma_r)_{r=r_i} = 0, \quad \sigma_x = 0 \text{ (Zylinder offen) oder } = -p \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \text{ (geschlossen).}$$

Die mittlere Hauptspannung ist in beiden Fällen σ_x , so daß der Spannungskreis gezeichnet werden kann². Für zähe Werkstoffe ist: $-\sigma_t = 2 p \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} = k = 2 \tau_{\text{zul}}$.

¹ Mitt. Forsch.-Arb. Heft 87.

² Die drei Hypothesen — maximale Dehnung für offene Zylinder, maximale Hauptspannung und maximale Schubspannung — geben hier das gleiche Resultat.

Nur für geschlossene Zylinder, unter alldseitigem Außendruck, erhält man nach der Dehnungshypothese eine andere Gleichung, da die reduzierte Spannung $\sigma_{\text{red}} = \sigma_t - \frac{\sigma_r + \sigma_x}{m}$ ist, woraus $\frac{r_a}{r_i} = \sqrt{\frac{k}{k - 1,7 p}}$.

Durch diese Formel, die noch in der „Hütte“, 25. Aufl. enthalten war, wird die Bruchgefahr unterschätzt.

woraus:
$$\frac{r_a}{r_i} = \sqrt{\frac{k}{k-2p}} = \sqrt{\frac{\tau}{\tau-p}}. \quad (14.29)$$

Für eine Vollwelle, $r_i = 0$, ist $(\sigma_t)_{\max} = -2p$.

Die radiale Verkürzung folgt aus der Gleichung: $E \frac{\rho_a}{r_a} = \left(\sigma_t - \frac{\sigma_r}{m}\right)$ für $r = r_a$ zu:

$$\frac{\rho_a}{r_a} = -\frac{p}{E} \left\{ \frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{1}{m} \right\}. \quad (14.30)$$

Für $r_i = 0$ (Vollwelle) ist:
$$\frac{\rho_a}{r_a} = -\left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{p}{E} = -0,7 \frac{p}{E}. \quad (14.31)$$

Zylinder für sehr hohe Drücke. Aus Gl. (26) folgt, daß für $p = \tau_{zul}$ die Wandstärke des Zylinders unendlich dick wird, so daß es unmöglich erscheint, Zylinder für noch höhere Innendrucke zu konstruieren. Für St 50 ist z. B. $\tau_{zul} = 1200 \text{ kg/cm}^2$. Für manche Zwecke sind aber Preßzylinder für viel höhere Drücke erforderlich, die man leicht herstellen kann, wenn dafür gesorgt wird, daß der Zylinder neben dem Innendruck gleichzeitig auch von außen gepreßt wird. Dann ist:

für $r = r_i$, $\sigma_r = -p_i = A - \frac{B}{r_i^2}$,

für $r = r_a$, $\sigma_r = -p_a = A - \frac{B}{r_a^2}$,

woraus $A = \frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}$ und $B = \frac{(p_i - p_a) r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}$, (14.32)

Daraus folgt, daß für $p_i = p_a$ der Zylinder spannungsfrei wird. Meist wird der Außendruck so gewählt, daß die Beanspruchung durch Außendruck p_a allein gleich groß ist, wie wenn Innen- und Außendruck gleichzeitig wirken (Abb. 14.10).

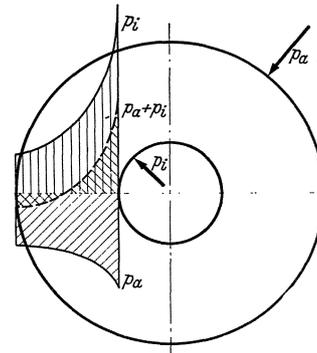


Abb. 14.10.

Der Außendruck kann in verschiedener Weise erzeugt werden, z. B. für kleine Durchmesser, so daß eine plastische Verformung entsteht (vgl. Abschn. 19). Die gleiche Verformung wird erreicht, indem man den Zylinder einmal unter sehr hohen Druck setzt. Geschützrohre bestehen aus einzelnen Rohren (Abb. 14.11), die aufgeschrumpft werden [Abschn. 24]. Große Preßzylinder werden aus einzelnen Zylindern zusammengesetzt, die durch Zwischenräume getrennt sind, welche mit den verschiedenen Druckstufen der Preßpumpe in Verbindung stehen¹.

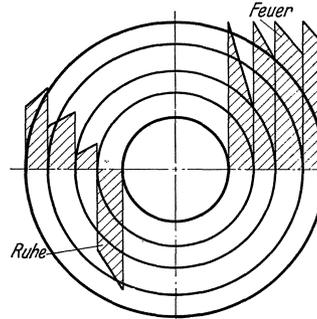


Abb. 14.11. Spannungen in einem aus mehreren Ringen zusammengesetzten Geschützrohr.

Wärmespannungen in Hohlzylindern können für ringsum symmetrische Wärmeströmungen, bei welchen die Temperatur nur von r und nicht von φ abhängt, ebenfalls aus den Gl. (11 bis 14) abgeleitet werden. Infolge der Wärmedehnungen bleiben die Querschnitte aber nicht mehr eben. R. Lorenz hat in der Z. VDI Bd. 51 (1907) S. 742 die Lösung für diese praktisch wichtige Aufgabe gegeben. Die einfachere Lösung für ebene Wände S. 118 kann aber (wie dort bemerkt) auch für dickwandige Hohlzylinder verwendet werden.

14.4. Dickwandige Zylinder unter Wirkung der Fliehkraft.

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden. Für eine schmale Scheibe kann angenommen werden, daß die axiale Spannung $\sigma_x = 0$, das Spannungsproblem also eben ist. Für sehr breite Zylinder müssen alle Querschnitte mit Ausnahme solcher in der Nähe der Zylinderenden eben bleiben; die axiale Dehnung ϵ_x ist dann konstant.

Für die Scheibe folgt aus den allgemeinen Gl. (12.59), da $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = \sigma_t$ und $\sigma_z = \sigma_r$ ist, mit Gl. (11) und (12)

$$E \epsilon_t = \sigma_t - \frac{\sigma_r}{m} = E \cdot \frac{\rho}{r} \quad \text{und} \quad E \epsilon_r = \sigma_r - \frac{\sigma_t}{m} = E \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r}.$$

¹ Geschützrohre, Z. VDI (1914) S. 464. Riedler: Hydraulisches Hochdruck-Preß- und Prägeverfahren. Z. VDI (1901) S. 584/90 und 621/26.

Daraus ϱ eliminiert: $\sigma_r - \frac{\sigma_t}{m} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sigma_t - \frac{r \sigma_r}{m} \right) = r \frac{\partial \sigma_t}{\partial r} + \sigma_t - \frac{\sigma_r}{m} - \frac{r}{m} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}$

oder $\sigma_t - \sigma_r + \frac{m r}{m+1} \cdot \frac{\partial \sigma_t}{\partial r} - \frac{r}{m+1} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = 0$.

Gl. (15) dazu addiert und durch r dividiert:

$$\frac{m}{m+1} \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_t}{\partial r} \right) = -\frac{\gamma}{g} r \omega^2 = \frac{m}{m+1} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r + \sigma_t).$$

Integriert:

$$\sigma_r + \sigma_t = A - \frac{m+1}{2m} \frac{\gamma}{g} r^2 \omega^2. \quad (14.33)$$

Gl. (15) nochmals addiert:

$$2\sigma_r + r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = A - \frac{3m+1}{2m} \frac{\gamma}{g} r^2 \omega^2.$$

Mit r multipliziert:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_r) = A r - \frac{3m+1}{2m} \frac{\gamma}{g} r^3 \omega^2.$$

Integriert und durch r^2 dividieren.

$$\sigma_r = \frac{A}{2} + \frac{B}{r^2} - \frac{3m+1}{8m} \frac{\gamma}{g} r^2 \omega^2 \quad (14.34)$$

und mit Gl. (33):

$$\sigma_t = \frac{A}{2} - \frac{B}{r^2} - \frac{m+3}{8m} \frac{\gamma}{g} r^2 \omega^2. \quad (14.35)$$

Die Integrationskonstanten A und B sind aus den Randbedingungen zu bestimmen.

Volle Scheibe. Da die Spannungen für $r=0$ nicht für alle Werte von ω unendlich groß werden können, muß $B=0$ sein. Da außen keine Kräfte übertragen werden, ist für $r=r_a$,

$\sigma_r = 0$ und mit Gl. (34): $A = \frac{3m+1}{4m} \cdot \frac{\gamma}{g} r_a^2 \omega^2$

Mit $m = \frac{10}{3}$ und $\frac{\gamma}{g} r_a^2 \omega^2 = \sigma_u$ wird $A = 0,825 \sigma_u$.

Die Spannungen: $\sigma_r = \frac{3m+1}{8m} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 (r_a^2 - r^2)$ und $\sigma_t = \left(\frac{3m+1}{8m} r_a^2 - \frac{m+3}{8m} r^2 \right) \frac{\gamma}{g} \omega^2$

werden am größten für $r=0$: $\sigma_{r0} = \sigma_{t0} = \frac{3m+1}{8m} \frac{\gamma}{g} \omega^2 = 0,4125 \sigma_u$. (14.36)

Für $r=r_a$ ist

$$\sigma_t = \frac{m-1}{4m} \frac{\gamma}{g} \omega^2 = 0,175 \sigma_u \quad (14.37)$$

und die radiale Erweiterung

$$\frac{\varrho}{r_a} = \frac{m-1}{4mE} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \mu^2 \quad (14.38)$$

Durchlochte Scheibe. Aus den Randbedingungen, daß für $r=r_a$ und $r=r_i$, $\sigma_r = 0$ wird, weil dort keine Kräfte übertragen werden, folgen die Integrationskonstanten:

$$A = \frac{3m+1}{4m} \frac{\gamma}{g} \omega^2 (r_a^2 + r_i^2) \quad \text{und} \quad B = -\frac{3m+1}{8m} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_a^2 r_i^2$$

und damit die Spannungen: $\sigma_r = \frac{3m+1}{8m} \frac{\gamma}{g} \omega^2 \left(r_a^2 + r_i^2 - \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2} - r^2 \right)$

und $\sigma_t = \frac{3m+1}{8m} \frac{\gamma}{g} \omega^2 \left(r_a^2 + r_i^2 + \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2} - \frac{m+3}{3m+1} r^2 \right)$.

Diese Gleichungen sind z. B. wichtig für die Berechnung von Schleifscheiben. Die größte Tangentialspannung tritt am Rande der Bohrung auf. Bemerkenswert ist der Fall, bei dem die zentrale Bohrung allmählich auf ein verschwindend kleines Loch zusammenschrumpft. Dann ist:

$$\sigma_t \text{ (für } r=r_i \rightarrow 0) = \frac{3m+1}{4m} \sigma_u. \quad (14.39)$$

Bei einem sehr kleinen Loch wird die Spannung am Umfang der Bohrung doppelt so groß wie im Zentrum eines Vollzylinders.

Schleifscheiben $u < 35 m/s$. Obacht bei der Befestigungsstelle!

Die radiale Erweiterung der Bohrung folgt aus der Gleichung (da für $r = r_i, \sigma_r = 0$ ist).

$$E \frac{\rho}{r_i} = \left| \sigma_t - \frac{\sigma_r}{m} \right|_{r=r_i} = \sigma_t = \frac{3m+1}{4m} \frac{\gamma}{g} u^2 \left(1 + \frac{m-1}{3m+1} \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2} \right)$$

zu

$$\frac{\rho}{r_i} = \frac{\gamma}{g} \frac{u^2}{4E} \left[\frac{3m+1}{m} + \frac{m-1}{m} \frac{r_i^2}{r_a^2} \right]. \quad (14.40)$$

Für den breiten Zylinder ($\varepsilon_x = 0$) muß noch die axiale Spannung σ_x berücksichtigt werden. In ähnlicher Weise wie vorher findet man:

$$\sigma_x = \frac{A}{2} + \frac{B}{r^2} - \frac{3m-2}{8(m-1)} \cdot \frac{\gamma}{g} r^2 \omega^2 \quad \text{und} \quad \sigma_t = \frac{A}{2} - \frac{B}{r^2} - \frac{m+2}{8(m-1)} \cdot \frac{\gamma}{g} r^2 \omega^2.$$

Die axiale Spannung folgt aus der Überlegung, daß $\int_{r_i}^{r_a} 2\pi r \sigma_x dr = 0$ ist. Für den Vollzylinder

wird für $r = 0$:

$$\sigma_r = \sigma_t = \frac{3m-2}{8(m-1)} \cdot \frac{\gamma}{g} u^2 = 0,4286 \sigma_u, \text{ gegenüber } 0,4125 \sigma_u \text{ bei der schmalen Scheibe. Die}$$

axiale Spannung $\sigma_x = \frac{r_a^2 - 2r^2}{4(m-1)} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2$ wird für $r = 0$ und $m = 10/3, \sigma_{x0} = \frac{3}{28} \sigma_u$, also $1/4$ der radialen und tangentialen Spannung. Nach der Mohrschen Hypothese ist deshalb die Bruchgefahr des breiten Zylinders viel kleiner als der schmalen Scheibe. Für den Hohlzylinder ist

$$\sigma_r = \frac{3m-2}{8(m-1)} \left(r_i^2 + r_a^2 - \frac{r_i^2 r_a^2}{r^2} - r^2 \right) \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2$$

$$\sigma_t = \frac{3m-2}{8(m-1)} \left(r_i^2 + r_a^2 + \frac{r_i^2 r_a^2}{r^2} - \frac{m+2}{3m-2} r^2 \right) \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2$$

und wenn die Enden frei sind:

$$\sigma_x = \frac{r_a^2 + r_i^2 - 2r^2}{4(m-1)} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2.$$

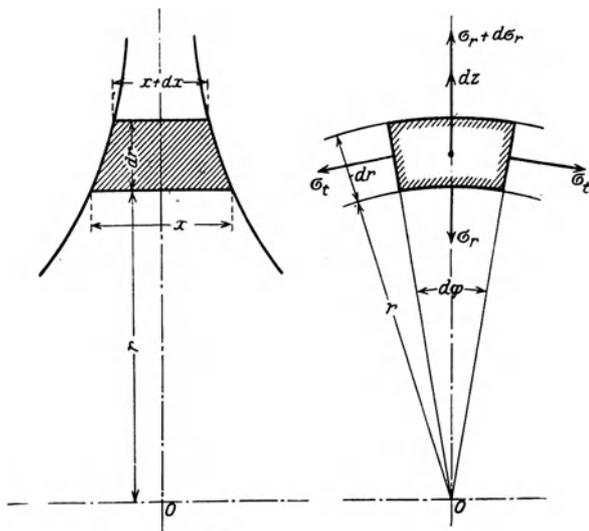


Abb. 14.12. Scheibe mit veränderlicher Breite.

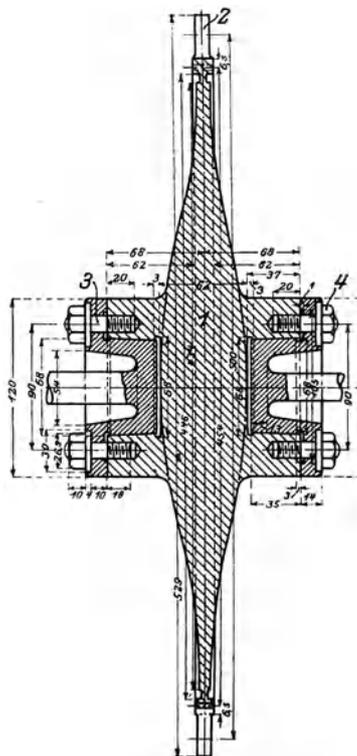


Abb. 14.13. Rotierende Scheibe gleicher Festigkeit (aus Stodola).

Scheibe mit veränderlicher Breite. Ist die Breite der sonst symmetrischen Scheibe veränderlich, dann folgt aus dem Gleichgewicht der Kräfte an einem Volumenelement (Abb. 14.12):

$$(\sigma_r + d\sigma_r) (x + dx) (r + dr) d\varphi - \sigma_r x r d\varphi - \sigma_t dr dx d\varphi + dZ = 0,$$

woraus

$$\frac{d(r x \sigma_r)}{dr} - x \sigma_t + \frac{\gamma}{g} u^2 x = 0. \quad (14.41)$$

Die Scheibe gleicher Festigkeit kann dadurch gekennzeichnet werden, daß die tangentiale und die radiale Spannung überall denselben unveränderlichen Wert erhalten: ($\sigma_r = \sigma_t = \sigma$).

Dadurch vereinfacht sich die Differentialgleichung (41) zu:

$$\frac{dx}{dr} + \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{u^2 x}{\sigma r} = 0$$

woraus

$$x = x_0 e^{-\frac{\gamma u^2}{2g\sigma}}, \quad (14.42)$$

wenn x_0 die Scheibenbreite im Wellenmittel für $r = 0$ ist.

Weiter folgt aus $\varepsilon_t = \varepsilon_r = \frac{m-1}{mE} \sigma$ daß die Dehnung nach allen Richtungen gleich groß ist,

und aus

$$\rho = \varepsilon_t \cdot r = \frac{m-1}{mE} \sigma \cdot r, \quad (14.43)$$

daß die radiale Erweiterung dem Abstände r proportional ist. Abb. 14.13 zeigt ein solches Rad gleicher Festigkeit.

Schrifttum.

Donath, M.: Die Berechnung rotierender Scheiben nach einem neuen Verfahren. Berlin: Julius Springer 1929. — Malkin, J.: Festigkeitsberechnung rotierender Scheiben. Berlin: Julius Springer 1935. — Grammel, R.: Neue Lösungen des Problems der rotierenden Scheibe. Ing. Arch. 7 (1936) S. 137/39. — Baer, H.: Vereinfachte Berechnung umlaufender Scheiben. Forschung 7 (1936) S. 187 bis 190. — Gran Olssen, R.: Über einige Lösungen des Problems der rotierenden Scheibe. Ing. Arch. 8 (1937) S. 373—380 und S. 270/75. — Gruber, W.: Berechnung umlaufender Scheiben. Forschung 10 (1939) S. 142/9. — Hengst, H.: Beitrag zur Beurteilung des Spannungszustandes einer gelochten Scheibe. Diss. T. H. Dresden 1937. — Meininghaus, U.: Über die Berechnung von druckfesten Ringscheiben. Diss. T. H. Hannover 1936. — Schultz-Grunow, F.: Der Spannungsverlauf in umlaufenden Scheiben mit exzentrischen Löchern. Z. angew. Math. u. Mech. 16 (1936) S. 366/68. — Ebner, H. und H. Koller: Über den Kraftverlauf in längs- und querversteiften Scheiben. Luftf.-Forschung 15 (1938) S. 527/42.

14.5. Die ringsum symmetrisch belastete Kreisplatte.

Das elastische Verhalten einer Platte hängt wesentlich vom Verhältnis ihrer Dicke zu den sonstigen Abmessungen ab. Bei der Platte wollen wir die Formänderungen (Verbiegungen) klein im Verhältnis zu ihrer Dicke annehmen. Diese Beschränkung bedeutet eine erhebliche Vereinfachung, denn der Druck p und die dadurch verursachten Spannungen in der Querrichtung der Platte sind dann klein im Vergleich zu den Biegespannungen, die bis zur zulässigen Grenze gesteigert werden; sie dürfen demnach vernachlässigt werden¹.

Die Platte wird sich auch vollständig symmetrisch verformen, so daß die Mittelebene in eine Umdrehungsfläche übergeht. Die Betrachtungen dürfen deshalb auf einen Meridianschnitt beschränkt werden. Die Punkte einer zur Mittelebene senkrechten Geraden liegen nach der Biegung wieder auf einer Geraden und bilden eine Normale der elastischen Fläche, in welche die Mittelebene im verbogenen Zustand übergeht. Die (kleinen) Durchbiegungen seien mit w bezeichnet. Ein Punkt r, z (Abb. 14.14) hat sich nach der Biegung um den kleinen Betrag ρ parallel zur Mittelebene verschoben. Dann ist:

$$\rho = z \cdot \varphi = -z \frac{dw}{dr}$$

und die Dehnungen sind:

$$\varepsilon_t = \frac{\rho}{r} = -\frac{z}{r} \frac{dw}{dr} \quad \text{und} \quad \varepsilon_r = \frac{d\rho}{dr} = -z \frac{d^2 w}{dr^2}.$$

Zwischen Dehnungen und Spannungen bestehen die bekannten Beziehungen:

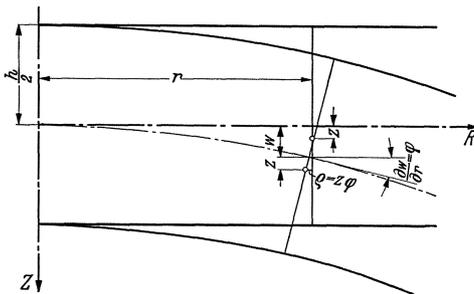
$$E \varepsilon_t = \sigma_t - \frac{\sigma_r}{m} \quad \text{und} \quad E \varepsilon_r = \sigma_r - \frac{\sigma_t}{m},$$

Nach den Spannungen aufgelöst erhält man mit den Werten der Dehnungen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E m^2}{m^2 - 1} (\varepsilon_r + \varepsilon_t/m) = -\frac{E m^2 z}{m^2 - 1} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{rm} \cdot \frac{dw}{dr} \right) \\ \sigma_t &= \frac{E m^2}{m^2 - 1} (\varepsilon_t + \varepsilon_r/m) = -\frac{E m^2 z}{m^2 - 1} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} + \frac{1}{m} \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (14.44)$$

und

Abb. 14.14.



¹ Die Theorie der Kreisplatten bei großen Durchbiegungen hat St. Way (Bending of circular plates with large deflections) in Trans.-A. S. M. E. 56 (1934) Paper APM. 56.12 veröffentlicht.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen erhält man eine einzige Gleichung

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\sigma_t}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_r). \quad (14.12)$$

Die Werte von σ_t und $\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \sigma_r)$ aus Gl. (44) darin einsetzen, gibt:

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \frac{z}{r} \left(r \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right).$$

Partiell nach z zwischen $-h/2$ und $+h/2$ integriert, d. h. $r = \text{konst}$:

$$\tau = \frac{m^2 E}{8(m^2 - 1)} \frac{4z^2 - h^2}{r} \left(r \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right). \quad (14.45)$$

Schneiden wir nun aus der Platte eine volle kreisförmige Scheibe (Abb. 14.15), so folgt aus der Gleichgewichtsbedingung, daß die Summe der axialen Kräfte gleich Null ist:

$$2 \pi r \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau dz + p \pi r^2 + P = 0.$$

Und mit Gl. (45):

$$\frac{2 \pi r m^2 E}{8(m^2 - 1)} \left(\frac{4}{3} z^3 - h^2 z \right) \Big|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) + p \pi r^2 + P = 0$$

oder

$$\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} = \frac{6(m^2 - 1)}{m^2 E h^3} p \cdot r + \frac{6(m^2 - 1)}{m^2 E h^3} \cdot \frac{P}{\pi r}.$$

Damit wird:

$$\tau = \frac{3}{4 h^3} (4 z^2 - h^2) \left(p r + \frac{P}{\pi r} \right). \quad (14.46)$$

Mit der Abkürzung

$$\frac{E \cdot h^3}{12 \left(1 - \frac{1}{m^2} \right)} = N \text{ [kg} \cdot \text{cm]} \quad (14.47)$$

„Plattensteifigkeit“ genannt, lautet die Differentialgleichung (45) der Meridiankurve:

$$\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = \frac{1}{2N} \left(p r + \frac{P}{\pi r} \right).$$

Die Integration gibt:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{1}{2N} \left(p \frac{r^2}{2} + \frac{P}{\pi} \ln r + c \right).$$

Mit $\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dw}{dr} \right)$ gibt die nochmalige Integration:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{1}{2N} \left[\frac{p r^3}{8} + \frac{P r}{2\pi} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + c \frac{r}{2} + \frac{d}{r} \right]^* \quad (14.48)$$

Wieder integriert:

$$w = \frac{1}{2N} \left[\frac{p r^4}{32} + \frac{P r^2}{4\pi} (\ln r - 1) + c \frac{r^2}{4} + d \ln r + e \right]. \quad (14.49)$$

Das ist die Gleichung der Meridiankurve der Mittelfläche. Die Integrationskonstanten c , d und e sind von Fall zu Fall aus den Randbedingungen zu bestimmen.

In den meisten Fällen liegt die Platte am Umfang so auf, daß für $r = r_a$, $w = 0$ ist, d. h.:

$$0 = \frac{p r_a^4}{32} + \frac{P r_a^2}{4\pi} (\ln r_a - 1) + c \frac{r_a^2}{4} + d \ln r_a + e \text{ und}$$

$$w = \frac{1}{2N} \left[\frac{p}{32} (r^4 - r_a^4) + \frac{P}{4\pi} (r^2 \ln r - r_a^2 \ln r_a) + \frac{c - \frac{P}{\pi}}{4} (r^2 - r_a^2) + d \ln \frac{r}{r_a} \right]. \quad (14.50)$$

Für die volle Platte muß aus Symmetriegründen für $r = 0$, $dw/dr = 0$ sein, d. h. mit Gl. (48):

$$\left. \frac{P}{2\pi} r^2 \ln r \right|_{r=0} = -d = 0.$$

* $\int r \ln r dr = \int \ln r \cdot r dr = \frac{r^2}{2} \ln r - \int \frac{r^2}{2} \cdot \frac{dr}{r} = \frac{r^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{4}.$

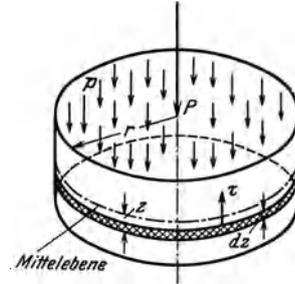


Abb. 14.15.

Im übrigen ist es vorteilhaft, die allgemeine Aufgabe in den Teilaufgaben: gleichmäßige Belastung p resp. konzentrierte Ringlast P zu zerlegen, die von Fall zu Fall superponiert werden können.

Fall 1. Volle, gleichmäßig belastete Platte, am Rande frei aufliegend. Die Gleichung der Meridiankurve lautet dann ($d = 0, P = 0$):

$$w = \frac{1}{2N} \left[p \frac{r^4 - r_a^4}{32} + \frac{c}{4} (r^2 - r_a^2) \right]. \quad (14.51)$$

Für die frei aufliegende Platte ist die radiale Spannung am Rande σ_r (für $r = r_a$) = 0, also mit Gl. (44), da $\frac{mE}{m^2 - 1} z \neq 0$ ist: $m \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = 0$.

Aus Gl. (51) folgt: $\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{1}{2N} \left[\frac{r^2}{8} p + \frac{c}{2} \right]$ und $\frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{1}{2N} \left[\frac{3r^2}{8} p + \frac{c}{2} \right]$,

sodann für $r = r_a$: $\frac{3}{8} m r^2 p + \frac{c}{2} m + \frac{r^2}{8} p + \frac{c}{2} = 0$

oder $c = -\frac{1}{4} \cdot \frac{3m+1}{m+1} r_a^2 p$ (14.52)

sein muß. Die größte Durchbiegung (für $r = 0$) folgt dann aus Gl. (51) zu:

$$f = \frac{3}{16} \cdot \frac{(m-1)(5m+1)}{m^2} \cdot \frac{p r_a^4}{E h^3} = 0,70 \frac{p r_a^4}{E h^3} \text{ (für } m = 10/3 \text{)}. \quad (14.53)$$

Die Spannungen folgen aus Gl. (44) mit

$$\frac{dw}{dr} = \frac{1}{2N} \left[\frac{p r^3}{8} + \frac{c}{2} r \right], \quad \frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{1}{2N} \left[\frac{3 p r^2}{8} + \frac{c}{2} \right] \text{ und } z = \pm h/2 \text{ zu}$$

$$\sigma_r = \pm \frac{E \cdot m^2 \cdot h}{2(m^2 - 1)} \cdot \frac{6(m^2 - 1)}{m^2 E h^3} \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{3m+1}{m} r^2 p + \frac{c}{2} \cdot \frac{m+1}{m} \right) = \pm \frac{3}{h^2} \left(\frac{3m+1}{8m} r^2 p + \frac{c}{2} \cdot \frac{m+1}{m} \right)$$

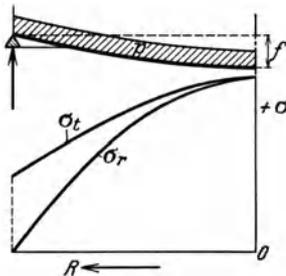


Abb. 14.16. Gleichmäßig belastet, frei aufliegend.

und $\sigma_t = \pm \frac{3}{h^2} \left(\frac{m+3}{8m} r^2 p + \frac{c}{2} \cdot \frac{m+1}{m} \right)$
 oder mit c aus Gl. (52)
 $\sigma_r = \pm \frac{3}{8} \cdot \frac{3m+1}{m} (r^2 - r_a^2) \cdot \frac{p}{h^2}$
 $\sigma_t = \pm \frac{3}{8} \left(\frac{3+m}{m} r^2 - \frac{3m+1}{m} r_a^2 \right) \frac{p}{h^2}$.

Beide Spannungen werden am größten für $r = 0$

$$\left| \sigma_t \right|_{\max} = \left| \sigma_r \right|_{\max} = \frac{3}{8} \cdot \frac{3m+1}{m} \cdot \frac{p r_a^2}{h^2} = 1,24 p \frac{r_a^2}{h^2}. \quad (14.54)$$

Fall 2. Für die eingespannte, gleichmäßig belastete, volle Platte (Abb. 14.17) muß für $r = r_a, dw/dr = 0$ sein, also:

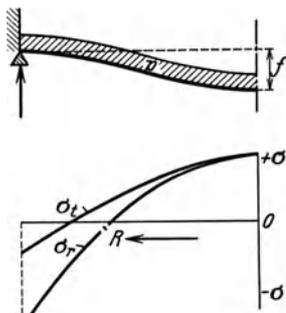


Abb. 14.17. Gleichmäßig belastet, eingespannt.

$$c = -\frac{1}{4} r_a^2 p.$$

In ähnlicher Weise wie bei Fall 1 findet man:

$$f = \frac{3}{16} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2 E} \frac{p r_a^4}{h^3} = 0,17 \frac{p r_a^4}{E h^3},$$

$$\sigma_r = \pm \frac{3}{8} \cdot \frac{m+1}{m} \cdot \frac{p}{h^2} \left(\frac{3m+1}{m+1} \cdot r^2 - r_a^2 \right),$$

$$\sigma_t = \mp \frac{3}{8} \cdot \frac{m+1}{m} \cdot \frac{p}{h^2} \left(\frac{m+3}{m+1} r^2 - r_a^2 \right).$$

Die größte Spannung ist σ_r für $r = r_a$ $\sigma_{\max} = \pm 0,75 \frac{p r_a^2}{h^2}$.

In der Plattenmitte ist: $\sigma_r = \sigma_t = \pm 0,49 \frac{r_a^2}{h^2} p$.

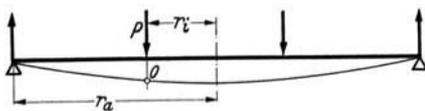


Abb. 14.18.

Fall 3. Konzentrierte Ringlast P , frei aufliegend (Abb. 14.18). Es sind zwei Zonen zu unterscheiden. Für die äußere (Ringzone) bleibt die allgemeine Gleichung der Meridiankurve, Gl. (50) gültig, mit $p = 0$. Wenn die Durchbiegungen vom Rande der Ringlast an

gemessen werden, so ist für $r = r_i$, $w_2 = 0$ und

$$w_2 = \frac{1}{2N} \left[\frac{P}{4\pi} (r^2 \ln r - r_i^2 \ln r_i) + \left(\frac{c_2}{4} - \frac{P}{4\pi} \right) (r^2 - r_i^2) + d \ln \frac{r}{r_i} \right]. \quad (14.55)$$

Für die unbelastete innere Zone sind die Schubspannungen gleich Null und die Platte wird dort nur auf Biegung beansprucht durch Momente, die von der Ringzone auf sie ausgeübt werden. Die Gleichung der Meridiankurve ist dann, da $p = 0$ und $P = 0$ ist:

$$w_1 = \left(c_1 \frac{r^2}{4} + e \right) \frac{1}{2N}. \quad (14.56)$$

Da die Senkungen vom inneren Rand des belasteten Ringes aus gemessen werden, so ist für $r = r_i$, $w_1 = 0$ und

$$w_1 = \frac{c_1}{8N} (r^2 - r_i^2). \quad (14.57)$$

Das ist die Gleichung eines Kreises; die unbelastete innere Zone wölbt sich demnach nach einer Kugelfläche. Die Randbedingungen sind folgende:

Da die Mittelflächen der inneren und äußeren Zone stetig ineinander übergehen, so muß die Neigung $\frac{dw}{dr}$ der Meridiankurve der Mittelfläche für $r = r_i$ in beiden Zonen gleich sein, also

$$\text{a) für } r = r_i: \frac{dw_1}{dr} = \frac{dw_2}{dr}.$$

Die Spannungen in jedem Punkt der Übergangsstelle aus der äußeren in der inneren Zone ($r = r_i$ und z beliebig) müssen gleich groß sein:

$$\text{b) für } r = r_i: |\sigma_r|_I = |\sigma_r|_{II} \quad \text{und} \quad |\sigma_t|_I = |\sigma_t|_{II}.$$

Für die innere Zone (I) folgt aus Gl. (44) und (57):

$$\sigma_r = \sigma_t = \frac{mE}{m-1} \cdot \frac{c_1}{4N} \cdot z. \quad (14.58)$$

Für $r = r_i$ muß deshalb $|\sigma_r|_{II} = |\sigma_t|_{II}$ sein. Aus Gl. (44) folgt:

$$\frac{d^2 w_2}{dr^2} + \frac{1}{r_i \cdot m} \frac{dw_2}{dr} = \frac{1}{r_i} \cdot \frac{dw_2}{dr} + \frac{d^2 w_2}{m \cdot dr^2}$$

oder

$$\frac{d^2 w_2}{dr^2} = \frac{1}{r_i} \cdot \frac{dw_2}{dr}.$$

Mit Gl. (50) ($p = 0$) erhält man daraus nach einfacher Zwischenrechnung:

$$d = \frac{Pr_i^2}{4\pi}. \quad (14.59)$$

Aus der Randbedingung (a) folgt: $\frac{c_1}{2} r_i = \frac{P}{4\pi} (r_i + 2 r_i \ln r_i) + \left(\frac{c_2}{4} - \frac{P}{4\pi} \right) 2 r_i + \frac{P}{4\pi} r_i$

oder

$$c_1 = \frac{P}{\pi} \ln r_i + c_2. \quad (14.60)$$

Für die frei aufliegende Platte muß für $r = r_a$, $\sigma_r = 0$ sein, also:

$$0 = \frac{Pm}{4\pi} (3 + 2 \ln r_a) + \left(\frac{c_2}{4} - \frac{P}{4\pi} \right) \cdot 2m - \frac{Pm}{4\pi} \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2} + \frac{P}{4\pi} (1 + 2 \ln r_a) + \left(\frac{c_2}{4} - \frac{P}{4\pi} \right) \cdot 2 + \frac{P}{4\pi} \frac{r_i^2}{r_a^2}$$

woraus

$$c_2 = -\frac{P}{2\pi} \left[\frac{m-1}{m+1} \left(1 - \frac{r_i^2}{r_a^2} \right) + 2 \ln r_a \right] \quad (14.61)$$

und mit Gl. (60):

$$c_1 = -\frac{P}{2\pi} \left[\frac{m-1}{m+1} \left(1 - \frac{r_i^2}{r_a^2} \right) + 2 \ln \frac{r_a}{r_i} \right]. \quad (14.62)$$

Wenn für die äußere Zone die größte Durchbiegung für $r = r_a$ gleich w_a und für die innere Zone für $r = r_0$, w_0 ist, so ist die größte Durchbiegung $f = w_a + w_0$,

$$f = \frac{3}{4} \cdot \frac{m^2 - 1}{\pi m^2} \cdot \frac{Pr_a^2}{Eh^3} \left\{ \frac{3m+1}{m+1} \left(1 - \frac{r_i^2}{r_a^2} \right) - \frac{r_i^2}{r_a^2} \ln \frac{r_a^2}{r_i^2} \right\}.$$

Spezialfall $r_i = 0$, d. h. Einzellast in der Plattenmitte:

$$f = 0,55 \frac{Pr_a^2}{Eh^3}. \quad (14.63)$$

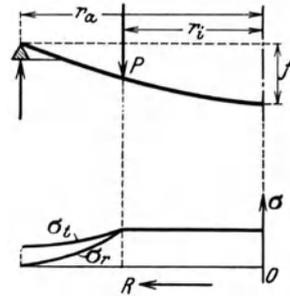


Abb. 14.19.

Innerhalb der inneren Zone sind die radialen und tangentialen Spannungen gleich groß:

$$\sigma_{\max} = \varphi_3 \frac{P}{h^2} \cdot \text{Werte von } \varphi_3 \text{ aus Abb. 14.25.}$$

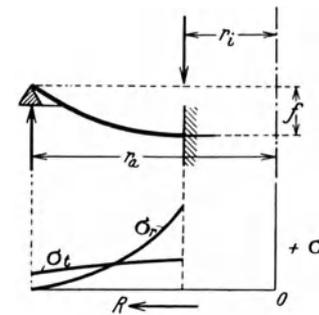
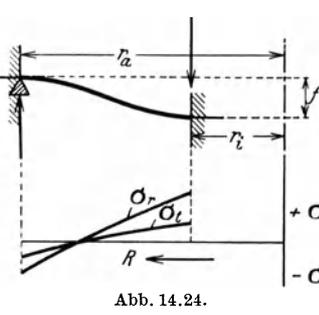
Diese Gleichung kann auch verwendet werden für die Berechnung der Spannung in einem Deckel, wenn der Rand außen vorsteht.

4	<p>Konzentrierte Ringlast, eingespannt</p> <p style="text-align: center;">Abb. 14.20.</p>	$f = \frac{3}{4} \cdot \frac{m^2 - 1}{\pi m^2} \cdot \frac{P r_a^2}{E h^3} \left\{ 1 - \frac{r_i^2}{r_a^2} - \frac{r_i^2}{r_a^2} \ln \frac{r_a^2}{r_i^2} \right\}.$ <p>Spezialfall $r_i = 0$.</p> $f = 0,218 P \cdot \frac{r_a^2}{E h^3}.$ <p>Für $r_a > 3,13 r_i$, größte Spannung in der inneren Zone</p> $\sigma_{\max} = \varphi_{4a} \frac{P}{h^2}.$ <p>Für $r_a < 3,13 r_i$, größte Spannung ist σ_r für $r = r_a$:</p> $\sigma_{\max} = \varphi_{4b} \frac{P}{h^2} \cdot \text{Werte von } \varphi_1 \text{ aus Abb. 14.25.}$
---	---	--

Für die gelochte Platte gilt als Randbedingung, daß für den inneren Lochrand die radialen Spannungen für alle Werte von z gleich Null werden.

Pos. 5 bis 9 gelochte Platte, konzentrierte Ringlast.		
5	<p>Außen frei aufliegend, innen frei</p> <p style="text-align: center;">Abb. 14.21.</p>	$c = -\frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{m-1}{m+1} + \ln r_i^2 + \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \ln \frac{r_a^2}{r_i^2} \right\},$ $d = -\frac{P}{4\pi} \cdot \frac{m+1}{m-1} \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \ln \frac{r_a^2}{r_i^2},$ $f = \frac{P r_a^2}{E h^3} \left\{ 0,551 \left(1 - \frac{r_i^2}{r_a^2} \right) + 0,4035 \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left(\ln \frac{r_a^2}{r_i^2} \right)^2 \right\}.$ <p>Die größte Spannung ist σ_t für $r = r_i$</p> $\sigma_{\max} = \pm \varphi_5 \frac{P}{h^2}.$ <p>Werte von φ_5 aus Abb. 14.26.</p> <p>Durch eine kleine zentrische Bohrung wird die tangential Spannung gegenüber der vollen Platte doppelt so groß.</p>

6	<p>Außen eingespannt, innen frei</p> <p style="text-align: center;">Abb. 14.22.</p>	$c = -\frac{P}{2\pi} \cdot \frac{1}{\frac{m-1}{m+1} r_a^2 - r_i^2} \left\{ \frac{m-1}{m+1} r_a^2 \ln r_a^2 + r_i^2 \ln r_i^2 - \frac{m-1}{m+1} (r_a^2 - r_i^2) \right\},$ $d = -\frac{P}{4\pi} \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{\frac{m-1}{m+1} r_a^2 - r_i^2} \left(\ln \frac{r_a^2}{r_i^2} - \frac{2m}{m+1} \right),$ $f = \frac{0,22}{0,55 r_a^2 + r_i^2} \cdot \frac{P}{E h^3}$ $\cdot \left\{ 0,55 r_a^4 + 2 r_a^2 r_i^2 - 2,6 r_i^4 - 3,1 r_a^2 r_i^2 \ln \frac{r_a^2}{r_i^2} + r_a^2 r_i^2 \left(\ln \frac{r_a^2}{r_i^2} \right)^2 \right\}.$ <p>Bei verhältnismäßig kleiner Bohrung erfolgt die größte Beanspruchung am inneren Lochrand durch σ_t</p> $\sigma_{\max} = \varphi_{6a} \frac{P}{h^2}.$ <p>Für $r_i/r_a > 0,37$ tritt die größte Beanspruchung als radiale Spannung am äußeren Umfang auf:</p> $\sigma_{\max} = \varphi_{6b} \frac{P}{h^2} \cdot \text{Werte von } \varphi_6 \text{ aus Abb. 14.26.}$
---	---	--

<p>7</p> <p>Innen eingespannt, außen frei</p>  <p>Abb. 14.23.</p>	$c = -\frac{P}{4\pi} \cdot \frac{1}{r_a^2 + \frac{m-1}{m+1} r_i^2} \left\{ r_a^2 \ln r_a^2 + \frac{m-1}{m+1} r_i^2 \ln r_i^2 + \frac{m-1}{m+1} (r_a^2 - r_i^2) \right\}$ $d = -\frac{P}{4\pi} \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 + \frac{m-1}{m+1} r_i^2} \left(\ln \frac{r_a^2}{r_i^2} + \frac{2m}{m+1} \right),$ $f = \frac{3}{4} \cdot \frac{m^2 - 1}{\pi m^2} \cdot \frac{P}{E h^3} \left\{ \frac{3m+1}{m+1} r_a^4 - 2 r_a^2 r_i^2 - \frac{m-1}{m+1} r_i^4 - \frac{4m}{m+1} r_a^2 r_i^2 \ln \frac{r_a^2}{r_i^2} - r_a^2 r_i^2 \left(\ln \frac{r_a^2}{r_i^2} \right)^2 \right\}.$ <p>Die größte Spannung ist σ_r für $r = r_i$</p> $\sigma_{\max} = \varphi_7 \frac{P}{h^2}. \text{ Werte von } \varphi_7 \text{ aus Abb. 14.26.}$
<p>8</p> <p>Außen fest eingespannt, innen beweglich eingespannt</p>  <p>Abb. 14.24.</p>	$c = -\frac{P}{2\pi} \left(\frac{r_a^2 \ln r_a^2 - r_i^2 \ln r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - 1 \right),$ $d = +\frac{P}{4\pi} \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \ln \frac{r_a^2}{r_i^2},$ $f = 0,22 \frac{P r_a^2}{E h^3} \left\{ 1 - \frac{r_i^2}{r_a^2} - \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left(\ln \frac{r_a^2}{r_i^2} \right)^2 \right\}.$ <p>Die größte Spannung ist σ_r für $r = r_i$</p> $\sigma_{\max} = \varphi_{8a} \frac{P}{h^2}.$ <p>Die größte Spannung am äußeren Rand ist σ_r</p> $(\sigma_r)_a = \varphi_{8b} \frac{P}{h^2}. \text{ Werte von } \varphi_8 \text{ aus Abb. 14.26.}$

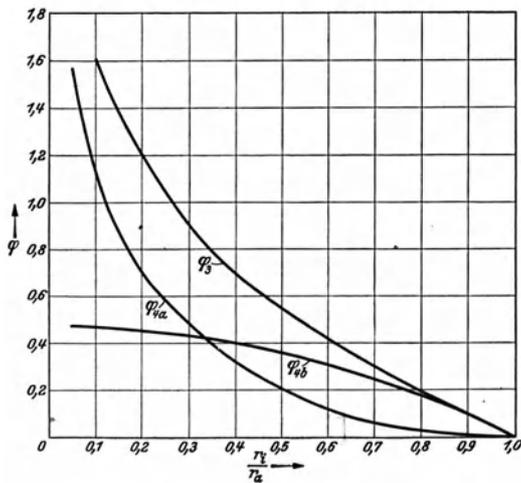


Abb. 14.25. Zur Berechnung der vollen Platte.

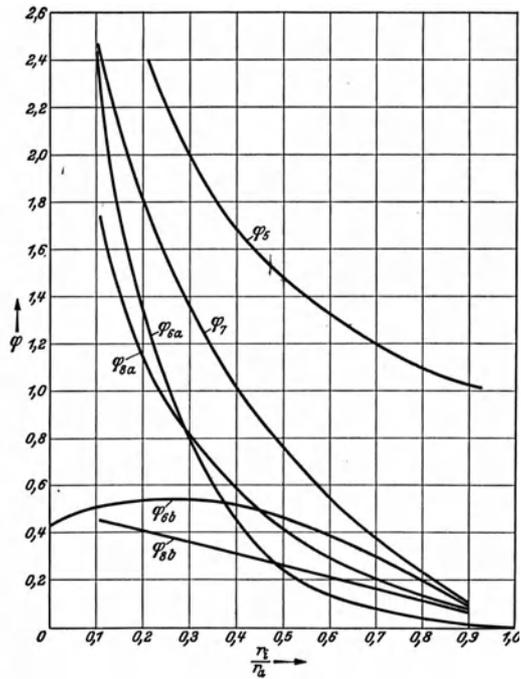
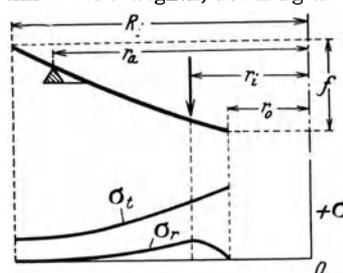
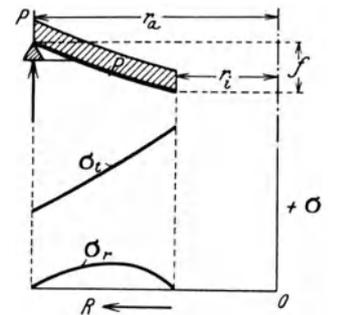
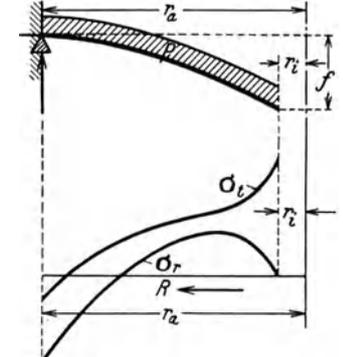
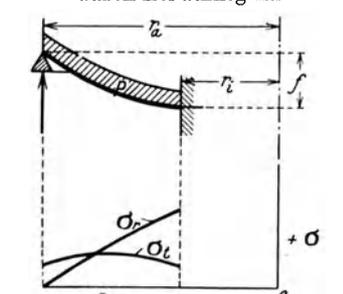
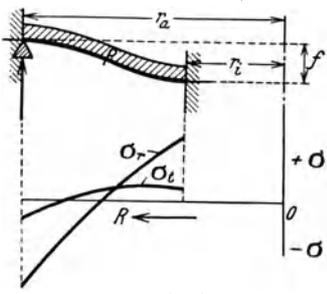


Abb. 14.26. Zur Berechnung der gelochten Platte mit konzentrierter Ringlast.

<p>9</p>	<p>Außen gestützt, innen frei beweglich, überhängend</p>  <p>Abb. 14.27.</p>	$\sigma_{\max} = \sigma_t \text{ für } r = r_0$ $\sigma_{\max} = \frac{3P}{2\pi h^2} \cdot \frac{m-1}{m} \left[\frac{m+1}{m-1} \ln \frac{r_a^2}{r_i^2} + \frac{r_a^2 - r_i^2}{R^2} \right] \frac{R^2}{R^2 - r_0^2}$ <p>Dieser Belastungsfall liegt z. B. vor bei der losen Flanschverbindung (Abb. 14.39).</p>
<p>Pos. 10 bis 18 gelochte Platte, gleichmäßig belastet.</p>		
<p>10</p>	<p>Außen gestützt, innen frei</p>  <p>Abb. 14.28.</p>	$c = -\frac{3m+1}{m+1} \cdot \frac{p}{4} (r_a^2 + r_i^2) + \frac{p r_i^2}{2} \left\{ \frac{m-1}{m+1} + \frac{r_a^2 \ln r_a^2 - r_i^2 \ln r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \right\}$ $d = -\frac{3m+1}{m-1} \cdot \frac{p}{8} r_a^2 r_i^2 + \frac{m+1}{m-1} \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \frac{p r_i^2}{4} \ln \frac{r_a^2}{r_i^2}$ $f = 0,17 \frac{p}{E h^3} \left[\left(\frac{5m+1}{m+1} + 2 \frac{3m+1}{m-1} \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^4 - r_i^4} \ln \frac{r_a^2}{r_i^2} \right) (r_a^4 - r_i^4) \right. \\ \left. - 4 r_i^2 \left(\frac{3m+1}{m+1} + \frac{m+1}{m-1} \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{(r_a^2 - r_i^2)^2} \left(\ln \frac{r_a^2}{r_i^2} \right)^2 \right) (r_a^2 - r_i^2) \right]$ <p>Die größte Spannung ist σ_t für $r = r_i$</p> $\sigma_{\max} = \varphi_{10} \frac{p}{h^2} r_a^2 \cdot \text{Werte von } \varphi_{10} \text{ aus Abb. 14.37.}$
<p>11</p>	<p>Außen eingespannt, innen frei</p>  <p>Abb. 14.29.</p>	$c = -\frac{p}{4} \cdot \frac{1}{\frac{m-1}{m+1} r_a^2 + r_i^2} \left\{ \frac{m-1}{m+1} r_a^4 + 2 \frac{m-1}{m+1} r_a^2 r_i^2 + \frac{m+3}{m+1} r_i^4 \right. \\ \left. - 2 r_i^2 \left(\frac{m-1}{m+1} r_a^2 \ln r_a^2 + r_i^2 \ln r_i^2 \right) \right\}$ $d = -\frac{p}{8} \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{\frac{m-1}{m+1} r_a^2 + r_i^2} \left\{ r_a^2 + \frac{m-1}{m+1} r_i^2 - 2 r_i^2 \ln \frac{r_a^2}{r_i^2} \right\}$ <p>Die größte Spannung ist σ_r für $r = r_a$</p> $\sigma_{\max} = \varphi_{11a} \frac{p r_a^2}{h^2}$ <p>Bei sehr kleiner Bohrung ($\frac{r_i}{r_a} < 0,05$) ist $\sigma_{\max} = \sigma_t$ für $r = r_i$</p> $\sigma_{\max} = \varphi_{11b} \frac{p r_a^2}{h^2} \cdot \text{Werte von } \varphi_{11} \text{ aus Abb. 14.37.}$
<p>12</p>	<p>Innen eingespannt, außen frei aufliegend</p>  <p>Abb. 14.30.</p>	$c = -\frac{p/4}{r_a^2 + \frac{m-1}{m+2} r_i^2} \left\{ \frac{3m+1}{m+1} r_a^4 - 2 \frac{m-1}{m+1} r_a^2 r_i^2 + 3 \frac{m-1}{m+1} r_i^4 \right. \\ \left. - 2 r_i^2 \left(r_a^2 \ln r_a^2 + \frac{m-1}{m+1} r_i^2 \ln r_i^2 \right) \right\}$ $d = \frac{p}{8} \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 + \frac{m-1}{m+1} r_i^2} \left\{ \frac{3m+1}{m+1} r_a^2 - \frac{5m+1}{m+1} r_i^2 - 2 r_i^2 \ln \frac{r_a^2}{r_i^2} \right\}$ <p>Die größte Spannung ist σ_r für $r = r_i$</p> $\sigma_{\max} = \varphi_{12} \frac{p r_a^2}{h^2} \cdot \text{Werte von } \varphi_{12} \text{ aus Abb. 14.37.}$

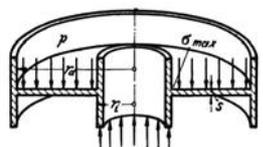
13	<p style="text-align: center;">Innen und außen eingespannt, außen gestützt</p>  <p style="text-align: center;">Abb. 14.31.</p>	$c = -\frac{p}{4} (r_a^2 + r_i^2) - \frac{a}{2} r_a^2 \left(\frac{1 - r_a^2 \ln r_a^2 - r_i^2 \ln r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \right).$ $d = +\frac{p}{8} r_a^2 r_i^2 - \frac{a}{4} r_i^2 \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \ln \frac{r_a^2}{r_i^2}.$ <p>Größte Spannung σ_r für $r = r_a$</p> $\sigma_{\max} = \varphi_{13a} \frac{p r_a^2}{h^2}.$ <p>Am inneren Umfang ist</p> $\sigma_i = \varphi_{13b} \frac{p r_a^2}{h^2}. \text{ Werte von } \varphi_{13} \text{ aus Abb. 14.36.}$
----	---	--

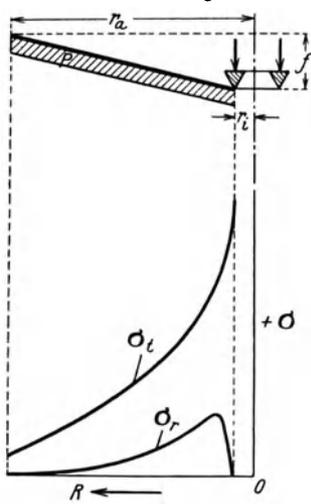
Wenn die Platte innen statt außen gestützt wird, so lautet die Gleichgewichtsbedingung für die Kräfte in axialer Richtung:

$$2 \pi r \int_{-h/2}^{h/2} \tau dz + \pi p (r_a^2 - r^2) = 0.$$

Damit wird

$$w = \left[-\frac{p}{32} r^4 + \frac{p r_a^2}{4} r^2 (\ln r - 1) + \frac{c}{4} r^2 + d \ln r + e \right] \frac{1}{2N}. \quad (14.64)$$

14	<p style="text-align: center;">Wie 13, aber innen gestützt</p>  <p style="text-align: center;">Abb. 14.32.</p>	<p>Größte Spannung am inneren Umfang</p> $\sigma_{\max} = \varphi_{14} \frac{p r_a^2}{h^2}.$ <p>Werte von φ_{14} aus Abb. 14.36.</p>
----	---	---

15	<p style="text-align: center;">Innen unterstützt, außen frei beweglich</p>  <p style="text-align: center;">Abb. 14.33</p>	$c = \frac{3m+1}{m+1} \cdot \frac{p}{4} (r_a^2 + r_i^2) - \frac{p r_a^2}{2} \left(\frac{m-1}{m+1} + \frac{r_a^2 \ln r_a^2 - r_i^2 \ln r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \right),$ $d = \frac{3m+1}{m-1} \cdot \frac{p}{8} r_a^2 r_i^2 - \frac{m+1}{m-1} \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \frac{p r_a^2}{4} \ln \frac{r_a^2}{r_i^2},$ $f = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{3p}{16 E h^3} \left\{ 4 \frac{3m+1}{m} r_a^2 r_i^2 - \frac{7m+3}{m} r_a^4 - \frac{5m+1}{m} r_i^4 \right.$ $\left. + 2 \frac{m+1}{m} r_a^2 r_i^2 \left(\frac{3m+1}{m+1} - 2 \frac{m+1}{m-1} \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \ln \frac{r_a^2}{r_i^2} \right) \ln \frac{r_a^2}{r_i^2} \right\}.$ <p>Die größte Spannung ist σ_t für $r = r_i$</p> $\sigma_{\max} = \varphi_{15} \frac{r_a^2}{h^2} p.$ <p>Werte von φ_{15} aus Abb. 14.37.</p>
----	--	---

Innen unterstützt,
außen eingespannt

Abb. 14.34.

$$c = \frac{p}{4} (3r_a^2 - 2r_a^2 \ln r_a^2) - \frac{2d}{r_a^2},$$

$$d = \frac{p}{8} \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{\frac{m-1}{m+1} r_a^2 + r_i^2} \left(\frac{5m+1}{m+1} r_a^2 - \frac{3m+1}{m+1} r_i^2 - 2r_a \ln \frac{r_a}{r_i} \right).$$

Für kleine Bohrungen ($\frac{r_i}{r_a} < 0,45$) ist die größte Spannung σ_t für $r = r_i$

$$\sigma_{\max} = \varphi_{16a} \frac{pr_a^2}{h^2}.$$

Für große Bohrungen ($\frac{r_i}{r_a} > 0,45$) ist die größte Spannung etwas größer als σ_r für $r = r_a$

$$\sigma_{\max} > \varphi_{16b} \frac{pr_a^2}{h^2}.$$

Werte von φ_{16} aus Abb. 14.37,

Innen eingespannt, außen frei

Abb. 14.35.

$$c = \frac{p}{4} \cdot \frac{1}{\frac{m-1}{m+1} r_a^2 + r_i^2} \left(\frac{m+3}{m+1} r_a^4 + 2 \frac{m-1}{m+1} r_a^2 r_i^2 + \frac{m-1}{m+1} r_i^4 \right) - 2r_a^2 \left(r_a^2 \ln r_a^2 + \frac{m-1}{m+1} r_i^2 \ln r_i^2 \right).$$

$$d = \frac{p}{8} \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{\frac{m-1}{m+1} r_a^2 + r_i^2} \left(\frac{m-1}{m+1} r_a^2 + r_i^2 + 2r_a^2 \ln \frac{r_a}{r_i} \right).$$

Die größte Spannung ist σ_r für $r = r_i$

$$\sigma_{\max} = \varphi_{17} \frac{pr_a^2}{h^2}.$$

Werte von φ_{17} aus Abb. 14.37.

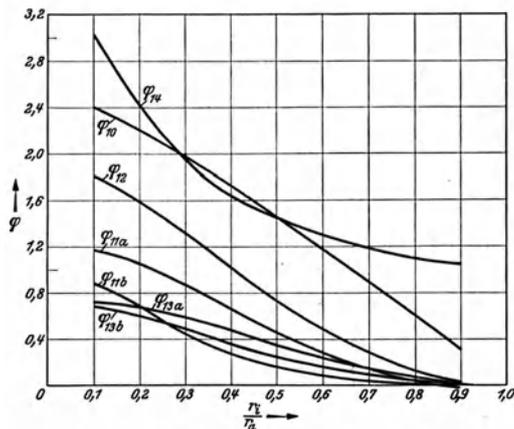


Abb. 14.36. Zur Berechnung der gelochten Platte mit gleichmäßiger Belastung.

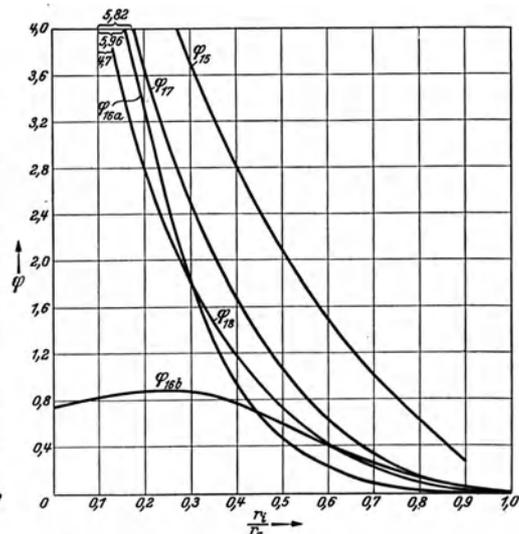


Abb. 14.37. Zur Berechnung der gelochten Platte mit gleichmäßiger Belastung. Platte innen gestützt.

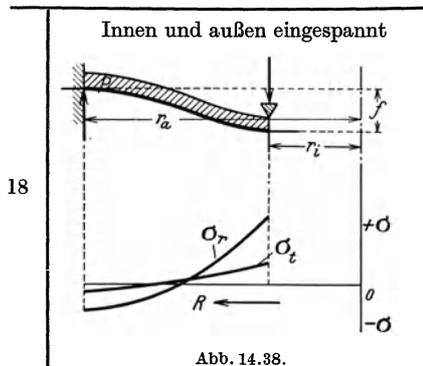


Abb. 14.38.

$$c = \frac{p}{4} (3 r_a^2 + r_i^2) - \frac{p}{2} r_a^2 \frac{r_a^2 \ln r_a^2 - r_i^2 \ln r_i^2}{r_a^2 - r_i^2},$$

$$d = -\frac{p}{8} r_a^2 r_i^2 + \frac{p}{4} r_a^2 \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \ln \frac{r_a^2}{r_i^2}.$$

Die größte Spannung ist σ_r für $r = r_i$

$$\sigma_{\max} = \varphi_{18} \frac{p r_a^2}{h^2}.$$

Werte von φ_{18} aus Abb. 14.37.

Bei der Plattenberechnung ist die eine Hauptspannung σ_z immer gleich Null oder sie wird als klein vernachlässigt. Wenn die beiden anderen Hauptspannungen σ_r und σ_t gleiches Vorzeichen haben, so ist nur die größere der beiden maßgebend. In allen Fällen kann der Spannungskreis gezeichnet und die Bruchgefahr (nach Mohr) leicht beurteilt werden.

Zahlenbeispiel 14.2. Nachrechnung der Flanschverbindung (Abb. 14.39) für 377 mm Rohrdurchmesser bei $p = 20$ atü.

Für den ungünstigsten Fall, daß der Druck auf die ganze Dichtungsfläche wirkt ist die Längskraft der Flanschverbindung: $P = \pi/4 \cdot 43,5^2 \cdot 20 = 29\,700$ kg.

Mit $m = 10/3$, $R = 30$, $r_a = 26,2$, $r_i = 22$ und $r_0 = 21$ cm wird nach Pos. 9, S. 104.

$$\sigma_{\max} = \frac{3 \cdot 0,7}{2\pi} \cdot \left[\frac{13 \cdot 2}{7} \ln \frac{262}{220} + \frac{26,2^2 - 22^2}{30^2} \right] \cdot \frac{30^2}{30^2 - 21^2} \cdot \frac{P}{h^2} = 0,5667 P/h^2 = 713 \text{ kg/cm}^2.$$

Bei der Beurteilung der Bruchgefahr ist zu beachten, daß bei dieser Flanschverbindung die größte Beanspruchung (am Innenrand) in der unmittelbaren Nähe der Kraftangriffsstelle liegt, für welche die Theorie kein unbedingt zuverlässiges Ergebnis geben kann. Außerdem ist nur der Flüssigkeitsdruck in Rechnung gesetzt, während die Schrauben bedeutend kräftiger vorgespannt werden (vgl. Abschn. 23.4); auch die Wärmespannungen wurden nicht berücksichtigt.

Zahlenbeispiel 14.3¹. Der Niederdruckkolben aus Stahlguß einer Lokomotive (Abb. 14.40) ist beim Anfahren mit $p = 6,5$ kg/cm² belastet. Wie groß ist die größte Beanspruchung?

Doppelwandige Kolben ohne Versteifungsrippen sind statisch unbestimmt. Bei

¹ Stephan: Dingler 1907, S. 577.

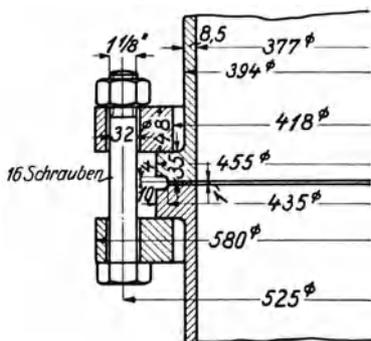


Abb. 14.39 zum Zahlenbeispiel 14.2.

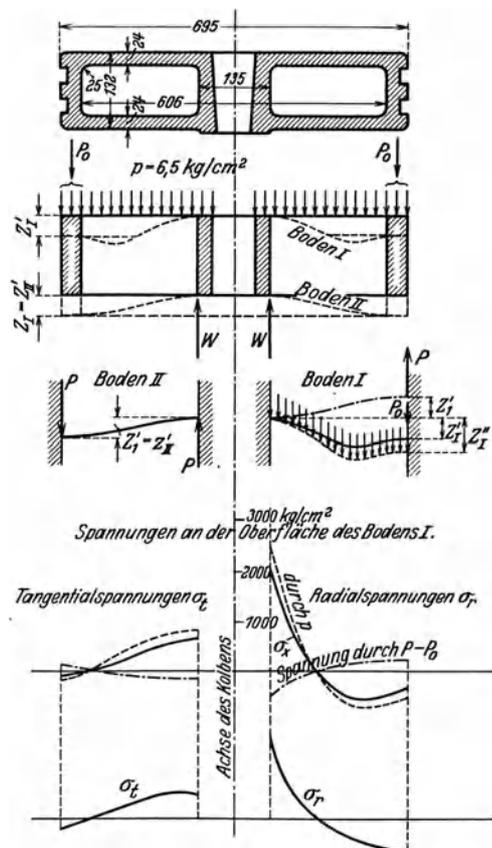


Abb. 14.40. Niederdruckkolben. Zahlenbeispiel 14.3.

der Stärke des Kranzes, in dem die Kolbenringe liegen, und der Nabe kann angenommen werden, daß die beiden Böden außen und innen vollkommen eingespannt sind. Wenn der äußere Kranz als starr angesehen wird, so ist die Durchbiegung am äußeren Umfang für die beiden Böden gleich groß, $w_I = w_{II}$.

Der untere Boden *II* ist durch die am äußeren Umfang konzentrierte Ringlast P belastet, so daß nach Fall 8, S. 103:

$$w_{II} = 0,22 \frac{P r_a^2}{E h^3} \left\{ 1 - \left(\frac{r_i}{r_a} \right)^2 - \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left(\ln \frac{r_a^2}{r_i^2} \right)^2 \right\}.$$

Mit $r_a = 30,3$, $r_i = 6,75$ ist $\left(\frac{r_a}{r_i} \right)^2 = 20,16$ und $\ln \frac{r_a^2}{r_i^2} = 3,03$. Damit wird

$$w_{II} = 6,98 \frac{P}{E}.$$

Auf den oberen Boden *I* wirkt die Ringlast P_0 und der Gegendruck des unteren Bodens P sowie die gleichmäßige Belastung p . Die Ringlast

$$P_0 = \pi/4 (69,5^2 - 60,6^2) 6,5 = 5970 \text{ kg}.$$

Die Durchbiegung des Bodens *I* unter der Ringlast $P - P_0$ ist (Fall 8)

$$w'_I = 6,98 \frac{P - P_0}{E}.$$

Die Durchbiegung des Bodens unter der gleichmäßigen Belastung p folgt aus der Gleichung der deformierten Mittelfläche:

$$w = \frac{1}{2N} \left[\frac{p}{32} r^4 + \frac{p r_a^2}{4} r^2 (\ln r - 1) + \frac{c}{4} r^2 + d \ln r + e \right]. \quad (14.49)$$

Da die Platte am inneren Umfang gleichmäßig aufliegt, ist für $r = r_i$, $w = 0$

$$0 = -\frac{p}{32} r_i^4 + \frac{p r_a^2}{4} r_i^2 (\ln r_i - 1) + \frac{c}{4} r_i^2 + d \ln r_i + e.$$

So daß für $r = r_a$:

$$w'_I = -\frac{p}{32} (r_a^4 - r_i^4) + \frac{p}{8} r_a^4 [r_a^4 \ln r_a^2 - r_i^2 \ln r_i^2 - 2(r_a^2 - r_i^2)] + \frac{c}{4} (r_a^2 - r_i^2) + \frac{d}{2} \ln \frac{r_a^2}{r_i^2}.$$

Mit den Werten von c und d aus der Zusammenstellung Fall 18

$$w'_I = 0,17 \frac{p}{E} \cdot \frac{r_a^4}{h^3} \left[-3 - \left(\frac{r_i}{r_a} \right)^4 + 4 \left(\frac{r_i}{r_a} \right)^2 - 2 \frac{r_i^2}{r_a^2} \ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right)^2 + 4 \frac{\frac{r_i}{r_a}}{1 - \left(\frac{r_i}{r_a} \right)^2} \ln^2 \frac{r_a^2}{r_i^2} \right] = 12700 \frac{p}{E}.$$

Aus $w_I = w_{II}$ folgt

$$6,98 \frac{P}{E} = 12700 \frac{p}{E} - 6,98 \frac{P - P_0}{E},$$

woraus mit $P_0 = 5970$ kg, $P = 8900$ kg. Die größte Spannung für Boden *I* für $r = r_i$

$$\sigma_{\max} = \varphi_{18} p \frac{r_a^2}{h^2} + \varphi_{2a} \frac{P - P_0}{r_a^2}$$

und mit dem Wert von φ_{18} aus Abb. 14.40 und von φ_{2a} aus Abb. 14.27

$$\sigma_{\max} = 2,52 \frac{6,5 \cdot 918,1}{5,76} - 1,05 \frac{2990}{5,76} = 2075 \text{ kg/cm}^2.$$

Durch Einziehen von Rippen wird der Kolben wesentlich widerstandsfähiger, da sich beide Scheiben nun gleich durchbiegen müssen. Die Rippen müssen dazu aber so stark sein, daß sie die auftretenden Schubspannungen übertragen können. Solche Kolben können dann so berechnet werden, als ob jede Platte die halbe Belastung trüge. Bei der Übertragung großer Schubspannungen sind die Aussparungen in den Rippen sehr gefährlich (vgl. S. 45). Der Bruch des Kolbens geht deshalb meist durch die Aussparungen¹.

Zahlenbeispiel 14.4². Der Ventilring von 4 mm Dicke einer Gebläsemaschine (Abb. 14.41) ist durch den Winddruck mit $p = 0,5$ at gleichmäßig belastet. Wie groß ist die größte Beanspruchung, wenn von der zusätzlichen Beanspruchung durch stoßweises Schließen abgesehen wird?

¹ Pfeleiderer, C.: Die Berechnung der Scheibenkolben. VDI-Forschungsheft 97 (1911).

² Ensslin: Dingler Polyt. Journ. 1904, S. 679.

P_a sei der Druck des Ventilringes gegen die äußere Sitzfläche, P_i gegen die innere, dann ist die Gesamtbelastung $P = P_a + P_i$. Die Aufgabe ist wieder statisch unbestimmt, weil P_a und P_i von den Formänderungen des Ringes abhängig sind. Wenn der Ring am äußeren Umfang gestützt gedacht wird, so muß die Durchbiegung f unter dem Einfluß der gleichmäßigen Belastung p und der Ringlast P_i zu Null werden.

Unter der Einwirkung der Kraft P_i (Fall 5) mit $\frac{r_i}{r_a} = \frac{16,5}{22}$ wird

$$c = -\frac{P_i}{2\pi} \cdot 7,45 \quad \text{und} \quad d = -\frac{P_i}{4\pi} \cdot \frac{m+1}{m-1} \cdot 358,$$

so daß

$$f = \frac{3}{4} \cdot \frac{m^2 - 1}{\pi m^2} \cdot \frac{P_i}{E h^3} (r_a^2 - r_i^2) \cdot 4,34$$

ist. Unter der gleichmäßigen Belastung p (Fall 10)

$$c = \frac{p}{4} \cdot 2140, \quad d = -\frac{p}{8} \cdot 267500,$$

$$f = \frac{3}{16} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \frac{p}{E h^3} (r_a^2 - r_i^2) \cdot 1730.$$

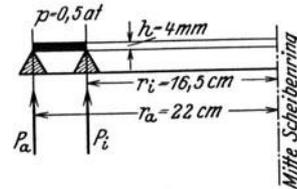


Abb. 14.41.

Durch Gleichsetzen der beiden Werte von f erhält man $P_i = 157$ kg und damit

$$P_a = \frac{\pi}{4} (r_a^2 - r_i^2) \cdot 0,5 - 157 = 176 \text{ kg.}$$

Die größte Beanspruchung folgt aus Abb. 14.26 durch p : $\sigma_{\max} = \varphi_{10} \frac{p \cdot r_a^2}{h^2} = 1150 \text{ kg/cm}^2$

und durch P_i $\sigma_t = \varphi_5 \frac{P_i}{h^2} = -1125 \text{ kg/cm}^2$. Resultierende Spannung = 25 kg/cm^2 .

Schrifttum.

Die Theorie der Biegung gewölbter Schalen ist namentlich durch die grundlegenden Arbeiten von Prof. Dr. H. Reißner (Charlottenburg) und Prof. Dr. E. Meißner (Zürich) entwickelt worden:

Wißler, H.: Festigkeit von Ringflächenschalen. Dissertation 1916. — Bolle, L.: Festigkeit von Kugelschalen. Dissertation 1916. — Dubois, F.: Festigkeit von Kegelschalen. Dissertation 1917. — Honegger, E.: Festigkeit von Kegelschalen mit linear veränderlicher Wandstärke. Dissertation 1919. — Tellers, H.: Über die Festigkeit einwandiger kegelförmiger Kolben. VDI-Forschungsheft Nr. 305 (1928).

Die Berechnungsverfahren sind genau, aber für die praktische Verwendung viel zu zeitraubend.

Almen, A. und Laszlo: The uniform section Disc-Spring. Trans. A. S. M. E. 58 (1936) S. 305 geben ein einfaches Näherungsverfahren für die Berechnung von Kegelschalen konstanter Dicke. Sie vernachlässigen dabei die Radialspannungen und nehmen an, daß die Formänderung nur in einer reinen Drehung besteht. — Poulka, K. A.: Plattenprobleme. Verhandlungen 3. Mechanik-Kongreß, Bd. 2, S. 66 gibt eine einfache Lösung für die halbkreisförmige Platte.

15. Ebene Probleme.

Erfahrungsgemäß treten Brüche häufig gerade dort auf, wo die Festigkeitslehre der prismatischen Stäbe versagen muß, nämlich in der Nähe der Kraftangriffstellen, sowie bei Querschnittsänderungen und sonstigen Unstetigkeiten. So wertvoll die Gesetze der elementaren Festigkeitslehre für den Konstrukteur sind, so kommt er auch bei der Berechnung der einfachsten Maschinenteile (Schrauben, Keile, Nieten, Wellen usw.) mit dem Begriff des prismatischen Körpers nicht aus. Die konstruktiv bedingte Form der Teile weisen vielfach Unstetigkeiten auf, die durch Richtungs- und Querschnittsänderungen bedingt sind. Die Berechnung der Spannungen ist bei ebenen Problemen, bei allmählichen Querschnittsänderungen und für einfache Formen, wie Keil (Abschn. 15.2) und durchlochten Stab (Abschn. 15.3) möglich.

An einigen Beispielen soll gezeigt werden, daß die einfache, elementare Festigkeitslehre viele praktisch wichtige Probleme mit ausreichender Genauigkeit löst, so daß der Konstrukteur dann kein Interesse daran hat, von einer strengeren aber viel umständlicheren Theorie auszugehen. Andererseits folgt aus der Spannungsberechnung bei keilförmigen Trägern, daß die elementare Theorie die Bruchgefahr besonders bei Querschnittsänderungen bedeutend unterschätzt, so daß die Verwendung der einfachen Gleichungen für die Konstruktion eine erhebliche Gefahr bedeutet.

15.1. Die Airysche Spannungsfunktion.

Wenn keine Massenkräfte wirken, so gelten sowohl für ebene Spannungen als auch für ebene Formänderungen [vgl. Gl. (12.61) und (12.67)] die Beziehungen:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0. \quad (15.1)$$

Diese beiden Gleichungen zwischen den drei unbekanntem Spannungen σ_x , σ_y und τ können dadurch erfüllt werden, daß man sie den zweiten Differentialquotienten einer beliebigen Funktion $V(x, y)$ in folgender Weise gleichsetzt:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad \tau = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, \quad (15.2)$$

wie man sich durch Einsetzen leicht überzeugt. Die Funktion V wird nach ihrem Entdecker die Airysche Spannungsfunktion genannt. Die Gestaltänderung ist durch die Dehnungen:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \text{und} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (15.3)$$

und durch die Winkeländerung γ

$$\gamma = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}. \quad (15.4)$$

gekennzeichnet (vgl. S. 53). Die drei Formänderungen sind in den beiden Verschiebungen ξ und η der Koordinaten x und y ausgedrückt und können deshalb nicht voneinander unabhängig sein. Man erkennt leicht, daß

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} \quad (15.5)$$

ist; d. i. die sog. Verträglichkeitsbedingung (Kompatibilität). Führt man darin die bekannten Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen ein:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} \right), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x}{m} \right) \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{2(m+1)}{mE} \tau, \quad (15.6)$$

so erhält man:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x}{m} \right) = \frac{2(m+1)}{m} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y}. \quad (15.7)$$

Differenziert man Gl. (1a) nach x und Gl. (1b) nach y , und addiert beide, so findet man die Beziehung:

$$2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} = - \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right).$$

In Gl. (7) eingesetzt, lautet die neue Form der Kompatibilitätsbedingung:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

und mit den Spannungsgleichungen (2)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)^2 = \Delta^2 V = 0. \quad (15.8)$$

Damit ist die gesuchte Bedingungsgleichung für V gefunden; sie ist eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung mit der allgemeinen Lösung:

$$V = f_1(x + iy) + f_2(x - iy) + (x^2 + y^2) [f_3(x + iy) + f_4(x - iy)] \quad (15.9)$$

worin f_1 bis f_4 beliebige Funktionen sind. Sowohl der reelle Teil $\Phi(x, y)$ als auch der imaginäre Teil $i\psi(x, y)$ von V genügt für sich als Lösung der Differentialgleichung. Die Funktionen Φ und ψ stehen senkrecht zueinander. Die Schwierigkeit der Lösung einer bestimmten Aufgabe besteht darin, die allgemeine Lösung den vorgeschriebenen Randbedingungen anzupassen. Man geht dabei meistens so vor, daß man eine Lösung wählt und dann die daraus folgenden Randbedingungen berechnet.

Für viele Aufgaben ist es zweckmäßig, die Lösung der allgemeinen Gl. (9) in Polarkoordinaten umzuformen, indem die Spannungen mit σ_t , σ_r statt mit σ_x, σ_y bezeichnet werden; Gl. (2) lautet nun:

$$\sigma_r = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad \sigma_t = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \quad \text{und} \quad \tau = -\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial t},$$

worin $V =$ Funktion (r, φ) ist. Eine partielle Differentiation nach r hat den Sinn, daß an der Richtung t (d. h. am Winkel φ) nichts geändert werden soll. Der Ausdruck für σ_t ändert sich also nicht, wenn die R - und X -Achse zusammenfallen. Die erste Ableitung nach t gibt:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi}.$$

Bei der zweiten Ableitung muß berücksichtigt werden, daß ein Fortschreiten in tangentialer Richtung um dt nicht nur eine Winkeländerung $d\varphi$, sondern zugleich eine Änderung von r um dr entspricht (vgl. Abb. 15.1), also

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r}. \\ \text{und} \quad \tau &= \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial t} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (15.10)$$

Die allgemeine Gleichung $\Delta^2 V = 0$ lautet also voll ausgeschrieben:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0. \quad (15.11)$$

15.2. Symmetrische Beanspruchungen.

Für symmetrische Beanspruchungen (unabhängig von φ) ist $V =$ Funktion (r) , $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{d}{dr}$ und

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dV}{dr} \right) = 0. \quad (15.12)$$

Durch Einführung von $r = e^z$ kann diese Gleichung auf eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zurückgeführt werden. In dieser Weise erhält man die allgemeine Lösung:

$$V = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D, \quad (15.13)$$

mit den Spannungen: $\tau = 0$,

$$\sigma_t = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = -A/r^2 + 3B + 2B \ln r + 2C \quad \text{und} \quad \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = A/r^2 + B + 2B \ln r + 2C \quad (15.14)$$

Für eine nicht durchlochte zylindrische Scheibe werden A und B gleich Null, da sonst für $r=0$ immer unendlich große Spannungen auftreten würden. Die Spannungsverteilung

$$\sigma_r = \sigma_t = 2C,$$

gibt dann eine gleichmäßige Zug- resp. Druckbeanspruchung unabhängig von r . Ein Spezialfall der durchlochten Scheibe erhält man mit $B=0$, also

$$\sigma_t = -A/r^2 + 2C \quad \text{und} \quad \sigma_r = A/r^2 + 2C,$$

d. i. die Lösung für ein Hohlzylinder unter konstantem Innen- und Außendruck (Abschn. 14.3) ¹.

Eine symmetrische Beanspruchung, für welche auch die elementare Festigkeitslehre eine Lösung gibt, ist die reine Biegung eines kreisförmig gekrümmten Stabes. Die Randbedingungen lauten in diesem Fall:

$$\text{a) } \sigma_r = 0 \text{ für } r = r_1 \text{ und } r = r_a, \quad \text{b) } \int_{r_i}^{r_a} \sigma_t dr = 0 \quad \text{und} \quad \text{c) } \int_{r_i}^{r_a} \sigma_t r dr = -M.$$

Aus der ersten Randbedingung folgt mit Hilfe der allgemeinen Lösung Gl. (6):

$$A/r_i^2 + B(1 + 2 \ln r_i) + 2C = 0 \quad \text{und} \quad A/r_a^2 + B(1 + 2 \ln r_a) + 2C = 0. \quad (\text{a})$$

Die zweite Randbedingung: $\int_{r_i}^{r_a} \sigma_t dr = 0 = \int_{r_i}^{r_a} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} dr = \left| \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r_i}^{r_a} = 0$ gibt mit Gl. (6) die Bedingung:

$$[A/r_a + B r_a (1 + 2 \ln r_a) + 2C r_a] - [A/r_i + B r_i (1 + 2 \ln r_i) + 2C r_i] = 0$$

welche schon durch die Gl. (a) erfüllt ist. Die dritte Randbedingung:

$$\int_{r_i}^{r_a} \sigma_t r dr = \int_{r_i}^{r_a} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} r dr = -M \quad \text{gibt durch partielle Integration:} \quad -M = \left| \frac{\partial V}{\partial r} \cdot r \right|_{r_i}^{r_a} - \int_{r_i}^{r_a} \frac{\partial V}{\partial r} dr.$$

¹ Für Zylinder mit exzentrischer Bohrung unter Druck. Vgl. G. B. Jeffery: Phil. Trans. Roy. Soc., London. A. Vol. 221 p. 265 (1921).

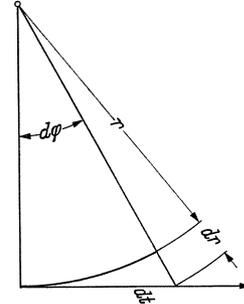


Abb. 15.1.

Aus der zweiten Randbedingung folgte, daß das erste Glied der rechten Seite gleich Null ist, so daß

$$M = \left| V \right|_{r_i}^{r_a} = A \ln \frac{r_a}{r_i} + B (r_a^2 \ln r_a - r_i^2 \ln r_i) + C (r_a^2 - r_i^2) \quad (c)$$

ist. Durch die drei Gl. (a) und (c) sind die Konstanten A , B und C eindeutig bestimmt und damit auch die Spannungen σ_r und σ_t . Das Ergebnis ist:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{4M}{N} \left\{ \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2} \ln \frac{r_a}{r_i} + r_a^2 \ln \frac{r}{r_a} + r_i^2 \ln \frac{r_i}{r} \right\} = 0 \text{ für } r = r_i \text{ und } r = r_a, \\ \sigma_t &= -\frac{4M}{N} \left\{ -\frac{r_a^2 r_i^2}{r^2} \ln \frac{r_a}{r_i} + r_a^2 \ln \frac{r}{r_a} + r_i^2 \ln \frac{r_i}{r} + r_a^2 - r_i^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (15.16)$$

mit
$$N = (r_a^2 - r_i^2)^2 - 4 r_a^2 r_i^2 \left(\ln \frac{r_a}{r_i} \right)^2.$$

Aus Gl. (12.26) folgt nach der Biegetheorie, mit $P = 0$, $b = 1$ und $f = 2e$ für $\eta = \pm e$:

$$\sigma_t = \frac{M}{e^2} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{e}{r} \pm \frac{(e/r)^2}{\lambda(1 \pm e/r)} \right\} = \frac{M}{e^2} f(e/r).$$

Setzt man für $\eta = +e$, $f(e/r) = C_1$ und für $\eta = -e$, $f(e/r) = -C_2$, so ist

$$\sigma_{t1} = C_1 \frac{M}{e^2} \quad \text{und} \quad \sigma_{t2} = -C_2 \frac{M}{e^2}.$$

Nach der genauen Lösung (15.16) ist für $r_x = r_a$: $\sigma_{t1} = -4M \frac{r_a^2 - r_i^2 - 2r_i^2 \ln r_a/r_i}{(r_a^2 - r_i^2)^2 - 4r_a^2 r_i^2 \ln(r_a/r_i)^2}$.

Setzt man $r_i = r - e$, $r_a = r + e$ und damit $r_a^2 - r_i^2 = 4er$ und $r_a r_i = r^2 - e^2$ in dieser Gleichung ein, so ist

$$\sigma_{t1} = -4 \frac{M}{e^2} \cdot \frac{4 \frac{e}{r} - 2 \left(1 - \frac{e}{r} \right)^2 \ln \frac{1+e/r}{1-e/r}}{4 - \left(\frac{r}{e} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{e}{r} \right)^2 \right] \ln \left(\frac{1+e/r}{1-e/r} \right)^2} = \frac{M}{e^2} f\left(\frac{e}{r}\right) = C_1 \frac{M}{e^2}.$$

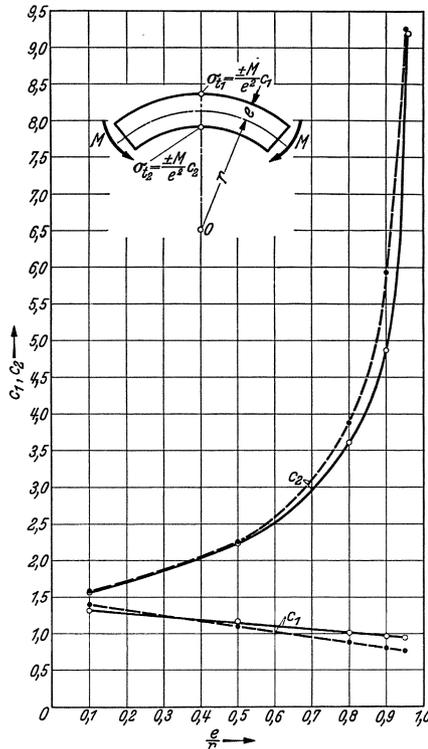


Abb. 15.2. Reine Biegung eines gekrümmten Stabes. Vergleich der genauen Theorie (—) mit der elementaren Lösung (---)

Ebenso findet man $\sigma_{t2} = -C_2 \frac{M}{e^2}$.

In Abb. 15.2 ist die genaue Lösung mit der elementaren verglichen; es folgt daraus, daß die einfachere, elementare Lösung für den praktischen Gebrauch vollständig ausreicht.

Die Belastung durch eine Einzelkraft P im Nullpunkt des Koordinatensystems (Abb. 15.3) führt zu der einfachen Lösung:

$$V = -k \cdot Pr\varphi \sin \varphi. \quad (15.17)$$

Es ist dann: $\frac{\partial V}{\partial r} = -kP\varphi \sin \varphi$

und $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \sigma_t = 0$ für alle Werte von φ ,

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -kPr (\varphi \cos \varphi + \sin \varphi)$$

und $\tau = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) = 0$ für alle Werte von φ ,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = -kPr (-\varphi \sin \varphi + \cos \varphi + \cos \varphi), \quad \text{und}$$

$$\sigma_r = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = -\frac{2kP}{r} \cdot \cos \varphi. \quad (15.18)$$

Das ist die Gleichung von Boussinesq¹. Ziehen wir einen Kreis mit beliebigem Durchmesser d , dessen Mittelpunkt auf der X-Achse (Krafttrichtung) liegt und die Y-Achse in 0 berührt, so ist für jeden Punkt des

¹ Boussinesq: C. r. Soc. Biol., Paris 114 (1892) S. 1510.

Kreises $r = d \cos \varphi$ und

$$\sigma_r = 2 P / \pi r = \text{konstant, d. h.}$$

in allen Punkten des Kreises (mit Ausnahme der Kraftangriffstelle 0) ist die radiale Spannung konstant. Die Konstante k in Gl. (17) ist dadurch gegeben, daß die Summe der Komponenten in der P -Richtung gleich $-P$ sein muß, also

$$-P = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sigma_r \cos \varphi r d\varphi = -2 P k \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^2 \varphi d\varphi = -2 P k \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

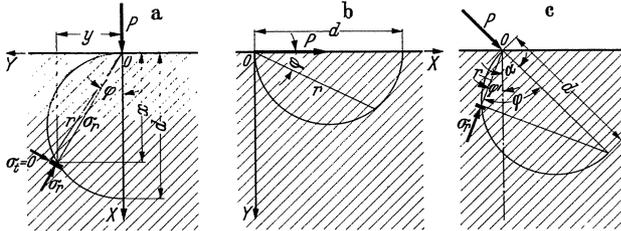


Abb. 15.3. Belastung durch Einzelkraft.

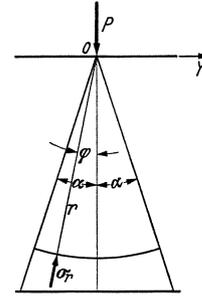


Abb. 15.4. Keilförmiger Träger.

Für die Halbebene (Abb. 15.3 a) mit den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ ist $k = 1/\pi$: Diese Lösung gilt für jede Kraftrichtung, wenn der Winkel φ nur immer von der Kraftrichtung aus gemessen wird (vgl. Abb. 15.3 a, b und c).

Keilförmige Träger. Da $\sigma_t = \tau = 0$ ist, kann die Begrenzungsebene auch keilförmig angenommen werden, weil dort keine Spannungen wirken. Für den Träger mit dem Spitzenwinkel 2α auf Zug oder Druck beansprucht (Abb. 15.4) ist

$$K = 1/2 (\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha) \tag{15.19}^1$$

und für Biegebeanspruchung (Abb. 15.5)

$$k = 1/2 (\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha) \tag{15.20}^1$$

Zahlentafel 15.1. Zur Berechnung keilförmiger Träger, belastet durch Einzelkraft.

Für $\alpha =$	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
1/K	0,1741	0,3455	0,5118	0,6705	0,8193	0,9566	1,0808	1,1905	1,2854
1/k	0,0005	0,0035	0,0118	0,0277	0,0533	0,0906	0,1440	0,2057	0,2854
$\alpha =$	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
1/K	1,3651	1,4298	1,4802	1,5175	1,5431	1,5590	1,5673	1,5703	1,5708
1/k	0,3803	0,4900	0,6142	0,7515	0,9003	1,0590	1,2253	1,3967	1,5708

Die Gl. (18) liefert die exakte Lösung für die Biegung eines keilförmigen Stabes unter der Voraussetzung, daß an der Einspannstelle die durch diese Gleichung vorgeschriebenen Spannungen herrschen. Legen wir nun (wie es bei der elementaren Festigkeitslehre gebräuchlich ist) einen ebenen Schnitt senkrecht zur Stabachse, so können die in diesem Schnitt wirkenden Spannungen aus den Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_r \cos^2 \varphi = -\frac{2kP}{y} \sin \varphi \cos^3 \varphi, \quad \sigma_y = \sigma_r \sin^2 \varphi = -\frac{Py \cdot x \sin^4 \varphi}{y^3 (\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha)} \\ \text{und} \quad \tau = \sigma_r \sin \varphi \cos \varphi = \frac{Px^2 \sin^4 \varphi}{y^3 (\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha)} \end{aligned} \right\} \tag{15.21}$$

berechnet werden, sie sind in Abb. 15.5 graphisch dargestellt. Diese Gleichungen gestatten die Beurteilung der Brauchbarkeit der elementaren Theorie. Führen wir darin das Trägheitsmoment $J = h^3/12$ ein, so wird die größte Normalspannung für $x = \pm h/2$ und $\varphi = 90 \pm \alpha$

$$(\sigma_y)_{\max} = \pm \frac{Py \cdot h}{2J} \cdot \frac{h^3}{12 y^3} \cdot \frac{\sin^4 (90 - \alpha)}{\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha} \tag{15.22}$$

Nun ist $h/2 y = \text{tg } \alpha$ und für kleine Winkel α (etwa bis 15°) $\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \frac{2}{3} \alpha^3$, also

$$(\sigma_y)_{\max} = \pm \frac{Py \cdot h}{2J} \cdot \left(\frac{\text{tg } \alpha}{\alpha} \right)^3 \cos^4 \alpha \tag{15.23}$$

¹ Michell, J. H.: Proc. Math. Soc., London Bd. 34 (1902) S. 134.

und

$$\tau_{x=\pm \frac{h}{2}} = -\frac{P \cdot x^2}{4J} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}\right)^3 \cos^4 \alpha. \quad (15.24)$$

Für kleine Winkel α weicht der Faktor $\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}\right)^3 \cos^4 \alpha$ nur wenig von 1 ab; die Spannung σ_y stimmt

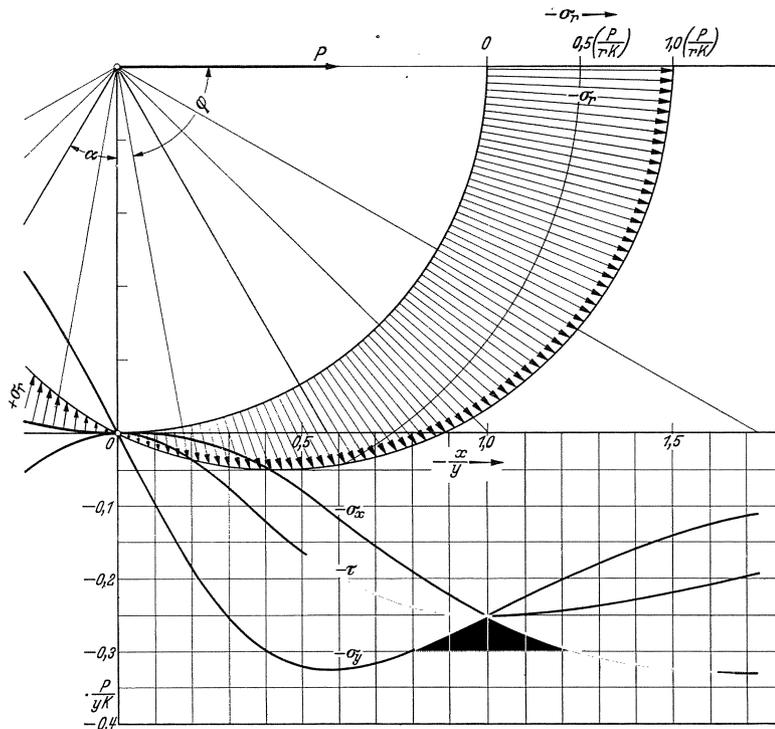


Abb. 15.5. Spannungen in einem keilförmigen Träger, belastet durch Einzelkraft.

dann mit der Biegespannung $\sigma_b = \frac{P y \cdot h}{2J}$ nach der elementaren Festigkeitslehre überein¹. Für $\alpha = 10^\circ$ ist

$$(\sigma_y)_{\max} = 0,94 \sigma_b$$

nach der elementaren Theorie. Abweichend davon zeigt die genaue Theorie, daß die größte Schubspannung in der äußersten Faserschicht auftritt. Diese gleichzeitig wirkende Schubspannung ist groß, nämlich doppelt so groß als die (nach der elementaren Lehre) in der neutralen Faserschicht auftretenden Schubspannung. Wie stark die Bruchgefahr dadurch bei der einfachen Biegegleichung unterschätzt wird, zeigt der Vergleich der Spannungskreise in

beiden Fällen (Abb. 15.6). Man nennt das Verhältnis:

$$\frac{\text{wirklich auftretende größte Spannung}}{\text{als prismatischer Stab berechnete Spannung}} = \alpha_k$$

„Formziffer“ (vgl. Abschn. 16). Für einen konischen Stab ist $\alpha_k = \sigma_y/\sigma_r = 1/\cos^2 \alpha$. Für $\alpha = 15^\circ$ (resp. 30°) ist $\alpha_k = 1,13$ (resp. $1,35$).

Die Belastung durch ein Moment M im Nullpunkt des Koordinatensystems führt zur Lösung:

$$V = k \cdot M (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi). \quad (15.25)$$

$$\text{Es ist dann } \sigma_t = 0, \tau = 0 \text{ und } \sigma_r = -\frac{2kM}{r^2} \sin 2\varphi. \quad (15.26)$$

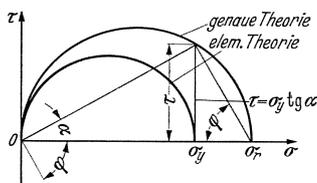


Abb. 15.6. Die elementare Theorie unterschätzt die Bruchgefahr von keilförmigen Trägern.

Aus der Bedingung, daß $2 \int_0^\alpha \sigma_r r d\varphi \cdot r \sin \varphi = -M$ ist, folgt

$$k = \frac{3}{8 \sin^3 \alpha} \text{ und für } \alpha = \frac{\pi}{2}, k = 3/8. \quad (15.27)$$

Zahlentafel 15.2. Zur Berechnung keilförmiger Träger; belastet durch ein Moment.

Für $\alpha =$	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
ist $k =$	559	71,9	21,6	9,37	4,99	3,0	1,99	1,41	1,06
$\alpha =$	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
$k =$	0,833	0,682	0,578	0,506	0,453	0,417	0,394	0,380	0,375

In einem Schnitt senkrecht zur Stabachse sind die Spannungen:

$$\sigma_x = \sigma_r \sin^2 \varphi \quad \sigma_y = \sigma_r \cos^2 \varphi \quad \text{und} \quad \tau = \sigma_r \sin \varphi \cos \varphi,$$

Nach der elementaren Festigkeitslehre ist die größte Biegespannung:

$$\sigma_b = \pm 6 M/h^2, \text{ mit } h = 2x.$$

¹ Das gilt auch für den gekrümmten Stab. Vgl. Böttcher, K.: Versuche über die Spannungsverteilung in Zughaken. VDI-Forschungsheft Nr. 337 (1934).

Aus
$$\sigma_y = -\frac{2kM}{r^2} \cos^2 \varphi \sin 2\varphi = -\frac{2kM}{y^2} \cdot \cos^4 \varphi \sin 2\varphi$$
 folgt mit $k = \frac{3}{8 \sin^3 \alpha}$, $\varphi = \alpha$ und $\frac{h}{2y} = \operatorname{tg} \alpha$ die Randspannung
$$(\sigma_y)_R = -\frac{3}{4} \frac{M}{y^2} \cdot \frac{\cos^4 \alpha}{\sin^3 \alpha} \sin 2\alpha = -6 \frac{M}{h^2} \cdot \frac{h^2 \cos^5 \alpha}{(2y)^2 \sin^2 \alpha} = \frac{6M}{h^2} \cos^3 \alpha. \quad (15.28)$$

Solange $\cos \alpha = 1$ gesetzt werden darf, gibt die elementare Festigkeitslehre den richtigen Wert der größten Randspannung; sie vernachlässigt aber die gleichzeitig dort auftretende Schubspannung und unterschätzt deshalb die Bruchgefahr.

Für die gleichmäßig verteilte Belastung (Abb. 15.7) ist

$$V = \frac{p}{2\pi} (r_2^2 \varphi_2 - r_1^2 \varphi_1). \quad (15.29)$$

Die Lösung stammt von J. H. Michell (Proc. London Math. Soc. Bd. 34 [1902] S. 134). Die Spannungsgleichungen findet man z. B. auch in Nadai: *Elastische Platten*, J. Springer, Berlin 1925, S. 229, 30 und in Timoshenko: *Theory of Elasticity*. McGraw Hill Book Co., 1934 S. 90/91.

Für halbkreisförmige Belastung hat L. Föppl (Forschung 7 [1936] S. 209/221) die Lösung gegeben. Sie bildet die Grundlage für die Berechnung der Beanspruchungen in der Nähe der Kraftangriffstelle und wird z. B. bei der Berechnung von Rollen, Laufräder, Zahnräder usw. verwendet.

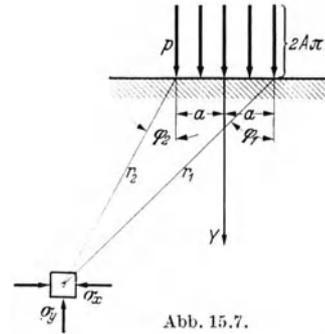


Abb. 15.7.

15.3. Nicht-symmetrische Beanspruchungen.

Eine allgemeine Lösung für von φ nicht unabhängige Belastungen findet man in A. Föppl, *Vorlesungen über technische Mechanik*, Bd. 5, S. 89:

$$V = (\alpha r^{n+2} + \beta r^{-n+2} + \gamma r^n + \delta r^{-n}) \sin n\varphi, \quad (15.30)$$

worin n alle positive, ganze Zahlen größer als 1 sind. Für $n = 1$ ist

$$V = (\alpha r^3 + \beta r + \gamma r + \delta/r) \sin \varphi \quad (15.31)$$

und die Spannungen sind:

$$\sigma_r = \left(2\alpha r + \frac{\beta}{r} - \frac{2\delta}{r^3}\right) \cos \varphi, \quad \sigma_t = \left(6\alpha r + \frac{\beta}{r} - \frac{2\delta}{r^3}\right) \sin \varphi \quad \text{und} \quad \tau = -\left(2\alpha r + \frac{\beta}{r} - \frac{2\delta}{r^3}\right) \sin \varphi.$$

Verfügen wir über die drei Konstanten α , β und δ beim Ringsektor so, daß der für τ und σ_r gleiche Klammerausdruck für $r = r_a$ und für $r = r_i$ verschwindet, indem

$$2\alpha r_a + \frac{\beta}{r_a} - \frac{2\delta}{r_a^3} = 0 \quad \text{und} \quad 2\alpha r_i + \frac{\beta}{r_i} - \frac{2\delta}{r_i^3} = 0$$

gesetzt wird, so kommen wir auf den Fall der Biegung eines gekrümmten Stabes, dessen gekrümmte Seitenflächen unbelastet sind (Abb. 15.8). Der Vergleich mit der elementaren Lösung zeigt wieder die Brauchbarkeit der einfachen Theorie des gekrümmten Stabes für die Berechnung der größten Spannungen (vgl. z. B. Timoshenko: *Theory of Elasticity*, S. 70).

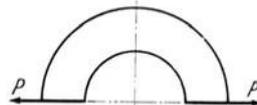


Abb. 15.8.

Eine andere, praktisch sehr wichtige Aufgabe ist die Berechnung der Spannungen in einem durchlochtem Stab. Für einen unendlich breiten Stab (Abb. 15.9) lautet die Lösung:

$$V = \frac{p}{4} \left(r^2 - 2a^2 \ln r - \frac{(r^2 - a^2)^2}{r^2} \cos 2\varphi \right) \quad (15.32)$$

mit den Spannungen:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p}{2} \left[1 - \frac{a^2}{r^2} + \left(1 - 4 \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right] \\ \sigma_t &= \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{p}{2} \left[1 + \frac{a^2}{r^2} \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right] \\ \tau &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) = \frac{p}{2} \left[-1 - 2 \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right] \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

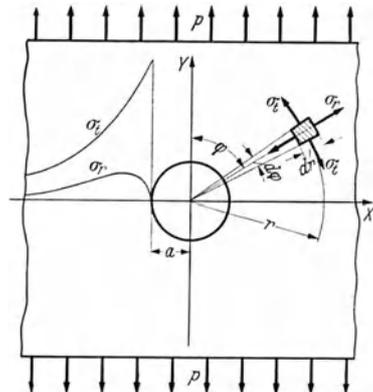


Abb. 15.9. Durchlochtem Platte.

Für $\varphi = \pi/2$ folgt daraus die einfache Lösung für die Spannungen in der X -Achse:

$$\sigma_r = \frac{3}{2} p \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^4}{r^4} \right), \quad \sigma_t = \frac{p}{2} \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \text{ und } \tau = 0.$$

Für $r = r_a$ (am Lochrand) ist $\sigma_t = 3 p$.

Bei endlicher Breite sind diese Gleichungen nicht mehr streng gültig. Leon und Wilhelm haben eine Näherungslösung abgeleitet, welche darauf begründet ist, daß in einiger Entfernung vom Lochrande (etwa $r/a > 3$) die Spannungen sich nicht mehr wesentlich ändern.

Schrifttum.

Diese Aufgabe wurde zuerst von G. Kirsch gelöst: Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. Z. VDI Bd. 42 (1898) S. 797/807.

Vgl. auch A. Föppl: Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. 5 S. 347.

Leon A. und F. Wilhelm: Die Spannungsverteilung in gelochten und gekerbten Zugstäben. Mitt. staatl. techn. Versuchsamt Wien 3 (1914) S. 33/50.

Inglis, C. E.: Stresses in a plate, due to the presence of cracks and sharp corners. Trans. Inst. of Naval Arch. Bd. 55 (1913) S. 219/42.

Weber, C.: Über die Spannungsverteilung durch kreisrunde Löcher in einem gezogenen Blech. Z. MM. Bd. 2 (1922) S. 185/87 und S. 267/73.

Pöschl, Th.: Über die Spannungsverteilung durch kreisförmige Löcher in einem gezogenen Blech. Z. MM. Bd. 1 (1921) S. 174/80.

Henning, A.: Polarisationsoptische Spannungsuntersuchungen am gelochten Zugstab und am Nietloch. Forschung Bd. 4 (1933) S. 53/63.

Siebel, E. und E. Kopf: Beanspruchung in gelochten Platten. VDI-Forschgs.-Heft Nr. 369 (1934).

15.4. Die allgemeine Differentialgleichung der elastischen Fläche¹.

Unter der auch bei der Kreisplatte (Abschn. 14.5) gemachten Voraussetzung, daß die Durchbiegungen w klein im Verhältnis zur Plattendicke sind, liegt bei der beliebig begrenzten Platte ein ebener Spannungszustand vor. Die Punkte einer zur Mittelebene senkrechten Geraden liegen nach der Biegung wieder auf einer Geraden und bilden eine Normale der elastischen Fläche. Ein Punkt x, y, z hat sich nach der Biegung um die kleinen Strecken ξ und η parallel zur XY -Ebene und in der Richtung der X - bzw. Y -Achse verschoben. Aus Abb. 14.14 folgt dann:

$$\xi = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{und} \quad \eta = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

und mit den Gl. (15.3/4):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Zwischen den Dehnungen und den Spannungen bestehen die allgemeinen Beziehungen:

$$E \varepsilon_x = \sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} \quad \text{und} \quad E \varepsilon_y = \sigma_y - \frac{\sigma_x}{m}.$$

Nach den Spannungen aufgelöst erhält man mit den Werten der Dehnungen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{mE}{m^2-1} (m\varepsilon_x + \varepsilon_y) = -\frac{mE}{m^2-1} z \left(m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{mE}{m^2-1} (m\varepsilon_y + \varepsilon_x) = -\frac{mE}{m^2-1} z \left(m \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15.33)$$

und

$$\tau = G \cdot \gamma = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (15.34)$$

Es ist zweckmäßig, statt mit den Spannungen, mit den Momenten m_x , m_y und m_τ zu rechnen, die wie folgt definiert sind:

$$m_x = \int \sigma_x z dz, \quad m_y = \int \sigma_y z dz \quad \text{und} \quad m_\tau = \int \tau z dz.$$

Nach Einführung der Gl. (33 und 34) und Integration nach z (von $-h/2$ bis $h/2$) erhalten wir (mit $N = \frac{E h^3 m^2}{12(m^2-1)}$ = Plattensteifigkeit) die Grundformeln für die Spannungsmomente:

$$\left. \begin{aligned} \text{Biegemoment } m_x &= -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad m_y = -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \text{und Schermoment } m_\tau &= -N \left(1 - \frac{1}{m} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (15.35)$$

¹ Für die Berechnung von Platten wird verwiesen auf Dr.-Ing. A. Nadai: Die elastischen Platten. Berlin: Julius Springer 1925.

Wir betrachten nun das Gleichgewicht der Kräfte und Momente, die an einem kleinen prismatischen Element $dx \cdot dy \cdot h$ der Platte angreifen (Abb. 15.10). In den Querschnitten $dy \cdot h$ bzw. $dx \cdot h$, deren nach außen gerichtete Normale entgegen der positiven Richtung der X - bzw. Y -Achse zeigt, wirken außer den Spannungsmomenten m_x , m_y und m_z , die Scherkräfte

$$q_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad \text{bzw.} \quad q_{yz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz$$

senkrecht zur Mittelebene. Die positiven Richtungen dieser (ebenfalls auf die Längeneinheit der Schnittbreite bezogenen) Querkräfte sind in zwei Seitenflächen des prismatischen Elementes aus der Abbildung ersichtlich.

In den Gleichgewichtsbedingungen der Momente bezüglich der X - bzw. der Y -Achse ist zu berücksichtigen, daß sich die Momente m_x , m_y und m_z um ein Differential ändern, wenn x , y um dx , dy zunehmen; sie lauten:

$$q_{xz} = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_z}{\partial y} \quad \text{und} \quad q_{yz} = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_z}{\partial x}$$

und mit den Gl. (35):

$$\begin{aligned} q_{xz} &= -N \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & q_{yz} &= -N \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ q_{xz} &= -N \frac{\partial \Delta w}{\partial x} & \text{und} & \quad q_{yz} = -N \frac{\partial \Delta w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (15.36)$$

Aus Gl. (35) folgt weiter, daß die Summe der Biegemomente

$$m_x + m_y = -(1 + 1/m) N \Delta w \quad (15.37)$$

ist. Schließlich ist die Gleichgewichtsbedingung der zur Mittelebene senkrechten Kräfte anzugeben. Wenn man beachtet, daß die Unterschiede der in den Schnitten x und $x + dx$, y und $y + dy$ übertragenen Querkräfte der äußeren Last $p dx \cdot dy$ das Gleichgewicht halten müssen, erhält man die Beziehung:

$$\frac{\partial q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yz}}{\partial y} + p = 0.$$

Sie liefert, wenn die Ausdrücke für die Querkräfte q_{xz} und q_{yz} aus Gl. (36) eingeführt werden:

$$\Delta^2 w = \frac{p}{N}. \quad (15.38)$$

Die Wärmespannungen in einer ebenen Platte lassen sich leicht berechnen, wenn z. B. durch die Randbedingung festgelegt ist, daß alle Fasern bei der Erwärmung gleich lang bleiben. Man braucht dann nach Gl. (12.75) nur in den Spannungsgleichungen für die ebene Platte ε durch $\varepsilon - \beta \vartheta$ zu ersetzen, worin $\vartheta = t - t_1$ ist.

Aus Gl. (36) folgt mit Gl. (11.4):

$$\sigma_x = \frac{m E}{m^2 - 1} (m \varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{2 G}{m - 1} (m \varepsilon_x + \varepsilon_y) = 2 G \left(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{m - 1} \right)$$

Die Wärmespannungen werden also:

$$\sigma_x = 2 G \left(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{m - 1} - \frac{m + 1}{m - 1} \beta \vartheta \right) \quad \text{und} \quad \sigma_y = 2 G \left(\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{m - 1} - \frac{m + 1}{m - 1} \beta \vartheta \right).$$

Die Gleichgewichtsbedingungen in den X - und Y -Richtungen liefern die Gleichungen

$$b \int_0^\delta \sigma_x dz = 0 \quad \text{und} \quad l \int_0^\delta \sigma_y dz = 0.$$

Setzt man darin die Werte von σ_x und σ_y ein, und integriert, so erhält man:

$$\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{m - 1} - \frac{m + 1}{m - 1} \cdot \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \vartheta dz = 0.$$

Da $\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \vartheta dz = \vartheta_m$ ist, wird

$$\sigma_x = 2 G \frac{m + 1}{m - 1} \beta (\vartheta_m - \vartheta) \quad \text{und} \quad \sigma_y = 2 G \frac{m + 1}{m - 1} \beta (\vartheta_m - \vartheta). \quad (15.39)$$

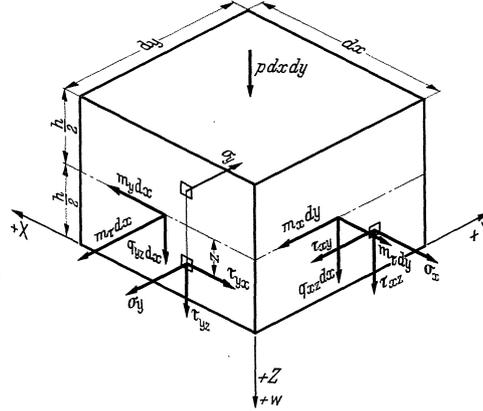
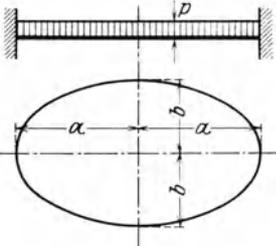


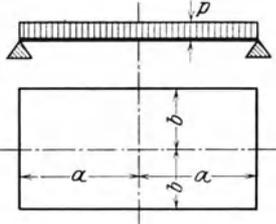
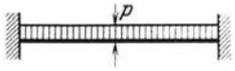
Abb. 15.10.

Diese Gleichungen gelten auch für dickwandige Rohre, wenn $\vartheta_m = \frac{1}{f} \int df$ gesetzt wird, worin $df = 2 \pi r dr$ ist.

Zahlentafel 15.3. Elliptische Platten.

<p>1</p> 	$f = \frac{3(m^2 - 1)}{2m^2 E h^3} \cdot \frac{a^4 b^4}{3a^4 + 3b^4 + 2a^2 b^2} p.$ <p>Die größte Biegespannung σ_{\max} tritt an der Einspannung auf, und zwar am Ende der kleinen Halbachse:</p> $\sigma_{\max} = \frac{6a^4}{3a^4 + 2a^2 b^2 + 3b^4} \cdot \frac{pb^2}{h^2}.$ <p>Die auf die Längeneinheit bezogene Auflagerkraft ist am größten am Ende der kleinen Halbachse:</p> $t_{\max} = \frac{a^2 b (3a^2 + b^2)}{3a^4 + 2a^2 b^2 + 3b^4} p \text{ kg/cm.}$
<p>2</p> 	<p>Exakte Lösung ist nicht vorhanden.</p> <p>Näherungslösung: $\sigma_{\max} = \frac{3a - 2b}{a} p \frac{b^2}{h^2}.$</p>

Zahlentafel 15.4. Rechteckige Platten.

<p>1</p> 	$f = 3,17 \frac{m^2 - 1}{m^2 E} \cdot \frac{a^4 b^4}{(a^2 + b^2)^2} \cdot \frac{p}{h^3} \text{ und für } m = 10/3 \text{ resp. } 4$ $f = (2,89 \text{ resp. } 2,98) \frac{a^4 b^4}{E h^3 (a^2 + b^2)^2} p.$ <p>Für $a = b$ ist $f = 0,75 \frac{a^4}{E h^3}.$</p> <p>Die größten Biegespannungen treten in der Plattenmitte auf.</p> <p>Für $z = \pm \frac{h}{2}$ ist $\sigma_{\max} = \frac{4(ma^2 + b^2)a^2 b^2}{m(a^2 + b^2)^2 h^2} p.$</p> <p>Für $a = b$ und $m = 4$ ist $\sigma_{\max} = 1,25 \frac{a^2}{h^2} p.$</p> <p>$m = 3 \quad \quad \quad = 1,3 \frac{a^2}{h^2} p.$</p>
<p>2</p> 	$f = 1,85 \frac{a^3 b^3}{E h^3 (a^2 + b^2)^2} \text{ (für } m = 4).$
<p>3</p> 	$f = \frac{12,80 a^2 b^2}{20,8 \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} + 11,9} \cdot \frac{p}{E h^3}.$ <p>Für $a = b:$ $f = 0,24 \frac{a^4 p}{E h^3}.$</p>
<p>4</p> 	$f = \frac{11,25 ab}{5,83 \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} + 11,52} \cdot \frac{P}{E h^3}.$ <p>Für $a = b:$ $f = 0,481 \frac{a^2 P}{E h^3}.$</p>

16. Formgebungselemente.

Bei plötzlichen Querschnitts- und Richtungsänderungen, wie sie bei Maschinenteilen oft auftreten, ist man darauf angewiesen, die notwendigen Unterlagen für die Berechnung auf dem Versuchswege zu beschaffen und zwar durch Feindehnungsmessungen oder durch spannungsoptische Untersuchungen, deren Ergebnisse leider wenig übereinstimmen¹. Bruchversuche mit spröden Körpern (z. B. Gips) sind wenig zuverlässig, da sie stark streuen. Für den Konstrukteur ist es am wichtigsten, die größte Spannung zu kennen, die dabei auftritt. E. Lehr hat (im Auftrag des VDI) die vorliegenden Versuche auf Grund folgender Überlegung umgearbeitet: Man geht von den einfachen Gleichungen für die Berechnung der Spannungen in geraden, prismatischen Stäben aus und bezeichnet diese Spannungen σ_n (nach Thum) als Nennspannungen, z. B.

$$\text{für Zug, resp. Druck } \sigma_n = P/f, \text{ für Biegung } \sigma_n = M/W, \text{ für Verdrehung } \tau_n = \frac{M_d}{W_t}.$$

Die wirklich auftretenden, größten Spannungen σ sind aus den Versuchen bekannt. Das Verhältnis σ/σ_n (Formziffer, Spannungs- oder Kerbziffer genannt) wurde berechnet und übersichtlich graphisch dargestellt. Diese Definition erfordert bei jeder Formziffer die Angabe der zugehörigen Nennspannung.

Anfänglich hat man die Bedeutung der „Kerbwirkung“ für den Maschinenbau stark unterschätzt, da Versuche zeigten, daß die Bruchfestigkeit K_z von zähen Werkstoffen dadurch erhöht wird, und zwar um so mehr, je schärfer die Kerbe, d. h. je kürzer die Eindrehung ist

Zahlentafel 16.1

l cm	K_z at	l cm	K_z at
5	6220	5	6200
2	6840	2	6510
1	8840	1	7160
0,5	9320	0,5	7890
		0,2	8680
Ecken abgerundet Abb. 16.1		Ecken scharf Abb. 16.2	

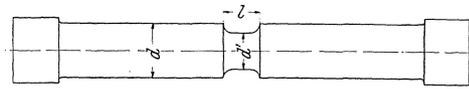


Abb. 16.1 (aus Wawrzyniok).

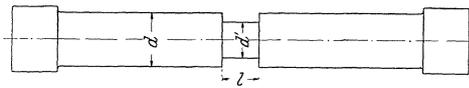


Abb. 16.2 (aus Wawrzyniok).

(Zahlentafel 16.1). Diese zunächst überraschende Tatsache läßt sich durch die Beeinflussung der einzelnen Fasern erklären. Für alle Querschnitte mit $d = 3$ cm ist $\sigma = \frac{P}{\pi/4 \cdot 3^2}$, und für alle Querschnitte mit $d' = 2$ cm, $\sigma' = \frac{P}{\pi/4 \cdot 2^2}$. An der Übergangsstelle sollte also eine plötzliche Spannungsänderung eintreten, was praktisch unmöglich ist; deshalb entsteht eine starke gegenseitige Einwirkung an der Stelle der Unstetigkeit. Durch die Eindrehung (Kerbe) wird die freie Kontraktion verhindert; es ist als ob dort ringsum Zugkräfte auftreten würden. Während kurz vor dem Bruch die Zugspannung bei zähen Werkstoffen annähernd gleichmäßig über den Querschnitt verteilt ist, wird die Bruchgefahr durch das Auftreten der Querspannungen verhindert, was aus den Spannungskreisen in Abb. 16.3 deutlich ersichtlich ist.

Das Arbeitsvermögen des Stabes wird durch die Kerbung bedeutend geschwächt, wie folgendes Zahlenbeispiel zeigt: Nehmen wir zwei Stäbe a und b (Abb. 16.4), die beide in dem gefährlichsten Querschnitt bis zur zulässigen Grenze σ_z beansprucht sind. Für den vollen Stab a ist:

$$\mathfrak{A}_a = \frac{\pi}{4} \cdot 10^2 \cdot 50 \cdot \frac{\sigma_z^2}{2E} = \frac{\pi}{4} \frac{\sigma_z^2}{2E} \cdot 5000.$$

Für den eingekerbten b :

$$\mathfrak{A}_b = \frac{\pi}{4} \cdot 10^2 \cdot 48 \cdot \frac{(0,64 \sigma_z)^2}{2E} + \frac{\pi}{4} \cdot 8^2 \cdot 2 \frac{\sigma_z^2}{2E} \approx 2100 \frac{\sigma_z^2}{2E} \cdot \frac{\pi}{4},$$

$$\mathfrak{A}_a : \mathfrak{A}_b = 1 : 0,420.$$

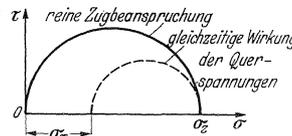


Abb. 16.3.

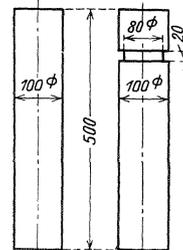


Abb. 16.4.

Die eingekerbte Form ist also bei stoßweiser Belastung bedeutend mehr gefährdet. So beansprucht sind z. B. die Ventilspindeln der Motoren (Abb. 16.5); die Ausführung nach Abb. 16.6 gibt in dieser Hinsicht eine bessere Lösung. Eine ausgesprochene stoßweise Beanspruchung tritt z. B. auch bei der Schwungradpresse auf.

¹ Vgl. z. B. A. Thum und W. Bautz: Zur Frage der Formziffer. Abb. 1 u. 7 in Z. VDI 79 (1935)S. 1303.

Nicht nur bei Stoßbelastungen, sondern bei jeder Wechsellast wird der Körper dauernd verformt und muß jedesmal eine bestimmte Formänderungsarbeit aufnehmen. Der Konstrukteur sollte deshalb ganz allgemein die Formgebung der Maschinenteile so wählen, daß diese eine große Formänderungsarbeit aufnehmen können, ohne örtliche Überschreitung der zulässigen Spannung.

16.1. Einige allgemeine Erläuterungen über das Spannungsfeld erleichtern die Beurteilung der Kerbwirkung. Ein Spannungsfeld gibt den Spannungszustand eines Körpers durch Spannungslinien wieder, deren Richtung in jedem Punkt mit der Richtung der dort herrschenden Normal- oder Schubspannung übereinstimmt. Solange keine Querschnittsänderungen vorhanden sind, verlaufen die Spannungslinien parallel. Durch jede Querschnittsänderung entsteht eine Ablenkung des geradlinigen Kraftflusses, die mit ihren Folgeerscheinungen Kerbwirkung (zweckmäßiger Formwirkung) genannt wird. Die Spannungslinien, die zunächst nur die Richtung der Spannungstensoren angeben, können so verteilt werden, daß nach der Faradayschen Darstellung ihre Dichte der Größe der Spannungen proportional ist (Kraftrohre). Es läßt sich dann sofort erkennen, daß die Zusammendrängung von Spannungslinien nach dem Kerbgrund zu, die ungleichmäßige Spannungsverteilung hervorruft. Aus dem Maß der Zusammendrängung läßt sich die Größe der Spannungserhöhung (Formziffer) qualitativ abschätzen¹.

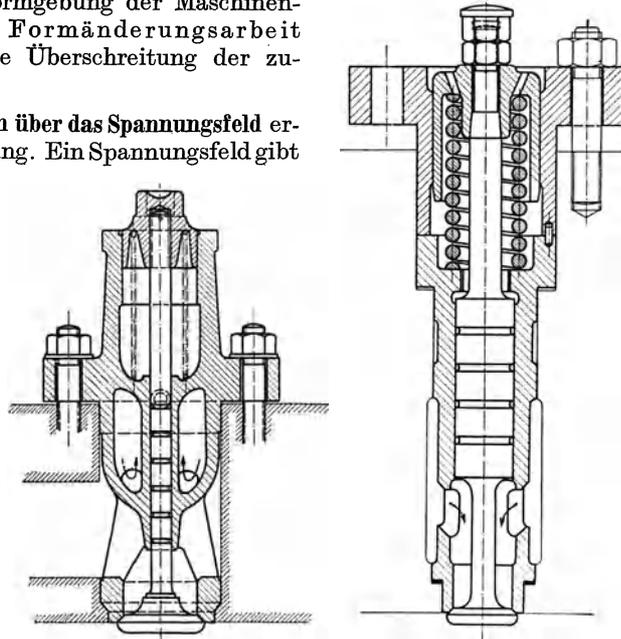


Abb. 16.5. Abb. 16.6. Ventilspindel (aus Güldner, Verbrennungskraftmaschinen).

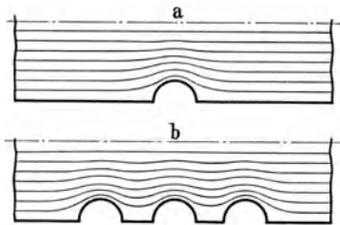


Abb. 16.7
a Spannungslinien bei einfacher Kerbung.
b Entlastungskerbten.

Wird z. B. ein einfach gekerbter Flachstab auf Zug beansprucht, so werden die Spannungslinien etwa den in Abb. 16.7a dargestellten Verlauf haben. Bei wiederholter Kerbung (Abb. 16.7b) mit gleichem Abrundungshalbmesser und bei gleicher Kerbtiefe werden die Spannungslinien weniger abgelenkt, die Spannungserhöhung ist demnach geringer als bei der Einzelkerbe. Hierin liegt die praktische Bedeutung von Entlastungskerbten². In Abb. 16.8 ist die Kerbwirkung bei Biegebeanspruchung skizziert; beim durchlochtem Stab c) tritt eine Verminderung der größten Beanspruchung auf!

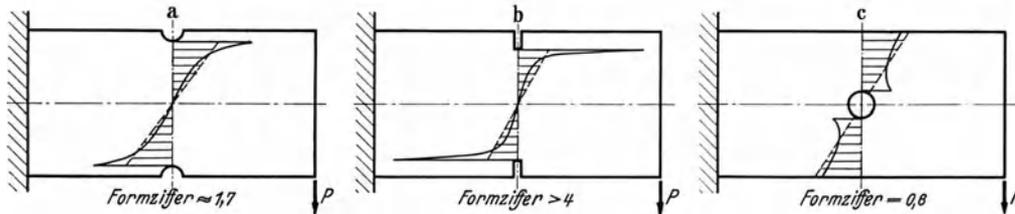


Abb. 16.8. Kerbwirkung bei Biegung.

Die Spannungslinien bei Verdrehung eines zylindrischen Stabes sind in Abb. 16.9 dargestellt. Sie treten nicht nur im Querschnitt, sondern (nach dem Satz der zugeordneten Schub-

¹ Nur bei der Verdrehbeanspruchung ist auch eine quantitative Übereinstimmung vorhanden, weil die Differentialgleichung für Verdrehung und für die Geschwindigkeitsverteilung der Potentialströmung ähnlich sind.

² Thum, A. und S. Berg: Die Entlastungskerbe. Forsch. 2 (1931) S. 345. — Thum, A. und W. Buchmann: Dauerfestigkeit und Konstruktion. VDI-Verlag 1932.

spannungen), ebenso im Längsschnitt auf. Diese letztere Darstellung ist bei der Beurteilung von plötzlichen Querschnittsänderungen besonders zweckmäßig. Die äußersten Spannungslinien fallen mit den Umrißlinien des Längsschnittes zusammen (Abb. 16.10), weil die Schubspannung an keiner Stelle eine Komponente haben darf, die senkrecht zur Umrißlinie stehen würde, wenn die Mantelfläche des Stabes frei von äußeren Kräften ist. Weder im Querschnitt noch im Längsschnitt treten Normalspannungen auf.

Trägt man zunächst für die glatten Wellenstücke die Spannungslinien wieder so ein, daß jede Röhre den gleichen Anteil des Drehmomentes $\Delta M = M_d/n$ überträgt und alle Röhren um den gleichen Winkel je Längeneinheit sich verdrehen, damit der Zusammenhang bestehen bleibt, so folgt aus

$$\vartheta = \frac{M_d}{J_p G} = \text{konstant}, \quad (12.52)$$

daß J_p für jede Röhre $= J_{p \text{ tot}}/n$ sein muß. Für die innerste Röhre mit dem Radius r_1 ist

$$J_{p1}/J_{pt} = M_1/M_d = 1/n = r_1^4/R^4, \quad \text{also} \quad r_1 = R \sqrt[4]{1/n}.$$

Für die zweite Röhre mit dem Außenradius r_2 ist

$$J_{p2}/J_{pt} = 1/n = \frac{r_2^4 - r_1^4}{R^4} = \frac{r_2^4 - R^4/n}{R^4}, \quad \text{also} \quad r_2 = R \sqrt[4]{2/n},$$

usw. Auch der totale Verdrehungswinkel $\Delta \varphi$ kann in eine Anzahl gleiche Teile geteilt werden, deren Entfernung Δl aus der Gleichung

$$\Delta \varphi = \frac{\vartheta l}{m} = \vartheta \cdot \Delta l \quad (16.1)$$

berechnet werden kann. In Abb. 16.10 sind einige Linien gleicher Verdrehung eingezeichnet; sie verlaufen parallel und stehen senkrecht zu den Schubspannungslinien. Ihr Abstand ist im dünnen Wellenteil kleiner als im dicken, und zwar muß beim gleichen Verdrehungswinkel

$$\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \frac{J_{p2} t}{J_{p1} t} = \frac{d^4}{D^4}$$

sein. An der Kerbstelle kann man zunächst die Spannungslinien mit guter Annäherung nach dem Gefühl zeichnen und senkrecht dazu die Linien gleicher Verdrehung.

Die Schubspannung τ folgt aus der Beziehung:

$$\tau = \Delta M / W_p. \quad (16.2)$$

Setzt man die veränderliche Breite des ringförmigen Spaltes

$$r_{i+1} - r_i = \Delta a,$$

und den mittleren Radius der Röhre

$$a = \frac{r_{i+1} + r_i}{2},$$

so ist $J_p = 2 \pi a \cdot \Delta a \cdot a^2$ und $W_p = 2 \pi a^2 \Delta a$, so daß

$$\tau = \frac{\Delta M}{2 \Delta a} \cdot \frac{1}{\pi a^2} \quad (16.3)$$

ist. Auf Grund dieser einfachen Beziehung kann man (wenn die Spannungslinien richtig gezeichnet sind) an jeder Stelle die Schubspannung berechnen. Aus

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta m}{J_p G} \Delta l = \frac{\Delta m}{2 \pi a^3 \Delta a G} \Delta l$$

folgt

$$\frac{\Delta a}{\Delta l} = \frac{\Delta M}{\Delta \varphi} \cdot \frac{1}{2 \pi a^3 G}. \quad (16.4)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung kann man die Spannungslinien und die Linien gleicher Verdrehung planmäßig verbessern. Das ist das (allerdings etwas zeitraubende) Verfahren, das Willers zuerst anwandte um die Spannungserhöhung in den Hohlkehlen abgesetzter Wellen und in Ringnuten mit halbkreisförmigem Querschnitt zu berechnen. Im Anschluß an die Untersuchung von Willers hat R. Sonntag verhältnismäßig einfache Näherungsformeln entwickelt die bei der Berechnung der Wellen (Abschnitt 31.2) verwendet werden.

Aus dem Verlauf der Spannungslinien geht das allgemeine Gesetz hervor, daß die Ablenkung und die dadurch bewirkte Zusammendrängung (Spannungserhöhung) unmittelbar nur durch

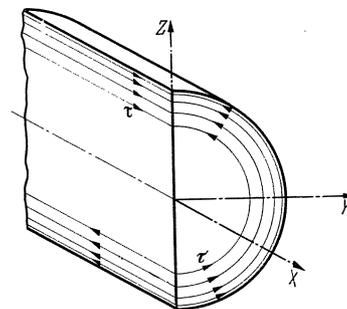


Abb. 16.9. Spannungslinien bei Verdrehung.

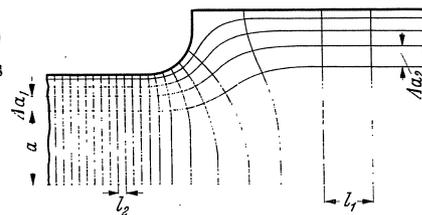


Abb. 16.10. Spannungs- und Verdrehungslinien bei abgesetzten Wellen.

den Teil der Körperoberfläche wesentlich beeinflußt wird, die in der unmittelbaren Nähe der Kerbe liegt. Die Form der Bauteile in großer Entfernung davon ist für die Spannungserhöhung nicht mehr maßgebend. Die Spannungserhöhung ist um so größer, je schärfer die Ablenkung (Kerbe) ist. Diese Überlegungen gelten nur, solange keine bleibende Formänderungen auftreten. Bei höherer Belastung gleichen sich die Spannungsspitzen bei zähen Werkstoffen etwas aus; bei spröden Stoffen (z. B. Glas) dagegen wird der Stab sofort an der höchst belasteten Stelle einreißen. Der Dauerbruch tritt also im allgemeinen nicht bei einer Nennspannung σ_D/α_k ein, sondern erst bei einer höheren Beanspruchung, die vom plastischen Verhalten des Werkstoffes abhängt. Zahlreiche Dauerversuche haben dies auch bewiesen.

Für den Konstrukteur ist demnach nicht so sehr die Formzahl α_k , sondern die sog. „Kerbwirkungszahl“

$$\beta_k = \frac{\text{Dauerfestigkeit des glatten Prüfstabes}}{\text{Dauerhaltbarkeit beim untersuchten Formgebungselement}}$$

als Grundlage für seine Berechnungen wichtig. Unter „Dauerhaltbarkeit“ ist dann die Nennspannung zu verstehen, die an der Dauergrenze liegt. Die Kerbwirkungszahl entzieht sich aber der Rechnung; sie kann zur Zeit nur experimentell bestimmt werden. Man begibt sich dabei also ausschließlich auf das Gebiet der „systematischen Empirie“, von dem wir wissen, daß dort keine endgültige Aufklärung zu erwarten ist solange die wissenschaftliche Führung fehlt.

Der Werkstoff ist um so empfindlicher gegen die Kerbwirkung, je größer der Unterschied zwischen α_k und β_k ist. Von der Überlegung ausgehend, daß nur die über 1 liegenden Beträge von α_k und β_k ein Maß für die Spannungserhöhung geben, hat A. Thum das Verhältnis

$$\eta = \frac{\beta_k - 1}{\alpha_k - 1} \quad (16.5)$$

die „Empfindlichkeitsziffer“ des Werkstoffes genannt. Die Frage, ob η für jeden Werkstoff einen konstanten Wert hat, oder ob die Kerbform und der Verlauf der Spannungen in der Umgebung der Spannungsspitze diesen Wert wesentlich beeinflußt, ist noch nicht geklärt¹. Versuche über die Größe von β_k und η liegen nur für vereinzelte Formgebungselemente vor und werden dort besprochen.

Mathematisch recht hübsche Lösungen hat Dr.-Ing. H. Neuber in seinem Buche „Kerbspannungslehre“² gegeben. Die schwierigste Forderung bei der Spannungsberechnung ist die Erfüllung der Randbedingungen, daß bei der lastfreien Kerboberfläche die Spannungen dort verschwinden müssen. Da die Oberfläche im allgemeinen gekrümmt ist, läßt sich diese Bedingung durch Einführung von krummlinigen Koordinaten leichter erfüllen. Die Ergebnisse dieser Rechnungen für verschiedene, gekerbte oder gelochte Querschnitte bei ebenen und räumlichen Spannungszuständen sowie die Versuchsergebnisse werden bei den einzelnen Formgebungselementen (Maschinenteile) behandelt.

16.2. Ebene Kerbe — räumliche Kerbe. Konstruiert man die Spannungslinien für einfache Zug- oder Biegebeanspruchung bei ebenen und bei räumlichen Spannungszuständen, so erkennt man, daß grundsätzlich wenig Unterschied im Verlauf der Spannungslinien vorhanden ist. Beurteilt man weiter mit Hilfe der „Krafttröhre“ die Größe der auftretenden Spannungen, so kann man feststellen, daß sie bei gleicher Kerbform bei räumlicher Kerbwirkung etwas kleiner wird als bei ebenen Spannungszuständen. Zu dem gleichen Ergebnis kommt Neuber³, aus dessen umfangreichen Berechnungen folgt, daß die Formziffer für Rundkerbe etwa 10% kleiner ist als für Flachkerben.

Versuchsergebnisse über die praktisch wichtigen, in Konstruktionsteilen am häufigsten vorkommenden, Rundkerben liegen nur wenig vor (vgl. Wellenberechnung).

16.3. Stabecke. C. von Bach⁴ hat schon vor 30 Jahren darauf hingewiesen, daß solche Formelemente als stark gekrümmte Träger zu berechnen seien und dafür eine auf Versuchen gestützte Näherungsgleichung angegeben. Die Formziffer (bezogen auf die Nennspannung bei

¹ Föppl, L. (Ing. Arch. 7 [1936] S. 229/36) weist nach, daß $\beta_k/\alpha_k = 1 - C$ ist, worin C , die „elastische Zähigkeitsziffer“ des Werkstoffes zwanglos aus der Bedingung folgt, daß die berechnete Spannung auf das „verformte“ Element bezogen werden sollte und nicht (wie allgemein gebräuchlich) auf das ursprüngliche. Es scheint also β_k/α_k eine geeignetere Werkstoffkonstante zu sein als η .

² Julius Springer, Berlin 1937.

³ Ebense Kuntze, W.: Stahlbau 13 (1935) S. 3 auf Grund einer einfachen Näherungsrechnung.

⁴ Bach, C. von: Zur Beanspruchung von Maschinenteilen mit scharfen oder abgerundeten Ecken. Z. VDI 57 (1913) S. 1594/95.

dem geraden Stab) scheint deshalb nicht zweckmäßig gewählt, was besonders aus Abb. 16.11 a ersichtlich ist, da dort die Nennspannung (nach dem Vorschlag von Lehr) an einer Stelle auftritt, die mit dem Bruchquerschnitt in keinem logischen Zusammenhang steht. Viel zweckmäßiger ist es, die größte Spannung σ_0 aus der Gleichung für den gekrümmten Stab (12.31) zu berechnen, und diese mit der gemessenen Spannung zu vergleichen. Für das Stabeck ohne

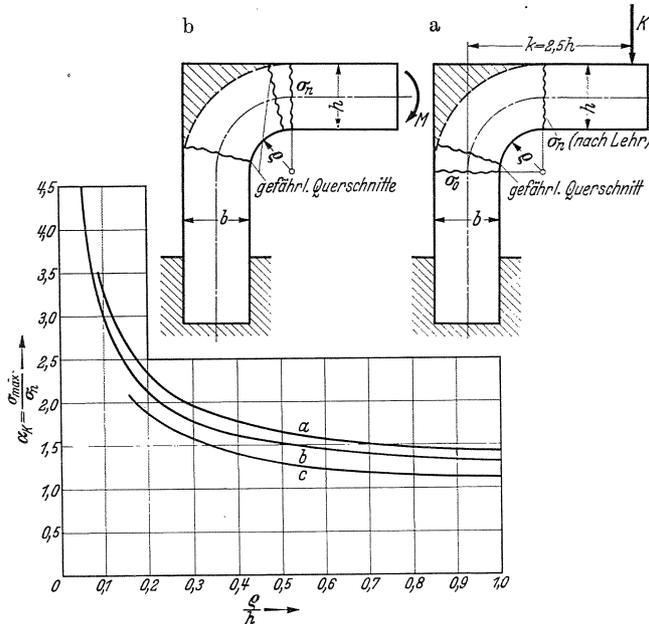


Abb. 16.11. Größte Spannung σ_{\max} in Stabecken ($b = h$) nach Versuchen von v. Widdern und von Kurzhals.

σ_n = größte Biegespannung, berechnet als gerader Stab.

σ_0 = größte Biegespannung, berechnet als gekrümmter Stab.

Kurve a: $\frac{\sigma_0}{\sigma_n}$ für Einzelkraft K

Kurve b: $\frac{\sigma_0}{\sigma_n}$ für reine Biegung

Kurve c: $\frac{\sigma_{\max} \text{ (gemessen)}}{\sigma_n}$

Aus $\frac{c}{a}$ resp. $\frac{b}{a}$ folgt unabhängig von $\frac{\rho}{h}$:

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} = 0,85 \text{ für reine Biegung}$$

$$= 0,80 \text{ für Einzelkraft.}$$

Querschnittsänderung ist der Vergleich in Abb. 16.11 für reine Biegebeanspruchung durchgeführt. Die Abbildung zeigt, daß

$$\sigma_{\max} = 0,85 \sigma_0 \tag{16.6}$$

ist, und zwar unabhängig vom Krümmungsverhältnis ρ/h . Für Stäbe mit veränderlichen Querschnitten ($b = 4h$ und $b = 2h$) liegen nur wenige Versuchswerte von Kettenacher vor, aus denen hervorgeht, daß diese einfache Beziehung auch für veränderliche Querschnitte (b/h) verwendet werden darf. Wie stark die Ergebnisse der einzelnen spannungsoptischen Messungen

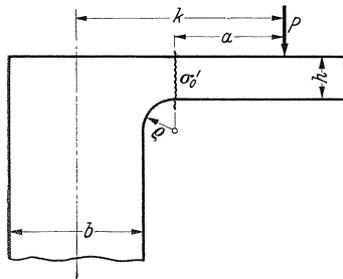
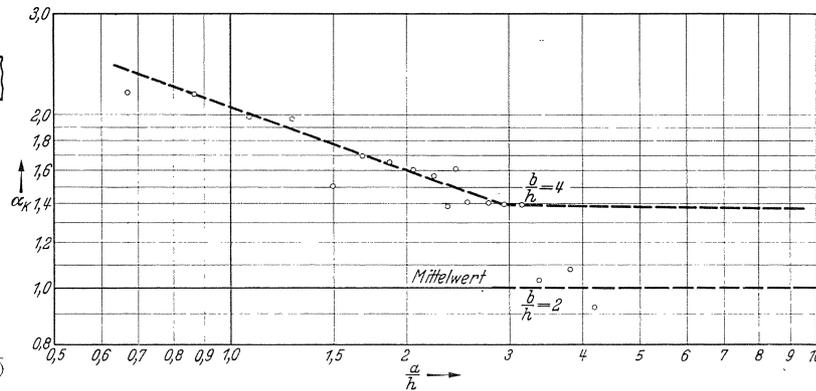


Abb. 16.12. Spannungen in Stabecken mit Querschnittsänderung.

σ_{\max} (optisch gemessen)

$$x_k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} \text{ (als gekrümmter Stab berechnet)}$$



streuen, zeigt die Zusammenstellung von A. Thum und W. Bautz¹. Die verschiedenen Formziffern liegen also zur Zeit noch nicht mit der gewünschten Genauigkeit fest.

Der Vergleich ist in Abb. 16.11 weiter für Biegung durch eine Einzelkraft durchgeführt, der zeigt, daß für Stäbe mit unveränderlichen Querschnitten

$$\sigma_{\max} = 0,8 \sigma_0 \tag{16.7}$$

ist und zwar wieder unabhängig vom Krümmungsverhältnis ρ/h . Für Stäbe mit veränderlichen

¹ Z. VDI 79 (1935) S. 1303/06.

Querschnitten ($b = 4h$ und $b = 2h$) scheint die Formziffer α_k für genügend große Entfernung der Ecke von der Kraftangriffstelle auch konstant zu sein, und zwar ist für

$b/h =$	1	2	4
$\alpha_k =$	0,8	1	1,35

Für kleine Werte von a/h , d. h. für die Spannungsberechnung in der Nähe der Kraftangriffstelle versagt Gl. (12.25) der elementaren Festigkeitslehre. Legt man sie dennoch der Berechnung der Formziffer zugrunde, so folgt aus Abb. 16.12, daß α_k mit abnehmender Entfernung a/h rasch zunimmt. Für $b/h = 4$ und a/h kleiner als 3 ist

$$\alpha_k = 2 \sqrt[3]{h/a}. \tag{16.8}$$

Die Feststellung, daß die Formziffer stark von der Nähe der Kraftangriff- und Befestigungsstellen abhängt, zeigt wie vorsichtig man bei der Übertragung von Versuchsergebnissen auf andere Verhältnisse sein muß.

Die Spannungsberechnung nach der Gleichung für den gekrümmten Stab gibt für $\rho = 0$ immer unendlich große Spannungen; d. h. der Stab aus sprödem Werkstoff müßte dann auch bei der kleinsten Kraftwirkung zerbrechen, was im Widerspruch steht mit der Erfahrung. Auch hier hat C. von Bach schon den richtigen Weg gewiesen, indem er empfiehlt, für $\rho = 0$ einen Wert $\rho' = 1/15$ bis $1/20 h$ in der Rechnung einzusetzen. Die Spannungslinien werden in der scharfen Ecke immer eine endliche Krümmung haben.

Schrifttum.

Lehr, E.: Spannungsverteilung in Konstruktionselementen. VDI-Verlag 1934, enthält auch eine gute Zusammenfassung der verschiedenen Verfahren zur Ermittlung der Spannungsverteilung und ein ausführliches Schrifttumsverzeichnis (mit 204 Quellen) bis Ende 1932, auf welche verwiesen wird. — Wyss, Th.: Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern und ihre praktischen Anwendungen. Berlin: Julius Springer 1926. — Thum, A. und W. Bautz: Zur Frage der Formziffer. Z. VDI. 79 (1935) S. 1303/6 mit Schrifttumsverzeichnis. Zuschriften dazu Z. VDI. 81 (1937) S. 561/64. — Frocht, M. M.: Factors of stress concentration photoelastically determined. J. appl. Mech. (1935) S. A 67/68. Eine Zusammenfassung der Unterkommission für Werkstoffbeanspruchung bei der A. S. M. E.

17. Das Torsionsproblem¹.

Die Formänderung erfolgt nur durch die in den Endquerschnitten angreifenden Kräftepaare, während die Mantelfläche frei von äußeren Kräften bleibt. Es treten demnach nur Schubspannungen auf ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$). Aus Gl. (12.60) folgt dann $e = 0$, d. h. reine Verdrehung erfolgt ohne jede Änderung des Rauminhaltes.

Die X-Achse sei die Drehachse; wir betrachten nur die im Querschnitt des Stabes wirkenden Schubspannungen τ_{xz} und τ_{xy} , sowie die zugeordneten Schubspannungen zwischen den Fasern. Die andere Schubspannung τ_{yz} , die daneben noch auftreten könnte, also die Schubspannung zwischen den Fasern, soweit sie quer zur Stabachse gerichtet ist, wird vernachlässigt, also $\tau_{yz} = 0$ gesetzt. Aus den Gleichgewichtsbedingungen (12.57) in den X-, Y- und Z-Richtungen folgen dann die Beziehungen (Abb. 17.1):

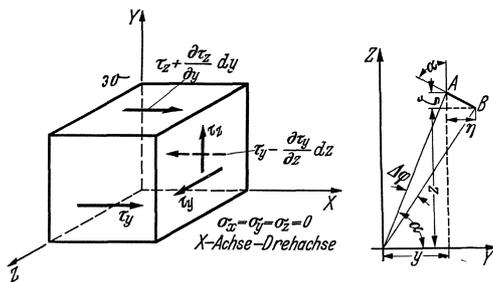


Abb. 17.1.

Abb. 17.2.

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0. \tag{17.1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0.$$

Die erste Gleichung wird durch jede Spannungsfunktion $F(z, y)$ erfüllt, wenn

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial F}{\partial z} \quad \text{und} \quad \tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} \quad \text{ist.} \tag{17.2}$$

Die beiden anderen Gleichungen sagen nur aus, daß in jedem Querschnitt dieselbe Spannungsverteilung herrscht. Von grundlegender Bedeutung ist ferner die Bedingung, daß am Rande des Querschnittes die Schubspannungen tangential gerichtet sind: $\tau_{xz}/\tau_{xy} = dz/dy$ gleich der jeweiligen Neigung der Randkurve.

Betrachten wir wieder die Formänderungen, so liegen für alle Querschnitte (die von den Stabenden genügend weit entfernt sind) die gleichen Bedingungen vor. Jeder Querschnitt führt eine Drehung gegenüber dem benachbarten aus (die zu den Verschiebungen η und ζ , Abb. 17.2

¹ Ausführlich und für Ingenieure leicht verständlich ist die Theorie der Verdrehung erläutert in A. und L. Föppl: Drang und Zwang Bd. II, Abschn. 6.

führen) und wird außerdem (durch die Schubspannung in der Längsrichtung der Fasern) noch gekrümmt (Verschiebung ξ). Der beliebige Punkt A des Querschnittes beschreibt ein Kreisbogen $AB = r \cdot \Delta\varphi$. Der kleine Winkel $\Delta\varphi$ ist proportional dem Abstände des Querschnittes vom Anfangsquerschnitt des prismatischen Stabes, also: $\Delta\varphi = \vartheta \cdot x$, worin ϑ den verhältnismäßigen Verdrehwinkel ist. Aus Abb. 17.2 folgen dann die Verschiebungskomponenten:

$$\eta = \vartheta x \cdot r \sin \alpha = \vartheta x \cdot z \quad \text{und} \quad \zeta = -\vartheta x \cdot r \cos \alpha = -\vartheta x \cdot y. \quad (17.3)$$

Da $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$ ist, folgt aus den Gl. (12.59):

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0. \quad (17.4)$$

und aus den allgemeinen Beziehungen für die Verdrehungen (12.58) mit Gl (3):

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \vartheta y \right) \quad \text{und} \quad \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \vartheta z \right).$$

Durch Differentiation erhält man

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = G \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z \partial y} - \vartheta \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = G \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial z} + \vartheta \right)$$

und durch Subtraktion

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = -2G\vartheta, \quad (17.5)$$

oder auch mit Gl. (2):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -2G\vartheta. \quad (17.6)$$

Diese Differentialgleichung hat eine große Ähnlichkeit mit der Differentialgleichung einer vollkommen biegsamen Membrane (Seifenhaut), nämlich:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -p/S. \quad (14.6)$$

Setzt man $F = k \cdot x$, wobei k ein Maßstabfaktor ist mit der Dimension einer Spannung und wählt man bei der Seifenhaut p so, daß $2G\vartheta = k p/S$ ist, so stimmen beide Differentialgleichungen vollständig überein. Aus Gl. (2) folgt, daß die Schubspannungen proportional dem Gefälle der Seifenhaut an der betreffenden Stelle sind.

18. Stabilitätsprobleme.

Schrifttum.

Hencky, H.: Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Z. angew. Math. Mech. 2 (1922) S. 292/99. — Mises, R. v.: Stabilitätsprobleme. Z. M. M. 3 (1923) S. 406/22. — Hartmann, F.: Knickung, Kippung, Beulung. Leipzig und Wien: Fr. Deuticke 1937. — Marguerre, F.: Über die Anwendung der energetischen Methode auf Stabilitätsprobleme. Jb. dtsh. Luft-Forschung (1938), S. 433/43.

Die Stabilitätsprobleme erhalten besonders durch den Leichtbau eine erhöhte praktische Bedeutung. Wie auf S. 23 erläutert ist die Gleichgewichtslage bei elastischen Formänderungen dadurch gekennzeichnet, daß $\delta\mathfrak{A} = 0$ ist. Die Gleichgewichtslage ist sicher (stabil), wenn $\delta^2\mathfrak{A}$ positiv, unsicher (labil) wenn $\delta^2\mathfrak{A}$ negativ ist. Stabilitätsprobleme sind demnach Aufgaben der Variationsrechnung und können hier nicht behandelt werden. Nur das Ergebnis einiger einfachen Probleme, die für den Maschineningenieur von praktischer Bedeutung sind, ist kurz zusammengefaßt.

18.1. Stäbe.

Ein homogener Stab mit genau gerader und vertikaler Achse, auf den eine genau zentrische Kraft wirkt, müßte eigentlich nur auf Druck beansprucht werden und nach irgendeiner Seite ausbiegen. Das Gleichgewicht des belasteten Stabes ist aber labil und kann durch die kleinste Abweichung gestört werden, so daß immer eine Ausbiegung zu erwarten ist, wenn die Belastung genügend groß und die Länge des Stabes im Verhältnis zu den Querschnittsabmessungen nicht zu klein ist. Die zum Ausbiegen erforderliche Belastung heißt Knicklast. Der Stab sei an beiden Enden frei drehbar gelagert (Abb. 18.1). In einem Querschnitt im Abstände x vom unteren Ende O sei y die Durchbiegung der Stabachse. Das Biegemoment ist $P \cdot y$, und die Gleichung der elastischen Linie:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P}{JE} y = -k^2 y, \quad (18.1)$$

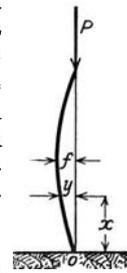


Abb. 18.1.

wenn zur Abkürzung $\frac{P}{JE} = k^2$ gesetzt wird. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx.$$

In O für $x = 0$, ist $y = 0$, also $C_2 = 0$; daher: $y = C_1 \sin kx$. Den größten Wert f erreicht y , wenn $\sin kx = 1$ wird, dann wird $y = f = C_1$ und $y = f \sin kx$.

Da der obere Endpunkt des Stabes sich auf der X -Achse befindet, so ist für $x = l$, $y = 0 = f \sin kl$. Das ist nur möglich, für $\sin kl = 0$, d. h. für $k = 0, \frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l} \dots \frac{n\pi}{l}$, worin n eine beliebige ganze positive Zahl sein kann.

Die elastische Linie hat also die Form einer einfachen Sinuslinie

$$y = f \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

Damit sie entsteht, muß $k = \sqrt{\frac{P}{JE}} = \frac{n\pi}{l}$ sein, oder $P = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 JE$.

Die Knickkraft wird am kleinsten für $n = 1$,

$$P_k = \frac{\pi^2}{l^2} JE. \quad (18.2)$$

d. i. die Eulersche Gleichung.

Wenn der Stab sich frei nach allen Richtungen biegen kann, so wird die Stabachse sich in eine Richtung ausbiegen, für welche das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes am kleinsten ist.

Ist das Trägheitsmoment des Stabes veränderlich (abhängig von x), so kann Gl. (1) graphisch integriert werden. Ändert sich J parabolisch mit x , mit dem Größtwert J_m in der Mitte des Stabes und J_0 an den beiden Enden (z. B. bei langen Schubstangen, so wird:

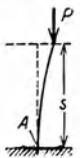
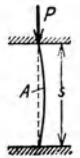
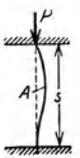
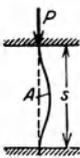
$$P_k = A \frac{\pi^2}{l^2} J_m E$$

worin für

$J_0/J_m = 0$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$A = 0,81$	0,86	0,90	0,94	0,97	1 ist.

In ähnlicher Weise kann auch für andere Belastungsfälle die Eulersche Knicklast P_k berechnet werden. Es ist meist gebräuchlich, für alle Fälle die gleiche Knickformel anzuwenden, und dafür die freie Knicklänge l_0 einzuführen, d. i. die Entfernung zweier aufeinander folgender Wendepunkte der elastischen Linie. Dieses Zwischenstück kann dann als frei drehbarer Stab aufgefaßt werden¹.

Zahlentafel 18.1. Verschiedene Knickfälle.

Ein Stabende eingespannt, das andere frei beweglich	Frei drehbarer Stab	Ein Stabende eingespannt, das andere frei in der Achse geführt	Beidseitig eingespannt
			
$l_0 = 2l$	$l_0 = l$	$l_0 = 0,7l$	$l_0 = 0,5l$

(Aus Winkel.)

$$P_E = \frac{\pi^2}{l_0^2} JE. \quad (18.3)$$

Geltungsbereich der Eulerschen Gleichungen². Man nennt das Verhältnis

¹ Für örtlich geschwächte Querschnitte, vgl. A. Föppl: Knickversuche mit Winkeleisen. Mitt. Mech.-Techn. Lab. der Techn. Hochschule München 1897, Heft 25.

² Pöschl, T.: Zur Theorie der plastischen Knickung gerader Stäbe. Bauing. 19 (1938), S. 499/505. — Jezek, K.: Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl. Wien: Julius Springer 1937.

$$\frac{\text{Freie Knicklänge } l_0}{\text{Trägheitsradius } i} = \lambda^* ,$$

die Schlankheit des Stabes. Die Knickspannung, d. i. die Spannung an der Knickgrenze, wird damit:

$$\sigma_k = \frac{P_E}{f} = \frac{\pi^2}{l_0^2} \cdot \frac{J}{f} E = \frac{\pi^2}{l_0^2} l^2 E = \frac{\pi^2}{\lambda^2} E .$$

Da wir bei der Ableitung der Eulerschen Gleichung von der allgemeinen Biegungsgleichung ausgegangen sind, gelten die Schlußfolgerungen nur innerhalb des Hookeschen Gesetzes, also solange $\sigma_k \leq \sigma_p$ ist. Die Eulersche Formel ist also nur gültig für

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} . \quad (18.4)$$

Für St 37 mit $\sigma_p = 2200 \text{ at}$ wird $\lambda = 100$,
 „ St 60 mit $\sigma_p = 2500 \text{ at}$ wird $\lambda = 93$,
 „ Federstahl mit $\sigma_p = 6000 \text{ at}$ wird $\lambda = 60$,
 „ Gußeisen wird $\lambda = 80$.

Für kreisförmige Querschnitte muß, da $i = \sqrt{\frac{J}{f}} = d/4$ ist, l größer als rund 25 mal dem Durchmesser des zylindrischen Stabes aus Stahl sein. Für Duralumin z. B. ist $E = 700\,000$ bis $750\,000 \text{ kg/cm}^2$ und bei einer Proportionalitätsgrenze $\sigma_p = 2000 \text{ kg/cm}^2$ liegt die Grenze für die Verwendung der Eulerschen Formel schon bei $l/i > 59$.

Für kleinere Schlankheitsgrade hat L. von Tetmajer auf Grund ausgedehnter Versuche an der Eidg. Materialprüfanstalt in Zürich folgende empirische Formel aufgestellt:

$$\sigma_k = c_0 - c_1 \lambda + c_2 \lambda^2 .$$

Für Flußeisen ist	$c_0 = 3100 \text{ at}$	$c_1 = 11,4$	$c_2 = 0$
„ Stahl „	$c_0 = 3200 \text{ at}$	$c_1 = 11,6$	$c_2 = 0$
„ Gußeisen „	$c_0 = 7760 \text{ at}$	$c_1 = 120$	$c_2 = 0,53$
„ Holz „	$c_0 = 293 \text{ at}$	$c_1 = 1,94$	$c_2 = 0$

Die Eulersche Knicklast, resp. die Knickspannung nach Tetmajer darf natürlich niemals erreicht werden, sondern man schreibt eine 3,5 bis 5fache Sicherheit gegen Ausknicken vor.

Bei Eisenkonstruktionen ist das sog. ω -Verfahren für die Berechnung der Druckstäbe vorgeschrieben, nach welchem die größte Randspannung $\omega \cdot P/f$ kleiner als die zulässige Zugspannung sein muß. Die Knickzahl ω ist abhängig von der Schlankheit des Stabes und vom Werkstoff und kann in folgender Weise (z. B. für St. 37) berechnet werden.

Für sehr kurze Stäbe, etwa bis $\lambda = 60$ wird die Knickspannung, das ist die Spannung bei der ein Stab ausknickt gleich der Streckgrenze des Werkstoffes (für St. 37 ist $\sigma_s = 24 \text{ kg/mm}^2$) gesetzt. Im Gültigkeitsbereich der Eulerschen Gleichung (Schlankheit größer als 100) verläuft die Knickspannung σ_k nach der Eulerlinie ($\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$) Von $\lambda = 60$ bis $\lambda = 100$ wird die Knickspannung als verbindende Gerade (nach Tetmajer) angenommen. Bei der Berechnung der zulässigen Druckspannung wird im Gültigkeitsbereich der Eulerschen Gleichung von der Knicksicherheit ν ausgegangen, für welche $\nu = 3,5$ vorgeschrieben ist, also $\sigma_{d \text{ zul}} = \sigma_k \nu$. Für reine Druckbeanspruchung ($\lambda = 0$) ist $\sigma_{d \text{ zul}}$ gleich der Elastizitätsgrenze des Werkstoffes (für St. 37, $\sigma_e = 14 \text{ kg/mm}^2$) festgelegt. Der Übergang zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = 100$ erfolgt durch eine Parabel, die für $\lambda = 0$ eine horizontale Tangente hat. Aus dem so festgelegten Verlauf von $\sigma_{d \text{ zul}}$ kann nachträglich die Knicksicherheit ν berechnet werden ($\nu = \sigma_k / \sigma_{d \text{ zul}}$). Die Knickzahlen α ergeben sich dann aus $\sigma_e / \sigma_{d \text{ zul}}$.

Nachdem die Knickzahlen ω so berechnet worden sind (Zahlentafel 18.1), können Druckstäbe genau wie Zugstäbe berechnet werden nach der Gleichung:

$$\frac{\text{Stabkraft } p \times \text{Knickzahl } \omega}{\text{Querschnitt } F} < \sigma_e .$$

Hierin liegt der praktische Vorteil dieses Berechnungsverfahrens.

* Das Trägheitsmoment wird oft in die Form $J = f \cdot i^2$ geschrieben; der Faktor i wird dann als „Trägheitsradius“ bezeichnet.

Zahlentafel 18.2. Knickzahlen ω für St 37 (Eisenkonstruktion).

$\lambda =$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\omega =$	1	1,01	1,02	1,05	1,10	1,17	1,26	1,39	1,59	1,88
$\lambda =$	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
$\omega =$	2,36	2,86	3,41	4,0	4,64	5,32	6,06	6,84	7,65	8,56

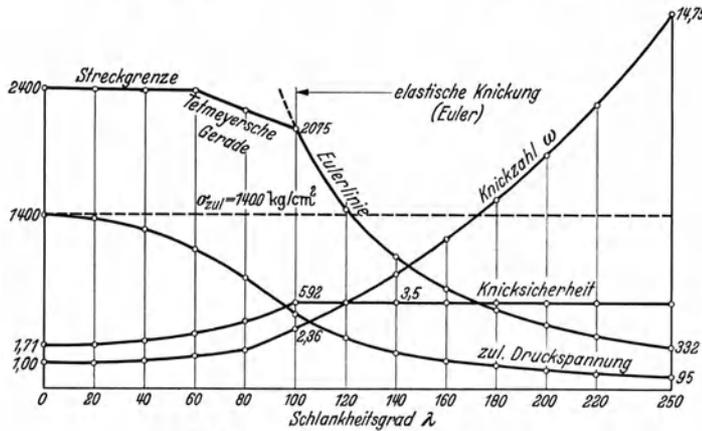


Abb. 18.2. Knickung gerader Stäbe.

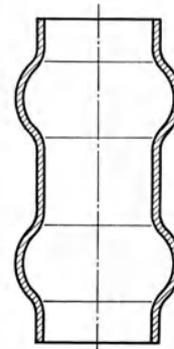


Abb. 18.3. Ausbeulen eines Rohres.

18.2. Dünnwandige Rohre.

Wird ein Rohr in der Richtung seiner Achse gedrückt, so treten bei nicht zu kurzer Länge des Rohres wellenförmige Wülste auf, die sich zuerst in der Nähe der Rohrenden bilden (Abbildung 18.3). Diese Erscheinung läßt sich am leichtesten so veranschaulichen, daß man das Rohr der Länge nach in einzelne Streifen zerlegt denkt, auf die je ein Teil der Druckkraft wirkt und die so das Bestreben haben zum Ausknicken. Die Knickgefahr ist in der Nähe der Rohrenden am größten, da die Stirnflächen eine größere Nachgiebigkeit haben.

Im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes tritt Ausbeulen¹ auf, wenn die gleichförmige Randbelastung des Rohres den kritischen Wert

$$p_k = \frac{sE}{r\sqrt{3(1-1/m^2)}}$$

erreicht. Der Hohlzylinder knickt nach Gl. (1) wie ein Stab aus, wenn

$$P_k = \frac{\pi^2}{l^2} J E \quad \text{oder} \quad p_k = \frac{\pi^2}{l^2} r^2 E$$

ist. Aus diesen beiden Gleichungen folgt (mit $m = 10/3$), daß ein dünnwandiges Rohr auf Ausbeulen resp. Knicken zu berechnen ist, je nachdem s/r kleiner resp. größer als 17 (r/l)² ist. Diese Frage ist beim Leichtbau (Flugzeugbau) wieder aktuell.



Abb. 18.4. Eingebeultes Flammrohr (aus Rötischer).

Wenn dünnwandige Rohre durch äußeren Druck beansprucht werden, dann entsteht die Gefahr einer Einbeulung. Dieser Fall liegt bei allen Vakuumleitungen und bei den Flammrohren von Dampfkesseln vor (Abb. 18.4). Auch beim Kesselkörper ist Einbeulungsgefahr vorhanden, wenn das Wasser sich vollständig abkühlt.

Der Einbeulungsdruck p eines allseitig von außen gedrückten kreisförmigen Hohlzylinders, der an seinen Enden wie ein Flammrohr befestigt ist, hat R. von Mises² nach der Elastizitätstheorie dünner

Schalen berechnet. Er findet

$$p_k = \frac{E \cdot s/r}{(n^2 - 1) \left(1 + \frac{n^2 l^2}{\pi^2 r^2}\right)^2} + 0,09 E \left(n^2 - 1 + \frac{2n^2 - 1,3}{1 + \frac{n^2 l^2}{\pi^2 r^2}} \right) \frac{s^3}{r^3} \text{ kg/cm}^2. \quad (18.5)$$

¹ Timoshenko. Z. Math. Phys. 58 (1910) S. 378.

² Mises, von: Der kritische Außendruck zylindrischer Rohre. Z. VDI 58 (1914) S. 750/55. — Mayer-Mita: Die Berechnung dünnwandiger ovaler Röhren gegen gleichförmigen Außendruck. Z. VDI 58 (1914) S. 649/53.

In dieser Gleichung ist r der innere Radius des Rohres, s die Wandstärke, l die Rohrlänge, resp. die Entfernung zweier wirksamen Versteifungen und n die Anzahl Wellen am Kreisumfang. Die Gleichung ist in Abb. 18.5 dargestellt und zeigt einen Kleinstwert für p_k , für welchen die Knickgefahr am größten ist. Interessant ist, daß bei den Versuchen von Siebel und Schwaigerer¹ das Rohr unter Wasserdruck nur an einer Stelle des Umfangs einbeulte, während sich bei Preßluft ($r/l = 0,2$ und $s/2r = 1,8\%$) vier gleichmäßig am Umfang verteilten Wellen zeigten.

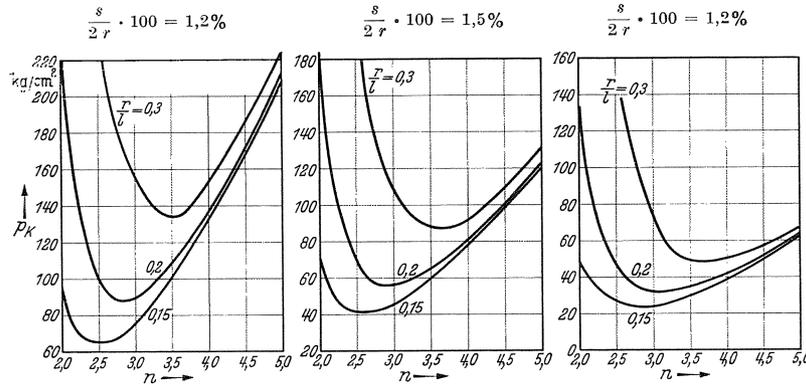


Abb. 18.5. Einbeuldrücke dünnwandiger Rohre.

In Zahlentafel 18.3 sind diese Versuchsergebnisse mit Gleichung (18.5) verglichen. Die Übereinstimmung ist in einzelnen Fällen mit p_{min} gut, in anderen mit $p_{n=4}$ besser. Der Knickdruck hängt stark von den Verhältnissen $s/2r$ und r/l ab, die bei den Versuchen sehr genau einzuhalten sind.

Für ein unendlich langes Rohr geht Gl. (18.5) mit $n = 2$ über in:

$$p_k = 0,27 E (s/r)^3 \tag{18.6}$$

Die Versuche zeigen eine lineare Abhängigkeit von der Unrundheit ovaler Rohre, die aber nicht sehr bedeutend ist. Bezeichnet man

$$\eta = 100 \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$$

als Maß für die Unrundheit, so ist

$$p_k \sim p_{k0} (1 - 0,1 \eta) \tag{18.7}$$

Gl. (18.5) gilt (wie die Eulersche) nur innerhalb des Hookeschen Gesetzes. Beim

Überschreiten der Proportionalitätsgrenze (die für ein rundes, unendlich langes Rohr aus der Kesselformel (14.2) berechnet werden kann) die Knickgefahr in ähnlicher Weise wie beim ω -Verfahren für gerade Stäbe beurteilt werden.

Zahlentafel 18.3.

r/l	$s/2r$ %	Knickdruck p_k		
		gemessen	nach Gl (18.5) p_{min}	$p_{n=4}$
0,3	1,2	46	47	50
	1,5	72	86	90
	1,8	91	134	154
0,2	1,2	42,5	32	42
	1,5	74	56	80
	1,8	82	88	137
0,15	1,2	34	24	38
	1,5	54	42	77
	1,8	87	65	132

18.3. Biegebeanspruchungen.

Bei jedem auf Biegung beanspruchten Träger tritt mit den Druckspannungen auch die Gefahr des Ausknickens auf, indem die ursprünglich gerade Stabachse im Druckteil ausbiegt. Wenn der Träger nicht durch die gesamte Konstruktion (z. B. beim Deckenträger durch die Deckenföllung oder im Brückenbau durch die Windverbände) gegen seitliches Ausbiegen gesichert ist (4- bis 5fache Sicherheit), so müssen besondere Vorkehrungen gegen Ausknicken des Druckgurtes getroffen werden.

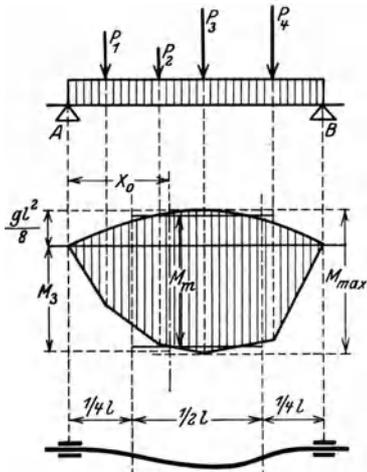
Die Druckkraft N_x , die an einer Stelle x des Trägers wirkt, ist

$$N_x = \int_0^e \sigma_y df = \frac{\sigma_{max}}{e} \int_0^e \eta df = \frac{\sigma_{max}}{e} \cdot S = \frac{M_x}{J} S. \tag{18.8}$$

¹ Siebel und Schwaigerer: Untersuchungen über das Einbeulen von glatten Flammrohren. Die Wärme 62 (1939) S. 285/90.

S ist das statische Moment der Querschnittshälfte, J das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes, beide in bezug auf die neutrale Achse.

Die Druckkraft ändert sich demnach von Ort zu Ort wie das Biegemoment und ist in den Auflagestellen des Trägers gleich Null. Diese Stellen haben demnach keine Neigung zum Ausbiegen, d. h. sie wirken bei Knickbeanspruchung ähnlich wie Einspannungsstellen¹. In diesem Fall ist die freie Knicklänge $l_0 = l/2$ und der Mittelwert N der Druckkraft für diese Länge:



$$N = \frac{1}{l/2} \int_{x=1/4l}^{x=3/4l} N_x dx = \frac{2}{l} \int_{1/4l}^{3/4l} \frac{M_x S}{J} dx.$$

Wenn S/J für die ganze Strecke konstant ist, so ist

$$N = \frac{2}{l} \cdot \frac{S}{J} \int_{1/4l}^{3/4l} M_x dx.$$

Dieser Wert kann direkt aus der Momentenfläche als Mittelwert bestimmt werden (Abb. 18.6). Bei einem verjüngten Träger muß zuerst die verzerrte Momentenfläche $M_x \frac{S_x}{J_x}$ gezeichnet und daraus dann der Mittelwert entnommen werden.

Abb. 18.6. Ausknicken eines auf Biegung beanspruchten Trägers.

18.4. Schwach gewölbte Böden.

Das Ergebnis einer Untersuchung von C. B. Biezeno² mit einer in der Zylinderachse konzentrierten Einzellast P kann kurz so zusammengefaßt werden, daß die mit der Durchschlagkraft P gebildete dimensionslose Größe $P \cdot R / E h^3$ nur vom Verhältnis a/h abhängt, also

$$\frac{P \cdot R}{R \cdot h^3} = \text{Funktion}(a/h) \tag{18.9}$$

ist, welche Funktion (nach der Berechnung von Biezeno) in Abb. 18.7 dargestellt ist. Diese Lösung kann allerdings nicht ohne weiteres auf dem praktisch wichtigeren Fall einer gleichmäßigen Belastung des Bodens übertragen werden.

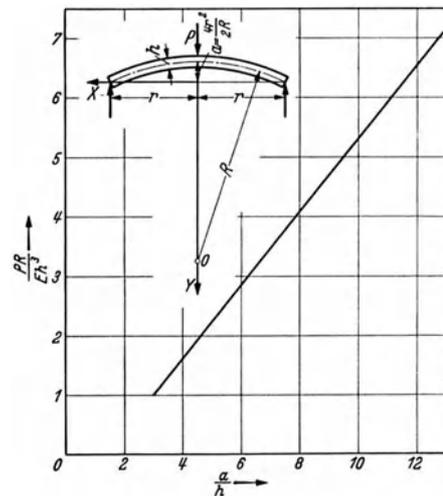


Abb. 18.7. Durchschlagkraft schwach gewölbter Böden.

Die mathematische Lösung dieser Aufgabe ist durchaus möglich und sicher nicht schwieriger als bei der Einzelbelastung; sie erfordert aber immerhin einen bedeutenden Zeitaufwand und ist (soweit mir bekannt) zur Zeit noch nicht durchgeführt.

Da aber die Formänderung des Körpers ausschlaggebend für die Stabilität ist, kann man die umständliche, genaue Berechnung umgehen, indem (mit für die Praxis ausreichender Genauigkeit) die Stabilität der gleichmäßig verteilten Belastung verglichen wird mit der Stabilität einer Einzellast bei gleicher Durchbiegung in der Plattenmitte. Die Durchbiegung schwach gekrümmter Böden läßt sich in einfacher Weise aus den bekannten Durchbiegungen ebener Platten berechnen, da die Mittellinie des gekrümmten Bodens sich um den gleichen Betrag mehr krümmt, als eine ursprünglich ebene Platte und analog wie bei gekrümmten Stäben (Vgl. Gl. 12.34).

Die Durchbiegung f infolge einer Einzellast P ist

$$f = 0,55 P \cdot r^2 / E h^3 \tag{14.63}$$

und für die gleichmäßig verteilte Belastung p

$$f = 0,70 p \cdot r^4 / E h^3. \tag{14.53}$$

¹ Die praktische Zulässigkeit dieser Annahme wird durch Versuche von J. E. Brix bestätigt. Eisenbau 1912, S. 351.

² Biezeno, C. B.: Über die Bestimmung der Durchschlagkraft einer schwach gekrümmten, am Rande frei aufliegenden, kreisförmigen Platte. Z. angew. Math. Mech. 1935, S. 10/22.

Bei gleicher Gesamtbelastung $P = \pi r^2 p$ ist die Durchbiegung f bei gleichmäßig verteilter Belastung kleiner als bei Einzellast, so daß auch die Knickgefahr kleiner ist. Man findet die für die Stabilität „gleichwertige“ Belastung P_g aus der Beziehung:

$$0,55 P \cdot r^2 / E h^3 = 0,70 p \cdot r^4 / E h^3 = 0,70 P_g r^2 / \pi E h^3$$

zu

$$P_g = 2,45 P . \quad (14.10)$$

Mit dieser Gleichung kann die Knickgefahr bei gleichmäßiger Belastung beurteilt werden. Damit sind aber noch lange nicht alle Schwierigkeiten überwunden, denn bei allen Stabilitätsproblemen spielen hauptsächlich die Randbedingungen eine entscheidende Rolle, wie z. B. die vier einfachen Knickfälle eines geraden Stabes deutlich zeigen. Die bei der Berechnung vorausgesetzte freie Auflage der Platte kommt praktisch nur selten vor, da immer mit (oft unbekanntem) Einspannmomenten gerechnet werden muß.

19. Plastische Verformungen.

Bei der Berechnung der Maschinenteile geht man im allgemeinen davon aus, daß keine bleibende Formänderungen auftreten. Die Spannungen bleiben deshalb unterhalb der Elastizitätsgrenze und innerhalb des Geltungsbereiches des Hookeschen Gesetzes. Aus der Bearbeitung durch spanlose Formgebung (Ziehen, Pressen usw. Vgl. auch die Versuche von Lasche, S. 74) weiß man, daß eine Beanspruchung oberhalb der Streckgrenze durchaus zulässig ist, solange diese nur vereinzelt auftritt. Auch konstruktiv hat man schon seit vielen Jahren solche Beanspruchungen oberhalb der Streckgrenze zugelassen, z. B. bei der Herstellung von Preßzylindern, beim Schleudern der Turbinenscheiben und in neuerer Zeit bei der Herstellung von Schrumpfverbindungen.

Es soll hier nur der allereinfachste Fall der plastischen Verformung betrachtet werden, bei dem die Änderungen der Gestalt des Körpers noch verhältnismäßig klein sind, aber bereits so groß, daß die elastischen Formänderungen gegenüber den bleibenden vernachlässigt werden dürfen.

In einem beliebigen Punkt der plastischen Masse sollen die Seitenflächen eines kleinen Würfels mit den Hauptspannungsebenen zusammenfallen. Über die Formänderungen können dann folgende Aussagen gemacht werden:

1. Die Hauptdehnungsrichtungen fallen mit den Hauptspannungen zusammen.
2. Bei der plastischen Verformung ändert sich der Rauminhalt nicht:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 . \quad (19.1)$$

3. Eine bildsame Masse verformt sich bei reiner Zug- resp. Druckbeanspruchung

$$(\sigma_1 = \pm \sigma, \sigma_2 = \sigma_3 = 0) \text{ so, daß } \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{1}{2} \varepsilon_1 \text{ ist.}$$

Bei reiner Schubbeanspruchung ($\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = 0$ und $\sigma_3 = -\sigma$) ist

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_3 \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = 0 .$$

Bei diesen Grundfällen entsprechen σ und ε ähnlich gelegenen Mohrschen Kreisen. Man darf deshalb allgemein als Fließregel annehmen: Die Figur der drei Hauptspannungskreise in der $\sigma\tau$ - ist stets ähnlich zur Figur der drei Hauptdehnungskreise in der $\varepsilon\gamma$ -Ebene.

Eine der wichtigsten Anwendungen ist die plastische Verformung eines dickwandigen Rohres als Preßzylinder oder als Schrumpfverbindung. Für die plastische Verformung gelten die gleichen geometrischen Beziehungen, wie im elastischen Gebiet, nämlich:

$$\varepsilon_z = \frac{\delta \xi}{\delta z}, \quad \varepsilon_r = \frac{\delta \varrho}{\delta r} \quad \text{und} \quad \varepsilon_t = \frac{\varrho}{r} .$$

Wir beschränken uns auf den beidseitig eingespannten Zylinder, also $\varepsilon_z = 0$. Aus dem konstanten Rauminhalt bei der plastischen Verformung folgt dann

$$\varepsilon_r = -\varepsilon_t ,$$

d. h. die beiden Hauptdehnungskreise haben gleiche Halbmesser. Nach Einsetzen der Werte für ε_r und ε_t

$$\frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r} = 0 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\varrho \cdot r)$$

und integriert

$$\varrho = c/r ,$$

wo c eine Integrationskonstante ist. Aus der Ähnlichkeitsbedingung des Fließvorganges müssen

auch die entsprechenden Hauptspannungskreise gleich sein, also

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_t). \quad (19.2)$$

Nach der Hypothese der Gestaltsänderungsenergie lautet die allgemeine Fließbedingung

$$(\sigma_t - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_t)^2 = 2 \sigma_0^2, \quad (19.3)$$

wo σ_0 die Fließgrenze für Zug ist. Da nun

$$\sigma_r - \sigma_z = \sigma_r - \frac{\sigma_r + \sigma_t}{2} = \frac{\sigma_r - \sigma_t}{2}$$

und

$$\sigma_z - \sigma_t = \frac{\sigma_r + \sigma_t}{2} - \sigma_t = \frac{\sigma_r - \sigma_t}{2}$$

ist, nimmt die Fließbedingung die einfachere Gestalt

$$\sigma_t - \sigma_r = \pm \frac{2 \sigma_0}{\sqrt{3}}$$

an. Eine zweite Gleichung zur Berechnung der unbekanntenen Spannungen σ_r und σ_t bietet die Gleichgewichtsbedingung (Gl. 14.19):

$$\sigma_t - \sigma_r = r \frac{d \sigma_r}{d r} = \pm \frac{2 \sigma_0}{\sqrt{3}},$$

woraus

$$\sigma_r = C_1 \pm \frac{2 \sigma_0}{\sqrt{3}} \ln r. \quad (19.3)$$

Die Integrationskonstante C_1 folgt aus der Randbedingung. Soll sich der ganze Zylinder plastisch verformen und ist für $r = r_a$, $\sigma_r = 0$. Dann ist

$$C_1 = \pm \frac{2 \sigma_0}{\sqrt{3}} \ln C.$$

Somit sind die Spannungen im Rohr:

$$\sigma_r = \pm \frac{2 \sigma_0}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{r_a}, \quad \sigma_t = \pm \frac{2 \sigma_0}{\sqrt{3}} \left(\ln \frac{r}{r_a} + 1 \right) \quad \text{und} \quad \sigma_z = \pm \frac{2 \sigma_0}{\sqrt{3}} \left(\ln \frac{r}{r_a} + \frac{1}{2} \right) \quad (19.4)$$

Steht das Rohr unter Innendruck p , so muß das Plus-Zeichen genommen werden. Für $r = r_i$ ist dann:

$$\sigma_r = - p = \frac{2 \sigma_0}{\sqrt{3}} \ln \frac{r_i}{r_a}$$

Unter einem Druck

$$p = \frac{2 \sigma_0}{\sqrt{3}} \ln \frac{r_a}{r_i} \quad (19.5)$$

wird ein dickwandiges Rohr in seinem Querschnitt bis zur äußeren Oberfläche fließen.

Ist der plastische Zustand noch nicht bis zur äußeren Oberfläche $r = r_a$ des Rohres, sondern nur in einem ringförmigen Fließgebiet bis zum Halbmesser $r = r_x$ vorgedrungen, dann treten im äußeren Ringgebiet elastische Formänderungen auf.

Im plastischen Gebiet: $r_i < r < r_x$ sind die Spannungen

$$\sigma_r = C_1 + \frac{2 \sigma_0}{\sqrt{3}} \ln r, \quad \sigma_t = C_1 + \frac{2 \sigma_0}{\sqrt{3}} (\ln r + 1) \quad \text{und} \quad \sigma_z = C_1 + \frac{2 \sigma_0}{\sqrt{3}} (\ln r + \frac{1}{2}) \quad (19.6)$$

und die radiale Verschiebung $\varrho = c/r$.

Für $r = r_i$ ist $\sigma_r = - p$ und

$$C_1 = - p - \frac{2 \sigma_0}{\sqrt{3}} \ln r_i.$$

An der äußeren Grenze des plastischen Gebietes $r = r_x$ ist

$$\sigma_r = - p + \frac{2 \sigma_0}{\sqrt{3}} \ln \frac{r_x}{r_i}.$$

Schrifttum.

Nadai, A.: Der bildsame Zustand der Werkstoffe. Berlin: Julius Springer 1927. — Nadai, A. und L. H. Donnell: Stress distribution in rotating disks of ductile material. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. 51.1 (1929) S. 163/81. — Nadai, A.: Plastic Torsion. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. 53 (1931) S. 29/48. — Nadai, A.: A review of recent papers on plasticity. J. appl. Mechs. 57 (1935) S. A. 33/34. — Mac Gregor, C. W. und J. A. Hrones: Recent investigations in plastic torsion. J. appl. Mechs. 4 (1937) S. 161/69.

2. Verbindungen.

21. Vernietungen.

Um eine Verbindung durch Nietung herzustellen, steckt man in die genau übereinander liegenden Löcher der beiden glatt aufeinander liegenden Teile ein Niet¹ und staucht den herausragenden Teil des schwach konischen Schaftes durch Hämmern oder durch Pressen zu einem Schließkopf zusammen (Abb. 21.1). Die Niete kommen mit Setzkopf und mit folgenden genormten Durchmessern in den Handel:

Durchmesser	10	13	16	19	22	25	28	31	34 mm.
ausreichendes Spiel			0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,8 mm.

Nach den Deutschen Normen wird der Lochdurchmesser 1 mm größer als der Nietdurchmesser gemacht. Dieses Spiel ist im allgemeinen zu groß; es sollte nicht größer sein als notwendig, um den warmen vom Hammerschlag gereinigten Nietschaft mit dem Hammer eben noch einführen zu können. Dazu reicht das oben angegebene Spiel aus. Die Nietlöcher sollen gebohrt und mit der Reibahle nachgearbeitet werden. Das früher gebräuchliche Stanzen der Löcher ist billiger, doch leidet das Material bei dieser rohen Arbeitsmethode stark; es wird spröde und rissig.

Das glühende Eisen des Nietschaftes verhält sich beim Stauchen des Kopfes ähnlich wie eine zähe Flüssigkeit; der in axialer Richtung ausgeübte Druck wird nach der Seite hin fortgepflanzt, so daß die Lochwand durch inneren Druck beansprucht wird. Gleichzeitig erfährt sie eine starke Erhitzung, durch welche Wärmespannungen entstehen. Diese zusätzlichen Beanspruchungen werden bei der Berechnung außer acht gelassen.

Die Nietverbindung ist nur durch Abschlagen der Köpfe zu lösen, weshalb die Verbindung als nicht lösbar bezeichnet wird.

Die Schaftlänge l ist gleich der Summe der Blechstärken plus $1\frac{1}{3}$ bis $1\frac{3}{4}$ Nietdurchmesser, je nachdem die Vernietung durch Maschine oder von Hand hergestellt wird; sie endet handelsüblich immer auf 3 oder 6 oder 0 mm.

Die Kopfform ist genormt und je nach dem Verwendungszweck verschieden. Zum Aufzeichnen dient die Angabe in Abb. 21.2. Zwischen Nietschaft und Kopf ist eine kleine Abrundung vorhanden, so daß die Nietlöcher abgegratet werden müssen.

Als Werkstoff wird weicher Stahl (St 34) verwendet, in vereinzelt Fällen Nickelstahl (bei Eisenkonstruktionen) oder Kupfer (für geringe Kräfte) und Aluminium (für Flugzeugbau). Kaltnietung ist nur bis etwa 8 mm Nietdurchmesser möglich.

Das übliche in Abb. 21.1 skizzierte Herstellungsverfahren verlangt, daß die Verbindung von beiden Seiten zugänglich ist. Im Flugzeugbau ist das nicht immer möglich. Die Sprengnietung² ist ein neues Nietverfahren, bei dem der Schließkopf durch Aufweitung des vorstehenden hohlen und mit Sprengstoff gefüllten Nietschaftes gebildet wird. Nach dem Einführen des Nietes in das Loch wird von der Setzkopfseite aus durch elektrische Erwärmung die hochbrisante Sprengladung (bei 130° C) zur Explosion gebracht.

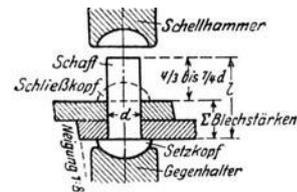


Abb. 21.1. (Aus Dubbel, Taschenbuch.)

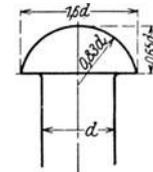


Abb. 21.2. (Aus Dubbel, Taschenbuch.)

21.1. Berechnung.

Die Zerstörung der Nietverbindung kann herbeigeführt werden (Abb. 21.3):
a) durch Abscheren des Nietschaftes,

¹ Das Wort Niet wird nach Duden männlich, weiblich und sächlich gebraucht. Der Normenausschuß der Deutschen Industrie (NDI) hat sich für das Niet entschieden.

² Butter, K.: Neue Nietverfahren. Luftf.-Forschung 15 (1938) S. 91/93.

b) durch zu große Beanspruchung der Nietwandung auf Druck (Lochleibungsdruck). Das Loch wird zunächst unrund, bis schließlich die Blechkante aufreißt oder das Blechstück abgesichert wird,

c) durch Zerreißen des Bleches an der durch das Loch geschwächten Stelle.

Abscheren des Nietschaftes. Da der auf Abscheren beanspruchte Querschnitt in der unmittelbaren Nähe der Kraft P liegt, kann über die Schubspannungsverteilung¹ keine zuverlässige Angabe gemacht werden. Man macht deshalb die einfachste Annahme, daß die Schubspannungen gleichgerichtet sind und sich gleichmäßig über den Querschnitt verteilen:

$$\tau = \frac{P}{f} \quad (21.1)$$

Diese Schubspannung muß jedenfalls unterhalb der zulässigen Grenze bleiben, die für das weiche Nietmaterial höchstens bei $\tau = 600 \text{ at}$ liegt, so daß $\frac{P}{f} < 600 \text{ at}$ sein sollte. Auf Grund der Erfahrung halten die Nietverbindungen ohne schädliche Folgen aber doppelt so viel aus.

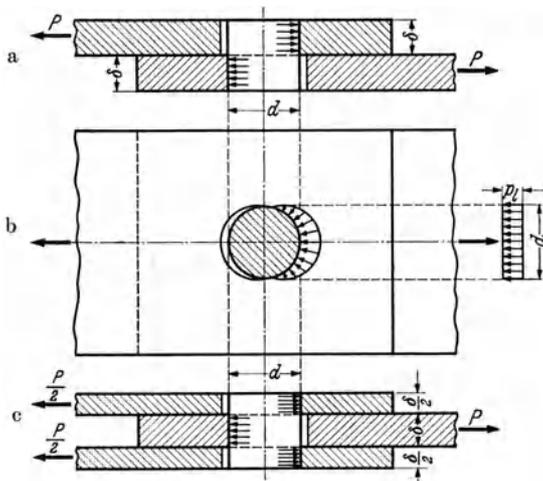


Abb. 21.3. Zur Berechnung der Vernietung.

Für eine gute Nietverbindung muß also die Reibung möglichst groß werden. Gute Anpaßarbeit und Verstemmen der Kanten (Abb. 21.4) und Köpfe sind darum wichtig. Die Nietpressen haben deshalb meist einen den Nietstempel umschließenden Blechschießer (Abb. 21.5) der vor dem Nietstempel aufsetzt und die Bleche fest zusammendrückt. Aber auch die Temperatur bei Beendigung des Nietens ist für eine gute Nietverbindung wichtig. Sie darf nicht zu hoch sein, damit die Nietköpfe dem Bestreben der Platten, auseinander zu gehen, nicht nach-

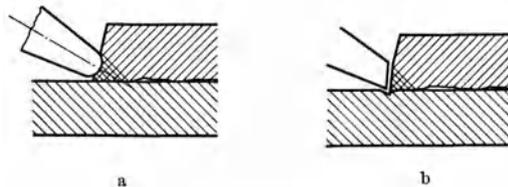


Abb. 21.4. (Aus Rötischer). a Richtiges, b Fehlerhaftes Verstemmen von Blechen. Das Einkerben ist zu vermeiden.

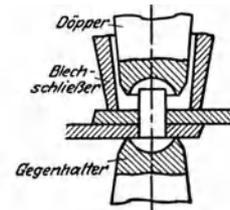


Abb. 21.5. Blechschießer zum Anpressen der Bleche (Aus Pockrandt, Mech. Techn.).

geben können. Nachdem der Kopf geformt ist, muß der Stempel der Nietmaschine noch einige Zeit (10—15 Sekunden) auf den geformten Kopf pressen. Durch Kühlung des Nietstempels läßt sich diese Zeit vermindern und damit die Anzahl der Niete, die in einer Stunde geschlagen werden können, vermehren.

Die Schließkraft der Nietmaschine darf nicht zu groß sein, denn Versuche von Bach und Baumann haben gezeigt, daß bei zu großer Pressung das Blech unter den Köpfen über die

¹ Herzog, A.: Spannungsuntersuchungen auf Abscheren beanspruchter Niete, Diss. T.H. Darmstadt, 1936.

² Ziem, H.: Einfluß der Nietlänge auf die Güte der Nietverbindungen. Forsch. 7 (1936) S. 44/48.

Quetschgrenze hinaus beansprucht wird. Dadurch entstehen Risse, die bei Dampfkesseln zu Explosionen führen können. Auf Grund dieser Versuche hat C. von Bach empfohlen, mit der Schließkraft der Nietmaschine nicht über 6500—8000 kg auf 1 cm² Nietquerschnitt zu gehen. Diese Grenze wird von vielen Kesselbaufirmen als zu niedrig angesehen. Sorgfältige, in der Eidg. Materialprüfanstalt in Zürich durchgeführte Untersuchungen (1929) haben bei einer Schließkraft von 9500 kg/cm² Nietquerschnitt keine schädlichen Blechbeanspruchungen nachweisen können.

Wenn die Reibung für die Sicherheit der Nietverbindung maßgebend wäre, so müßte

$$P < \mu Q = \mu \sigma_z \cdot f$$

sein. Aus den Bachschen Versuchen folgt, daß $\mu \sigma_z$ mindestens 600—700 kg/cm² sein muß, damit kein Gleiten eintritt. Genauere Versuche des Verbandes Deutscher Brückenbauanstalten¹ und von Ingenieur Preuß zeigten, daß der Gleitwiderstand ganz erheblich kleiner ist, als auf Grund der Bachschen Versuche angenommen werden kann und daß schon bei Belastungen unterhalb der Nutzlast deutlich wahrnehmbare Verschiebungen der vernieteten Teile auftreten². Im Grunde ist es aber für die Berechnung ziemlich gleichgültig ob man schreibt: $P = \tau \cdot f$ oder $P = \mu \sigma_z \cdot f$, wenn $\tau = \mu \sigma_z$ angenommen wird.

Wenn man (wie es in der Praxis gebräuchlich ist), $\tau = P/f$ setzt und für τ sehr hohe Werte zuläßt (bis 1200 at für Eisenkonstruktionen), so will das keinesfalls sagen, daß solche Schubspannungen wirklich auftreten, denn die Kraft P wird durch die Reibungskraft R geschwächt auf den Nietschaft übertragen, so daß eigentlich

$$\tau = \frac{P - R}{f} \quad (21.2)$$

ist. Da die Reibungskraft aber nicht zuverlässig zu berechnen ist, wird ihr Einfluß dadurch berücksichtigt, daß höhere Werte von τ als zulässig angesehen werden. Überall dort, wo die Reibungskraft fehlt (wie bei der Bolzenverbindung in Abb. 21.6), oder wo diese durch die Wirkung der äußeren Kräfte verkleinert wird (wie beim Dampfdom, Abb. 21.7), müssen die zulässigen Schubkräfte wesentlich kleiner angenommen werden.

Beim Dampfdom werden die Niete b auf Zug beansprucht. Da im Nietschaft (durch die Abkühlung) schon sehr große Zugspannungen (fast bis zur Elastizitätsgrenze) vorkommen, so müssen auch kleine zusätzliche Zugkräfte zur Lockerung der Nietverbindung führen; der Nietschaft darf nicht auf Zug beansprucht werden.

Werden mehrere Bleche miteinander verbunden, so verteilt sich die Kraft P über mehrere Nietquerschnitte. Abb. 21.3c zeigt eine zweiseitige Nietverbindung (Laschenvernietung), bei der $P = 2f \cdot \tau_{zul}$ ist.

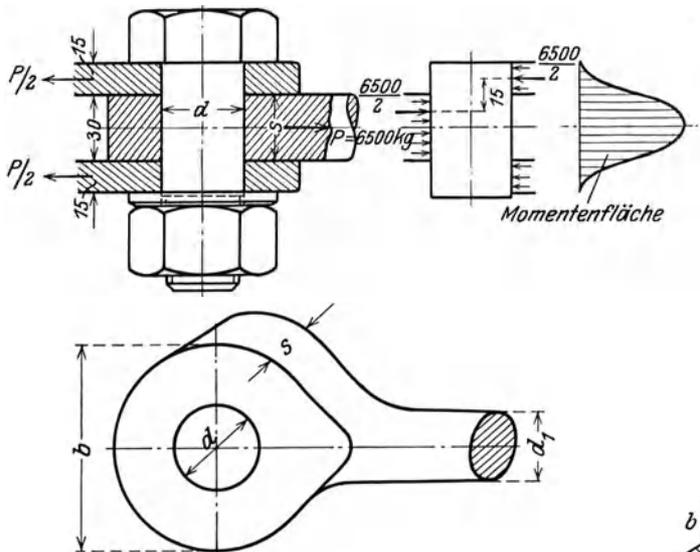


Abb. 21.6.
Bolzenverbindung. Zahlenbeispiel 21.1.

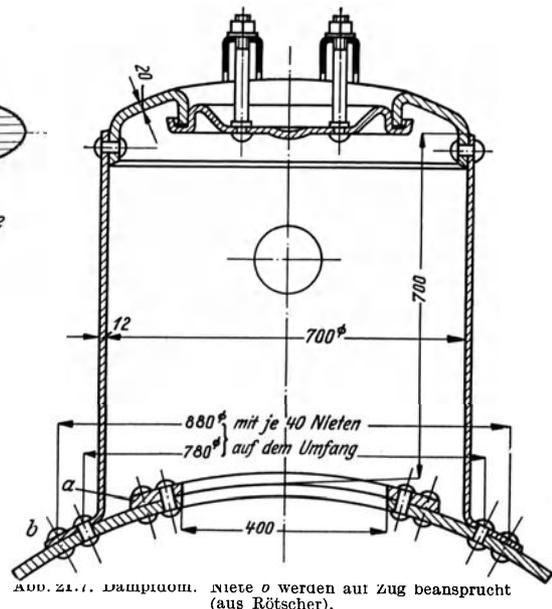


Abb. 21.7. Dampfdom. Niete o werden auf Zug beansprucht (aus Rötcher).

¹ Zweiter Bericht über Festigkeitsversuche mit Eisenkonstruktionen. Z. VDI 1909, S. 1019/24.

² Hoeffgen, H.: Gleitgrenze und Fließgrenze von Nietverbindungen. Diss. T. H. Karlsruhe 1934.

Zahlenbeispiel 21.1. Die Bolzenverbindung nach Abb. 21.6 ist zu berechnen. Der Zugstabdurchmesser d_1 folgt aus der Gleichung

$$\frac{\pi}{4} d_1^2 \sigma_z = 6500 \text{ kg.} \quad (\text{a})$$

Wenn σ_z zu 900 at angenommen wird, so ist $d_1 \approx 3 \text{ cm}$. Für den durch die Bohrung geschwächten Querschnitt des Stangenkopfes ist:

$$(b - d) s \cdot \sigma'_z = 6500 \text{ kg.} \quad (\text{b})$$

Wegen der ungleichmäßigen Spannungsverteilung in dem durchlochtem Stab wird $\sigma'_z = 450 \text{ at}$ angenommen. Das größte Biegemoment des Bolzens ist unter Annahme einer gleichmäßigen Auflage

$$M_{\max} = \frac{6500}{2} \cdot 1,5 = 4900 \text{ kg} \cdot \text{cm} = 0,1 d^3 \sigma_b. \quad (\text{c})$$

Daraus folgt mit $\sigma_b = 900 \text{ at}$, $d = 38 \text{ mm}$ und aus Gl (b) mit der gewählten Dicke $s = 30 \text{ mm}$: $b - d = \frac{6500}{3 \cdot 450} \approx 4,8 \text{ cm}$ und $b = 86 \text{ mm}$, was auf die normale Flacheisenbreite von 90 mm aufgerundet wird.

Wird der Bolzen wie ein Niet auf Abscheren berechnet, so würde ein Durchmesser d ausreichen, der sich aus der Gleichung $\frac{\pi}{4} d^2 \cdot \tau \cdot 2 = 6500$, mit $\tau = 1000 \text{ at}$, zu 20 mm ergibt. Die Biegespannung wäre dann: $\sigma_b = \frac{4900}{0,1 \cdot 2^3} \approx 6100 \text{ at}$, d. h. der Bolzen würde krumm.

Lochleibungsdruck. Die Kraft P (Abb. 21.3 b) erzeugt einen ungleichmäßig über die halbe Nietschaftsoberfläche $\frac{\pi d}{2} \cdot \delta$ verteilten Druck. Um die Rechnung einfacher zu gestalten, nimmt man an, daß der Lochleibungsdruck p_l gleichmäßig über die projizierte Umfangsfläche $\delta \cdot d$ verteilt sei, und setzt:

$$P = p_l \cdot \delta \cdot d. \quad (\text{2.3})$$

Diese Vereinfachung ist durchaus zulässig, weil die zulässige Grenze von p_l auf Grund der Erfahrung festgelegt wird, und zwar ist

$$p_l = 2 \tau = 1500 \text{ bis } 2000 \text{ at.} \quad (\text{2.4})$$

Diese Flächenpressung ist außerordentlich hoch, sie liegt jedenfalls schon oberhalb der Elastizitätsgrenze. Sie ist bei Nietverbindungen nur deshalb zulässig, weil durch die hemmende Wirkung der Reibung die wirklich auftretende Pressung viel kleiner ist.

Will man die Festigkeit des Nietschaftes gegen Abscheren und gleichzeitig auch den Lochleibungsdruck bis zur zulässigen Grenze ausnützen (wie es auch am wirtschaftlichsten wäre), so müßte für die einschnittige Verbindung

$$P = \frac{\pi}{4} d^2 \tau = 2 \tau \delta d \text{ sein, oder } \delta = \frac{\pi}{8} d \approx 0,4 d$$

und für die zweisechnittige Verbindung (Abb. 21.3 c)

$$P = 2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \tau = 2 \tau \delta d \text{ oder } \delta \approx 0,8 d.$$

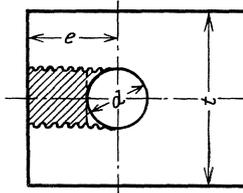


Abb. 21.8.

Die gebräuchliche Blechstärke δ ist für

$d = 13$	16	19	22	25	28	31	34
$\delta = 5-6$	$7-8$	$9-10$	$11-13$	$14-16$	$17-20$	$21-24$	$25-29$

Beide Festigkeitsbedingungen sind demnach nicht immer gleichzeitig bis zur zulässigen Grenze erfüllt, so daß bei der Berechnung der Vernietung sowohl die Zulässigkeit der Schubspannung τ als die der Flächenpressung nachgeprüft werden muß.

Die Nietverbindung kann auch durch das Aufreißen der Blechkante (Abb. 21.8) zerstört werden. Auf Grund der Erfahrung macht man bei Eisenkonstruktionen $e = 1,5 d$.

Berechnung des Bleches. Durch die Kräfte P (Abb. 21.3 a, b) wird das Blech auf Zug beansprucht. Es ist in der Praxis die Annahme gebräuchlich, daß die Zugspannungen sich gleichmäßig über den gelochten Stabquerschnitt verteilen. Dann ist die mittlere Zugspannung

$$\sigma_z = \frac{P}{(t-d)\delta}.$$

In Wirklichkeit ist die Spannungsverteilung derart ungleichmäßig, daß die größte Zugspannung etwa 2 mal so groß als die so berechnete ist¹.

Bei der Überlappvernietung (Abb. 21.3 a) tritt außerdem noch eine Biegespannung σ_b auf, die

¹ Henning, A.: Polarisationsoptische Spannungsuntersuchungen am gelochten Zugstab am Nietloch. Forsch. 4 (1933) S. 53/63.

durch die Reibung verkleinert wird, und nach den Versuchen von Dr.-Ing. Daiber¹ (Abb. 21.9) mit der Blechdicke zunimmt. Deshalb gilt die Regel:

„Überlappungsvernietung ist nach Möglichkeit zu vermeiden.“

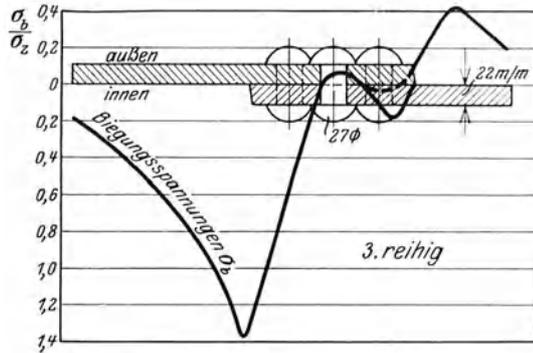
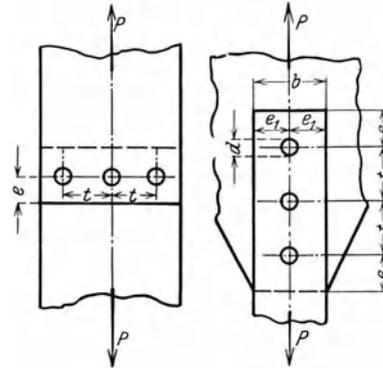


Abb. 21.9. Biegespannungen bei Überlappungsvernietung nach Versuchen von Dr.-Ing. Daiber.



a Abb. 21.10. b

Anordnung mehrerer Nieten. Wenn mehrere Nieten zur Übertragung der Kraft P erforderlich sind, so können diese nach Abb. 21.10a nebeneinander oder nach Abb. 21.10b hintereinander angeordnet werden. Es ist gebräuchlich, für die Rechnung in beiden Fällen anzunehmen, daß alle Nieten gleichviel tragen. Bei der Anordnung nach Abb. 21.10a wird dies praktisch wohl genügend genau zutreffen, wenn die Nieten symmetrisch zur Stabachse angeordnet werden. Bei hintereinander liegenden Nieten (Abb. 21.10b) dagegen trifft diese Voraussetzung nicht zu und man berücksichtigt das ungleichmäßige Tragen der Nieten dadurch, daß die zulässige Schubspannung bei mehrreihiger Vernietung niedriger gewählt wird.

Durch folgende Überlegung kann man sich ein ungefähres Bild über die Verteilung der Kraft auf die einzelnen Nieten machen. Die Nieten sollen die gegenseitige Verschiebung der vernieteten Teile verhindern. Ohne Verschiebung also keine Kraftübertragung und (innerhalb des Hooke'schen Gesetzes) sind die Kräfte den Verschiebungen proportional. Sowohl für das Blech als für die Lasche sind die Dehnungen am freien Ende gleich Null und in der Mitte der Lasche oder im Blech können die Dehnungen aus $\epsilon = \sigma/E$ berechnet werden. Der Verlauf zwischen den beiden Punkten (Abb. 21.11) ist nicht genauer bekannt und hauptsächlich von der Reibung zwischen den Blechen abhängig. Der Unterschied in den Dehnungen von Blech und Lasche ist ein Maß für die durch die Nieten übertragene Kraft. Es ist demnach immer eine Querschnittsebene vorhanden, in der sich Blech und Lasche gleich dehnen; ihre Lage ist hauptsächlich abhängig vom Verhältnis der Dicken von Blech und Lasche. In dieser „neutralen“ Ebene können die Nieten keine Querkraft übertragen; sie tragen aber immerhin zur Erhöhung der Reibung bei. Versuche des Schweiz. Vereins von Dampfkesselbesitzern bestätigen die Richtigkeit dieser Überlegungen; sie zeigten auch, daß die Dehnungen parallel zur Kraftrichtung nicht gleich sind².

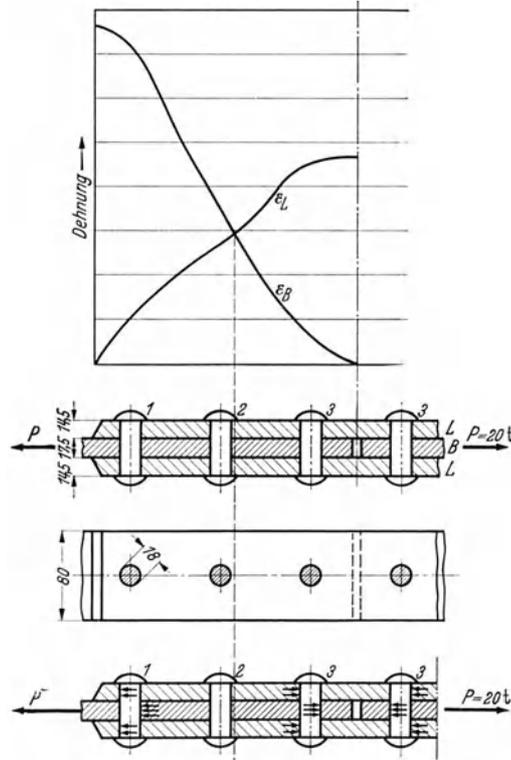


Abb. 21.11.

¹ Z. VDI 1913, S. 401.

² Höhn, E.: Nieten und Schweißen der Dampfkessel. Berlin: Julius Springer 1925. Weitere Untersuchungen über die Spannungsverteilung bei Vernietungen: Mitt. Forscharb. Heft 221, 229, 252, 262. — Wilson, W. M. und F. P. Thomas: Bull. Unin. Illinois Eng. Exp. Station. No. 302 (1938) S. 1—114.

Die kleinste Nietteilung, d. i. die Entfernung t_{\min} zweier Niete ist durch die Herstellung der Nietköpfe bedingt (Abb. 21.12). Ist D_1 der Kopfdurchmesser und D_2 der Durchmesser des Setzhammers oder Döppers, so ist $t_{\min} = \frac{1}{2} (D_1 + D_2)$. Nun ist für

$d = 10$	13	16	19	22	25	28 mm,
$D_1 = 20$	25	31	36	41	47	52 mm,
$D_2 = 30$	35	41	46	50	55	62 mm, und damit
$t_{\min} = 25$	30	36	41	46	52	57 mm

oder allgemein $t_{\min} \approx 2,5 d$. Praktisch macht man $t_{\min} \approx 3 d$. Die größte Nietteilung ist $t_{\max} \approx 6 d$ bis höchstens $8 d$.

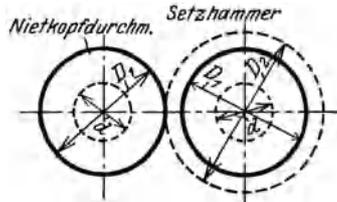


Abb. 21.12. Kleinste Nietteilung.

Zahlenbeispiel 21.2. Es ist der Stoß eines Flacheisens zu berechnen und zu zeichnen, wenn die Verbindung eine Zugkraft von 20 000 kg übertragen soll.

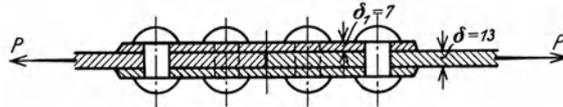
Die erste Schwierigkeit tritt schon auf bei der Wahl eines geeigneten Flacheisens. Es handelt sich um einen durchlochten Stab mit ungleichmäßiger Spannungsverteilung in dem gefährlichen Querschnitt. Bei der Vernietung wird allerdings die ungleichmäßige Verteilung durch die Reibung etwas gemildert,

so daß mit einer zulässigen Zugspannung von etwa 1000 at gerechnet werden kann, wenn diese als gleichmäßig über den gelochten Querschnitt verteilt angenommen wird. Schätzen wir damit die Zugspannung im vollen Stabquerschnitt zu 750 at, so ergibt sich der Querschnitt des Flacheisens aus der Gleichung:

$$f = \frac{20\,000}{750} \text{ zu } \approx 26 \text{ cm}^2.$$

Man kann also ein Flacheisen von $200 \cdot 13 \text{ mm}$ wählen. Damit wird der Nietdurchmesser $d = 22 \text{ mm}$, und die kleinste Nietteilung $t_{\min} > 3 d$ kann zu 60 mm angenommen werden. Da $e = 1,5 d$ ist, können auf die Breite von 200 mm drei Niete angeordnet werden, wie sich aus der Gleichung $(a - 1) \cdot 60 + 2 \cdot 1,5 d = 200$ ergibt, wenn a die Anzahl der Niete bedeutet.

Da die Niete womöglich versetzt hintereinander und symmetrisch zur Stabachse anzuordnen sind und da die Zahl der Nietreihen tunlichst nicht größer als zwei gemacht werden sollte, erhalten wir die in Abb. 21.13 gezeichnete Anordnung. Um Biegespannungen zu vermeiden, wählen wir Laschenvernietung mit einer Laschendicke von $\delta_1 \approx \frac{1}{3} \delta = 7 \text{ mm}$. Da nun alle Abmessungen festliegen, ist eine Nachrechnung auf Festigkeit leicht durchzuführen. Wenn alle Niete gleichviel tragen, was hier durchaus möglich ist, so folgt die Schubspannung im Nietschaft aus der Gleichung:



$$\tau = \frac{20\,000}{2 \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 2,2^2} \approx 550 \text{ at}$$

und der Lochleibungsdruck aus:

$$p_l = \frac{20\,000}{5 \cdot 2,2 \cdot 1,3} = 1400 \text{ at.}$$

Die größte Zugspannung im Blech (im Schnitt I—I)

$$\sigma_z = \frac{20\,000}{(20 - 3 \cdot 2,2) \cdot 1,3} = 1300 \text{ kg/cm}^2$$

ist ziemlich hoch.

Je nach den Anforderungen, die an eine Nietverbindung gestellt werden, unterscheidet man:

- feste Vernietung (Eisenkonstruktionen),
- feste und dichte Vernietung (Dampfkessel), oder
- dichte Vernietung (Behälter).

Abb. 21.13. Stoß eines Flacheisens.

21.2. Feste Vernietungen (Eisenkonstruktion).

Allgemeine Regeln. Für Eisenkonstruktionen werden „Normalprofile“ verwendet, deren gebräuchlichste Querschnittsformen in Abb. 21.14 dargestellt sind. Der Abstand w von der Winkkante bis zur Lochmitte wird „Wurzelmaß“ genannt; er ist,

wenn die Schenkelbreite b auf 0 ausgeht, $w = b/2 + 5$ mm, und
 „ „ „ „ b „ 5 „ „ $w = b/2 + 2,5$ mm.

Ist die Breite b größer als $4d$, so sind die Niete versetzt anzuordnen (Abb. 21.15), wobei
 $e_1 = 1,5d$, $w = e_1 + 5$ bis 10 mm, und $t > 2,5d$ ist.

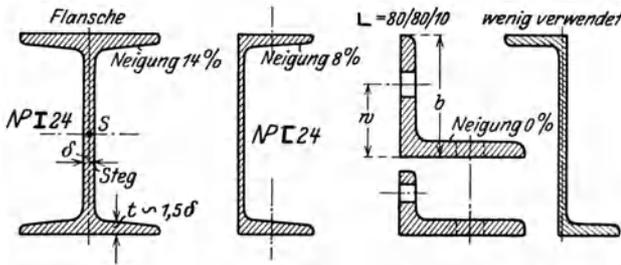


Abb. 21.14. Gebräuchlichste Normalprofile.

Bei Profileisen, wo die Niete in zwei zueinander senkrechten Ebenen anzuordnen sind, müssen folgende Regeln beachtet werden:

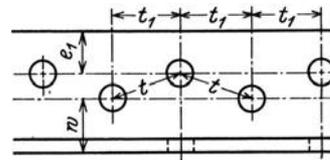


Abb. 21.15. Versetzt angeordnete Niete.

1. Jeder einzelne Teil des Profilquerschnittes ist mit so viel Nieten anzuschließen, wie der auf ihn entfallende Anteil der Gesamtkraft erfordert. Genau ist diese Regel wohl selten zu erfüllen, doch ist es durchaus unzulässig, den ganzen Querschnitt eines Profileisens auszunutzen, wenn nur eine Seite desselben vernietet wird. In allen Fällen, wo von dieser Regel abgewichen wird, handelt es sich um sehr geringe Belastung der Stäbe. So werden z. B. auf Knickung berechnete Stäbe aus L-Eisen meist nur in einer Fläche angenietet, da die Knickkraft nur einen Bruchteil der Kraft ausmacht, die der volle Querschnitt auf Druck zu tragen vermag.

2. Die Niete müssen in den beiden Ebenen um die halbe Teilung gegeneinander versetzt sein, damit die Köpfe gut geschlagen werden können.

Zahlenbeispiel 21.3. Ein auf Zug beanspruchtes [NP 18 überträgt die Kraft auf ein Anschlußblech. Wie ist die Verbindung herzustellen?

Da die Eisenstärke des Profils zwischen 8 mm (Steg) und 11 mm (Flansche) liegt, wird als Dicke des Anschlußbleches 10 mm gewählt. Der Nietdurchmesser beträgt $d = 22$ (evtl. 19 mm). Nach der Profiltabelle hat [NP 18 eine Fläche von 28 cm^2 . Wenn eine Zugspannung von 1000 at zugelassen wird, so ist die Kraft, die die Nietverbindung übertragen kann, $P = 28\,000 \text{ kg}$.

Die Stegfläche ist $18,0 \cdot 0,8 = 14,4 \text{ cm}^2$, abzüglich 2 Nietlöcher à $2,2 \cdot 0,8$ gibt $10,8 \text{ cm}^2$.

Die Fläche der beiden Flanschen $2 \cdot 6,2 \cdot 1,1 \text{ cm}^2$, abzüglich Nietlöcher $2 \cdot 2,2 \cdot 1,1$ gibt, $2 \cdot 4,4 \text{ cm}^2$. Die Stegfläche verhält sich zur Flanschenfläche ungefähr wie 5 : 2; in diesem Verhältnis müssen die Niete verteilt werden. Man zeichnet zuerst eine mögliche Lösung auf, z. B. im Steg 5 Niete und in jedem Flansch 2 Niete und kontrolliert dann, ob diese Lösung den Festigkeitsanforderungen genügt:

$$\text{Abschneiden des Nietschaftes } \tau = \frac{28\,000}{9 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 2,2^2} = 820 \text{ at.}$$

Dieser Wert ist vielleicht etwas zu hoch für mehrreihige Vernietung, da in Wirklichkeit nicht alle Niete gleichviel tragen. Deshalb 10 Niete wählen, 6 im Steg und je 2 in den Flanschen (Abb. 21.16), dann wird die Schubspannung

$$\tau = \frac{28\,000}{10 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 2,2^2} = 735 \text{ at (zulässig).}$$

Der Steg überträgt $\frac{10,8}{19,6} \cdot 28\,000 \approx 15\,000 \text{ kg}$ und jede Flansche $6\,500 \text{ kg}$. Für den Steg ist

der Lochleibungsdruck $p_l = \frac{15\,000}{6 \cdot 0,8 \cdot 2,2} = 1420 \text{ at (zulässig)}$ und für den Flansch, wenn das

darin angenietete Winkeleisen 9 mm dick ist: $p_l = \frac{6\,500}{2 \cdot 2,2 \cdot 0,9} \approx 1600 \text{ at}$. Dieser Wert ist wieder

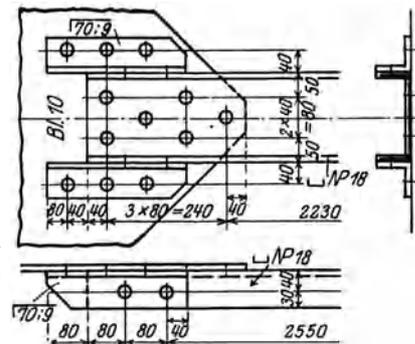


Abb. 21.16. (Aus Geusen).

etwas zu hoch, so daß zu empfehlen ist, das nächstdickere Winkeleisenprofil 70/70/11 mm zu wählen.

Die Nietverbindung überträgt ein Biegemoment. Das ist z. B. der Fall, wenn die Kraft P außerhalb des Schwerpunktes der Nietverbindung angreift (Abb. 21.17), so hat jedes der z vorhandenen Niete außer der Kraft P/z noch eine durch das Moment $P \cdot p$ erzeugte Zusatzkraft aufzunehmen. Da man mit hinreichender Genauigkeit annehmen kann, daß diese Zusatzkraft mit den Formänderungen, d. i. mit dem Abstände des Niets von der neutralen Faserschicht $n - n$ wächst, so folgt aus der Gleichgewichtsbedingung:

$$M_b = H_1 e_1 + H_2 e_2 + H_3 e_3 + \dots + H_{\max} e_{\max}.$$

Mit $H_1 = H_{\max} \frac{e_1}{e_{\max}}$, $H_2 = H_{\max} \frac{e_2}{e_{\max}}$ usw. wird

$$M_b = \frac{H_{\max}}{e_{\max}} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \dots + e_{\max}^2) = \frac{H_{\max}}{e_{\max}} \sum e^2$$

oder

$$H_{\max} = \frac{M_b e_{\max}}{\sum e^2}. \quad (21.5)$$

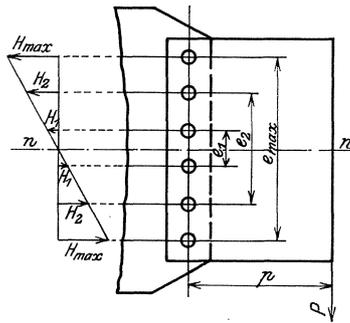


Abb. 21.17. (Aus Geusen.)

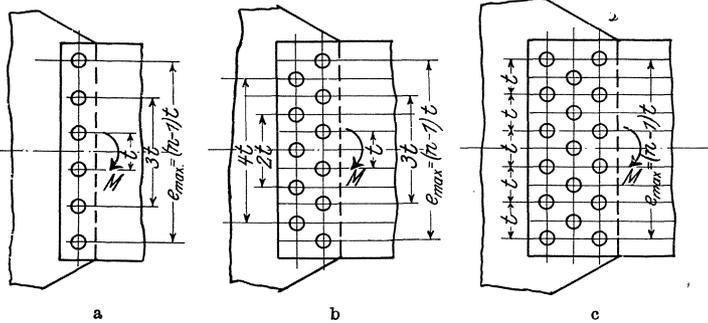


Abb. 21.18. (Aus Geusen.)

Wenn die Teilung der Niete gleich groß ist, so ist für die einreihige Vernietung (Abb. 21.18a)

$$\sum e^2 = t^2 \{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (n-1)^2\} = t^2 \cdot \frac{n(n^2-1)}{6}.$$

Da $e_{\max} = (n-1)t$ oder $t = \frac{e_{\max}}{n-1}$ ist, wird $\sum e^2 = \frac{e_{\max}^2}{(n-1)^2} \cdot \frac{n(n^2-1)}{6} = e_{\max} \frac{n(n+1)}{6(n-1)}$

und

$$H_{\max} = \frac{M_b}{e_{\max}} \cdot \frac{6(n-1)}{n(n+1)}. \quad (21.6)$$

Für die zweireihige Vernietung (Abb. 21.18b) wird, wenn n die Nietzahl in der ersten Reihe ist, $z = 2n - 1$, und

$$\sum e^2 = t^2 \{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2\} = t^2 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

und damit

$$H_{\max} = \frac{M_b}{e_{\max}} \cdot \frac{6(n-1)}{n(2n-1)}. \quad (21.7)$$

Für die dreireihige Vernietung (Abb. 21.18c) wird

$$H_{\max} = \frac{M_b}{e_{\max}} \cdot \frac{2(n-1)}{n^2}, \quad (21.8)$$

wenn n wieder die Nietzahl in der ersten Reihe ist.

Die größte auf ein Niet wirkende Kraft R ist

$$R = \sqrt{\left(\frac{P}{z}\right)^2 + H_{\max}^2}. \quad (21.9)$$

In vielen Fällen kann $\frac{P}{z}$ gegenüber H_{\max} vernachlässigt werden.

Bei einem auf Biegung beanspruchten Vollwandträger wird das Stehblech aus einzelnen Blechtafeln zusammengesetzt. Die Stoßstellen müssen dann Biegemomente übertragen, deren Größe je nach dem Belastungsfall aus der Momentenfläche entnommen werden können.

Zahlenbeispiel 21.4. Der Stehblechstoß eines Blechträgers ist zu berechnen, wenn das größte Biegemoment an der Stoßstelle 68 tm beträgt.

Man zeichnet zuerst irgendeine mögliche Vernietung auf, z. B. das Stehblech mit zwei Laschen 600 · 8 und die Winkeleisen mit je zwei Laschen 90 · 8 (Abb. 21.19a). Damit sind alle Abmessungen bekannt, und man braucht nur durch Nachrechnungen zu kontrollieren, ob der Entwurf den Festigkeitsbedingungen genügt.

Das Biegemoment von 68 tm wird durch das Widerstandsmoment des ganzen Trägers aufgenommen, während die Laschenverbindung nur den Teil des Momentes zu übertragen braucht, der durch das Stehblech aufgenommen wird. Aus der Biegegleichung:

$$\sigma = M \frac{e}{J_{\text{total}}} = M \frac{e}{J_{\text{Stehbl}} + J_{\text{Laschen}} + J_{\text{Winkel}}}$$

folgt, daß das Stehblech ein Biegemoment

$$M = M_{\text{total}} \cdot \frac{J_{\text{Stehbl}}}{J_{\text{total}}}$$

übertragen kann.

$$\begin{aligned} J_{\text{Stehblech}} &= \frac{1}{12} \cdot 1,2 \cdot 80^3 &= & 51\,200 \text{ cm}^4 \\ J_{\text{Laschen}} &\approx f \cdot c^2 = 4 \cdot 25 \cdot 1,2 \cdot 41,2^2 &= & 204\,000 \text{ cm}^4 \\ J_{\text{Winkel}} &\approx 4 \cdot 19,2 (40 - 2,9)^2 &= & 105\,600 \text{ cm}^4 \\ &&& \hline J_{\text{total}} &&= & 360\,800 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

so daß $M_b = \frac{512}{3608} \cdot 68 = 9,68 \text{ tm} = 968\,000 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ ist.

Mit den in die Abbildung eingeschriebenen Maßen wird

$$\Sigma e^2 = 2 \cdot 69^2 + 52^2 + 45^2 + 38^2 + 31^2 + 24^2 + 17^2 + 10^2 = 17\,621 \text{ cm}^2$$

und nach Gl. (5) mit $e_{\text{max}} = 69 \text{ cm}$

$$H_{\text{max}} = 968\,000 \cdot \frac{69}{17\,621} = 3800 \text{ kg}.$$

Wenn die Scherkraft Q vernachlässigt werden kann, wird die Schubspannung im Nietschaft:

$$\tau = \frac{3800}{2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 2,2^2} = 510 \text{ at} \quad (\text{zulässig})$$

und der Lochleibungsdruck $p_l = \frac{3800}{2,2 \cdot 1,2} = 1450 \text{ at} \quad (\text{zulässig}).$

An Stelle von zwei verschiedenen Laschen kann auch eine über die Winkeleisen durchgehende Lasche mit darunterliegendem „Futterblech“ angeordnet werden (Abb. 21.19 b).

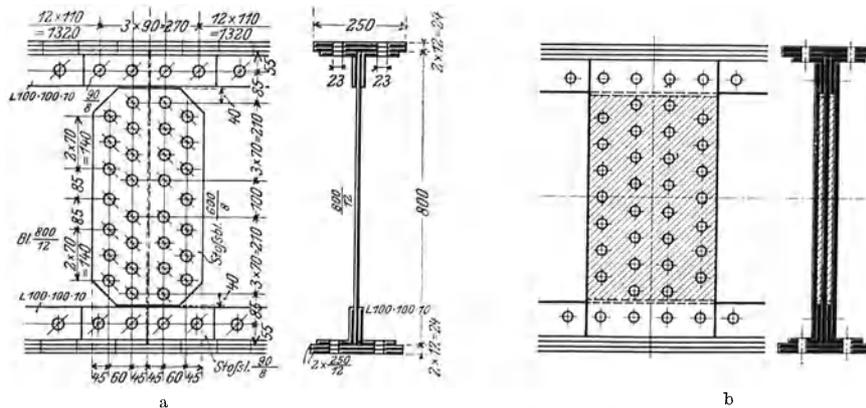


Abb. 21.19. Stehblechvernetung. (Abb. a aus Geusen.)

Gurtwinkelvernetung bei einem Vollwandträger. Um die Kraft zu berechnen, die ein Niet übertragen muß, schneiden wir ein Stück heraus (Abb. 21.20) und bringen an den Schnittflächen die Spannungen an, die proportional mit der Entfernung von der neutralen Faserschicht zunehmen. Die Differenz der an den Schnittflächen des angenieteten Teiles wirkenden Kräfte muß das Niet auf das Stehblech übertragen.

Im Schnitt I wirkt die Kraft $\int_{\eta=z}^{\eta=e} \sigma_{\eta} d f = \frac{M_x}{J} \int_z^e \eta d f = \frac{M_x}{J} S_y$ im Schnitt II die Kraft

$\int_{\eta=z}^{\eta=e} \sigma_{\eta} df = \frac{M_{x'}}{J} S_y$, wenn mit $S_y = \int_{\eta=y}^{\eta=e} \eta df$ das statische Moment des angenieteten Teiles in bezug auf die Biegeachse bezeichnet wird; J ist das Trägheitsmoment der ganzen Querschnittsfläche. Das dazwischenliegende Niet überträgt dann die Kraft

$$H = \frac{S_y}{e} \cdot \frac{e}{J} (M_x - M_{x'}) = \frac{S_y}{J} \Delta M.$$

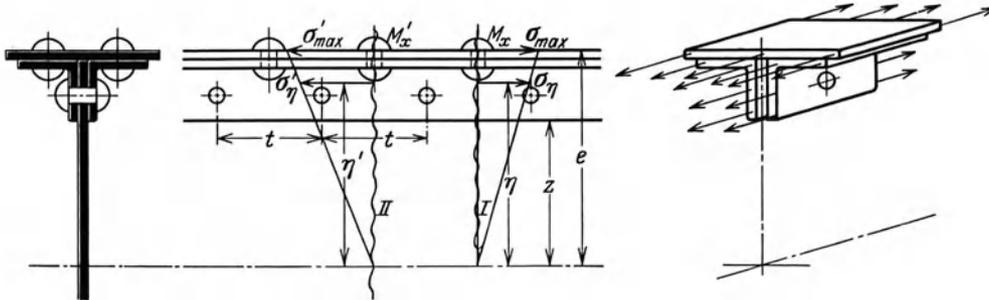


Abb. 21.20. Zur Berechnung der Gurtwinkelvernetzung.

Da bei einem auf Biegung beanspruchten Stab $Q = \frac{dM}{dx} \approx \frac{\Delta M}{t}$ ist, so wird

$$H = \frac{S_y}{J} Q \cdot t. \tag{21.10}$$

Die Kraft H wird dort am größten, wo Q am größten ist, d. i. an den Auflagerstellen. Die Nietenteilung wird aber über die ganze Trägelänge gleich gehalten.

Knickgefahr. Betreffend Knickgefahr der Druckseite des gebogenen Vollwandträgers siehe (Abschn. 18.3).

Infolge der im Verhältnis zu seiner Höhe sehr geringen Dicke des Stehbleches ist noch eine zweite Knickgefahr vorhanden, namentlich dort, wo Einzellasten wirken. An diesen Stellen, mindestens aber in Abständen von je 1 bis 1,2 m, ist deshalb das Stehblech durch aufgenietete Profileisen zu versteifen. Die Profileisen sind so zu bestimmen, daß sie für sich knicksicher sind (Abb. 21.21).

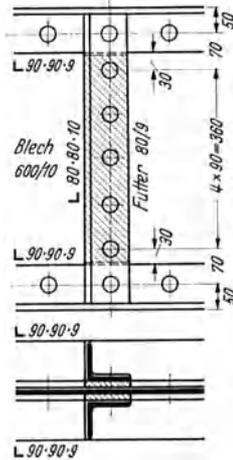


Abb. 21.21. Knickversteifung.

Fachwerkträger. Ein Fachwerk ist ein Gebilde aus einzelnen geraden Stäben, die in ihren Endpunkten, den sog. Knotenpunkten, miteinander verbunden sind. Die Fachwerke werden in ebene und räumliche eingeteilt. Das einfachste ebene Fachwerk ist das Dreieck mit drei Knotenpunkten und drei Stäben. Zum Anschluß eines neuen Knotenpunktes sind zwei nicht in derselben Linie liegende neue Stäbe erforderlich und ausreichend. Ein ebenes Fachwerk mit n Knotenpunkten ist daher durch $3 + 2(n - 3) = 2n - 3$ Stäbe bestimmt (Abb. 21.22 a).

Wirken die Lasten nur in den Knotenpunkten des Fachwerkes, so wird jeder Stab entweder nur auf Zug oder nur auf Druck beansprucht. Greifen dagegen auch zwischen den Knotenpunkten Lasten an (wie z. B. bei einem Kranträger), so tritt noch eine Biegebeanspruchung hinzu.

Die Stabkräfte werden unter der Voraussetzung berechnet, daß alle Stäbe in den Knotenpunkten durch reibungslose (frei drehbare) Gelenke miteinander verbunden sind. Die gemäß dieser Annahme in den einzelnen Stäben erzeugten Spannungen nennt man die Hauptspannungen. Da die Verbindung in Wirklichkeit durch feste Vernetzung mit mindestens zwei bis drei Nieten in jedem Knotenpunkt erfolgt, so ist freie Drehbarkeit der Stabenden nicht möglich. Es tritt eine Einspannung der Stäbe in den Knotenpunkten ein; die dadurch in den Stäben erzeugten zusätzlichen Biegespannungen werden Nebenspannungen genannt. Die Größe dieser Nebenspannungen wächst in erster Linie mit der Stabbreite, so daß folgende Regel gilt:

Die Breite der Stäbe in der Ebene des Fachwerkes soll nur so groß gewählt werden, wie die Rücksicht auf ordnungsgemäße Vernetzung und die erforderliche Knicksicherheit verlangen.

Für die Gurtungen, die als am stärksten beanspruchten Teile in den Knotenpunkten durchgehen, genügt eine Stabbreite

$$b = 0,01 \text{ bis } 0,0075 \text{ mal Spannweite.}$$

Bei den Füllungsstäben ist die Querschnittsform des einen Stabes von den anderen unabhängig. Sie werden durch besondere Knotenbleche angeschlossen.

Die größten Gurtkräfte können sofort aus der maximalen Momentenfläche berechnet werden (Abb. 21.22b), denn legen wir den Schnitt I—I, so muß (da Gleichgewicht vorhanden ist) die Summe der Momente in bezug auf den Knotenpunkt I gleich Null sein, d. h.

$$O \cdot h = M_I. \quad (21.11)$$

Ebenso folgt aus dem Schnitt II—II:

$$U \cdot h = M_{II}. \quad (21.11a)$$

Die größten in den Füllungsstäben auftretenden Kräfte folgen aus dem Diagramm der maximalen Querkräfte (Abb. 21.22c). Wenn das Stabgewicht jeweils in den Knotenpunkten konzentriert gedacht wird, so verlaufen die Schubkräfte, herrührend vom Eisengewicht, beim Fachwerkträger treppenförmig.

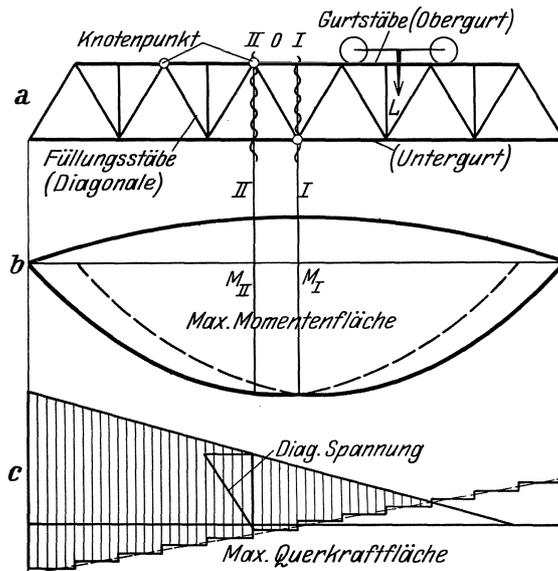


Abb. 21.22. Fachwerkträger.

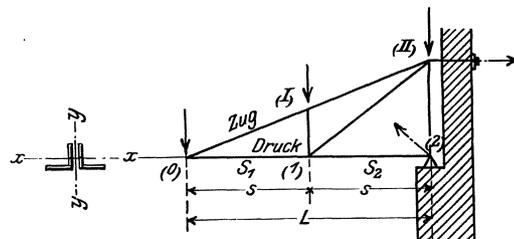


Abb. 21.23. (Aus Geusen.)

Bei der Berechnung auf Knickung ist als freie Knicklänge die theoretische Stablänge, d. h. die Entfernung der beiden Knotenpunkte zu nehmen, unter der Voraussetzung, daß diese Punkte nicht nur in der Fachwerkebene, sondern auch senkrecht dazu hinreichend gegen Ausknicken gesichert sind. Ein Beispiel ungenügender Sicherung bildet der Knotenpunkt I in Abb. 21.23; die freie Knicklänge ist hier $s_1 + s_2$ mit der mittleren Knickkraft $\frac{1}{2}(S_1 + S_2)$.

Bei der Ausbildung der Knotenpunkte sind folgende Regeln zu beachten:

1. Die Schwerpunkte der Querschnitte sämtlicher Stäbe müssen in einer Ebene (der Fachwerkebene) liegen. Aus dieser Bedingung folgt die Notwendigkeit, alle Stabquerschnitte symmetrisch zu dieser Ebene auszubilden. Geschieht das nicht, so werden die Nebenspannungen durch die dann auftretenden Drehmomente vergrößert.

2. Die Schwerachsen von sämtlichen an einem Knotenpunkt zusammentreffenden Stäbe müssen sich in einem und demselben Punkt (dem Knotenpunkt) schneiden, denn sonst sind die Stabkräfte nicht im Gleichgewicht; sie bilden ein Moment, das zusätzliche Spannungen erzeugt. Die Richtungslinie der Stabkraft geht nämlich durch den Schwerpunkt des Querschnittes, als Folge der Annahme einer gleichmäßigen Spannungsverteilung über den Querschnitt. Nur bei wenig beanspruchten Stäben darf man von dieser Regel abweichen.

3. Sämtliche Ecken des Knotenbleches müssen durch die Fachwerkstäbe verdeckt sein oder mit den Kanten derselben zusammenfallen (Abb. 21.24).

Durchbiegung. Um die Senkung irgendeines Punktes des Fachwerkträgers zu bestimmen, geht man am zweckmäßigsten von dem Satze von Castigliano aus. Greifen die äußeren Kräfte nur in den Knotenpunkten des Fachwerkes an, so treten in den einzelnen Stäben nur Zug- oder Druckkräfte S auf. In diesem Fall ist die Formänderungsarbeit: $\mathcal{A} = \sum \frac{S^2}{2fE} s$, wenn s die Stablänge ist, und:

$$q_i = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial Q_i} = \sum \frac{S_s}{fE} \frac{\partial S}{\partial Q_i}$$

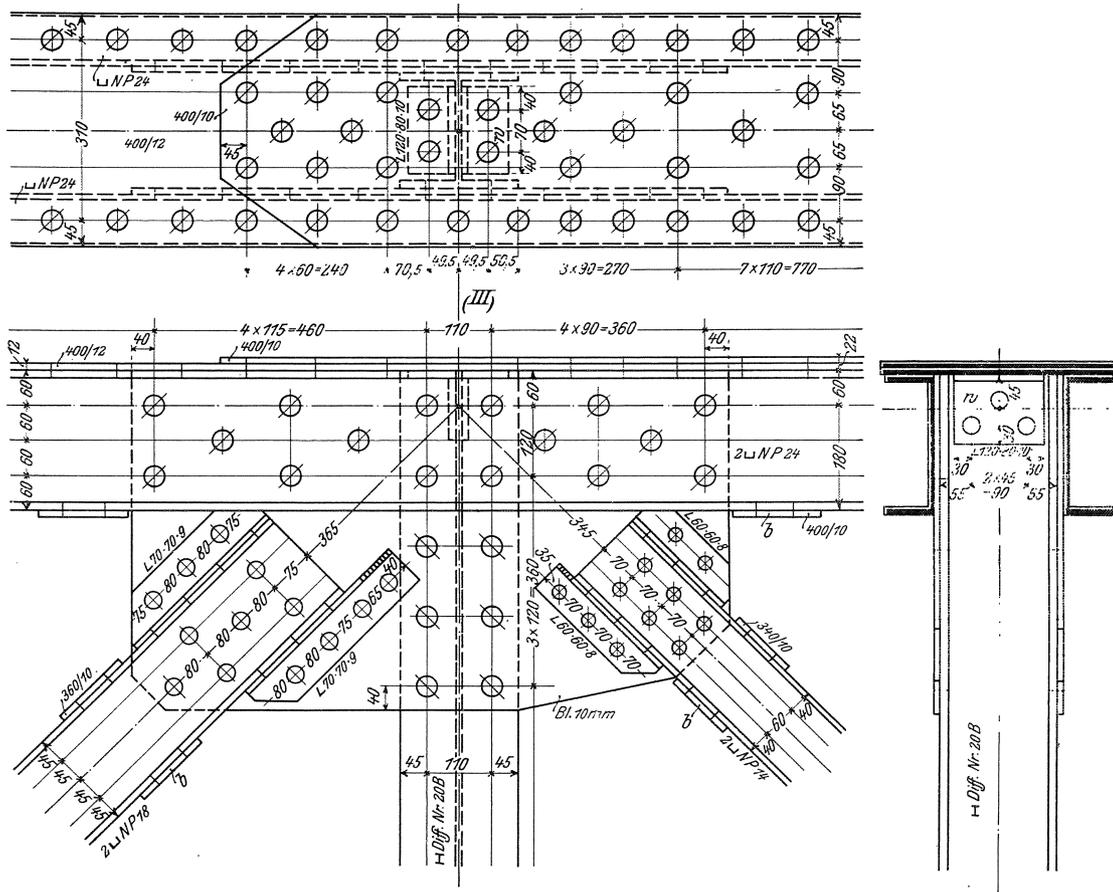


Abb. 21.24. Knotenpunkt eines Fachwerkträgers (aus Geusen).

Nun ist (S. 31) $\frac{\partial S}{\partial Q_i} = \bar{S}$, gleich der Stabkraft, die durch die in dem Punkte i in der Richtung Q_i angreifenden Krafteinheit erzeugt wird. Damit wird:

$$q_i = \frac{1}{E} \sum \frac{S_s \bar{S}}{f} \quad (21.12)$$

Die Kräfte S und \bar{S} können aus dem Cremonaplan oder nach der Ritterschen Momentenmethode berechnet werden. Die Gl. (12) gilt unverändert, wenn $Q_i = 0$ ist, d. h. wenn die Verschiebung eines Punktes bestimmt werden soll, in dem keine Kraft wirkt.

Anwendungsbeispiel 21.5. Es ist die Senkung q_3 des Knotenpunktes 3 des in Abb. 21.25a dargestellten statisch bestimmten Fachwerkträgers zu bestimmen.

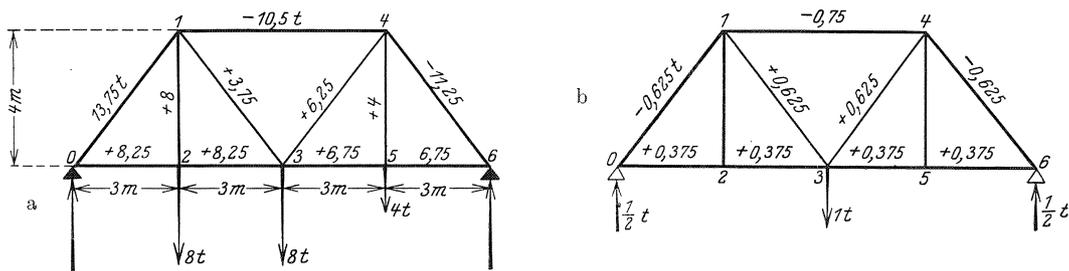


Abb. 21.25.

Die Stabspannungen, die unter der Wirkung der äußeren Kräfte entstehen, sind in dieser Abbildung eingetragen. Abb. 21.25 b gibt diejenigen Kräfte \bar{S} , die entstehen, wenn im Knotenpunkt 3 nach der Richtung der gesuchten Verschiebung (d. i. im vorliegenden Fall senkrecht) eine Last von 1 t angreift. Die den einzelnen Stäben entsprechenden Produkte $\sum \frac{Ss\bar{S}}{f}$ sind in der Zahlentafel zusammengestellt. Die Durchbiegung q_3 ist dann, mit $E = 2200 \text{ t/cm}^2$:

Stab	S Tonnen	s cm	f cm ²	\bar{S} Tonnen	$\frac{Ss\bar{S}}{f}$
0—1	—13,75	500	30	—0,625	143
0—2	+ 8,25	300	15	+0,375	62
1—2	+ 8,0	400	10	0	0
1—4	—10,50	600	20	—0,750	24
1—3	+ 3,75	500	10	+0,625	117
2—3	+ 8,25	300	15	+0,375	62
3—4	+ 6,25	500	10	+0,625	195
3—5	+ 6,75	300	15	+0,375	51
4—5	+ 4,00	400	10	0	0
4—6	—11,25	500	30	—0,625	117
5—6	+ 6,75	300	15	+0,375	51

$$q_3 = \frac{1}{E} \sum \frac{Ss\bar{S}}{f} = \frac{822}{2200} \approx 0,4 \text{ cm.}$$

$$\sum \frac{Ss\bar{S}}{f} = 822 \text{ t/cm}$$

Leichtmetall-Vernietung. Die Vernietung von Aluminiumlegierungen (Duralumin, Avional) erfolgt kalt. Die Niete werden kurz vor dem Schlagen sorgfältig gegläht (bei 500 bis 550° C), um eine größere Verformbarkeit zu erhalten. Der Nietschaft füllt das Loch vollständig aus; die Klemmwirkung des kalt geschlagenen Nietes ist unbedeutend, so daß keine Kraftübertragung durch Reibung erfolgt. Die Streckgrenze des Werkstoffes liegt für die Zugbeanspruchung des Bleches bei 27 kg/mm², für das Abscheren des Nietschaftes bei 18 kg/mm² und für den Lochleibungsdruck bei 41 kg/mm². Im allgemeinen sollte eine 2- bis 2,5fache Sicherheit gegenüber diesen Grenzen bei den Konstruktionen eingehalten werden. Im Flugzeugbau wird diese Bedingung nicht erfüllt, weil bei dieser Sicherheit die Konstruktion zu schwer wird. Das liegt wohl hauptsächlich daran, daß der Festigkeitsrechnung sehr ungünstige Belastungen zugrunde gelegt werden müssen, die im normalen Betrieb nicht auftreten. Man läßt dann dort Belastungen zu, welche die Streckgrenze überschreiten.

Schrifttum.

Pleines, W.: Nietverfahren im Metallflugzeugbau. Luftf.-Forsch. Bd. 7 (1930) S. 1—72. Oldenburg.
 — Vályi, I.: Untersuchung über die Nietung von Aluminiumlegierungen nach Gattung Al-Cu-Mg. Diss. E. T. H. Zürich 1938. — Koenig, M.: Spannungsspitzen in kaltgeschlagenen Kraftnietungen. Schweiz. Arch. angew. Wiss. u. Techn. 3 (1937) S. 41/46. — Müller, W.: Maßnahmen zur Verbesserung der Ermüdungsfestigkeit genieteteter Knotenpunkt-Verbindungen aus Aluminiumlegierungen. Schweiz. Arch. 5(1939) S. 294/97.

21.3. Feste und dichte Vernietung.

Die Berechnung der Spannungen in Kesselwandungen ist aus Abschnitt 14.1 zu entnehmen. Wenn der Kessel nicht aus einem Stück hergestellt ist, sondern einzelne Bleche durch Niete verbunden sind (Abb. 21.26), so wird die Querschnittsfläche der Nähte durch die Nietlöcher geschwächt im Verhältnis $\varphi = (t - d)/t$ (Güteverhältnis genannt, d = Nietdurchmesser, t = Teilung). Das Blech muß deshalb entsprechend dicker sein, nämlich nach Gl. (14.4):

$$s = \frac{p \cdot D}{2\varphi \cdot \sigma_{zul}} + 0,1$$

Für die Längsnähte wird man (um zusätzliche Biegespannungen zu vermeiden) keine Überlappungsvernietung wählen. Bei den nur halb so hoch beanspruchten Quernähten dagegen können sie zugelassen werden.

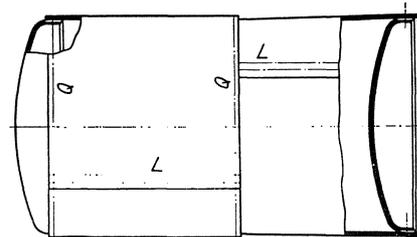
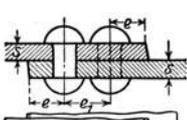
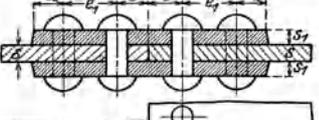
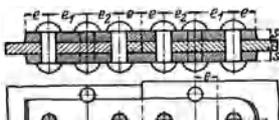
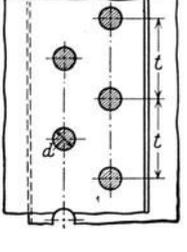
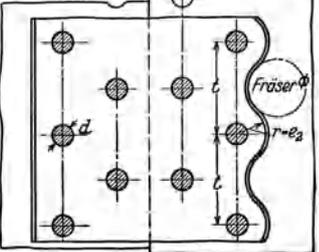
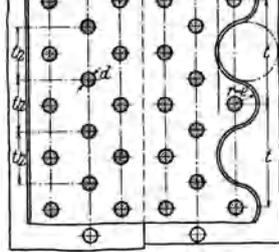


Abb. 21.26. Kessel mit Längs- und Quernähten (aus Rötischer).

Da einreihige Vernietungen nicht gut dicht zu halten sind, werden sie im Dampfkesselbau nicht verwendet. Dreireihige Überlappung ist wegen der großen Biegespannungen (Abb. 21.9) nicht zu empfehlen. Die mit Rücksicht auf ein gutes Dichthalten gebräuchlichen Abmessungen der Vernietungen sind in Zahlentafel 21.1 eingetragen. Weil das Verhältnis s/d immer groß ist, bleibt der Lochleibungsdruck stets unter den zulässigen Grenzen.

Zahlentafel 21.1. Dampfkesselveinigung.

	Überlappt	Laschen,	
			
	1	1	1 Aus Doppel: Taschenbuch.
			
	2	2	3
Nietreihen	2	2	3
Nietdurchm. cm	$d = \sqrt{5s} - 0,4$ $e = 1,5 d$ $e_1 = 0,6 t$	$d = \sqrt{5s} - 0,6$ $e = 1,5 d$ $e_1 = 0,5 t$	$d = \sqrt{5s} - 0,7$ $e = 1,5 d$ $e_1 = e_2 = \frac{3}{8} t$
Teilung cm	$t = 2,6 d + 1 \text{ cm}$	$t = 3,5 d + 1 \text{ cm}$	$t = 6 d + 1 \text{ cm}$
Niete/Teilung	2	2	5 resp. 6
$\varphi = \frac{t-d}{t}$	0,66 ÷ 0,68	0,75 ÷ 0,77	0,84
$\tau_{zul} \text{ at}$	550 ÷ 650	2 (475 ÷ 575)	2 (450 ÷ 550)
Für Werte pD bis	2000	3000	4600

22. Keilverbindungen.

Keile werden dort verwendet, wo schnelles Lösen und doch genaues Passen, oder wo Nachstellbarkeit erforderlich ist. Die Wirkungsweise beruht auf der schwachen Neigung der Keilfläche. Ohne Reibung stehen die Reaktionen senkrecht zu den Gleitflächen (Abb. 22.1a) und aus der Gleichgewichtsbedingung in horizontaler Richtung folgt:

$$K = Q \operatorname{tg} \alpha. \quad (22.1)$$

Je kleiner α ist, um so größer wird Q . Der „Anzug“ des Keiles ($\operatorname{tg} \alpha$) ist je nach dem Verwendungszweck verschieden. Die Wirkung der Reibung kann in einfachster Weise dadurch berücksichtigt werden, daß die Reaktionen R_1 und R_2 dann unter dem Reibungswinkel ϱ gegen die Flächennormale und in Richtung der Bewegung wirken. Es ist dann (Abb. 22.1b)

$$K = Q \operatorname{tg} (\alpha + \varrho) + Q \operatorname{tg} \varrho. \quad (22.2)$$

Zum Lösen des Keiles ist eine Kraft

$$K' = Q \operatorname{tg} (\alpha - \varrho) - Q \operatorname{tg} \varrho \quad (22.2a)$$

erforderlich. Damit der Keil unter dem

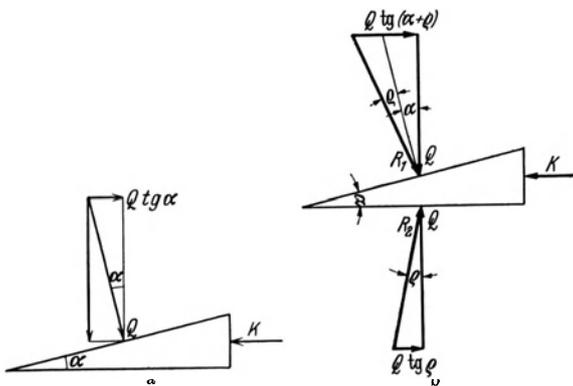


Abb. 22.1. Kraftwirkung. a ohne, b mit Reibung.

Einfluß von Q nicht herausgleitet, d. h. selbstsperrend wirkt, muß

$$\operatorname{tg} (\alpha - \varrho) - \operatorname{tg} \varrho < 0 \quad \text{oder} \quad \alpha - \varrho < \varrho, \quad \text{d. h.} \quad \alpha < 2 \varrho$$

sein, denn dann wird K' negativ. Selbsthemmung ist vorhanden, wenn der Spitzenwinkel des Keiles kleiner als der doppelte Reibungswinkel ist.

Längskeile dienen zur Befestigung von Kupplungen, Zahnrädern, Riemenscheiben usw. auf Wellen; sie verspannen die Welle gegen den Maschinenteil (Abb. 22.2). Man unterscheidet: Hohlkeile, Abb. 22.3a, Flachkeile, Abb. 22.3b, und Nutenkeile (Treibkeile), Abb. 22.3c.

Der Anzug der Längskeile ist immer $1/100$; die Querschnittsabmessungen sind durch Normen festgelegt. Beim Hohlkeil wird die Nabe bzw. die Welle nur durch die Reibung zwischen Welle und Keil mitgenommen. Das Reibungsmoment $\mu Q d$ muß deshalb größer sein als das Drehmoment, das übertragen werden soll. Die Welle kann ein Drehmoment $M_a = 0,2 d^3 \tau \text{ kg} \cdot \text{cm}$ übertragen, so daß mit $\tau = 200 \text{ at}$ und $\mu = 0,1$:

$$0,2 d^3 \tau = 40 d^3 < 0,1 Q d$$

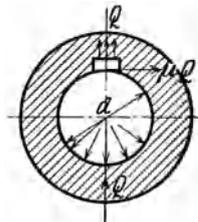


Abb. 22.2.

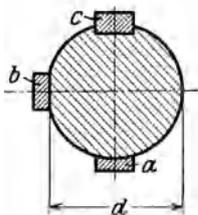


Abb. 22.3.

Scheiben- durchmesser	Geteilte Riemenscheiben zum Klemmen gebohrt. Scheibenbreite mm						Ungeteilte Riemenscheiben Scheibenbreite mm			
	bis 100	über 100 bis 200	über 200 bis 300	über 300 bis 400	über 400 bis 500	über 500 bis 600	bis 100	über 100 bis 200	über 200 bis 300	über 300
bis 500					Flachkeil		Hohlkeil			
über 500 bis 630	Ohne Keil									
" 630 " 800								Flachkeil		
" 800 " 1000									Treibkeil	
" 1000 " 1250		Flachkeil								
" 1250 " 1600				Treibkeil						
" 1600 " 2000										
" 2000 mm										

Abb. 22.4. Verwendungsgebiete der Keilarten (nach DIN).

sein sollte. Abgesehen davon, daß Naben so große Kräfte nicht ertragen können (für $d = 10 \text{ cm}$ wäre z. B. $Q > 40\,000 \text{ kg}$), ist die Größe von Q durch die zulässige Flächenpressung zwischen Keil und Keilbahn (beim Einschlagen des Keiles) eingeschränkt. Außerdem ist Q von der meist kleinen Kraft P abhängig, mit der der Keil eingeschlagen ($Q < 100 P$) oder sonst befestigt wird (z. B. durch Klemmschrauben). Aus diesen Überlegungen folgt, daß ein Hohlkeil das Drehmoment einer voll beanspruchten Welle nicht übertragen kann. Das ist z. B. zu beachten beim Einzelantrieb von Maschinen (Elektromotoren, Hauptantriebscheiben einer Transmission usw.). Hohlkeile sind dagegen sehr gut geeignet für die Befestigung von Riemenscheiben auf Transmissionen, weil diese Befestigung keine besondere Bearbeitung erfordert. — In ähnlicher Weise kann für geteilte Riemenscheiben, die für Aufklemmen gebohrt werden, das übertragbare Drehmoment berechnet werden.

Auch beim Flachkeil erfolgt die Mitnahme durch Reibung. Hier können aber etwas größere Drehmomente zugelassen werden, denn reicht die erzeugte Pressung zur Übertragung des Drehmomentes nicht aus, so verdreht sich die Welle gegenüber dem Keil und erzeugt dadurch eine größere Pressung. Die Grenze, bis zu welcher die Flachkeile für die Befestigung von Riemenscheiben auf Transmissionen verwendet werden können, ist durch den Normenausschuß auf Grund der Erfahrung festgelegt (Abb. 22.4).

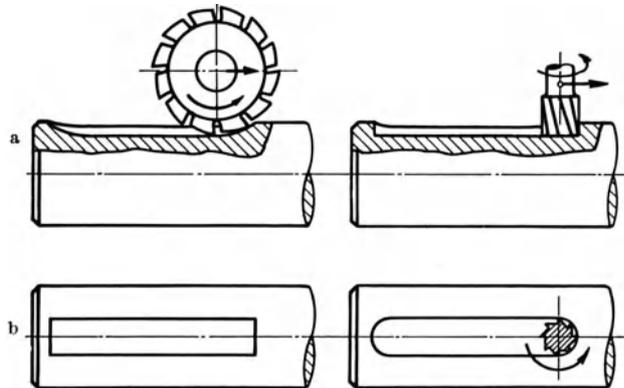


Abb. 22.5. Fräsen von Keilnuten (aus Rötischer). a Scheibenfräser b Trägerfräser.

Für größere Drehmomente werden Nutenkeile (Treibkeile) verwendet. Die Mitnahme erfolgt durch die Seitenflächen, für die große Flächenpressungen zulässig sind, weil keine Relativbewegung stattfindet. Die Keilnuten werden gefräst (Abb. 22.5). Die Anwendung der Fingerfräser ist vorteilhaft, weil der Einlegkeil nicht mehr durch Verstiftung gesichert werden muß, wie dies bei der offenen Scheibenfräsernute mit dem verhältnismäßig großen Nutenauslauf der Fall ist, welche bei Verdrehbeanspruchung von Vorteil sein kann. Bei stoßweisem Betrieb und wechselnder Drehrichtung werden zwei um 120° versetzte Nutenkeile verwendet, um Dreipunktaufgabe zu erreichen.

Eine vorzügliche Befestigung bilden die sog. Tangentialkeile (Abb. 22.6), die Nabe und Welle in tangentialer Richtung verspannen.

Nasenkeile (Abb. 22.7) werden da angeordnet, wo man einen Ansatz (die Nase) braucht, um den Keil wieder herausziehen zu können. Die vorstehende Nase erhöht die Unfallgefahr. Nasenkeile sollten deshalb nur für die Befestigung von solchen Teilen verwendet werden, die in geschlossenen Gehäusen laufen oder sonst eingekapselt werden.

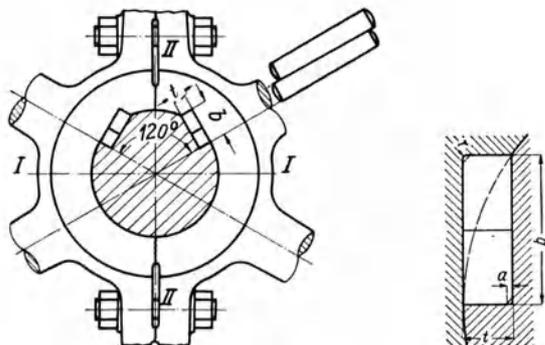


Abb. 22.6. Tangentialkeile (aus Rötischer).

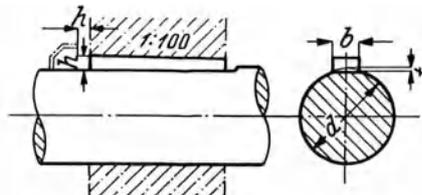


Abb. 22.7. Flachkeil ohne und mit Nase (aus Rötischer).

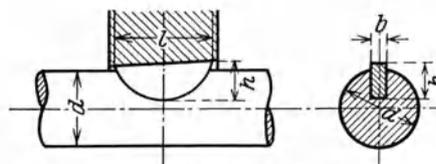


Abb. 22.8. Woodruff-Keil.

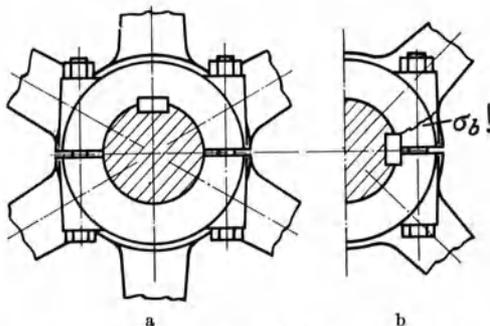


Abb. 22.10. Keilanordnung bei geteilten Naben (aus Rötischer).

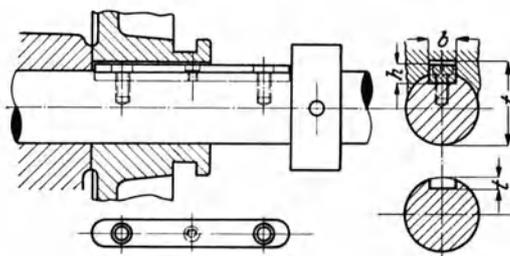


Abb. 22.9. Führungsfeder (aus Rötischer).

Im Automobilbau und bei Werkzeugmaschinen findet der Woodruff-Keil (Abb. 22.8) viel Verwendung. Er stellt sich von selbst nach der Neigung der Nute in der Nabe ein, hat aber eine erhebliche Schwächung der Welle zur Folge.

Nur Führungselement, ohne Verspannungswirkung, sind die Längsfedern (auch Paßfeder genannt)¹ (Abb. 22.9). Die Paßfeder hat in den letzten Jahren auch als Befestigungselement eine zunehmende Bedeutung erreicht; sie bietet verschiedene Vorteile:

1. Die geneigte Tragfläche in der Nabe wird überflüssig, was eine Verbilligung in der Herstellung bedeutet.

2. Infolge des Fehlens der Verspannung tritt auch keine zusätzliche Beanspruchung auf und außerdem wird dadurch genauer Rundlauf erreicht.

Die Paßfeder wird nach den Schweizer Normen als normales Befestigungselement für Kupplungen, Riemenscheiben und Zahnräder auf Elektromotorwellen vorgeschrieben; sie ist auch besonders vorteilhaft bei Wälzlagerkonstruktionen, wo Schläge beim Aufkeilen nicht zulässig sind. Die Paßfeder soll das Drehmoment durch ihre Seiten übertragen und auf der ganzen Länge eingepaßt werden. Als Toleranz für den gezogenen Keilstahl (Breite und Höhe) wird $k 9$ angegeben; für die Nuten eignen sich dann $H 9$ (Breite) resp. $H 10$ (Höhe). Paßfedern sind auch bei geteilten Naben zu verwenden (Abb. 22.10 a), da durch festes Einschlagen eines Keiles die Verbindungsschrauben übermäßig stark beansprucht werden. Den Keil in die Trennfläche anzuordnen (Abb. 22.10 b) ist nicht zweckmäßig.

Kegelstifte (Rundkeile) haben eine Kegelneigung von $1 : 50$; sie dienen hauptsächlich dazu, zwei Teile in der gegenseitigen Lage festzuhalten (Prisonstift, Abb. 22.11). Der Kegelstift muß sehr genau eingepaßt werden, damit er auf der ganzen Länge gleichmäßig aufliegt; das Loch wird durch eine konische Reibahle ausgerieben.

Der Ziehkeil (Abb. 22.12) wird bei Wechselgetrieben verwendet. Die Ziehkeilwelle ist durchbohrt und auf einer Seite geschlitzt. Durch diesen Schlitz geht die Nase des Ziehkeils Z

¹ Manchmal wird die Bezeichnung Federkeil verwendet (z. B. in den Schweizer Normen: sie ist unzutreffend, da keine Keilwirkung vorhanden ist) aber in der Praxis gebräuchlich.

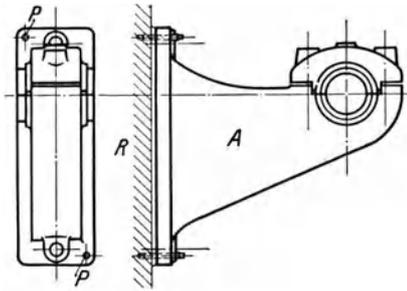


Abb. 22.11. Paßstifte zur Fixierung eines Lagers (aus Rötcher).

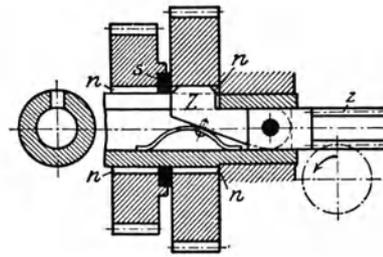


Abb. 22.12. Ziehkeil. (Aus Coener, El. d. Werkzeugmasch.)

in die Nuten der Zahnräder. In der Bohrung kann eine Rundzahnstange z verschoben werden, an deren Ende der Ziehkeil drehbar befestigt ist. Zwischen den Rädern befinden sich Scheiben s , die den Ziehkeil zurückdrängen, wenn er von einem Rad zum andern geschoben wird.

23. Schrauben.

Die Schraubenlinie entsteht durch die Aufwicklung einer geneigten Geraden auf einen Kreiszyylinder (Abb. 23.1). Je nach der Richtung, in der aufgewickelt wird, entsteht eine rechtsgängige (nach rechts steigende) oder linksgängige Schraubenlinie. Die Entfernung AA , d. i. die Entfernung zweier Schraubenlinien, heißt Ganghöhe oder Steigung; der Winkel α wird Steigungswinkel genannt.

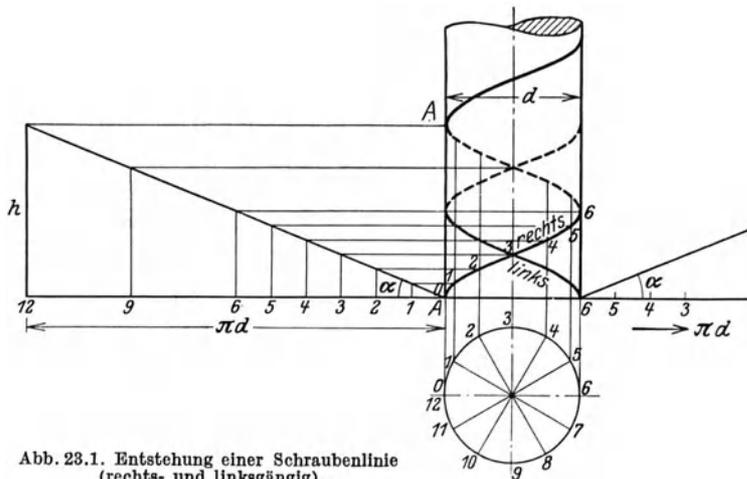


Abb. 23.1. Entstehung einer Schraubenlinie (rechts- und linksgängig).

23.1. Gewinde.

Läßt man an Stelle eines Punktes A z. B. ein Dreieck efg auf dem Zylindermantel vorrücken, so daß die Punkte e und g gleiche Schraubenlinien beschreiben mit der Steigung

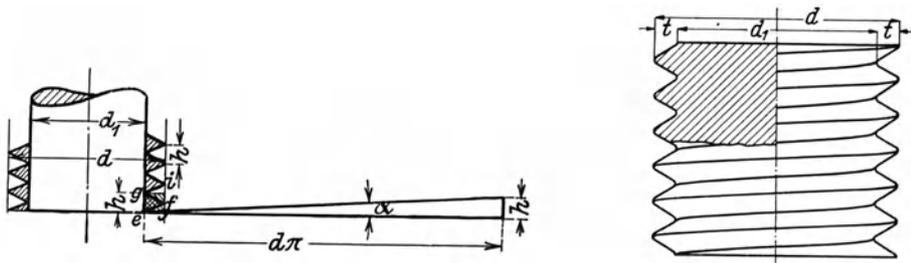


Abb. 23.2. Scharfgängiges Gewinde (aus Leuckert-Hiller und Rötcher).

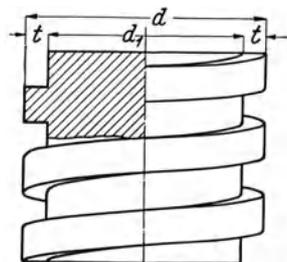


Abb. 23.3. Flach-, Rund- und Sägewinde (aus Rötcher).

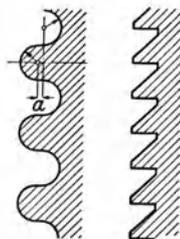


Abb. 23.4. Doppelgängige Schraube (aus Rötcher).

$eg = h$, so entsteht eine scharfgängige Schraube (Abb. 23.2). Statt des Dreiecks kann auch ein rechteckiges Profil auf den Zylinder aufgewickelt werden, dann entsteht die flachgängige Schraube (Abb. 23.3). Die Figur (Dreieck, Rechteck, Trapez usw.), die zur Erzeugung der Schraube dient, nennt man das Profil.

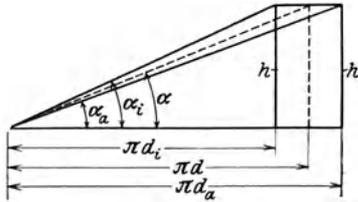


Abb. 23.5.

Besteht das Profil einer Schraube aus einer einzigen Figur (Rechteck, Dreieck), so heißt die Schraube eingängig. Mehrgängige Schrauben entstehen durch die gleichzeitige Aufwicklung von mehreren gleichen Profilen (Abb. 23.4).

Der Steigungswinkel ist bei der Schraube für Innen- und Außendurchmesser verschieden (Abb. 23.5). Für die Berechnung wird der mittlere Steigungswinkel eingeführt.

Schrauben werden immer paarweise verwendet. Bei einem Teil (Bolzen genannt) liegt das Gewinde auf dem Mantel eines Vollzylinders; beim andern (Mutterschraube oder kurz Mutter genannt) liegt das Gewinde mit dem gleichen Profil und mit der gleichen Steigung auf dem Innenmantel eines Hohlzylinders, so daß Bolzen und Mutter zusammenpassen.

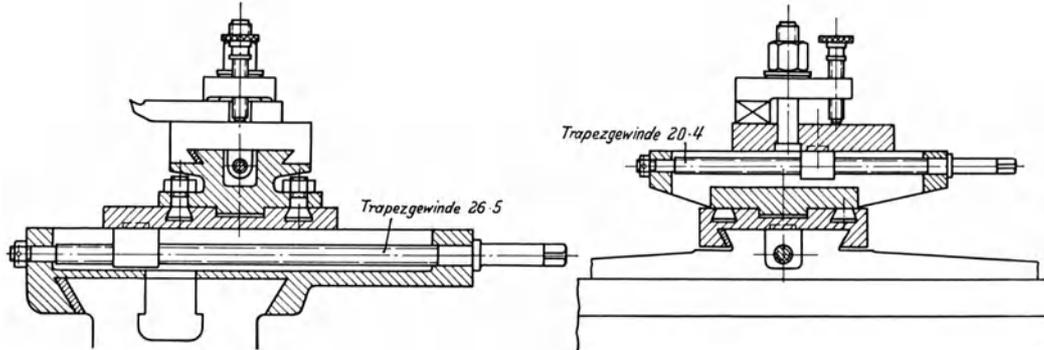


Abb. 23.6. Werkzeugschlitten einer Drehbank (aus Rötischer).

Die Schraube dient nicht nur zur Verbindung von Maschinenteilen, sondern auch zur Übertragung der Bewegung (Bewegungsschraube). Wird die Mutter festgehalten, so führt der Bolzen mit der Drehung gleichzeitig eine Parallelverschiebung aus (Schraubenwinde). Wird der Bolzen gedreht und die Mutter gegen Drehung gesichert, so erfährt die Mutter eine Parallelverschiebung. (Abb. 23.6 und beim Absperrventil.)

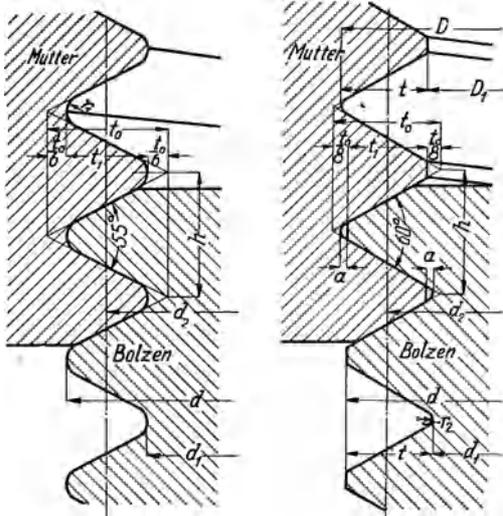


Abb. 23.7. Original-Whitworth-Gewinde. (Aus Rötischer.)

Abb. 23.8. Metrisches Gewinde. (Aus Rötischer.)

In den Anfängen des Maschinenbaues wählte jeder Fabrikant Profil und Steigungswinkel der Schrauben nach eigenem Gutdünken, so daß die einzelnen Gewinde nicht zusammenpaßten. Der erste, der hier Ordnung schaffte, war der Engländer Whitworth (etwa 1845). Er verwendete für alle Schrauben das gleiche Profil, nämlich ein gleichschenkeliges Dreieck mit 55° Spitzenwinkel und auf 1/6 der Höhe abgerundet (Abb. 23.7). Weiter normte er die Schraubendurchmesser (in englischem Zollmaß¹) und stellte die Schrauben als austauschbare Handelsware her. Dieses System bürgerte sich rasch ein; es besteht heute noch in unveränderter Form. Seine Normungsbestrebungen wurden vielfach nachgeahmt, z. B. in Amerika durch Sellers, in Frankreich (nach Einführung des metrischen Systems), in Deutschland usw. Wie viele verschiedene Gewindesysteme dadurch entstanden, kann

in dem großen Werk von Prof. Berndt nachgelesen werden.

Wiederholt sind Versuche gemacht worden, die Gewindesysteme zu vereinheitlichen, was schließlich (1897) zum internationalen Kongreß in Zürich führte. Als Maßsystem wurde dort das metrische angenommen, und als Schraubenprofil ein gleichseitiges Dreieck mit auf 1/8

¹ 1 englischer Zoll = 1''e = 25,40095 mm

der Höhe geradlinig abgeschnittener Spitze (Abb. 23.8). Außerdem wurde ein Spitzenspiel a festgelegt, weil dadurch die Herstellung verbilligt wurde. Es ist nämlich eine unnötige Erschwerung der Herstellung, wenn verlangt wird, daß das Gewinde sowohl in den Spitzen als in den Flanken genau aufliegt. Das SI-Gewinde (System International) ist aber nie so international geworden wie sein Namen vermuten ließe. Wirtschaftliche Gründe, wie die großen Kosten für die Anschaffung neuer Schneidwerkzeuge, Ersatzlieferungen, Erschwerung der Ausfuhr usw. stehen der Vereinheitlichung hemmend gegenüber. Bei den neuesten Normungsbestrebungen (1923) ist nur dadurch eine Einigung möglich geworden, daß zwei Systeme (das Whitworth-Gewinde ohne Spitzenspiel und das metrische Gewinde) als gleichberechtigt angenommen wurden.

Das normale metrische oder Whitworth-Gewinde ist für verschiedene Konstruktionszwecke, z. B. für dünnwandige Rohre (Gasrohre) zu grob. Man hat deshalb noch verschiedene, feinere Gewinde eingeführt, die sog. Fein- oder Rohrgewinde. Die Bezeichnung des Rohrgewindes (Zahlentafel 23.1) geht meist noch vom lichten Durchmesser des Gasrohres in englischen Zollen aus, seltener (wie die neuesten Normen vorschreiben) vom Außendurchmesser des Gewindes.

Zahlentafel 23.1. Gasrohrgewinde (Whitworth).

Nenndurchmesser (handelsüblich)		Gewinde- durch- messer (Lehr- durchm.) d	Kern- durch- messer d_1	Flanken- durch- messer d_2	Gangzahl auf		Gewinde- tiefe t_1	Nutzbare Gewinde- länge l_1 max.	Nennweite der Armaturen
engl. Zoll	mm ¹				1 engl. Zoll z	127 mm Länge z_1			
$1/8$	5—10	9,728	8,566	9,147	28	140	0,58	8	6
$1/4$	8—13	13,157	11,445	12,301	19	95	0,86	9	8
$3/8$	12—17	16,662	14,950	15,806	19	95	0,86	11	10
$1/2$	15—21	20,955	18,631	19,793	14	70	1,16	14	13
$3/4$	20—27	26,441	24,117	25,279	14	70	1,16	16	20
1	26—34	33,249	30,291	31,770	11	55	1,48	19	25
$1 1/4$	33—42	41,910	38,952	40,431	11	55	1,48	21	32
$1 1/2$	40—49	47,803	44,845	46,324	11	55	1,48	21	40
$1 3/4$	45—55	53,746	50,788	52,267	11	55	1,48	24	—
2	50—60	59,614	56,656	58,135	11	55	1,48	24	50
($2 1/4$)	60—70	65,710	62,752	64,231	11	55	1,48	27	60
$2 1/2$	66—76	75,184	72,226	73,705	11	55	1,48	27	70
3	80—90	87,884	84,926	86,405	11	55	1,48	30	80

¹ Die Angabe des Nenndurchmessers in zwei Millimeterzahlen ist besonders in Frankreich handelsüblich. Die erste Zahl entspricht ungefähr dem inneren, die zweite Zahl dem äußeren Rohrdurchmesser.

23.2. Schraubensorten.

Die Schrauben werden entweder blank aus Sechskanteisen auf Automaten hergestellt oder schwarz mit warm angestauchten Köpfen. Als Werkstoff dient hauptsächlich St 38.13 oder für bessere Qualität St C 35.61. Durch die Kaltreckung der Stangen sind die Festigkeitseigenschaften im Anlieferungszustand (abweichend von Zahlentafel 13.1) etwa folgende:

$$\begin{aligned} \text{St 38.13 } K_z &= 58 \text{ kg/mm}^2, \quad \lambda_5 = 12 \%, \quad H = 185 \text{ kg/mm}^2. \\ \text{St C 35.61} &= 76 \text{ kg/mm}^2, \quad \lambda_5 = 7,7\%, \quad H = 230 \text{ kg/mm}^2. \end{aligned}$$

Wenn man von einer Schraube ohne nähere Bezeichnung spricht, so meint man die Mutterschraube (Abb. 23.9). Zum Anziehen der Muttern dienen Schlüssel, meist als Doppelschlüssel mit zwei aufeinander folgenden Maulweiten ausgeführt. Ist der Griff unter 30° geneigt oder gerade geführt, so verlangt eine Sechskantmutter zum Anziehen einen Schlüsselschlag von 60° (Abb. 23.10). Versetzt man dagegen den Hebelarm um 15° oder 45° (wie die Normen vorschreiben), so genügt zum Anziehen ein Winkel von 30° und ein nachfolgendes Umlegen des Schlüssels (Abb. 23.11). Muttern, die oft angezogen werden, sollte man härten (Einsatzhärtung), um eine Beschädigung der Kanten zu vermeiden.

Versenkt sitzende Muttern werden mit einem Steckschlüssel (Abb. 23.12) angezogen. Wo der Raum für den Normalschlüssel fehlt und es sich um Muttern handelt, die nur verhältnismäßig leicht angezogen werden (wie z. B. bei Kugellagerbefestigung), führt man Mutter und Schlüssel nach Abb. 23.13 aus. Für Verbindungen, die oft gelöst werden müssen (wie Deckelschrauben bei

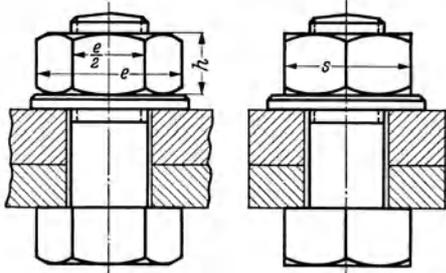


Abb. 23.9. Mutterschraube, S = Schlüsselseite.

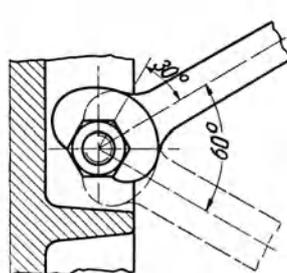


Abb. 23.10 (Aus Rötischer.)

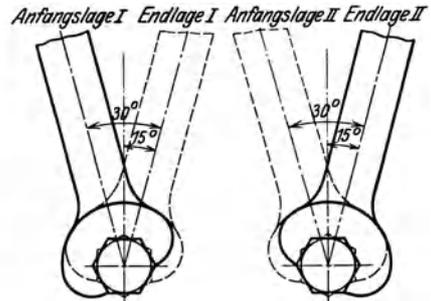


Abb. 23.11. NB. Anfangslage II wird erhalten, wenn der Schlüssel um 180° gedreht wird.

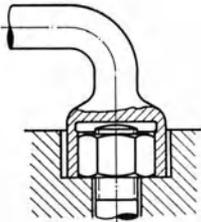


Abb. 23.12. Steckschlüssel. (Aus Rötischer.)

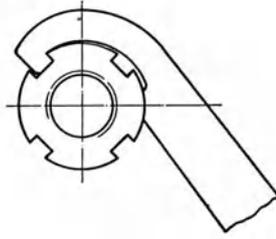


Abb. 23.13. Hakenschlüssel. (Aus Rötischer.)

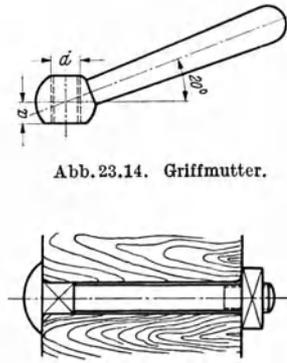


Abb. 23.14. Griffmutter.

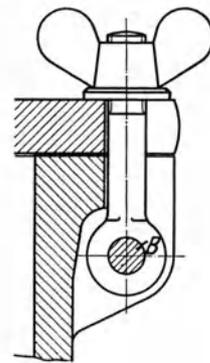


Abb. 23.15. Deckelschraube mit Flügelmutter. (Aus Rötischer.)

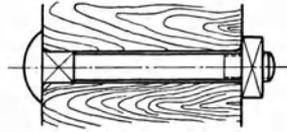


Abb. 23.16. Torbandschraube mit Vierkantmutter.

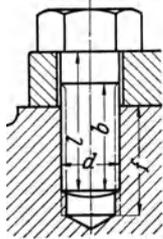


Abb. 23.17. Kopfschraube. (Aus Rötischer.)

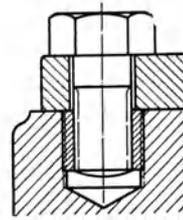


Abb. 23.18. Kopfschraube in einer Büchse sitzend. (Aus Rötischer.)

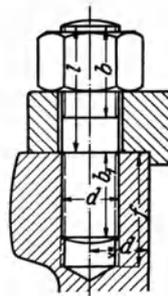


Abb. 23.19. Stiftschraube.

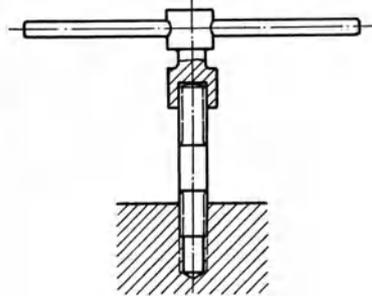


Abb. 23.20. Stiftsetzer. (Aus Rötischer.)

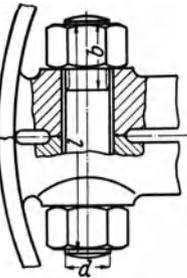


Abb. 23.21. Doppelmutterschraube. (Aus Rötischer.)

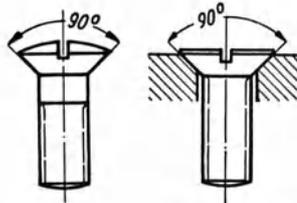


Abb. 23.22. Versenkte Schrauben. (Aus Rötischer.)

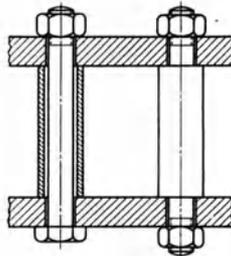


Abb. 23.23. Stehbolzen.

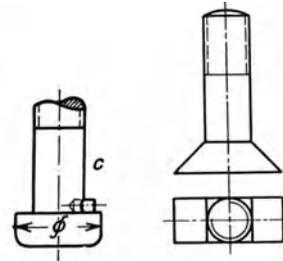


Abb. 23.24. Nasenschraube. (Aus Leuckert-Hiller.) Abb. 23.25. Spannschraube für Werkzeugmaschinen.

Kochpfannen und Vakuumbehältern, oder Spannschrauben bei Werkzeugmaschinen) verwendet man Griffmuttern oder Flügelmuttern (Abb. 23.14 und 23.15). Kleinere Muttern für untergeordnete Zwecke werden, weil billiger, vierkantig ausgeführt (Abb. 23.16).

Bei der Kopfschraube (Abb. 23.17) sitzt die Mutter in einem Konstruktionsteil (meist aus Gußeisen). Bei häufigem Lösen leiert sich das Muttergewinde leicht aus, so daß der ganze Maschinenteil ersetzt oder Büchsen eingesetzt werden müßten (Abb. 23.18). Deshalb werden Kopfschrauben meist nur als Stellschrauben oder als Abdrückschrauben verwendet, oder für Verbindungen, die nur selten gelöst werden. Viel besser ist die Verbindung durch Stiftschraube (Abb. 23.19). Das Einsetzen des Stiftes kann durch zwei aufeinanderliegende Muttern oder auch durch einen Stiftsetzer (Abb. 23.20) erfolgen.

Ist auf keiner Seite der zu verbindenden Teile Raum zum Einbringen der Schraube, wie z. B. bei der zweiseitigen Riemenscheibe (Abb. 23.21), so setzt man auf beide Seiten Muttern.

Wenn vorstehende Köpfe nicht zulässig sind, werden versenkte Schrauben verwendet (Abb. 23.22). Stehbolzen dienen dazu, zwei Maschinenteile in einer bestimmten Entfernung zu halten (Abb. 23.23). Um das Mitdrehen des Kopfes beim Anziehen der Mutter zu verhindern, wird oft eine „Nase“ angebracht (Abb. 23.24). Bei Lager- und Stopfbüchsen verwendet man Hammerschrauben (Abb. 44.30); bei Werkzeugmaschinen werden für die Befestigung des Werkstückes besondere Spannschrauben verwendet (Abb. 23.25).

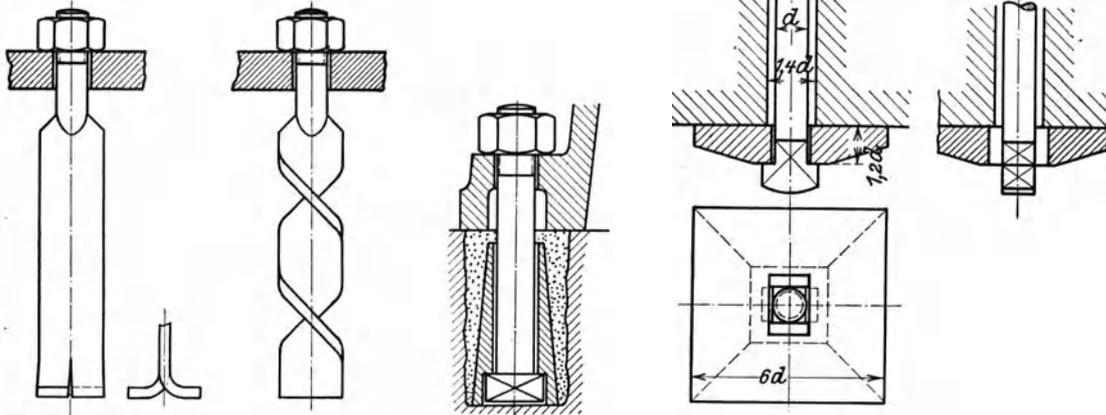


Abb. 23.26. (Aus Leuckert-Hiller.)

Abb. 23.27. (Aus Rötischer.)

Abb. 23.28. (Aus Leuckert-Hiller.)

Abb. 23.26 bis 28. Fundamentschrauben.

Fundamentschrauben (Abb. 23.26 bis 23.28) werden in Aussparungen des Fundamentes eingesetzt, die nachher mit Zement vergossen werden.

23.3. Schraubensicherungen.

Das Drehen einer mit Q kg belasteten Mutter im Schraubengewinde entspricht der Bewegung einer Last auf einer geneigten Ebene, deren Neigungswinkel gleich dem mittleren Steigungswinkel α der Schraube ist (Abb. 23.29). Um die Last Q zu heben (die Schraube anzuziehen) ist eine horizontale Kraft H erforderlich, die (ohne Reibung zwischen Mutter und Bolzensgewinde)

$$H_0 = Q \operatorname{tg} \alpha \quad (23.1)$$

und mit Berücksichtigung der Reibung

$$H = Q \operatorname{tg} (\alpha + \varrho) \quad (23.2)$$

beträgt. Das Senken (Lösen der Mutter) erfordert eine Kraft:

$$H = Q \operatorname{tg} (\alpha - \varrho). \quad (23.2a)$$

Die Kraft H wird bei der Schraube durch ein Drehmoment $M_d = H \cdot r$ erzeugt, so daß für die flachgängige Schraube

$$M_d = Qr \operatorname{tg} (\alpha \pm \varrho) \quad (23.3)$$

ist. Beim scharfgängigen Gewinde (Abb. 23.30) kann die Belastung Q auf zwei symmetrisch liegende Teilstücke der Mutter wirkend gedacht werden, auf welche die Normalkräfte von je $\frac{1}{2} \frac{Q}{\cos \beta/2}$ kg wirken, so daß die Reibung bei der scharfgängigen Schraube im Verhältnis $\frac{1}{\cos \beta/2}$ im Vergleich zur flachgängigen erhöht wird. Führt man die Keilreibungszahl $\mu' = \frac{\mu}{\cos \beta/2}$

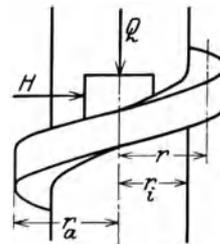


Abb. 23.29.

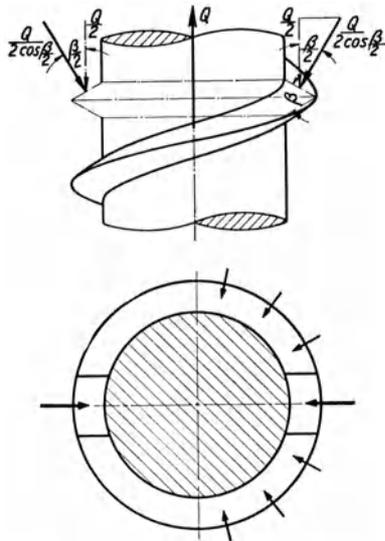


Abb. 23.30. Kraftwirkung an scharfgängigen Schrauben. (Aus Rötischer.)

und $\operatorname{tg} \varrho' = \mu'$ ein, so ist für die scharfgängige Schraube:

$$M_d = Q \cdot r \operatorname{tg} (\alpha \pm \varrho'). \quad (23.3a)$$

Für Whitworth-Gewinde ist $\beta = 55^\circ$, so daß $\mu' = 1,12 \mu$ ist; für das SI-Gewinde ist $\beta = 60^\circ$ und $\mu' = 1,17 \mu$. Die Steigungswinkel der normalen Schrauben sind:

beim Whitworth-Gewinde für	$d = \frac{3}{8}''$	$1''$	$2''$	$3''$
	$\alpha = 2^\circ$	$2^\circ 30'$	$2^\circ 10'$	$1^\circ 50'$
und beim metrischen Gewinde für	$d = 16$	20	42	64 mm
	$\alpha = 2^\circ 30'$	$2^\circ 30'$	$2^\circ 5'$	$1^\circ 50'$

Der Wirkungsgrad einer Schraube ist

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \varrho)}. \quad (23.4)$$

Mit $\alpha = 2^\circ$ ($\operatorname{tg} \alpha = 0,034$) und $\varrho' = 7^\circ$ ($\operatorname{tg} [\alpha + \varrho'] = 0,17$) ist der Wirkungsgrad nur 20%!

Für den Grenzfall der Selbsthemmung ($\alpha = \varrho$) wird mit

$$\operatorname{tg} 2 \varrho = \frac{2 \operatorname{tg} \varrho}{1 - \operatorname{tg}^2 \varrho}$$

$$\eta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varrho}{2} < 0,5.$$

Der Wirkungsgrad einer selbsthemmenden Schraube ist demnach immer sehr klein; die an und für sich notwendige Eigenschaft der Selbsthemmung von Befestigungsschrauben ist mit einem bedeutenden Aufwand an Reibungsarbeit beim Anziehen verbunden. Das zeigt, wie unzuweckmäßig die selbsthemmende Schraube als Hebebock ist.

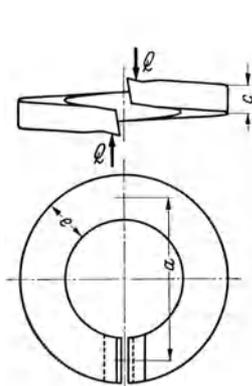


Abb. 23.31. Federnde Unterscheibe. (Aus Rötischer.)

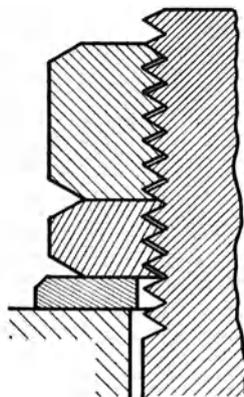


Abb. 23.32. Doppelmutter. (Aus Leuckert-Hiller.)

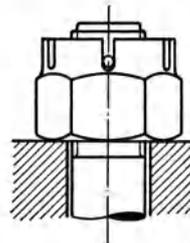


Abb. 23.33. Kronenmutter. (Aus Rötischer.)

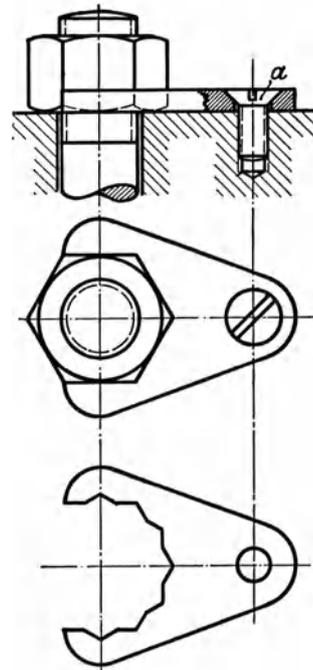


Abb. 23.34. Legeschlüssel. (Aus Leuckert-Hiller.)

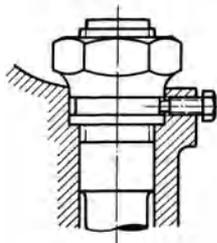


Abb. 23.35. Pennsche Sicherung. (Aus Rötischer.)

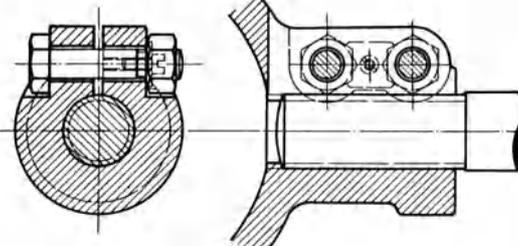


Abb. 23.36. Klemmsicherung. (Aus Rötischer.)

Abb. 23 bis 36. Schraubensicherungen.

Wenn Erschütterungen auftreten oder wenn die Kraft Q ihre Richtung wechselt, bietet die Selbsthemmung, wie die Erfahrung zeigt, keine genügende Sicherheit gegen Lockerung; die Schraube muß dann besonders gesichert werden.

Es gibt folgende Möglichkeiten zur Sicherung der Mutter gegen ungewolltes Drehen:

1. Man beseitige die Erschütterungsursache, z. B. durch einen sorgfältigen Massenausgleich

(vgl. Abschn. 34.2). Diese Möglichkeit kann natürlich nicht verwendet werden in allen Fällen, bei denen die Erschütterungsursache außerhalb der Maschine liegt, wie z. B. bei allen Fahrzeugen, infolge der Unebenheiten der Fahrbahn.

2. Durch Verkleinerung des Steigungswinkels α bei Verwendung von Feingewinde.

3. Durch Erhöhung der Reibung, z. B. bei Verwendung von Sondergewinde mit $\beta > 90^\circ$.

4. Durch federnde Unterlage, die dafür sorgen soll, daß ein Abheben der Mutter bei den Erschütterungen vermieden wird (Abb. 23.31). Die Schwierigkeit liegt darin, daß die Federung so konstruiert sein sollte, daß diese dauernd erhalten bleibt, d. h. die Elastizitätsgrenze darf nicht überschritten werden. Soll z. B. bei dem genormten Federring (Abb. 23.31) die Elastizitätsgrenze von $\tau = 40 \text{ kg/mm}^2$ (besten Federstahl) nicht überschritten werden, so folgt die Schraubkraft Q aus der Gleichung:

$$\frac{2}{3} \cdot e c^2 \cdot \tau = Q \cdot a$$

(da der Ring durch das Moment $Q \cdot a \text{ kg} \cdot \text{mm}$ auf Verdrehung beansprucht wird und für $5/8''$ -Schraube $e = 5$, $c = 3$ und $a = 20 \text{ mm}$ ist) zu $Q = 20 \text{ kg}$. Die normale Belastung einer $5/8''$ -Schraube ist etwa 750 kg ! Solche Federringe sind deshalb wenig wirksam. Eine Gegenmutter, die kräftig gegen die erste verspannt wird (Abb. 23.32) kann dazu eher dienen. Die beiden Muttern werden oft verschieden hoch gemacht; da nur die obere Mutter trägt, muß diese die normale Höhe erhalten.

5. Das sicherste Mittel besteht darin, die Drehung der Mutter überhaupt zu verhindern, z. B. durch Einlegen eines Stiftes oder Splintes bei der Kronenmutter (Abb. 23.33) oder, bei größeren Muttern durch Legeschlüssel (Abb. 23.34). Hier liegt die Schwierigkeit darin, daß die Mutter, nach Lösen der Verbindung, nie mehr die genau gleiche Lage in bezug auf die Bolzen einnimmt.

Bei Schubstangenköpfen ist die Pennsche Sicherung stark verbreitet (Abb. 23.35). Für die Befestigung der Kolbenstange im Kreuzkopf verwendet man auch wohl eine geschlitzte Mutter mit Klemmschrauben (Abb. 23.36), die ihrerseits wieder durch Legeschlüssel gesichert werden.

Die Hauptschwierigkeit, eine brauchbare Sicherung zu konstruieren liegt darin, daß die Schraube eine leicht lösbare Verbindung bleiben muß.

23.4. Berechnung.

Die Schraube ist eines der am häufigsten angewandten Konstruktionselemente und erst in den letzten Jahren hat man (hauptsächlich durch die Arbeiten der MPA. in Darmstadt, Prof. A. Thum) versucht, die in ihr auftretenden Beanspruchungen richtig zu erfassen.

In erster Linie ist es notwendig, die Kräfte zu kennen, die auf die Schraubenverbindung wirken. Die zu verbindenden Teile werden durch Anziehen der Mutter vorgespannt; durch den Betrieb der Maschinen (zu welcher die Verbindung gehört) treten dazu noch Betriebskräfte P auf. Bei der Flanschverbindung einer Rohrleitung mit einem Innendurchmesser von $d \text{ cm}$ und einen Druck von $p \text{ atü}$ ist die Betriebskraft $P = \frac{\pi}{4} d^2 p \text{ kg}$; außerdem sind oft noch Wärmespannungen zu berücksichtigen. Bei Fundamentschrauben oder bei Fahrzeugen treten wechselnde Kräfte infolge der Erschütterungen auf; beim Schubstangenkopf wirken die Betriebskräfte oft schlagartig.

Vorspannkraft. Die schwächste Stelle der Schraube ist im Kernquerschnitt zu suchen, der durch die Vorspannkraft V auf Zug beansprucht wird. Wenn wir von der Kerbwirkung im Gewinde absehen, so kann die Nennspannung σ im Kernquerschnitt (mit dem Durchmesser d_1) aus der Gleichung

$$V = \frac{\pi}{4} d_1^2 \sigma$$

berechnet werden.

Der Kerndurchmesser d_1 der Schraube kann nur mit Hilfe von Spezialmikrometern gemessen werden. Die Schrauben werden nach dem Außendurchmesser d bezeichnet; es ist deshalb zweckmäßig, den Kerndurchmesser durch den Außendurchmesser zu ersetzen.

$$Q = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d_1}{d} \right)^2 d^2 \sigma.$$

Beim Whitworth-Gewinde ist für	$d = 1/2''$	$5/8''$	$1 1/8''$	$1 5/8''$
	$\left(\frac{d_1}{d} \right)^2 = 0,62$	0,66	0,70	0,77
beim metrischen Gewinde für	$d = 12$	16	28	40 mm
	$\left(\frac{d_1}{d} \right)^2 = 0,63$	0,66	0,69	0,70

Mit dem kleinen Wert $\left(\frac{d_1}{d}\right)^2 = 0,63$ wird

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot 0,63 d^2 \sigma \approx 0,5 d^2 \sigma. \quad (23.5)$$

Neben dieser Zugbeanspruchung wirkt beim Anziehen der Mutter noch das Drehmoment $M_d = V r_m \operatorname{tg}(\alpha + \rho')$. Die Reibungsverhältnisse der schwach gefetteten Schraube hängen von einer Anzahl unbestimmbarer Einflüsse ab (z. B. von der Glätte der Oberfläche), so daß die Größe des Drehmomentes nur annähernd berechnet werden kann. Mit $\operatorname{tg}(\alpha + \rho') = 0,17$ und $r_m = 0,55 d_1$ wird $M_d = 0,0935 V \cdot d_1$ und die dadurch erzeugte Torsionsspannung im Kernquerschnitt:

$$\tau = \frac{0,0935 V \cdot d_1}{\frac{\pi}{16} d_1^3} = 0,37 \frac{V}{\frac{\pi}{4} d_1^2} = 0,37 \sigma.$$

Da Torsion- und Normalspannung gleichzeitig und an der gleichen Stelle auftreten, folgt die größte Beanspruchung (nach Mohr) aus

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} = \sigma \sqrt{1 + 4 \times 0,37^2} = 1,25 \sigma. \quad (23.6)$$

Durch das Anziehen der Schraube wird also die größte Beanspruchung um etwa 25% erhöht. Beim Anziehen der Mutter ist nicht allein das Drehmoment M_d , sondern auch noch das Reibungsmoment zwischen Mutter und Unterlage zu überwinden. Die Reibungskraft μV wirkt dabei an einem Hebelarm, der gleich dem mittleren Radius der Auflagefläche der Mutter ist und ungefähr gleich d_1 gesetzt werden kann. Das Reibungsmoment zwischen Mutter und Unterlegscheibe ist

$$M_r = \mu V d_1 = 0,1 V d_1$$

und das totale Moment, das beim Anziehen der Mutter überwunden werden muß:

$$M_t = M_d + M_r = (0,09 + 0,1) V d_1 = 0,19 V d_1. \quad (23.7)$$

Das Moment M_r braucht bei der Festigkeitsberechnung des Bolzens nicht berücksichtigt zu werden, weil es nicht am Schraubenschaft wirkt.

Infolge der unsicheren Reibungswerte zeigten die Messungen von Debus bei gleichem Anzugsmoment auch erhebliche Schwankungen der Vorspannkraft. Sie zeigten weiter, daß auch bei der gleichen Schraube das Verhältnis M_t/V bei oftmaligem Lösen und Wiederanziehen zunimmt und sich (unter starken Schwankungen) einem Grenzwert nähert, der bei 50mal doppelt und bei 200maliger Belastung 2,5mal so groß ist wie beim ersten Anziehen. Die Reibung nimmt also beträchtlich zu, was durch örtliche Anfressungen erklärt werden kann. Durch starkes Ölen läßt sich die Zunahme der Reibung etwas verkleinern.

Der Monteur übt beim Anziehen der Mutter die Kraft H an einem mittleren Hebelarm des Schlüssels ($l = 12 d$) aus. Aus der Gleichung:

$$M_t = 12 H \cdot d = 0,19 V \cdot d_1 = 0,152 V \cdot d$$

folgt $V = 80 H$. Mit der mäßigen Kraft von 10 kg wird also (unabhängig von d) eine Vorspannkraft von 800 kg erreicht, die nach Gl. (5) in $\frac{1}{2}$ " Schrauben Beanspruchungen von rd. 1000 kg/cm² hervorruft, die bei dem üblichen Werkstoff St 38.13 nahe an der Elastizitätsgrenze liegen. Kleine Schrauben werden also schon beim Anziehen leicht überbeansprucht. Es war deshalb im Maschinenbau üblich, Schrauben, die unter Belastung angezogen werden, nicht kleiner als $\frac{5}{8}$ " zu wählen. Diese Regel wird heute (aus wirtschaftlichen Gründen) nicht mehr eingehalten; so sehen z. B. die Normen für Rohrleitungen auch $\frac{1}{2}$ "-Verbindungsschrauben vor. Es ist auch vorgeschlagen worden die Bruchfestigkeit solcher Schrauben um so höher zu wählen, je kleiner die Schraube ist,

$$\text{für } K_z = \begin{matrix} \frac{1}{2}'' & \frac{3}{8}'' & \frac{1}{4}'' \\ 38 & 56 & 65 \text{ kg/mm}^2, \end{matrix}$$

was z. B. durch Kaltreckung des Werkstoffes erreicht werden kann.

Wir haben vorausgesetzt, daß die Begrenzungsflächen der zu verbindenden Teile genau parallel sind. Trifft dies nicht zu, dann wird die Schraube beim Anziehen noch zusätzlich auf Biegung beansprucht (Abb. 23.37) durch ein Moment M , das für die freie Bolzenlänge l_f konstant ist. Der Krümmungsradius der gebogenen Schraube ist dann: $R = JE/M$. Mit der geometrischen Beziehung $l_f/R = a/r$ wird $M = \frac{JE a}{r l_f}$ und die Biegespannung mit $\frac{J}{W} = \frac{d}{2}$.

$$\sigma_b = \frac{JE a}{W r l_f} = \left(\frac{d}{2r}\right) \frac{E a}{l_f}.$$

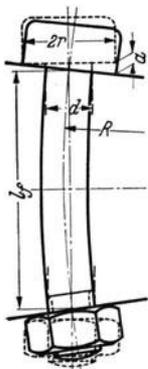


Abb. 23.37.

Setzt man $r = d$, was etwas zu groß ist, so wird

$$\sigma_b = \frac{E \cdot a}{2 \cdot l_f} \quad (23.7)$$

nur abhängig vom Verhältnis a/l_f . Für $a = 0,1$ mm und $l_f = 60$ mm ist $\sigma_b = 16$ kg/mm², überschreitet also die Elastizitätsgrenze des Werkstoffes. Besondere Beachtung verdient in dieser Hinsicht die lose Flanschenverbindung (Abb. 14.41 und 91.11 bis 91.13), bei welcher wiederholt Schraubenbrüche auftreten. Man erkennt daraus die große Bedeutung einer sorgfältigen Bearbeitung der Auflagerflächen (Abb. 23.38).

Es sind noch die Beanspruchungen im Gewinde selbst zu untersuchen. Setzen wir dabei ein so sorgfältig geschnittenes Gewinde voraus, daß eine vollkommene Flankenauflage vorhanden ist, so wird durch die Vorspannkraft V der auf Zug beanspruchte Bolzen gedehnt, während die Mutter gedrückt wird. Die größte Kraft muß also immer durch den ersten tragenden Gewindegang gehen (etwa 50%), wobei die Anzahl der Gänge keinen wesentlichen Einfluß hat. Gibt nun der erste tragende Gang infolge der elastischen Formänderungen etwas nach, so wird der folgende mehr zum Tragen herangezogen. Bei den zähen Werkstoffen werden vor der Zerstörung des Gewindes alle Gänge in der Mutter tragen. Um ein gleichmäßiges Tragen der Gewindegänge zu erzwingen hat E. Jaquet den Vorschlag gemacht die unteren Gewindegänge der Mutter zu hinterdrehen und so biegungsweicher zu gestalten. Nach einem Vorschlag von A. Thum soll die Mutter nach Abb. 23.39 ausgebildet werden. Das Gewindeprofil wird durch das Moment $M_b = \frac{Q}{a} \cdot \frac{3}{8} t$ auf Biegung beansprucht (Abb. 23.40). Um das Widerstandsmoment des gefährlichen Querschnitts (am Kerndurchmesser) zu bestimmen, denken wir uns die Schraube abgewickelt. Man sieht dann deutlich, daß der Querschnitt ein Rechteck ist mit der Höhe $\frac{7}{8} t$ und mit der Breite πd_1 . Aus der Biegungsgleichung:

$$M_b = W \cdot \sigma_b = \frac{Q}{a} \cdot \frac{3}{8} t = \frac{1}{6} \pi d_1 \left(\frac{7}{8} t \right)^2 \sigma_b$$

folgt:
$$Q = \frac{1}{6} \cdot \frac{49}{64} \cdot \frac{8}{3} \pi d_1 a t \sigma_b = \frac{\pi}{4} d_1^2 \sigma_s.$$

Für $\sigma_b = \sigma$ wird die Mutterhöhe

$$h = a \cdot t = 0,73 d_1. \quad (23.8)$$

Die neuen Normvorschläge setzen $h \approx 0,8 d$ fest; Zerreißversuche von Dr.-Ing. K. Mütze haben nachgewiesen, daß — bei Einhaltung der genormten Gewindetoleranzen¹ — die $0,8 d$ hohe Mutter mit Rücksicht auf die Festigkeit stets ausreichend ist, d. h. daß der Bolzen eher zerreißt als daß das Gewinde zerstört wird.

Wenn Mutter und Bolzen nicht aus dem gleichen Werkstoff hergestellt sind ($\sigma_b \neq \sigma_s$), so lautet die Biegungsgleichung für die Mutter mit der Gangzahl a_1 und der Mutterhöhe h_1 :

$$\frac{Q}{a} \cdot \frac{3}{8} t = \frac{1}{6} \pi d \left(\frac{7}{8} t \right)^2 (\sigma_b)_m \quad \text{oder} \quad Q = \frac{1}{6} \cdot \frac{49}{64} \cdot \frac{8}{3} \pi d \cdot a_1 \cdot t (\sigma_b)_m.$$

Für die Schraube fanden wir:
$$Q = \frac{1}{6} \cdot \frac{49}{64} \cdot \frac{8}{3} \pi d_1 a t (\sigma_b)_s.$$

Durch Division der Gleichungen erhält man:

$$h_1 = h \frac{d_1}{d} \cdot \frac{(\sigma_b)_s}{(\sigma_b)_m}. \quad (23.9)$$

Für die Stiftschraube z. B. (Mutter aus Gußeisen, Bolzen aus Stahl) ist $(\sigma_b)_s/(\sigma_b)_m \approx 2$, so daß $h_1 = 1,6 h$ wird. In der Praxis ist es gebräuchlich, $h_1 \approx 1,5 h$ zu machen (Abb. 23.19)².

Im Flugzeugbau verwendet man Schrauben aus St C 45.61 ($K_z = 80/90$ kg/mm²) mit Muttern aus St C 35.61 ($K_z = 70$ kg/mm²). Durch ein Vermindern der Schlüsselweite auf die nächst kleinere Größe kann z. B. bei Flanschenverbindungen eine Verkleinerung des Außendurchmessers und der Flanschdicke erreicht werden. Außerdem wird dadurch die Biegebeanspruchung bei schiefer Auflage verringert. Nachteilig ist, daß bei verringerter Schlüsselweite kleinere Durch-

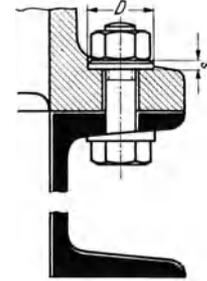


Abb. 23.38.

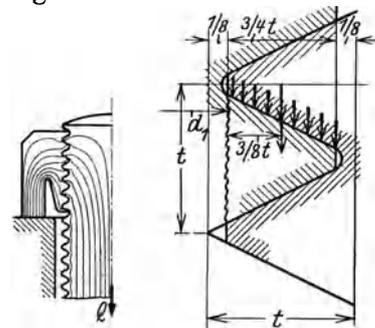


Abb. 23.39.

Abb. 23.40. Zur Berechnung der Mutterhöhe.

¹ DIN 2244.

² Nach den neuen Normen kann $h_1 = 1,3 d$ gemacht werden.

gangslöcher für den Bolzen, also engere Toleranzen erforderlich sind. Unter $M. 14$ kann die Mutterhöhe noch kleiner als $0,8 d$ gewählt werden; über $M. 14$ kann der Bolzen (zwecks Gewichtsersparnis) durchlocht werden.

Betriebskräfte. Zu den schon recht großen Beanspruchungen durch die Vorspannkraft V treten noch die Betriebskräfte. Dabei ist zu beachten, daß die normale Schraube mit Spiel im Loch sitzt, so daß keine Kräfte senkrecht zur Schraubennachse übertragen werden können. Treten solche dennoch auf (z. B. durch das Eigengewicht), so verschieben sich die verbundenen Teile und die Schraube stellt sich schief (Abb. 23.41). Mutter und Kopf liegen dann nicht mehr flach auf, so daß die Schraube durch ein Moment $V \cdot x$ auf Biegung beansprucht wird. Mit $V = 800 \text{ kg}$ und $x = 0,5 d$ folgt die Biegespannung aus der Gleichung:

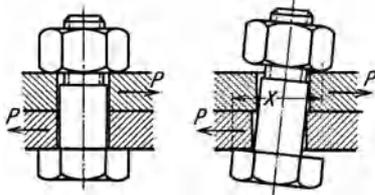


Abb. 23.41.

$$V \cdot x = 800 \cdot 0,5 d = 0,1 d^3 \sigma_b \quad \text{zu} \quad \sigma_b = 4000/d^2 \quad (23.10)$$

und beträgt z. B. für eine $\frac{5}{8}$ "-Schraube 16 kg/mm^2 . Derartig große zusätzliche Spannungen kann die Schraube niemals ertragen; sie muß daher entlastet werden.

Die einfachste Entlastung scheint eine genau eingepaßte Schraube (Paßschraube) zu sein. Wirklich genau, ohne Spiel in das Loch passende Schrauben sind sehr teuer in der Herstellung; etwas billiger sind Schrauben mit konischem Schaft, die nachgezogen werden können. Meist sieht man eine besondere Entlastung der Schrauben vor, und schlägt z. B. konische Stifte (Prisonstifte) ein (Abb. 22.11) oder verwendet Entlastungsringe (Abb. 23.42a), die auch durch konische Büchsen ersetzt werden können (Abb. 23.42b). In sehr vielen Fällen ist es auch möglich, die einzelnen Teile

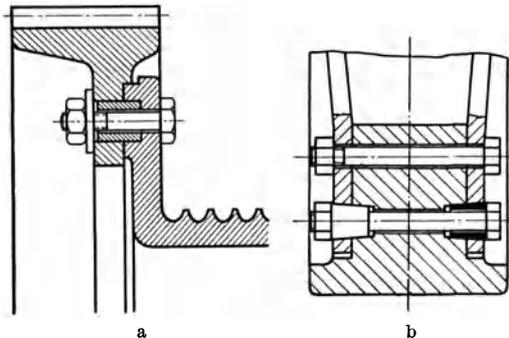


Abb. 23.42. Schraubenentlastung. a durch Ringe, b durch konische Büchsen (nach Röttscher).

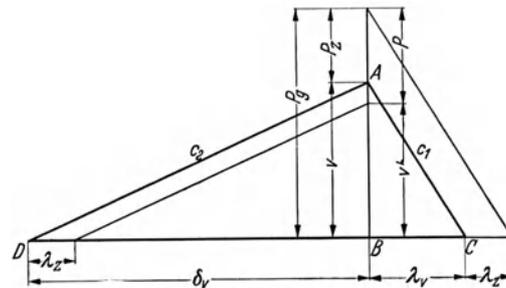


Abb. 23.43.

gegeneinander so abzustützen, daß kein Verschieben eintreten kann, d. h. man entlastet die Schrauben durch entsprechende Formgebung der Teile. Beim zweiteiligen Lager oder beim Zylinderdeckel geschieht dies z. B. durch die Zentrierung (Abb. 23.44). Für die weitere Untersuchung darf also angenommen werden, daß die Betriebskräfte in der Richtung der Schraubennachse wirken.

Die mit dem Schraubenschlüssel erzeugte Vorspannkraft V bewirkt eine Längung λ_v in der Schraube und gleichzeitig eine Stauchung δ_v der verspannten Teile. Unterhalb der Proportionalitätsgrenze sind die Formänderungen den Kräften proportional, so daß sie durch die Dreiecke ABC und ABD (Abb. 23.43) dargestellt werden können, und

$$V = C_1 \lambda_v = C_2 \delta_v$$

ist. Bei der Berechnung von λ_v zerlegt man die Schraube in einzelne Teile, die über ihre Länge l_x gleichen Querschnitt f_x haben; dann ist $\lambda_x = \frac{V l_x}{f_x E}$ und $\lambda_v = \sum \lambda_x$. Beim Gewinde ist f_x aus dem Flankendurchmesser zu berechnen, während für l_x die freie Gewindelänge zuzüglich der gesamten Mutterhöhe einzusetzen ist. Die versuchsmäßige Nachprüfung durch F. Debus zeigt, daß noch ein Zuschlag von 5% des Rechnungswertes erforderlich ist. Der Abzug von 5% gleicht die Vernachlässigungen aus.

Zwischen Schraubenkopf und Mutterauflage (Abb. 23.44) bilden sich im Flansch unter der Wirkung der Vorspannung Einflußkegel aus, deren Mantellinien unter 45° verlaufen. Nur dieser Teil beteiligt sich an der elastischen Verformung. Für die Berechnung der Kürzung δ_v können

(nach Röttscher) die Kegel durch eine Hülse ersetzt werden, deren Außendurchmesser durch Halbieren der Mantellinien erhalten wird. Die Versuche von Debus bestätigen auch die Richtigkeit dieser Annahme.

Eine durch den Betrieb (z. B. durch den Druck im Rohr) bedingte Zugkraft P , die auf die vorgespannte Verbindung wirkt, verlängert die Schraube weiter um den Betrag λ_z . Um das gleiche Maß können sich die verspannten Teile wieder ausdehnen; sie stehen deshalb nicht mehr unter der Vorspannung V , sondern üben nur noch eine Kraft V' aus, die man aus dem Dreieck für die Verkürzung $\delta_v - \lambda_z$ erhält. Aus den Gleichgewichtsbedingungen und nach der Darstellung in Abb. 23.43 ist die Betriebskraft

$$P = P_g - V' = P_z + (V - V') = C_1 \lambda_z + C_2 \lambda_z = (C_1 + C_2) \lambda_z,$$
 worin $P_z = C_1 \lambda_z$ die zusätzliche Belastung der Schraube ist. Aus dieser Gleichung folgt:

$$P_z = \frac{C_1}{C_1 + C_2} P. \quad (23.11)$$

Es geht daraus hervor, daß die Schraube nicht durch die volle Betriebskraft P , sondern nur durch den Bruchteil $C_1/(C_1 + C_2)$ davon zusätzlich beansprucht wird, der um so kleiner ist, je kleiner C_1 in bezug auf C_2 ist. Die Verminderung der Vorspannung ist:

$$\frac{V - V'}{V} = \frac{C_2 \lambda_z}{C_2 \delta_v} = \lambda_z / \delta_v. \quad (23.12)$$

Sollen die Flanschen im Betrieb noch genügend dicht halten, so muß λ_z/δ_v klein, also das Packungsmaterial sehr elastisch sein. Das hat aber zur Folge, daß die Schraube dann durch einen relativ großen Bruchteil von P zusätzlich beansprucht wird. V' wird zu Null für:

$$\frac{V_{\min} = P - P_z}{P} = \frac{(C_1 + C_2 - C_1) \lambda_z}{(C_1 + C_2) \lambda_z} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}. \quad (23.13)$$

Die Gl. (11) gilt nur solange keine vollständige Entlastung der verspannten Teile eintritt. In den meisten Fällen wird es notwendig sein, sei es aus Gründen des Dichthaltens oder zur Vermeidung von Lockerungen und Schlägen, die Vorspannkraft V so hoch zu wählen, daß die Betriebskraft P die verspannten Teile nicht vollkommen entlastet. Das gilt besonders für wechselnde Belastungen. Da die Schraubenbelastung im allgemeinen wechselnd ist, darf die Gesamtspannung (bei sorgfältiger Auflage) die halbe Elastizitätsgrenze nicht überschreiten.

Nach den Versuchen des MPA. in Darmstadt treten erfahrungsgemäß

- etwa 15% aller Brüche am Schraubenkopf
- „ 20% „ „ im Gewindeauslauf und
- „ 65% „ „ an der Kraftangriffsstelle der Mutter

(Abb. 23.45) auf nach einer Lastwechselzahl, die meist größer als 50 bis 150.10⁶ war. Es zeigte sich dabei also, daß die genormte Abrundung zwischen Schaft und Kopf von 0,05 d etwas zu scharf ist und mit 0,1 d ausgeführt werden sollte. Der Gewindeauslauf, das ist die Stelle an der das Gewinde in den Schaft übergeht hat nach DIN 76 bei blanken Schrauben einen vorgeschriebenen Winkel von 22,5°. Um Brüche an dieser Stelle zu vermeiden, sollte der Auslaufwinkel

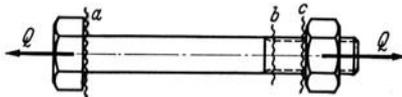


Abb. 23.45. Schraubenbrücke bei a, b und c.

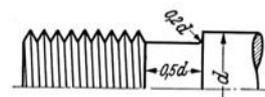


Abb. 23.46. Gewinderille.

15° nicht überschreiten. Die günstigsten Verhältnisse am Gewindeauslauf wurden bei der Gewinderille (Abb. 23.46) erreicht, bei einer Rilllänge von mindestens 0,5 d .

Die Hauptgefahr für die Dauerfestigkeit der Schraube liegt demnach in den ersten tragenden Gewindegängen der Mutter. Die Kerbwirkung im Gewindegrund kann gemildert werden, wenn die Abrundung so groß gewählt wird, wie es die genormten Gewindetoleranzen zulassen. Staedel fand bei seinen Versuchen mit $M 10 \times 65$ Schrauben bei einer Vergrößerung des Abrundungsverhältnisses von 0,1 auf 0,2 mm eine Steigerung der Dauerschlagarbeit um 65%!

Konstruktionsregel: Wenn eine Schraube zur Übertragung der Kraft nicht ausreicht, oder wenn aus anderen Gründen mehrere Schrauben für die Verbindung notwendig sind (z. B. zum Dichthalten einer Flanschverbindung), so ist es immer empfehlenswert, nur eine Schraubensorte für die Verbindung zu verwenden. Dies bezieht sich nicht nur auf den Durchmesser der Schrauben, sondern auch auf ihre Länge. Die Beachtung dieser Regel ist bei stoßweiser Beanspruchung unbedingt erforderlich.

Der Deckel eines Zylinders sei mit 16 Schrauben von 22 mm Durchmesser befestigt; davon seien 15 Mutterschrauben mit 80 mm freier Bolzenlänge und eine Stiftschraube von 40 mm Länge. Bei einer Vorspannung von 1500 kg ist jede Schraube mit einer Nennspannung

$$\sigma = \frac{1500}{\pi/4 d_1^2} = \frac{1500}{2,7} \approx 560 \text{ at}$$

im Kern beansprucht. Dabei erfahren die Mutterschrauben eine Längenänderung

$$\lambda = \frac{\sigma}{E} l = \frac{560 \cdot 80}{2200000} = 0,02 \text{ mm}$$

und die Stiftschraube eine solche von 0,01 mm. Hebt sich der Flansch infolge des Betriebsdruckes gleichmäßig um 0,02 mm, so steigt die Belastung der Mutterschrauben um 100% und die der Stiftschraube auf 300% (Abb. 23.47), letztere wird also übermäßig beansprucht und kann reißen bzw. der Deckel kann an dieser Stelle ausbrechen. Kann man die Stiftschraube nicht vermeiden, dann muß man überall Stiftschrauben nehmen.

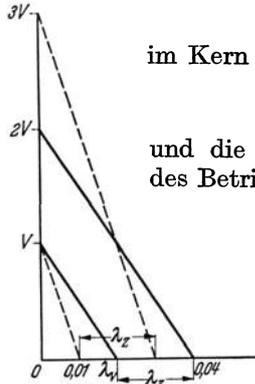


Abb. 23.47.

Wenn die Kraft durch mehrere Schrauben übertragen werden muß, so nimmt man immer an, daß alle Schrauben gleich viel tragen. Die gleichmäßige Verteilung wird aber niemals zutreffen, wenn die Schrauben ungleich weit vom Angriffspunkt der Kraft entfernt liegen, wie es z. B. bei rechteckigen oder unrunder Flanschverbindungen der Fall ist.

Stoßweise Beanspruchung. Zu den Schraubenverbindungen, die dem Ingenieur am meisten Sorgen gemacht haben, gehören die Schubstangenschrauben, die „bei 20facher Sicherheit“ gelegentlich noch brechen. Diese Tatsache weist darauf hin, daß die Rechnungsgrundlage, d. i. die einfache Zugbeanspruchung durch die größte Stangenkraft, sehr weit von den wirklichen

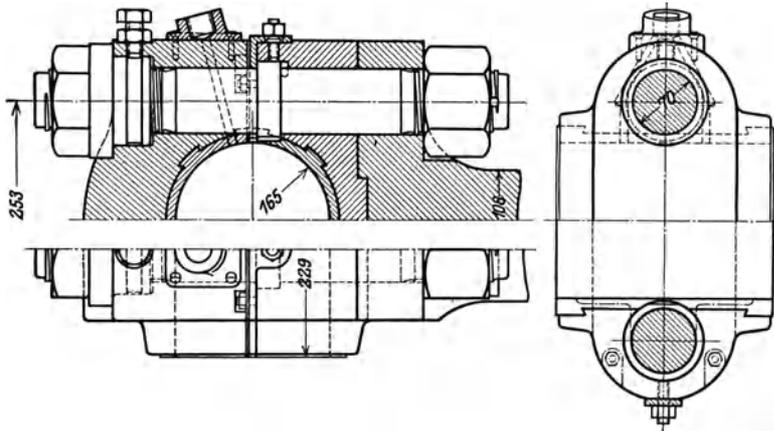


Abb. 23.48. Offener Schubstangenkopf. (Aus Frey, Schubstangen.)

Schraubenbeanspruchungen abweichen muß. Die Beanspruchung der Schubstangenschrauben (Abb. 23.48) ist deshalb so gefährlich, weil die Stangenkraft S innerhalb einer halben Kurbeldrehung ihre Richtung wechselt (Abschn. 82). Der Zapfen liegt demnach zuerst an der einen und nachher an der anderen Schalenhälfte an. Da bewegliche Zapfen ohne Lager Spiel praktisch unmöglich sind, so muß der Zapfen innerhalb des Lagerespiels

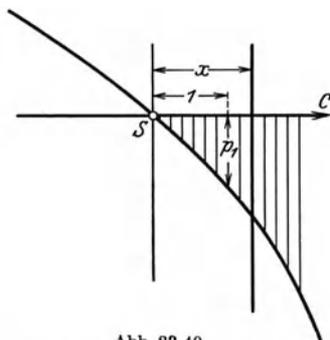


Abb. 23.49.

Relativbewegung ist deshalb

hin- und herwandern. Würde das Lager mit mangelhafter Schmierung laufen, so müßte bei jedem Druckwechsel ein starker Stoß auftreten.

Es sei c die Geschwindigkeit des Pleuelkopfszapfens im Punkte S (Abb. 23.49), wo die Pleuelkraft gleich Null ist. Wird der Verlauf der Pleuelkraft in der unmittelbaren Nähe des Druckwechsels als geradlinig angenommen, so ist im Abstände x von S die Pleuelkraft gleich $F p_1 x$, wenn die Pleuelfläche mit F bezeichnet wird. Diese Kraft dient nun, unter Vernachlässigung der Pleuel- und Pleuelbuchsenreibung, ausschließlich zur Beschleunigung der sich frei bewegenden Massen m_1 des Pleuels, der Pleuelstange und des Pleuelkopfes. Die Beschleunigung der

$$b = \frac{p_1 F x}{m_1} = \frac{P_1 x}{m_1}$$

Daraus folgt die Relativgeschwindigkeit $w = \int b dt = \int \frac{P_1 x}{m_1} dt$.

Nun ist — die augenblickliche Pleuelgeschwindigkeit c als konstant angenommen — der von S

aus gemessene Kolbenweg $x = c t$, so daß

$$w = \int \frac{P_1 c t}{m_1} dt = \frac{P_1 c}{m_1} \int t dt = \frac{P_1 c t^2}{2 m_1}.$$

ist. Damit wird der Weg s für die Relativbewegung

$$s = \int w dt = \frac{P_1 c}{2 m_1} \int t^2 dt = \frac{P_1 c t^3}{6 m_1}$$

und die zum Durchlaufen des Lagerspiels s erforderliche Zeit

$$t = \sqrt[3]{\frac{6 s m_1}{P_1 c}}. \tag{23.14}$$

Die Endgeschwindigkeit der Relativbewegung w_{\max} ist deshalb:

$$w_{\max} = \frac{P_1 c}{2 m_1} \sqrt[3]{\frac{36 s^2 m_1^2}{P_1^2 c^2}} = \sqrt[3]{\frac{9 s^2 P_1 c}{2 m_1}}. \tag{23.15}$$

Mit dieser Geschwindigkeit trifft der Zapfen gegen die Lagerschale. Die Stoßenergie

$$A = \frac{m_1}{2} w_{\max}^2 \text{ kgm} \tag{23.16}$$

wird dabei in Formänderungsarbeit der Stange, namentlich aber der Verbindungsschrauben umgesetzt. Wenn $V = 2 f l$ das Volumen der beiden gleichmäßig durch die Spannung σ auf Zug beanspruchten Schraubenteile ist, so ist:

$$A = \frac{\sigma^2}{2 E} V = \frac{\sigma^2}{E} f \cdot l.$$

Die beim Stoß auftretende Spannung σ ist deshalb (wenn A in kgm eingesetzt wird):

$$\sigma = \sqrt{\frac{100 A E}{f \cdot l}} \text{ kg/cm}^2. \tag{23.17}$$

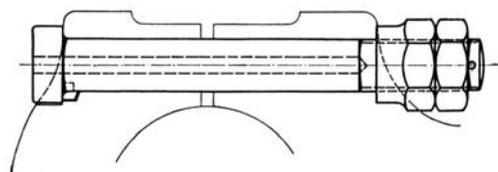


Abb. 23.50. (Aus Güldner.)

Die Stöße haben schon wiederholt Schraubenbrüche zur Folge gehabt. Damit die Spannung σ klein bleibt, sollte das Volumen $f \cdot l$ groß sein. Die Spannung σ sollte demnach nicht nur im Gewindekern, sondern über eine möglichst große Länge l wirken. Der Bolzen wird deshalb entweder so ausgebohrt, daß sein Ringquerschnitt etwas kleiner als der Kernquerschnitt ist (Abb. 23.50) oder der äußere Durchmesser wird auf Kerndurchmesser abgedreht. (Dehnschraube.)

Durch die elastischen Formänderungen des Deckels und der Verbindungsschrauben wird das Lagerspiel s vergrößert. Der Deckel ist demnach recht kräftig (starr) auszuführen, indem die Entfernung der Schrauben von der Stangenmittellinie so klein wie möglich gemacht wird und runde Köpfe mit kleinem Kopfdurchmesser ($D = 1,35 d + 4 \text{ mm}$) gewählt werden. Die Verbindungsschrauben sind auch möglichst kurz zu halten; die Vergrößerung des Schraubenvolumens kann demnach nur durch die Vergrößerung der Querschnittsfläche f erreicht werden.

Beim Kurbelzapfen wirkt der Druckwechsel noch etwas ungünstiger. Erst nachdem der Stoß im Kreuzkopf beendet ist, beginnt das Durcheilen des Spielraumes zwischen Lagerschale und Kurbelzapfen. Die zur Beschleunigung dienende Kolbenkraft ist jetzt auch größer. Experimentelle Untersuchungen von H. Polster¹ haben die Bedeutung der Stoßdämpfung durch die Schmierung klargelegt. Bei der mangelhaften Tropfölschmierung war der Stoß mehr als 20mal kräftiger als bei Druckölschmierung.

Zulässige Schraubenbelastungen. Es ist in der Praxis gebräuchlich, bei der Berechnung der Schrauben nur die Betriebsbelastung allein zu berücksichtigen. So schreiben z. B. die Rohrnormen

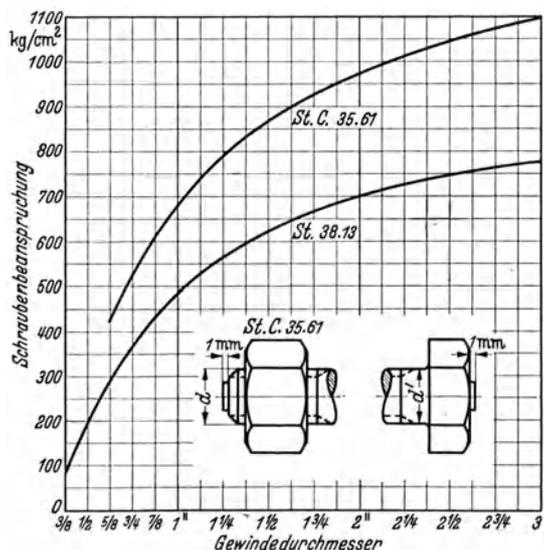


Abb. 23.51. Zulässige Schraubenbelastung (nach den Rohrnormen).

¹ Polster, Dr.-Ing. H.: Mitt. Forsch.-Arb. Z. VDI 1915, H. 172/173.

die in Abb. 23.51 dargestellten zulässigen Spannungen für Wasser vor; für Gase und Dämpfe (bis 300° C) gelten 80 % und für Heißdampf (bis 400° C) 64 % dieser Werte, wodurch die Wärmespannungen berücksichtigt werden. Diese Zahlenwerte beruhen auf Grund langjähriger Erfahrungen, geben aber kein richtiges Bild über die tatsächlichen Beanspruchungen, die infolge der Vorspannung viel größer sind. Diese könnten aus den vorhergehenden Überlegungen berechnet werden, wenn die Einheitskräfte (vgl. S. 176) der Verbindung bekannt sind. Die starke Abnahme der zulässigen Spannung für kleine Schrauben ist begründet, weil diese durch die Vorspannung viel stärker beansprucht werden.

Schrifttum.

Berndt, G.: Die Gewinde. Berlin: Julius Springer 1925. Erster Nachtrag 1927. — Die deutschen Gewindetoleranzen. Berlin: Julius Springer 1929. — Schoeneich, H.: Schraubensicherungen. Berlin: Carl Heymann 1933. Ein Überblick über die Vielseitigkeit der bis jetzt gemachten Vorschläge, aus der Sammlung des Reichspatentamts von rd. 4000 Patentschriften. — Koch, J.: Statische Versuche mit Schraubensicherungen. Diss. T. H. Dresden 1936. Leipzig: Frommhold & Wendler. — Dittrich, W.: Statische und dynamische Untersuchungen von Schraubensicherungen. Diss. T. H. Dresden 1938. Borna-Leipzig: Robert Noske. — Hempel, M.: Dauerfestigkeits-Schaubilder von gekerbten und kaltverformten Stählen und von Schrauben. Z. VDI 81 (1937) S. 870. — Bock, E.: Das Verhalten der Schraubenverbindungen beim Anziehen und Lösen in Abhängigkeit von den Gewindetoleranzen. Diss. T. H. Dresden 1933. — Lehmann, R.: Die Dauerfestigkeit der Schraubenverbindung in Abhängigkeit von den Gewindetoleranzen. Diss. T. H. Dresden 1931. — Mütze, K.: Die Festigkeit der Schraubenverbindung in Abhängigkeit von den Gewindetoleranzen. Diss. T. H. Dresden 1929. Berlin: Julius Springer. — Staedel, W.: Dauerfestigkeit von Schrauben, ihre Beeinflussung durch Form, Herstellung und Werkstoff. Mitt. der MPA: an der T. H. Darmstadt, Heft 4. Berlin: VDI-Verlag 1932. — Wiegand, H.: Über die Dauerfestigkeit von Schraubenwerkstoffen und Schraubenverbindungen. Diss. T. H. Darmstadt 1934. — Thum, A. und F. Debus: Vorspannung und Dauerhaltbarkeit von Schraubenverbindungen. Mitt. der MPA an der T. H. Darmstadt, Heft 7. Berlin: VDI-Verlag 1936. — Gans: Die Dauerschlagfestigkeit der vorgespannten Schraubenverbindungen in Abhängigkeit von der Gewindetoleranz. Diss. T. H. Dresden 1934. — Schraivogel, K.: Dauerbiegeversuche mit Schraubenbolzen. Jahrbuch 1936, Lilienthal-Ges. f. Luftfahrtforschung, S. 397/403. — Föppl, O. und W. Wagenblast: Rüttelprüfungen von Schraubenverbindungen. Mitt. Wöhlerinst., Heft 27 (1936) S. 52/64. — Jehle, H.: Polarisationsoptische Spannungsuntersuchungen an einer Schraubenverbindung und an einzelnen Gewindezähnen. Forsch. 7 (1936) S. 19/30. — Maduschka, L.: Beanspruchung von Schraubenverbindungen und zweckmäßige Gestaltung der Gewindeträger. Forsch. 7 (1936) S. 299/305. — Staudinger, H.: Das Verhalten der Schraubenverbindungen bei wiederholten Anziehen und Lösen. Z. VDI 81 (1937) S. 607/09. — Jaquet, E.: Über eine neuartige Schraubenverbindung. Ing.-Arch. 2 (1931) S. 569/90. — Haas, B.: Einfluß der Muttergröße auf die Festigkeit der Schraubenverbindung. Bericht aus dem Institut für Werkstofforschung der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt. Z. VDI 82 (1938) S. 1269/74. — Vollbrecht, H.: Über die Erscheinungen beim Festfressen von Schraubenverbindungen, die erhöhter Temperatur ausgesetzt waren. Würzburg: Konrad Tritsch 1935. — Wyss, Th.: Untersuchungen an Schrauben mit 0,8 d Muttern. Schweiz. techn. Z. (1939) Nr. 23/24.

24. Schrumpfverbindungen (Preßsitze).

Mit der Normung der Passungen ist der Ausdruck „Preßsitz“ als Bezeichnung für das ganze Gebiet der Spannungssitze eingeführt worden. Preßsitze sollen Kräfte zwischen zwei Teilen (z. B. Welle und Nabe) allein durch die Reibung in den Sitzflächen übertragen, ohne besondere Sicherung gegen Verschiebung oder Verdrehen. Dieses Haften wird dadurch erreicht, daß Welle und Nabe vor dem Zusammenbau einen geringen Durchmesserunterschied aufweisen.

Die konstruktive Bedeutung der Preßsitze liegt in dem Fortfall besonderer Übertragungsmittel (Keile, Stifte usw.); sie werden auch bei stoßweiser Beanspruchung (z. B. Antrieb von Walzwerken) empfohlen. Einfache Schrumpfverbindungen, das Schrumpfband und die Radbandage sind auf S. 64 und 89 erläutert worden. Die Preßsitze können in verschiedener Weise hergestellt werden.

Bei den Längspreßsitzen werden Nabe und Welle im Kaltverfahren durch in der Längsrichtung wirkende mechanische Kräfte ineinander gepreßt. Bei den Querspreßsitzen werden beide Teile auf verschiedene Temperaturen gebracht und kräftefrei ineinander geschoben (Schrumpfsitz). Sie sind in der Herstellung einfacher (da Pressen entbehrlich sind) und haben den Vorteil, daß die Oberflächenrauheit in der Verbindung von bleibender aktiver Wirkung ist. Bei gleichen Übermaßen lassen Quersitze größere Haftkräfte erwarten als Längspreßsitze.

Die Berechnung der Preßsitze geht von der Überlegung aus, daß die Pressung p sich gleichmäßig über die ganze Oberfläche verteilt. Solche ringförmige Schrumpfverbindungen sind demnach wie dickwandige Rohre zu berechnen (vgl. Abschn. 14.3). Beim Schrumpfring trifft die dort gemachte Voraussetzung, daß der Zylinder unendlich lang ist, nicht zu. Die genaue Berechnung¹ hat aber gezeigt, daß die größte Beanspruchung in sehr geringem Maße von der Breite des

¹ Vgl. z. B. Jänicke: Schweiz. Bauztg. 1927, 3. Sept., S. 127.

Ringkörpers abhängt, so daß die Näherungsrechnung, unter Vernachlässigung der endlichen Ringbreite, praktisch durchaus zulässig ist.

Bei der Schrumpfung wird die Welle um den Betrag ϱ_1 zusammengedrückt und der Ring um den Betrag ϱ_2 gedehnt, so daß der Unterschied zwischen Welle und Bohrung (das Schrumpfmaß) $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2$ beträgt. Die radiale Erweiterung ϱ_2 der Bohrung folgt aus

$$\frac{\varrho_2}{r_i} E_2 = p \left(\frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} + \frac{1}{m} \right) \quad (14.21)$$

und die radiale Verkürzung der hohlen resp. vollen Welle aus:

$$\frac{\varrho_1}{r_i} E_1 = p \left(\frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} - \frac{1}{m} \right) \text{ resp. } \frac{\varrho_1}{r_i} E_1 = p \left(1 - \frac{1}{m} \right). \quad (14.30 \text{ resp. } 31)$$

Wenn Welle und Nabe aus dem gleichen Werkstoff hergestellt sind ($E_1 = E_2 = E$), ist für die volle Welle:

$$\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{r_i} = \frac{\varrho}{r_i} = \frac{p}{E} \cdot \frac{2r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} = \frac{2p}{E} \cdot \frac{a^2}{a^2 - 1}. \quad (24.1)$$

Die im Ring entstehende größte Schubspannung ist:

$$\tau_{\max} = p \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} = p \frac{a^2}{a^2 - 1}. \quad (14.26)$$

Aus Gl. (24.1) u. (14.26) folgt:

$$\frac{\varrho}{r_i} = \frac{2\tau}{E} \quad (24.2)$$

genau wie beim dünnwandigen Rohr. Der Auf- resp. Abpreßdruck ist

$$P = p \cdot \pi d_i \cdot b \cdot \mu \text{ kg} \quad (24.3)$$

oder mit p aus Gl. (1) und τ_{\max} aus Gl. (2):

$$P = \mu \pi \frac{a^2 - 1}{a^2} b \cdot d_i \cdot \tau_{\max} = \mu \pi \cdot b \cdot \frac{a^2 - 1}{a^2} \cdot E \cdot \varrho. \quad (24.4)$$

Der Aufpreßdruck ist demnach proportional mit der Sitzbreite b . Die Vorschrift der Eisenbahnverwaltungen¹, daß der Aufpreßdruck je cm Wellendurchmesser einen bestimmten Grenzwert (4 bis 6,5 t/cm bei Stahlrädern, 2,5 bis 4 t/cm bei Gußrädern) nicht überschreiten darf, ist deshalb nur für ähnliche Naben ($b/d = \text{konst.}$ und $a = \text{konst.}$) brauchbar.

Für Wellenstahl St 50.11 mit

$$\tau_{\max} = 1100 \text{ kg/cm}^2$$

folgt aus Gl. (2): $\varrho/r_i < 0,001$, entsprechend dem in der Praxis meist gebräuchlichen Wert.

Die Versuche von S. Werth² und von N. Wassileff bestätigen Gl. (4) mit einer kleinen Korrektur, indem der Aufpreßdruck nicht mit ϱ , sondern mit $(\varrho + 0,005 \text{ mm})$ proportional ist, was wohl durch die Unebenheiten der Flächen erklärt werden kann. Sie bestätigen auch die früheren Erfahrungen, daß die Haftkraft bei Längspreßsitzen durch das Schmiermittel, sehr stark beeinflusst wird (Abb. 24.1).

Bei geometrisch ähnlichen Preßsitzen

¹ Vgl. z. B. Hütte, Bd. III, 26. Aufl. S. 988.

² Werth, S.: Austauschbare Längspreßsitze. VDI-Forsch.-Heft Nr. 383 (1937). — Wassileff D., N.: Austauschbare Querpreßsitze. VDI-Forsch.-Heft Nr. 390 (1938). — Kienzle, O. und A. Heiss: Die Berechnung einfacher Preßsitze. Werkst.-Techn. 32 (1938) S. 468/73. — Kienzle, O.: Die Einflüsse auf die Haftbeiwerte in den Fugen von Preßsitzen. Werkst.-Techn. 32 (1938) S. 552/59.

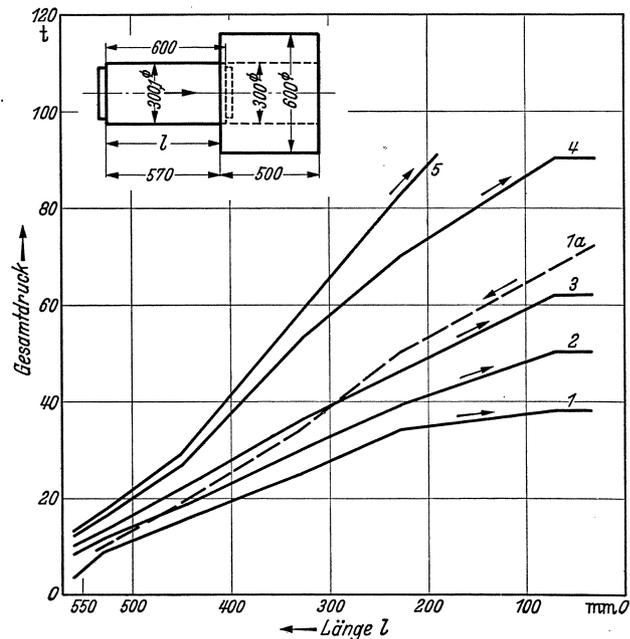


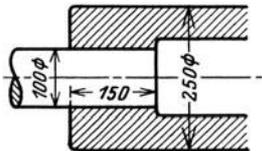
Abb. 24.1. Einfluß des Schmiermittels auf den Aufpreßdruck nach Versuchen von BBC. (Obering. Streiff).

- Kurve 1: Talg (aufpressen), 1a (abpressen).
- „ 2: $\frac{1}{2}$ Talg und $\frac{1}{2}$ Leinöl.
- „ 3: $\frac{3}{4}$ „ „ $\frac{3}{4}$ „
- „ 4: Vaseline.
- „ 5: Mineralöl.

ist die größte Beanspruchung nur vom Verhältnis ϱ/r_i abhängig (Gl. 2) und nicht vom Durchmesser. Man könnte also ϱ/r_i für alle Durchmesser konstant annehmen. Mit Rücksicht auf die wirtschaftliche Herstellung müssen bei kleinen Durchmessern die Toleranzen relativ größer gehalten werden, da sonst die Herstellung erheblich verteuert würde. Auch spielt die Oberflächenbeschaffenheit bei kleinen Durchmessern eine größere Rolle als bei den großen. Diese Überlegungen führen dazu, die Übermaße ϱ/r_i in ‰ mit abnehmendem Durchmesser zunehmen zu lassen.

Zahlenbeispiel 24.1. Wie groß darf die Schrumpfung beim Einpressen von Wellen in Hartgußwalzen sein?

Mit den in Abb. 24.2 eingetragenen Maßen folgt aus den Gl. (14.31) und (14.21)



und

$$\text{für die volle Welle: } \frac{\varrho_1}{r_i} = 0,7 \frac{p}{E_1}$$

$$\text{und für die Walze: } \frac{\varrho_2}{r_i} = 1,68 \frac{p}{E_2}$$

$$\frac{\varrho}{r_i} = p \left(\frac{0,7}{E_1} + \frac{1,68}{E_2} \right)$$

Abb. 24.2. Eingepreßte Welle.

Mit $E_1 = 2,2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ (Stahlwelle) und $E_2 = 1,5 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ (Hartgußwalze) wird

$$\frac{\varrho}{r_i} \approx \frac{p}{695000}$$

Der höchstzulässige Wert von p ist durch die Festigkeit des Materials (hier Gußeisen) festgelegt. Die größte Tangentialspannung, die am Innenrand der Bohrung auftritt, ist nach Gl. (14.21):

$$(\sigma_t)_{\max} = p \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} = \frac{7,25}{5,25} p = 1,38 p$$

und die dort wirkende radiale Spannung:

$$\sigma_r = -p$$

Weil die Schubspannungen an der betrachteten Stelle gleich Null sind, kann der Spannungszustand durch den Spannungskreis in Abb. 24.3 dargestellt werden. Nehmen wir an, daß für Gußeisen die zulässige Spannung für Zug = 350 at und für Druck = 1000 at ist, so liegt der Spannungszustand ungefähr an der zulässigen Grenze, wenn $p = 200$ at ist. Damit wird

$$2\varrho = \frac{100 \cdot 200}{695000} = 0,029 \text{ mm.}$$

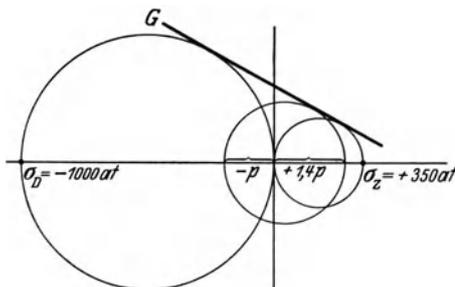


Abb. 24.3. Spannungskreis zum Zahlenbeispiel 24.1.

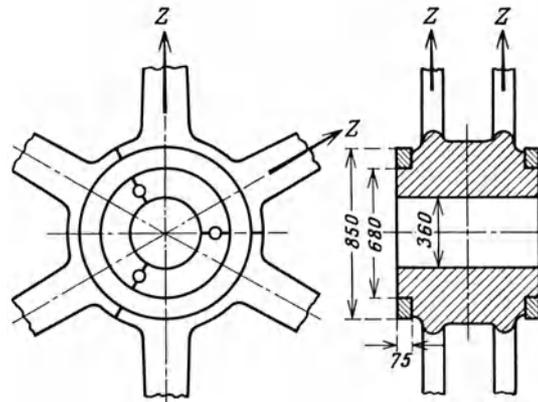


Abb. 24.4. Zum Zahlenbeispiel 24.2.

Hätte man $\frac{\varrho}{r_i} = 0,001$ gewählt, so würde $p = 695$ at betragen und die Walze würde zerreißen.

Das Drehmoment, das ein Preßsitz übertragen kann, folgt daraus, daß die Umfangskraft kleiner als die Reibkraft sein muß. Wenn Welle und Nabe auf der ganzen Fläche $\pi \cdot d \cdot b$ mit der Pressung p at zusammengepreßt werden, so ist die Reibkraft $R = \mu \pi d b p$, so daß

$$\xi P_u < \mu \pi d b p$$

sein muß.

Zahlenbeispiel 24.2¹. Der Radstern des Läufers eines großen Drehstromgenerators ist aus Stahlguß hergestellt und hat 2 · 6 Arme (Abb. 24.4). Um die bei einem so großen Stück unvermeidlichen Gußspannungen zu verkleinern, ist die Nabe an drei Stellen gesprengt und durch

¹ Z. Masch.-Bau 1923/24, S. 528.

Schrumpfringe zusammengehalten. Während des Betriebes entsteht durch Fliehkraft und Magnetkräfte eine zusätzliche Zugkraft in jedem Arm von 50 t. Die Schrumpfverbindung wird somit durch die am Umfang des Ringes wirkende gleichmäßige Pressung p_1

$$p_1 = \frac{12 \cdot 50\,000}{2 \cdot \pi \cdot 68 \cdot 7,5} = 188 \text{ at}$$

entlastet. Das Schrumpfmaß 2ϱ wurde nach der Faustregel $2 \varrho = 0,001 D$ festgelegt.

Da für das Stahlgußrad und für den Stahlring $E_1 = E_2 = E = 2\,150\,000$ at gesetzt werden kann, folgt die bei der Schrumpfung erzeugte Flächenpressung aus der Gl. (1) für $r_a/r_i = 85/68 = 1,25$ zu $p = 380$ at.

Während des Betriebes wird durch die zusätzliche Pressung von 188 at der Ring weiter gedehnt. Der innere Radius des Ringes erfährt eine zusätzliche radiale Erweiterung, wenn die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird:

$$\frac{\varrho'_i}{r_i} = \frac{188}{E} \left(\frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} + \frac{1}{m} \right) = 0,435 \cdot 10^{-3},$$

die 43% des Schrumpfmaßes beträgt, und die vorhandene radiale Zusammendrückung der Nabe und Welle von $0,12 \cdot 10^{-3}$ aufhebt; die Verbindung also vollständig lockert.

Die größte Spannung im Ring ist, nach Gl. (14.26): $\tau_{\max} = p \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} = 1600$ at, und liegt oberhalb der Elastizitätsgrenze, so daß eine bleibende Formänderung der Verbindung auftreten muß. Während des Betriebes trat auch ein deutlich wahrnehmbares Klopfen ein. Durch Aufbringen von dickeren und breiteren Ringen kann die Verbindung verbessert werden.

Auch Kurbelzapfen werden oft durch Schrumpfung befestigt (Abb. 33.1). Reicht die Schrumpfung zur Übertragung des Drehmomentes nicht aus, so müssen Abscherbolzen eingesetzt werden. Die Zapfen werden dann mit „Festsitz“ und nicht mit „Preßsitz“ eingesetzt.

Kerbstifte. Vor wenigen Jahren wurde ein neues Verbindungselement auf den Markt gebracht, der Kerbstift¹, der eine recht vielseitige Anwendung als Ersatz für Keil, Niet, Schraube, Kegelstift gestattet (Abb. 24.6 bis 10).

Der Kerbstift ist ein zylindrischer Stift, in dessen Umfang drei um 120° versetzte Kerben eingepreßt (nicht eingeschnitten) werden (Abb. 24.5a). Dadurch wird Material verdrängt und es entstehen „Kerbwulste“. Der Stift wird in ein ebenfalls zylindrisches Loch eingeschlagen, dessen Durchmesser dem Durchmesser des ungekerbten Stiftes entspricht. Beim Einschlagen werden die Kerben verformt (Abb. 24.5 b), der Stift legt sich mit hoher Pressung an die Lochwand an und sitzt sehr fest. Verbindungen durch Kerbstifte sind also auch Schrumpfverbindungen. Durch die Anwendung von drei Kerben zentriert er sich von selbst im Bohrloch. Die Verformungen der Kerben sind zum größten Teil elastisch (federnd), denn die Erfahrung hat gezeigt, daß der gleiche Kerbstift rund 25 mal wiederverwendet werden kann.

Der Kerbstift ist wesentlich billiger als der Kegelstift. Außerdem erspart er Lohn- und Werkzeugkosten, weil das Ausreiben des Loches vollständig wegfällt, so daß der Kerbstift den Kegelstift vorteilhaft ersetzt.

Der Kerbstift besitzt noch einen weiteren Vorteil. Beim festsitzenden Kegelstift bewirkt eine kleine Verschiebung von 2 bis 3 mm in der Längsachse des Stiftes vollständiges Aufheben des Anpressungsdruckes. Beim Kerbstift dagegen haben zehnmals größere Verschiebungen noch keine Lösung der Federwirkung zur Folge. Diese Eigenschaft (Rüttelfestigkeit genannt) ist dort sehr wichtig, wo Erschütterungen und Stöße auftreten.

Der Kegelstift verlangt außerdem eine genaue Paßarbeit, ist deshalb ziemlich teuer und für die Verwendung bei beliebig austauschbaren Teilen wenig geeignet.

Das Einwalzen von Rohren ist beim Kesselbau, bei Kondensatoren usw. gebräuchlich und stellt eine Schrumpfverbindung dar. Die Rohrenden werden durch Auswalzen gewaltsam erweitert, so daß bleibende Formänderungen und Zugspannungen oberhalb der Fließgrenze im Rohr auftreten ($\sigma_1 > +2200$ at für St 37). Das Rohr wird dabei mit einem Druck p an die Oberfläche der Bohrung gepreßt. Die Größe dieses Druckes ist dadurch begrenzt, daß als resultierende Spannung die Elastizitätsgrenze des Rohrmaterials ($\sigma_e = -1500$ at) dauernd nicht überschritten werden kann. Da es sich dabei immer um dünnwandige Rohre handelt, kann die

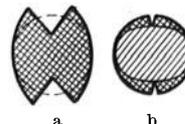


Abb. 24.5. Querschnitte des Kerbstiftes. a vor dem Einschlagen, b nach dem Einschlagen.

¹ Kerb-Konus G. m. b. H. in Dresden.

Beanspruchung nach der Kesselformel ($\sigma = \frac{pd}{2\delta}$) berechnet werden, worin d der Rohrdurchmesser und δ die Rohrwandstärke ist. Zur Berechnung des äußeren Druckes p muß in dieser Gleichung diejenige Spannung σ eingesetzt werden, die mit der vom Aufwalzen herrührenden

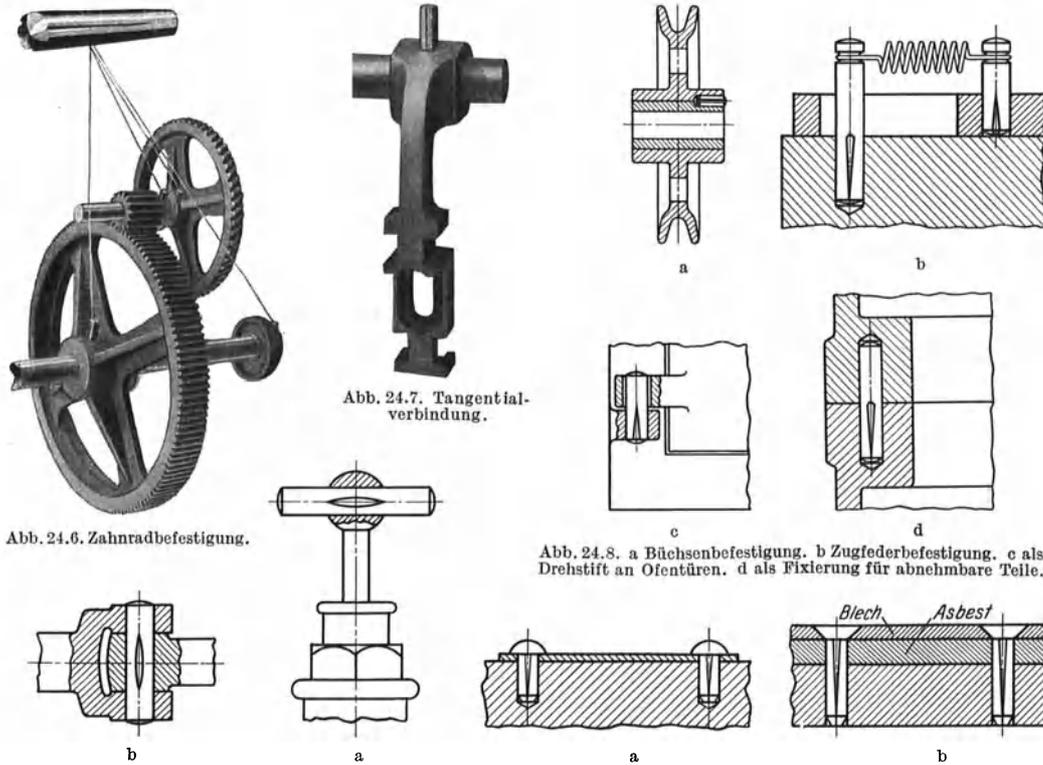


Abb. 24.6. Zahnradbefestigung.

Abb. 24.7. Tangentialverbindung.

Abb. 24.8. a Büchsenbefestigung. b Zugfederbefestigung. c als Drehstift an Ofentüren. d als Fixierung für abnehmbare Teile.

Abb. 24.9. a Knebel. b Gelenkbolzen.

Abb. 24.10. a Kerbnägel zur Befestigung von Firmaschildern. b Blechbefestigung.

Abb. 24.6—24.10. Verschiedene Anwendungsbeispiele mit Kerbstiften.

Zugspannung von 3200 at die resultierende Druckspannung von 1800 at erzeugt, d. i. $\sigma = 2200 + 1500 = 3700$ at. Damit wird $p = 7400 \delta/d$ at. (24.5)

Im allgemeinen wird nur ein Bruchteil $1/n$ der Oberfläche wirklich angepreßt. Er ist um so größer, je sorgfältiger das Einwalzen durchgeführt wird. Die theoretische Abstreifkraft, d. i. die Kraft, welche auf Grund dieser Überlegungen zur Lösung der Verbindung, d. h. zur Überwindung der Reibung erforderlich ist, wird

$$P_{\max} = \frac{1}{n} \mu \pi d s p \text{ kg},$$

worin s die Dicke der Rohrplatte und μ die Reibungszahl zwischen Rohr und Platte ist. Setzt man den Wert von p aus Gl. 24.5) darin ein, so erhält man:

$$P_{\max} = \frac{7400}{n} \pi \mu s \delta \text{ kg}. \quad (24.6)$$

Die Versuche von Dr.-Ing. E. Siebel¹ bestätigen die Richtigkeit dieser Überlegungen (Abb. 24.11). Er fand als Resultat seiner Untersuchungen, daß die Abstreifkraft 35 kg je mm² Stützfläche beträgt, wenn mit Stützfläche die Fläche $2 \cdot s \cdot \delta$ bezeichnet wird.

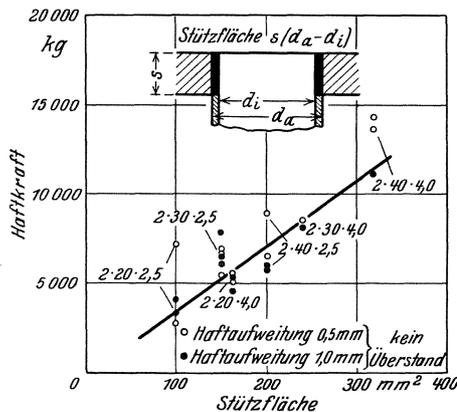


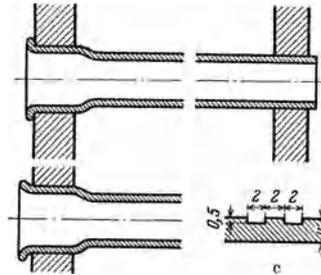
Abb. 24.11. Haftkraft nach den Versuchen von E. Siebel.

Der Proportionalitätsfaktor $\frac{7400}{n} \pi \mu$ in Gl. (24.6) ist nach diesen Versuchen gleich 7000.

¹ Siebel, Dr.-Ing. E.: Mitt. Eisenforsch. 9 (1927) S. 295. — Thum, A. und W. Mielentz: Verhalten eingewalzter Rohre im Betrieb. Z. VDI 81 (1937) S. 1491/94.

Für sorgfältig eingewalzte Rohre kann demnach $n = 1$ und $\mu = 0,3$ gesetzt werden. Die Versuche wurden mit Rohren von 83,7 mm äußerem Durchmesser und Wandstärken von 2,5 resp. 4 mm, sowie mit Rohrplattendicken s von 2,3 und 4 mm durchgeführt. Abreißversuche bei 350° C ergaben weiter, daß die Haftfestigkeit der Verbindungen nicht geringer, sondern meist sogar noch höher als bei 20° C war. Bei ungleichmäßiger Erwärmung z. B. Rohrflansch für Heißdampfleitungen) lockert sich die Schrumpfungverbindung.

Die zulässige Beanspruchung muß natürlich kleiner als P_{\max} bleiben; man rechnet mit einer vier- bis fünffachen Sicherheit gegen Abstreifen. Durch Umbördeln (Abb. 24.12a) oder durch kegelförmige Erweiterung der vorstehenden Rohrenden (Abb. 24.12b), oder durch Eindrehen von Rillen in die Rohrwand (Abb. 24.12c) kann die Abstreifkraft vergrößert werden.



25. Schweißverbindungen.

Durch Schweißen werden Teile aus dem gleichen Metall derart zu einem Ganzen vereinigt, daß die Molekeln der Berührungsflächen durch Kohäsion aneinander heften.

Rein metallische Berührung an der Schweißstelle ist also erste Vorbedingung für das Gelingen der Schweißung. Fremde Stoffe, wie Oxyde oder Schlacken, verhindern die Verbindung durch Kohäsion; sie haften nur infolge der Adhäsion. Die Oxydation muß also entweder verhindert oder die vorhandenen Oxyde müssen aufgelöst und unschädlich gemacht werden. Das letztere erreicht man durch Anwendung von Schweißpulvern (Borax, Kolophonium, Blutlaugensalz usw.), die eine leichtflüssige Schlacke bilden. Außer der metallischen Berührung ist noch ein Druck notwendig, um die Molekel so nahe zusammenzubringen, daß die Kohäsionskräfte wirksam werden. Das Schweißen gelingt nur bei einer bestimmten Temperatur, der Schweißtemperatur, die mit dem Kohlenstoffgehalt des Stahles wechselt.

Bei der Schmelzschweißung werden die zu verbindenden Flächen geschmolzen, und zwar entweder mit einer Gasstichflamme (autogene Schweißung) oder durch einen Lichtbogen. Die Schweißstelle wird durch das flüssige Metall des Schweißdrahtes (oder der Elektrode) ausgefüllt. Weil die Verbindung der Molekeln in flüssigem Zustande erfolgt, ist kein äußerer Druck notwendig. Zur Aufnahme des Verbindungsmetalle muß die Schweißstelle entsprechend vorbereitet werden (Abb. 25.3b). Die Güte der Schweißstelle ist bei der Schmelzschweißung fast ausschließlich von der Zusammensetzung des Schweißdrahtes (oder der Elektroden) abhängig. Der Vorgang der Lichtbogenschweißung ist aber keine einfache Werkstoffübertragung, sondern mehr ein Verhüttungsvorgang, bei dem Flußmittel, Schlacken, Zusatzstoffe, freiwerdende Gase usw. eine bedeutende Rolle spielen. Die Elektroden werden deshalb umhüllt und geben dem Endprodukt die gewollten Eigenschaften. Auf diese Weise kann auch das früher gebräuchliche Ausglühen und Hämmern der Schweißnaht vermieden werden. Die richtige Wahl der geeigneten Elektroden ist eine wichtige Voraussetzung für das Gelingen einer guten Schweißverbindung.

Die Güte der Verbindung ist auch in hohem Maße von der Geschicklichkeit und Zuverlässigkeit des Arbeiters abhängig. Es war daher begreiflich, daß Schweißverbindungen während längerer Zeit mit Mißtrauen betrachtet wurden. Heute ist man in der Lage zuverlässige Schweißverbindungen herzustellen, so daß die Schweißung im Maschinenbau eine noch immer zunehmende Verwendung findet.

Bei der elektrischen Widerstandsschweißung werden die Teile durch den hindurchgeleiteten Strom (bis 100 000 Ampere und Spannungen von rd. 10 Volt) erwärmt. Sie hat als Punktschweißung eine große Verbreitung gefunden. Die zu verschweißenden Teile werden zwischen zwei stiftförmigen Elektroden (Abb. 25.1) an eng begrenzten Stellen auf Schweißhitze erwärmt und dann durch Anpressen einer Elektrode verschweißt. Durch Nebeneinandersetzen solcher Schweißpunkte (enger oder weiter, geradlinig oder zickzackförmig) entsteht eine nietähnliche Verbindung.

Wenn bei stark beanspruchten Schweißstellen oft Mißerfolge auftreten, so ist daran zum größten Teil der Konstrukteur schuld. Er sollte auch bei Schweißverbindungen die allgemeine Konstruktionsregel beachten: nur so zu entwerfen, daß eine klare und eindeutige Festigkeits-

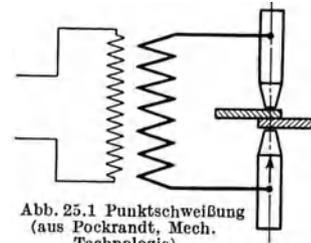


Abb. 25.1 Punktschweißung (aus Pockrandt, Mech. Technologie).

rechnung möglich ist. Die Anordnung von Schweißnähten an Stellen, wo durch Formänderungen unberechenbare Spannungen auftreten können, ist immer unrichtig. Aus dieser Überlegung heraus hätte man auch ohne Versuch sofort sagen können, daß die Schweißung nach Abb. 25.2c die beste sein muß. Wenn diese allgemeine Regel mehr beachtet wird, so werden sicher weniger Klagen über Verschweißungen auftreten.

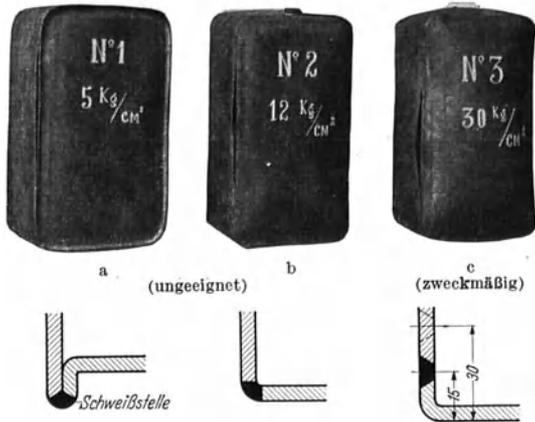


Abb. 25.2. a ungeeignet. Naht reißt bei 5 kg/cm² Innendruck. b ungeeignet. Naht reißt bei 12 kg Innendruck, c zweckmäßig. Naht reißt bei 30 kg Innendruck (nach Versuchen von Brown, Boveri & Co., Baden).

Die Schweiß Eigenschaften der Stähle sind recht verschieden. Während die niedrig gekohlten (St 37 bis St 45) auch gegen größere Abweichungen von den günstigsten Schweißbedingungen unempfindlich sind, verlangen die höher gekohlten und auch die legierten Stähle in ziemlich engen Grenzen einzuhalten Schweißvorschriften um gesunde Eigenschaften der Nahtzone (Gefüge, Zähigkeit, Rißfreiheit) zu erhalten. Die Verwendung solcher Stähle setzt also eingehende Kenntnisse über die günstigsten Schweißbedingungen und eine genaue Kontrolle über deren Einhaltung voraus.

Berechnung. Bei den Schweißkonstruktionen kann es sich nur selten darum handeln,

die wirklich auftretenden Spannungen genau zu berechnen, denn sie werden nicht nur durch die äußeren Kräfte, sondern auch durch Quer- und Längsschrumpfungen der Nähte beeinflusst. Man muß sich in der Praxis mit einfachen Näherungsrechnungen begnügen, die dann durch die Wahl oder die Vorschrift einer „zulässigen“ Spannung ausgeglichen werden.

Bei den Stumpf- oder Stoßnähten (Abb. 25.3) ist der Spannungsverlauf bei Zug-, Druck- oder Biegebeanspruchung klar; bei guter Schwei-

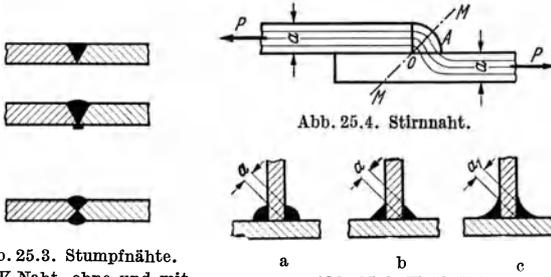


Abb. 25.3. Stumpfnähte. a V-Naht, ohne und mit Wurzelschweißung. b X-Naht.

Abb. 25.4. Stirrnaht.

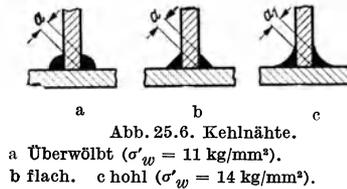


Abb. 25.6. Kehlnähte. a Überwölbt ($\sigma_w = 11 \text{ kg/mm}^2$). b flach. c hohl ($\sigma_w = 14 \text{ kg/mm}^2$).

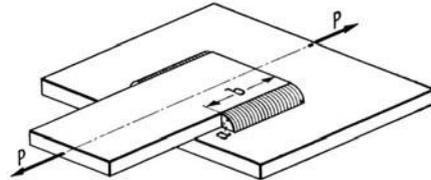


Abb. 25.5. Flankennaht.

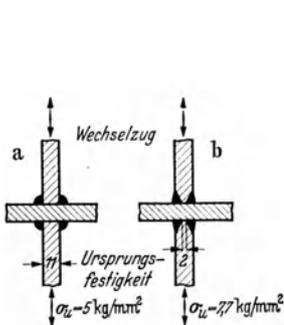


Abb. 25.7.

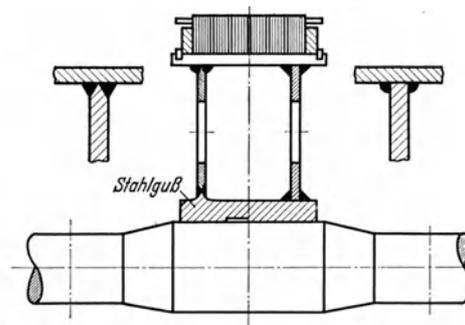


Abb. 25.8. Rotor-konstruktion.

bung reißt eher das Blech als die, etwas verdickte, Naht. Man unterscheidet V- und X-Nähte; letztere für dickere Bleche.

Bei den Stirn-
nähten (Abb. 25.4) tritt immer Biegebeanspruchung auf. Photoelastische Untersuchungen haben aber gezeigt, daß die Beanspruchung symmetrisch in bezug

auf MM ist. Die Stirnnahten können deshalb mit guter Annäherung auf Zug berechnet werden. Durch die Zugkraft $P = P_1 \cdot b$ entsteht dann die Spannung

$$\sigma = P_1/OA \sim P_1/0,7 a .$$

Flankennahten (Abb. 25.5) werden auf Biegung und Abscheren beansprucht. Man nimmt

bei der Berechnung an, daß die Schubspannung gleichmäßig über den Querschnitt verteilt ist

$$\tau = P/F = P_1/a = \sigma_{zul}/2.$$

Die Flankennaht darf also nur 5/7 der Kraft einer Stirnnaht beansprucht werden.

Kehlnähte (Abb. 25.6) werden überwölbt, flach oder hohl ausgeführt und sowohl auf Zug als auch auf Biegung beansprucht. Nach den Versuchen von O. Graf ist die Ursprungsfestigkeit bei Dauerbeanspruchung durch Zugkräfte bei der Ausführung nach Abb. 25.7b mit zugespitzten Kanten (hauptsächlich Zugspannungen) mehr als 50% größer als bei der üblichen Ausführung nach Abb. 25.7a (vorwiegend Biegung). Abb. 25.8 zeigt links die verbesserte Schweißkonstruktion eines Rotors. Bei Wechselbiegung ist (nach den Versuchen von A. Thum) die Hohlnaht der überwölbtten Naht weit überlegen.

Schrifttum.

Cornelius, H.: Die Dauerfestigkeit von Schweißverbindungen. Z. VDI 81 (1937) S. 883/88. — Graf, O.: Dauerfestigkeit von Schweißverbindungen. Z. VDI 78 (1934) S. 1423/27. — Thum, A.: Schweißgerechte Maschinengestaltung. Z. VDI 79 (1935) S. 690/92. — Thum, A. und A. Erker: Dauerbiegefestigkeit von Kehl- und Stumpfnahverbindungen. Z. VDI 82 (1938) S. 1101/06 und 83 (1939) S. 1293/97. — Neue Verordnung über die Berechnung, die Ausführung und den Unterhalt der Bauten aus Stahl vom 14. Mai 1935. — Eichinger, A.: Berechnung geschweißter Verbindungen. Schweiz. Bauztg. Bd. 100 (1936) Nr. 3 vom 18. Juli. — Roš, M. und A. Eichinger: Gütebewertung und zulässige Spannungen von Schweißungen im Stahlbau. Schweiz. Bauztg. Bd. 112, Nr. 14 vom 1. Okt. 1938.

26. Elastische Verbindungen (Federn).

Alle Körper sind in gewissem Grade federnd, weil sie unter der Einwirkung der Kräfte elastische Formänderungen erleiden. Federn nennt man solche Maschinenteile, die durch die Belastung große Formänderungen ohne schädliche Beanspruchung erfahren.

Federnde Verbindungen werden verwendet, wenn eine große Stoßenergie aufgenommen werden muß, z. B. bei Eisenbahnwagen, Automobilen, Kupplungen usw. Die durch einen Stoß übertragene Kraft ist um so kleiner, je größer die dadurch bedingte Formänderung der Feder ist, ohne daß die Elastizitätsgrenze überschritten wird. Federnde Verbindungen werden auch zur Aufspeicherung von Energie und zur Erzielung einer zwangläufigen Bewegung von Maschinenteilen verwendet (z. B. bei Ventilen, Nockensteuerungen usw.). Das Federproblem ist hauptsächlich auch ein Schwingungsproblem. Hier wird nur die Berechnung der Spannungen und der Formänderungen behandelt. Für einfache Fälle können die Eigenschwingungszahlen der Feder nach den Angaben im (Abschn. 33) berechnet werden.

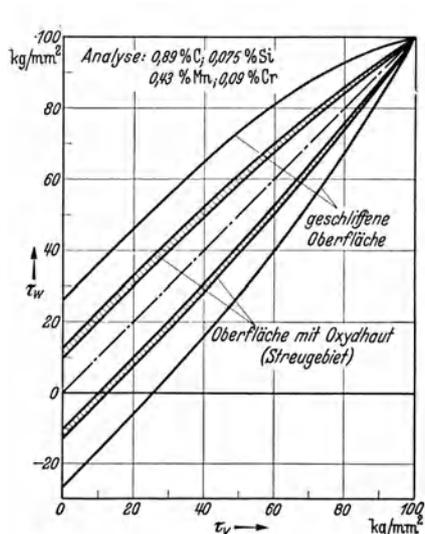


Abb. 26.1. Dauerfestigkeitsschaubild eines Kohlenstoffstahles¹, gehärtet bei 740° (Öl), angelassen auf 450° C
 $K_z \approx 150 \text{ kg/mm}^2$.

Verdrehungs-Streckgrenze $\tau_s = 100 \text{ kg/mm}^2$.

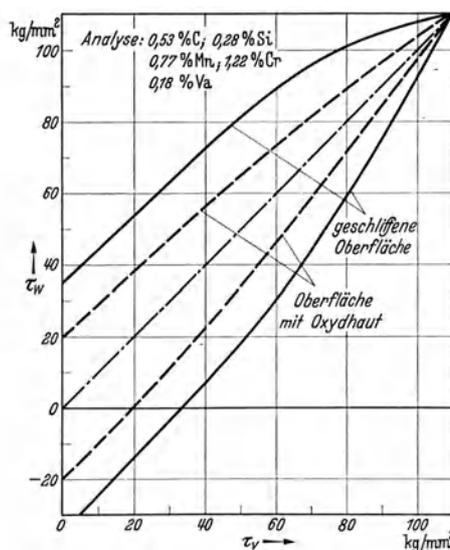


Abb. 26.2. Dauerfestigkeitsschaubild eines Chrom-Vanadiumstahles², gehärtet bei 840° (Öl), angelassen auf 420° C.

$K_z = 150 \text{ kg/mm}^2$. $\tau_s = 110 \text{ kg/mm}^2$.

¹ Swan, H., H. Sutton und W. D. Douglas: An Investigation of Steels for aircraftengine Valvesprings. Engineering 131 (1931) S. 314 u. 374.

Der Werkstoff ist hochwertiger Stahl, dessen Wechselfestigkeit (Abb. 26.1 u. 2) erheblich gesteigert werden kann, wenn man die oberste Schicht des Federdrahtes nach der Wärmebehandlung etwa 0,5 mm im Durchmesser abschleift, wobei auf guten Polierschliff geachtet werden muß. Die Federn müssen dann kalt gewickelt werden. Der Grund für die Festigkeitsverminderung durch die Oberflächenschicht liegt einerseits in kleinen Rissen oder sonstigen Beschädigungen, andererseits in einer während der Wärmebehandlung auftretenden Entkohlung.

Zur Untersuchung der Beschädigungen in der Oberfläche wird folgendes Verfahren angewandt: Der Draht wird in einem elektrolytischen Bad mit Natriumkarbonatlösung bei einer Stromdichte von 9300 Ampère/cm² gereinigt, dann 12 Stunden in Ammoniak-Chloridlösung gelegt, hierauf 12 Stunden der Einwirkung der Luft ausgesetzt. Die feinsten Haarrisse zeichnen sich dann als Roststreifen ab. Es dürfte sich empfehlen, besonders hochbeanspruchte Ventildfedern in dieser Weise zu prüfen, bevor sie dem Betrieb übergeben werden.

Für die Herstellung bequemer ist es die Federn im Einsatz zu härten oder aus nitrirtem Stahl herzustellen. Wie die Erfahrung zeigt, hängen die Festigkeitseigenschaften der kalt gezogenen Drähte auch vom Drahtdurchmesser ab. Man setzt (für d kleiner als etwa 20 mm):

$$\tau = \tau_0 (1 - 0,187 \sqrt[3]{d_{mm}})$$

worin τ_0 die zulässige Torsionsspannung für sehr dünne Drähte ist.

Gummifedern finden eine zunehmende Verwendung bei der Aufstellung von Maschinen. Bis etwa 12 kg/cm² Druckspannung gilt auch für Gummi das Hookesche Gesetz. Luft wird hauptsächlich bei den Fahrzeugreifen als Federung verwendet.

Die durch die Formänderung aufgespeicherte Energie ist bei

$$\text{Zugbeanspruchung} \quad \mathfrak{U}_z = \frac{\sigma^2}{2E} \cdot V, \quad (12.3)$$

$$\text{Biegung gleicher Festigkeit} \quad \mathfrak{U}_b = \frac{\sigma^2}{6E} \cdot V, \quad (12.47 \text{ mit } i = 1/3 \text{ für Kreis})$$

$$\text{Verdrehung (Kreis)} \quad \mathfrak{U}_t = \frac{\tau^2}{4G} \cdot V. \quad (12.56)$$

$$\text{Mit } \tau_{zul} = 0,5 \sigma_{zul} \text{ und } G = \frac{mE}{2(m+1)} = \frac{5}{13}E, \text{ ist } \mathfrak{U}_t = \frac{\sigma^2}{6,15E} V.$$

Bei gleicher Stoßarbeit \mathfrak{U} und bei gleichem Werkstoff (σ_{zul}) gibt die Zugbeanspruchung das kleinste Stabvolumen.

26.1. Zug- resp. Druckfeder.

Die gute Werkstoffausnützung dieser Federart wird bei der Ringfeder verwertet. Diese besteht aus einzelnen Außen- und Innenringen, die mit Doppelkegelflächen ineinandergreifen (Abb. 26.3). Bei Belastung in der Längsrichtung der Feder werden die Innenringe radial zusammengedrückt, die Außenringe gedehnt. Die Feder kann nur soweit zusammengeschoben werden, bis die benachbarten Stirnflächen aufeinander stoßen, so daß eine Überlastung ausgeschlossen ist.

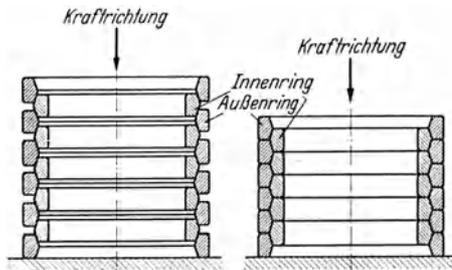


Abb. 26.3. Ringfeder.

Die radiale Belastung der Ringe wird aus der axialen Federkraft in ähnlicher Weise berechnet wie bei Keilen. Die Spannung in den meist dünnwandigen Ringen folgt aus der Kesselformel. Der Einfluß der Reibung ist sehr groß. Um Selbsthemmung der Feder zu vermeiden muß der Kegelwinkel mit der Federachse größer als der Reibungswinkel sein. Bei einem Kegelwinkel von 15° wird etwa $2/3$ der Stoßarbeit durch Reibung vernichtet. Die Ringfeder ist demnach eine ausgezeichnete Pufferfeder. Im Dauerbetrieb muß deshalb für die Ableitung der Reibungswärme durch Luft- oder Ölkühlung gesorgt werden. Die Ringfeder wird bei Flugzeugen als Federbeine verwendet¹.

26.2. Biegefeder.

Blattfedern. Um bei geringem Werkstoffverbrauch eine große Formänderungsarbeit aufspeichern zu können, wird ein Körper gleicher Biegespannung mit rechteckigem Querschnitt verwendet. Die Form eines Körpers gleicher Biegespannung ist durch die Gleichung

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} e_x = \text{konstant festgelegt (S. 47)}. \text{ Für rechteckige Querschnitte ist } J_x/e_x = \frac{1}{6} b_x h_x^2.$$

¹ Richter, E.: Ringfederbeine für Flugzeuge. Z. VDI 83 (1939) S. 652/54.

Wenn der Körper in zwei Punkten unterstützt und in der Mitte durch einen Einzelkraft P belastet wird, so ist: $M_x = \frac{P}{2} x$, und $\sigma_{\max} = \frac{6 P x}{2 b_x h_x^2} = \text{konstant}$, so daß

$$b_x h_x^2 = K \cdot x \tag{26.1}$$

sein muß. Diese Gleichung mit zwei Unbekannten reicht zur eindeutigen Bestimmung des Körpers gleicher Biegespannung nicht aus, so daß irgendeine weitere, beliebige Bedingung aufgestellt werden kann, z. B. $h_x = \text{konst.}$, dann ist $b_x = k_1 x$ (Abb. 26.4) oder $b_x = \text{konst.}$, dann

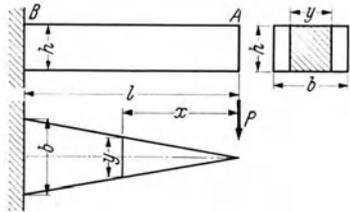


Abb. 26.4. (Aus Winkel, Festigkeitslehre.)

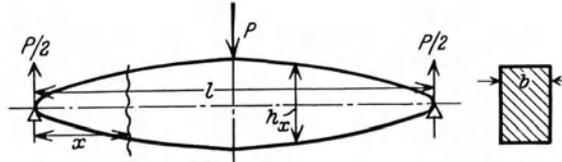


Abb. 26.5.

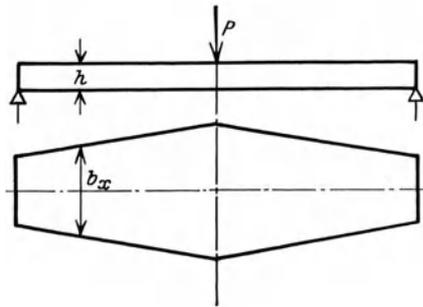


Abb. 26.6.

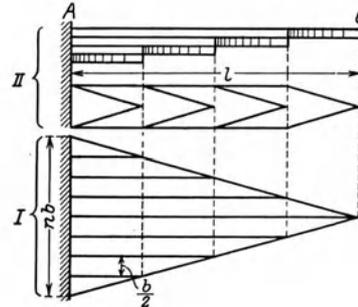


Abb. 26.7. (Aus Winkel.)

Abb. 26.4 bis 7. Grundformen gleicher Biegespannung für Blattfedern.

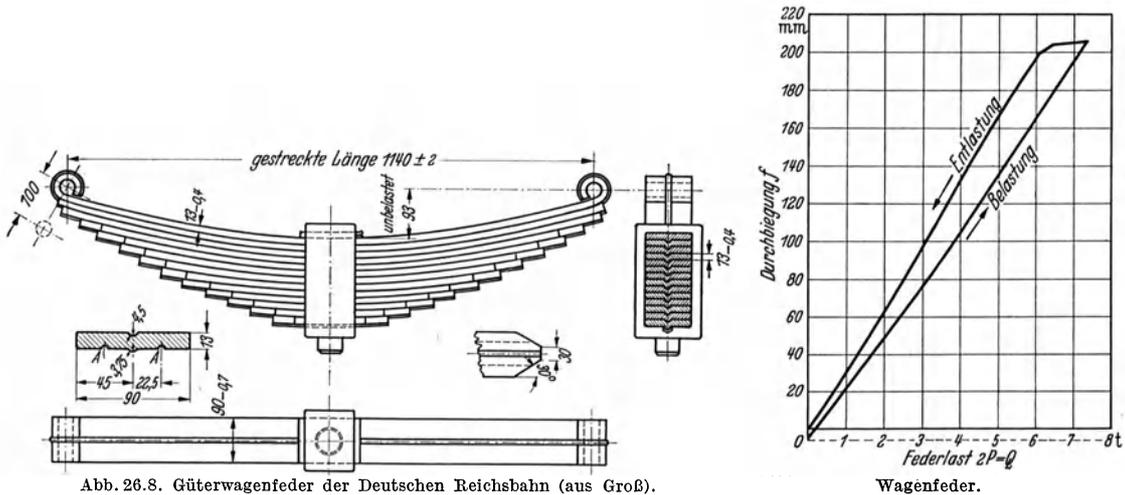


Abb. 26.8. Güterwagenfeder der Deutschen Reichsbahn (aus Groß).

Wagenfeder.

ist $h_x^2 = k_2 x$ (Abb. 26.5). Bei der praktischen Ausführung kann die Feder natürlich nicht in eine Spitze auslaufen, sondern sie muß eine endliche Breite an den Enden erhalten (Abb. 26.6); die oben festgelegte Beziehung $b_x = k_1 x$ trifft dann nicht mehr zu.

Bei großer Formänderungsarbeit wird die Breite b_x sehr groß (Abb. 26.7). Wenn man aber die Dreieckfeder I in eine gerade Anzahl ($2n$) gleich breiter Streifen von der Breite $b/2$ zerschneidet und diese Streifen so zusammenfügt, daß sie den Körper II bilden, so erhält man ein Blattfederwerk, das dieselbe Tragfähigkeit hat wie die Dreieckfeder, wenn dafür gesorgt wird, daß die einzelnen Blätter bei der Biegung frei (also ohne Reibung) übereinander gleiten, aber sich nicht voneinander entfernen können.

Diese Überlegungen gelten auch, wenn die einzelnen Blätter verschieden dick sind; für die Berechnung der Biegespannung ist einfach die Summe der Widerstandsmomente der einzelnen Blätter einzusetzen. Solche geschichtete Blattfedern kommen hauptsächlich bei Eisenbahnwagen (Abb. 26.8) und bei Kraftwagen vor. Dehnungsmessungen an Eisenbahnfedern (mit sechs gleichdicken Blättern) und mit einer Kraftwagenfeder (mit elf teilweise verschieden dicken Blättern) ergaben eine recht gute Übereinstimmung der gemessenen mit den berechneten Spannungen¹, obschon erhebliche Reibungen zu überwinden sind. Abb. 26.9 zeigt, daß Belastungs- und Entlastungslinie der Blattfeder nicht zusammenfallen, sondern infolge der Reibung eine Schleife bilden. Da die Reibung bei der Be- und Entlastung gleich groß ist, liegt die Kennlinie für die reibungsfreie Feder genau in der Mitte.

Die Tragfedern der Schienenfahrzeuge werden in ihrer Mitte durch einen Bund aus weichem Stahl zusammengehalten (Abb. 26.8), der unter dem allseitigen Druck einer hydraulischen Presse warm aufgeschrumpft wird. Die einzelnen Blätter haben einen gerippten Querschnitt (DIN 1570). Die auf die Druckseite zu legende Rippe greift mit etwas Spiel in die Rille des folgenden Blattes ein und sichert die einzelnen Blätter gegen Querverschiebungen. Das Trägheitsmoment des gerippten Querschnittes ist etwa 2¹/₂% größer als beim Rechteck; die Widerstandsmomente sind praktisch gleich groß.

$$\text{Aus der Gleichung der elastischen Linie: } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_x}{J_x E} \quad (12.12)$$

$$\text{und aus der Biegegleichung: } M_x = \frac{J_x}{e_x} \sigma_{\max} \quad (12.10)$$

$$\text{folgt} \quad \frac{1}{e} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2 \sigma_{\max}}{h \cdot E}, \quad (26.2)$$

d.h. die elastische Linie ist für ein Körper gleicher Biegespannung immer ein Kreisbogen, wenn $h = \text{konstant}$ ist (Dreieckfeder, auch geschichtet). Durch Integration erhält man:

$$y = \frac{2 \sigma_{\max}}{h \cdot E} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 werden gleich Null, wenn der Koordinatenanfangspunkt in die Mitte der beidseitig frei drehbar gelagerten Feder verlegt wird, weil dort sowohl dx/dy als x gleich Null wird. Die größte Durchbiegung f erhält man für $x = l/2$:

$$f = \frac{\sigma_{\max}}{E} \cdot \frac{l^2}{4 h}. \quad (26.3)$$

Die geschichtete Dreieckfeder läßt sich genau nicht ausführen, da das freie Federende eine endliche Breite haben muß; man wählt deshalb die Trapezform (Abb. 26.6). Die Abweichung vom Dreieck kann durch Einführung eines Beiwertes K berücksichtigt werden²:

$$f = K \frac{\sigma_{\max}}{E} \cdot \frac{l^2}{4 h}. \quad (26.4)$$

Für $b'/b = 0$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
ist $K = 1$	0,88	0,80	0,75	0,7	² / ₃

worin b'/b das Verhältnis der kleinsten zur größten Blattbreite ist.

Zahlenbeispiel 27.1. Die Tragfeder eines Eisenbahnwagens ist bei leerem Wagen mit $P_1 = 3575$ kg und bei vollbesetztem Wagen mit $P_2 = 5575$ kg belastet. Die zulässige Höchstspannung ist zu 70 kg/mm², die zulässige Federung $f_2 - f_1$ zu 54 mm und die größte Federbreite $b = 12$ cm (DIN 1570) vorgeschrieben. Welche Abmessungen erhält die Feder?

Die Normen lassen bei 12 cm Breite 1,3 und 1,6 cm Dicke h zu. Der Konstrukteur wird $h = 16$ mm wählen um eine kleinere Blattzahl zu erhalten. Aus Gl. (4) folgt

$$f_2 = K \cdot \frac{70}{2 \cdot 10^4} \cdot \frac{l^2}{4 \cdot 1,6}. \quad (a)$$

Der unbekannte Wert f_2 kann aus der Gleichung

$$P_2/P_n = f_2/f_n \quad \text{zu} \quad f_2 = f_n \cdot P_2/P_n \quad (b)$$

berechnet werden, so daß aus Gl. (a): $54 \cdot \frac{5575}{2000} = K \cdot \frac{70}{8 \cdot 10^4} \cdot \frac{l^2}{1,6}$

mit dem gewählten Wert $K = 0,84$ für $b'/b = 0,3$ die Federlänge $l = 180$ cm folgt. Aus

¹ Lehr, E. und A. Wiegand: Spannungsverteilung in Federn. Forsch. 8 (1937) S. 161/68.

² Witzig, K.: Zur Berechnung von Tragfedern für Eisenbahnfahrzeuge. Schweiz. Bauztg. 72 (1918) S. 249.

der Biegegleichung $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\max}} = \frac{P \cdot l/4}{n b h^2/6}$ folgt weiter:

$$P = \frac{2}{3} \sigma_{\max} \frac{b h^2}{l} n \quad \text{oder} \quad 5575 = \frac{2}{3} \times 7000 \times \frac{12 \cdot 1,6^2}{188} n \quad \text{und} \quad n = 7,3.$$

Da die Blattzahl eine ganze Zahl sein muß, wählt man $n = 7$ und muß gleichzeitig um die vorgeschriebene Spannung nicht zu überschreiten die Federlänge, z. B. auf $l = 180$ cm kürzen.

Gewundene Biegefedern sind Stäbe von meist rechteckigem oder kreisförmigem Querschnitt, deren Mittellinie nach irgendeiner räumlichen oder ebenen Kurve gekrümmt ist. Die vorherrschenden Ausführungsformen sind die nach der archimedischen Spirale in einer Ebene gekrümmte und die zylindrische Schraubenfeder. Wird auf die Federspindel das Drehmoment M_d ausgeübt, so dreht sie sich gegen den Biege widerstand der Feder um den Winkel $\Delta\varphi$.

Die ebene Spiralfeder (Abb. 26.10) wird durch die Kraft P auch auf Biegung beansprucht. Solange die Banddicke der stark gekrümmten Feder klein im Verhältnis zum Krümmungsradius ist, so darf $Z = J$ gesetzt werden.

Aus der Gleichung der elastischen Linie $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{M_x}{J E} = \frac{P y}{J E}$ folgt durch Integration:

$$\Delta\varphi = \frac{P}{J E} \int y ds,$$

worin $\int y ds$ das statische Moment der Mittellinie in bezug auf die Richtungslinie der Kraft P ist, d. h. gleich der Länge der Mittellinie l mal dem Abstand des Schwerpunktes. Der Schwerpunkt der Mittellinie fällt mit dem Mittelpunkt der Feder zusammen, so daß $\int y ds = l \cdot p$ ist. Damit wird der Verdrehungswinkel

$$\Delta\varphi = \frac{P \cdot p \cdot l}{J E}. \tag{26.5}$$

Die aufgespeicherte Formänderungsarbeit ist $\mathcal{U} = M_{\max} \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{(P p)^2 l}{2 J E}$.

Führen wir die größte Spannung $\sigma_{\max} = \frac{2 P p}{J} e$ ein, die in der äußersten Windung diametral der Befestigungsstelle auftritt, so ist:

$$\mathcal{U} = \frac{\sigma_{\max}^2 J}{8 e^2 E} l. \tag{26.6}$$

Für den Rechteckquerschnitt, der günstiger ist als der Kreis, ist $e = h/2$, $J = \frac{1}{12} b h^3$ und

$$\mathcal{U} = \frac{\sigma_{\max}^2 b \cdot h \cdot l}{24 E} = \frac{\sigma_{\max}^2}{24 E} V, \tag{26.7}$$

wenn mit $V = b \cdot l \cdot h$ wieder das Federvolumen bezeichnet wird. Daraus folgt, daß die Formänderungsarbeit nur vom Volumen der Feder abhängig ist und nicht von der Zusammensetzung des Volumens aus den drei Faktoren l , b und h . Die Anzahl Windungen ist demnach gleichgültig, wenn beim Aufwickeln nur darauf geachtet wird, daß die einzelnen Gänge sich nicht berühren; die Feder also „frei atmen“ kann.

Sind beide Enden der Feder fest eingespannt, so kann die Feder eine fast doppelt so große Formänderungsarbeit aufnehmen¹; eine wirklich feste Einspannung ist aber nicht so leicht zu erreichen.

Die gleiche Berechnungsweise gilt für die auf Biegung beanspruchte zylindrische Schraubenfeder.

Tellerfedern (Abb. 26.11) bilden eine sehr kräftige Feder auf kleinem Raum (Pufferfeder); sie werden im allgemeinen in Paaren verwendet. Zur Erreichung einer großen Tragkraft bei kleiner Federung werden mehrere Tellerpaare aufeinander gesetzt und durch Führung in einem Rohr zu einer Säule vereinigt. Bei schwacher Neigung der Teller können sie nach der Theorie der Kreisplatten (Abschn. 14.5) berechnet werden.

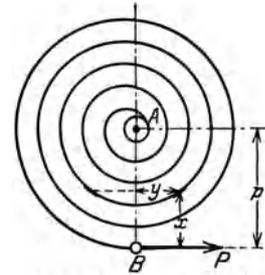


Abb. 26.10. Ebene Spiralfeder (aus Winkel).



Abb. 26.11. Tellerfeder.

26.3 Drehungsfedern.

Ein schraubenförmig gewickelter Draht werde durch zwei Kräfte P , deren Richtung mit der Zylinderachse zusammenfällt, entweder auseinander gezogen oder zusammengepreßt (Schrauben-

¹ van den Broek, J. A.: Spiral springs. Trans. A. S. M. E. (1931) S. 247/63, Paper APM. 53—18.

feder, Abb. 26.12). Schneidet man die Feder an irgendeiner Stelle durch, so müssen die dort übertragenen Spannungen mit der äußeren Kraft P im Gleichgewicht stehen. Bei der Verlegung der Kraft P in den Schwerpunkt des Querschnittes tritt ein Kräftepaar $P \cdot r$ auf. Wenn die Steigung der Schraubenlinie gering ist (was bei fast allen praktischen Ausführungen der Fall ist), so steht die Ebene des Kräftepaares fast senkrecht zur Schraubenlinie, der Draht mit dem Durchmesser a wird dann nur auf Verdrehung beansprucht. Es entsteht eine größte Spannung (im gerade gedachten Draht).

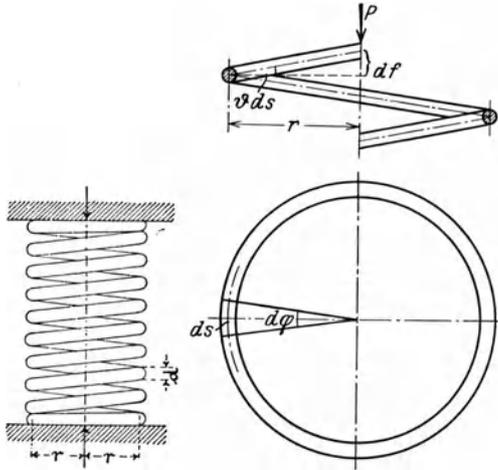


Abb. 26.12. Schraubenfeder. (Aus Winkel.)

Abb. 26.13.

nung (im gerade gedachten Draht).

$$\tau = \frac{Pr}{\frac{\pi}{16} d^3} \approx \frac{5P \cdot r}{d^3}. \quad (26.8)$$

Die Streckung oder die Zusammendrückung der Feder folgt aus dem Verdrehungswinkel ϑ . Durch die Verdrehung eines Längenelementes ds der Feder, gemessen längs der Schraubenlinie (Abb. 26.13) um den Winkel ϑds , entsteht eine vertikale Verschiebung

$$df = r \vartheta ds = r^2 \vartheta d\varphi$$

der Kraft P . Die totale Streckung bzw. Zusammendrückung der Feder erhält man durch die Summierung der Teilverschiebungen über die ganze Federlänge entsprechend dem Winkel $2\pi i$, wenn mit i die Anzahl der Windungen bezeichnet wird.

$$f = \int_0^{2\pi i} r^2 \vartheta d\varphi.$$

Infolge der verschiedenen Formen der Endwindungen (Befestigungen) ist es oft nicht leicht, die richtige Zahl i der wirksamen Windungen zu wählen.

Die Werte von ϑ sind für die gebräuchlichsten Querschnittsformen aus Zahlentafel 12.8 zu entnehmen. Für den kreisförmigen Querschnitt ist mit Gl. (8)

$$\vartheta = \frac{M_d}{\frac{\pi}{32} d^4 G} = \frac{2\tau}{G \cdot d} \quad (26.9)$$

Wenn $r = \text{konst.}$ ist, wird

$$f = \frac{2\tau r^2}{G \cdot d} \int_0^{2\pi i} d\varphi = \frac{4\pi i \tau r^2}{G \cdot d}. \quad (26.10)$$

und nach Einführung von τ aus Gl. (8):

$$f = \frac{64 Pr^3 i}{G d^4}. \quad (26.11)$$

Die Formänderungsarbeit der Feder ist

$$\mathfrak{A} = \frac{\tau^2}{4G} \cdot V. \quad (12.56)$$

Für rechteckige Querschnitte und für kegelförmig gewundene Federn wird auf die Literatur verwiesen.

Diese übliche, vereinfachte Berechnungsweise ist hauptsächlich wegen der Vernachlässigung der Federkrümmung ungenau. Die Torsionsspannungen sind dann nicht mehr zentrisch symmetrisch über den Querschnitt verteilt, sondern sie verlaufen in nicht konzentrischen Kreisen. Ist die Schraubenlinie steilgänglich, so treten zu der Torsionsbeanspruchung noch Biegespannungen hinzu. Die exakte Lösung von O. Göhner, welche zeigt, daß die Vereinfachungen von E. Honnegger und von A. M. Wahl durchaus zulässig sind, kann durch Einführung eines Faktors K auf die übliche Lösung zurückgeführt werden:

$$\tau_{\max} = K \cdot \frac{M_d}{W_t} \quad (26.12)$$

Die Korrekturfaktoren K_1 und K_2 sind in den Abb. 26.14 u. 15 (nach Bergsträßer) eingetragen. Sie zeigen, daß die Torsionsspannung für kleine Werte von r/a etwa 60% größer wird als aus der üblichen Gleichung (8) folgt. Die Formänderung dagegen wird durch die Krümmung nur unwesentlich beeinflusst. Für rechteckige Querschnitte hat G. Liesecke¹ Diagramme aufgestellt.

¹ Z. VDI 77 (1933) S. 425 und 892.

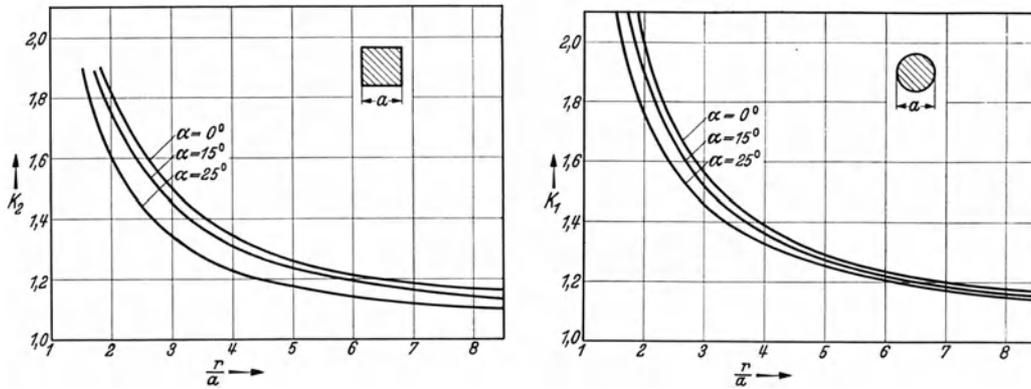


Abb. 26.14 u. 15. Korrekturfaktoren K zur Berechnung von τ_{max} in Schraubenfedern. Steigungswinkel = α , Mittlerer Krümmungsradius = r , Drahtstärke = a .

26.4. Parallel- und Hintereinanderschaltung von Federn.

Es kommt vielfach vor, daß eine Kraft gleichzeitig auf mehrere Teile wirkt. Die Berechnung der Formänderungen, resp. der Teilkräfte auf die einzelnen Teilen erfolgt dann am einfachsten in folgender Weise. Als Maß für die Starrheit der Feder, dient die Einheitskraft¹ C , das ist die Kraft in kg (oder das Moment in kg·cm) für die Einheit der Formänderung.

Für Zugbeanspruchung ist $C = P/\lambda$ oder $P = C \cdot \lambda$
 Für Biegung $C = P/y$ „ $P = C \cdot y$
 Für Verdrehung. $C = M_d/\gamma$ „ $M_d = C \cdot \gamma$

Bei Parallelschaltung (Abb. 26.16) sind die Formänderungen der einzelnen Körper gleich groß.

Da $\lambda = \frac{P_1}{C_1} = \frac{P_2}{C_2}$ und $P = P_1 + P_2 = C\lambda$ ist, muß $C_1\lambda + C_2\lambda = C\lambda$, also

$$C = C_1 + C_2 \quad (26.13)$$

sein. Bei Hintereinanderschaltung sind die Einzelteile durch die gleiche Kraft beansprucht (Abb. 26.17). Aus $P = C\lambda$ und $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$ folgt

$$\frac{P}{C_1} + \frac{P}{C_2} = \frac{P}{C}$$

oder $\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C} \quad (26.14)$

Schrifttum.

Für die Literatur bis Ende 1937 sei auf das Schrifttumverzeichnis im Buch von S. Gross und E. Lehr verwiesen. Die nachfolgenden Angaben ergänzen dieses Verzeichnis durch die neuesten Veröffentlichungen.

Gross, S. und E. Lehr: Die Federn, ihre Gestaltung und Berechnung. VDI-Verlag 1938. — Gross, S.: Berechnung und Gestaltung der Federn. Berlin: J. Springer 1939 gibt einen für den praktischen Gebrauch bestimmten Auszug aus dem vorgenannten Buch, unter Weglassung der theoretischen Ableitungen.

Gummifedern.

Thum, A. und K. Oeser: Gummifederung für ortsfeste Maschinen. Mitt. MPA der T. H. Darmstadt. VDI-Verlag 1935, mit Literaturverzeichnis. — Kremer, Ph.: Gummi in Rädern für Schienenfahrzeuge. Z. VDI 77 (1933) S. 955/58. — Wiessner, P.: Neuere Anwendungsgebiete für Gummi im Maschinenbau. Glasers Ann. 121 (1937) S. 88/89. — Riediger, B.: Federnde Lagerung von V- und Sternmotoren. Z. VDI 82 (1938) S. 315/20. — Keys, W. C.: Rubber springs. Mech. Engng. 59 (1937) S. 345/49. — Downie, J. F. Smith: Rubber mountings. J. appl. Mech. 5 (1938) S. 13/23. — Hull, E. H.: The use of rubber in vibration

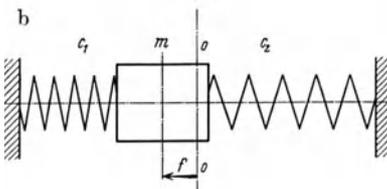
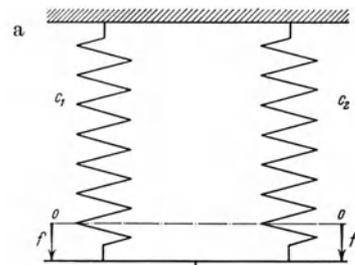


Abb. 26.16. Parallelschaltung von Federn (gleiche Formänderung).

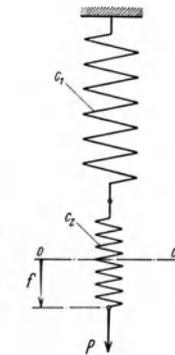


Abb. 16.17. Hintereinanderschaltung von Federn (gleiche Kraft).

¹ Es wird dafür auch die unklare Bezeichnung „Federkonstante“ verwendet.

isolation. *J. appl. Mech.* 4 (1937) S. 109/14. — Hirschfeld, C. H. und E. H. Piron: Rubber cushioning devices. *Trans. A. S. M. E.* 59 (1937) S. 471/91.

Verdrehfedern.

Adams, L. E.: Report of the Springer Research Committee of the Departement of scientific and industrial Research. (H. M. Stationary office, London, Dezember 1931). — Berry, W. R.: Practical problems in spring design. *Proc. Inst. mech. Engr.* 139 (1938) S. 431/524. — Sayre, M. F. und A. V. de Forest: New spring formulas and new materials für precision spring scales. *Trans. Amer. Soc. mech. Engr.* 58 (1936) S. 379/87. — Vogt, R. F.: Stress and deflection of helical springs *Trans. Amer. Soc. mech. Engr.* 58 (1936) S. 467/75. — Wahl, A. M.: Analysis of effect of wire curvature on allowable stresses in helical springs. *J. appl. Mech.* 6 (1939) S. 25/30. — Edgerton, C. T.: Abstract of progress report No. 3 on heavy helical springs. *Trans. Amer. Soc. mech. Engr.* 59 (1937) S. 609/16. — Tatarinoff, V.: Spring design carts for cylindrical and conical springs. *Amer. Mach., Lond.* 81 (1938) S. 641/42 und 649/51. — Conical springs made from strip of rectangular section. *Machinery, Lond.* 50 (1937) S. 137/41. — Wood, J. K.: Simplifying helical spring design. *Amer. Mach., Lond.* 80 (1936) S. 314/15E. — Jennings, J.: The maximum capacity of helical springs. *Machinery, Lond.* 51 (1937) S. 109/11. — Wunderlich, F.: Zulässige Beanspruchung von Schraubenfedern. *Z. VDI* 80 (1936) S. 787/89. — Göhner, O.: Zur Berechnung des gebogenen oder gedrehten Ringstabes mit Kreisquerschnitt und der zylindrischen Schraubenfeder. *Ing.-Arch.* 9 (1938) S. 355/61. — Burdick, W. E., F. S. Chaplin und W. L. Sheppard: Deflection of helical springs under transverse loadings. *Trans. Amer. Soc. mech. Engr.* 61 (1939) S. 623/32. — Edgerton, C. T.: Stresses in helical springs; present status of the problem. *Trans. Soc. Amer. mech. Engr.* 61 (1939) S. 643/49.

3. Wellen.

31. Gerade Wellen.

Wellen sind zylindrisch gedrehte Körper. Kalt gezogene Wellen eignen sich nur für untergeordnete Zwecke, da sie sich verziehen, wenn Keilbahnen eingefräst werden. Nach Versuchen von Bach war

eine kalt gezogene Welle	50 · 3420	um	3,1	mm	krumm	nach	Einfräsen	der	Nute.
„ „ „	70 · 3420	„	1,3	„	„	„	„	„	„
„ gedrehte	70 · 3420	„	0,37	„	„	„	„	„	„

Auch die gedrehte Welle verzieht sich demnach etwas, so daß es als praktische Regel gilt, den letzten Schlichtspan nach dem Einfräsen der Nute abzunehmen. Kaltgezogene Wellen darf man nur dort verwenden, wo die Riemenscheiben durch Klemmen oder mit Hohlkeilen befestigt werden.

Hohle Wellen mit dünner Wandstärke (Rohrwellen) eignen sich besonders für große Lagerentfernungen (z. B. für Transportschnecken) und überall dort, wo Gewichtersparnis notwendig ist. Das Ausbohren auf $d_i = 0,5 d_a$ verringert das Widerstandsmoment nur um rd. 6%, das Gewicht dagegen um 25%.

Man unterscheidet Achsen und Wellen; erstere werden vorwiegend auf Biegung (Eisenbahnachse, aber auch Straßenbahnachse, mit Drehmoment), letztere sowohl auf Biegung als Verdrehung beansprucht.

Zum Stützen der Welle dienen die Lager; der im Lager ruhende Wellenteil wird Zapfen genannt. Je nachdem die Welle in der Quer- oder in der Längsrichtung gestützt wird, unterscheidet man: Querlager (Traglager, Radiallager) und

Längslager (Spurlager, Drucklager, Stützlager, Axiallager).

Wenn Zapfen und Lagerkörper sich direkt berühren, spricht man von Gleitlagern, in Gegenüberstellung zu den Wälzlagern, bei denen die Auflagerkräfte durch eine Reihe von Kugeln oder Rollen übertragen werden.

Die Berührungsstelle zwischen Zapfen und Lager muß geschmiert werden.

31.1. Festigkeit glatter Wellen.

Für volle runde Wellen folgt die Biegespannung σ_b aus der Gleichung:

$$M_b = 0,1 d^3 \sigma_b, \quad (31.1)$$

die Torsionsspannung τ aus:

$$M_d = \frac{1}{3} d^3 \tau. \quad (31.2)$$

Meist ist das Drehmoment nicht gegeben, sondern es wird vorgeschrieben, daß die Welle N PS resp. kW bei n Uml./min übertragen soll. Nun ist

Leistung = Drehmoment \times Winkelgeschwindigkeit

und die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\pi n}{30}$. Da $1 \text{ PS} = 75 \text{ mkg/s}$ und $1 \text{ kW} = 102 \text{ mkg/s}$ ist, wird

$$7500 N_{\text{PS}} \text{ kgcm/s} = M_d \cdot \frac{\pi n}{30} = 10200 N_{\text{kW}}$$

$$\left[\text{kg cm}^2 \right] M_d = \frac{7500 \cdot 30}{\pi} \cdot \frac{N_{\text{PS}}}{n} = 71620 \frac{N_{\text{PS}}}{n} = 97310 \frac{N_{\text{kW}}}{n}. \quad (31.3)$$

Mit Hilfe der Momentenfläche für Biegung und Verdrehung läßt sich der Verlauf der Momente über die Welle leicht überblicken. Bei gleichzeitigem Auftreten von Torsion und Biegung an der gleichen Stelle der Welle tritt in der äußersten Faser eine maximale Schubspannung auf:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_b^2 + 4 \tau^2}, \quad (31.4)$$

die für den zähen Werkstoff (St 50 oder St 60) nach der Mohrschen Bruchhypothese als Maß der Beanspruchung gilt.

Nach den Erläuterungen in Abschn. 13.2 hängt der zulässige Wert von τ_{\max} wesentlich davon ab, ob der Spannungszustand ruhend oder wechselnd ist. Die Biegespannung wechselt bei jeder halben Umdrehung der Welle das Vorzeichen, ist bei drehenden Wellen also immer eine wechselnde Beanspruchung. Die Torsionsspannung wechselt mit dem Drehmoment, das z. B. bei den Kolbenmaschinen periodisch veränderlich und bei den rotierenden Maschinen konstant ist. Die in Zahlentafel 31.1 für verschiedene Belastungsfälle zusammengestellten zulässigen Spannungen gelten für glatte, sauber bearbeitete Wellen und nur solange der gefährliche Querschnitt nicht an einer Stelle liegt, wo die Welle abgesetzt ist (Kerbwirkung) oder wo Teile aufgekeilt oder aufgeschumpft sind, also nicht in der Nähe der Kraftangriffsstellen.

Zahlentafel 31.1. Zulässige Spannungen τ_{\max} in kg/mm² für glatte Wellen.

Drehmoment M_d	Werkstoff	Torsionsspannung überwiegt		Biegespannung überwiegt	
		Belastungswechselzahl/Lebensdauer			
		sehr klein	sehr groß	sehr klein	sehr groß
konst.	St 50	12 kg/mm ²		12	6
	St 60	14 „		14	7
periodisch ver- änderlich	St 50	12	6	12	6
	St 60	14	7	14	7

Zwischen sehr kleinen und sehr großen Belastungswechselzahlen muß die zulässige Spannung aus dem Verlauf der Wöhlerkurve geschätzt werden. Oft muß mit Rücksicht auf die zulässige Formänderung die Spannung weit unterhalb dieser zulässigen Grenzen bleiben. Um das von Anfang an zu

berücksichtigen nahm man früher τ_{zul} nur zu 1,8 kg/mm² an und vernachlässigte dafür die Biegebeanspruchung. Aus Gl. (2 und 3) folgt dann:

$$d_{\text{cm}} = 14,4 \sqrt[3]{\frac{NPS}{n}} \quad (31.5)$$

welche Gleichung noch oft für Überschlagsrechnungen verwendet wird, aber im allgemeinen viel zu dicke Wellen gibt.

Die Auflagerstellen (Zapfen) sind noch besonders zu berechnen. Nimmt man eine gleichmäßig verteilte Lagerbelastung an (Abb. 12.38), so ist die Biegespannung in der Entfernung η von der Biegeachse:

$$\sigma_b = \frac{M_b}{J} \eta = \frac{P \cdot l/2}{\pi r^4/4} \cdot r \sin \varphi = \frac{2Pl}{\pi r^3} \sin \varphi.$$

Die Schubspannung am Umfang des kreisförmigen Querschnitts ist nach Gl. (12.40):

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{P}{f} \cos \varphi = \frac{4P}{3\pi r^2} \cos \varphi = \frac{2Pl}{\pi r^3} \cdot \frac{2r}{3l} \cos \varphi.$$

und die maximale Schubspannung nach Gl. (4):

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_b^2 + 4\tau^2} = \frac{1}{2} \sigma_{\text{zul}} = \frac{Pl}{\pi r^3} \sqrt{\sin^2 \varphi + \left(\frac{4r}{3l} \cos \varphi\right)^2}.$$

Sobald $\sin^2 \varphi + \left(\frac{4r}{3l} \cos \varphi\right)^2 > 1$ ist, tritt die größte Beanspruchung nicht mehr in der äußersten Entfernung von der Biegeachse auf. Das ist der Fall, wenn

$$\frac{4r}{3l} > 1 \quad \text{oder} \quad l < \frac{2}{3} d \quad \text{ist.}$$

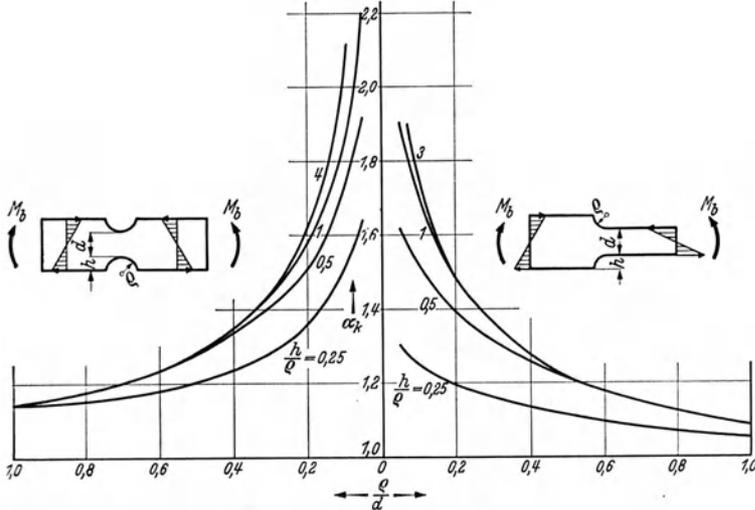
Solche kurzen Zapfen kommen selten vor.

Mit Rücksicht auf die Passungen (Sitze) ist es zweckmäßig, die Wellendurchmesser weitgehend zu normen; die Normzahlen (evtl. leicht gerundet) bilden die richtige Grundlage für die zweckmäßige Abstufung.

31.2. Abgesetzte Wellen.

Ist der Wellendurchmesser nicht konstant, so treten an den Übergangsstellen Spannungserhöhungen auf, die nach der elementaren Festigkeitslehre nicht berechnet werden können. In Abschn. 16 sind die Grundlagen für die Berechnung solcher „Formgebungselemente“ erläutert. Auch wird auf das Schrifttumverzeichnis (Abschn. 16.5) verwiesen. Die Spannungserhöhungen sind für Biege- und für Verdrehbeanspruchung verschieden.

Formziffer für Biegebeanspruchungen. Die auf Grund von photoelastischen Untersuchungen gefundenen Formziffern bei plötzlichen Querschnittsänderungen sind (nach einer Zusammenstellung der Unterkommission für Werkstoffbeanspruchung bei der Amer. Soc. Mech. Eng. in Abb. 31.1 eingetragen. Sie gelten für ebene Spannungszustände, und stimmen gut überein mit den theoretischen Werten von Neuber (Abb. 31.1 u. 2), nach welchen auch eine Abhängigkeit von den Stababmessungen (insbesondere bei kleinen Stäben) vorhanden ist. Wenden



31.1. Formziffer α_k für Biegung (nach Frocht, Flachstäbe).

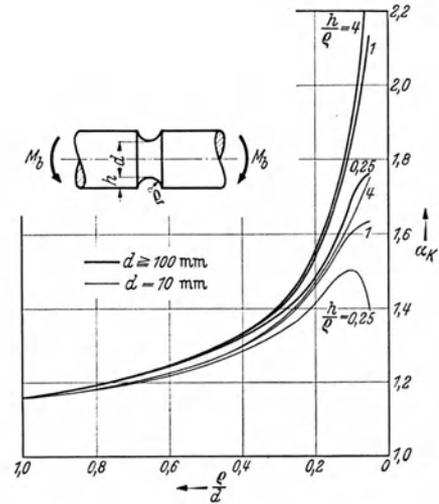


Abb. 31.2. Formziffer α_k für Biegung (nach Neuber)

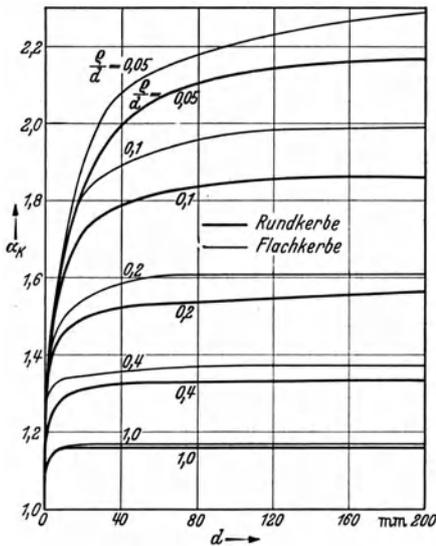


Abb. 31.3. Formziffer für Biegung (nach Neuber).

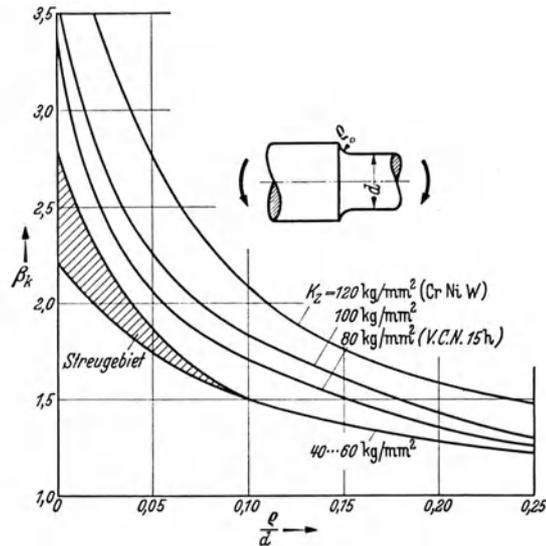


Abb. 31.4. Kerbwirkungszahlen β_k für Biegung von abgesetzten Wellen (nach Lehr).

wir sie auch bei der räumlichen Kerbwirkung der Wellen an, so liegt darin ein kleiner Sicherheitszuschlag von etwa 5% (vgl. Abschn. 16.4). Diese Formziffern gelten für reine Biegung durch Momente, die in genügender Entfernung von den Kerbstellen wirken, eine Voraussetzung, die bei den Wellen nicht zutrifft, da die biegenden Kräfte oft sehr nahe an den Kerbstellen angreifen. In solchen Fällen wird die Formziffer sicher größer; Versuche darüber liegen aber zur Zeit nicht vor. Andererseits liegt eine weitere Sicherheit darin, daß bei den zähen Wellenstählen (St 50 oder St 60) eine Abflachung der Spannungsspitzen zu erwarten ist.

Wenn wir annehmen, daß beide entgegengesetzt gerichteten Einflüsse (Kraftwirkung in der Nähe der Kerbe und Spannungsabflachung bei zähen Werkstoffen und bei räumlicher Kerbwirkung) sich gegenseitig ausgleichen, dann können die in Abb. 31.1 dargestellten Formziffern

auch als Kerbwirkungszahlen β_k der abgesetzten Wellen gelten. Sie liegen dann für diesen Werkstoff etwas höher als die von E. Lehr¹ auf Grund von Versuchen vorgeschlagenen Werte von β_k (Abb. 31.4). Etwas Vorsicht bei Kraftangriffstellen in unmittelbarer Nähe der Kerbe scheint gerechtfertigt. A. Thum und F. Wunderlich haben z. B. gefunden, daß die Dauerhaltbarkeit durch einen Bund mit einer in der Praxis üblichen Hohlkehle etwa auf die Hälfte der Dauerhaltbarkeit des glatten Stabes sinkt, α_k also gleich 2 ist.

Formziffer für Verdrehbeanspruchungen. Die aus der Näherungsgleichung von R. Sonntag berechneten Formziffern für abgesetzte resp. eingedrehte Wellen sind in Abb. 31.5 und 31.6 eingetragen; sie stimmen nicht befriedigend überein mit dem in den gleichen Abbildungen eingezeichneten Versuchs-

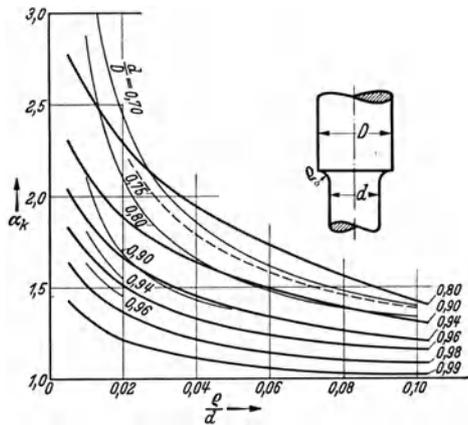


Abb. 31.5. Formziffer α_k für Verdrehung.
 — Versuche der MPA. Darmstadt.
 — nach Sonntag.
 - - - nach Willers.

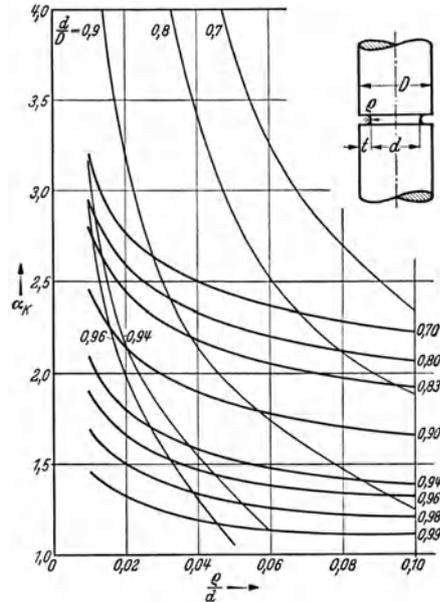


Abb. 31.6. Formziffer α_k für Verdrehung.
 — Versuche MPA. Darmstadt.
 — nach Sonntag.

werte der MPA. Darmstadt (Prof. Thum), liegen aber höher als die aus Drehschwingungsversuchen abgeleiteten β_k -Werte von W. Herold für zähe Werkstoffe (Abb. 31.7). Aus den gleichen Überlegungen wie bei Biegung ist es empfehlenswert die α_k -Werte bei der Berechnung der Wellen aus zähem Werkstoff zu verwenden.

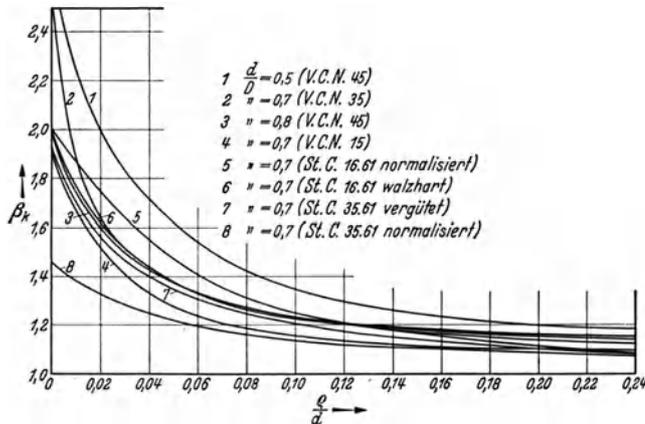


Abb. 31.7. Drehschwingungsversuche an abgesetzten Wellen (nach Herold).

Die günstigste Gestalt der Hohlkehle bei verdrehbeanspruchten Wellen haben H. Deutler und A. Havers untersucht; sie empfehlen an Stelle des kreisförmigen einen elliptischen Übergang mit allmählich zunehmendem Radius, der allerdings schwieriger herzustellen ist. Wenn genügend Platz vorhanden ist, scheint der ko-



Abb. 31.8.

nische Übergang am besten, für welchen bei $\alpha = 15^\circ$ resp. 30° , $\alpha_k = 1,13$ resp. $1,38$ für den ebenen Spannungszustand ist (vgl. S. 114); für den räumlichen Spannungszustand bei kreisförmigen Wellen sind die Formziffern noch etwa 5% kleiner. Wesentlich ist, daß der Krümmungsradius an der Übergangsstelle allmählich zunimmt, so daß (wenn wenig Platz vorhanden ist) die in Abb. 31.8 dargestellte Übergangsform dem Kreisbogen vorzuziehen ist.

¹ Maschinenelemente-Tagung, Aachen 1935, S. 21. VDI-Verlag.

Ähnlich wie die Dauerfestigkeit glatter Wellen durch Oberflächendrücken erhöht werden kann, kann auch die Kerbwirkung abgesetzter Wellen dadurch bedeutend gemildert werden. Das Kaltwalzen der Oberfläche stellt nach den bisherigen Untersuchungen das beste Mittel zur Steigerung der Dauerhaltbarkeit von Kerbstellen dar und übertrifft in Wirkung die konstruktiven Maßnahmen. Die festigkeitssteigernde Wirkung beruht darauf, daß durch das Kaltwalzen günstige Druckvorspannungen und eine prägepolierte Oberfläche erzeugt werden. Sie ist abhängig vom Rollendruck (Abb. 31.9 u. 31.10) und kann so bedeutend sein, daß der Bruch nicht mehr an der Kerbstelle, sondern im glatten Teil der Welle auftritt.

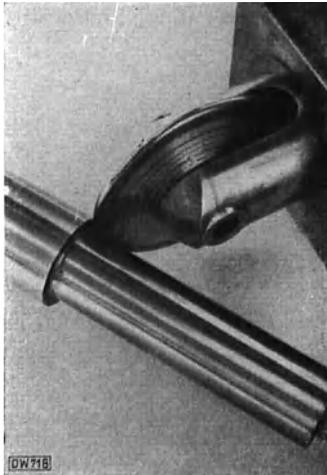


Abb. 31.9. Kaltverformen einer Hohlkehle mit Profilrolle.

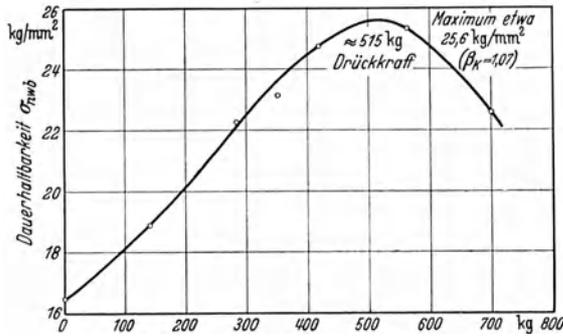


Abb. 31.10. Steigerung der Dauerhaltbarkeit durch Kaltwalzen der Bundübergänge (St. C. 35.61, $\sigma_{wb} = 27,5 \text{ kg/mm}^2$).

31.3. Einfluß der befestigten Teile.

An Hinweisen auf die gefährliche Wirkung von zusätzlichen Kräften an Einspannstellen, aufgekeilten oder aufgeschrumpften Naben usw. (z. B. bei den Eisenbahnachsen) hat es nicht gefehlt. A. Thum und F. Wunderlich haben wohl zuerst diese Frage durch systematische Versuche geklärt und gefunden, daß an einer Einspannstelle die Dauerhaltbarkeit im Durchschnitt auf die Hälfte der Dauerhaltbarkeit des glatten Stabes sinken kann. Drei Hauptfaktoren spielen dabei eine Rolle:

1. die Spannungserhöhung durch Kerbwirkung,
2. die Spannungserhöhung durch den Preßsitz (Abschn. 24) und
3. die Reiboxydation.

Keilbahnen bilden eine un stetige Querschnittsänderung, die beim Scheibenfräser (Auslaufkeil, Abb. 22.5a) weniger scharf ist als bei den Fingerfräsernuten (Abb. 22.5b), die in der Praxis oft bevorzugt werden, da die Einlegfeder dann nicht mehr durch Verstiftung gesichert werden muß. Nach Versuche der MPA. Darmstadt (Prof. A. Thum) an 14 bis 18 mm dicken Stäben wird die Dauerfestigkeit durch die Keilverbindung in folgender Weise geschwächt ¹:

Glatter Stab (St 50.11)	$\sigma_{wb} = 24,5 \text{ kg/mm}^2$
Auslaufkeilnut ohne Keil und Nabe	= 19,5 „
Paßfederkeilnut ohne Keil und Nabe	= 14,5 „
Einspannwirkung der Nabe, ohne Keilnut und Keil	= 13,0 „
Einspannwirkung mit Keilnut und Keil	= 9,5 bis 10,5 kg/mm ² .

Die Einspannwirkung ist also bei Keilverbindungen von überragendem Einfluß. Es ist demnach durchaus gerechtfertigt Paßfeder vorzuziehen, wenn das Drehmoment ohne Keilwirkung, also lediglich durch die Seitenflächen übertragen werden kann (z. B. bei Kupplungen, Riemenscheiben oder Zahnräder auf Motorwellen usw.).

Zahlenbeispiel 31.1. Berechnung einer Eisenbahnradachse (D-Zug-Drehgestell). Leergewicht des abgefederten Teils des Wagens = 43 t, Nutzlast = 12 t, so daß auf zwei Drehgestelle = 4 Achsen 55 t.

Für die Berechnung bestehen folgende behördliche Vorschriften ²:

Berechnungsvorschrift I. Achswellen für Personen-, Post- und Gepäckwagen, sowie Tender, müssen in Achsschaft und Achsschenkel mit mindestens 9facher Sicherheit, im Nabensitz mit mindestens 11 facher Sicherheit berechnet werden. Hierbei muß die auf Mitte Achsschen-

¹ Maschinenelemente-Tagung Aachen, S. 29, VDI-Verlag 1936.

² Hütte III, 26. Aufl. S. 987.

kel wirkende ruhende Last zugrunde gelegt werden. Als Hebelarm für den Nabensitz ist der Abstand der Achsschenkelmittel von der Laufkreisebene anzunehmen.

Werkstoff: St 50.11 mit $\delta_5 = 22\%$ bzw. St 60.11 mit $\delta_5 = 20\%$ für Lokomotiv-Kropfachsen. Die zulässige Biegespannung wird demnach: für die Nabe = 455 kg/cm^2 und für den Achsschenkel: = 555 kg/cm^2 .

Auf eine Achse wirkt $Q = 55/4 = 13,75 \text{ t}$. Belastungs- und Momentenfläche sind aus Abb. 31.11 a zu entnehmen. $M_{\max} = 6875 \cdot 22,8 = 156\,750 \text{ kg}\cdot\text{cm}$. Der Durchmesser der Nabe ergibt sich dann aus: $\sigma_{\text{zul}} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{156\,750}{0,1 \cdot d^3}$ zu $d = 15,1 \text{ cm}$ (Ausführung 155 mm).

Schenkeldurchmesser aus: $d^3 = \frac{687\,500}{555} = 1239 \text{ cm}^3$ zu $d = 10,8 \text{ cm}$ (Ausführung 115 mm).

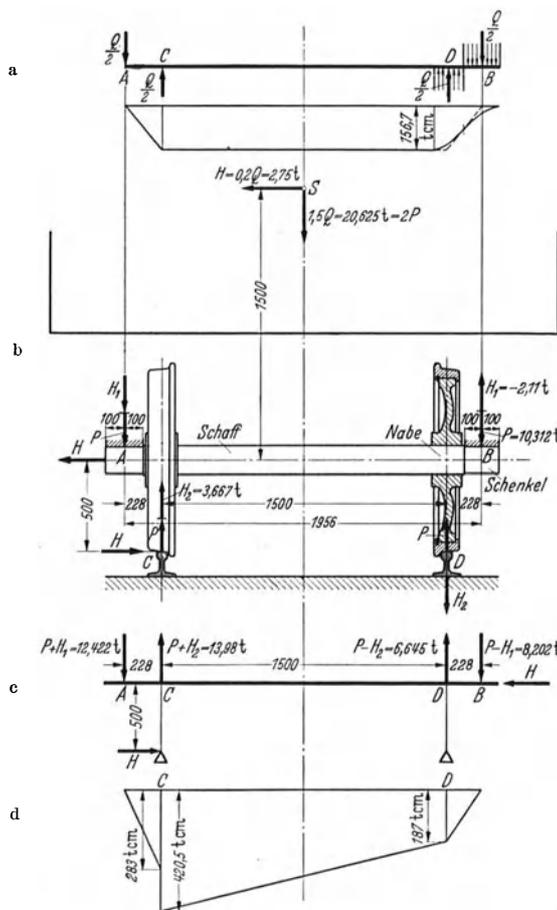


Abb. 31.11. Berechnung einer Wagenachse.

3. Die horizontale, im Schwerpunkt S des Wagens wirkende Kraft H wird (nach der Achsmittle verschoben) durch die Lagerung der Welle in der Längsrichtung aufgenommen. Eine gleichgroße Kraft H wirkt zwischen Spurkranz und Schiene in C . Bei der Verschiebung der Kraft nach der Achsmittle tritt ein Kräftepaar $H \times 150 \text{ cm}$ auf, das durch die in A und B wirkenden vertikalen Kräfte $H_1 = H \cdot 150/195,6 = 2,11 \text{ t}$ aufgenommen wird. Durch die horizontale Kraft H ändern sich aber auch die Raddrücke in C und D um den Betrag $H_2 = H \cdot (150 + 50)/150 = 3,667 \text{ t}$. Es wirkt also in C die Reaktionskraft $P + H_2 = 10,312 + 3 \cdot 667 = 13,98 \text{ t}$ und in D die Reaktionskraft $P - H_2 = 6,645 \text{ t}$.

Mit Hilfe dieser in Abb. 31.11 c eingetragenen Kräfte kann die Momentenfläche Abb. 31.11 d konstuiert werden, wobei zu beachten ist, daß im Punkte C das Moment $h \cdot 50$ sprungweise hinzutritt. Es ist also: $M_c = 12\,422 \cdot 22,8 = 283\,000 \text{ kg}\cdot\text{cm}$, $M'_c = 283\,000 + 2750 \cdot 50 = 420\,750 \text{ kg}\cdot\text{cm}$ und $M_d = 8202 \cdot 22,8 = 187\,000 \text{ kg}\cdot\text{cm}$.

Diese Berechnung ist rein empirisch, da sie keine Rücksicht auf die tatsächlich wirkenden Kräfte nimmt.

Die vorgeschriebenen Werte dürfen auch bei abgenutztem Achsschenkel nicht überschritten werden, so daß die Ausführung etwas kräftiger sein muß, als die Rechnung ergibt. Die zulässige Flächenpressung ist: $p = 20 \div 35 \text{ kg/cm}^2$, wobei 20 kg/cm^2 für die schnellaufende Eisenbahnradachsen zu nehmen ist.

Berechnungsvorschrift II berücksichtigt die im Wagenlauf auftretenden Kräfte, indem wegen den senkrechten Schienenstößen mit dem 1,5fachen der ruhenden Last Q gerechnet werden muß und für waagrechte Kräfte auf ein Drehgestell = zwei Achsen $0,4 Q$ in Rechnung zu setzen sind. Der Schwerpunkt des Wagens liegt $1,5 \text{ m}$ über Achsmittle (Abb. 31.11 b). Unter diesen Voraussetzungen darf σ_{zul} zu 1200 kg/cm^2 für St 50 angenommen werden. Die Wahl dieser zulässigen Grenze stimmt mit der auf S. 81 gegebenen allgemeinen Regel überein, daß für Wechselbeanspruchungen σ_{zul} 50% der Elastizitätsgrenze betragen darf (vgl. Abb. 13.29) (Elastizitätsgrenze = Dauerwechselfestigkeit).

Auf die Achse wirken nun die folgenden in Abb. 31.11 b eingezeichneten Kräfte:

1. in A und B die vertikalen Kräfte $P = 0,75 Q = 10\,312 \text{ kg}$, vom Wagengewicht einschließlich Stoßzuschlag herrührend, die
2. in C und D gleichgroße aber entgegengesetzt gerichtete Reaktionen hervorrufen.

Der Nabendurchmesser in C folgt dann aus der Gleichung $420\,750 = 0,1 d^3 \cdot 1200$ zu $d = 152\text{ mm}$ (Ausführung 155 mm) und für den Schenkel, aus $12\,422 \cdot 10 = 0,1 d^3 \cdot 1200$, zu $d = \text{rd. } 100\text{ mm}$ (Ausführung 115 mm).

Wenn nach dieser scheinbar gut begründeten Berechnung mit 2facher Sicherheit gegenüber der Dauerfestigkeit des Werkstoffes, dennoch gelegentlich Achsbrüche auftreten¹, so muß entweder die Annahme über die Größe der Kraftwirkung nicht richtig gewählt sein, oder (was wahrscheinlicher ist) die Rechnung nicht alle Faktoren, welche die Bruchgefahr beeinflussen, berücksichtigen. Solche Einflüsse sind die Kerbwirkung in der Hohlkehle des Schenkels (die durch Vorschrift eines Abrundungsverhältnisses ρ/d berücksichtigt werden kann) und die zusätzliche Beanspruchung durch die aufgepreßten Räder. Bei dem gebräuchlichen Schrumpfmaß $\rho/r_i = 0,001$ (Abschn. 24) und $\alpha = r_a/r_i = 2$, wird die gleichmäßige Flächenpressung zwischen Nabe und Welle 825 kg/cm^2 . Dadurch ändert sich der gefährlichste Spannungskreis bedeutend, wie Abb. 31.12a für die Druckfasern der Welle zeigt; nach einer halben Umdrehung (für die Zugfasern der Welle) liegt der gefährlichste Spannungskreis, wie in Abb. 31.12b gezeichnet. Zur Beurteilung der Bruchsicherheit ist in Abb. 31.12a auch die Grenzkurve eingezeichnet; sie ist aus Abb. 13.29 für St 50 entnommen, indem (wegen der üblichen Bearbeitung der Achsen) nur 90 % des günstigsten Wertes (für hochglanzpolierte Wellen) aus der Abbildung entnommen wird. Bei einer Höchstspannung von $12 + 8,2 = 20,2\text{ kg/mm}^2$ (auf der Zugseite) und einem Kleinstwert von -12 kg/mm^2 (auf der Druckseite), beträgt die Mittelspannung $8,2\text{ kg/mm}^2$. Für diese Mittelspannung ist für St 50 die zulässige obere Grenzspannung $0,9 \cdot 31 = 28\text{ kg/mm}^2$ oder $\tau_{zul} = 14\text{ kg/mm}^2$. Die Bruchsicherheit beträgt nun noch $1,4/10,1 = 1,39$, was immerhin als ausreichend erscheint. Durch die Bildung von Passungsrost, durch ein ungleichmäßiges Aufliegen der Nabe verursachte größere, örtliche Pressungen und evtl. durch vergrößerte Stoßwirkung sind die gelegentlich noch vorkommenden Achsbrüche (die hauptsächlich bei der Nabe auftreten) zu erklären.

Schwerer als die Aufzählung dieser Erklärungen für die Achsbrüche wiegt die Feststellung, daß eine zuverlässige Berechnung der Biegespannung an der Bruchstelle bei der Nabe (d. i. bei der Kraftangriffsstelle) überhaupt unmöglich erscheint. Die Umlenkung der Kraftlinien am Nabenanfang (Abb. 32.13a) hat die Bedeutung einer scharfen Kerbe. Man könnte die Einspannwirkung mildern, wenn man den Einspanndruck langsam nach dem Innern der Nabe zunehmen läßt, z. B. durch den Wellendurchmesser nach innen um einige Hundertstel mm dicker zu machen als am Ende des Nabensitzes, oder auch die Nabe entsprechend zu bearbeiten oder auszubilden (Abb. 31.13b); die Kraftlinien erhalten dann einen günstigeren Verlauf.

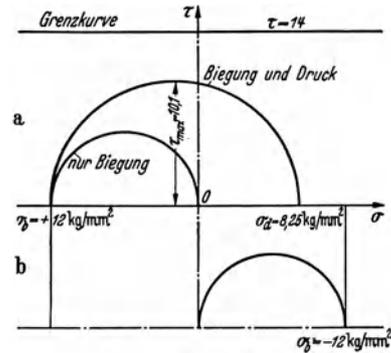
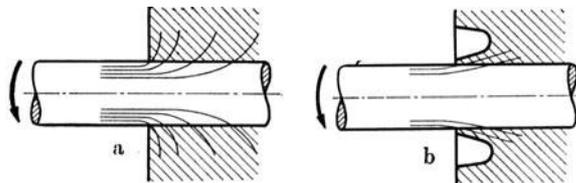


Abb. 31.12. Grenzkurve.

Abb. 31.13. Kraftfluß in einem eingespannten Stab
a ohne, b mit hinterdrehter Einspannung.

31.4. Keilwellen

sind Wellen, die mit mehreren (2, 4, 6 od. 10) symmetrischen Keilen aus einem Stück bestehen (Abb. 31.14). Das zu übertragende Drehmoment wird dabei an mehreren symmetrisch angeordneten Stellen aufgenommen, so daß die Flächenpressung viel kleiner und auch die Beanspruchung der Welle günstiger ist. Die Keilwelle kann deshalb (namentlich in gehärtetem Zustand) ein Drehmoment übertragen, das ein Vielfaches von dem ist, das eine gewöhnliche Welle mit Keilen aufnehmen kann. Sie wird im Automobil-, Lokomotiv- und Werkzeugmaschinenbau in steigendem Maße verwendet.

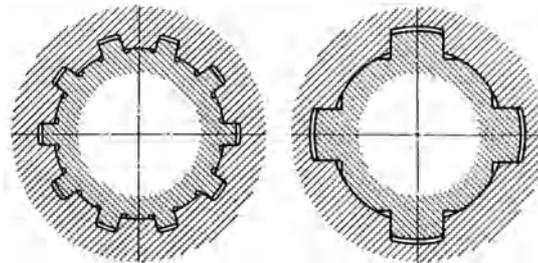


Abb. 31.14. Keilwellen.

¹ Kühnel, R.: Achsbrüche von Eisenbahnfahrzeugen und ihre Ursachen. F. C. Glaser oder Glasers Ann. 1932, S. 29 und 41. Berlin SW 68.

31.5. Formänderung.

Zuerst wird die Welle maßstäblich mit den darauf wirkenden Kräften gezeichnet (Abb. 31.15a). Aus dem Kräfte- und Seilpolygon folgt die Momentenfläche und auch die Größe

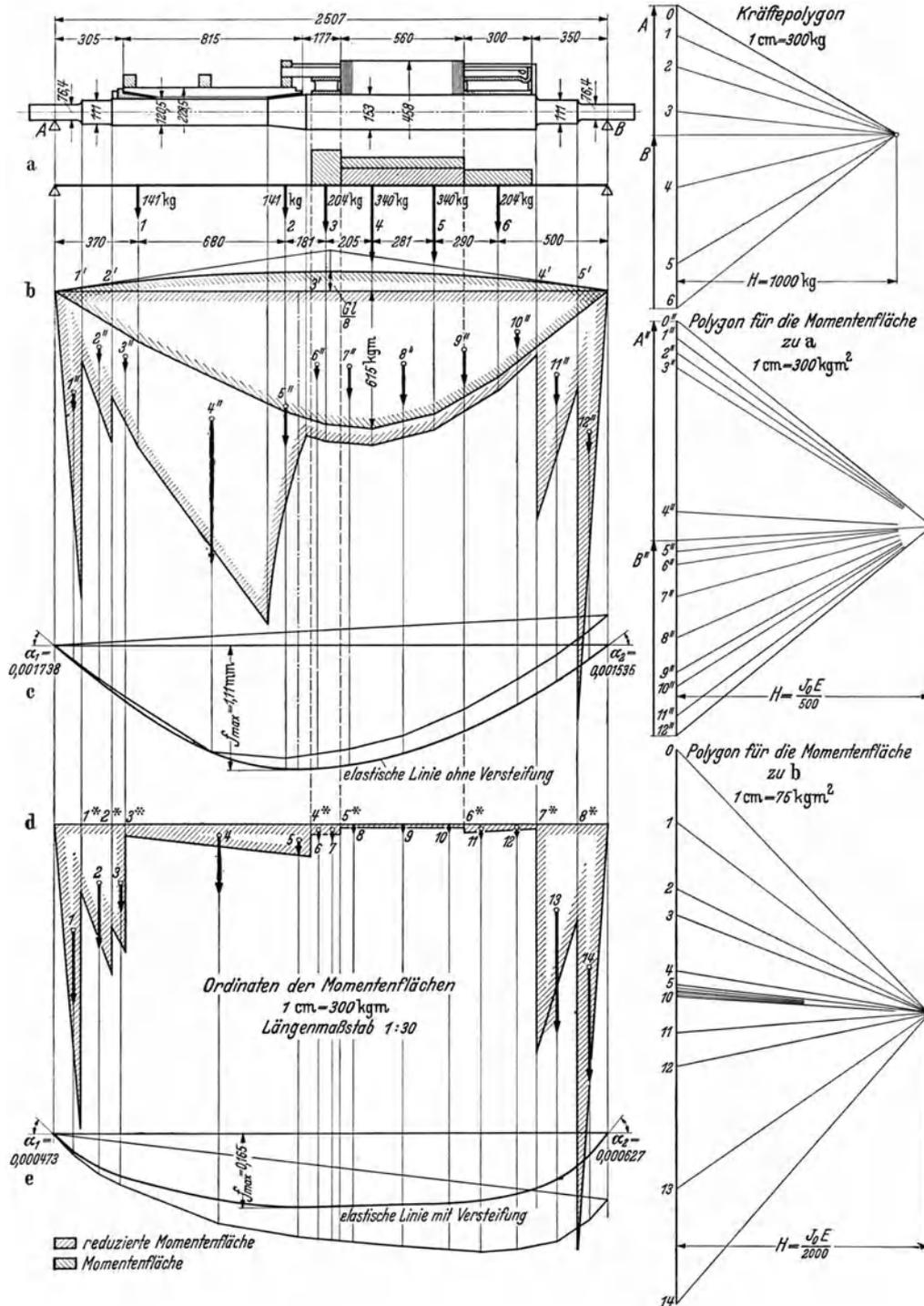


Abb. 31.15. Konstruktion der Formänderung einer Generatorwelle
 a ohne und b mit Berücksichtigung der versteifenden Wirkung des Ankers.
 Gewichte: Ankerbleche 438 kg, Stütztrommeln B_1 u. B_2 204 kg.
 Kupferwicklung 242 kg, Kommutator C_1 282 kg. Welle 288 kg.

Zahlentafel 31.2 (zu Abb. 31.15b). Berechnung der red. Momentenfläche und Flächeninhalt.
 $J_0 = 2682 \text{ cm}^4$ $J_0 E = 5,63 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Punkt	Wellen \varnothing cm	J cm ⁴	J_0/J_x	M_x mkg	$M_{x\text{red.}}$ mkg	Feld	Inhalt kgm ²	Feld	Inhalt kgm ²
1'	7,64	167	16,07	85	1365,95	1''	81,956	11''	136,899
	11,11	746	3,596		305,666	2''	66,751		
2'	11,11	746	3,596	190	683,24	3''	66,589	Σ	1865,770
	12,05	1037	2,585		491,15	4''	648,55		
3'	12,05	1037	2,585	650	1680,25	5''	174,24		
	15,3	2682	1		650	6''	59,85		
4'	15,3	2682	1	285	285	7''	141,934		
	11,11	746	3,596		1024,86	8''	186,261		
5'	11,11	746	3,596	120	431,52	9''	153,360		
	7,64	167	16,07		1928,4	10''	63,888		

Zahlentafel 31.3 (zu Abb. 31.15d, mit Versteifung).
Berechnung der reduzierten Momentenfläche und Flächeninhalte.

$$J_0 = 2682 \text{ cm}^4. \quad J_0 E = 5,63 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2. \quad H = \frac{J_0 E}{2000}$$

Punkt	Wellen \varnothing cm	J cm ⁴	J_0/J_x	M_x mkg	$M_{x\text{red.}}$ mkg	Feld	Inhalt kgm ²
1*	7,64	167	16,07	85	1365,95	1	81,956
	11,11	746	3,596		305,666	2	73,50
2*	11,11	746	3,596	222	798,312	3	29,62
	12,05	1 037	2,585		573,87	4	63,10
3*	12,05	1 037	2,585	235	607,5		
	22,85	13 380	0,2		4,7		
1'	22,85	13 380	0,2	270	54,0	5	15,469
2'	22,85	13 380	0,2	618,5	123,7	6	2,416
	22,85	13 380	0,2		132,0	7	2,490
4*	31,40	47 540	0,0565	660	47,29	8	1,230
	31,40	47 540	0,0565		680	38,42	9
3'	31,40	47 540	0,0565	685	38,702	11	41,65
	45,80	214 000	0,0125		8,562	12	36,70
4'	45,80	214 000	0,0125	695	8,687	13	136,899
	45,80	214 000	0,0125		620	7,750	14
5'	45,80	214 000	0,0125	620	7,750	Σ	616,38
6*	45,80	214 000	0,0125	541	6,762		
	31,40	47 540	0,0565		30,566		
6'	31,40	47 540	0,0565	413	23,334		
7*	31,40	47 540	0,0565	285	16,202		
	11,11	746	3,596		1024,86		
8*	11,11	746	3,596	120	431,52		
	7,64	167	16,07		1928,4		

NB.: Punkte mit dem Index * bedeuten Durchmessersprung.
 „ „ „ „ ' sind Kraftangriffspunkte.

der Auflagerreaktionen. Zur Kontrolle der Genauigkeit der Zeichnung ist es zweckmäßig eine Auflagerreaktion und einen Punkt der Momentenfläche auch noch analytisch zu berechnen. Aus der Momentengleichung in bezug auf B folgt:

$$A = \frac{141 \cdot 2,137 + 141 \cdot 1,457 + 204 \cdot 1,276 + 340 \cdot 1,071 + 340 \cdot 0,79 + 204 \cdot 0,5}{2,507} = 600 \text{ kg.}$$

Das Biegemoment an der Stelle 4 ist:

$$M_4 = -600 \cdot 1,436 + 141(1,066 + 0,386) + 204 \cdot 0,205 = 615 \text{ mkg.}$$

Das Gewicht der Welle wird gleichmäßig über die totale Länge verteilt ($p = G/l$) und gibt eine zusätzliche, parabelförmige Momentenfläche (mit dem Höchstwert $pl^2/8$), die mit der Momentenfläche der äußeren Kräfte graphisch superponiert wird.

Zur Bestimmung der verzerrten Momentenfläche (vgl. S. 29/30) sind diese Momente mit J_0/J_x zu multiplizieren, wobei der beliebige Wert J_0 so gewählt werden muß, daß die Berechnung der Flächeninhalte genügend genau erfolgen kann. Die verzerrte Momentenfläche wird wieder in einzelne Teile zerlegt, deren Flächeninhalte und Schwerpunkte bestimmt werden müssen. Der Flächeninhalt jedes Teilstückes wird als eine im Schwerpunkt angreifende Kraft aufgefaßt (Zahlentafel 31.2). Mit diesen Kräften wird ein neues Kräfte- und Seilpolygon gezeichnet, welches (nach Mohr) aus Tangenten der elastischen Linie besteht. Die genaue Lage der größten Durchbiegung liegt dort, wo die Querkraft dieser neuen Belastungsfläche zu Null wird. Man zieht im Kräftepolygon (Abb. 31.15 b) den Strahl parallel zur Schlußlinie (aus Bild c) und findet so die Reaktionen A'' und B'' . Der Punkt $Q = 0$, d. i. die Lage der größten Durchbiegung liegt (wie aus dem Kräftepolygon ersichtlich) im Feld 5'' und zwar so, daß rd. drei Viertel dieser Fläche links des Punktes liegt.

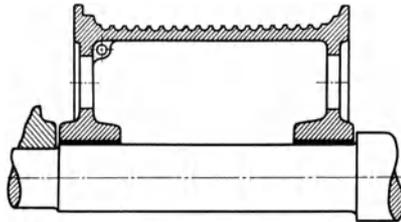


Abb. 31.16. Versteifung der Welle durch eine Trommel.

Die wirkliche Größe der Durchbiegung und die Neigung in den Lagerstellen folgt aus der elastischen Linie unter Berücksichtigung der Verzerrung (vgl. S. 30).

$$\text{z. B. } \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{A''}{H} = \frac{9,91 \cdot 100}{5,63 \cdot 10^5} = 0,00174.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß die Welle sich frei durchbiegen kann und nicht durch aufgesetzte Teile an der freien Formänderung gehindert ist. Das ist bei nicht zu breiten Scheiben und Lager wohl meistens der Fall, da

die Durchbiegung innerhalb des Spielraumes der Sitze bleibt. Wenn aber eine lange Trommel auf der Welle sitzt (Abb. 31.16), so kann diese sich nicht durchbiegen, ohne entsprechende Formänderung der Trommel. In solchen Fällen muß beim Aufzeichnen der „verzerrten“ Momentenfläche an Stelle des Trägheitsmomentes der Welle das der Trommel eingesetzt werden. Eine Versteifung der Welle ist immer vorhanden, wenn Teile fest aufgepreßt oder warm aufgezogen werden. Die versteifende Wirkung des aufgepreßten Ankers in Abb. 31.15 d ist bedeutend; die

Durchbiegung wird dadurch von 1,14 mm (Bild c) auf nur 0,165 mm (Bild e) vermindert.

Was die zulässige Formänderung anbelangt, so stellte man früher zwei Forderungen:

1. Die höchstzulässige Durchbiegung darf $\frac{1}{3}$ mm auf 1 m Wellenlänge nicht überschreiten, also $f/l < 1/3000$.

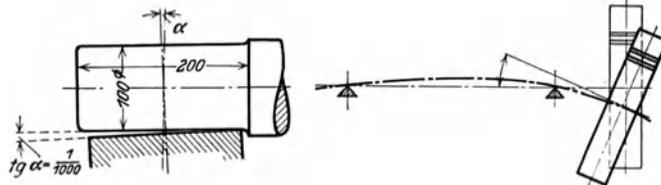


Abb. 31.17 und 18. Unzulässige Formänderungen der Welle.

2. Die Neigung in den Auflagerstellen darf nicht größer sein als 0,001, oder $\operatorname{tg} \alpha < 0,001$, damit kein Klemmen in den Lagern auftritt.

Für eine gleichmäßig belastete Welle fallen beide Forderungen zusammen, da

$$f = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{JE} = \frac{5}{24 \cdot 16} \frac{pl^4}{JE} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{24} \frac{pl^3}{JE} = 3,2 \frac{f}{l},$$

$$\text{so daß für } \frac{f}{l} = \frac{1}{3000} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{3,2}{3000} \approx 0,001$$

wird. Diese Angaben sind nur Anhaltspunkte, deren Zulässigkeit von Fall zu Fall näher untersucht werden sollte. Ein Zapfen von 100 mm Durchmesser und 200 mm Länge würde mit $\operatorname{tg} \alpha = 0,001$ außen um $200 \cdot 0,001 = 0,2$ mm von der Lagerschale abstehen

und ohne Selbsteinstellung des Lagers jedenfalls zu Heißlaufen oder Anfressen Anlaß geben. Besonders sorgfältig sind fliegend angeordnete Zahnräder zu untersuchen, da gleichmäßiges Aufliegen der Zähne verlangt werden muß.

Für Wellen, auf denen Körper sitzen, die mit geringem, radialen Spiel in Gehäusen laufen (elektrische Maschinen, Turbinenlaufräder), muß die Durchbiegung unbedingt innerhalb des vorgeschriebenen Spielraumes bleiben.

Da die Werte von E für Eisen und Stahl nur unbedeutend voneinander abweichen, so folgt aus der Gleichung der elastischen Linie $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_b}{JE}$, daß die Formänderung bei einer Welle aus hochwertigem Stahl ebenso groß ausfällt wie bei einer Welle aus gewöhnlichem SM.-Stahl. Wenn die Abmessungen durch die zulässige Formänderung festgelegt sind, so hat es keinen Sinn, hochwertige Stahlsorten zu wählen.

Die Formänderung durch Verdrehung ist durch den verhältnismäßigen Verdrehungswinkel ϑ festgelegt.

$$\tau_{\max} = Gr_a\vartheta. \quad (12.48)$$

Da G und τ die gleiche Dimension haben, so folgt aus der Gleichung, daß ϑ im Bogenmaß gemessen ist. In der Literatur findet man nun die Angabe, daß eine Verdrehung von $1/4^\circ$ je Meter als zulässig anzusehen ist, also

$$\vartheta < \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{100}. \quad (31.7)$$

Da $\tau_{\max} = \frac{M_a}{\frac{1}{2}d^3} = \frac{5 \cdot 71\,620}{d^3} \frac{N_{PS}}{n}$ ist, folgt aus Gl. (12.48) und (31.7), mit $r_a = \frac{d}{2}$:

$$G \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{400} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5 \cdot 71\,620}{d^3 \cdot n} \quad \text{oder mit } G = 800\,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$d_{\text{cm}} = 12 \sqrt[3]{\frac{N_{PS}}{n}}. \quad (31.8)$$

Die Einschränkung: $\vartheta < 1/4^\circ/\text{m}$ ist aber ganz willkürlich. In manchen Fällen darf ohne Schaden darüber hinausgegangen werden; in anderen dagegen ist $1/4^\circ/\text{m}$ schon viel zu groß.

In der Bindfadenfabrik Schaffhausen z. B. führte eine Welle von 149,1 m Länge und 122 mm Durchmesser von der Turbinenanlage am Rhein schräg unter 23° am Ufer hinauf zur Fabrik. Diese Welle übertrug jahrzehntelang eine Leistung von $N = 200$ PS bei $n = 120$ Uml./min ohne die geringste Störung. Dabei war

$$\tau_{\max} = \frac{5 \cdot 71\,620 \cdot \frac{200}{120}}{12,2^3} = 330 \text{ at und } \vartheta = \frac{\tau_{\max}}{r_a \cdot G} = \frac{330}{6,1 \cdot 800\,000} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 100 \approx 0,4^\circ/\text{m}.$$

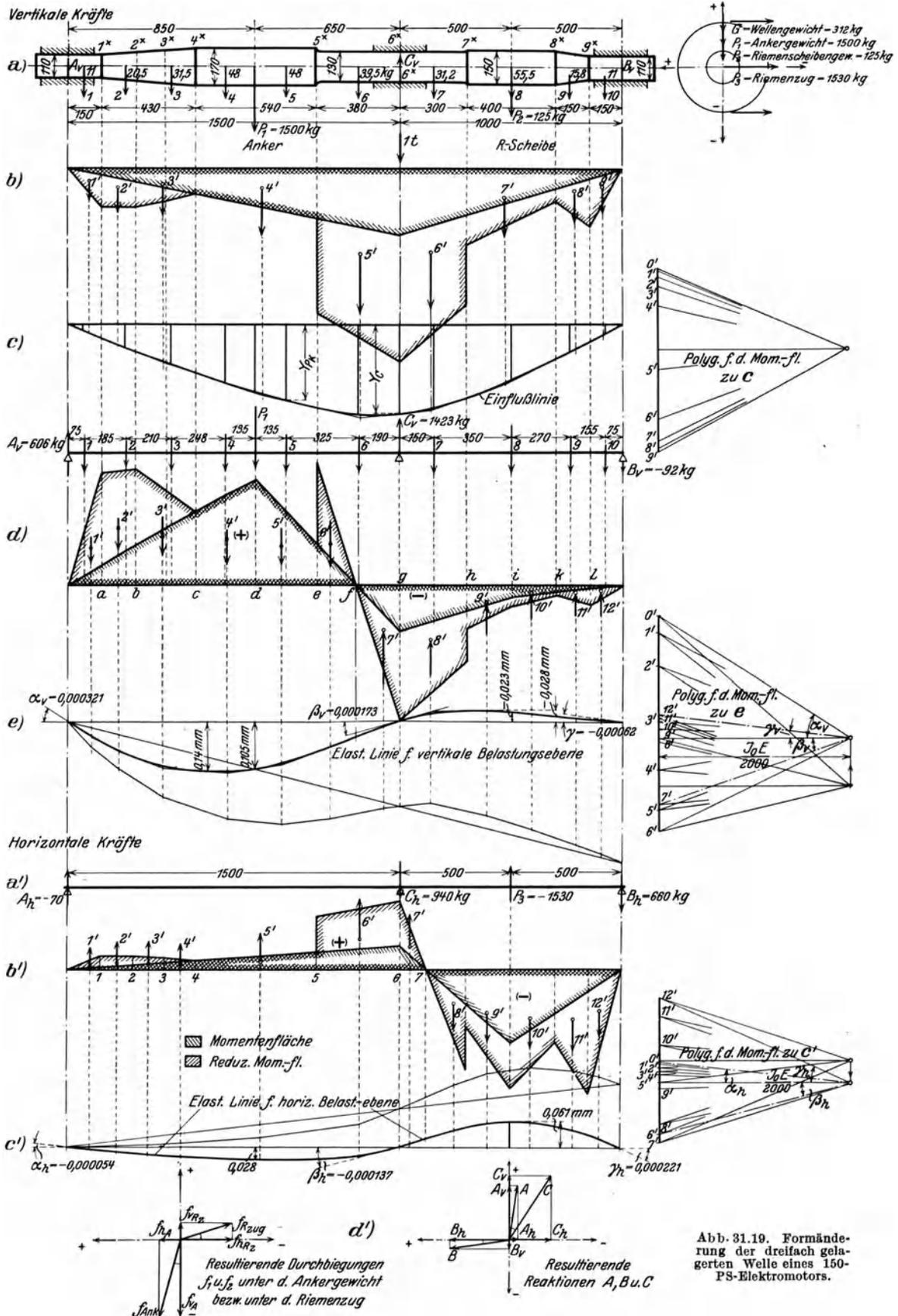
Die totale Verdrehung betrug demnach rd. 60° . Wenn das Drehmoment konstant bleibt, wie es hier der Fall war, so ist die Welle einfach als eine gespannte Feder aufzufassen, die gleichmäßig rotiert und dabei unter einer unveränderlichen Spannung steht. Die Sachlage ändert sich aber sofort, wenn das Drehmoment periodisch wechselt. Dann treten ebenfalls Schwankungen im Drehwinkel auf, wodurch Schwingungen entstehen, die zum Bruch führen können (vgl. Abschn. 33).

Der Verdrehungswinkel von $1/4^\circ/\text{m}$ ist immer zu groß, wenn von zwei Punkten einer Welle genau gleiche Verdrehungen verlangt werden müssen, z. B. beim Kranfahren (bei einseitigem Antrieb oder bei ungleichen Raddrücken könnte sonst nicht geradeaus gefahren werden) oder beim Papiervorschub einer Zeitungsdruckmaschine (die Zeilen würden sonst schräg liegen).

Die Formänderung der Welle darf demnach niemals nach Gl. (8) beurteilt werden, sondern von Fall zu Fall sollten die Folgen der Verdrehung und deren Zulässigkeit geprüft werden.

Mehrfach gelagerte Wellen können nach den Angaben (S. 56) berechnet werden. Wirken die Kräfte nicht alle in einer Ebene, so kann man sie immer in zwei Richtungen, horizontal und vertikal, zerlegen. Die Beanspruchungen und Formänderungen müssen dann für beide Richtungen getrennt untersucht werden, woraus dann auch die Gesamtbeanspruchung und die wirkliche Formänderung folgt.

In Abb. 31.19 ist die Formänderung der dreifachgelagerten Welle eines 150 PS-Elektromotors in horizontaler und in vertikaler Richtung bestimmt. Die Gesamtformänderung findet man durch geometrische Addition der Komponenten.



Zahlentafel 31.4 (zu Abb. 31.19a, b, c).

Punkt	Durchmesser cm	J_x cm ⁴	$\frac{J_o}{J_x}$	M_x kgm	$M_x \frac{J_o}{J_x}$ kgm	Strecke	Inhalt kg · m ²
1*	11	718,7	5,71	60	342	1	25,64
2*	13	1402	2,924	120	350,8	2	49,60
3*	15	2485	1,65	176	290	3	82,8
4*	17	4100	1	226	226	4	181,1
5*	17 13	4100 1402	1 2,924	446	446 1307	5	581
6*	13	1402	2,924	600	1754	6	448
7*	13 15	1402 2485	2,924 1,65	422	1232 696	7	198
8*	15	2485	1,65	180	297	8	60,9
9*	11	718,7	5,71	90	514	9	38,6

	Punkt	y_p	P	$P y$	
Einflußlinie	1	0,3	11	3,3	Vertikal: $\Sigma P y = 5792,09 = 4,07 C_v$ $C_v = 1423 \text{ kg}$ Und mit den Gleichgewichtsbedingungen: $A_v = 606,05 \text{ kg}$ $B_v = -92,05 \text{ kg}$
	2	1,09	20,5	22,17	
	3	1,85	31,5	58,25	
	4	2,68	48,0	128,6	
	5	3,10	1500	4650,0	
	6	3,48	48	167,0	
	7	4,10	39,5	161,9	
	8	4,07	C		
	9	3,80	31,2	118,5	
	10	2,50	180,5	451,0	
	11	1,75	15,8	27,65	
	12	0,42	11,0	4,62	
					Horizontal: $\Sigma P y = 1530 \cdot 2,5 = 4,07 C_h$ $C_h = 940 \text{ kg}$ $A_h = -70 \text{ kg}$ $B_h = 660 \text{ kg}$

Zahlentafel 31.5.

Vertikale Kräfte (Abb. 31.19d)						Horizontale Kräfte (Abb. 31.19b')					
Punkt	$\frac{J_o}{J}$	M_x mkg	$M_x \frac{J_o}{J_x}$ mkg	Feld	Inhalt kg · m ²	Punkt	$\frac{J_o}{J_x}$	M_x kgm	$M_x \frac{J_o}{J_x}$ kgm	Feld	Inhalt kg · m ²
a	5,71	90	514	1	38,55	1	5,71	10,5	60	1'	4,5
b	2,924	180	526	2	74,5	2	2,924	20,53	60,0	2'	8,6
c	1	335	335	3	123,4	3	1,65	30,56	50,4	3'	7,85
d	1	476,1	476,1	4	109,2	4	1	40,59	40,59	4'	7,01
e	1 2,924	187,0	187,0 546	5	89,5	5	1 2,924	78,4	78,4 239,4	5'	32,1
f		0		6	49,1	6	2,924	105	307,2	6'	103,8
g	2,924	-209,3	-611	7	-61,1	7		0		7'	18,14
h	2,924 1,65	-118	-345 -194,7	8	-143,4	8	2,924 1,65	-156	-456 -257,4	8'	-41,5
i	1,65	-55	-90,7	6	-28,54	9	1,65	-330	-545	9'	-80,24
k	1,65	-30	-49,5	10	-14,02	10	1,65	-198	-326,5	10'	-97,12
l	5,71	-16	-91,4	11	-10,56	11	5,71	-99	-565	11'	-66,75
				12	-6,86					12'	-42,40

31.6. Lagerentfernung für Transmissionswellen.

Transmissionswellen sind meist mehrfach gelagert und können in sehr verschiedener Weise belastet sein (Abb. 31.20). Um eine allgemeingültige Beziehung für die Lagerentfernung abzuleiten, machen wir folgende Annahmen:

1. Wir heben die Kontinuität auf, wodurch die Biegespannungen und insbesondere die Formänderungen überschätzt werden (S. 58).

2. Die unregelmäßig geformte Momentenfläche für die Einzelbelastungen ersetzen wir durch eine möglichst anschließende Parabel, der eine gleichmäßig verteilte Belastung von p kg/Längeneinheit entsprechen würde. Weiter nehmen wir $p = 3g$, wenn mit g die gleichmäßige Belastung der Welle durch das Eigengewicht bezeichnet wird. Es sind also keine schweren Riemenscheiben vorgesehen oder diese sitzen nahe an den Lagerstellen. Das größte Biegemoment ist dann (Zahlentafel 12.1, Pos. 8):

$$(M_b)_{\max} = \frac{1}{8} (g + p) l^2 = \frac{4}{8} g l^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} d^3 \cdot \gamma l^2,$$

worin $\gamma = 0,00785 \text{ kg/cm}^3$. Setzt man noch $M_b = M_d$, dann ist:

$$\sigma_b = \frac{M_b}{0,1 d^3}, \tau = \frac{M_d = M_b}{\frac{1}{3} d^3} = \frac{\sigma_b}{2},$$

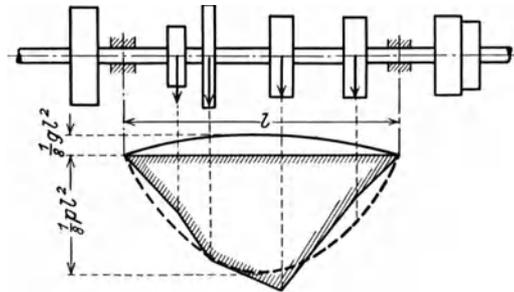


Abb. 31.20. Belastung einer Transmissionswelle.

und die größte Beanspruchung (nach Mohr): $\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_b = \frac{1}{2} \sigma_{\text{zul}}$,

woraus mit $\sigma_{\text{zul}} = 450 \text{ at}$: $0,1 d^3 \sigma_{\text{zul}} = 1,4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \gamma l^2$

oder
$$\frac{l^2}{d} = 11\,000 \quad \text{und} \quad l_{\text{cm}} \sim 100 \sqrt[3]{d}. \tag{31.9}$$

Will man freier in der Anordnung der Riemenscheiben sein, was von Vorteil ist, wenn später neue Maschinen von der vorhandenen Transmission angetrieben werden sollen, so geht man zweckmäßig von der zulässigen Durchbiegung $\frac{f}{l} = \frac{5}{384} \cdot \frac{(g+p)l^3}{JE} = \frac{1}{3000}$ aus.

Mit $J = \frac{\pi}{64} d^4$ und $g + p = 4g = 4 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \gamma$ folgt daran:

$$l^3 = 108\,000 d^2 \quad \text{oder} \quad l \approx 50 \sqrt[3]{d^2}. \tag{31.10}$$

Beide Formeln sind in der Praxis gebräuchlich; sie geben nur Anhaltspunkte (Zahlentafel 31.6), da die mögliche Lagerentfernung meist durch die örtlichen Verhältnisse (Säulen- oder Trägerentfernung, Fenstereinteilung usw.) bestimmt wird.

Zahlentafel 31.6. Lagerentfernung für Transmissionswellen.

Für $d =$	4	5	6	7	8	10	12	15 cm
$l = 100 \sqrt[3]{d}$	200	220	240	260	280	300	350	370 cm
$l = 50 \sqrt[3]{d^2}$	130	150	165	180	200	230	260	300 cm

Sind größere Lagerentfernungen erwünscht, so kann die Durchbiegung durch Verwendung von Rohrwellen und von Riemenscheiben aus Leichtmetall vermindert werden. Der Grenzwert für die Lagerentfernung folgt aus der Durchbiegung durch das Eigengewicht der Rohrwellen allein.

Aus $\frac{f}{l} = \frac{5gl^3}{384JE} < 1/3000$ folgt für Stahl $l < 37,2 \sqrt[3]{J/g}$.

d. h. für eine	volle Welle	Rohrwelle		
	40 mm \varnothing	39,5/44,5	70/76	100/108
muß l kleiner sein als	180	250	350	460 cm

Schrifttum.

Jakobsen, L. S.: Torsional Stress concentrations in shafts of circular cross section and variable diameter. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. 47 (1925) S. 614/41. — Torsional Stresses in shafts having grooves or fillets. J. appl. Mech. 57 (1935) A. 154/55. — Lehr, E.: Dauerhaltbarkeit von Ritzelwellen. Z. VDI 81 (1937) S. 117/18. — Deutler, H. und A. Havers: Die günstigste Gestalt der Hohlkehlen bei verdrehbeanspruchten Wellen. Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt. Jahrbuch 1937 der deutschen Luftfahrtforschung, Bd. 2. S. 132/136. — Thum, A. und E. Bruder: Dauerbruchgefahr an Hohlkehlen von Wellen

und Achsen und ihre Verminderung. Dtsch. Kraftfahrtforsch., Heft 11. Berlin: VDI-Verlag 1938. — Thum, A. und W. Bautz: Der Entlastungsübergang. Günstigste Ausbildung des Überganges an abgesetzten Wellen. Forsch. 6 (1935) S. 269/273. — Herold, W.: Versuche über Drehschwingungsfestigkeit abgesetzter, genuteter und durchbohrter Wellen. Z. VDI 81 (1937) S. 505/09. Die β_k -Werte von Herold weisen einige, unverständliche Eigentümlichkeiten auf, indem diese für den weichen „normalisierten“ St C 16.61 höher liegen als beim harten VCN 15. — Lehr, E. und R. Mailänder: Einfluß von Hohlkehlen an abgesetzten Wellen und von Querbohrungen auf die Biegewechselfestigkeit. Arch. Eisenhüttenwes. 11 (1938) S. 563/68. Bericht Nr. 420 des Werkstoffausschusses. — Thum, A. und H. Weiss: Versuche zur Steigerung der Verdrehdauerhaltbarkeit quergebörter Wellen durch Kaltverformung. Automob.-techn. Z. 41 (1938) S. 629/633. — Ulrich, M.: Verdrehfestigkeit und Verschleiß von Keilwellen. Teil I. Forschungsarbeiten für das Kraftfahrwesen. Herausgegeben vom Reichsverband der Automobilindustrie. Berlin. — Thum, A. und F. Wunderlich: Dauerbiegefestigkeit von Konstruktionsteilen an Einspannungen, Naben sitzen und ähnlichen Kraftangriffstellen. Mitt. der MPA. an der T. H. Darmstadt, Heft 5. VDI-Verlag 1934, mit ausführlichem Schrifttumverzeichnis (122 Quellen). — Ulrich, M.: Verdrehfestigkeit und Verschleiß von Keilwellen. Reichsverband der Automobilindustrie. E. V. Berlin. Versuchsbericht Nr. 11 (1935). — Horger, O. J.: Effect of surface rolling on the fatigue strength of steel. J. appl. Mech. 57 (1935) S. A. 128. — Horger, O. J. und J. L. Maulbetsch: Increasing the fatigue strength of press-fitted axle assemblies by surface rolling. J. appl. Mech. 58 (1936) S. A 91/98. — Buckwalter, T. V. und O. J. Horger: Investigation of fatigue strength of axles press-fits, surface rolling and effect of size. Trans. Amer. Soc. Metals 25 (1937) S. 229/44. — Berg, P.: Die Steigerung der Dauerhaltbarkeit von Keilverbindungen durch Oberflächendrücken. Diss. T. H. Braunschweig 1935. Mitt. Wöhler-Inst. Nr. 26. Berlin: N. E. M.-Verlag. — Tomlinson, G. A.: An investigation of the fretting corrosion of closely fitting surfaces. Proc. Instn. mech. Engr. 141 (1939) S. 223/49.

32. Kupplungen.

Wegen der Gefahr des Verbiegens beim Transport wählt man die Wellen nicht zu lang, sondern nur 4 bis 6 m für Wellen von 30 bis 50 mm Durchmesser und höchstens 7 m für dickere Wellen. Zwei Wellenstücke werden durch Kupplungen verbunden, die je nach dem Zwecke in:

1. feste,
2. bewegliche,
3. ausrückbare,
4. selbsttätige

Kupplungen unterteilt werden.

Die Kupplungen sollen immer dicht neben einem Lager sitzen und so angeordnet sein, daß jedes Wellenstück mindestens in zwei Lagern ruht. Auch ist die Kupplung — von der Antriebsseite gesehen — hinter dem Lager anzubringen, damit im ausgerichteten Zustand die Welle betriebsfähig bleibt.

Zur Verbindung zweier Wellen von verschiedenem Durchmesser wird das Ende der stärkeren Welle abgedreht und eine dem Durchmesser der schwächeren Welle entsprechende Kupplung aufgesetzt.

32.1. Feste Kupplungen.

Feste Kupplungen verbinden zwei Wellen starr miteinander.

a) **Scheibenkupplung.** Auf jedem der beiden Wellenenden sitzt, durch Keil befestigt, eine gußeiserne Scheibe (Abb. 32.1); beide sind durch Schrauben miteinander verbunden. Damit die Mittellinien der Wellen zusammenfallen, greift die eine Scheibe mit einem Ansatz (Zentrierung) in die andere ein. Damit ist der Nachteil verbunden, daß die einzelnen Wellen sich erst nach einer Längsverschiebung um die Höhe des zentrierenden Ansatzes herausnehmen lassen.

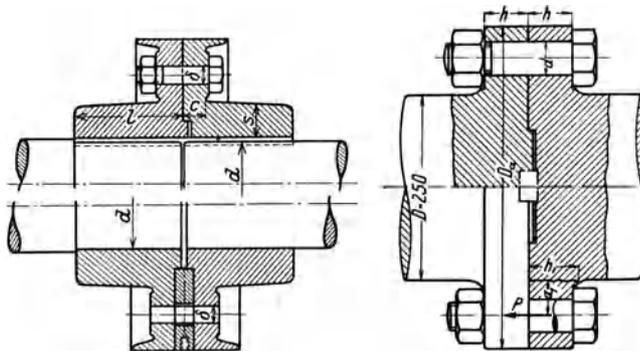
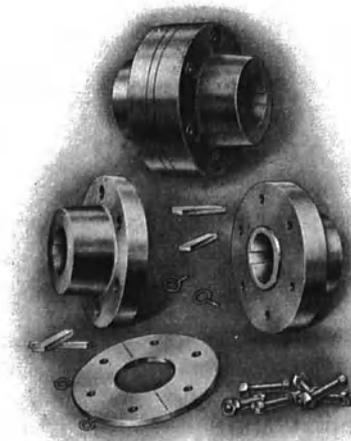


Abb. 32.1. Scheibenkupplung (Bauart Wüfel) ohne und mit herausnehmbarer Zwischenscheibe.

$$l = 1,5 d,$$

$$s = 0,3 d + 1 \text{ cm},$$

$$c = 1,25 \varnothing.$$

Abb. 32.2. Wellenkupplung mittels angeschmiedeter Flanschen. (Aus Rötcher.)

Durch Anwendung eines geteilten Zwischenringes, dessen Hälften beim Abkuppeln quer zur Welle herausgenommen werden, läßt sich dieser Nachteil beseitigen.

Die Schrauben übertragen das Drehmoment von der einen Scheibe auf die andere, und zwar zunächst vermittelt der Reibung, indem die Scheiben stark zusammengepreßt werden. Bei Erschütterungen wird die Reibung aber teilweise aufgehoben, so daß die Schrauben das Drehmoment dann direkt übertragen müssen; darum müssen genau in die Löcher eingepaßte Schrauben verwendet werden (Paßschrauben). Zum Schutz gegen Unfälle sollte man alle vorstehenden Teile vermeiden, also Schraubenköpfe und Muttern versenken und keine Nasenkeile verwenden.

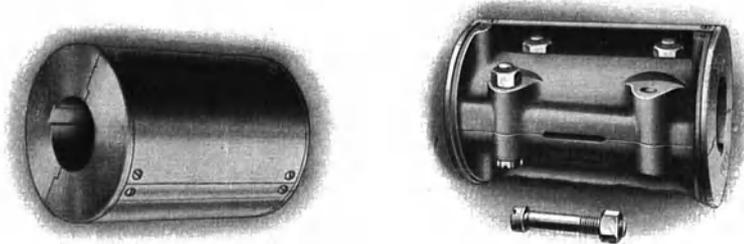


Abb. 32.3. Schalenkupplung (Eisenwerk Wülfel).

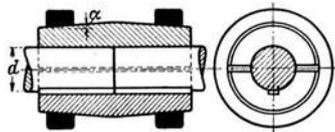


Abb. 32.4. Hülsenkupplung (nach Jellinek).

Aufkeilen, erforderlich ist. Eine sehr gute, aber schwer lösbare Verbindung ist das Aufpressen der Scheiben (vgl. Schrumpfverbindungen). Darum müssen bei Verwendung von Scheibenkupplungen alle Scheiben und Räder, die auf die Wellen aufgebracht werden, zweiteilig sein, so daß diese Anordnung teuer ist. Schwere Wellen kuppelt man durch unmittelbar angeschmiedete Flansche (Abb. 32.2.).

b) Die Schalenkupplung (Abb. 32.3) ist wesentlich billiger und vermeidet diese Nachteile. Zwei gußeiserne Schalen werden durch Schrauben fest auf die Wellenenden geklemmt und bewirken eine genau zentrische Verbindung. Ein eingelegter Keil verhindert die gegenseitige Verdrehung der Wellenenden.

Für die Verwendung in feuchten Betrieben (Bleichereien, Färbereien, Papierfabriken) wird die Konstruktion etwas geändert, indem zwei konisch ausgedrehte, schmiedeeiserne Ringe von beiden Seiten auf die schwach konisch gedrehten Schalen aufgetrieben werden (Abb. 32.4). Diese sind, trotz des Rostens, leicht lösbar (Hülsenkupplung).

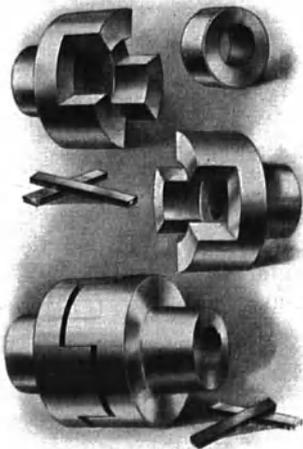


Abb. 32.5. Ausdehnungskupplung (Wülfel, Hannover).

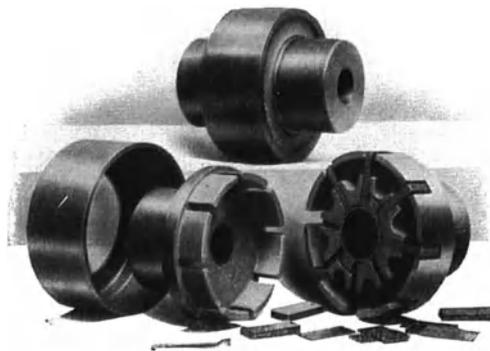


Abb. 32.6.

Für eine gute Verbindung der beiden Wellen ist es erforderlich, daß sie genau gleiche Durchmesser haben, was seit der Einführung von Toleranzen bei der Herstellung leicht möglich ist.

32.2. Nachgiebige Kupplungen.

Nachgiebige Kupplungen lassen eine kleine Verschiebung der Wellenenden zueinander zu, und zwar entweder in axialer oder in radialer Richtung, oder auch so, daß die Wellenmittel einen kleinen Winkel bilden können.

a) **Ausdehnungskupplung** (Abb. 32.5). Jede Kupplungshälfte ist mit drei Klauen versehen, die ineinander greifen. Zur Zentrierung ist ein Ring eingelegt. Der Einbau einer Ausdehnungskupplung empfiehlt sich in der Mitte von langen Wellensträngen, um die durch die Temperaturunterschiede hervorgerufenen Längenänderungen auszugleichen. Da die Ausdehnungszahl für Stahl = 0,000011 ist, dehnt sich z. B. eine Welle von 20 m Länge bei 25° C Temperaturunterschied um $20\,000 \cdot 25 \cdot 0,000011 = 5,5$ mm. Die Klauen sollten von Zeit zu Zeit geschmiert werden, um ein leichtes Verschieben zu ermöglichen.

b) **Elastische Kupplungen** werden für die direkte Verbindung mit elektrischen Maschinen verwendet. Sie gestatten das Einspielen des Ankers und gleichen oft auch kleine Ungenauigkeiten in der gegenseitigen Wellenlage der zu kuppelnden Maschinen aus. Weit verbreitet ist eine Konstruktion ähnlich wie die Scheibenkupplung. Die Schrauben sitzen aber nur in der einen Kupplungshälfte fest; das andere Schraubenende trägt eine Gummihülse, die mit etwas Spiel in das entsprechende Loch der anderen Kupplungshälfte eingreift. In neuerer Zeit werden an Stelle der Gummihülse die bewährten Federformen verwendet. Abb. 32.6 zeigt die Babba-Kupplung, die sehr wenig Platz erfordert und bei der die Federn in einem vollständig geschlossenen und mit Fett gefüllten Raum untergebracht sind.

c) Die **Kreuzgelenkkupplung** (Cardangeln) dient zur Verbindung von Wellen, deren Achsen einen kleinen Winkel (5—8°) zueinander bilden und ist im Automobilbau gebräuchlich. Auf den beiden Wellen sitzen Naben, die je zwei Zapfen tragen (Abb. 32.7). Die vier Zapfen sind in Bronzebüchsen gelagert und durch einen geteilten Ring zusammengehalten, worin sie kreuzweise drehbar sind. Wenn die eine Welle eine gleichförmige Bewegung hat, so erhält die zweite Welle durch die Kupplung Beschleunigungen und Verzögerungen, die um so größer werden, je größer der Ablenkungswinkel ist.

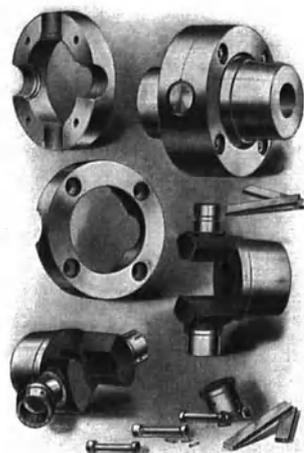


Abb. 32.7. Kreuzgelenkkupplung (Wülfel, Hannover).

32.3. Ausrückbare Kupplungen.

Die **Klauenkupplung** ist ähnlich wie die Ausdehnungskupplung. Während die eine Kupplungshälfte fest aufgekelt wird, ist die andere — auf der treibenden Welle — verschiebbar und mit einer eingedrehten Rille für den Schleifring des Ausrückbügels versehen. Das Einrücken der Kupplung ist nur im Ruhezustand möglich, wenn die Klauen sich gegenseitig in der richtigen Lage befinden. Ein bekannter Übelstand der Klauenkupplung ist, daß für das Ausrücken während des Betriebes eine große Kraft erforderlich ist. Die Verschiebungskraft ist $P = \mu N$, worin μ die Reibungszahl und N die Kraft ist, mit der die zu verschiebenden Teile zusammengepreßt werden. Beim Ausrücken verschiebt sich die eine Kupplungshälfte gegen die Klauen der anderen, und außerdem längs der Führungsfeder am Wellenumfang. Die Klauenkupplung für eine Welle

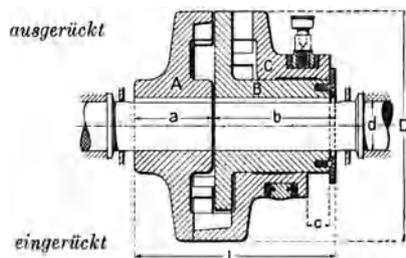
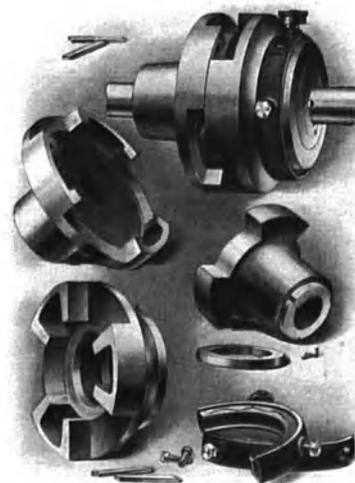


Abb. 32.8. Hildebrandtsche Zahnkupplung. (Wülfel, Hannover).



von 100 mm Durchmesser hat einen Durchmesser in der Klauenmitte von rd. 28 cm. Wenn das Drehmoment $M_d = \frac{1}{5} d^3 \tau$ zu 28000 kg·cm angenommen wird, wirkt zwischen den Klauen eine Umfangskraft von $28\,000/14 = 2000$ kg, und am Wellenumfang eine Kraft von $28\,000/5 = 5600$ kg, so daß $N = 7600$ kg wird. Da die gleitenden Teile nur wenig oder gar nicht geschmiert sind, ist $\mu = 0,1$ und größer, so daß die Ausrückkraft mindestens 760 kg wird. Darum muß der Ausrücker kräftig gelagert sein und eine große Übersetzung haben. Ungefähr drei Viertel der Ausrückkraft ist erforderlich, um die Kupplungshälfte auf der Welle zu verschieben. Die Hildebrandtsche Zahnkupplung vermeidet diesen Übelstand (Abb. 32.8). Auf dem einen Wellenende ist der Kupplungsteil *A*, auf dem anderen der Teil *B* fest aufgekittet. Beide sind mit der gleichen Anzahl Zähne versehen. Auf der Nabe des Teiles *B* sitzt eine verschiebbare Muffe *C* mit gleichviel Zähnen und mit einer eingedrehten Rille für den Schleifring. Bei ausgerückter Kupplung füllen die Zähne der Muffe stets die Zahnlücken des Teiles *B* aus. Beim Einrücken schieben sich die Muffenzähne auch in die Lücken des Teiles *A* und verbinden so die beiden Teile miteinander. Da die Kupplung für die gleiche Welle meist einen größeren Durchmesser hat, wird die Ausrückkraft bedeutend kleiner. Um in ausgerücktem Zustand unnötige Reibung zu vermeiden, ist der Kupplungsteil *B* auf die getriebene Welle zu setzen. Viel zweckmäßiger als die Zahnkupplung ist die Reibungskupplung, die eine stillstehende Welle allmählich mit der drehenden verbindet (vgl. Abschn. 64).

Schrifttum.

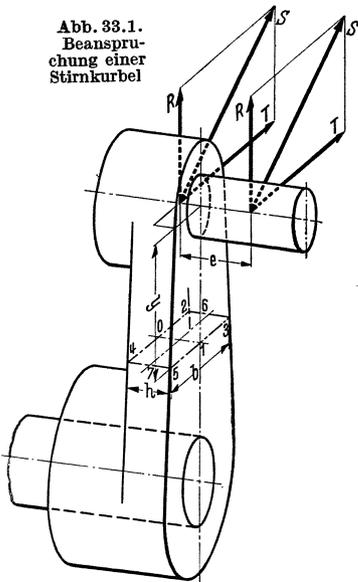
vom Ende, E.: Wellenkupplungen und Wellenschalter. Einzelkonstruktionen aus dem Maschinenbau. Heft 11. Berlin: Julius Springer 1931. — Kutzbach, K.: Quer- und winkelbewegliche Wellenkupplungen. Kraftfahrtechn. Forschungsarbeiten, Heft 6, S. 1/21. Berlin: VDI-Verlag 1937. — Spieß, R.: Kardangelenke zur Übertragung gleichförmiger Bewegung. Fördertechn. 29 (1936) S. 239/98. — Dietz, H.: Die Übertragung von Momenten in Kreuzgelenken. Z. VDI 82 (1938) S. 825/28. — Grossmann, K. H.: Die Momente im Kreuzgelenk. Schweiz. Bauztg. 113 (1939) S. 27. — Altmann, F. G.: Drehfedernde Wellenkupplungen. Kraftfahrtechn. Forschungsarbeiten, Heft 6, S. 27/37. Berlin: VDI-Verlag 1937. — Donaldson, C.: Typical designs of flexible couplings. Amer. Mach., Lond. 80 (1936) S. 13, 16, 19, 22, 214/16 E, 258/60 E, 303/05 E, 347/49 E. — Cousins, R. J. W.: Flexible couplings for Diesel engines. Engineering 143 (1937) S. 29/32. — Rembold, V. und J. Jehlicka: Das Verhalten federnder Kupplungen im Betrieb. Forsch. 5 (1934) S. 146/54 und 8 (1937) S. 109/18. — Brink, K.: Verhalten von elastischen Kupplungen im Dauerbetrieb, insbesondere Bestimmung der Dämpfung. Mitt. Wöhler-Inst. S. 1/65. Braunschweig 1938.

33. Kurbelwellen.

33.1. Festigkeitsrechnung.

Die Beanspruchung ist je nach der Kurbelstellung verschieden. Die Stangenkraft *S* (Abschn. 82) kann aber immer in zwei Komponenten, radial und tangential zum Kurbelkreis, zerlegt werden¹. Für die in Abb. 33.1 gezeichnete Stirnkurbel verursacht die radiale Komponente *R*

Abb. 33.1.
Beanspruchung einer
Stirnkurbel



1. eine gleichmäßige Zugbeanspruchung über den ganzen Armquerschnitt:

$$\sigma_z = \frac{R}{b \cdot h}.$$

2. Biegung durch das Moment $R \cdot e$. Dadurch entsteht eine größte Zugspannung in der Linie 3 bis 5 und zwar ist dort

$$\sigma_b = \frac{6 R \cdot e}{b h^2}.$$

Die tangential Komponente *T* verursacht:

1. Biegung durch das Moment $T \cdot y$. Die größte Zugspannung tritt in der Linie 4 bis 5 auf und ist

$$\sigma'_b = \frac{T \cdot y}{\frac{1}{6} h b^2}.$$

2. In der neutralen Faserschicht eine Schubspannung:

$$\tau = \frac{T}{\frac{2}{3} b \cdot h}.$$

3. Verdrehung durch das Moment $T \cdot e$. Die größten Werte

der Schubspannungen liegen in den Punkten 0 und 1:

$$\tau_a = \frac{T \cdot e}{\frac{2}{3} h b^2}$$

und in 6 und 7:

$$\tau_b = \frac{T \cdot e}{\frac{2}{3} b h^2}$$

Die größte Beanspruchung (nach Mohr) folgt aus der Gleichung:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2},$$

und ist von Stelle zu Stelle verschieden. In dieser Gleichung ist σ die an einer Stelle auftretende

Normalspannung, z. B. für Punkt 1: $\sigma = \frac{R}{b \cdot h} + \frac{R \cdot e}{\frac{1}{6} b h^2}$,

und τ die an der gleichen Stelle wirkende Schubspannung: $\tau = \frac{T}{\frac{2}{3} b h} + \frac{T \cdot e}{\frac{2}{3} h b^2}$.

Im allgemeinen berechnet man die Kurbelwelle nur für zwei Hauptstellungen der Stange:

- Für die Totpunktlage; die Kräfte wirken dann in der Kröpfungebene ($T = 0$).
- In der Tangentialstellung; die Kräfte stehen dann senkrecht zur Kröpfungebene ($R = 0$).

Gebräuchliche Abmessungen des Kurbelarmes sind:

$$h \approx 0,75 d \quad \text{und} \quad b \approx 1,25 \text{ bis } 1,3 d.$$

Man muß auch hier wieder beachten, daß die obenstehende Spannungsberechnung vollständig versagen muß bei den scharfen Übergängen zwischen Kurbelarm und Zapfen, resp. Welle. Auch der Kurbelzapfen ist (als Kraftangriffsstelle) der Festigkeitsrechnung schwer zugänglich, so daß eigentlich nur die Spannung in der Mitte der Kurbelarme berechnet werden kann, also dort wo erfahrungsgemäß keine Bruchgefahr vorhanden ist. Dr.-Ing. J. Crumbiegel¹ hat mit Feindehnungsmessungen den wirklichen Verlauf der Biegespannungen bestimmt und in den einspringenden Ecken viel größere Spannungen gemessen, die allerdings extrapoliert werden mußten. Die Verhältnisse liegen beim Kurbelarm noch viel verwickelter als beim Stabeck (Abschn. 16.3), weil hier Biegung und Verdrehung gleichzeitig wirken und die Querschnittsform sich außerdem bei den Übergängen ändert.

Die Kurbelwellen werden aus zähem S.M.-Stahl geschmiedet. Zur Vermeidung der Kerbwirkung sind die Abrundungen an den Übergangsstellen mit möglichst großem Halbmesser auszuführen. Bei großen Maschinen werden die Kurbelwellen aus Einzelteilen zusammengebaut (Abb. 33.2), die aber weniger steif sind als einstückige Wellen. Wellen und Zapfen werden oft durchbohrt und die Bohrung für die Schmierung verwendet. In den letzten Jahren werden für kleine Maschinen vielfach gegossene Kurbelwellen verwendet, die in der Formgebung freier sind und sich einem günstigen Verlauf der Spannungslinien besser anpassen können.

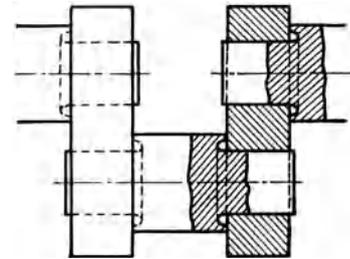


Abb. 33.2. Zusammengebaute Kurbelwelle. (Aus Dubbel, Taschenbuch.)

Schrifttum.

Thum, A. und K. Bandow: Die Gußkurbelwelle. Z. VDI 80 (1936) S. 227. — Roll, F.: Gegossene Kurbelwellen. Z. VDI 80 (1936) S. 1365/68. — Walls, F. J.: Cast camshafts and crankschafts. J. Soc. automot. Engr. 41 (1937) S. 284/90. — Gough, H. J. and H. V. Pollard: Properties of some materials for cast crankschafts, with special reference to combined stresses. J. Instn. automob. Engr. 5 (1937) S. 96/166. — Lürenbaum, K.: Einfluß von Formgebung und Werkstoff auf die Gestaltfestigkeit geschmiedeter und gegossener Flugmotoren-Kurbelwellen. Jb. dtsh. Luftf. Forsch. Bd. 2 (Triebwerk) S. 128/31 (1937). — Klingenstein, T., H. Kopp und E. Mickl: Kurbelwellen aus Gußeisen. Mitt. Forsch.-Anst. Gutehoffnungshütte 6. (1938) S. 39/51. — Cornelius: Berechnung und Gestaltung schnellaunder Kurbelwellen. Automob.-techn. Z. 42 (1939) S. 384/93. — Bandow, K.: Dauerhaltbarkeit von Stahl- und Gußkurbelwellen. Dtsch. Kraftfahrtforsch., Heft 14. Berlin: VDI-Verlag 1938, mit Schrifttumverzeichnis. — Appelt, W.: Steigerung der Dauerhaltbarkeit von Autokurbelwellen durch Oberflächendrücken des Bohrrandes. Automob.-techn. Z. 40 (1937) S. 473/75. — Kopp, H.: Kurbelwellen aus Gußeisen. Mitt. Forsch.-Anst. Gutehoffnungshütte 7 (1939) S. 96/103. — Cornelius, H. und F. Bollenrath: Dauerhaltbarkeit von hohlen Kurbelwellenzapfen mit Innenverstärkung an der Ölbohrung. Z. VDI 82 (1938) S. 885/89.

¹ Diss. T. H. Aachen 1931. Vgl. auch Z. VDI. Bd. 76 (1932) S. 508/9.

33.2. Formänderung.¹

33.21. Die Kraft P wirkt in der Ebene der Kurbelarme (Kröpfungsebene). Der Kurbelarm CD ist dann durch ein konstantes Biegemoment $M_k = A \cdot \alpha$ (Abb. 32.3 a) beansprucht und biegt sich deshalb nach einem Kreisbogen vom Halbmesser ϱ , der aus der Gleichung der elastischen Linie:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \approx \frac{1}{\varrho} = \pm \frac{M_k}{J_k E} \quad (12.12)$$

bestimmt werden kann. Wenn angenommen wird, daß die rechten Winkel zwischen Kurbelarm, Zapfen und Welle bei der Formänderung erhalten bleiben, so erfährt der Zapfen dadurch gegen die anschließende Welle eine kleine Neigung:

$$\varphi = \frac{r}{\varrho} = \frac{r M_k}{J_k E} \quad (33.1)$$

Eine gleich große Neigung des Zapfens könnte auch bei einer geraden Welle erhalten werden, wenn an Stelle des Kurbelarmes ein Stück von entsprechender Nachgiebigkeit eingeschaltet wäre (Abb. 33.3 b). Die gerade Welle ist so aus der Kurbelwelle entstanden, daß der Kurbelzapfen in das Wellenmittel verschoben und der Kurbelarm durch ein elastisches Glied von der Länge Δl und dem Trägheitsmoment J_x ersetzt worden ist. Die Winkeländerung erhält man durch Integration der Gleichung der elastischen Linie, wobei angenommen wird, daß Δl so klein ist, daß das Biegemoment M_k für die Länge Δl als unveränderlich angenommen werden kann.

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg } \varphi_1 \approx \varphi_1 = \int_0^{\Delta l} \frac{M_k}{J_x E} dx = \frac{M_k}{J_x E} \Delta l \quad (33.2)$$

Die Winkel φ und φ_1 werden gleich, wenn:

$$\frac{r M_k}{J_k E} = \frac{M_k}{J_x E} \Delta l \quad \text{oder} \quad J_x = \frac{\Delta l}{r} J_k \quad (33.3)$$

ist. Die Kurbelwelle ist damit — was die Formänderung anbelangt — durch eine vollständig gleichwertige gerade Welle ersetzt, für welche die elastische Linie, nach dem Verfahren von Mohr, konstruiert werden kann. Für das elastische Glied muß also die verzerrte Momentenfläche $\frac{J_0}{J_x} M_k$ und dann der Inhalt $f = M_k \frac{J_0}{J_x} \Delta l$ bestimmt werden, um die Größe der Belastungsfläche f zu erhalten

$$f = M_k \frac{J_0}{J_x} \Delta l = M_k \frac{J_0 r}{J_k \Delta l} \Delta l = M_k \frac{J_0}{J_k} \cdot r \quad (33.4)$$

Diese Fläche ist also unabhängig von Δl . Denken wir Δl unendlich schmal, so wird die Fläche f in der Senkrechten durch C zusammengedrängt und beim Aufzeichnen von Kräfte- und Seilpolygon als eine in der Mittellinie des Kurbelarmes wirkende Einzellast berücksichtigt. Man begeht dabei allerdings einen kleinen Fehler, da die Formänderung der Strecke Δl zweimal berechnet wird, erstens durch die Fläche f und zweitens durch die Verlängerung der Welle um Δl . Der Fehler, der auf der sicheren Seite liegt, kann (wenn gewünscht) leicht vermieden werden, wenn die Momentenfläche an den Stellen Δl unterbrochen wird.

¹ Ensslin, M.: Mehrfach gelagerte Kurbelwellen. Stuttgart: A. Bergsträsser 1902. — Geßner, A.: Mehrfach gelagerte Kurbelwellen. Berlin: Julius Springer 1926.

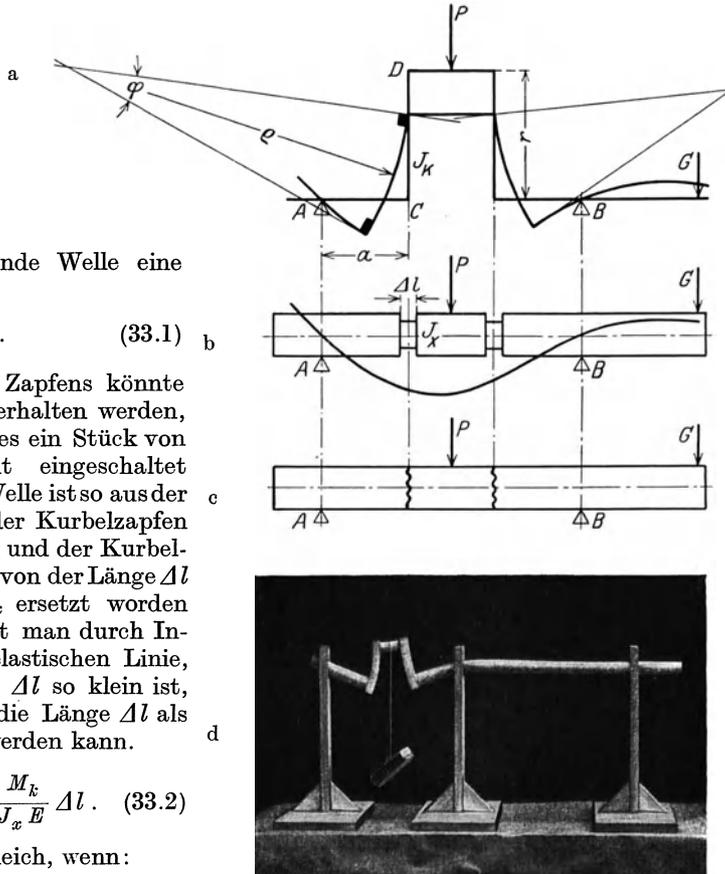


Abb. 33.3 a—d. Formänderungen der Kurbelwelle, wenn die Kräfte in der Kröpfungsebene wirken (Abb. d aus Enßlin: Kurbelwellen).

Bei dieser Überlegung war angenommen, daß der Kurbelarm sich um die ganze Länge r der Mittellinie verbiegt. In Wirklichkeit kann sich der Arm dort, wo die Welle oder der Kurbelzapfen anschließt, nicht mehr frei verbiegen, so daß etwas kleinere Werte von r einzusetzen wären. Nur Versuche, die allerdings bis heute nicht vorliegen, können darüber entscheiden, welcher Teil von r wirksam ist. Wenn man annimmt, daß die ganze Armlänge an der Formänderung teilnimmt, so erscheinen die Verbiegungen und damit die Neigungswinkel in den Lagerstellen wieder etwas zu groß. Ein solcher Fehler liegt meist im Interesse der Rechnung.

33.22. Kraft P senkrecht zur Kröpfungsebene. Damit die Welle im Gleichgewicht ist, müssen nicht nur die Reaktionen A und B , sondern auch das Drehmoment $M_d = P \cdot r$ als Reaktion angebracht werden (Abb. 33.4).

Welle, Zapfen und Arme werden, wenn man von dem Stück AC absieht, auf Biegung und Verdrehung beansprucht. Das Torsionsmoment $A \cdot a = M_k$ verdreht den Arm CD um den Winkel $\varphi = \vartheta \cdot r$, worin ϑ = verhältnismäßiger Verdrehungswinkel ist. Für rechteckige Querschnitte ist (Zahlentafel 12.8)

$$\vartheta = \frac{M_d}{\psi \psi_1 h b^3 G} = \psi_2 \frac{M_d}{h b^3 G}.$$

Dieselbe Neigung zwischen Zapfen und Wellenstück AC kann auch bei einer geraden Welle hervorgerufen werden, wenn wieder an Stelle des Armes ein elastisches Glied mit dem Trägheitsmoment J_y und der Länge Δl eingesetzt wird. Aus der Biegegleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_k}{J_y E}.$$

folgt.
$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{M_k}{J_y E} \Delta l \approx \varphi_1.$$

Die Winkel φ und φ_1 werden gleich, wenn

$$\vartheta \cdot r = \frac{M_k}{J_y E} \Delta l \quad \text{oder} \quad J_y = \frac{M_k}{\vartheta E} \cdot \frac{\Delta l}{r}$$

ist. Dadurch ist — was die Neigung durch die Verdrehung der Arme anbelangt — die Kurbelwelle wieder auf eine gerade Welle zurückgeführt. Auch hier kann Δl wieder unendlich schmal gedacht werden, da der Inhalt der verzerrten Momentenfläche:

$$f = M_k \frac{J_0}{J_y} \Delta l = \frac{M_k J_0}{M_k \Delta l} \vartheta E \cdot r \Delta l = J_0 \vartheta E r \quad (33.5)$$

unabhängig von Δl ist.

Die Verbiegung der Kurbelarme und die Verdrehung des Zapfens bewirken außerdem ein Heraustreten der Stücke AC und BF aus der ursprünglichen Ebene der Kurbelarme. Die elastische Linie ist nun keine stetige Kurve mehr, sondern es treten in den Stellen C und F Sprünge auf, deren Gesamtgröße mit Δ bezeichnet sei. Dadurch ändern sich auch die Neigungswinkel der elastischen Linie in den Auflagerstellen um eine kleine — oft vernachlässigbare — Größe.

1. Der Arm CD (Abb. 33.5) verbiegt sich durch die Kraft A , so daß die Punkte C und D um den Betrag

$$f_1 = \frac{Ar^3}{3 J_k E}$$

gegenseitig verschoben werden.

2. Durch die Verdrehung des Zapfens DE um den Winkel $\vartheta' l$ entsteht eine Senkung des Punktes F gegenüber dem Punkte C von der Größe:

$$f_2 = \vartheta' \frac{l}{2} r \quad \text{worin} \quad \vartheta' = \frac{M_d}{J_p G} = \frac{Ar}{0,1 d^4 \cdot G} \text{ ist.}$$

3. Der Arm EF wird durch das Moment $M_d = P \cdot r$ und außerdem durch die Kraft B ver-

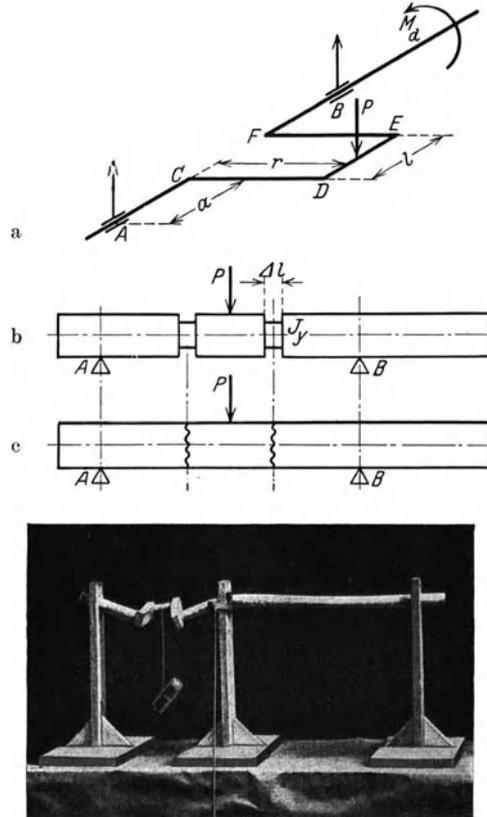
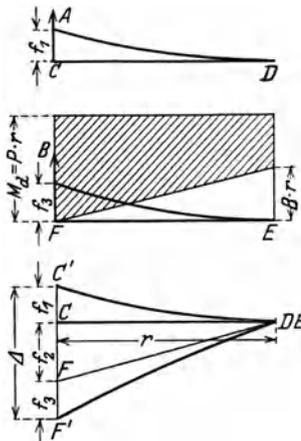


Abb. 33.4. Formänderungen der Kurbelwelle, wenn die Kräfte senkrecht zur Kröpfungsebene wirken (aus Enßlin: Kurbelwellen).

bogen; beide Verbiegungen wirken in entgegengesetzter Richtung. Nach den Formeln in Zahlen-
 tafel 12.1 ist die dadurch verursachte Senkung:



$$f_3 = \frac{P r^3}{2 J_k E} - \frac{B r^3}{3 J_k E}$$

Der Gesamtsprung ist: $\Delta = f_1 + f_2 + f_3$.

33.3. Mehrfach gelagerte und mehrfach gekröpfte Wellen.

Jede Kröpfung kann, wie vorher abgeleitet, durch elastische Glieder ersetzt werden, so daß die Kurbelwelle immer auf eine gerade Welle zurückgeführt werden kann. Die Formänderung der Kurbelarme durch das Drehmoment M_d darf dabei nicht übersehen werden. Dieses Drehmoment, das bei mehrfach gekröpfen Wellen im allgemeinen zwischen je zwei Kurbeln verschieden ist, erzeugt eine parallele Verschiebung der rechts und links der Kurbelarme liegenden Wellenstücke aus der Ebene der Kröpfung heraus (Abb. 33.6).

Abb. 33.5. Zur Berechnung der Sprünge.

Das Verfahren von Maxwell zur Bestimmung der statisch unbestimmten Auflagerreaktion C (Abschn. 12.5), ist von der Gestalt des untersuchten Trägers unabhängig, gilt demnach auch für die gekröpfte Welle. Besondere Beachtung ist jedoch notwendig, wenn durch die Kröpfung ein Drehmoment hindurch geht. Der dadurch hervorgerufene „Sprung“ in der elastischen Linie sei mit Δ bezeichnet. Die Folge davon ist, daß an der Stelle des Mittellagers eine Durch-

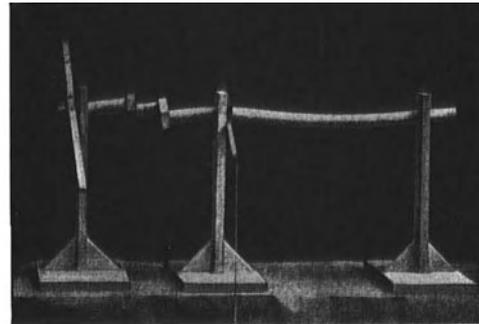
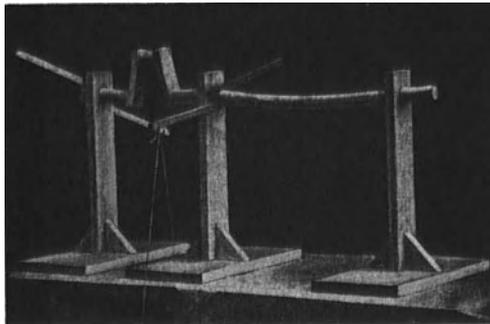
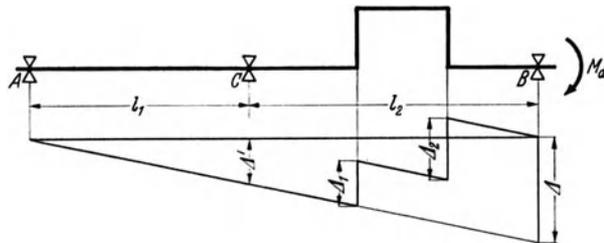


Abb. 33.6. Formänderungen der Kurbelwelle, wenn durch die Kröpfung ein Drehmoment geht (aus Enßlin).

biegung Δ' entsteht, die durch eine zusätzliche Lagerreaktion C_A aufgehoben wird und deren Größe (Abb. 33.7) aus

$$C_A \cdot y_c = \Delta'$$

berechnet werden kann. Dieser Mehrbetrag wird berücksichtigt durch algebraische Addition des Wertes in der Maxwell'schen Gleichung:



$$\sum P \cdot y - C y_c = \pm \Delta' \quad (33.6)$$

Abb. 33.7. Formänderung einer Kurbelwelle, wenn ein Drehmoment durch die Kröpfung geht.

Als Anwendungsbeispiel ist die Formänderung der in Abb. 33.8 gezeichneten dreifach gelagerten Kurbelwelle, für zwei Kurbelstellungen, untersucht worden. Zuerst muß die statisch unbestimmte Auflagerreaktion C , nach einer der in Abschn. 12.5 angegebenen Methoden, bestimmt werden.

33.31. Die Kräfte wirken in der Kröpfungsebene. Aus den Gleichgewichtsbedingungen erhalten wir die Gleichungen:

$$A + B + C = P, \quad \text{oder} \quad 500 + 1600 + 21\,200 = 23\,300 = A + B + C.$$

Die Summe der Momente in bezug auf C muß gleich Null sein:

$$138 A - 0,5 \cdot 88 - 1,6 \cdot 56 = 68 B - 21,2 \cdot 34.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt: $A = 4,85 - 0,33 C$, und $B = 18,45 - 0,67 C$.

Kontrolle: $A + B + C = 4,85 + 18,45 = 23,300 \text{ t}$.

Nach dem Satze von Castigliano muß für die ganze Welle $\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = \int_0^l \frac{M_x}{J_x E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial C} dx = 0$ sein.

Da das Trägheitsmoment der Welle veränderlich ist, formen wir die Gleichung etwas um:

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = \frac{1}{J_0 E} \int_0^l M_x \frac{J_0}{J_x} \frac{\partial M_x}{\partial C} dx = 0. \quad (33.7)$$

Für die elastischen Glieder ist $\mathfrak{U} = \int_0^{Al} \frac{M_k^2}{2 J_x E} dx$, worin nach Gl. (3) $J_x = J_k \frac{Al}{r}$ ist, so daß

$$\mathfrak{U} = \frac{M_k^2 r}{2 J_k E} \text{ wird, und } \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = \frac{M_k \cdot r}{J_k E} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial C} = \frac{1}{J_0 E} \cdot M_k \frac{J_0}{J_k} r \frac{\partial M_k}{\partial C}. \quad (33.8)$$

Um den Wert $\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C}$ für die ganze Welle zu berechnen, wird diese in eine Anzahl Teile geteilt (Abb. 33.8b). Da die Summe gleich Null ist, kann der für alle Teilstrecken gemeinsame Faktor $J_0 E$ bei der Berechnung weggelassen werden.

Strecke 1, von A ausgehend, für $x = 0$ bis $x = 20$ cm.

$$M_x = A \cdot x = (4,85 - 0,33 C) x, \quad \frac{\partial M}{\partial C} = -0,33 x, \quad J_0 = 3217 \text{ cm}^4, \quad J = 1620 \text{ cm}^4,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = \frac{J_0}{J_x} \int_0^{20} (0,33 C - 4,85) 0,33 x^2 dx = 0,33 \cdot \frac{3217}{1620} (0,33 C - 4,85) \frac{20^3}{3} = 576 C - 8560.$$

Strecke 2, für $x = 20$ bis $x = 50$ cm. $\frac{J_0}{J_x} = 1$.

$$M_x = A x \text{ und } \frac{\partial M}{\partial C} = -0,33 x.$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = 0,33 (0,33 C - 4,85) \frac{50^3 - 20^3}{3} = 4250 C - 62\,400.$$

Strecke 3, für $x = 50$ bis $x = 82$ cm. $\frac{J_0}{J_x} = 1$.

$$M_x = A x - 0,5 (x - 50) = 4,35 x - 0,33 C x + 25; \quad \frac{\partial M_x}{\partial C} = -0,33 x.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} &= \int_{50}^{82} (1,09 C x^2 - 1,436 x^2 + 8,25 x) dx \\ &= (1,09 C - 1,436) \frac{82^3 - 50^3}{3} + 8,25 \frac{82^2 - 50^2}{2} = 15\,480 C - 221\,400. \end{aligned}$$

Strecke 4, für $x = 82$ bis $x = 138$ cm. $\frac{J_0}{J_x} = 1$.

$$\begin{aligned} M_x &= A x - 0,5 (x - 50) - 1,6 (x - 82) \\ &= 2,75 x - 0,33 C x + 156,2; \quad \frac{\partial M}{\partial C} = -0,33 x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} &= \int_{82}^{138} (1,09 C x^2 - 0,9075 x^2 + 51,55 x) dx \\ &= (1,09 C - 0,9075) \frac{138^3 - 82^3}{3} + 51,5 \frac{138^2 - 82^2}{2} = 75\,540 C - 946\,000 \end{aligned}$$

Strecke 1', von B aus, für $x = 0$ bis $x = 34$ cm. $\frac{J_0}{J_x} = 1$.

$$M_x = B x = (18,45 - 0,67 C) x; \quad \frac{\partial M_x}{\partial C} = -0,67 x.$$

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial C} = - \int_0^{34} (12,39 - 0,449 C) x^2 dx = - (12,39 - 0,449 C) \frac{34^3}{3} = 5880 C - 162\,000.$$

Strecke 2', für $x = 34$ bis $x = 68$. $\frac{J_0}{J_x} = 1$.

$$M_x = Bx - 21,2(x - 34) \quad \text{und} \quad \frac{\partial M}{\partial C} = -0,67 x.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial C} &= \int_{34}^{68} (1,83 x^2 + 0,4489 C x^2 - 483 x) dx \\ &= (1,83 + 0,4489 C) \frac{68^3 - 34^3}{3} - 483 \frac{68^2 - 34^2}{2} = 41\,100 C - 669\,300. \end{aligned}$$

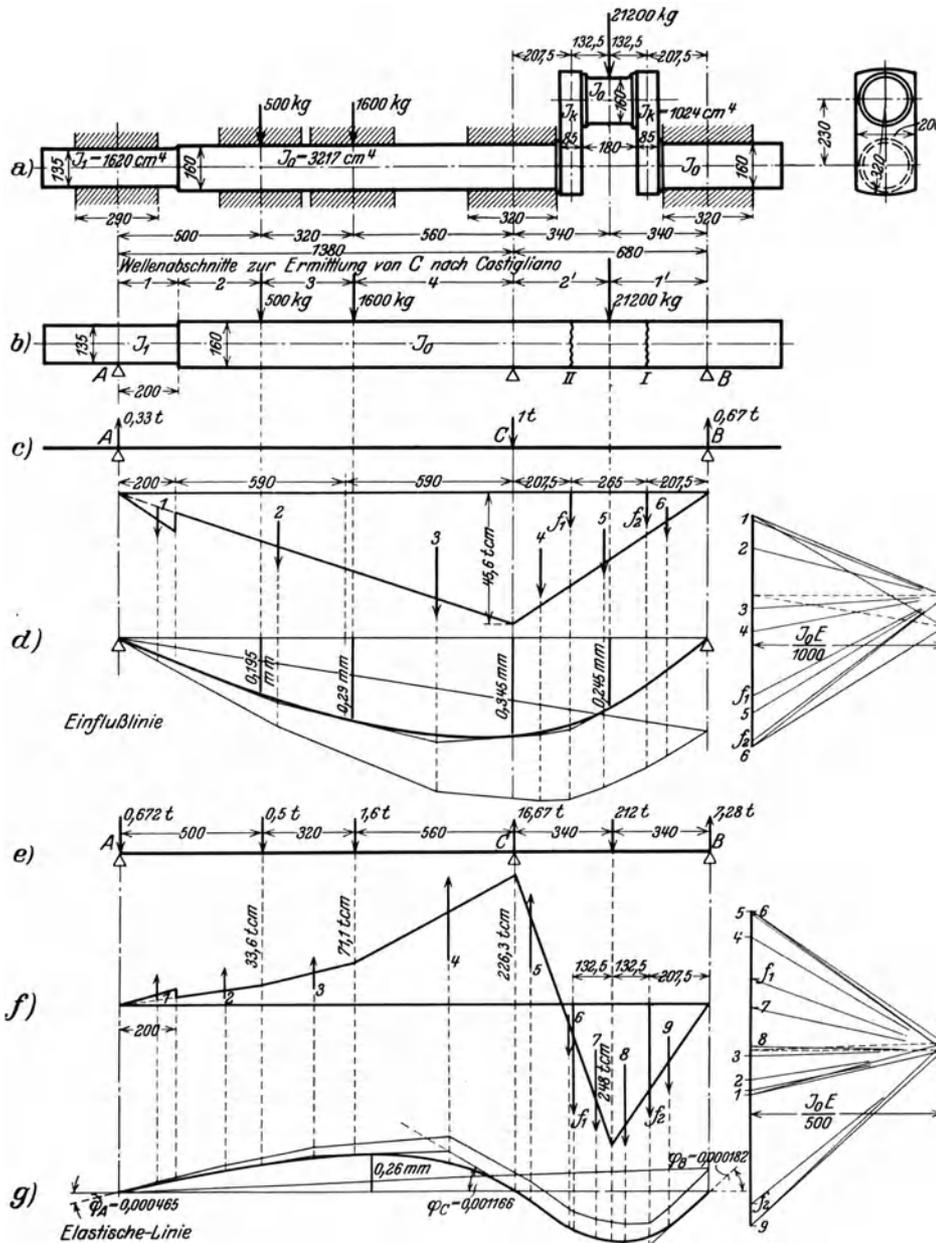


Abb. 33.8. Formänderung einer dreifach gelagerten Kurbelwelle. Kräfte in der Kröpfungebene.

Elastisches Glied I: $J_k = 1024 \text{ cm}^4$; $r = 23 \text{ cm}$.

$$M_k = B \cdot 20,75; \quad \frac{\partial M_k}{\partial C} = -0,67 \cdot 20,75 = -13,9.$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = (0,67 C - 18,45) \cdot 20,75 \cdot \frac{3217}{1024} \cdot 23 \cdot 13,9 = 13\,900 C - 383\,000.$$

Elastisches Glied II: $M_k = B \cdot 47,25 - 13,25 \cdot 21,2$
 $= 592 = 31,66 C$.

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = (31,66 C - 592) \frac{3217}{1024} \cdot 23 \cdot 31,66 = 72\,250 C - 1\,357\,000.$$

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = 228\,936 C - 3\,801\,996 = 0,$$

woraus $C = 16,60 \text{ t}$. Damit wird $A = 4,85 - 0,33 C = -0,64 \text{ t}$ und $B = 18,45 - 0,67 C = 7,34 \text{ t}$.

Als zweite Methode zur Bestimmung der Auflagerreaktion C ist in Abb. 33.8c, d die Einflußlinie (für $C = 1 \text{ t}$) konstruiert (vgl. S. 58).

Belastungsfläche . .	1	2	3	4	f_1	5	f_2	6
Inhalt cm ²	132	963	2115	802	2290	603	1005	145

Die zusätzlichen Belastungen f_1 und f_2 durch die elastischen Glieder sind nach Gl. (4) berechnet worden. Da die drei Lager in der gleichen Höhe liegen, spielt der Maßstab der konstruierten elastischen Linie keine Rolle.

Aus der Gleichung: $\sum P \cdot y = C \cdot y_0$ oder $19,5 \cdot 0,5 + 29 \cdot 1,6 + 24,5 \cdot 21,2 = C \cdot 34,5$ folgt $C = 16,67 \text{ t}$.

Um die Reaktion C mit genügender Genauigkeit zu erhalten, muß die Einflußlinie in großem Maßstab gezeichnet werden.

Nachdem C bekannt ist, kann die Momentenfläche berechnet oder konstruiert werden und daraus (nach Mohr) die elastische Linie.

Belastungsfläche . .	1	2	3	4	5	
Inhalt cm ²	-266,8	-705,6	-1675	-8325	-1835	
Belastungsfläche . .	6	f_1	7	8	f_2	9
Inhalt cm ²	143,4	4565	2062	2648	10 950	1573

Eine scharfe Kontrolle für die Richtigkeit der berechneten Reaktion C ist die Bedingung, daß die Stützpunkte der elastischen Linie in einer Linie liegen müssen.

33.32. Die Kräfte stehen senkrecht zur Kröpfungsebene (Abb. 33.9). Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt:

$$A + B + C = 12,2 + 0,92 + 0,285 = 13,405 \text{ t}$$

und

$$138 A - 83 \cdot 0,285 - 56 \cdot 0,92 = 68 B - 34 \cdot 12,2$$

oder $138 A = 68 B - 338,4$. Damit wird: $A = 2,785 - 0,33 C$ und $B = 10,62 - 0,67 C$.

Strecke 1, von A ausgehend, für $x = 0$ bis $x = 20 \text{ cm}$.

$$M_x = A x = (2,785 - 0,33 C) x; \quad \frac{\partial M}{\partial C} = -0,33 x.$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = -0,33 \frac{3217}{1620} \int_0^{20} (0,33 C - 2,785) dx = 576 C - 4850.$$

Da der Koeffizient von C in den Reaktionen A und B gleich groß ist, wie im Belastungsfall 33.1, ändern sich auch die Koeffizienten von C in den Ausdrücken $\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C}$ nicht. Es sind also nur die konstanten Glieder neu zu berechnen.

Strecke 2, für $x = 20$ bis $x = 50 \text{ cm}$. $\frac{J_0}{J_x} = 1$.

$$K = -0,33 \cdot 2,785 \frac{50^3 - 20^3}{3} = -35\,900; \quad \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = 4250 C - 35\,900.$$

Strecke 3, für $x = 50$ bis $x = 82$ cm. $\frac{J_0}{J_x} = 1$.

$$M_x = Ax - 0,285(x - 50) = (2,785 - 0,33 C)x - 0,285(x - 50).$$

$$K = -(2,785 - 0,285) \cdot 0,33 \frac{83^3 - 50^3}{3} - 2,85 \cdot 50 \cdot 0,33 \cdot \frac{83^2 - 50^2}{2}$$

$$= -127\,300;$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = 15\,480 C = 127\,300.$$

Strecke 4.

$$K = -(2,785 - 0,285 - 0,92) \cdot 0,33 \frac{138^3 - 82^3}{3}$$

$$- (0,285 \cdot 50 + 0,92 \cdot 82) \cdot 0,33 \frac{138^2 - 82^2}{2}$$

$$= -544\,500;$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = 75\,540 C - 544\,500.$$

Strecke 1', von B aus.

$$K = -0,67 \cdot 10,62 \cdot \frac{34^3}{3} = -93\,200;$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = 5880 C - 93\,200.$$

Strecke 2'.

$$K = -(10,62 - 12,2) \cdot 0,67 \frac{68^3 - 34^3}{2} - 12,2 \cdot 34 \cdot 0,67 \frac{68^2 - 34^2}{2}$$

$$= -385\,000;$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = 41\,100 C - 385\,000.$$

Die Kurbelarme werden auf Verdrehung beansprucht mit dem Moment M_k . Die Formänderungsarbeit $\mathfrak{U} = \frac{1}{2} M_k \cdot \vartheta \cdot r$ wird mit $\vartheta = \psi_0 \frac{M_k}{h b^3 G}$

$$\mathfrak{U} = \frac{\psi_0}{2 h b^3 G} M_k^2 r \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = \frac{\psi_0}{h b^3 G} M_k \frac{\partial M_k}{\partial C} r.$$

Mit $G = 0,385 E$ und $J_k = \frac{1}{12} h b^3$ wird:

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = \frac{1}{J_0 E} \cdot \frac{J_0}{J_k} \cdot \frac{\psi_0 r}{4,62} M_k \frac{\partial M_k}{\partial C}.$$

Für den Arm I ist: $h = 20$ cm, $b = 8,5$, $\frac{h}{b} = 2,36$; $\psi_0 = 4,09$.

$$M_k = (10,62 - 0,67 C) \cdot 20,75.$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = -\frac{4,09 \cdot 23}{4,62} \cdot \frac{3217}{1024} (10,62 - 0,67 C) \cdot 20,75^2 \cdot 0,67 = 12\,370 C - 196\,000.$$

Für den Arm II ist $M_k = 47,25(10,62 - 0,67 C) - 13,25 \cdot 12,2$
 $= 340,4 - 31,65 C.$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = -\frac{4,09 \cdot 23}{4,62} \cdot \frac{3217}{1024} (340,4 - 31,65 C) \cdot 31,65 = 64\,100 C - 600\,000$$

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = 219\,296 C - 2\,076\,750,$$

woraus $C = 9,47$ t. Damit wird $A = -0,341$ t und $B = 4,28$ t.

Für eine genaue Untersuchung sind noch die Formänderungen der Arme und des Zapfens zu berücksichtigen, wodurch Sprünge in der elastischen Linie entstehen.

Für die Biegung des Armes I ist:

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = \frac{1}{J_k E} \int_0^r M_x \frac{\partial M_x}{\partial C} dx = \frac{1}{J_0 E} \frac{J_0}{J_k} \int_0^r M_x \frac{\partial M_x}{\partial C} dx.$$

$$M_x = Bx = (10,62 - 0,67 C)x.$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial C} = -0,67 x; \quad J_k = \frac{1}{12} \cdot 8,5 \cdot 20^3 = 5700 \text{ cm}^4.$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = - \frac{J_0}{J_k} \int_0^{23} (10,62 - 0,67 C) \cdot 0,67 x^2 dx = 1030 C - 16\,300.$$

Für die Verdrehung des Kurbelzapfens:

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{2} M_x \vartheta \cdot l = \frac{M_d^2 l}{2 J_p G}.$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = \frac{l}{J_p G} M_d \frac{\partial M_d}{\partial C} = \frac{1}{J_0 E} \cdot \frac{l \cdot J_0 E}{J_p G} M_d \frac{\partial M_d}{\partial C},$$

worin $J_p = \frac{\pi}{32} d^4 = 6450$, $l = \text{Zapfenlänge} = 26,5 \text{ cm}$, $G = 0,385 E$ ist.

$$M_d = B \cdot r = (10,62 - 0,67 C) r; \frac{\partial M_d}{\partial C} = -0,67 \cdot 23.$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = \frac{26,5 \cdot 3217 \cdot 23^3 \cdot 0,67}{6450 \cdot 0,385} (10,62 - 0,67 C) = 8170 C - 129\,500.$$

Für die Biegung des Armes II:

$$M_x = P r - (P - B) x$$

$$= 12,2 \cdot 23 - (12,2 - 10,62 + 0,67 C) x = 280 - 1,58 x - 0,67 C x.$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial C} = -0,67 x.$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = - \frac{3217}{5700} \cdot 0,67 \left\{ 280 \cdot \frac{23^3}{2} - (1,58 + 0,67 C) \frac{23^3}{2} \right\} = 1030 C - 25\,500.$$

Mit Berücksichtigung dieser Glieder wird:

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C} = 229\,526 C - 2\,248\,050,$$

woraus $C = 9,8 \text{ t}$ und damit $A = -0,455 \text{ t}$ und $B = 4,06 \text{ t}$.

Für die Bestimmung der Neigungswinkel ist die Konstruktion der elastischen Linie in Abb. 33.9 durchgeführt, wobei wieder (als Kontrolle der Genauigkeit) die drei Punkte A, B und C in einer Linie liegen müssen.

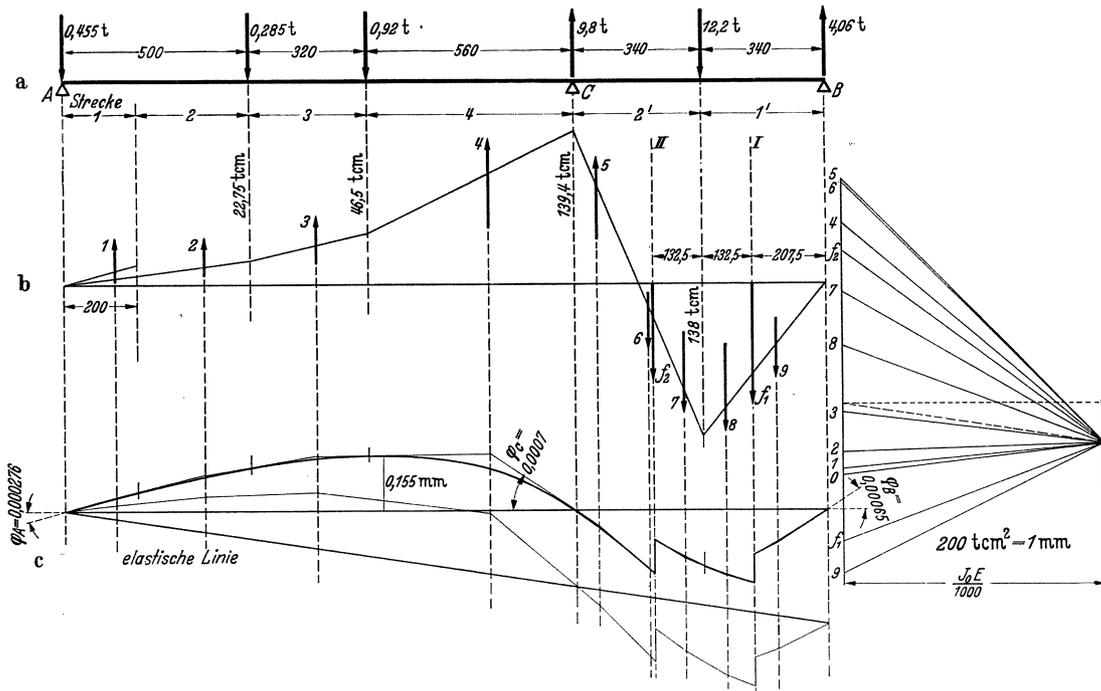


Abb. 33.9. Formänderung einer dreifach gelagerten Kurbelwelle. Kräfte stehen senkrecht zur Krüpfungsebene.

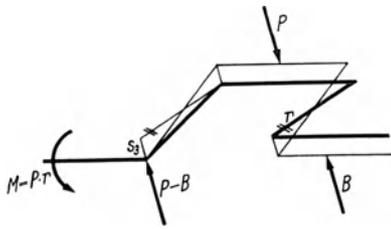


Abb. 33.10.

Berechnung der Sprünge: 1. Durch Biegung des Armes I:

$$s_1 = \frac{Br^3}{3EJ} = \frac{4060 \cdot 12\,167}{3 \cdot 2\,200\,000 \cdot 5700} = 0,00131 \text{ cm.}$$

2. Durch Verdrehung des Kurbelzapfens:

$$s_2 = \frac{M_d \cdot l}{9 \cdot J_p} \cdot r = \frac{4060 \cdot 23^2 \cdot 26 \cdot 5}{850\,000 \cdot 6450} = 0,0104 \text{ cm.}$$

3. Durch Biegung des Armes II:

$$s_3 = \frac{Mr^2}{2JE} - \frac{(P-B) \cdot r^3}{3JE} = \frac{r^3}{6JE} [3P - 2(P-B)]$$

$$= \frac{23^3 (12 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 8 \cdot 14)}{6 \cdot 5700 \cdot 2200} = \frac{12\,167 \cdot 20 \cdot 32}{6 \cdot 5700 \cdot 2200} = 0,00328 \text{ cm}$$

$$\Delta_1 = s_1 + \frac{s_2}{2} = 0,00131 + 0,0052 = 0,00651 \text{ cm}$$

$$\Delta_2 = s_3 + \frac{s_2}{2} = 0,00328 + 0,0052 = 0,00848 \text{ cm.}$$

In Zeichnung 100fach: $\Delta_1 = 6,51 \text{ mm}$ und $\Delta_2 = 8,48 \text{ mm}$.

Bei der Berechnung der mehrfach gelagerten Kurbelwellen von Automobil- oder Flugmotoren darf keine starre Lagerung vorausgesetzt werden; die Formänderung des Motorgehäuses ist dabei zu berücksichtigen.

34. Kritische Drehzahlen.

Aus der Leistungsgleichung $N = P \cdot v$ folgt, daß je größer die Geschwindigkeit v wird, um so kleiner die zur Übertragung einer bestimmten Leistung erforderlichen Kräfte werden. Darum strebt der Maschinenbau zu immer höheren Drehzahlen, wofür Riedler das treffende

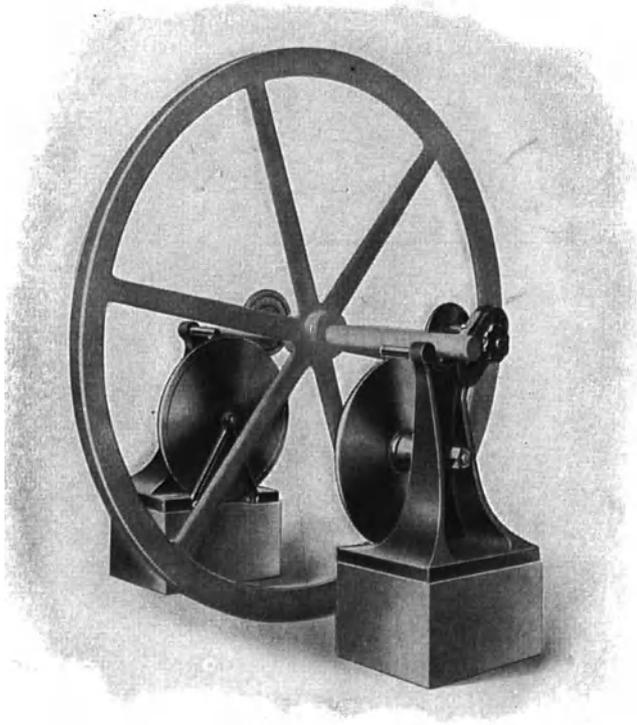


Abb. 34.1. Vorrichtung für die statische Ausbalancierung. (Treibwerk G. m. b. H., Düsseldorf.)

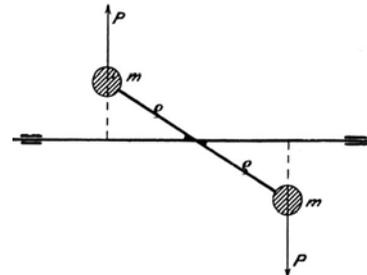


Abb. 34.2. Unausgeglichene Fliehkräfte trotz in der Achse liegendem Schwerpunkt. (Aus Stodola.)

Wort „Schnellbetrieb“ geprägt hat. Welche Ersparnisse an Material und Platzbedarf damit erreicht werden können, erkennt man aus der Gegenüberstellung der 2000 PS-Dampfmaschine (mit $n = 95$) auf der Weltausstellung in Paris (1900), die bei einer Grundfläche von $7,5 \times 10 \text{ m}^2$ eine Höhe von 12 m beanspruchte (das Schwungrad allein wog 40 t), und einer Dampfturbine von der gleichen Leistung, die bei $n = 1500 \text{ Uml./min}$ leicht auf einer Grundfläche von $1 \times 2 \text{ m}^2$ untergebracht werden kann.

Die größte im Betrieb befindliche Kolbendampf-Dynamo von 4700

kVA ¹ hat bei $n = 83/\text{min}$ ein Gesamtgewicht von 665 t oder 143 kg/KVA. Eine Turbodynamo von 20 000 KVA wiegt bei	$n = 1000$	1500	3000/min
	nur 14	10	6 kg/KVA.

¹ Aus Lasche, O.: Konstruktion und Material im Bau von Dampfturbinen. Berlin: Julius Springer.

Solange die Mittellinie der Welle eine freie Achse der darauf sitzenden Teile ist und bleibt, ist kein Grund vorhanden zu befürchten, daß die Welle eine schädliche Formänderung durch eine hohe Drehzahl erfahren könnte. Man ist daher immer bestrebt, die umlaufenden Teile nach Möglichkeit so auszubalancieren, daß der Gesamtschwerpunkt mit der Wellenmittellinie zusammenfällt.

1. Ausbalancierung. Die Welle mit den darauf sitzenden Teilen wird auf besonders ausgebildeten Stützen (Abb. 34.1) frei drehbar gelagert. Wenn sie bei Drehung um 360° in keiner Lage irgendeine Neigung zur Drehung zeigt, nennt man sie statisch ausbalanciert. Diese Ausbalancierung ist aber für den vollständigen Massenausgleich drehender Teile nicht ausreichend. Die Fliehkräfte (Abb. 34.2) können nämlich ein Kräftepaar bilden, das um so kräftiger wird, je höher die Drehzahl ist. Es muß daher noch die Bedingung gestellt werden, daß die Momente der Fliehkräfte verschwinden. Diese sind durch zwei gleich große Massen auszugleichen, die zentrisch symmetrisch zur Stabachse und in der Ebene des Kräftepaares anzu bringen sind. Die Massen können übrigens in zwei beliebigen Ebenen senkrecht zur Stabachse liegen. Die Schwierigkeit besteht nun darin, die Ebene der unausgeglichenen Fliehkräfte zu bestimmen. Dazu dient die dynamische Auswuchtung (Abschn. 34.2).

34.1. Kritische Drehzahl für Biegschwingungen.

Auch bei sorgfältiger Ausbalancierung bleibt immer eine kleine freie Fliehkraft übrig, die mit dem Quadrat der Umfangsgeschwindigkeit steigt, also beim Übergang von 100 auf 1000 Umdrehungen den 100fachen Wert erreicht.

Eine sonst symmetrische Scheibe sei mit einem um den Betrag e exzentrisch liegenden Schwerpunkt auf einer gewichtlos gedachten, senkrechten Welle so befestigt, daß sie bei einer Biegung der Welle der ursprünglichen Lage parallel bleibt (Abb. 34.3). Bei der Drehung wird die Welle durch die Fliehkraft $F = m(y + e)\omega^2$ um einen Betrag y durchgebogen ($m =$ Masse der Scheibe).

Wenn die Welle keine Biegesteifigkeit hätte, würde auch die kleinste Exzentrizität e unendlich große Durchbiegungen verursachen. Die Biegespannungen beschränken aber die Durchbiegung, so daß im Beharrungszustand Gleichgewicht zwischen der Fliehkraft und den elastischen Kräften vorhanden ist, wenn von der inneren Reibung und von den Oberflächenwiderständen durch das umgebende Medium abgesehen wird. Innerhalb des Hooke'schen Gesetzes ist die Kraft mit der Durchbiegung proportional:

$$P = c \cdot y,$$

worin also c die Kraft für die Einheit der Durchbiegung ist. Die Werte von c können für einfache Belastungsfälle aus Zahlentafel 12.1 entnommen werden. So ist z. B., wenn eine Einzelkraft in der Mitte wirkt:

$$y = f = \frac{Pl^3}{48JE} \quad \text{und} \quad c = \frac{48JE}{l^3}.$$

Für abgestufte Wellen kann f und damit c in bekannter Weise aus der Konstruktion der elastischen Linie (nach Mohr) berechnet werden. Die Gleichgewichtsbedingung lautet also:

$$m(f + e)\omega^2 = cf \quad \text{oder} \quad f = \frac{m\omega^2 e}{c - m\omega^2}. \tag{34.1}$$

Steigern wir die Winkelgeschwindigkeit bis $c - m\omega^2 = 0$, also

$$\text{1. Methode.} \quad \omega = \omega_k = \sqrt{\frac{c}{m}} \tag{34.2}$$

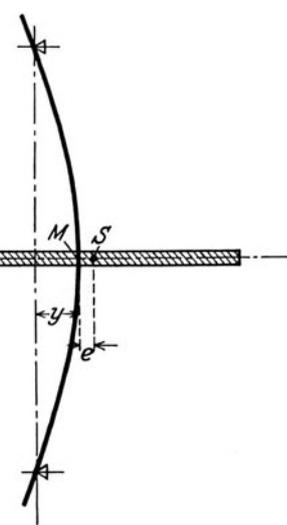


Abb. 34.3. Schwerpunktlage unterhalb der kritischen Drehzahl.
M = Mittelpunkt, S = Schwerpunkt der Scheibe.

*Federkonstante wie
„Einheitsk.“*

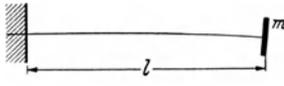
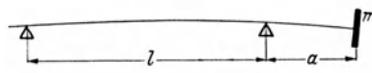
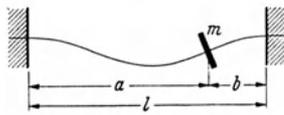
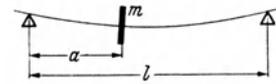
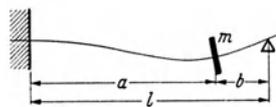
ist, so wird $f = \infty$, d. h. die Welle müßte zerbrechen. Dieser Betrag von ω wird als kritische Winkelgeschwindigkeit bezeichnet, und die entsprechende Drehzahl als kritische Drehzahl.

Sitzt die Scheibe nicht symmetrisch, so stellt sie sich schräg und es tritt ein Kreismoment M hinzu, das aus dem Drallsatz:

$$M = \frac{d}{dt} (\Theta \cdot \omega)$$

berechnet werden kann. Bei der praktisch meist geringen Formänderung der Welle kann das Kreismoment vernachlässigt werden. Unter dieser Voraussetzung gilt Gl. (2) ohne weitere

Zahlentafel 34.1. Eigenschwingungszahlen für eine Einzelmasse.

	$\omega_k^2 = \frac{3 J \cdot E}{m \cdot l^3}$
	$\omega_k^2 = \frac{3 J \cdot E}{m (l + a) a^2}$
	$\omega_k^2 = \frac{3 J \cdot E}{m} \cdot \frac{l^3}{a^3 b^3}$ für $a = b = l/2, \omega_k^2 = \frac{192 J \cdot E}{m \cdot l^3}$
	$\omega_k^2 = \frac{3 J \cdot E \cdot l}{m a^2 (l - a)^2}$ für $a = l/2 : \omega_k^2 = \frac{48 J \cdot E}{m l^3}$
	$\omega_k^2 = \frac{12 J \cdot E}{m} \frac{l^3}{a^3 b^3 (3l + b)}$ für $b = l \sqrt{0,17} : \omega_k^2 = \frac{102 J \cdot E}{m l^3}$

Einschränkung auch für beliebig angeordnete Scheibe und beliebig gelagerte Wellen. Bei gegebener Masse hängt die kritische Drehschnelle also nur von der Federkonstante c ab. Alle Faktoren, die c beeinflussen, ändern (bei unveränderlicher Masse) auch die kritische Drehzahl. Die Voraussetzung, daß die Welle „frei drehbar“ gelagert sei, ist praktisch nicht immer erfüllt, insbesondere nicht bei den großen Durchbiegungen in der Nähe der kritischen Drehzahl. An den Lagerstellen wirken dann Einspannmomente, welche die größte Durchbiegung verkleinern,

die Federkonstante und somit die kritische Drehzahl vergrößern. Alle Faktoren, die keinen Einfluß auf c haben, können (bei unveränderlicher Masse) auch die kritische Drehzahl nicht beeinflussen. Überlagert man der Fliehkraft eine weitere Kraft (z. B. Riemenzug, Zahndruck, Schwerkraft bei horizontaler Lagerung usw.) mit einer unveränderlichen Wirkung, so kann dadurch ω_k nicht geändert werden.

Ist z. B. die Welle horizontal gelagert, so entsteht durch das Eigengewicht der Scheibe und der Welle eine Verbiegung y_0 (Abb. 34.4). Die hinzutretende Fliehkraft vergrößert diese Biegung

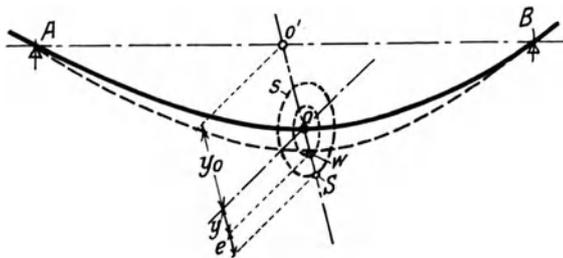


Abb. 34.4. Einfluß der Schwerkraft.

um den Betrag y , der so zu berechnen ist, als ob die Schwere nicht vorhanden wäre. Der Schwerpunkt S beschreibt einen Kreis um den ursprünglichen Wellenmittelpunkt O und nicht um den vermeintlichen Drehpunkt O' . Für jene von O aus gerechnete Verbiegung y bleibt die gefundene Beziehung für die kritische Drehzahl unverändert. Die Verbiegung der Welle durch das Gewicht der Scheibe beeinflusst also die kritische Drehzahl nicht. Ob die Welle horizontal,

vertikal oder schief steht, die kritische Drehzahl bleibt unverändert.

Bei horizontaler Aufstellung ist $G = c f_0$ oder $f_0 = \frac{G}{c}$. Da aber $G = m g$ und $c = m \omega_k^2$ ist, so wird

$$f_0 = \frac{m g}{m \omega_k^2} = \frac{g}{\omega_k^2} \quad \text{oder} \quad \omega_k^2 = \frac{g}{f_0} \tag{33.3}$$

Bei einer neu zu berechnenden Welle, für welche die kritische Drehzahl vorgeschrieben ist, ist also auch die Durchbiegung durch das Eigengewicht schon bestimmt, unabhängig davon, welche Abmessungen die Welle erhält. Um die Durchbiegung f_0 klein zu halten, muß die kritische Winkelgeschwindigkeit groß sein; kleine kritische Drehzahlen ($n < 1000$) sind demnach praktisch unzulässig.

Wirken dagegen zusätzliche Kräfte oder Momente mit anderem Wirkungssinn als dem der Fliehkraft (z. B. magnetische Kräfte, elastische Lagerung, Kreiselmomente usw.), so ändert sich auch die kritische Drehschnelle.

Der Einfluß des magnetischen Feldes z. B. beim Rotor einer elektrischen Maschine macht sich in folgender Weise bemerkbar. Infolge der Durchbiegung der Welle ist der Luftspalt zwischen Rotor und Gehäuse nicht mehr überall gleich groß. Der nun einseitige magnetische Zug hat die Tendenz, die Welle noch mehr zu verbiegen, so daß die rückwirkende elastische Kraft kleiner wird. Ist c_1 der magnetische Zug für die Einheit der Exzentrizität, so ist

$$\omega_k = \sqrt{\frac{c - c_1}{m}}. \tag{34.4}$$

Bei elastischer Lagerung der Welle haben wir zwei hintereinander geschaltete Federn (vgl. Abschn. 26.4). Ist c_L die Federkonstante jedes Lagers, c die Federkonstante der Welle, so ist bei symmetrischer Anordnung der Scheibe die Federkonstante der elastisch gelagerten Welle aus der Gleichung:

$$\frac{1}{c_E} = \frac{1}{c} + \frac{1}{2c_L} \tag{34.5}$$

zu berechnen. Da c_E immer kleiner als c , wird die kritische Drehzahl durch elastische Lagerung der Welle vermindert. Bei praktischen Ausführungen sind die Federkonstanten der einzelnen Lagerkörper oft verschieden nach Größe und Richtung; dazu kommt noch die mitschwingende Masse des Lagerkörpers. Man konstruiert die Lagerung möglichst starr. A. Stodola hat zuerst auf die kritische Unruhe hingewiesen, die durch die Nachgiebigkeit des Ölfilms im Lager hervorgerufen wird.

Die Reibung des umgebenden Mediums beeinflusst die Höhe der kritischen Drehzahl nicht; sie hat nur zur Folge, daß der größte Ausschlag endlich bleibt und um so kleiner wird, je zäher das umgebende Mittel ist (vgl. Abschn. 34.2), Theorie der Auswuchtmaschine.

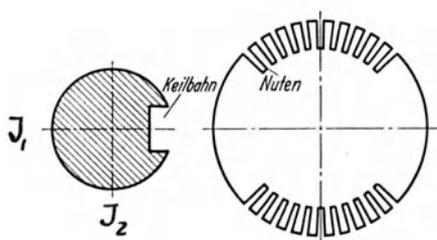


Abb. 34.5.

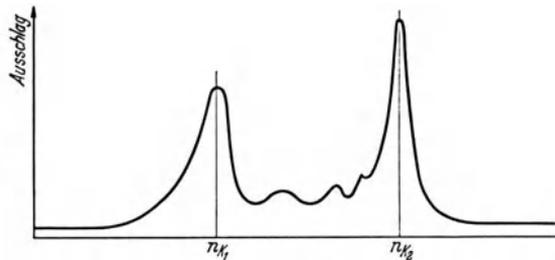
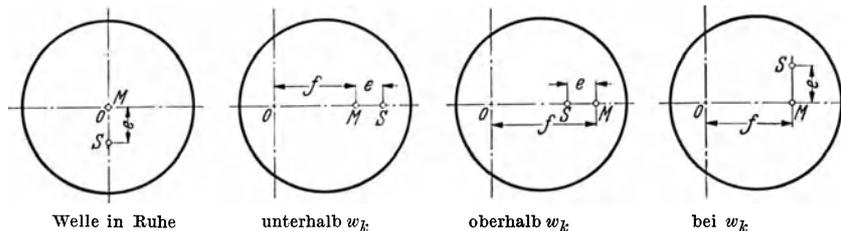


Abb. 34.6.

Ist das Trägheitsmoment der Welle nicht konstant, sondern in bezug auf zwei Achsen verschieden (Abb. 34.5), so treten zwei kritische Drehzahlen erster Ordnung auf (Abb. 34.6)¹. Der zwischen beiden liegende Bereich ist nicht stabil.

Der schwedische Ingenieur de Laval war der erste, der durch praktische Versuche nachwies, daß man eine Welle auch schneller als mit der kritischen Drehzahl laufen lassen kann. Praktisch kann man die kritische Drehzahl ohne Bruchgefahr überschreiten, wenn Führungen vorhanden sind, die eine zu große Durchbiegung verhindern. Die Erfahrung und nachher auch die Theorie (durch Stodola und A. Föppl) beweisen übereinstimmend die überraschende Tatsache, daß nach Überschreiten der kritischen Drehzahl ein neuer und zwar stabiler Gleichgewichtszustand sich einstellt, bei dem der Wellenmittelpunkt M und der Schwerpunkt S ihre



Welle in Ruhe

unterhalb w_k

oberhalb w_k

bei w_k

Abb. 34.7. Lage des Schwerpunktes.

¹ Trans. Amer. Soc. mech. Engr. Bd. 50 (1928) S. 57, APM. 50—16.

Lagen vertauschen (Abb. 34.7). Setzt man in $\omega_k^2 = c/m$ ein Gl. (1), so wird

$$f = \frac{m\omega^2 e}{m\omega_k^2 - m\omega^2} = \frac{e}{\left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2 - 1} = -\frac{e}{1 - \left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2}.$$

Durch geeignete Wahl von $\frac{\omega_k}{\omega}$ kann f beliebig verkleinert werden, bis $f = e$. Das war der Weg, den de Laval mit seiner berühmten „biegsamen Welle“ beschritten hat (Abb. 34.8), die bei knappstem Durchmesser eine so weite Lagerung erhielt, daß die Winkelgeschwindigkeit des Betriebes den 7fachen Wert von ω_k erreichte.

Für $e = 0$ wird die Auslenkung y bei der kritischen Drehschnelle $= 0/0$, also unbestimmt; die Bewegung ist nicht stabil. Die Exzentrizität e steht senkrecht auf OM ; der Schwerpunkt eilt der größten Wellenauslenkung um $\pi/2$ voraus.

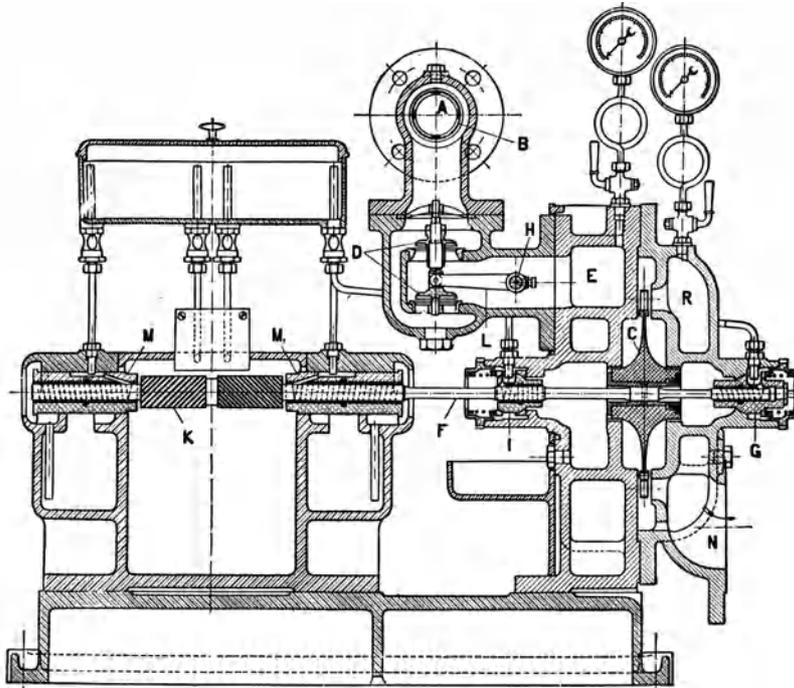


Abb. 34.8. Biegsame Welle (F) von de Laval. (Aus Stodola.)

Erteilt man der stillstehenden Welle senkrecht zur Achse einen Stoß, so wird sie in Schwingungen geraten. Die Bewegungsgleichung dafür ist:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -P = -cy, \quad (34.6)$$

worin y die veränderliche Auslenkung ist. Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (34.7)$$

Wird

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t$$

eingesetzt, so erhält man:

$$-m\omega^2 (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = -c (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

oder

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (33.8)$$

Die Eigenfrequenz der Welle läßt sich experimentell bestimmen und stimmt nach Gl. (1) mit der kritischen Drehzahl genau überein. Diese Berechnung der Eigenschwingungszahl gilt nicht nur für Wellen, sondern für alle elastischen Körper (Federn) und für Zug-(Druck-), Biege- und Torsionsbeanspruchung.

Zahlenbeispiel 34.1. Wie groß ist die Eigenschwingungszahl eines Aufzugseiles von 25 m Länge bei einer Belastung von $P = 500$ kg, wenn die Querschnittsfläche der Drähte 2 cm^2 ist?

Aus Gl. (12.2) $\Delta l = P \cdot l / f E$ folgt die Einheitskraft des Seiles $c = f \cdot E / l$ und damit die Eigenschwingungszahl $\omega = \sqrt{c/m}$. Der E -Wert eines Drahtseiles ist nicht gleich dem E -Wert für Stahl, sondern (infolge des nachgiebigen Hanfkernes, vgl. Abschn. 63) viel kleiner. Man rechnet mit $E = 3/8 \times 2 \cdot 10^6 = 750000 \text{ kg/cm}^2$. Dann ist $c = 2 \times 75 \cdot 10^4 / 2500 = 600 \text{ kg/cm}$, $m = 500/981 \approx 0,5 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$ und $\omega_k = \sqrt{600/0,5} = 35/s$.

Zahlenbeispiel 34.2. Es soll die Eigenschwingungszahl der in Zahlenbeispiel 27.1 berechneten Wagenfeder bestimmt werden.

Aus $P_2 = f_2 \cdot P_n / f_n = c \cdot f_2$ folgt die Federkonstante $c = P_n / f_n = 2000/5,4 \text{ kg/cm}$. Bei vollbelastetem Wagen ist $m = 5755/981 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$ und damit die Eigenfrequenz:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{2000 \cdot 981}{5755 \cdot 5,4}} = 8/s.$$

Bei leerem Wagen ist
$$\omega = \sqrt{\frac{2000 \cdot 981}{3755 \cdot 5,4}} = 10/s.$$

Soll das Eigengewicht G_w der Welle berücksichtigt werden, so kann man überschlagsweise einen Prozentsatz vom Wellengewicht zum Scheibengewicht hinzuzählen. Für eine in der Wellenmitte wirkende Einzellast ist: $f = G l^3 / 48 J E$.

Für die gleichmäßig verteilte Belastung $g_1 = G_w / l$ ist: $f = 5 g_1 l^4 / 384 J E$.

Bei gleicher Durchbiegung f ist

$$G = \frac{5}{8} g_1 l = \frac{5}{8} G_w. \quad (34.9)$$

Wenn diese Überschlagrechnung auch für die glatte, unbelastete Welle gelten würde, so wäre ihre kritische Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_k^2 = \frac{c}{0,625 m} = 1,6 g / f_0.$$

Die genaue Rechnung gibt dafür¹

$$\omega_k^2 = 1,2685 g / f_0, \quad (34.10)$$

also $\omega_k = \sqrt{1,6/1,2685} = 1,12$ mal zu groß. Da das Wellengewicht im allgemeinen nur ein Bruchteil des Scheibengewichtes ist, scheint diese Überschlagrechnung recht brauchbar.

Aus Gl. (10) folgt für eine volle Welle mit $J = \frac{\pi}{64} d^4$ und $g_1 = \frac{\pi}{4} d^2 \gamma$:

$$\omega_k^2 = 1,3 \cdot 10^6 d / l^2.$$

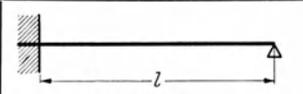
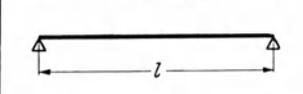
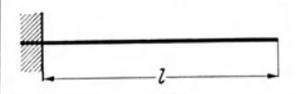
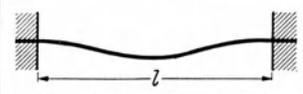
Für eine Rohrwelle mit $J = \frac{\pi}{64} (d_a^4 - d_i^4)$ und $g_1 = \frac{\pi}{4} (d_a^2 - d_i^2) \gamma$ ist

$$\omega_k^2 = 1,3 \cdot 10^6 \frac{\sqrt{d_a^2 + d_i^2}}{l^2}$$

Setzt man $\sqrt{d_a^2 + d_i^2} = 2 d_m$, so folgt daraus, daß die kritische Drehzahl einer dünnwandigen Rohrwelle $\sqrt{2} = 1,41$ mal so hoch liegt als die einer vollen Welle, deren Außendurchmesser gleich dem mittleren Durchmesser der Rohrwelle ist.

Wenn mehrere Massen auf einer Welle mit veränderlichen Durchmes-

Zahlentafel 34.2. Werte von β_i zur Berechnung der kritischen Drehzahlen bei gleichmäßig belasteten runden Wellen aus der Gleichung $\omega_k^2 = 12,81 \cdot 10^4 \beta_i^2 \frac{d}{l^2}$.

	$\beta_1 = 1,875$	$\beta_2 = 4,694$	$\beta_3 = 7,855$
	π	2π	3π
	3,927	7,069	10,21
	4,73	7,853	10,966

¹ Holba, J. J.: Berechnungsverfahren zur Bestimmung der kritischen Drehzahlen von geraden Wellen. Berlin: Julius Springer 1936.

sern angeordnet sind, wird die Berechnung der kritischen Drehzahl sehr umständlich. Die Aufgabe kann aber leicht graphisch gelöst werden. Aus der Gleichung:

$$m(y + e)\omega^2 = c \cdot y \tag{33.1}$$

folgt mit $\omega_k^2 = \frac{c}{m}$, daß für die kritische Drehzahl die Fliehkräfte mit den elastischen Kräften auch dann in Gleichgewicht sind, wenn $e = 0$ ist. Nun sind aber die Auslenkungen y nicht bekannt. Das Verfahren (von Prof. A. Stodola¹ besteht nun darin, daß die elastische Linie der in ihren Abmessungen gegebenen Welle schätzungsweise aufgezeichnet wird. Man geht dabei zweckmäßig von der elastischen Linie der Welle in Ruhezustand infolge der Gewichtsbelastung aus. Mit einer willkürlichen Winkelgeschwindigkeit ω (z. B. gleich 100) können aus den angenommenen Durchbiegungen y die Fliehkräfte berechnet werden. Mit Hilfe dieser Kräfte läßt sich in bekannter Weise (nach Mohr) eine elastische Linie konstruieren. Ihre Ordinaten y' werden sich von den ursprünglich angenommenen Werten unterscheiden. Man kann indessen einen davon, z. B. den in der Mitte, dessen Größe y'_m sei, mit dem ursprünglichen Wert y_m in Übereinstimmung bringen, indem statt ω eine neue Winkelgeschwindigkeit

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{y_m}{y'_m}} \tag{34.11}$$

angenommen wird. Ändert man alle Ordinaten in diesem Verhältnis, so müßte die so erhaltene „berichtigte“, elastische Linie mit der angenommenen übereinstimmen, wenn diese die richtige wäre. In diesem Falle wäre ω' die kritische Geschwindigkeit. In Wirklichkeit werden die beiden Linien etwas voneinander abweichen, so daß das Verfahren wiederholt werden muß, indem die „berichtigte“ elastische Linie als zweite Annahme gelten kann. Eine mehr als zweimalige Wiederholung ist selten erforderlich.

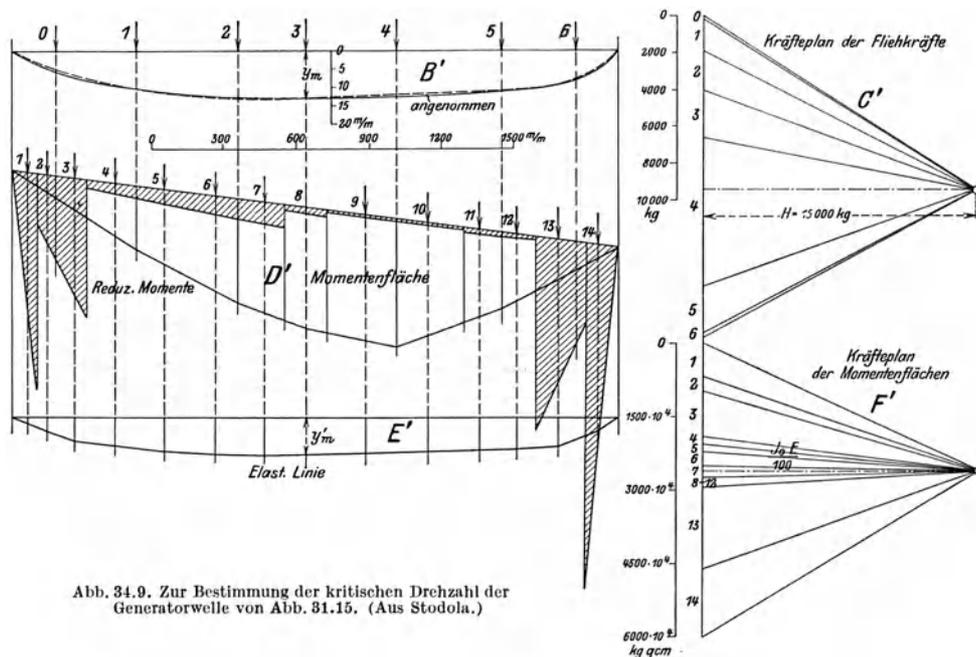


Abb. 34.9. Zur Bestimmung der kritischen Drehzahl der Generatorwelle von Abb. 31.15. (Aus Stodola.)

In Abb. 34.9 ist als Zahlenbeispiel die Konstruktion der kritischen Drehzahl für die Welle in Abb. 31.15 durchgeführt, und zwar unter Berücksichtigung der Versteifung durch den Anker. Dabei ist $y_m = 13,1$ mm und $y'_m = 1,5$ mm, so daß $\omega' = 100 \sqrt{\frac{13,1}{1,5}} = 296$ wird und $n_k = 2820$. Die durch den Versuch bestimmte kritische Drehzahl lag zwischen $n = 2600$ und 2900 , so daß tatsächlich die versteifende Wirkung des Ankers vorhanden war, denn ohne Versteifung ist $n_k = 1000$.

Für Überschlagsrechnungen ist ein abgekürztes Verfahren zur Bestimmung der kritischen Drehzahl erwünscht. Nach Gl. (3 und 10) besteht zwischen der Durchbiegung f_0 der

¹ Stodola, A.: Dampfturbinen. Berlin: Julius Springer 1924.

Welle und der kritischen Drehzahl die Beziehung

$$\omega_k^2 = A \cdot g/f_0 \quad (34.12)$$

worin $A = 1$ für eine Einzellast und $A = 1,2685$ für die stetig verteilte Belastung.

Bei den meisten Maschinen liegt die Belastung zwischen den beiden Grenzfällen; der Zahlenwert A wird um so größer, je gleichmäßiger die Massen verteilt sind, z. B. für mehrstufige Turbo-kompressoren, Zentrifugalpumpen, Gleichdruckdampfturbinen ist $A = 1,07 - 1,08$ und für turboelektrische Maschinen $A = 1,2$. Für die überschlagsweise Bestimmung der kritischen Drehzahl reicht also die Bestimmung der statischen Durchbiegung durch das Eigengewicht aus.

Genauere Werte liefert das Verfahren von G. Kull¹, bei dem an Stelle von f_0 eine reduzierte Durchbiegung

$$f_0 = \frac{G_1 f_1^2 + G_2 f_2^2 + G_3 f_3^2 + \dots}{G_1 f_1 + G_2 f_2 + G_3 f_3 + \dots} = \frac{\sum (G f^2)}{\sum (G f)} \quad (34.13)$$

eingesetzt wird, wobei $f_1, f_2, f_3 \dots$ die statischen Durchbiegungen unter den Gewichten $G_1, G_2, G_3 \dots$ bedeuten. Es wird demnach:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{g \sum G f}{\sum G f^2}} \quad (34.14)$$

Aus der Gl. (12) folgt weiter, daß die Durchbiegung f_0 um so größer wird, je kleiner die kritische Geschwindigkeit ω_k ist. Daraus ergibt sich, daß für alle Maschinen, die in eng anschließenden Gehäusen laufen (Zentrifugalpumpen und Gebläse, Turbinen, elektrische Generatoren und Motoren usw.) und für die die größtzulässige Durchbiegung f_0 eingeschränkt ist, hohe kritische Drehzahlen erforderlich sind, und daß die Betriebsdrehzahl unterhalb der kritischen liegen muß. Läßt man z. B. eine größte Durchbiegung von 0,2 mm zu, so wird die kleinste kritische Drehzahl, unabhängig von der Wellenlänge,

$$(\omega_k)_{\min} = \sqrt{\frac{A \cdot 981}{0,02}} = 230 \div 240 \quad \text{oder} \quad (n_k)_{\min} = 2200 \div 2300/\text{min}.$$

Wenn mehrere Massen auf der Welle angeordnet sind, ist es aber keinesfalls notwendig daß — wie bisher angenommen wurde — alle Exzentrizitäten nach einer und derselben Richtung liegen. Sobald sie aber entgegengesetzt liegen, bildet die elastische Linie sinusförmige Kurven mit 1, 2, 3 . . . Zwischenknotenpunkten (Abb. 34.10), die anderen, höheren kritischen Drehzahlen entsprechen. Wenn Belastung und Körperformen symmetrisch in bezug auf die Mittellinie zwischen den Stützpunkten ist, so ist die kritische Drehzahl zweiter Ordnung leicht zu bestimmen. Das Symmetriezentrum kann dann als freie und feste Stütze des halben Läufers angesehen werden, womit die Aufgabe auf die Bestimmung der kritischen Drehzahl erster Ordnung zurückgeführt ist.

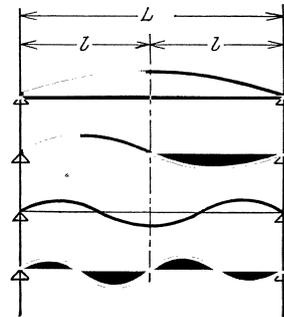


Abb. 34.10. Wellenbiegungsformen bei freier Auflage. (Aus Stodola.)

34.2. Theorie der Auswuchtmaschine (gedämpfte Schwingungen).

Die Lagerstellen werden durch Federn in einer Mittelstellung gehalten. Durch die Fliehkräfte entstehen veränderliche Auslenkungen ξ (Abb. 34.11), wodurch die Feder gespannt wird mit einer Kraft².

$$P = a \cdot \xi.$$

Die Fliehkräfte zerlegen wir in zwei Komponenten, horizontal und vertikal, von welchen die letzteren durch die Lager unmittelbar aufgenommen werden, während die horizontalen ein Moment $M_h = mr\omega^2 b \cos \varphi$ ergeben. Durch dieses Moment wird die Achse um den Winkel φ schiefgestellt, so daß die Federn mit einem Moment

$$M_v = 2 P c = 2 a c \xi = 2 a c^2 \varphi$$

zurückwirken. Dazu kommt noch das Moment der Luftreibung, soweit diese durch die horizontale Schwingung verursacht wird, das der Einfachheit halber der Schwingungsgeschwindigkeit proportional gesetzt werden kann

$$M_r = R \frac{d\varphi}{dt}.$$

Wird das Massenträgheitsmoment der Trommel, bezogen auf die durch S gehende Senkrechte

¹ Z. VDI. 1918, S. 249. v. Rayleigh.

² NB.: Mit Rücksicht auf die vorhandene Abb. 34.11 ist die Einheitskraft hier mit a statt mit c bezeichnet.

mit Θ bezeichnet, so lautet die Bewegungsgleichung:

$$\Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_h - M_v - M_r$$

oder mit $\psi = \omega t$, worin ω die unveränderliche Winkelgeschwindigkeit ist,

$$\Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} + R \frac{d\varphi}{dt} + 2ac^2\varphi = mbr\omega^2 \cos \omega t. \quad (34.15)$$

Von dieser bekannten Differentialgleichung ist

$$\varphi = C \cos(\omega t - \alpha) \quad (34.16)$$

eine Lösung¹. Setzt man die Werte

$$\frac{d\varphi}{dt} = -C\omega \sin(\omega t - \alpha) \quad \text{und} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -C\omega^2 \cos(\omega t - \alpha)$$

darin ein, so erhält man:

$$- \Theta C\omega^2 \cos(\omega t - \alpha) - RC\omega \sin(\omega t - \alpha) + 2ac^2C \cos(\omega t - \alpha) = mbr\omega^2 \cos \omega t$$

oder:

$$\cos \omega t \{ - \Theta C\omega^2 \cos \alpha + 2ac^2C \cos \alpha + RC\omega \sin \alpha - mbr\omega^2 \} + \sin \omega t \{ - \Theta C\omega^2 \sin \alpha + 2ac^2C \sin \alpha - RC\omega \cos \alpha \} = 0.$$

Damit diese Gleichung für beliebige Zeiten erfüllt ist, müssen beide Klammerausdrücke zu Null werden:

$$- \Theta C\omega^2 \cos \alpha + 2ac^2C \cos \alpha + RC\omega \sin \alpha = mbr\omega^2$$

$$\text{und} \quad (- \Theta\omega^2 + 2ac^2) \sin \alpha = R\omega \cos \alpha.$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R\omega}{- \Theta\omega^2 + 2ac^2} \quad (34.17)$$

und

$$C = \frac{mbr\omega^2}{(- \Theta\omega^2 + 2ac^2)^2 + R^2\omega^2} \sqrt{(- \Theta\omega^2 + 2ac^2)^2 + R^2\omega^2}. \quad (34.18)$$

Das Lager erhält also eine schwingende Bewegung mit dem größten Ausschlag C , der auftritt, wenn $\cos(\omega t - \alpha) = 1$ wird, d. i. für $\omega t - \alpha = 0$ oder $\alpha = \omega t = \psi$. Der größte Ausschlag, der z. B. durch Ankreiden leicht zu bestimmen ist, fällt demnach nicht damit zusammen, daß die Ebene der Fliehkräfte mit der Ebene der Federkräfte übereinstimmt, sondern ist um den Winkel α dagegen verschoben ($\alpha =$ Phasenverschiebung), und zwar eilt die Ebene der Fliehkräfte um den Winkel α vor.

Besonders große Ausschläge sind zu erwarten, wenn Resonanz auftritt, d. h. wenn die Schwingungszahl mit der Eigenschwingungszahl der untersuchten Welle zusammenfällt. Die Eigenschwingungszahl ω_k folgt aus Gl. (2): $\omega_k^2 = a/m'$, worin m' , die in den Federachsen (bei B_1 und B_2) wirkenden reduzierten Massen, durch die Gleichung $\Theta = 2m'c^2$ bestimmt sind. Für diese Schwingungszahl ist also

$$\Theta\omega^2 = 2ac^2 \quad (34.19)$$

und nach Gl. (17): $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ oder $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

¹ Die allgemeine Lösung lautet: $\varphi = k_1 e^{\alpha t} + k_2 e^{\beta t}$. Durch Einsetzen in die Schwingungsgleichung (15) erhält man:

$$k_1 e^{\alpha t} (\alpha^2 \Theta + \alpha R + 2ac^2) + k_2 e^{\beta t} (\beta^2 \Theta + \beta R + 2ac^2) = 0$$

und daraus die charakteristischen Gleichungen:

$$\alpha^2 \Theta + \alpha R + 2ac^2 = 0 \quad \text{und} \quad \beta^2 \Theta + \beta R + 2ac^2 = 0$$

mit den Lösungen $\alpha = \beta = \frac{R}{2\Theta} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4\Theta^2} - \frac{2ac^2}{\Theta}}$. Nun ist $\sqrt{\frac{2ac^2}{\Theta}} = \omega_k$ [nach Gl. (19)] die Eigenschnelle der ungedämpften Schwingung. Lehr nennt die dimensionslose Größe $D = \frac{R}{2\Theta\omega_k}$ die Dämpfung des Systems. Nur wenn $D < 1$, erhält man eine periodische Schwingung.

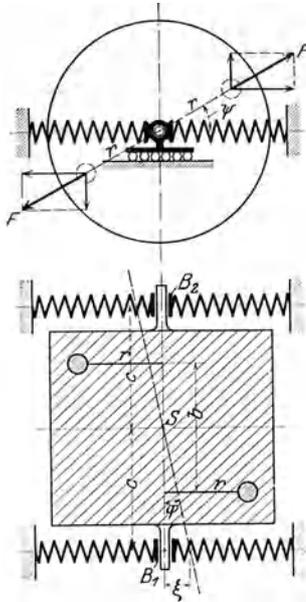


Abb. 34.11. Prinzip der Auswuchtvorrichtung (aus Stodola).

Der größte Ausschlag

$$C_k = \frac{mr\omega^2 \cdot b}{R\omega} = \frac{mr \cdot b}{R} \omega = \frac{M}{R} \omega \tag{34.20}$$

worin M das erregende Moment und R die dämpfende Kraft ist, bleibt auch im Falle der Resonanz endlich. Er ist mit ω_k proportional und liegt genau um 90° hinter dem Ort, wo sich die Überwucht befindet.

In der Praxis wird die Auswuchtung meist so gemacht, daß die Lage des größten Ausschlages bei einer bestimmten Drehzahl festgelegt wird. Dann läßt man die Welle in entgegengesetzter Richtung laufen und bestimmt bei der gleichen Drehzahl wieder die Lage des größten Ausschlages. Die Gegengewichte müssen dann in der Halbierungsebene des durch die beiden Marken bestimmten Winkels liegen, den Marken in bezug auf den Drehsinn nacheilend. Die Richtigkeit dieser Methode folgt sofort aus Gl. (17), da $\alpha_1 = -\alpha_2$ ist.

34.3. Kritische Drehzahl für Verdrehungsschwingungen.

Wenn das Drehmoment sich periodisch ändert (wie z. B. bei Kolbenmaschinen) und wenn die Periodenzahl mit der Eigenschwingungszahl der Welle übereinstimmt, sind wieder gefährlich große (kritische) Verdrehungen zu erwarten. Die Untersuchung ist auf die Bestimmung der Eigenschwingungszahl beschränkt; die Größe der Verdrehungen und damit der Beanspruchungen läßt sich nur dann berechnen, wenn die Kolbenkräfte und die dämpfenden Kräfte bekannt sind.

Eine Welle sei am einen Ende festgehalten, während das andere Ende eine Schwungscheibe trägt (Abb. 34.12). Wird die Schwungmasse um einen Winkel φ gedreht, so spannt sich die Welle wie eine Feder und sucht die Drehung rückgängig zu machen. Die Bewegungsgleichung lautet:

$$\Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -M_d = -c\varphi, \tag{34.21}$$

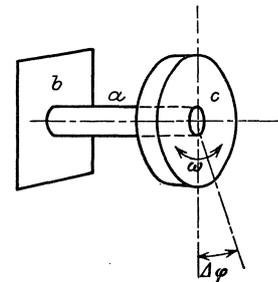


Abb. 34.12.

da innerhalb des Hookeschen Gesetzes, die Verdrehung dem Drehmoment proportional ist.

- Θ = polares Massenträgheitsmoment der Scheibe $= \int r^2 dm = m\varrho^2$ (kgm · s²),
- r = die Entfernung des Massenteilchens dm vom Drehpunkt und
- ϱ = Trägheitsradius.

Da diese Gleichung die gleiche Form wie Gl. (6) hat, folgt daraus die Eigenfrequenz:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{\Theta}}. \tag{34.22}$$

In der Praxis rechnet man meist nicht mit dem Trägheitsmoment, sondern mit dem sog. Schwungmoment GD^2 , worin G das Scheibengewicht und D der Trägheitsdurchmesser (nicht Außendurchmesser) ist.

$$GD^2 = mg \cdot 4\varrho^2 = 4\Theta g \quad \text{oder} \quad \Theta = \frac{GD^2}{4g}. \tag{34.23}$$

Man kann aber auch schreiben: $\Theta = m'R^2$, wenn mit R irgendein Halbmesser bezeichnet wird. Dann nennt man m' die auf den Radius R reduzierte Masse. Für $R = 1$ wird $\Theta = m'$, d. h. das Trägheitsmoment ist gleich der auf einen Punkt in der Entfernung 1 von der Wellenmitte reduzierten Masse. Dann ist

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m'}}. \tag{34.22 a}$$

Für einen prismatischen Stab (Abb. 34.13) ist:

$$\Theta = \int_0^l \frac{f \cdot dx \cdot \gamma}{g} x^2 = \frac{f\gamma}{g} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{G}{3g} l^2 = \frac{M}{3} \cdot l^2 \tag{34.24}$$

und

$$\varrho = \frac{l}{\sqrt{3}}. \tag{34.25}$$

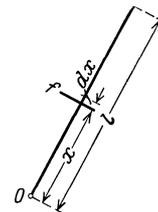


Abb. 34.13.

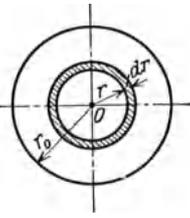


Abb. 34.14.

Für die Kreisscheibe (Abb. 34.14) ist:

$$\Theta = \int_0^{r_a} \frac{2\pi r dr \cdot b \gamma}{g} r^2 = 2\pi b \frac{\gamma}{g} \frac{r_a^4}{4} = M \cdot \frac{r_a^2}{2} \quad (34.26)$$

und

$$\varrho = r_a / \sqrt{2}. \quad (34.27)$$

Für einen hohlen Kreiszyylinder ist

$$\Theta = \frac{\pi}{2} b \frac{\gamma}{g} (r_a^4 - r_i^4) = \frac{M}{2} (r_a^2 + r_i^2). \quad (34.28)$$

Ist $r_i = r_a/2$, so wird $\Theta_{\text{hohl}}/\Theta_{\text{voll}} = 1 - (\frac{1}{2})^4$, das Trägheitsmoment nur um etwa 6% kleiner als für den Vollzylinder. Bei der Ermittlung des Massenträgheitsmomentes von Rotationskörpern kann man also im allgemeinen Nabe und Arme ohne großen Fehler vernachlässigen oder durch einen kleinen Zuschlag berücksichtigen.

Für die Berechnung des Massenträgheitsmomentes von Zahnrädern werden die Zahnücken ausgeglichen, indem der Kopf (bis zum Teilkreis) abgeschnitten und die übrigbleibende Lücke damit ausgefüllt gedacht wird.

Das Massenträgheitsmoment beliebig geformter Körper wird aus einem Pendelversuch durch Beobachtung der Pendeldauer bestimmt. Die Bewegungsgleichung des physikalischen Pendels (Abb. 34.15 a) lautet wieder

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{M}{\Theta} \varphi.$$

Wenn wir uns auf kleine Ausschläge beschränken, so ist das Moment

$$M = G\xi = Gr \sin \varphi \approx Gr\varphi = mgr\varphi.$$

Damit wird

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgr}{\Theta} \varphi.$$

Für das mathematische Pendel (Abb. 34.15 b) mit der Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{mgl \sin \varphi}{ml^2} \approx \frac{g}{l} \varphi$$

ist die Schwingungsdauer T bekannt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

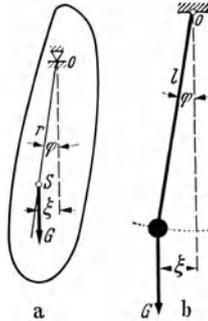


Abb. 34.15. a Physikalisches Pendel. b Mathematisches Pendel.

Die Bewegungsgleichungen des physikalischen und des mathematischen Pendels werden identisch, wenn

$$\frac{mgr}{\Theta} = \frac{g}{l} \quad \text{oder} \quad l = \frac{\Theta}{mr}$$

ist. Man nennt l die reduzierte Pendellänge des physikalischen Pendels, dessen Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{mgr}}$$

ist. Daraus folgt

$$\Theta = \frac{mgr}{4\pi^2} T^2.$$

Diese Gleichung versagt aber für die Bestimmung des Trägheitsmomentes in bezug auf die Schwerpunktsachse, da für diese $r = 0$ ist. Allgemein gilt jedoch die Beziehung

$$\Theta_s = \Theta - mr^2$$

und damit wird:

$$(GD^2)_s = 4\Theta_s g = 4g \left\{ \Theta - mr^2 \right\} = 4g \left\{ \frac{mgr}{4\pi^2} T^2 - mr^2 \right\}. \quad (34.29)$$

Diese Methode gilt auch für inhomogene Körper und ist sehr genau, wenn dafür gesorgt wird, daß die Schneiden und die Unterlagen gehärtet sind.

Die Einheitskraft c in Gl. (22) ist abhängig von der Form und von den Abmessungen der Welle, oder allgemeiner des elastischen Körpers. Für eine kreisförmige Welle ist nach Gl. (12.52):

$$\varphi = \vartheta \cdot l = \frac{M_d}{J_p G} \cdot l, \quad \text{und} \quad c = \frac{J_p \cdot G}{l}. \quad (34.30)$$

Ein anschauliches Beispiel eines Drehschwingers enthält jede Taschenuhr in der „Unruhe“. Diese besteht aus einem nahezu reibungsfrei gelagerten Schwungrad, an dessen Achse das eine Ende einer Spiralfeder befestigt ist, während das andere Ende am Gehäuse festsetzt. Die Unruhe soll genau 120 volle Schwingungen in der Minute ausführen, so daß $\omega = \frac{2\pi}{60} \cdot 120 = 12,56/\text{s}$ ist. Bei gegebenen Abmessungen des (genormten) Schwungrades folgt aus Gl. (22) die Konstante c und nach Wahl der ebenfalls genormten Abmessungen der rechteckigen Feder, aus Gl. (27.5) (mit $c = JE/l$) die erforderliche Federlänge l .

Trägt die Welle zwei Schwungscheiben mit den reduzierten Massen m'_1 und m'_2 (Abb. 34.16), so können beide nur gegeneinander schwingen; die Schwingungszahlen beider Massen sind also gleich:

$$\omega^2 = c_1/m'_1 = c_2/m'_2.$$

Wenn beide Massen durch eine glatte Welle verbunden sind, so ist:

$$c_1 = J_p G/l_1 \quad \text{und} \quad c_2 = J_p G/l_2 = J_p G/(l - l_1)$$

$$\text{so daß} \quad l_1 m'_1 = (l - l_1) m'_2 = l m'_2 - l_1 m'_2$$

$$\text{oder} \quad l_1 = l \frac{m'_2}{m'_2 + m'_1} \quad (34.31)$$

$$\text{und} \quad \omega = \sqrt{\frac{J_p G}{l} \cdot \frac{m'_1 + m'_2}{m'_1 m'_2}} = \sqrt{\frac{c}{m'_0}} \quad (34.32)$$

sein muß, in welcher Gleichung $c = J_p G/l$ die Einheitskraft der Verbindungswelle, und

$$\frac{1}{m'_0} = \frac{1}{m'_1} + \frac{1}{m'_2} \quad (34.33)$$

die „wirksame“ reduzierte Masse des Systems ist. Der Punkt k der Welle (Abb. 34.16), der bei der Schwingung in Ruhe bleibt, nennt man den Knotenpunkt der Schwingung. Die für Dreh-schwingungen abgeleitete Gl. (32) gilt natürlich auch für Biegeschwingungen zwischen zwei Massen.

Ist der Wellendurchmesser veränderlich, so kann die verjüngte oder abgesetzte Welle immer durch eine gleichwertige glatte Welle ersetzt werden (reduzierte Welle). Ein Wellenstück vom Durchmesser d und der Länge l ist mit einer Welle vom Durchmesser D_0 und der Länge L_0 gleichwertig, wenn beide durch ein gleiches Drehmoment um den gleichen Winkel verdreht werden:

$$\varphi = \frac{M_d}{J_p G} l = \frac{M_d}{J_{p_0} G} L_0, \quad \text{so daß mit} \quad J_p = \frac{\pi}{32} d^4 \quad \text{und} \quad J_{p_0} = \frac{\pi}{32} D_0^4$$

$$L_0 = \frac{D_0^4}{d^4} l \quad (34.34)$$

wird. Für kegelförmige Wellenabsätze wird:

$$L_0 = D_0^4 \int_0^l \frac{dl}{d^4}. \quad (34.35)$$

Die reduzierte Länge von Kurbelkröpfungen ist genau nur auf Grund von Versuchen festzulegen¹.

Anwendungsbeispiel 34.1. In Abb. 33.17 ist die Welle eines 300 PS-Dieselmotors mit 3 unter 240° gegeneinander versetzten Kurbeln, gekuppelt mit einer Dynamomaschine, gezeichnet. Das Schwungmoment des Läufers ist $= GD_1^2 = 109\,700 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, so daß $m'_1 = \frac{109\,700 \cdot 100^2}{4 \cdot 981} \text{ kgcm/s}^2$ wird; das Schwungmoment des Schwungrades $= GD_2^2 = 93\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Diesen Zahlen gegenüber treten die Massen der Welle und selbst der hin- und hergehenden Teile ($GD^2 = 950 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$) völlig zurück, so daß diese Massen durch einfache Addition ihrer Trägheitsmomente zu dem Schwungradträgheitsmoment berücksichtigt werden dürfen.

¹ Geiger: Zur Berechnung von Kurbelwellen. Automobiltechn. Z. 40 (1937) S. 93/98. — Kimmel, A. Über die Torsionsfestigkeit von Kurbelwellen mit durchgehender Zwischenwange. Diss. T. H. Stuttgart 1935. — Tuplin, W. A.: The torsional rigidity of crankshafts. Engineering 144 (1937) S. 275/77. — Russel, R. Experimental studies on crankshafts stiffness. J. Roy. techn. College, Glasgow 4 (1939) S. 467/89. — Wigglesworth, L. A.: The flexure and torsion of an internally cracked shaft. Proc. Roy. Soc., Lond. A. 170 (1939) S. 365/91. — Kimmel, A.: Grundsätzliche Untersuchung über die bei den Drehschwingungen von Kurbelwellen maßgebende Drehsteifigkeit. Ing.-Arch. 10 (1939) S. 196/221.

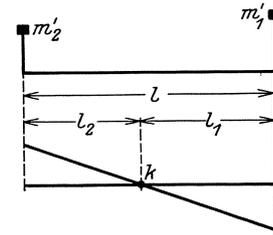


Abb. 34.16.

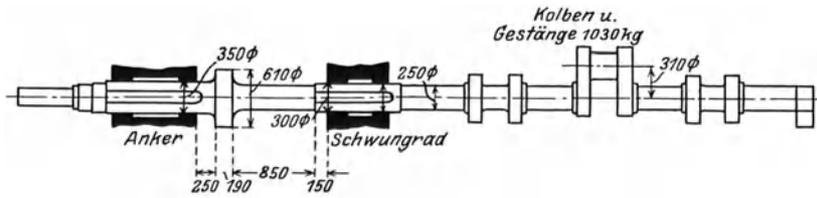


Abb. 34,17. Welle eines 300-PS-Dieselmotors.

Dadurch ist das ganze System genügend genau auf zwei Schwungscheiben zurückgeführt. Die Welle innerhalb der Naben kann als starr angesehen werden. Das auf eine Welle von 250 mm Durchmesser reduzierte Wellenstück 1 hat eine Länge

$$(L_0)_1 = \left(\frac{25}{35}\right)^4 \cdot 205 = 46 \text{ mm.}$$

Strecke 2 ist

$$(L_0)_2 = \left(\frac{25}{61}\right)^4 \cdot 190 = 5,3 \text{ mm,}$$

Strecke 3 ist

$$(L_0)_3 = \left(\frac{25}{30}\right)^4 \cdot 150 = 74 \text{ mm}$$

lang, so daß die abgesetzte Welle auf eine glatte Welle von 250 mm Durchmesser und eine Länge von $46 + 5,3 + 850 + 74 = 975$ mm Länge zurückgeführt ist.

Damit ergibt sich nach Gl. (32) als Eigenschwingungszahl:

$$n_k = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{\pi \cdot 25^4}{32} \cdot \frac{820\,000}{975} \cdot \frac{202\,700 \cdot 100^2}{4 \cdot 981} \cdot \frac{4^2 \cdot 981^2}{109\,700 \cdot 93\,000 \cdot 100^3}} \approx 476.$$

Diese Schwingungszahl fällt genügend genau mit der Anzahl der von den drei Zylindern ausgeübten Impulse ($3 \cdot 142$ bis $3 \cdot 158 = 426$ bis 474) zusammen, so daß Resonanzgefahr vorhanden ist. Die Welle ist auch nach kurzer Betriebszeit bei der Nabe des Kuppelflansches gebrochen.

Man kann die Bruchgefahr vermeiden, indem man die Eigenschwingungszahl etwa 25 % über die Betriebsdrehzahl legt ($n_k = 1,25 \cdot 474$). Dazu muß der Wellendurchmesser statt 250 mm $\sqrt{1,25} \cdot 250 = \text{rd. } 290$ mm werden.

Wellenbrüche, die durch Torsionsschwingungen entstehen, sind fast immer am Verlauf der Bruchfläche leicht erkenntlich. Der erste Einriß entsteht durch zu große Schubspannungen parallel zur Stabachse (Abb. (34.18)). Mit dem Mikroskop kann die Rißlinie zu beiden Seiten des Bruches weiter verfolgt werden. Dann schreitet der Riß unter 45° weiter fort. Durch örtliche Verschwächungen, z. B. Löcher, kann der Bruch auch anders ausfallen. Beischarfen Querschnittsänderungen erfolgt der Bruch immer an der Übergangsstelle.

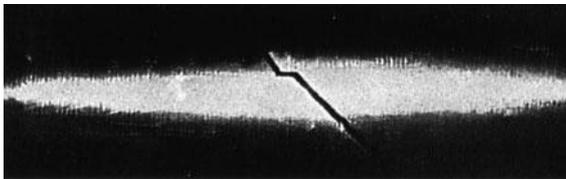


Abb. 34.18. Wellenbruch infolge von Drehschwingungen (Aus O. Föppl.)

Sind mehrere Schwungmassen vorhanden, so führt das von G ü m b e l¹ angegebene Verfahren am raschesten zum Ziel.

Die Resonanz-Drehschwingungen werden entweder durch Schwingungsdämpfer in Reibungswärme umgesetzt, oder es werden elastische Kupplungen eingebaut. Die Federkupplung vermindert die Eigenschwingungszahl der Welle, so daß kritische Drehzahlbereiche ins Gebiet niedriger Drehzahlen verlagert werden. Der Einbau einer Federkupplung ist deshalb oft das billigste Mittel um aus einem kritischen Drehzahlenbereich herauszukommen.

Eine besondere Schwierigkeit für die zuverlässige Berechnung der Eigenschwingungszahl liegt dann vor, wenn eine elastische Kupplung in der Welle eingebaut ist, deren Federn nachstellbar sind. Ein tragisches Beispiel dafür, wie kleine Ursachen schwerwiegende Folgen haben können, war die Amerikafahrt des Luftschiffes „Graf Zeppelin“ am 16. Mai 1929, bei welcher vier

¹ Z. VDI Bd. 56 (1912) S. 1025. — Vgl. auch Porter, F. P.: A simple method for the calculation of natural frequencies of torsional vibration. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. Bd. 53 (1931) S. 17/46. Auszug in Z. VDI Bd. 65 (1931) S. 404.

der fünf Kurbelwellen brachen. Die Anordnung der Motorwelle ist in Abb. 34.19 skizziert, Abb. 34.20 zeigt den grundsätzlichen Aufbau der Federkupplung. Vor der Amerikafahrt wurden die Federn durch dickere Unterlagscheiben etwas mehr als normal gespannt, wodurch die Grundschwingung der Welle mit der Betriebsdrehzahl des Motors zusammenfiel!

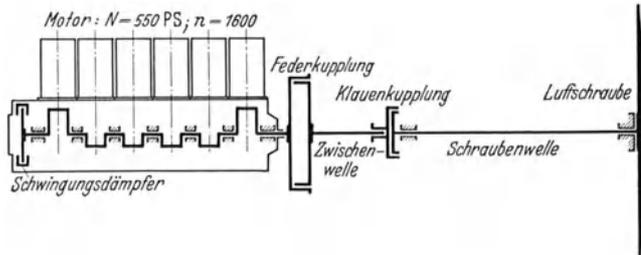


Abb. 34.19.



Abb. 34.20.

Schrifttum.

Holba, J. J.: Berechnungsverfahren zur Bestimmung der kritischen Drehzahlen von geraden Wellen. Wien: Julius Springer, 1936, mit Schrifttum-Verzeichnis. — Karas, K.: Die kritischen Drehzahlen wichtiger Rotorformen. Wien: Julius Springer 1935. — Hoppe, H.: Die Messung dynamischer Wuchtfehler auf einer Auswuchtmaschine mit elektro-magnetischen Wuchtvorrichtungen für Gleich- und Wechselstrom. Diss. T. H. Braunschweig 1933. — Kirchberg, G.: Auswuchten schwerer Läufer hoher Drehzahl. Forschung 6 (1935) S. 72/78. — Schilhansl, M.: Beitrag zur genäherten Ermittlung der Biegeeigenfrequenzen mehrfach abgesetzter und mehrfach gelagerter Wellen. Ing.-Arch. 10 (1939) S. 182/95. — Hantsch, K.: Bestimmung der Eigenschwingungszahlen von Wellensystemen mit mehreren Schwungmassen auf elementarem Wege. HDI-Mitt. 25 (1936) S. 73/79. — Geiger, J.: Die Vorausbestimmung der Beanspruchung bei Drehschwingungen von Wellen. Mitt. Forsch.-Anst. Gutehoffnungshütte 6 (1938) S. 225/33. — Söchting, F.: Dämpfung der Drehschwingungen durch Flüssigkeitskupplungen. Z. VDI 82 (1938) S. 701/3. — Rembold, V. und J. Jehlicka: Das Verhalten federnder Kupplungen im Betrieb. Forschung 8 (1937) S. 109/18. — Lehr, E.: Schwingungstechnik. Berlin: Julius Springer, Bd. I 1930, Bd. II 1933. Ausführlich und leichtverständlich mit Anwendungsbeispielen aus Maschinenbau und Elektrotechnik. — Kotter, K.: Einführung in die technische Schwingungslehre. Berlin: Julius Springer 1938. — Porter, F. P.: A simple method for the calculation of natural frequencies of torsional vibration. Trans Amer. Soc. mech. Engr. Bd. 53 (1931) S. 17/46. Auszug in Z. VDI Bd. 65 (1931) S. 404. — Wydler, H.: Drehschwingungen in Kolbenmaschinenanlagen. Berlin: Julius Springer 1922. — Holzer, H.: Die Berechnung von Drehschwingungen. Berlin: Julius Springer 1921. — Geiger, J.: Mechanische Schwingungen. Berlin: Julius Springer 1927.

4. Gleitlager.

41. Berechnungsgrundlagen.

Die wichtigste Forderung, die man im Betrieb an ein Gleitlager stellt, ist, daß die in Wärme umgesetzte Reibungsarbeit ohne schädliche Erhöhung der Lagertemperatur abgeleitet werden kann. Durch die Lagerbelastung P entstehen auf den Gleitflächen Normaldrücke N , die von Stelle zu Stelle verschieden sind (Abb. 41.1). Ist μ' die Reibzahl, dann ist die Reibkraft $\mu' N$ und die Reibleistung für ein Flächenelement:

$$\Delta L_R = \mu' N v,$$

worin die Gleitgeschwindigkeit $v = \frac{\pi d n}{60}$ m/s ist.

Die totale Reibleistung ist, wenn μ' über die ganze Fläche als unveränderlich angenommen wird:

$$L_R = \mu' v \sum N.$$

Nun ist jedenfalls $\sum N > P$, da die Summe der Komponenten von N in der Richtung von P gleich P sein muß. Setzt man $\sum N = \alpha P$, dann ist $\alpha > 1$, und

$$L_R = \alpha \mu' P v = \mu P v. \quad (41.1)$$

Da weder α noch μ' bekannt ist¹, vereinigen wir beide zur Zapfenreibzahl μ . Die Reibungs-

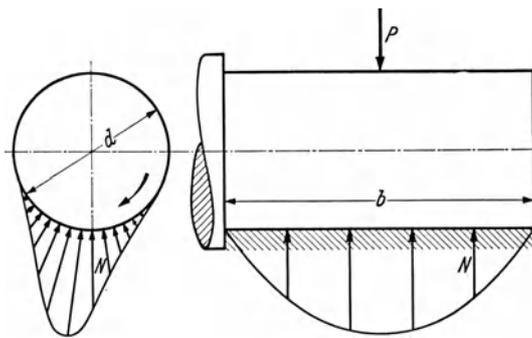


Abb. 41.1. Druckverteilung auf dem Zapfen.

arbeit wird in Wärme umgesetzt. Da 1 internationale kcal = 427 kgm = 1/860 kWh ist, wird:

$$L_R = \frac{\mu P v}{427} \text{ kcal/s} = 8,45 \mu P v \text{ kcal/h}. \quad (41.2)$$

Die Wärme geht nun durch die Lagerschale und den Lagerkörper an die Oberfläche, und von dort an die umgebende Luft.

Voraussetzung von allen weiteren Berechnungen ist, daß der Zapfen auf der ganzen Breite² trägt. Infolge der Formänderung der Welle stellt sich der Zapfen schräg in der fest gelagerten Schale. Diese unvermeidliche Schrägstellung kann durch einstellbare Lagerschalen ausgeglichen werden (vgl. Abb. 44.15 bis 17); stark belastete Zapfen sollten immer so gelagert werden, um einseitiges Aufliegen zu vermeiden. Wenn eine gleichmäßig verteilte Belastung P_1 kg/mm angenommen wird, so erfährt der Zapfen gegenüber der anschliessenden Welle noch eine weitere Verformung, die in Zahlenbeispiel 12.3 (S. 46) berechnet ist. Die zusätzliche Schrägstellung (Abb. 12.38) wird wieder durch die einstellbaren Lagerschalen ausgeglichen. Die unvermeidliche Krümmung des Zapfens (nach Gl. e)

$$f'_k = 0,6 \frac{P_1}{E} \cdot \left(\frac{b}{d}\right)^4 \quad (41.3)$$

dagegen muß ein gleichmäßiges Tragen über die ganze Breite verhindern. Wollen wir dennoch dafür sorgen, daß der Zapfen auf der ganzen Breite trägt, so muß f'_k klein sein, etwa von der Größenordnung der Unebenheiten. Bei dieser Überslagsrechnung sind die meist kleinen Formänderungen der Lagerschale vernachlässigt worden. Ist z. B. $f'_k = 0,001$ mm (poliert), so folgt aus Gl. (3) mit $E = 2,1 \cdot 10^4$ kg/mm² (Stahl) und $b/d = 1$, $P_1 = 33$ kg/mm und für $b/d = 2$, $P_1 = 2$ kg/mm. Für $f'_k = 0,01$ mm wären zehnmal so große Werte zulässig; große Unebenheiten

¹ Es gibt eine Theorie (von Th. Reye, 1860), die die Abnutzung senkrecht zur Schalenfläche der spez. Reibungsarbeit proportional setzt. Daraus folgt dann $\alpha = 4/\pi$ und $L_R = 4/\pi \cdot \mu' \cdot P \cdot v$. Man findet diese Formel noch hief und da in der Literatur.

² Die Breite der Gleitfläche ist senkrecht zur Bewegungsrichtung.

geben aber immer große Reibungszahlen. Um guttragfähige Lager zu erhalten muß deshalb bei möglichst starrer Lagerschale b/d klein sein, möglichst nicht größer als 1.

Früher wurden die Zapfen viel breiter gemacht; die Lager mußten deshalb, bevor sie in Dauerbetrieb genommen werden konnten, einlaufen. Die härtere Oberfläche der Welle glättet und schabt dabei die weichere Lagerschale (z. B. aus Weißmetall), bis diese sich der Formänderung des Zapfens angepaßt hat. Das Einlaufen war demnach nur die notwendige Korrektur einer ungenauen Wellenlage, die kaum auf eine andere Weise erreichbar war. Man hatte sich in der Praxis damit als mit etwas Unvermeidlichem abgefunden. Ob nun ein Lager leicht oder schwer einläuft, hängt hauptsächlich von den physikalischen Eigenschaften der Schale ab. Bei gußeisernen Schalen erfolgt das Einlaufen außerordentlich langsam. Man kann sie durch allmähliche Steigerung der Belastung und durch Einschaben für höhere Belastungen tragfähig machen. Am besten und unter größter Schonung der Welle laufen Schalen aus Weißmetall ein, weil das Anpassen der Schale an die Welle dabei durch einen Fließvorgang erzielt

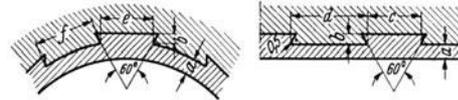


Abb 41.2. Schwalbenschwanz-Nuten. $b = 0,5a$, $c = 3a$
 $d = 15a$, $e = 2a$, $f = 20a$.

wird. Zur Befestigung des Ausgusses mit der gußeisernen Grundschaie verwendet man die bekannten Schwalbenschwanznuten (Abb. 41.2). Bei Schalen aus Stahl- und Rotguß sind diese entbehrlich; die ausgießenden Lagerbohrungen werden dort nur geschruppt und sofort verzinkt, damit sie nicht oxydieren. Die Ausgüßdicken werden in den letzten Jahren sehr dünn gemacht; für gußeiserne Schalen sind die kleinstzulässigen Ausgüßdicken fertig bearbeitet:

für $d = 20/50$	$50/80$	$80/120$	$120/150$	$150/200$ mm
$a_{\min} = 2,5$	3	3,5	4	5 mm.

Für Rotgußschalen ist der Ausguß nur halb so dick; Bearbeitungszugabe $1 \div 2$ mm.

Im Gebiet der flüssigen Reibung hat der Werkstoff der Gleitfläche keinen direkten Einfluß auf die Reibzahl. Beim Anlaufen und Abstellen der Maschine kommt man immer während längerer oder kürzerer Zeit ins Gebiet der halbflüssigen Reibung, also zu einer direkten Berührung der Gleitflächen. Die Wahl eines geeigneten Lagerwerkstoffes erhält eine um so größere Bedeutung, je länger und öfter das Lager in diesem Gebiet laufen muß. Als gutes Weißmetall hat sich WM 80 mit 80% Zinn (Sn), 12% Antimon (Sb) und 8% Cu auch bei hohen Beanspruchungen bestens bewährt (Babbitt-Metall). Der hohe Zinnpreis und devisenwirtschaftliche Bestimmungen führten zu zinnarmen und zinnfreien Lagermetallen aus Blei-Zinn, Kadmium, Leichtmetallen und Kunststoffen¹. Die untere Grenze für die Härte des Metalls ist dadurch gezogen, daß das Metall zu fließen aufhören muß, bevor die ganze Tragfläche der Welle angepaßt ist. Sind höhere Flächenpressungen erforderlich, so wählt man Bronze; beim Einlaufen kommt dabei kein Fließen vor, sondern die Welle schabt die Schale, wobei die Welle selbst auch angegriffen wird.

Die Weißmetalllager haben im Betrieb noch den weiteren Vorteil, daß beim Heißlaufen nur die Lagerschale und nicht die Welle angegriffen wird, so daß der Ersatz wenig Kosten und Zeitverlust verursacht. Laufen Bronzeschalen heiß, so wird auch die Lauffläche des Zapfens schadhafte. Am ungünstigsten sind in dieser Beziehung gußeiserne Lagerschalen: Welle und Lager schweißen dann zusammen und die Maschine steht mit einem Ruck still, wodurch — wenn größere Schwungmassen in Bewegung sind — Wellenbrüche oder Maschinenbrüche verursacht werden.

Nur wenn der Zapfen gleichmäßig aufliegt, kann auch vorausgesetzt werden, daß die Wärme auf der ganzen Breite gleichmäßig erzeugt wird. Die Wärmeabgabe irgendeines Körpers wird aus dem Newtonschen Abkühlungsgesetz für den Beharrungszustand berechnet:

$$Q = \alpha \cdot F \cdot \Delta \vartheta \text{ kcal/h} \quad (41.4)$$

F = Oberfläche des Körpers in m^2 ,

$\Delta \vartheta$ = Unterschied zwischen der gleichmäßigen Oberflächentemperatur und der Temperatur der Umgebung, in $^{\circ}C$, auch Übertemperatur genannt.

α = Wärmeübergangszahl, d. i. die Wärmemenge, die in der Zeiteinheit von der Flächeneinheit bei $1^{\circ}C$ Temperaturunterschied abgegeben wird ($kcal/m^2 h^{\circ}C$).

Durch diese Definition sind die gesamten Erscheinungen der Wärmeübertragung (Strahlung, Konvektion und Leitung) in der Wärmeübergangszahl enthalten².

¹ Vgl. Werkstoffe für Gleitlager. Herausgegeben von R. Kühnel. Berlin: Julius Springer 1939.

² Ausführlichere Angaben sind in ten Bosch: Die Wärmeübertragung enthalten, 3. Auflage. Berlin: Julius Springer 1936.

Im Beharrungszustand ist die durch Reibung erzeugte Wärme gleich der an der Lageroberfläche abgegebenen Wärme:

$$8,45 \mu P \cdot v = \alpha \cdot F \cdot \Delta \vartheta .$$

und damit die Übertemperatur

$$\Delta \vartheta = 8,45 \frac{\mu P v}{\alpha F} \quad (41.5)$$

Aus dieser Gleichung folgt die wichtige Konstruktionsregel: Soll ein Lager kühl bleiben, so muß es eine große kühlende Oberfläche haben. Dabei ist stillschweigend vorausgesetzt, daß die Oberfläche überall die gleiche Temperatur hat, also durch kräftige Eisenquerschnitte mit der Gleitfläche verbunden ist. Gute Lager sind demnach immer schwer. Die kühlende Oberfläche kann auch durch große Ölbehälter wirksam vergrößert werden.

Bei gegebener Lagerbelastung P , Umfangsgeschwindigkeit v und Lageroberfläche F (aus der Lagerkonstruktion), sind zur Berechnung der Lagertemperatur noch die beiden Unbekannten α und μ erforderlich.

Die Gesetze der Wärmeübertragung sind bekannt. Schwierigkeiten entstehen nur in der Anwendung derselben auf einen so unregelmäßigen Körper, wie es das Lager im allgemeinen ist. Um die etwas umständliche Berechnung der Wärmeströmungen zu umgehen, hat man früher die Annahme gemacht, daß die abgegebene Wärme proportional $b \cdot d$ gesetzt werden darf. Die Bedingung für die unschädliche Lagererwärmung vereinfacht sich dann zu der Forderung, daß die auf 1 cm² projizierte Lagerfläche erzeugte Reibungsleistung einen bestimmten Wert X nicht überschreiten darf:

$$\frac{L_R}{b \cdot d} = \frac{\mu P v}{b \cdot d} = \mu p v < X, \quad \text{oder} \quad p v < \frac{X}{\mu}, \quad (41.6)$$

Setzt man in Gl. (6), $v = \pi d n / 6000$ m/s, also d in cm ein, löst sie nach b auf und setzt $w = \frac{6000 X}{\pi \mu}$

so folgt daraus: $b > \frac{P n}{w}$. (41.7)

Die Erfahrungszahl w (Zahlentafel 41.1) hängt aber auch von der Reibungszahl ab!

Zahlentafel 41.1.

Erfahrungswerte für	w	$p v$ [kg/cm ² · m/s]
Kurbelzapfen-Dampfmaschine	90 000	47
„ Stirnkurbel	70 000	40
„ Dieselmotor	48 bis 67 000	26 bis 35
Schwungradzapfen, Dampfmaschine	40 000	21
„ Dieselmotor	29 000	15
Exzenter		10
Achsen von Eisenbahnwagen	190 000	100

Die Wahl von w für andere Verhältnisse, als hier angegeben, ist äußerst schwer und nur an Hand von Versuchen möglich. Auch führt die Rechnung mit $b > P n / w$ auf breite Zapfen, die sich leicht verbiegen, und dann erst recht zu Heißlaufen Anlaß geben. Auf Grund der Erfahrung schrieb man weiter eine höchstzulässige Flächenpressung p vor, um zu verhindern, daß das Öl zwischen den Gleitflächen weggepreßt wird. Die zulässigen Erfahrungswerte streuen aber sehr stark und liegen zwischen 3 at (für ein Sellers-Lager) und 380 at (für den Kreuzkopfzapfen einer Lokomotive), ohne daß man eine hinreichende Erklärung für diesen großen Unterschied geben konnte.

Eine bessere Einsicht in die tatsächlichen, einschränkenden Verhältnisse ist nur durch eine genauere Untersuchung der Wärmeabgabe und der Reibungszahlen zu erhalten. Die vom Lagerkörper durch Strahlung abgegebene Wärme ist nach dem Gesetz von Stefan-Boltzmann:

$$Q_s = C F \left\{ \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right\} = \alpha_s \cdot F \cdot \Delta \vartheta . \quad (41.8)$$

In dieser Gleichung ist C die Strahlungszahl, z. B. für rauhes Eisen $C = 4,5$ kcal/m², h, °K⁴. T_1 die absolute Temperatur der Lageroberfläche und T_2 die absolute Temperatur der Umgebung. Nach Abb. 41.3 ist für Gußeisen $\alpha_s \approx 5$ bis 6 kcal/m² h °C.

Für Nickel (poliert) und für Aluminium ist C nur 0,3 kcal/m², h, °K⁴.

Die Gesetze der Wärmeübertragung durch Konvektion und Leitung sind weit verwickelter, da eine sehr große Anzahl Faktoren dabei eine Rolle spielen. Nur für wenige, einfache Fälle sind sie genügend bekannt, so z. B. für ein einzelnes horizontales Rohr in ruhender Luft (Abb. 41.3).

Für senkrecht zur Rohrfläche strömende Luft ist für Rohre von 100 bis 200 mm Durchmesser:

$$\alpha_{k+l} = 8 \text{ bis } 9 w^{0,56} \text{ kcal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C} \quad (w \text{ in m/s}). \quad (41.9)$$

Vollständig ruhende Luft ist in der Nähe von laufenden Maschinen nie vorhanden. Man kann z. B. die Wärmeübergangszahl α aus den Versuchen von Striebeck berechnen. Bei einem Sellerslager von 70 mm Durchmesser und 250 mm Breite der Tragfläche war die Lagertemperatur in Beharrungszustand 53°C , bei $n = 760/\text{min}$, $p = 2,9 \text{ at}$ und einer gemessenen Reibungszahl $\mu = 0,0087$. Die erzeugte Wärme war also

$$Q = 8,45 \cdot 0,0087 \cdot 2,9 \cdot 7 \cdot 25 \cdot \pi \cdot 0,07 \cdot 760/60 = 95,5 \text{ kcal/h}.$$

Die kühlende Oberfläche des Lagers hatte einen Umfang von 0,5 m und eine Breite von 0,3 m war also $0,15 \text{ m}^2$, so daß bei 33°C Übertemperatur $\alpha = \frac{95,5}{0,15 \cdot 33} = 19 \text{ kcal/m}^2 \text{ h, } ^\circ\text{C}$ war. Für Lager an stationären Maschinen kann

$$\alpha = 18 \text{ bis } 22 \text{ kcal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}$$

gesetzt werden.

Am günstigsten liegen die Abkühlungsverhältnisse bei den Eisenbahnfahrzeugen, wo alle Teile einem kräftigen Luftstrom ausgesetzt sind. Für Wagenachsen ist je nach der Geschwindigkeit $\alpha = 100 \text{ bis } 150 \text{ kcal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}$. Bei Dampflokomotiven sind Kreuzkopfzapfen mit

$$p_{\text{max}} = 370 \text{ at}$$

und Kurbelzapfen mit $p_m \cdot v$ bis $100 \text{ kg/cm}^2 \cdot \text{m/s}$ ausgeführt worden, was nur infolge der günstigen Kühlung zulässig ist. Am ungünstigsten dagegen wird die Abkühlung bei den heute allgemein bevorzugten vollständig gekapselten Maschinen. Bei kleinen einfach wirkenden Maschinen taucht das Triebwerk in ein Ölbad ein (Abb. 41.4). Das umhergespritzte Öl schmiert die verschiedenen Gleitstellen genügend und kühlt sich beim Heruntertropfen wieder ab. Der Kolbenbolzen wird durch das vom inneren Kolbenboden abtropfende Öl geschmiert, das man oft in einem entsprechenden Ausschnitt im Kopf der Stange auffängt (Abb. 41.5).

Die an der Lauffläche erzeugte Wärme muß aber zuerst durch Leitung an die Oberfläche gelangen. Das Fouriersche Grundgesetz der Wärmeleitung lautet:

$$dQ = -\lambda df \frac{d\vartheta}{ds} \text{ kcal/h}. \quad (41.10)$$

Darin ist λ die Wärmeleitzahl (kcal/m, h, $^\circ\text{C}$), und $-\frac{d\vartheta}{ds}$ das Temperaturgefälle in der Richtung der Wärmeströmung. Das negative Vorzeichen ist dadurch begründet, daß allgemein

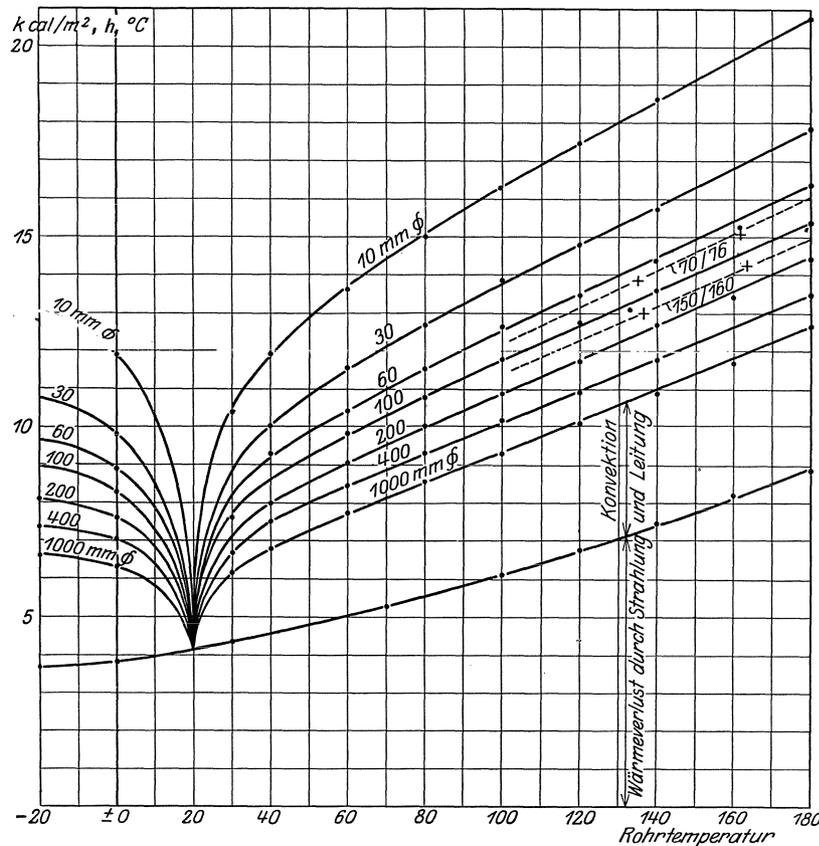


Abb. 41.3. Wärmeabgabe eines horizontalen Rohres an ruhende Luft von 20°C .

$\frac{d\vartheta}{ds}$ in der Richtung der zunehmenden Temperatur als positiv bezeichnet wird und die Wärme in der Richtung der abnehmenden Temperatur strömt.

Wird das Lager in erster Annäherung als ein Hohlzylinder betrachtet (Abb. 41.6), dann ist die durch die Innenfläche $2\pi r l$ in der Zeiteinheit eintretende Wärme: $Q_1 = -\lambda 2\pi r l \frac{d\vartheta}{dr}$, und die in der gleichen Zeit durch die Außenfläche $2\pi(r+dr)l$ austretende Wärme:

$$Q_2 = -\lambda 2\pi(r+dr)l \frac{d}{dr}(\vartheta + d\vartheta) = -\lambda 2\pi r l \left(\frac{d\vartheta}{dr} + \frac{d^2\vartheta}{dr} \right) - \lambda 2\pi dr l \left(\frac{d\vartheta}{dr} + \frac{d^2\vartheta}{dr} \right).$$

Für den Beharrungszustand ist $Q_1 - Q_2 = \lambda 2\pi l \left\{ r \frac{d^2\vartheta}{dr} + d\vartheta + \frac{d^2\vartheta}{0} \right\} = 0$, oder

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} = 0. \quad (41.11)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$\vartheta = A \ln r + B. \quad (41.12)$$

Der Temperaturverlauf in einem Zylinder ist im Beharrungszustand eine logarithmische Kurve.

Der Unterschied zwischen der Oberflächen-

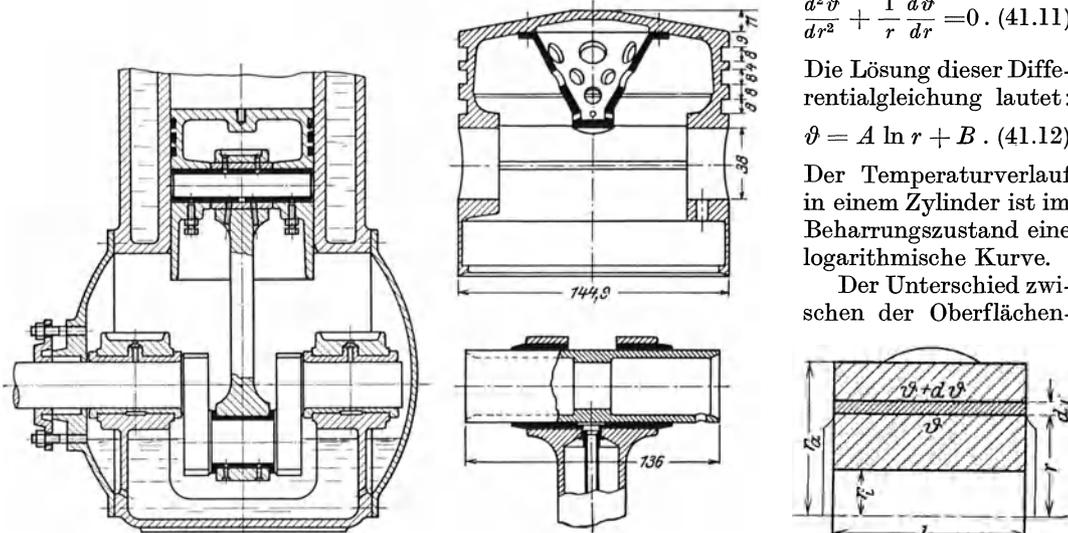


Abb. 41.4. Tauchschmierung. Ungünstige Abkühlung der Lager. (Aus Rötischer.)

Abb. 41.5. Schmierung des Kolbenbolzens. (Aus Heller.)

Abb. 41.6. Wärmeströmung in einem Hohlzylinder.

temperatur ϑ_2 (für $r = r_a$) und der Innentemperatur ϑ_1 (für $r = r_i$) ist:

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = -A \ln r_a/r_i.$$

An der Innenfläche wird die Reibungswärme Q abgeleitet:

$$Q = -\lambda F_i \left(\frac{d\vartheta}{dr} \right)_{r=r_i} = -\lambda F_i \frac{A}{r_i} = -\lambda A \cdot 2\pi l \quad \text{oder} \quad A = -\frac{Q}{2\pi l \cdot \lambda}$$

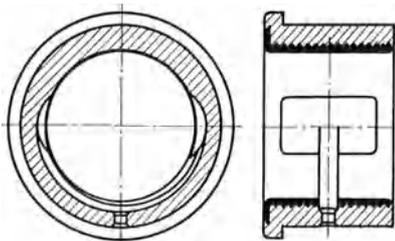


Abb. 41.7. Kunststoff-Lauffläche in Leichtmetallbüchse.

und damit

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \frac{Q}{2\pi l \cdot \lambda} \ln \frac{r_a}{r_i} \quad (41.13)$$

Da $Q = \alpha \cdot 2\pi r_a l \Delta\vartheta$ ist, wird:

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \frac{\alpha}{\lambda} r_a \cdot \Delta\vartheta \ln r_a/r_i \quad (41.14)$$

Für Eisen ist $\lambda = 50 \text{ kcal/m, h, } ^\circ\text{C}$. Wenn $\frac{r_a}{r_i} = 2$ ist,

so wird $\ln \frac{r_a}{r_i} = 0,693$, und mit

$$\alpha = 15 \text{ kcal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C} \text{ und } \Delta\vartheta = 50^\circ\text{C} \text{ ist } \vartheta_1 - \vartheta_2 = 10 r_a.$$

Für $r_a = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$, d. h. bei 10 cm Eisenstärke, wird $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 2^\circ\text{C}$.

Der Temperaturunterschied zwischen der Innen- und Außenfläche des Lagers ist für gutleitende Lagerwerkstoffe nicht groß; es macht auch wenig aus, wenn das Lager eine unregelmäßige vom Kreiszyylinder abweichende Form hat (wie in Abb. 41.6 angedeutet). Wird für die Lauffläche ein Isolierstoff verwendet, z. B. Kunstharz mit einer Wärmeleitzahl $\lambda = 0,25 \text{ kcal/m h } ^\circ\text{C}$, d. i. $\frac{1}{2}\%$ der Wärmeleitzahl von Eisen, so erfordert die Ableitung der gleichen Wärmemenge ein 200 mal so großes Temperaturgefälle! Auch wenn man die Büchse sehr dünn macht

(Abb. 41.7 zeigt wohl die beste Ausführungsmöglichkeit), so entsprechen 3 mm Kunststoff rd. 600 mm Eisendicke!

Außer der Oberfläche des Lagerkörpers gibt auch die Welle Wärme durch Leitung nach kälteren Teilen oder direkt an die umgebende Luft ab. Diese Wärmemenge wird fast immer vernachlässigt, da ihre Berechnung eine genaue Kenntnis der Lage der umgebenden Teile voraussetzt. Sie ist aber nicht immer vernachlässigbar klein¹; ihre Nichtbeachtung bei der Berechnung läßt die Lagertemperatur etwas zu hoch erscheinen, was im Interesse der Sicherheit der Berechnung liegt.

Reicht die natürliche Wärmeabgabe an die umgebende Luft nicht aus, die Lagertemperatur in unschädlicher Höhe zu halten, dann muß das Lager künstlich gekühlt werden. Eine Vergrößerung der Kühlfläche durch Rippen muß als unschön abgelehnt werden. Kühlung durch fließendes Wasser war früher in solchen Fällen meist gebräuchlich. Die Lagerschalen und der Lagerkörper wurden zwecks Durchleitung von Wasser hohl ausgebildet oder es wurden Rohre eingegossen. Dabei besteht immer die Gefahr, daß (infolge von Undichtheiten) Wasser in das Schmieröl gelangt und die Schmierung beeinträchtigt. Viel gebräuchlicher (z. B. bei Dampfturbinen) ist die Kühlung durch Spülöl; das Öl wird in großer Menge zugeführt. Ist G in kg/h die Ölmenge, die durch das Lager geht, c ihre spezifische Wärme und $\Delta\vartheta$ der Temperaturunterschied zwischen Ein- und Austrittsstelle des Öles, dann ist die mitgeführte Wärme

$$Q = G \cdot c \cdot \Delta\vartheta \text{ kcal/h.} \quad (41.14)$$

Die Spülölmenge muß so bemessen und das Lager so konstruiert werden, daß beim Durchfließen durch das Lager keine zusätzliche Reibung entsteht (vgl. Abschn. 42.6). Die umlaufende Ölmenge muß in Kühlern wieder zurückgekühlt werden. Ölkühler, Pumpen und Filter verteuern die Anlage, so daß es immer zweckmäßig ist, die Lager (wenn möglich) durch die natürliche Wärmeabgabe zu kühlen.

42. Reibung und Schmierung.

42.1. Übersicht.

Schrifttum.

Übersicht über die Literatur der Reibung: v. Mises, R.: Encyklopädie der Math. Wissenschaften, Bd. 4, S. 153. — Sachs, G.: Z. angew. Math. Mech. 4 (1924) S. 1 und H. Fromm: Z. angew. Math. Mech. 7 (1927) S. 27 — Die vier grundlegenden Arbeiten der hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung: Petrov, N.: Neue Theorie der Reibung. Dtsch. Übersetzung von L. Wurzel, Hamburg 1887. — Reynolds, O.: On the Theorie of lubrication and his application to Mr. B. Towers Experiments. Philos. Trans. Roy. Soc., Lond. 1886. — Sommerfeld, A.: Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung. Z. Math. u. Phys. 50 (1904) S. 97—155 und Sommerfeld, A.: Zur Theorie der Schmiermittelreibung. Z. techn. Physik 2 (1921) Nr. 3/4. — Michell, A. G. M.: Die Schmierung ebener Flächen. Z. Math. u. Phys. 52 (1905) S. 123—137 sind zusammengefaßt in Oswalds Klassiker Nr. 218. Leipzig: Akad. Verlagsges. 1927. — Gumbel-Everling: Reibung und Schmierung im Maschinenbau. M. Krayn-Verlag 1925, mit Literaturverzeichnis. — Falz, E.: Grundzüge der Schmiertechnik, 2. Aufl. Berlin: Julius Springer 1931 (mit 105 Literaturangaben). Dieses Buch hat viel dazu beigetragen die Schlußfolgerungen der Theorie in Ingenieurkreisen einzuführen; leider kommen die theoretischen Grundlagen darin zu kurz. — Hersey, M. D.: Theorie of Lubrication. London: Chapman & Hall Ltd., 2. Aufl., 1938, mit reichem Quellenverzeichnis (über 400), insbesondere der amerikanischen und englischen Literatur. Eine gute Einführung ohne Mathematik. — Boswall, R. O.: The Theorie of lubrication. London: Longmans, Green & Co. 1928, wohl die beste Zusammenfassung aller theoretischen Grundlagen.

Man unterscheidet drei Arten der Reibung, die ganz verschiedene Dinge umfassen: 1. die trockene, 2. die flüssige und 3. die halbflüssige, Grenz- oder Mischreibung.

Bei der trockenen Reibung berühren sich die Oberflächen der festen Körper ohne jede Zwischenschicht eines Schmiermittels. Die Verschiebungskraft R ist dann dem Normaldruck N proportional:

$$R = \mu_0 \cdot N. \quad (42.1)$$

Die Reibzahl der trockenen Reibung μ_0 ist demnach unabhängig von der Größe der Belastung. Dieses zuerst von Coulomb (1779) aus seinen Versuchen abgeleitete Gesetz gilt, nach den sehr sorgfältig durchgeführten Untersuchungen von Ch. Jakob (1911), für absolut reine, trockene und gasfreie Flächen in sehr weiten Grenzen. Bei diesen Versuchen ergab eine Vergrößerung des Flächendruckes von 0,009 auf 60 at bei Messing auf Messing oder Stahl auf Messing keine über die Fehlergrenze hinausgehende Veränderung der Reibungszahl μ_0 .

Die Grenzfläche zwischen einem festen Körper und der Atmosphäre darf nicht so aufgefaßt

¹ Für die Berechnung dieser Wärmemenge sei verwiesen auf ten Bosch: Die Wärmeübertragung, 3. Aufl., S. 59, Zahlenbeispiel 6. Berlin: Julius Springer 1936.

werden, daß die fest im Kristallgitter verbundenen Atome unmittelbar an frei bewegliche Gasmoleküle grenzen. Beide sind durch eine adsorbierte Luftschicht getrennt, die außerordentlich viel dichter ist als die gewöhnliche Atmosphäre und nur wenige Molekül- bzw. Atomlagen dick ist, also von der Größenordnung 10^{-7} bis 10^{-6} mm. Diese beeinflußt die Reibung zwischen festen Körpern erheblich; sie wirkt wie eine Schmierschicht. Zahlreiche Versuche zeigen, wie die Reibung nach der Entfernung der adsorbierten Schicht zunimmt. Gerlach¹ zeigte dies an einem sehr anschaulichen Versuch:

„Daß Glas glatt ist, daß zwei Stäbchen aufeinander leicht rollen, ist bekannt. Wenn ich die Glasoberfläche aber in der Bunsenflamme durch Erhitzen bis zum Erweichen von allen anhaftenden Schichten befreit habe, so rollen die Stäbchen nicht mehr aufeinander, ja ich kann sie ohne beträchtliche Kraft überhaupt nicht mehr aufeinander bewegen; ich höre wie sie dabei knirschen und sehe, daß ihre Oberfläche hierbei matt wird.“

Bei Eisen- und Stahlflächen handelt es sich bei Berührung mit Luft nicht nur um eine reine Adsorptionsschicht, sondern um eine wenn auch sehr feine Oxydschicht von etwa 10 Molekül- lagen, also um eine chemische Verbindung des Metalls mit dem Gase². Die technischen Körper kommen praktisch auch immer mit Ölen und Fetten in Berührung.

Versuche, die trockene Reibung auf Grund der Molekularkräfte zu erklären, sind wegen der adsorbierten Schichten und wegen der Unebenheiten der Oberflächen technischer Körper, aussichtslos. Die glättesten Oberflächen sind Gebirge mit Höhenunterschieden von mehreren hundert Atomlagen; die Molekularkräfte mit einem Wirkungsbereich von etwa zwei Atomlagen können demnach nicht zur Wirkung kommen.

Die älteren Überlegungen zum Verständnis der trockenen Reibung gehen von der Vorstellung zahnartiger feiner und feinsten Erhöhungen der Oberfläche aus, die sich miteinander verhaken und eine Art Gesperre bilden. Abb. 42.1 zeigt die Trennfuge zwischen einem Ring und einem

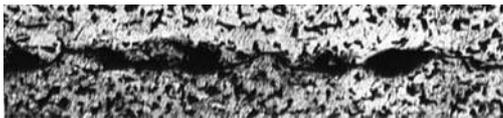


Abb. 42.1.

mit geringem Übermaß und ohne Schmierung eingepreßten Bolzen und gibt ein gutes Beispiel für die geschilderte Vorstellung. Das Coulombsche Reibungsgesetz gilt, solange beim Gleiten der Körper aufeinander die Unebenheiten (Zähne) elastisch verformt werden.

Wird die Flächenbelastung gesteigert, bis an irgendeinem Vorsprung die Elastizitätsgrenze des weicheren Stoffes überschritten wird, so treten bleibende Formänderungen auf: das Material wird geritzt und nützt sich ab (ritzende Reibung). Da die Unebenheiten ungleich hoch und in den Flächen ungleichmäßig verteilt sind, so wird im allgemeinen ein Teil der Vorsprünge elastisch, der Rest unelastisch verformt, bis der Druck so groß geworden ist, daß sämtliche Unebenheiten unelastisch deformiert werden. Für diesen Endzustand gilt das Coulombsche Gesetz wieder, natürlich mit einer höheren Reibungszahl. Für den Zwischenzustand ist die Reibungszahl aber von der Flächenpressung und von der Gleitgeschwindigkeit abhängig.

Das Eintreten der Abnutzung ist also bei unmittelbarer Berührung zweier gleitenden Flächen immer zu erwarten. Bei plastischen Körpern (Weißmetall) kann dadurch die Oberfläche geglättet werden; bei anderen werden die abgeriebenen Teilchen erhöhte Reibung verursachen.

Das Schrifttum über die Abnutzung ist äußerst umfangreich³ und dennoch recht unbefriedigend. Es wird darin gewöhnlich nur die Menge des durch Abnutzung entfernten Werkstoffes bestimmt ohne Angaben der für die Abnutzung grundlegenden Oberflächenbeschaffenheit. Neben der Reiboxydation, die bei der Abnutzung eine Rolle spielt, ist auch der anscheinend neutrale Stickstoff dabei von großer Bedeutung. Versuche von Schottky und Hiltenkamp haben nachgewiesen, daß bei starker Reibung unter hohem Druck eine Nitrierung zustande kommt, die den Werkstoff spröde und brüchig macht.

Die trockene Reibung ist eigentlich nur für die Haftfestigkeit von Schrupf- und Treibsitzen ausschlaggebend. Sie kommt aber auch bei Gleitlagern nach längerer Ruhepause vor. Die Haftreibungszahl war z. B. bei den Versuchen von Stribeck beim Weißmetallager 0,21 bis 0,24 und beim Sellerslager mit Gußschalen nur 0,14, also ziemlich stark abhängig von den beiden Werkstoffen.

Die Schmiermittel dienen zur Verminderung der Reibung; man unterscheidet Öle und

¹ Metallwirtsch. Bd. 14 (1935) S. 1010.

² Holm. Wiss. Veröff. Siemens-Konz., Bd. 10/4 (1931) S. 22.

³ G. Schmaltz gibt in seinem Buch „Technische Oberflächenkunde“ auf S. 212/13 einen Auszug davon. Berlin: Julius Springer 1936.

Fette (Starrschmiere), je nachdem sie bei Zimmertemperatur flüssig oder fest sind. Nach dem Ursprung trennt man sie weiter in pflanzliche und tierische Öle (kurz fette Öle genannt) und Mineralöle.

Bei den pflanzlichen Produkten wird das Öl aus der Saat durch Mahlen und Pressen gewonnen, Olivenöl, Erdnußöl (Arachisöl), Rizinusöl, Rüböl (aus Raps). Die tierischen Produkte gewinnt man durch Auskochen und Schmelzen (Klauenöl, Tran, Talg). Die so gewonnenen Öle müssen natürlich noch (durch Zentrifugen und Filterpressen) gereinigt und von Fettsäuren befreit werden.

Ursprünglich wurden zur Schmierung ausschließlich pflanzliche und tierische Öle und Fette verwendet. Seit 1860, nachdem die ersten Petrolquellen erbohrt wurden, hat man gelernt, aus Erdöl hervorragend geeignete Schmiermittel zu gewinnen (die Mineralöle), die die fetten Öle fast vollständig verdrängt haben. Das Roherdöl, ein Gemisch von verschiedenen Kohlenwasserstoffverbindungen, wird in den Raffinerien auf die mannigfaltigsten Produkte verarbeitet. Die Aufbereitung geschieht zunächst durch Destillation in den drei Hauptfraktionen: Rohbenzin (bis 150° C siedend), Leuchtpetrol (von 150 bis 300° C siedend) und Petrolrückstände (Masut), über 300° C siedend. Aus den letzteren werden durch weitere fraktionierte Destillation Schmieröle verschiedener Zähigkeit gewonnen: Gasöl, Spindelöl, leichte bis schwere Maschinenöle, Zylinderöl und als letztes das natürliche Vaseline.

Die Destillate sind meist undurchsichtig, in der Draufsicht braun bis grünschwarz; die Färbung rührt von den in Öl gelösten Asphaltteilchen her. Sie enthalten auch noch sauerstoff- und schwefelhaltige Verbindungen und organische Säure. Solche Öle erleiden an der Luft und bei der Berührung mit Metallen wesentliche Änderungen (verharzen), so daß sie für dauernde Schmierung unbrauchbar sind. Darum müssen sie noch durch Schwefelsäure raffiniert werden, worauf eine Nachbehandlung mit alkalischen Mitteln (Natronlauge oder Sodalösung) folgt. Bei der Raffination entstehen nicht unbeträchtliche Verluste, wodurch der höhere Preis der Raffinate erklärt ist. Um Öle von höherer Zähigkeit herzustellen, gibt es zwei Verfahren:

1. Durch Einblasen von Luft in fette Öle bei 70—120° C wird ein Teil der ungesättigten Fettsäure oxydiert und ein anderer Teil tritt zu größeren Molekülgruppen zusammen, wodurch eine Steigerung der Zähflüssigkeit erreicht wird (geblasene oder kondensierte Öle).

2. Die Öle werden unter vermindertem Druck (etwa 65 mm Hg) und in einer Wasserstoffatmosphäre den Einwirkungen elektrischer Glimmentladungen ausgesetzt (Voltolisierungsverfahren). Hierdurch wird erreicht, daß die Zähigkeitskurve der Voltölöle in Vergleich zu derjenigen von Mineralölen einen wesentlich flacheren Verlauf nimmt.

Bei	20°	50°	80°	100° C
ist die Zähigkeit von Maschinenöl	17	3,5	1,77	1,39° E ¹
von Voltöl	17	4,5	2,2	1,75° E

Die Starrschmiere (konsistentes Fett, Staufferfett) wird durch Verrühren von Öl mit Kalkseife (zur Verdickung) hergestellt. Die Schmierwirkung muß man sich so vorstellen, daß bei Überwindung der Reibung eine Temperaturerhöhung eintritt, die das Fett zum Erweichen bringt. Der Schmelzpunkt darf also nicht zu hoch liegen, da sonst die Lager unnötig warm werden, aber auch nicht zu tief, weil dann im Sommer das Fett von selbst wegfließt. Durch richtige Wahl der Rohstoffe kann das Fett mit der für jeden Zweck gewünschten Konsistenz hergestellt werden.

Graphit wird oft den Schmiermitteln zugesetzt. Er wird bergmännisch gewonnen (Ceylon) und kommt als Flockengraphit oder Pulvergraphit in verschiedenen Feinheitsgraden in den Handel. Die Reinheit (Aschengehalt) ist für die Güte maßgebend; kleine Beimengungen von Quarz wirken außerordentlich schädlich. In jüngster Zeit ist es gelungen, Graphit künstlich in sehr großer Reinheit und äußerst fein herzustellen. Die Wirkung von Graphit beruht darauf, daß er die Gleitflächen wesentlich glättet (Abb. 42.2) und außerdem, bei ungenügender Schmierung, das Anfressen verhindert.

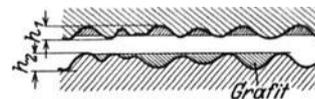


Abb. 42.2. Unebenheiten der Gleitflächen und glättende Wirkung von kolloidalem Graphit.

Oildag ist eine Mischung von gutem Mineralöl mit kolloidalem Kunstgraphit, der sich in so feiner Verteilung befindet, daß er schwebt. Der Graphit saugt sich in die mikroskopisch feinen Poren des Lager- und Wellenmetalles ein, und verleiht beiden Teilen die höchsterreichbare Glätte der Oberfläche. Die Welle bekommt einen schwärzlich schimmernden, harten Graphit Spiegel, der auch durch Abwaschen nicht mehr entfernt werden kann. Die glättende Wirkung von Oildag ist um so größer, je rauher die Oberfläche ursprünglich war.

¹ Die Zähigkeit wird in Englergraden gemessen. Vgl. S. 226.

Pockholz oder Guajakholz (aus Westindien) wurde früher häufig bei Wasserturbinen, Pumpen und Walzwerklager als Lagerwerkstoff verwendet. Es scheidet Harz aus, das mit Wasser eine gute Schmierfläche gibt, so daß Wasserschmierung ausreicht.

42.2. Tragfähige Ölschicht bei geradlinig bewegten Gleitflächen.

Das Ziel einer guten Schmierung ist die Bildung einer tragfähigen Schmierschicht, durch welche die direkte Berührung der Gleitflächen und damit auch gleichzeitig die Abnutzung verhindert wird. Die Reibung ist dann ein hydrodynamisches Problem und ihre Theorie gehört zweifellos zu den wichtigsten Grundlagen des Maschinenbaues. Alle physikalischen Flüssigkeiten (tropfbare und elastische) haben die Eigenschaft der Zähigkeit; diese äußert sich darin, daß in der strömenden Flüssigkeit Schubspannungen auftreten. Man nimmt an (Hypothese von Newton), daß die Schubspannungen unabhängig vom Druck, aber dem Geschwindigkeitsgefälle proportional sind:

$$\tau = \eta \frac{dw}{dy} \tag{42.2}$$

η ist die Zähigkeitszahl [kg · s/m²].

Die Zähigkeit (Viskosität) wird in der Praxis noch selten absolut in cgs-Einheiten (Poise) oder im technischen Maßsystem gemessen ($\eta_{\text{techn}} = \eta_{\text{cgs}}/98,1$; $1 \text{ cP} = 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{s/m}^2$), sondern man bestimmt diese mit dem Englerschen Viskosimeter als:

$$\frac{\text{Auslaufzeit von } 100 \text{ cm}^3 \text{ Öl}}{\text{Auslaufzeit von } 100 \text{ cm}^3 \text{ Wasser bei } 20^\circ} = E^0 = \text{Engler-Grade.}$$

Um die Umrechnung von Engler-Graden auf die absolute Zähigkeit zu ermöglichen, hat Ubbelohde eine empirische Formel (Abb. 42.3) aufgestellt, und zwar:

$$\eta \text{ [kg} \cdot \text{s/m}^2] = \left[7,42 \cdot E^0 - \frac{6,44}{E^0} \right] \gamma \cdot 10^{-4} \quad \gamma = \text{spez. Gewicht in kg/dm}^3.$$

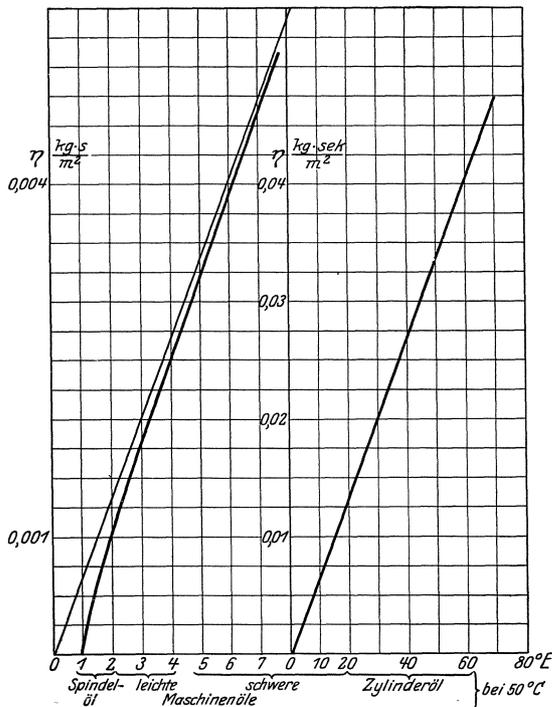


Abb. 42.3. Zusammenhang zwischen absoluter Zähigkeit und Engler-Graden.

Die Zähigkeit von Öl ist in hohem Maße von der Temperatur abhängig (Abb. 42.4). Die Kurven haben einen hyperbolischen Verlauf und können ungefähr durch die Gleichung

$$\eta \vartheta^b = C \tag{42.3}$$

dargestellt werden, worin ϑ die Öltemperatur in °C ist und der Exponent $b = 1,75$ bis $2,5$ von der Ölart abhängt. Die Zähigkeit hängt aber auch vom Druck ab und ist für p at:

$$\eta_p = \eta_1 (1 + \beta p) \tag{42.4}$$

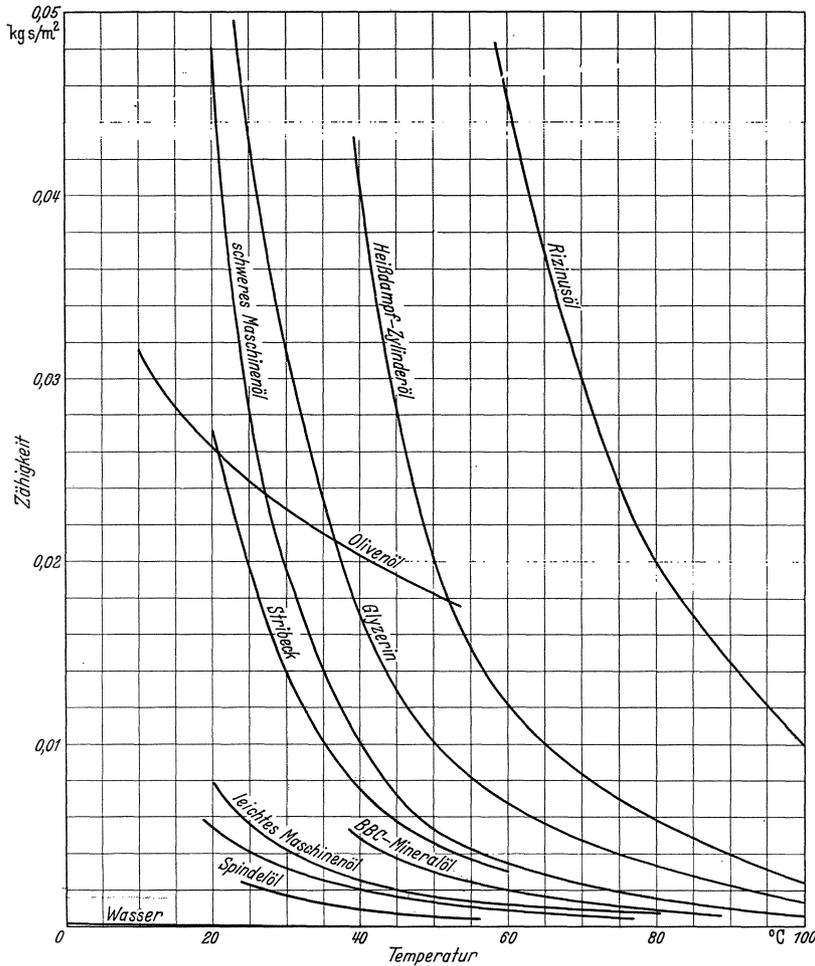
mit $\beta = 0,0013$ bis $0,003$ und p in at¹.

Zwei Flächen, die durch eine dünne Ölschicht getrennt sind, bewegen sich mit einer konstanten Geschwindigkeit U (Abb. 42.5) relativ so zueinander, daß die Spaltform sich während der Bewegung nicht ändert. Da h/a sehr klein vorausgesetzt ist, kann die Strömung in der Y -Richtung gegenüber der vielfach größeren Strömung in der X -Richtung vernachlässigt werden; dann ist p auch unabhängig von y . Wir setzen zunächst weiter voraus, daß die Flächen senkrecht zur Bewegungsrichtung sehr groß und seitlich abgedichtet sind, so daß auch in dieser Richtung keine Strömung stattfinden kann. Auf ein Volumenelement $dx \cdot dy \cdot 1$ wirkt unter Vernachlässigung der Schwerkraft die Kraft

$$dp \cdot dy - d\tau \cdot dx,$$

die der Masse des Volumenelementes $dx \cdot dy \cdot \rho$ eine Beschleunigung dw/dt erteilt ($\rho = \gamma/g$).

¹ Kiesskalt, Dr. S.: Einfluß des Druckes auf die Zähigkeit von Ölen und seine Bedeutung für die Schmiertechnik. Mitt. Forsch. Arb. Heft 291. (1927).



- Voraussetzungen
- 1) Gleitecke
 - 2) Spalt voll
 - 3) Spalt in kleine
 - 4) Fließigkeit
 - 5) Hypothese
 - 6) Schubkraft

Abb. 42.4. Zähigkeit verschiedener Ölsorten.

Die Bewegungsgleichung für das Volumenelement lautet demnach:

$$dp \cdot dy - d\tau \cdot dx = \rho dx \cdot dy \cdot dw/dt. \quad (42.5)$$

Vernachlässigen wir nun die Massenkraft $\rho dx \cdot dy \cdot dw/dt$ gegenüber der vielfach größeren Wirkung der Zähigkeit (L. Prandtl nennt solche Bewegungen „schleichend“), so vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zu:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\tau}{dy} \quad || \text{Grundgleichung} \quad (42.6)$$

Setzt man darin nach der Newtonschen Hypothese $\tau = \eta dw/dy$, also $\frac{d\tau}{dy} = \eta \frac{d^2w}{dy^2}$ ein, so ist:

$$\frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} = \frac{d^2w}{dy^2}. \quad (42.7)$$

Wir integrieren diese Gleichung partiell nach y (bleiben bei der Integration also in der Y -Ebene, in welcher dp/dx konstant ist), nehmen dabei an, daß die Zähigkeit in der y -Richtung konstant ist, und erhalten:

$$w = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} \cdot \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2. \quad (42.8)$$

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 folgen aus der Randbedingung, daß das Öl an den beiden Oberflächen haftet. Infolge der Adsorption, d. i. die Wirkung der molekularen Kräfte eines festen

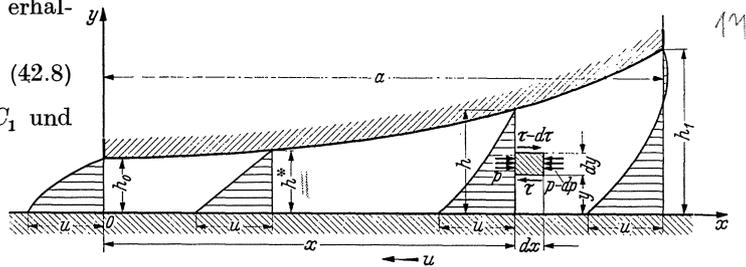


Abb. 42.5. Geschwindigkeitsverteilung zwischen zwei Gleitflächen.

Körpers auf die Flüssigkeit in der unmittelbaren Nähe der Grenzfläche, ist ein völliges Lösen der Flüssigkeitsschicht von dem festen Körper durch äußere Kräfte wohl überhaupt nicht möglich. Reines Mineralöl benetzt in Anwesenheit von Wasserdampf und bei hohen Temperaturen Eisen nicht, weil seine Oberflächenspannung größer ist als die von heißem Wasser in Gegenwart von Dampf. Deshalb sind in solchen Fällen dem Mineralöl fette Öle beizumischen.

Für $y = 0$ ist $w = -U = C_2$ und

für $y = h$ ist $w = \frac{h^2}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dx} + C_1 h - U = 0$. Die Geschwindigkeit

$$w = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) - U (1 - y/h) \quad (42.8a)$$

hat also einen parabolischen Verlauf. Für $U = 0$ ist

$$w = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy). \quad (42.9)$$

Die Flüssigkeitsmenge G_1 , die durch einen beliebigen Querschnitt von der Breite 1 infolge der Verschiebung strömt, ist:

$$G_1 = \int_0^h w dy = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dx} \int_0^h (y^2 - hy) dy - \int_0^h \frac{U}{h} (h - y) dy = - \left(\frac{h^3}{12\eta} \frac{dp}{dx} + \frac{Uh}{2} \right) \quad (42.10)$$

und muß konstant (unabhängig von x) sein. Setzt man

$$G_1 = -Uh^*/2 \quad (42.11)$$

und löst Gl. (10) nach dp/dx auf, so erhält man die wichtige Beziehung:

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{6\eta U}{h^3} (h - h^*) = 6\eta U \left(\frac{h^*}{h^3} - \frac{1}{h^2} \right) \quad (42.12)$$

aus welcher folgt, daß h^* diejenige Spalthöhe ist, für welche $dp/dx = 0$, also der Druck p ein Maximum wird.

Durch Einsetzen von dp/dx aus Gl. (12) in Gl. (8a) erhält man:

$$-w = \frac{3U}{h^2} \left(1 - \frac{h^*}{h} \right) (y^2 - hy) + U \left(1 - \frac{y}{h} \right) \quad (42.13)$$

und für $h = h^*$:

$$-w = U (1 - y/h) \quad (42.14)$$

einen geradlinigen Verlauf der Geschwindigkeit (Abb. 42.5).

Wenn $h = f(x)$ bekannt ist, folgt aus der zweimaligen Integration der Gl. (12):

$$p_x = \int_0^x \frac{6\eta U}{h^3} (h^* - h) dx \quad \text{und} \quad P_1 = \int_0^a p_x dx. \quad (42.15)$$

Zur Verschiebung der ebenen Fläche ist eine Kraft erforderlich um die Schubspannungen an der Oberfläche zu überwinden. Für die Breitereinheit der Gleitfläche ist $R_1 = \int_0^a \tau_0 dx$.

Aus $\tau = \eta \frac{dw}{dy} = \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} (2y - h) + \frac{U}{h} \eta$ folgt für $y = 0$ mit dp/dx aus Gl. (12):

$$\tau_0 = - \frac{h}{2} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{U}{h} \eta = \eta U \left(\frac{4}{h} - 3 \frac{h^*}{h^2} \right). \quad (42.16)$$

Die Reibungskraft $R_1 = \int_0^a \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{dp}{dx} (2y - h) + \frac{U}{h} \eta \right] dx$ ist abhängig von y ; sie hat also einen verschiedenen Wert für $y = 0$ und $y = h$. Der Unterschied zwischen

$$\tau_h = \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} + \frac{U}{h} \eta = \eta U \left(\frac{3h^*}{h^2} - \frac{2}{h} \right) \quad \text{und} \quad \tau_0 \text{ ist } h \cdot \frac{dp}{dx}. \quad (42.17)$$

Wenn das Öl ohne Überdruck zu- und abfließt, ist der Unterschied der Reibungskräfte

$$R_h - R_0 = \int_0^a h \cdot \frac{dp}{dx} \cdot dx = |hp|_0^a - \int_0^a p dh = - \int_0^a p dh$$

gleich der Komponente der Kraft P in der Verschiebungsrichtung. Die Verschiebungskraft R ist deshalb für $y = h$ und für $y = 0$ gleich groß.

Die Reibzahl μ wird — wie bei der Bewegung zwischen festen Körpern — definiert als das Verhältnis zwischen Verschiebungskraft und Normalbelastung:

$$\mu = R_1/P_1 = \eta U \frac{\int_0^a \left(\frac{4}{h} - 3 \frac{h^*}{h^2} \right) dx}{P_1}. \quad (42.18)$$

Da nach der Newtonschen Hypothese die Schubspannung und damit die Reibungskraft R unabhängig von p ist, kann für kleine Belastungen die Reibzahl μ sehr groß werden, vielfach größer als bei der Reibung nicht geschmierter Flächen (vgl. Abschn. 62.4, Lederriemen).

Für parallele Gleitflächen ($h = \text{konstant}$) folgt aus der Integration von Gl. (15), wenn die Zähigkeit als unabhängig von x angenommen wird (was nicht zutrifft):

$$p_x = - \frac{6 \eta U x}{h^3} (h - h^*) + C,$$

also ein geradliniger Druckverlauf. Kann das Öl bei $x = 0$ ohne Überdruck abfließen, so ist $C = 0$ und für $x = a$,

$$p_a = \frac{6 \eta U a}{h^2} \left(\frac{h^*}{h} - 1 \right) \quad \text{und} \quad p_x = p_a \cdot x/a. \quad (42.19)$$

Parallele Flächen sind tragfähig, wenn das Öl unter Überdruck zugeführt wird ($p_a = \text{positiv}$, also $h^* > h$). Der Druck p_a kann z. B. durch eine Ölpumpe erzeugt werden und dann jeden beliebigen Wert haben; bei gegebenem p_a ist h^*/h aus Gl. (19) bestimmt. Die Tragfähigkeit der Ölschicht für die Breitereinheit ist

$$P_1 = \frac{p_a \cdot a}{2} = \frac{3 \eta U a^2}{h^2} \left(\frac{h^*}{h} - 1 \right) = \frac{\eta U a^2}{h^2} \Phi. \quad (42.20)$$

Voraussetzung der Rechnung ist, daß beide Gleitflächen durch eine Ölschicht getrennt bleiben. Die Spalthöhe h muß demnach immer größer als die Summe der Unebenheiten sein, die abhängig ist von der Bearbeitungsgüte. Durch die Gleichung

$$h = a \sqrt{3 \left(\frac{h^*}{h} - 1 \right)} \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}} = a \sqrt{\Phi} \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}} > \text{Summe der Unebenheiten} \quad (42.21)$$

erhält die früher übliche Bedingung, daß das Öl zwischen den Gleitflächen nicht weggepreßt werden darf (vgl. S. 220), eine einfache mathematische Formulierung.

Man rechnet allgemein mit einer „mittleren“ Flächenpressung p kg/cm² nach der Gleichung

$$P = p \cdot a \cdot b, \quad (42.22)$$

worin a die Länge und b die Breite der Gleitfläche in cm ist. Da der Druck weder in der a - noch in der b -Richtung konstant ist, sagt der Rechnungswert p nichts aus über die wirklich auftretenden Pressungen.

Aus Gl. (16) folgt die Verschiebungskraft

$$R_1 = \int_0^a \tau_0 dx = \frac{\eta U a}{h} \left(4 - 3 \frac{h^*}{h} \right) = \frac{\eta U a}{h} \vartheta \quad (41.23)$$

und damit die Reibzahl

$$\mu = R_1/P_1 = \frac{4 - 3 h^*/h}{3 (h^*/h - 1)} \cdot \frac{h}{a} = C \frac{h}{a}. \quad (41.24)$$

Die Reibzahl wird Null für $h^* = \frac{4}{3} h$. Mit h/a aus Gl. (21) ist:

$$\mu = \frac{4 - 3 h^*/h}{\sqrt{3 (h^*/h - 1)}} \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}} = \frac{\vartheta}{\sqrt{\Phi}} \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}} = K \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}} \quad (41.25)$$

Φ , ϑ , C u. K sind Zahlenwerte, die aus Zahlentafel 42.1 für verschiedene Werte von h^*/h zu entnehmen sind.

Zahlentafel 42.1. Zahlenwerte zur Berechnung der Reibung für parallele Gleitflächen.

Für $h^*/h =$	1	1,05	1,1	1,2	1,3	$\frac{4}{3}$
ist $\Phi =$	0	0,15	0,3	0,6	0,9	1
$\sqrt{\Phi} =$	0	0,387	0,548	0,775	0,949	1
$\vartheta =$	1	0,85	0,7	0,4	0,1	0
$K =$	∞	2,18	1,28	0,52	0,105	0
$C =$	∞	5,67	2,33	0,667	0,111	0

Für $U = 0$ folgt aus Gl. (9) die größte Geschwindigkeit für $y = h/2$ zu

$$w_{\max} = \frac{h^2}{8\eta} \cdot \frac{dp}{dx} \tag{42.26}$$

und die mittlere Geschwindigkeit aus Gl. (10):

$$w = \frac{h^2}{12\eta} \cdot \frac{dp}{dx} \tag{42.27}$$

Diese Gleichungen dienen zur Berechnung der erzwungenen Strömung in engen Spalten.

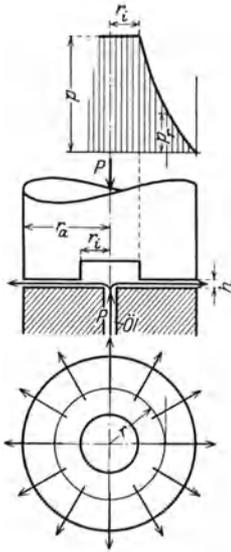


Abb. 42.6. Druckverteilung in einem Längslager.

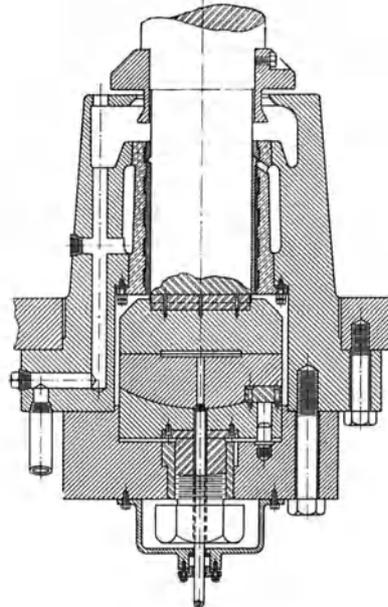


Abb. 42.7. Spurlager der General Electric Co. (Aus Stodola.)

Der praktisch wichtigste Fall paralleler Gleitflächen, bei denen das Öl unter Druck zugeführt wird, liegt vor bei der Lagerung vertikaler Wellen (Abb. 42.6 u. 7). Die Untersuchung wird am einfachsten, wenn wir das Problem in zwei Teile zerlegen:

a) Bestimmung der Tragfähigkeit eines ruhenden Zapfens, wenn die Ölmenge, G m³/s, zugeführt wird.

b) Berechnung der Reibkraft eines drehenden, aber unbelasteten Zapfens, $G = 0$.

Durch Superposition beider Fälle erhält man den allgemeinen Fall eines sich drehenden und belasteten Zapfens. Diese Superposition ist zulässig, weil — nach der Newtonschen Hypothese — die Reibkraft unabhängig von der Belastung ist.

a) Gl. (10) kann auf den Ringzapfen angewandt werden,

indem an Stelle der Breite 1 die veränderliche Breite $2\pi r$ gesetzt wird. Dann ist, da $U = 0$,

$$G = -\frac{h^3}{12\eta} \frac{dp}{dr} \cdot 2\pi r \quad \text{oder} \quad dp = -\frac{6\eta}{\pi h^3} \cdot G \frac{dr}{r}$$

und

$$p_r = -\frac{6\eta G}{\pi h^3} \ln r + C.$$

Wenn das Öl außen (für $r = r_a$) ohne Überdruck abfließen kann, ist

$$p_r = \frac{6\eta G}{\pi h^3} \ln \frac{r_a}{r}.$$

Für $r = r_i$ ist:

$$p = \frac{6\eta G}{\pi h^3} \ln \frac{r_a}{r_i}. \tag{42.28}$$

Damit wird $p_r = p \frac{\ln \frac{r_a}{r}}{\ln \frac{r_a}{r_i}}$. Die Tragfähigkeit P des Lagers ist:

$$P = p\pi r_i^2 + \int_{r_i}^{r_a} 2\pi r p \cdot dr = p\pi r_i^2 + \frac{2\pi p}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \int_{r_i}^{r_a} r \ln \frac{r_a}{r} dr = \frac{\pi}{2} p \frac{r_a^2 - r_i^2}{\ln \frac{r_a}{r_i}}. \tag{42.29}$$

oder mit p aus Gl. (28):

$$P = \frac{3\eta G}{h^3} (r_a^2 - r_i^2). \tag{42.30}$$

b) Wenn der Ringzapfen sich unbelastet dreht, ist (da $G = 0$) $\frac{dp}{dr} = 0$, so daß nach Gl. (8) ein lineares Geschwindigkeitsgefälle vorhanden ist. Mit $U = \omega \cdot r$ ist die Schubspannung

$$\tau = \eta \frac{dw}{dy} = \frac{\eta \omega r}{h}.$$

Die Reibkraft für ein Flächenelement $2 \pi r dr$ ist $dR = \frac{\eta \omega r}{h} \cdot 2 \pi r dr$; die totale Verschiebungskraft:

$$R = \frac{2 \pi \eta \omega}{h} \int_{r_i}^{r_a} r^2 dr = \frac{2 \pi \eta \omega}{3 h} (r_a^3 - r_i^3) \quad (42.31)$$

und das Reibmoment:
$$M_r = \frac{2 \pi \eta \omega}{h} \int_{r_i}^{r_a} r^3 dr = \frac{\pi \eta \omega}{2 h} (r_a^4 - r_i^4). \quad (42.4)$$

c) Für den drehenden und belasteten Zapfen erhält man durch Superposition von a) und b) die Reibzahl:

$$\mu = \frac{R}{P} = \frac{\frac{2 \pi \eta \omega}{3 h} (r_a^3 - r_i^3)}{\frac{3 \eta G}{h^3} (r_a^2 - r_i^2)} = \frac{2 \pi h^2}{9 G} \cdot \frac{r_a^3 - r_i^3}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \omega.$$

Für die Förderung von $G \text{ m}^3/\text{s}$ Öl gegen eine Pressung von $p \text{ kg/m}^2$ beträgt die Pumpleistung:

$$L_p = \frac{G \cdot p}{\varepsilon} = \frac{p P h^3}{3 \eta \varepsilon (r_a^2 - r_i^2)} \text{ kgm/s}, \quad (42.33)$$

wenn mit ε der Wirkungsgrad der Ölpumpe bezeichnet wird. Die Reibleistung beträgt

$$L_r = M_r \omega = \frac{\pi \eta \omega^2}{2 h} (r_a^4 - r_i^4) \text{ kgm/s}, \quad (42.32)$$

so daß die totale aufgewandte Leistung $L = L_p + L_r$ ist. Diese wird ein Minimum für $\frac{dL}{dh} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial h} = \frac{p P}{3 \eta \varepsilon (r_a^2 - r_i^2)} 3 h^2 - \frac{\pi \eta \omega^2}{2 h^2} (r_a^4 - r_i^4) = 0$$

oder für

$$h = \sqrt[4]{\frac{\pi \eta^2 \omega^2 \varepsilon (r_a^2 - r_i^2) (r_a^4 - r_i^4)}{2 p P}}. \quad (42.35)$$

Zahlenbeispiel 42.1: Die Reibzahl, die Ölmenge und die totale Leistung sollen für einen mit 10 t belasteten Ringzapfen berechnet werden, wenn Preßöl von 20 at mit einer Zähigkeit $\eta = 0,002 \text{ kg s/m}^2$ zugeführt wird, $\frac{r_i}{r_a} = 0,5$ und $\omega = 50/\text{s}$ ist.

Aus Gl. (29) folgt:
$$P = \frac{\frac{\pi}{2} r_a^2 \left\{ 1 - \left(\frac{r_i}{r_a} \right)^2 \right\}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} p = \frac{\frac{\pi}{2} (1 - 0,25)}{0,693} p r_a^2 = 1,68 r_a^2 p = 33,6 r_a^2$$

oder $r_a = \sqrt{\frac{10000}{33,6}} = 17,2 \text{ cm}$ und damit $r_i = 8,6 \text{ cm}$. Die günstige Spalthöhe folgt aus

Gl. (35) zu:
$$h = \sqrt[4]{\frac{\pi \cdot 0,002^2 \cdot 2500 \cdot 0,7 (1 - 0,25) \left(1 - \frac{1}{16} \right) \cdot 0,172^6}{2 \cdot 200000 \cdot 10000}} = 0,0001 \text{ m} = 0,1 \text{ mm}.$$

Damit wird die hindurchgehende Ölmenge aus Gl. (30):

$$G = \frac{P h^3}{3 \eta (r_a^2 - r_i^2)} = \frac{10000 \cdot 0,0001^3}{3 \cdot 0,002 \left(1 - \frac{1}{4} \right) \cdot 0,172^2} = 0,074 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

und die Pumpleistung, mit $\varepsilon = 0,7$:
$$L_p = \frac{0,074 \cdot 10^{-3} \cdot 200000}{0,7} = 21 \text{ kgm/s}.$$

Die Reibkraft ist nach Gl. (31)
$$R = \frac{2 \pi \cdot 0,002 \cdot 50}{3 \cdot 0,0001} \left(1 - \frac{1}{8} \right) \cdot 0,172^3 = \text{rd } 10 \text{ kg},$$

so daß
$$\mu = \frac{R}{P} = \frac{10}{10000} = 0,001 \text{ ist}.$$

Die Reibleistung ist
$$L_r = \frac{\pi \cdot 0,002 \cdot 2500 \left(1 - \frac{1}{16} \right) \cdot 0,172^4}{2 \cdot 0,0001} \approx 67 \text{ kgm/s} = 0,9 \text{ PS},$$

oder $0,9 \cdot 632 = 565$ kcal/h. Die totale Verlustleistung ist $21 + 67 = 88$ kgm/s = 1,18 PS entsprechend einer Vergleichsreibungszahl von $\frac{88}{21} \cdot 0,001 = 0,0042$.

Verschiedene Spaltformen. Die Verwendung von gesonderten Ölpumpen ist heute wieder verlassen worden, weil eine tragfähige Ölschicht viel einfacher erzeugt werden kann. Wird nämlich bei parallelen Gleitflächen der Querschnitt bei $x = a$ teilweise abgesperrt (Abb. 42.8 u. 9), so daß dort der Druck p_0 herrscht, so folgt aus Gl. (19), wenn für $x = 0, p = 0$ ist wieder:

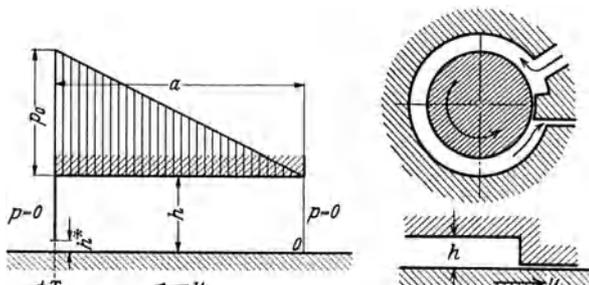


Abb. 42.8/9. Drucksteigerung durch teilweise Abspernung des Querschnittes.

$$p_0 = \frac{6 \eta U a}{h^2} \left(1 - \frac{h^*}{h} \right) \quad (42.36)$$

und $p_x = p_0 \cdot x/\ddot{u}$.

Aus dieser Gleichung folgt, daß nur für kleine Werte von h, p_0 groß werden kann; z. B. ist für $\eta = 0,001$ kg s/m², $U = 1$ m/s, $a = 0,1$ m und $h^*/h = 1/3$,

$$h = 0,1 \text{ mm} = 10^{-4} \text{ m}, \quad p_0 = \frac{6 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1 \cdot 10^8 \cdot 2}{3} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^2 = 4 \text{ at},$$

und für $h = 0,01$ mm

$$p_0 = 400 \text{ at!}$$

Die resultierende Kraft, d. i. die Tragfähigkeit der Ölschicht für die Breitereinheit ist

$$P_1 = p_0 a/2 = \frac{3 \eta U a^2}{h^2} \left(1 - \frac{h^*}{h} \right) = \frac{\eta U a^2}{h^2} \Phi. \quad (42.37)$$

Die Gl. (23) bis (25) bleiben auch für die abgesperrte Platte gültig mit den Zahlenwerten aus Zahlentafel 42.2.

Zahlentafel 42.2. Zahlenwerte zur Berechnung der Reibung für teilweise abgesperrte parallele Gleitflächen.

Für $h^*/h_0 =$	1	0,5	$\frac{1}{3}$	0,2	0,1	0
ist $\Phi =$	0	1,5	2	2,4	2,7	3
$\sqrt{\Phi} =$	0	1,225	1,414	1,55	1,64	1,73
$\vartheta =$	1	2,5	3	3,4	3,7	4
$K =$	∞	2,204	2,12	2,2	2,26	2,3
$C =$	∞	1,667	1,5	1,41	1,37	1,33

Aus diesen Überlegungen folgt, daß zur Erzeugung einer tragfähigen Ölschicht jeder Ölspalt geeignet ist, dessen Höhe in der Richtung der Bewegung abnimmt. Für die Integration der Gl. (12) muß natürlich die Spalthöhe $h = \text{Funktion}(x)$, bekannt sein (Abb. 42.5). Jede Spaltform und jeder Wert von a gibt bei der Integration einen anderen Wert für die Tragfähigkeit P_1 , für die Verschiebungskraft R_1 und deshalb auch eine andere Reibungszahl. Um allgemeine, von der absoluten Größe der Gleitfläche unabhängige Beziehungen zu erhalten, werden dimensionslose Größen eingeführt. Die Gleichung

$$h/h_0 = f(x/a), \quad (42.38)$$

worin h_0 die kleinste Spalthöhe und a die Ausdehnung der Gleitfläche in der Verschiebungsrichtung (Plattenlänge) ist, gilt für alle „ähnliche“ Spaltformen. In Gl. (12) eingesetzt wird

$$dp = \frac{6 \eta U a}{h_0^3} \left[\frac{h^*}{h_0} \cdot \frac{1}{f^3(x/a)} - \frac{1}{f^2(x/a)} \right] dx/a \quad (42.39)$$

Die Integration dieser Gleichung läßt sich immer graphisch (Abb. 42.10), bei einfachen Spaltformen auch analytisch durchführen. Der Nullpunkt liegt an der engsten Spaltstelle und fällt mit dem Anfang der Gleitfläche zusammen. Das Ergebnis der verschiedenen Integrationen wird

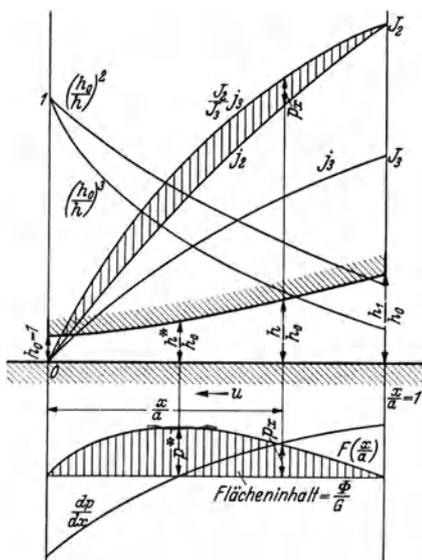


Abb. 42.10. Graphische Integration.

durch folgende Symbole dargestellt:

$$j_1(x/a) = \int_0^{x/a} \frac{d(x/a)}{f(x/a)} = j_1 \quad j_2 = \int_0^{x/a} \frac{d(x/a)}{f^2(x/a)} \quad j_3 = \int_0^{x/a} \frac{d(x/a)}{f^3(x/a)}$$

$$J_1 = \int_0^1 \frac{d(x/a)}{f(x/a)} = j_1(x/a=1) = j_1(1.) \quad J_2 = \int_0^1 \frac{d(x/a)}{f^2(x/a)} = j_2(1.) \quad J_3 = \int_0^1 \frac{d(x/a)}{f^3(x/a)} = j_3(1.)$$

Bei gegebener Spaltform $h/h_0 = f(x/a)$ hängen die Symbole j_1 , j_2 und j_3 nur von x/a ab, während die Symbole J_1 , J_2 und J_3 reine Zahlenwerte sind, die nur von der Spaltform abhängen. Mit diesen Abkürzungen wird

$$p_x = \frac{6 \eta U a}{h_0^2} \left[\frac{h^*}{h_0} j_3 \left(\frac{x}{a} \right) - j_2 \left(\frac{x}{a} \right) - C_0 \right]. \quad (42.40)$$

Die noch unbekanntenen Konstanten C_0 und h^*/h_0 sind durch die Randbedingungen bestimmt:

a) Ist für $x/a = 0$, $p_0 = 0$ und für $x/a = 1$, $p_1 = 0$, d. h. kann das Öl ohne Überdruck zu- und abfließen, dann ist

$$C_0 = 0 \quad \text{und} \quad h^*/h_0 = J_2/J_3 \quad (42.41 a)$$

b) Ist für $x/a = 0$, $p_0 = 0$ und für $x/a = 1$, $p_1 \neq 0$ (Öl wird mit Überdruck zugeführt), dann ist: $C_0 = 0$ und

$$p_1 = \frac{6 \eta U a}{h_0^2} \left(\frac{h^*}{h_0} J_3 - J_2 \right) \quad \text{oder} \quad h^*/h_0 = \frac{J_2 + p_1 h_0^2 / 6 \eta U a}{J_3}. \quad (42.41 b)$$

c) Ist für $x/a = 0$, $p_0 \neq 0$ und für $x/a = 1$, $p_1 = 0$ (Öl fließt mit Überdruck ab), so wird:

$$C_0 = \frac{h^*}{h_0} J_3 - J_2 \quad \text{und} \quad p_0 = \frac{6 \eta U a}{h_0^2} \left(J_2 - \frac{h^*}{h_0} J_3 \right) \quad \text{oder} \quad h^*/h_0 = \frac{J_2 - p_0 h_0^2 / 6 \eta U a}{J_3}. \quad (42.41 c)$$

Der Klammerausdruck in Gl. (40) ist nun eindeutig bestimmt; er hängt bei gegebener Spaltform nur von x/a ab und kann zur Vereinfachung der Schreibweise durch das Zeichen $F(x/a)$ dargestellt werden:

$$p_x = \frac{6 \eta U a}{h_0^2} F \left(\frac{x}{a} \right). \quad (42.42)$$

Die Tragfähigkeit der Ölschicht für die Breitereinheit ist

$$P_1 = \int_0^a p_x dx = a \int_0^1 p_x d(x/a) = \frac{6 \eta U a^2}{h_0^2} \int_0^1 F(x/a) d(x/a) = \eta \frac{U a^2}{h_0^2} \Phi \quad (42.43)$$

worin das Symbol $\Phi = 6 \int_0^1 F(x/a) d(x/a)$ eine reine Zahl ist, die nur von der Form des Spaltes abhängt. Für die am einen Ende teilweise abgesperrte parallele Gleitfläche (Abb. 42.8 u. 9) z. B. ist $\Phi = \frac{1}{2} (1 - h^*/h)$. Nach h_0/a aufgelöst folgt aus Gl. (43) die kleinste Ölschichtdicke:

$$h_0 = a \sqrt{\Phi} \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}} > \Sigma \text{ Unebenheiten}. \quad (42.44)$$

Die Verschiebungskraft R_1 folgt aus Gl. (16) zu:

$$R_1 = a \int_0^1 \tau_0 d \left(\frac{x}{a} \right) = \eta U a \int_0^1 \left(\frac{4}{h} - 3 \frac{h^*}{h^2} \right) d \left(\frac{x}{a} \right) = \frac{\eta U a}{h_0} \int_0^1 \left(\frac{4}{h/h_0} - \frac{3 h^*/h_0}{(h/h_0)^2} \right) \cdot d \left(\frac{x}{a} \right)$$

$$= \frac{\eta U a}{h_0} \left\{ 4 J_1 - 3 \frac{h^*}{h_0} \cdot J_2 \right\} = \frac{\eta U a}{h_0} \vartheta \quad (42.45)$$

worin ϑ wieder eine reine, nur von der Spaltform abhängige Zahl ist. Die Reibzahl ist:

$$\mu = \frac{R_1}{P_1} = \frac{h_0}{a} \cdot \frac{\vartheta}{\Phi} = C \frac{h_0}{a} \quad (42.46)$$

oder den Wert von h_0/a aus Gl. (44) eingesetzt:

$$\mu = \frac{\vartheta}{\sqrt{\Phi}} \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}} = K \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}} \quad (42.47)$$

Aus Gl. (46) folgt, daß die Reibzahl eine geometrische Größe ist, nur abhängig

von h_0/a und von der Spaltform; sie scheint völlig unabhängig von der Art der Flüssigkeit und von der Gleitgeschwindigkeit. Zwei feste Flächen, die in genau gleicher Lage aneinander mit beliebiger Geschwindigkeit vorbeigleiten, haben also die gleiche Reibzahl, gleichgültig, ob das Schmiermittel Luft oder zähes Öl ist. Die gegenseitige Lage dagegen, d. i. das Verhältnis h_0/a ist natürlich von P_1 , U und η abhängig. Bei der Anwendung der obenstehenden Gleichungen ist zu beachten, daß die Zahlenwerte, Φ , ϑ , K und C nicht nur von der Spaltform, sondern auch von den Randbedingungen (a bis c) abhängig sind.

Für die geneigte Platte (Abb. 42.11) mit

$$h/h_0 = (1 + mx/a) = f(x/a), \quad (42.48)$$

worin
$$m = \frac{h_1 - h_0}{h_0} \quad (42.49)$$

ein Maß für die Schrägstellung ist, lassen sich die Integrationen leicht durchführen.

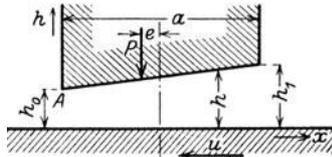


Abb. 42.11.

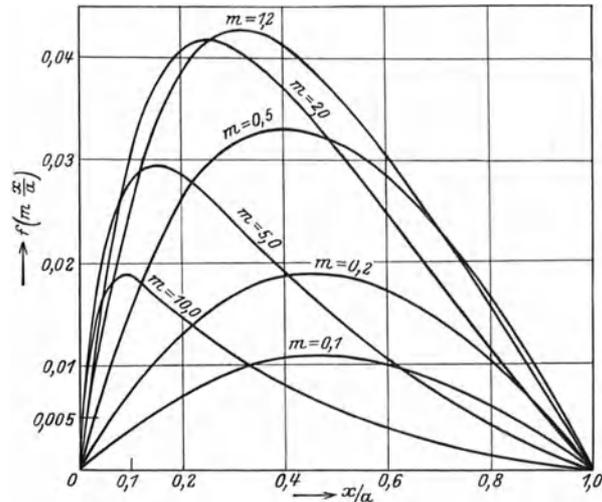


Abb. 42.12. Druckverteilung bei geneigten Gleitflächen.

Es ist:
$$j_1 = \int_0^{x/a} \frac{d(x/a)}{1 + mx/a} = \frac{1}{m} \ln(1 + mx/a) \quad \text{und} \quad J_1 = \frac{\ln(1 + m)}{m},$$

$$j_2 = \int_0^{x/a} \frac{d(x/a)}{(1 + mx/a)^2} = \frac{x/a}{1 + mx/a}; \quad J_2 = \frac{1}{1 + m}$$

$$j_3 = \int_0^{x/a} \frac{d(x/a)}{(1 + mx/a)^3} = \frac{x/a \cdot (2 + mx/a)}{2(1 + mx/a)^2}; \quad J_3 = \frac{m + 2}{2(1 + m)^2}.$$

Fall a. Das Öl fließt ohne Überdruck zu und ab, dann ist:

$$\frac{h^*}{h_0} = \frac{J_2}{J_3} = \frac{2(m + 1)}{m + 2} \quad C_0 = 0.$$

$$F_a\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{h^*}{h_0} j_3 - j_2 = \frac{m}{m + 2} \frac{x}{a} (1 - x/a) \quad (\text{Abb. 42.12})$$

$$\Phi_a = 6 \int_0^1 F\left(\frac{x}{a}\right) d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{6 \ln(m + 1)}{m^2} - \frac{12}{m(m + 2)} \quad (\text{Abb. 42.13})$$

$$\vartheta_a = 4 J_1 - 3 \frac{J_2^2}{J_3} = \frac{4 \ln(m + 1)}{m} - \frac{6}{m + 2} \quad (\text{Abb. 42.13}).$$

Die Werte Φ , ϑ , K und C können aus Zahlentafel 42.3 entnommen werden.

Fall b. Für $x/a = 0$, $p_0 = 0$ und für $x/a = 1$, $p_1 \neq 0$.

$$C_0 = 0 \quad h^*/h_0 = \frac{J_2}{J_3} + \frac{p_1 h_0^3}{6 \eta U a \cdot J_3}$$

$$F_b = \frac{h^*}{h_0} \cdot j_3 - j_2$$

$$\Phi_b = \Phi_a + \frac{p_1 h_0^2}{\eta U a J_3} \int_0^1 j_3 d(x/a)$$

$$\vartheta_b = \vartheta_a - \frac{p_1 h_0^2}{2 \eta U a J_3} \int_0^1 j_3 d(x/a)$$

Fall c. Für $x/a = 0, p_0 \neq 0$ und für $x/a = 1, p_1 = 0$.

$$C_0 = \frac{h^*}{h_0} \cdot J_3 - J_2 \quad \text{und}$$

$$\frac{h^*}{h_0} = \frac{J_2}{J_3} - \frac{p_0 h_0^2}{6 \eta U a J_3}$$

$$F_c = \frac{h^*}{h_0} j_3 - j_2 - C_0$$

$$\Phi_c = \Phi_a - \frac{p_0 h_0^2}{\eta U a J_3} \int_0^1 j_3 d(x/a)$$

$$\vartheta_c = \vartheta_a + \frac{p_0 h_0^2}{2 \eta U a J_3} \int_0^1 j_3 d(x/a)$$

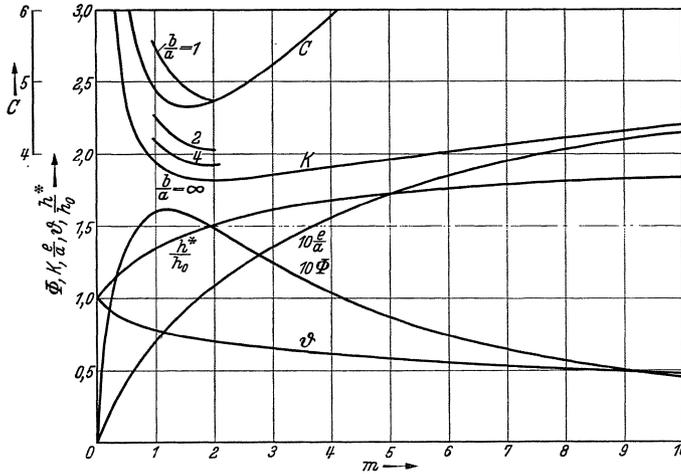


Abb. 42.13. Funktionswerte zur Berechnung der Reibung bei geneigten Gleitflächen.

Zahlentafel 42.3. Zahlenwerte zur Berechnung der Reibung bei geneigten Gleitflächen $b = \infty, \eta = \text{konst.}$ (Randbedingung a).

m	Φ_a	$\sqrt{\Phi_a}$	ϑ_a	K_a	C_a	c/a	h^*/h_0
0,7	0,1476	0,384	0,808	2,10	5,48	0,052	1,259
1	0,15 894	0,399	0,7726	1,94	4,86	0,068	1,333
1,2	0,16	0,40	0,76	1,90	4,80	0,078	1,378
1,5	15 773	0,397	0,7292	1,84	4,62	0,090	1,428
2	14 790	0,384	0,6970	1,82	4,71	0,108	1,500
3	12 426	0,352	0,6498	1,84	5,24	0,134	1,600
4	10 350	0,322	0,6094	1,90	5,89	0,154	1,667
5	08 718	0,295	0,5803	1,95	6,53	0,169	1,715
10	0,04 386	0,2095	0,4592	2,19	10,45	0,214	1,833
100	0,0016	0,04	0,1258	3,14	79	—	1,985

Für den parabolischen Halbzylinder ist:

$$h = h_0 + \frac{x^2}{2 \varrho}, \quad \text{also} \quad f(x/a) = h/h_0 = 1 + \left(\zeta \frac{x}{a}\right)^2 \quad (42.50)$$

worin ϱ der Scheitelradius der Parabel und zur Abkürzung $\zeta^2 = \frac{a^2}{2 \varrho h_0}$ gesetzt ist. Setzt man $\zeta x/a = \text{tg } \gamma$, also $\zeta d(x/a) = \frac{d\gamma}{\cos^2 \gamma}$, so wird:

$$h/h_0 = f(x/a) = 1 + \text{tg}^2 \gamma = 1/\cos^2 \gamma \quad (42.51)$$

und

$$\frac{d p}{d \gamma} = \frac{6 \eta U a}{\zeta h_0^2} \left\{ \frac{\cos^4 \gamma}{\cos^2 \gamma^*} - \cos^2 \gamma \right\}. \quad (42.52)$$

Die Integration

$$p_\gamma = \frac{6 \eta U a}{h_0^2} \left\{ \frac{j_3(\gamma)}{\cos^2 \gamma^*} - j_2(\gamma) - C_0 \right\} \quad (42.53)$$

gibt p als Funktion der nicht anschaulichen Hilfsgröße γ , und muß deshalb wieder als $F(x/a)$ umgerechnet werden. Das Ergebnis der verschiedenen Integrationen¹ ist:

$$j_1 = \int_0^\gamma \frac{d(x/a)}{h/h_0} = \frac{1}{\zeta} \int_0^\gamma d\gamma = \gamma/\zeta; \quad J_1 = \gamma_1/\zeta$$

$$j_2 = \int_0^\gamma \cos^2 \gamma d\gamma = \frac{1}{\zeta} \left(\frac{\sin 2\gamma}{4} + \frac{\gamma}{2} \right); \quad J_2 = \frac{1}{\zeta} \left(\frac{\sin 2\gamma_1}{4} + \frac{\gamma_1}{2} \right)$$

¹ Gümbel (S. 90) wählt als Grenzbedingung $p = 0$ für $x/a = \infty$ an Stelle von $x/a = 1$. Die Berechnung wird dadurch noch weiter vereinfacht, da $\text{tg } \gamma$ für alle Werte von ζ dann unendlich groß, also $\gamma = \pi/2$ wird. Diese Vereinfachung hat also zur Folge, daß der Druckverlauf für alle ζ -Werte ähnlich ist, was nicht zutrifft, wie aus Abb. 42.14 deutlich ersichtlich. Die Vereinfachung von Gümbel ist deshalb nicht zulässig. — Auch Heidebroek: Zur Theorie der Flüssigkeitsreibung zwischen Gleit- und Wälzflächen, Forschung 6 (1935) S. 162, hat diese Vereinfachung gewählt.

$$j_3 = \frac{1}{\zeta} \int_0^{\gamma} \cos^4 \gamma \, d\gamma = \frac{1}{\zeta} \left(\frac{1}{4} \sin \gamma \cos^3 \gamma + \frac{3}{16} \sin 2\gamma + \frac{3}{8} \gamma \right); \quad J_3 = j_3(\gamma_1).$$

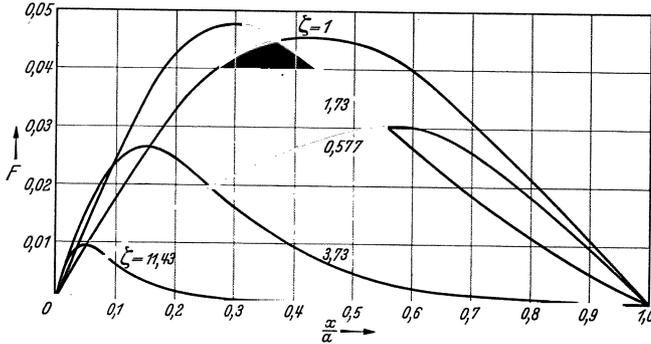


Abb. 42.14. Druckverteilung bei parabolischer Spaltform.

Fall a. Wenn das Öl ohne Überdruck zu- und abfließen kann, ist:

$$\frac{h^*}{h_0} = \frac{1}{\cos^2 \gamma^*} = \frac{J_2}{J_3}$$

$$C_0 = 0.$$

$$F_a = \frac{h^*}{h_0} j_3 - j_2 = \frac{j_3}{\cos^2 \gamma^*} - j_2$$

(Abb. 42.14)

$$\Phi_a = 6 \int_0^{\gamma_1} F \, d\gamma = \frac{6}{\zeta} \left(\frac{A}{\cos^2 \gamma^*} - B \right),$$

worin: $A = \frac{1}{16} \sin^2 \gamma_1 (1 + \cos^2 \gamma_1) - \frac{3}{32} \cos 2\gamma_1 + \frac{3}{16} \gamma_1^2 + \frac{3}{32}$ und $B = \frac{\gamma_1^2}{4} - \frac{\cos 2\gamma_1}{8} + \frac{1}{8}$.

$$\vartheta_a = 4 J_1 - \frac{3 J_2}{\cos^2 \gamma^*}.$$

Zahlentafel 42.4. Zahlenwerte für den parabolischen Halbzylinder.

Grad	γ Bogenmaß	$\frac{1}{4} \sin 2\gamma + \gamma/2$ $\equiv \zeta j_2$	$\frac{1}{4} \sin \gamma \cos^3 \gamma + \frac{3 \sin 2\gamma}{16}$ $+ \frac{3}{8} \gamma \equiv \zeta j_3$	$\frac{h^*}{h_0} = \frac{1}{\cos^2 \gamma^*}$	$B = \int_0^{\gamma_1} \zeta j_2 \, d\gamma$	$A = \int_0^{\gamma_1} \zeta j_3 \, d\gamma$	$\zeta = \operatorname{tg} \gamma_1$
5	0,0 872 665	0,0 870 453	0,08 685	1,0017	0,0 038 028	0,0 037 980	0,08 749
10	1 745 329	1 727 715	17 042	0138	0 151 538	0 150 777	17 633
5	2 617 994	2 558 997	25 043	0219	0 338 815	0 335 041	26 795
20	3 490 658	3 352 298	32 403	0346	0 597 061	0 585 466	36 397
5	4 363 323	4 096 773	38 616	0619	0 922 480	0 895 180	46 631
30	5 235 988	4 783 057	0,43 992	1,0873	0,1 310 389	0,1 256 229	0,57 735
5	6 108 652	5 403 558	0,48 408	1,1162	0,1 755 365	0,1 660 115	0,70 021
40	6 981 317	5 952 678	51 881	1473	2 251 409	2 098 330	0,83 910
5	7 853 982	6 426 991	54 452	1,1804	2 792 125	2 562 844	1,0
50	8 726 646	6 825 342	56 276	2129	3 370 918	2 899 977	1,19 175
5	0,9 599 311	7 148 856	57 504	2432	3 981 194	3 543 247	1,42 815
60	1,0 471 976	7 401 051	0,58 214	1,2713	0,4 616 557	0,4 048 355	1,73 205
5	1,1 344 640	7 586 431	0,58 630	1,2940	0,5 271 006	0,4 558 316	2,14 451
70	1,2 217 305	7 715 622	58 807	1,3120	6 046 496	5 151 318	2,74 748
5	1,3 089 969	7 794 985	58 881	1,3239	6 616 219	5 584 365	3,73 205
80	1,3 962 634	7 836 367	58 902	1,3305	7 298 491	6 098 301	5,67 128
5	1,4 835 299	0,7 853 982	0,58 905	1,3333	0,7 983 035	0,6 612 238	11,43 005
90	1,5 707 963	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{16} \pi$	$\frac{4}{3}$	$\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$	$\frac{3}{64} \pi^2 + \frac{3}{16}$	∞

Zahlentafel 42.5. Zahlenwerte zur Berechnung der Reibung
a) für parabolische Gleitfläche (Randbedingung).

γ	ζ	Φ_a	ϑ_a	$\sqrt{\Phi_a}$	$K_a = \frac{\vartheta}{\sqrt{\Phi}}$	C_a
30	0,57 735	0,05 739	0,92 640	0,240	3,87	6,1
45	1	0,13 977	0,80 575	0,374	2,32	6,25
55	1,428	0,17 799	0,8219	0,422	1,96	4,62
60	1,732	0,18 360	0,7887	0,4285	1,84	4,3
65	2,145	0,17 555	0,7426	0,419	1,77	4,23
70	2,747	0,15 549	0,6980	0,3943	1,77	4,49
75	3,732	0,12 479	0,5881	0,353	1,67	4,7
80	5,671	0,08 625	0,4332	0,294	1,47	5,0
85	11,430	0,04 374	0,2440	0,209	1,17	5,5
90	∞	0	0	0		6,28

Fall b. Für $x/a = 0$, resp. $\gamma = 0$, $p_0 = 0$ und für $\gamma = \gamma_1$, $p_1 \neq 0$

$$C_0 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{h^*}{h_0} = \frac{J_2}{J_3} + \frac{p_1 h_0^3}{6 \eta U a J_3} = \frac{1}{\cos^2 \gamma^*}$$

$$F_b = \frac{h^*}{h_0} j_3 - j_2 \quad \text{und} \quad p_1 = \frac{6 \eta U a}{h_0^2} \left(\frac{J_3}{\cos^2 \gamma^*} - J_2 \right)$$

$$\Phi_b = \frac{6}{\zeta} \left\{ \frac{A}{\cos^2 \gamma^*} - B + \left(\frac{J_3}{\cos^2 \gamma^*} - J_2 \right) \gamma_1 \right\} \quad \text{und} \quad \vartheta_b = 4 J_1 - \frac{3 J_2}{\cos^2 \gamma^*}.$$

Fall c. Für $\gamma = 0$, $p_0 \neq 0$ und für $\gamma = \gamma_1$, $p_1 = 0$.

$$C_0 = \frac{J_3}{\cos^2 \gamma^*} - J_2 < 0 \quad \text{und} \quad \frac{h^*}{h_0} = \frac{J_2}{J_3} - \frac{p_0 h_0^3}{6 \eta U a J_3} = \frac{1}{\cos^2 \gamma^*}$$

$$F_c = \frac{j_3}{\cos^2 \gamma^*} - j_2 - C_0 \quad \text{und} \quad p_0 = - \frac{6 \eta U a}{h_0^2} \left(\frac{J_3}{\cos^2 \gamma^*} - J_2 \right)$$

$$\Phi_c = \frac{6}{\zeta} \left\{ \frac{A}{\cos^2 \gamma^*} - B - \left(\frac{J_3}{\cos^2 \gamma^*} - J_2 \right) \gamma_1 \right\} \quad \text{und} \quad \vartheta_c = 4 J_1 - \frac{3 J_2}{\cos^2 \gamma^*}.$$

Bei der Konstruktion einer Gleitfläche ist die Belastung $P_1 = P/b$ und die Gleitgeschwindigkeit U m/s bekannt; die Zähigkeit des Öles kann frei gewählt werden. Aus den Gl. (47) u. (44) folgen dann mit Hilfe der Zahlentafeln 42.3 und 42.5 die Reibungszahl $\mu = K \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}}$ und die kleinste relative Ölschichtdicke $h_0/a = \sqrt{\Phi} \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}}$. Der Konstrukteur will eine möglichst kleine Reibzahl erreichen und wird deshalb den kleinsten K -Wert wählen. Mit Rücksicht auf die Herstellungskosten darf h_0 eine wirtschaftliche Grenze nicht unterschreiten, z. B.

$$h_0 = 0,01 \text{ mm für gute Ausführung,}$$

$$= 0,005 \text{ mm und weniger für sehr genaue Ausführung.}$$

Aus diesem Grunde sollte Φ möglichst groß sein. Wie aus den Zahlentafeln 42.3 und 42.5 hervorgeht, fällt die Bedingung der kleinsten Reibungszahl ($m = 2$ für die geneigte Platte, resp. ζ groß für die parabelförmige) nicht zusammen mit der Bedingung des größten Wertes von h_0/a ($m = 1,2$ resp. $\zeta = 1,75$). Bei gegebenem Wert von h_0 folgt die Reibungszahl aus Gl. (46), so daß der Konstrukteur den kleinsten C -Wert wählen sollte ($C_{min} = 4,62$ für $m = 1,5$, resp. $C_{min} = 4,23$ für $\zeta = 2,15$). Die günstigste Reibungszahl ist bei gegebener Plattenlänge a direkt mit h_0 proportional und hängt nur sehr wenig von der Spaltform ab. Sie ist bei der parabolischen Gleitfläche rd. 10% kleiner als bei der geneigten Platte. Für $h_0 = 0,005$ mm, $a = 10$ cm = 100 mm ist für die geneigte resp. parabolische Gleitfläche

$$\mu = (4,62 \text{ resp. } 4,23) \cdot 5 \cdot 10^{-5} = 0,00023 \text{ resp. } 0,00022$$

also sehr klein. Die Tragfähigkeit folgt aus Gl. (43):

$$\frac{\eta U}{P_1} = \frac{1}{\Phi} \cdot \left(\frac{h_0}{a} \right)^2 = 0,1577 \text{ resp. } 0,1755 \cdot 10^{-10},$$

also für $\eta = 0,001$ kg · s/m² und $U = 1$ m/s:

$$P_1 = P/b = 0,64 \cdot 10^{-3} \cdot 10^8 = 0,64 \cdot 10^5 \text{ kg/m} = 64 \text{ kg/mm Breite.}$$

Da die Zähigkeit des Öles bei 20° C (z. B. beim Anlaufen) 6 bis 10mal so groß ist als bei der Betriebstemperatur (vgl. Abb. 42.4), wird flüssige Reibung beim Anlaufen schon bei $1/6$ bis $1/10$ der Betriebsdrehzahl erreicht. Beim Auslaufen dagegen hat das Öl bei der kleineren Geschwindigkeit die gleiche Zähigkeit, so daß dann halbflüssige Reibung auftreten muß, die immer mit Abnutzung verbunden ist. Im allgemeinen muß man deshalb eine Gleitfläche so berechnen, daß flüssige Reibung schon bei einer erheblich kleineren Gleitgeschwindigkeit, z. B. schon bei 10% der normalen vorhanden ist, und zwar um so mehr, je länger und öfter das Lager bei der kleinen Drehzahl in Betrieb bleibt. Aus der Gleichung

$$\frac{h_0}{a} = \sqrt{\Phi} \sqrt{\frac{\eta U/10}{P_1}} \quad (42.54)$$

folgt, daß dann die Tragfähigkeit bei gleichem Wert von h_0 nur noch den zehnten Teil beträgt und daß bei gleicher Belastung P_1 die kleinste Ölschichtdicke und damit die Reibzahl $\sqrt{10}$ mal so groß wird.

Viel schwieriger als die Berechnung ist die praktische Verwirklichung der erforderlichen Spaltform. Bei einer geneigten Fläche von 100 mm Länge und $m = 1,5$ müßte $h_1 - h_0 = 1,5 h_0 = 0,015 \text{ mm}$ ($h_0 = 0,005 \text{ mm}$) betragen. Die Herstellung solcher kleinen Neigungen bietet erhebliche Schwierigkeiten.

Bei dem bei Werkzeugmaschinen gebräuchlichen Schaben der Laufflächen benutzt die Werkstatt (mehr oder weniger bewußt) die Bildung einzelner Keilflächen, ohne welche Druckübertragung nicht möglich ist. Eine andere Methode zur Herstellung kleiner Neigungen stammt von Ing. Michell. Wie aus Abb. 42.12 ersichtlich, verläuft die Flächenpressung unsymmetrisch über die Länge der Gleitfläche. Die resultierende Kraft P_1 muß deshalb exzentrisch angreifen. Die Exzentrizität e kann aus der Momentengleichung für die Kante a berechnet werden (vgl. Abb. 42.11).

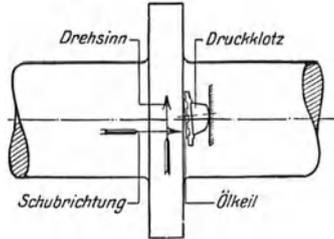


Abb. 42.11.

$$P_1 \left(\frac{a}{2} - e \right) = \int_0^a p_x x \, dx. \quad (42.55)$$

Die so berechnete relative Exzentrizität e/a ist in Abb. 42.13 eingezeichnet; sie nimmt mit zunehmender Schräge m stetig zu. Unterstützen wir die eine Fläche in irgendeinem Punkte, so muß sich eine ganz bestimmte Schräge einstellen; wird die Neigung aus irgendeinem Grunde vergrößert, so vergrößert sich auch e und die ursprüngliche Lage wird automatisch wieder hergestellt. Die Lage der Platte ist demnach

stabil; von dieser Eigenschaft hat Michell bei der Konstruktion seines Lagers Gebrauch gemacht (Abb. 42.15 und 44.26).

Schon lange sind in der Praxis gut abgerundete Kanten an den Schmierstellen gebräuchlich. Die Spaltform spielt nämlich (wie wir gesehen haben) nur eine untergeordnete Rolle; eine Abrundung an der Öleintrittsstelle kann deshalb schon ausreichen, um eine übrigens parallele Gleitfläche tragfähig zu machen (Abb. 42.17/18). Die Tragfähigkeit und die Reibzahl einer so zusammengesetzten Spaltform kann aus den abgeleiteten Gleichungen leicht berechnet werden.

Für den parallelen Teil, von $x/b = -1$ bis $x/b = 0$ folgt aus Gl. (19)¹:

$$p_0 = \frac{6 \eta U b}{h_0^2} \left(\frac{h^*}{h_0} - 1 \right) \quad \text{und} \quad p_x = p_0 \cdot x/a.$$

Für den parabolischen Teil, von $x/b = 0$ bis $x/b = 1$ folgt aus Gl. (41 e):

$$p_0 = \frac{6 \eta U a}{h_0^2} \left(J_2 - \frac{h^*}{h_0} J_3 \right).$$

Durch Gleichsetzen beider Werte erhalten wir

$$h^*/h_0 = 1/\cos^2 \gamma^* = \frac{J_2 + b/a}{J_3 + b/a}, \quad (42.56)$$

aus welcher Gleichung h^*/h_0 berechnet werden kann.

Die Tragfähigkeit der Gleitfläche setzt sich aus den Tragfähigkeiten des parabolischen und des parallelen Teiles zusammen:

$$P_1 = \frac{6 \eta U a^2}{h_0^2} \left[\frac{A}{\zeta} + \frac{b}{a} \gamma_1 + \frac{b^2}{2a^2} - \left(\frac{B}{\zeta} + \frac{b}{a} \gamma_1 - \frac{b^2}{2a^2} \right) \right] = \frac{\eta U a^2}{h_0^2} \Phi. \quad (42.57)$$

wobei die Werte der Symbole A und B aus Zahlentafel 42.4 entnommen werden können. Die Verschiebungskraft ist:

$$R_1 = \frac{\eta U a}{h_0} \left[\frac{1}{\zeta} \left(4 \gamma_1 - \frac{3 J_2}{\cos^2 \gamma^*} \right) + \left(4 - \frac{3}{\cos^2 \gamma^*} \right) \right] = \frac{\eta U a}{h_0} \vartheta. \quad (42.58)$$

und die Reibzahl:

$$\mu = R_1/P_1 = C h_0/a = K \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}}. \quad (42.59)$$

Die Φ -, ϑ -, K - und C -Werte sind in Zahlentafel 42.6 zusammengestellt.

¹ Es ist demnach nicht richtig, wenn E. Falz in seinem Buch „Grundzüge der Schmiertechnik“ (Abb. 1 u. 2) einen konstanten Druck bei den parallelen Gleitflächen annimmt mit einem schroffen Druckabfall an der Übergangsstelle.

Zahlentafel 42.6. Zahlenwerte zur Berechnung der Reibung für parabolische Abrundungen.

	b/a	$h^*/h_0 = \frac{1}{\cos^2 \varphi^*}$	Φ	$\sqrt{\Phi}$	ϑ	$K = \frac{\vartheta}{\sqrt{\Phi}}$	$C = \frac{\vartheta}{\Phi}$
$\gamma = 45^\circ$	2	1,0386	0,7488	0,863	2,1694	2,515	2,90
$\zeta = 1$	5	1,0177	1,6342	1,278	2,1338	1,670	1,34
$\gamma = 60^\circ$	2	1,0398	0,8367	0,914	2,0583	2,250	2,46
$\zeta = 1,73205$	5	1,0171	1,6469	1,283	2,0869	1,627	1,27
$\gamma = 75^\circ$	2	1,0237	0,5121	0,715	1,6947	2,368	3,31
$\zeta = 3,73205$	5	1,0099	0,9743	0,986	1,7334	1,758	1,78
$\gamma = 85^\circ$	2	1,0084	0,1813	0,426	1,2613	2,960	7,96
$\zeta = 11,43$	5	1,0034	0,3355	0,578	1,2864	2,220	3,83

In ähnlicher Weise können Ölspalte mit abgeschrägter Eintrittsstelle oder Kombinationen von parabolischen und geneigten Gleitflächen berechnet werden. Um z. B. ein Kreuzkopf tragfähig zu machen, genügen einige Abrundungen für beide Bewegungsrichtungen (Abb. 42.17). Auch bei dem Richtungswechsel ($U = 0$) läßt sich eine unmittelbare Berührung der Gleitflächen vermeiden. (Vgl. Abschn. 46.4)

In Zahlentafel 42.7 sind die verschiedenen Spaltformen verglichen.

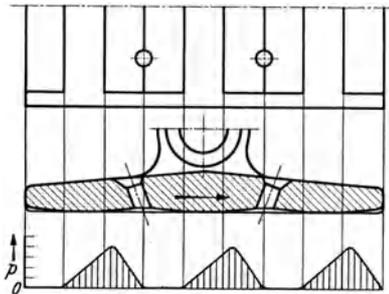


Abb. 42.17. Tragfähige Ölschicht durch abgerundete Kanten.

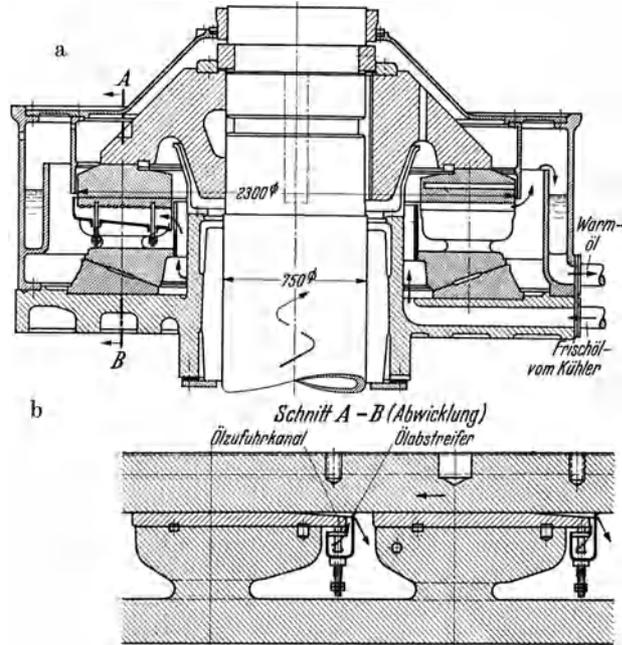


Abb. 42.18 a, b. Längslager für die Wasserturbinen im Kraftwerk Ryburg-Schwörstadt. Die Gesamtbelastung des Lagers setzt sich aus dem Gewicht des Polrades, des Turbinenlaufrades samt Welle, Servomotor und Ölfüllung zusammen und beträgt rd. 900 t.

Die laufende Gleitfläche ist die Unterseite eines auf der Turbinenwelle aufgekeilten Tragringes, während die mit dem Lagergehäuse verbundene ruhende Gleitfläche in acht Segmente aufgelöst ist.

Die Keilfläche wird durch die abgerundete Kante und auch durch die Formänderung der Segmente gebildet. Beachte die Abstreifung des warmen Öles an der Austrittsstelle.

Zahlentafel 42.7. Vergleich der verschiedenen Spaltformen.

Abb.	42.9				42.11				42.14				42.16				
	abgesperrt				geneigt				parabolisch				mit abgerundeten Kanten $b = 5a$				
Platte	h^*/h_0	K	$\sqrt{\Phi}$	C	m	K	$\sqrt{\Phi}$	C	ζ	K	$\sqrt{\Phi}$	C	ζ	K	$\sqrt{\Phi}$	C	
1. K_{\min}	$\frac{1}{3}$	2,12	1,41	1,5	2	1,82	0,38	4,71	10	1,17	0,21	5,5					
2. Φ_{\max}	0	vollständig abgesperrte Platte				1,2	1,9	0,4	4,8	1,73	1,84	0,43	4,3	1,73	1,63	1,28	1,27
3. C_{\min}					1,5	1,84	0,4	4,62	2,15	1,77	0,42	4,23					

Wenn η , U und P_1 bekannt sind:

1. kleinste Reibzahl nach Gl. (42.47) für den Kleinstwert von K , 2. größte Spalthöhe h_0 nach Gl. (42.44) für den Größtwert von Φ .

Wenn h_0/a aus Herstellungsgründen festgelegt wird:

3. kleinste Reibzahl nach Gl. (42.46) für den Kleinstwert von C .

42.3. Stark gekrümmte Gleitflächen (Zapfenlager mit Lagerspiel).

Zapfen und Lager passen mit einem Laufsitz zusammen; der Zapfendurchmesser ist also etwas kleiner als der Schalendurchmesser. Das Lagerspiel ist abhängig von dem gewählten oder vorgeschriebenen Sitz und ist z. B. bei den ISA-Toleranzen festgelegt (vgl. S. 14).

Die Betrachtungen über die ebene Gleitfläche gelten auch für die Bewegung einer Welle in der Lagerschale, solange die Kräfte infolge der Krümmung (Zentrifugalkräfte) vernachlässigt werden dürfen. Bei den gebräuchlichen kleinen Spalthöhen ist dies immer zulässig. Der größte Verschiebungsdruck bei vollständig abgeschlossenem Spalt von der Länge a ist (nach Gl. 36):

$$p = \frac{6 \eta U a}{h^2}; \text{ der Fliehkraftdruck: } p_f = m r \omega^2 = m \frac{U^2}{r} \text{ (wenn } m = \frac{\gamma h}{g} \text{ die Masse/Flächeneinheit ist) und das Verhältnis: } p_f/p = \rho \omega h^3/6 \eta a. \text{ Für } \omega = 100/\text{s}, \eta = 0,0014 \text{ kg} \cdot \text{s}/\text{m}^2, a = 0,15 \text{ m}, \rho \sim \frac{980 \text{ kg}/\text{m}^3}{9,81 \text{ m}/\text{s}^2} \sim 100 \text{ und } h = 0,05 \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m, ist } p_f/p = 10^{-6}!$$

Bei gleichachsiger Lage von Zapfen und Lagerschale sind die Gleitflächen parallel. Wenn das Öl ohne Überdruck zugeführt wird, kann diese Lage niemals die Gleichgewichtslage eines belasteten und sich drehenden Zapfens sein. Eine tragfähige Ölschicht kann nur dann entstehen, wenn die Welle sich im Betrieb so einstellen kann, daß der Querschnitt des Ölbandes sich im Sinne der Drehung verkleinert. Bei trockener Reibung klettert die Welle entgegen der Drehrichtung an der Schale hoch, denn Gleichgewicht der Kräfte ist nur dann vorhanden, wenn die Gegenkraft (Reaktion) des Lagers um den Reibungswinkel gegenüber der Lagerbelastung verschoben ist. Die Lage des geschmierten Zapfens ist demnach grundverschieden von der Zapfenlage bei trockener Reibung.

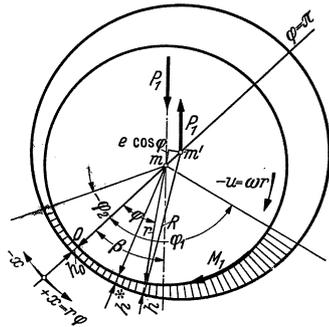


Abb. 42.19. Exzentrische Lage des Zapfens bei Flüssigkeitsreibung.

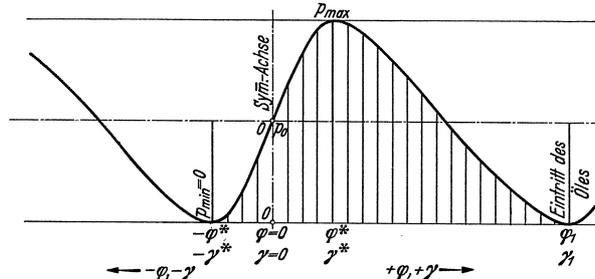


Abb. 42.20. Grundsätzlicher Verlauf des Druckes in Lagern mit Lagerspiel.

Die Schmierschichtdicke h zwischen Zapfen und Lagerschale ist symmetrisch in bezug auf die Verbindungslinie mm' (Abb. 42.19).

Aus dem geometrischen Zusammenhang folgt $R = r + \Delta r = h + r + e \cos \varphi$, oder

$$h = \Delta r - e \cos \varphi. \tag{42.60}$$

Wir führen wieder dimensionslose Größen ein, nämlich

$$\psi = \frac{\Delta r}{r}, \text{ das relative Lagerspiel und } \varepsilon = \frac{e}{\Delta r}, \text{ die relative Exzentrizität.}$$

Dann ist

$$\frac{h}{\Delta r} = 1 - \varepsilon \cos \varphi \tag{42.61}$$

und die kleinste Ölschichtdicke

$$h_0 = \Delta r (1 - \varepsilon). \tag{42.62}$$

Die Zapfenlage ist durch ε und β eindeutig bestimmt.

Für gekrümmte Gleitflächen ist $dx = r d\varphi$ und $U = \omega r$, so daß Gl. (12) nun lautet:

$$\frac{d p}{d \varphi} = \frac{6 \eta \omega r^2}{\Delta r^2} \left[\frac{h^* / \Delta r}{(h / \Delta r)^3} - \frac{1}{(h / \Delta r)^2} \right] \tag{42.63}$$

oder mit den Gl. (61 u. 62):

$$\frac{dp}{d\varphi} = -\frac{6\eta\omega}{\psi^2} \left[\frac{1}{(1-\varepsilon\cos\varphi)^2} - \frac{(1-\varepsilon\cos\varphi^*)}{(1-\varepsilon\cos\varphi)^3} \right]. \quad (42.64)$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß $dp/d\varphi = 0$ wird für $\cos\varphi = \cos\varphi^*$, also für $\varphi = \pm\varphi^*$. Da $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$ ist, muß der Druckverlauf symmetrisch in bezug auf $\varphi = 0$ sein, d. h. ist für $\varphi = +\varphi^*$, $p = p_{\max}$ ($h = h^*$), so wird für $\varphi = -\varphi^*$ der Druck ein Minimum und $p_{\min} = -p_{\max}$. Für $\varphi = 0$ ist

$$\left(\frac{dp}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = \frac{6\eta\omega}{\psi^2} \cdot \frac{\varepsilon(1-\cos\varphi^*)}{(1-\varepsilon)^3}; \quad (42.65)$$

die Kurve für den Druckverlauf hat bei $\varphi = 0$ ein Wendepunkt, da dort $d^2p/d\varphi^2 = 0$ ist (Abb. 42.20). Wenn die Lagerschale den Zapfen vollständig umschließt, hat der divergente Teil des Ölspaltes zwischen $\varphi = -\varphi^*$ und $\varphi = \pi$ (Abb. 42.19) keinen Anteil an der Tragfähigkeit (Auftrieb) des Zapfens, weil in dem seitlich offenen Ölspalt dauernd keine Unterdrücke¹ aufrecht erhalten werden können. Unterdruck kann im unbelasteten Teil der Lagerschale auftreten, wenn das Lager durch Wellenbunde seitlich abgeschlossen wird; bei unzureichender Ölzuführung und Formgebung können darin aber auch Überdrücke entstehen (vgl. S. 251). Wir setzen also $p_{\min} = 0$, so daß p dann der Überdruck gegenüber der Umgebung ist. Wenn der Druck für $\varphi = 0$ (das ist an der engsten Spaltstelle) gleich p_0 gesetzt wird, so ist

$$p_{\max} = 2p_0. \quad (42.66)$$

Die Integration der Gl. (64) gelingt (nach einem Vorschlag von Duffing²) in einfacher Weise durch Einführung eines Hilfswinkels γ , der so definiert ist, daß

$$\cos\gamma = \frac{\cos\varphi - \varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\varphi}. \quad (42.67)$$

Das Ergebnis der ausgeführten Integrationen wird wieder durch einfache Symbole dargestellt.

Abgekürzte Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} j_1 &= \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, & j_2 &= \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{(1 - \varepsilon\cos\varphi)^2}, & j_3 &= \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{(1 - \varepsilon\cos\varphi)^3}, & i_2 &= \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\sin\varphi d\varphi}{(1 - \varepsilon\cos\varphi)^3} \\ J_1 &= \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, & J_2 &= \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{(1 - \varepsilon\cos\varphi)^2}, & J_3 &= \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{(1 - \varepsilon\cos\varphi)^3}, & i_3 &= \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\sin\varphi d\varphi}{(1 - \varepsilon\cos\varphi)^3} \\ S_1 &= \frac{1}{\varepsilon}(J_1 - J_2^2/J_3), & S_2 &= i_2 - \frac{J_2}{J_3} i_3, & \vartheta_z &= 4J_1 - 3J_2^2/J_3 = J_1 + 3\varepsilon S_1, & \vartheta_L &= -2J_1 + 3J_2^2/J_3 = J_1 - 3\varepsilon S_1. \end{aligned}$$

Aus Gl. (67) folgt:

$$\text{a) } 1 - \varepsilon\cos\varphi = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon\cos\gamma}, \quad \text{b) } \sin\gamma = \frac{\sin\varphi}{1 - \varepsilon\cos\varphi} \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad \text{und} \quad \text{c) } d\varphi = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 + \varepsilon\cos\gamma} d\gamma.$$

Ergebnis der Integrationen.

$$\begin{aligned} j_1 &= \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} & J_1 &= j_1 \text{ für } \gamma = \gamma_2 = -\gamma^* \\ j_2 &= \frac{(\gamma_1 - \gamma_2) + \varepsilon(\sin\gamma_1 - \sin\gamma_2)}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2)^3}} & J_2 &= j_2 \text{ für } \gamma = \gamma_2 = -\gamma^* \\ j_3 &= \frac{\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)(\gamma_1 - \gamma_2) + 2\varepsilon(\sin\gamma_1 - \sin\gamma_2) + \frac{\varepsilon^2}{4}(\sin 2\gamma_1 - \sin 2\gamma_2)}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2)^5}}; & J_3 &= j_3 \text{ für } \gamma = \gamma_2 = -\gamma^* \\ i_2 &= \frac{\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1}{1 - \varepsilon^2} & i_3 &= \frac{(\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1) + \frac{\varepsilon}{4}(\cos 2\gamma_2 - \cos 2\gamma_1)}{(1 - \varepsilon^2)^2}. \end{aligned}$$

Die Integration der Gl. (64) zwischen φ und φ_1 (Öleintritt) in Richtung des zunehmenden Wertes φ gibt:

$$p_\varphi = -\frac{6\eta\omega}{\psi^2} [j_2 - j_3(1 - \varepsilon\cos\varphi^*) - C] \quad (42.68)$$

¹ Vgl. z. B. die Untersuchung von Vogelpohl, G.: Beiträge zur Kenntnis der Gleitlagerreibung. VDI Forsch.-Heft 386 (1937).

² Z. MM., Bd. 4 (1924) S. 296/314.

Aus der ersten Randbedingung, daß für den Öleintritt ($\varphi = \varphi_1$ resp. $\gamma = \gamma_1$) $p = 0$ ist, folgt mit $j_2(\varphi_1) = 0, j_3(\varphi_1) = 0: C = 0$.

Aus der zweiten, daß p auch am Ende des Druckgebietes ($\varphi = -\varphi^*$) zu Null wird, folgt:

$$\frac{j_2(-\varphi^*)}{j_3(-\varphi^*)} = 1 - \varepsilon \cos \varphi^* = \frac{J_2}{J_3} \tag{42.69}$$

oder, da $1 - \varepsilon \cos \varphi^* = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon \cos \gamma^*}$ ist:

$$1 + \varepsilon \cos \gamma^* = \frac{\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)(\gamma_1 + \gamma^*) + 2\varepsilon(\sin \gamma_1 + \sin \gamma^*) + \frac{\varepsilon^2}{4}(\sin 2\gamma_1 + \sin 2\gamma^*)}{(\gamma_1 + \gamma^*) + \varepsilon(\sin \gamma_1 + \sin \gamma^*)} \tag{42.70}$$

wobei zu beachten ist, daß in dieser Gleichung γ^* ein positiver Winkel ist.

Die graphische Lösung der Gl. (70) gibt folgende Werte von γ^* , nur abhängig von γ_1 und ε .

Zahlentafel 42.8. Werte von $\gamma^* = \text{Funkt.}(\gamma_1, \varepsilon)$ in Grad.

$\varepsilon = \begin{matrix} \backslash \\ \gamma_1 \end{matrix}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
π	74,55	71,95	69,31	66,66	64,04	61,43	58,91	56,19	53,53	50,08
$\frac{3}{4} \cdot \pi$	60,30	58,9	57,60	56,24	54,89	53,63	52,43	51,25	50,10	49,10
$\frac{\pi}{2}$	42,9	42,35	41,87	41,40	41,00	40,58	40,28	39,95	39,69	39,50
$\frac{\pi}{4}$	22,6	22,35	22,15	21,95	21,92	21,90	21,88	21,86	21,83	21,80

In Abb. 42.21 sind die entsprechenden Winkel φ^* eingezeichnet, die für den Konstrukteur anschaulicher sind als die Hilfsfunktion γ^* . Der Druckverlauf ist durch die Gleichung:

$$p_\varphi = \frac{6 \eta \omega}{\psi^2} [j_3(1 - \varepsilon \cos \varphi^*) - j_2] = \frac{6 \eta \omega}{\psi^2} F(\varphi_1, \varepsilon) \tag{42.71}$$

eindeutig bestimmt, sobald der Öleintrittswinkel φ_1 und die relative Exzentrizität ε bekannt sind.

$$p_{\max} = \frac{6 \eta \omega}{\psi^2} [j_3^*(1 - \varepsilon \cos \varphi^*) - j_2^*]. \tag{42.72}$$

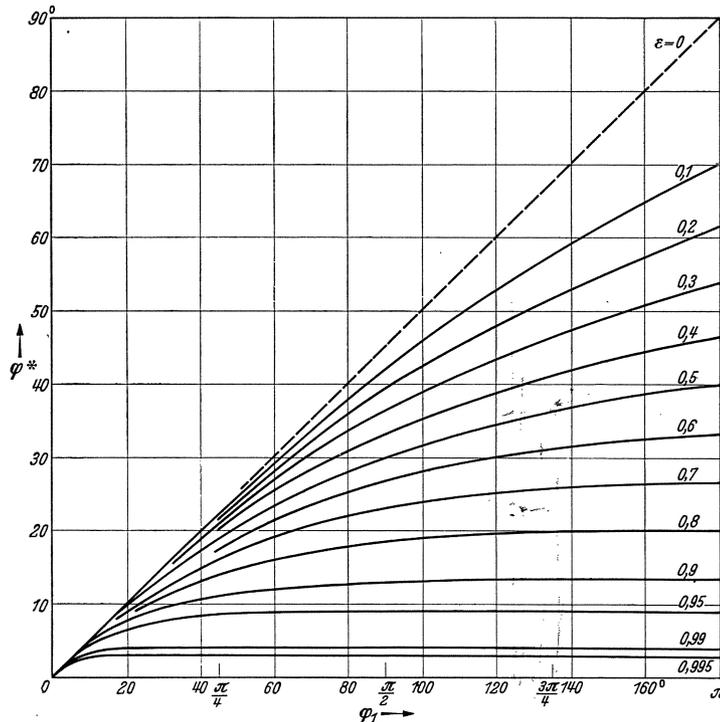


Abb. 42.21. Werte von φ^* für Lager mit Lagerspiel.

Zur Nachprüfung der berechneten Druckverteilung liegen eine ganze Reihe von Versuchen vor; die genauen Druckmessungen von R. E. Stanton¹ im Nat. Phys. Laboratorium (London) bestätigen Gl. (71) für verschiedene Ölsorten und für Ölspalte bis zu $h_0 = 0,001$ mm (Abb. 42.22). Es ist demnach gar nicht daran zu zweifeln, daß die Voraussetzungen der Theorie der flüssigen Reibung richtig und ausreichend sind. Aus dem gemessenen Druckverlauf kann die relative Exzentrizität ε am besten aus Gl. (65) berechnet werden, da die Neigung der Wendetangente bei $\varphi = 0$ sich recht genau be-

¹ Stanton, R. E.: Cylindrical Journal Lubrication at high Values of the excentricity. Proc. Roy. Soc., Lond., Serie A. 1922, Vol. 102, S. 241.

stimmen läßt. Die Unsicherheit in der Wahl der „mittleren“ Zähigkeit η hat nur einen geringen Einfluß auf den Wert von ϵ .

Während bei der ebenen Gleitfläche die Ein- und Austrittsstelle des Öles eindeutig durch die Abmessungen bestimmt sind und deshalb die Tragfähigkeit, die Reibungszahl und die relative Lage der Gleitflächen (bei gegebener Spaltform) eindeutig berechnet werden können, ist beim Zapfenlager die Öleintrittsstelle φ_1 , d. i. der Ort, wo der Ölspalt zuerst vollständig mit Öl gefüllt ist, sowohl von der Art der Ölzuführung, von der Menge des Öls als auch von der Richtung der Kraft P abhängig. Die von einem losen Schmierring zugeführte Ölmenge ist z. B. von vielen Faktoren abhängig, wie Öltemperatur, Eintauchtiefe des Ringes, Drehzahl der Welle, Gewicht des Ringes usw. Bei Kraftwirkung nach oben (Eisenbahnnachlager) kann der benetzte Umfang des Zapfens sehr klein werden (Abb. 42.22). Die Tragfähigkeit eines Zapfenlagers hängt von allen Faktoren ab, welche die Öleintrittsstelle beeinflussen.

Die äußeren Kräfte, die auf den Zapfen wirken (Abb. 42.23) sind für die Breitereinheit¹:

a) Die Belastung P_1 in O angreifend und in der vertikalen Richtung wirkend gedacht. Wir vernachlässigen also die zusätzlichen Kräfte, die z. B. vom unvollständigen Massenausgleich der drehenden Teile herrühren können.

b) Das zur Überwindung der Reibung erforderliche Drehmoment M_1 .

Diese Kräfte werden im Gleichgewicht gehalten durch:

c) die radialen Pressungen p im Druckteil der Ölschicht; sie wirken senkrecht zur Zapfenoberfläche, so daß die Resultierende auch durch den Zapfenmittelpunkt O geht, und

d) das Moment der Schubspannungen τ_0 an der ganzen benetzten Zapfenoberfläche.

Der vom Öl benetzte Teil der Zapfenoberfläche fällt nicht immer mit dem Druckteil der Ölschicht zusammen. Oft liegt die Ölaustrittsstelle in der horizontalen Ebene, so daß der Ölspalt in dem Winkel von $-\varphi_2$ bis $\varphi = -\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ noch vollständig mit Öl gefüllt bleibt. Wenn das Öl reichlich und mit Überdruck zugeführt wird und wenn die obere Lagerschale nicht besonders ausgespart wird, kann der Zapfen am ganzen Umfang benetzt sein. Hierin liegt eine weitere Schwierigkeit für Zapfenlager allgemein gültige Beziehungen abzuleiten. Die Schubspannungen im unbelasteten aber benetzten Teil des Zapfenumfanges erhöhen das Reibungsmoment M_1 . Will man möglichst kleine Reibungszahlen erreichen, dann muß der benetzte Umfang auf den Druckteil begrenzt werden.

Auf die Lagerschale wirkt die resultierende Kraft des Öldruckes p , die durch den Schalenmittelpunkt O' geht und gleich der Lagerbelastung P_1 ist, sowie auch das Reaktionsmoment M_L . Da die beiden Kräfte P_1 (Abb. 42.23) parallel sind, aber in der Entfernung $e \sin \beta$ wirken, so folgt aus der Gleichgewichtsbedingung:

$$M_1 - P_1 e \sin \beta = M_L \text{ oder, durch } P_1 r \text{ dividiert:}$$

$$\mu_z - \frac{e}{r} \sin \beta = \mu_L. \quad (42.73)$$

Die Reibzahlen am Zapfen gemessen μ_z und an der Lagerschale μ_L sind demnach verschieden groß, was beim Vergleich der Theorie mit Versuchsergebnissen immer beachtet werden muß.

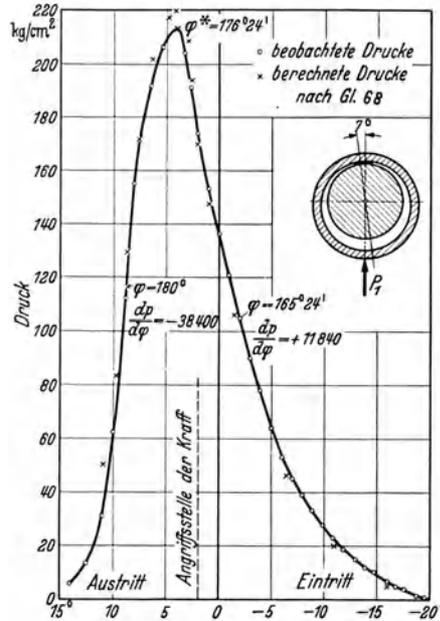


Abb. 42.22. Vergleich der theoretischen Druckverteilung mit Versuchen von R. E. Stanton.

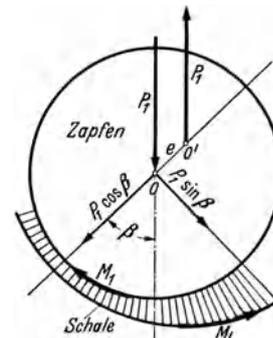


Abb. 42.23. Kraftwirkung an Zapfen und Lager.

¹ Man spricht meist von der Lagerlänge. In Übereinstimmung mit der ebenen Platte ist es zweckmäßig, die Länge in der Bewegungsrichtung zu messen und die Breite senkrecht dazu. Man sollte demnach Lagerbreite sagen.

Die Gleichgewichtsbedingungen für den Zapfen lauten, wenn der Winkel zwischen 00' und der Krafrichtung mit β bezeichnet wird:

$$\text{in Richtung } 00': \quad P_1 \cos \beta = r \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} p \cos \varphi d\varphi = \frac{6 \eta U}{\psi^2} S_2(\varepsilon, \varphi_1), \quad (42.74)$$

$$\text{senkrecht dazu:} \quad P_1 \sin \beta = r \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} p \sin \varphi d\varphi = \frac{6 \eta U}{\psi^2} S_1(\varepsilon, \varphi_1) \quad (42.75)$$

und wenn angenommen wird, daß nur der Druckteil der Zapfenoberfläche benetzt wird:

$$M_1 = r^2 \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \tau_0 d\varphi. \quad (42.76)$$

Durch partielle Integration der Gl. (74) erhält man: $P_1 \cos \beta = r \left[p \sin \varphi \Big|_{\varphi_2}^{\varphi_1} - r \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{dp}{d\varphi} \sin \varphi d\varphi \right]$.

Das erste Glied auf der rechten Seite wird Null, wenn der Druck p am Ein- und Austritt gleich Null ist. Mit dem Wert $dp/d\varphi$ aus Gl. (64) wird:

$$\begin{aligned} P_1 \cos \beta &= -\frac{6 \eta U}{\psi^2} \left(\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\sin \varphi d\varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2} - \frac{J_2}{J_3} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\sin \varphi d\varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^3} \right) \\ &= -\frac{6 \eta U}{\psi^2} \left(i_2 - i_3 \frac{J_2}{J_3} \right) = \frac{6 \eta U}{\psi^2} \cdot S_2(\varepsilon, \varphi_1). \end{aligned} \quad (42.77)$$

In gleicher Weise findet man aus Gl. (75): $P_1 \sin \beta = r \left[p \cos \varphi \Big|_{\varphi_2}^{\varphi_1} + r \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{dp}{d\varphi} \cos \varphi d\varphi \right]$.

$$\text{Da} \quad - \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2} = \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\varepsilon(1 - \varepsilon \cos \varphi)} - \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\varepsilon(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2} = \frac{1}{\varepsilon} (J_1 - J_2)$$

$$\text{und} \quad - \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^3} = \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\varepsilon(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2} - \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\varepsilon(1 - \varepsilon \cos \varphi)^3} = \frac{1}{\varepsilon} (J_2 - J_3) \text{ ist,}$$

$$\text{wird} \quad P_1 \sin \beta = \frac{6 \eta U}{\varepsilon \psi^2} \left[J_1 - J_2 - \frac{J_2}{J_3} (J_2 - J_3) \right] = \frac{6 \eta U}{\psi^2} \cdot \frac{J_1 - J_2^2/J_3}{\varepsilon} = \frac{6 \eta U}{\psi^2} S_1(\varepsilon, \varphi_1) \quad (42.78)$$

Die Trägfähigkeit P_1 des Lagers ist also

$$P_1 = \frac{6 \eta U}{\psi^2} \sqrt{S_1^2 + S_2^2} = \frac{\eta U}{\psi^2} \Phi(\varepsilon, \varphi_1). \quad (42.79)$$

Der Verlagerungswinkel folgt aus

$$\text{tg } \beta = S_1/S_2. \quad (42.80)$$

Die Verschiebungskraft am Zapfenumfang ist mit Gl. (16):

$$\begin{aligned} R_1 &= r \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \tau_0 d\varphi = r \eta U \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \left(\frac{4}{h} - \frac{3 h^*}{h^2} \right) d\varphi = \frac{\eta U}{\psi} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \left(\frac{4 d\varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)} - 3 \frac{J_2}{J_3} \cdot \frac{d\varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2} \right) \\ R_1 &= \frac{\eta U}{\psi} \left[4 J_1 - 3 \frac{J_2^2}{J_3} \right] = \frac{\eta U}{\psi} \vartheta_z(\varepsilon, \varphi_1) \end{aligned} \quad (42.81)$$

Die Reibzahl, am Zapfen gemessen ist:

$$\mu_z = \frac{R_1}{P_1} = \frac{\vartheta_z}{\sqrt{\Phi}} \cdot \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}} = K_z(\varepsilon, \varphi_1) \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}} \quad (42.82)$$

oder mit Gl. (79)

$$\mu_z = \frac{K}{\sqrt{\Phi}} \psi = C(\varepsilon, \varphi_1) \cdot \psi. \quad (42.83)$$

Die Reaktionskraft am Schalenumfang, mit Gl. (17):

$$\begin{aligned} R_2 &= r \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \tau_h d\varphi = r \eta U \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \left(\frac{3 h^*}{h^2} - \frac{2}{h} \right) d\varphi = \frac{\eta U}{\psi} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \left[3 \frac{J_2}{J_3} \frac{d\varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2} - \frac{2 d\varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)} \right] \\ &= \frac{\eta U}{\psi} [3 J_2^2/J_3 - 2 J_1] = \frac{\eta U}{\psi} \vartheta_L(\varepsilon, \varphi_1). \end{aligned} \quad (42.84)$$

Die Reibzahl am Schalenumfang gemessen

$$\mu_L = \frac{\partial L}{\sqrt{\Phi}} \sqrt{\eta \frac{U}{P_1}} = K_L(\varepsilon, \varphi_1) \sqrt{\eta \frac{U}{P_1}} \quad (42.85)$$

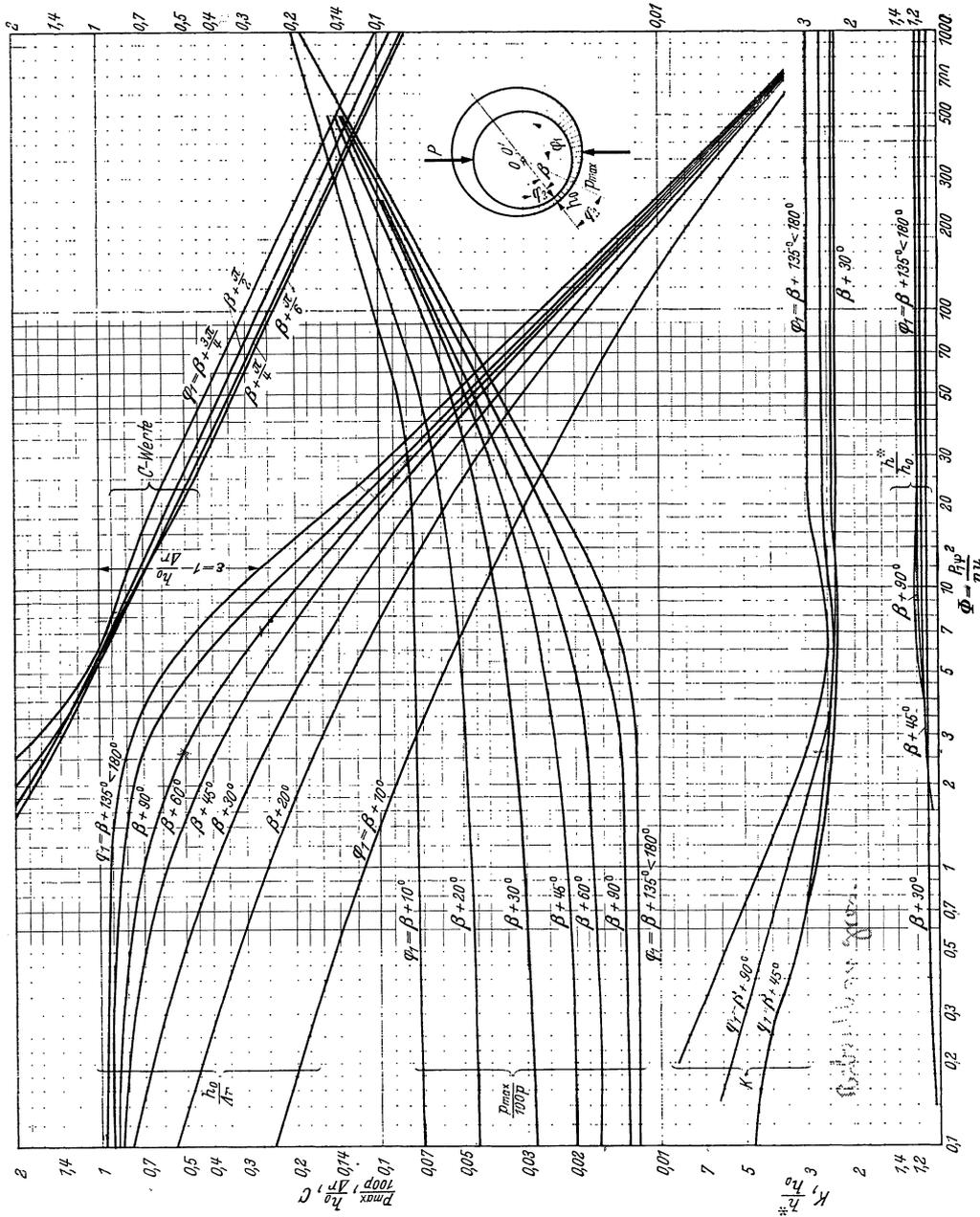
oder auch

$$\mu_L = \frac{K}{\sqrt{\Phi}} \cdot \psi = \psi \cdot C_L(\varepsilon, \varphi_1), \quad (42.86)$$

Die für die Schmierung erforderliche Ölmenge für die Breiteinheit ist

$$G_1 = U h^* / 2 \text{ [m}^3\text{/s]}. \quad (42.87)$$

Das Ergebnis der Berechnung zeigt, daß die Belastungsfähigkeit des Lagers P_1 , der Verlagerungswinkel β , die Reibzahl μ , die Ölmenge G_1 , kurz alles was wir von dem Lager wissen wollen



42.24. Zahlenwerte für die Berechnung von Zapfenlager mit Lagerspiel.

von den Faktoren Φ , S_1/S_2 , $K C$, φ^* usw. abhängen, die bei gegebenem Öleintrittswinkel φ_1 durch die relative Exzentrizität ε eindeutig bestimmt sind. Die relative Exzentrizität kennzeichnet das Lager demnach vollständig und wird deshalb in der Literatur fast ausschließlich zur Dar-

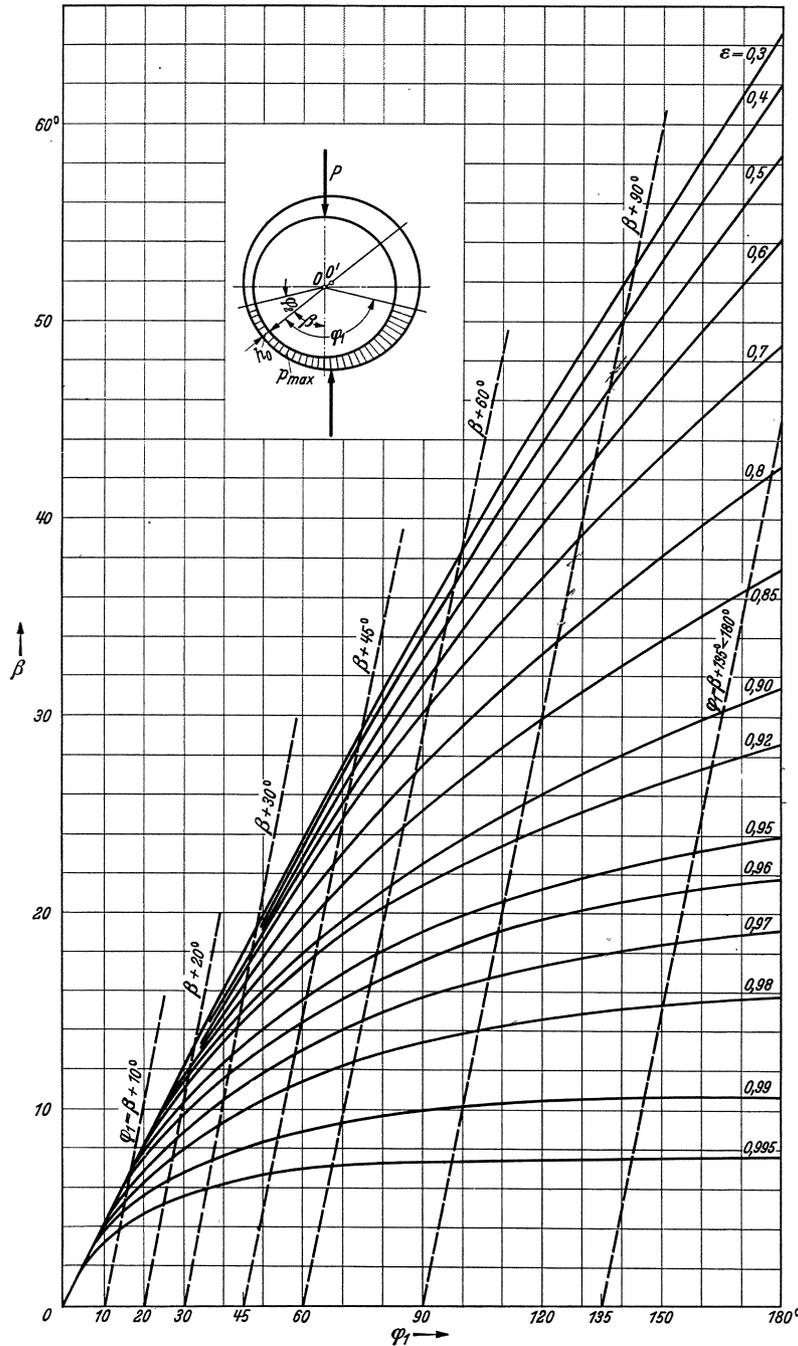


Abb. 42.25. Verlagerungswinkel $\beta = F(\varphi_1, \varepsilon)$ für unendlich breite Lager.

stellung der Zusammenhänge verwendet¹. Sie ist leider eine Größe, die für den Konstrukteur wenig zweckmäßig erscheint, weil sie von vielen Faktoren (Lagerbelastung, Ölzähigkeit, Gleitgeschwindigkeit, Lagerspiel) abhängt. Da die Faktoren Φ , ε , S_1/S_2 , $K C$ usw. eindeutig von-

¹ Howarth, H. A. S.: The Loading and Friction of thrust and journal-Bearings with perfect Lubrication. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. 57 (1935) S. 169/187.

einander abhängen, so können wir an Stelle von ε irgendeinen davon, (der uns zweckmäßiger erscheint) als Lagerkennzahl bezeichnen. Wir wählen dafür aus Gl. (79):

$$\frac{P_1 \psi^2}{\eta U} = \Phi(\varepsilon, \varphi_1), \tag{42.88}$$

welche alle für den Konstrukteur wichtige Größen enthält.

Die Berechnung gibt die kleinste Ölschichtdicke, den Verlagerungswinkel und die Reibungszahl zunächst in Abhängigkeit des (nicht anschaulichen) Hilfswinkels γ_1 , der mit Hilfe der Gl. (67) durch die entsprechenden Werte des Einlaufwinkels φ_1 ersetzt werden muß. Aber auch die Winkel φ_1 , gemessen von der unbekanntenen Linie $00'$ sind für den Konstrukteur nicht anschaulich. Für praktische Anwendungen ist es viel zweckmäßiger, den Öleintrittswinkel φ_1 von der bekannten Richtung der Kraft P aus festzulegen, also z. B. bei vertikaler Kraft-richtung und Öleintritt in der horizontalen Ebene, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \beta$. Das Ergebnis der Zahlenrechnung ist deshalb in Abb. 42.24 und 42.25 in Abhängigkeit solcher Eintrittswinkel dargestellt. Sowohl für die Berechnung des Auftriebes P_1 als der Verschiebungskraft R_1 sind die Winkel φ_1 und φ_2 als Integrationsgrenzen eingesetzt worden, d. h. das Ergebnis gilt nur unter der Voraussetzung, daß der benetzte Zapfenumfang auf den Druckteil ($\varphi_1 + \varphi_2$) begrenzt ist.

Namentlich in der englischen und amerikanischen Literatur ist es gebräuchlich, an Stelle des Eintrittswinkels φ_1 , den benetzten resp. tragfähigen Umfang ($\varphi_1 + \varphi_2$) einzuführen. Sehen wir davon ab, daß β auch von ε abhängt (Abb. 42.25), so ist $\varphi_2 = -\varphi^*$ immer noch so stark von ε abhängig (Abb. 42.21), daß ein Gleitlager durch den tragfähigen Umfang ($\varphi_1 + \varphi_2$), allein nicht eindeutig bestimmt ist.

Wenn die Kennzahl $\Phi = \frac{P_1 \psi^2}{\eta U}$ eines Lagers und der Öleintrittswinkel bekannt sind, können alle die Reibung betreffenden Fragen, wie $h_0/\Delta r$, μ , p_{max} , G_1 , ε , β usw. mit Hilfe der Abb. 42.24 bis 42.26 eindeutig beantwortet werden. Es wäre deshalb erwünscht, wenn alle Versuchsergebnisse international immer in Abhängigkeit der Lagerkennzahl dargestellt würden, welche Kenngröße im physikalischen, technischen oder englischen Maßsystem eine und dieselbe Zahl ist. Die zur Zeit notwendigen, zeitraubenden Umrechnungen werden dadurch überflüssig.

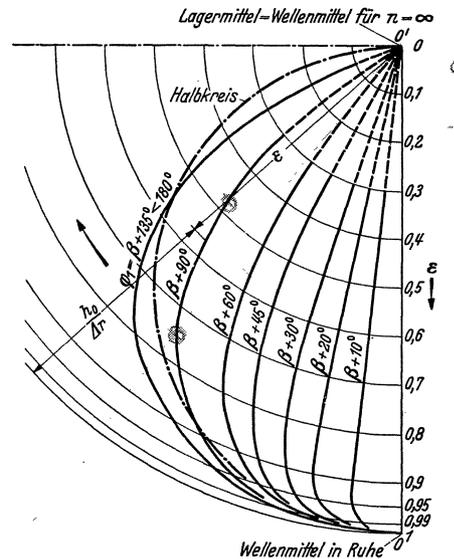


Abb. 42.26. Bahnkurven des Wellenmittels (für unendlich breite Lager).

42.4. Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Öltemperatur in der Bewegungsrichtung.

Die Reibungsleistung $\mu P_1 U$ muß als Wärme abgeleitet werden. Unter der (nicht zutreffenden) Annahme, daß die erzeugte Wärme vollständig in der Ölschicht bleibt (das Lager also keine Wärme direkt an die Umgebung abgibt) folgt die Temperaturerhöhung des Öles $\Delta \vartheta_{Oel}$ im Beharrungszustand aus der Gleichung:

$$L_1 = \mu P_1 U = 427 G_1 \gamma c \Delta \vartheta_{Oel}$$

Mit $\mu = C \cdot h_0/a$ (Gl. 46) und $G_1 = U \cdot h^*/2$ (Gl. 11) wird:

$$\Delta \vartheta_{Oel} = \frac{C P_1}{213,5 \frac{h^*}{h_0} a \gamma c}. \tag{42.89}$$

Für Öl ist im Mittel¹ $c \cdot \gamma = 420 \text{ kcal/m}^3 \text{ }^\circ\text{C}$. Für die geneigte Platte mit $m = 1,5$ ist $h^*/h_0 = 1,43$ und $C = 4,62$, so daß mit $P_1/a = p \text{ kg/m}^2$

$$\Delta \vartheta = \frac{4,62 p}{9 \cdot 10^4 \cdot \frac{h^*}{h_0}} \tag{42.90}$$

wird. Für $p = 10 \text{ at}$ wird $\Delta \vartheta = \text{rd. } 3,6 \text{ }^\circ\text{C}$; für $p = 100 \text{ at}$ dagegen $\Delta \vartheta = \text{rd } 36 \text{ }^\circ\text{C}$.

¹ Vgl. ten Bosch, Die Wärmeübertragung, 3. Aufl., S. 270, Abb. 144.

Bei großen Flächenpressungen können sehr große Temperaturunterschiede in der Ölschicht auftreten. Das Gesetz für die Veränderlichkeit der Zähigkeit mit x ist nicht bekannt. Setzt man einen geradlinigen Verlauf voraus:

$$\eta = \eta_0 (1 + nx/a), \quad (42.91)$$

so läßt sich die Integration der Gl. (39) u. (43) leicht durchführen (Zahlentafel 42.9). Wie die Versuche von E. M. Barber und C. C. Davenport zeigten, ist der bei der Rechnung vorausgesetzte geradlinige Verlauf der Zähigkeit bei $U = 2,6$ m/s annähernd vorhanden, während bei größeren Gleitgeschwindigkeiten (5,2 und 7,8 m/s) die Annahme sehr stark von der Wirklichkeit abweicht.

Zahlentafel 42.9. Funktionswerte zur Berechnung der Reibung geneigter Gleitflächen für $m = 1,5$,

$$\eta_1 = \eta_0 \left(1 + n \frac{x}{a}\right) \text{ und } b = \infty \text{ (v. Freudenreich}^1\text{)}.$$

n	Φ	$\sqrt{\Phi}$	ϑ	K	C	e/a	h^*/h_0
1	0,2370	0,487	0,510	2,15	4,41	0,067	1,502
2	0,3036	0,551	0,748	2,46	4,46	0,056	1,548
4	0,4206	0,6485	1,280	3,03	4,67	0,046	1,604

Druck abnimmt. Die Resultierende der Druckkräfte muß sich deshalb nach der Eintrittskante hin verschieben, d. h. die relative Exzentrizität e/a ändert sich. Dieses praktisch wichtigste Ergebnis ist besonders bei solchen Lagerkonstruktionen zu beachten, bei denen die Schrägstellung durch exzentrische Unterstüzung erreicht wird (vgl. S. 238). Im übrigen kann die veränderliche Zähigkeit des Öls viel einfacher dadurch berücksichtigt werden, daß mit einer „mittleren“ konstanten Zähigkeit gerechnet wird, die ungefähr gleich der Zähigkeit bei der mittleren Öltemperatur, oder gleich dem Mittelwert der Ein- und Austrittszähigkeit gesetzt werden kann.

Ist z. B. $m = 1,5$ und $n = 4$, so wird die mittlere Zähigkeit $\eta_m = \frac{\eta_0(1+4)}{2} + \eta_0 = 3 \eta_0$. Rechnet man die Reibzahl mit dieser mittleren Zähigkeit, so ist (vgl. Zahlentafel 42.3)

$$\mu = 1,84 \sqrt{\frac{\eta_m U}{P_1}} \text{ oder nach Einführung von } \eta_0: \mu = 1,84 \sqrt{3} \sqrt{\frac{\eta_0 U}{P_1}} = 3,16 \sqrt{\frac{\eta_0 U}{P_1}}.$$

Die genaue Rechnung gibt 3,03 statt 3,16 (vgl. Zahlentafel 42.9), also 4 % kleinere Werte.

42.5. Berücksichtigung der endlichen Breite der Gleitfläche.

Alle wirklichen Gleitflächen haben eine endliche Breite, so daß das seitliche Abfließen des Öls berücksichtigt werden muß. Die Flüssigkeitsmenge für die Breitereinheit, die in der X -Richtung (die durch die Mittellinie der Platte geht) strömt, ist:

$$G_x = \frac{h^3}{12 \eta} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{U h}{2}. \quad (10)$$

Ebenfalls für die Breitereinheit fließt in der Z -Richtung die Menge (da hier $U = 0$ ist):

$$G_z = \frac{h^3}{12 \eta} \cdot \frac{dp}{dz}.$$

Im Beharrungszustand muß die totale Flüssigkeitsmenge konstant sein, d. h. die Summe der Änderungen in der X - und Z -Richtung wird gleich Null:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12 \eta} \cdot \frac{dp}{dx} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12 \eta} \cdot \frac{dp}{dz} \right) = - \frac{U}{2} \cdot \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (42.92)$$

Durch das seitliche Abfließen wird natürlich die Tragfähigkeit der Gleitfläche vermindert. Die exakte Lösung² der Gl. (92) in der Form einer unendlichen Reihe, unter Voraussetzung einer unveränderlichen Zähigkeit und für die geneigte rechteckige Platte, stammt von A. G. M. Michell, der auch zwei Zahlenbeispiele mit $m = 1$ für $b/a = 1$ und $b/a = 1/3$ berechnete, während R. O. Boswall die Zahlenrechnung für $m = 1$ und $m = 2$ und verschiedene Werte von b/a durchgeführt hat. Die verminderte Tragfähigkeit der Gleitfläche mit endlicher Breite kann durch den in Zahlentafel 42.10 eingetragenen Korrekturfaktor f_b berücksichtigt werden (Mittelwert zwischen $m = 1$ bis 2).

¹ Dr. von Freudenreich: Untersuchungen an Lagern. Sonderdruck B. B. C.-Mitteilungen. Nov. 1920.

² Die sehr einfache Näherungslösung von Gumbel ist ungenau.

Für das Lager mit endlicher Breite ist also

$$P = P_\infty / f_b \quad (42.93)$$

während für die Reibzahl die gleiche Beziehungen gelten wie für die unendlichbreite Gleitfläche:

Zahlentafel 42.10. Einfluß der endlichen Breite auf die Tragfähigkeit der Gleitfläche.

$b/a =$	∞	5	3,3	2	1	0,7	0,5	$1/3$	$1/4$
P/P_∞	1	0,88	0,8	0,7	0,45	0,32	0,2	0,1	0,06
$f_b = P_\infty / P$	1	1,12	1,25	1,43	2,22	3,1	5	10	16,7
$\sqrt{f_b}$	1	1,06	1,12	1,2	1,5	1,76	2,24	3,16	1,3

$$\mu = C' h_0 / \alpha = K' \sqrt{\eta U / P_1} \quad (42.94)$$

Die von Bos wall berechneten Werte von K' für $m = 1$ und $m = 2$ sind in Zahlentafel 42.11 zusammengestellt, und Abb. 42.13 eingezeichnet.

Zahlentafel 42.11. Einfluß der endlichen Breite auf die Reibzahl.

Für $b/a =$	∞	4	2	1,33	1	0,8	0,667	0,57	0,5
und $m = 1$ ist $K' = . . .$	1,94	2,08	2,25	2,48	2,76	3,07	3,39	3,74	4,13
2	1,82	1,91	2,02	2,18	2,38	2,60	2,83	3,07	3,32

also abhängig von m , d. h. von h_1/h_0 .

Die mathematische Lösung von Michell gilt nur für die geneigte, ebene Fläche und unter der Voraussetzung einer unveränderlichen Zähigkeit. A. Stodola¹ löst Gl. (92) graphisch durch schrittweise Annäherung, so daß auch die Berechnung der Reibungszahlen für beliebige Spaltformen, für gekrümmte Gleitflächen und auch die Berücksichtigung einer veränderlichen Zähigkeit möglich ist. Die einzige Voraussetzung dabei ist, daß weder die Zähigkeit noch die Spalthöhe von z abhängig sei.

A. Kingsbury² löst sie experimentell mit Hilfe der Analogie zwischen der räumlichen Flüssigkeitsströmung und dem elektrischen Feld in einer elektrolytischen Lösung. Auch diese Methode kann für beliebige (gekrümmte) Spaltformen verwendet werden und gestattet die Berücksichtigung der veränderlichen Zähigkeit. Die experimentelle Lösung von Kingsbury stimmt mit der mathematischen Lösung von Michell und Boswall sehr gut überein, ebenso mit den Versuchen von G. Goodman³.

Eine viel einfachere Näherungsmethode⁴ beruht auf die Feststellung (vgl. S. 234), daß die Reibzahl bei flüssiger Reibung eine geometrische Größe ist, die nur von der Spaltform abhängt; bei gleicher Spaltform und gleicher relativen Lage der Gleitflächen ist die Reibungszahl gleich. Selbstverständlich gilt diese Schlußfolgerung streng nur unter der Voraussetzung gleicher Flüssigkeitsströmung im Spalt, also nur für unendlichbreite Gleitflächen. Bei endlicher Breite ist die Strömung auch vom Verhältnis b/a und von h_1/h_0 abhängig.

Wenn wir aber bei der Näherungsrechnung davon absehen, so kann die Gleitfläche endlicher Breite mit einer „gleichwertigen“ aber unendlich breiten verglichen werden, welche die gleiche relative Lage einnehmen würde und deshalb auch die gleiche Reibungszahl hätte. Für das un-

endlich breite Lager kennen wir die Reibzahl: $\mu = K \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}}$.

Um die gleiche relative Lage einzunehmen und damit die gleiche Reibzahl zu erreichen, darf das Lager endlicher Breite nur mit P_1/f_b belastet werden; dann ist die Reibzahl:

$$\mu = K \sqrt{\frac{\eta U}{P_1/f_b}} = K \sqrt{f_b} \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}}, \quad (42.95)$$

wobei der K -Wert abzulesen ist für $\Phi = \frac{P_1 \psi^2}{\eta U \cdot f_b}$.

Die Genauigkeit dieser Näherungsmethode kann für geneigte Gleitflächen leicht festgestellt werden, da hierfür die genauen Reibzahlen aus Zahlentafel 42.11 bekannt.

Für $m = 1$ und	$b/a = 2$	1	$1/2$	ist
nach der genauen Rechnung	$K' = 2,25$	2,76	4,13	
$\sqrt{f_b}$ ist	1,19	1,5	2,24	
Also nach der Näherungsrechnung mit $K_\infty = 1,94$	$K' = 2,32$	2,9	4,35	

¹ Die Dampf- und Gasturbinen, S. 1111, 5. Aufl. Berlin: Julius Springer 1922.

² Kingsbury, A.: On problems in the theory of fluid-film Lubrication, with an experimental method of solution. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. 53 (1931) APM 53.5 S. 59.

³ Goodman: Proc. Inst. civ. Engr. 1927/28 Vol. 228 p. 242; 1931/32 Vol. 233 p. 244.

⁴ ten Bosch: Die Reibung in Gleitlagern. Schweiz. Bauztg. 18. Juni 1932, S. 321.

Dieser Vergleich zeigt, daß die vorgeschlagene Näherungsrechnung auch bei sehr schmalen Gleitflächen recht brauchbar ist.

Bei Zapfenlagern kann der Einfluß der endlichen Breite in gleicher Weise berücksichtigt werden, wie bei den ebenen Gleitflächen, da die Krümmung das seitliche Abfließen nicht beeinflusst. Die seitlich abfließende Ölmenge ist auch gering, da das Öl gleichzeitig eine drehende Bewegung in bezug auf Zapfen und Lagerschale hat, also einen schraubenförmigen Weg beschreiben muß. Die Länge a in Richtung der Bewegung ist gleich der Länge der Druckfläche, also $a = r(\varphi_1 + \varphi_2)$, da im drucklosen Gebiet das seitliche Abfließen unbedeutend wird. Die Länge a muß also von Fall zu Fall, je nach Anordnung und Art der Schmierung geschätzt werden.

Bei endlicher Lagerbreite ändert sich natürlich auch das Verhältnis p_{max}/p , und zwar sind die für ein unendlich breites Lager berechneten Werte aus Abb. 42.24 mit dem Faktor f_b zu multiplizieren.

Die Lage des Zapfens in der Lagerschale findet man bei endlicher Breite durch folgende Überlegung. Ein unendlich breites Vergleichslager (für welches Abb. 42.24 gültig ist) kann nur dann die gleiche relative Lage einnehmen, wenn es f_b mal so hoch belastet wird. Für das Lager mit endlicher Breite sind also aus dieser Abbildung die Werte $h_o/\Delta r$, resp. ε bei einer Kennzahl $f_b \cdot \Phi$ abzulesen. Aus der Gleichung

$$\mu = K' \sqrt{f_b} \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}} = K' \sqrt{b \cdot f_b} \sqrt{\eta U/P} \tag{42.96}$$

folgt, mit den Werten von f_b aus Zahlentafel 42.10, daß das Verhältnis b/a einen bedeutenden Einfluß auf die Reibungszahl haben kann. Bei unveränderter Lagerbelastung P und wenn U und η konstant bleiben, ist die Reibungszahl proportional $\sqrt{b \cdot f_b}$.

Für $b =$	5	3,3	2	1	0,7	0,5 a
ist $f_b =$	1,12	1,25	1,43	2,22	3,1	5
und $b \cdot f_b =$	5,6	4,12	2,86	2,22	2,17	2,5 $\cdot a$

Der kleinste Wert von μ liegt etwa bei $b/a = 0,7$. Für b/a größer als 0,7 ist die Reibzahl um so kleiner, je kürzer das Lager wird.

Bei den Versuchen von Brown, Boveri & Cie wurde ein Lager von 125 mm Durchmesser bis auf 62,5 mm verkürzt. Die Flächenpressung stieg dabei von 4,2 auf 14 at. Das Versuchsergebnis ist in Abb. 42.27 dargestellt. Man erkennt daraus, daß die Reibungszahl, und damit auch die Reibungsarbeit, tatsächlich mit der Lagerlänge abnimmt. Allerdings nicht proportional $\sqrt{b \cdot f_b}$, da mit zunehmender Belastung P_1 die Temperatur zu- und η abnimmt. Bei gleichen Belastungen P_1 dagegen gibt das kürzere Lager $\sqrt{f_b}$ mal so große Reibungszahlen, wie ein unendlich breites Lager. So fand z. B. Stribeck bei $n = 1000/\text{min}$ und $p = 3$ at (Abb. 43.1 u. 43.2) für das Sellerslager ($b = 3,6 d$), $\mu = 0,028$ und für das Weißmetallager ($b = d$), $\mu = 0,038$, trotzdem μ_{min} für das Weißmetallager nur etwa halb so groß war, wie für das Sellerslager (vgl. Zahlenbeispiel 43.1. Nach Gl. (95) muß

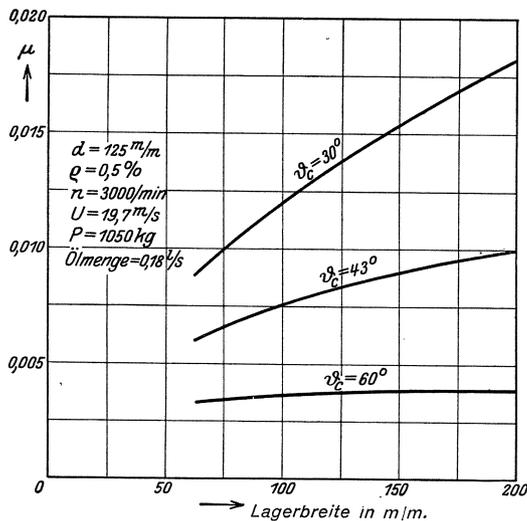


Abb. 42.27. Einfluß der Lagerbreite nach Versuchen von v. Freudenreich, BBC.

sein, in Übereinstimmung mit den Messungen von Stribeck, da $1,37 \cdot 2,8 = 3,8$ ist.

$$\mu_b = a = \sqrt{\frac{2,22}{1,2}} \mu_b = 3,6 a = 1,37 \mu_b = 3,6 a$$

42.6. Ein- und Austrittsstelle des Öles.

Aus Abb. 42.26 geht hervor, daß die Lage des Wellenmittels in hohem Maße vom Öleintrittswinkel φ_1 abhängt. Diese Schlußfolgerung wird auch durch die genauen Messungen von Clayton und Jakeman¹ im Nat. Phys. Laboratorium (London) bestätigt. Die früher übliche Annahme,

¹ Clayton und Jakeman: The Measurement of Attitude and Eccentricity in complete clearance Bearings. Proc. Inst. mech. Engr. 134 (1936) S. 437/506.

die auch durch die Versuche von Nücker¹ bestätigt schien, daß die Bahn des Wellenmittels eindeutig durch die relative Exzentrizität allein bestimmt und mit guter Annäherung durch den Gumbelschen Halbkreis darstellbar sei, trifft demnach nicht zu.

Die Voraussetzung der Berechnung, daß die Ölaustrittsstelle bei φ_2 liegt, ist bei den Ausführungen nicht immer erfüllt, da die Austrittsöffnung oft in die horizontale Trennfuge gelegt wird. Die in Abb. 42.24 eingetragenen Werte von K und C sind deshalb Minimalwerte und sollten für solche Ausführungen etwa um 10 % erhöht werden. Besonders bei Zirkulations-schmierung wird eine viel größere Ölmenge G zugeführt als zur Bildung der tragfähigen Ölschicht erforderlich ist. Diese Ölmenge verteilt sich dann in zwei Strömen, $G_1 = U \cdot h^*/2$, die durch die Lage der Welle eindeutig bestimmt ist (unabhängig von G) und G_2 , die durch den unbelasteten Ölspalt fließt und das Lager kühlt. Das Kühlöl wird zweckmäßig in einem dünnen Strahl, entgegengesetzt der Wellendrehung zugeführt (Abb. 44.26), so daß die an der Welle haftende warme Ölschicht weggespült wird. Ist die Spülölmenge so groß, daß das Öl dort auch an der Lagerfläche haftet, den unbelasteten Spalt also vollständig ausfüllt, dann entstehen zusätzliche Schubspannungen und eine zusätzliche Reibung. Es ist deshalb zweckmäßig die unbelastete Lagerschale soweit auszusparen, daß der Spalt nicht vollständig mit Öl ausgefüllt werden kann, und das zu-

sätzliche Reibungsmoment $M_1' = r^2 \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \tau_0' d\varphi$ vermieden wird. Bei vollständig ausgefülltem Spalt, in welchem ein konstanter Druck herrscht, also $dp/dx = 0$, ist eine lineare Geschwindigkeitsverteilung vorhanden [Gl. (42.8a)] und $\tau_0' = \eta U/h$. Dann ist

$$M_1' = r^2 \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\eta U}{h} d\varphi = \frac{\eta U r^4}{\Delta r} \int_{\varphi_2}^{360 - \varphi_1} \frac{d\varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \quad (42.97)$$

Um diesen Betrag (bis 100 % und mehr) wird dann das Reibungsmoment M_1 und damit die Reibzahl nutzlos erhöht. Die Versuche von Nücker und von Lasche² zeigen auch deutlich eine Vergrößerung des Reibungsmomentes mit zunehmender Ölmenge. Im unbelasteten Teil des Lager-spiels kann sogar Überdruck, also eine zusätzliche Zapfenbelastung entstehen, indem das Öl in dem vollständig mit Öl gefüllten Spalt durch die Drehung der Welle gestaut wird.

43. Vergleich der Theorie mit der Erfahrung.

Bei der Ableitung der Gleichungen für die flüssige Reibung wurden verschiedene vereinfachende Annahmen gemacht, deren Zulässigkeit an Hand der gebräuchlichen Lagerkonstruktionen noch genauer geprüft werden muß. Wenn die Voraussetzungen von den Ausführungen abweichen, so muß entweder die Theorie entsprechend erweitert oder die Lagerkonstruktionen geändert werden, bevor die Theorie mit den zahlreichen Versuchsergebnissen verglichen werden kann.

Die Theorie setzt glatte Oberflächen voraus, während die technischen Oberflächen immer „rauh“ sind (vgl. S. 79). Da die Reibzahl direkt proportional der Summe der Unebenheiten h_0 ist [Gl. (42.46)], so wird man die Gleitflächen so glatt herstellen als wirtschaftlich tragbar ist. Der Zapfen ist zu härten, zu schleifen und tunlichst präge zu polieren.

Daß das Reibungsproblem kein einfaches Problem ist, zeigt Abb. 43.1, in der die Abhängigkeit der Reibungszahl von Druck und Gleitgeschwindigkeit für ein Sellerslager von 70 mm Bohrung nach den Versuchen von Professor Stribeck³ dargestellt ist. Es war nicht leicht, ohne theoretische Grundlage, daraus allgemeine Schlußfolgerungen zu ziehen. Aus Abb. 42.24 geht hervor, daß für Lagerkennzahlen Φ größer als etwa 4 der Faktor K in Gl. (42.96) konstant ist und nur von der Öleintrittsstelle φ_1 abhängt. Bei unveränderter Lagerbreite b und bei gleicher Öltemperatur ($\eta = \text{konstant}$), muß dann

$$\mu = \text{Konst} \sqrt{U/P_1} \quad \text{oder} \quad p\mu^2 = \text{konst.} \quad (43.1)$$

¹ Nücker, W.: Über den Schmiervorgang in Gleitlagern. Forschungsheft Nr. 352. VDI 1932.

² Lasche, O.: Die Reibungsverhältnisse in Lagern mit hohen Umfangsgeschwindigkeiten. Z. VDI 46 (1902) S. 1881, 1932 u. 1961; ferner Forschungsheft 9 (1903) und Konstruktion und Material im Bau von Dampfturbinen, 3. Aufl. Berlin: Julius Springer 1925.

³ Stribeck, R.: Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager. Z. VDI 46 (1902) S. 1341, 1432 u. 1463; ferner VDI-Forschungsheft Nr. 7.

sein, ein Ergebnis, daß Stribeck experimentell gefunden hat und durch die Versuche von O. Lasche bestätigt wurde. Um den Einfluß der verschiedenen Faktoren einzeln untersuchen zu können, hat Stribeck für sämtliche Versuche das gleiche Lager und auch das gleiche Schmieröl (Gasmotorenöl) verwendet, und außerdem die Lagertemperatur von 25° C als unveränderliche Grundlage für seine Versuche angenommen. Diese Temperatur von 25° wurde gewählt, um die Kurven sowohl für kleine als für große Geschwindigkeiten vergleichen zu können. Für kleine Umdrehungszahlen ist 25° schon eine hohe Temperatur, die nur im Sommer erreicht wird, während für große Geschwindigkeiten die Temperatur so rasch ansteigt, daß die erste einigermaßen zuverlässige Bestimmung von μ bei einer kleineren Temperatur praktisch kaum durchführbar ist. Dabei ist aber zu bedenken, daß der Beharrungszustand nicht immer erreicht wird, so daß bei 25° Schalentemperatur doch verschiedene Öltemperaturen vorkommen können. Der Einfluß der Zähigkeit ist bei diesen Versuchen also doch nicht ganz ausgeschaltet.

Aus den Abb. 43.1 u. 2 ist zu entnehmen, daß sämtliche Reibungskurven von demselben Punkte der Ordinatenachse ausgehen, d. h. die Haftreibungszahl ist unabhängig von der Pressung und gleich 0,14 für $p = 0,42$ bis 22,6 at. Dann nimmt die Reibungszahl rasch ab, um von einem Kleinstwert ($\mu = 0,0035$ beim Sellers- und 0,0017 beim Weißmetallager) wieder langsam zu steigen, und zwar ungefähr parabolisch nach dem theoretischen Gesetz: $p\mu^2 = \text{konstant}$ (Gl. 1). Die Übereinstimmung mit der Theorie ist beim kurzen Weißmetallager ($b = d$) besser als beim langen Sellerslager ($b = 4d$), was leicht durch das ungleichmäßige Anliegen der sehr breiten Lagerschale zu erklären ist.

Ist K nicht konstant, z. B. für Lagerkennzahlen kleiner als 4 oder wenn der Öleintrittswinkel sich bei den Versuchen ändert, so ist die parabolische Beziehung zwischen μ und U natürlich nicht mehr vorhanden, wie z. B. Versuche von C. Jakeman und A. Fogg zeigten, nach welchen die Reibungszahl durch die Gleichung

$$\mu = a + b \cdot U \quad (43.2)$$

darstellbar ist.

Die Theorie gilt nur solange die Gleitflächen vollständig durch eine Ölschicht getrennt sind, d. h. solange h_0 größer als die Summe der Unebenheiten der Gleitflächen ist. Man nennt diese Grenze oft den „Ausklinkzustand“, vom vereinfachten Bild der trockenen Reibung ausgehend, daß die Unebenheiten der Gleitflächen zahnförmig ineinander greifen. Für ein bestimmtes Lager erfolgt das Ausklinken demnach bei einem bestimmten Wert von h_0 , resp. $h_0/\Delta r$, also auch bei einem eindeutigen Wert von Φ und μ , wenn wir wieder voraussetzen, daß bei allen Versuchen φ_1 unverändert bleibt. Daraus folgt dann, daß die Reibungszahl beim Ausklinken den kleinsten Wert μ_{\min} für das Lager erreicht und konstant sein muß, unabhängig von η , U und P_1 . Diese allgemeine Schlußfolgerung wird ebenfalls durch die Versuche von Stribeck bestätigt.

Der größere Wert für das Sellerslager ($\mu_{\min} = 0,0035$) gegenüber dem Weißmetallager ($\mu_{\min} = 0,0017$) weist auf die größeren Unebenheiten der Gußschalen hin.

Weiter folgt daraus, daß die Ausklinkdrehzahl mit P_1 resp. p mit n proportional sein muß, in Übereinstimmung mit den Versuchen von Stribeck (Abb. 43.1), da

$$n/p = 8/1 = 16/2 = 24/3 = 32/4 = 48/6 = 96/12 \text{ ist.}$$

Ebenfalls nur für Kennzahlen Φ größer als 4 (vgl. Abb. 42.24) ist die Reibzahl μ vollständig unabhängig vom relativen Lagerspiel ψ . Die Versuche von Dr. J. von Freudenreich und von Welter und Weber¹, die zeigten, daß die Reibungszahl durch Vergrößerung des Lagerspieles auf 1 bis 2% bedeutend vermindert werden kann (Abb. 43.3 a, b), stehen mit dieser Schlußfolgerung nicht in Widerspruch. Diese Versuche liegen bei Lagerkennzahlen Φ zwischen 0,25 und 1 und in diesem Bereich nimmt K mit zunehmendem Φ -Wert, d. h. mit zunehmendem Lagerspiel ab (Abb. 42.24).

Zahlenbeispiel 43.1. Bei den Versuchen von Stribeck mit einem Weißmetallager von 70 mm Durchmesser und ebenfalls 70 mm Breite, wurde $\mu_{\min} = 0,0017$ gemessen. Gefragt wird, welche Ölsorte Stribeck bei diesen Versuchen verwendete?

Nehmen wir $\varphi_1 = \beta + 90^\circ$ an, so folgt aus Abb. 42.25 mit dem schätzungsweise angenommenen Wert $\varepsilon = 0,96$, $\beta = 19^\circ$ und aus Abb. 42.21 $\varphi_2 = -\varphi^* = 8^\circ$, so daß der benetzte Bogen gleich $90 + 19 + 8 = 117^\circ = 2,05$ (Bogenmaß) ist. Dann ist $a = 35 \times 2,05 = 72$ mm, $b/a = 72/70 = \text{rd. } 1$ und f_b (Zahlentafel 42.10) = 2,2.

¹ Welter, G. und G. Weber: Versuchsergebnisse des Versuchsfeldes für Maschinenelemente an der Technischen Hochschule zu Berlin. R. Oldenburg 1920.

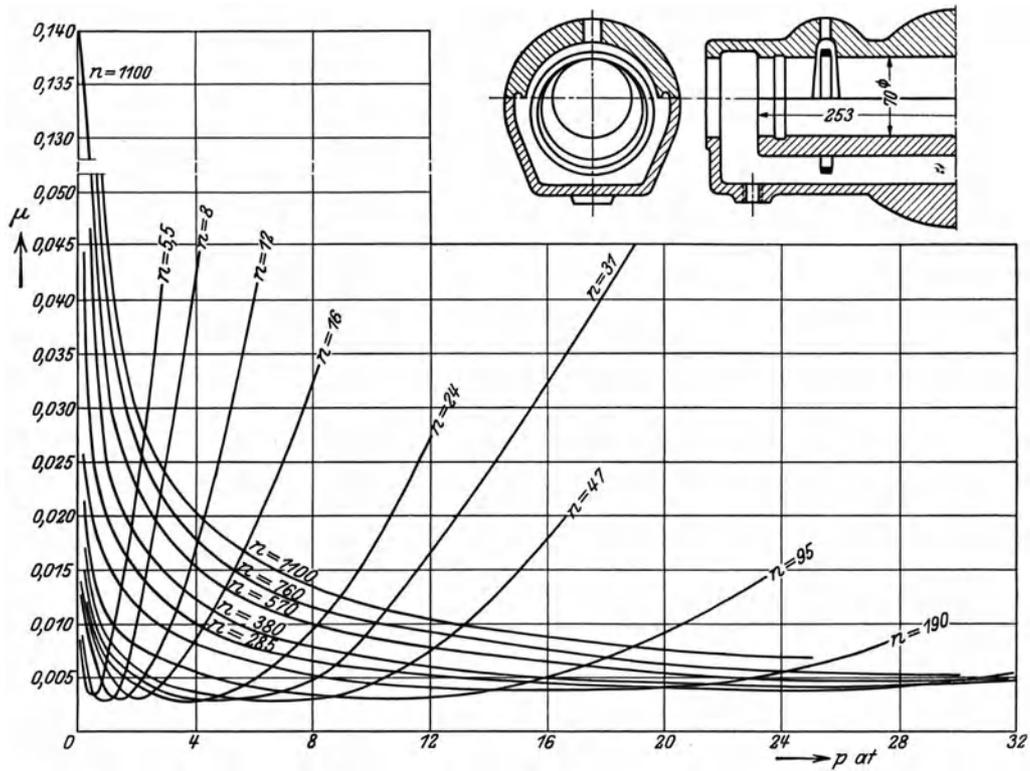


Abb. 43.1. Reibungszahlen eines Sellerslagers (Versuche von Stribeck).

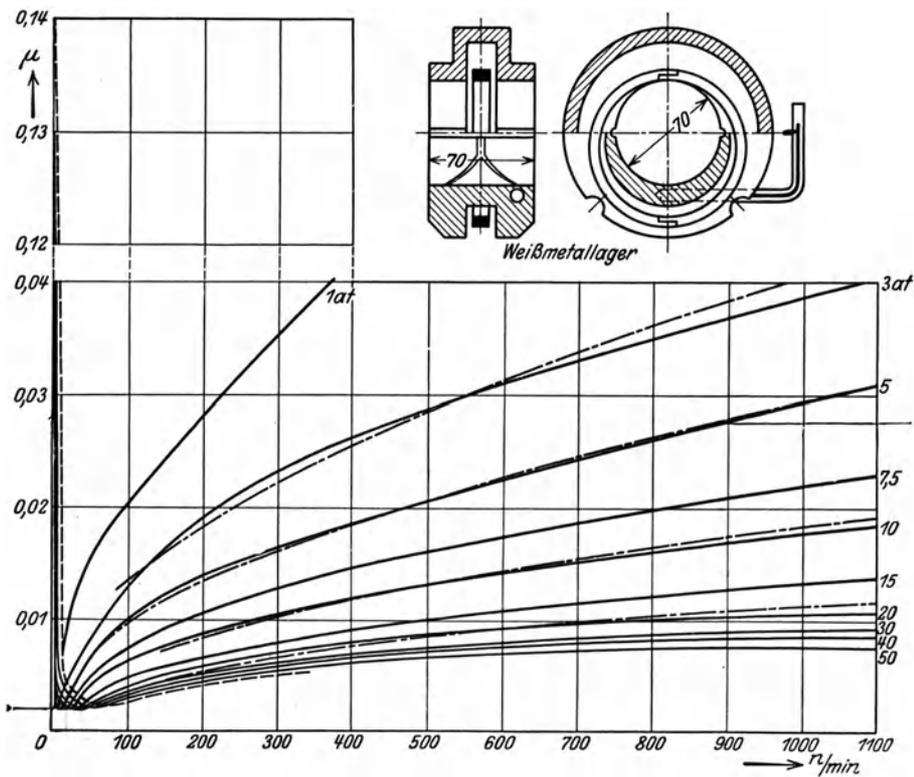


Abb. 43.2. Reibungszahlen eines Weißmetallagers (Versuche von Stribeck).
 NB. Die Strichpunktlinien zeigen den Verlauf der Gleichung $p\mu^2 = \text{konstant}$.

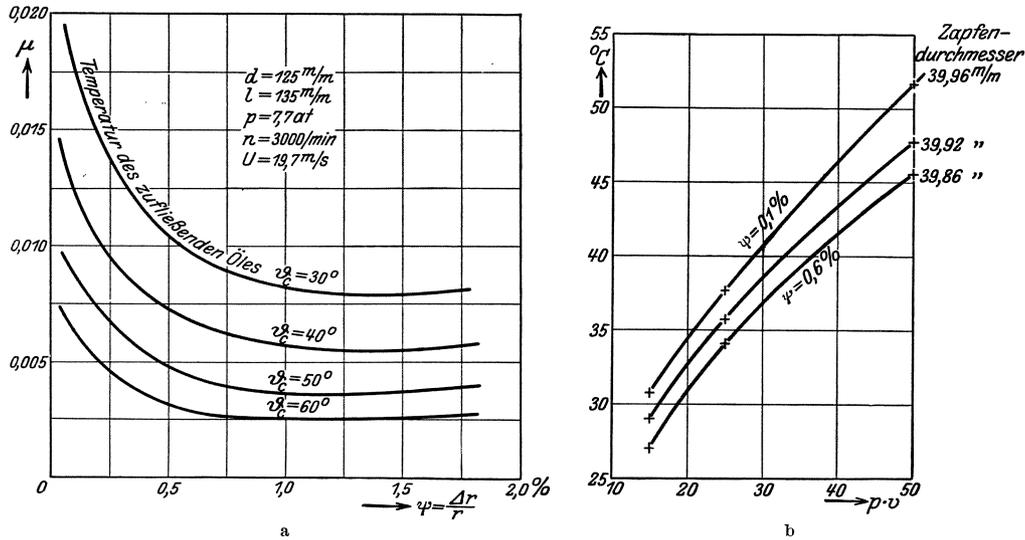


Abb. 43.3. Einfluß des Lagerspiels. a Versuche von Freudenreich. b Versuche Welter und Weber.

Aus $\mu_{\min} = K \sqrt{f_b} \sqrt{\eta U/P_1} = 0,0017$ folgt mit dem abgelesenen Wert $K = 2,6$ (Abb. 42.24) mit 10% Zuschlag, weil die Ölaustrittsstelle nicht bei φ_2 liegt (vgl. Abschn. 42.6), also $K = 2,9$.

$$\left(\frac{0,0017}{2,9}\right)^2 = 2,2 \frac{\eta U}{P_1}$$

Die kleinste Reibungszahl wurde z. B. erreicht bei $p = 10 \text{ at}$, also $P_1 = 7000 \text{ kg/m}$ und $n = 15/\text{min}$, also $U = 0,055 \text{ m/s}$. Dann folgt daraus die Zähigkeit des Öles bei der Lagertemperatur (25° C) zu

$$\eta_{25^\circ \text{ C}} = 0,02 \text{ kg/s/m}^2,$$

was sehr gut mit der von Stribeck verwendeten Ölart (vgl. Abb. 42.4) übereinstimmt. Das Lagerspiel wurde bei diesen Versuchen leider nicht gemessen, so daß h_0 nicht berechnet werden kann. Beim Sellerslager dagegen wurde μ_{\min} doppelt so groß gefunden. Nach der Theorie mit den beobachteten Werten von p und n , ist für $b/d = 3,6$: $\mu = K \sqrt{1,2} \sqrt{\eta U/P_1}$, bei $n = 100$, $p = 10 \text{ at}$ für $b/d = 1$: $\mu = K \sqrt{2,22} \sqrt{\eta U/P_1}$, bei $n = 16$, $p = 10 \text{ at}$,

so daß

$$\mu_{b=3,6d} = \sqrt{\frac{100 \times 1,2}{16 \times 2,2}} \mu_{b=d} = 1,84 \mu_{b=d}$$

sein sollte. Der Unterschied zwischen den berechneten Wert 1,84 und den gemessenen 2 kann durch verschiedene Einflüsse erklärt werden:

1. In der starken Veränderlichkeit von η mit der Temperatur in der Nähe der Lagertemperatur von 25° C (vgl. Abb. 42.4).
2. In der Schwierigkeit die Drehzahl bei μ_{\min} ganz genau zu bestimmen.
3. Vielleicht war auch der K -Wert in beiden Fällen nicht genau gleich, was nachträglich nicht mehr zuverlässig beurteilt werden kann, weil die Lagerspiele und die Öleintrittsstellen in den beiden Fällen nicht bekannt sind.

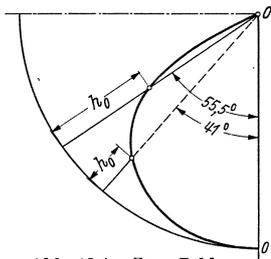


Abb. 43.4. Zum Zahlenbeispiel 43.2.

Zahlenbeispiel 43.2. Ein Turbogeneratorenlager von 125 mm Durchmesser und 260 mm Breite sei mit 2,3 at belastet. Welche Lage wird die Welle bei $n = 3000$ einnehmen, wenn $\psi = 0,5\%$ und $\eta = 0,001 \text{ kg s/m}^2$ ist?

Mit $U = \frac{n\pi}{30} \cdot r = 19,6 \text{ m/s}$, $P_1 = p \cdot d \cdot 10^4 = 2875 \text{ kg/m}$ wird: $\Phi = \frac{P_1 \psi^2}{\eta U} = 3,7$. Wenn das seitliche Abfließen vernachlässigt wird, folgt, mit $\varphi_1 = \beta + 90^\circ$ aus Abb. 42.24: $\frac{h_0}{\Delta r} = 0,47$ oder $\varepsilon = 0,53$ aus Abb. 42.25, $\varphi^* = 35^\circ,5$ und aus Abb. 42.26, $\beta = 55,5^\circ$ (Abb. 43.4),

$$h_0 = 0,47 \times 0,005 \times 62,5 \text{ mm} = 0,15 \text{ mm.}$$

$$\mu = C \cdot \psi = 1,35 \times 0,005 = 0,0068.$$

Für das Lager mit endlicher Breite ist der benetzte Bogen $90 + \varphi_1 + \varphi^* = 181^\circ = 3,14$ (Bogenmaß). Für $\frac{b}{a} = \frac{260}{3,14 \times 62,5} = 1,3$, ist $f_b = 1,8$ (Zahlentafel 42.10).

Für $\Phi = 1,8 \times 3,7 = 6,65$, ist $\varepsilon = 0,06$ (Abb. 42.24).

$\beta = 41^\circ$ (Abb. 42.25).

$\mu = C \cdot \psi = 2,3 \times 0,005 = 0,01$ (C für Φ/f_b).

Der Zapfen liegt etwas tiefer (Abb. 43.4) und hat eine größere Reibungszahl als ohne seitliches Abfließen.

Zahlenbeispiel 43.3. Ein Lager $d = 200$ mm, $b = 400$ mm ist mit einem Lagerspiel $\Delta d = 0,34$ mm ausgeführt. Die mittlere Flächenpressung beträgt $6,5$ kg/cm². Wie groß ist die Reibzahl bei 30 m/sec Umfangsgeschwindigkeit, wenn bei vertikaler Kraftwirkung das Öl ohne Druck zugeführt und auch horizontal abgeleitet wird? Die Zähigkeit des Öles ist bei einer mittlern Lagertemperatur von 55° rd. $0,0015$ kgs/m².

$P_1 = p d = 6,5$ kg/cm² \times 20 cm = 130 kg/cm = 13000 kg/m.

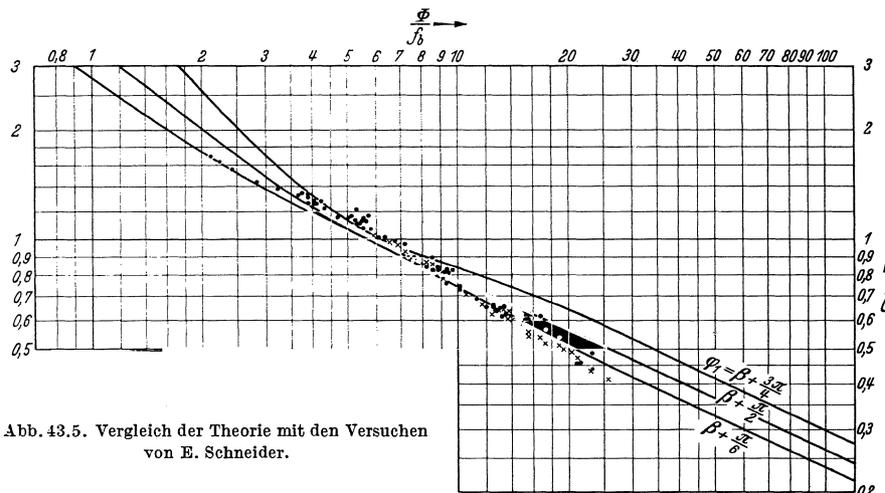
$\psi = \frac{\Delta d}{d} = \frac{0,34}{200}$ und $\psi^2 = 2,89 \times 10^{-6}$.

$\Phi = \frac{P_1 \psi^2}{\eta U} = \frac{13000 \cdot 2,89 \cdot 10^{-6}}{15 \cdot 10^{-4} \cdot 30} = 0,87$ und $\sqrt{\frac{\eta U}{P_1}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 30}{10^3 \cdot 13000}} = 0,00185$.

Aus den Abb. 42.25 und 42.21 bei $\varphi_1 = \beta + 90^\circ$ und $\varepsilon = 0,95$ (angenommen) folgt $\beta = 21^\circ$ und $\varphi^* = 9^\circ$, also der tragfähige Umfang = $90 + 21 + 9 = 120^\circ = 2,09$ (Bogenmaß) und damit $a = 100 \times 2,09 = 209$, $b/a = 400/209 \sim 2$ und $f_b = 1,43$. $\Phi/f_b = 0,87/1,43 = 0,6$. Mit $K = 4$ und 10% Zuschlag für höher liegende Ölaustrittsstelle sind nach Gl. (42.98)

$$\mu = 1,1 \times 4 \times 1,2 \times 0,00185 = 0,0098$$

in guter Übereinstimmung mit den Versuchen von Lasche.



Zum genauen Vergleich der Reibungszahlen eignen sich nur die an der Welle gemessenen Reibungsmomente. Bei Messung des Reibungsmomentes an der Lagerschale müssen gleichzeitig Exzentrizität und Verlagerungswinkel beobachtet werden. Sehr sorgfältige Versuche von Dr.-Ing. E. Schneider¹ eignen sich für den Vergleich. Das Ergebnis läßt sich am zweckmäßigsten (d. h. ohne Umrechnung) durch die Gleichung:

$$\mu = C \psi \quad (42.83)$$

darstellen, indem die beobachteten C -Werte mit den theoretischen verglichen werden. Aus Gl. (42.96) folgt mit $\Phi' = \Phi/f_b$:

$$\mu = \frac{K'}{\sqrt{\Phi'}} \psi = C' \psi, \quad (43.3)$$

in welcher Gleichung C' (wie K') für den Wert Φ/f_b aus Abb. 42.24 abzulesen ist. Der Vergleich ist mit $f_b = 1,9 = \text{konst}$ in Abb. 43.5 durchgeführt und zeigt eine recht gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch.

¹ Schneider, E.: Versuche über die Reibung in Gleitlagern. Diss. T. H. Karlsruhe 1929.

Eintuschierte Lagerschalen. Es sind noch die Versuche von R. Wolff¹ zu erwähnen, bei denen er zu dem vernichtenden Urteil kam, daß die hydrodynamische Vorstellung und Rechnung nicht nur quantitativ sondern auch qualitativ falsche Ergebnisse liefert. Er stützte diese Schlußfolgerung im wesentlichen auf den abweichenden Verlauf der Wellenverlagerung (Abb. 43.6), und hat dabei übersehen, daß der Gumbelsche Halbkreis als Bahn des Wellenmittels nur für Lager mit Lagerspiel und unter bestimmten Bedingungen für die Öleintrittsstelle, gültig sein kann (vgl. Abb. 42.26). R. Wolff dagegen hat seine Versuche mit einem eintuschierten Lager durchgeführt, bei dem ein sog. Spiegel vorhanden war, mit einem Krümmungsradius gleich dem Wellenradius.

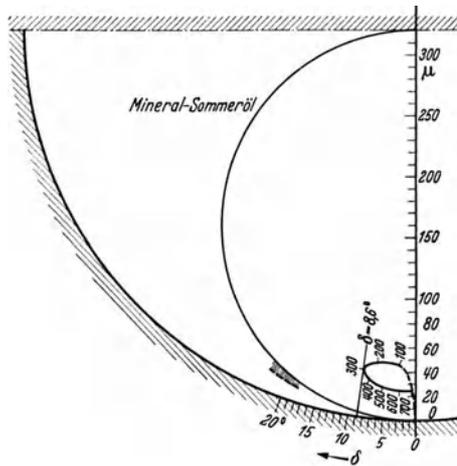


Abb. 43.6. Verlagerung des Wellenmittels bei eintuschierten Lagern. (Nach Wolff.)

Für solche Lager gilt demnach Gl. (42.60) für die Spaltform nicht, die als Grundlage für alle Zahlenrechnungen dient, so daß es keinesfalls verwunderlich ist, daß hier Abweichungen auftreten. Wenn die Zahlenrechnungen für Spaltformen, wie sie bei eintuschierten Lagern vorkommen, durchgeführt werden², so kommt man zur Schlußfolgerung, daß die Bahn des Wellenmittels grundsätzlich den von Wolff experimentell gefundenen Verlauf haben muß. Sie ist aber (ähnlich wie bei den Lagern mit Lagerspiel) in hohem Maße abhängig von dem (nicht gemessenen) Öleintrittswinkel φ_1 .

Aus den Berechnungen folgt weiter, daß eintuschierte Lager größere Reibzahlen ergeben, als Lager mit Lagerspiel. Diese Schlußfolgerung steht auch in guter Übereinstimmung mit Abb. 42.24, aus der folgt, daß bei sehr kleinem Lagerspiel die Reibungszahl zunimmt. Die Praxis hat demnach im allgemeinen kein Interesse an eintuschierten Lagerschalen, was immerhin eine wichtige Feststellung ist. Sie kommen hauptsächlich bei den Eisenbahnnachslagern vor; die Bahnverwaltungen schreiben nämlich vor, daß die Güterbahnwagen mit sehr großem Lagerspiel auszuführen sind und ohne Bearbeitung mit voller Last (p bis 36 kg/cm^2) und Geschwindigkeit einlaufen müssen. Bei diesen Lagern bildet sich dann ein Spiegel; die Abkühlungsverhältnisse sind aber bei einem Eisenbahnnachslager auch besonders günstig.

44. Gleitlagerkonstruktionen.

44.1. Die Schmiermethoden.

Schrifttum.

Traag, Fr.: Fettschmiergeräte. VDI-Verlag 1938. — Schröter, H. v.: Die Schmierung von Gleitlagern mit konsistenten Fetten. Diss. T. H. 1933. — Karelitz, G. B.: The Lubrication of waste packed bearings. Trans. Amer. Soc. mec. Engr. 48 (1926) S. 1165/99 (Versuche über Steighöhe und Reibung). — An Investigation of the performance of wastepacked bearings. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. 50 (1928) APM. 50/1. — Müller, K.: Ölmengenmessungen an Ringschmierlagern. Versuchsfeld für Maschinenelemente der Techn. Hochschule Berlin, Heft 10 (1930). Verlag Oldenburg. — Karelitz, G. B.: Performance of Oil-ring bearings. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. 52 (1930) APM. 52/5. — Oil supply in self-contained bearings. L. 31.7, Bd. I S. 151/5. — Baudry, R. and L. M. Tichvinsky: Performance of oil rings. Mech. Engng. 59 (1937) S. 89/92. — Juhlin, G. A.: and R. Poole: End leakage of ring-lubricated bearing. General Discussion on Lubrication and Lubricants. The Institution of Mechanical Engineers, London 13.—15. Oct. 1937. Bd. I, S. 145/150.

Die Theorie schreibt nur vor, daß „genügend“ Öl ($G_1 = Uh^*/2$) an der Eintrittsstelle vorhanden sein muß; die Zufuhr soll auch selbsttätig erfolgen.

44.11. Für die Fettschmierung werden vielfach Staufferbüchsen (Abb. 44.1) verwendet, mit denen die Schmierung recht unregelmäßig und nur dann wirksam ist, wenn rechtzeitig, durch Nachdrehen des Deckels, etwas Fett herausgepreßt wird. Trotzdem die Schmiernuten einen Fettvorrat enthalten, schwanken die Reibungszahlen stark. Auch Staufferbüchsen mit Federbelastung sind nicht besser, da bei steigender Temperatur die ganze Fettmasse auf einmal herausgepreßt wird.

Fettpressen werden für Zentralschmierung mehrerer Gleitstellen (z. B. beim Laufkran) ver-

¹ Wolff, R.: Über die Schmierschicht in Gleitlagern. Forschungsheft Nr. 308. VDI 1928.

² ten Bosch: Flüssigkeitsreibung bei eintuschierten Lagern. Schweiz. Bauztg. 27. Mai 1933, S. 241.

wendet. Durch Schnecke und Schneckenrad mit Sperrklinke wird der Kolben in den Pumpenzylinder hineinbewegt. Die an jeder Gleitstelle erforderliche Fettmenge muß genau eingestellt werden können. Luftblasen beim Füllen der Fettpresse sind nicht immer zu vermeiden und geben dann Anlaß zu Unterbrechungen der Fettzuführung. Bedeutend besser ist die

Fettkammerschmierung (Abb. 44.2). Das Fett ruht mit einer breiten Fläche auf

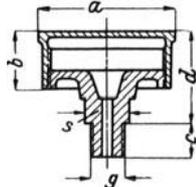


Abb. 44.1.

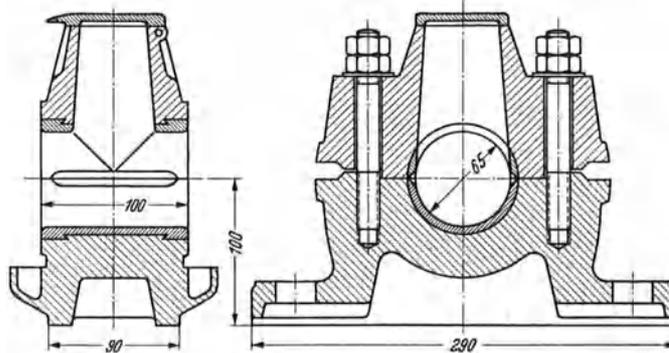


Abb. 44.2. Fettkammerschmierung.

der Welle; wenn der Schmelzpunkt richtig gewählt ist, ist diese Schmierung auch sparsam im Gebrauch. Es sind dabei viel höhere Belastungen und Gleitgeschwindigkeiten zulässig als bei der Staufferschmierung. Diese Art Fettschmierung ist besonders geeignet für aussetzenden Betrieb (z. B. Hebezeuge im Freien), da die Gleitstellen kühl bleiben und das Fett nicht schmilzt. Der Fettvorrat kann dann für lange Zeit ausreichen.

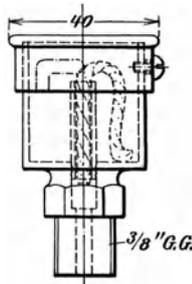


Abb. 44.3. Dochtschmierung.

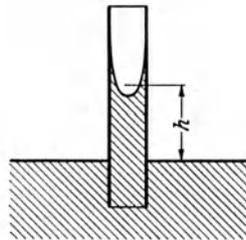


Abb. 44.4. Prinzip der Dochtschmierung.

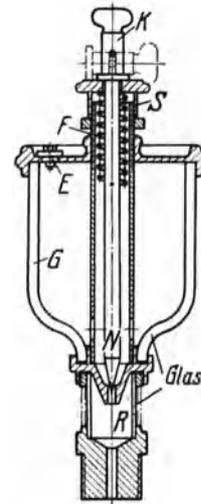


Abb. 44.6. Tropföler.

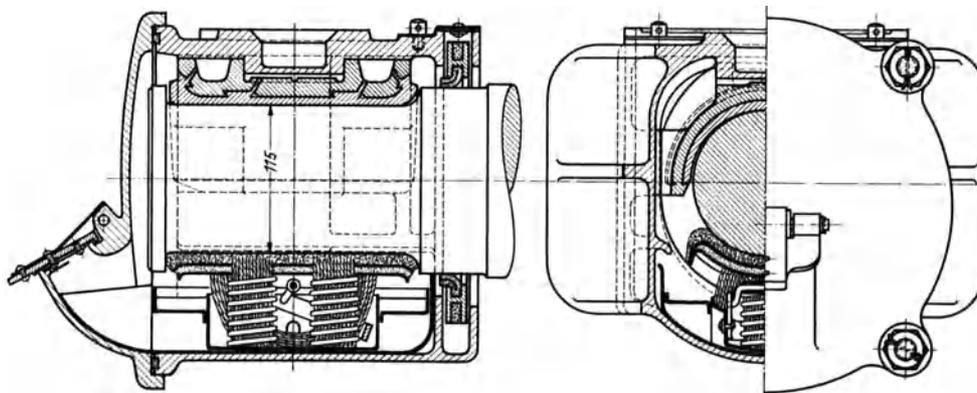


Abb. 44.5. Polsterschmierung.

Im allgemeinen bildet die Fettschmierung nur einen geringwertigen Ersatz für die Ölschmierung. Immerhin gibt es eine Reihe von Fällen, wo man ohne Fettschmierung nicht auskommt. Für Maschinen, die in staubhaltigen Räumen oder im Freien arbeiten, ist Fettschmierung günstig, weil das aus dem Lager austretende Fett einen Kragen bildet und Staub oder Regen den

Weg in das Lager verlegt. Aus dem gleichen Grunde wird Fettschmierung auch bei Wälzlagern oft bevorzugt. Bei Lagern mit sehr hohen Belastungen und sehr langsamer Drehbewegung ist Fettschmierung oft vorteilhaft. Auch Gleitstellen mit minimalem Schmiermittelbedarf können zweckmäßig mit Fett geschmiert werden. Schließlich kommen noch bewegte Gleitstellen für Fettschmierung in Frage, wenn die Zentrifugalwirkung die Ölschmierung verhindert.

44.12. Bei der Ölschmierung unterscheidet man zwei grundverschiedene Methoden:

a) Dem Lager wird nur so wenig Öl zugeführt, wie mit Rücksicht auf das Warmlaufen noch gerade zulässig ist. Gleitstellen, die durch eine gelegentliche Zuführung von wenigen Öltropfen mit der Kanne ausreichend geschmiert werden, erhalten keine eigentlichen Schmierapparate, sondern nur eine erweiterte Bohrung; diese sollte aber durch kleine Klappenöler gegen Eindringen von Staub geschützt werden. Sonst wird die Dochtschmierung (Abb. 44.3) verwendet; während des Stillstandes der Maschinen muß die Ölzufuhr (durch Herausziehen des Dochtes) abgestellt werden. Das verbrauchte Öl tritt an den Endflächen des Lagers aus. Beim Tropföler (Abb. 44.6) kann die Ölmenge eingestellt werden, indem die Spindel durch eine Schraube gehoben- oder gesenkt wird. Zur Unterbrechung der Schmierung wird der Knopf der Ventilspindel umgelegt und die Ventilöffnung geschlossen. Der Dochtschmierung verwandt ist die bei Eisenbahnachsen gebräuchliche Polsterschmierung (Abb. 44.5), bei der ein Ölkissen durch Federn gegen den Zapfen gedrückt wird. Diese Schmierung beruht auf der Wirkung der Oberflächenspannungen von Flüssigkeiten, wodurch diese in einer Kapillare aufsteigen können. Aus der Gleichgewichtsbedingung (Abb. 44.4) folgt:

$$\pi d \cdot \sigma \cdot \cos \varepsilon = \frac{\pi}{4} d^2 \Delta p,$$

woraus

$$\Delta p = h \gamma = 4 \sigma \cos \varepsilon / d. \quad (44.1)$$

Ein Docht besteht nun aus einer großen Anzahl solcher dünnen Kanäle.

Zahlentafel 44.1. Oberflächenspannungen.

	°C	kg/m		kg/m
Wasser	18	$\sigma = 0,0077$	$\cos \varepsilon = 0,738$	$\sigma \cos \varepsilon = 0,0057$
Olivenöl	15	$= 0,0036$	$= 0,883$	$= 0,0032$
Mineralöl	18	$= 0,0033$	$= 0,756$	$= 0,0025$
Petrol	10	$= 0,0030$	$= 0,85$	$= 0,0025$

b) Dem Lager wird Öl im Überfluß zugeführt: es schwimmt im Öl. Man trägt aber Sorge, daß kein Tropfen Öl aus dem Lager verloren geht (Spülschmierung). Die Schmierung erfolgt durch Ringe oder durch Pumpen. Der lose Ring wird durch die Reibung von der drehenden Welle mitgenommen (Abb. 44.13 bis 16), hebt das daran haftende Öl aus dem Ölbehälter und führt es der Welle zu. Die Ringe müssen genau rund sein und dürfen keine Vorsprünge haben (z. B. an den

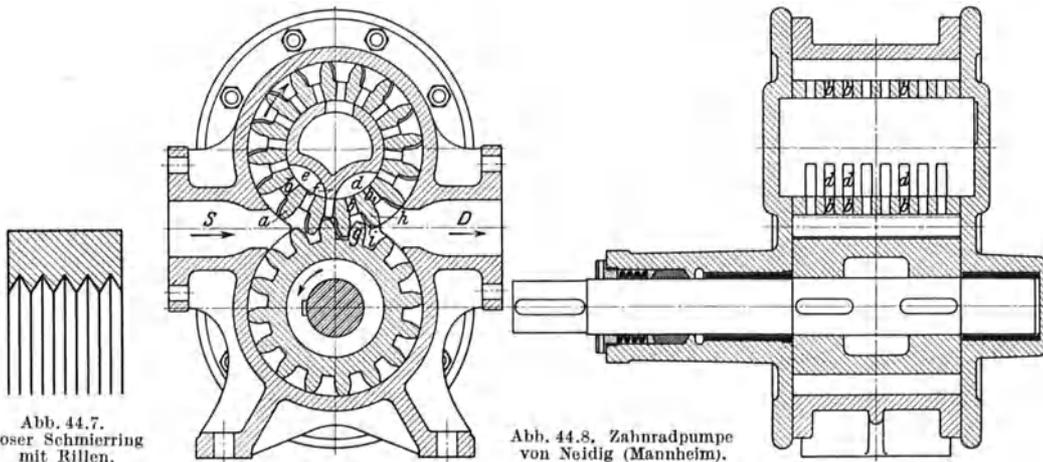


Abb. 44.7. Loser Schmierring mit Rillen.

Abb. 44.8. Zahnradpumpe von Neidig (Mannheim).

Verbindungsstellen), da sie sonst hängen bleiben. Bei kleinen Drehzahlen der Welle (im Gebiet der fast trockenen Reibung) haben Ring und Welle die gleiche Umfangsgeschwindigkeit. Bei zunehmender Drehzahl wird die Berührungsstelle zwischen Ring und Welle durch das mitgenommene Öl reichlich geschmiert, die Reibung nimmt ab und der Ring bleibt zurück. Die lose Schmierung ist auch nicht zu verwenden, wenn dauernd Erschütterungen auftreten, welche die Reibung aufheben, wie z. B. bei Eisenbahnfahrzeugen. Die Versuche von K. Müller zeigten zunächst, daß die vom losen Schmierring mitgenommene Ölmenge im Mittel etwa 12 mal so groß ist, als die an die Welle abgegebene Ölmenge. Alle Versuche zeigten aber, daß diese Ölmenge für die Schmie-

zung des Lagers ausreicht. Die dem Lager zugeführte Ölmenge hängt vom Gewicht des Ringes von der Breite und Eintauchtiefe und von der Zähigkeit des Öles ab; sie nimmt mit zunehmender Öltemperatur ab. Wenn der Schmiering innen mit schmalen und tiefen Rillen versehen wird (Abb. 44.7), kann die an das Lager abgegebene Ölmenge bedeutend erhöht werden. Ein Vorteil, die geförderte Ölmenge zu erhöhen, kann darin liegen, daß der Zapfen rascher gekühlt wird.

Der feste Ring (Abb. 44.17/20) ist durch Federn oder durch Stell-schraube mit der Welle verbunden, dreht sich zwangsläufig mit der Welle, hat deshalb unbedingte Sicherheit und fördert bedeutend mehr Öl, namentlich auch bei kleinen Drehzahlen. Die Laufflächen werden also, so lange die Welle sich dreht, selbsttätig geschmiert; mit dem Stillstand der Maschine hört auch die Schmierung auf.

Die Zahnrادpumpe (Abb. 44.8) ist äußerst einfach in ihrem Aufbau (billig) und arbeitet doch zuverlässig. Die Förderung erfolgt der Gehäusewand entlang durch Mitnahme von Öl in den Zahnücken. Die Berührung der Zahnräder an der Eingriffstelle bildet die Abdichtung zwischen Saug- und Druckraum. Der Hohlzapfen des oberen Zahnrades, in dessen Lücken sich Bohrungen *b* befinden, ist mit zwei Kammern *d* und *e* versehen. Diese Einrichtung bezweckt, dem zwischen den eingreifenden Zähnen befindlichen Öl den Weg zum Druck-, resp. Saugraum frei zu legen, da das inkompressible Öl sonst sehr starke Belastungen der Zapfen verursachen würde. Eine Schmierpumpe für hohe Drücke (Zylinderschmierung) zeigt Abb. 44.9. Meist sind mehrere Schmierstellen an einen Zentralapparat angeschlossen.

Die Voraussetzung der Theorie, daß immer genügend Öl an der Eintrittskante vorhanden sein muß, ist sowohl bei der Ring- als auch bei der Druckölschmierung sicher erfüllt. Ringschmierung ist für Einzel-, Drucköl für Zentralschmierung und für schwer belastete Lager zu verwenden, sobald die natürliche Abkühlung versagt. Die ganze Betriebssicherheit der Maschinen hängt von der Zuverlässigkeit der Schmierung ab. Abb. 44.10 zeigt schematisch die zweckmäßige Anordnung mit Ölfilter, Ölkühler, Mano-

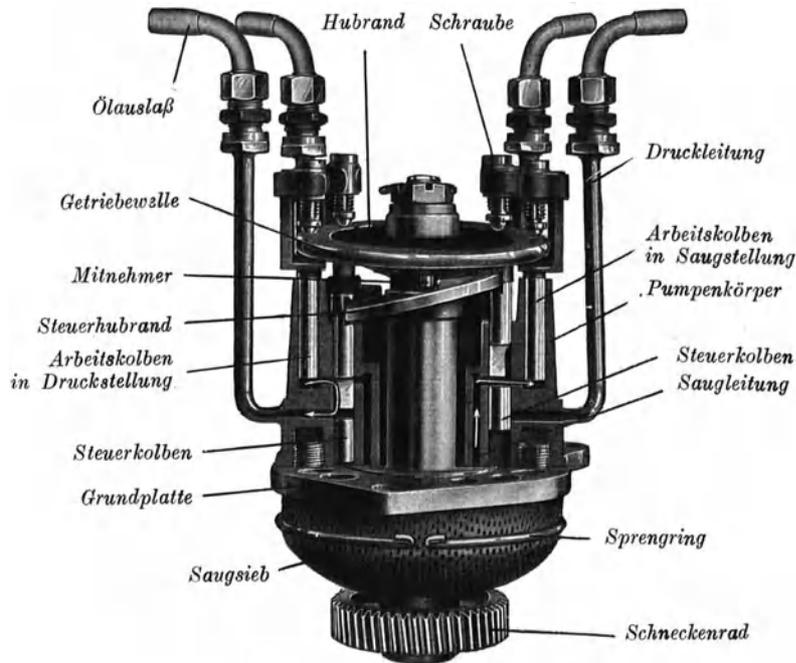


Abb. 44.9. Getriebe eines Bosch-Ölers mit zwei Pumpenkörpern im Schnitt. Durch Rechtsdrehen der Verstell-schraube wird der Kolbenhub und damit die Ölmenge verringert.

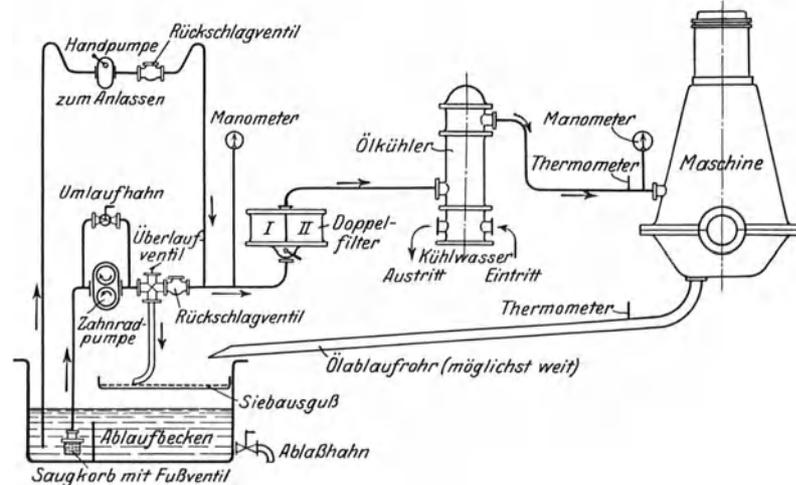


Abb. 44.10. Schematische Darstellung einer Druckölschmierung mit Ölkühler (aus Falz).

meter, Thermometer usw. Für große Maschinen ist auch eine Handpumpe vorzusehen, um die Schmierung auch bei der Inbetriebsetzung zu sichern.

44.13. Schmiernuten. Die Theorie der Flüssigkeitsreibung gibt auch klaren Aufschluß über die Unzweckmäßigkeit von Schmiernuten. Werden zwei Punkte der Gleitflächen mit verschiedenen Drücken durch eine Nute verbunden, so tritt ein Druckausgleich ein, d. h. der Druck in der Ölschicht wird kleiner und das Lager weniger tragfähig. Aber auch die Verbindung zweier Punkte gleichen Öldruckes, also Schmiernuten senkrecht zur Bewegungsrichtung, sind schädlich da das seitliche Abfließen dadurch erleichtert wird. Die eigentliche Tragfläche soll demnach keine Schmiernuten enthalten, da das Ölband dadurch unterbrochen oder geschwächt wird.

Das Öl muß grundsätzlich an einer Stelle zugeführt werden, wo kein Druck herrscht. Dort sind Quernuten zur Verteilung des Öles über die ganze Breite zweckmäßig.

44.2. Formgebung der Lager.

Die einfachste und billigste Ausführung ist das einteilige Lager (Abb. 44.11 u. 13). Bei allen Ringschmierlagern muß darauf geachtet werden, daß kein Tropfen Öl aus dem Lager entweichen kann. Darum sollte man keine Ölablaßschrauben vorsehen, die, wenn sie nicht sehr sorgfältig ausgeführt werden, fast immer tropfen. Dagegen sind Öffnungen zur Kontrolle des Ölstandes im Lager immer notwendig. Durch diese Öffnungen kann das Lager mittels einer Pumpe mit Öl gefüllt und auch entleert werden. Damit kein Öl der Welle entlang laufen kann, sind an den Enden der Gleitflächen scharfe Abstreikkanten anzuordnen.

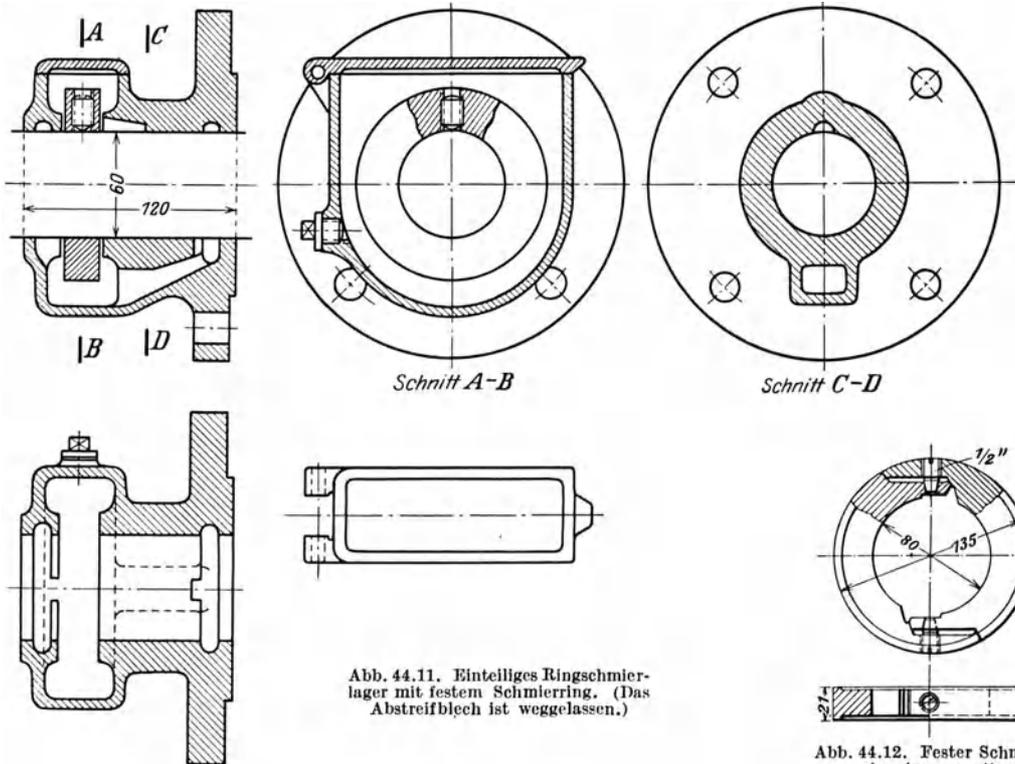


Abb. 44.11. Einteiliges Ringschmierlager mit festem Schmierring. (Das Abstreifblech ist weggelassen.)

Abb. 44.12. Fester Schmierring (gesprengt).

Bei der Formgebung ist darauf zu achten, daß die Kerne möglichst einfache Formen erhalten und nirgends schwächer als etwa 8 mm werden. Die Gleitfläche soll mit Rücksicht auf die Wärmeableitung durch kräftige Querschnitte mit der kühlenden Oberfläche verbunden werden.

Um nach der Abnutzung nicht das ganze Lager erneuern zu müssen, wird eine auswechselbare Bronzebüchse als Lauffläche eingebaut (Abb. 44.13). Die Büchse wird mit Preßsitz eingepaßt oder durch Schrauben gegen Verdrehung gesichert.

Einteilige Lager sind nur dann brauchbar, wenn die Welle oder die Lager von der Seite angebracht werden können. Das ist der Fall bei kleineren Maschinen, die nur zwei Lager haben

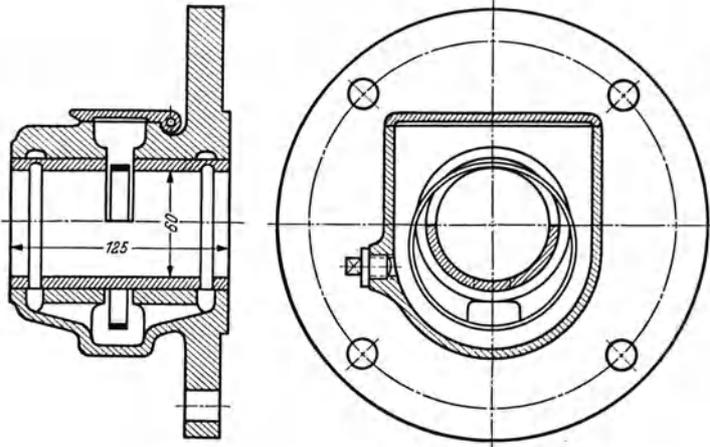


Abb. 44.13. Einteiliges Ringschmierlager mit losem Schmierring und Bronzebüchse.

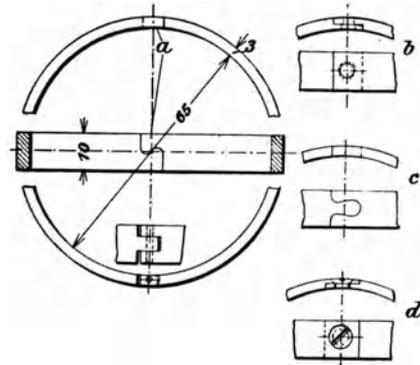


Abb. 44.14. Loser Schmierring, zweiteilig mit Verbindungen.

(Elektromotoren, Pumpen, Ventilatoren usw.). Andernfalls müssen geteilte Lager verwendet werden, die in der Herstellung und in der Bearbeitung natürlich teurer sind. Die beiden Lagerhälften werden durch eine Paßkante in der gegenseitigen Lage genau festgehalten. Um zu verhindern, daß das Öl der Trennfläche entlang laufen kann, darf die Lauffläche an keiner Stelle direkt mit dem Außenraum in Verbindung stehen, sondern muß durch Hohlräume oder durch eine hochstehende Kante davon getrennt bleiben. Die Abbildungen 44.15 bis 21 zeigen einige gute Ausführungsformen.

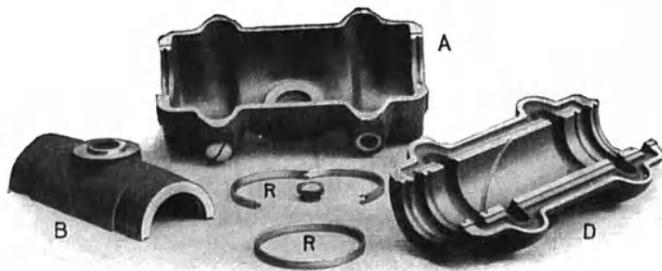
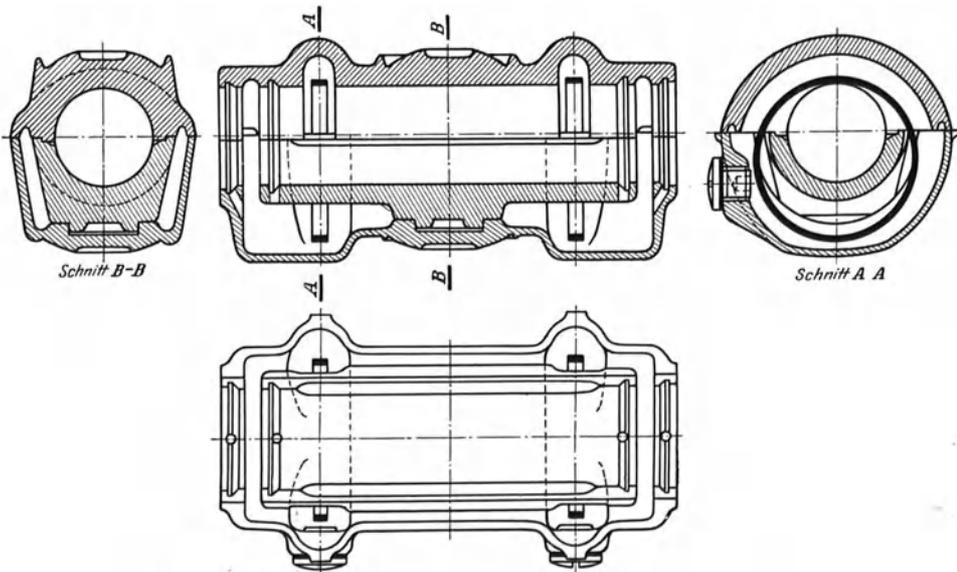


Abb. 44.15. Sellers-Lager. Bauart der von Rollschlen Eisenwerke Clus (Schweiz).
A = Ölbehälter. B = untere und D = obere Lagerschale.

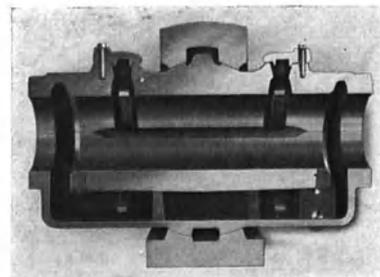


Abb. 44.16. Sellers-Lager (Bauart Bamag).

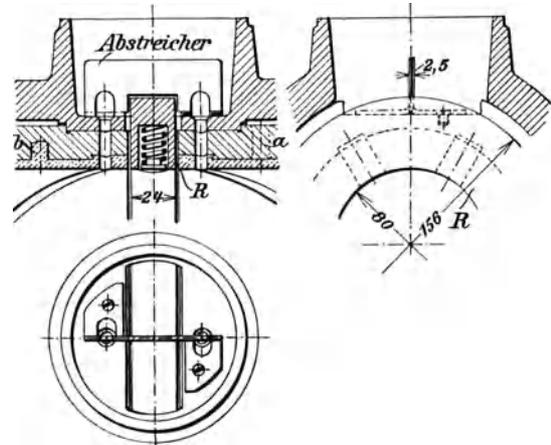
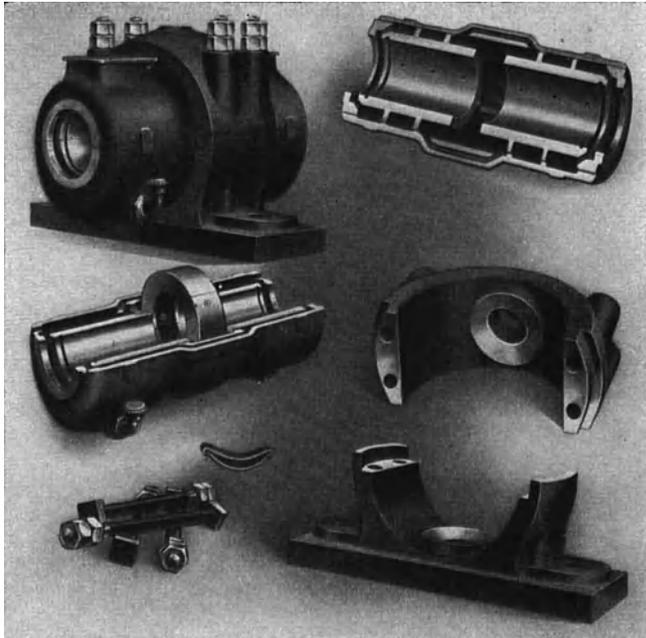


Abb. 44.18. Fester Schmiering mit Abstreicher (nach Jellinek).

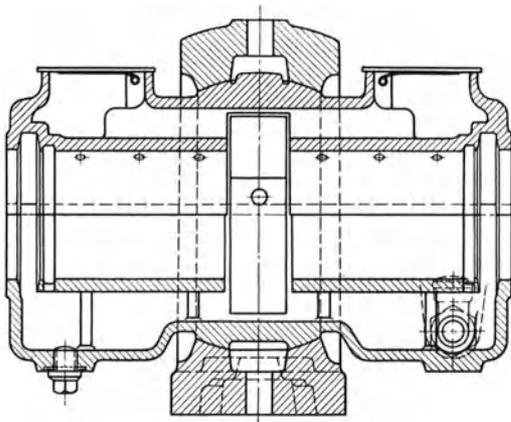


Abb. 44.17. Sellers-Ringschmierlager mit festem Schmiering (Bau Eisenwerk Wülfel).



Abb. 44.19. Festes Stehlager (Bauart von Roll, Clus). Verbindungsschrauben durchgehend, da durch die höherliegende Trennfläche gehend.

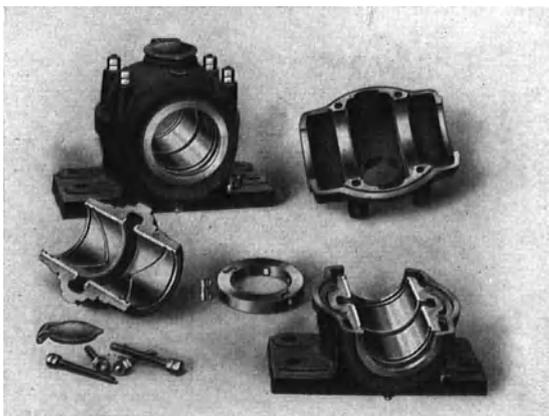


Abb. 44.20. Stiftschrauben als Verbindungsschrauben.

Festes Stehlager (Bauart Wülfel).

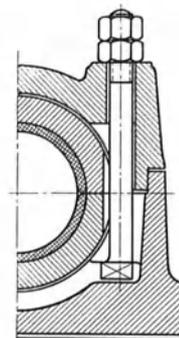


Abb. 44.21. Im Ölraum endende Verbindungsschrauben.

Die Lagerschalen werden entweder fest angeordnet, Abb. 44.19 bis 22, oder sind in einer Kugelkalotte beweglich gelagert (Sellers-Lager), Abb. 43.15 bis 17.

Abb. 43.15 und 16 zeigen zwei verschiedene Ausführungsformen der Sellers-Lagerschalen. In Abb. 15 sind untere Lagerschale und Ölbehälter getrennt und passen durch eine bearbeitete Ringfläche aufeinander. Man erreicht damit, daß die Schalen ohn Kern zu formen sind und keine Verunreinigung des Schmieröles durch zurückbleibenden Kernsand möglich ist. Dagegen ist die direkte Wärmeableitung von der Lauffläche nach außen etwas ungünstiger, was aber für schwach belastete Transmissionslager nicht von Bedeutung ist.

Wenn beim festen Stehlager die Löcher für die Verbindungsschrauben im erhöhten Teil der Trennfläche liegen, dann ist keine Gefahr vorhanden, daß Öl den Schrauben entlang verloren geht. Es können dann durchgehende Schrauben verwendet werden (Abb. 44.19). Liegen die Löcher in der tieferliegenden Trennfläche, dann dürfen sie nicht mit dem Außenraum in Verbindung stehen (Abb. 44.20 Stiftschrauben, und Abb. 44.21, die Öffnungen enden im Ölraum).

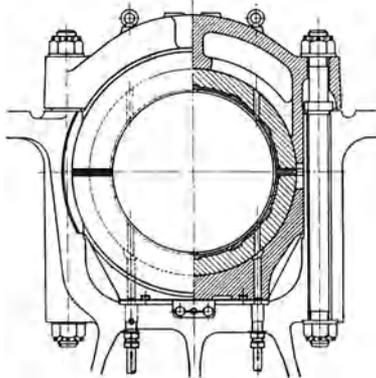


Abb. 44.22. Hauptlager eines Dieselmotors mit Druckölschmierung. Gebr. Sulzer, Winterthur.

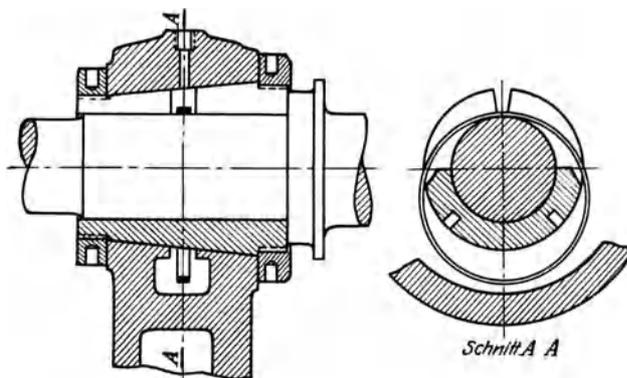


Abb. 44.23. Nachstellbares Drehbanklager. Das Wellenmittel bleibt dabei in gleicher Höhe.

Abb. 44.24. Peyinghaus-Eisenbahnachslager. 1 Gehäuse mit Deckel; 2 Ölschleuder; 3 Lagerschale; 4 Einstellbare Unterschale; 5 Ölspritzring; 6 Staubdichtung mit Kappe. Die stirnseitig am Achsschenkel befestigte zweiarmlige Schleuder fördert das Öl (je nach der Fahrgeschwindigkeit) durch Tropfoder durch Schleuderwirkung einem Vorsprung der Lagerschale zu. Von dort fließt es durch die beidseitigen Tropfkanten der freien Oberfläche und wird vom Zapfen in den tragenden Teil der Lagerschale mitgenommen.

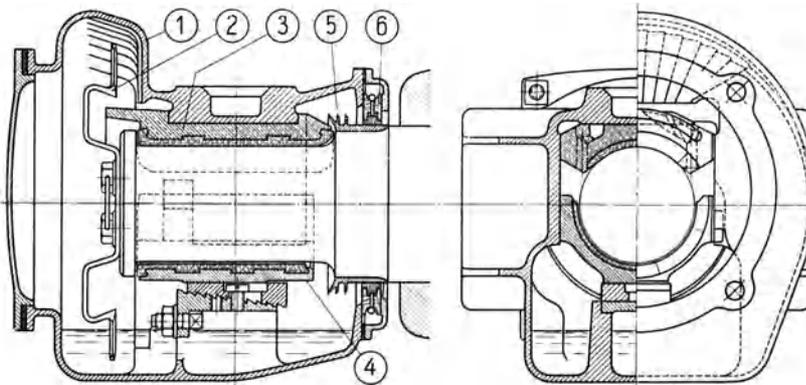
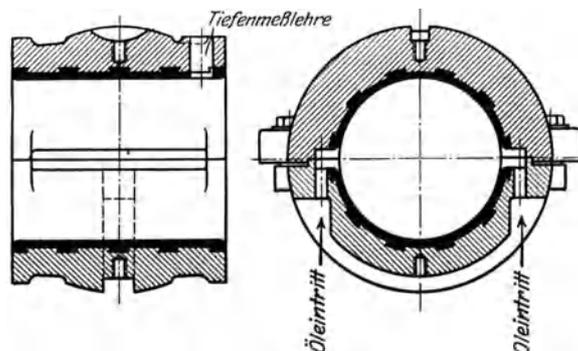


Abb. 44.25. Dampfturbinenlager der A.E.G. Berlin. Bewegliche Lagerschale (ovales Spiel), kurze Lagerbreite, keine Schmiernuten. Das zur Schmierung und Kühlung dienende Drucköl tritt zu beiden Seiten der Welle durch die untere Lagerschale in die Verteiltaschen (im Lagerstoß) ein und entweicht nach vollzogener Kühl- und Schmierwirkung durch den nicht belastete Teil des Lager-spieles in axialer Richtung an beiden Lagerenden.



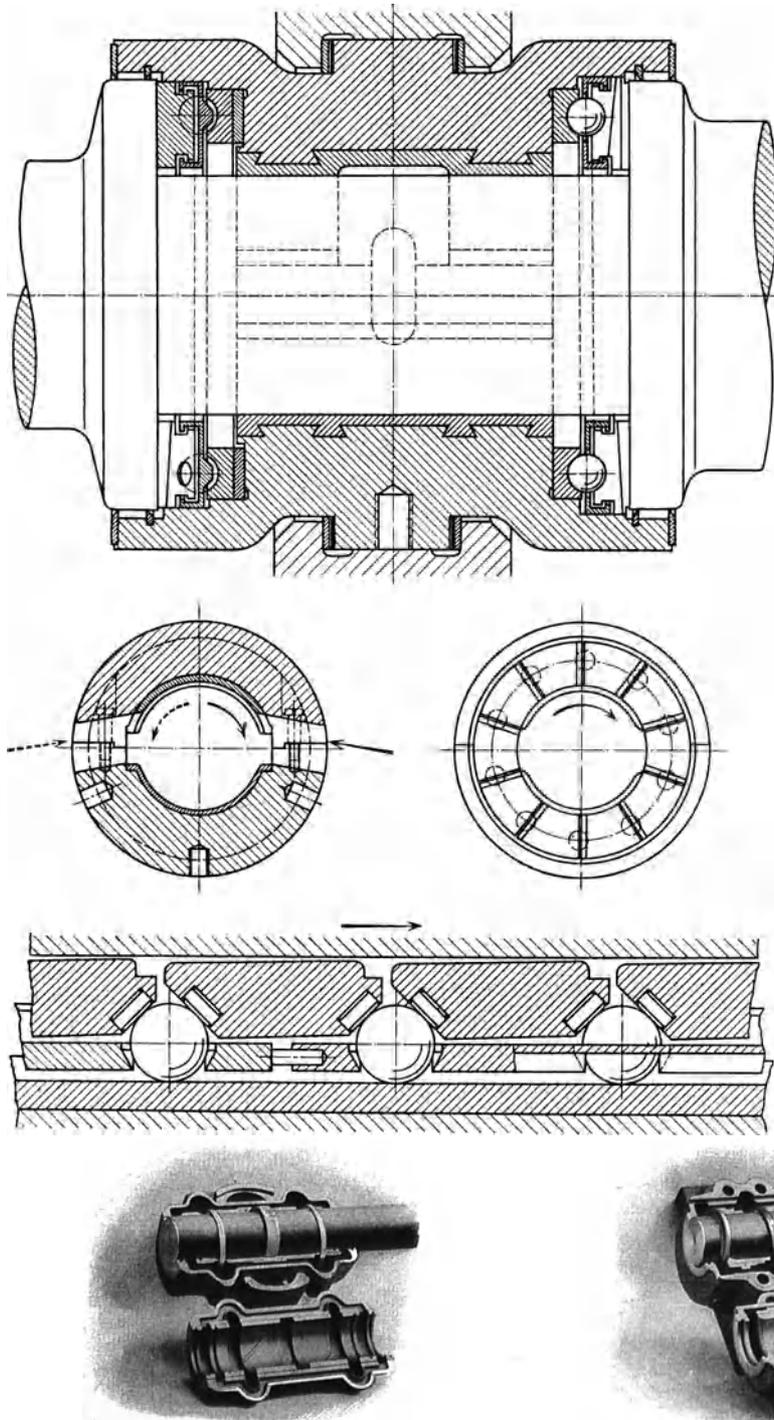


Abb. 44.26. Längs- und Querschnitt, Aufsicht auf die Segmenttragfläche und Segmentstützung.

Die Drucksegmente sind an beiden Enden des Lagerkörpers angeordnet und sollten gleichmäßig tragen. Die einzelnen Segmente (aus Bronze, evtl. mit Weißmetall ausgegossen) stützen sich deshalb mit ihren Schrägkanten auf Stahlkugeln. Steigt z. B. die Belastung irgendeines Segmentes, so wird die (die Hinterkante stützende) Kugel etwas weiter gedrängt, wodurch die Vorderkante des nächsten Segmentes gleichzeitiggehoben wird. Dadurch wird die Keilwirkung vermindert und die Tragfähigkeit erhöht. Ein zweiteiliger Kugelkäfig sorgt für die richtige Verteilung der Kugeln.

Das Öl tritt in der Mitte des Querlagers durch einen breiten Kanal ein, teilt sich in Schmier- und Kühllöl und fließt an den Enden des Lagerkörpers den Längslagern zu.

Die Lagerschalen liegen nur in der Mitte auf einer schmalen Fläche auf und können sich leicht der Welle anpassen.

Abb. 44.27. Sellers-Lager mit einem Bund (von Roll, Clus).

Abb. 44.28. Festes Bundlager (von Roll, Clus).

Sämtliche Wellen müssen gegen axiale Verschiebung gesichert werden. Wenn ein fester Schmiering vorhanden ist, so kann dieser gleichzeitig als Stellring dienen (Abb. 43.11 und 17). Beim losen Schmiering werden Wellenbunde verwendet, die warm aufgezogen werden. Einen Bund der in einer eingefrästen Nute in der Mitte der Lagerschale läuft, erhalten Sellers-Lager

(Abb. 44.27) zwei Bunde an den Stirnflächen der Lagerschalen erhalten die Lager mit festen Schalen (Abb. 44.28).

Zur Unterstützung des Lagers dienen Sohlplatten, Abb. 44.29. Bis 90 mm Lager ohne seitliche Nasen, da die Erfahrung gezeigt hat, daß die Verschraubung zur Sicherung gegen Querverschiebung ausreicht.

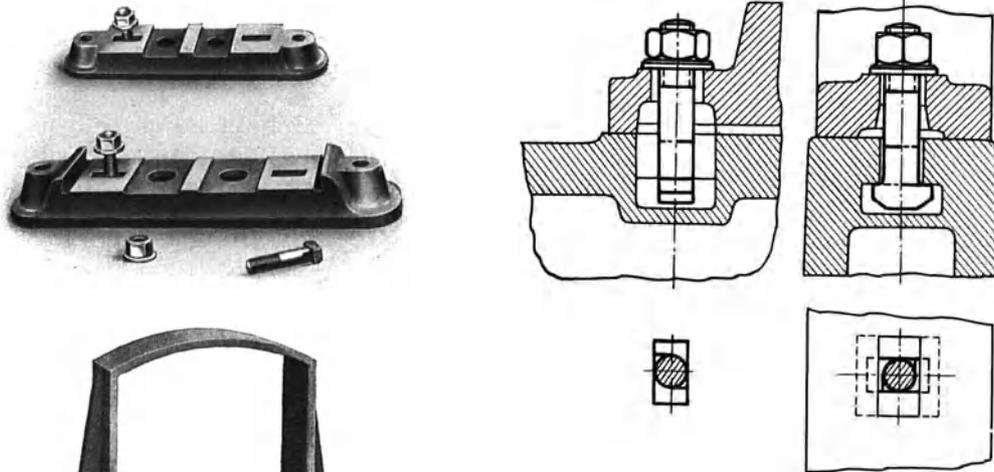
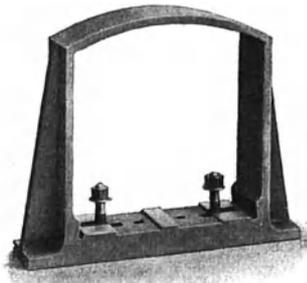


Abb. 44.30. Normale Fußschraube.

Normale Fußschrauben (Hammerschrauben mit Nasen) nach Abb. 44.30 lassen sich nach einer Drehung um 90° in Aussparungen des Lagerkörpers hineinziehen, so daß die Lager ohne Hochheben der Welle seitlich abgezogen werden können.

Abb. 44.31. Mauerkasten für die Durchführung einer Welle durch die Wand (von Roll, Clus).



Hängelager für Deckentransmissionen sind auch in umgekehrter Anordnung auf Fußboden verwendbar. Die

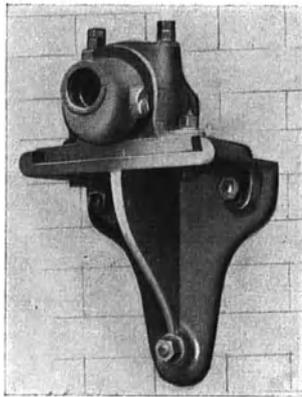


Abb. 44.32. Lagerbock.



Abb. 44.33. Hängelager (von Roll).

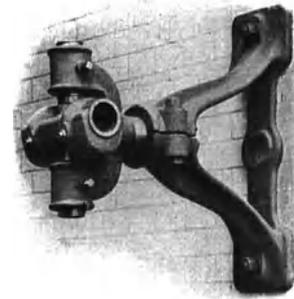


Abb. 44.34. Wandgabelager in zwei Richtungen verstellbar (von Roll, Clus).

normalen Ausladungen sind auf 300, 400, 500, 600 und 700 mm beschränkt. Durch Verstellen der Lagerschalen mittels Gewindespindeln können Unebenheiten der Decke ausgeglichen werden. Der Bügel ist als stark gekrümmter Träger nach den Angaben in Abschn. 12.22 zu berechnen.

45. Berechnung der Gleitlager.

Gleitlager sind so zu berechnen, daß

1. der Zapfen keine unzulässige Beanspruchung und Formänderung erfährt,
2. kleine Reibungszahlen erreicht werden,
3. die Flächenpressung, insbesondere beim An- und Auslauf nicht zu hoch ist,

4. die durch Reibung erzeugte Wärme so klein wie möglich wird,
5. die kühlende Oberfläche genügend groß und
6. die kleinste Schmierschichtdicke h_0 nicht zu klein wird, mit Rücksicht auf die Betriebssicherheit und Wirtschaftlichkeit.

Eine unzulässige Formänderung kann vermieden und gleichzeitig das gleichmäßige Aufliegen auf der ganzen Zapfenbreite erreicht werden, durch kurze und einstellbare Lagerschalen ($b \leq d$). Die Biegebeanspruchung folgt dann aus der Gleichung (Abb. 45.1):

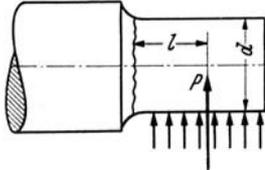


Abb. 45.1.

$$P \cdot l = 0,1 d^3 \sigma_b. \quad (45.1)$$

Setzt man σ_b mit Rücksicht auf die Kerbwirkung zu nur 600 kg/cm^2 und $l = d$ bis $1,5d$ (je nach der Lagerkonstruktion), so wird

$$P = (40 \text{ bis } 60) d^2. \quad (45.2)$$

Um kleine Reibungszahlen, besonders bei großen Gleitgeschwindigkeiten zu erhalten, sollte P_1 groß sein. Mit $U = \omega \cdot r$ und $P_1 = p \cdot d$ lautet Gl. (42.96):

$$\mu = K \sqrt{f_b/2} \sqrt{\eta \omega / p}. \quad (45.3)$$

Die mittlere Flächenpressung $p = P/b \cdot d$ darf aber mit Rücksicht auf die trockene Reibung beim Anlaufen und vor dem Stillstand nicht beliebig hoch gewählt werden. Der zulässige Wert hängt von der Glätte der Gleitflächen und von der Genauigkeit ab mit der die Bedingung einer gleichmäßigen Auflage auf der ganzen Zapfenbreite, erfüllt ist. Er muß um so kleiner gewählt werden, je länger und öfter der Zapfen im Gebiet der Mischreibung läuft, und liegt erfahrungsgemäß etwa zwischen 6 und 50 at (für Großgüterwagen).

Je größer p gewählt wird, um so leichter tritt Anfressen, Aufrauen und Abnutzung der Gleitflächen auf. Die beiden Anforderungen „kleine Reibzahlen“ und „große Betriebssicherheit beim An- und Auslauf“ sind demnach nicht gleichzeitig zu erfüllen. Im allgemeinen ist höchste Betriebssicherheit (p klein) vorzuziehen gegenüber einer kleineren Reibzahl.

Die größte Flächenpressung p_{\max} sollte unterhalb der Elastizitätsgrenze des Lagerwerkstoffes liegen. Bei direkter Berührung der zylindrischen Gleitflächen kann p_{\max} aus der Hertzischen Gleichung:

$$p_{\max} = 0,418 \sqrt{P_1 E / R} \quad (51.31)$$

berechnet werden. In dieser Gleichung ist $\frac{1}{R} = 1/R_1 \pm 1/R_2$, wobei R_1 und R_2 die Krümmungsradien der Berührungsflächen sind. Bei einem Zapfenlager mit Lagerspiel ist also

$$\frac{1}{R} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} = \frac{\Delta r}{r^2} = \psi / r. \quad (45.4)$$

Der mittlere Spannungsmodul E muß aus der Beziehung

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)$$

berechnet werden. Für eine Lagerschale aus Bronze (oder Gußeisen) kann $E_1 = 750000 \text{ kg/cm}^2$ und für die Stahlwelle $E_2 = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ eingesetzt werden, so daß $E = 1,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ wird. Führt man $P_1 = p \cdot d = p \cdot 2r$ ein, so wird

$$p_{\max} = 0,418 \sqrt{\frac{p \cdot 2r \cdot E \cdot \psi}{r}} = 620 \sqrt{p \cdot \psi}. \quad (45.5)$$

Für Weißmetall mit $E_1 = 600000 \text{ kg/cm}^2$ ist:

$$p_{\max} = 530 \sqrt{p \cdot \psi}. \quad (45.6)$$

Aus diesen Gleichungen folgt, daß p_{\max} um so kleiner wird, je kleiner das Lagerspiel ψ ist; für $\psi = 0$ wäre $p_{\max} = 0$, unabhängig von p ! Die Hertzische Gleichung aus welcher die Gl. (5) und (6) abgeleitet wurden, setzt voraus, daß die Druckfläche klein und eben ist, was bei kleinem Lagerspiel nicht mehr zutrifft. Setzt man als äußerste Grenze für die Gültigkeit der Hertzischen Gleichung $a < r/2$, so folgt aus Gl. (52.28) mit Gl. (4):

$$2a = 3,05 \sqrt{P_1 \cdot R / E} = 4,3 r \sqrt{\frac{p}{\psi E}}$$

oder

$$p < E \cdot \psi / 18,5$$

und mit $E = 10^6 \text{ kg/cm}^2$ (Mittelwert zwischen Bronze und Weißmetallager),

$$p < 0,55 \psi \cdot 10^5. \quad (45.7)$$

Für die empfohlenen Laufsitze (S. 15)

$H7/g6$	$H7/f7$	$H7/e8$	$H7/d8$	$H7/c8$	$H7/b8$	$H7/a8$
ist im Durchmesserbereich 50/80 mm, das mittlere Lagerspiel						
0,5	1	1,5	2	3	4	6 ^{0/00}
so daß die Grenze der Gültigkeit der Hertzschen Gleichung etwa bei						
$p < 25$	50	75	100	150	200	300 at
liegt. Soll bei Weißmetall die größte Flächenpressung von 100 kg/cm ² nicht überschritten werden, so muß nach Gl. (5):						
$p < -$	40	27	20	16,5	10	7 at
sein. Für Bronzeschalen werden die zulässige Flächenpressungen etwa doppelt so groß.						

Die mittlere Flächenpressung darf zweifellos um so höher gewählt werden, je kleiner das Lagerspiel ist; sie muß aber um so kleiner sein, je länger und öfter das Lager im Gebiet der halbflüssigen Reibung läuft. Die Eisenbahnachslager haben in den eintuschierten Lagerschalen ein sehr kleines Lagerspiel und eine sehr gute Kühlung; nur deshalb sind dort die hohen Pressungen zulässig. Da die tatsächlich auftretenden Flächenpressungen infolge der Unebenheiten der Gleitflächen an einzelnen Stellen noch viel größer werden können, als die Rechnung ergibt, scheint es empfehlenswert unter der berechneten Grenze zu bleiben.

Bei Großkraftanlagen mit Dampf- oder Wasserturbinenantrieb, die nur selten stillgelegt werden, können höhere Flächenpressungen zugelassen werden, wenn besondere Ölpumpen vorgesehen werden, die beim Anlaufen und vor dem Stillstand in Betrieb gesetzt werden, so daß trockene Reibung sicher vermieden wird.

Setzt man wieder $b = d$, so wird mit Rücksicht auf die Flächenpressung

$$P = (6 \text{ bis } 100) d^2 \text{ cm} \quad (45.8)$$

je nach Werkstoff, Gleitgeschwindigkeit, Lagerspiel und Glätte der Oberfläche. Aus dem Vergleich mit Gl. (2) geht hervor, daß die Bedingung genügender Festigkeit fast immer außer acht gelassen werden kann.

Die durch Reibung erzeugte Wärme

$$Q = 8,45 \mu P \cdot U \text{ kcal/h} \quad (45.9)$$

wird mit μ aus Gl. (42.10), worin $K = 2,7$ plus 10% Zuschlag (vgl. Abschn. 42.6) = Konstant ist für Lagerkennzahlen größer als etwa 4:

$$Q = 8,45 \cdot 1,1 \cdot 2,7 U \sqrt{f_b} \cdot \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}} \cdot P.$$

Für $b/a = 1$ ist $\sqrt{f_b} = 1,5$. Setzt man $U = \omega d_m/2$ und $P = p \cdot d^2 = P_1 \cdot d$ ein:

$$Q = 13,5 d_m^2 \sqrt{\eta \omega^3} \sqrt{P} \text{ kcal/h} \quad (45.10)$$

oder

$$Q/d_m^2 = 13,5 d_{cm} \sqrt{\eta \omega^3 p_{at}} \text{ kcal/m}^2, \text{ h} . \quad (45.11)$$

Da die Drehzahl n (resp. ω) und die Lagerbelastung $P = p \cdot d^2$ vorgeschrieben sind und η bei der Betriebstemperatur des Lagers nur in relativ engen Grenzen veränderlich ist (vgl. Abb. 42.3), kann die erzeugte Wärme nur durch Verwendung von kleinen Zapfendurchmesser d vermindert werden. Die Reibzahl

$$\mu = \frac{1,1 \cdot 2,7 \cdot 1,5}{\sqrt{2}} \sqrt{\eta \omega/p} = 3,15 \sqrt{\eta \omega/p} \quad (45.12)$$

ist bekannt, sobald η und p gewählt sind.

Die vom Lagerkörper abgegebene Wärme hängt hauptsächlich von der kühlenden Oberfläche ab, die für ähnliche Lagerkonstruktionen proportional mit d^2 gesetzt werden kann. Der Proportionalitätsfaktor X hängt von der Lagerkonstruktion ab und liegt etwa zwischen 10 (für leichte) und 24 (für schwere) Ausführungen.

Aus dem Newtonschen Abkühlungsgesetz folgt dann mit $\alpha = 19 \text{ kcal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}$ und $\Delta \vartheta = 30^\circ\text{C}$

$$Q = \alpha \cdot \Delta \vartheta \cdot \text{Oberfläche} = (7000 \div 14000) d_m^2 \text{ kcal/h}$$

oder

$$Q/d_m^2 = 7000 \text{ bis } 14000 \text{ kcal/m}^2, \text{ h} . \quad (45.13)$$

Da im Beharrungszustand die erzeugte gleich der abgegebenen Wärme ist, folgt aus der Gleichsetzung von (10) und (13) die zulässige Lagerbelastung $P = p \cdot d^2$ bei den verschiedenen Werten

von $\omega \sqrt[3]{\eta}$ (Abb. 45.2). Nach der Wahl einer zulässigen Flächenpressung p ist der Zapfendurchmesser d bei einer bekannten Lagerkonstruktion durch diese Abbildung eindeutig festgelegt.

Schließlich muß noch die Bedingung erfüllt werden, daß die kleinste Schmierschichtdicke h_0 nicht zu klein werden darf. Die Voraussetzung der Berechnung $K = \text{Konstant}$, bedingt Lagerkennzahlen größer als 4 und nach Abb. 42.24 Werte von $h_0/\Delta r$ kleiner als 0,5. Aus dieser Abbildung folgt weiter, daß $h_0/\Delta r$ mit zunehmender Lagerkennzahl abnimmt. Um große Werte von $h_0/\Delta r$ zu erhalten, sollte deshalb

$$\Phi = \frac{2p\psi^2}{\eta\omega} \cdot f_b = 4 \tag{45.14}$$

gewählt werden. Aus dieser Beziehung ist das relative Lagerspiel ψ eindeutig bestimmt, da ω vorgeschrieben und η und p schon gewählt sind.

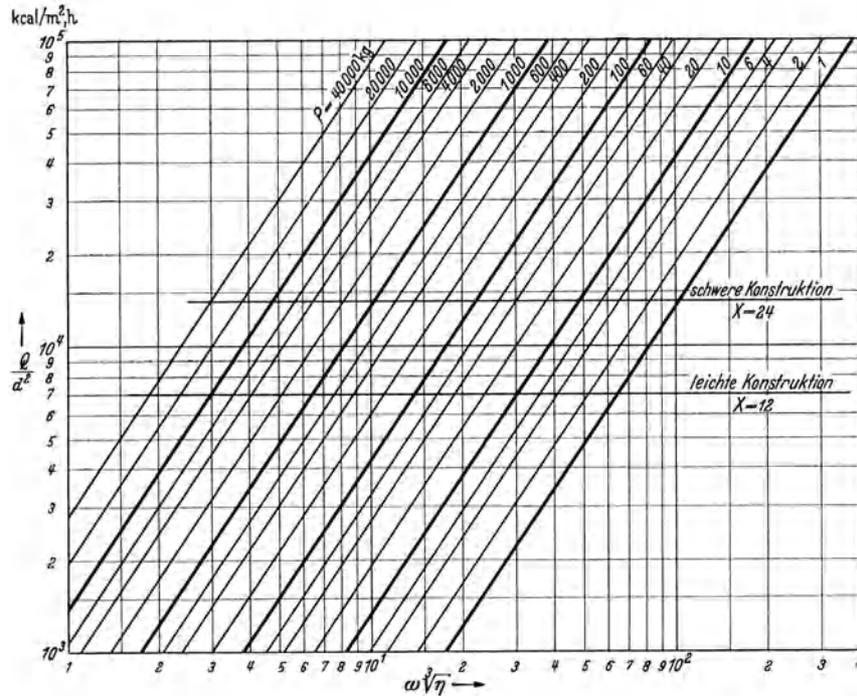


Abb. 45.2. Zur Berechnung der Tragfähigkeit von Gleitlagern.

Da die Reibungszahlen für Kennzahlen kleiner als 2 rasch steigen, ist dieses Gebiet bei der praktischen Ausführung zu vermeiden. Für Lagerkennzahlen größer als 400 wird die kleinste Ölschichtdicke h_0 sehr klein ($h_0/\Delta r < 0,05$), so daß Zapfen und Lagerschale äußerst glatte Oberflächen erhalten müssen, um halbflüssige Reibung zu vermeiden. Dem Konstrukteur stehen dazu folgende Hilfsmittel zur Verfügung: Zapfen härten und schleifen¹ oder durch Oberflächendrücken glätten, Einlaufenlassen mit kolloidalem Graphit (Kollag, Oildag). Die guten Gleiteigenschaften der Caro-Bronzerohr-Lager beruhen vor allem auf der sorgfältigen Oberflächenbearbeitung.

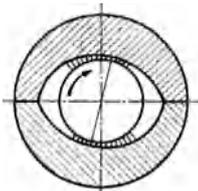


Abb. 45.3. Stark vergrößerte Spaltform für raschlaufende und schwachbelastete Zapfen.

Das Lagerspiel muß oft auch nach anderen Gesichtspunkten gewählt werden. Bei einer Werkzeugmaschine z. B. muß mit Rücksicht auf die Genauigkeit das Lagerspiel sehr klein sein, etwa 0,01 bis 0,02 mm. Bei der Montage von elektrischen Maschinen wird der Luftspalt zwischen Stator und Rotor meist so eingestellt, daß Stator und Rotor in Ruhe genau konzentrisch sind. Da die Welle sich vom Stillstand bis zur Betriebsdrehzahl relativ zur Lagerschale bewegt, wird der Luftspalt ungleich dick und beeinflußt das magnetische Feld. Die Verlagerung muß deshalb klein sein, d. h. die Lagerkennzahl Φ groß.

Für sehr rasch laufende und schwach belastete Zapfen (z. B. bei Dampfturbinen) gibt Gl. (14) ein sehr großes Lagerspiel. Infolge der hohen Drehzahl treten durch die nicht ausbalancierten

¹ L ä p p e n ist ein Feinstschleifen von Hand oder Maschine zur Erzeugung höchster Oberflächengüte geometrischer Form und Abmessung (Honen = Grobläppen).

Massen, umlaufende Kräfte auf, die mit U^2 zunehmen und zu Schwingungen des Zapfens im großen Lagerspiel führen können. Solche Lager werden zweckmäßig mit einer Beilage in der Fuge geschliffen jedoch ohne Beilage eingebaut; das Spiel in senkrechter Richtung ist daher kleiner als in der horizontalen (Abb. 45.3). Bei ausreichender Schmierung bilden sich dann sowohl in der Unter- als in der Oberschale eine tragfähige Ölschicht. Der Druck in der Oberschale stabilisiert die Wellenlage, erhöht aber auch die Reibung.

Die Berechnung geht von der Voraussetzung aus, daß die Lagerbelastung nach Größe und Richtung unverändert bleibt. Diese Voraussetzung ist bei den rotierenden Maschinen (Dampf- und Wasserturbinen, elektrische Maschinen, Gebläse, Pumpen, Kompressoren usw.) durchaus erfüllt. Bei den Kurbelmaschinen (Abschn. 8) dagegen muß mit der periodischen Änderung der Lagerdrücke sich auch die Lage des Zapfens und die Größe der Reibungszahl periodisch ändern. Solange eine Umkehrung der Kraftrichtung vermieden wird, kann man für die Erwärmung des Lagers mit dem zeitlichen Mittelwert der Belastung rechnen. Setzt man $p_m = \varphi p_{max}$, so können für Überschlagsrechnungen folgende Werte von φ gewählt werden:

- $\varphi = 1$ für doppelwirkende Flüssigkeitspumpen,
- $\varphi = 0,5$ für einfach wirkende Flüssigkeitspumpen,
- $\varphi = 0,15$ bis $0,2$ für einfach wirkende Viertaktmaschinen,
- $\varphi = 0,2$ bis $0,35$ für doppelwirkende Viertaktmaschinen,
- $\varphi = 0,3$ bis $0,7$ für doppelwirkende Dampfmaschinen, je nach Füllung.

46. Weitere Reibungs- und Schmierungsprobleme.

46.1. Teilschmierung (Grenzschmierung).

Schrifttum.

Woog, P.: Contribution à l'étude du graissage. Paris 1925, Delagrave, eine vollständige Zusammenstellung aller mit der Schlüpfrigkeit zusammenhängenden Fragen. — Büche, W.: Untersuchungen über molekular-physikalische Eigenschaften der Schmiermittel. Diss. T. H. Karlsruhe 1930 (Eintuschierte Lager und parallele Gleitflächen). — Voitländer, R.: Untersuchungen zur Beurteilung der Schmierfähigkeit von Ölen. Mitt. d. Hydraul. Inst. der T. H. München, Heft 3, Oldenburg 1929 (Versuche mit zwei sich kreuzenden Zylindern). — Auerbach und Hort geben eine ausführliche Zusammenfassung im Handbuch der Mechanik, Kap. 18, Reibung fester Körper. Leipzig 1929.

Sobald die Schmierschicht die Belastung P_1 nicht mehr tragen kann, die Schmierschichtdicke also kleiner als die Summe der Unebenheiten wird, findet eine Berührung der Gleitflächen an einzelnen höher liegenden Punkten statt. An diesen wenigen Berührungspunkten kann deshalb die Flächenpressung sehr groß werden, wenn der Auftrieb der dazwischen liegenden Schmierschicht klein im Verhältnis zur Belastung der Gleitfläche ist. Die Berührungsstellen werden gequetscht und nutzen sich bei der Gleitbewegung ab. Das an der Fläche haftende Öl kann infolge der örtlichen Temperaturerhöhung weggepreßt werden und verdampfen. Die Metallflächen werden bei genügender Affinität zusammenschweißen (Anfressen); dieser Vorgang erfolgt spontan.

Während die flüssige Reibung ausschließlich von der Zähigkeit des Schmiermittels abhängt, tritt nun eine andere Eigenschaft der Schmiermittel in den Vordergrund, indem auch an den Berührungsstellen eine zusammenhängende Ölschicht erhalten bleiben sollte. Diese physikalische Eigenschaft nennt man Schlüpfrigkeit (Oiliness, onctuosité) und wird in der Literatur sehr verschieden umschrieben.

Die Society of Automotiv Engineers (London) hat folgende Definition angenommen:

Schlüpfrigkeit bedeutet Unterschiede in der Reibung bei verschiedenen Schmiermitteln unter genau gleichen Versuchsbedingungen, die durch die Zähigkeit allein nicht erfaßt werden können. Es handelt sich also nicht um eine klar definierte Eigenschaft der Flüssigkeiten, die mathematisch erfaßbar wäre, sondern es soll die Wirkung der molekularen Kräfte in den Grenzschichten berücksichtigt werden. Die molekularen Kräfte wirken aber nur in einem Bereich von der Größenordnung des Moleküldurchmessers, während die kleinsten in der Praxis vorkommenden Ölspalten ($0,001$ mm) noch 10^4 mal so groß sind als der Moleküldurchmesser. Es ist also sehr unwahrscheinlich, daß die Molekularkräfte etwas anderes bewirken, als daß die Flüssigkeit an den Grenzflächen haftet.

Mir scheint, daß zwei Vorgänge dabei eine wesentliche Rolle spielen können, nämlich eine möglichst geringe Abnahme der Zähigkeit mit steigender Temperatur und die Fähigkeit einzelner Ölarten Moleküle von großer Länge und sehr geringer Dicke (2 Atomlagen) zu bilden. Infolge

der Bindefähigkeit des Kohlenstoffes mit anderen C-Atomen bilden sich Moleküle, die sich aus 200 bis 300 Atomen aufbauen (Ketten- oder Fadenmoleküle) mit einer Länge von 4000 Å.

Langmuir hat z. B. experimentell nachgewiesen, daß Ölsäure in einer Schichtdicke von 1 Molekül, die Reibungszahl zwischen Glasflächen auf den achten Teil reduziert.

Man muß deshalb annehmen, daß die Gleitflächen auch bei der Grenzschmierung durch eine sehr dünne (molekulare) Ölschicht getrennt bleiben. Die Verschiebungskraft an diesen Stellen kann deshalb ebenfalls aus den Schubspannungen (nach der Newtonschen Hypothese) berechnet werden. Infolge der geringen Dicke der Schmierschicht werden die Schubspannungen sehr groß ($\tau = \eta U/\delta$).

Der Übergang zwischen der flüssigen Reibung und der Grenzschmierung erfolgt allmählich. Nachdem die Gleitgeschwindigkeit U nicht mehr ausreicht die beiden Gleitflächen vollständig zu trennen, wird ein Teil P_g der Lagerbelastung durch die Gleitflächen direkt aufgenommen und zwar zunächst nur an wenigen Berührungspunkten in der Nähe von h_0 ; es ist dann $P_1 = P_f + P_g$, worin P_f der durch die Flüssigkeit erzeugte Auftrieb ist. Auch die Verschiebungskraft R_1 teilt sich in zwei analogen Teile, R_f u. R_g , so daß die Reibungszahl der Teilschmierung:

$$\mu = \frac{R_1}{P_1} = \frac{R_f + R_g}{P_f + P_g} \quad (46.1)$$

ist. Anfänglich ist P_g klein und

$$\mu \sim \frac{R_f}{P_f} + \frac{R_g}{P_f} = \mu_f + \frac{R_g}{P_f}. \quad (46.2)$$

Die Reibungszahl nimmt also zunächst um einen Betrag zu, der hauptsächlich von der Oberflächenbeschaffenheit der Gleitflächen abhängt und mit abnehmender Gleitgeschwindigkeit (d. i. mit abnehmendem Wert P_f und zunehmendem Wert R_g) rasch zunimmt. Der überwiegende Einfluß der Gleitgeschwindigkeit ist bei den Versuchen von Stribeck (Abb. 43.1 u. 43.2) aus dem sehr steilen Verlauf der Reibungskurve in diesem Gebiet deutlich ersichtlich.

Wenn auch die Gesetze der halbflüssigen Reibung noch wenig erforscht sind, so kann doch eine allgemein gültige Schlußfolgerung gezogen werden, nämlich zu versuchen, möglichst in die Nähe des sog. Ausklinkzustandes zu kommen. Dann sind Reibungszahlen möglich, die nicht größer zu sein brauchen als die bei der Flüssigkeitsreibung. Auch bei der halbflüssigen Reibung müssen die Oberflächen der Gleitflächen möglichst glatt gehalten werden und sind Schmiernuten zu vermeiden. Im Gegensatz zur Flüssigkeitsreibung sollen kleine Flächenpressungen vorgesehen, also dicke Zapfen verwendet werden, die bei der gleichen Drehzahl noch den Vorteil größerer Gleitgeschwindigkeit haben.

Der zweite Grenzstand, in der Nähe der trockenen Reibung ist besonders für Reibgetriebe (Riementrieb, Kupplungen, Bremsen) wichtig. Neben dem überragenden Einfluß der Gleitgeschwindigkeit hängt die Reibzahl hauptsächlich von der Oberflächenbeschaffenheit ab. Der Einfluß der Flächenpressung tritt gegen diese beiden Faktoren zurück; er ist aber grundsätzlich so, daß (bei gleicher Oberflächenbeschaffenheit und Gleitgeschwindigkeit) die Reibzahlen mit abnehmender Flächenpressung zunehmen. Da die Oberflächenbeschaffenheit sich infolge der unvermeidlichen Abnutzung, durch Oxydation und Verschmutzung ändert, so müssen sich auch die Reibzahlen mit der Zeit ändern, was bei der Berechnung zu beachten ist. Es können demnach nur Grenzwerte der Reibzahlen angegeben werden, die oft ziemlich weit auseinander liegen: z. B. für

Gußeisen auf Gußeisen . . .	$\mu = 0,1$	bis 0,15
„ „ Leder . . .	0,15	bis 0,3
„ „ Holz . . .	0,2	bis 0,4
„ „ Asbest . . .	0,3	bis 0,5.

Gußeisen hat bekanntlich gute Gleiteigenschaften und bei ausreichender Schmierung geringe Neigung zum Fressen. Holz und Leder sind für Brennpflächen durch Asbest verdrängt worden, der viel höhere Temperaturen aushält und fast keine Abnutzung zeigt. Die langen Asbestfasern werden mit Messingdrahteinlagen zu Bändern verwoben. Kurze Fasern werden mit Metallsplintern und Kunstharz zu einer Pappe verarbeitet oder in Formen gepreßt. Versuche zur Bestimmung der Reibzahlen solcher Gleitflächen liegen in großer Zahl vor; es gelten dafür die Gesetze der Teilschmierung.

46.2. Förderung des Öles durch Nuten.

Für die Schmierung vertikaler Wellen wird oft die in Abb. 46.1 dargestellte Schraubennute gewählt. Bei der Drehung steigt das Öl in die Nute. Die Verschiebungsgeschwindigkeit der Welle

in der Richtung der Nut beträgt

$$\omega r \cos \beta .$$

Die Druckzunahme in der gleichen Richtung ist

$$dp = \frac{mg \sin \beta}{b h} = \frac{bh dx \gamma}{bh} \sin \beta = dx \gamma \sin \beta ,$$

so daß mit Gl. (42.10) folgt:

$$G_{b=1} = \frac{h \cdot \omega r \cos \beta}{2} - \frac{h^3}{12 \eta} \gamma \sin \beta .$$

Damit gefördert wird, muß $G > 0$ sein, oder

$$h^2 \gamma \operatorname{tg} \beta \leq 6 \eta \omega r . \quad (46.3)$$

Zahlenbeispiel 46.1. Bei welcher Winkelgeschwindigkeit wird 0,01 l/s Öl gefördert, wenn $r = 5$ cm, $\beta = 45^\circ$, $h = 2$ mm, $b = 1$ cm, $\eta = 0,002$ kg · s/m² und $\gamma = 920$ kg/m³ ist?

$$G_{b=1 \text{ cm}} = 0,0001 \text{ m}^3/\text{s} \\ = \frac{1}{100} \left(\frac{0,002 \omega \cdot 0,05 \cos 45}{2} - \frac{0,002^3 \cdot 920}{12 \cdot 0,002} \sin 45 \right) ,$$

woraus $\omega = 34,2/\text{s} .$

Die Rechnung setzt ein vollständig dichtes Abschließen der Nute voraus. Für die Schmierung der Welle wird die Nute aber gut abgerundet, damit das Öl zwischen Welle und Lagerschale gelangen kann. In diesem Fall ist natürlich eine viel größere Winkelgeschwindigkeit erforderlich.

b) Logarithmische Spirale. In eine Scheibe eines Spurzapfens (Abb. 46.2) sei eine logarithmische Spirale von der Tiefe h eingeschnitten ($r = r_a e^{-\operatorname{ctg} \beta \cdot \varphi}$) von r_a nach innengehend. Die Scheibe drehe sich so, daß das Öl von außen nach innen bewegt wird. Da es innen nicht abfließen kann, ist $G = 0$, oder nach Gl. (42.10)

$$\frac{1}{2 \eta} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot \frac{h^3}{6} = \frac{U h}{2} \text{ oder } dp = \frac{6 U \eta}{h^2} dx .$$

Die Verschiebungsgeschwindigkeit U in der Richtung der Nute beträgt.

$$U = r \omega \sin \beta .$$

Die unendlich kleine Länge der Nute ist $dx = \frac{r d\varphi}{\sin \beta}$, so daß

$$dp = \frac{6}{h^2} r^3 \omega d\varphi ,$$

und
$$p = \frac{3 \eta \omega}{h^2} \cdot \frac{r_a^2 - r^2}{\operatorname{ctg} \beta} \quad (45.4)$$

wird. Auch hier besteht keine vollständige Abdichtung zwischen den beiden Flächen. Der erzeugte Druck soll eben dazu dienen, das Öl zwischen die Gleitflächen zu bringen; darum muß die Nute gut abgerundet werden.

46.3. Die saugende Wirkung einer rasch drehenden Scheibe

in der unmittelbaren Nähe einer stillstehenden und dazu parallelen ist in der Praxis allgemein bekannt; sie kann aus der allgemeinen Gl. (42.10) berechnet werden. Vorausgesetzt ist wieder, daß für $x = r_i$ der Spalt mit Flüssigkeit (z. B. Luft) gefüllt ist, die ohne Unterbrechung nachfließen kann (Abb. 46.3). Bei der drehenden Scheibe bewegt sich die Flüssigkeit (die an der Oberfläche haftet) mit der veränderlichen Geschwindigkeit $U = \omega \cdot x$, nimmt also in der X -Richtung zu, so daß nun

$$G_1 = \frac{G}{2 \pi x} = - \frac{h^3}{12 \eta} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{\omega \cdot x \cdot h}{2} \quad (46.5)$$

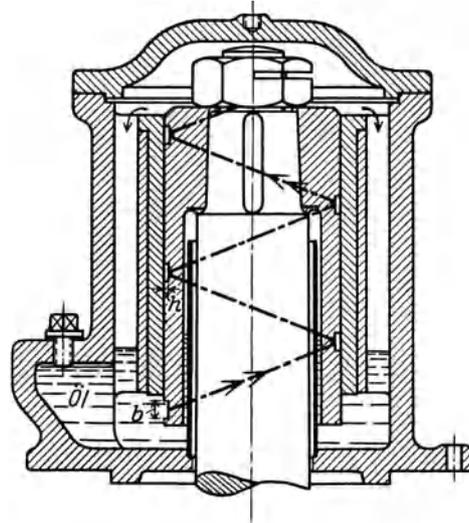


Abb. 46.1. Schmierung eines vertikalen Lagers durch Schraubennute.

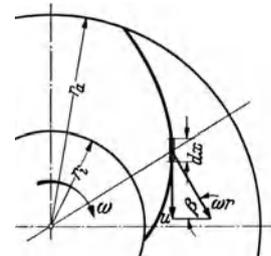
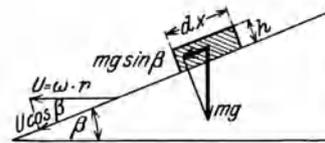


Abb. 46.2. Schmierung einer Spurzapfenplatte durch Spiralnuten im ruhenden Teil.

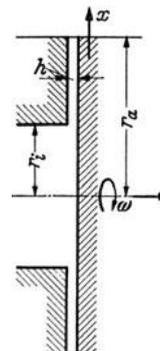


Abb. 46.3.

oder

$$dp = -\frac{6\eta G}{\pi h^3} \cdot \frac{dx}{x} + \frac{6\eta\omega}{h^2} x dx$$

ist. Die Integration mit $h = \text{konstant}$ gibt

$$p = -\frac{6\eta G}{\pi h^3} \ln x + \frac{6\eta\omega}{2h^2} x^2 + C$$

und mit der Randbedingung, daß für $x = r$, $p = 0$ ist

$$p = \frac{6\eta G}{\pi h^3} \ln \frac{r_a}{x} - \frac{6\eta\omega}{2h^2} (r_a^2 - x^2), \quad (46.6)$$

so daß für $x = r_i$

$$p_i = \frac{6\eta}{h^2} \left[\frac{G}{\pi h} \ln r_a/r_i - \frac{\omega}{2} (r_a^2 - r_i^2) \right] \quad (46.7)$$

wird. Ist ursprünglich $p_i = 0$, so ist die geförderte Flüssigkeitsmenge aus der Gleichung:

$$G \ln r_a/r_i = \frac{\pi\omega h}{2} (r_a^2 - r_i^2) \quad (46.8)$$

zu berechnen; sie ist unabhängig von der Zähigkeit der Flüssigkeit. Für $r_a/r_i = 2$, ist $G = 6,75 \omega h \cdot r_i^2$ und mit $U_i = \omega \cdot r_i = 10 \text{ m/s}$, $h = 1 \text{ mm}$ und $r_i = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$, wird $G = 0,0034 \text{ m}^3/\text{s} = 12,2 \text{ m}^3/\text{h}$! Infolge der Strömungswiderstände, wenn z. B. eine Riemenscheibe oder Kupplung hart neben einem Lager gesetzt wird, muß der Unterdruck p_i nach Gl. (7) entstehen. Er ist um so größer, je kleiner die Spalthöhe h ist und z. B. für $h = 0,1 \text{ mm}$ 100 mal so groß als für $h = 1 \text{ mm}$. Deshalb sind vertikale Luftspalten z. B. für die Abdichtung von Wälzlagern, vgl. Abb. (51.17) ungeeignet; Kupplungen oder Scheiben in der Nähe von Lagern saugen das Öl heraus!

46.4. Schwingende Zapfen.

Der Schmiervorgang bei schwingenden Zapfen ist grundsätzlich verschieden von der Schmierung umlaufender Zapfen. Tritt im Lager ein Druckwechsel auf, so werden die dabei auftretenden Stöße durch den Widerstand der zu verdrängenden Ölschicht gedämpft. Wie stark die dämpfende Wirkung zäher Flüssigkeiten sein kann, zeigt folgende Überschlagsrechnung:

Zwei planparallele Platten in der Entfernung h (Abb. 46.4) werden einander mit der Geschwindigkeit $v \text{ m/s}$ unter Verdrängung einer Ölschicht genähert. Senkrecht zur Zeichnungsebene seien die Platten unendlich lang. Die Flüssigkeitsströmung ist symmetrisch in bezug auf die X - und Y -Achse. Durch einen Querschnitt im Abstände x von der Plattenmitte wird durch die Annäherung für die Plattenbreite $b = 1$ die Flüssigkeitsmenge

$$G_{b=1} = vx \text{ m}^3/\text{s}$$

gepreßt. Nun ist nach Gl. (42.10), und weil hier $U = 0$ ist:

$$G_{b=1} = -\frac{h^3}{12\eta} \frac{dp}{dx} = v \cdot x.$$

Wenn das Öl ohne Überdruck abfließen kann, d. h. wenn für $x = \pm a/2$, $p = 0$ ist, so folgt aus der Integration der Gleichung:

$$p = \frac{6\eta v}{h^3} \left\{ \left(\frac{a}{2}\right)^2 - x^2 \right\}. \quad (46.9)$$

Die für die Näherung der Platten erforderliche Kraft ist

$$\frac{P}{b} = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} p dx = \frac{12\eta v}{h^3} \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^2}{4} - x^2\right) dx = \eta v \left(\frac{a}{h}\right)^3. \quad (46.10)$$

Ist $a = 0,1 \text{ m}$, $h = 0,1 \text{ mm} = 0,0001 \text{ m}$, $v = 1 \text{ m/s}$ und $\eta = 0,002 \text{ kg} \cdot \text{s}/\text{m}^2$, dann ist

$$\frac{P}{b} = 0,002 \cdot 1 \left(\frac{0,1}{0,0001}\right)^3 = 2\,000\,000 \text{ kg/m}.$$

Für eine endliche Plattenbreite b ist der Druck P kleiner, weil dabei das Öl auch seitlich abfließen kann. Die Zeit, die zur Näherung der beiden Platten bei gegebenen P/b erforderlich ist, folgt aus:

$$v = -\frac{dh}{dt} = \frac{P}{b\eta} \left(\frac{h}{a}\right)^3 \quad \text{oder} \quad -dt = \frac{\eta b}{P} \left(\frac{a}{h}\right)^3 dh$$

zu:

$$t_2 - t_1 = \frac{\eta b a^3}{2P} \left(\frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2}\right). \quad (46.11)$$

Hiernach wäre eine unendlich lange Zeit erforderlich, um die Flüssigkeit durch eine endliche Kraft P zwischen den beiden Flächen vollständig zu verdrängen. Mit $b = 0,1$ m, $\eta = 0,002$ kgm²/s und $P/b = 10$ t/m = 10 000 kg/m, wird für

$$-10^{-4} h_1 = 0,1 \text{ mm} = 0,0001 \text{ m} \quad \text{und} \quad -10^{-5} h_2 = 0,01 \text{ mm} = \text{m}, \quad t_2 - t_1 = 1 \text{ sec!}$$

Man erkennt daraus die sehr stark dämpfende Wirkung dünner Ölschichten. Je besser nun das seitliche Abfließen des Öles, z.B. bei den Schubstangenköpfen verhindert wird (durch eng anliegende Bunde am Zapfen), um so eher sind die Voraussetzungen der Rechnung auch praktisch erfüllt. Ist die Dämpfung so vollkommen, daß im Augenblick des neuen Druckwechsels der Zapfen die Lagerschale noch gar nicht erreicht hat, so findet überhaupt keine metallische Berührung zwischen Zapfen und Lagerschale statt. Der Zapfen bewegt sich dann innerhalb des Lagerspieles völlig im Öl hin und her. Wir brauchen deshalb bei schwingenden Zapfen mit Druckwechsel nur für eine vollkommene Stoßdämpfung zu sorgen, um gleichzeitig auch eine vollkommene Schmierung zu erhalten.

Voraussetzungen hierfür sind (Abb. 46.5):

1. kleines Lagerspiel;
2. starre, glatte Gleitflächen, denn die elastischen Formänderungen vergrößern zum Teil das Lagerspiel und bewirken andererseits eine metallische Berührung. Übermäßige Abnutzung und gelegentliches Anfressen solcher Bolzen sind weniger die Folgen einer mangelhaften Schmierung oder zu hoher Flächenpressungen, als zu großer Formänderungen;

3. Vermeidung seitlichen Abfließens des Öles;

4. Das zwischen Zapfen und Lagerschale verdrängte Öl muß (weil verloren) nach dem Druckwechsel sofort erneuert werden. Das Öl ist deshalb mit Überdruck ($p \approx 0,5$ at) zuzuführen.

Tritt kein Druckwechsel ein, wie es bei langsamlaufenden, einfachwirkenden Maschinen der Fall ist, so ist Gleitung unter gleichbleibender Druckrichtung vorhanden. Die Gleitgeschwindigkeit ist meist viel zu gering, um Flüssigkeitsreibung zu erreichen, so daß halbflüssige Reibung auftritt und kleine Flächenpressungen (dicke Zapfen) günstig sind. Bei schwingenden Zapfen (z. B. Kreuzkopf, vgl. Abschn. 84.2) erhält das Lager dann gut abgerundete Verteilnuten in der Entfernung des Schwingungsweges (Abb. 46.6).

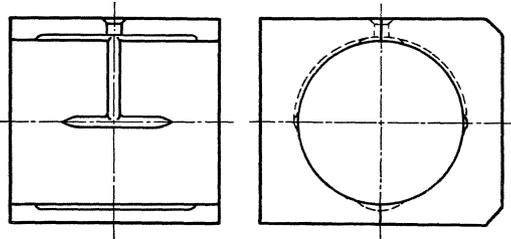


Abb. 46.5. Kreuzkopfpapfenlager für Maschinen mit Druckwechsel. (Aus Falz, Schmieretechnik.)

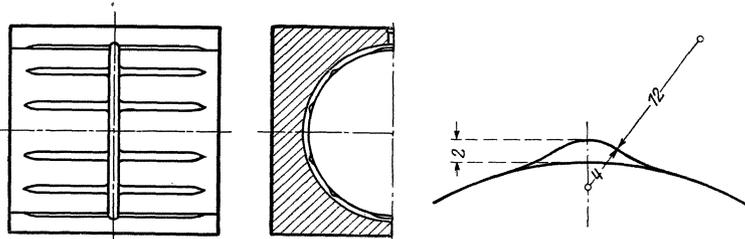


Abb. 46.6. Kreuzkopfpapfenlagerschale mit Schmiernuten für Maschinen ohne Druckwechsel. (Aus Falz.)

5. Wälzlager (Kugel- und Rollenlager)¹.

Das Wälzlager unterscheidet sich vom Gleitlager nicht nur durch die Verwendung von Wälzkörpern, sondern auch dadurch, daß es als „handelsübliche Einheit“ geliefert und eingebaut wird. Die Bedeutung der Wälzlagerindustrie geht daraus hervor, daß die Weltproduktion etwa 500 000 Lager täglich beträgt! Die Herstellung in so großen Serien war nur durch eine weitgehende, internationale Normung möglich, die soweit durchgeführt ist, daß die Lager der verschiedenen Firmen beliebig austauschbar sind. Für den Ingenieur ist deshalb weniger der innere Aufbau von Bedeutung als die Regeln für den zweckmäßigen Einbau, Verwendung und für die zulässige Belastung.

51. Einbauvorschriften.

51.1. Lagerarten und deren Eigenschaften.

Ursprünglich hat man auch die Wälzlager in Quer- und Längslager unterteilt (Abb. 51.1 und 51.2). Diese Einteilung ist für die Wälzlager nicht eindeutig, weil die ursprünglich als Querlager verwendeten Konstruktionen auch große Längskräfte aufnehmen können und in manchen Fällen den eigentlichen Längslagern überlegen sind. Jürgensmeyer hat deshalb Ring- und Scheibenlager zur Kennzeichnung der Konstruktion vorgeschlagen.

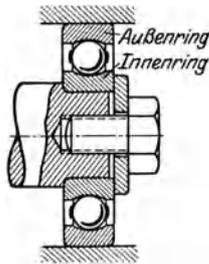


Abb. 51.1. Querlager.
Ringlager.

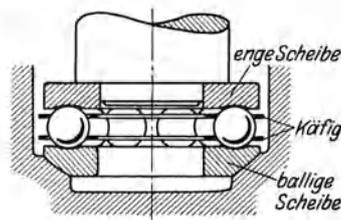


Abb. 51.2. Längslager.
Scheibenlager.

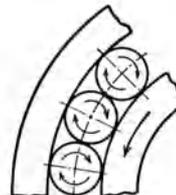


Abb. 51.3.

Die Kugeln dürfen nicht ohne Führung laufen, da zwei aufeinander folgende Kugeln an der Berührungsstelle entgegengesetzte Geschwindigkeiten hätten (Abb. 51.3), was zum raschen Verschleiß führen müßte. Außerdem werden die Kugeln durch die Zentrifugalkraft an die Oberfläche geschleudert, da sie auf der entlasteten Seite des Ringes ebensoviel Spiel haben, wie auf der belasteten die elastische Zusammendrückung beträgt. Die Käfige (Führungsringe) sollen das verhindern, indem sie die Kugeln an den Drehpolen fassen. Sie sind aus weichem Material (Messing, Eisen) hergestellt, so daß nur diese sich beim Verschleiß abnutzen. Bei einem Kugellager tritt demnach nicht allein rollende Reibung, sondern auch gleitende Reibung an den Käfigwänden auf.

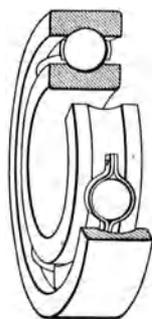


Abb. 51.4.

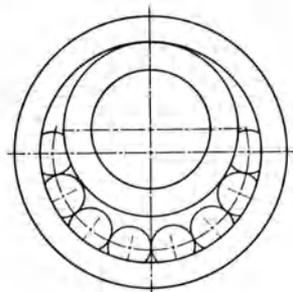


Abb. 51.5.

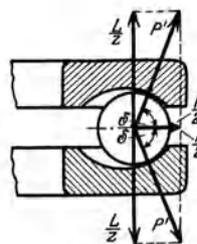
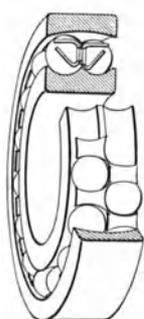
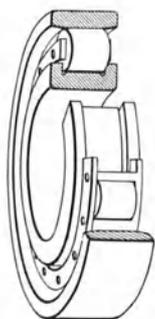
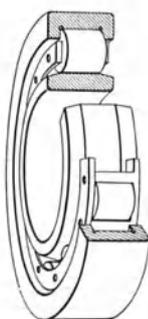
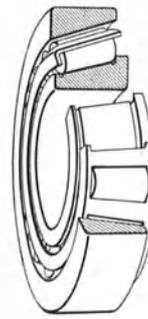


Abb. 51.6. Einfluß
der Fliehkraft auf
Längslager.
(Aus Stellrecht.)

Das einreihige Radialkugellager (Abb. 51.4) (ohne Einfüllöffnung), genannt Radial- oder Hochschulterlager, wird dort zweckmäßig verwendet, wo Verklebungen infolge Durchbiegung der Welle nicht zu befürchten sind. Die Rillen der beiden Laufringe sind verhältnismäßig tief; die Schmiegun (Vgl. S. 284) zwischen Kugel und Rille ist sehr innig.

¹ Jürgensmeyer, W.: Die Wälzlager. Berlin: Julius Springer 1937. Das umfassendste Lehrbuch über Wälzlager, mit einen ausführlichen Literaturnachweis (171 Quellen).

Die Kugeln werden bei der exzentrischen Lage der Ringe eingelegt (Abb. 51.5). Bei Lagern mit einer besonderen Einfüllöffnung können etwas mehr Kugeln eingebracht werden; sie werden aber nicht mehr hergestellt, weil das Radiallager bedeutend vielseitiger ist. Es ist geeignet für radiale und axiale Beanspruchung und dem zweireihigen vorzuziehen, da bei diesen immer Unsicherheit über die Lastverteilung auf beide Kugelreihen besteht. Erfahrungsgemäß darf ein zweireihiges Lager nur 50% höher belastet werden als das gleich große einreihige. Die Radiallager sind bei hohen Drehzahlen zur Aufnahme von Längskräften zweckmäßiger als die eigentlichen Längs- = Scheibenlager (vgl. Abb. 51.24/25).

Abb. 51.7.
Pendellager.Abb. 51.8.
Zylinder-Rollenlager.Abb. 51.9.
Nadellager.Abb. 51.10.
Nadellager.Abb. 51.11.
Kegelrollenlager.

Bei Längslagern verschiebt sich der Mittelpunkt einer Kugel infolge der Fliehkraft nach außen (Abb. 51.6). Die Laufringe werden dadurch etwas auseinander gedrückt, wodurch die totale Belastung einer Kugel größer ausfällt. Außerdem tritt dann immer gleitende Reibung auf, die zu Wärmeentwicklung und Verschleiß führt.

Das Pendelkugellager ist immer doppelreihig (Abb. 51.7). Solange das Lager nur einer Querbelastung ausgesetzt ist, ist die Lastverteilung auf beide Kugelreihen immer gleichmäßig. Infolge der hohlkugeligen Laufbahn des Außenringes wird eine leichte Einstellbarkeit und volle Betriebsicherheit auch dort erreicht, wo Montageungenauigkeiten oder Winkeländerungen der Welle unvermeidbar sind. Die Montage solcher Lager mit zylindrischer Bohrung in einteiligen Gehäusen erfordert besondere Vorsicht.

Das Zylinderrollenlager (Abb. 51.8 u. 51.9) hat bei gleichen Außenabmessungen wie die einreihigen Radialkugellager höhere (etwa doppelte) Tragfähigkeit; der Unterschied nimmt mit der Größe der Lager erheblich zu. Es eignet sich für schweren, stoßweisen Betrieb und dort, wo wenig Platz zur Verfügung steht. Bei den schmalen Reihen ist die Dicke der Rolle gleich ihrer Länge; bei den breiten ist das Verhältnis etwa 1 : 1,5.

Die Führung der Rollen erfolgt zwischen Borden des Innen- oder des Außenringes. Die Laufringe ohne Bord besitzen eine schwach ballige Laufbahn und gestatten eine kleine axiale Bewegung innerhalb des Lagers. Es kann als Schulterlager in gewissen Grenzen Längskräfte (bei gleitender Reibung) aufnehmen.

Das Nadellager (Abb. 51.10) besitzt sehr lange, dünne, zylindrische Rollen, die ohne Käfig laufen. Es hat deshalb eine erhöhte Reibung und eignet sich besonders für schwingende Bewegungen (z. B. Kolbenbolzen). Wegen der geringen Bauhöhe wird es auch dort verwendet, wo normale Lager nicht untergebracht werden können.

Das Kegelrollenlager (Abb. 51.11) ist ein reinreihiges Radiallager, das in Quer- und Längsrichtung hoch belastbar ist. Es kann mit größeren Toleranzen eingebaut werden, ohne daß dadurch die Lagerluft beeinflusst wird. Radiale und axiale spielfreie Lagerung ist durch Nachstellung möglich. Es wird immer paarweise verwendet.

Beim Pendelrollenlager (Abb. 51.12 bis 14) besitzt der Außenring eine für beide Rollen-

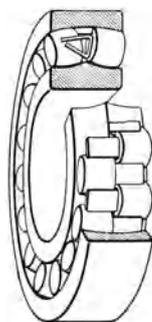


Abb. 51.12.

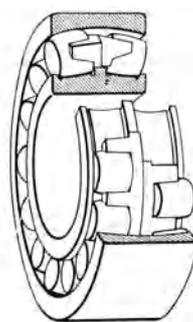


Abb. 51.13.

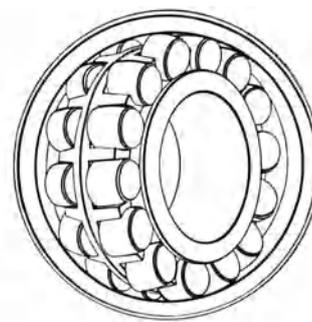


Abb. 51.14.

Pendelrollenlager.

reihen gemeinsame hohlkugelige Laufbahn. Die beiden Laufbahnen des Innenringes sind konkav gewölbt (entsprechend der Rollenform) und nicht durch Borde begrenzt. Die Führung der Rollen geschieht an den Seitenflächen eines Leitringes (Abb. 15.12), der lose in dem Außenring liegt. Es ist deshalb auch geeignet, kleine axiale Kräfte aufzunehmen. Beim Fendellager können die Wälzkörper durch Herausdrehen des Innenringes eingesetzt werden (Abb. 51.14).

Das einseitig oder zweiseitig wirkende Längslager (Abb. 54.15 u. 54.16) wird mit flachen oder balligen Scheiben (mit oder ohne Einstellringen) geliefert und dient ausschließlich

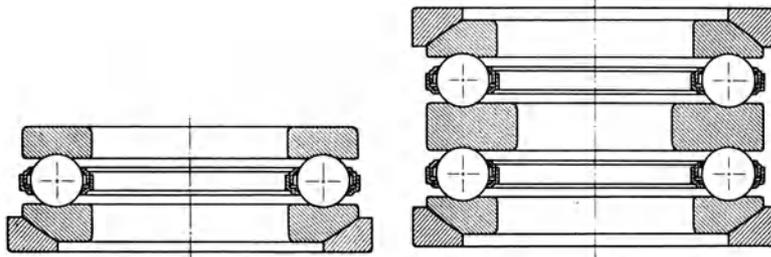


Abb. 51.15. Längslager, einseitig wirkend.

Abb. 51.16. Längslager, beidseitig wirkend.

zur Aufnahme der Längskräfte, übernimmt also keine radiale Führung. Die ballige Ausführung korrigiert Montageungenauigkeiten; eine Einstellung während des Betriebs (infolge Achsänderungen der Welle) ist unmöglich.

Man unterscheidet bei allen Arten leichte, mittlere und schwere Reihen (vgl. Zahlentafel 52.1, 52.2 u. 52.3).

Da der Wälzlagerwerkstoff (Chromstahl) sehr leicht oxydiert und die Lager dadurch Schaden erleiden, sind sie in den Pappschachteln, wo sie in mit säurefreiem Fett getränktes Papier eingewickelt sind, und nicht offen aufzubewahren.

Die Vorteile der Wälzlager gegenüber Gleitlager sind:

1. Geringer Reibungsverlust, insbesondere beim An- und Auslauf ist auch bei mangelhafter Wartung mit hoher Sicherheit vorhanden.
2. Sehr geringer Schmiermittelverbrauch.
3. Geringes Lagerspiel, also genaue Lage der drehenden Teile in einem Gehäuse, was z. B. bei elektrische Maschinen wegen dem kleinen Ankerspiel und bei Werkzeugmaschinen, wegen der Genauigkeit der Bearbeitung sehr wertvoll ist.
4. Die Maschinen lassen sich bei Verwendung von Wälzlagern meistens etwas kürzer bauen.
5. Rascher Ersatz bei auftretenden Störungen.

Als Nachteile sind zu nennen:

1. Höhere Anschaffungskosten.
2. Bedingung einer genauen Herstellung von Gehäuse und Welle mit engen Toleranzen.
3. Schwierigkeiten beim Ein- und Ausbau der einteiligen Wälzlager. Es ist deshalb oft vorteilhaft, daß die Lager beim Ausbau auf der Welle bleiben können.
4. Wälzlager sind im Betrieb nie geräuschlos.

51.2. Passungen.

Die Außenmaße der Wälzlager liegen durch internationale (ISA-) Normen fest. Die Toleranzen für Außenring, Bohrung und Breite sind $H6$ resp. $h6$ (vgl. S. 14). Bei der Wahl des Sitzes zwischen Welle und Bohrung und zwischen Außenring und Gehäuse ist besonders die Höhe der Lagerbelastung (abhängig von der Lebensdauer und Drehzahl) und die Lagerart (Rillenscheiben-, Rollenlager) zu beachten. Je kleiner die Belastung, um so geringer muß das Übermaß sein; Rollenlager verlangen einen festeren Sitz als Kugellager.

Die früher gebräuchliche einfache Einbauregel für umlaufende Wellen: Innenring-Festsitz, Außenring-Schiebesitz ist durch die genaueren Angaben in Zahlentafel 51.1 zu ersetzen¹.

Zahlentafel 51.1. Sitze für umlaufenden Innenring (vgl. S. 292).

Tragfähigkeit	Welle	Gehäuse
Nicht voll ausgenutzt	$j \cdot 6$	$J \cdot 7$
Normal	$k \cdot 5$	$H \cdot 7$
Voll		
(mittelschwere und schwere Reihe)	$m \cdot 5$	$H \cdot 7$
Sehr große Stoßbelast.	$n \cdot 5$	$H \cdot 7$
Spannhülslager	$h \cdot 9$	$H \cdot 8$

Früher war das Warmaufziehen des Innenringes gebräuchlich; das Lager wurde in warmes Öl gelegt und dann auf die Welle geschoben. Eine solche Verbindung ist aber schwer wieder zu lösen. Deshalb werden die Innenringe mit Muttern oder Rohrstücken seitlich gegen einen Wellenbund gespannt, wobei die Muttern gegen Lockerung zu sichern sind. Die axiale Befestigung durch Muttern erfordert das Schneiden von Gewinde auf die Welle. Bei Massenherstellung (z. B. Elektromotoren) wer-

¹ Die von Fall zu Fall empfohlenen Sitze sind in den VSM.-Normen 15715 Blatt 7 u. 8 zusammengestellt.

den die Wellen auf einfachen Drehbänken hergestellt, die meist keine Vorrichtung zum Gewindeschneiden haben. In solchen Fällen ist die in Abb. 51.17 dargestellte Befestigung zu empfehlen. Ein aufgeschnittener, außen mit Gewinde versehener Ring, dessen Bohrung etwa $\frac{1}{2}$ mm kleiner als der Wellendurchmesser ist, kann leicht über die Welle geschoben werden und paßt genau in eine Eindrehung. Darüber wird die Verschlußmutter geschraubt.

51.3. Einbauregeln.

1. Jede Formänderung und jedes Klemmen und Zwängen ist beim Einbau und auch während des Betriebes zu vermeiden. Die Wellen und Bohrungen der Lagerkörper müssen demnach genau zentrisch sein. Zentrierung durch Gewinde ist falsch, da zu ungenau (Abb. 51.18). Die Steifigkeit der Laufringe ist eine Grundbedingung für den genauen Lauf der Kugeln; eine Formänderung der Ringe führt zum Klemmen und damit zur Zerstörung der Kugeln. Deshalb müssen die Ringe genau in das Gehäuse passen; es ist auch unrichtig, Wälzlager in ein zweiteiliges Gehäuse mit klaffender Fuge einzubauen (Abb. 51.19); der Lagerdeckel muß fest aufliegen.

2. Von mehreren auf der Welle sitzenden Querlagern darf nur eines im Gehäuse in der Längsrichtung festgelegt werden; alle übrigen Lager müssen seitliches Spiel erhalten (Abb. 51.20).

3. Um eine genügend große Lebensdauer der Wellen zu erhalten (vgl. Abschn. 31.2), sind auch die Hohlkehlenhalbmesser und Schulterhöhen in den Normen international festgelegt.

4. Für nicht kalibrierte Wellen rüstet man die Laufringe mit Spannhülsen aus (Abb. 51.21); die Muttern sind so anzubringen, daß sie entgegen der Wellendrehrichtung angezogen werden.

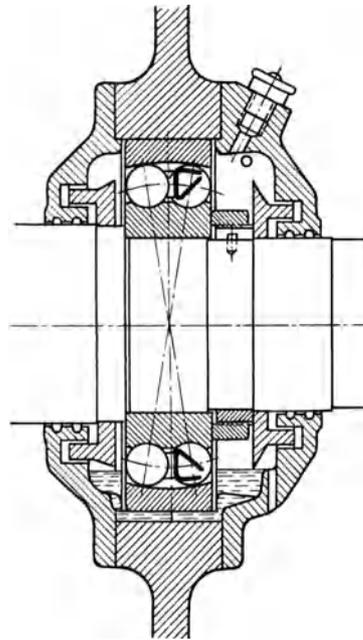


Abb. 51.17. Befestigung des Querlagers ohne Verschraubung.

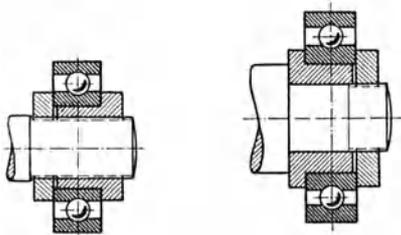


Abb. 51.18. Zentrierung durch Gewinde ist falsch. (Aus Behr-Gohlke.)

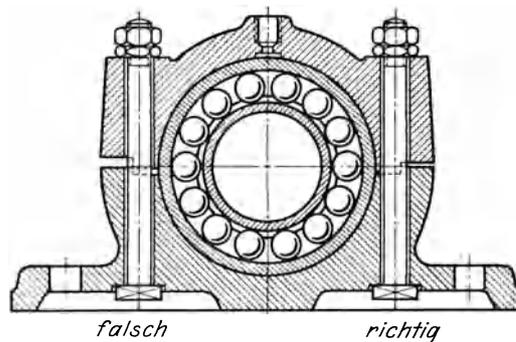


Abb. 51.19. Zweiteiliges Gehäuse mit klaffender Fuge ist falsch.

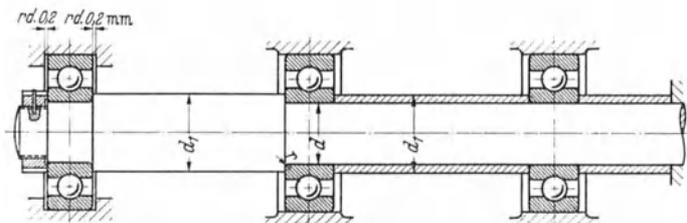


Abb. 51.20. Nur ein Festlager; alle übrigen mit seitlichem Spiel.

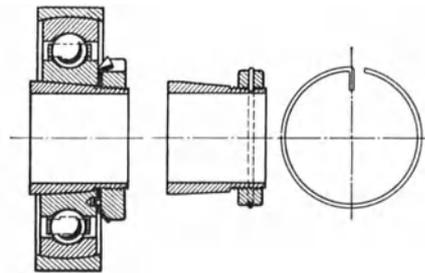


Abb. 51.21. Befestigung durch Spannhülse.

Abb. 51.22 u. 23 zeigen Einbaufehler bei Längslagern, die wegen der einseitigen Belastung der Kugeln rasch zerstört werden. Abb. 24 u. 25 zeigen ein Radiallager als Längslager bei hoher Drehzahl. Beim Einbau eines Längs- und Querlagers ist darauf zu achten, daß die freie Einstellung nur auf einer Kugelfläche oder auf konzentrischen Kugelflächen möglich ist (Abb. 51.26, 28 u. 30).

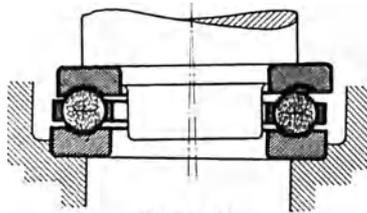


Abb. 51.22.

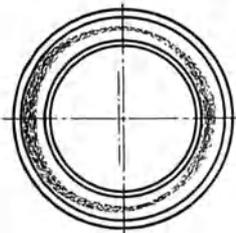
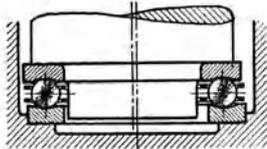
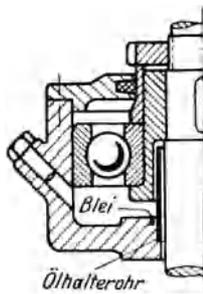


Abb. 51.23.

Abb. 51.22/23. Schiefe Auflage des stillstehenden Ringes oder exzentrische Lage beider Ringe führen zu Verklemmungen. (Aus Behr-Gohlke.)



Ölhalterrohr

Abb. 51.27. Querlager für vertikale Wellen. (Aus Behr-Gohlke.)

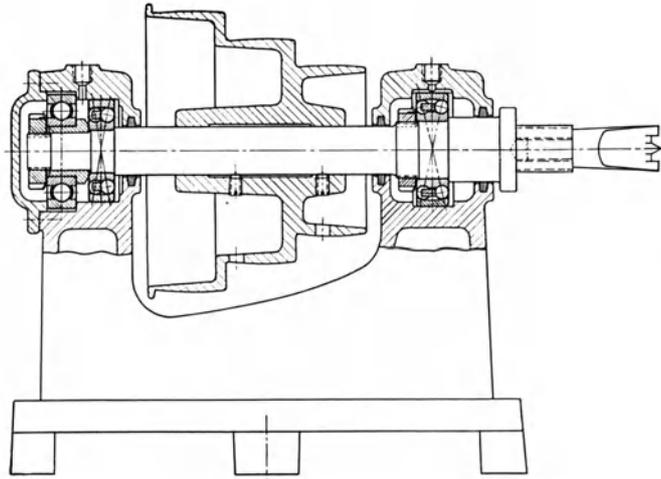


Abb. 51.24. Beachte die Aufnahme der Längskraft durch ein Radiallager.

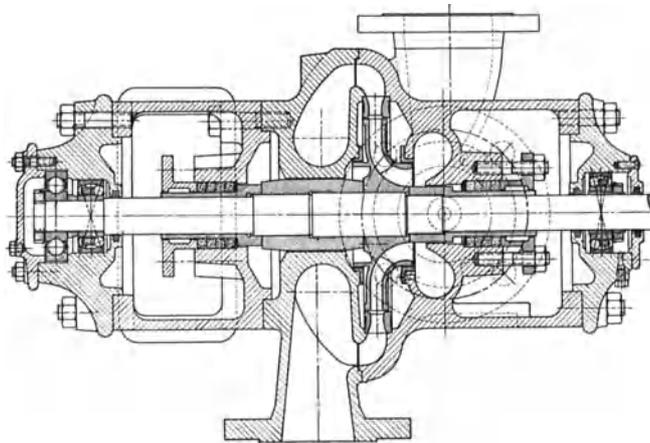


Abb. 51.25. Zentrifugalpumpe. Aufnahme der Längskraft durch Radiallager.

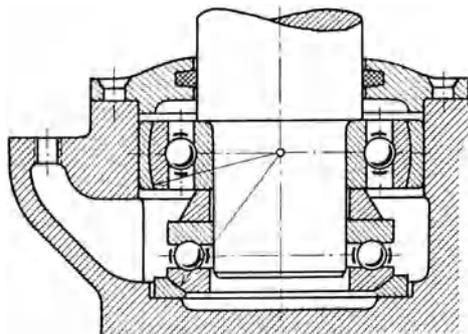


Abb. 51.26. Unteres Längs- und Querlager für vertikale Wellen.

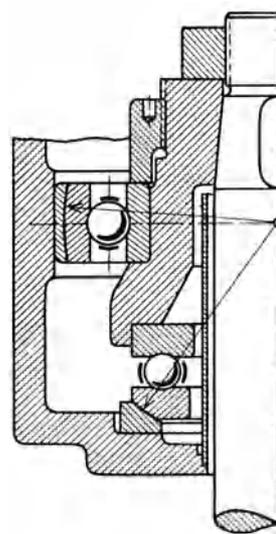


Abb. 51.28. Oberes Längs- und Querlager für vertikale Wellen.

NB. Das Querlager mit Einstellung wird heute durch ein Pendellager ersetzt.

Um das Eindringen von Staub zu verhindern, sind die Lager gut abzudichten. Für Fettschmierung sind in Öl getränkte Filzringe geeignet (Abb. 51.31); sie erzeugen in neuem Zustand eine sehr stark erhöhte Reibung.

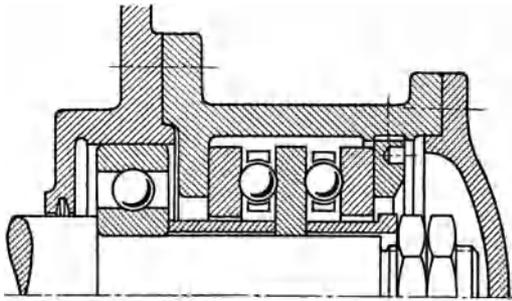


Abb. 51.29. Schnecken-Endlager.

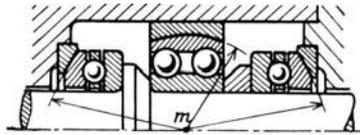


Abb. 51.30. Lager für Quer- und wechselseitige Längsbelastung (nach Behr-Gohlke).

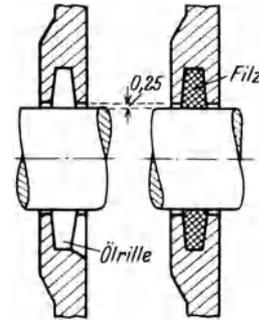


Abb. 51.31. Staubabdichtungen.

52. Beanspruchung und Formänderung.

52.1. Die allgemeinen Gleichungen von H. Hertz.

Schrifttum.

Hertz, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte. Leipzig: Gesammelte Werke Bd. I 1895.

Föppel, A. u. L.: Drang und Zwang Bd. II § 87 (Verlag Oldenburg) geben eine für Ingenieure verständliche Ableitung für den einfachsten Fall, daß eine Kugel auf eine Platte gedrückt wird.

Palmgren, A., Untersuchungen über die statische Tragfähigkeit von Kugellagern Göteborg 1930.

Die Grundlage für die Berechnung der Wälzkörper nach der Hertz'schen Theorie. Neben den allgemein gebräuchlichen Voraussetzungen von homogenen, isotropen, vollkommen elastischen Körpern, die dem Hookeschen Gesetz folgen, setzt die Theorie voraus, daß die Körper sich in einem sehr kleinen Teil ihrer Oberfläche berühren, d. h. die Druckfläche ist eben und sei außerdem vollkommen glatt, so daß nur normal gerichtete Kräfte in den Druckflächen auftreten und keine Schubspannungen.

Man weiß heute, daß diese Voraussetzungen bei den Wälzlagern nicht genau erfüllt sind. Bei den in der Praxis üblichen (und aus wirtschaftlichen Gründen notwendigen) Belastungen wird die Elastizitätsgrenze überschritten. Man erkennt dies auch an der Tatsache, daß Wälzlager eine beschränkte Lebensdauer haben, die von der Belastung abhängt. Die Druckfläche ist auch nicht eben und nicht glatt; neben den Normalspannungen treten in der Druckfläche auch Schubspannungen auf¹. Der Werkstoff ist nicht homogen, da die Randschichten andere Festigkeitseigenschaften haben als die innen liegenden Teile. Dennoch bilden die Hertz'schen Gleichungen ein unentbehrliches und wertvolles Hilfsmittel zur Beurteilung der Tragfähigkeit der Lager, unter Vorbehalt späterer Ergänzungen durch die Erfahrung.

Die X- und Y-Achsen (Abb. 52.1) liegen in der gemeinsamen Tangentialebene in der Berührungsstelle; die Z-Achse steht senkrecht dazu. Die Y-Achse fällt in die Rollrichtung des Wälzkörpers, so daß die kleine Hauptachse der Druckellipse in der Y-Richtung fällt. Die Halbachsen a und b der Druckellipse sind, wenn Wälzkörper und Laufbahn aus dem gleichen Werkstoff hergestellt sind:

$$a = 1,4 \mu \sqrt[3]{\frac{P_0}{E \Sigma \varrho}} \quad \text{und} \quad b = 1,4 \nu \sqrt[3]{\frac{P_0}{E \Sigma \varrho}}. \quad (52.1)$$

Sind Wälzkörper und Laufbahn aus verschiedenen Werkstoffen hergestellt, dann ist

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right). \quad (52.2)$$

Für Kugellagerstahl (Chromstahl) ist $E = 18700 \text{ kg/mm}^2$. In diesen Gleichungen ist

$$1,4 = \sqrt[3]{\frac{3(m^2-1)}{m^2}} \quad \text{für } m = 10/3 \quad \text{und} \quad \Sigma \varrho = \varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22} \quad \text{gleich der Summe der vier Hauptkrümmungen an der Berührungsstelle.} \quad (52.3)$$

¹ Die Schubspannungen hat Dr. Raynfeld durch photoelastische Untersuchungen bei der Berührung zweier Walzen experimentell nachgewiesen. Diss. T. H. Zürich, 1933.

Index 1 an erster Stelle bezieht sich auf den Wälzkörper, und gilt an zweiter Stelle für Krümmungen in der Ebene des Rollkreises.

Index 2 an erster Stelle bezieht sich auf die Laufbahn und gilt an zweiter Stelle für Krümmungen in der Ebene senkrecht zum Rollkreis.

Eine Krümmung, deren Mittelpunkt nach dem Innern des Körpers zu gelegen ist, wird positiv gerechnet (z. B. Vollkugel); die übrigen (z. B. Hohlkugel) sind negativ. Für ein Querkugellager z. B. ist

$$\begin{aligned} r &= 1/\varrho_{11} = 1/\varrho_{12} = \text{Kugelradius,} \\ r_a &= -1/\varrho_{21} = \text{Laufradius des Außenringes,} \\ r_i &= 1/\varrho_{21} = \text{„ „ Innenringes,} \\ r_{ra} &= -1/\varrho_{22} = \text{Rillenhalmesser des Außenringes,} \\ r_{ri} &= -1/\varrho_{22} = \text{„ „ Innenringes.} \end{aligned}$$

μ und ν sind Zahlenfaktoren, die von den Hilfswinkeln τ und ε abhängen.

$$\mu = \sqrt[3]{\frac{K(\varepsilon) - E(\varepsilon)}{\frac{\pi}{4} \cdot \sin^2 \varepsilon \cdot (1 - \cos \tau)}} \quad \text{und} \quad \nu = \sqrt[3]{\frac{[E(\varepsilon) \cdot \cos \varepsilon - K(\varepsilon)] \cdot \cos^3 \varepsilon}{\frac{\pi}{4} \cdot \sin^2 \varepsilon \cdot (1 + \cos \tau)}} \quad (52.4)$$

worin:

$$\cos \varepsilon = b/a = \nu/\mu = e \quad (52.5)$$

$K(\varepsilon)$ ist das mit dem Modul $\sin \varepsilon$ gebildete vollständige elliptische Integral erster Ordnung¹. $E(\varepsilon)$ ist das mit dem gleichen Modul gebildete vollständige elliptische Integral zweiter Ordnung¹.

$$\begin{aligned} \cos \tau &= \frac{\sqrt{(\varrho_{11} - \varrho_{12})^2 + 2(\varrho_{11} - \varrho_{12})(\varrho_{21} - \varrho_{22}) \cos 2\omega + (\varrho_{21} - \varrho_{22})^2}}{\Sigma \varrho} \\ &= \frac{E(\varepsilon) \cdot (1 + \cos^2 \varepsilon) - 2K(\varepsilon) \cos^2 \varepsilon}{E \sin^2 \varepsilon} \end{aligned} \quad (52.6)$$

ω ist der Winkel, den die mit den Indizes 11 und 21 gekennzeichneten Normalebenen miteinander bilden. Die Beziehungen zwischen μ , ν und τ können aus Zahlentafel 52.1 entnommen werden.

Für $\omega = 0$ ist

$$\cos \tau = \frac{\varrho_{11} - \varrho_{12} + \varrho_{21} - \varrho_{22}}{\Sigma \varrho} \quad (52.7)$$

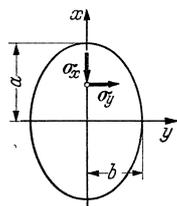


Abb. 52.2. Elliptische Druckfläche.

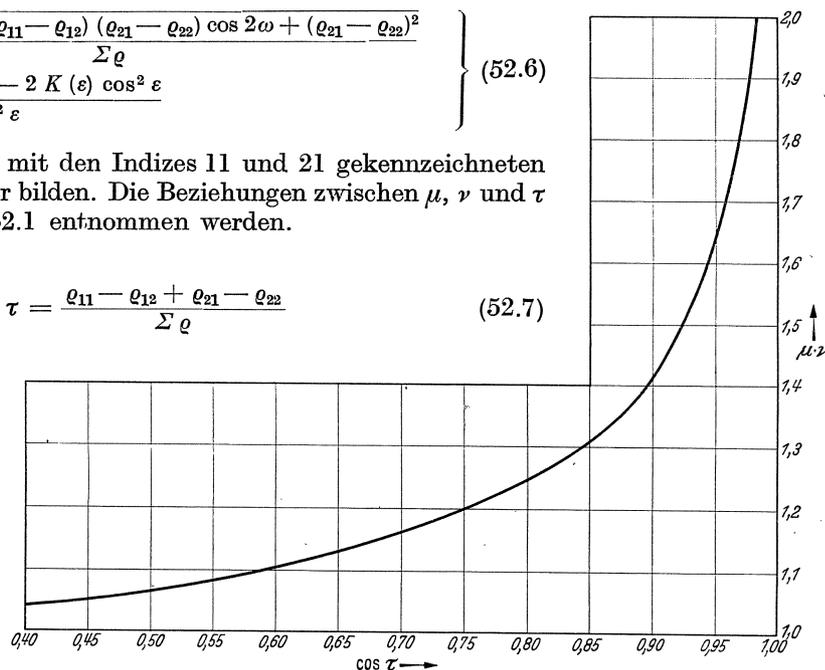


Abb. 52.3. $\mu \cdot \nu$ in Abhängigkeit von τ .

Zahlentafel 52.1. μ und ν in Abhängigkeit von τ .

$\cos \tau$	0,400	0,500	0,600	0,700	0,750	0,800	0,850	0,900	0,925	0,950	0,975
μ	1,35	1,48	1,66	1,91	2,07	2,295	2,57	3,06	3,50	4,14	5,22
ν	0,769	0,718	0,664	0,608	0,577	0,545	0,509	0,462	0,432	0,395	0,352

¹ Ausführliche Zahlentafeln der Elliptischen Funktionen in Jahnke u. Emde: Funktionstafeln. Leipzig und Berlin: Teubner, 1933. Auszugsweise im Taschenbuch Hütte, Bd. I, S. 50.

Nach den Erweiterungen der Hertz'schen Gleichungen durch Weibull¹ und Sundberg² sind die Spannungen innerhalb der Druckfläche, längs der b -Achse, wenn $e < 1$ ist und $\gamma = y/b$ (vgl. Abb. 52.2):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{3 P_0}{2 \pi a b} \left[\frac{m-2}{m} \cdot \frac{e}{1-e^2} \left(1 - \frac{e \gamma}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\gamma \sqrt{1-e^2}}{e + \sqrt{1-\gamma^2}} - e \sqrt{1-\gamma^2} \right) + \frac{2}{m} \sqrt{1-\gamma^2} \right] \\ \sigma_y &= -\frac{3 P_0}{2 \pi a b} \left[\frac{m-2}{m} \cdot \frac{e}{1-e^2} \left(1 - \frac{e \gamma}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\gamma \sqrt{1-e^2}}{e + \sqrt{1-\gamma^2}} - e \sqrt{1-\gamma^2} \right) - \sqrt{1-\gamma^2} \right] \\ \sigma_z &= -\frac{3 P_0}{2 \pi a b} \sqrt{1-\gamma^2} \end{aligned} \right\} (52.8)$$

und längs der a -Achse, wenn $e = \frac{a}{b} > 1$ und $\gamma = \frac{x}{a}$ ist:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{3 P_0}{2 \pi a b} \left[\frac{m-2}{m} \cdot \frac{e}{e^2-1} \left(e \sqrt{1-\gamma^2} + \frac{e \gamma}{\sqrt{e^2-1}} \ln \frac{e \gamma + \sqrt{e^2-1}}{\sqrt{(e^2-1)(1-\gamma^2)} + \gamma} - 1 \right) + \frac{2}{m} \sqrt{1-\gamma^2} \right] \\ \sigma_y &= -\frac{3 P_0}{2 \pi a b} \left[\frac{m-2}{m} \cdot \frac{e}{e^2-1} \left(e \sqrt{1-\gamma^2} + \frac{e \gamma}{\sqrt{e^2-1}} \ln \frac{e \gamma + \sqrt{e^2-1}}{\sqrt{(e^2-1)(1-\gamma^2)} + \gamma} - 1 \right) - \sqrt{1-\gamma^2} \right] \\ \sigma_z &= -\frac{3 P_0}{2 \pi a b} \sqrt{1-\gamma^2} \end{aligned} \right\} (52.9)$$

Der Zahlenwert $\mu \cdot \nu$, der bei der Spannungsberechnung vorkommt, kann aus Abb. 52.3 abgelesen werden.

Die Zusammendrückung ist:

$$\delta = \frac{3 P_0 m^2 - 1}{\pi m^2 E} \cdot \frac{K(\varepsilon)}{a} \quad (52.10)$$

In der Mitte der Druckfläche ist $\gamma = 0$,

$$\sigma_z = -\frac{3 P_0}{2 \pi a b} = p_0, \quad \sigma_x = \frac{2 + e m}{m(1+e)} p_0 \quad \text{und} \quad \sigma_y = \frac{2e + m}{m(1+e)} p_0 \quad (52.11)$$

Am Rande der Druckfläche ($\gamma = 1$) ist in Richtung der b -Achse ($e < 1$)

$$\sigma_x = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{e}{1-e^2} \left(1 - \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \right) p_0 = -\sigma_y \quad (52.12)$$

und in Richtung der a -Achse ($e > 1$).

$$\sigma_x = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{e}{e^2-1} \left(\frac{e}{2\sqrt{e^2-1}} \ln \frac{e + \sqrt{e^2-1}}{e - \sqrt{e^2-1}} - 1 \right) = -\sigma_y \quad (52.13)$$

52.2. Anwendung auf Kugeln.

Für die Zusammendrückung von zwei Kugeln mit den Radien r_1 und r_2 (Abb. 52.4) ist die Druckfläche kreisförmig, also $a = b$ also $\cos \varepsilon = 1$ und $\varepsilon = 0$.

$$r_1 = 1/\varrho_{11} = 1/\varrho_{22}, \quad r_2 = 1/\varrho_{21} = 1/\varrho_{22}, \quad \Sigma \varrho = 2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{2}{r}.$$

$$\cos \tau = \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2}}{\Sigma \varrho} = 0$$

und nach Zahlentafel 52.1: $\mu = \nu = 1$. Der Radius der Druckfläche folgt

aus Gl. (1) zu:

$$a = b = \frac{1,4}{\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{\frac{P_0 r}{E}} = 1,11 \sqrt[3]{\frac{P_0 r}{E}} \quad (52.14)^3$$

Aus Gl. (8) resp. (9) folgt, daß die Druckspannung σ_z am Rande der Druckfläche ($\gamma = 1$) gleich Null ist und nach der Mitte zu, wie die Ordinaten einer über die Druckfläche konstruierten Halbkugel zunimmt. Für die Mitte der Druckfläche ($\gamma = 0$) ist:

$$p_0 = -\frac{3 P_0}{2 \pi a^2} = -0,388 \sqrt[3]{\frac{P_0 E^2}{r^2}} \quad (52.15)^3$$

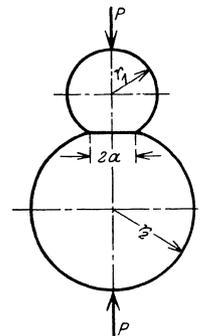


Abb. 52.4.

¹ Weibull, W.: Tekn. T. Mek. 1919. Heft 2, S. 30.

² Palmgren, A. u. K. Sundberg: Tekn. T. Mek. 1919. Heft 4, S. 57.

³ Diese Gleichungen wurden zuerst durch A. Föppl den Ingenieuren zugänglich gemacht in Bd. 3 seiner „Vorlesungen über techn. Mech.“

Die dort gleichzeitig auftretenden Spannungen σ_x und σ_y werden nach Gl. (11) mit $m = 10/3$:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{2+m}{2m} p_0 = 0,8 p_0. \quad (52.16)$$

Die Abplattung wird nach Gl. (10) mit $m = 10/3$:

$$\delta = \frac{3 \cdot 91}{\pi \cdot 100 E} \cdot \frac{P_0 K(\varepsilon)}{1,11 \sqrt[3]{P_0 r/E}}.$$

Nach Taschenbuch „Hütte“ Bd. I (26. Aufl.), S. 50 ist für $\varepsilon = 0$, $K(\varepsilon) = \pi/2$, also

$$\delta = 1,23 \sqrt[3]{\frac{P_0^2}{E^2 r}}. \quad (52.17)$$

Am Rande der Druckfläche folgt aus Gl. (12) mit $e = 1$ durch Reihenentwicklung¹:

$$\sigma_x = -\sigma_y = \frac{m-2}{3m} p_0 = 0,133 p_0. \quad (52.18)$$

Wohl bei keinem Maschinenteil kommt die Bedeutung der Bruchhypothese für die Berechnung der Tragfähigkeit so deutlich zum Ausdruck, wie beim Wälzlager. Wie hoch darf z. B. eine Kugel von 20 mm Durchmesser aus Chromstahl ($K_z = 200 \text{ kg/mm}^2$) beim Druck gegen einer Platte aus dem gleichen Werkstoff belastet werden?

Wenn die größte Normalspannung ausschlaggebend für die Bruchgefahr wäre, so müßte $p_0 = 0,388 \sqrt[3]{\frac{P E^2}{r^2}}$ kleiner als p_{zul} sein. Mit $E = 18700 \text{ kg/mm}^2$ (Chromstahl) und $r = 10 \text{ mm}$:

$$p_0 = 59 \sqrt[3]{P} \text{ kg/mm}^2 < p_{zul}.$$

Bei $P = 64 \text{ kg}$ Belastung hätte $p_0 = 236 \text{ kg/mm}^2$ die Bruchfestigkeit des Werkstoffes schon überschritten. Jedermann kann sich durch einen einfachen Versuch leicht davon überzeugen, daß bei dieser Belastung nicht von einer Bruchgefahr gesprochen werden kann. Erfahrungsgemäß trägt die Kugel von 20 mm Durchmesser leicht 1000 kg, ohne daß eine Zerstörung eintritt.

Das kommt daher, daß der Spannungszustand räumlich ist. In der Mitte der Druckfläche ist $\sigma_2 = \sigma_3 = 0,8 p_0$ und am Rande $\sigma_2 = -\sigma_3 = 0,133 p_0$.

Wenn wir von der Bruchhypothese von Mohr ausgehen, ist die maximale Schubspannung ausschlaggebend für die Bruchgefahr, also

$$\text{in der Mitte } \tau_{\max} = \frac{p_0 - 0,8 p_0}{2} = 0,1 p_0$$

$$\text{und am Rande } \tau_{\max} = \frac{0,133 - (-0,133)}{2} p_0 = 0,133 p_0.$$

Die Schlußfolgerung, daß die Bruchgefahr am Rande größer ist, wurde schon durch die Versuche von Stribeck (um 1900) bestätigt. Er beobachtete, daß der erste Sprung am Rande der Druckfläche auftritt, was nachgewiesen werden kann, wenn die Kugeln mit verdünnter Säure geätzt werden. Die Sprunglast betrug bei seiner Versuchsanordnung (Abb. 52.5) $P_s = 5,5$ bis $7,0 d_{\text{mm}}^2 \text{ kg}$. Da $1/r = 2/d + 2/d = 4/d$ ist, wird

$$\tau_{\max} = 0,133 \cdot 0,388 \sqrt[3]{18700^2 \cdot 4^2} \sqrt[3]{P/d^2}$$

also $\tau_{\max} = 130$ bis 150 kg/mm^2 . Dieser Wert liegt bedeutend höher als beim einachsigen Zugversuch ($\tau_{\max} = \frac{1}{2} K_z = 100 \text{ kg/mm}^2$).

Befindet sich ein Wälzlager in Betrieb, so zeigt sich als erste Zerstörung ein Abblättern der obersten Schicht der Laufbahn, die sog. Schälung. Diese Erscheinung ist aus den bisherigen Betrachtungen über die Bruchursache nicht zu erklären. Man muß dazu noch die Spannungen im Innern des Körpers (unterhalb der Druckfläche) berechnen.

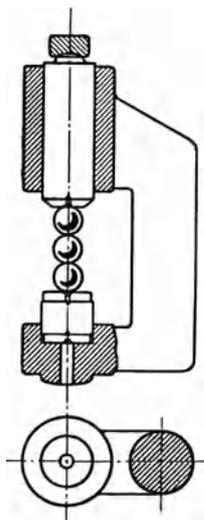


Abb. 52.5.

¹ $\text{arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$; $\text{arc tg } \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} - \frac{(1-e^2)^{3/2}}{3e^3} + \frac{(1-e^2)^{5/2}}{5e^5} - \dots$
 $\frac{m\sigma_x}{p_0(m-2)} = \frac{e}{1-e^2} - \frac{e^2}{(1-e^2)^{3/2}} \left[\frac{(1-e^2)^{1/2}}{e} - \frac{(1-e^2)^{3/2}}{3e^3} + \frac{(1-e^2)^{5/2}}{5e^5} - \dots \right] = + \frac{1}{3e} - \frac{(1-e^2)}{5e^3} + \dots = \frac{1}{3}.$

52.3. Für den unendlich großen Umdrehungskörper mit Einzellast P im Koordinatenanfangspunkt

(Abb. 52.6) hat Boussinesq die elastischen Verschiebungen ξ und ϱ (Abschn. 14.2) in relativ großer Entfernung von der Kraftangriffsstelle berechnet. Mit $u = \sqrt{r^2 + x^2}$ ist:

$$\xi = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{2(m-1)}{mu} + \frac{x^2}{u^3} \right] \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{P}{4\pi G} \left(\frac{rx}{u^3} - \frac{m-2}{m} \cdot \frac{r}{u^2 + ux} \right).$$

Mit Hilfe der Gl. (14.17) findet man daraus nach einigen Umformungen die Spannungen (A. u. L. Föppel: Drang und Zwang Bd. II S. 230):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{x^3}{u^5} = -\frac{3P}{2\pi u^2} \cos^3 \varphi \\ \sigma_r &= \frac{P}{2\pi} \left(\frac{m-2}{m} \cdot \frac{1}{u(u+x)} - \frac{3xr^2}{u^5} \right) = \frac{P}{2\pi u^2} \cdot \left[\frac{m-2}{m(1+\cos\varphi)} - 3\cos\varphi \sin^2\varphi \right] \\ \sigma_t &= \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{m-2}{m} \left[\frac{x}{u^3} - \frac{1}{u(u+x)} \right] = \frac{P}{2\pi u^2} \cdot \frac{m-2}{m} \left[\cos\varphi - \frac{1}{1+\cos\varphi} \right] \end{aligned} \right\} \quad (52.19)$$

und $\tau = \frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{x^3 r}{u^5} = \frac{3P}{2\pi u^2} \cos^2 \varphi \sin \varphi.$

An der horizontalen Oberfläche des Körpers (für $x = 0$) verschwindet sowohl σ_x als τ überall, mit Ausnahme der Kraftangriffsstelle. Die Spannungsgleichungen genügen also den Randbedingungen; ebenso kann man leicht nachweisen, daß $\int_0^x \sigma_x dF = -P$ ist. Damit ist bewiesen,

daß die Formeln von Boussinesq für die Verschiebungen eine strenge Lösung der Aufgabe bilden. Die Spannungen nehmen in der Richtung φ mit dem Quadrate der Entfernungen u vom Ursprung ab.

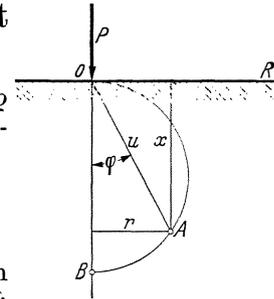


Abb. 52.6.

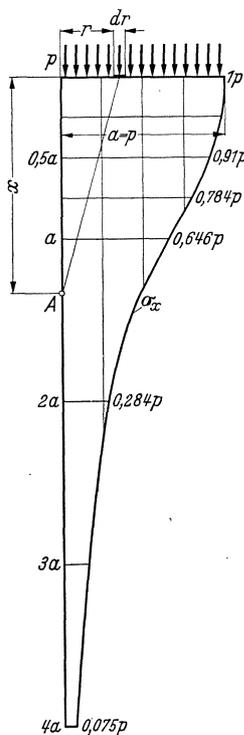


Abb. 52.7.

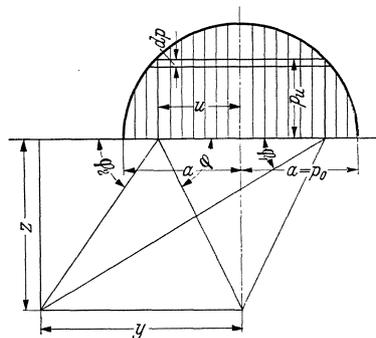


Abb. 52.8.

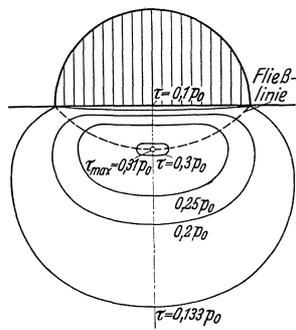


Abb. 52.10.

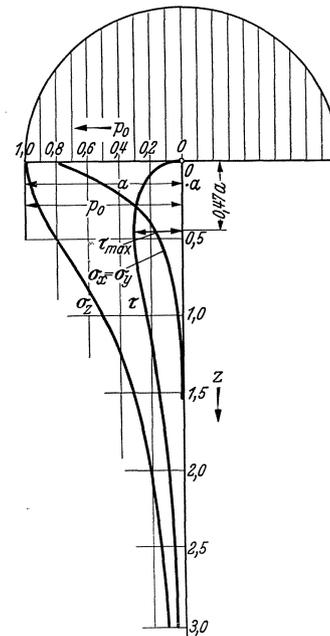


Abb. 52.9.

Mit Hilfe der Gleichungen für eine Einzellast, findet man durch Superposition auch die Spannungen für irgendeine Stelle des Körpers durch Summierung der einzelnen Wirkungen. Für eine gleichmäßig verteilte Belastung z. B. wirkt auf ein Flächenelement $r d\varphi dr$ der Druckfläche, die Belastung $pr d\varphi dr$, die man als Einzelkraft auffassen kann und im Punkte A die Teilspannung $\frac{3pr d\varphi dr}{2\pi} \cdot \frac{x^3}{(x^2 + r^2)^{5/2}}$ hervorruft. Durch Integration über die ganze Druckfläche erhält man die Spannung σ_x im Punkte A (Abb. 52.7).

In ähnlicher Weise kann die Beanspruchung bei der kugelförmigen Belastung (Abb. 52.8) der Druckfläche, durch Zerlegung in unendlich dünnen Streifen, berechnet werden.

Das Ergebnis der Berechnung ist in Abb. 52.9 u. 10¹ dargestellt. Man erkennt daraus, daß für $z = 0,47 a$, $\sigma_z = 0,8 p_0$ und $\sigma_x = \sigma_y = 0,18 p_0$, also $\tau_{\max} = 0,31 p_0$ ist, gegenüber $\tau_{\max} = 0,133 p_0$ am Rande der Druckfläche. Der Verlauf der maximalen Schubspannungen unterhalb der Druckfläche erklärt, wie die Abblätterung der Gleitfläche von der Stelle τ_{\max} nach der Oberfläche entstehen kann.

Die Versuche über die statische Beanspruchung von Kugeln durch A. Föppl, Palmgren und L. Föppl führten zum bemerkenswerten Ergebnis, daß die ersten Anzeichen bleibender Formänderung bei verschiedenen Kugeldurchmessern d nicht allein von den Spannungen abhängen, die sich nach den Hertz'schen Formeln berechnen lassen (p_0 resp. τ_{\max}), sondern auch vom Durchmesser d der Kugel. Als Gesetzmäßigkeit fanden sie mit großer Genauigkeit, daß der Übergang vom elastischen in den plastischen Zustand eintrat, wenn das Produkt $p_0 \sqrt[3]{d}$ einen konstanten Grenzwert überschreitet. Je kleiner die Kugel, um so größer darf also p_0 sein; die Belastungsfähigkeit steigt mit abnehmendem Durchmesser. Früher wurden diese Abweichungen zwischen Theorie und Erfahrung durch die Annahme zu erklären versucht, daß die Festigkeitseigenschaften in den dünnen Oberflächenschichten andere sind als im Innern des Körpers. Heute weiß man, daß das Spannungsfeld bei der Beurteilung der Bruchgefahr eine bedeutende Rolle spielt und daß der Gleitweg von der gefährdeten Stelle bis zur freien Oberfläche dabei eine Rolle spielt. Wenn man die Länge des Gleitweges proportional mit dem Radius a der Druckfläche setzt, so ist der Gleitweg tatsächlich proportional mit $\sqrt[3]{d}$. Man könnte also in diesen Versuchen eine Bestätigung dieser Bruchhypothese sehen.

Aus der Tatsache, daß die Bruchgefahr bei allen Bruchhypothesen von p_0 abhängt, können zwei wichtige Schlußfolgerungen für die Tragfähigkeit der Wälzlager gezogen werden. Die mittlere Pressung in der Druckfläche muß jedenfalls kleiner als die Brinellsche Härtezahl H sein (vgl. S. 86), da sonst unzulässig große bleibende Formänderungen auftreten würden. Setzt man in der Beziehung $p_m = \frac{P_0}{\pi a b} < H$ die Werte von a und b aus Gl. (1) ein, so wird

$$p_m = \frac{1}{2\pi} \sqrt[3]{\frac{P_0 (E \Sigma \varrho)^2}{(\mu \nu)^3}} < H. \quad (52.20)$$

Daraus folgt:

1. daß unter sonst gleichen Verhältnissen die zulässige Belastung zweier Körper proportional mit H^3 ist. Ein Kugellager aus Chromstahl ($H = 700 \text{ kg/mm}^2$) kann gegenüber einem Lager aus St 50 ($H = 130 \text{ kg/mm}^2$) $(700/130)^3 = 155$ mal so stark belastet werden.

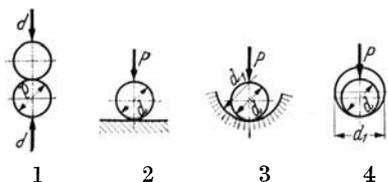


Abb. 52.11. Verschiedene Anschmiegungen.

Nach einer kleinen Umformung lautet Gl. (20):

$$p_m = \frac{\sqrt[3]{E^2}}{2\pi} \sqrt[3]{\frac{P_0}{d^2}} \sqrt[3]{\frac{(d \Sigma \varrho)^2}{(\mu \nu)^3}} < H, \quad (52.21)$$

woraus folgt:

2. Die zulässige Belastung ist um so größer, je größer der dimensionslose Faktor $\Phi = \frac{(\mu \nu)^{3/2}}{d \Sigma \varrho}$, der ein Maß für die Anschmiegung der beiden Körper ist, und zwar

ist P_0/d^2 prop. mit Φ^2 . Für eine Kugel ist $\mu = \nu = 1$ und $\Phi = \frac{1}{d \Sigma \varrho}$.

$$\text{Abb. 52.11 Pos. 1. } \Sigma \varrho = \frac{2}{d} + \frac{2}{d} + \frac{2}{d} + \frac{2}{d} = \frac{8}{d} \quad \Phi_1 = \frac{1}{8}$$

$$\text{„ 2. } \Sigma \varrho = \frac{2}{d} + \frac{2}{d} + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} = \frac{4}{d} \quad \text{und } \Phi_2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{„ 3. } \Sigma \varrho = \frac{2}{d} + \frac{2}{d} - \frac{1}{d} - \frac{1}{d} = \frac{2}{d} \quad \Phi_3 = 1/2$$

$$\text{„ 4. } d_1 = 1,04 d; \Sigma \varrho = \frac{2}{d} + \frac{2}{d} - \frac{1}{0,52 d} - \frac{1}{0,52 d} = \frac{0,15}{d} \quad \text{und } \Phi_4 = 6,65.$$

Im vierten Belastungsfall darf die Belastung P_0/d^2 , $53,2^2 = 2800$ mal so groß sein als im ersten!

¹ Prof. N. M. Belajef (Petersburg) hat schon im Jahre 1917 nachgewiesen, daß die Bruchgefahr nicht am Rande der Druckfläche am größten ist. Vgl. S. Timoshenko: Theory of Elasticity. London u. New York: Mc Graw Hill Book Co 1934, S. 344. — Siehe auch Föppl, L.: Der Spannungszustand und die Anstrengung der Werkstoffe bei der Berührung zweier Körper. Forschung 7 (1936), S. 209.

52.4. Anwendung auf Kugellager.

Für nicht kugelförmige Körper ist noch der Einfluß von $\mu \cdot \nu = F(\tau)$ nach Zahrentafel 52.1 zu berücksichtigen. Der Hilfswinkel τ gibt ein direktes Vergleichsmaß für die Beanspruchung der einzelnen Teile eines Wälzlagers. Je kleiner $\cos \tau$ ist, um so kleiner wird $\mu \nu$ und um so größer die Beanspruchung.

Für den Außenring eines Radiallagers (Abb. 52.12) ist

$$\cos \tau_a = \frac{e_{21} - e_{22}}{\Sigma e} = \frac{\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_{ra}}}{4 \frac{1}{d} + \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_{ra}}}$$

und für den Innenring

$$\cos \tau_i = \frac{e_{21} - e_{22}}{\Sigma e} = \frac{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{ri}}}{4 + \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{ri}}}$$

Ist z. B. $d_a = 6$, $d_i = 4$ und $d = 1$ cm, so ist

$$\cos \tau_a = \frac{-\frac{1}{3} + \frac{1}{0,52}}{4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{0,52}} = \frac{1,590}{1,744} = 0,91 \text{ und } \mu \cdot \nu = 1,45$$

und

$$\cos \tau_i = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{0,52}}{4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{0,52}} = \frac{1,423}{2,577} = 0,555 \text{ und } \mu \cdot \nu = 1,08 \text{ .}$$

Bei einem Radiallager ist demnach der Innenring der schwächste Teil. Beim Pendellager dagegen ist der kugelförmige Außenring am meisten gefährdet, da $\cos \tau_a = 0$, also $\nu \mu = 1$ ist.

Bei einem richtig eingebauten Scheiben-(längs-)lager tragen alle Kugeln gleichviel. Bei ruhender, stoßfreier Belastung (z. B. beim Kranhaken) geht man bis

$$P_0 = P/z = 250 d^2 \text{ .} \quad (52.22)$$

Zahlenbeispiel 51.1. Für ein Scheibenlager ist: $e_{11} = e_{12} = 2/d$, $e_{21} = \frac{1}{\infty} = 0$,

$$e_{22} = -\frac{1}{1,04 r} = -\frac{1}{0,52 d}; \quad \Sigma e = \frac{2}{d} + \frac{2}{d} + 0 - \frac{1}{0,52 d} = \frac{2,077}{d}$$

$$\text{Nach Gl. 7 ist: } \cos \tau = \frac{e_{11} - e_{12} + e_{21} - e_{22}}{\Sigma e} = \frac{\frac{0,52 d}{2,077}}{\frac{1}{d}} = 0,926 \text{ .}$$

Aus Zahrentafel 52.1 folgt $\mu = 3,51$, $\nu = 0,431$ und $\mu \cdot \nu = 1,51$. Das Verhältnis der Achsen der Druckellipse ist $\frac{b}{a} = \frac{\nu}{\mu} = \frac{0,431}{3,51} = 0,123 = e$. In der Mitte der Druckfläche ($\gamma = y/b = 0$) ist nach Gl. 8: $(\sigma_z)_0 = p_0 = -\frac{3 P_0}{2 \pi a b}$, und nach Gl. (1):

$$a = 1,4 \mu \sqrt[3]{\frac{P_0}{E \Sigma e}}, \quad b = 1,4 \nu \sqrt[3]{\frac{P_0}{E \Sigma e}} \text{ und } ab = 2 \mu \nu \sqrt[3]{\left(\frac{P_0}{E \Sigma e}\right)^2}$$

$$p_0 = -\frac{3 \sqrt[3]{(E \Sigma C)^2}}{4 \pi x 1,51} \sqrt[3]{P_0} = 3900 \sqrt[3]{P_0/d^2}$$

Mit $P_0 = 250 d^2$ wird $p_0 = 24 500 \text{ kg/cm}^2$.

Aus Gl. (11) folgen die Spannungen (mit $m = 10/3$):

$$\sigma_x = \frac{2e + m}{m(1+e)} p_0 = \frac{2 + 0,123 \cdot 10/3}{10/3 \cdot 1,123} = 0,644 p_0, \quad \sigma_y = \frac{2e + m}{m(1+e)} p_0 = \frac{0,246 + 10/3}{10/3 \cdot 1,123} = 0,956 p_0$$

und damit die max. Schubspannung in der Mitte der Druckfläche:

$$\tau_{\max} = \frac{1 - 0,644}{2} p_0 = 0,178 p_0 = 4350 \text{ at .}$$

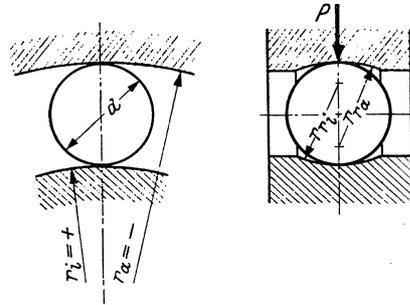


Abb. 52.12. Beanspruchungen in einem Ringlager.

Die Bruchgefahr ist am größten in Richtung der großen Halbachse der Druckellipse.

Am Rande der Druckfläche ($\gamma = 1$) ist am Ende der kleinen Achse, nach Gl. (12):

$$\sigma_x = 0,4 \frac{0,123}{0,98487} \left(1 - \frac{0,123}{0,9924} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{0,9924}{0,123} \right) p_0 = 0,41 p_0 = -\sigma_y,$$

so daß dort $\tau_{\max} = 0,205 p_0 = \text{rd. } 5000 \text{ kg/cm}^2$ ist.

Am Ende der großen Halbachse ist nach Gl. (13): $e = \frac{a}{b} = 8,13$.

$$\sigma_x = 0,4 \cdot \frac{8,13}{65 \cdot 097} \left\{ \frac{8,13}{2 \cdot 8,0685} \ln \frac{8,13 + 8,0685}{8,13 - 8,0685} - 1 \right\} = 0,189 p_0 = -\sigma_y,$$

also die Bruchgefahr viel kleiner.

In einem Querlager dagegen sind die einzelnen Kugeln verschieden stark beansprucht. Nennt man $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ die einzelnen Belastungen (Abb. 52.13), so ist die totale Belastung gleich der Summe der vertikalen Komponenten:

$$P = P_0 + 2 P_1 \cos \alpha + 2 P_2 \cos 2\alpha + \dots + 2 P_n \cos n\alpha, \text{ oder}$$

$$\frac{P}{P_0} = 1 + 2 \frac{P_1}{P_0} \cos \alpha + 2 \frac{P_2}{P_0} \cos 2\alpha + \dots + 2 \frac{P_n}{P_0} \cos n\alpha. \tag{52.23}$$

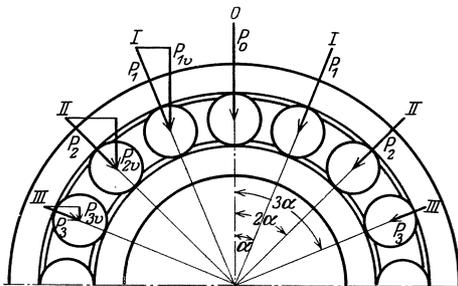


Abb. 52.13.

Wenn $z =$ Anzahl Kugeln im Lager ist, wäre $\alpha = 360/z$, so daß in einem Quadranten $n \leq z/4$ Kugeln sind.

Durch die Belastungen P_0 bis P_n verformen sich die Kugeln. δ_0 ist die der Belastung P_0 entsprechende Annäherung der beiden Laufringe in radialer Richtung. $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ die zu P_1, P_2, \dots, P_n gehörigen Annäherungen. Wenn die Kugeln gleich groß sind und zwischen Kugeln und Ringen vor der Belastung kein Spiel vorhanden war, und wenn die Ringe resp. Gehäuse starr sind, also unter der Einwirkung der Kräfte keine Formänderung erleiden, dann ist

$$\delta_1 = \delta_0 \cos \alpha, \quad \delta_2 = \delta_0 \cos 2\alpha, \text{ usw.}$$

Da, nach Gleichung (16): $\frac{P_0^2}{\delta_0^3} = \frac{P_1^2}{\delta_1^3} = \frac{P_2^2}{\delta_2^3} = \dots = \frac{P_n^2}{\delta_n^3} = \text{konst.}$ ist, wird

$$P_1 = P_0 \left(\frac{\delta_1}{\delta_0} \right)^{\frac{3}{2}} = P_0 \cos^{\frac{3}{2}} \alpha, \quad \text{oder} \quad 2 P_1 \cos \alpha = 2 P_0 \cos^{\frac{5}{2}} \alpha$$

$$P_2 = P_0 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0} \right)^{\frac{3}{2}} = P_0 \cos^{\frac{3}{2}} 2\alpha, \quad \text{oder} \quad 2 P_2 \cos 2\alpha = 2 P_0 \cos^{\frac{5}{2}} 2\alpha$$

.....

$$P_n = P_0 \cos^{\frac{3}{2}} n\alpha, \quad \text{oder} \quad 2 P_n \cos n\alpha = 2 P_0 \cos^{\frac{5}{2}} n\alpha.$$

$$\text{und } P = P_0 (1 + 2 \cos^{\frac{5}{2}} \alpha + 2 \cos^{\frac{5}{2}} 2\alpha + \dots + 2 \cos^{\frac{5}{2}} n\alpha). \tag{52.24}$$

Für $z = 10 \quad 15 \quad 20$ Kugeln

ist $\alpha = \frac{360}{10} = 36^\circ \quad 24^\circ \quad 18^\circ$

und nach Gl. (24) $\frac{P}{P_0} = 2,28 = \frac{z}{4,38} \quad 3,44 = \frac{z}{4,36} \quad 4,55 = \frac{z}{4,37}$

also $P_0 = P_{\max}/\text{Kugel} \approx \frac{4,38}{z} P.$

Die Voraussetzungen, daß die Kugeln gleich groß sind und die Ringe sich nicht verbiegen, sind tatsächlich nicht erfüllt, so daß die größte Belastung einer Kugel etwas größer wird. Stribeck setzt:

$$P_0 = \frac{5}{z} P \quad \text{oder} \quad P = 0,2z P_0. \tag{52.25}$$

Da nun die größte Kraft bekannt ist, die auf eine Kugel wirkt, könnte die mittlere Flächenpressung der Druckfläche aus den Gleichungen (8) und (9) berechnet werden, als Vergleichsmaß für die Beanspruchung, wenn die Krümmungsradien bekannt sind.

52.5. Längskräfte bei einem Ringlager.

Ringlager können auch Längskräfte A aufnehmen, durch welche die Ringe gegenseitig verschoben werden (Abb. 52.14), soweit es der Spielraum zwischen Kugeln und Rillen (Radialluft = Ralu genannt) zuläßt. Die achsiale Kraft A verteilt sich gleichmäßig auf die z -Kugeln; die Kraft $P_1 = A/z$ kann in zwei Komponenten zerlegt werden: Normal zur Berührungsfläche der Druck P_n zwischen Kugel und Ring, und Radial die Kraft P_r , welche den Ring spannt. Aus dem Kräfte-dreieck folgt:

$$\cos \alpha = P_1/P_n = a/(R-r)$$

oder
$$P_n = P_1 \frac{R-r}{a} \tag{52.26}$$

Die Kraft P_n ist für die Beanspruchung des Lagers ausschlaggebend und kann vielfach größer als P_1 sein, wenn $(R-r)/a$ groß ist. Will man große axiale Kräfte durch ein Ringlager zweckmäßig aufnehmen, so muß $(R-r)/a$ klein sein; man macht heute $R/r = 1,04$.

Achsiale Kräfte können also durch einen Umrechnungsfaktor als zusätzliche Querbeltung für die Lagerberechnung eingeführt werden. Ist R die Radialbelastung des Lagers in kg, einschließlich der evtl. Zusatzkräfte (Fliehkkräfte, usw.) und A die Achsialbelastung in kg, so ist die „gleichwertige“ Querbeltung:

$$P = R + A \cdot y \tag{52.27}$$

Der Faktor y hängt also von der Lagerkonstruktion ab und bei den Radial-Lagern außerdem noch vom Verhältnis P_a/P_r (vgl. Zahlentafel 52.4/5).

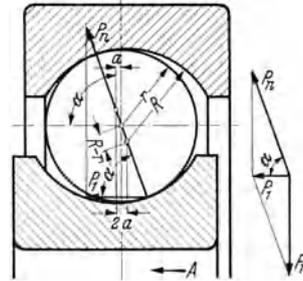


Abb. 52.14. Längsbelastung eines Querlagers.

52.6. Anwendung auf Zylinder.

Werden zwei Zylinder (Abb. 52.15) mit den Halbmessern r_1 und r_2 längs der gemeinsamen Erzeugenden durch die auf die Breitereinheit bezogene Kraft P_1 aufeinander gepreßt, so bildet sich in jeder Ebene senkrecht zur Zylinderachse (die nicht zu nahe an den Enden der Zylinder gelegen ist) ein ebener Formänderungszustand aus ($\epsilon_x = 0$). Die Druckfläche ist dann ein Rechteck. H. Hertz hat nachgewiesen, daß für die Mitte der Druckfläche

$$\epsilon_y = \epsilon_z = \frac{P_1}{\pi \cdot a} \cdot \frac{2(m+1)(m-2)}{m^2 E}$$

ist, mit

$$2a = 2 \sqrt{\frac{8(1-1/m^2)}{\pi}} \sqrt{\frac{P_1}{E \Sigma \varrho}} = 3,048 \sqrt{\frac{P_1}{E \Sigma \varrho}} \tag{52.28}$$

als schmale Seite des Rechteckes. In dieser Gleichung ist wieder

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \quad \text{und} \quad \Sigma \varrho = \frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2}.$$

Die Druckverteilung über die Berührungsfläche erfolgt nach der Gleichung

$$p_u = \frac{2 P_1}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{u}{a} \right)^2} \tag{52.29}$$

ist also halbkreisförmig. Die größte Flächenpressung (für $u = 0$) ist

$$p_0 = \frac{2 P_1}{\pi a} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{P_1}{2a} = 1,27 p_m \tag{52.30}$$

Mit a aus Gl. (28) wird

$$p_0 = \frac{4}{\pi \cdot 3,048} \sqrt{P_1 E \Sigma \varrho} = 0,418 \sqrt{P_1 E \Sigma \varrho} \tag{52.31}$$

Weiter folgt aus Gl. (12.59) für die Mitte der Druckfläche ($\sigma_y = \sigma_z = p_0$)

$$E \epsilon_x = 0 = \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \quad \text{oder (mit } m = 10/3): \tag{52.32}$$

$$\sigma_x = \frac{2}{m} \sigma_z = \frac{2 p_0}{m} = 0,6 p_0 \tag{52.33}$$

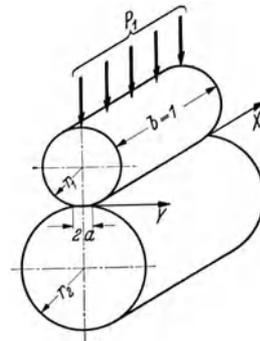


Abb. 52.15.

und

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} = \frac{p_0 - 0,6 p_0}{2} = 0,2 p_0 \quad (52.34)$$

ist. An den unbelasteten Zylinderenden ist $\sigma_x = 0$, der Spannungszustand also eben und dann $\tau_{\max} = p_0/2$, d. h. die Bruchgefahr ist an den freien Zylinderenden viel größer! Diese Überlegung wird durch die Erfahrung bestätigt. Zur Vermeidung dieser Gefahr werden die Rollen

an den Enden etwas abgerundet; sie tragen also nicht auf die volle Breite b .

Die größte Bruchgefahr liegt wieder unterhalb der Druckfläche. Das Ergebnis der Berechnung zeigt¹, daß in einer Tiefe von $0,78 a$ die größte Schubspannung

$$\tau_{\max} = 0,304 p_0 \quad (52.35)$$

ist (Abb. 52.16). Die Abplattung läßt sich für Zylinder aus den Hertzschen Gleichungen nicht berechnen².

Gl. (31) bildet die Grundlage nicht nur für die Berechnung der Zylinder-Rollenlager, sondern auch der Zahnräder [Abb. 52.17] und für die Berechnung der Beanspruchung zwischen Rad und Schiene. Im letzten Fall ist $r_2 = \infty$, so daß mit dem Raddurchmesser $D = 2r_1$

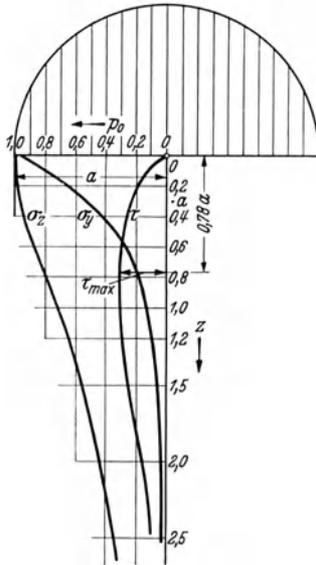


Abb. 52.16.

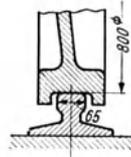


Abb. 52.17.

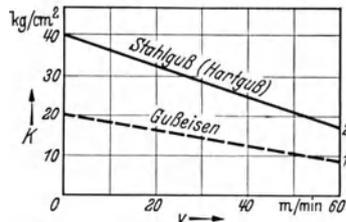


Abb. 52.18.
Zulässige Belastungen von Kranschiene.

$$P/bD = k = \frac{1}{2E} \left(\frac{p_0}{0,418} \right)^2 \text{ kg/cm}^2 \quad (52.36)$$

wird. Im Kranbau war es früher allgemein gebräuchlich für Stahl auf Stahl $k = 20$ bis 40 kg/cm^2 (je nach der Fahrgeschwindigkeit) einzusetzen (Abb. 52.18), entsprechend den Werten von p_0 von 3800 bis 5500 kg/cm^2 , die für die weichen Kranschiene sicher als Höchstwerte gelten. Wenn in der „Hütte“ (26. Aufl. Bd. 2, S. 862) nun empfohlen wird $k < 60 \text{ kg/cm}^2$, so ist bei fahrenden Kranen eine sehr rasche Abnutzung zu erwarten, was durch die Erfahrung bestätigt wird.

52.7. Tragfähigkeit und Lebensdauer.

Auch abgesehen davon, daß zur Zeit noch keine allgemein gültige Bruchhypothese bekannt ist, kann die zulässige Belastung der Wälzlager schon deshalb nicht berechnet werden, weil

1. die Anschmiegeverhältnisse der Tragflächen nicht einheitlich festgelegt und dem Verbraucher auch nicht bekannt sind, und
2. die praktisch gebräuchlichen Belastungen erfahrungsgemäß oberhalb der Dauerfestigkeit (Elastizitätsgrenze) des Werkstoffes liegen.

Bei diesem Maschinenteil weicht man also bewußt von der sonst im Maschinenbau allgemeingültigen Regel ab, daß die zulässige Belastung unterhalb der Dauerfestigkeit des Werkstoffes liegen soll. Unter „Dauerfestigkeit“ ist diejenige Wechsellast gemeint, die der Körper unendlich lange ohne Bruch ertragen kann, wobei schon auf S. 76 darauf hingewiesen wurde, daß es nicht mit Sicherheit nachgewiesen ist, ob eine solche Grenze überhaupt vorhanden ist.

Die Belastungsfähigkeit eines Wälzlagers wird also durch die Wöhlerkurve (Abb. 13.15/16) bestimmt, abhängig von der Anzahl Belastungswechsel bis zum Bruch, d. h. von der gewünschten Lebensdauer des Lagers. Umfassende Prüfungen (insbesondere durch die SKF.)

¹ Timoshenko: Theory of Elasticity. S. 350. Mc Graw Hill Book Co 1934. — Föppl, L.: Forschung 7 (1936) S. 209/221. Der Spannungszustand und die Anstrengung des Werkstoffes bei der Berührung zweier Körper.

² Die Näherungslösung von A. Föppl: (Vorlesungen über Techn. Mechanik Bd. 5. 4. Aufl. S. 436.)

$$\vartheta = \frac{2 P_1}{\pi E} \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \left(\frac{2}{3} + \ln \frac{4 r_1 r_2}{a^2} \right)$$

kann nicht richtig sein, da z. B. für $r_1 = \infty$ auch die Abplattung unendlich groß wird, was im Gegensatz zu der Anschauung steht.

haben aber gezeigt, daß die Lebensdauer unter genau gleichen Betriebsbedingungen außerordentlich verschieden ausfällt (Abb. 52.19). Die Streuung ist so groß, daß z. B. ein Lager eine Lebensdauer weniger als 500 Betriebsstunden hat, während ein zweites, das genau gleich ist, die gleiche Belastung über 20000 und mehr Betriebstunden, ohne Schaden trägt.

Die Ursache dieser starken Streuung liegt hauptsächlich wohl darin, daß der Werkstoff je-weilen nur an einer sehr kleinen Fläche beansprucht wird, welche Fläche dauernd und in der An-schmiegung wechselt. Der Werkstoff muß deshalb besonders homogen (ohne Schlackeneinschlüsse sein und namentlich eine gleichmäßige Härte aufweisen, da die zulässige Be-lastung der dritten Potenz der Härtezahl proportional ist (S. 283). Diese gleich-mäßige Härte ist auch bei sorgfältigster Auswahl und Wärmebehandlung nicht zu erreichen.

Es fragt sich also, was man bei dieser starken Streuung, die keine Ansamm-lung der Werte um einen Mittelwert zeigt, unter „Lebensdauer“ eines Wälzlagers verstehen soll? Man könnte z. B. eine „mittlere“ Lebensdauer (vgl. Abb. 52.19) als Mittelwert einführen. Die SKF. hat die Lebensdauer noch viel vorsichtiger abgefaßt und der Begriff „Lebensdauer“ wie folgt definiert: Bei Lagern der-selben Art und Größe, die unter gleichen Betriebsverhältnissen arbeiten, bedeutet die Lebensdauer diejenige Anzahl Umdre-hungen, die 90% dieser Lager mindestens erreichen. Zum Teil aber erheblich überschreiten, bevor Ermüdungserscheinungen in irgendeinem Lager-teil auftreten, während 10% schon früher Ermüdungserscheinungen zeigen können. Sie beträgt zur Zeit nur etwa 20% der „mittleren“ Lebensdauer (Kurve A, Abb. 52.19).

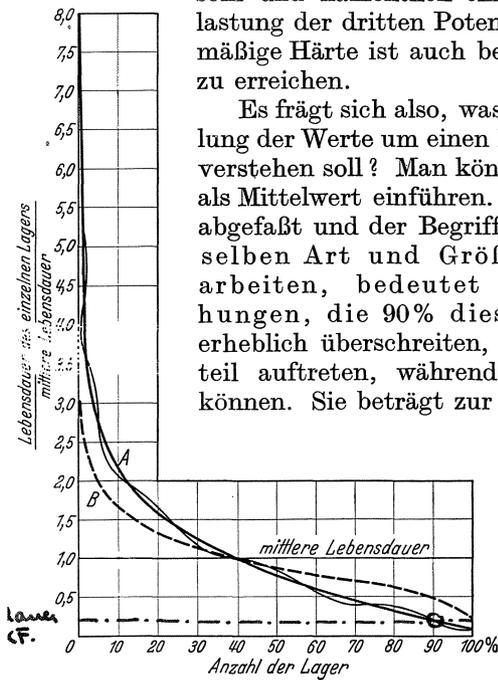


Abb. 52.19.

Die experimentelle Bestimmung der Tragfähigkeit erfordert für jede Lagernummer und für jede Be-lastung und Drehzahl die Prüfung einer großen Anzahl (etwa 100) Lager bis zur Ermüdung. Daraus geht her-vor, daß die Beschaffung zuverlässiger Unterlagen äußerst zeitraubend ist. Es ist ein großer Verdienst der SKF. diese Erfahrungswerte systematisch gesam-melt und veröffentlicht zu haben. Die Schweiz. Nor-menkommission hat die SKF.-Erfahrungswerte als Normbelastung der Wälzlager übernommen; sie

sind in den Zahlentafeln 52.1 bis 52.3 zusammengestellt. Diese Belastungen sind nicht end-gültig, sondern die SKF. hofft durch weitere Verbesserung in Herstellung und Kontrolle in absehbarer Zeit die Streuung in der Lebensdauerkurve (Abb. 52.19) noch erheblich zu ver-mindern und eine Kurve der Form B zu erreichen, nach welcher 90% aller Lager die halbe mittlere Lebensdauer erreichen, bzw. überschreiten. Da nach Gl. (37) P proportional $\sqrt[3]{t} = \sqrt[3]{\frac{0,5}{0,2}}$ = 1,35 ist, würde dies eine Erhöhung der Tragfähigkeit um 35% bedeuten, wenn die mittlere Lebensdauer unverändert bliebe. Da aber gleichzeitig mit einer Erhöhung der „mittleren“ Lebensdauer um etwa 10% gerechnet werden kann, darf in absehbarer Zeit eine allmähliche Steigerung der Tragfähigkeit um etwa 50% erwartet werden. Die SKF. rechnet mit einer jährlichen Zunahme der Tragfähigkeit von etwa 5%.

In den Zahlentafeln 52.1 bis 53 sind nur die Lager aufgenommen, die in erster Linie ver-wendet werden sollen.

- a) weil sie in großen Serien hergestellt und deshalb ab Vorrat lieferbar sind,
- b) weil die Preise besonders günstig sind,
- c) weil Ersatzlager fast überall leicht beschafft werden können.

Die in den verschiedenen Spalten angegebenen Tragfähigkeitszahlen¹ C_{15} in kg gelten für $n = 15$ U/min und $t = 500$ Betriebsstunden. Für eine andere Lebensdauer t und für andere Drehzahlen n , sind die Tragfähigkeitszahlen aus der Gleichung

$$P_{n,t} = C_{15} \sqrt[3]{\frac{7500}{nt}} = C_{15}/S \quad (52.37)$$

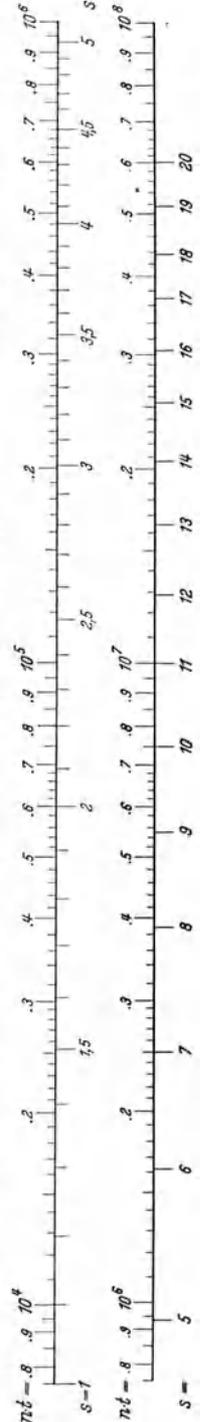
zu berechnen. Der Faktor S kann direkt aus Abb. 52.20 abgelesen werden.

Für die Lebensdauer des Lagers ist nicht die Drehzahl allein maßgebend, sondern die Anzahl Belastungswechsel an der höchst belasteten Stelle. Es ist deshalb noch zu unter-scheiden, ob der Innenring oder der Außenring in bezug auf die Belastungsrichtung umläuft.

¹ Es sind die neuesten Werte, die in freundlicher Weise von den Vereinigten Kugellagerfabriken (Schweinfurt) zur Verfügung gestellt wurden.

Zahlentafel 52.1. Normale Querlager, Abmessungen und Tragfähigkeit (nach Jürgensmeyer).

Lagerart	Gruppe 2, leichte Reihe						Gruppe 3, mittelschwere Reihe								
	Schmal			Breit			Schmal			Breit					
	12	12	12	22	22	22	13	13	13	23	23	23			
00	10	30	9	500	440	630	35	11	670	860	17				
01	12	32	10	540	680	14	37	12	870	1 050	17				
02	15	35	11	720	750	14	42	13	930	1 150	17	1 150			
03	17	40	12	820	930	16	47	14	1 200	1 350	19	1 350			
04	20	47	14	1 050	1 950	18	52	15	1 300	1 600	21	1 800	3 850		
05	25	52	15	1 300	2 200	18	62	17	1 950	2 150	24	2 400	5 300		
06	30	62	16	1 750	3 050	20	72	19	2 400	2 800	27	3 150	6 800		
07	35	72	17	1 950	2 550	23	80	21	2 900	3 350	31	3 950	8 500	4 450	
08	40	80	18	2 450	2 900	23	90	23	3 550	4 000	33	4 650	10 000	5 800	
09	45	85	19	2 800	3 250	23	100	25	4 450	5 200	36	5 600	12 000	7 600	
10	50	90	20	3 000	3 500	23	110	27	5 000	6 100	40	6 600	17 000	9 500	14 000
11	55	100	21	3 600	4 250	25	120	29	6 000	7 000	43	7 700	17 500	11 000	16 500
12	60	110	22	4 150	5 200	28	130	31	6 900	8 000	46	8 900	20 500	12 500	20 500
13	65	120	23	4 450	5 600	31	140	33	7 600	8 900	48	10 000	24 500	14 500	22 000
14	70	125	24	4 900	6 100	31	150	35	8 900	10 000	51	11 000	27 000	17 000	29 000
15	75	130	25	5 500	6 500	31	160	37	9 500	11 000	55	12 500	31 000	21 500	30 000
16	80	140	26	5 800	7 100	33	170	39	10 500	12 000	58	14 000	35 000	21 500	35 000
17	85	150	28	6 900	8 100	36	180	41	11 500	13 000	60	15 000	39 500	24 500	39 000
18	90	160	30	7 900	9 300	40	190	43	13 500	14 500	64	16 000	44 500	26 000	46 000
19	95	170	32	8 900	10 000	43	200	45	15 000	15 500	67	17 500	31 000	49 500	
20	100	180	34	9 600	11 500	46	215	47	16 500	18 000	73	37 000	37 000	59 000	
21	105	190	36	10 000	12 500	50	225	49	18 000	19 000	77	34 000	35 500	73 000	
22	110	200	38	12 000	14 000	53	240	50	19 000	21 500	80	38 500	39 000		



„Kennziffer“ der Bohrung

Zahlentafel 52.2 ¹ . Querlager Gruppe 4, schwere Reihe.					Zahlentafel 52.3 ¹ . Hauptmaße und Tragfähigkeit. Längslager.													
"Kennziffer" der Bohrung			64		"Kennziffer" der Bohrung	d	Reihe 511			Reihe 512			Reihe 513			Reihe 514		
			NUS															
	D	B	C ₁₅	C ₁₈			D	H	C ₁₅	D	H	C ₁₅	D	H	C ₁₅	D	H	C ₁₅
00	62	17			00	10	24	9	750	26	11	940						
01	72	19			01	12	26	9	800	28	11	1 000						
02	80	21			02	15	28	9	850	32	12	1 250						
03	90	23	2 900		03	17	30	9	940	35	12	1 300						
04	100	25	3 350		04	20	35	10	1 250	40	14	1 800						
05	110	27	3 700		05	25	42	11	1 550	47	15	2 300	52	18	2 950	60	24	4 350
06	120	29	4 450		06	30	47	11	1 700	53	16	2 550	60	21	3 600	70	28	5 700
07	130	31	5 400	6 700	07	35	53	12	1 900	62	18	3 400	68	24	4 650	80	32	6 900
08	140	33	6 400	8 800	08	40	60	13	2 550	68	19	3 950	78	26	5 800	90	36	8 800
09	150	35	7 700	10 000	09	45	65	14	2 700	73	20	4 300	85	28	6 800	100	39	10 000
10	160	37	8 700	12 500	10	50	70	14	3 000	78	22	4 450	95	31	8 100	110	43	12 500
11	180	42	10 000	12 500	11	55	78	16	3 500	90	25	6 300	105	35	9 900	120	48	14 000
12	190	45	11 000	15 500	12	60	85	17	4 150	95	26	6 900	110	35	10 500	130	51	16 500
13	200	48	12 000	18 000	13	65	90	18	4 300	100	27	7 100	115	36	11 000	140	56	18 000
14	210	52	15 000	23 000	14	70	95	18	4 550	105	27	7 400	125	40	12 500	150	60	20 000
15	225	54	16 500	25 000	15	75	100	19	4 750	110	27	7 600	135	44	14 500	160	65	22 000
16			17 000	28 500	16	80	105	19	4 850	115	28	7 800	140	44	15 000	170	68	24 000
17			18 500	33 000	17	85	110	19	5 000	125	31	9 300	150	49	17 000	180	72	25 500
18			20 000		18	90	120	22	6 500	135	35	11 000	155	50	17 000	190	77	27 500
					20	100	135	25	9 000	150	38	14 000	170	55	20 000	210	85	
					22	110	145	25	9 500	160	38	15 000	190	63	23 500	230	95	
					24	120	155	25	10 000	170	39	15 500	210	70	28 000	250	102	
					26	130	170	30	11 500	190	45	19 500	225	75	—	270	110	
					28	140	180	31	12 000	200	46	20 000	240	80	—	280	112	

¹ Nach Jürgensmeyer.

Bemerkungen zu den Zahlentafeln 52.1 bis 3.

Die Bezeichnung eines Wälzlagers setzt sich zusammen aus der Reihenbezeichnung (im Kopf der Zahlentafel) und der Kennziffer der Bohrung. Die Bezeichnung eines Radiaxlagers der Gruppe 2 mit 50 mm-Bohrung ist also „6210“. Eine Ausnahme bilden die Zylinderrollenlager, bei welchen hinter der Reihenbezeichnung, die Bohrung geschrieben wird, z. B. „NL 50“ für ein Zylinderrollenlager mit Innenbohrung der leichten Reihe und 50 mm-Bohrung.

Folgende Lager werden auch mit kegeliger Bohrung für Spann- und Abziehhülsen geliefert:

Pendelkugellager 12,22, 13 und 23. — Pendelrollenlager 222, 213 u. 223, Zylinderrollenlager NL und NM. — Radiaxlager 62.

Zahlentafel 52.4. *y*-Werte für Radiaxlager.

Belastungsart	Bei Umfangslast für den Innenring		Bei Umfangslast für den Außenring		Bei Umfangslast für den Innenring		Bei Umfangslast für den Außenring	
	<i>y</i>	<i>y</i>	<i>y</i>	<i>y</i>	<i>y</i>	<i>y</i>	<i>y</i>	<i>y</i>
	bei C ₁₅ : P _r = 5		bei C ₁₅ : P _r = 10		bei C ₁₅ : P _r = 20		bei C ₁₅ : P _r = 40	
P _a = 0	0,9	0,9	1,1	1,1	1,4	1,4	1,8	1,8
P _a = 0,5 P _r	0,9	0,8	1,1	1,0	1,35	1,2	1,7	1,5
P _a = P _r	0,9	0,7	1,1	0,9	1,3	1,1	1,6	1,35
	bei C ₁₅ : P _a = 5		bei C ₁₅ : P _a = 10		bei C ₁₅ : P _a = 20		bei C ₁₅ : P _a = 40	
P _a = 2 P _r	1,0	0,8	1,2	1,0	1,5	1,2	1,8	1,4
P _r = 0	1,2	0,9	1,45	1,1	1,7	1,3	2,0	1,5

a) Umlauflast für den Innenring. Das ist der am häufigsten vorkommende Fall; der Innenring läuft mit der drehenden Welle um, während die Belastungsrichtung unverändert bleibt.

Zahlentafel 52.5. y -Werte für Pendellager.

Pendelkugellager		Pendelrollenlager	
Lager	ctg α	Lager	ctg α
12 00 bis 12 03	5,0	222 16 bis 222 17	6,0
12 04 bis 12 05	5,5	222 18 bis 222 64	5,5
12 06 bis 12 07	6,5	213 04 bis 213 06	6,5
12 08 bis 12 09	7,0	213 07 bis 213 09	7,0
12 10 bis 12 12	8,0	213 10 bis 213 14	7,5
12 13 bis 12 22	9,0	213 15 bis 213 22	8,0
22 00 bis 22 03	3,0	223 08 bis 223 40	4,0
22 04 bis 22 07	4,0		
22 08 bis 22 09	5,0		
22 10 bis 22 13	5,5		
22 14 bis 22 17	6,0		
13 00 bis 13 03	4,5		
13 04 bis 13 05	5,5		
13 06 bis 13 09	6,0		
13 10 bis 13 13	6,5		
13 14 bis 13 22	7,0		
23 02 bis 23 04	3,0		
23 05 bis 23 10	3,5		
23 11 bis 23 22	4,0		

Jeder beliebige Punkt der Innenlauffläche erfährt die höchste Belastung und die Belastungswechselzahl für den Innenring ist gleich der relativen Drehzahl zwischen Innenring n_1 und Käfigdrehzahl n_2 , also gleich $n_1 - n_2$. Für diesen Fall gelten die in den Zahlentafeln angegebenen C_{15} -Werte.

b) Umlauflast für den Außenring. Dieser Fall liegt vor, wenn Teile auf der Welle befestigt sind, deren Schwerpunkt nicht mit dem Wellenmittel zusammenfallen. Die Fliehkräfte wirken auf den (stillstehenden) Außenring und laufen mit der Drehung um. Die Lastwechselzahl ist dann gleich der Wälzkörperdrehzahl um die eigene Achse, n_b , die vielfach größer ist als für Fall a (vgl. Zahlenbeispiel 74.1.)

Beim Pendelkugellager ist der Außenring immer am meisten gefährdet (vgl. S. 287); dieser bestimmt also die Lebensdauer des Lagers. Für diese Lagerart gelten deshalb beim Umlauflast für den Außenring die Tabellenwerte C_{15} unverändert. Bei den

übrigen Lagerarten sind die „gleichwertigen“ Querbelastungen P des Lagers nach Gl. (26) mit einem Faktor $x = 1,33$ zu multiplizieren.

Für die y -Werte in Gleichung (26) gelten folgende Angaben:

- Für Radiallager, Zahlentafel 52,4.
- Für Lager mit Einfüllöffnung sind die y -Werte dieser Tafel zu verdoppeln.
- Für Pendelkugellager Fall a und b und für Pendelrollenlager, Fall b ist $y = 0,5 \text{ ctg } \alpha$. (Zahlentafel 52.5.) Für Pendelrollenlager, Fall a ist:

$$\begin{aligned} \text{für } P_a = 0 & \quad y = 0,5 \text{ ctg } \alpha. \\ \text{für } P_r = 0 & \quad y = 0,67 \text{ ctg } \alpha. \end{aligned}$$

Für den Ingenieur bleibt dann immer noch die oft recht schwierige Aufgabe, die tatsächlich im Betrieb der Maschine auftretenden Kräfte R und A richtig abzuschätzen.

53. Reibungsverhältnisse.

Die Bewegung einer Kugel zwischen den Umdrehungsflächen zweier Laufringe (Abb. 53.1) besteht in Drehungen um die Momentanachsen A_1A_2 und B_1B_2 . Soll die Kugel nicht gleiten, sondern nur rollen, so müssen sich die Achsen A_1A_2 , B_1B_2 und W in einem Punkte treffen oder parallel sein. Diese Bedingung ist bei radialer Belastung der Rillenquerlager erfüllt, beim Pendellager nicht. Muß ein Querlager auch axiale Kräfte aufnehmen, so tritt immer gleitende Reibung auf. Gleitreibung ist auch immer vorhanden bei der Führung der Rollkörper im Käfig.

Professor Stribeck hat zuerst durch Versuche die tatsächliche Reibungsarbeit der Kugellager bestimmt. Um einen direkten Vergleich mit Gleitlagern zu ermöglichen, führt er eine ideelle Reibungszahl μ_i ein und legt nicht den Kugellaufkreis r_k (Abb. 53.2), sondern den Wellendurchmesser $2r$ für die Berechnung des Reibungsmomentes zugrunde:

$$M_r = P \mu_i r.$$

Dieses Verfahren bringt aber mit sich, daß die so ermittelten Werte nicht genau für andere Lagerabmessungen zutreffen, weil das Verhältnis für verschiedene Lager verschieden ist. Das Ergebnis dieser und neueren Versuche ist kurz folgendes:

- Die Reibzahl von Wälzlagern ist abhängig von der Drehzahl, von der Belastung, von der Anschmiegun, d. h. vom Verhältnis Rillenhalmesser zum Kugelhalbmesser, von der Lagerluft (Ralu) (vgl. Zahlentafel 53.1) und vom Schmiermittel, von der Käfigkonstruktion

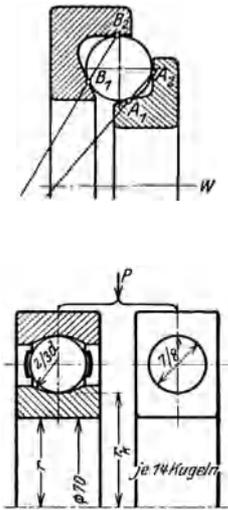


Abb. 53.2. Versuchslager von Stribeck.

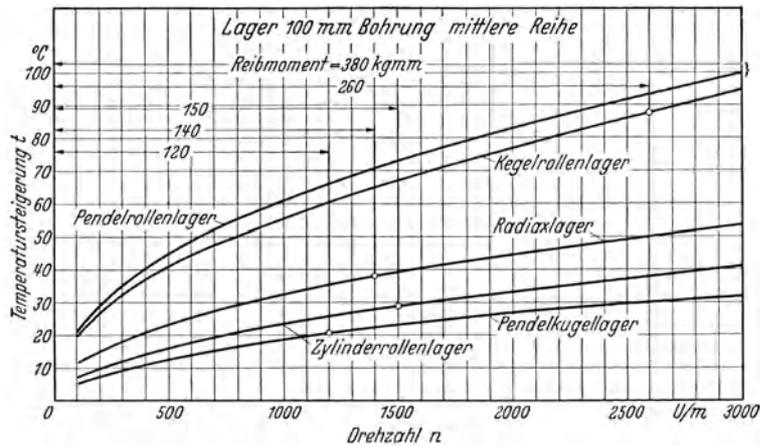


Abb. 53.3.

Temperatursteigerung verschiedener Lagerarten in Abhängigkeit von der Drehzahl. Die Belastung wurde jeweils für 4000 h Lebensdauer gewählt, also für $S = 2$. (Aus Jürgensmeyer.)

Zahlentafel 53.1. Reibwerte von Pendelkugellagern und Rillenkugellagern nach Forsberg.

n	Be- lastung in kg	Reibwert μ_R		
		Pendel- kugellager	einreihige Rillenkugellager	
475	475	0,00 079	0,00 091	0,00 127
—	870	0,00 075	0,00 096	0,00 130
—	1260	0,00 082	0,00 111	0,00 154
800	475	0,00 095	0,00 105	0,00 143
—	870	0,00 087	0,00 100	0,00 129
—	1260	0,00 085	0,00 115	0,00 165
1250	475	0,00 115	0,00 136	0,00 172
—	870	0,00 098	0,00 114	0,00 157
—	1260	0,00 096	0,00 126	0,00 150
1750	475	0,00 143	0,00 151	0,00 192
—	870	0,00 112	0,00 122	0,00 168
—	1260	0,00 104	0,00 131	0,00 169
2250	475	0,00 181	0,00 200	0,00 232
—	870	0,00 125	0,00 138	0,00 190
—	1260	0,00 110	0,00 133	0,00 177
Verhältnisz.		100	118	155

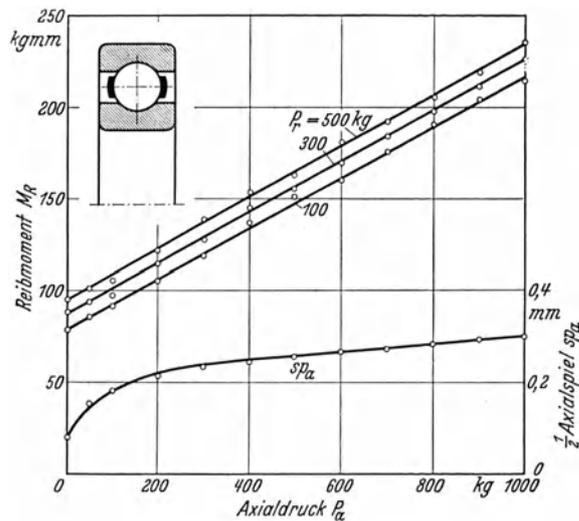


Abb. 53.4.

Reibmomente eines Radiaxlagers 6213 nach Versuchen von Kramer. (Aus Jürgensmeyer.)

2. Unter sonst gleichen Verhältnissen ist die Reibzahl um so größer, je enger die Anschmiegung ist; der Einfluß der Schmiegung nimmt mit der Belastung zu. Vergrößerung der Lagerluft vermindert die Reibzahl.

3. Pendellager haben kleinere Reibzahlen als Radiaxlager. In Abb. 53.3 sind die Reibzahlen (Temperaturerhöhungen) für verschiedene Wälzlagerkonstruktionen zusammengestellt.

4. Das Reibmoment eines Radiaxlagers ist abhängig von der Belastungsrichtung; es ist am kleinsten für reine Radialbelastung ($P_a = 0$) und am größten für $P_a = P_r$ (Abb. 53.4).

5. Die Reibzahl ist für Fettschmierung bedeutend größer als für Ölschmierung (Abb. 53.6).

6. Die Drehzahl hat einen relativ geringen Einfluß auf die Reibzahl (Zahlentafel 53.1).

7. Bedeutend ist der Einfluß der Lagerbelastung. (Abb. 53.5 u. 6.) Die kleinen Belastungen, die bei höherer Lebensdauer zulässig sind, bedingen stark erhöhte Reibzahlen (0,003 bis 0,005), die auch bei Gleitlager (im Beharrungszustand) leicht erreichbar sind. Wälzlager haben deshalb oft größere Reibzahlen als gut konstruierte Gleitlager¹.

¹ Vgl. z. B. die Versuche von Prof. Ch. Hanocq: Etude theorique et experimentale des paliers à billes et à rouleaux. Rev. univ. Mines 81 (1938) S. 383/87.

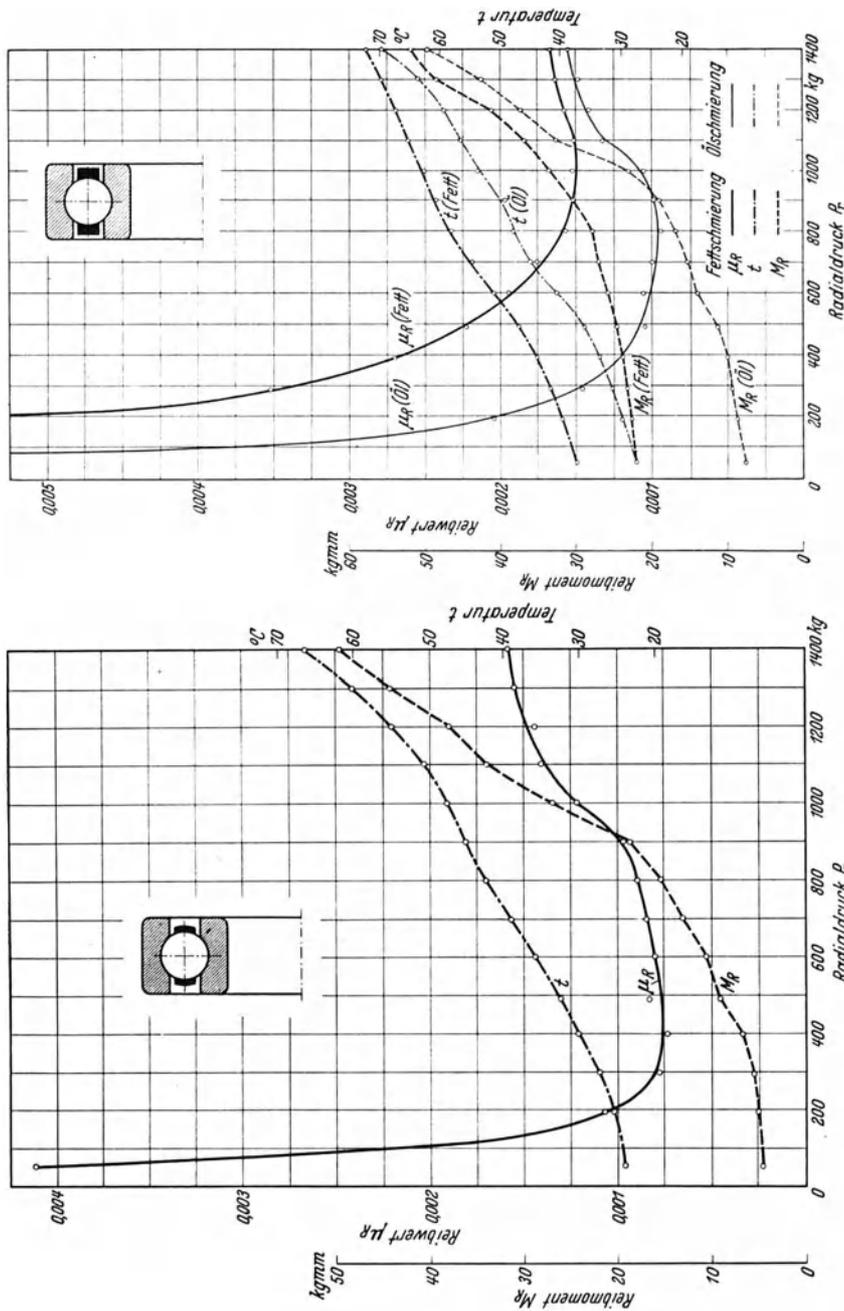


Abb. 53.5 u. 6. Reibwerte für Radiallager (6309) mit normaler Radialluft (nach Versuchen von Muzzoli). Kugeldurchmesser $d_w = 5/8''$, Bälldenradius = 8,415 mm = 0,53 d_w , Axialspiel = 87 μ , $a = 0,140$ bis 0,155 mm, Halbmesser der Innenlaufbahn: $r_e = 28,312$ mm. (Aus Jürgensmeyer.)

Abb. 53.6. Massivkäfig; Bronze. Schmiermittel Fett bezw. Mineralöl.

Abb. 53.5. Stahlblechkäfig. Ölschmierung.

Für die weitaus meisten Anwendungsgebiete (Betriebstemperatur unter 70°C und nicht zu hoher Drehzahl) wird Fettschmierung verwendet, da der Schutz gegen Schmiermittelverlust mit einfachen Mitteln und vollkommen betriebsicher zu erreichen ist. Das Fett wird verbraucht und muß von Zeit zu Zeit erneuert werden. Nach den Erfahrungen der Reichsbahn reicht ein Fettvorrat von 1,7 kg für 300 000 km aus, indem dann noch etwa 0,4 kg Fett im Lagergehäuse vorhanden ist. Hier ist auch eine besonders gute Abdichtung gegen Verschmutzung des Fettes von außen vorhanden. Bei kleinen Lagern (Elektromotoren, Staubsauger usw.) verlangt man heute, daß die Lager während der ganzen Lebensdauer nicht nachgesehen zu werden brauchen. Der Fettvorrat muß demnach reichlich bemessen werden; Staufferbüchsen zum Nachfüllen werden dabei nicht mehr verwendet. Die Reinigung eines mit Fett geschmierten Lagers kann einwandfrei nur nach Ausbau und Auswaschen erfolgen. Auf leichten Ausbau ist deshalb bei der Konstruktion Rücksicht zu nehmen¹.

¹ Kugellager-Zeitschrift 14 (1939). S. 34/41.

6. Reibungstriebwerke zur Übertragung der Drehbewegung.

61. Reibräder.

Um die drehende Bewegung von einer Welle auf eine dazu parallele zu übertragen, können auf beiden Wellen runde Scheiben so angeordnet werden (Abb. 61.1), daß die Summe der Radien gleich der Entfernung der Wellenmittel ist. Die zweite Scheibe wird dann durch Reibung mitgenommen und erhält eine Drehbewegung in entgegengesetzter Richtung. Tritt an der Berührungsstelle beider Scheiben kein Gleiten auf, so haben die Umfänge gleiche Geschwindigkeiten:

$$u = r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2$$

$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30}$ und $\omega_2 = \frac{\pi n_2}{30}$ sind die Winkelgeschwindigkeiten der Wellen; n_1 und n_2 die Drehzahlen in der Minute. Daraus folgt:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (61.1)$$

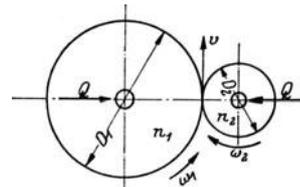


Abb. 61.1. Reibradgetriebe (nach Röttscher, Maschinenelemente II).

d. h. die Drehzahlen verhalten sich umgekehrt wie die Radien der Scheiben.

Die Bedingung, daß kein Gleiten eintritt, ist erfüllt, wenn die zu übertragende Umfangskraft P kleiner als die Reibungskraft μQ ist:

$$P \leq \mu Q. \quad (61.2)$$

Q ist der Druck, mit dem beide Scheiben zusammengepreßt werden und der durch die Lager aufgenommen wird, μ die Reibzahl. Je nach der Oberflächenbeschaffenheit¹ ist (vgl. Abschn. 46.1) für Gußeisen auf Gußeisen . $\mu = 0,1$ bis $0,15$
 „ „ „ Leder . . $\mu = 0,15$ „ $0,3$
 „ „ „ Asbest . . $\mu = 0,3$ „ $0,5$

Es ist zweckmäßig, mit den kleineren Werten von μ zu rechnen, damit auch bei leicht gefetteten Oberflächen noch genügende Sicherheit für die Übertragung der Leistung vorhanden ist. Damit wird aber die Anpreßkraft Q recht groß, so daß nicht nur große Lagerbelastungen entstehen, sondern die Scheiben (ähnlich wie bei Rollenlagern) an der Berührungsstelle stark beansprucht werden. Reibräder können deshalb nur kleine Leistungen übertragen².

Beim Einrücken, während der Drehung der einen Welle, ist das Gleiten der Scheiben und damit die Abnutzung unvermeidlich. Deshalb wird oft ein geschlossener, gleichmäßig dicker Lederriemen zwischengelegt, der leicht ersetzt werden kann. Solche Getriebe mit konischen Walzen wurden früher für die stetige Änderung der Drehzahlen verwendet.

Eine andere Ausführungsform, das Tellerreibrad- und Wendegetriebe, zeigt Abb. 61.2 (Schwungradpresse). Die mit unveränderlicher Drehzahl laufende Antriebswelle trägt zwei Reibscheiben,

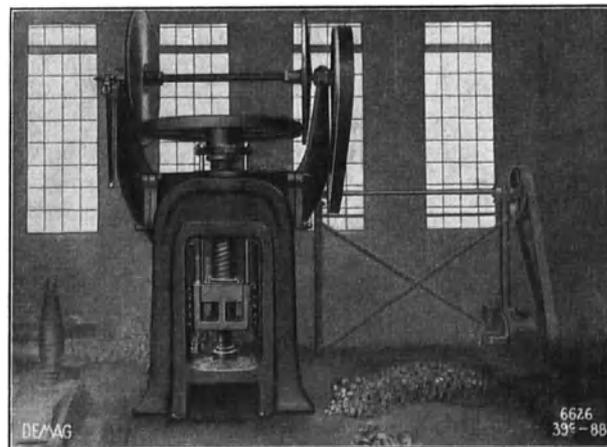


Abb. 61.2. Reibradwendegetriebe bei einer Schwungradpresse (Demag).

¹ Kutzbach, K.: Die Prüfung von Bremsbelägen. Z. VDI 77 (1933) S. 443/47. — Müller, G.: Einfluß des Betriebszustandes auf die Wirkung von Kraftwagenbremsen. Z. VDI 78 (1934) S. 931/32.

² Kuhlenkamp, A.: Reibradgetriebe als Steuer-, Meß- und Rechengetriebe. Z. VDI 83 (1939). S. 677/83.

die abwechslungsweise gegen ein Schwungrad gepreßt werden. Das Schwungrad ist in einer Schraubenspindel geführt und bewegt sich mit zunehmender Geschwindigkeit abwärts bis Matrize und Patrize zusammentreffen und die kinetische Energie in Schlagarbeit für irgendeine Nutzenanwendung (Pressen von Drehspäne, Prägen von Platten, Ausstanzen von Blechen usw.) umgesetzt wird. Für die Berechnung der Presse stellt sich als erste Frage, die Größe der Kraft, die dabei erreicht wird. Die kinetische Energie der geradlinigen Abwärtsbewegung $\Sigma m \cdot v^2$ kann, da die Senkgeschwindigkeit klein ist, vernachlässigt werden. Bei der kinetischen Energie der Drehbewegung:

$$E = \Theta \cdot \omega^2/2$$

genügt es für Θ das Massenträgheitsmoment der Schwungradscheibe allein einzusetzen, das die kinetische Energie der Spindel kleiner als $1/2\%$ der Schwungradscheibenenergie ist.

Diese kinetische Energie wird nun zu einem sehr kleinen Teil in Nutz- (Präge- oder Stanz-) arbeit umgesetzt; sie muß zuerst die Reibungen im Gewinde und zwischen Spindelkopf und Preßgewicht (als Spurreibung) überwinden und dann noch die Arbeit für die Formänderung der ganzen Maschine leisten. Die Reibungsarbeit wird meist vernachlässigt; sie wird zum Teil durch die Vernachlässigungen bei der kinetischen Energie ausgeglichen und kann (wenn erforderlich) als Bruchteil (etwa 10%) der Gesamtenergie in Abzug gebracht werden. Auch die Nutzbarkeit wird, da meistens klein, nicht berücksichtigt und weil die Presse auch beim Leerlauf genügend stark sein muß. Mit diesen Vereinfachungen erhalten wir für die Berechnung der Presse die Beziehung: kinetische Energie der Schwungradscheibe = Formänderungsarbeit des Gestelles. Die Aufgabe kann nur gelöst werden, wenn vorher alle Abmessungen der Presse bekannt sind. Ein gewisser rechnerischer Überschuß an kinetischer Energie muß immer vorhanden sein, da beim Reibradantrieb Schlupf vorhanden ist. Es besteht also immer die Gefahr einer Überbeanspruchung der Presse. Der Schwungradkranz als eigentliche Träger der kinetischen Energie wird deshalb nicht starr mit der Pressenspindel verbunden, sondern durch eine (einstellbare) Rutschkupplung.

Die Reibung wird wesentlich erhöht, wenn die Berührungsflächen beider Scheiben keilförmig angeordnet sind. Für den gebräuchlichen Keilwinkel von 15° wird die Keilreib-

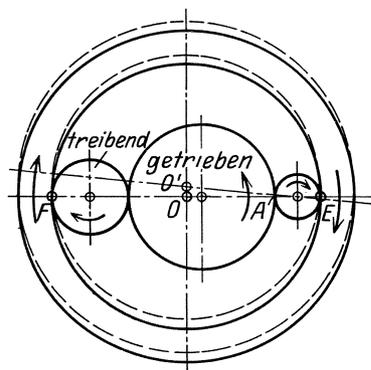


Abb. 61.3. Reibradgetriebe (Krupp).

zahl (vgl. S. 155) $\frac{\mu}{\sin 15} = \frac{\mu}{0,26} = 3,9 \mu$, also 3,9 mal so groß als

bei zylindrischen Reibrädern. Man rechnet bei Gußrädern mit $P = 20 \text{ kg}$ je Rille. Dabei tritt allerdings der Nachteil auf, daß nur in einem durch das Übersetzungsverhältnis festgelegten Berührungspunkt Rollung auftreten kann, während in allen anderen Punkten Gleiten auftreten muß, wodurch Erwärmung und Abnutzung entstehen. Deshalb macht man die Tiefe b der Keilflächen möglichst klein, und zwar 5 bis höchstens 10 mm. Solche Reibscheiben sind für dauernde Kraftübertragung wenig geeignet; sie kommen (meist mit mehreren Rillen) bei einfachen Aufzugwinden vor, um das Windwerk allmählich von der Transmission mitzunehmen, und sind dann eigentlich nur unvollkommene Reibkupplungen¹.

Beim Reibradgetriebe der Firma F. Krupp A. G. in Essen (Abb. 61.3), wird der Anpreßdruck durch die Spannung in einem geschlossenen Ring erzeugt, so daß die Lager entlastet sind. Wird die treibende Rolle in Pfeilrichtung gedreht, so bleibt die getriebene Rolle zunächst in Ruhe, weil die Vorspannung des Ringes zur Übertragung des Drehmomentes nicht ausreicht. Der Ring wird dadurch bei F etwas gehoben, und die Berührungspunkte fallen nun in eine Sehne des Ringes. Die Folge ist, daß die Anpressung der Rollen sich selbsttätig vergrößert, und zwar so lange, bis sie zur Übertragung der in Frage kommenden Leistung genügt. Die Kraft, mit der der Ring die drei Rollen zusammenpreßt, ist beschränkt durch die Stärke des Ringes. Bei den glatten Rollen aus sehr hartem Manganstahl, die an den Berührungsstellen geschmiert werden, ist die Reibungszahl $\mu = 0,005$ bis $0,003$, so daß trotz der großen Härte nur geringe Umfangskräfte übertragen werden können. Diese greifen hier an den beiden Berührungsstellen an, wodurch die übertragbare Leistung verdoppelt wird. Das Zadow-Getriebe² sucht durch Anordnung einer großen Zahl von Druckrollen, die Übertragung weiter zu verbessern.

¹ Vgl. z. B. Hänchen: Winden und Krane (S. 210, Abb. 475). Berlin: Julius Springer 1932.

² Witte, Fr. und O. Stamm: Das Zadowgetriebe. Z. VDI 77 (1933) S. 499, und Aufbau und Wirkungsweise des Zadowgetriebes. Masch.-Bau 16 (1937) S. 167/68.

62. Riementrieb¹.

62.1. Anordnung.

Der Riementrieb ist ein Reibtrieb für größere Entfernung der beiden Wellen. Um die Scheiben wird ein endloser Riemen mit einer gewissen Spannung gelegt (Abb. 62.1 a). Die Scheiben erhalten den gleichen Drehsinn; wenn kein Gleiten eintritt, haben sie gleiche Umfangsgeschwindigkeiten. Sollen beide Wellen entgegengesetzten Drehsinn erhalten, so wird der Riemen gekreuzt aufgelegt (Abb. 62.1 b). Der Riemen wird dabei verdreht und die dadurch entstehenden Torsionsspannungen werden um so größer, je breiter der Riemen und je kleiner die Achsentfernung a ist. Außerdem reiben sich die Riemenflächen an der Kreuzungsstelle. Deshalb wird die gekreuzte Anordnung nur bei schmalen Riemen und bei nicht zu großer Riemengeschwindigkeit verwendet, wenn die Achsentfernung $a_{\min} > 20 \times \text{Riemenbreite}$ ist.

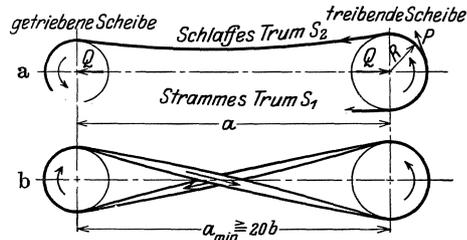
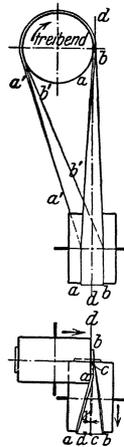


Abb. 62.1. a Offener Riementrieb.
b Gekreuzter Riementrieb.

Der Riementrieb hat gegenüber den Reibrädern den großen Vorteil, daß die Reibkraft nicht mehr auf sehr kleinen Druckflächen übertragen wird, sondern am ganzen umspannten Umfang der Scheiben. Er hat seit der Einführung des elektrischen Antriebes an Bedeutung verloren, ist aber auch heute noch ein wichtiges Maschinenelement, das eine sorgfältige Behandlung und Berechnung verdient.

Die Hauptbedingung für den richtigen Lauf eines Riemens ist, daß die Mittellinie des auflaufenden Riemens in die Mittelebene der Scheibe fällt. Zwecks Schonung des Riemens ist es gut, wenn diese Bedingung auch für den ablaufenden Riemen zutrifft. Zur sicheren Führung des Riemens erhält die treibende Scheibe einen schwach ballig gedrehten Kranz, weil der Riemen die Neigung hat, stets auf den größten Scheibendurchmesser aufzulaufen².

Für offene oder gekreuzte Riemen scheint diese Bedingung selbstverständlich. Wichtig wird sie aber für Riementrieb bei nicht parallelen Wellen, z. B. für den geschränkten Riemen (Abb. 62.2 a).



[Abb. 62.2 a.

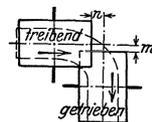


Abb. 62.2 b.
Geschränkter Riementrieb (aus
Dubbel,
Taschenbuch).

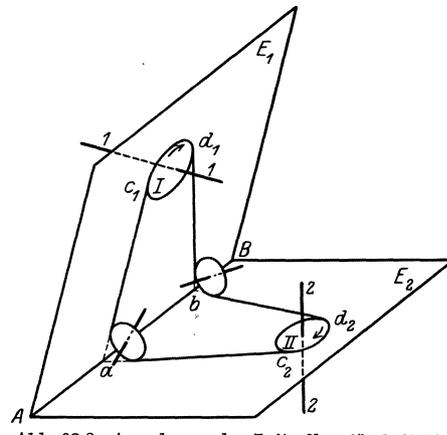


Abb. 62.3. Anordnung der Leitrollen für beliebig gelagerte Wellen.

Wegen der Drehung des Riemens und auch wegen des Einflusses der Fliehkraft erfährt diese Regel eine kleine Änderung (Abb. 62.2 b). Es ist deshalb zweckmäßig, die Scheiben etwas breiter zu machen und ihre genaue Lage bei der Montage auszuprobieren. Die Scheiben werden in diesem Falle gerade — nicht ballig — gedreht. Eine Änderung der Drehrichtung ist hier ohne Versetzung der Scheiben nicht möglich. Für die kleinste Achsentfernung gelten folgende Erfahrungswerte:

$$a_{\min} > 4 \times \text{Durchmesser } D \text{ der größeren Scheibe}$$

$$\text{oder} \quad > 20 \times \text{Riemenbreite } b \quad \text{oder} \quad > 10 \sqrt{b \cdot D}.$$

Für beliebig gelagerte Wellen sind Leitrollen erforderlich. Die Ebenen E_1 und E_2 seien die Mittelebenen der Scheiben, sie schneiden sich in der Geraden AB (Abb. 62.3). Von beliebigen

¹ Ein ausführliches Literaturverzeichnis ist enthalten in Stiel: Theorie des Riementriebes. Berlin: Julius Springer 1918.

² A. und O. Föppl erklären diese Erscheinung aus der Theorie der ebenen Scheiben. Grundzüge der Festigkeitslehre. Leipzig: Teubner 1933. — Swift, H. W.: Cambers for belt pulleys. Proc. Instn. mech. Engr. (London) 122 I (1932) S. 627/83.

Punkten *a* und *b* dieser Geraden werden Tangenten an die beiden Scheiben gezogen. Die durch diese Tangenten bestimmten Ebenen sind die Mittelebenen der Leitrollen, denn der Riemen läuft immer richtig auf, gleichgültig in welcher Richtung die Wellen sich drehen. Die Leitrollen müssen deshalb beliebig einstellbare Achsen erhalten (Abb. 62.4).

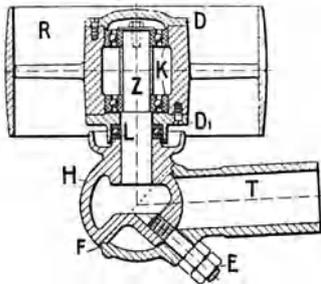


Abb. 62.4. Riemenleitrollen mit Universaleinstellung (v. Roll).

D=Deckel *K*=Querlagerring
E=Stellschraube *L*=Längskugellager
F=Kreisführung *R*=Riemenrolle
H=Haltekopf *T*=Tragarm.

Ausrückbare Riementriebe dienen dazu, eine Welle, die von einer anderen, immer laufenden angetrieben wird, während des Betriebes ein- und auszurücken. Dazu ist eine lose auf der Welle laufende Scheibe (Los- oder Leerscheibe) erforderlich, auf die der Riemen parallel zu sich selbst verschoben wird. Der Riemen wird deshalb in „Gabeln“ geführt. Ein stillstehender Riemen kann nicht verschoben werden, weil die Reibung zwischen Scheibe und Riemen viel zu groß ist. Läuft aber der Riemen, so genügt eine kleine Kraft, um ihn senkrecht zur Hauptbewegungsrichtung zu verschieben. Deshalb muß die doppelbreite Scheibe auf der treibenden, immer laufenden Welle sitzen (Abb. 62.5).

Um den Riemen leicht verschieben zu können, muß die Gabel möglichst nahe der Auflaufstelle des Riemens angeordnet werden (Abb. 62.6), gleichgültig ob an der treibenden oder an der getriebenen Scheibe. Die doppelbreite Scheibe wird gerade gedreht, die Fest- und die Leerscheibe (Abb. 52.7) schwach ballig. Damit im ausgerückten Zustand die Losscheibe nicht direkt auf der Welle läuft und diese beschädigen kann, ist eine Leerlaufbüchse vor-

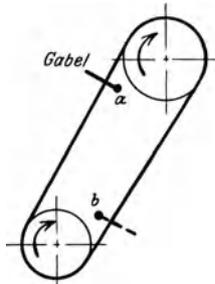
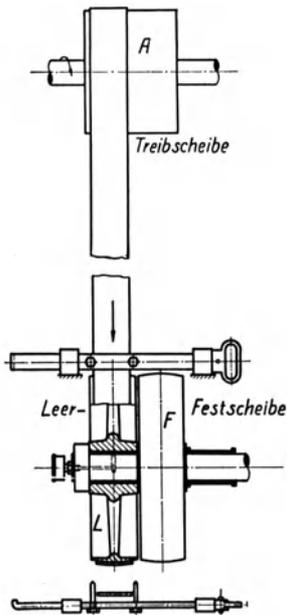


Abb. 62.6. Anordnung der Gabel beim auflaufenden Riemen.

Abb. 62.5. Ausrückbarer Riementrieb. Doppelbreite Scheibe an der treibenden Welle. (Aus Rötischer.)

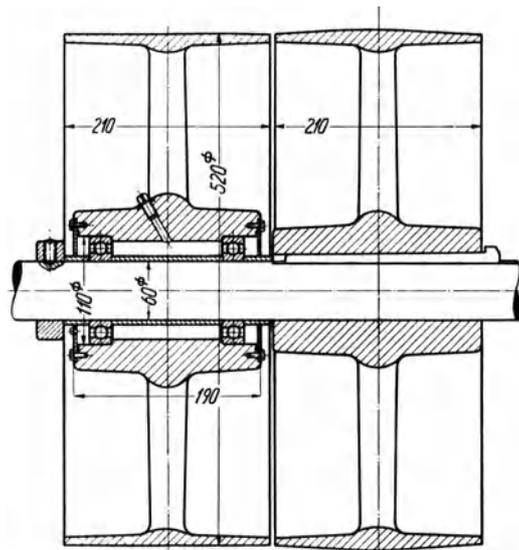


Abb. 62.7. Voll- und Leerscheibe. (Aus Rötischer.)

zusehen (Abb. 62.8). Die Lauffläche muß nur bei stillstehender Welle geschmiert werden; deshalb muß die Staufferbüchse auf der Leerlaufbüchse sitzen und nicht auf der Nabe der Leerscheibe. Zweckmäßig ist auch die Anordnung von Kugellagern in der Leerlaufbüchse (Abb. 62.7).

Der Nachteil dieser Anordnung ist, daß der Riemen auch bei Stillstand der Welle mitlaufen muß, was Schmiermittelverbrauch und Abnutzung zur Folge hat. Man gibt deshalb der Leerscheibe oft einen etwas kleineren Durchmesser, um den Riemen beim Leerlauf weniger zu spannen.

Die Anordnung kann aber auch so getroffen werden, daß die doppelbreite Scheibe auf der getriebenen Welle sitzt (Abb. 62.9). Die Losscheibe sitzt dann auf einem für sich gelagerten, die drehende Welle ohne Berührung umschließenden Losscheibenträger *S*. Der Scheibenträger kann auch direkt mit einem festen Stehlager verbunden sein (Abb. 62.10). Der Riemen und somit auch die Losscheibe steht in ausgerücktem Zustand still, so daß dann keine Reibung oder Abnutzung vorhanden ist. Man wählt diese Anordnung hauptsächlich für breite

Riemen und dort, wo der Riemen für längere Zeit auf der Losscheibe bleibt. Da der stillstehende Riemen nicht seitlich verschoben werden kann, so muß die Losscheibe zuerst in Umdrehung versetzt werden. Dies geschieht, indem sie mittels einer Anpreßvorrichtung *A* an die drehende Festscheibe *F* gepreßt und von dieser durch den Reibungsrand *r* mitgenommen wird. Der nun laufende Riemen läßt sich durch den Riemenshalter *R* leicht verschieben; die Losscheibe wird dann zurückgezogen. Anpreßvorrichtung und Riemenrücker müssen natürlich so angeordnet werden, daß sie bequem vom gleichen Standort aus bedient werden können.

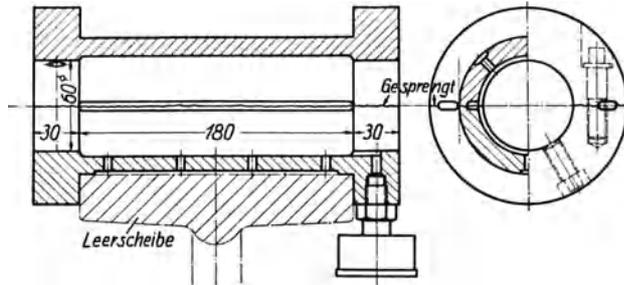


Abb. 62.8. Lünemannsche Lerlaufbüchse. (Aus Rötcher.)

Beim Einrücken schleift der Riemen mit seiner vollen Spannung auf der Festscheibe, bis er die volle Umfangsgeschwindigkeit erreicht hat. Die Lebensdauer oft ausgerückter Riemen ist aus diesem Grunde nur etwa halb so groß wie die eines Riemen, der nicht verschoben wird.

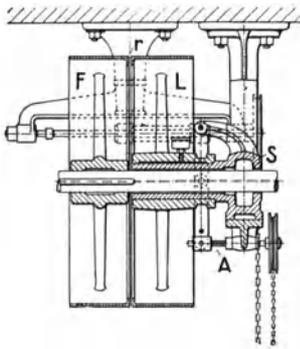


Abb. 62.9. Ausrückbarer Riementrieb mit doppelbreiter Scheibe an der getriebenen Welle (v. Roll, Clus).

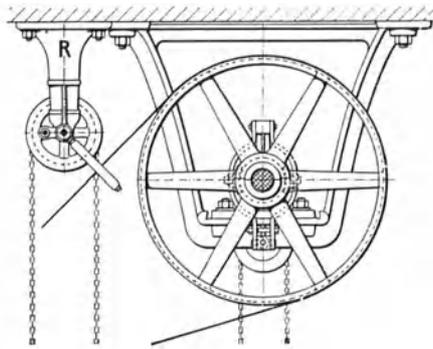


Abb. 62.10. Losscheibenträger in Verbindung mit Stehlager (Clus).

Für breite Riemen ist deshalb die Verbindung mit Reibkupplungen zweckmäßiger, wenn auch teurer in der Anschaffung. Vgl. (Abschn. 64).

Wendegetriebe mit einem offenen und einem gekreuzten Riemen verwendet man zur Änderung der Drehrichtung. Bei der Anordnung nach Abb. 62.11a werden die beiden Riemen gleichzeitig verschoben, so daß zwei doppelbreite Leerscheiben notwendig sind.

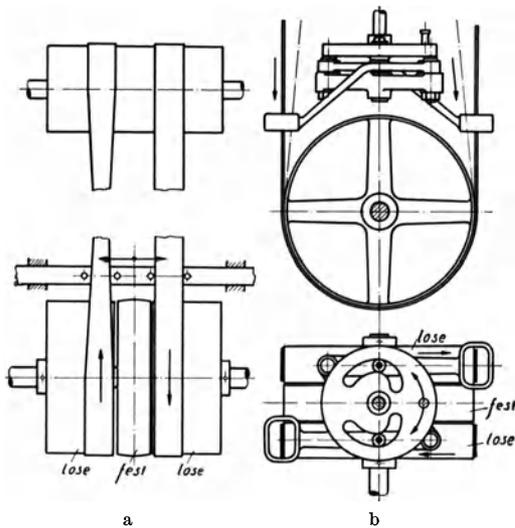
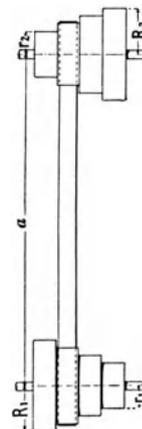
Abb. 62.11. Wendegetriebe (aus Rötcher).
a Beide Riemen werden gleichzeitig verschoben,
b die Riemen werden nacheinander verschoben.

Abb. 62.12.

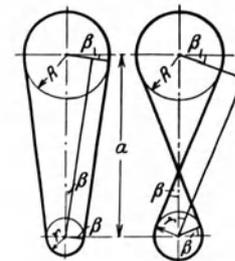


Abb. 62.13.

Anordnung der Stufenscheiben,
zur Berechnung der Riemenlänge.

Bei der Anordnung nach Abb. 62.11 b werden die Riemen nacheinander verschoben (mittels einer Kurvenscheibe), so daß die Leerscheiben nur für die einfache Riemenbreite zu konstruieren sind.

Stufenscheiben, bei denen der Riemen von einer Stufe auf die andere gebracht wird (Abb. 62.12) verwendet man zur Änderung der Drehzahl. Die Grundbedingung für die Abmessungen der Stufenscheiben ist dadurch gegeben, daß die Riemenlänge konstant ist. Für gekreuzten Riemen ist die Riemenlänge (Abb. 62.13):

$$L = (\pi + 2\beta) R + (\pi + 2\beta) r + 2a \cos \beta, \text{ worin } \sin \beta = \frac{R+r}{a} \text{ ist, so daß die Riemenlänge}$$

$$L = (\pi + 2\beta) (R + r) + 2a \sqrt{1 - \left(\frac{R+r}{a}\right)^2}. \tag{62.1}$$

unverändert bleibt, wenn $R + r = \text{konstant}$ ist.

Für offene Riemen ist: $L = (\pi + 2\beta) R + (\pi - 2\beta) r + 2a \cos \beta$ mit $\sin \beta = \frac{R-r}{a}$ und

$$L = \pi (R + r) + 2\beta (R - r) + 2a \sqrt{1 - \left(\frac{R-r}{a}\right)^2}. \tag{62.2}$$

Hier trifft diese einfache Bedingung nicht zu; sie kann aber praktisch verwendet werden, wenn $a > 20 (R - r)$ ist.

Nimmt man für beide Stufenscheiben das gleiche Modell, so läßt sich die unveränderliche Drehzahl n der einen Welle aus der größten und kleinsten Drehzahl (n_1 und n_2) der zweiten Welle berechnen. Läuft nämlich der Riemen auf der Stufe d_z , so ist $nd_1 = n_z d_z$, und läuft er auf der Stufe d_1 , so ist $nd_z = n_1 d_1$.

Durch Multiplikation erhält man:

$$n_1 n_z = n^2 \text{ oder } n = \sqrt{n_1 n_z}. \tag{62.3}$$

Als **Riemenwerkstoff** verwendet man hauptsächlich Leder, vereinzelt auch Textilfasern (Baumwolle, Seide, Hanf) und Kamelhaar. Gummi wird als Einlage in Textilriemen (Balata-Riemen) verwendet.

Rindsleder ist auch heute noch der wichtigste Riemenbaustoff. Seine Festigkeitseigenschaften sind aber nicht nur von Tier zu Tier, sondern auch für die verschiedenen Stellen der gleichen Haut und je nach der Art der Gerbung¹ ganz verschieden. Die Dicke der Haut schwankt zwischen 4 und 7 mm; am gleichmäßigsten ist das Mittelrückenleder. Die gleichmäßige Riemenstärke wird durch die Bearbeitung der Haut (Krupon) erreicht, und zwar wird diese im nassen Zustand durch hin- und hergehende Hölzer gestreckt (gewalkt). Das Wasser nimmt die dabei entwickelte Wärme auf. Die einzelnen Stücke werden zu einem Riemen zusammengeleimt. Der fertige Riemen wird unter scharfer Spannung aufgewickelt und so versandt.

Leder ist ein Material, dessen Formänderung in hohem Maße von der Dauer der Beanspruchung abhängt. Die Länge eines durch ruhende Belastung gespannten Riemens ändert sich auch noch nach Monaten und Jahren; bei gleichbleibender Länge nimmt die Spannkraft des Riemens mit der Zeit rasch ab (Abb. 62.14).

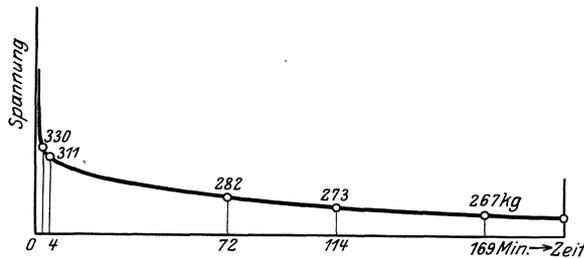


Abb. 62.14. Spannungsabfall von Leder bei unveränderter Dehnung nach Versuchen von Stephan.

Zahlentafel 62.1.

Belastung kg.	Spannung at	Länge mm	Längen- änderung mm
25	4,06	808,4	+ 28
125	20,32	836,4	— 14,5
25	—	821,9	+ 15
125	—	836,9	— 14
25	—	822,9	+ 14,7
125	—	837,6	— 14,6
25	—	823,3	—

¹ Das älteste Verfahren ist die Eichenlohe-Grubengerbung. Die abgekürzte, moderne Gerbung gibt nach den Versuchen von P. Stephan (D.P.J. 1916, S. 17) wesentlich kleinere Festigkeitszahlen. Bei der hydrodynamischen Gerbung wird die stark verdünnte Eichenlohebrühe durch die zwischen Rahmen eingespannte Häute hindurchgepreßt, so daß alle Fasern mit Gerbstoff getränkt werden. Die Festigkeitszahlen sind dabei höher als bei der Eichenlohe-Grubengerbung.

Chromgegerbtes Leder wird zuerst mit einer wässrigen Lösung von doppelchromsaurem Kali und darauf mit einer Antichlorlösung behandelt, so daß sich eine Chromoxydverbindung bildet, die dem Leder die blaugrüne Farbe gibt.

Das nicht vorgestreckte Leder wird im Handel als „Kernleder“ bezeichnet. Vorgestreckte und unter Spannung getrocknete Krupons haben die Handelsbezeichnung „Prima“. Die Bezeichnung „Extra“ bedeutet, daß nicht die einzelnen Krupons, sondern der daraus geschnittene Riemen gestreckt ist.

Die Versuche zeigen aber, daß — wenn der Spannungswechsel in kurzen Zeiträumen erfolgt — der Riemen sich fast wie ein vollkommen elastischer Körper verhält (Zahlentafel 62.1). Ein neuer Riemen, 99,2 mm breit und 6,2 mm dick, der etwa 6 Jahre früher hergestellt und dabei der üblichen Streckung unterworfen worden war, wurde von C. von Bach abwechselnd mit 25 und 125 kg belastet. Die Wechsel erfolgten in Zeiträumen von 1,5 Minuten, die für die Ablesungen notwendig waren.

Aus diesem Versuch folgt, daß Spannungen und Dehnungen nicht proportional sind, d. h. daß das Hookesche Gesetz für Leder nicht gilt, und daß der Elastizitätsmodul in hohem Maße von der Spannung abhängig ist.

Für den neuen Riemen fand Bach:

- Bei der ersten Belastung . . . $E = 469$ at
- Für $\sigma = 4$ bis 20 at $E = 950$ at
- Für $\sigma = 20$ bis 36 at $E = 2117$ at

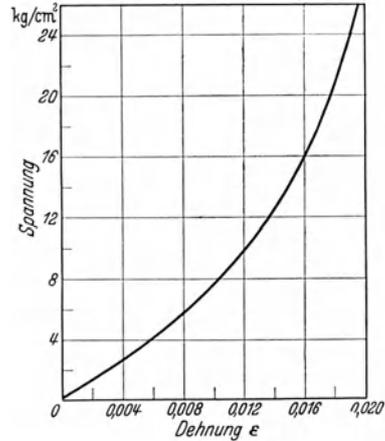
und für einen gebrauchten Riemen

- in den Spannungsgrößen
- 7,2 bis 21,6 at $E = 2680$ at
- 21,6 bis 36 at $E = 3600$ at
- 36 bis 50,4 at $E = 4130$ at
- 50,4 bis 64,8 at $E = 4250$ at.

Zur Herstellung eines geschlossenen Riemens müssen die Enden miteinander verbunden werden. Am besten ist das Leimen der sorgfältig zugeschrärfen Enden. Der Riemen muß in der Richtung des Pfeiles (Abb. 62.16 a) auflaufen weil die Enden sonst leicht aufblattern. Ein Nachteil ist das zeitraubende Trocknen der Leimverbindung und das umständliche Kürzen des Riemens.

Die Kralle aus Temperguß (Abb. 62.16 b), deren Spitzen auf der Innenseite umgeschlagen werden, hat sich bei mäßiger Geschwindigkeit ($b < 10$ m/s) als einfache Verbindung für schmale Riemen eingebürgert. Weit verbreitet ist die Verbindung durch Drahtklammern (Abb. 62.16 c), die durch Hindurchstecken eines Rohhautstäbchens hergestellt und leicht gelöst werden kann.

Die Festigkeitseigenschaften von Textilriemen werden wesentlich durch die Art der Webung beeinflusst (Abb. 62.17). Kamelhaarriemen, imprägniert, sind gegen Staub, hohe Temperaturen und Witterungseinflüsse weniger empfindlich als Lederriemen. Hanf wird als Gurt für Becheraufzüge verwendet.



62.15. Spannungs-Dehnungslinie für Leder.

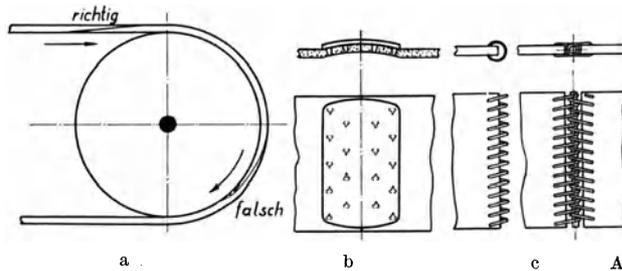


Abb. 62.16 a bis c. Riemenverbindungen.
a Durch Leimen, b mit Tempergußkralle, c durch Drahtklammern.

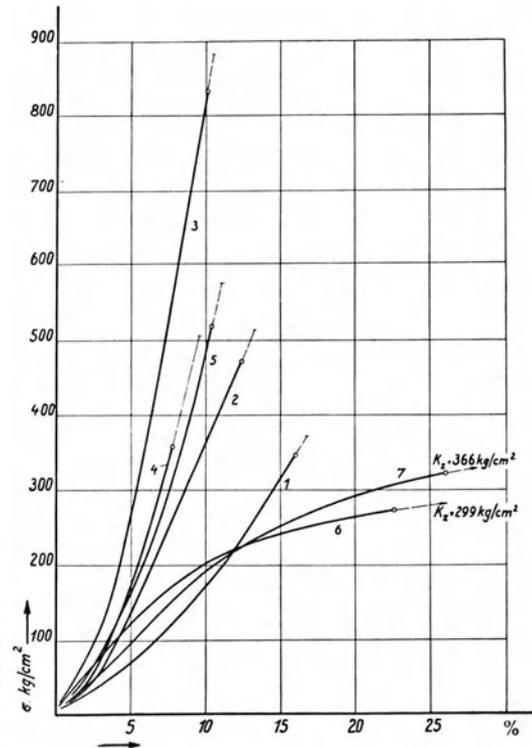


Abb. 62.17. Spannungs-Dehnungslinien von Textilriemen (aus Rötcher). 1 und 2 vierfacher Baumwollriemen, 3 sechsfacher Hanfuchriemen, imprägniert, 4 doppelter Hanfriemen, gewebt, nicht imprägniert, 5 Balatariemen, vierfach, 6 Haarriemen, 7 vierfacher Kamelhaarriemen, imprägniert.

62.2. Grenzbedingung für die Verhütung des Gleitens.

Wenn eine bestimmte Umfangskraft P übertragen werden soll, so folgt aus der Momentengleichung in bezug auf den Wellenmittelpunkt, daß im Beharrungszustand:

$$S_1 \cdot r = P \cdot r + S_2 \cdot r \text{ oder } P = S_1 - S_2 \tag{62.4}$$

sein muß. Auf ein unendlich kleines Riemenstück (Abb. 62.18) von der Länge $ds = r d\varphi$ wirken die Spannungen S und $S + dS$, deren radialen Komponenten $S \sin \frac{d\varphi}{2}$ und $(S + dS) \sin \frac{d\varphi}{2}$ zusammen die Normalkraft

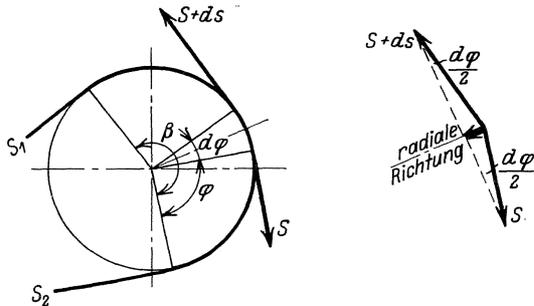


Abb. 62.18.

$$N = 2 S \sin \frac{d\varphi}{2} + dS \sin \frac{d\varphi}{2} \approx S d\varphi$$

bilden. Damit kein Gleiten eintritt, muß der Spannungszuwachs dS kleiner als die Reibungskraft $\mu N = \mu S d\varphi$ sein.

$$dS \geq \mu S d\varphi \quad \text{oder} \quad \frac{dS}{S} \geq \mu d\varphi .$$

Durch Integration über den ganzen umspannten Bogen β erhält man:

$$\ln \frac{S_1}{S_2} \geq \mu \beta$$

$$\text{oder} \quad S_1 \geq S_2 e^{\mu \beta}, \quad \text{!} \quad (62.5)$$

d. i. die bekannte Eytelwein (1807)-Grashof (1883)-sche Beziehung. In diese Grenzbedingung muß für β der kleinste umspannte Bogen, d. i. der Bogen der kleineren Scheibe, eingesetzt werden.

Aus der Ableitung folgt, daß für das Ansteigen der Spannung von S_2 auf S_1 auch ein kleinerer Winkel $\beta' < \beta$ ausreichen kann.

Zahlentafel 62.2. Werte von $e^{\mu \beta}$.

	$\frac{\beta}{2\pi} = 0,4$	0,5	0,6	0,7	0,8	1	2	3
$\mu = 0,18$	$e^{\mu \beta} = 1,57$	1,76	1,97	2,20	2,47	3,09	9,57	29,6
$\mu = 0,2$	1,65	1,87	2,12	2,41	2,73	3,51	12,3	43,1
$\mu = 0,3$	2,12	2,56	3,1	3,7	4,5	6,6	43	283

Die Elastizität des Riemens bedingt für jede Spannungsänderung eine Änderung der Riemenlänge, so daß der Riemen sich während der Spannungsänderung auf der Scheibe bewegen muß. Aus Gl. (4) und (5) folgt.

$$S_1 = \frac{P e^{\mu \beta}}{e^{\mu \beta} - 1} \quad \text{und} \quad S_2 = \frac{P}{e^{\mu \beta} - 1} . \quad (62.6)$$

Die Achsbelastung A ist gleich der Resultierenden der Kräfte S_1 und S_2 , oder, wenn beide Riementeilte angenähert parallel liegen:

$$A = S_1 + S_2 \quad (62.7)$$

Das Verhältnis:

$$\varphi = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} = \frac{P}{A} , \quad (62.8)$$

Durchzugsgrad genannt, gilt als Maß für die Haftfähigkeit des Riemens und ist immer kleiner als 1.

Bei der Übertragung der Drehbewegung durch einen elastischen Riemen ist immer ein Geschwindigkeitsverlust vorhanden. Ein Riementeilchen erleidet nämlich, wenn es von der treibenden auf die getriebene Scheibe und zurück zum ersteren wandert, zwei Spannungen $\sigma_1 = S_1/f$ ($f =$ Riemenquerschnitt) und $\sigma_2 = S_2/f$, die um $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_n$ voneinander verschieden sind. Infolge der Elastizität ändert sich die Länge des Teilchens von l_1 auf l_2 um Δl . Diese Längenänderung erfolgt auf beiden Scheiben dadurch, daß sich der Riemen auf der getriebenen um Δl dehnt und auf der treibenden um den gleichen Betrag verkürzt. Da in jedem Augenblick durch jeden Querschnitt die gleiche Riemenmasse gehen muß, so hat der Riemen im straffen Trum beim Auflauf auf die treibende Scheibe die größte Geschwindigkeit v_1 (gleich der Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe) und im losen Trum beim Auflauf auf die getriebene Scheibe die kleinste Geschwindigkeit v_2 (gleich deren Umfangsgeschwindigkeit). Den Unterschied

$$\frac{v_1 - v_2}{v_1} = \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{E} = \frac{\sigma_n}{E} \quad (62.9)$$

nennt man den Schlupfverlust. Er ist um so größer, je größer der Spannungsunterschied σ_n und je kleiner der Spannungsmodul E ist.

Der unvermeidliche Dehnungsschlupf ist wohl zu unterscheiden vom Gleitschlupf, bei dem der ganze Riemen auf der Scheibe rutscht, sobald $S_1 > S_2 e^{\mu\beta}$ wird.

Diese Anschauungen werden durch die Messungen von Fieber¹ (an Gummiriemen) bestätigt¹ (Abb. 62.19). Aus der Abbildung folgt, daß der Riemen auf beiden Scheiben zuerst den Ruhewinkel α durchläuft und dann den Schlupfwinkel β , innerhalb dessen sich der Spannungswechsel vollzieht. Nach Verlassen der Scheiben tritt eine elastische Nachwirkung auf.

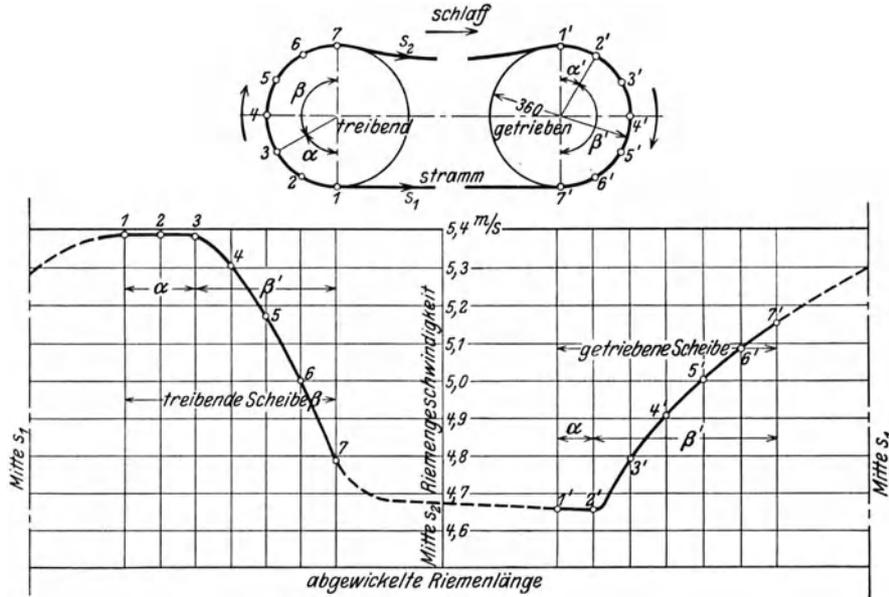


Abb. 62.19. Dehnungsschlupf in einem Gummiriemen nach Versuchen von Fieber.

Wenn r_1 bzw. r_2 der Radius der treibenden bzw. der getriebenen Scheibe und δ die Riemenstärke ist, so ist das Übersetzungsverhältnis

$$i = \frac{r_1 + 0,5 \delta}{r_2 + 0,5 \delta} \left(1 - \frac{\sigma_n}{E} \right). \quad (62.10)$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß die Spannungen gleichmäßig über die Riemenstärke verteilt sind. Infolge der Krümmung des Riemens trifft dies nun nicht mehr zu. Bach gibt deshalb schätzungsweise:

$$i = \frac{r_1 + \frac{1}{3} \delta}{r_2 + \frac{2}{3} \delta} \left(1 - \frac{\sigma_n}{E} \right). \quad (62.10 a)$$

Durch Anordnung von keilförmigen Rillen (Abb. 62.20) wird die Reibzahl erhöht. Die Ausschnitte im keilförmigen Riemen werden gemacht, um die Biegespannungen klein zu halten².

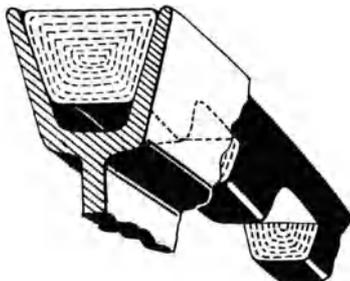


Abb. 62.20a. Keilförmige Riemen (Roderwald).

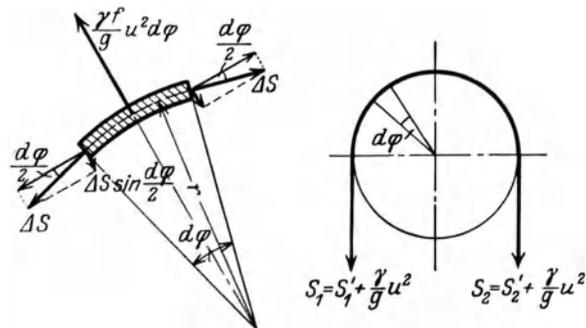


Abb. 62.21. Einfluß der Fliehkräfte.

¹ Norosky, H.: Riemenschlupf und Reibungszahl von Gummi- und Lederriemen. Versuchsfeld für Masch.-El. T. H. Berlin, Heft 8 (1927).

² Kutzbach, K.: Versuche mit Keilriementrieben. Z. VDI 77 (1933) S. 238/43. — Jähner, O.: Keilriementriebe mit veränderlicher Übersetzung. Masch.-Bau 15 (1936) S. 370. — Meyer, J.: Aufbau und Winkel von Keilriemen. Glasers Ann. 122 (1938) S. 71/75. — Degenhardt, W.: Weiterentwicklung der Keilriementriebe. Werkst.-Techn. 32 (1938) S. 201/09.

Einfluß der Fliehkräfte. Da der Riemen eine gekrümmte Bahn durchläuft, treten zusätzliche Kräfte auf, kurz Fliehkräfte genannt. Die Fliehkräfte sind Massenkräfte, d. h. sie greifen im Körper selbst an und können diesen nur zusätzlich spannen.

Ist γ das spez. Gewicht, so ist die Fliehkraft für ein Riemenelement von der Länge $rd\varphi$.

$$dF = dm r \omega^2 = \frac{f r^2 d\varphi \gamma}{g} \omega^2 = \frac{\gamma}{g} u^2 f d\varphi,$$

u ist die Riemengeschwindigkeit in m/s.

Da die drei Kräfte ΔS , dF und ΔS sich das Gleichgewicht halten, so ist (Abb. 61.21)

$$dF = 2 \Delta S \sin \frac{d\varphi}{2} = \Delta S d\varphi = \frac{\gamma}{g} u^2 \cdot f \cdot d\varphi,$$

woraus:

$$\sigma_f = \frac{\Delta S}{f} = \frac{\gamma}{g} u^2. \quad (62.11)$$

Für	$u = 10$	30	50	100	200 m/s,
ist	$\sigma_f = 1$	9	25	100	400 kg/cm ² .

Die Fliehkraft spannt jedes Riemenelement zusätzlich um den gleichen Betrag ΔS , unabhängig von dem Krümmungsradius der Bahn.

Daraus folgt sofort, daß auch die Kräfte S_1 und S_2 um diesen Betrag erhöht werden. Die Nutzkraft $P = S_1 - S_2$ ist unabhängig von der Riemengeschwindigkeit. Nennt man $S'_1 = S_1 - \Delta S$ und $S'_2 = S_2 - \Delta S$ die freien Riemenkräfte, so ist

$$S'_1 = S'_2 e^{\mu\beta}$$

oder

$$S_1 - \Delta S = (S_2 - \Delta S) e^{\mu\beta}. \quad (62.12)$$

Da die Fliehkraft innere, den Riemen verlängernde Kräfte auslöst, wird der Lagerdruck um einen kleinen, durch die Verlängerung bedingten Betrag vermindert.

Beziehen wir die Kräfte auf 1 cm² Riemenquerschnitt, führen wir also die Spannungen ein, so lautet Gleichung (12):

$$\sigma_1 - \sigma_f = (\sigma_2 - \sigma_f) e^{\mu\beta},$$

und Gleichung (4):

$$\sigma_n = \sigma_1 - \sigma_2.$$

Daraus folgt

$$\sigma_n = (\sigma_1 - \sigma_f) \frac{e^{\mu\beta} - 1}{e^{\mu\beta}}. \quad (62.13)$$

62.3. Berechnung.

Die übertragbare Leistung ist durch die zulässige Spannung des Riemens eingeschränkt. Wenn die Umfangskraft $P = \sigma_n \cdot f$ gegeben ist, so folgt die größte Zugspannung aus der Gl. (13). Dazu kommt noch die Biegespannung aus Gl. (12.10). Für Leder ist die Biegespannung jedenfalls kleiner als aus dieser Gleichung folgt, weil nach Überschreiten der Elastizitätsgrenze der Spannungsverlauf flacher wird; man setzt:

$$\sigma_b \approx 0,7 \frac{d}{D} E. \quad (62.14)$$

Die Festlegung der „zulässigen“ Spannung ist hauptsächlich eine wirtschaftliche Frage und kann nur von Fall zu Fall unter genauer Kenntnis der vorliegenden Verhältnisse richtig beurteilt werden. Das Verhältnis d/D bestimmt die Biegespannung, die Größe der Scheiben und auch die Lebensdauer des Riemens. Man wird die Wahl so treffen müssen, daß die Anschaffungs- und Betriebskosten für den ganzen Riementrieb (einschließlich Scheiben und Lagerung) ein Minimum erreicht. Dabei muß auch die Lebensdauer des Riemens geschätzt werden. Bei einem kleinen (billigen) Riemen, der nur gelegentlich in Betrieb steht, darf sie kürzer gewählt werden, da die Ersatzkosten und die Betriebsstörungen durch Bruch von untergeordneter Bedeutung werden. Bei sehr breiten und langen Riemen muß die Lebensdauer größer sein. Auch das öftere Kürzen des Riemens bei Wahl einer höheren zulässigen Spannung ist besonders bei den schweren Trieben und bei ununterbrochenem Betrieb sehr unangenehm.

Für Überslagrechnungen schlage ich vor, daß die zulässige Spannung auch für die beste Riemenqualität 50 kg/cm² nicht überschreiten sollte¹. In vielen Fällen geht man wesentlich höher (wie die nachfolgenden Zahlenbeispiele zeigen) um billige Antriebe zu erhalten, und nimmt das öftere Kürzen des Riemens in Kauf. Die Zahlenbeispiele sollen aber nicht als „Musterbei-

¹ Nach den Vorschlägen in Masch.-B. 1927, S. 877, muß für die beste Lederqualität $\sigma_1 < 38$ at sein, unabhängig von der Biegung.

spiele“ gelten, da die gewählten Werte, besonders bei Drehbankantrieben, meistens viel zu hoch sind und kaum aus wirtschaftlichen Überlegungen festgelegt wurden.

Lebensdauer. Der Riemen wird nach einer bestimmten Anzahl Biegungen zerstört. Die sekundliche Biegezahl des Riemens ist proportional der Riemen­geschwindigkeit und umgekehrt proportional der Riemenlänge. Da der Riemen bei einem Umlauf zweimal gebogen und wieder gerade gestreckt wird, ist die Biegezahl gleich $2v/l$. Biegezahl mal Biege­widerstand W kann als Maß für die Zerstörungsarbeit angesehen werden. A. E. Müller¹ leitet aus seinen Versuchen folgende Gleichung für den Biege­widerstand des Riemens ab:

$$W = B_1 \sigma^m (d/D)^n \text{ kg/cm Riemenbreite, so daß}$$

$$\text{die Lebensdauer} = \text{Funktion} \left[Z = \frac{l}{v} (D/d)^n \sigma^{-m} \right]$$

ist. Die Exponenten m und n hängen von der Riemenqualität ab und sind für Lederriemen im Mittel $n = 1,5$ und $m = 0,5$. Für eine bestimmte Lebensdauer muß

$$Z = \frac{l}{v} \left(\frac{D}{d} \right)^n \sigma^{-m} = \text{konstant sein.} \quad (62.15)$$

C. Bach berichtet über den Antrieb eines Walzwerkes von 2 bis 3000 PS durch einen Riemen von 1400 mm Breite und $4 \times 4,5 = 18$ mm Dicke, bei einer Umfangsgeschwindigkeit von 42,7 m/s, der bei Tag- und Nachtbetrieb bei einer mittleren Nutzspannung von nur 17,5 kg/cm² innerhalb zwei Jahren um 1,4 m gekürzt wurde. Die größte Spannung σ_1 ist dort kleiner als 40 kg/cm².

Wird v verdoppelt, dann muß bei gleicher Lebensdauer das Verhältnis D/d $2^{2/3} = 1,6$ mal so groß werden. Die Vorschrift, daß D/d größer als etwa 40 sein muß, kann demnach keine allgemeine Gültigkeit haben und gilt nur für langsam laufende Riemen. Die Biegespannung $\sigma_b = 0,7 E/40 = \text{rd. } 42 \text{ kg/cm}^2$ ist dann ziemlich groß. Unter Berücksichtigung gleicher Lebensdauer könnte die Spannung σ_1 aus Gl. (15) berechnet werden, indem dann

$$\sigma_1 = K (D/d)^3 \cdot (l/v)^2 \quad (62.16)$$

sein sollte, wobei K von der gewählten Lebensdauer und von der Riemenqualität abhängt.

Günstigste Riemen­geschwindigkeit. Die übertragbare Leistung $P \cdot v$ wird ein Maximum für $\frac{\partial (Pv)}{\partial v} = 0$. Wenn μ und β unabhängig von v sind (was für μ sicher nicht zutrifft, vgl. S. 307), so folgt aus Gl. (13):

$$\frac{\partial (Pv)}{\partial v} = \frac{\partial (\sigma_n \cdot f \cdot v)}{\partial v} = 0 = \sigma_1 - 3 \frac{\gamma}{g} v_g^2,$$

d. h. die maximale Leistung wird bei einer Geschwindigkeit $v_g = \sqrt{\frac{\sigma_1 g}{3\gamma}} = 5,8 \sqrt{\sigma_1}$ übertragen.

Die Umfangskraft P und damit die übertragene Leistung wird zu Null für $\sigma_1 = \frac{\gamma}{g} v_2^2$ oder für $v_2 = \sqrt{\frac{\sigma_1 g}{\gamma}}$. Für $\sigma_1 = 28 \text{ at}$ und $\gamma = 0,001 \text{ kg/cm}^3$, wird $v_g = \frac{1}{100} \sqrt{\frac{28 \times 981}{3 \times 0,001}} = 30 \text{ m/s}$ und $v_2 = 51 \text{ m/s}$.

Die günstigste Geschwindigkeit v_g liegt verhältnismäßig hoch, erfordert große (teure) Scheiben, deren Luftwiderstand den Wirkungsgrad der Übersetzung vermindert; ihre Seitenflächen sollten deshalb möglichst glatt verschalt werden. Die günstigste Riemen­geschwindigkeit gibt sicher nicht immer die wirtschaftlichste Lösung der Riemenübertragung. Bei kleinen Scheiben und hoher Drehzahl läuft der Riemetrieb außerdem nicht mehr geräuschlos.

Der Verlauf der Spannungen und der übertragenen Leistung in Abhängigkeit von der Riemen­geschwindigkeit ist in Abb. 62.22 für $e^{\mu\beta} = 2$ eingezeichnet. Wenn μ und β unveränderliche Größen sind, folgt daraus, daß die übertragbare Nutzspannung σ_n mit der Geschwindigkeit abnehmen muß.

Die Erfahrungswerte von C. O. Gehreckens standen in scharfem Gegensatz zu diesem „theoretischen“ Ergebnis, indem er mit der Geschwindigkeit zunehmende Nutzspannungen empfahl (Abb. 62.23). Seine Werte gelten für Riemetrieb mit Dehnungsspannung und unter folgenden Voraussetzungen:

1. Daß die Wahl des passenden Riemens dem Lieferanten überlassen wird. Weil für schmale

¹ Müller, A. E.: Verluste der Riemetriebe bei Verwendung kleiner Scheiben. VDI-Forsch.-Heft Nr. 318 (1929).

Riemen nicht die beste (teuerste) Lederqualität verwendet wird, sind folgende Zuschläge auf die Riemenbreite zu machen:

für 40	45—50	55—60	65—80 mm Breite
50	30	20	10% Zuschlag.

2. Daß der Trieb horizontal oder der obere Riemen nicht über 45° geneigt läuft und daß die Achsentfernung entsprechend groß ist; andernfalls 10—20% Zuschlag.

3. Daß die Übersetzung nicht über 2 : 1 ins Schnelle erfolgt und keine großen Belastungsschwankungen auftreten, sonst 20—50% Zuschlag (Fallhämmer, Sägegatter, Walzwerke).

Für Riemen in feuchten Räumen, für gekreuzte Riemen (je nach Achsabstand, Riemenbreite und Geschwindigkeit) und für oft auszuruückende Riemen sind 10—30% Zuschlag zu machen, während für Lenixtriebe 50—60% höhere Belastungen zulässig sind.

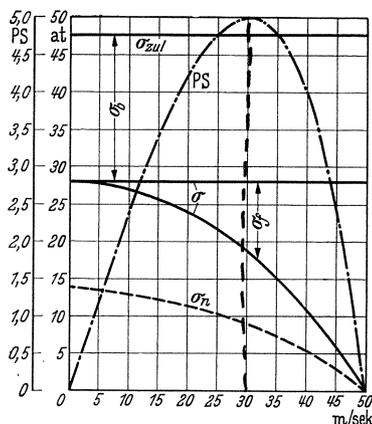


Abb. 62.22. Nutzspannung σ_n in Abhängigkeit der Riemen-
geschwindigkeit.

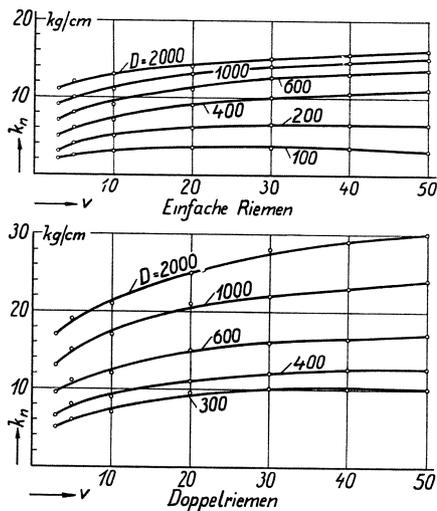


Abb. 62.23. Erfahrungswerte von Gehrckens. Zulässige Nutz-
belastung für 1 cm Riemenbreite. (Aus Rötcher.)

Seit der Veröffentlichung der Gehrckenschen Werte (1889) sind ausgedehnte Versuche durchgeführt worden, um diese nachzuprüfen und zu erklären. Man kann einen steigenden Verlauf von σ_{zul} auch einfach durch eine bessere Lederqualität und durch die größeren Riemenscheiben beim schnelllaufenden Riemen begründen. Aber die Verbesserung der Qualität ist nur in engen Grenzen möglich, während die Fliehkraftspannung mit den Quadraten der Geschwindigkeit zunimmt.

Die Reibzahl von Leder auf Eisen¹ ist schon vielfach bestimmt worden; die Versuche zeigen, daß μ von einer ganzen Reihe von Faktoren abhängt. Jedenfalls braucht es noch weitere Versuche und auch wohl eine theoretische Grundlage als Führung, bis alle dabei auftretenden Fragen zuverlässig beantwortet werden können. Aus den Versuchen geht folgendes hervor:

1. Die Reibzahl zwischen Leder und Eisen ist für glatte Scheiben größer als für rauhe. Daraus folgt, daß die Lauffläche der Riemenscheiben nicht einfach geschruppt, sondern möglichst glatt gedreht werden sollte. Diese Schlußfolgerung wird von vielen Firmen noch zu wenig beachtet.

2. Zwischen Riemen und Scheibe bildet sich eine Fettschicht. Wird diese (z. B. durch Waschen mit Benzin) entfernt, so nimmt μ sofort ab. Die Reibung zwischen Leder und Scheibe ist demnach ein hydrodynamisches Problem und deshalb von Pressung, Gleitgeschwindigkeit, Temperatur, Oberflächenbeschaffenheit usw. abhängig.

3. Die Reibzahlen sind namentlich bei größeren Geschwindigkeiten wesentlich größer als früher angenommen wurde. Aus den Versuchen von Friedrich folgt z. B.:

a) für einen neuen, schwach gefetteten Riemen ($b = 100$ mm) auf blanker, ebener Gußscheibe von 510 mm Durchmesser und $S_1 - S_2 = 25$ kg, bei einer Gleitgeschwindigkeit

$$v_s = 1,56 \text{ cm/s}, \quad \mu_m = 0,19$$

$$v_s = 13 \text{ cm/s}, \quad \mu_m = 0,43.$$

b) für einen gebrauchten, eingelaufenen Riemen, stark gefettet, auf der gleichen Scheibe bei

$$v_s = 1,55 \text{ cm/s}, \quad \mu_m = 0,79$$

$$v_s = 45 \text{ cm/s}, \quad \mu_m = 1,64.$$

¹ Friedrich, F.: Versuche über die Größe der wirksamen Kraft zwischen Riemen und Scheibe. VDI-Forsch.-Heft 196/98 (1917). — Mohr: Dissertation, Danzig 1921.

Deshalb nimmt auch $e^{\mu\beta}$ mit wachsender Geschwindigkeit stark zu, z. B. für

$$\beta = \pi \quad \text{und} \quad \mu = 0,18 \quad \text{ist} \quad e^{\mu\beta} \approx 2 \quad \text{und} \quad \sigma_n = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_f),$$

$$\text{und für} \quad \mu = 1,6 \quad \text{ist} \quad e^{\mu\beta} \approx 150 \quad \text{und} \quad \sigma_n = \frac{149}{150} (\sigma_1 - \sigma_f).$$

Damit und mit den leicht ansteigenden Werten von σ_{zul} lassen sich die mit zunehmender Geschwindigkeit steigenden Nutzspannungen von Gehrckens erklären (Abb. 62.24). — Bei der Rauheit der Riemenoberfläche und wegen der sehr kleinen Dicke der Flüssigkeitsschicht sind die Voraussetzungen der reinen Flüssigkeitsreibung hier nicht erfüllt, sondern ein Teil der Riemen- und Scheibenoberfläche berührt sich direkt, während daneben eine dünne Fettschicht vorhanden ist, die einerseits an der Riemen- und andererseits an der Scheibenoberfläche O haftet. Die Reibungskraft setzt sich deshalb aus zwei Teilen zusammen:

$$\mu N = \underbrace{\mu_0 N}_{\text{(trockene Reibung)}} + \underbrace{\eta O \frac{dw}{dy}}_{\text{(Flüssigkeitsreibung)}}$$

In der sehr dünnen Fettschicht kann die Geschwindigkeitsänderung als geradlinig verlaufend angenommen werden, d. h.

$\frac{dw}{dy} = \frac{v_s}{\delta}$, worin v_s die Gleitgeschwindigkeit und δ die Schichtdicke ist. Damit wird:

$$\mu = \mu_0 + \eta \frac{O}{N} \cdot \frac{v_s}{\delta}.$$

Für ein Oberflächenelement $O = r b d\varphi$ ist $N = S d\varphi$, und

$$\mu = \mu_0 + \eta r \frac{b}{S\delta} v_s = \mu_0 \left(1 + \frac{R_f}{S} \right) \quad (62.17)$$

Es ist anzunehmen, daß diese Beziehung für $v_s = 0$ nicht mehr gilt, da dann die Haftreibung in Frage kommt, so daß die Reibungszahlen den in Abb. 62.25 dargestellten grundsätzlichen Verlauf haben müssen¹. Sie lassen sich leider zum Voraus nicht zuverlässig berechnen. Aus den Überlegungen kann man aber die praktisch wichtige Schlußfolgerung ziehen, daß die Reibungszahl μ groß wird, wenn:

η groß ist (Rindertalg oder Tran als Riemenfett,

$$\eta \approx 0,03 \text{ kg} \cdot \text{s}/\text{m}^2$$

r groß (große Riemenscheiben)²,

δ klein (Laufflächen möglichst glatt),

v_s groß (große Riemengeschwindigkeit und E klein),

b groß (besser breite als doppelte Riemen).

Die schädliche Wirkung von Feuchtigkeit und von hohen Temperaturen beim Riementrieb erklärt sich durch die Verminderung der Zähigkeit. Beim Austrocknen des Riemens (Kesselhaus) wird $\mu = \mu_0 = 0,15$ bis $0,18$; ebenso bei kleinen Riemengeschwindigkeiten (v kleiner als etwa 4 m/s).

Es ist in Europa allgemein gebräuchlich, den Lederriemen auf der Fleischseite laufen zu lassen, mit der Begründung, daß eine solche Auflage (insbesondere auf gewölbten Scheiben) der natürlichen Krümmung der Haut entspricht. Eingehende amerikanische und später auch deutsche Versuche³ haben aber gezeigt, daß die Reibungszahl auf der (glätteren) Haarseite größer ist als auf der Fleischseite, wenn man den Riemen genügend lange einlaufen läßt.

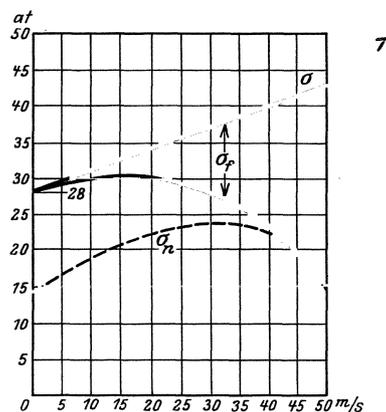


Abb. 62.24.

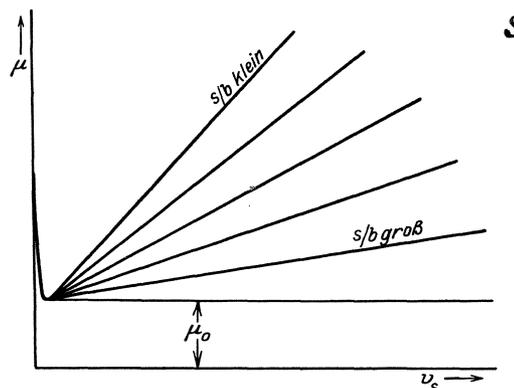


Abb. 62.25. Reibungszahlen für Lederriemen.

¹ In der Z. Masch.-Bau 1927, S. 877 wird für mittlere Verhältnisse $\mu = 0,15 (1 + 0,15v)$, also auch ein geradliniger Verlauf vorgeschlagen.

² Schon die alte Ropersche Formel (U. S. A.) sagte aus, daß P_n proportional der vom Riemen bedeckten Scheibenoberfläche sei.

³ Kutzbach: Riemenauflagen, Fleischseite oder Haarseite. Z. VDI 68 (1924) S. 787. — Neuere Treibriemenversuche. Z. Lederriemen Heft 7/8 (1928). Vgl. auch Z. VDI 74 (1930) S. 1263. — Heyde, H.: Kraftbeziehungen beim Riementrieb. Forschung 7 (1938) S. 275/87.

62.4. Erzeugung der Riemenspannung.

Die zur Übertragung einer gegebenen Leistung notwendigen Riemenkräfte S_1 und S_2 können auf zwei verschiedenen Arten erzeugt werden:

1. Durch die Elastizität des Riemens, indem er unter Vorspannung auf die Scheiben gelegt wird (Dehnungsspannung), wobei das Eigengewicht die Spannung erhöhen kann.
2. Der Riemen wird auf etwas größere Länge zusammengeleimt als dem Umriß des Triebes entspricht; die Spannung wird dann durch eine aufgelegte Spannrolle erzeugt (Belastungsspannung).

1. Bei der Dehnungsspannung hängt der Riemen nach einer Kettenlinie durch, weil die Bewegung des Riemens nur zur Folge hat, daß jedes Riementeilchen um den Betrag $f \cdot v^2 \gamma / g$ zusätzlich gespannt wird.

Betrachten wir nun einen Trieb mit gleich großen Scheiben, deren Achsen in gleicher Höhe liegen (Abb. 62.26), so kann die Berechnung der Riemenspannungen dadurch noch vereinfacht werden, daß die Endpunkte der schwebenden Bahnen A', B', C' und D' mit A, B, C und D zusammenfallend gedacht werden. Für den kleinen Durchhang des Riemens kann außerdem die Seilkurve durch eine Parabel ersetzt werden.

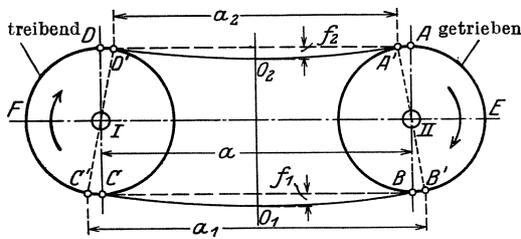


Abb. 62.26. Durchhang des belasteten Riemens. (Aus Schulze-Pillot).

Wenn der Nullpunkt in O_1 resp. O_2 verlegt wird ist dann der Durchhang:

$$y = f_x = C \cdot x^2 / 2, \quad y' = C \cdot x = \operatorname{tg} \alpha$$

und die Länge der Parabel von 0 bis x

$$s_x = \int_0^x \sqrt{1 + (y')^2} dx \sim \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2} C^2 x^2 \right) dx = x \left(1 + \frac{C^2 x^2}{6} \right). \tag{62.18}$$

Die freie Riemenkraft S' (also ohne Berücksichtigung der Bewegung des Riemens) ist, wenn $q = \gamma f$ das Riemengewicht/Längeneinheit ist

$$S' = \frac{V}{\sin \varphi} = \frac{q \cdot s_x}{\operatorname{tg} \varphi} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{q \cdot s_x}{C \cdot x} \cdot \frac{ds}{dx} \approx q \frac{s_x}{Cx}$$

und mit Cx aus Gl. (18), da für den kleinen Durchhang $s_x \approx x$ ist:

$$S' = q \sqrt{\frac{S_x^3}{6(s_x - x)}} \approx q \sqrt{\frac{x^3}{6(s_x - x)}}. \tag{62.19}$$

Die Riemenkraft S unter Berücksichtigung der Riemengeschwindigkeit v ist.

$$S = S' + \frac{\gamma}{g} f v^2. \tag{62.20}$$

Für den Leerlauf, d. h. wenn keine Umfangskraft übertragen wird, ist $S_1 = S_2 = S = \text{konstant}$. Der Riemen besteht dann aus zwei gleichen Hälften von der Länge $l = s + \pi r$. Von dieser „gedehnten Länge“ ist die ursprüngliche Länge l_u (Urlänge) zu unterscheiden.

$$l = l_u (1 + \epsilon).$$

Die Länge der schwebenden Bahn ist $s = l - \pi r = l_u (1 + \epsilon) - \pi r$

und $s - a = l_u (1 + \epsilon) - (\pi r + a) = l_u (1 + \epsilon) - a'$.

wenn der Umriß des Fadens $\pi r + a = a'$ gesetzt wird. Für $x = a/2$ ist

$$S' = q \sqrt{\frac{a^3}{24(l_u - a' + \epsilon l_u)}} \quad \text{oder} \quad (l_u - a') + \epsilon l_u = \frac{q^2 a^3}{24 S'^2}. \tag{62.21}$$

Für den stillstehenden Riemen ($S' = S$) kann diese Gleichung leicht zeichnerisch gelöst werden (Abb. 62.27). Man trägt die Werte der drei Glieder der Gl. (21), die ihrer Dimension nach Strecken bedeuten, in Abhängigkeit von S ab. Hierbei ergibt $l_u - a'$ (das positiv oder negativ sein kann) die „Vorspannungsgerade“ und ϵl_u die „Dehnungskurve“, die mit Abb. 62.15 bestimmt ist. Das Glied $\frac{q^2 a^3}{24 S'^2}$ liefert die „Eigengewichtskurve“¹ und ihr Schnittpunkt mit den summierten Werten der Vorspannungsgeraden und Dehnungskurve die Lösung der Gl. (62.28).

Hat der Riemen die Geschwindigkeit v , so wird die Riemenfliehkraft S_f dazu addiert, die Dehnungskurve muß nun im Punkte O'' anfangen, der um die Strecke S_f unter O' liegt. Die ganze Dehnungslinie wird also um diesen Betrag nach unten verschoben (Abb. 62.27).

¹ Schulze-Pillot, G.: Neue Riementheorie. Berlin: Julius Springer 1926.

Wird der Trieb belastet und macht man die weitere Vereinfachung, daß in E und F (Abb. 62.26) die Spannung plötzlich von S_1 auf S_2 übergeht, so wird das lose Trum um den gleichen Betrag verlängert, um den das straffe gekürzt wird. Dadurch ändert sich die ursprüngliche Länge und damit die Lage der Vorspannungsgerade für die beiden Riemensstücke. Da es nur auf die relative Lage der Dehnungskurve zur Eigengewichtskurve ankommt, kann an Stelle der Verschiebung der Vorspannungs- und Dehnungslinie auch die Eigengewichtskurve um den gleichen Betrag, aber in entgegengesetzter Richtung, verschoben werden. Nach einem Vorschlag von Schulze-Pillot verschiebt man dazu die (auf durchsichtiges Papier gezeichnete) Eigengewichtskurve nach rechts und links um gleiche (willkürliche) Strecken Δl und

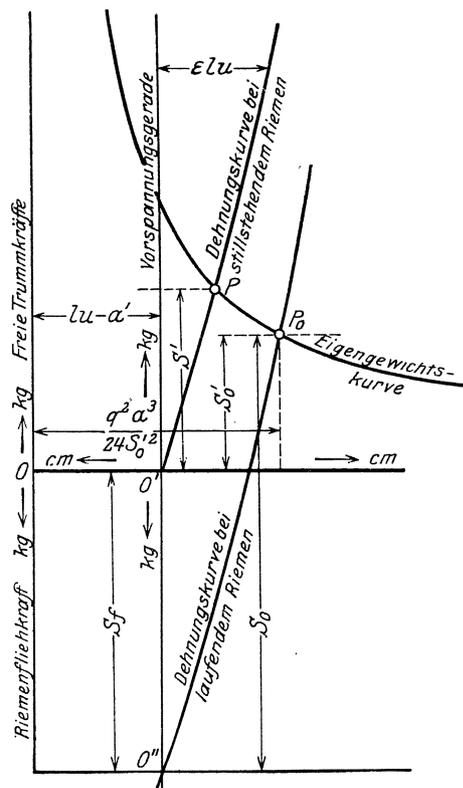


Abb. 62.27. Leerlaufcharakteristik (nach Schulze-Pillot).

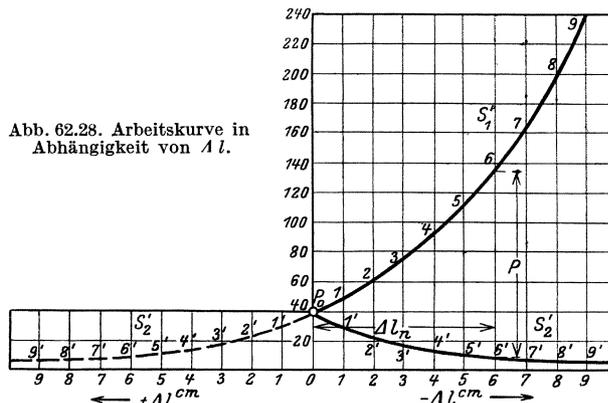


Abb. 62.28. Arbeitskurve in Abhängigkeit von Δl .

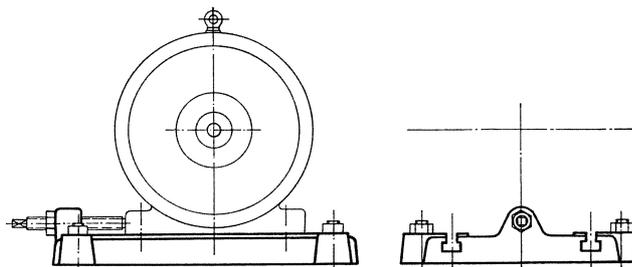


Abb. 62.29. Anordnung zum Nachspannen des Riemens. (Aus Rötischer.)

bestimmt durch die Schnittpunkte mit der Dehnungskurve die Spannungen S'_1 und S'_2 . Trägt man die so gefundenen Werte in Abhängigkeit von den Änderungen Δl der Riemenlänge auf, so erhält man die „Arbeitskurve“ (Abb. 62.28). Um den Unterschied $S'_1 - S'_2 = P$ leicht ablesen zu können, ist in dieser Abbildung der unterhalb des Leerlaufpunktes P_0 gelegene Kurvenast umgeklappt.

Die Spannungen nehmen im Laufe der Zeit ab, so daß die Gefahr vorhanden ist, daß diese zur Übertragung der Umfangskraft P nicht mehr ausreichen werden. Dann wird ein Nachspannen erforderlich, indem z. B. die eine Welle (Motor) auf Spannschienen gestellt wird (Abb. 62.29), oder durch Verkürzen, d. h. Trennen, Abschneiden und Wiederverbinden des Riemens. Um dieses umständliche Verfahren nicht zu oft anwenden zu müssen, wird der Faden mit einem — oft recht bedeutenden — Überschuß an Spannung aufgelegt. Die Achsbelastung A wird dann wesentlich größer als $3P$ (bis zu $9P$), aber gleichzeitig auch die Reibungszahl μ und damit die Kraftübertragung verkleinert.

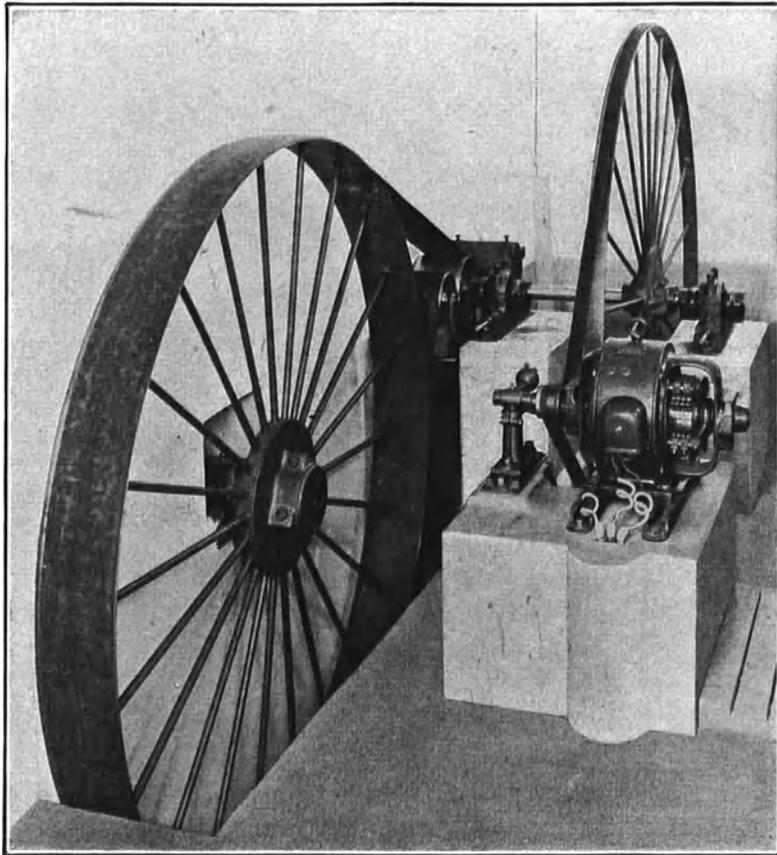
2. Belastungsspannung. Der französische Ingenieur Leneveu hat zuerst die Spannrolle so angeordnet, daß damit auch eine Vergrößerung des umspannten Bogens verbunden ist (Abb. 62.30). Nach ihm werden solche Getriebe auch Lenixtriebe genannt. Um unnötig große Belastungsgewichte zu vermeiden, ist die Spannrolle immer im schlaffen Trum anzubringen. Auch die Reibung wird größer, je kleiner die Spannung ist. Wenn der Widerstand beim Umlenken um die Rolle vernachlässigt wird, erzeugt die Rolle gleich große Kräfte in den beiden abgelenkten Riemensstücken, die aus dem Kräfteparallelogramm leicht bestimmt werden können.

In Abb. 62.31 z. B. wird die Federkraft F durch $P = F \cdot a/b$ an der Rollenachse ersetzt und dann in den Richtungen AC (Resultierende S der Riemenkräfte S_2) und BC (Richtung des Armes) zerlegt.

Zahlenbeispiel 62.1. Berechnung der Riemenbreite für den Antrieb einer Dynamo ($N = 6 \text{ PS}$, $n = 1600$) von einer Wasserradwelle ($n = 8$) aus. Die Ausführung erfolgte mit zwei Spannrollentrieben nach Abb. 62.30.

Bei beiden Trieben handelt es sich um langsamlaufende Riemen ($v < 10 \text{ m/s}$), so daß der Einfluß der Fliehkraft vernachlässigt werden kann. Der umspannte Winkel ist groß, $\beta \approx 1,5\pi$, und $e^{\mu\beta} \approx 3$. Dann folgt aus Gl. (13):

$$\sigma_n = \frac{2}{3} \sigma_1, \text{ d. h. } \sigma_1 = \frac{3}{2} \sigma_n \text{ oder } S_1 = \frac{3}{2} P, \text{ und } \sigma_2 = \frac{1}{2} \sigma_n \text{ oder } S_2 = \frac{P}{2}.$$



Wasserrad-Vorgelege
$d_1 = 2600 \text{ mm}, n_1 = 8$
$d_2 = 320 \text{ mm}, n_2 = \frac{2600}{325} \cdot 8 = 64$
$a = 1950 \text{ mm}$
$v = \frac{\pi \cdot 2,6 \cdot 8}{60} = 1,1 \text{ m/s}$
$P = \frac{6 \cdot 75}{1,1} = 410 \text{ kg}$
$\delta = 5 \text{ mm}, b \sim 500 \text{ mm}$
$\sigma_t = 25 + 39 = 64 \text{ at}$

Vorgelege-Dynamo
$d_1 = 2750 \text{ mm}, n_1 = 64$
$d_2 = 110 \text{ mm}, n_2 = 1600$
$a = 1950 \text{ mm}$
$v = \frac{\pi \cdot 2,75 \cdot 64}{60} = 9,2 \text{ m/s}$
$P = \frac{6 \cdot 75}{9,2} = 49 \text{ kg}$
$\delta = 4 \text{ mm}, b \sim 75 \text{ mm}$
$\sigma_t = 25 + 64 = 89 \text{ at}$

Abb. 62.30. Antrieb eines Dynamo von einer Wasserradwelle durch Spannrollen.

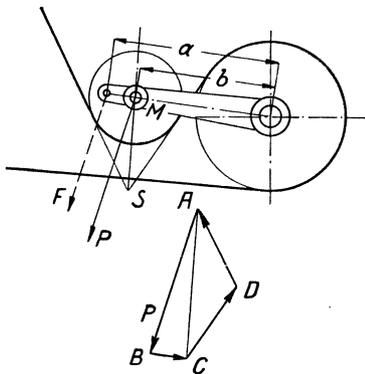


Abb. 62.31. Kräfte beim Spannrollentrieb. $AD=DC=S_2$. (Aus Rötseher.)

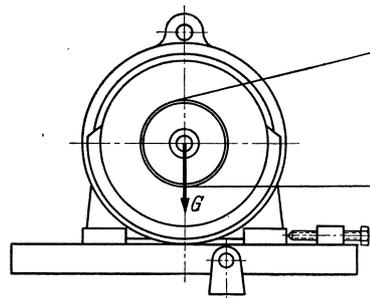


Abb. 62.32¹.

¹ Swift, H. W.: Short-centre belt drives. Proc. Instn. mech. Engr. 135 (1937) S. 485/531.

Wenn $\sigma_1 = 25 \text{ at}$ gewählt wird, so ist die Riemenbreite bei $\delta \text{ cm}$ Dicke

$$b = \frac{\frac{3}{2} P}{\delta \cdot 25} = 0,06 P / \delta \text{ cm.}$$

Die größte Normalspannung ist (mit $E = 2500 \text{ at}$):

$$\sigma_t = 25 + 0,7 \frac{5}{d_2} \cdot 2500 \text{ at.}$$

Die Belastungsgewichte sind aus den Spannungen S_2 zu berechnen.

Je nach der Riemenbreite kann die Rolle ein- oder beidseitig gelagert werden (Abb. 62.33). Eine konstante Vorspannung (ohne Vergrößerung des umspannten Bogens) kann beim Antrieb durch Elektromotor erreicht werden, wenn der Motor drehbar gelagert wird. (Abb. 62.32).

Aus Abb. 62.30 ist die (selbstverständliche) Tatsache, daß ein langsam laufender Riemen zur Übertragung einer gegebenen Leistung viel breiter sein muß als ein rasch laufender, sehr anschaulich zu sehen. Dennoch wird dies in der Praxis sehr oft übersehen. Abb. 62.34 zeigt einen Drehbankantrieb, bei welchen die drei Riemen gleich breit sind, trotzdem die Riemengeschwindigkeiten sehr verschieden sind. Wenn nur 1 PS übertragen werden soll, so folgen die erforderlichen Riemenbreiten aus der nachstehenden Zusammenstellung, wenn $\sigma_1 = 25 \text{ kg/cm}^2$; angenommen wird:

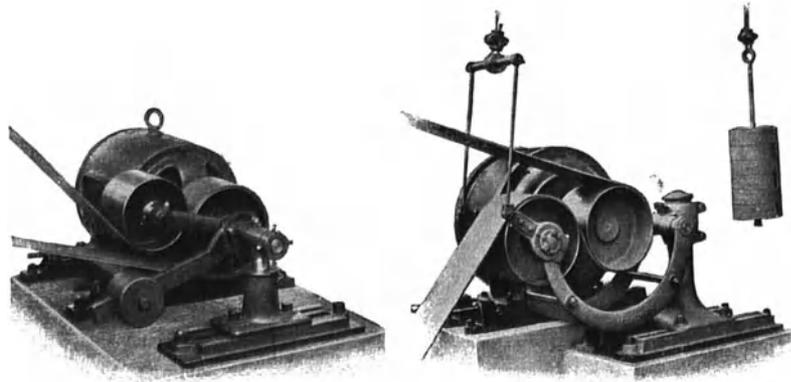


Abb. 62.33. (v. Roll, Clus).

a Spannrolle von oben drückend, einseitig gelagert,

b Spannrolle von unten drückend, beidseitig gelagert.

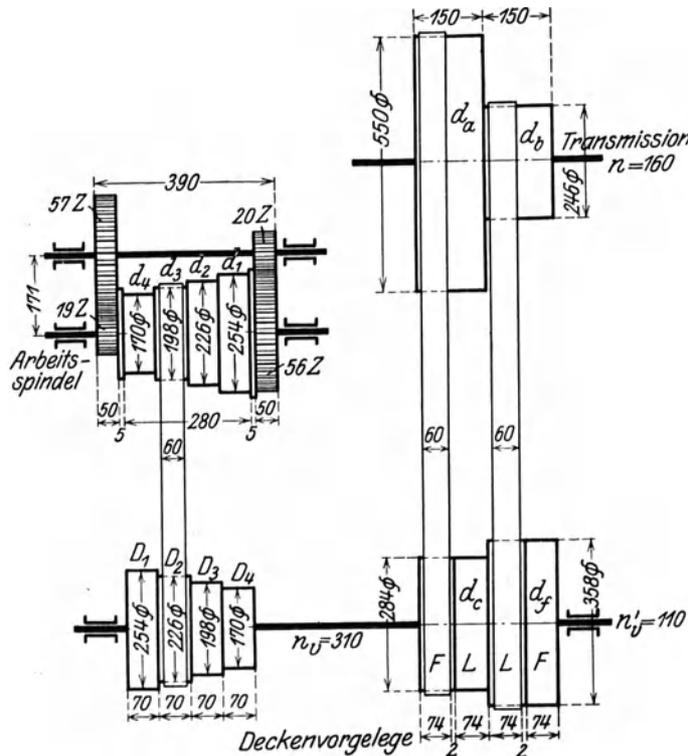


Abb. 62.34. Drehbankantrieb. (Aus Hippler).

Der Stufenriemen ist demnach viel zu schwach. Es ist auch eine bekannte Tatsache, daß die Leistungsfähigkeit der Drehbank dadurch stark eingeschränkt wird.

Riemen $v \text{ m/S}$	$a - c$ 4,5	$b - f$ 2	Stufenscheibe I
$P_u = 75$	16,5	37,5	75 kg
$S_1 = 2 P$	33	75	150 kg
$b = \frac{2 P}{\sigma_1 \cdot 0,5}$	2,7	6	12 cm

Der Stufenriemen ist demnach viel zu schwach. Es ist auch eine bekannte Tatsache, daß die Leistungsfähigkeit der Drehbank dadurch stark eingeschränkt wird.

62.5. Die Scheiben.

Als Material für die Scheiben wird hauptsächlich Gußeisen verwendet; für leichte Triebe Aluminium, seltener Holz; für raschlaufende Scheiben (Schwungräder) Stahl u. Stahlguß. Die Randstärke s_1 des Scheibenkranzes (für Gußeisen) $s_1 = 0,01 R + 0,3 \text{ cm}$,

die Mittelrippe ist (weil unzulässig) wegzulassen. Die Arme erhielten früher meist eine geschwungene Form, um die Gußspannungen auszugleichen. Jetzt werden sie immer gerade gemacht. Bis 450 mm Durchmesser wählt man 4 Arme, für größere Durchmesser (bis 800 mm) 6 Arme. Der Armquerschnitt ist eine Ellipse mit dem Achsenverhältnis 1 : 2 bis 1 : 2,5; die Verjüngung der Arme beträgt 5 : 4. Bei der Festigkeitsrechnung wird angenommen, daß für $i = 4$ ein Arm und für $i = 6$ zwei Arme die Umfangskraft von der Scheibe auf die Welle

übertragen. Die Biegebeanspruchung folgt dann aus der Gleichung

$$\frac{P \cdot r}{1 \text{ bzw. } 2} = \frac{\pi}{4} a^2 b \cdot \sigma_b \quad (62.22)$$

Ein einfacher Armstern reicht aus für B bis $0,1 D + 250 \text{ mm}$.

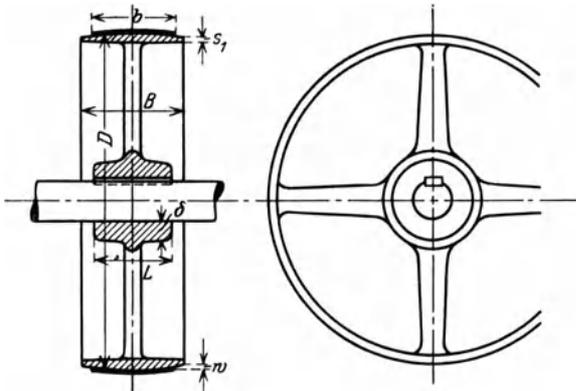


Abb. 62.35. Einteilige Riemenscheibe.

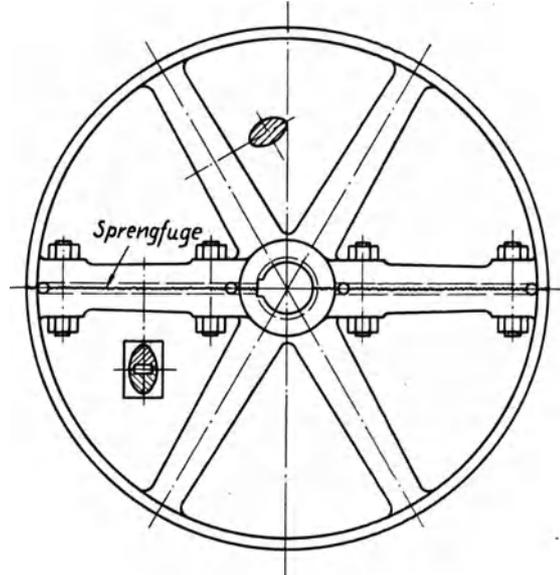


Abb. 62.36. Zweiteilige, gesprengte Riemenscheibe. (Aus Rötischer.)

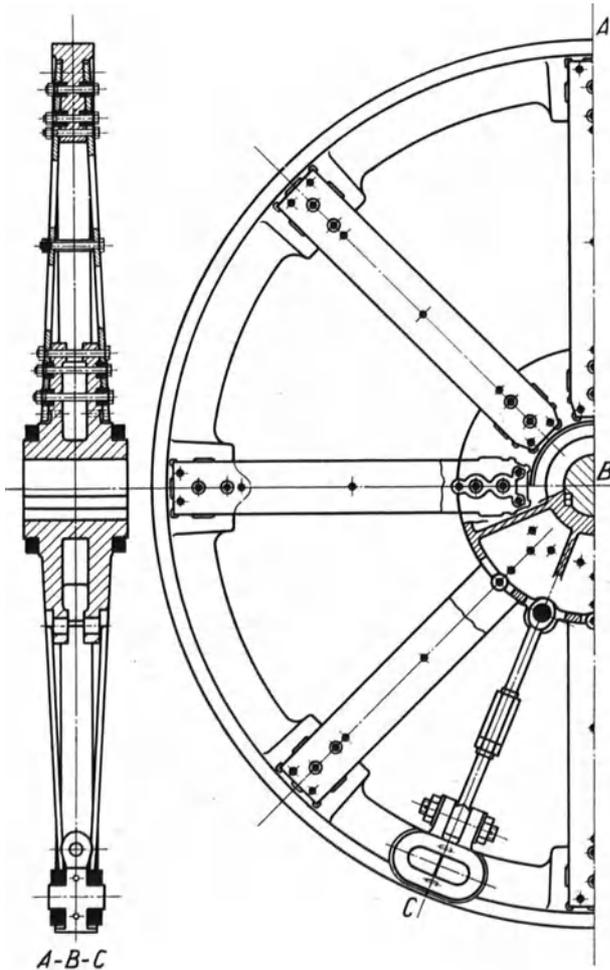


Abb. 62.38. Schwungrad mit schmiedeeisernen Armen und Stahlgußkranz. Umfangsgeschwindigkeit $u = 62 \text{ m/s}$. (Aus Rötischer.)

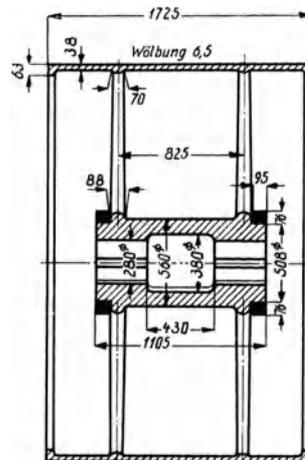


Abb. 62.37. Breite Riemenscheibe mit doppeltem Armstern. Die Nabe ist gesprengt, um Gußspannungen auszugleichen. (Aus Rötischer.)

Die Riemenscheiben werden auf der Welle durch Keile oder durch Klemmen befestigt (vgl. Verbindungen). Die Stärke δ der Nabe folgt aus der empirischen Gleichung

$$\delta = \left(\frac{1}{5} \text{ bis } \frac{1}{4} \right) \left(d_0 + \frac{d}{2} \right) + 1 \text{ cm.} \quad (62.23)$$

Darin ist d die Bohrung der Scheibe und d_0 der Wellendurchmesser, der zur Übertragung des Drehmomentes nach der Gleichung $\frac{1}{5} d_0^3 \tau = M_d$ ausreichen würde. Für $d = d_0$ ist

$$\delta = \left(\frac{1}{5} \text{ bis } \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{3}{2} d + 1 \text{ cm oder } \delta \approx (0,3 \text{ bis } 0,35) d + 1 \text{ cm.} \quad (62.24)$$

Die Nabenlänge ist $l = 1,2$ bis $1,5 d$ oder auch $l = B$. Lange Naben werden häufig hohl gemacht (Abb. 62.35).

Die Verwendung einteiliger Scheiben ist durch die Schwierigkeit der Montage und (für große Scheiben) auch durch die Transportschwierigkeit eingeschränkt. Auch die größten Riemenscheiben werden in einem Stück gegossen und nachher längs eines Durchmessers aufgesprengt (Abb. 62.36). Die beiden Teile werden zusammenschraubt und dann gedreht. Die Breite der Sprengleiste soll 5 mm nicht überschreiten, weil sonst die Sprengarbeit zu mühsam wird. Für das Sprengisen sind genügend große Öffnungen vorzusehen. Nur schwere Scheiben (Schwungräder, Kegelhäder, Zahnäder) werden zweiteilig gegossen und an den Trennflächen gehobelt.

Die Trennfuge soll bei raschlaufenden Scheiben immer in die Arme gelegt werden, nicht zwischen zwei Arme, da die Fliehkraft der Verbindungsteile eine zusätzliche Spannung erzeugt.

Ungleiche Kranzdicke ruft eine sehr ungleichmäßige Formänderung (Spannung) des Kranzes hervor. Es ist daher ratsam, an raschlaufenden Riemenscheiben den Kranz auch auf der Innenseite abzdrehen, soweit es natürlich die Armbreite gestattet. Für große Umfangsgeschwindigkeiten müssen die Scheiben ausbalanciert werden (vgl. Abschn. 34.2).

Die Normung der Scheibendurchmesser setzt auch eine Normung der Drehzahlen voraus.

Als Normdrehzahlen werden ausschließlich die Normzahlen (S. 10) verwendet, mit den Stufensprüngen

$$\varphi = \sqrt[4]{10} = 1,06 \quad \sqrt[2]{10} = 1,12 \quad \sqrt[1]{10} = 1,26 \quad \text{und} \quad \sqrt[5]{10} = 1,58$$

und für gröbere Stufung auch die Zahl 2. Die Drehstrommotoren haben eine Nenndrehzahl, die bei der gebräuchlichen Frequenz $f = 50/s$ bei

der Polzahl	2	4	6	8	10	12	16
gleich	$n = 3000$	1500	1000	750	600	500	375

sind und als Normzahlen der 40er Reihe vorkommen. Die Betriebsdrehzahl der Motoren ist kleiner (vgl. Abschn. 66); wenn der Schlupf einheitlich auf 6% festgelegt wird, so sind die Betriebsdrehzahlen wieder Normzahlen der gleichen Reihe.

Sind z verschiedene Stufen geplant, so sind die Drehzahlen

$$n_1, n_2 = n_1 \varphi, n_3 = n_1 \varphi^2 \dots \dots \dots n_z = n_1 \varphi^{z-1}$$

Sind die größte und die kleinste Drehzahl und der (normale) Stufensprung festgelegt, so können die einzelnen Drehzahlen aus den Normzahlen (S. 11) direkt abgelesen werden.

Festigkeitsrechnung. Unter der Voraussetzung, daß die Kranzstärke klein im Verhältnis zum Radius ist, entsteht in einem frei schwebenden Ring eine Spannung:

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} v^2, \quad (14.9)$$

worin v die Umfangsgeschwindigkeit in cm/s, und γ das spez. Gewicht des Ringmaterials ist, z. B. für Gußeisen $\gamma = 0,00725 \text{ kg/cm}^3$. Durch die Fliehkraft dehnt sich der Ring in radialer Richtung um den Betrag:

$$\Delta r = \frac{\sigma}{E} r. \quad (14.5)$$

Die Arme verhindern nun die freie Dehnung des Kranzes. Wenn von der Beanspruchung durch das übertragene Drehmoment abgesehen und eine gleichmäßige Verteilung der Arme auf dem Umfang der Scheibe vorausgesetzt wird, so wiederholen sich alle Verhältnisse so oft, wie Arme vorhanden sind. Die Betrachtung kann deshalb auf ein Kranzstück zwischen zwei Armen beschränkt werden, das (aus Symmetriegründen) als beiderseitig eingespannter Stab betrachtet werden kann.

Mit Rücksicht auf die schwerwiegenden Folgen einer Scheibenexplosion darf σ_{zul} für Gußeisen nur zu 100 at angenommen werden, so daß für dieses Material die größte zulässige Umfangsgeschwindigkeit rd. 30 m/s ist. Für größere Umfangsgeschwindigkeiten sind Stahlscheiben zu verwenden.

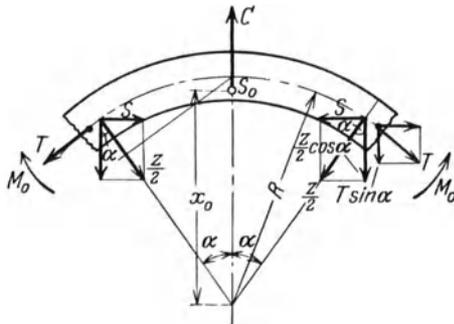


Abb. 62.39. Zur Schwungradberechnung.

Wird die Kranzdicke groß im Verhältnis zum Radius (Schwungrad), so ist die Scheibe als stark gekrümmter Träger zu berechnen. Die Gleichgewichtsbedingung für die vertikalen Komponenten (Abb. 62.39) ergibt dann die Beziehung:

$$2 T \sin \alpha + 2 \frac{Z}{2} \cos \alpha = C . \quad (62.25)$$

Hierin ist 2α der Zentriwinkel des Kranzstückes, C die gesamte Fliehkraft des Stückes in kg, Z der ganze von jedem Arm auf den Kranz radial nach innen ausgeübte Zug in kg.

Nun ist $C = 2 T_0 \sin \alpha$, wenn $f \frac{\gamma}{g} u^2$, die konstante tangential Spannkraft des freischwebenden Ringes = T_0 gesetzt wird. Dieser Wert, in Gl. (25) eingesetzt, ergibt:

$$2 T \sin \alpha + Z \cos \alpha = 2 T_0 \sin \alpha$$

oder

$$T = T_0 - \frac{Z}{2} \operatorname{ctg} \alpha . \quad (62.26)$$

Wir brauchen zur Berechnung der Unbekannten T , Z und M_0 noch zwei weitere Gleichungen, die aus den Formänderungen abgeleitet werden müssen, und zwar ist nach dem Satz von Castigliano für das Kranzstück mit den Armen sowohl

$$\frac{\partial A}{\partial M_0} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial A}{\partial Z} = 0 .$$

Für die genaue Ausrechnung vgl. K. Reinhardt, Mitt. Forsch.-Arb. H. 226 oder Tolle (Regulierung der Kraftmaschinen, Berlin: Julius Springer) und W. Heusinger, Forschung 9 (1938) S. 197/208 und 309/10.

63. Seiltrieb.

63.1. Drahtseile.

Drahtseiltriebe haben seit Einführung der elektrischen Kraftübertragung an Bedeutung verloren. Drahtseile werden hauptsächlich als Zug oder Tragorgan bei Kranen, Aufzügen und Seilbahnen verwendet.

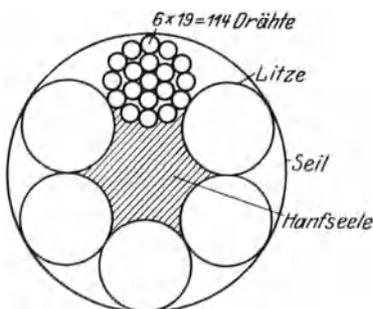


Abb. 63.1. Drahtseil.



Abb. 63.2. Gleichschlagseil.

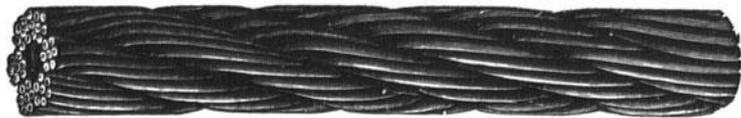


Abb. 63.3. Kreuzschlagseil.

Aufbau und Normen. Die einzelnen Drähte werden mit oder ohne Hanfeinlage schraubenförmig zu einer Litze (Spiralseil) zusammengedreht. Mehrere Litzen um einen Hanfkern gedreht bilden ein Seil (Abb. 63.1), mehrere Seile um einen Kern geschlagen ein Kabel.

Nach der ältesten Herstellungsweise drehte (schlag) man Litze und Seil in gleicher Richtung (Gleichschlag = Albartschlag = Langschlag) (Abb. 63.2). Später wurde der Kreuzschlag

(Abb. 63.3) die Regel, bei dem die Litze entgegengesetzte Drehung erhält (ordinary lay). Solche Seile haben weniger Neigung, sich um die eigene Achse zu drehen.

Die Drahtseile sind genormt; die Normen für Kranseile sind in den europäischen Ländern praktisch gleich und dadurch gekennzeichnet, daß alle Drähte im Seil die gleiche Dicke haben. Die Normen umfassen folgende drei Ausführungsformen:

- A mit $6 (1 + 6 + 12) = 6 \times 19 = 114$ Drähten von 0,4 bis 1 mm \varnothing ,
 B mit $6 (1 + 6 + 12 + 18) = 6 \times 37 = 222$ Drähten von 0,4 bis 1,3 mm \varnothing und
 C mit $6 (1 + 6 + 12 + 18 + 24) = 6 \times 61 = 366$ Drähten von 0,7 bis 1,5 mm \varnothing .

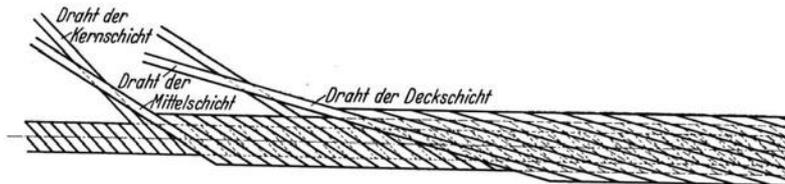


Abb. 63.4. Die Drähte der verschiedenen Schichten überkreuzen sich bei allen Normseilen.

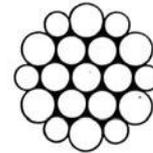
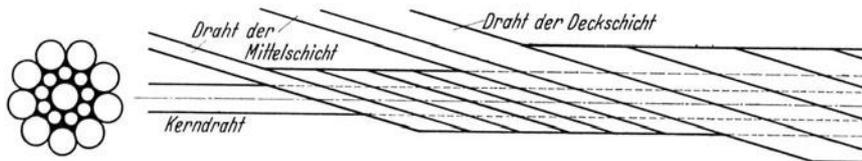


Abb. 63.5. Warrington-Litze.

Die Drähte der verschiedenen Schichten überkreuzen sich; der Winkel ist beim Kreuzschlagseil viel größer (etwa 30°) als beim Gleichschlagseil (etwa 2° bei den Normseilen) (Abb. 63.4).

Heute weiß man ganz bestimmt, daß diese „normale“ Machart der Seile nicht die mit der größten Lebensdauer ist. Die Normseile sind aber die biegsamsten und deshalb im Kranbau bevorzugt. Dieses ungünstige Verhalten „normal“ aufgebauter Seile hat dazu geführt, die alten, englischen Seilkonstruktionen mit ungleichstarken Drähten (seit 1890 bekannt) von



Ab. 63.6. Seallitze.

neuem aufzunehmen. Diese haben den Vorteil, daß die Drähte sich nicht überschneiden, indem alle Drahtschichten die gleiche Schlaglänge erhalten, also parallel laufen. Die Drähte berühren sich also theoretisch auf der ganzen Mantellinie. Bei der Warrington-Konstruktion (Abb. 63.5) wird dies dadurch erreicht, daß der zweite Schlag aus Drähten verschiedener Dicke besteht. Bei der Seale-Konstruktion (Abb. 63.6) besteht jeder Schlag wieder aus Drähten gleicher Dicke; die Drahtstärke ist aber in den einzelnen Schichten verschieden. Jede Schicht hat die gleiche Drahtzahl und zwangsläufig die gleiche Schlaglänge; die Außendrähte liegen immer in den Furchen zwischen zwei Innendrähten. Die Seale-Seile gelten im Aufzugsbau als Normseile.

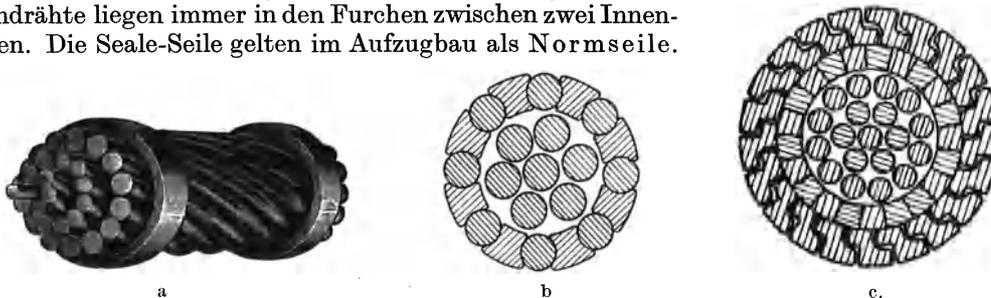


Abb. 63.7. Tragseile für Drahtseilbahnen. (Aus Stephan.)
 a Offenes Seil, b halb verschlossenes Seil, c ganz verschlossenes Seil.

Die Tragseile für Drahtseilbahnen sind immer grobdrähtige Spiralseile. Offene Seile (Abb. 63.7a) werden nur noch selten verwendet, weil sie beim Eindringen von Regenwasser leicht rosten. Geschlossene Seile mit glatter Oberfläche (Abb. 63.7c) werden deshalb vorgezogen.

Die Betriebsbeanspruchungen eines Seiles sind immer so, daß das unter der Wirkung einer Zugkraft gespannte Seil mehr oder weniger oft gebogen und wieder gerade gestreckt wird. Neben diesen Zug- und Biegebeanspruchungen treten im Betrieb noch andere Faktoren auf, die von der Kraftangriffsstelle (Befestigung, Ablenkung, usw.) herrühren, also außerhalb der

Seilkonstruktion liegen, und — wie die Erfahrung zeigt — die Lebensdauer oft ausschlaggebend beeinflussen. Die Zugspannung σ_z wird so ermittelt, als ob das Seil aus einem Bündel paralleler, genau gleich belasteter Drähte bestehen würde, die sich gegenseitig nicht beeinflussen:

$$\frac{\pi}{4} \delta^2 \cdot i \cdot \sigma_z = P \tag{63.1}$$

P ist die Zugkraft in kg, δ der Drahtdurchmesser in mm und i die Anzahl Drähte im Seil.

Solange wir genügend fern von der Angriffsstelle der Kraft P entfernt sind (Prinzip von de St. Venant), von der Drahtreibung und von der Elastizität des Seilkernes abgesehen, wird die Dehnung und damit die Zugspannung vor allem von der verschiedenen Neigung der Drähte zur Seilachse abhängen, also verschieden groß sein. Da die genannten, einschränkenden Bedingungen aber nicht vernachlässigt werden dürfen, stößt die Berechnung der wirklich auftretenden Zugspannungen auf fast unüberwindliche Schwierigkeiten.

Bei den langen und schweren Förderseilen muß auch das Seilgewicht bei der Berechnung der Zugspannung berücksichtigt werden. Bei 20 t Gewicht für den belasteten Förderkorb kann das Seilgewicht bis zu 15 t betragen. Das senkrecht herabhängende Förderseil zeigt (infolge der verschiedenen Spannungen) das Bestreben sich aufzudrehen, wenn es am unteren Ende belastet wird. Ein beidseitig eingespanntes Seil wird sich in den am höchsten belasteten Strecken aufdrehen und in der geringer belasteten zudrehen, was eine Änderung der Pressung zwischen den verschiedenen Drahtlagen zur Folge hat.

Die Biegespannung eines einzelnen Drahtes:

$$\sigma_b = \frac{\delta}{D} E \text{ kg/mm}^2 \tag{12.12}$$

D = mittlerer Durchmesser der Rolle, ist sehr groß: für $\delta = 1$ mm, $E = 22000 \text{ kg/mm}^2$, $D = 220$ bzw. 440 mm wird $\sigma_b = 100$, bzw. 50 kg/mm^2 ! Die Gleichung ist aber sicher richtig, denn die Versuche zeigen, daß einzelne Drähte mit verschiedenem Durchmesser für ein bestimmtes Material und einen bestimmten Wert von σ_z und δ/D unter sonst gleichen Betriebsbedingungen eine eindeutige Lebensdauer haben (Abb. 63.8)

Die Biegespannungen aus einem aus vielen Drähten zusammengesetzten Seil werden nun ebenfalls nach Gl. 12.10) berechnet, indem das Seil wieder als Bündel reibungsfrei nebeneinander liegender gerader Drähte betrachtet wird; man nimmt also an, daß die einzelnen Drähte aufeinander frei gleiten können. Die Gesamtspannung in einem gebogenen Seil also (nach Reuleaux, 1861):

$$\sigma_t = \sigma_z + \sigma_b = \frac{P}{\pi \delta^2 i} + \frac{\delta}{D} E. \tag{63.2}$$

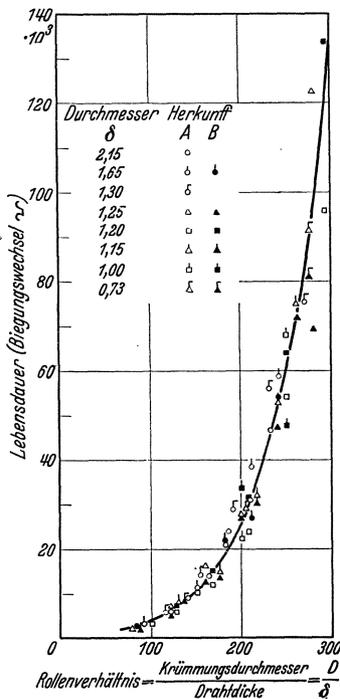


Abb. 63.8. Lebensdauer von Seildrähten verschiedener Dicke und Herkunft. $K_z = 130 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma_z = 30 \text{ kg/mm}^2$. Die Punkte sind Mittelwerte aus je zehn Versuchen. (Prof. Woernle, T. H. Stuttgart.)

C. von Bach hat 1881 die Richtigkeit dieser Gleichung bestritten und zwar auf Grund folgender Überlegungen: „Wenn ein im Betrieb bewährtes Seil nach dieser Gleichung berechnet wird, so ergeben sich Spannungen bis zu 3000 kg/cm^2 . Solche Spannungen, die dazu noch oft wechseln, könnte das Seil auf die Dauer nicht ertragen, ergo muß die wirkliche Beanspruchung kleiner sein als die berechnete“. — Die Gleichung von Reuleaux weiche deshalb so stark von der Wirklichkeit ab (sagte C. von Bach), weil die Schraubenform dabei nicht berücksichtigt sei. Er führte dementsprechend einen Berichtigungsfaktor β ein und setzte

$$\sigma_t = \frac{P}{\pi \delta^2 i} + \beta \frac{\delta}{D} E \tag{63.3}$$

mit $\beta = 3/8$ für Transmissionsseile und $\beta = 1/4$ für die besonders biegsamen Kran- und Aufzugseile. Der Streit um die richtige Berechnung der Drahtseile hat lange gedauert. Prof. Benoit (Karlsruhe) hat einzelne Phasen dieses „Drahtseilkrieges“ in seinem Buch „Die Drahtseilfrage“ erzählt. Heute ist diese Streitfrage wohl eindeutig zugunsten der Gleichung von Reuleaux entschieden. Durch eine mathematische Untersuchung kann nachgewiesen werden, daß ein verseilter

Draht beim Biegen sich noch etwas stärker krümmt als ein gerader und deshalb auch eine etwas (rd. 3%) größere Biegespannung erleidet. Schon die einfachen Versuche von Isaachsen (1907) und eindringlicher die ausgedehnten Versuche von Prof. Benoit haben gezeigt, daß (entgegen der Bachschen Vermutung) ein verseilter Draht viel weniger Biegungen bis zum Bruch aushält (nur etwa den hundertsten Teil!) als ein einzelner Draht. Nur zu einem sehr geringen Teil kann diese unbestreitbare Tatsache dadurch erklärt werden, daß beim Schlagen des Seiles in den einzelnen Drähten bedeutende Vorspannungen auftreten, die oberhalb der Streckgrenze liegen und eine Verfestigung des Materials (Erhöhung der Streckgrenze, Verminderung der Dehnung) zur Folge haben, aber bei wiederholten Beanspruchungen oberhalb der Elastizitätsgrenze die Lebensdauer der Drähte verkürzen. Zur Vermeidung der Vorspannungen gibt man deshalb neuerdings den Drähten, bevor sie zur Litze geschlagen werden, die Form, die sie in der fertigen Litze einnehmen (vorgeformte Drähte, Tru-Lay-Seil)¹.

Solche Seile zeigen erfahrungsgemäß eine erhöhte Lebensdauer und einen kleineren Biege- widerstand. Beim Bruch einzelner Drähte springen diese auch nicht aus dem Seilverband. Die Auseinandersetzungen hatten zur Folge, daß man sich viel intensiver mit den tatsächlichen Beanspruchungen in einem Seil befaßte, denn auch die Gleichung von Reuleaux kann noch lange nicht alle Brucherscheinungen erklären.

So folgte z. B. aus den Untersuchungen, daß unter sonst gleichen Versuchsbedingungen, die Lebensdauerkurven der einzelnen Seile für $\sigma_t = \text{konstant}$ nicht zusammenfallen (Abb. 63.9); die Lebensdauer

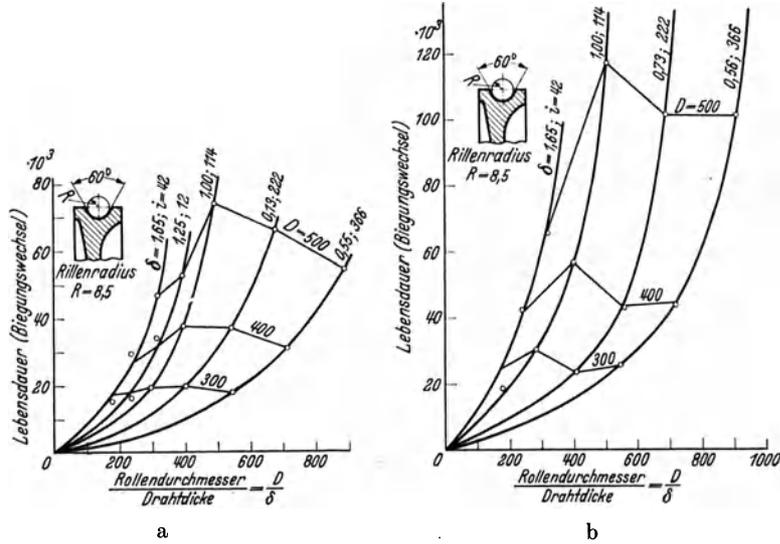


Abb. 63.9. Einfluß vom D/δ auf die Lebensdauer von Drahtseilen, a für Kreuzschlag, b für Gleichschlag. (Versuche von Woernle.)

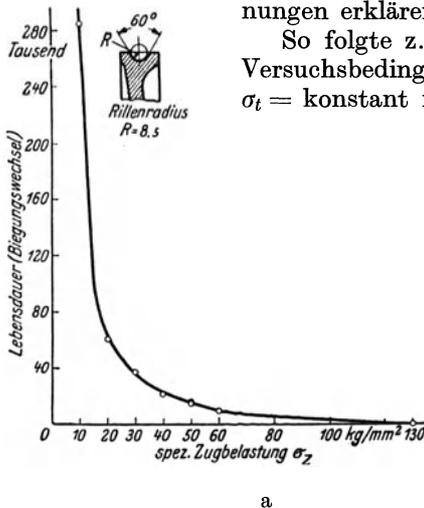
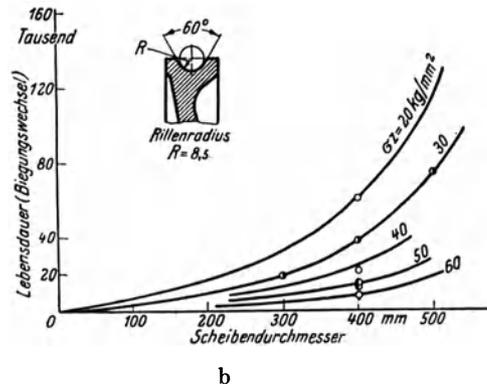


Abb. 63.10. Einfluß der Seilbelastung σ_z auf die Lebensdauer von Kreuzschlagseilen. a Bei 400 mm Scheibendurchmesser, b in Abhängigkeit des Scheibendurchmessers.



ist verschieden, je nach der Drahtdicke und Konstruktion des Seiles (Gleich- oder Kreuzschlag). Schon aus der Tatsache, daß ein Einzeldraht bis zu 100mal soviel Biegungen bis zum Bruch aushält als der im Seilverband liegende Draht, muß man schließen, daß beim Biegen eines Seiles noch andere, wesentliche Beanspruchungen auftreten als bei der Ableitung der Reuleauxschen Gleichung vorausgesetzt wurden.

¹ Machart und Name sind gesetzlich geschützt.

Wird ein Bündel paralleler, unverseilter Drähte so über eine Rolle gebogen, daß die Längsverschiebung an den Enden verhindert wird, so treten natürlich viel größere Biegespannungen auf, nämlich

$$\sigma_b = \frac{d}{D} E \quad (d = \text{Durchmesser des Drahtbündels}).$$

Bei einer Verseilung der Drähte zur Litze liegt jeder schraubenförmig gewickelte Draht auf dem Umschlingungsbogen zum Teil außen (in der Zugzone) und zum Teil innen (in der Druckzone). Sobald die Reibung zwischen den einzelnen Drähten überwunden ist, tritt durch die Verschiebung ein Längenausgleich ein. Der Ausgleich in jedem Draht ist aber nur dann vollständig, wenn gleichviel Zug- und Druckzonen auf dem Umschlingungsbogen liegen, d. h. wenn die Schlaglänge der Litze ganzzahlig im Umschlingungsbogen aufgeht. Tut sie das nicht, dann muß auch in den einzelnen Drähten einer Litze bei der Biegung eine Vergrößerung der Biegespannung, also eine Verminderung der Lebensdauer eintreten.

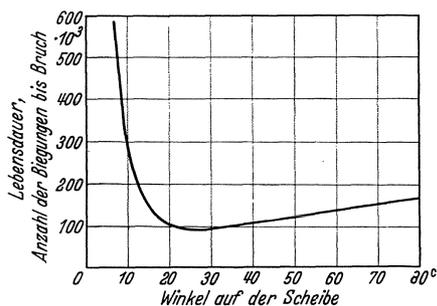


Abb. 63.11. Einfluß des umspannten Bogens auf die Lebensdauer von Drahtseilen. (British wire rope research commission.)

Das Gleiten der einzelnen Drähte ist nur nach Überwindung der Reibung möglich, die dadurch verursacht wird, daß die Drähte bei der Biegung aufeinander gepreßt werden. Da die Reibungskräfte an verschiedenen Punkten des Seilquerschnittes verschieden sind, geht die Verschiebung allmählich vor sich, anfangend bei den äußersten Lagen einer Litze. Die in Abb. 63.11 zusammengestellten englischen Versuche¹ zeigen deutlich den Einfluß des umspannten Bogens auf die Lebensdauer. Ist der Bogen größer als etwa die halbe Schlaglänge des Seiles, so ist die Lebensdauer sehr klein und nur schwach abhängig von der Bogenlänge. Bei kleineren Bogen als die halbe Schlaglänge nimmt die Lebensdauer rasch und bedeutend zu.

Die Biegespannung in einem verseilten Draht setzt sich also aus zwei Teilen zusammen: 1. von der Reibung herrührend, da der Zusammenhang der Drähte nicht vollständig aufgelöst wird (oft Reibungsspannung genannt) und 2. Biegung um die eigene Schwerachse (nach Gl. 12.9).

β ist also sicher größer als 1 und deshalb war die Bachsche Korrektur ($\beta = 3/8$ bis $1/4$) so verhängnisvoll. Eine der am schwersten wiegenden Folgen der Nichtberücksichtigung der Biegespannungen waren vor wenigen Jahren die vielen Drahtbrüche in den Tragkabeln zweier amerikanischer Hängebrücken (Mount Hope Bridge und Ambassador Bridge), die großes Aufsehen erregten und zu ausgiebigen Diskussionen Anlaß gegeben haben. Bei diesen Hängebrücken wurden zum erstenmal an

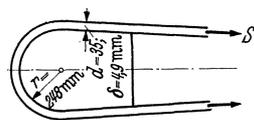


Abb. 63.12. Biegung der Seile an den Kauschen der Verankerungen.

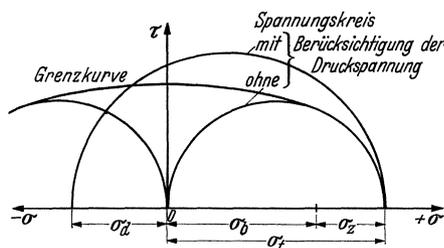


Abb. 63.13. Erhöhung der Bruchgefahr durch querwirkende Spannungen.

Stelle der sonst üblichen kaltgezogenen und verzinkten Drähte, solche nach einem verwickelten Verfahren warm behandelte und verzinkte verwendet. Man erreichte bei diesem Werkstoff anscheinend einen Höchstwert aller Festigkeitseigenschaften (Streckgrenze, Dehnung usw.). Dennoch traten unheimlich viele Drahtbrüche auf bei einer Zugspannung von nur 22 kg/mm² während die Bruchfestigkeit 160 kg/mm² betrug. Die Brüche traten an den Kauschen der Verankerungswiderlager auf (Abb. 63.12) und zwar dort, wo die Drähte an den Ankerschuhen eine scharfe Ablenkung erfuhren. Die Biegespannung nach Gl. (12.12) beträgt dort $\sigma_b = \frac{4,9}{2 \cdot 248} \cdot 21500 = 210 \text{ kg/mm}^2$! Dennoch vermutete man die Bruchursache in einer „Sprödigkeit“ der Drähte.

Neben der Vernachlässigung der Erhöhung der Biegespannung durch die Reibung zwischen den Drähten nimmt die Berechnung der Drahtseile nach der Gleichung von Reuleaux auch keine Rücksicht auf die gleichzeitig bei der Biegung auftretenden Druckspannungen zwischen den benachbarten Drähten. Die Druckspannungen können bei den kleinen Berührungsflächen an den Kreuzungsstellen der Drähte sehr groß werden. Sie ändern den Mohrschen Spannungs-

² Fourth report of the wire rope research comm. Proc. Inst. Mech. Eng. 1930, S. 553/602.

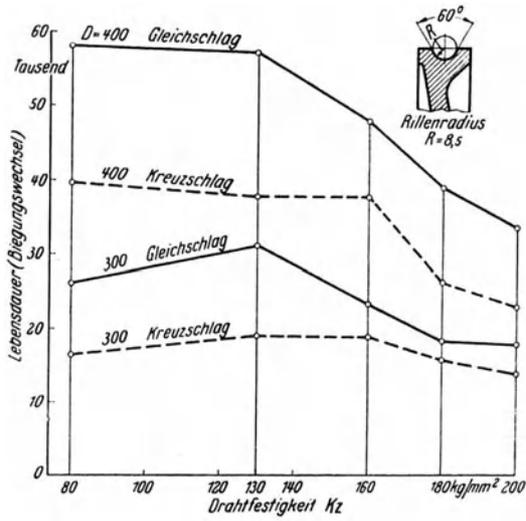


Abb. 63.14. Einfluß der Drahtfestigkeit K_z auf die Lebensdauer der Seile (nach Woernle).

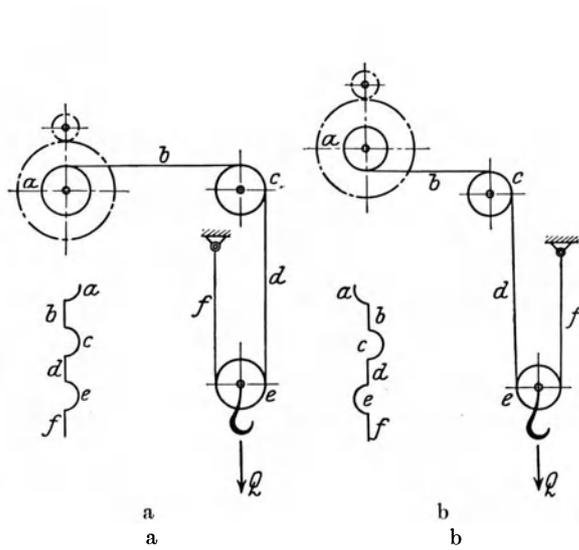


Abb. 63.15. a zweckmäßig (ohne Gegenbiegung), b unzweckmäßig (mit Gegenbiegung).

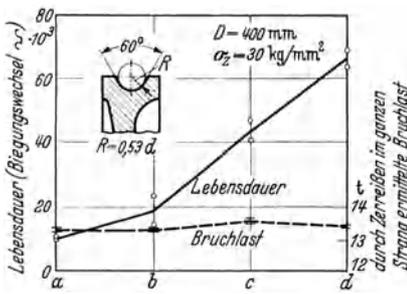


Abb. 63.16. Einfluß der Schmierung auf die Lebensdauer von Kreuzschlagseilen. 16 A 160 DIN 655, Seil *a* entfettet, *b* trocken angeliefert, *c* mit Holzteer, *d* mit Maschinenöl geschmiert. (Versuche von Woernle).

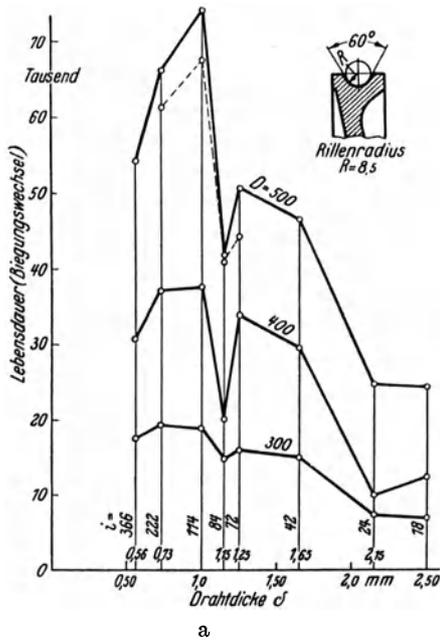
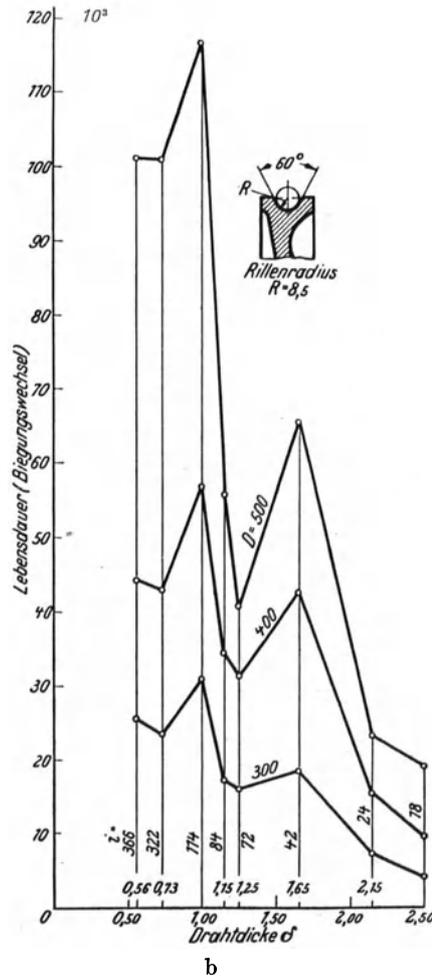


Abb. 63.17. Einfluß der Drahtstärke auf die Lebensdauer der Drahtseile (nach Woernle), a Kreuzschlag, b Gleichschlag.



kreis (Abb. 63.13) und erklären in einfacher Weise die Erfahrungstatsache, daß die Lebensdauer der Seile nicht von der größten Spannung σ_t allein abhängt. Die Berechnung der Größe der Druckspannungen zwischen den Drähten und zwischen Draht und Unterlage ist recht verwickelt und könnte erst bei genauer Kenntnis der Seilkonstruktion versucht werden. Ihr Vorhandensein erklärt aber die bekannten Versuchsergebnisse von Benoit, daß die Drähte in einer Litze oder in einem Seil eine erhöhte Lebensdauer haben müssen, wenn sie um eine Scheibe mit Lederfutter gebogen werden.

Konstruktionsregeln. Aus der Tatsache, daß die Lebensdauer der Seile durch die Reibung der aufeinander gleitenden Drähte erheblich beeinflußt wird, können folgende wichtige allgemeine Schlußfolgerungen gezogen werden:

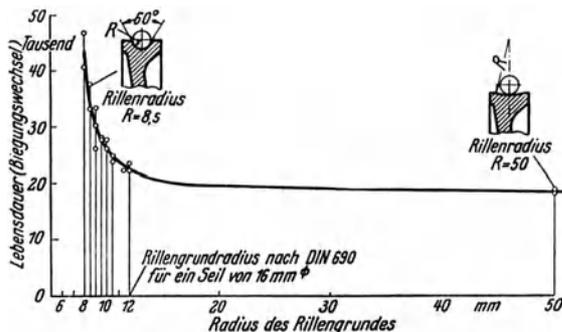


Abb. 63.18. Einfluß der Rillenform auf die Lebensdauer eines Kreuzschlagseiles (nach Woernle).

Da die einzelnen Drähte beim Schlagen des Seiles (durch Kaltbearbeitung) härter und spröder werden, hat das Drahtmaterial des fertigen Seiles meist eine recht kleine Bruchdehnung. Viele Krankonstrukteure ziehen deshalb verzinkte Seile vor, weil durch das Verzinken nach dem Ziehen das Material wieder etwas weicher und zäher wird.

3. Gegenbiegungen sind nach Möglichkeit zu vermeiden; sie vermindern die Lebensdauer um etwa 25 % (Abb. 63.15).

4. Durch geeignete Schmierung kann die Lebensdauer des Seiles erhöht werden (Abb. 63.16).

5. Nicht zu dünne Drähte wählen; δ größer als 0,5 mm. Die Normen lassen allerdings noch Drähte von 0,4 mm zu (Abb. 63.17).

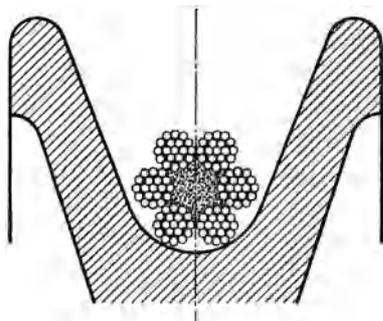


Abb. 63.19. Drahtseil in keilförmige Rillen nicht klemmen.

6. Die Rillenform soll sich dem Seil möglichst anschmiegen (Abb. 63.18). Das Seil soll ohne Klemmen, unten in der Rille aufliegen (Abb. 63.19); der günstigste Rillradius ist $1,05 \cdot \text{Seilradius}$. Die Seilnormen gestatten dem Hersteller allerdings eine Toleranz von $\pm 5\%$ im Seildurchmesser. Ein Seil von 18 mm Nenndurchmesser dürfte demnach einen Durchmesser von mindestens 17 und höchstens 19 mm haben! Dieser große Spielraum ist für die Herstellung nicht notwendig und steht in Widerspruch mit der engen Anschmiegung des Seiles in der Rille als Bedingung für hohe Lebensdauer. Die Drahtseilverbraucher tun deshalb gut, bei der Bestellung mit den Lieferanten das Einhalten des Seildurchmessers mit kleineren Toleranzen zu vereinbaren.

7. Das Klemmen des Seiles in keilförmigen Rillen (Abb. 63.26 a) muß die Lebensdauer erheblich heruntersetzen infolge der höheren Pressung zwischen Seil und Stützfläche. Die Lebensdauer sinkt mit abnehmendem Keilwinkel. Diese bei den Treibscheiben (Abschn. 63.5) gebräuchliche Rillenform wird dort kompensiert durch die Verwendung von Seileseilen, die in der Außenlage dickere, also widerstandsfähigere Drähte haben (Abb. 63.5).

8. Der Winkel, unter dem die Drähte unter sich liegen, ist beim Kreuzschlagseil viel größer als beim Gleichschlagseil, somit auch die Flächenpressung. Gleichschlagseile haben deshalb in Rundrillen eine höhere Lebensdauer als Kreuzschlagseile. Diese sind aber wegen geringerer Drallwirkung dennoch zu bevorzugen. Bei Keilrillen zeigt sich das Kreuzschlagseil überlegen, infolge der günstigeren Auflage der Drähte (fast parallel zur Seilaxe) in der Keilrille (vgl. Abb. 63.21).

Es sind noch verschiedene Fragen zu klären, so z. B. ob das 6litzige Seil nicht besser durch das 8litzige zu ersetzen sei. Die ursprünglichen Seilkonstruktionen von Warrington und Seale versagen, sobald eine dritte Drahtschicht notwendig wird. Die neuen deutschen Normen schlagen

in diesem Fall an Stelle des Kerndrahtes eine 7drätige Kernlitze vor, wodurch aber der Vorteil der gleichen Schlaglänge für alle Drähte wieder verlorengeht. Die „Ideal-Litze“ der Schweiz. Seilindustrie, vorm. Oechslin in Schaffhausen (Abb. 63.22), löst diese Frage sicher viel zweckmäßiger.

Biegewiderstand. Die Dauerversuche sind sehr zeitraubend, so daß vielleicht erst nach Jahren zuverlässige Grundlagen erreicht werden können. Die Untersuchung von Drahtseilen ist nämlich deshalb so schwierig und zeitraubend, weil der Modellversuch hier vollständig versagt. Seile mit geometrisch ähnlichem Querschnitt, gleicher Drahtgüte und entsprechend gleichen Schlaglängen der Litzen im Seil bei denselben Betriebsverhältnissen (gleiches D/δ , gleiche Zugspannung, gleiche Schmiegunz zwischen Seil und Rolle, gleiche Schmierungsverhältnisse, usw.) geben nicht die gleiche Lebensdauer. Es war auch keine Gesetzmäßigkeit zu erkennen, bald war das 13 mm-, bald das 16 mm- oder das 19 mm-Seil über-

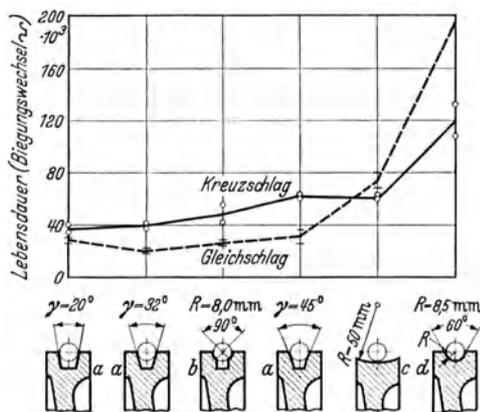


Abb. 63.20. Einfluß der Rillenform auf die Lebensdauer von Drahtseilen. 16 A, bzw. AL 130 DIN 655. $D = 500$ mm, $\sigma_z = 20$ kg/mm². (Versuche von Woernle.)

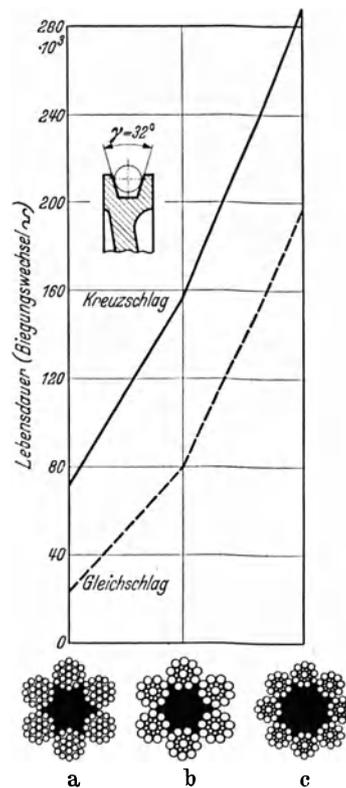


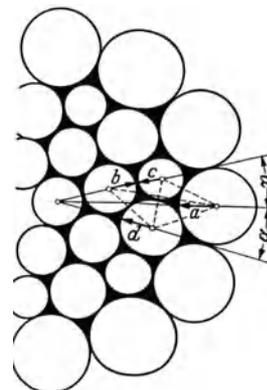
Abb. 63.21. Lebensdauer bei verschiedener Bauart a Normalseil 16 A, bzw. AL 160 DIN 655, b Seale-Seil 6 (1 · 1,5 + 9 · 0,7 + 9 · 1,2), c Seale-Seil 6 (1 · 1,25 + 9 · 0,6 + 9 · 0,95). $D = 500$ mm, $\sigma_z = 20$ kg/mm².

legen. Es besteht also zur Zeit keine Möglichkeit, von der Lebensdauer des einen Seiles auf die Lebensdauer eines andern, „ähnlichen“ Seiles zu schließen.

Unter diesen fast aussichtslosen Verhältnissen zur praktischen Klärung der geeignetsten Seilkonstruktion ist doch ein Lichtblick vorhanden. Da man weiß, daß hauptsächlich der Biegewiderstand zusammen mit dem Gleiten der Drähte aufeinander die Lebensdauer der Seile bedingt, kann man den Seilbiegewiderstand direkt als Kriterium und als Maß für die Lebensdauer der Seile betrachten. Diesen Weg ist Dr. Ing.-Hecker in seiner Dissertation „Über den Biegewiderstand von Drahtseilen“ (Hannover 1933) gegangen. Alle Umstände, die erhöhend auf die Lebensdauer wirken,



Abb. 63.22. „Ideal“-Litze mit drei Drahtschichten der „Schweiz. Seilindustrie“ Schaffhausen. Die Drähte der verschiedenen Schichten überkreuzen sich nirgends.



vermindern auch die Seilfestigkeit (mit der leicht verständlichen Ausnahme der nachträglichen Verzinkung der Drähte).

Die Arbeit beim Biegen eines Seiles muß durch eine zusätzliche Kraft S geleistet werden, die in kurzer Zeit mit hoher Genauigkeit gemessen werden kann. Aus den bisher vorliegenden Versuchen folgt:

$$S = C' \delta \frac{P + P_0}{D - D_0} \text{ kg} \tag{63.4}$$

worin C' , P_0 und D_0 für jedes Seil verschieden ist, abhängig von der Machart, von der Reibungszahl der Drähte und Litzen und von dem Druck zwischen den einzelnen Drähten.

P_0 entspricht der den Drähten beim Verseilen gegebenen Vorspannung, abhängig von der Bremsung der Spulen in der Seilmaschine. Sie wird in jeder Fabrik entsprechend der Anzahl, der Dicke und der Steifheit der Drähte, sowie der gewünschten Geschlossenheit des Seiles etwas anders eingestellt.

D_0 berücksichtigt die Verlagerung der neutralen Achse des Seiles und der Drähte im Querschnitt und die dadurch bedingte Reibung. Eine solche Verlagerung muß eintreten, weil der Krümmungsradius des Rillengrundes immer etwas größer gemacht wird als der Radius des Seilquerschnittes. Der eine Draht, der theoretisch zuerst zum Aufliegen im Rillengrund kommt, kann den Seildruck ($2 P/D$ kg/mm) auf die Rolle nicht übertragen; er wird deshalb in den Seilquerschnitt hineingedrückt, bis auch andere Drähte zum Aufliegen kommen. Diese Umlagerung im Querschnitt wird um so größer sein, je größer der Krümmungsradius des Rillengrundes gegenüber dem des Seilquerschnittes ist. Innerhalb den Versuchsgrenzen $\delta = 0,7$ bis $1,4$ mm und für den Radius des Rillengrundes $r = \delta/2 - 1$ mm ist

$$P_0 = 200 + i d^3 \text{ kg und } D_0 = 100 (\delta - 0,3 \text{ mm}).$$

Für normale Kreuzschlag A -Seile ist $C' = 1,8$, B -Seile $C' = 2,6$ und C -Seile $C' = 3,9$. Für Gleichschlagseile sind die C' -Werte um 15 bis 25% kleiner; für verzinkte Seile um 15 bis 30% größer als für Kreuzschlagseile.

Solche Versuche mit Seilen nach der Seale-Konstruktion ließen sich in kurzer Zeit durchführen und könnten, ohne große Kosten, zuverlässige Unterlagen für eine neue Drahtseilnormung liefern.

63.2. Rollenzüge.

Der Rollendurchmesser wird immer bis zur Mitte des Tragorganes (Seil oder Kette) gemessen.

Feste Rolle (Abb. 63.23). Beim gleichförmigen Heben der Last Q sind die Biege widerstände des Seiles beim Auf- und Ablauf und die Zapfenreibung zu überwinden. Das ablaufende Seil ist also immer etwas stärker gespannt. Man schreibt

$$Z = a \cdot Q \quad (63,5)$$

worin $a = 1/\eta$ immer größer als 1 ist. Da der Biege widerstand des Seiles bei genügend großen Rollendurchmesser vernachlässigbar klein ist wird die zusätzliche Zugkraft fast ausschließlich zur Überwindung der Zapfenreibung verwendet. Bei der gebräuchlichen Schmierung durch Staufferbüchse ist μ etwa 0,1 und $a = 1,02$. Durch Einbau von Wälzlagern könnte der Wirkungsgrad wesentlich verbessert werden; die hochbelasteten Wälzlager sind aber relativ teuer.

Beim Senken der Last dreht sich die Rolle in entgegengesetzter Richtung, die Last überwindet nun die Widerstände, also:

$$Q = a \cdot Z \text{ oder } Z = Q/a \quad (63,6)$$

Bei der losen Lastrolle (Abb. 63.24) folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen beim Heben:

$$Q = Z + S \text{ und } Z = a \cdot S,$$

$$Z = \frac{Q \cdot a}{a + 1} \quad (63,7)$$

und beim Senken der Last, mit $S = a \cdot Q$

$$Z = \frac{Q}{a + 1}. \quad (63,8)$$

Für die lose Treibrolle (Abb. 63.25), die bei hydraulischen Aufzügen gebräuchlich ist, ist beim Heben

$$Z = Q + S \text{ und } S = a \cdot Q,$$

$$Z = Q (1 + a) \quad (63,9)$$

und beim Senken der Last, da $Q = a \cdot S$ ist:

$$Z = Q (1 + a)/a \quad (63,10)$$

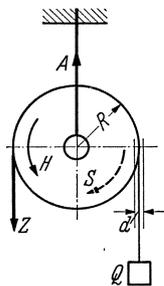


Abb. 63.23.
Feste Rolle.

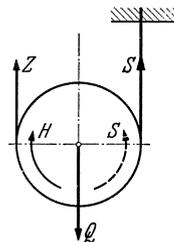


Abb. 63.24.
Lose Lastrolle.

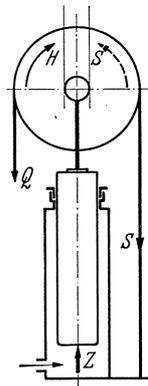


Abb. 63.25.
Lose Treibrolle.

Zusammengesetzte Rollenzüge. Im allgemeinen wird die Last an mehreren Seilen aufgehängt um dünnere, schmiegsame Seile und kleine, billige Rollen zu erhalten.

Mehrere, nebeneinander liegende Rollen werden dann zu einer sog. „Flasche“ (obere und untere) vereinigt. Zwecks leichterer Übersicht über den Lauf des Seiles und zur Erleichterung der Berechnung werden die Rollen schematisch nebeneinander (Abb. 63.26) liegend gezeichnet.

Bei n Rollen hängt die Last an n Seilen, so daß, wenn keine Widerstände zu überwinden wären

$$Z_0 = Q/n \tag{63.11}$$

ist. Zur Berechnung der Zugkraft mit Berücksichtigung der Widerstände, denkt man sich die Seile durchgeschnitten und wendet für den abgetrennten Teil, für welche die Seilspannungen nun äußere Kräfte sind, die Gleichgewichtsbedingungen an. So ist z. B. in Abb. 63.26 für die untere Flasche: $\sum_1^6 S = Q$ und da das ablaufende Seil immer am meisten gespannt wird, beim Heben der Last:

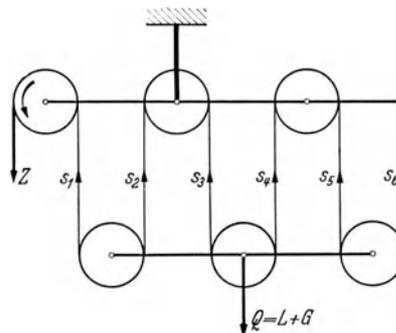


Abb. 63.26. Rollenzug.

$$\begin{aligned} S_1 &= Z/a \\ S_2 &= S_1/a = Z/a^2 \\ S_3 &= S_2/a = Z/a^3 \\ &\dots \\ S_6 &= S_5/a = Z/a^6 \end{aligned}$$

Aus $\Sigma S = Q = \frac{Z}{a} + \frac{Z}{a^2} + \frac{Z}{a^3} + \dots + \frac{Z}{a^6}$

folgt $Q = \frac{Z}{a^6} (a^5 + a^4 + a^3 + \dots + 1) = \frac{Z}{a^6} \cdot \frac{a^6 - 1}{a - 1}$

oder allgemein für n Rollen:

$$Q = \frac{Z}{a^n} \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1} \tag{63.12}$$

Der Wirkungsgrad des Flaschenzuges ist

$$\eta = \frac{Z_0}{Z} = \frac{a^n - 1}{n \cdot a^n (a - 1)} \tag{63.13}$$

und für $n = 6$ ist mit $a = 1,02$ $\eta = 0,935$.

Beim Lastheben verkürzt sich jedes einzelne tragende Seil; die Verkürzung pflanzt sich nach dem freien Trum in der Weise fort, daß jedes folgende außer der eigenen Verkürzung auch noch die vorhergehende auszugleichen hat. Die Rollen haben demnach verschiedene Umfangsgeschwindigkeiten (verschiedene Drehzahlen) und müssen auf der gemeinsamen Achse lose angeordnet werden. In ähnlicher Weise kann das Senken der Last oder die Anordnung ungleicher Rollenzahl in den beiden Flaschen berechnet werden.

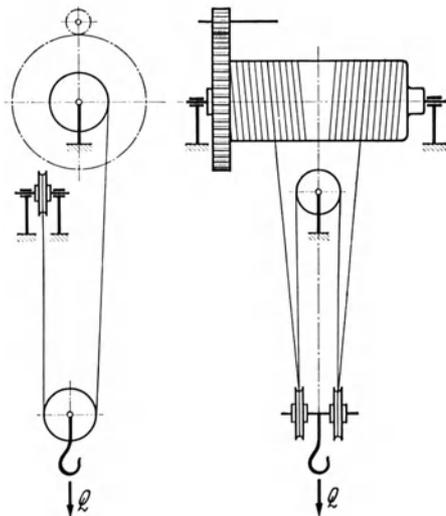


Abb. 63.27. 2x2fache Aufhängung.

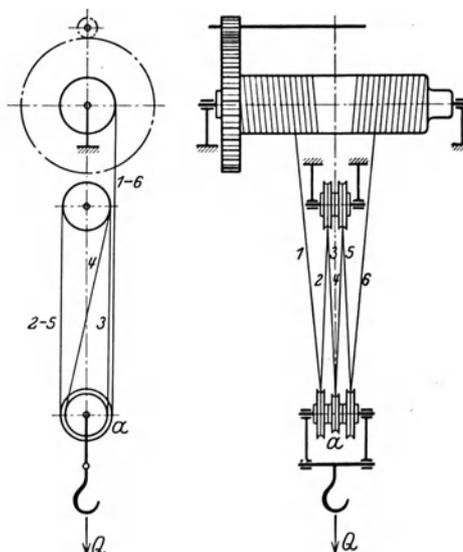


Abb. 63.28. 2x3fache Aufhängung.

Aufhängung der Last bei Trommelwinden. Hängt die Last unmittelbar an einem an der Trommel befestigten Seil, so wird sie sich beim Heben oder Senken gleichzeitig auch horizontal bewegen. Dieses Wandern der Last macht sich z. B. bei der Montage oder in der

lauert der Tod“, ist durchaus begründet. Die irreführende Bezeichnung der 6 bis 9fachen „Sicherheit“ sollte aus der Vorschrift zumindestens verschwinden.

Bei guten Ausführungen von Werkstattkränen, die nur selten voll belastet werden, beträgt das Verhältnis

$$K_z/(\sigma_z + \sigma_b) = 2,3 \text{ bis } 2,5.$$

Für stark beanspruchte Hafenkranen, die Tag und Nacht voll belastet laufen, sollten etwa 50 % größere Werte eingehalten werden. Feuerbestrahlte Seile in Gießereien und Hüttenwerken erfordern besondere Sorgfalt bei der Berechnung.

63.4. Die Treibscheibe.

Die Treibscheibe unterscheidet sich vom Trommelantrieb grundsätzlich dadurch, daß das Seil nicht mit der Scheibe verbunden wird, sondern daß die Kraftübertragung (wie beim Riemenantrieb) ausschließlich durch die Seilreibung erfolgt. Es ist also

$$S_1 \geq S_2 e^{\mu\beta} \quad \text{und} \quad P = S_1 - S_2 = S_1 \frac{e^{\mu\beta} - 1}{e^{\mu\beta}}. \quad (63.5/6)$$

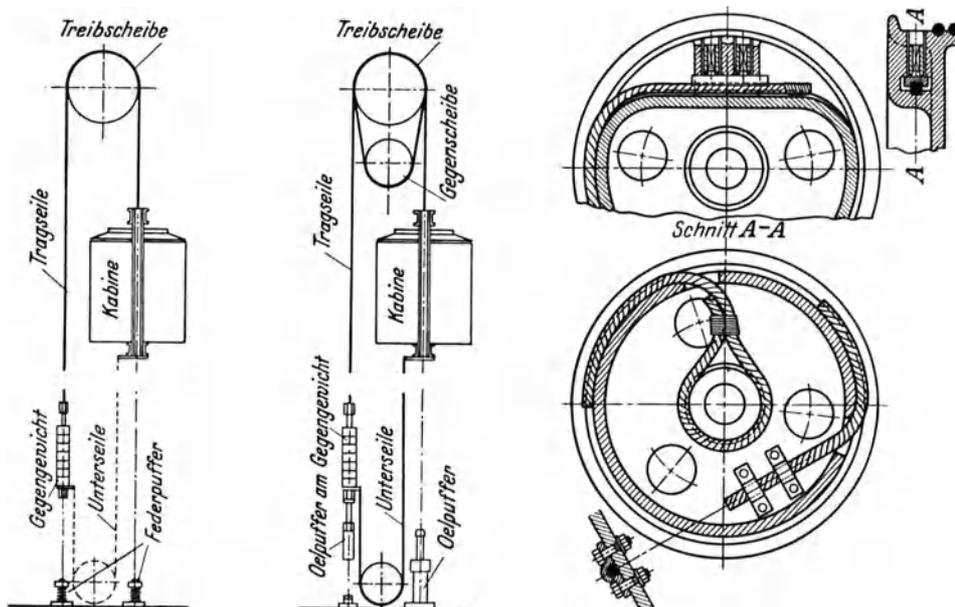


Abb. 63.30. Treibscheibenaufzug ohne und mit Gegenscheibe.

Abb. 63.31.

Abb. 63.32. Drahtseilbefestigungen bei Trommelwinden.

Die Treibscheibe kommt im Aufzugsbau vor (Abb. 63.30) und beim Antrieb der Drahtseilbahnen. Der Treibscheibenaufzug hat den Vorteil, daß für eine gegebene Belastung die Maschine unabhängig von der Förderhöhe ist, also in Serien hergestellt werden kann. Ein Nachteil ist, daß die Kraftübertragung durch Reibung begrenzt ist, was sich besonders bei der Beschleunigung und Verzögerung bemerkbar macht. Weiter hat der unvermeidliche Dehnungsschlupf eine unerwünschte Abnutzung der Rillen zur Folge. Die Treibscheiben werden deshalb oft mit Leder, Holz, usw. ausgelegt.

Die Reibzahl des geschmierten, aber frei in der Gußrille liegenden Seiles ist etwa 0,12 und für die ausgefütterte Scheibe $\mu = 0,16$. Für $\beta = \pi$ ist dann $e^{\mu\beta} = S_1/S_2 = 1,46$ (für $\mu = 0,12$) resp. 1,65 (für $\mu = 0,16$) und die übertragbare Leistung

$$N = P \cdot v/75 = \left(\frac{0,46}{1,46} \text{ bis } \frac{0,65}{1,65}\right) S_1 \cdot v/75 = (0,0042 \text{ bis } 0,0052) v \cdot S_1 \text{ PS}. \quad (63.14)$$

Ist die Anfahrbeschleunigung $b \text{ m/s}^2$, so ist (nach dem Grundgesetz der Mechanik: Kraft = Masse \times Beschleunigung) für das auflaufende Seil beim Heben der Last:

$$S'_1 - Q = \frac{Q}{g} \cdot b \quad \text{oder} \quad S'_1 = Q (1 + b/g) \quad (63.15)$$

Ist G das Eigengewicht der Kabine und L die Nutzlast, so ist $Q = G + L$. Für das ablaufende

ist, mit einem Gegengewicht G_0 :

$$G_0 - S'_2 = \frac{G_0}{g} \cdot b \quad \text{oder} \quad S'_2 = G_0 (1 - b/g) \quad (63.16)$$

und
$$\frac{S'_1}{S'_2} = \frac{Q}{G_0} \cdot \frac{1 + b/g}{1 - b/g} \quad (63.17)$$

Zahlenbeispiel 63.1. Für den in Abb. 63.30 skizzierten Aufzug ($G = 1300$, $L = 1000$, $G_0 = 1700$ kg) ist während der Fahrt (im Beharrungszustand):

$$S_1/S_2 = 2300/1700 = 1,35$$

und bei der Anfahrbeschleunigung $b = 1,5 \text{ m/s}^2$:

$$S'_1/S'_2 = 1,35 \cdot \frac{9,81 + 1,5}{9,81 - 1,5} = 1,35 \cdot 1,36 = 1,82$$

d. h. das Seil gleitet auch bei $\mu = 0,16$!

Man hat zwei Möglichkeiten die Kraftübertragung zu verbessern:

1. Durch Vergrößerung des umspannten Bogens, z. B. durch Anordnung einer lose vorgelegten Gegenseibe (Abb. 63.31); dann ist $\beta = 2\pi$ und $S_1/S_2 = 2,14$ bis $2,7^1$.

2. Durch Vergrößerung der Reibungszahl durch Keilrillen².

Die mehrfache Umschlingung des Seiles um eine Rolle zur Erhöhung der Reibung wird bei den elektrischen Spills und bei Schiffswinden verwendet. Die Kraft S_2 kann dann so klein werden, daß ein Mann das Seilende ohne Anstrengung halten kann, während am anderen Ende Zugkräfte bis zu 5000 kg auftreten.

Bei den Trommelwinden läßt man deshalb auch immer einige (2 bis 3) „Sicherheitswindungen“ auf die Trommel, damit ein einfaches Klemmen zur Seilbefestigung ausreicht (Abb. 63.34).

64. Reibkupplungen.

Bei der Mitnahme einer stillstehenden Welle durch eine umlaufende muß zunächst die getriebene Welle (mit allen damit verbundenen Massen) beschleunigt werden. Die Beschleunigung sollte allmählich erfolgen, da eine plötzliche Mitnahme sehr große Massenkräfte hervorruft (vgl. Abschn. 66). Dabei wird in der Anlaufzeit t_u die Beschleunigungsarbeit A_b aufgewendet, während die Reibflächen aufeinander gleiten und Wärme erzeugen. Sobald treibende und getriebene Welle die gleiche Drehzahl haben, müssen die Reibflächen nur noch das erforderliche Drehmoment übertragen, d. h. die Reibungskraft muß größer sein als die zu übertragende Umfangskraft

$$\mu P_n > P_u \quad (64.1)$$

Das Drehmoment, das die Reibkupplung übertragen kann, hängt demnach sowohl vom Normdruck P_n als von der Reibzahl μ ab. Die Reibzahlen trockener Gleitflächen sind verhältnis-

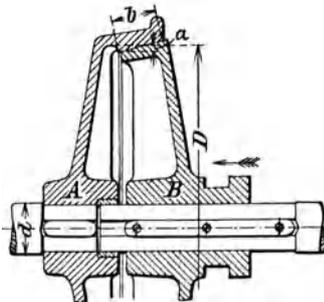


Abb. 64.1. Kegelseibkupplung (Aus Jellinek.)

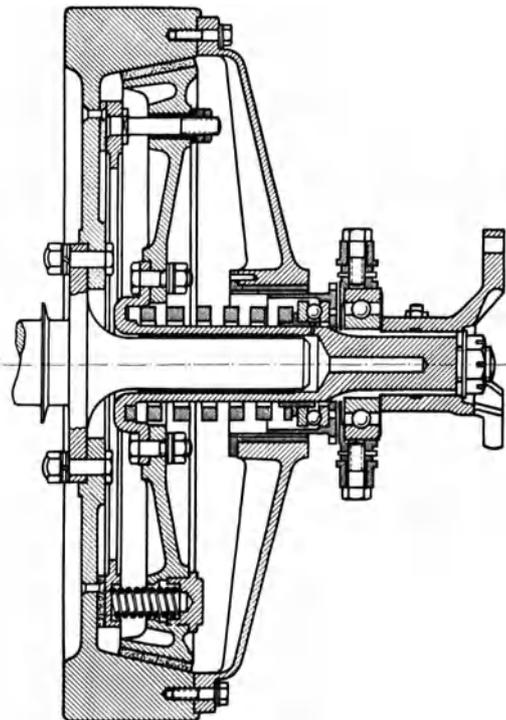


Abb. 64.2. Kegelseibkupplung für Kraftwagen mit aufgesetzter Scheibenkupplung¹. (Aus vom Ende, Kupplungen.)

¹ Ohnesorge, O.: Über Mehrscheibenantrieb mit Umschlingung durch dasselbe Seil. Fördertechn. und Frachtverkehr. 1920. A. Ziemsen Verlag.

² Hymans, F. und A. V. Hellborn: Der neuzeitliche Aufzug mit Treibscheibenantrieb. Berlin: Julius Springer 1927.

mäßig groß, so daß damit kein stoßfreies Einrücken erreicht werden kann; deshalb werden glatte, geschmierte, gußeiserne Gleitflächen bevorzugt. Die Flächenpressung beträgt bei Guß 18 bis 20 kg/cm²; für Asbest sollte sie 1 kg/cm² nicht erheblich überschreiten, wenn eine ausreichende Lebensdauer gewünscht wird.

Die Einrückzeit der Kupplung ist durch die Erwärmung des Öles begrenzt; bei zu langsamen Einrücken kann das Öl so dünnflüssig werden, daß es weggepreßt wird, so daß die letzte Einrückperiode doch bei trockenen Gleitflächen, also mit Stoß, erfolgt. Gute Reibkupplungen müssen nachstellbare Reibflächen haben, um die unvermeidliche Abnutzung ausgleichen zu können.

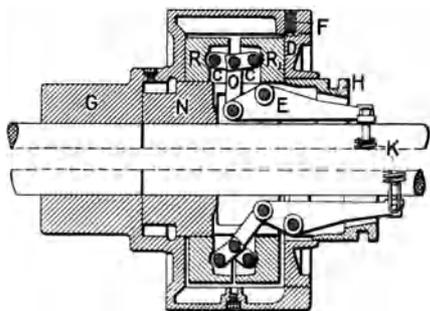


Abb. 64.3. Binnkupplung (v. Roll, Clus).

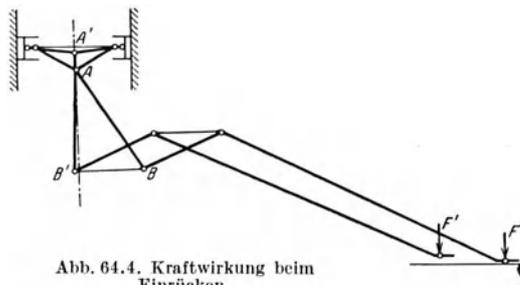
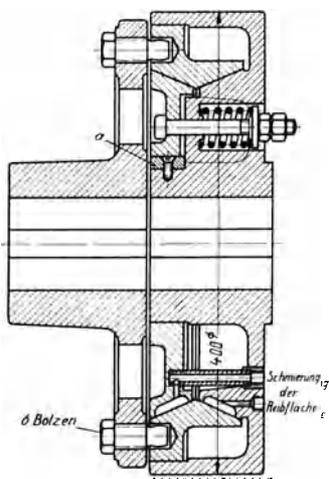
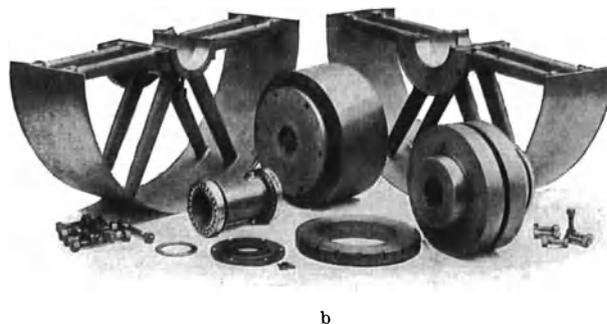
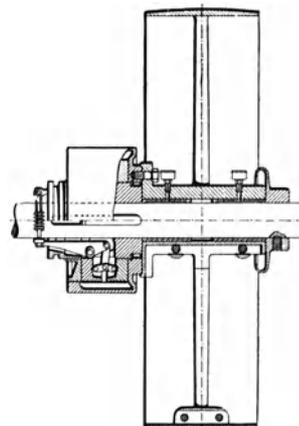


Abb. 64.4. Kraftwirkung beim Einrücken.

Die einfachste Bauart einer Reibkupplung ist die Kegelpkupplung (Abb. 64.1). Die horizontale Einrückkraft H erzeugt am ganzen Umfang der Reibflächen einen gleichmäßigen Druck p , der zu einer Resultierenden N zusammengesetzt werden kann. Dann ist $H = N \sin \alpha$, denn die Reibung in der Richtung der geneigten Fläche kann vernachlässigt werden, da die Hauptbewegung (eine Drehung um die Wellenachse) senkrecht dazu erfolgt. Wenn P die übertragbare Umfangskraft ist, dann ist $N = \frac{P}{\mu}$ und $H = \frac{P}{\mu} \sin \alpha$.

Eine geringe Schrägstellung des einen Konus gegen den anderen führt zu einem einseitigen Anliegen und so zum stoßweisen Einrücken. Der Hauptnachteil dieser Kupplung liegt jedoch darin, daß die Muffe während der ganzen Betriebszeit angepreßt bleiben muß. Um die Abnutzung an der Muffe zu verringern, verwendet man dann Kugellager. Diese Kupplung kommt heute noch im Automobilbau vor. Eine Spiralfeder preßt dabei die beiden Kupplungshälften während des Fahrens zusammen; beim Ausschalten muß die Federkraft überwunden werden. Um

Abb. 64.5. Rutschkupplung.
(Stückenholtz, nach Rötseher.)Abb. 64.6. Riemenscheibe in Verbindung mit Reibkupplung
(v. Roll, Clus).

ein möglichst gleichmäßiges Anliegen zu erreichen, werden die Gleitflächen federnd angeordnet.

Die amerikanische Kupplung Abb. 64.2¹ vermeidet das stoßweise Einrücken dadurch, daß auf dem Kupplungskonus noch eine Reibscheibe federnd aufgesetzt ist. Beim Einrücken legt sich zunächst die ebene Scheibe an und leitet den Kuppelvorgang sanft ein. Die Kegelpkupplung

¹ Bourdon: Two-stage Clutch adopted. Automot. Ind. Bd. 62 (1910) Heft 10.

tritt also erst in Tätigkeit, wenn die Massen schon etwas beschleunigt sind; der Stoß wird dadurch stark gemildert.

Um eine dauernde Kraftaufwendung an der Muffe zu erübrigen, führt man alle Reibkupplungen so aus, daß sie sich selbst geschlossen halten. Abb. 64.4 zeigt an der Bannkupplung, wie durch die Federkraft F der Hebel $A' B'$ nach Überschreiten der vertikalen Stellung in seiner Lage festgehalten wird. Die Kupplung hat eine vollständig glatte äußere Form; die Reibflächen

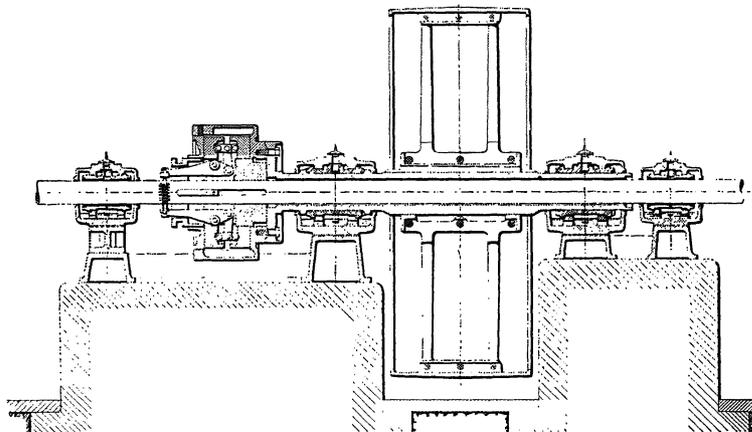


Abb. 64.7. Riementrieb in Verbindung mit Hohlwelle (v. Roll, Clus).

werden durch Öl selbsttätig geschmiert und die Abnutzung kann durch Nachstellen des Deckels ausgeglichen werden. Die Abkühlung der Gleitflächen ist gut¹.

Reibkupplungen werden gelegentlich auch als Sicherung gegen Überlastungen verwendet, um Brüche zu verhindern (Kranbau, Antrieb von Kettenrosten usw.). Die Kupplungsflächen gleiten, wenn die Umfangskraft eine bestimmte, durch Federn einstellbare Größe überschreitet (Rutschkupplung, Abb. 64.5). An Stelle

der teuren Kupplungen werden manchmal auch Abscherbolzen eingesetzt, um den Bruch wichtiger Teile zu verhindern (z. B. bei Blehscheren).

Die Verbindung von Reibkupplungen mit Riemenscheiben ist insbesondere für breite Scheiben vorteilhaft, da der Riemen dabei nicht verschoben wird. Die Riemenscheibe wird mit dem Kupplungsgehäuse verbunden und läuft auf einer Lehrlaufbüchse (Abb. 64.6). Dabei kann sowohl die Riemenscheibe als auch die Welle der treibende Teil sein. Damit bei ausgerückter Kupplung keine Reibung mehr vorhanden ist, wird die Riemenscheibe bei großen Kraftübertragungen auf eine für sich gelagerte hohle Welle befestigt, welche die durchgehende Vollwelle ohne Berührung umschließt (Abb. 64.7). Die Hohlwelle ist dann mit dem Kupplungsgehäuse verbunden.

65. Mechanische Bremsen².

Diese hauptsächlich bei Hebe- und Fahrzeugen verwendeten Maschinenteile dienen dazu, Bewegung zu verhindern (Sperrwerk oder Haltebremse) oder zu regeln (Regulierbremse). In den Anfängen des Hebezeugbaues verwendete man mit Vorliebe sog. selbsthemmende Getriebe, die nur Bewegung in einer Richtung zulassen (z. B. Schraube mit $\alpha < \rho$). Solche Getriebe haben immer einen sehr schlechten Wirkungsgrad ($\eta < 50\%$). Außerdem hat man es nicht in der Gewalt, die Last an einer bestimmten Stelle zuverlässig zu halten, weil nach Ausschalten des Antriebsmotors die Last sich, infolge der vorhandenen kinetischen Energie, noch weiter bewegt. Man braucht dann immer noch eine Stoppbremse.

65.1. Sperrwerke.

Das Sperrrad (Abb. 65.1) kann außen, innen oder auch seitlich verzahnt sein. Bei eingelegerter Klinke wird der Rücklauf verhindert. Der Eingriff der Klinke wird meist durch Federdruck gesichert, doch ist es gut, dem Gesperre eine solche Form zu geben, daß die Klinke selbsttätig hineingezogen wird. Das trifft zu, wenn:

$$Z \cdot c + \text{Moment des Eigengewichtes} > \mu Z \cdot b + \text{Zapfenreibungsmoment},$$

oder (weil das Moment des Eigengewichtes ungefähr gleich dem Zapfenreibungsmoment gesetzt werden kann) wenn $\frac{c}{b} > \mu$ ist.

Bei der Wahl des Sperraddurchmessers ist zu berücksichtigen, daß mit der Vergrößerung des Durchmessers die Umfangskraft ab-, aber die Umfangsgeschwindigkeit zunimmt. Da die

¹ Für die verschiedenen Ausführungsformen der Reibkupplung siehe E. von Ende: Wellenkupplungen und Wellenschalter. Einzelkonstr. a/d. Maschbau, Heft 11. Berlin: Julius Springer 1931.

² Perry, J. P. und D. M. Smith: Mechanical braking and its influence on winding equipment. Proc. Instn. mech. Engr. (London) 122 II (1932) S. 537/620.

Stoßkraft (beim Rücklauf) mit dem Quadrate der Geschwindigkeit zunimmt, entscheidet man sich allgemein für kleine Sperräder mit 8 bis 12 Zähnen. Oft werden auch zwei Klinken angeordnet, die um einen halben Zahn versetzt sind.

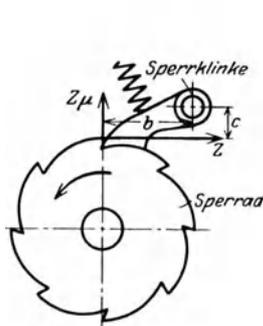


Abb. 65.1. Sperrrad und Klinke.

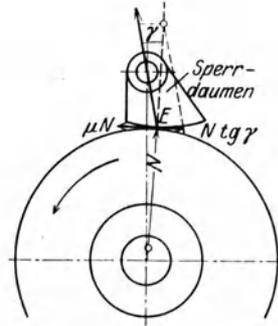


Abb. 65.2. Sperrdaumen.

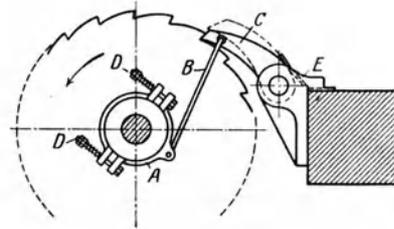


Abb. 65.3. Geräuschlose Sperrklinke (Hanffstengel).

Beim Lastheben entsteht ein lästiges Geräusch, weil die Klinke über die Zähne gleitet. Dieses Geräusch wird durch den Sperrdaumen (Abb. 65.2) vermieden. Die Reibung μN nimmt den Daumen in der Umfangsrichtung mit, wenn

$$\mu N > N \tan \gamma \text{ oder wenn } \tan \gamma < \mu \text{ ist.}$$

Infolge seiner exzentrischen Lage klemmt der Daumen, und das Sperrrad steht still. Für $\mu = 0,1$ ist $\gamma \approx 5^\circ$; dieser kleine Winkel schließt die Gefahr in sich, daß bei eintretendem Verschleiß ein so starkes Klemmen eintritt, daß die selbsttätige Loslösung bei Änderung der Drehrichtung nicht mehr erfolgt. Deshalb verwendet man meist keilförmige Rillen (vgl. S. 155 Keilreibzahl). Eine einfache geräuschlose Sperrklinke erhält man, wenn die Klinke durch einen Reibzaun (Abb. 65.3) gesteuert wird.

65.2. Handbremsen.

Backenbremse. (Abb. 65.4) Wenn das Zapfendrehmoment und das Moment des Hebelgewichtes vernachlässigt wird, so lautet die Momentengleichung in bezug auf den Drehpunkt des Bremshebels

$$K a = N b \pm \mu N c = N (b \pm \mu c), \tag{65.1}$$

und zwar + für Drehrichtung 1
 — „ „ 2 (Differenzialbremse).

Zwischen dem Drehmoment an der Brems Scheibe (Bremsmoment M_B) und dem Lastmoment M_L an der Trommel oder am Radumfang des Fahrzeuges besteht die Beziehung:

$$M_B = M_L \cdot i \cdot \eta = P \cdot r,$$

worin i das Übersetzungsverhältnis zwischen Bremswelle und Lastwelle ist, und η der Wirkungsgrad der Übersetzung. Die abzubremsende Umfangskraft $P = M_B/r$ muß kleiner (Haltebremse) oder gleich (Regulierbremse) der Reibungskraft μN sein. Der Wert ($P = \mu N$) in Gl. (1) eingesetzt, gibt:

$$K \geq P \frac{b}{a} \left(\frac{1}{\mu} \pm \frac{c}{b} \right). \tag{65.2}$$

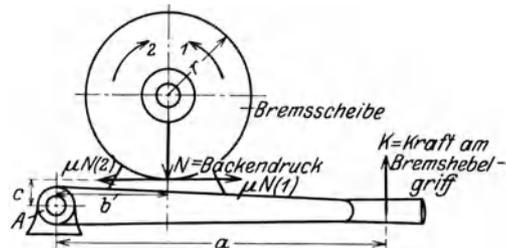


Abb. 65.4. Backenbremse.

Damit K klein wird, sollte P klein sein, d. h. r groß und i klein. Die Bremse ist also immer auf eine raschlaufende Welle anzuordnen (Motorwelle).

Da das Sperrrad den Rücklauf hindert, so muß der Arbeiter — um die Last zu senken — die Kurbel zuerst etwas zurückdrehen. Die Bremse anziehen und dann die Klinke abheben. Er braucht also gleichzeitig beide Hände zu verschiedenen Griffen. Die Anordnung kann aber auch so getroffen werden, daß die Bremse immer durch Gewichte so stark gespannt ist, daß sie die Last freischwebend zu halten vermag. Der Rücklauf wird dann durch Lüftung der Bremse freigegeben und geregelt (Sperradbremse, Abb. 65.5). Dies setzt aber voraus, daß die festgespannte Brems Scheibe das Heben nicht hindert, d. h. daß sie lose angeordnet ist. Solange die Bremse gespannt ist, wirkt das Sperrrad wie bisher; bei gelüfteter Bremse dient die Klinke als

Mitnehmer zwischen Bremsscheibe und Triebwerk. Die Sperradbremse erleichtert die Bedienung der Winde wesentlich, da zum Senken der Last nur die Bremse gelüftet werden muß.

Die Bremskraft K ist unabhängig von der Drehrichtung der Welle, wenn $c = 0$ ist; diese Bedingung muß bei allen Fahrtbremsen erfüllt sein. Wenn ein Fahrzeug mit dem Gesamtgewicht G kg und einer Fahrgeschwindigkeit v m/s in einer Strecke von s m zum Stehen gebracht werden soll, so folgt die Bremskraft P an der Bremsscheibe aus dem Gesetz der Erhaltung der Energie:

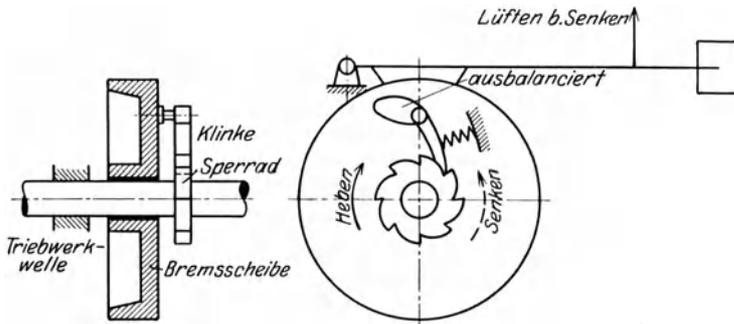


Abb. 65.5. Sperradbremse.

gewicht G kg und einer Fahrgeschwindigkeit v m/s in einer Strecke von s m zum Stehen gebracht werden soll, so folgt die Bremskraft P an der Bremsscheibe aus dem Gesetz der Erhaltung der Energie:

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{2} = P \cdot \frac{d}{D} \cdot s,$$

worin

$$\frac{d}{D} = \frac{\text{Bremsscheibendurchmesser}}{\text{Laufraddurchmesser}}$$

ist. Die Laufräder dürfen niemals so stark gebremst werden, daß sie stehen bleiben und gleiten, d. h. das Bremsmoment muß kleiner sein als Reibungsmoment zwischen Rad und Fahrweg:

$$\frac{Pd}{2} < \mu G_B \frac{D}{2},$$

wenn mit G_B der Teil des Wagengewichts bezeichnet wird, der auf die Bremsräder wirkt. Bei Anwendung von Vierradbremsen ist $G_B = G$.

Die Backenbremse hat in der Form der Abb. 65.4 den Nachteil, daß der ganze Backendruck N in den Lagern erhöhte Reibung erzeugt. Abb. 65.6 zeigt eine doppelte Backenbremse, bei der die Bremswelle entlastet ist. Die Bremse ist außerdem ständig durch die Gewichte angepreßt (Haltebremse)¹. Sobald der Antriebsmotor unter Strom kommt, wird die Bremse gelüftet, indem ein Magnet (Bremslüftmagnet) oder Motor (Bremslüftmotor) gleichzeitig Strom erhält. Der Bremslüftmotor ist ein kleiner Asynchron-Kurzschlußmotor, dessen Anker nach jeder Richtung sich um etwa 120° drehen kann. Die weitere Drehung wird durch federnde Anschläge verhindert. Auf der Ankerwelle sitzt eine kleine Stirnkurbel, die durch eine Kette auf den Bremshebel wirkt.

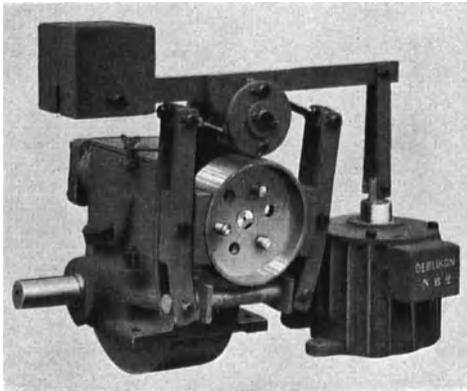


Abb. 65.6. Doppelte Backenbremse mit Bremslüftmagnet (Oerlikon).

Neben der Haltebremse ist immer eine zweite (meist elektrische) Bremse² erforderlich, um die Senkgeschwindigkeit der Last zu regeln. Die Wirkungsweise der elektrischen Bremse beruht darauf, daß der Antriebsmotor beim Lastsenken als Generator wirkt, und daß die erzeugte elektrische Energie (in Widerständen) in Wärme umgesetzt wird. Die Bremsung erfolgt demnach ohne Abnutzung².

Bandbremse (Abb. 65.7 u. 65.8). Hier gelten die gleichen Beziehungen (62.4 bis 62.6) wie beim Riementrieb. Dabei ist zu beachten, daß bei der Bremse immer die Kraft im auflaufenden Band die größere ist. Bezeichnet man mit

S_1 die Spannung im auflaufenden Band, am Hebelarm b_1 wirkend,
 S_2 „ „ „ ablaufenden „ „ „ b_2 „ „

so lautet die Momentengleichung in bezug auf den Drehpunkt des Hebels:

$$\begin{array}{ll} \text{für die Drehrichtung 1} & \text{für die Drehrichtung 2} \\ K \cdot a = S_2 \cdot b_2 & K_1 \cdot a = S_1 \cdot b_1 \end{array}$$

woraus:
$$K = S_2 \frac{b_2}{a} = P \frac{b_2}{a} \frac{1}{e^{\mu\beta} - 1}, \quad K_1 = P \frac{b_2}{a} \frac{e^{\mu\beta}}{e^{\mu\beta} - 1}.$$

¹ List, F. und P. Hold: Die Berechnung der Haltebremsen und Bremslüftern. Z. VDI 82 (1938) S. 443/34.
² Zur Erklärung dieser Bremsen sind Kenntnisse über Elektromotoren erforderlich, die hier nicht vorausgesetzt sind. Vgl. z. B. R. Dub: Der Kranbau, 2. Aufl. A. Ziemsen Verlag 1922.

K_1 ist demnach $e^{\mu\beta} \approx 2,2$ mal so groß als K . Deshalb gilt als Konstruktionsregel, daß bei der einarmigen Bandbremse immer das ablaufende Band zu spannen ist.

Das Band würde sich durch die Reibung rasch abnutzen. Man verwendet deshalb immer „Gliederbänder“ mit Belegen aus Holz (Pappel, Weißbuche), Leder oder Asbest (Ferrodo usw.)

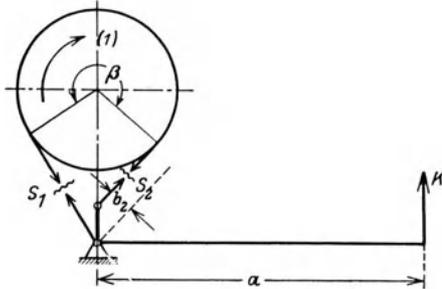


Abb. 65.7.

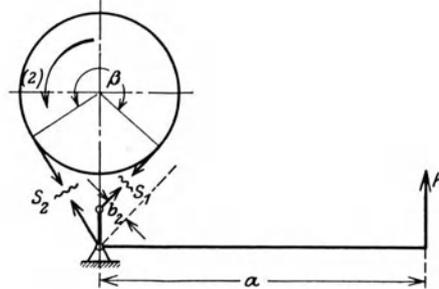


Abb. 65.8.

Abb. 65.7 und 65.8. Einarmige Handbremse.

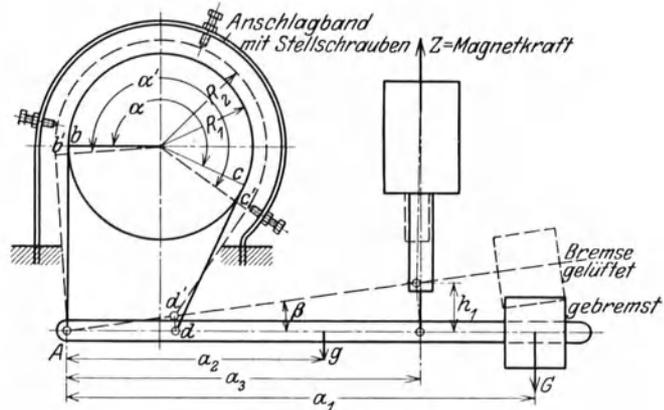
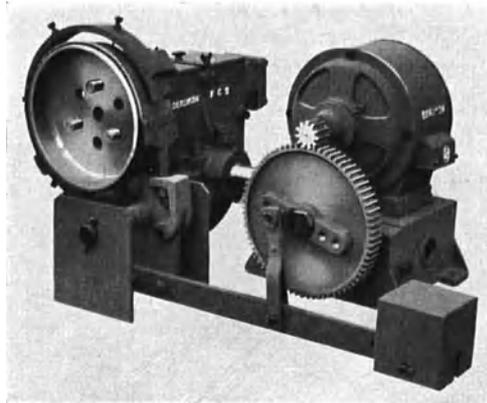


Abb. 65.9. Bandbremse durch Magnet bzw. Motor gelüftet.

Auch die Bandbremse kann nur als Haltebremse dienen, die durch einen Magnet oder Motor gelüftet wird (Abb. 65.9). Der Ablenkungswinkel β ist dadurch bedingt, daß das abgehobene Band nirgends streifen darf. Unter der Voraussetzung, daß das abgehobene Band sich nach einem Kreis mit dem Radius R' krümmt, ist die Bandlänge

$$L = Ab + \alpha R + cd = Ab' = \alpha' R' + c'd'$$

Nun ist $\alpha \approx \alpha'$ und $Ab \approx Ab'$, und damit wird

$$\alpha (R - R') = cd - c'd' \approx dd'$$

Für $\alpha = 0,7 \cdot 2\pi$ und $R - R' \approx 2 \text{ mm}$ wird d' ungefähr 8 mm, so daß damit der Winkel β festgelegt ist. Die Magnettabellen enthalten außer den Abmessungen auch die Größe des Magnethubes h , der Zugkraft Z und des Ankergewichtes G_A . Das Ankergewicht wird immer zur Bremswirkung herangezogen, so daß der Hub h nicht vollständig ausgenutzt werden kann und die Nutzhöhe $h_1 = 0,8 h$ wird. Damit ist auch die Lage des Magneten festgelegt. Die erforderliche Zugkraft Z folgt aus der Momentengleichung in bezug auf A , wenn 10% Zuschlag für Gelenkreibung und Bandsteifigkeit gemacht wird:

$$1,1 (G \cdot a_1 + g \cdot a_2) = (Z - G_A) a_3$$

Die Bremskraft K kann beliebig verkleinert werden, wenn die Spannung im auflaufenden Band die Wirkung der Bremskraft K unterstützt (Differentialbremse Abb. 65.10). Dann ist

$$K \cdot a = S_2 \cdot b_2 - S_1 \cdot b_1$$

oder

$$K = \frac{P}{a} \frac{b_2 - b_1 e^{\mu\beta}}{e^{\mu\beta} - 1}$$

Der Arbeiter sollte durch Änderung der Kraft K die Geschwindigkeit bis zum vollständigen Festhalten regeln können. Bei den unelastischen Bremsorganen rufen geringfügige Ände-

rungen im Hebelausschlag oft schroffe Wechsel in der Bremswirkung hervor, die sich nur bei langer Übung und großer Aufmerksamkeit vermeiden lassen. Diese Schwierigkeit, die bei allen Handbremsen auftritt, wird um so größer, je kleiner die Bremskraft K ist, so daß es nicht empfehlenswert ist, die Bremskraft K sehr klein zu machen. Praktisch brauchbare Werte sind für $\beta = 0,7 \cdot 2\pi$, $b_2 = 2,5$ bis $3 b_1$.

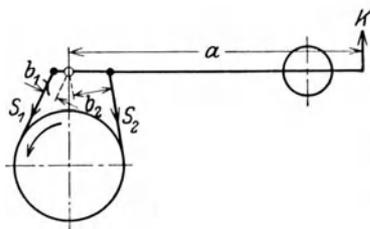


Abb. 65.10. Differentialbandbremse.

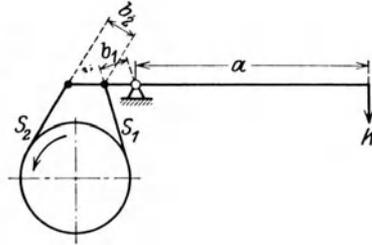


Abb. 65.11. Fahrtbremse.

Weder die einarmige noch die Differentialbandbremse kann als Fahrtbremse verwendet werden. Bei der Anordnung nach Abb. 65.11 wird die Kraft K für beide Drehrichtungen gleich, wenn $b_1 = b_2 = b$ ist, denn dann lautet die Momentengleichung in bezug auf den Drehpunkt A :

$$Ka = S_1 b + S_2 b = b S_2 (e^{\mu\beta} + 1),$$

$$K = P \frac{b}{a} \frac{e^{\mu\beta} + 1}{e^{\mu\beta} - 1}.$$

65.3. Selbsttätige Bremsen.

Lastdruckbremse. Die Bremsflächen werden durch die Lastwirkung zusammengedrückt, und zwar so, daß das Bremsmoment etwa 20% größer als das Lastmoment ist. Dadurch wird die Last sicher schwebend festgehalten. Beim Senken muß der Überschuss des Bremsmomentes durch den Antrieb überwunden werden. Bei der Gewinde-Lastdruckbremse (Abb. 65.12) sitzt das Antriebsrad für die Lasttrommel auf einer linksgängigen Schraube mit großer Steigung. Das Zahnrad ist vorn als Bremsscheibe ausgebildet, während die Gegenfläche ein Sperrrad ist,

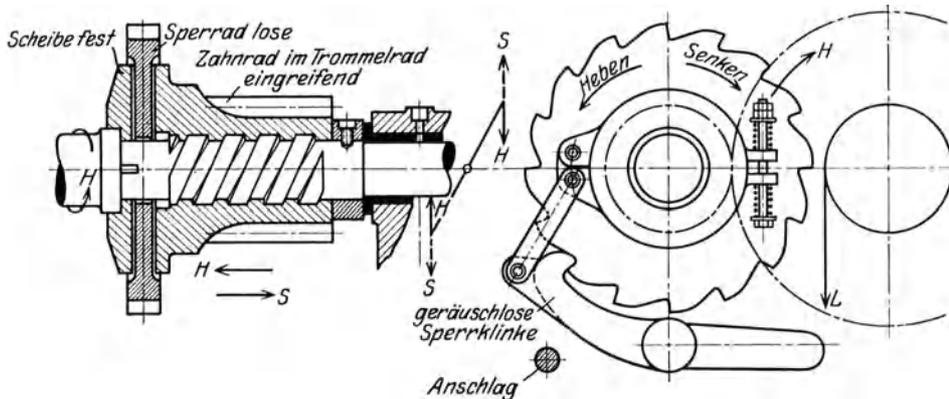


Abb. 65.12. Gewinde-Lastdruckbremse.

das lose auf der Welle sitzt. Unter der Wirkung der Last schraubt sich das Zahnrad nach links, bis sich die Bremsflächen berühren. Da das Reibungsmoment $P\mu R_m$ größer als das Moment der Last $Pr_m \operatorname{tg}(\alpha + \rho)$ ist und weil das Drehen des Sperrades durch die Klinke gehindert ist, so wird die Last frei schwebend gehalten. Die axialen Kräfte heben sich zwischen Bund und Gewinde auf, so daß auf die Welle selbst kein Druck ausgeübt wird. Beim Heben der Last muß sich das Rad noch kräftiger nach links verschieben. Zum Senken wird die Welle in entgegengesetzter Richtung gedreht und die Reibung aufgehoben. Die Last kann dann frei herunterfallen, das Zahnrad wird beschleunigt, schiebt sich nach links und bremst. Wenn die Antriebswelle weiter gedreht wird, wird die Bremse wieder gelöst, usw. Die Last senkt sich demnach mit der gleichen Geschwindigkeit, wie es die Antriebswelle gestattet, so daß die Lastdruckbremse nicht geeignet ist, die Last schnell zu senken.

Abb. 65.13 zeigt eine Verbindung von Sperrrad- und Lastdruckbremse. Hier ist das freie Spiel des Ritzels A durch zwei Nocken B eingeschränkt. Der Mitnehmer C dient beim Herunterkurbeln des leeren Hakens zum Mitnehmen des Ritzels, falls das Lastmoment nicht ausreicht, das Ritzel zu drehen. Das Senken kann hier auch durch Lüften der Bandbremse erfolgen. Dabei

dreht sich die Bremscheibe rückwärts. Die Kurbelwelle muß dann ausgerückt sein, da diese sich viel zu schnell mitdrehen würde; deshalb ist der Bremslüfthebel blockiert.

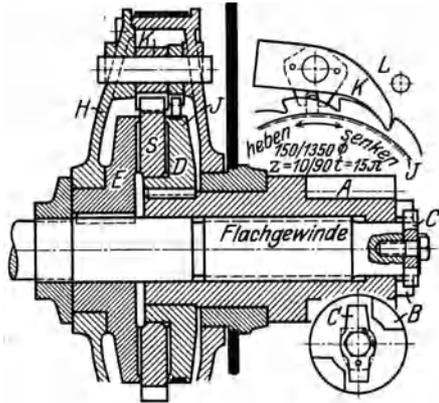


Abb. 65.13. Verbindung von Sperrad- und Lastdruckbremse.

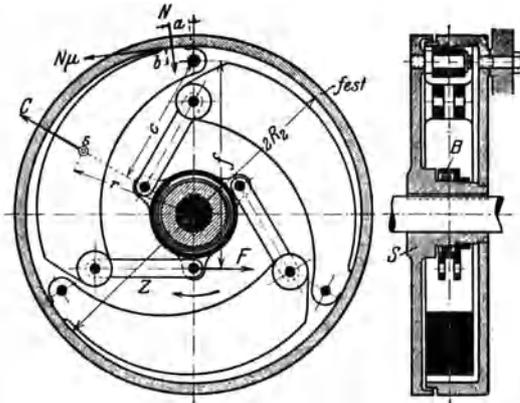


Abb. 65.14. Aus Doppel, Taschenbuch.

Fliehkraft-(Schleuder-)bremse. Der Rücklauf des Windwerkes bringt bewegliche Gewichte zum Ausschlag. Bei der Ausführung von Becker (Abb. 65.14) sind drei sichelförmige Bremsklötze so miteinander gekuppelt, daß der gemeinsame Schwerpunkt mit dem Wellenmittel zusammenfällt. Die eigentliche Bremsfläche liegt in der Nähe des Drehzapfens, so daß die Wirkung der Fliehkraft im Verhältnis c/a vergrößert wird. In der Nabenbüchse sitzt eine flache Spiralfeder, die mit einem Ende an der Büchse und mit dem anderen in der Scheibennabe festgeklemmt ist. Die Federspannung läßt sich durch Drehen der Büchse um 120° regeln. Sie zieht die Klötze vom Umfange der Bremstrommel ab, so daß beim Aufwinden der Last keine Reibung vorhanden ist. Die Fliehkraftbremse muß also immer mit einem Sperrad oder mit einer Haltebremse verbunden sein, um die Last freischwebend zu halten.

Die Momentengleichung in bezug auf den Drehpunkt des Klotzes lautet (Abb. 65.15):

$$N \cdot a + \mu N \cdot b + F \cdot f = C \cdot c.$$

Setzt man den Wert der Fliehkraft

$$C = m r w^2 = \frac{G}{g} r \frac{\pi^2 n^2}{900} \approx G r \frac{n^2}{900}$$

in diese Gleichung ein und berücksichtigt man, daß für den gleichförmigen Lastniedergang

$$\frac{P}{3} = \mu N \text{ ist, so wird}$$

$$G = \left(P \frac{a + \mu b}{3 \mu c} + F \frac{f}{c} \right) \frac{900}{r n^2}$$

oder auch

$$n = \sqrt{\left(P \frac{a + \mu b}{3 \mu c} + F \frac{f}{c} \right) \frac{900}{r G}}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß n um so kleiner ist, je kleiner P

wird, d. h. kleine Lasten werden langsamer gesenkt als große. Das ist natürlich nicht erwünscht, und aus diesem Grunde haben die Fliehkraftbremsen nur ein beschränktes Anwendungsgebiet gefunden. Außerdem ist die Reibungsleistung dieser Bremse eng begrenzt.

Für eine Bremse von 400 mm Durchmesser ist z. B. $r = 15$ cm, $a = b = 2,6$ cm, $c = 21$ cm, $F = 6,5$ kg, $f = 27$ cm, $n_{\max} = 125$, $G = 16$ kg, dann wird mit $\mu = 0,1$ die abzubremsende Umfangskraft $P = 61$ kg. Die Umfangsgeschwindigkeit der Bremsklötze ist $\frac{\pi \cdot 0,4 \cdot 125}{60} = 2,6$ m/s,

so daß die maximale Bremsleistung (die in Wärme umgesetzt wird) $\frac{61 \cdot 2,6}{75} \approx 2$ PS beträgt.

Da 1 PS = 632 kcal/h und die Bremsoberfläche $\pi \cdot 0,4 \cdot 0,1 = 0,12$ m² ist, so lautet die Gleichung für die Wärmeabgabe, wenn ϑ die Temperatur der Bremscheibe und ϑ_0 die Temperatur der

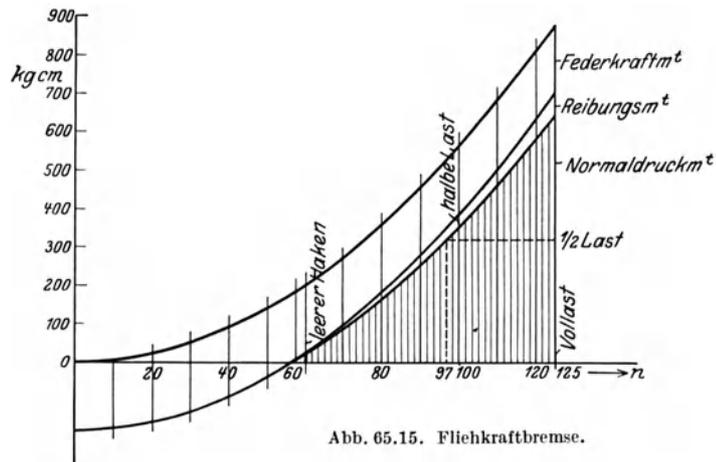


Abb. 65.15. Fliehkraftbremse.

Umgebung ist:

$$2 \cdot 632 = \alpha \cdot 0,12 (\vartheta - \vartheta_0)$$

oder

$$\alpha (\vartheta - \vartheta_0) \approx 10000 .$$

Da für die stillstehende Bremsscheibe, je nach der Temperatur, $\alpha = 40$ bis $50 \text{ kcal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}$ ist, so wird die Bremse (im Dauerbetrieb) recht heiß.

Man verwendet diese Bremse deshalb meist so, daß die Fliehkraft dazu dient, eine größere Bremskraft auszulösen (z. B. Druckluft) und so zu regeln, daß alle Lasten mit der gleichen Geschwindigkeit (rd. 10 mal der Hubgeschwindigkeit) gesenkt werden (Jordanbremse)¹.

66. Die Verhältnisse beim An- und Auslauf von Maschinen.

Es ist bei der Festigkeitsberechnung von Maschinenteilen gebräuchlich, vom Beharrungszustand der Maschine auszugehen und die Kräfte aus der zu übertragenden Leistung zu bestimmen. Bei der Inbetriebsetzung und beim Bremsen entstehen aber zusätzliche Kräfte und Beanspruchungen, deren Größe der Konstrukteur um so genauer kennen muß, je größer die Massen sind, die beschleunigt oder verzögert werden und je rascher und öfter dies geschieht (z. B. Lokomotive, Automobil, Fördermaschine für Bergwerke, Hobelmaschine, Fahrwerk eines Lauf- oder Brückenkrans usw.). Die folgenden Betrachtungen gelten allgemein für die Inbetriebsetzung irgendeiner Maschine.

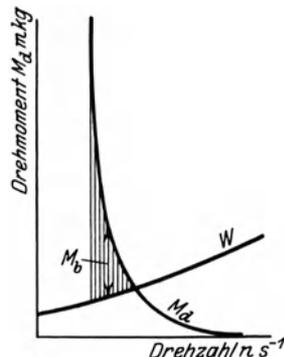


Abb. 66.1. Charakteristik von Antriebs- und Arbeitsmaschine.

Maschinencharakteristik. Bei jeder Antriebmaschine (Dampfmaschine, Brennkraftmaschine, Elektromotor usw.) ist die Drehzahl von dem zu übertragenden Drehmoment abhängig, und zwar ist diese Abhängigkeit $M_d = F(n)$ „Motorcharakteristik“ genannt (Abb. 66.1) verschieden.

Auch für jede Arbeitsmaschine ist das Moment der zu überwindenden Widerstandskraft von der Drehzahl der Maschine abhängig. Bei einer Eisenbahn z. B. nimmt der Fahrwiderstand mit der Zuggeschwindigkeit zuerst langsam, nachher rascher zu. Der Fahrwiderstand kann am Umfange eines Laufrades wirkend gedacht werden. Das Drehmoment des Antriebmotors erzeugt am Umfange des gleichen Rades, mit dem Radius R , die Zugkraft Z

$$Z = \frac{M_d}{R} i \cdot \eta \quad (66.1)$$

worin i das Übersetzungsverhältnis ist, d. i. das Verhältnis der Umfangsgeschwindigkeiten vom Motorritzel und Rad (Abb. 66.2). Die Zugkraft hat demnach einen ähnlichen Verlauf wie das Motordrehmoment. Bei Hebezeugen ist das Lastmoment unabhängig von der Hubgeschwindigkeit, bei Zentrifugalpumpen und Ventilatoren wächst das Moment ungefähr mit dem Quadrat der Drehzahl.

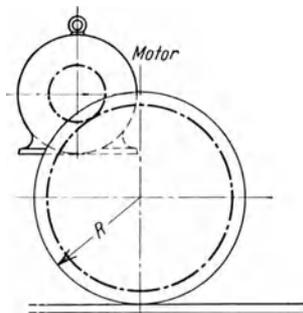


Abb. 66.2.

Der Unterschied zwischen den Drehmomenten (oder den Umfangskräften) der Antrieb- und Arbeitsmaschine, auf die gleiche Welle (oder auf den gleichen Punkt) bezogen (M_b oder P_b), dient zur Beschleunigung der Maschine. Sind beide Momente (oder Kräfte) gleich, so tritt Beharrungszustand ein. Die Beanspruchung der Maschine hängt von der größten Beschleunigung ab.

Bewegungsgleichungen. Bei einer geradlinigen Bewegung kann die Kraft P_b der bekannten Masse m des bewegten Teiles eine Beschleunigung b erteilen, so daß

$$P_b = m b$$

ist. Zwischen Geschwindigkeit v und Beschleunigung b besteht die bekannte Beziehung:

$$b = \frac{dv}{dt} \quad \text{oder} \quad dt = \frac{dv}{b} .$$

¹ Jordan-Bremsen-Gesellschaft, Berlin-Neukölln. — Schiebeler, C.: Die Eldrosteuerung für Hebezeuge. Fördertechn. 29 (1936) S. 263/5.

Durch zeichnerische Integration (Planimetrieren) läßt sich zu jeder Geschwindigkeit punktweise die Zeit $t = \int_0^v \frac{dv}{b}$ bestimmen (Abb. 66.3), und damit auch die zur Erreichung des Beharrungszustandes erforderliche Anfahrzeit t_a .

Aus der Bewegungsgleichung

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{oder} \quad ds = v dt$$

folgt in ähnlicher Weise durch zeichnerische Integration der durchlaufene Weg

$$s = \int_0^t v dt .$$

Für die drehende Bewegung lautet die Bewegungsgleichung:

$$M_d = \Theta \varepsilon = \Theta \frac{dv}{dt} = \Theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} .$$

Führt man an Stelle des Massenträgheitsmomentes Θ die reduzierte Masse m' ein (vgl. S. 213) so ist

$$M_d = m' \varepsilon = m' \cdot \frac{dv}{dt} = m' \cdot b = P .$$

wodurch die Berechnung der Beschleunigung einer drehenden Bewegung auf die der geradlinigen zurückgeführt ist. Das ist besonders vorteilhaft bei der Berechnung der Beschleunigung von ganzen Maschinen, deren Teile zum Teil geradlinige und zum Teil drehende Bewegung erhalten. Man braucht nach der Einführung der reduzierten Massen keine Rücksicht mehr auf die Art der Bewegung der Teile zu nehmen.

Die reduzierte Masse eines Triebwerkes ist diejenige Masse, die — im Angriffspunkt der Kraft vereinigt — den gleichen Trägheitswiderstand bietet wie das ganze Triebwerk:

$$P_b = M_{\text{red}} b .$$

Bei einem Triebwerk, das aus n hinter- oder nebeneinander geschalteten Teilen besteht, können die drehenden Bewegungen auf geradlinige zurückgeführt werden, indem die Massen der drehenden Teile in der Entfernung l vom Wellenmittel reduziert gedacht werden. Seien

m'_1	m'_2	m'_k	m'_n	die so reduzierten Massen der Triebwerksteile,
b_1	b_2	b_k	b_n	die zu erteilenden Beschleunigungen,
i_1	i_2	i_k	i_n	die Übersetzungsverhältnisse,
η_1	η_2	η_k	η_n	die Wirkungsgrade der Übersetzungen,

so ist der Massenwiderstand des beliebigen k -ten Teiles

$$P'_k = m'_k b_k .$$

Diese Kraft muß nun nach dem Angriffspunkt der Kraft im ersten Element übertragen werden. Aus Abb. 66.4 folgt, daß

$$P = \frac{P'_k}{r_k} \quad \text{und} \quad P_k = P'_k \frac{r_1}{r_k} \quad \text{oder} \quad P_k = P'_k i_k .$$

Da bei der Übertragung Reibungsverluste zu überwinden sind, muß noch der Wirkungsgrad der Übersetzung eingeführt werden:

$$P_k = P'_k \frac{i_k}{\eta_k} .$$

Das ist der Anteil an der ganzen beschleunigenden Kraft, vom beliebigen k -ten Gliede herrührend. Die ganze Kraft

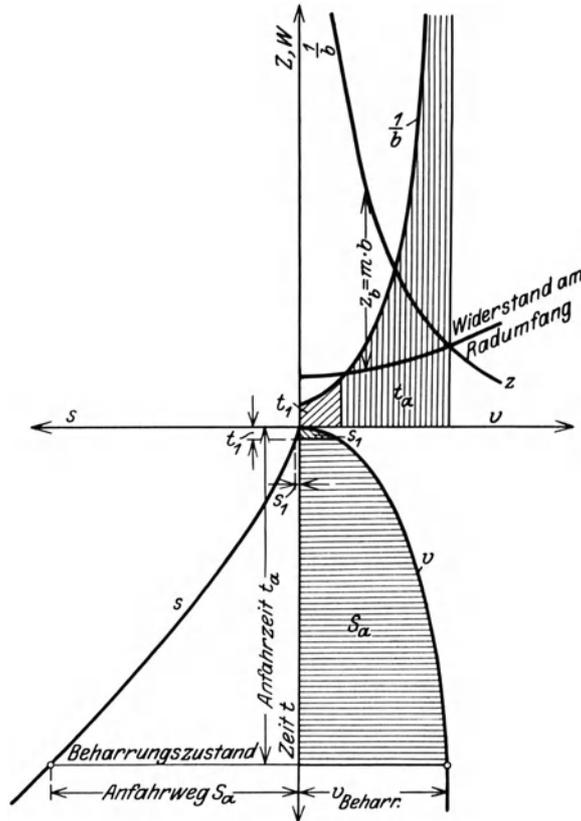


Abb. 66.3. Konstruktion der Anfahrzeit und des Anfahrweges.

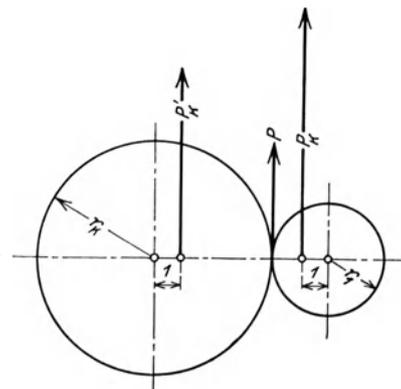


Abb. 66.4.

erhält man durch Summierung der Einzelkräfte:

$$P_b = \sum_{k=1}^{k=n} m_k b_k \frac{i_k}{\eta_k}.$$

Da $i_k = \frac{b_k}{b_1}$ ist, wird

$$P_b = b_1 \sum_{k=1}^{k=n} m_k \frac{i_k^2}{\eta_k} = M_{\text{red}} b_1. \tag{66.1}$$

Diese Gleichung zeigt, daß die reduzierte Masse eines Triebwerkes vom Wirkungsgrad der einzelnen Glieder abhängig ist. Sie erhält z. B. beim Heben einer Last einen anderen Wert als beim Senken, weil im letzteren Fall der Wirkungsgrad η_k in den Zähler statt in den Nenner zu setzen ist. Für Triebwerke, die eine Übersetzung ins Langsame haben, nimmt der Einfluß der hinteren Glieder mit i_k^2 , also rasch ab.

Die beschleunigende Kraft P_b kann auf eine beliebige Stelle des Triebwerkes bezogen werden, z. B. auf den Lasthaken zur Berechnung des größten Seilzuges, auf die Motorwelle bei der Berechnung des Anfahrmomentes, auf die Schwenkachse eines Drehkranes, auf den Umfang des Laufrades, usw.

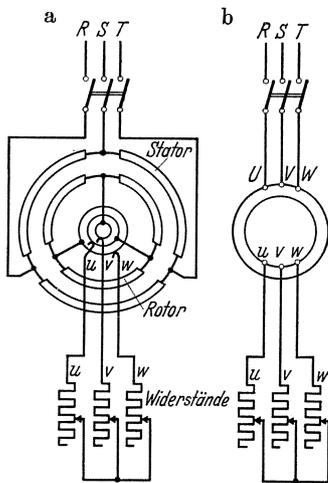


Abb. 66.5. a Bild und b Schema eines asynchronen Drehstrommotors.

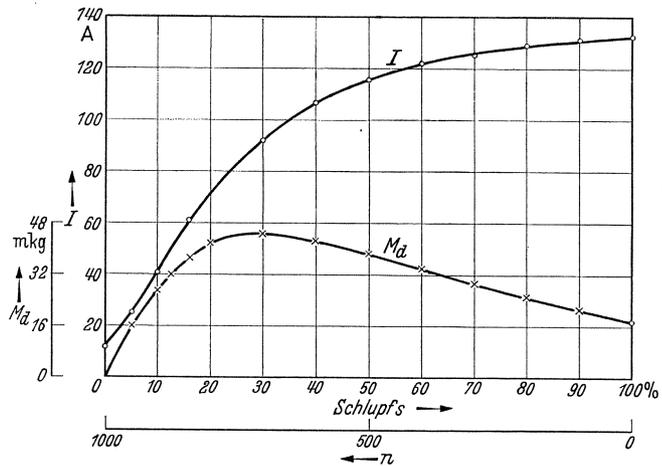


Abb. 66.6. Stromaufnahme I eines asynchronen Drehstrommotors.

Der Asynchron-Drehstrommotor (Abb. 66.5) ist die wichtigste Antriebsmaschine. Er besteht aus einem Ständer (Stator), dessen drei Wicklungen direkt an das Netz angeschlossen werden (R, S, T) und infolge der drei Phasen ein magnetisches Drehfeld erzeugt, das mit der Drehzahl $n = 60 \cdot f/p$ rotiert, worin f Frequenz des Drehstromes (meist 50/s) und p die Polpaarzahl ist. Für

$p =$	1	2	3	4	5	Polpaare, ist
$n =$	3000	1500	1000	750	600/min.	

Bringt man in ein solches Drehfeld einen drehbaren Anker (Läufer, Rotor), der eine gleichmäßig verteilte geschlossene Wicklung trägt, so zeigt er beim Stillstand die Eigenschaften eines Transformators, dessen eine Seite geschlossen ist. Im Stromkreis des Schleifringankers müssen also Anlaßwiderstände eingeschaltet werden. Die Induktionslinien des Drehfeldes schneiden die einzelnen Leiter der Ankerwicklung und induzieren in ihnen Spannungen, die Ströme zur Folge haben. Diese Ströme bilden zusammen mit dem sie erzeugenden Drehfeld ein Drehmoment, das den Anker in Richtung des Drehfeldes in Bewegung setzt. Der Anker beschleunigt sich und ist bestrebt die Geschwindigkeit des Drehfeldes zu erreichen. Da jedoch bei synchronem Lauf des Ankers kein Schneiden der Leiter durch das Drehfeld und mithin keine Induktion mehr stattfindet, muß der Anker asynchron laufen und gegen die Drehzahl des Feldes etwas zurückbleiben (Schlupf). Bei sehr kleinen Motoren ist der Anker kurz geschlossen (Kurzschlußmotor). Die Umkehr der Drehrichtung kann erreicht werden durch Vertauschen zweier Statoranschlüsse.

Die Charakteristik des Drehstrommotors ist in Abb. 66.7 dargestellt. Die Anlaßwiderstände werden bei der Inbetriebsetzung sprunghaft ausgeschaltet, so daß das Drehmoment von der Bedienung des Anlagers abhängt. Die Konstruktion des Anfahrweges und der Anfahrzeit bleibt aber immer möglich, sobald eine bestimmte Bedienung des Anlagers angenommen wird.

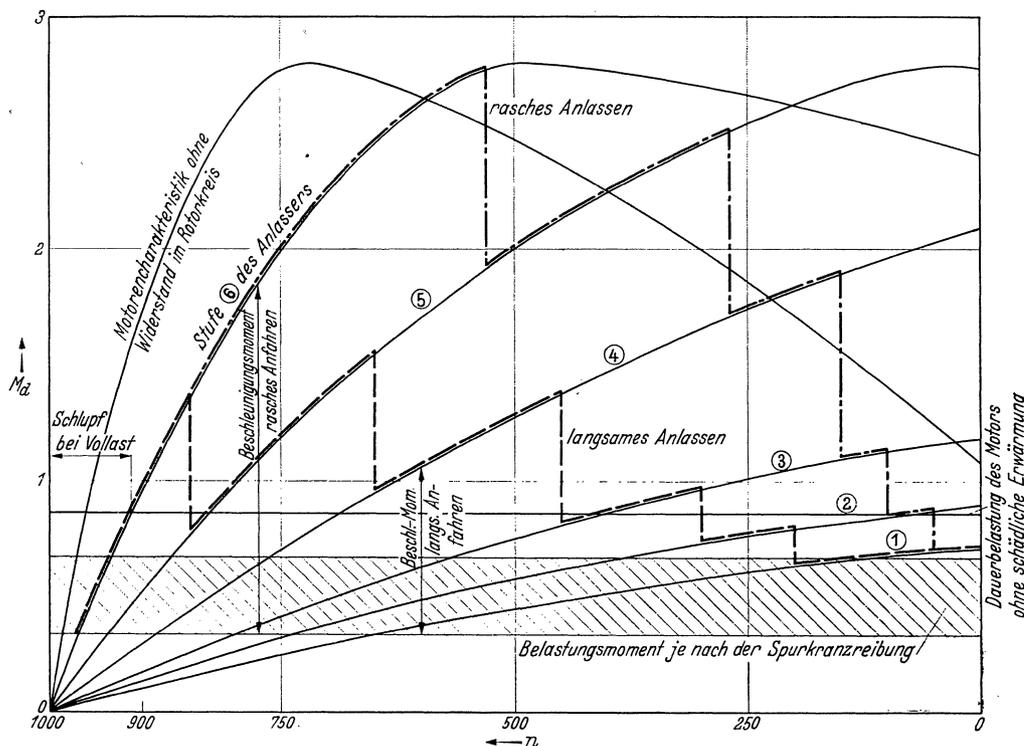


Abb. 66.7. Charakteristik eines asynchronen Drehstrommotors beim Anlassen.

In solchen Fällen ist es für den Konstrukteur zweckmäßiger anzunehmen, daß während der Anfahrzeit ein konstantes Drehmoment (eine konstante Beschleunigung b) wirkt. Aus $b = dv/dt$ folgt dann $b = v_b/t_a$, worin v_b die Geschwindigkeit im Beharrungszustand und t_a die Anfahrzeit ist. Die Geschwindigkeit während der Anfahrzeit nimmt dann geradlinig zu (Abb. 66.8). Da die Geschwindigkeit im Beharrungszustand v_b gegeben ist, so braucht nur die Anfahrzeit t_a gewählt zu werden, um die Beschleunigung zu kennen.

Die wirklich auftretende größte Beschleunigung darf nicht größer als die so berechnete sein. Da in Wirklichkeit die Beschleunigung niemals während der ganzen Anfahrzeit konstant bleibt, so muß (wie aus Abb. 66.8 folgt) t_a kleiner als die wirkliche Anfahrzeit t'_a gewählt werden. In allen wichtigen Fällen sollte der Konstrukteur sich aber davon überzeugen, daß — bei sachgemäßer Bedienung des Anlagers — keine größere Beschleunigung als v_b/t_a auftritt.

Anwendungsbeispiel 66.1. Die Anfahrzeit und der Anfahrweg der in Abb. 66.9/10 skizzierten Laufkatze ist zu berechnen, wenn die Fahrgeschwindigkeit im Beharrungszustand 200 m/min beträgt.

Zuerst ist der Fahrwiderstand zu berechnen. Er setzt sich zusammen aus dem Zapfenreibmoment $\mu_z P \cdot r$ (P = Radbelastung, r = Zapfenradius), aus dem Moment der rollenden Reibung $P \cdot f$ und aus dem Moment der Spurranzreibung, für welches man erfahrungsgemäß bei ruhigem Lauf 25 % des Zapfenreibmoments (als Gleitlager) rechnen kann und das bei pendelnder Last auch dreimal so groß werden kann.

Der auf den Umfang des Laufrades (mit dem Radius R) bezogene Fahrwiderstand W ist also

$$W = \frac{P}{R} [\mu_z \cdot r + f + (0,25 \text{ bis } 0,75) \mu' r] \text{ kg.}$$

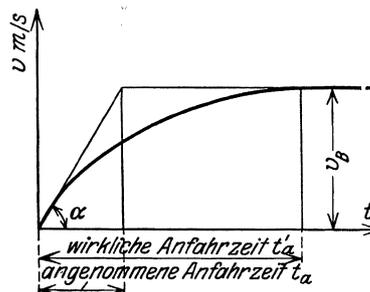


Abb. 66.8.

Bei der Laufkatze tragen die vier Laufräder von 450 mm Durchmesser und 60 mm Zapfendurchmesser zusammen 13,8 t, während die beiden kleinen Schleppräder von 180 mm Durchmesser und ebenfalls 60 mm Zapfendurchmesser zusammen mit 2 t belastet sind. Alle Laufräder sind mit Wälzlagern ausgerüstet. Setzt man $\mu_z = 0,003$, $f = 0,065$ cm und $\mu' = 0,11$, so ist der Fahrwiderstand W_1 der vier Haupträder bei ruhigem Lauf:

$$W_1 = \frac{13800}{22,5} (0,003 \cdot 3 + 0,065 + 0,25 \cdot 0,11 \cdot 3) = 96 \text{ kg}$$

und für die kleinen Schleppräder:

$$W_2 = \frac{2000}{9} (0,03 \cdot 3 + 0,065 + 0,25 \cdot 0,11 \cdot 3) = 34 \text{ kg}$$

zusammen also 130 kg oder $130/15,8 = 8,3$ kg/t Laufkatzenge wicht.

Der Motor ist also im Beharrungszustand bei ruhigem Lauf der Katze mit

$$N = \frac{130 \cdot 200}{60 \cdot 75 \cdot 0,85} = 7 \text{ PS}$$

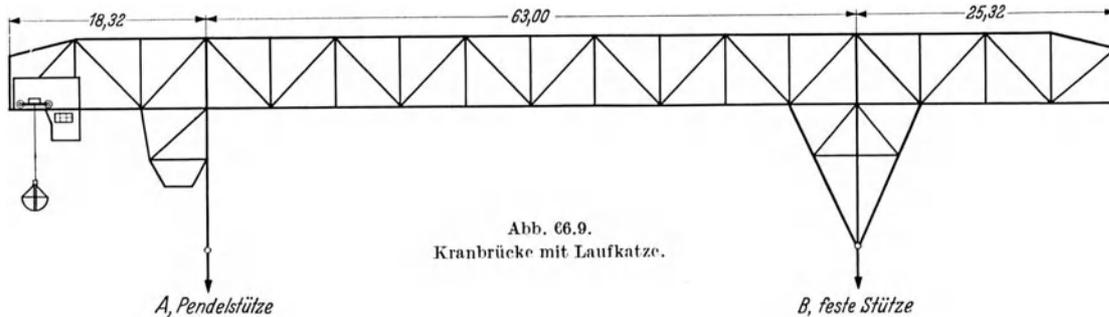


Abb. 66.9.
Kranbrücke mit Laufkatze.

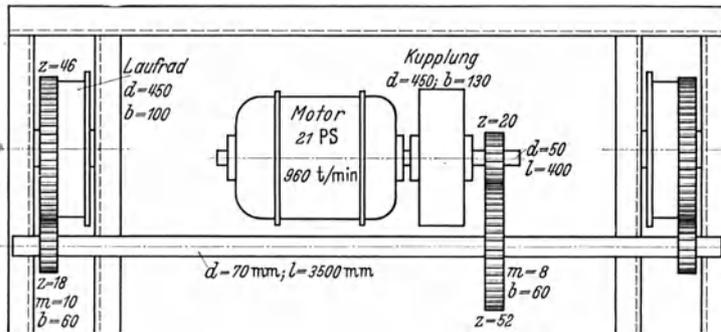


Abb. 66.10. Fahrwerk der Laufkatze.

belastet; bei pendelnder Last ist die Motorbelastung doppelt so groß, also 14 PS. Die Katze wird durch einen Motor mit 21 PS Stundenleistung angetrieben.

Die reduzierten Massen der Einzelteile des Antriebes sind:

1. Rotor des Motors,

$$GD^2 = 2,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 4 \text{ g} \cdot \text{m}',$$

also

$$m' = \frac{25000}{4 \cdot 98,1} = 6,38 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}.$$

2. Die Kupplung von 450 mm Durchmesser und 130 mm Breite, die gleichzeitig als Bremscheibe dient, $G = 66 \text{ kg}$, $m' = 16,5 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$.

3. Das Motorritzel $D = 160$, $b = 60 \text{ mm}$, $G = 9,45 \text{ kg}$, $m' = 0,31$.

4. Die verlängerte Motorwelle $d = 50$, $l = 400 \text{ mm}$, $G = 6,17 \text{ kg}$, $m' = 0,020 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$.

5. Das Zahnrad mit 52 Zähnen, $D = 52 \times 8 = 416 \text{ mm}$, $b = 60 \text{ mm}$, hat ein Gewicht von 64,5 kg, $m' = 14,30 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$.

6. Für die beiden Laufradritzel $D = 180$, $b = 60 \text{ mm}$ ist $G = 2 \times 12 \text{ kg}$ und $m' = 1 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$.

7. Die Antriebswelle $d = 70$, $l = 3500 \text{ mm}$, $G = 106 \text{ kg}$, $m' = 1,13$.

8. Die beiden Laufräder mit Zahnkranz wiegen zusammen $2 \cdot 200 = 400 \text{ kg}$,

$$m' = 103,4 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}.$$

9. Die beiden Laufräder ohne Zahnkranz je 125 kg, $m' = 64 \cdot 4 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$.

10. Die Last samt Katze, $G = 15800 \text{ kg}$, $m' = 16,1 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$.

Die reduzierte Masse des ganzen Triebwerkes ist in Zahlentafel 66.1 berechnet.

Der Verlauf der Motordrehmomente beim Anlassen hängt hauptsächlich von der Bedienung des Anlassers ab. Der in Abb. 66.7 gezeichnete Verlauf für langsames und rasches Schalten des Anlassers ist im Verhältnis zum Nenn Drehmoment (d. i. das aus der Nennleistung berechnete Moment) aufgetragen. Die Kurven sind also unabhängig von der Motorgröße. Im vorliegenden

Fall ist das Nenndrehmoment

$$71\,620 \cdot 21/960 = 1550 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

Je nach der Größe der Spurkranzreibung ist die Belastung des Motors $1/3$ bis $2/3$ der Nennleistung (7 bis 14 PS). Die Anfahrzeit kann sowohl wegen der willkürlichen Bedienung des Anlassers als auch wegen der Unsicherheit der Fahrwiderstände niemals genau berechnet werden. Deshalb darf die Rechnung noch etwas weiter vereinfacht werden, indem beim Anfahren mit einem konstanten, mittleren Anfahrmoment gerechnet wird, das beim raschen Einschalten (Abb. 66.7) gleich 1,7 und beim langsamen Schalten gleich 1,05mal dem Nenndrehmoment, also 2600 resp. 1600 cm · kg ist. Rechnen wir mit einem „mittleren“ Fahrwiderstand von 770 cm · kg, so ist das Beschleunigungsmoment

$$M_b = 1830 \quad \text{resp.} \quad 830 \text{ cm} \cdot \text{kg},$$

die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi} = M_b / \Sigma m'$

$$7,8 \qquad \qquad \qquad 3,5 \quad 1/\text{s}^2$$

die Anfahrzeit $t_a = \omega_0 / \ddot{\varphi}$ mit $\omega_0 = \pi \cdot 960/30 = 100/\text{s}$

$$12,8 \qquad \qquad \qquad 28,5 \text{ Sekunden}$$

und der Anfahrweg $s = 1/2 b \cdot t_a^2 = 1/2 v_0 t_a$ mit $v_0 = 200/60 = 3,33 \text{ m/s}$

$$21,5 \qquad \qquad \qquad 47,5 \text{ m.}$$

Der Anfahrweg ist also relativ groß, obschon nur der mittlere Fahrwiderstand in Rechnung gesetzt wurde. Da beim Anlaufen der aufgenommene Strom und damit die Erwärmung größer ist als der Motor dauernd ohne schädliche Temperaturerhöhung ertragen kann (Abb. 66.7), darf die Laufkatze nicht unterbrochen so kleine Wege durchlaufen.

Zahlentafel 66.1.
Berechnung der reduzierten Masse der Laufkatze.

Teil	m' kg · s ² /cm	η	i	m' kg · s ² /cm
1	6,38	0,98	1	6,5
2	16,5	0,98	1	16,8
3	0,31	0,98	1	0,3
4	0,02	0,98	1	0,02
5	14,3	$0,98 \cdot 0,95 = 0,93$	$20/52$	2,3
6	1	0,93	$20/52$	0,16
7	1,13	0,93	$20/52$	0,18
8	103,4	$0,93 \cdot 0,96 = 0,89$	$20/2 \cdot 18/46 = 3/20$	2,6
9	64,4	0,89	$3/20$	1,6
10	16,1	0,89	$3/20 \cdot 22,5$	205
				$\Sigma = 235,5 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$

7. Zahnräder.

71. Stirnräder für parallele Wellen.

Schrifttum.

Schiebel, A.: Zahnräder, Bd. I u. II, 3. Aufl. Einzelkonstruktionen aus dem Maschinenbau, Heft 3 u. 5. Berlin: Julius Springer 1930/34. — Kutzbach, K.: Zahnräderzeugung. VDI-Verlag 1925. — Krüger, P. Die Satzrädernsysteme der Evolventenverzahnung. Berlin: Julius Springer 1926. — Friedrich, H.: Evolventenverzahnung. Berlin: Julius Springer 1928. — Buckingham-Olah: Stirnräder mit geraden Zähnen. Berlin: Julius Springer 1932. — Perignon, J.: Theorie et Technologie des Engrenages. Paris: Dunod 1932/36, 3 Bde. — Herrmann, R.: Evolventen-Stirnrädergetriebe. Berlin: Julius Springer 1929.

71.1. Das allgemeine Verzahnungsgesetz.

Die Drehbewegung einer Welle M_1 soll durch Zähne so auf eine zweite Welle M_2 übertragen werden, daß das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten ω_1/ω_2 konstant bleibt. In Abb. 71.1 ist A der Berührungspunkt beider Zähne. Die Geschwindigkeit, mit der sich der zum Zahn 1 gehörende Punkt A bewegt, $u_1 = \omega_1 r_1$, steht senkrecht zu Am ; diejenige, mit der sich der zum Zahn 2 gehörende Punkt A bewegt, $u_2 = \omega_2 R_2$, steht senkrecht zu AM . Beide Geschwindigkeiten werden in zwei Komponenten zerlegt, und zwar in Richtung der gemeinsamen Profilmormalen (c_1 und c_2) und senkrecht dazu (v_1 und v_2).

Da sich beide Zähne in A berühren,

muß $c_1 = c_2$ sein, denn wäre $c_2 > c_1$, so müßte sofort eine Trennung der Zähne eintreten, die unmöglich ist, weil Zahn 2 seine Bewegung von Zahn 1 empfängt. Wäre $c_2 < c_1$, so müßte Zahn 1 in Zahn 2 eindringen, was ebenfalls unmöglich ist, solange die Werkstoffe genügend fest sind, was hier vorausgesetzt ist.

Aus $c_1 = c_2$ folgt (Abb. 71.1):

$$u_1 \cos \alpha = u_2 \cos \beta$$

oder
$$\omega_1 r_1 \frac{r_2}{r_1} = \omega_2 R_2 \frac{R_2}{R_1}$$

und
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{r_2} = \frac{R}{r} = \text{konstant.} \quad (71.1)$$

Das gilt für jeden beliebigen Berührungspunkt A der beiden Zähne, und da vorausgesetzt wurde, daß $\omega_1/\omega_2 = \text{konstant}$ ist, muß auch R/r konstant sein. Das ist das allgemeine Verzahnungsgesetz: Die gemeinschaftliche Normale im jeweiligen Berührungspunkt zweier Zahnprofile geht immer durch einen und denselben Punkt der Verbindungslinie der Drehpunkte. Diesen Punkt O nennt man den Wälzpunkt. Die Kreise, die aus den Mittelpunkten m

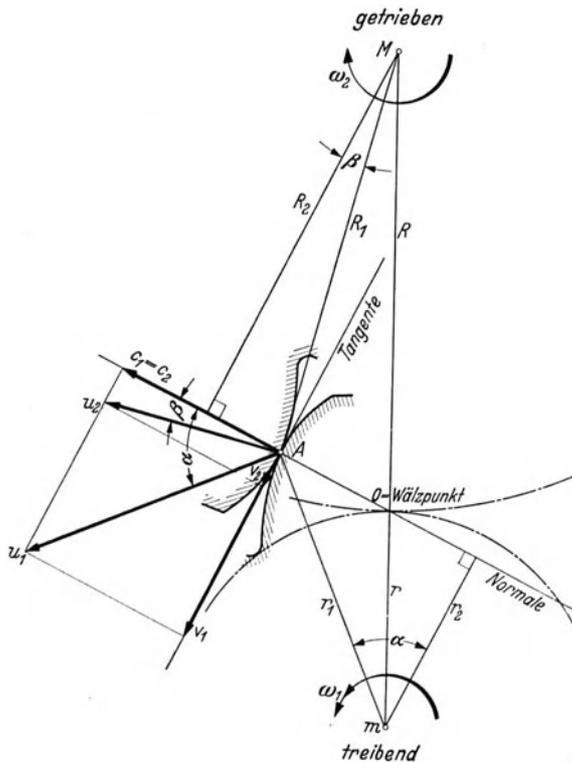


Abb. 71.1. Zur Ableitung des allgemeinen Verzahnungsgesetzes.

und M durch O gezogen werden, sind also in der Größe unveränderlich; man nennt sie Wälzkreise.

Aus Abb. 71.1 folgt weiter die wichtige Schlußfolgerung, daß die tangentialen Komponenten der Geschwindigkeiten u_1 und u_2 im allgemeinen verschieden groß sind, so daß die Zahnflanken mit einer Geschwindigkeit $v_g = v_2 - v_1$ aufeinander gleiten; nur im Wälzpunkt O ist $v_g = 0$.

Das allgemeine Verzahnungsgesetz gestattet, zu einem gegebenen Profil aOb (Abb. 71.2)

das zugehörige Profil des zweiten Zahnes zu konstruieren, wenn die beiden Wälzkreise gegeben sind. Es ist gebräuchlich, die Räder so zu zeichnen, daß die Zahnflanken sich im Wälzpunkt berühren. Man ziehe die Profilnormale, z. B. aI , wobei I der Schnittpunkt mit dem eigenen Wälzkreis ist. Die Normale gelangt in die Eingriffstellung, wenn sie durch den Wälzpunkt O geht. Da nur eine Drehung um m_1 möglich ist, dreht man die Normale so weit, bis der Punkt I mit O zusammenfällt. Der Punkt a wandert dabei nach I , und da die Länge der Normale unverändert bleibt, ist $aI = IO$. Nur in diesem Punkt I , dem Eingriffspunkt, kann der Zahnpunkt a in Berührung mit dem zweiten Rade stehen. Auf diese Weise kann Punkt für Punkt die Eingriffslinie $IOII$ aus der Zahnflanke gefunden werden¹.

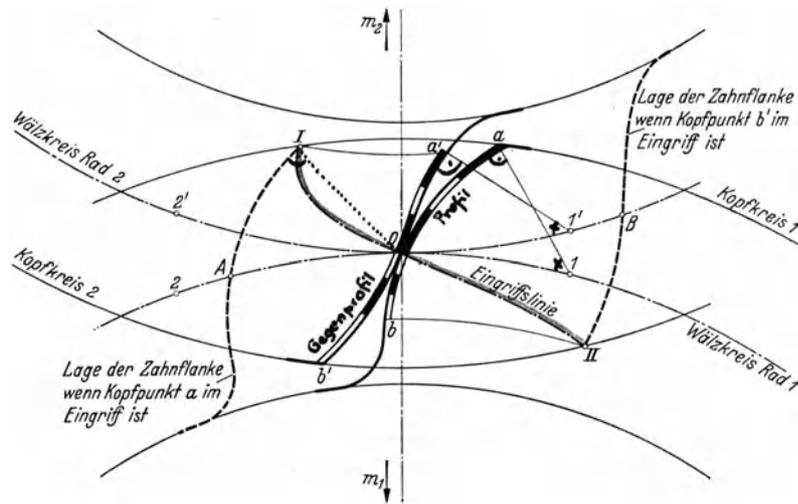


Abb. 71.2. Aus dem Ausgangsprofil aob wird die Eingriffslinie $IOII$ und daraus das Gegenprofil $a'o'b'$ konstruiert. $\cdot AOB =$ Eingriffsbogen.

Die Profilnormale mußte im Wälzkreis um den Betrag OI gedreht werden, damit sie in die Eingriffstellung gelangte. Da die Geschwindigkeiten der beiden Räder im Wälzkreis gleich sind, dreht man das Rad 2 um den gleichen Betrag $OI' = OI$ zurück. Der Punkt I bewegt sich dabei auf einem Kreis um m_2 nach a' , so daß $Ia = I'a'$. Die Linie $a'I'$ steht senkrecht zur Zahnflanke $2'$.

Dr. E. Schneckenberg gibt in der Z. M. M. Bd. 11 (1931) ein „Schnellverfahren“, wobei die oft unbequemen Kreise mit den Radmittelpunkten vermieden werden, da nur die Verschiebungen des Dreieckes (Abb. 71.3) OaI nach b und von $Ib'O$ nach $a'OI'$ zu konstruieren sind.

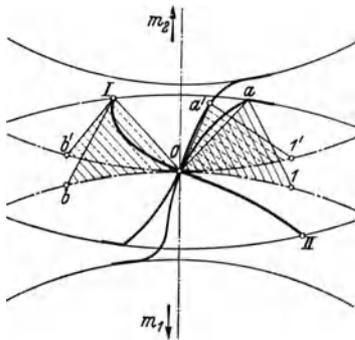


Abb. 71.3. Konstruktion der Zahnflanken nach Schneckenberg. $ob = ob'$.

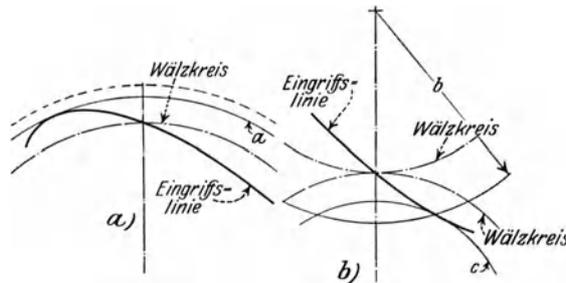


Abb. 71.4. Grenzbedingung für den Eingriff (aus Buckingham-Olah.)

Aus der Bedingung, daß die Profilnormale den eigenen Wälzkreis schneiden muß, folgt, daß die Eingriffslinie begrenzt ist, und zwar durch den Kreis (um den Radmittelpunkt) der die Eingriffslinie von außen (Abb. 71.4a) oder von innen (Abb. 71.4b) berührt.

Die Voraussetzung $\omega_1/\omega_2 = \text{Konstant}$, gilt nicht nur für zwei Zahnflanken, sondern für das ganze Rad, d. h. ein Flankenpaar darf nicht außer Eingriff kommen, bevor das folgende, zweite Paar in Eingriff steht und die Drehbewegung ohne Unterbrechung weiter führt. Der Eingriff zweier Zahnflanken (Abb. 71.2) erfolgt im Wälzkreisbogen AOB (Eingriffsbogen genannt) und

¹ An Stelle der Profilnormalen kann auch das Zahnprofil gedreht werden. Aus dem feststehenden Wälzpunkt O wird die Normale auf das gedrehte Profil gezogen; der Schnittpunkt ist Eingriffspunkt.

² Dieses zuerst von Reuleaux angegebene Verfahren hat Poncelet vereinfacht: Man mache $OI = OI'$ und beschreibe mit der Normalen aI im Zirkel einen Kreisbogen aus I' . Die Zahnkurve entsteht dann als Umhüllende der Kreisbögen.

Altmann, F. G.: Zeichnerische Ermittlung von Zahnflanken zu einer gegebenen Eingriffslinie. Z. VDI 82 (1938), S. 165/68.

dieser muß größer sein als die Entfernung zweier Zahnprofile, ebenfalls im Wälzkreis gemessen und Teilung genannt. Deshalb heißen die Wälzkreise auch oft Teilkreise. Das Verhältnis $\frac{\text{Eingriffsbogen } AOB}{\text{Teilung} = t} = \varepsilon$ nennt man Überdeckung und muß größer als 1 sein. Für beide Räder müssen die Teilungen natürlich gleich groß sein. Die Zahndicke s (Abb. 71.5) und die Lückenweite w sind im Teilkreis gemessen, gleich, nämlich:

$$s = w = \frac{t}{2},$$

so daß kein Flankenspiel vorhanden ist.

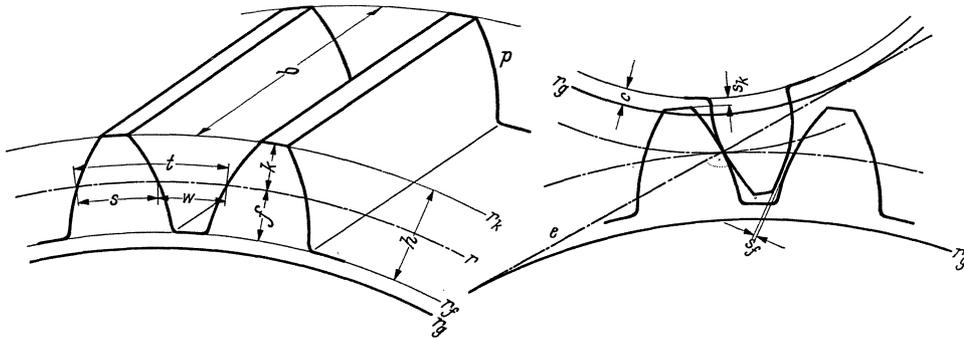


Abb. 71.5. Benennung der Zahnteile.

b Zahnbreite, e Eingriffslinie, f Fußtiefe, h Zahnhöhe, k Kopfhöhe, p Zahnprofil, s Zahnstärke, s_k Kopfspiel, s_f Flankenspiel, i Teilung, w Zahnücke, r Wälzkreis, r_g Grundkreis, r_f Fußkreis, r_k Kopfkreis.

Sind z und Z die Zähnezahlen und d und D die Wälzkreisdurchmesser der Räder, so ist der Umfang des ersten Wälzkreises $\pi d = zt$ und der Umfang des zweiten $\pi D = Zt$. Daraus folgt $d/D = z/Z$, d. h. die Durchmesser verhalten sich wie die Zähnezahlen.

Aus praktischen Gründen (vgl. Abschn. 71.3) macht man die Teilung:

$$t = \pi m \quad (71.2)$$

und nennt m (immer in mm gemessen) den Modul, so daß

$$\pi d = zt = z\pi m$$

oder

$$d = zm \quad (71.3)^1$$

ist, d. h. Teilkreisdurchmesser ist gleich Zähnezahl mal Modul.

Da die Kopfhöhe k des Zahnes meist gleich m gemacht wird, ist der Außendurchmesser

$$d_a = (z + 2) m. \quad (71.4)$$

Der Fußkreisdurchmesser ist, unter Voraussetzung eines normalen Kopfspieles von $\frac{1}{6} m$,

$$d_f = (z - \frac{2}{3}) m. \quad (71.5)$$

und der Achsabstand bei spielfreiem Eingriff:

$$a = (z + Z) \frac{m}{2}. \quad (71.6)$$

Die Umfangsgeschwindigkeiten beider Räder, im Wälzkreis gemessen, $u = \omega_1 r = \omega_2 R$ sind gleich groß. Mit $\omega = \pi n/30$ folgt daraus:

$$n_1 r = n_2 R \quad \text{oder} \quad n_1 z = n_2 Z \quad (71.7)$$

Die Drehzahlen verhalten sich umgekehrt wie die Radien und die Zähnezahlen.

Für die Berechnung des Übersetzungsverhältnisses ist es vorteilhaft, diesen Zusammenhang zwischen Drehzahl und Zähnezahl in folgender Form dem Gedächtnis einzuprägen: Das Produkt $n \cdot z$ bleibt für ineinandergreifende Räder unverändert.

¹ Im englischen Maßsystem nennt man $\frac{z}{d}$ (in Zoll) = diametral pitch.

Bei der Anordnung nach Abb. 71.1 haben beide Räder entgegengesetzte Drehrichtungen. Sollen beide Wellen im gleichen Sinne laufen, so wählt man Innenverzahnung (Abb. 71.6a). Das kann man aber auch, wie Abb. 71.6b zeigt, durch Einschalten eines Zwischenrades erreichen. Das Übersetzungsverhältnis wird dadurch gar nicht beeinflusst, da die Umfangsgeschwindigkeiten der Räder 1, 2 und 3 gleich sind.

Aus der Konstruktion der Zahnflanken (Abb. 71.2) folgt, daß

1. die Zahnköpfe des Rades 1 mit den Fußflanken des Gegenrades 2 zusammenarbeiten,
2. der Eingriff beginnt, wenn die Fußflanke des treibenden Rades die Kopfflanke des getriebenen erfaßt,
3. die Eingriffslinie durch eine Flanke bestimmt ist, und zur Konstruktion der zweiten Zahnflanke ausreicht, wenn die Wälzradien der Räder gegeben sind. Die Zahnprofile sind demnach für verschiedene Zähnezahlen verschieden.

Da die Wahl des einen Profils vollständig frei steht, kann man eines wählen, das leicht herzustellen ist. Bei der Triebstockverzahnung sind die Zähne des einen Rades zylindrische Bolzen (Abb. 71.7). Solche Zahnräder werden bei Drehkränen für die langsame Schwenkbewegung verwendet oder auch als Zahnstangen bei Schleusen-zügen. Das Grissongetriebe (Abb. 71.8), eine Triebstockverzahnung für große Übersetzungen, hat durch die Entwicklung der Zahnäder mit gefrästen Zähnen an Bedeutung verloren.

In der Praxis wird oft gewünscht, Räder mit verschiedenen Zähnezahlen beliebig miteinander in richtigen Eingriff zu bringen (z. B. bei Werkzeugmaschinen, Abb. 73.8). Solche Räder nennt man Satzräder. Aus der Konstruktion des Profils folgt, daß dies nur dann erreichbar ist, wenn die Zahnflanken sich deckende Eingriffslinien haben. Diese Bedingung ist aber noch nicht ausreichend, denn denken wir uns Rad 2 in die Lage von 1 gebracht, so dreht sich die Eingriffslinie um 180° . Soll nun die Eingriffslinie dieses Rades mit der des Rades 1 übereinstimmen, so muß sie noch zentrisch symmetrisch in bezug auf den Wälzpunkt O sein. Dadurch erhält die Eingriffslinie erhöhte praktische Bedeutung, denn wir werden nur einfache Formen der Eingriffslinie wählen, z. B. eine Gerade (Evolventenverzahnung) oder zwei Kreisbogen (Zykloidenverzahnung).

Die Frage, ob Evolventen- oder Zykloidenverzahnung vorzuziehen ist, wurde früher in der technischen Literatur vielfach erörtert und aus theoretischen Gründen meist zugunsten der Zykloidenverzahnung entschieden. Die Praxis verwendet aber ausschließlich Evolventenverzahnung.

71.2. Evolventenverzahnung.

Eigenschaften der Evolvente. Die Kreisevolvente wird durch einen Punkt O einer Geraden G erzeugt, die auf einem festen Kreis (Grundkreis) abrollt; sie kann punktweise konstruiert werden, indem der Wälzbogen $(\alpha + \varphi) r_g$ (Abb. 71.9) gleich der Tangente $r_g \operatorname{tg} \alpha$ gemacht wird. Daraus folgt:

$$\varphi = \operatorname{tg} \alpha - \alpha \quad (71.8)$$

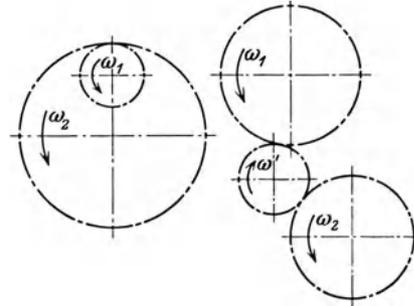


Abb. 71.6. Rädertrieb für gleiche Drehrichtungen
a Innenverzahnung, b mit Zwischenrad.

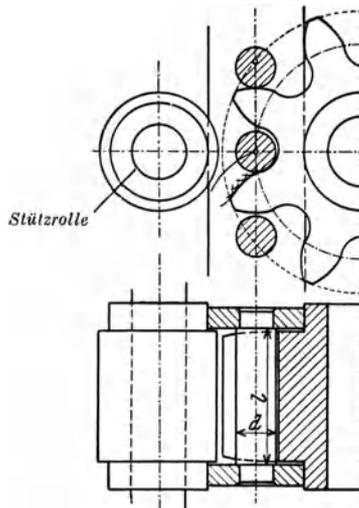


Abb. 71.7. Triebstockverzahnung.
(Aus Dubbel, Taschenbuch.)

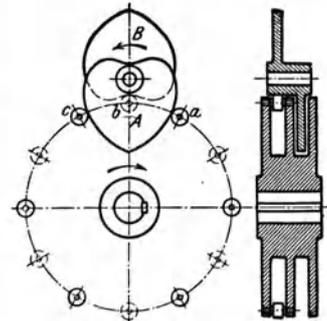


Abb. 71.8. Grissongetriebe. (Aus
Dubbel, Taschenbuch.)

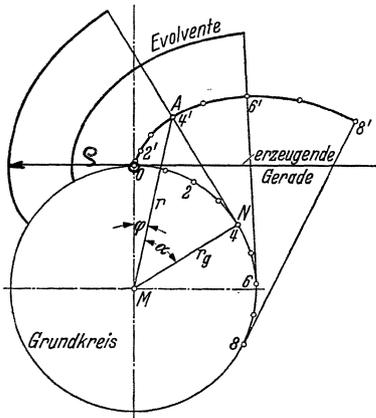


Abb. 71.9. Entstehung der Evolvente
 $\overline{ON} = NA$ oder $(\alpha + \varphi) r_g = r_g \operatorname{tg} \alpha$
 $MA = r = r_g / \cos \alpha$
 $AN = \text{Krümmungsradius.}$

Für $\alpha = 15$ bis 30° sind die φ -Werte in Zahlentafel 71.1 zusammengestellt. Aus der Abbildung folgt weiter:

$$r = r_g / \cos \alpha \quad (71.9)$$

Durch die Gl. (8) und Gl. (9) ist die Evolvente in Polarkoordinaten eindeutig bestimmt; φ wird Polarwinkel, α Pressungswinkel genannt. Beim Abrollen der erzeugenden Geraden ist der jeweilige Berührungspunkt mit dem Grundkreis Momentanzentrum der Bewegung; diese Gerade steht demnach senkrecht zur Evolvente und ist Profilnormale. Der Krümmungsradius in irgendeinem Punkte A der Evolvente ist gleich der Entfernung AN ; er nimmt von O an stetig zu.

Zu jedem Grundkreis gehört nur eine einzige Evolvente, denn alle Evolventen, die durch die einzelnen Punkte der erzeugenden Geraden beim Abrollen entstehen, lassen sich durch Drehung vollständig zur Deckung bringen.

Im Berührungspunkt A zweier Evolventen (Abb. 71.10) mit der gemeinsamen Tangente, fallen die beiden Erzeugenden (die stets senkrecht zur Tangente stehen) zusammen.

Der Eingriffspunkt zweier Evolventen liegt demnach auf der gemeinsamen Tangente Nn der beiden Grundkreise, d. h. die erzeugende Gerade ist gleichzeitig auch Eingriffslinie. Aus der Abbildung folgt weiter für das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten nach Gl. (71.1):

$$\omega_2 / \omega_1 = r / R = r_g / R_g = i = n_2 / n_1 \quad (71.10)$$

ist. Bei Evolventenverzahnung ist das Drehzahlverhältnis durch das Verhältnis der Grundkreisradien eindeutig bestimmt, unabhängig vom (zufälligen) Berührungspunkt A .

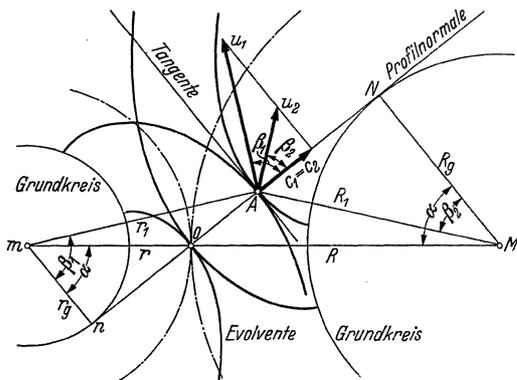


Abb. 71.10. Bei der Evolventenverzahnung ist die Profilnormale = Gemeinsame Tangente an den Grundkreisen = Eingriffslinie. $\alpha =$ Eingriffswinkel.

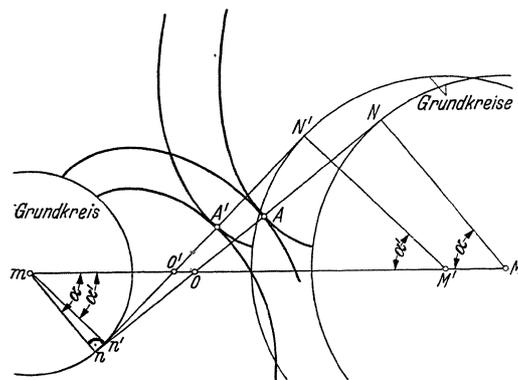


Abb. 71.11. Die Evolventenverzahnung hat keine eindeutig festgelegte Wälzkreise.
 Für die Wälzkreise $Om = r$ und $OM = R$, Eingriffswinkel α
 „ „ „ $O'm = r'$ „ $O'M = R'$ „ „ α' .

Nach dem allgemeinen Verzahnungsgesetz kann zu einem gegebenen Profil das zugehörige Gegenprofil nur dann konstruiert werden, wenn auch die Wälzkreise gegeben sind. Bei Evolventenverzahnung sind die beiden Profile durch die Grundkreise eindeutig bestimmt; man kann nur dann von Wälzkreisen reden, wenn sie in Eingriff gebracht werden. Das ist eine Eigenschaft der Evolvente, durch die sie sich von allen anderen Zahnkurven unterscheidet. Verschiebt man das zweite Rad etwas, bringt also den Mittelpunkt M nach M' (Abb. 71.11), so kommt ein anderer Punkt A' der ersten Evolvente in Eingriff. Dabei ändert sich die Lage der Eingriffslinie als gemeinsame Tangente der beiden Grundkreise und auch die Wälzkreisradien r, R in r', R' , aber weder der richtige Eingriff noch das Übersetzungsverhältnis wird dadurch beeinflusst. Es ist deshalb sicher recht unzuweckmäßig, die willkürlichen oder zufälligen Wälzkreise als Teilkreise zu verwenden, weil dann die Teilung zweier Zahnräder sich mit der Änderung der gegenseitigen Lage ändern würde!

Zahlentafel 71.1. Werte der Evolventenfunktion¹ $\varphi = \operatorname{tg} \alpha - \alpha$.

Minuten	15°	16°	17°	18°	19°	20°	21°	22°
0	0,00614 98	0,00749 3	0,00902 5	0,01076 0	0,01271 5	0,01490 4	0,01734 5	0,02005 4
1	7 07	51 7	05 2	79 1	75 0	94 3	38 8	10 1
2	9 17	54 1	07 9	82 2	78 4	98 2	43 1	14 9
3	0,00621 27	56 5	10 7	85 3	81 9	0,01502 0	47 4	19 7
4	3 37	58 9	13 4	88 4	85 4	05 9	51 7	24 4
5	5 48	61 3	16 1	91 5	88 8	09 8	56 0	29 2
6	7 60	63 7	18 9	94 6	92 3	13 7	60 3	34 0
7	9 72	66 1	21 6	97 7	95 8	17 6	64 7	38 8
8	0,00631 84	68 6	24 4	0,01100 8	99 3	21 5	69 0	43 6
9	3 97	71 0	27 2	03 9	0,01302 8	25 4	73 4	48 4
10	6 11	73 5	29 9	07 1	06 3	29 3	77 7	53 3
11	0,00638 25	0,00775 9	0,00932 7	0,01110 2	0,01309 8	0,01533 3	0,01782 1	0,02058 1
12	0,00640 39	78 4	35 5	13 3	13 4	37 2	86 5	62 9
13	2 54	80 8	38 3	16 5	16 9	41 1	90 8	67 8
14	4 70	83 3	41 1	19 6	20 4	45 1	95 2	72 6
15	6 86	85 7	43 9	22 8	24 0	49 0	99 6	77 5
16	9 02	88 2	46 7	26 0	27 5	53 0	0,01804 0	82 4
17	0,00651 19	90 7	49 5	29 1	31 1	57 0	08 4	87 3
18	3 37	93 2	52 3	32 3	34 6	60 9	12 9	92 1
19	5 55	95 7	55 2	35 5	38 2	64 9	17 3	97 0
20	7 73	98 2	58 0	38 7	41 8	68 9	21 7	0,02101 9
21	0,00659 92	0,00800 7	0,00960 8	0,01141 9	0,01345 4	0,01572 9	0,01826 2	0,02106 9
22	0,00662 11	03 2	63 7	45 1	49 0	76 9	30 6	11 8
23	4 31	05 7	66 5	48 3	52 6	80 9	35 1	16 7
24	6 52	08 2	69 4	51 5	56 2	85 0	39 5	21 7
25	8 73	10 7	72 2	54 7	59 8	89 0	44 0	26 6
26	0,00670 94	13 3	75 1	58 0	63 4	93 0	48 5	31 6
27	3 16	15 8	78 0	61 2	67 1	97 1	53 0	36 5
28	5 39	18 3	80 8	64 4	70 7	0,01601 1	57 5	41 5
29	7 62	20 9	83 7	67 7	74 3	05 2	62 0	46 5
30	9 85	23 4	86 6	70 9	77 9	09 2	66 5	51 4
31	0,00682 09	0,00826 0	0,00989 5	0,01174 2	0,01381 6	0,01613 3	0,01871 0	0,02156 4
32	4 34	28 5	92 4	77 5	85 2	17 4	75 5	61 4
33	6 59	31 1	95 3	80 7	88 9	21 5	80 0	66 5
34	8 84	33 7	98 2	84 0	92 6	25 5	84 6	71 5
35	0,00691 10	36 2	0,01001 2	87 3	96 3	29 6	89 1	76 5
36	3 37	38 8	04 1	90 6	99 9	33 7	93 7	81 5
37	5 64	41 4	07 0	93 9	0,01403 6	37 9	98 3	86 6
38	7 91	44 0	09 9	97 2	07 3	42 0	0,01902 8	91 6
39	0,00700 19	46 6	12 6	0,01200 5	11 0	46 1	07 4	96 7
40	2 48	49 2	15 8	03 8	14 8	50 2	12 0	0,02201 8
41	0,00704 77	0,00851 8	0,01018 8	0,01207 1	0,01418 5	0,01654 4	0,01916 6	0,02206 8
42	7 06	54 4	21 7	10 5	22 2	58 5	21 2	11 9
43	9 36	57 1	24 7	13 8	25 9	62 7	25 8	17 0
44	0,00711 67	59 7	27 7	17 2	29 7	66 9	30 4	22 1
45	3 98	62 3	30 7	20 5	33 4	71 0	35 0	27 2
46	2 30	65 0	33 6	23 9	37 2	75 2	39 7	32 4
47	8 62	67 7	36 6	27 2	40 9	79 4	44 3	37 5
48	0,00720 95	70 2	39 6	30 6	44 7	83 6	49 0	42 6
49	3 28	72 9	42 6	34 0	48 5	87 8	53 6	47 8
50	5 61	75 6	45 6	37 3	52 3	92 0	58 3	52 9
51	0,00727 96	0,00878 2	0,01048 6	0,01240 7	0,01456 0	0,01696 2	0,01963 0	0,02258 1
52	0,00730 30	80 9	51 7	44 1	59 8	0,01700 4	67 6	63 3
53	2 66	83 6	54 7	47 5	63 6	04 7	72 3	68 4
54	5 01	86 3	57 7	50 9	67 4	08 9	77 0	73 6
55	7 38	88 9	60 8	54 3	71 3	13 2	81 7	78 8
56	9 75	91 6	63 8	57 8	75 1	17 4	86 4	84 0
57	0,00742 12	94 3	66 9	61 2	78 9	21 7	91 2	89 2
58	4 50	97 0	69 9	64 6	82 7	25 9	95 9	94 4
59	6 88	99 8	73 0	68 1	86 6	30 2	0,02000 7	99 7
60	0,00749 27	0,00902 5	0,01076 0	0,01271 5	0,01490 4	0,01734 5	0,02005 4	0,02304 9

¹ Aus: Buckingham-Olah, Stirnräder. Genauere Zahlenwerte (8 Dezimale) in E. Buckingham: Manual of gear design. Teil I und II (Published by Machinery, 148 Lafayettestreet, New York. 1935).

Zahlentafel 71.1. (Fortsetzung.)
 Werte der Evolventenfunktion $\varphi \alpha = \operatorname{tg} \alpha - \alpha$.

Minuten	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°	30°
0	0,02304 9	0,02635 0	0,02997 5	0,03394 7	0,03828 7	0,04301 7	0,04816 4	0,05375 1
1	10 2	40 7	0,03003 9	0,03401 6	36 2	10 0	25 3	84 9
2	15 4	46 5	10 2	08 6	43 8	18 2	34 3	94 6
3	20 7	52 3	16 6	15 5	51 4	26 4	43 2	0,05404 3
4	25 9	58 1	22 9	22 5	59 0	34 7	52 2	14 0
5	31 2	63 9	29 3	29 4	66 6	43 0	61 2	23 8
6	36 5	69 7	35 7	36 4	74 2	51 3	70 2	33 6
7	41 8	75 6	42 0	43 4	81 8	59 6	79 2	43 4
8	47 1	81 4	48 4	50 4	89 4	67 9	88 3	53 1
9	52 4	87 2	54 9	57 4	97 1	76 2	97 3	62 9
10	57 7	93 1	61 3	64 4	0,03904 7	84 5	0,04906 4	72 8
11	0,02363 1	0,02698 9	0,03067 7	0,03471 4	0,03912 4	0,04392 9	0,04915 4	0,05482 6
12	68 4	0,02704 8	74 1	78 5	20 1	0,04401 2	24 5	92 4
13	73 8	10 7	80 6	85 5	27 8	09 6	33 6	0,05502 3
14	79 1	16 6	87 0	92 6	35 5	18 0	42 7	12 2
15	84 5	22 5	93 5	99 7	43 2	26 4	51 8	22 1
16	89 9	28 4	0,03100 0	0,03506 7	50 9	34 8	60 9	32 0
17	95 2	34 3	06 5	13 8	58 6	43 2	70 1	41 9
18	0,02400 6	40 2	13 0	20 9	66 4	51 6	79 2	51 8
19	06 0	46 2	19 5	28 0	74 1	60 1	88 4	61 7
20	11 4	52 1	26 0	35 2	81 9	68 5	97 6	71 7
21	0,02416 1	0,02758 1	0,03132 5	0,03542 3	0,03989 7	0,04477 0	0,05006 8	0,05581 7
22	22 3	64 0	39 0	49 4	97 4	85 5	16 0	91 6
23	27 7	70 0	45 6	56 6	0,04005 2	93 9	25 2	0,05601 6
24	33 2	76 0	52 1	63 7	13 1	0,04502 4	34 4	11 6
25	38 6	82 0	58 7	70 9	20 9	11 0	43 7	21 7
26	44 1	88 0	65 3	78 1	28 7	19 5	52 9	31 7
27	49 5	94 0	72 8	85 3	36 6	28 0	62 2	41 7
28	55 0	0,02800 0	78 4	92 5	44 4	36 6	71 5	51 8
29	60 5	06 0	85 0	99 7	52 3	45 1	80 8	61 9
30	66 0	12 1	91 7	0,03606 9	60 2	53 7	90 1	72 0
31	0,02471 5	0,02818 1	0,03198 3	0,03614 2	0,04068 0	0,04562 3	0,05099 4	0,05682 1
32	77 0	24 2	0,03204 9	21 4	75 9	70 0	0,05108 7	92 2
33	82 5	30 2	11 6	28 7	83 9	79 5	18 1	0,05702 3
34	88 1	36 3	18 2	35 9	91 8	88 1	27 4	12 4
35	93 6	42 4	24 9	43 2	99 7	96 7	36 8	22 6
36	99 2	48 5	31 5	50 5	0,04107 6	0,04605 4	46 2	32 8
37	0,02504 7	54 6	38 2	57 8	15 6	14 0	55 6	42 9
38	10 3	60 7	44 9	65 1	23 6	22 7	65 0	53 1
39	15 9	66 8	51 6	72 4	31 6	31 3	74 4	63 3
40	21 4	72 9	58 3	79 8	39 5	40 0	83 8	73 6
41	0,02527 0	0,02879 1	0,03265 1	0,03687 1	0,04147 5	0,04648 7	0,05193 3	0,05783 8
42	32 6	85,2	71 8	94 5	55 6	57 5	0,05202 7	94 0
43	38 2	91 4	78 5	0,03701 8	63 6	66 2	12 2	0,05804 3
44	43 9	97 6	85 3	09 2	71 6	74 9	21 7	14 6
45	49 5	0,02903 7	92 0	16 6	79 7	83 7	31 2	24 9
46	55 1	09 9	98 8	24 0	87 7	92 4	40 7	35 2
47	60 8	16 1	0,03305 6	31 4	95 8	0,04701 2	50 2	45 5
48	66 4	22 3	12 4	38 8	0,04203 9	10 0	59 7	55 8
49	72 1	28 5	19 2	46 2	12 0	18 8	69 3	66 2
50	77 7	34 8	26 0	53 7	20 1	27 6	78 8	76 5
51	0,02583 4	0,02941 0	0,03332 8	0,03761 1	0,04228 2	0,04736 4	0,05288 4	0,05886 9
52	89 1	47 2	39 7	68 6	36 3	45 2	98 0	97 3
53	94 8	53 5	46 5	76 1	44 4	54 1	0,05307 6	0,05907 7
54	0,02600 5	59 8	53 4	83 5	52 6	63 0	17 2	18 1
55	06 2	66 0	60 2	91 0	60 7	71 8	26 8	28 5
56	12 0	72 3	67 1	98 5	69 8	80 7	36 5	39 0
57	17 7	78 6	74 0	0,03806 0	77 1	89 6	46 1	49 4
58	23 5	84 9	80 9	13 6	85 3	98 5	55 8	59 9
59	29 2	91 2	87 8	21 1	93 5	0,04807 4	65 5	70 4
60	0,02635 0	0,02997 5	0,03394 7	0,03828 7	0,04301 7	0,04816 4	0,05375 1	0,05980 9

Die Bedingung, daß die Teilungen auf den Wälzkreisen gleich groß sein müssen, verliert für Evolventenverzahnung jeden Wert. Wenn auf Spielfreiheit verzichtet wird, darf die gegenseitige Lage zweier Evolventenräder (und damit die Teilungen) vergrößert werden, ohne den richtigen Eingriff zu stören. Es scheint deshalb zweckmäßiger die Teilungen auf den unveränderlichen Grundkreisen zu beziehen. Wenn t die Teilung auf dem Wälzkreis ist, so ist die Grundkreisteilung

$$t_g = t \cos \alpha \quad (71.11)$$

wobei der Winkel α als Eingriffswinkel bezeichnet wird (Abb. 71.10). Der Eingriffswinkel α ist genormt, ursprünglich in Europa $\alpha = 15^\circ$ (in Amerika $14^\circ 30'$ in Anlehnung an das dort übliche Trapezgewinde); seit 1927 wurde einheitlich die 20° -Normverzahnung festgelegt. Evolventenräder sind Satzräder, wenn die Grundkreisteilungen gleich sind. Die Grundkreise, deren Radien $r \cos \alpha$ und $R \cos \alpha$ sich nur durch den konstanten Faktor $\cos \alpha$ von den Wälzkreisradien unterscheiden, haben gleiche Umfangsgeschwindigkeiten $u_g = u \cos \alpha$.

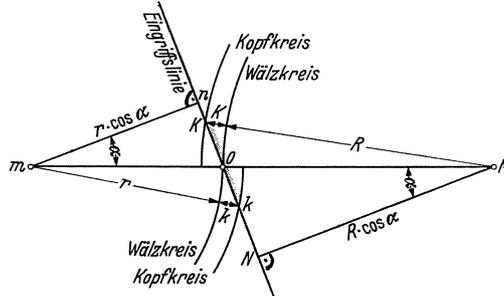


Abb. 71.12. Zur Berechnung der Überdeckung. $kOk =$ Eingriffstrecke.

Kleinste Zähnesumme einer Paarung. Da die Wälzkreise willkürlich sein können, ist es auch nicht zweckmäßig mit dem Eingriffsbogen (AOB , Abb. 71.2) zu rechnen. Nur innerhalb der beiden Kopfkreise treten Zahnprofile miteinander in Berührung; der Teil kOK der Eingriffslinie (Abb. 71.12) wird Eingriffstrecke genannt und muß größer als die Grundkreisteilung sein. Die Überdeckung ε ist bei Evolventenverzahnung definiert durch $\frac{\text{Eingriffstrecke} = KO k}{\text{Grundkreisteilung} = t_g}$.

Die größtmögliche Eingriffstrecke ist durch die Grundkreispunkte n, N begrenzt. Nutzen wir diese vollständig aus, machen also die Kopfhöhen k, K der beiden Räder (abweichend von der Normverzahnung) verschieden groß, so ist die kleinst zulässige Überdeckung $\varepsilon_{\min} = \frac{nN}{t \cos \alpha} = 1$. Nun ist $nN = (r + R) \sin \alpha$ und $2\pi(r + R) = (z + Z)t$, so daß mit $\varepsilon = 1$:

$$(z + Z)_{\min} = 2\pi \operatorname{ctg} \alpha \quad (71.12)$$

wird. Für	$\alpha = 15^\circ$	20°	30°	
ist	$\operatorname{ctg} \alpha = 3,732$	2,747	1,732	und
und	$(z + Z)_{\min} = 24$	18	11	

Überdeckung. Für Normverzahnung ($k = K = m$) kann kOK aus der geometrischen Beziehung berechnet werden. Aus Abb. 71.12 folgt:

$$kK = kO + OK = (nk - nO) + (NK - NO) \\ = \sqrt{(r + k)^2 - (r \cos \alpha)^2} - r \sin \alpha + \sqrt{(R + K)^2 - (R \cos \alpha)^2} - R \sin \alpha,$$

und mit $r = zm/2, R = Zm/2$ und $t = \pi m$:

$$\varepsilon = \frac{kK}{t \cos \alpha} = \frac{1}{2\pi} \left[\sqrt{\left(\frac{z+2}{\cos \alpha}\right)^2 - z^2} + \sqrt{\left(\frac{Z+2}{\cos \alpha}\right)^2 - Z^2} - (z + Z) \operatorname{tg} \alpha \right]. \quad (71.13)^1$$

Grund- und Fußkreis fallen zusammen. Die Evolvente hört beim Grundkreis auf; soll das ganze Zahnprofil eine Evolvente sein, dann muß der Fußkreis außerhalb des Grundkreises liegen. Grund- und Fußkreis fallen bei Normverzahnung zusammen, wenn (Abb. 71.13)

$$r_g + f = r = r \cos \alpha + 7/6 \cdot m.$$

ist. Da $r = z \cdot m/2$ ist, wird $\frac{zm}{2} \cos \alpha + \frac{7}{6} m = \frac{zm}{2}$

$$\text{oder} \quad z_{\min} = \frac{7}{3(1 - \cos \alpha)}. \quad (71.14)$$

Für $\alpha = 15^\circ (20^\circ)$ ist $z_{\min} = 70 (39)$.

Zahlentafel 71.2. Überdeckung ε nach Gl. (13).

$\alpha = 15^\circ$		$\alpha = 20^\circ$		$\alpha = 30^\circ$	
z/Z	ε	z/Z	ε	z/Z	ε
21/21	1,790	13/13	1,445	7/7	1,16
25/58	1,989	14/27	1,546		
26/80	2,039	15/46	1,610		
28/195	2,141	16/102	1,676		

¹ Diese Gleichung ist für die zahlenmäßige Berechnung zweckmäßiger als die von Schiebel (3. Aufl. Bd. I S. 31, Gl. 20) oder von Buckingham-Olah (S. 28/32), die ε aus der Gleichung der Evolvente berechnen.

Nach diesem Verfahren braucht man für jeden Eingriffswinkel, für jede Teilung und für jede Zähnezahl einen besonderen Fräser. Wenn auch der Eingriffswinkel α und die Teilung, als Vielfaches von π ($t = \pi \cdot m$) genormt und so eingeschränkt werden können, benötigt man doch für jede Teilung und für jede gewünschte Zähnezahl einen besonderen Fräser, was wirtschaftlich nicht tragbar ist. Man hat sich dann durch Festlegung von genormten Zähnezahlen geholfen, indem folgende Fräsersätze (8- oder 15teilig im Handel für jede Modulteilung erhältlich sind).

Zahlentafel 71.4. Normale Formfräser.

Fräser Nr. . .	1	2	3	4	5	6	7	8
für z . . .	12	14	17	21	26	35	55	135
Fräser Nr. . .	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$	
für z . . .	13	15	19	23	30	42	80	

Zahlentafel 71.5. Genormte Modul-Teilungen m in mm (aus DIN 780).

1,25	1,5	1,75	2,0	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
5	5,5	6	6,5	2,25	2,5	2,75	3	3,25	4	4,5	
11	12	13	14	15	16	18	20	22	24	27	30

Dagegen ist natürlich nichts einzuwenden, doch kommt man in der Praxis mit diesen „normalen“ Zähnezahlen nicht aus. Über diese Schwierigkeit hilft man sich in der nicht einwandfreien Weise hinweg, daß der für eine bestimmte Zähnezahl konstruierte Fräser auch für die nächstgrößeren Zähnezahlen verwendet wird, obschon die Zahnform dann vom allgemeinen Verzahnungsgesetz abweicht und starke Verzögerungen und Beschleunigungen auftreten. So hergestellte Räder können daher für große Geschwindigkeiten nicht verwendet werden. Besonders ungünstig sind Räder mit kleinen Zähnezahlen. Wie aus Zahlentafel 71.3 hervorgeht, kommen z. B. bei der 15°-Normverzahnung bei allen Rädern unter 21—30 Zähnen (je nach der Übersetzung) Flankenteile in Eingriff, die überhaupt keine Evolventenform haben, indem der Übergang zwischen Grund- und Fußkreis durch eine beliebige Kurve, meist durch radiale Verlängerung der Evolvente gebildet wird. Das Formverfahren war früher, wegen der einfachen Herstellung, stark verbreitet; es entspricht aber keinesfalls den hohen Anforderungen, die heute an Verzahnungen gestellt werden müssen.

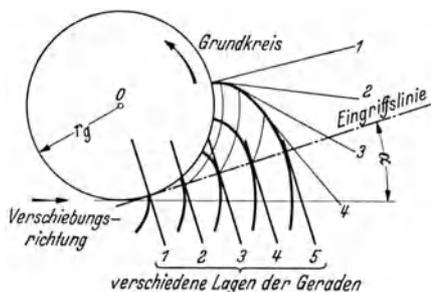


Abb. 71.16. Konstruktion der Evolvente durch aufeinanderfolgende Tangenten.

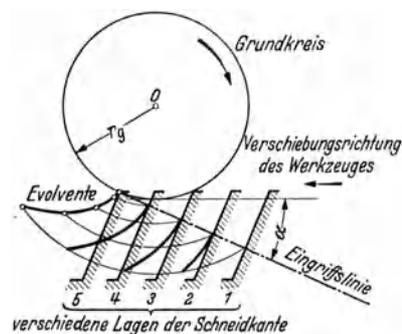


Abb. 71.17. Mechanische Erzeugung der Evolvente durch aufeinanderfolgende Lagen eines Schneidwerkzeuges.

Abwälzverfahren. Bei den heute gebräuchlichen Herstellungsverfahren werden die Zahnprofile mechanisch erzeugt, ohne zeichnerische Übertragung. Die Evolvente kann z. B. auch durch aufeinanderfolgende Tangenten gezeichnet werden. Durch Parallelverschiebung einer beliebig gerichteten Geraden und gleichzeitige Verdrehung des Grundkreises um 0 und um einen Bogen gleich der Entfernung der Geraden, entsteht die Evolvente als Umhüllungskurve (Abb. 71.16). Diese Herstellungsweise bildet die Grundlage für die mechanische Erzeugung der Evolventenzähne, indem die aufeinander folgenden Lagen der Geraden als Schnitte eines Werkzeuges (Messers) aufzufassen sind (Abb. 71.17). Die einzelnen Schnitte müssen natürlich sehr nahe zusammen liegen, damit die Tangenten eine stetige Kurve und keine gebrochene Linie erzeugen. Die Gerade, auf der die Berührungspunkte liegen, ist eine Tangente an den Grundkreis; sie wird Erzeugungs-Eingriffslinie genannt und steht senkrecht zur Schneidkante des Werkzeuges. Die relative Bewegung zwischen der Geraden (dem Werkzeug) auf dem Grundkreis

(Zahnrad) ist eine „wälzende“, nach welcher diese Herstellungsweise als Abwälzverfahren bezeichnet wird.

Das Werkzeug zur Herstellung der Zähne erhält grundsätzlich zwei verschieden gerichtete Schneidkanten, da beide Flanken der Zähne durch Abwälzen des Werkzeuges erzeugt werden müssen. Die Abb. 71.18 zeigt, wie zwei Zahnräder, die zusammen arbeiten sollen, erzeugt werden.

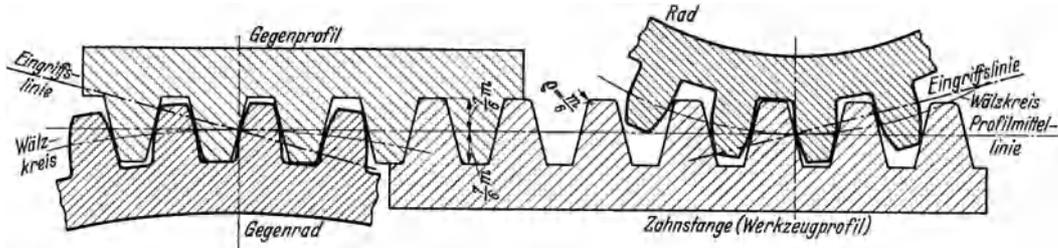


Abb. 71.18. Erzeugung von Rad und Gegenrad.

Für Rad und Gegenrad muß sich das Werkzeug in der gezeigten Weise ergänzen. Soll ein Werkzeugprofil für die Erzeugung der beiden Räder genügen, so muß Profil und Gegenprofil genau gleich sein, d. h. Zahnücke und Zahn des Werkzeuges müssen genau gleiche Form haben.

Bei der Erzeugung der Evolvente durch umhüllende Schneidkanten kommt es nur auf die relative Bewegung zwischen Grundkreis (d. i. das zu verzahnende Rad) und Geraden (Werkzeug) an. Man kann demnach die Evolvente auch so erzeugen, daß

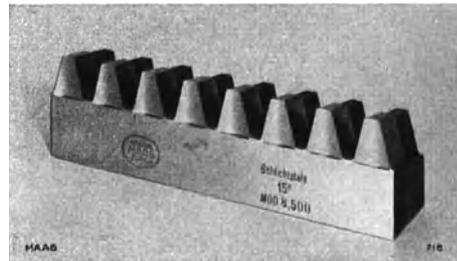


Abb. 71.20. Das Werkzeug der Maagschen Maschine.

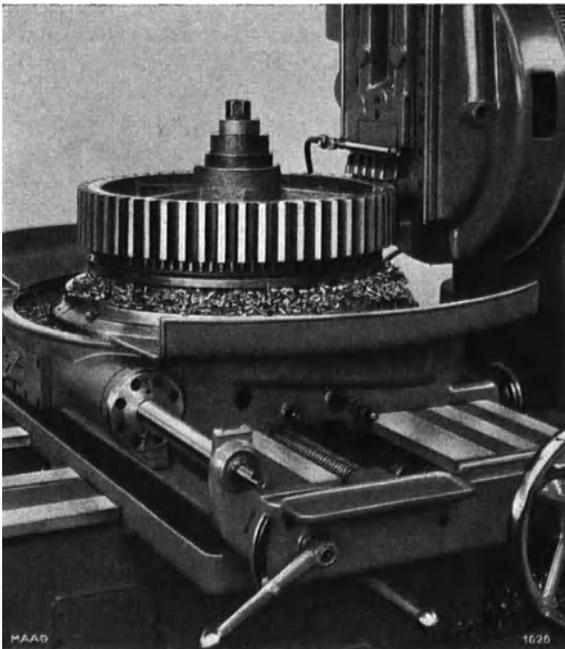


Abb. 71.19. Maschine der Maag-Zahnräder-A.-G. in Zürich beim Stoßen eines Stirnrades.

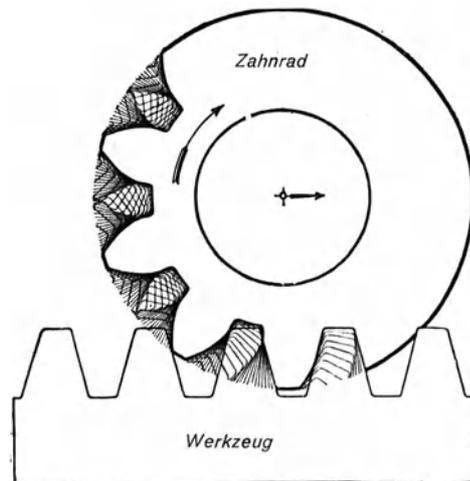


Abb. 71.21. Entstehen der Zahnflanken nach dem Abwälzverfahren (Maag).

das Werkzeug festgehalten und das Rad in der entgegengesetzten Richtung verschoben wird. Dadurch wird die genaue Führung des Stoßwerkzeuges bedeutend erleichtert. Das ist die Grundidee der Maagschen Maschine mit der Zahnstange als Werkzeug (Abb. 71.19 bis 71.21).

Aus praktischen Gründen wird noch vorgeschrieben, daß die Räder „spielfrei“ laufen sollen; der eingreifende Zahn darf kein Flankenspiel haben. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die Summe der Zahnstärken der beiden Räder (im Wälzkreis gemessen) gleich der Teilung t ist. Der spielfreie Eingriff wird in einfachster Weise erreicht, wenn die Profilmittellinie des Werkzeuges durch den Wälzpunkt 0 der beiden Zahnräder geht (Abb. 71.22). Man erreicht

damit gleichzeitig den Vorteil, daß alle in dieser Weise mit dem Werkzeug erzeugten Zahnräder den gleichen Eingriffswinkel haben, also Satzräder sind. So entsteht die „Normverzahnung“ mit den genormten Kopf- und Fußhöhen (vgl. S. 342). Durch Festlegung der Abmessungen des

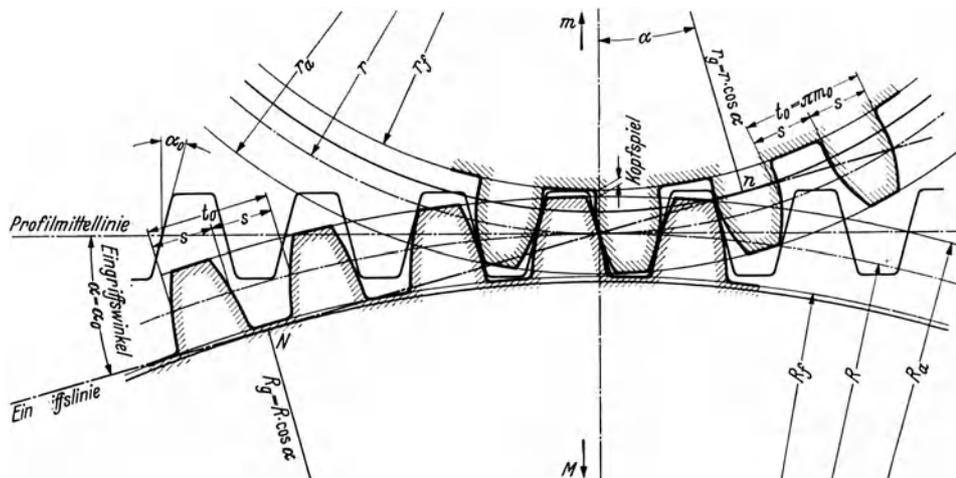


Abb. 71.22. Herstellung der spielfreien Normverzahnung.

Werkzeuges (Bezugsprofil genannt) und durch die angegebene Lage der Profilmittellinie in bezug auf die Wälzkreise, sind die Formen der Normverzahnung eindeutig bestimmt. Mit dem zahnstangenförmigen Werkzeug kann man keine Innenverzahnung herstellen.

Es ist für die Herstellung der Zahnform nicht erforderlich, daß das Werkzeug eine gerade Zahnflanke hat. Bei der Fellow-Stirnradhobelmaschine (Abb. 71.23) ist die Schneide des Werkzeuges evolventenförmig ausgebildet, entsprechend der Zahnform eines Rades mit 21 Zähnen. Das Werkzeug bewegt sich mit dem Stößel einer Stoßmaschine auf und ab. Der Stößel ist außerdem um das Zentrum des Werkzeugrades drehbar. Das zu schneidende Rad ist auf einen ebenfalls drehbaren Tisch aufgespannt. Stößel und Rad drehen sich jeweils um einen kleinen Betrag beim Leerhub des Stößels, und zwar so, daß das Werkzeugrad und das zu schneidende Rad eine langsame Zahnradbewegung ausführen. Sowohl Werkzeug als Werkstück müssen also zwangläufig im gegebenen Übersetzungsverhältnis angetrieben werden. Das Zahnprofil geht dabei aus den aufeinanderfolgenden Lagen der Profilschneide hervor, denn diese schneidet aus dem Werkstück gerade so viel Material heraus, wie für das ungehinderte Abrollen eines dem Werkzeugrad ähnlichen Rades erforderlich ist. — Die Genauigkeit der erzeugten Zahnkurve hängt vollständig von der Genauigkeit des Profils des Werkzeuges ab, so daß ein möglichst einfaches Profil erwünscht ist. Bei der Evolventenverzahnung erhält nur die Zahnstange gerade Profile.

In einer andern Form hat die Zahnstange eine viel ausgedehntere Verwendung gefunden. Um an Stelle der hin- und hergehenden Bewegung der Zahnstange eine kontinuierliche Drehbewegung zu erhalten, formt man die Zahnstange derart in einen Zylinder um, daß ihre trapezförmigen Zähne in einer Schraubenlinie verlaufen. Das Werkzeug erhält demnach die Form einer Schnecke (Abb. 71.24), in der Schneidflächen angebracht sind. Man bringt nun den Fräser

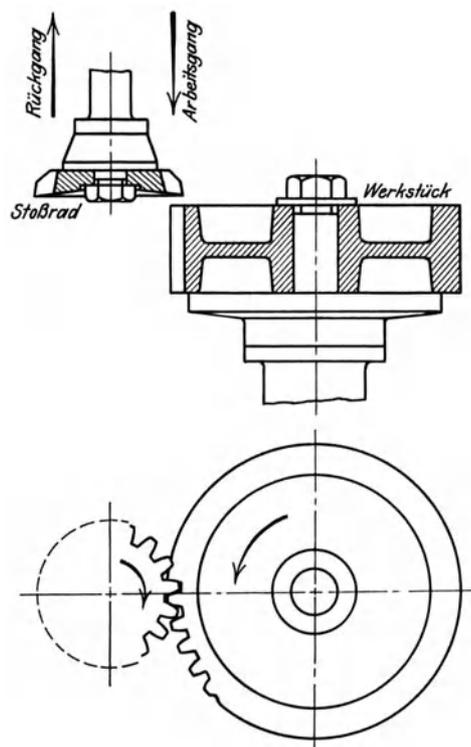


Abb. 71.23. Prinzip der „Fellow“-Stirnrad-Stoßmaschine. (Aus Schiebel.)

so mit dem zu bearbeitenden Rad zusammen, daß die Schraubengänge parallel zur Radachse liegen und erteilt dem Fräser und dem Rad je eine zwangläufige Bewegung derart, daß nach einer Fräserumdrehung das Rad sich um eine Teilung weitergedreht hat. Dann räumen, wie beim Stoßverfahren, die Fräserzähne aus dem Radkranz die Lücken der Evolventenverzahnung aus.

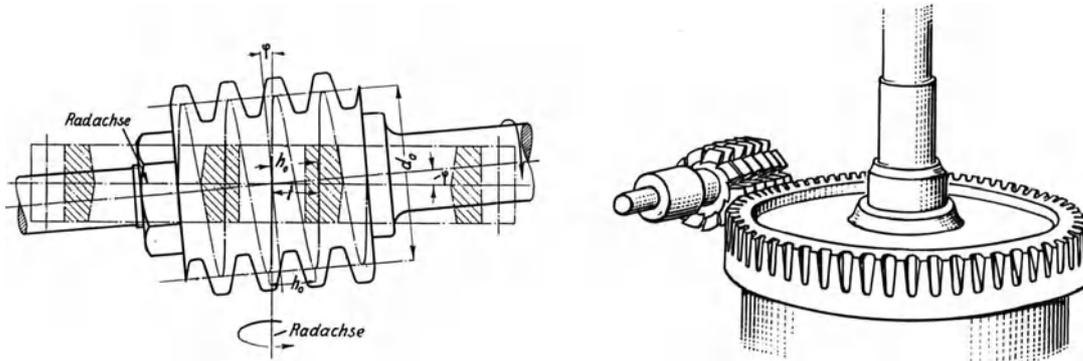


Abb. 71.24. Abwälzverfahren mit Schneckenfräser. (Aus Rötischer.)

Zwischen der Teilung t des Rades und der Ganghöhe h_0 der Frälerschnecke besteht die Beziehung (Abb. 71.24): $\cos \varphi = \frac{\text{Teilung } t}{\text{Ganghöhe } h_0}$. Auch ist: $\text{tg } \varphi = \frac{h_0}{\pi d_0} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$, so daß $t = \pi d_0 \sin \varphi$ oder $m = d_0 \sin \varphi$ (71.16)

ist. Dieser Bedingung müssen die Abmessungen des Schneckenfräasers genügen, wenn er zum Schneiden einer Zahnteilung $t = \pi m$ geeignet sein soll. Der Fräser erhält schließlich noch eine Vorschubbewegung in der Richtung der Radachse zum Durchschneiden der ganzen Radbreite.

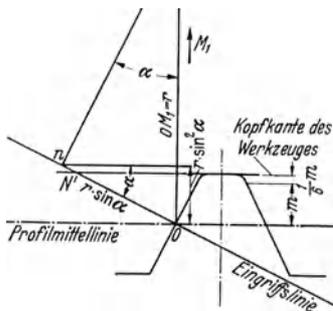


Abb. 71.25. Grenzbedingung für Unterschnittfreiheit.

Es ist zweckmäßig, das Zahnprofil in zwei Fräsängen herzustellen, so daß für den Fertigschnitt nur eine geringe Spanstärke genommen werden muß. Da bei Rädern mit großem Durchmesser und großer Zahnbreite die Zeit für den einmaligen Durchgang des Fräasers bis zu 350 Stunden betragen kann und beim Fertigschnitt eine Unterbrechung zu vermeiden ist, werden an den Fräser sehr hohe Anforderungen gestellt.

Der Hauptvorteil des Abwälzverfahrens gegenüber dem Formverfahren besteht darin, daß immer richtige Profile erzeugt werden, und daß für sämtliche Zähnezahlen derselben Teilung nur ein einziges Werkzeug notwendig ist. —

Grenzbedingung für Unterschnittfreiheit. Ein weiterer Vorteil ist, daß auch die Fußprofile

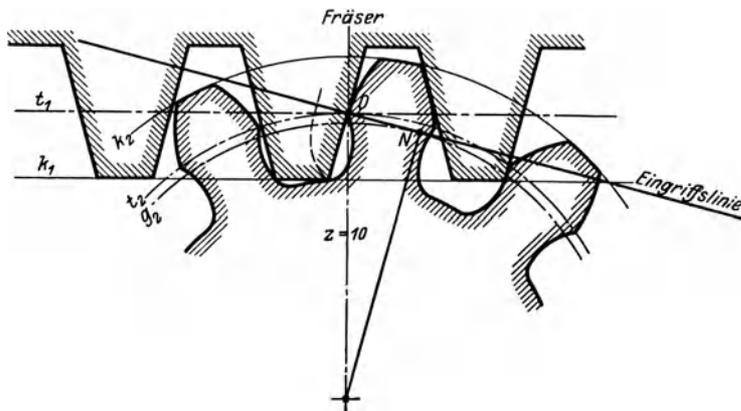


Abb. 71.26. Unterscheiden der Zähne bei kleiner Zähnezahl.

durch den Fräser geschnitten werden, wobei der äußerste Schneidpunkt den Fußanschluß ausarbeitet. Die Kopfgerade des Werkzeuges schneidet die Eingriffslinie in N' (Abb. 71.25). Liegt dieser Punkt außerhalb des Endpunktes n der Evolvente, so wird das Fußprofil „unterschnitten“. Bei den vollständig geraden Schneidflanken des Fräasers wird das Fußprofil unnötig weit ausgeräumt, weil die Fräserkopfhöhe gleich $1\frac{1}{6} m$ ist, während die Kopfhöhe des Gegenrades nur gleich m ist. Man kann das Unterscheiden etwas mildern, indem die Kopfhöhe des geraden Teiles des Fräasers gleich m gemacht und die Spitze abgerundet

werden, wobei der äußerste Schneidpunkt den Fußanschluß ausarbeitet. Die Kopfgerade des Werkzeuges schneidet die Eingriffslinie in N' (Abb. 71.25). Liegt dieser Punkt außerhalb des Endpunktes n der Evolvente, so wird das Fußprofil „unterschnitten“. Bei den vollständig geraden Schneidflanken des Fräasers wird das Fußprofil unnötig weit ausgeräumt, weil die Fräserkopfhöhe gleich $1\frac{1}{6} m$ ist, während die Kopfhöhe des Gegenrades nur gleich m ist.

wird. Die Grenze der Unterschnittfreiheit ist erreicht, wenn die Begrenzung der geraden Schneidkante durch den Grundkreispunkt n geht $m = r \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} z \cdot m \sin^2 \alpha$, d. h. für

$$z_0 = 2/\sin^2 \alpha. \quad (71.17)$$

Für $\alpha = 15^\circ$ (20°) ist die Grenzzähnezahl $z_0 = 30$ (18).

Bei sehr kleinen Zähnezahlen wird das Unterschneiden so stark, daß der Zahnfuß erheblich geschwächt wird; das Werkzeug schneidet außerdem ein Stück der Evolvente weg (Abb. 71.26) und kürzt damit die Eingriffstrecke und die Überdeckung ε ; die kleinste Zähnesumme Gl. (12) um die Überdeckung $\varepsilon = 1$ zu erreichen, wird dann mindestens gleich 40. Daher sollen auch hier kleine Zähnezahlen vermieden werden.

71.4. Räder mit kleinen Zähnezahlen (korrigierte Verzahnung).

Die Verwendung der rasch laufenden Elektromotoren und der Dampfturbinen als Antriebsmaschinen erforderte (für die großen Übersetzungsverhältnisse) dringend geeignetere Zahnformen für kleine Zähnezahlen. In den technischen Zeitschriften zwischen 1895 und 1905 sind dann auch wiederholt Verbesserungsvorschläge gemacht worden, um die Schwächung des Zahnfußes zu vermeiden. Von diesen Vorschlägen (die als „korrigierte“ Verzahnung bekannt sind) haben zwei einfache Hilfsmittel eine weite Verbreitung gefunden.

Aus Gl. (17) folgt, daß die unterschnittfreie Grenzzähnezahl z_0 mit zunehmendem Eingriffswinkel α abnimmt; man hat deshalb die früher gebräuchliche 15° -Normverzahnung durch die 20° -Normverzahnung ersetzt; Kopf- und Fußhöhen geblieben aber unverändert.

Aus Abb. 71.14 folgt, daß die Kopfhöhe des kleinen Rades viel größer sein darf als die Kopfhöhe des großen, ohne Gefahr zu laufen, daß die Evolventenpunkte N resp. n am Grundkreis in Eingriff kommen. Man kann also (abweichend von der Normverzahnung) die Kopfhöhen der beiden Räder verschieden groß machen. Dieser Vorschlag stammt von Ing. O. Lasche¹ und wird AEG.-Korrektur genannt. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß die Summe der Kopfhöhen der beiden Räder ($k + K$) normal gleich $2m$ gemacht wird. Diese Korrektur bietet neben der günstigeren, unterschnittfreien Zahnform noch den Vorteil, daß die Satzradereigenschaft (Eingriffswinkel = normal) und auch die Achsentfernung beider Räder

$$a = \frac{1}{2} m (z + Z) \quad (71.6)$$

wie bei der Normverzahnung beibehalten werden. Die AEG.-Korrektur kann nur bei Übersetzungen, die verschieden von 1 sind, verwendet werden, wenn die Zähnesumme beider Räder größer als die doppelte Grenzzähnezahl (also für $\alpha = 15^\circ$ größer als 60 ist), denn nur dann kann die Zahnform des kleinen Rades ohne Schaden für das große Rad verbessert werden.

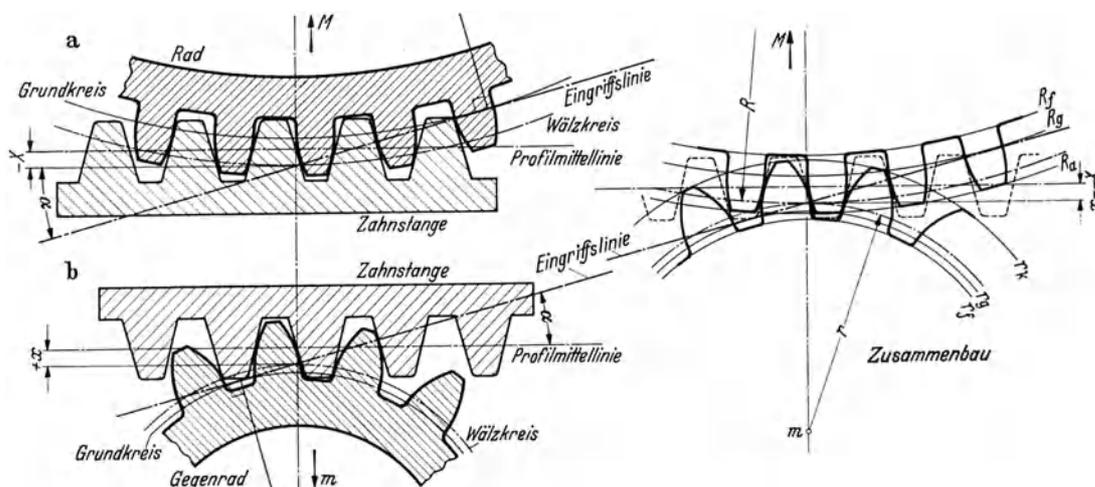


Abb. 71.27. Die mit dem normalen Werkzeug erzeugte AEG-Korrektur a) des großen, b) des kleinen Rades.

Da man damals (vor 1900) nur die Herstellung der Zähne mit dem Formfräser kannte, erforderten die genannten Korrekturvorschläge jeweiligen teure Spezialwerkzeuge, deren Herstellung und Anschaffung nur in großen Werken wirtschaftlich tragbar war. Aus diesem Grunde konnten sie in der Praxis nur geringe Verwendung finden.

¹ Lasche, O.: Elektrischer Antrieb mittels Zahnräderübertragung. Z. VDI 43 (1899), S. 1417 ff.

Durch entsprechende Wahl der Profilverschiebungen x und X kann auch jeder beliebige Eingriffswinkel erzeugt werden (Abb. 71.29). Einige Schwierigkeit macht dabei allerdings die Bedingung des spielfreien Eingriffes. Da die Wälzkreise (Teilkreise) der Zahnräder nicht mehr auf der Profilmittellinie des Werkzeuges abwälzen, ist die Teilung der Räder auf den Wälzkreisen gemessen (Laufmodul m) verschieden von der Teilung des Werkzeuges (Werkzeugmodul m_0). Bei spielfreier Verzahnung ist die Summe der Zahnstärken im Wälzkreis (= Laufkreis = Teilkreis) gemessen, gleich der Teilung:

$$s + S = \pi \cdot m \tag{71.21}$$

Aus dem zahnstangenförmigen Werkzeug (Abb. 71.30) folgt die Lückenweite in der Entfernung $+x$ von der Profilmittellinie:

$$s_x = m_0^{\pi/2} + 2x m_0 \operatorname{tg} \alpha_0 = m_0 [\pi/2 + 2x \operatorname{tg} \alpha_0] \tag{71.22}$$

Das ist aber auch die Zahnstärke eines Rades, dessen Erzeugungswälzkreis auf dieser Geraden (in der Entfernung $+x$ von der Profilmittellinie) abwälzt. Aus dieser nun bekannten Zahnstärke kann die Zahnstärke an irgendeiner anderen Stelle (z. B. auf dem Lauf- = Teilkreis) berechnet werden, da die Zahnflankenform (als Evolvente) bekannt ist.

Bei einem Evolventenzahn (Abb. 71.31) sind also Zahnstärke s_x und Winkel α_0 für den Erzeugungswälzkreis mit dem Radius r_x bekannt, während die entsprechenden Werte s und α für den Laufkreis zu berechnen sind. Zunächst ist der Grundkreisradius des Rades

$$r_g = r \cos \alpha = r_x \cos \alpha_0 \tag{71.23}$$

Dann folgt aus der Abbildung: $\delta_x = s_x/2r_x$ und

$$\delta = s/2r = \delta_x - (\varphi - \varphi_0),$$

so daß

$$s = \frac{r}{r_x} \cdot s_x + 2r (\varphi_0 - \varphi), \tag{71.24}$$

ist. Da $r/r_x = m/m_0$ und $2r = z \cdot m$ ist, wird mit dem Wert von s_x aus Gl. (22):

$$s = m \left(\frac{\pi}{2} + 2x \operatorname{tg} \alpha_0 \right) + zm (\varphi_0 - \varphi).$$

Ebenso ist beim zweiten Rad:

$$S = m \left(\frac{\pi}{2} + 2X \operatorname{tg} \alpha_0 \right) + Zm (\varphi_0 - \varphi).$$

Durch Addition erhält man mit Gl. (21):

$$s + S = \pi \cdot m = m [\pi + 2(x + X) \operatorname{tg} \alpha_0 + (z + Z) (\varphi_0 - \varphi)]$$

oder

$$x + X = \frac{z + Z}{2 \operatorname{tg} \alpha_0} (\varphi - \varphi_0) = \frac{z(1+i)}{2 \operatorname{tg} \alpha_0} (\varphi - \varphi_0) \tag{71.25}$$

d. i. die zuerst von Fölmer veröffentlichte Bedingungs-gleichung für den spielfreien Gang.

Mathematisch spielfreie Zähne würden klemmen; es muß mindestens soviel Flankenspiel vorhanden sein, wie bei einem Laufsitz. Auch wegen der ungleichen Erwärmung der beiden Räder im Betrieb (vgl. Abschn. 71.53) ist Flankenspiel im kalten Zustand erforderlich. Diese Faktoren müssen von Fall zu Fall besonders untersucht werden. Das erforderliche Flankenspiel bedingt eine Verminderung der Zahnstärke, also eine zusätzliche negative Profilverschiebung v für beide Räder:

$$v = \frac{\text{Flankenspiel}}{4 \sin \alpha_0} \approx \text{Flankenspiel (weil } \sin 15^\circ \approx 0,25 \text{ ist).}$$

Aus Gl. (25) kann die Summe der Profilverschiebungen $(x + X)$ berechnet werden, sobald z, i, φ und φ_0 (resp. α_0) bekannt sind. Für die Herstellung der Zähne muß außerdem die Profilverschiebung für jedes Rad bekannt sein, d. h. die Summe muß in zwei Teile x und X zerlegt werden. Da das Übersetzungsverhältnis i vorgeschrieben und für das normale Werkzeug α_0 (resp. φ_0) bekannt ist, dürfen von den vier Unbekannten x, X, z und α resp. φ , drei beliebig gewählt oder durch andere Beziehungen zwischen diesen Größen festgelegt werden. Es sind also immer verschiedene Lösungsmöglichkeiten vorhanden, aus welchen die „günstigsten“ Zahnformen mit Rücksicht auf Festigkeit, Abnutzung, geräuschlosen Gang, usw. auszuwählen sind.

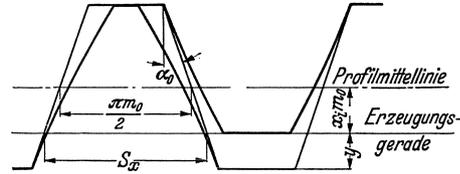


Abb. 71.30.

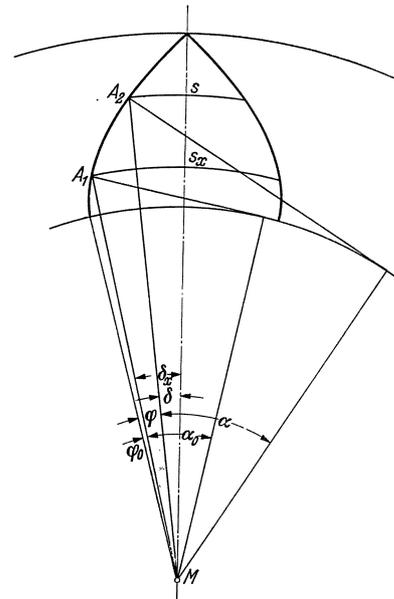


Abb. 71.31. Zur Berechnung der Zahnstärke an verschiedenen Stellen.

Für die Normverzahnung ist $x = X = O$ und $\alpha = \alpha_0$ und für die AEG.-Korrektur $x + X = O$ und $\alpha = \alpha_0$.

Zur vollständigen Bestimmung der Zahnräder muß noch die Zahnhöhe berechnet werden, die vom Kopfspiel abhängt, das vorhanden ist, wenn die Räder ohne Flankenspiel zusammengelegt werden. Aus Abb. 71.29 folgt die geometrische Beziehung für die Achsentfernung:

$$a = r_j + R_k + \text{Kopfspiel} = \frac{z + Z}{2} m. \quad (71.26)$$

Aus Gl. (23) folgt weiter: $m \cos \alpha = m_0 \cos \alpha_0$,
so daß die Achsentfernung

$$a = r + R = m_0 \frac{z + Z}{2} \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} \quad (71.26a)$$

bei spielfreiem Eingriff ist. Wird die Achsentfernung bei einer gegebenen Übersetzung (z/Z) vorgeschrieben, so ist der Eingriffswinkel aus dieser Gleichung eindeutig bestimmt.

Das Kopfspiel, das bei der Normverzahnung $1/6$ Modul $= 1/13$ der Zahnhöhe beträgt, kann nach den Deutschen Normen bei der korrigierten Verzahnung zwischen 0,1 und 0,3 m_0 gewählt werden. Schiebel schlägt $1/6 m_0$ und Buckingham $1/5 m_0$ oder $1/10$ der Zahnhöhe vor.

Setzt man die aus Abb. 71.29 folgenden geometrischen Beziehungen:

$$r_j = r_1 - y \cdot m_0 = \left(\frac{z}{2} - y \right) m_0 \quad (71.27)$$

und

$$R_k = R_j + h \cdot m_0 = R_1 - Y \cdot m_0 + h \cdot m_0 = \left(\frac{Z}{2} - Y + h \right) m_0, \quad (71.28)$$

(worin $y = 7/6 - x$ ist) in Gl. (26) ein, so erhält man eine Gleichung für die Zahnhöhe, die je nach Wahl des Kopfspieles andere Zahlenwerte enthält. Mit dem Wert von Schiebel (Kopfspiel $= 1/6 m_0$) ist

$$hm_0 = \left[\frac{13}{6} + \frac{z + Z}{2} \left(\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} - 1 \right) - (x + X) \right] m_0. \quad (71.29)$$

Die Kopfhöhe ist immer kleiner als bei der Normverzahnung.

Anfänglich begnügte man sich mit einer Zahnkorrektur, bei der das Unterschneiden der Fußprofile gerade vermieden war. Man nützte die Evolvente also bis zum Grundkreis aus und erreichte so die größtmögliche Überdeckung. Ing. Max Maag (Gründer der Maag-Zahnräder A.-G. in Zürich) hat wohl zuerst die großen Vorteile der Zahnkorrekturen bei Verwendung eines normalen Werkzeuges erkannt und praktisch verwirklicht. Das Maag-Verfahren wird streng geheim gehalten; nie erfolgte eine Veröffentlichung der Berechnungsgrundlagen. Nur in zwei Vorträgen, am 20. April 1917 im Techn. Verein Winterthur „Die Maag-Zahnräder und ihre Bedeutung für die Maschinenindustrie“ und am 11. Oktober 1926 in Wien „Die Maag-Zahnräder und die Mittel zu ihrer Herstellung“ hat M. Maag darüber berichtet. Aus diesen Vorträgen geht hervor, daß bei der Maag-Verzahnung bewußt auf die Satzradereigenschaft verzichtet wird um von Fall zu Fall die „günstigsten“ Zahnformen wählen zu können.

Die „günstigste“ Zahnform kann nicht in einfacher Weise und auch wohl nicht eindeutig festgelegt werden. Es spielen dabei verschiedene Bedingungen mit, die sich zum Teil widersprechen. Günstigere Zahnformen als bei der Normverzahnung werden bei kleinen Zähnezahlen dann erreicht, wenn das Unterschneiden vermieden wird; aber damit ist sicher noch nicht die beste Zahnform gefunden. Nicht alle Teile der Evolvente sind für die Verzahnung gleich günstig. Die Evolvente hat in der Nähe des Grundkreises einen sehr kleinen und rasch sich ändernden Krümmungsradius (Abb. 71.9). Die genaue Herstellung derart empfindlicher Kurven ist außerordentlich schwierig. Das wirksame Profil der Evolventen-Verzahnung soll sich daher (wenn möglich) nicht in die nächste Umgebung des Grundkreises erstrecken, wodurch aber Eingriffstrecke und Überdeckung gekürzt werden. Bei der 15°-Normverzahnung führt das zu Rädern mit Zähnezahlen über 42, welche Zahl bedeutend über der Grenzzähnezahl $z_0 = 30$ für Unterschnittfreiheit liegt. Die gleiche Schlußfolgerung folgt auch aus der Berechnung der Flächenpressungen an den Berührungsstellen (vgl. S. 364) und aus der Untersuchung der günstigsten Gleitverhältnisse (S. 367).

A. Schiebel wählte z. B. für die günstigste Zahnform gleiche Zahnstärke im Fußkreis der beiden Räder, damit die Bruchgefahr für beide Zähne gleich ist, was z. B. für langsam laufende Räder einer Werkzeugmaschine zweckmäßig sein kann.

Bei der Herstellung der korrigierten Verzahnung mit dem Abwälzfräser wälzt sich der eigentliche Fräserteilriß nicht mehr auf dem Teilkreis des zu fräsierenden Rades ab, sondern eine weiter

nach innen (oder nach außen) verschobene Linie übernimmt die Rolle des Teilrisses. Dort ist aber der Steigungswinkel der Schnecke anders als im Teilriß, so daß etwas verzerrte Zahnprofile und keine mathematisch genaue Evolventen erzeugt werden. Um diesen Profilverfälscher so klein als möglich zu halten, macht man den Steigungswinkel φ der Schnecke klein und beschränkt außerdem die Profilverschiebungen x auf möglichst kleine Werte.

Das Maagsche Herstellungsverfahren mit der Zahnstange als Werkzeug kennt diese Einschränkung nicht. Da alle Punkte der Zahnstange sich mit gleicher Geschwindigkeit fortbewegen, so besteht auch dann ein richtiger Eingriff, wenn die Wälzbahn nicht mit der Profilmittellinie zusammenfällt.

Zahlenbeispiel 71.1. Für ein langsamlaufendes Getriebe einer Werkzeugmaschine ist für Übersetzung 1:1 mit $z = 11$ Zähnen eine geeignete Zahnform festzulegen, die mit dem normalen Werkzeug $\alpha_0 = 15^\circ$ hergestellt werden kann.

Für $\alpha_0 = 15^\circ$ ist $\sin \alpha_0 = 0,25881905$, $\cos \alpha_0 = 0,96592583$, $\tan \alpha_0 = 0,26794919$ und $\varphi_0 = 0,00614980$.

Aus Gl. 17 folgt der kleinste Eingriffswinkel: $\sin^2 \alpha \geq 2/11 = 0,181818$, zu $\alpha \geq 25^\circ$.

Um die ungünstigen Teile der Evolvente in der Nähe des Grundkreises auszuschalten, wird α zu 27° gewählt, so daß $\varphi = 0,03828655$ ist (Zahlentafel 71.1). Durch die Wahl von α ist auch die Achsentfernung festgelegt, nämlich mit Gl. (26_a) und $z = Z = 11$:

$$\frac{a}{m_0} = \frac{z \cos \alpha_0}{\cos \alpha} = 11 \cdot 1,084084 = 11,92492.$$

Der Laufmodul m folgt aus Gl. (23):

$$m = m_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} = 1,084084 m_0$$

und der Laufwälzkreisradius

$$r = z \cdot m/2 = 5,96246 m_0.$$

Aus Gl. (25) für den spielfreien Gang folgt mit $z = Z$ und $x = X$:

$$x = \frac{z}{2 \tan \alpha_0} (\varphi - \varphi_0) = 0,6596792.$$

Die Zahndicke im Erzeugungswälzkreis gemessen ist (Gl. 22)

$$s_x = m_0 \left(\frac{\pi}{2} + 2x \tan \alpha_0 \right) = 1,82432 m_0.$$

Die Zahnhöhe (Gl. 29):

$$h = \left[\frac{13}{6} - z \left(\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} - 1 \right) - 2x \right] m_0 = 1,77224 m_0.$$

Der Fußkreisradius (Gl. 71.27), da $y = 7/9 - x$ ist:

$$r_f = \left(\frac{z}{2} - \frac{7}{6} + x \right) m_0 = 4,993 m_0.$$

Der Kopfkreisradius $r_k = r_f + h = 6,765 m_0$ (Abb. 71.32)

Das Wälzverfahren ist nicht nur für die Herstellung von Zahnrädern geeignet, sondern läßt sich z. B. auch mit Vorteil für die Bearbeitung von Sperrädern, Kettenrädern, Keilwellen usw. verwenden. Soll das Zahnstangenprofil zur Erzeugung einer ge-

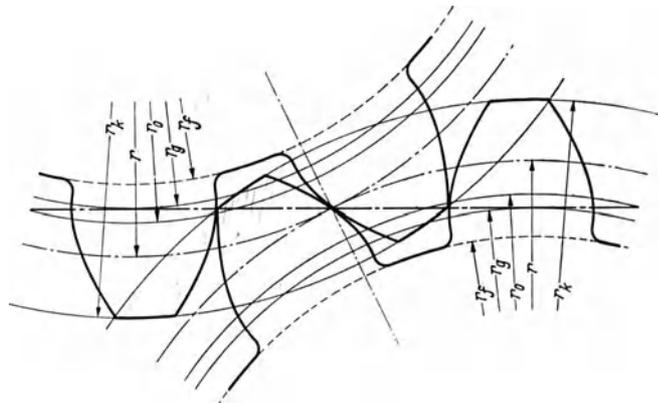


Abb. 71.32. Zum Zahlenbeispiel 71.1. $z = Z = 11$

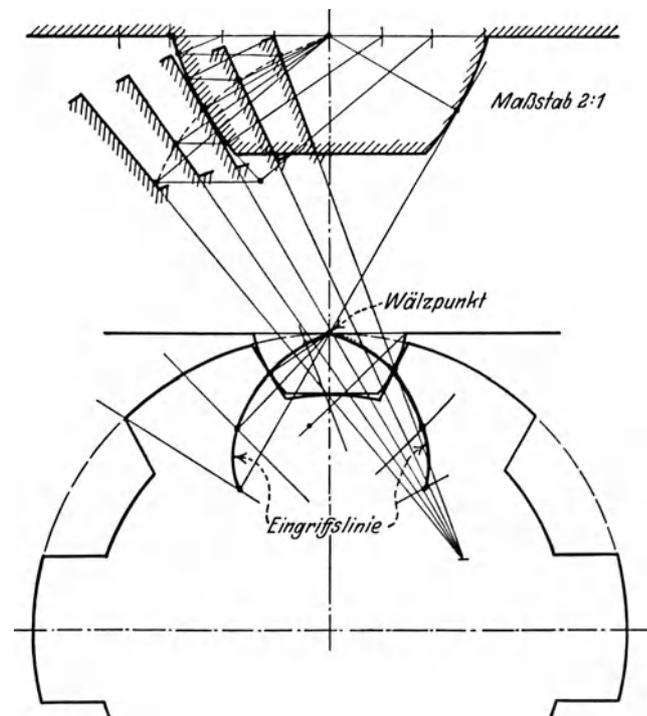


Abb. 71.33. Bestimmung des Profils eines Zahnstangenwerkzeuges für Vielkeilwelle. (Aus Buckingham-Olah.)

radflankigen Keilwelle entsprechend (Abb. 71.33) bestimmt werden, so muß zunächst die Wälzlinie für die Erzeugung gewählt werden, z. B. zusammenfallend mit dem Kopfkreis der Keilwelle. Nach dem allgemeinen Verzahnungsgesetz wird zuerst die Eingriffslinie konstruiert um festzustellen, ob bei der frei gewählten Wälzlinie ein vollkommener Eingriff der Zähne des Werkzeuges und des Werkstückes der Keilwelle) möglich ist. Gäbe es nämlich zwischen Kopf- und Fußkreis einen mit der Keilwelle konzentrischen Berührungskreis zur Eingriffslinie, so wäre eine korrekte Erzeugung nicht möglich (vgl. Abb. 71.4); in diesem Fall müßte eine andere Wälzlinie gewählt werden. Aus der Eingriffslinie wird das Zahnstangenprofil ermittelt; die Konstruktion ist im oberen Teil der Abbildung in doppeltem Maßstab dargestellt und zeigt die Profilform des Abwälzfräasers.

71.5. Berechnung der Zähne.

71.51. Festigkeit. Die Kraft, welche die Räder aufeinander ausüben (Zahnkraft P_z genannt) geht durch den jeweiligen Berührungspunkt A (Abb. 71.1) und steht (wenn von der Reibung abgesehen wird) senkrecht zum Profil, fällt also bei der Evolventenverzahnung mit der Eingriffslinie zusammen, die durch den Wälzpunkt O geht. Die Richtung der Zahnkraft ist demnach für jeden Berührungspunkt durch die Eingriffslinie eindeutig bestimmt; ihre Größe folgt aus dem Drehmoment (Abb. 71.34).

$$M_d = P_z \cdot r \cdot \cos \alpha = P_u \cdot r. \tag{71.30}$$

Im ungünstigsten Fall greift die (tangential zum Grundkreis gerichtete) Zahnkraft P_z an der Kopfkante an (Abb. 71.35). Bei der Berechnung wird angenommen, daß die beiden zusammenarbeitenden Zähne auf die ganze Breite gleichmäßig tragen. Der gefährlichste Querschnitt liegt in der Nähe des Fußkreises und kann genau bestimmt werden, indem man durch den Schnittpunkt der Zahnkraft mit der Mittellinie des Zahnes ein Körper gleicher Biegespan-

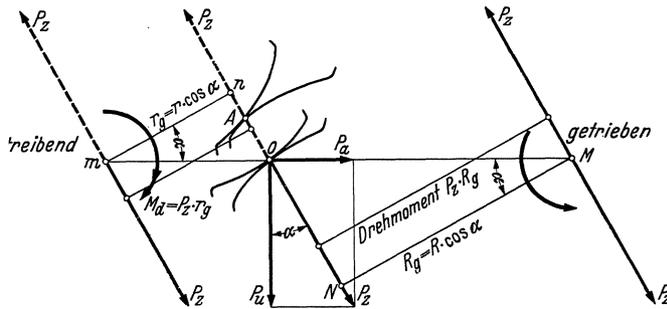


Abb. 71.34. Zur Berechnung der Zahnkraft P_z , des Drehmomentes und der Lagerreaktionen.

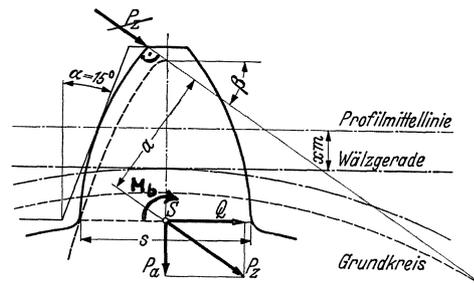


Abb. 71.35. Berechnung eines Zahnes auf Festigkeit

nung konstruiert, der die Zahnflanke berührt. Bringt man im Schwerpunkt dieses Querschnittes zwei gleich große und entgegengesetzt gerichtete Kräfte P_z an, so erkennt man, daß der Zahn auf Biegung beansprucht wird durch das Moment $P_z \cdot a$ und gleichzeitig auf Druck durch die Kraft $P_u = P_z \sin \beta$, wenn die Querkraft Q vernachlässigt wird. Dadurch entsteht eine Biegespannung $\sigma_b = \pm \frac{P_z \cdot a}{\frac{1}{6} b s^2}$ und eine Druckspannung $\sigma_d = - \frac{P_z \sin \beta}{b \cdot s}$. Die größte Normalspannung

$$\sigma_t = \sigma_b + \sigma_d = \frac{P_z}{b \cdot s} \left(\pm \frac{6 a}{s} - \sin \beta \right) \tag{71.31}$$

muß kleiner als σ_{zul} sein. Es ist in der Praxis gebräuchlich an Stelle der Zahnkraft P_z mit der Umfangskraft P_u

$$P_u = P_z \cos \alpha \tag{71.32}$$

die im Wälzkreis angreift, zu rechnen, so daß

$$\sigma_{zul} = \frac{P_u}{b \cdot s \cos \alpha} \left(\pm \frac{6 a}{s} - \sin \beta \right)$$

wird. Führt man dimensionslose Verhältniszahlen (a/t und s/t) für die Zahnabmessungen ein und löst die Gleichung nach P_u auf, so wird:

$$P_u = \frac{\sigma_{zul}}{\gamma} b \cdot t = c \cdot b \cdot t, \tag{71.33}$$

worin c ein in der Praxis gebräuchlicher Rechnungswert und

$$\gamma = \pm \frac{6 a/t}{(s/t)^2 \cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{s/t \cos \alpha} \tag{71.34}$$

für die 15° -Normverzahnung und für verschiedene Profilverschiebungen x aus Abb. 71.73 entnommen werden kann. Für die Bruchgefahr ist die Spannung an der Zugseite ausschlaggebend, da die Druckseite nicht so kerbempfindlich ist.

Zahlenbeispiel 71.2. Wie groß ist γ für die in Beispiel 71.1 berechnete Verzahnung?

Aus der in Abb. 71.32 maßstäblich gezeichneten Zahnform folgt $a/t = 23,5/68,115 = 0,345$ und $s/t = 37,5/68,115 = 0,55$. Der Pressungswinkel β im Kopfpunkt folgt aus

$$r_k \cos \beta = r_g \text{ zu } \cos \beta = 0,786 \text{ und } \sin \beta = 0,61795$$

Der Pressungswinkel α im Wälzkreis ist 27° und $\cos \alpha = 0,89101$. Durch Einsetzen dieser Werte in Gl. (34) wird

$$\gamma = \pm \frac{6 \cdot 0,345}{0,55^2 \cdot 0,891} - \frac{0,61795}{0,55 \cdot 0,891} = \pm 7,68 - 1,26 = + 6,42 \text{ und } - 8,94 .$$

Die Spannungsberechnung nach Gl. (31) ist aus folgenden Gründen nur angenähert richtig:

1. Wenn die Zahnkraft an der Kopfkante angreift, dann muß schon ein zweites Flankenpaar in Eingriff sein, weil die Überdeckung $\varepsilon > 1$ ist. Es wirkt also sicher nicht die volle Zahnkraft an der Kopfkante; wir rechnen also (im Interesse der Sicherheit) etwas zu pessimistisch.

2. Die aus der Leistung berechnete Umfangskraft P_u ist nicht die größte Kraft, die im Betrieb auftritt. Bei der Inbetriebsetzung oder beim Bremsen, aber auch infolge der unvermeidlichen Abweichungen von der genauen Evolventenform treten zusätzliche Kräfte auf. Man setzt also $P_{\text{wirkl}} = \xi P_u$, worin $\xi > 1$ von Fall zu Fall auf Grund der Erfahrung geschätzt oder berechnet werden muß. Das Anlaufmoment eines Drehstrommotors ist ungefähr 2,7 mal so groß als das Drehmoment im Beharrungszustand, also hier ist $\xi = 2,7$.

3. Schließlich ist noch die Formwirkung beim Übergang zwischen Zahn und Radkörper durch Einführung einer Formziffer α_k zu berücksichtigen. Nach Versuchen von R. V. Baud¹ ist

$$\alpha_k = 1 + 0,15 s/\rho \quad (71.35)$$

worin s die Zahnstärke im Fußkreis gemessen und ρ der Krümmungsradius der Abrundung ist.

Berücksichtigt man diese Faktoren, so lautet die Gl. (33): $\xi \cdot P_u = \frac{\sigma_{\text{zul}}}{\alpha_k \cdot \gamma} \cdot b \cdot t$.

Führt man den Modul $m = t/\pi$ mm ein und setzt für α_k/π den Mittelwert 0,5, so ist

$$\xi \frac{P_u}{b} = \frac{\sigma_{\text{zul}}}{0,5 \gamma} \cdot m = \xi P_1 . \quad (71.36)$$

worin P_1 die Umfangskraft je mm Zahnbreite und σ_{zul} in kg/mm^2 einzusetzen ist.

Aus $M_d = P_u \cdot r = P_u \cdot z m / 2$ folgt mit $b = \psi \cdot t = \psi \cdot \pi \cdot m$:

$$M_d = \frac{\psi \sigma_{\text{zul}}}{\gamma \cdot \xi} \cdot \pi m^3 \cdot z \cdot \text{kg} \cdot \text{mm} . \quad (71.37)$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß bei gegebenem Drehmoment, Werkstoff und gegebener Zähnezahl, der Modul und damit der Raddurchmesser nur mit $\sqrt[3]{\frac{1}{\sigma_{\text{zul}} \cdot \psi}}$ abnimmt. Doppelt so große Radbreiten resp. zulässige Spannungen, verkleinern den Raddurchmesser je nur um etwa 25% ($1/\sqrt[3]{2}$). Als zulässige Spannung kann für langsam laufende Räder die Wechselfestigkeit des betreffenden Werkstoffes (Abb. 13.25) eingesetzt werden; für sehr rasch laufende Räder etwa die Hälfte davon.

Die größte Schwierigkeit der Berechnung liegt in der richtigen Wahl von ξ . Für mathematisch genau nach dem allgemeinen Verzahnungsgesetz erzeugte Zahnformen können bei gleichförmigem Antrieb auch beim getriebenen Rad keine Geschwindigkeitsschwankungen auftreten, wenn die Zähne starr sind, also keine Formänderungen erfahren. Die Herstellung von mathematisch genauen Zahnformen könnte unter Aufwand erheblicher Kosten mit einer gewissen Annäherung erreicht werden. Infolge der unvermeidlichen Formänderungen der Zahnflanken im Betrieb durch Verbiegen der Zähne und Zusammenpressen der Oberflächen, wird die genaue Zahnform schon zerstört. Diese Formänderungen sind in den verschiedenen Phasen des Zahneingriffes verschieden, weil die Eingriffsstelle wandert und weil zum Teil ein Zahn oder auch zwei Zähne in Eingriff kommen. Geschwindigkeitsschwankungen (Beschleunigungen und Verzögerungen) sind deshalb auch bei theoretisch korrekten Zahnformen unvermeidlich und rufen in-

¹ Baud, R. V.: Gear tooth stresses. Presented at the Tenth Annual Convention of the American Gear Mfrs Assn. 1926.

folge der Trägheit der Massen zusätzliche Kräfte hervor. Diese werden durch kleine Abweichungen von der theoretischen Zahnform, durch exzentrische Aufspannung der Räder, durch Verspannen aufgeschumpfter Zahnkränze und auch durch Teilungsfehler noch wesentlich verstärkt. Der Grundkreis der Verzahnung muß genau konzentrisch zur Bohrung, bzw. zur Welle sein; dies erfordert größte Sorgfalt bei der Herstellung. Es ist deshalb zweckmäßig vor dem Verzahnen, den Außenumfang des (auf einem Dorn gesteckten) Rades zu überdrehen oder zu überschleifen. Der genau rund laufende Außenumfang kann dann zur Kontrolle der konzentrischen Aufspannung an der Räderbearbeitungsmaschine dienen.

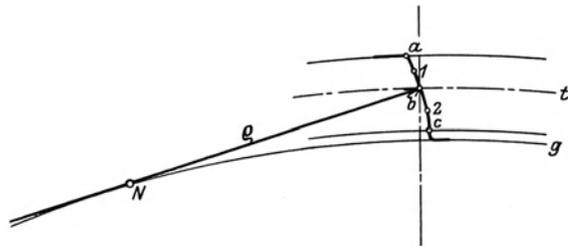


Abb. 71.36.

Wie empfindlich das Verhältnis in bezug auf die Genauigkeit der Zahnform ist, zeigt eine Untersuchung von Ing. Hartmann¹. Man kann die Evolvente, soweit sie für die Zahnform verwendet wird, mit großer Genauigkeit durch einen Kreisbogen ersetzen (Abb. 71.36), der durch die Punkte a, b und

c geht. Der Unterschied ist so klein, daß die Abweichungen auch bei 5facher Vergrößerung kaum merkbar sind. Rechnerisch weichen z. B. die Punkte 1 und 2 um 0,07 resp. 0,05 mm von der genauen Evolvente ab. Der Fehler ist also derart klein, daß er fast innerhalb der Bearbeitungsgenauigkeit der Zahnräder liegt, da diese nicht geschliffen, sondern gefräst oder gestoßen werden. Hartmann rechnet nun für das kreisförmige Zahnprofil die jeweiligen Geschwindigkeiten aus unter der Voraussetzung, daß das eine Rad mit der gleichförmigen Umfangsgeschwindigkeit $u = 2 \text{ m/s}$ rotiert, und findet, daß das zweite Rad keine gleichförmige Geschwindigkeit mehr hat, sondern daß starke Verzögerungen und Beschleunigungen auftreten, und zwar eine maximale Beschleunigung von $2,4 \text{ m/s}^2$ und eine größte Verzögerung von $8,8 \text{ m/s}^2$.

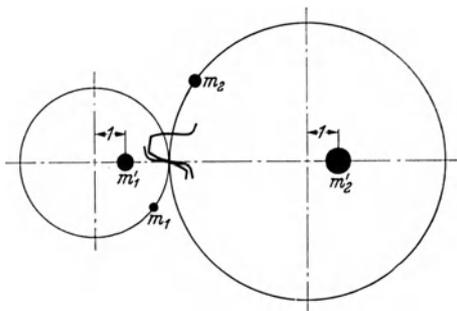


Abb. 71.37. Reduzierte Massen m_1 und m_2 der Zahnräder.

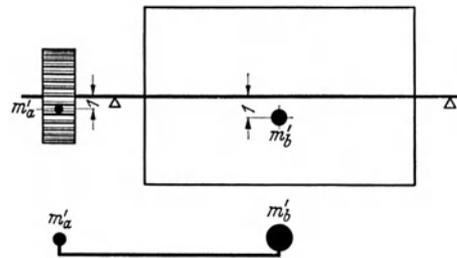


Abb. 71.38. Reduzierte Massen des Rotors eines Elektromotors m_0' und des Zahnrades m_b' .

Durch diese Geschwindigkeitsschwankungen entstehen erzwungene Schwingungen der beiden Radumfänge als Relativbewegung gegenüber dem gleichförmigen Gang; sie teilen sich entsprechend dem Verhältnis ihrer wirksamen Massen auf die beiden Räder. Ist (Abb. 71.37)

- m_1 die reduzierte Masse des treibenden Rades, auf dem Wälzkreis bezogen,
- m_2 „ „ „ „ getriebenen „ „ „ „ „

so ist

$$1/m_0 = 1/m_1 + 1/m_2 \tag{34.33}$$

und m_0 die mittlere „wirksame“ oder Ersatzmasse, ebenfalls auf dem Wälzkreis bezogen. Die Massenkräfte erhöhen resp. vermindern den Zahndruck und können dessen Richtung auch umkehren. Die größte Beanspruchung entsteht in diesem letzten Fall während des Stoßes beim Aufprallen der beiden Zahnflanken. Der Druckwechsel ist auch die Hauptursache des Zahnradlärms und sollte, wenn immer möglich, vermieden werden.

Da bei starren Zähnen die Beschleunigungen mit dem Quadrat der Umfangsgeschwindigkeit zunimmt, würden die von Hartmann berechneten Werte bei 20 m/s Umfangsgeschwindigkeit den 100fachen Wert erreichen! Durch die elastischen Formänderungen der Zähne werden die Massenkräfte aber wesentlich kleiner, da die Zeitdauer der Geschwindigkeitsschwankungen verlängert wird.

¹ Hartmann, W.: Genauigkeitsgrad und Geschwindigkeitsverhältnis bei Verzahnungen. Z. VDI 49(1905), S. 163 u. 500.

Die genaue Berechnung der auftretenden Massenkräfte aus den erzeugten Schwingungen ist mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden, da die Elastizität der gekuppelten Körper sich während der Schwingung ändert. Außerdem sitzen im allgemeinen auf den Radwellen noch andere Massen, z. B. der Rotor eines Elektromotors usw. (Abb. 71.38). Nur wenn die Wellen starr und die Massen ebenfalls starr damit verbunden wären, dürften die reduzierten Massen einer Welle einfach addiert werden: $m'_1 = m'_a + m'_b$. Da die Verbindungswelle der beiden Massen elastisch ist, so ist die Eigenschwingungszahl des Systems

$$\omega_k = \sqrt{c/m'_0} \quad (34.32)$$

worin c die Einheitskraft der Verbindung (Welle) und m'_0 die mittlere reduzierte Masse wieder aus $\frac{1}{m'_0} = \frac{1}{m'_a} + \frac{1}{m'_b}$ berechnet werden kann.

Ist c sehr klein, die Verbindung also sehr elastisch, dann ist die Eigenschwingungszahl der Verbindung sehr klein. Die Masse m'_b kann den raschen Schwingungen von m'_a nicht folgen, so daß ihre Masse dann vernachlässigt werden kann. Aus dieser Überlegung folgt, daß die wirksame Masse eines Rades in solchen Fällen nicht mehr konstant ist, sondern von der Drehzahl der Welle abhängt. Um die Berechnung überhaupt durchführen zu können, müssen verschiedene, vereinfachende Annahmen gemacht werden, deren Zulässigkeit nicht leicht zu überblicken ist.

Man kann aber (auch ohne Zahlenrechnung) aus diesen Betrachtungen eine praktisch wichtige Schlußfolgerung ziehen. Man muß die Massenkräfte, also die wirksamen Massen so klein wie möglich halten, d. h. alle Teile die mitschwingen können sind elastisch mit dem Zahnkranz zu verbinden; diese Massen sind also abzufedern (Abb. 71.39/41). Selbstverständlich sind auch die Beschleunigungen und Verzögerungen, also die Abweichungen von der genauen Evolventenform durch sorgfältige Herstellung und Lagerung der Räder so klein wie möglich zu halten¹.

In der Praxis hat man versucht, die Erhöhung der Umfangskräfte durch die Massenwirkungen durch Erfahrungswerte ξ von der Form

$$\xi = 1 + v/x \quad (71.39)$$

zu erfassen, in welcher Gleichung v die Umfangsgeschwindigkeit in m/s ist. Die x -Werte haben im Laufe der Zeit und mit zunehmender Genauigkeit in der Zahnradherstellung vielfache Änderungen erfahren, etwa von $x = 3$ bis $x = 11$. Diese Erfahrungswerte befriedigen aber wenig, da x in noch unbekannter Weise von der Genauigkeit der Zahnprofile abhängt. W. Lewis hat deshalb vorgeschlagen, eine Maschine zu konstruieren, die gestattet, die zusätzlichen dynamischen Kräfte direkt zu messen. Die von der American Society of Mechanical Engineers seit 1925 (unter Leitung von Prof. Buckingham) durchgeführten Versuche sind für Stirnräder mit geraden Zähnen zu einem gewissen Abschluß gelangt². Sie führten zu einem relativ einfachen Näherungsverfahren für die Berechnung der ξ -Werte, das verdient allgemein verwendet zu werden.

¹ Berndt, G.: Grundlagen für die Messung von Stirnrädern. Berlin: Julius Springer 1938.

² Dynamic Loads on gear teeth. A. S. M. E. Research Publication 1931. Vgl. auch Buckingham-Olah: Stirnräder mit geraden Zähnen. Berlin: Julius Springer 1932.



Abb. 71.39. Federnde Verbindung zwischen Zahnkranz und Radkörper.

C ist ein Maß für die Steifigkeit eines Flankenpaares, abhängig vom Werkstoff und von der Form der Zähne.

Für Stahl auf Stahl bei 15° Normverzahnung ist $C = 112\,000 \text{ kg/cm}^2$,
 bei 20° „ „ „ $C = 116\,000 \text{ kg/cm}^2$.

Für Gußräder ist $C_{\text{Guß}} = 0,5 C_{\text{Stahl}}$.

Die Werte der Zahndurchbiegungen sind von der Größenordnung der Teilungsfehler. Mit $P_1 = 100 \text{ kg/cm}$ für Stahl folgt aus dem Hookeschen Gesetz ($P_1 = C \cdot f$):

$$10^2 = 10^5 \cdot f, \text{ also } f = 10^{-3} \text{ cm.}$$

Die rein empirische Gl. (40) gilt natürlich nur innerhalb der Versuchsgrenzen, und zwar für $d_{\text{min}} = 120 \text{ mm}$ und $D_{\text{max}} = 480 \text{ mm}$ und für Übersetzungen $i_{\text{min}} = 1/2 = 200/400$ bis $i_{\text{max}} = 1/4 = 120/480$. Sie gilt nur für Stirnräder mit geraden Zähnen, und ungefederten Radkränzen ($m'_0 \approx 0,01 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$); für gefederte Kränze kann P_d im Verhältnis der reduzierten Massen verkleinert werden. Sie gilt nur bis etwa 12 m/s Umfangsgeschwindigkeit im Wälzkreis.

Die größte Belastung für 1 cm Zahnbreite ist also

$$P_t = P_1 + P_d = \xi P_1, \quad (71.41)$$

solange P_d kleiner als P_1 ist, also kein Abheben der Zahnflanken auftritt. Dieses Abheben sollte, (wenn immer möglich) wegen der Lärmbildung vermieden werden.

Zahlentafel 71.6. Handelsübliche e -Werte nach E. Buckingham¹.

Modul	Klasse 1 cm	Klasse 2 cm	Klasse 3 cm
25	0,012	0,006	0,003
12	010	005	0025
8	008	004	002
6	0065	0032	0016
5	0055	0027	0014
4 und kleiner	0,0050	0,0025	0,00125

Zahlentafel 71.7. Handelsübliche e -Werte nach E. Buckingham¹.

$v = 1$	2	5	10	20	30 m/s
$e_{\text{max}} 0,01$	0,008	0,006	0,004	0,002	0,001 cm

Für geräuschkchwache Zahnräder muß e kleiner sein.

71.52. Abnutzung². Es ist eine bekannte Tatsache, daß Zahnräder nicht durch Abbrechen der Zähne, sondern fast immer infolge zu starker Abnutzung unbrauchbar werden. Als Ursache der Abnutzung kommen zu große Flächenpressungen (bleibende Formänderungen) und gleitende Reibung an den Berührungstellen in Betracht.

Die größte Flächenpressung zwischen den beiden Zahnflanken folgt aus Gl. (52.31) zu:

$$p_{\text{max}} = 0,418 \sqrt{\frac{P_z E}{b \cdot r}}, \quad (71.42)$$

worin $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ und r_1, r_2 die Krümmungsradien der beiden Zahnflanken an der Berührungsstelle sind. Die Krümmungsmittelpunkte der Evolventenflanken sind immer die Grundkreispunkte n und N , so daß

$$r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{r_1 r_2}{n N} \quad (71.43)$$

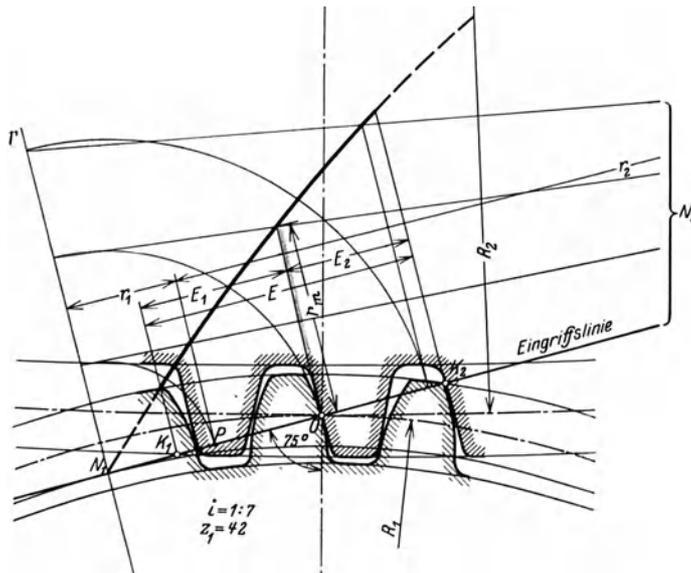


Abb. 71.42. Zur Berechnung der Flächenpressung.

¹ Vgl. Fußnote S. 361.

² Kutzbach, K.: Reibung und Abnutzung von Zahnrädern. Bericht über Versuche der Zahnräderfabrik Friedrichshafen Z. VDI 70 (1926) S. 999/1003. — Bondi, W.: Beiträge zum Abnutzungsproblem unter spezieller Berücksichtigung von Abnutzung der Zahnräder. VDI-Verlag 1927. — Ulrich, M.: Verschleißversuche mit Zahnräder für Kraftwagen. Mitt. aus der MPA a. d. T. H. Stuttgart 1932. Herausgegeben vom Reichsverband der Automobilindustrie. — Way, Stewart: Pitting due to rolling contact. Trans. A. S. M. E. 57 (1935) Jour. appl. Mechs. A 49/58, Discussion A 110/14. — Mehdahl, A.: Prüfung von Zahnrad-Material. BBC-Mitt. 26 (1939), S. 235/40.

leicht aus $r/r_1 = r_2/nN$ konstruiert werden kann (Abb. 71.42). In den Grundkreispunkten n, N ist $r = 0$, so daß dort theoretisch unendlich große Flächenpressungen auftreten müßten. Daraus folgt, daß diese Punkte, aber auch die unmittelbar benachbarten nicht in Eingriff kommen sollten. Bei den normalen Kopfhöhen $k = m$ sind demnach möglichst große Zähnezahlen zu verwenden. Aus der Konstruktion folgt weiter, daß r für jeden Berührungspunkt verschieden groß ist.

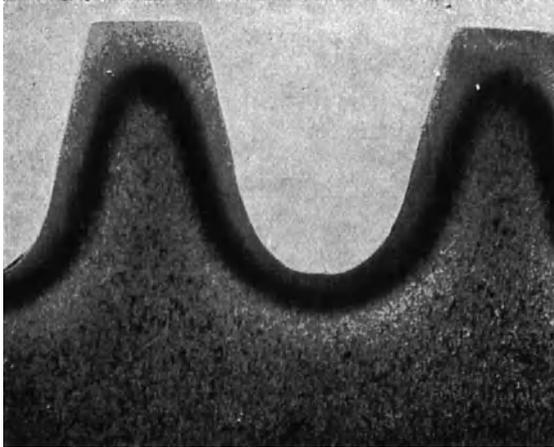


Abb. 71.43. Im Einsatz gehärtete Zahnflanken. (Aus Krupps Monatshefte.)

Da die Überdeckung immer größer als 1 ist, so wird die Zahnkraft zeitweise durch zwei Zähne übertragen. Die Verteilung der Zahnkraft könnte aus den Formänderungen der Zähne durch Biegung und Abplattung berechnet werden¹, wenn keine Form- und Teilfehler vorhanden wären. Diese Formänderungen sind fast immer kleiner als die unvermeidlichen Teilfehler und liegen oft innerhalb der Unebenheiten der Bearbeitung. Durch solche Fehler kommt der zweite Zahn nicht rechtzeitig im Eingriff, so daß die ganze Belastung dann immer von einem einzigen Flankenpaar getragen wird, abgesehen vom Augenblick des Eingriffwechsels.

Die ungünstigste Beanspruchung liegt also zwischen Kopf- und Wälzkreis und kann für ein vorliegendes Räderpaar leicht aus den bekannten Krümmungsradien der Zahnflan-

ken berechnet werden. Für Überschlagsrechnungen ist es zweckmäßiger, mit den Krümmungsradien $r_1 = r \sin \alpha$ und $r_2 = R \sin \alpha$ im Wälzpunkt 0 zu rechnen. Dann ist, da in Gl. (42) $P = P_z = \xi P_u / \cos \alpha = \xi P_1 \cdot b / \cos \alpha$ einzusetzen ist:

$$p_{\max} = 0,418 \sqrt{\frac{\xi P_1 E (1+i)}{r \sin \alpha \cos \alpha}} \quad \text{mit } i = r/R < 1. \quad (71.44)$$

Für 15°-Normverzahnung ist $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha = 0,5$. Für Stahlräder mit $E = 2,15 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}^2$ wird

$$\left(\frac{p_{\max}}{173,4}\right)^2 = \frac{\xi P_1 (1+i)}{d}. \quad (71.45)$$

In dieser Gleichung ist p in kg/mm^2 , P_1 in kg/mm und d in mm einzusetzen.

Die theoretische Festlegung eines zulässigen Wertes von p_{\max} ist unmöglich, solange keine allgemein gültige Bruchhypothese für ein stark veränderliches Spannungsfeld bekannt ist. Der zulässige Wert von p_{\max} muß also auf Grund der Erfahrung festgelegt werden. Ebenso wie bei den Wälzlagern, gilt auch hier, daß harte Werkstoffe zu empfehlen sind, was allerdings durch die Bearbeitungsmöglichkeit stark eingeschränkt wird. Durch Einsatzhärtung (Abb. 71.43) nach der Bearbeitung können härtere Oberflächen erzielt werden; da sich die Räder dabei verziehen, wird die größere Härte durch eine größere Ungenauigkeit der Verzahnung erreicht, wenn diese nach dem Härten nicht nach dem Wälzverfahren geschliffen werden (Abb. 71.69), was natürlich die Herstellung bedeutend verteuert. Bei der Nitrierhärtung (vgl. S. 80) verziehen sich die Räder nicht.

Unzulässig hohe Flächenpressungen machen sich im Betrieb durch Grübchenbildung (Pitting) bemerkbar (Abb. 71.44/46). Alle Versuche zeigen aber, daß die Grübchen nur bei Anwesenheit von Schmieröl auf den Gleitflächen entstehen können; ohne Öl keine Grübchen, auch nicht bei den höchsten Beanspruchungen. Die Hertzischen Gleichungen, die trockene Berührungsflächen voraussetzen, können demnach die Grübchenbildung nicht erklären. Solange das Öl die Zahnflanken vollständig trennt, können die im Ölpalt auftretenden Drücke nach der Theorie der Flüssigkeitsreibung (Abschn. 42/43) berechnet werden. Die allgemeine Gleichung

$$p_x = \frac{6 \eta U a}{h_0^3} F(x/a) \quad (42.42)$$

kann nicht ohne weiteres auf die Zahnflanken übertragen werden, da die Gleitgeschwindigkeit $v_g = (\omega_1 + \omega_2) \cdot e$ veränderlich ist und weil neben der Gleitbewegung noch eine Wälzung um den Berührungspunkt auftritt. Aus der Gleichung folgt aber immerhin, daß bei kleinen Werten

³ Baud, R. V. und R. E. Peterson: Load and stress cycles in gear teeth. Mech. Engg. 51 (1929) S. 653/662.

von h_0 (die fast bis zur vollständigen Absperrung gehen) und bei großen Werten von η und U sehr hohe Flächenpressungen (einige tausend kg/cm^2) in der Flüssigkeitsschicht entstehen können.

Sehr zähes Öl und glatte Gleitflächen können demnach die metallische Berührung und damit die Grübchenbildung in den Zahnflanken verhindern.

Die Grübchen entstehen bei Verwendung von dünnflüssigem Öl aus feinen Rissen an der Oberfläche. Die Risse sind die Folgen von Überbeanspruchungen, die nach den Hertz'schen Gleichungen

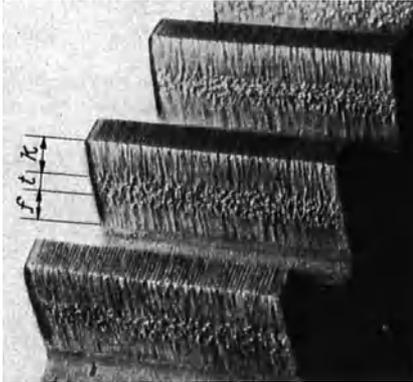


Abb. 71.44. Verschleißerscheinungen an einem Zahnrad aus Gußeisen.

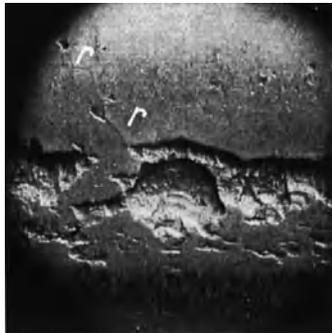


Abb. 71.45. Grübchenbildung (Pitting) in den Flanken eines Flugzeuggetriebes aus Vergütungsstahl. Vereinzelt feine Anrisse r .

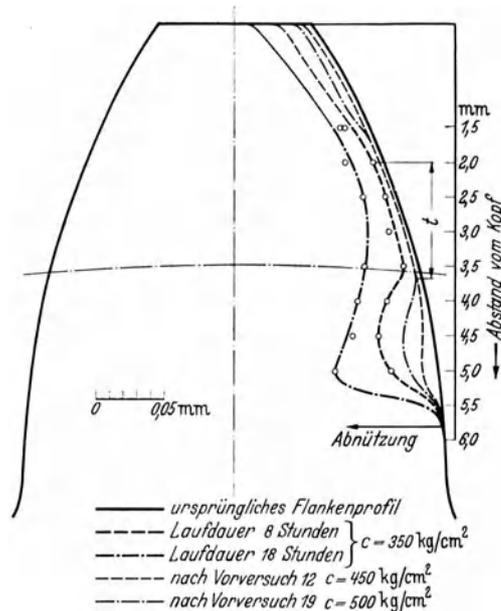


Abb. 71.46. Zahnflankenabnutzung an einem Ritzel ($z = 21$) aus Chromnickel-Einsatzstahl. NB.: $C = 350 \text{ kg/cm}^2$ entspricht $p_{\text{max}} \approx 200 \text{ kg/mm}^2$.

Abb. 71.44—46. Aus M. Ulrich: Verschleißversuche mit Zahnradern für Kraftwagen. Mitt. a. d. M.P.A. an der T. H. Stuttgart (1932).

chungen beurteilt werden können. Sie schreiten allmählich weiter (Ermüdungsbruch), bis das hereingepreßte Schmieröl die losgelösten Teile heraushebt.

Aus den Versuchen von St. Way folgt, daß die Pittings vermieden werden solange p_{max} kleiner als $0,7 K_z$ ist.

Löst man Gl. (45) nach P_1 auf:

$$\xi P_1 = \left(\frac{p_{\text{max}}}{173,4}\right)^2 \cdot \frac{d}{1+i} = C \cdot \frac{d}{1+i}, \quad (71.46)$$

so ist C für einen bestimmten Werkstoff konstant. In Abb. 71.47 sind die Erfahrungswerte von Brown, Boveri & Cie mit dieser Gleichung verglichen. Die Krümmung der Kurven gibt den Einfluß von i an, indem für größere Übersetzungen kleinere Ritzeldurchmesser gewählt werden. Aus diesem Vergleich folgt mit $\xi = 1$, $p_{\text{zul}} = 41$ bis 57 kg/mm^2 , was für Geradverzahnung sehr hoch

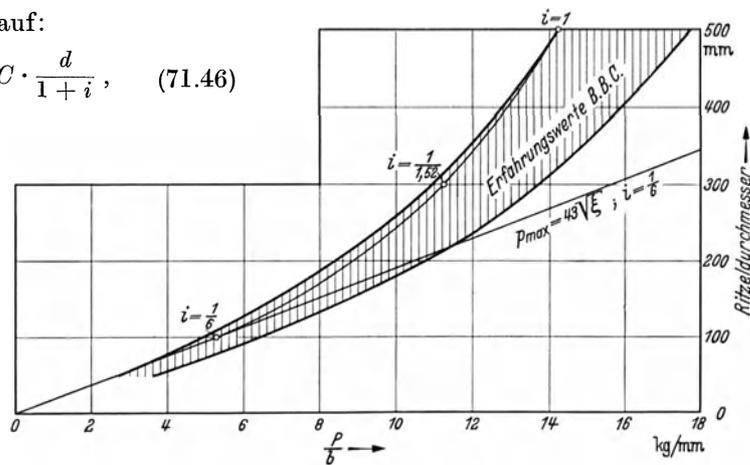


Abb. 71.47. — Erfahrungswerte von $P_1 = P/b$ (Brown Boveri & Co., Baden). — Theoretische Werte nach Gl. (46).

wäre. Die Zahnräder einer elektrischen Lokomotive (BBC-Antrieb) werden für $\xi = 1$ nur mit $p_{\max} = 36 \text{ kg/mm}^2$ belastet.

Da nach Gl. (46) P_1 proportional mit d ist, und wenn für ähnliche Zahnräder die Breite b auch mit d proportional ist, wird das zu übertragende Drehmoment

$$M_d = P_u \cdot d/2 = P_1 \cdot b \cdot d/2 = \text{prop } d^3. \tag{71.47}$$

Mit Rücksicht auf die Herstellungskosten und den Einbau in einem geschlossenen Gehäuse wird der Ritzeldurchmesser so klein wie möglich gemacht, man macht die Räder dann verschieden breit und wählt $b \leq d$

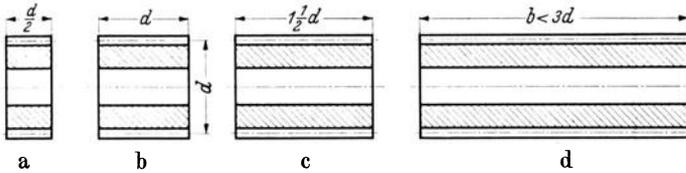


Abb. 71.48. Zahnräder für leichte bis schwerste Triebe.
a) $b = d/2$ für sehr leichte, b) $b = d$ für normale, c) $b = 1,5 d$ für mittelschwere, d) $b < 3 d$ für schwerste Triebe.

(für leichte), $b = 1,5 d$ (für mittlere) und b bis $3 d$ (für die schwersten Getriebe) (Abb. 71.48). Die richtige Wahl der Radbreite ist nicht immer leicht zu treffen, da diese von der Genauigkeit der Herstellung und von der Güte der Lagerung der Räder abhängt.

Je breiter die Räder sind, um so sorgfältiger muß die Ausführung sein und um so genauer muß Verbiegung und Verdrehung der Welle darauf untersucht werden, ob die Räder wirklich auf der ganzen Breite tragen können.

Erst wenn bleibende Formänderungen an der Berührungslinie der Zahnflanken durch Begrenzung der Flächenpressungen auf das elastische Gebiet sicher vermieden sind, gewinnt die zweite Ursache der Abnutzung (durch gleitende Reibung) an Bedeutung. Wie auf S. 339 schon erläutert, tritt gleitende Reibung bei allen Verzahnungen auf, mit Ausnahme des Wälzpunktes. Für die Berechnung der Gleitgeschwindigkeit geht man am zweckmäßigsten von der relativen Bewegung der beiden Zahnflanken aus, die vorhanden ist, wenn die beiden Wälzkreise ohne Gleiten aufeinander abrollen. Die relative Bewegung ist unabhängig davon, welche zusätzliche Bewegung wir dem ganzen Getriebe geben, und ist am leichtesten zu überblicken, wenn eines der beiden Räder still stehen würde. Wir geben dazu (in Gedanken) dem Getriebe eine zusätzliche Drehbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2 (Abb. 71.49); dann steht das zweite Rad still, während sich das erste mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 \pm \omega_2$ um die Berührungsgerade (durch den Wälzpunkt 0) als Momentenachse dreht. Das $+$ -Zeichen gilt für Außen-, das $-$ -Zeichen für Innenverzahnung. In einem Eingriffspunkt A in der Entfernung e vom Wälzpunkt ist also die relative Geschwindigkeit

$$v_g = e (\omega_1 \pm \omega_2). \tag{71.48}$$

Bezeichnet man die Zahnflanken innerhalb und außerhalb des Teilkreises als Fußflanke und Kopfflanke, so ist jedesmal die Kopfflanke der rascher bewegte Teil. Vor dem Wälzpunkt „stemmt“ die Kopfflanke

des getriebenen Rades die Fußflanke des treibenden, hinter dem Wälzpunkt „streicht“ die Kopfflanke des treibenden Rades die Fußflanke des getriebenen. Nach Versuchen von BBC. (Meldahl) entstehen die Grübchen ausschließlich auf dem „gestemmt“ Fußprofil, auch wenn dieses viel härter als das Kopfprofil ist.

Man setzt nun (als Hypothese) die Abnutzung proportional der Reibungsarbeit je Flächeneinheit. Für ein Flächenelement df einer Zahnflanke, entsprechend einer Eingriffstrecke de , die in der Zeit dt durchlaufen wird, ist die Reibungsarbeit, da der mittlere Zahndruck $= P_z$ und nicht gleich ξP_z ist,

$$dA = \mu P_z \cdot v_g \cdot dt.$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher die Eingriffstrecke de durchlaufen wird ist gleich der Grundkreisgeschwindigkeit $\omega_1 r_g = r \omega_1 \cos \alpha$, so daß $dt = \frac{de}{r \omega_1 \cos \alpha}$ und die Abnutzung proportional

$$dA/df = \mu P_z \frac{(\omega_1 \pm \omega_2) e}{\omega_1 r \cos \alpha} \cdot \frac{de}{df} = \text{prop} \cdot e \frac{de}{df} \tag{71.49}$$

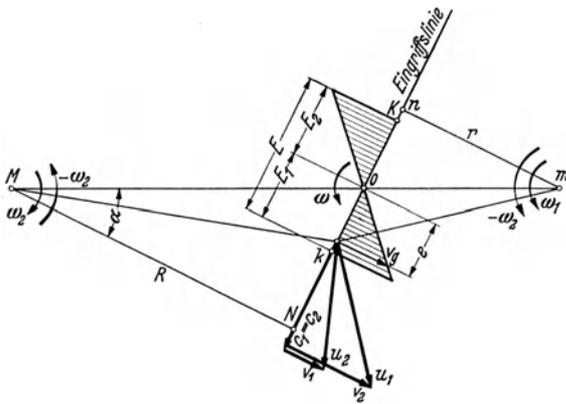


Abb. 71.49. Gleitgeschwindigkeit der Zahnflanken.

ist. Zeichnen wir die zu de gehörenden Profilstücke, die in der Eingriffstellung gezeichnet senkrecht zur Eingriffslinie stehen müssen, so ist aus Abb. 71.50 ersichtlich, daß $e \frac{de}{df_1} = e \operatorname{tg} \delta_1$ ist.

Da für eine gegebene Verzahnung alle anderen Faktoren in Gl. (49) unverändert bleiben, so wird die Abnutzung durch den Faktor $e \operatorname{tg} \delta_1$ dargestellt. Der Wert $e \operatorname{tg} \delta_1$, für jeden Punkt der Eingriffstrecke aufgetragen, ergibt eine Kurve, Abnutzungscharakteristik genannt.

Dabei ist also vorausgesetzt, daß $P_z =$ konstant, d. h. $\varepsilon = 1$ ist, was infolge der unvermeidlichen kleinen Teilungsfehler mit der Wirklichkeit auch übereinstimmt, mit Ausnahme der Kopfkante. Im Wälzpunkt O ist die Abnutzung gleich Null, weil dort die Gleitgeschwindigkeit $v_g = 0$ ist. In den Grundkreispunkten n und N dagegen wird die Abnutzung theoretisch unendlich groß, so daß hier die gleiche Schlußfolgerung gilt wie bei der Berechnung von p_{\max} , nämlich die Teile der Evolvente

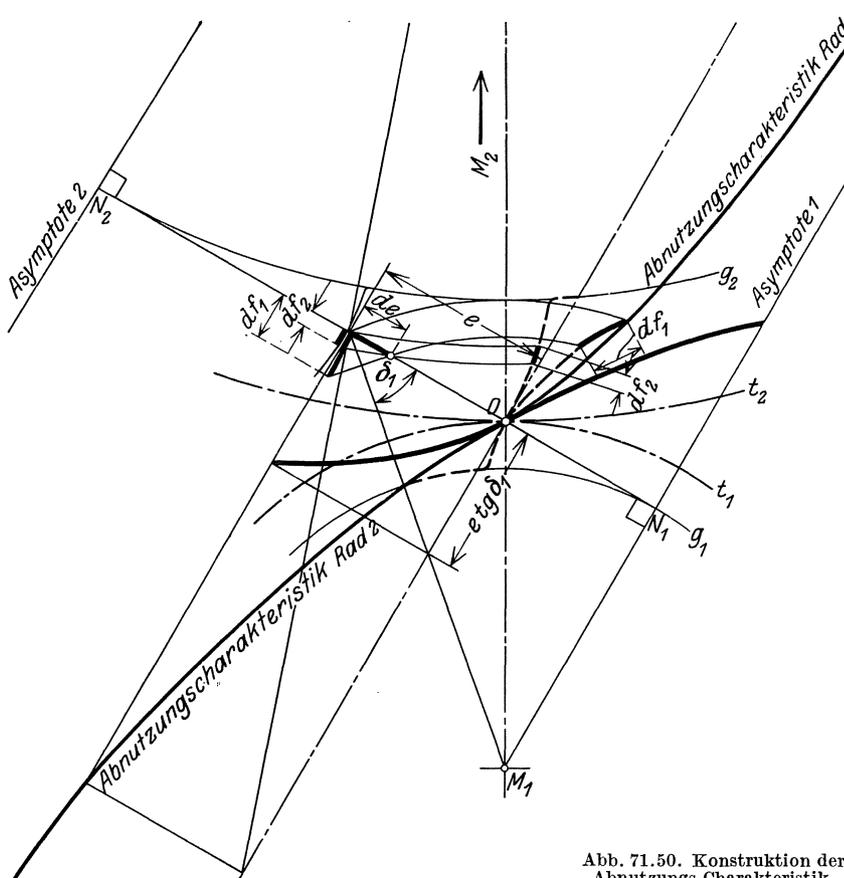


Abb. 71.50. Konstruktion der Abnutzungs-Charakteristik.

in der unmittelbaren Nähe des Grundkreises sollten nicht in Eingriff kommen. Danach wären bei der 15° -Normverzahnung keine Zähnezahlen kleiner als etwa 42 zulässig. Auch bei dieser kleinsten Zähnezahl ist die Abnutzung des Fußprofils bei $i = 2/5$ noch fünfmal so groß als die Abnutzung des Kopfprofils, wie aus Abb. 71.51 hervorgeht; bei größerer Übersetzung wird das Verhältnis noch ungünstiger.

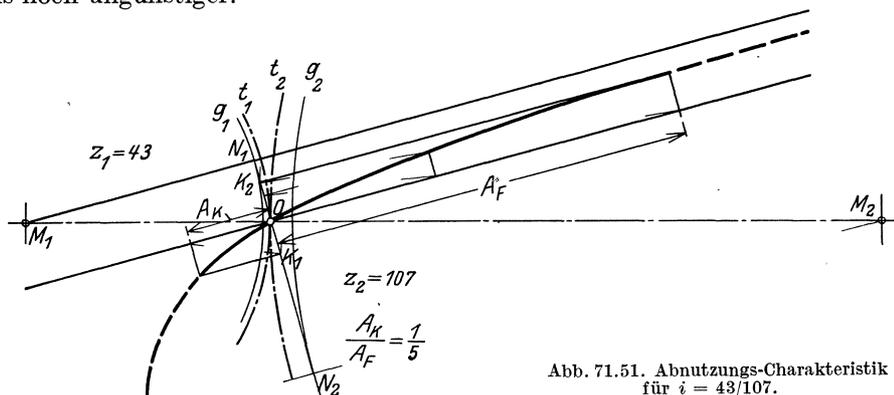


Abb. 71.51. Abnutzungs-Charakteristik für $i = 43/107$.

71.53. Erwärmung der Zahnräder. Durch Integration der Gl. (49.)

$$dA = \mu P_z \left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{R} \right) \frac{ede}{\cos \alpha}$$

über die ganze Eingriffstrecke, also zwischen den Kopfkreisen und von $e = -E_1$ bis $+E_2$ erhält

man die Reibungsarbeit für ein Flankenpaar (Abb. 71.52):

$$A_1 = \mu P_z \left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{R} \right) \frac{E_1^2 + E_2^2}{2 \cos \alpha}. \quad (71.50)$$

Für eine Umdrehung des kleinen Rades (entsprechend z Flankenpaare) ist die Reibungsarbeit $z \cdot A_1$; die Reibungsleistung bei $n/60$ Umdrehungen/sec ist

$$L_r = n_1 \cdot z \cdot A_1 / 60 = \frac{n_1 z}{60} \mu P_z \left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{R} \right) \frac{E_1^2 + E_2^2}{2 \cos \alpha}. \quad (71.51)$$

Der verhältnismäßige Reibungsverlust ist, da die übertragene Leistung

$$L = P_z \omega_1 r \cos \alpha = \frac{\pi n_1}{60} P_z \cdot z \cdot m \cos \alpha \text{ kgmm/s} \quad (71.52)$$

ist:

$$L_r/L = \frac{\mu}{\pi} \left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{R} \right) \frac{E_1^2 + E_2^2}{2 m \cos^2 \alpha}. \quad (71.53)$$

Dieser Verlust wird ein Minimum für $E_1 = E_2 = E/2$, also für Normverzahnung und $i = 1$ (dann ist $E_1^2 + E_2^2 = E^2/2$) und am größten für $E_1 = E$ und $E_2 = 0$, da dann $E_1^2 + E_2^2 = E^2$ ist (Abb. 71.52). Eine Zahnkorrektur, bei der die Kopfhöhe auf Kosten der Fußhöhe vergrößert wird, ist demnach in bezug auf die Reibungsarbeit ungünstiger. Da bei der Normverzahnung $E/2$ immer kleiner als $m/\sin \alpha$ ist, wird, mit $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 0,5$ für $\alpha = 15^\circ$.

$$L_r/L < 16 \frac{\mu m}{\pi} \left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{R} \right) = 10 \mu \left(\frac{1}{z} \pm \frac{1}{Z} \right). \quad (71.54)$$

Der Wirkungsgrad der Verzahnung

$$\eta = 1 - L_r/L = 1 - 10 \mu \left(\frac{1}{z} \pm \frac{1}{Z} \right) \quad (71.55)$$

ist unabhängig von Leistung und Drehzahl, was durch Versuche von Rikli¹ bestätigt wurde. Die durch Reibung erzeugte Wärme

$$Q \leq 10 \mu \left(\frac{1}{z} \pm \frac{1}{Z} \right) \left. \begin{matrix} N_{PS} \cdot 632 \\ N_{kW} \cdot 860 \end{matrix} \right\} \text{ kcal/h} \quad (71.56)$$

verteilt sich auf beide Räder in Verhältnis der Abkühlungsmöglichkeit, und zwar wird das Ritzel, infolge der kleineren Oberfläche wärmer als das Rad. Die Räder müssen also bei der Montage im kalten Zustand etwas Flankenspiel erhalten.

Der Wirkungsgrad der Zahnradübertragung folgt aus Gl. (55) für $\mu = 0,025$ und $z = Z = 40$ zu $\eta = 1 - 10 \times 0,025 \cdot 1/20$ zu 98,75% und für $z = Z = 10$ zu 95%. Um einen guten Wirkungsgrad zu erhalten, müssen große Zähnezahlen gewählt und die Reibzahl durch glatte Oberflächen und gute Schmierung klein gehalten werden. Reibzahlen $\mu = 0,01$ sind bei glatter Oberfläche und ausreichender Schmierung zu erreichen.

Kleine Reibungsverluste sind insbesondere bei der Übertragung großer Leistungen unbedingt notwendig. Wenn z. B. 10000 kW übertragen werden soll, würde bei einem Wirkungsgrad von 99%, 100 kW durch die Zahnreibung in Wärme umgesetzt werden, die an die Umgebung abgeleitet werden müssen. Die Zahnräder laufen immer in geschlossenen Gehäusen und die Wärmeabgabe der Gehäusewandung ist durch die Gleichung

$$Q = \alpha \cdot F \cdot \Delta \vartheta \quad (41.4)$$

gegeben, worin F die kühlende Oberfläche in m^2 und $\alpha \leq 18 \text{ kcal/m}^2 \text{ h}^\circ \text{C}$ ist. Die Übertemperatur $\Delta \vartheta$ der Gehäuseoberfläche kann durch folgende Überschlagsrechnung geschätzt werden.

Das Gehäuse empfängt die Wärme von den Zahnrädern zum größten Teil durch Strahlung. Durch die Luftbewegung wird auch Wärme durch Konvektion übertragen, aber auch Wärme erzeugt durch den Bewegungswiderstand. Vernachlässigen wir die Konvektion, so folgt aus dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz, daß dem Gehäuse eine Wärmemenge Q_1 zugestrahlt wird

$$Q_1 = C_1 \cdot F_1 [(T_1/100)^4 - (T_w/100)^4]$$

während sie die Wärme Q_2 an die Umgebung abstrahlen kann

$$Q_2 = C_2 \cdot F_2 [(T_w/100)^4 - (T_2/100)^4].$$

¹ Rikli: Methode zur Bestimmung des Wirkungsgrades von Zahnrädern. Z. VDI 1911, S. 1436.

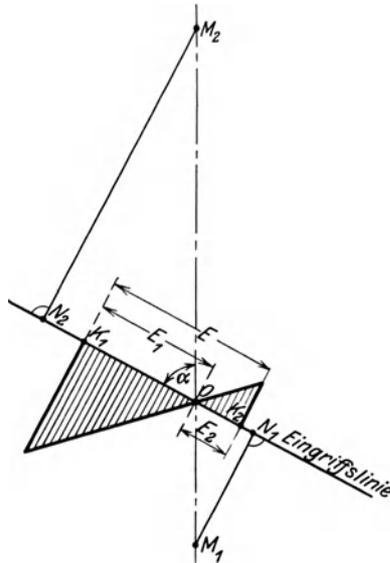


Abb. 71.52.

Im Beharrungszustand sind beide Wärmemengen gleich groß, also

$$C_1 F_1 [(T_1/100)^4 - (T_w/100)^4] = C_2 F_2 [(T_w/100)^4 - (T_2/100)^4] \quad (71.57)$$

In dieser Gleichung ist

C_1 resp. C_2 die Strahlungszahl der Zahnräder, resp. des Gehäuses,
 F_1 resp. F_2 die strahlende Oberfläche der Zahnräder, resp. der Gehäuseoberfläche,
 T_1 , T_w und T_2 die absolute Temperatur der Zahnräder in °K, der Gehäuseoberfläche und der Umgebung.

Ist $C_1 = C_2$ und die Temperatur der Umgebung 18° C, also $(T_2/100)^4 = 71$, so wird

$$(T_1/100)^4 = (F_2/F_1 + 1) (T_w/100)^4 - 71, \quad (71.58)$$

welche Gleichung gelöst werden kann, sobald F_2/F_1 bekannt ist (Abb. 71.53). Durch den Einbau in ein geschlossenes Gehäuse wird die Wärmeabgabe durch Strahlung etwa auf den $1/(F_2/F_1 + 1)$ ten Teil vermindert. Die Räder werden also sehr warm und müssen sorgfältig geschmiert und oft auch besonders gekühlt werden¹. Für Umfangsgeschwindigkeiten bis etwa 15 m/s kann die Schmierung durch Eintauchen des großen Rades er-

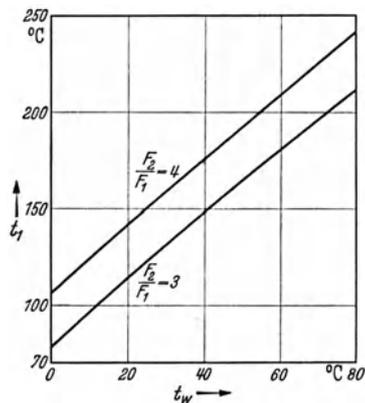


Abb. 71.53.

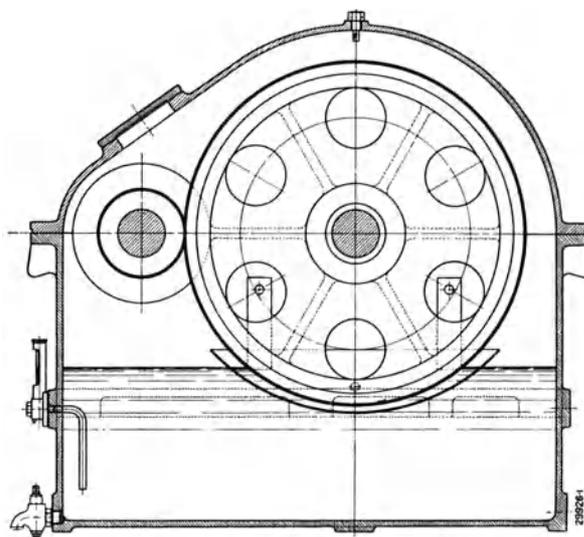


Abb. 71.54. Schmierung der Zähne durch Eintauchen in Öl.

folgen (Abb. 71.54). Bei größeren Geschwindigkeiten wird das Öl abgeschleudert, dann wird Kühl- und Schmieröl durch ein Spritzrohr an der Austrittsstelle der Zahnflanken zugeführt (Abb. 73.13/14).

71.54. Bekämpfung der Zahnradgeräusche² (Schrägverzahnung). Der Nachteil der parallel zur Welle angeordneten (geraden) Zähne liegt darin, daß sie plötzlich belastet bzw. entlastet werden. Sind nun geringe Teilungs- oder Zahnformfehler vorhanden, so schlagen die Zähne aufeinander, wodurch neben den zusätzlichen Beanspruchungen die so störenden Geräusche entstehen.

Das ganze Hörfeld von 20 bis 20 000 Hertz (1 Hertz = eine volle Schwingung je Sekunde) liegt zwischen der Hörgrenze und der Schmerzgrenze. Die Schallintensität (der Schalldruck) wird gemessen in Dyn/cm^2 *. Für das Ohr ist der Lauteindruck eines Tones gleichen Schalldrucks aber verschiedener Frequenz nicht gleich groß. Nach dem Ausschluß für Einheiten und Formelgrößen (A. E. F.) gilt als Normalton ein sinusförmiger, senkrecht zum Kopf ankommender Ton von 1000 Hz, für welchen das Verhältnis:

$$\frac{\text{Intensität an der Schmerzgrenze}}{\text{Intensität an der Hörgrenze}} = 10^{13}$$

ist. Der logarithmisch aufgetragene Hörbereich (Abb. 71.55) wird bei 1000 Hz in 13 Teile geteilt. Die Einheit der Lautstärke ist 1 Phon (= 1 deci Bel der Amerikaner); als Bezugspunkt

¹ Block, H.: Measurement of temperature flashes on gear teeth under extreme pressure conditions. General Discussion on lubrication. London: Okt. 37, Bd. 2 S. 14/20 (Inst. Mech. Eng.).

² Petersen, R. E.: Natural frequency of gears. Trans. A. S. M. E. 52 (1930), Paper APM 52.1. — Graf von Soden, A.: Das Zahnrad als Lärmquelle. Z. VDI 77 (1933), S. 231/8. — Sykes, W. E.: Gear noise causes and corrections. Mech. Engng. 58 (1936), S. 423/26. Übersetzt in Werkzeugmaschine 41 (1937), S. 267/79.

* $1 \text{ dyn/cm}^2 \equiv 1 \mu \text{ bar}$.

ist vereinbart $70 \text{ Phon} = 1 \text{ Dyn/cm}^2$. Für die Geräusche im Maschinenbau kommen nur die Werte zwischen 50 und 70 Phon in Frage. Unter Geräusch versteht man ein Tongemisch, dessen Einzeltöne keinen harmonischen Gesetzen unterliegen.

- 50 Phon = Bürolärm (mit Schreibmaschinen),
- 60 Phon = mäßiger Radio,
- 70 Phon = starker Straßenverkehr (Warnsignale),
- 100 Phon = Kesselschmiede.

Die Hörgrenze zu überschreiten ist bei Zahnrädern nur selten möglich; es müßte dazu $z \cdot n/60 > 20000$ sein.

Die Lautstärke ist abhängig von der Amplitude der Schwingungen, also von der Größe der Verzahnungsfehler. Bedingung für geräuschschwache Zahnräder ist also eine hohe Genauigkeit und Glätte der Zahnflanken. Das Geräuschproblem ist weiter ein Resonanzproblem; die Zähne

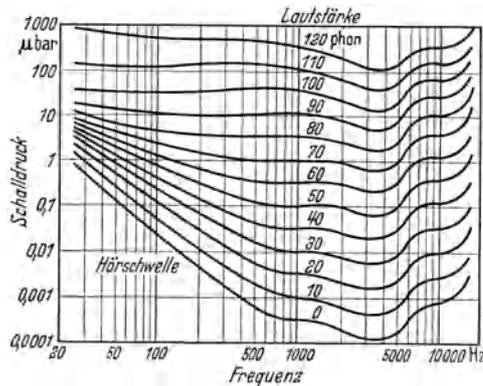


Abb. 71.55. Kurven gleicher Lautstärke für reine Töne (in Phon), nach Fletscher und Munson.

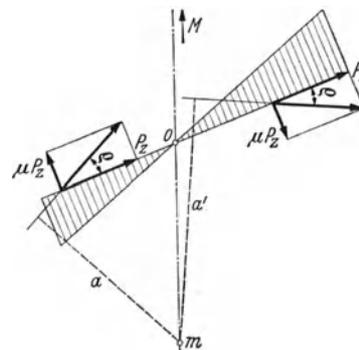


Abb. 71.56. Änderung der Drehmomente durch die Reibung.

sind die Quellen des Geräusches; Radkörper und Räderkasten verstärken es. So entstehen Schwingungen von verschiedener Frequenz; die Zähne rumpeln, heulen, singen, rattern, brummen wimmern usw. Ein glockenförmiger Radkörper (oder Radkasten) verstärkt die Schwingungen von seiner Eigenfrequenz erheblich, wirkt also als Lautsprecher.

Oft kann die Resonanz durch Rippen oder durch Teilung vermieden werden (z. B. aufgeschrunpfte Radkränze).

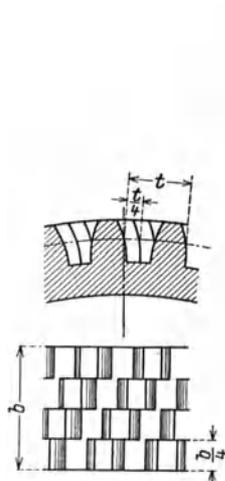


Abb. 71.57. Staffelzähne. (Aus Schiebel.)

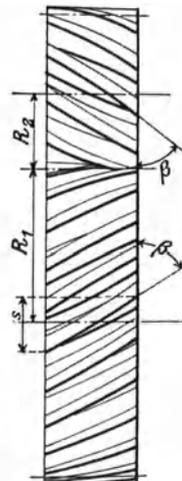


Abb. 71.58. Schraubenzähne. (Aus Schiebel.)

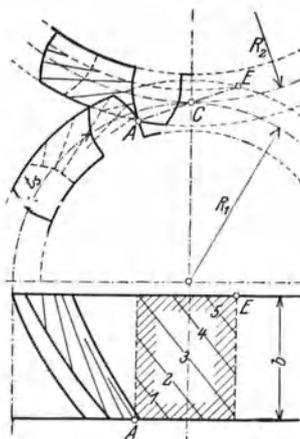


Abb. 71.59. Eingriffsbild des Schraubenzahnes. (Aus Dubbel, Taschenbuch.)

Zahnräder sollen stets starr gelagert werden, damit die Zähne richtig eingreifen können. Exzentrische Räder erzeugen einen Ton von periodisch steigender und fallender Intensität, also ein pulsierendes Geräusch. Ein Ton von veränderlicher Stärke deutet immer auf veränderliche Eingriffsbedingungen, z. B. durch veränderliche Belastung, Teilungsfehler, federnde Wellen usw. Ein sich gleichbleibender Ton bedeutet eine gleichförmige Verzahnung.

Die Oberflächenrauheit erzeugt einen deutlich quieteschendenden Ton, der bei Änderung der Drehzahl und Belastung sich mehr der Stärke als der Höhe nach ändert.

Das Geräusch ist durchdringend und daher um so störender. Durch Auftreten der Zahnreibung ist kein konstantes Drehmoment mehr vorhanden (Abb. 71.56). Im Teilkreis ändert sich die Richtung der resultierenden Zahnkraft um den doppelten Reibungswinkel ϱ ; die Zähne wirken als Streichinstrument.

Bei aus zwei oder mehr Räderpaaren zusammengesetzten Getriebensind auch die „Konsonanz“

(Harmonie-)Erscheinungen zu beachten. Im allgemeinen klingen zwei Töne harmonisch, wenn das Verhältnis ihrer Frequenzen durch kleine ganze Zahlen ausgedrückt werden kann; große ganze Zahlen (z. B. 8/9) wirken disharmonisch. Werden die Zähnezahlen also in harmonischen Verhältnissen gehalten, so können unangenehme Geräusche vermieden werden.

Zerlegt man den geraden Zahn der Breite nach in i gleiche Teile und versetzt diese im Teilkreis je um t/i (Abb. 71.57), so vergrößert sich der Eingriff eines Zahnes um den Betrag t . Die Schraubenzähne entstehen nun durch stetige Versetzung des Zahnprofils über die ganze Breite des Rades derart, daß aus einer geraden Mantellinie des zylindrischen Rades eine Schraubenlinie mit dem unveränderlichen Steigungswinkel β entsteht (Abb. 71.58). Die Einwirkung zweier Zähne aufeinander beginnt im Punkte A und endet in E . Die Berührung findet bei Evolventenverzahnung in geraden Linien statt, die in Abb. 71.59 eingezeichnet sind. Die Dauer der Einwirkung wird um den Sprung $t_s = b \operatorname{ctg} \beta$ (im Teilkreis gemessen) vergrößert; sie erfolgt also in zweifacher Weise, erstens in der Verzahnung selbst und zweitens in dem schrägen Winkel. Weil die Zähne allmählich eingreifen und immer mehrere Zähne gleichzeitig in Eingriff stehen, so werden sie nur allmählich belastet und entlastet, so daß Räder mit Schraubenzähnen einen viel ruhigeren Gang erhalten als Räder mit geraden Zähnen. Die Schrägverzahnung bietet als Hauptvorteil auch eine größere Unempfindlichkeit gegen Verzahnungsfehler, da der Eingriff nicht nur in den einzelnen Flankenpaaren, sondern auch stetig in Richtung der Zahnbreite erfolgt. Sie ist, besonders bei raschlaufenden Trieben, die bessere Verzahnung.

Aus Abb. 71.60 sieht man, wie gewaltig die Schallstärke bei $n = 3000/\text{min}$ gegenüber $1500/\text{min}$ bei Gradverzahnung zugenommen hat. In Abb. 71.61 tritt der günstige Einfluß der Schrägverzahnung gegenüber der Gradverzahnung deutlich hervor.

Wenn P_u die Umfangskraft ist, so wird, infolge der Schrägstellung der Zähne, die Normalkraft (Abb. 71.62)

$$P_n = \frac{P_u}{\sin \beta}, \quad (71.59)$$

wodurch die Zahnreibung bei sonst gleichen Verhältnissen gegenüber den geraden Zähnen um den Betrag $\frac{1}{\sin \beta}$ erhöht wird. Auch tritt eine axial wirkende Kraft

$$P_a = P_u \operatorname{ctg} \beta \quad (71.60)$$

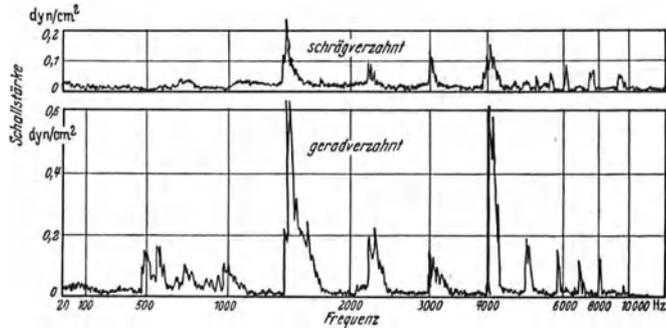


Abb. 71.60. Geräuschanalyse eines Zahnradpaares bei Gradverzahnung. Beachte die starke Zunahme der Schallstärke mit der Drehzahl.

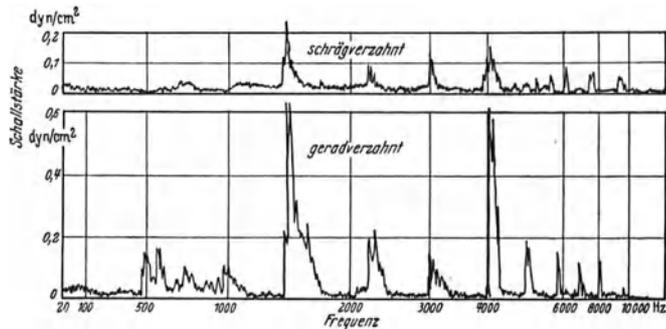


Abb. 71.61. Vergleich der Schallstärken bei Grad- und bei Schrägverzahnung; $n = 1500 \text{ min}$. (Versuche von E. Graf von Soden, Friedrichshafen.)

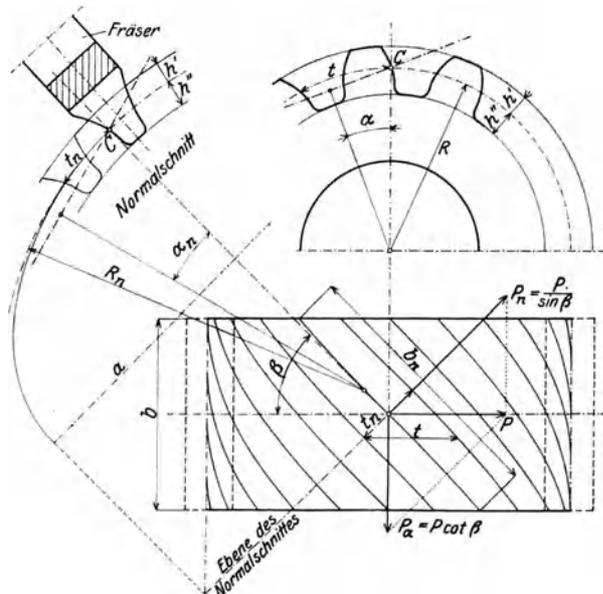


Abb. 71.62. Flankenermittlung des Schraubenzahnes (aus Schiebel).

auf, die durch ein Längslager oder durch Pfeilzähne (Abb. 71.63 a, b) aufgenommen werden kann. Brown, Boveri & Co. in Baden gleicht die axiale Kraft unmittelbar in eigenartiger Weise (Abb. 71.64) so aus, daß keine Übertragung auf die Welle oder auf das Gehäuse stattfindet. Die schwach geneigten Kegelflächen, die sich nur auf einer Linie berühren, können ähnlich wie das schwach geneigte Michell-Lager große Drücke aufnehmen. Die axiale Kraft ist durch die Kleinheit der Druckfläche begrenzt.

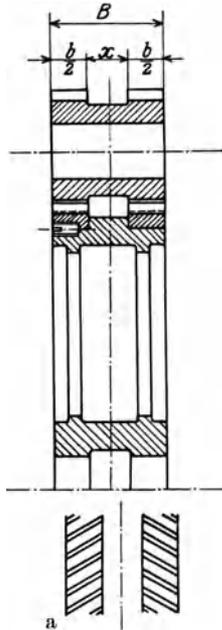


Abb. 71.63. Zahnrad mit Pfeilzähnen (nach Schiebel).
a einteilig mit Zwischenraum für den Fräser
b zweiseitig.

Die Zahnschräge wird sehr verschieden ausgeführt; der Neigungswinkel $90 - \beta$ wechselt etwa zwischen 10 und 45° . Kleinere Zahnschräge geben kleinere axiale Kräfte; bei größerer Neigung ist der Gang ruhiger, da mehr Zähne gleichzeitig im Eingriff stehen. Die Neigung sollte jedenfalls mindestens so groß sein, daß, linear auf einer Mantellinie gemessen, mindestens zwei Zähne gleichzeitig im Eingriff bleiben.

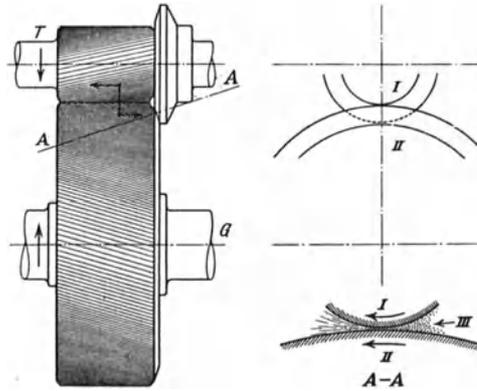


Abb. 21.64. Zahnräder mit schrägen Zähnen und Druckausgleich durch schwach geneigte Kegelflächen (BBC).
 T = Treibend, G = Getrieben, I = Ritzel, II = Rad, III = Öl.

Die Zahnteilung t_n im Normalschnitt (Abb. 71.62) wird im Gegensatz zur Umfangsteilung t als „Normalteilung“ bezeichnet:

$$t_n = t \sin \beta. \tag{71.61}$$

Durch die Normalkraft P_n wird der Zahn in gleicher Weise beansprucht wie bei den geraden Zähnen. Aus

$$P_n = \frac{\sigma_b}{\gamma_n} b_n \cdot t_n \tag{71.33}$$

folgt mit $P_n/b_n = P/b$

$$\xi P = \frac{\sigma_b}{\gamma_n} b t_n. \tag{71.62}$$

Die früher abgeleiteten Gleichungen für die Festigkeitsberechnung von geraden Zähnen können demnach auch für schräge Zähne verwendet werden, wenn an Stelle der Umfangsteilung die Normalteilung eingesetzt wird.

Auch Gleichung 54 für die größte Flächenpressung p_{max} bleibt für gerade und schräge Zähne gleich,

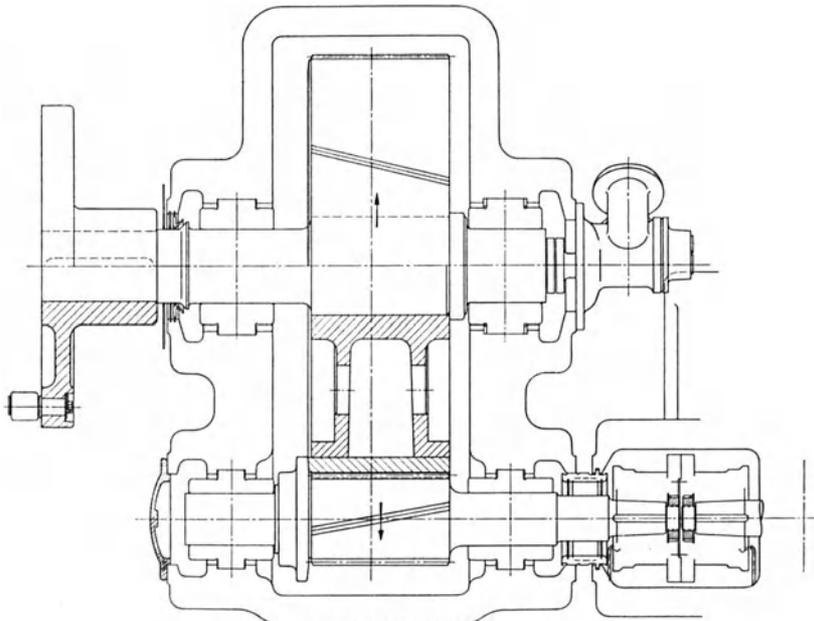


Abb. 71.65. Zahnradgetriebe mit Schrägverzahnung und Druckausgleich durch schwach geneigte Kegelflächen (BBC). Elastische Kupplung sowohl auf der Rad- wie auf der Ritzelwelle.

wenn sie auf den Normalschnitt angewandt wird. Der Normalschnitt schneidet den Teilrißzylinder in einer Ellipse (Abb. 71.62), deren Achsen $a = \frac{R}{\sin \beta}$ und $b = R$ sind. Ihr Krümmungsradius im Punkte C

$$\rho = \frac{a^2}{b} = \frac{R}{\sin^2 \beta} = \frac{d}{2} \quad (71.63)$$

kann angenähert als Teilkreisradius des Normalschnittes angesehen werden. Mit $b_n = b/\sin \beta$ wird für Schrägverzahnung:

$$\left(\frac{p_{\max}}{173,4} \right)^2 = \frac{\xi P_1 (1 + i)}{d/\sin^2 \beta}, \quad (71.64)$$

worin b und d Radbreite und Ritzeldurchmesser sind.

Die Berechnung der zusätzlichen Kräfte nach Gl. (40) gilt nur für Gradverzahnung. Räder mit Schraubenzähnen haben erfahrungsgemäß einen viel ruhigeren Gang; sie sind auch weniger empfindlich gegen Zahnformfehler, so daß die zusätzlichen Kräfte hier sicher viel kleiner sind und auch von der Zahnneigung abhängen. Da Gl. (40) eine empirische ist, kann sie nicht

ohne weiteres auf Schrägverzahnung erweitert werden. Die A.S.M.E. beabsichtigt, die Versuche auch für diese Zahnräder auszudehnen. Bis diese vorliegen, kann etwa mit den halben ξ -Werten der Gradverzahnung gerechnet werden.

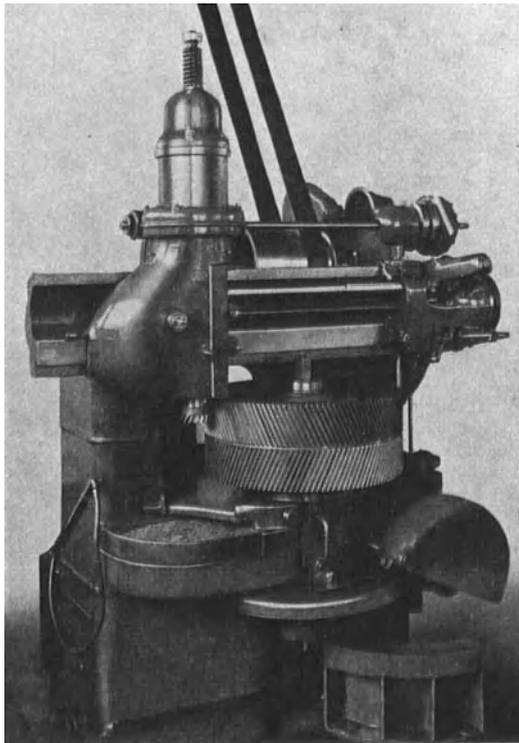


Abb. 71.66. Die „Fellow“-Stirnrad-Stoßmaschine.

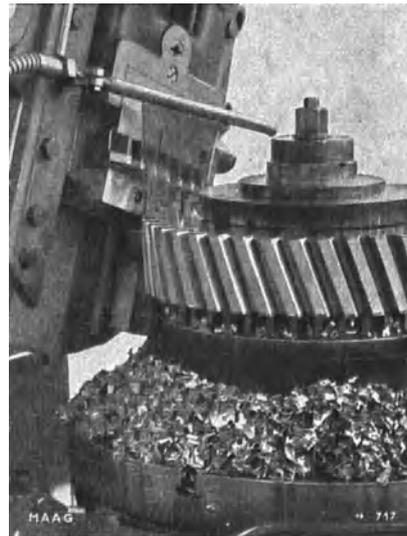


Abb. 71.67. „Maag“-Zahnradhobelmaschine bei der Herstellung von schrägen Zähnen.

Das Abwälzverfahren ist ohne weiteres für die Herstellung von Schraubenzähnen verwendbar (Abb. 71.66 bis 68). Die Schaltbewegung steht immer unter dem Arbeitsdruck, und die Genauigkeit der Herstellung der Zahnform ist hauptsächlich auch von der Genauigkeit der Fräsmaschine abhängig.

Die Pfeilverzahnung mit den beiden gleichen und entgegengesetzten Zahnschrägen ist günstiger, weil das Achsiallager überflüssig wird. Sie kann (wegen des erforderlichen Auslaufes des Werkzeuges) nur durch Einschalten eines Zwischenraumes x zwischen beiden Schrägen (Abb. 71.62a) oder durch Zweiteilung der Räder, die in entgegengesetzter Richtung geschnitten sind (Abb. 71.62b), oder auch durch Unterbrechung der Zahnflanken in der Pfeilspitze (Wüest-Verzahnung) hergestellt werden. Ihre genaue Herstellung ist besonders schwierig, weil die beiden Schrägen genau gleich und die Zähne in den beiden Hälften gleichzeitig auf der ganzen Breiten aufliegen sollten. Die Erfahrung zeigt, daß dies praktisch nicht erreichbar ist. Kleine Abweichungen (die auch bei guten Ausführungen nicht immer zu vermeiden sind) haben zur Folge, daß die Lage der Pfeilräder nicht eindeutig festgelegt ist. Das Ritzel pendelt dann hin und her und

verursacht bei hohen Drehzahlen erst recht starke Geräusche. Die nächste Verbesserung brachte die Böttcher-Verzahnung¹, auch als Bogenverzahnung bekannt. Sie ersetzt den Pfeil durch einen stetigen Bogen. Bei der Herstellung der Zahnflanken nach dem Wälzverfahren sind grundsätzlich drei unabhängige Bewegungen notwendig:

1. Die Schabbewegung des Werkzeuges (Hobeln, Stoßen, Fräsen),
2. die gegenseitige Wälzbewegung von Werkstück und Werkzeug, und
3. eine Schaltbewegung beim Übergang von einer Zahnflanke zur nächsten.

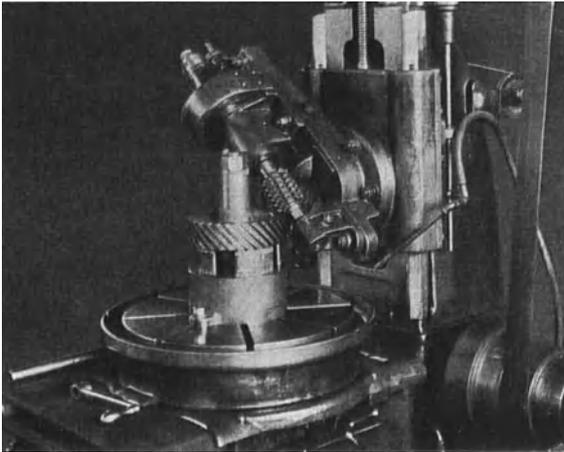


Abb. 71.68. Herstellung der Schraubenzähne mit dem Abwälzfräser.

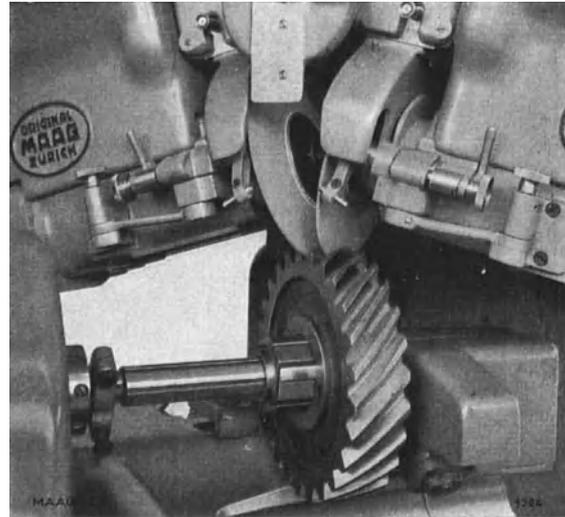


Abb. 71.69. Maag-Schleifmaschine.

Beim neuen Verfahren, das sich besonders bei der Bearbeitung von Kegelhäusern eingeführt hat (Böttcher, Monneret, Reinecker, Brandenberger) erfolgt die zweitgenannte Bewegung (also das Abwälzen) so langsam, daß vom Beginn bis zum Ende der Verzahnung nur eine einzige Wälzung stattfindet. Die Hauptbewegung des kreisenden Schabwerkzeuges erzeugt in stetigem Schnitt die Bogenform eines Zahnes, überspringt dann mehrere Zähne und kehrt erst nach n Umdrehungen wieder zu ihrem Ausgangspunkt zurück. Die Maschine hat grundsätzlich drei Messer, eines zum Vorschuppen und je eines zur Bearbeitung der beiden Flanken eines Zahnes.

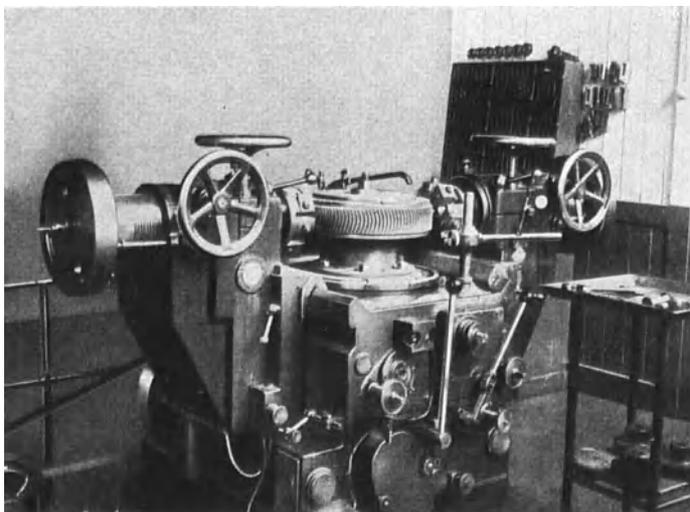


Abb. 71.70. Forster-Maschine.

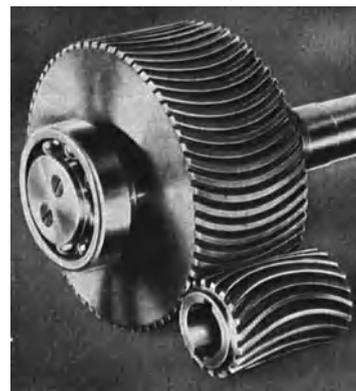


Abb. 71.71. Forster-Zahnäder.

Die Bogenverzahnung hat gegenüber der Pfeilverzahnung den Vorteil des genauen und dadurch geräuschlosen Ausgleiches der Achsialkraft. Sie verbindet mit der Geräuschlosigkeit den Vorteil einer höheren Belastbarkeit; die Räder werden im allgemeinen kleiner, leichter und

¹ DRP. 312 859, Nov. 1909 und DRP. 319 173, März 1912.

$e = 0,003$ bis $0,004$ cm für gute und leichte bis
 $e = 0,00075$ cm für die genaueste und geschliffene Ausführung.

Mit dem gewählten e -Wert, ξ aus der empirischen Gl. (40) berechnen (vgl. Abb. 71.72). C ist ein Maß für die Steifigkeit eines Flankenpaares (Federkonstante), abhängig vom Werkstoff und von der Form der Zähne. Für Stahl auf Stahl bei 15° (20°) Normverzahnung ist $C = 112000$ ($C = 116000$) kg/cm². Für Gußeisen ist C halb so groß.

Die ξ -Werte der Abb. 71.72 gelten innerhalb der Versuchsgrenzen $120/480 \varnothing$ für Geradverzahnung und ungefederte Radkränze ($m'_0 \approx 10^{-2}$ kg · s²/cm).

Für größere oder kleinere Räder und für gefederte Kränze muß P_d im Verhältnis der wirksamen reduzierten Massen geändert werden. Wenn möglich, soll $\xi < 2$ sein, um das Abheben und Wiederaufschlagen der Zahnflanken zu verhindern. Bis genauere Versuche vorliegen, kann ξ für Schrägverzahnung etwa halb so groß gewählt werden.

3. Berechnung der Flächenpressung p_{\max} aus Nomogramm 71.74.

Für normale Ausführung liegt p_{\max} zwischen 40 und 60 kg/mm² entsprechend einer Brinellhärte von 230—320 kg/mm². Härtere Räder müssen geschliffen werden (sehr teuer). Je niedriger p_{\max} um so billiger ist der Werkstoff.

Die Nomogrammwerte für p_{\max} gelten für Stahlräder mit Gradverzahnung und 15° Eingriffswinkel. Für Gußeisenräder sind diese Werte durch $\sqrt{2}$ zu dividieren.

Für 15 16 17 18 19 20° Eingriffswinkel ist p_{\max}
 mit 1 0,971 0,946 0,922 0,901 0,882 zu multiplizieren.

Für Schrägverzahnung ist an Stelle von $d, d/\sin\beta$ zu setzen. Für große Zähnezahlen und sehr genaue Ausführungen ($\xi < 2$) kann p_{\max} durch 2 dividiert werden.

Geben die geschätzten Abmessungen keinen geeigneten Wert für p_{\max} , dann Neuentwurf, wobei zu beachten ist, daß P_1/d prop. mit $\frac{N/n}{d^3}$ ist.

4. Kontrolle auf Festigkeit, nach Gl. (71.36) (Nomogramm 71.14) mit $\xi_{\min} = 3$ für vereinzelt auftretende Stöße.

5. Die p_{\max} -Werte garantieren eine Lebensdauer der Räder größer als 10^9 Umdrehungen. Für langsam laufende oder aussetzende Triebe kann p größer gewählt werden. Die Lebensdauer t in Stunden kann berechnet werden aus:

$$\left(\frac{p}{p_{\text{zul}}}\right)^{6.6} = \frac{1,6 \cdot 10^7}{n \cdot t}; \quad NB: 2^{6.6} = 100.$$

Zahlentafel 71.8. Zulässige Werte von p_{\max} .

	$K_z \cdot \text{kg/mm}^2$	$H \cdot \text{kg/mm}^2$	$p_{\max} \cdot \text{kg/mm}^2$	
EN 15	w	55	140	23
	h	80	240	43
ECN 25	w	70	200	35
	h	100	300	55
ECN 35	w	75	220	39
	h	120	350	65
ECN 45	w	83	245	44
	h	140	400	75
St C 60 = St 70	w	70	180	31
	h	90	260	47
St C 45 = St 60	w	60	150	25
	h	75	235	29
St C 35 = St 50	w	50	125	20

Einsatzstähle

C-Stähle

Zahlenbeispiel 71.3. Ein Triebwagenmotor hat eine Stundenleistung von 150 PS bei $n = 790/\text{min}$ und treibt durch die Übersetzung $d/D = 203/640$ das Laufrad von 1040 mm Durchmesser an. Wie groß ist p_{\max} bei 128 mm Radbreite und σ_b , wenn das größte Anfahrmoment fünfmal so groß ist als bei der Normalleistung?

Die Umfangsgeschwindigkeit der Zahnräder ist $v = \frac{\pi \cdot 0,203 \cdot 790}{60} = 8,45 \text{ m/s}$,

also relativ klein. Die Umfangskraft/cm Radbreite ist

$$P_1 = \frac{150 \cdot 75}{8,45 \cdot 12,8} = 1340/12,8 = 104 \text{ kg/cm}.$$

Nimmt man nach S. 362 $e = 1,2 \cdot 10^{-3}$ cm, $C = 112 \cdot 10^3$, so wird $A/P_1 = 1 + \frac{Ce}{P_1} = 2,3$, so daß nach Abb. 71.72, $\xi = 2,6$ ist. Durch Anordnung eines federnden Radkranzes kann ξ vielleicht auf den günstigen Wert 2 reduziert werden. Mit $\xi = 2$ folgt aus Gl. (72.45) oder Nomogramm 71.74, $p_{\max} = 64 \text{ kg/mm}^2$. Mit der größten Anlauf-Umfangskraft $P_1 = 5 \cdot 104 = 520 \text{ kg/cm}$, wird für $m = 5$, also $z = 40$ und für leicht korrigierte Zahnform $\gamma = 9$. Aus Gl. (71.36) oder Nomogramm 71.74 folgt dann $\sigma = 50 \text{ kg/mm}^2$.

Wegen der hohen Flächenpressung ist für das Ritzel ein vergüteter, zäher Chrom-Nickelstahl mit einer Bruchfestigkeit von etwa 100 bis 110 kg/mm² zu verwenden; das große, langsamere

laufende Rad darf etwas weicher sein. Die Bruchgefahr ist trotz dem großen Anlaufmoment weniger groß als die Abnutzungsgefahr im normalen Betrieb, so daß die kleine Teilung ($m = 5$) durchaus gerechtfertigt ist. Diese Zahnräder werden aber im allgemeinen mit viel größerer Teilung ($m = 10$) ausgeführt. Die kleinere Teilung ist mit Rücksicht auf die günstigeren Eingriffsverhältnisse sicher vorteilhafter. Die Räder breiter zu machen ist wegen der fliegenden Anordnung nicht zu empfehlen.

Zahlenbeispiel 71.4. Welche Abmessungen müssen die Zahnräder einer Schiffsturbine erhalten, wenn eine Leistung $N = 5000$ PS von $n_1 = 4180$ Uml/min auf $n_2 = 475$ übertragen werden soll?

Wegen der hohen Drehzahl und dem großen Übersetzungsverhältnis $475/4180$ ist der Ritzeldurchmesser möglichst klein zu wählen. Aus dem Drehmoment

$$M_d = 71\,620 \cdot 5000/4180 = 86\,000 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

folgt der Wellendurchmesser aus der Gleichung: $\frac{1}{5} d^3 \tau = 86\,000 = \frac{1}{5} d^3 \cdot 300$

zu rd. 120 mm. Wir wählen $d_1 = 200$ mm und $b = 2 \cdot d = 2 \cdot 200$ mm. Dann ist

$$P_1 = \frac{86\,000}{2 \cdot 10 \cdot 20} = 215 \text{ kg/cm}.$$

Setzen wir die zulässige Flächenpressung auf 5000 kg/cm^2 fest und wählen für die Schrägverzahnung $\xi = 2$, so folgt aus Gl. 71.45 oder Nomogramm 71.76

$$d_n = r d 60 \text{ cm} = d_1 / \sin^3 \beta,$$

so daß $\beta = 45^\circ$ sein muß.

Die Festigkeitsrechnung, Gl. 36 (oder Nomogramm) gibt, wenn σ_b zu 4000 kg/cm^2 angenommen wird, mit $\xi = 2$ und den geschätzten Wert $\gamma_n = 8$, den Modul im Normalschnitt $m_n = 4,5$, so daß die Umfangsteilung $m = 4,5/\sin \beta = 6,4$ mm und bei $d_1 = 200$, $z_1 = 31$.

Vielleicht ist es zweckmäßiger, die Zähnezahle etwas höher zu wählen, $m_n = 4,25$ anzunehmen und dafür die Räder etwas breiter, z. B. $2 \cdot 225$ statt $2 \cdot 200$ mm zu machen.

72. Räder für nicht parallele Wellen.

Für zwei sich schneidende Achsen gehen die zylindrischen Räder in Kegelräder oder konische Räder über. Als Grundform haben wir hier zwei aufeinander abwälzende Kegelflächen, Teilrißkegel genannt. Die relative Bewegung der Kegel entspricht einer Drehung um die Momentanachse OC (Abb. 72.1) mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2 \omega_1 \omega_2 \cos \varphi}. \quad (72.1)$$

Die Zahnflanken sind ebenfalls Kegelflächen, deren Spitzen mit der gemeinsamen Spitze der Teilrißkegel zusammenfallen (Abb. 72.2).

Das Übersetzungsverhältnis ist (Abb. 72.1)

$$i = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Die Bearbeitung der Kegelräder geschieht nach dem Abwälzverfahren (Bilgram, Gleason¹ Brandenberger). Abb. 72.3 zeigt Kegelräder mit Schraubenzähnen.

Die Festigkeitsrechnung wird mit einem mittleren Zahndruck, entsprechend einem mittleren Radius des Teilrißkegels, durchgeführt.

Genauer kann die Kraftübertragung durch folgende Überlegung berechnet werden. Wenn die Zahnflanken sich unbelastet auf der ganzen Breite berühren, so bleibt die Berührung unter der Wirkung der Zahnkraft nur dann bestehen, wenn die elastischen Durchfederungen proportional den Radien sind. Für Innen- und Außenradius r_1 resp. r_2 muß also

$$f_1/f_2 = r_1/r_2$$

sein. Nun ist die Durchbiegung f proportional Ph^3/JE und da h proportional mit r und J pro-

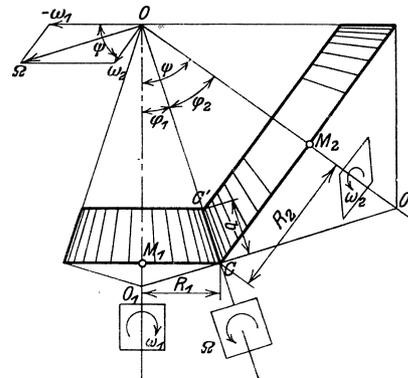


Abb. 72.1. Relativbewegung und Übersetzung bei Kegelrädern. (Aus Schiebel.)

¹ Hofmann, F.: Gleason-Spiralkegelräder. Berlin: Julius Springer 1939.

portional mit h^3 ist, sind die Durchfederungen den übertragenen Kräften proportional, d. h.

$$f_1/f_2 = r_1/r_2 = P_1/P_2.$$

Schreibt man deshalb $P = p_1 \cdot r$, so ist p_1 eine Konstante, die aus der Gleichung folgt, daß die

totale Zahnkraft $P = \frac{p_1}{b} \int_{r_1}^{r_2} r \cdot dr = \frac{p_1}{2b} (r_2^2 - r_1^2)$ ist. Das übertragene Drehmoment ist

$$M_d = \frac{p_1}{b} \int_{r_1}^{r_2} r^2 dr = P_m \cdot r_m = \frac{p_1}{3b} (r_2^3 - r_1^3), \text{ so daß}$$

$$r_m = \frac{2}{3} \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \tag{72.2}$$

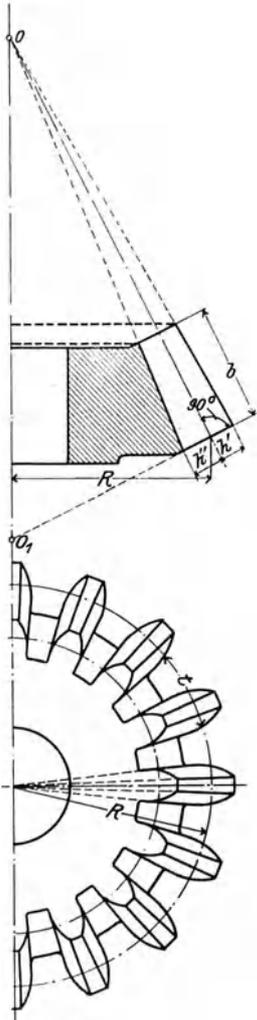


Abb. 72.2. Zahnform der Kegelräder (aus Schiebel).

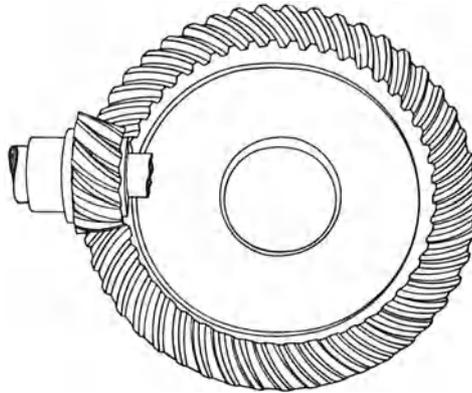


Abb. 72.3. Kegelräder mit Schraubenzähnen. (Aus Jurthe-Mietschke.)

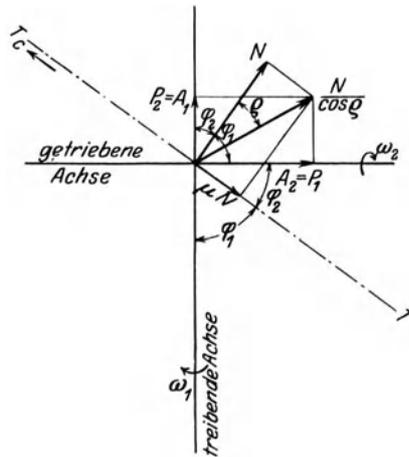


Abb. 72.4. Kraftwirkung bei Schraubenzähnen.

immer kleiner als das arithmetische Mittel $1/2 (r_1 + r_2)$ ist. Die übliche, einfachere Berechnung mit dem arithmetischen Mittel bietet also eine etwas erhöhte Sicherheit. Auch die Berechnung der Flächenpressung und alle bei den Stirnrädern gemachten Untersuchungen können durch Einführung des mittleren Radius sinngemäß auf die Kegelräder übertragen werden.

Zur Übertragung der Drehbewegung bei sich kreuzenden Achsen eignen sich auch Stirnräder mit Schraubenzähnen, sog. „Schraubenzahnräder“ (Abb. 72.4). Im Wälzpunkt findet während der Bewegung ein Gleiten der Zähne in der Richtung der gemeinsamen Tangente T statt. Das Übersetzungsverhältnis ist das Verhältnis der Zähnezahlen:

$$i = z_1/z_2 = \frac{2 \pi r_1/t_1}{2 \pi r_2/t_2}.$$

Da die Teilungen im Normalchnitt der beiden Räder gleich sind, also

$$t_n = t_1 \sin \varphi_1 = t_2 \sin \varphi_2$$

ist, wird für $\varphi_1 + \varphi_2 = 90^\circ$; also für sich senkrecht kreuzende Achsen:

$$i = \frac{D_1}{D_2} \cdot \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{D_1}{D_2} \operatorname{tg} \varphi_2. \tag{72.3}$$

Die Raddurchmesser können also für ein gegebenes Übersetzungsverhältnis beliebig gewählt werden, womit dann der Neigungswinkel festgelegt ist. Nur für $\varphi_1 = \varphi_2 = 45^\circ$ wird $i = r_1/r_2$.

Bei der Kraftverteilung auf die beiden Räder kann die eigentliche Zahnreibung gegenüber der Reibung beim Gleiten in der Längsrichtung der Zähne vernachlässigt werden. Der Normaldruck N (Abb. 72.4) steht senkrecht zur Zahnrichtung, und die Reibung μN ist entgegengesetzt zur Gleitrichtung gerichtet. Die resultierende Kraft $\frac{N}{\cos \varrho}$ ist unter dem Reibungswinkel ϱ gegen N geneigt. Die senkrecht auf den Drehachsen stehenden Komponenten dieser Resultierenden geben die Umfangskräfte P_1 und P_2 , während A_1 und A_2 die Komponenten in der Achsrichtung

sind. Aus der Abb. 72.4 folgt für das treibende Rad

die Umfangskraft

$$P_1 = \frac{N \cos(\varphi_1 - \varrho)}{\cos \varrho} = A_2 \quad (72.4)$$

und der Axial Schub

$$A_1 = \frac{N \sin(\varphi_1 - \varrho)}{\cos \varrho} = P_2 \quad (72.5)$$

Der Wirkungsgrad des Getriebes ist:

$$\eta = \frac{P_2 v_2}{P_1 v_1} = \frac{P_2 r_2 \omega_2}{P_1 r_1 \omega_1}$$

und mit Gl. (4) u. (5), da $\varphi_1 = 90 - \varphi_2$ ist:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg}(\varphi_2 + \varrho)} \quad (72.6)$$

In Abb. 75.4 ist für verschiedene Werte von μ der Wirkungsgrad in Abhängigkeit von der Zahnschräge φ_2 aufgetragen. Aus der Abbildung folgt, daß zwischen 30 und 60° die Zahnschräge keinen nennenswerten Einfluß auf den Wirkungsgrad hat.

Für die Herstellung der Schraubenzähne ist der Normalschnitt maßgebend: die Zähne beider Räder müssen gleiche Normalteilung t_n haben.

Bei der Evolventenverzahnung bleibt der Eingriff im Normalschnitt auf die innerhalb der beiden Kopfkreise liegende Eingriffsstrecke AE (Abb. 72.5) beschränkt.

Die beiden Eingriffsebenen der Räder I und II haben nur diese Eingriffsgerade gemeinsam, so daß die Einwirkung der Schraubenzähne nur in den einzelnen Punkten dieser Geraden erfolgen kann. Die Zahnflanken berühren sich immer nur in einem Punkt. Die nacheinander zur Berührung gelangenden Punkte liegen in den schrägen Linien $A'E'$ und $A''E''$. Eine Vergrößerung der Zahnbreite über das Eingriffsgebiet AE hinaus ist also zwecklos. Man wählt deshalb die Zahnbreite $b \approx t$.

Die punktweise Berührung der Zähne, verbunden mit der starken gleitenden Reibung an der Berührungsstelle, verursacht eine rasche Abnutzung, so daß die Schraubenzähne zur Kraftübertragung wenig geeignet sind. Auch bei harten Materialien können nur kleine Umfangskräfte übertragen werden.

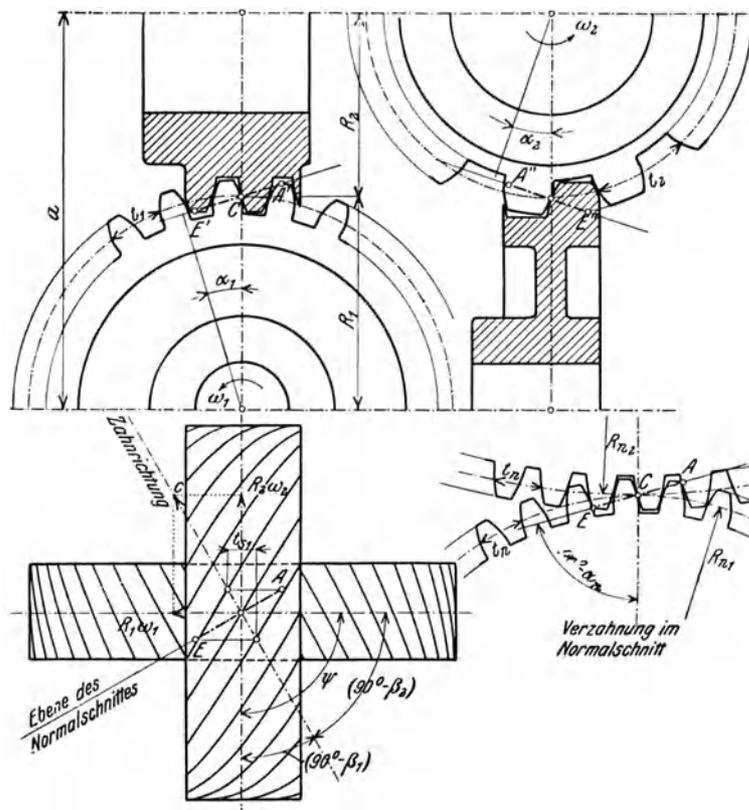


Abb. 72.5. Eingriffsverhältnisse der Schraubenzähne. (Aus Dubbel, Taschenbuch.)

73. Formgebung und Anordnung der Räder.

Schrifttum.

Wolf, O.: Konstruktive Entwicklung der Getriebetechnik unter besonderer Berücksichtigung der Anwendung hochwertiger Werkstoffe. Z. VDI 80 (1936), S. 1003/8 und Masch.-El-Tagung Aachen S. 50/61. — Altmann, F.: Die Bauformen gleichachsiger Stirnradumformer. Masch.-Bau (1927), S. 1083/87. — Graf von Soden: Wechselgetriebe für Kraftwagen (Zahl der Übersetzungen, Abstufungen). Masch.-Bau 3 (1923/24), S. 200/03. — Wagner, L.: Der deutsche Fahrzeug-Getriebebau. Dtsch. Mot.-Z. 14 (1937), S. 122/32. — Wallichs, A. u. Schöpke, H.: Die Getrieberechnung unter besonderer Berücksichtigung der Drehzahlnormung. VDI-Verlag 1936. — Schöpke, H.: Kleinste Zähnezahlsomme von Zahnradwechselgetrieben mit geometrischer Abstufung. Masch.-Bau 17 (1938), S. 645/47. — Doppelt gebundene Zahnradwechselgetriebe kleiner Abmessungen. Masch.-Bau 18 (1939), S. 145/47. — Schulz, G.: Eindeutige Berechnung von Wechselrädern innerhalb gegebener Übersetzungstoleranzen, mit der Rechenmaschine. Werkstattstechn. 33 (1939), S. 38/39. — Finkelnburg, H. H.: Wechselrädernetriebe. Masch.-Bau 18 (1939), S. 313/14. — Jungkunz, E.: Grundsätzliches über den Aufbau von Wendegetrieben. Demag-Nachr. 11 (1937) C, S. C 27/33.

Kleine Räder werden aus einem Stück mit der Welle (Abb. 73.1) oder aus vollen Scheiben hergestellt (Abb. 73.2). Gegossene Räder (bis Mod. 6) werden als volle Scheiben gegossen; bei großen Durchmessern macht man Aussparungen und Rippen (Abb. 73.3).

Die übrigen Räder werden als Speichenräder ausgeführt (Abb. 73.4, Armzahl $i = \frac{1}{3} \sqrt{D_{mm}}$). Es ist gebräuchlich, die Festigkeit der Arme so zu berechnen, als ob die größte Umfangskraft $i/3$ der Arme auf Biegung beansprucht würde.

Nabenstärke, wenn das Rad das volle Drehmoment der Welle übertragen muß:

für Gußeisen: $\delta = 0,4 d + 1 \text{ cm}$, für Stahlguß: $\delta = 0,3 d + 1 \text{ cm}$.

Wenn Radgewicht und Umfangskraft ungefähr gleich groß sind, muß die Anordnung so gewählt werden, daß der Zahndruck die Wirkung des Radgewichtes unterstützt. Sonst könnte bei Belastungsschwankungen ein labiler Zustand der Lagerreaktion eintreten.

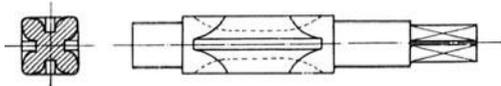


Abb. 73.1. Ritzel aus der Welle herausgefräst. (Aus Schiebel.)

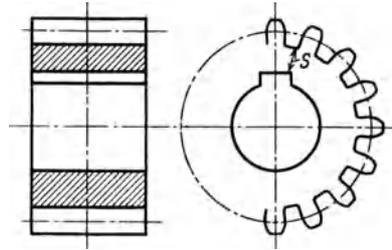


Abb. 73.2. $s < 0,6 t$ für S.E. und Stahlguß, $s < 0,8 t$ für Gußeisen.

Wenn eine Änderung der Drehzahl gewünscht wird, so werden Wechselgetriebe verwendet. Die Anordnung nach Abb. 73.5, bei der jedes Rad B einzeln geschaltet wird, gibt die kürzeste, aber auch teuerste Bauart. Die Steuerung der einzelnen Räder muß gegenseitig verriegelt werden, damit immer nur ein Räderpaar in Eingriff ist. Bei der Anordnung nach Abb. 73.6 ist eine besondere Verriegelung nicht notwendig; der Getriebekasten wird aber wesentlich breiter.

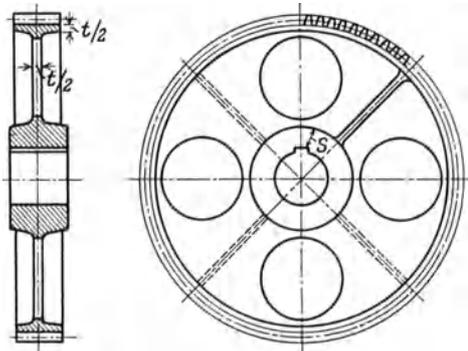


Abb. 73.3. Volle Scheiben, evtl. mit Aussparungen und Rippen. Kranzstärke $t/2$ für $t < 6\pi$.

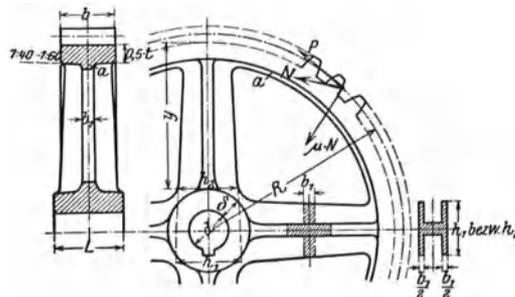


Abb. 73.4. Große Zahnräder mit Armen. (Aus Dubbel, Taschenbuch.)

Abb. 73.7 zeigt ein Wechsel- und Wendegetriebe. Das Norton- oder Schwenkradgetriebe (Abb. 73.8) und das Wechselradgetriebe mit Ziehkeil (Abb. 73.9) sind besonders gut geeignet, eine große Anzahl Stufen in einem kleinen Raum unterzubringen. Die Lagerung des Schwenkrades macht es nur für kleine Kraftübertragung geeignet, so daß es ausschließlich als Vorschub-

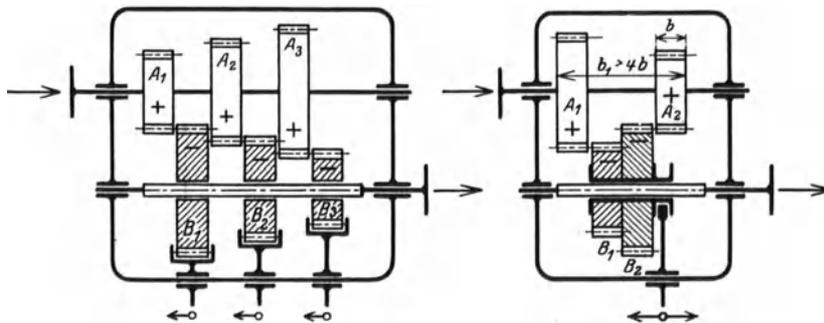


Abb. 73.5.

Abb. 73.6.

Abb. 73.5 und 73.6. Wechselgetriebe.

getriebe bei Werkzeugmaschinen und nicht als Hauptgetriebe verwendet wird. Sowohl das Getriebe mit Ziehkeil als alle Schieberäder müssen Spiel zwischen Welle und Rad haben; die Räder werden durch 1 oder 2 Paßfedern geführt. Für eine gute Kraftübertragung und für ruhigen Lauf sollten die Zahnräder im allgemeinen fest mit ihren Wellen verbunden sein; die Mitnahme der einzelnen Räder erfolgt dann durch Kupplungen¹.

Bei allen Getrieben mit gleicher Durchmessersumme (Abb. 73.5 bis 73.9) muß für alle Übersetzungen die Zähnesumme durch $a + b$ teilbar sein, wenn a/b das auf Primzahlen zurückgeführte Übersetzungsverhältnis ist. Für die genormten Stufenprünge (vgl. S. 313).

$\varphi = 1$	1,06	1,12	1,26	1,58	2
ist $a/b = 1/1$	17/16	31/29	10/9	8/7	5/4
und $a + b = 2$	33	60	19	15	9
oder $= 2$	3×11	$2 \times 2 \times 3$	un-	3×5	3×3
	ungünstig	$\times 5$	günstig		$2 \times 3 \times 3$
					2/1
					3
					3

so daß diese Bedingung im allgemeinen keine Schwierigkeiten bereitet.

Die Nabenlänge wird etwa gleich der Zahnbreite b gemacht oder auch etwas größer. Damit das Rad beim Aufkeilen sich nicht zu leicht schräg stellt, sollte die Nabenlänge auch größer

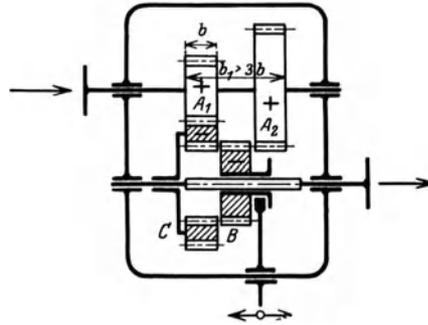


Abb. 73.7. Wechsel- und Wendegetriebe.

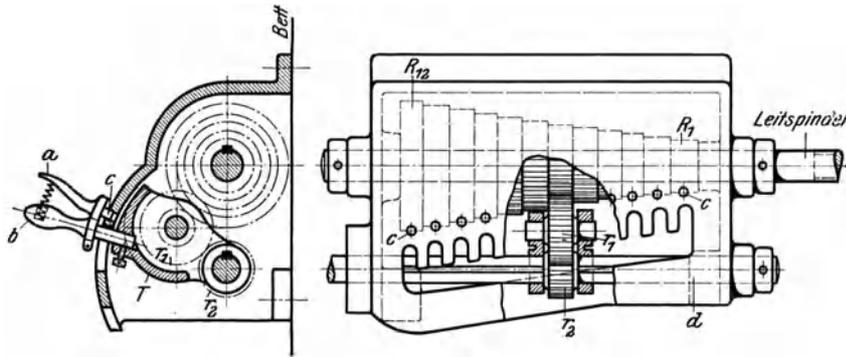


Abb. 73.8. Schwenkrad- oder Nortongetriebe (aus Hülle), wird als Vorschubgetriebe bei Werkzeugmaschinen verwendet.

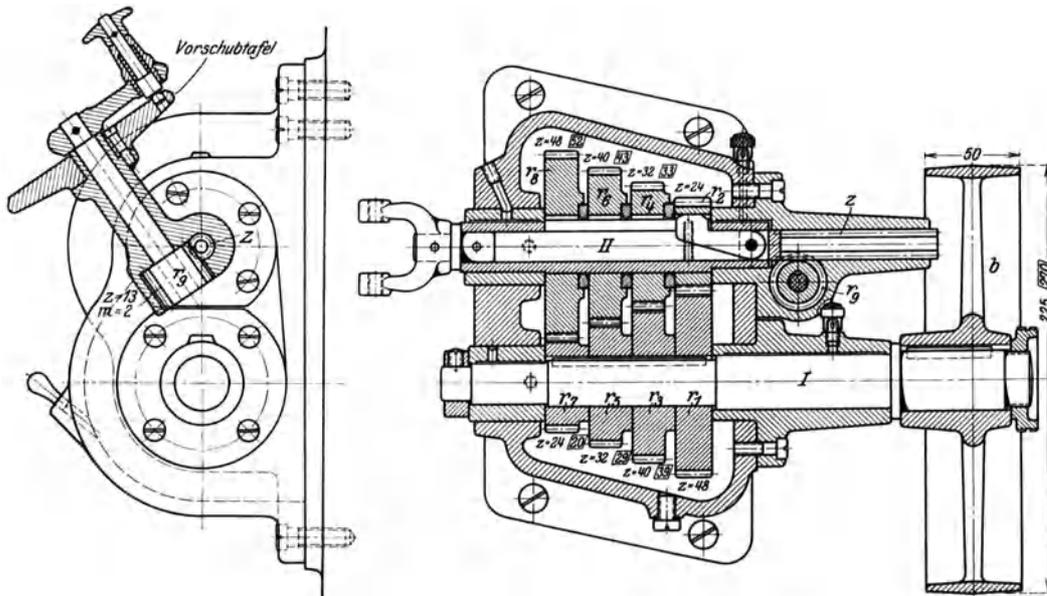


Abb. 73.9. Wechselgetriebe mit Ziehkeil. (Aus Hülle.)
Nur für kleine Kräfte geeignet.

¹ Germar, R.: Die Getriebe für Normaldrehzahlen. Berlin: Julius Springer 1932.

als der Wellendurchmesser sein. Große Naben sind hohl auszubilden, erhalten aber durchgehende Bahn für den Keil.

Wenn das Rad nicht axial auf die Welle geschoben werden kann, ist eine Teilung in zwei Hälften erforderlich. Auch Guß- oder Transportrückichten erfordern oft die Zweiteilung. Die

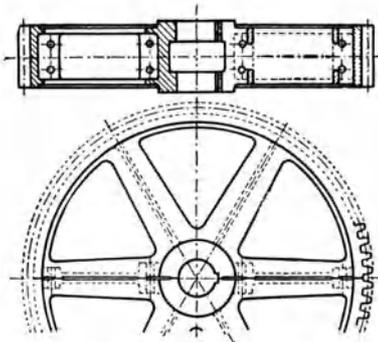


Abb. 73.10. Zweiteiliges Rad mit Teilung durch die Zahnücken. (Aus Dubbel, Taschenbuch.)

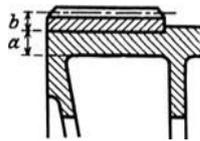


Abb. 73.12. Aufgeschumpfter Kranz.

Teilung wird zweckmäßig auf Armmitte gelegt und soll durch eine Zahnücke gehen. Die Schrauben zur Verbindung der Radhälften sind möglichst nahe an Kranz und Nabe anzubringen (Abb. 73.10).

Durch Einsetzen von Holzzähnen (Kämmen), Abb. 73.11, wird der Lärm, den Zahnräder sonst verursachen, gedämpft. Holzzahnstärke, im Teilkreis gemessen, 0,6 t, Eisenzahn 0,4 t). Aus dem gleichen Grunde wird das kleine Rad auch aus Rohhaut hergestellt. Rohhauträder müssen gegen

Hitze und Nässe geschützt werden und können deshalb nicht im Freien laufen. Das Austrocknen führt zu einem Schrumpfen der einzelnen Lagen, die Nässe zu einem derartigen Aufquellen, daß mitunter die Armatur gesprengt wird. Gutes Durchtränken mit Leinöl ist wohl das beste. Vom Standpunkt der Abnutzung aus sind die kleinen Rohhauträder eine verfehlte Konstruktion, weil die ohnehin größere Abnutzung des Ritzels nun noch in weiches Material verlegt wird.

Mit Vorteil können auch die gepreßten (schwach tönenden) Isolierstoffe der Elektrotechnik (Bakelit, Novotext usw.) zur Herstellung geräuschloser Zahnräder verwendet werden.

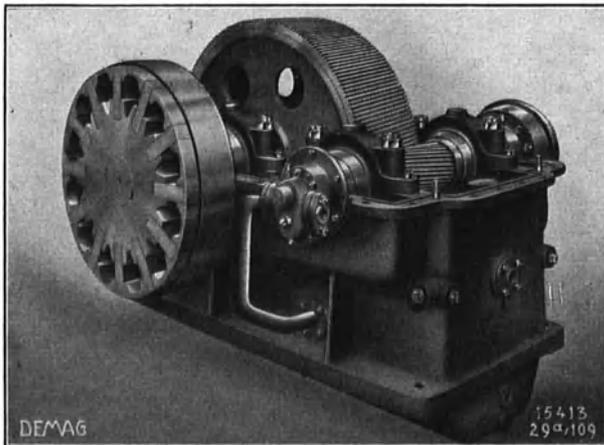


Abb. 73.13. Zahnradgetriebe mit angeflanschter Ölpumpe (Demag).

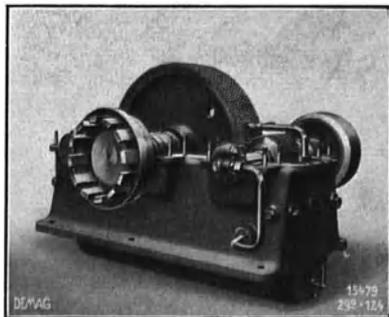


Abb. 73.14. Zweiseitiges Getriebe (Demag). Dieselmotor $N \parallel 300$ PS, $n = 225$ treibt zwei Zentrifugalpumpen $N = 240$ PS, $n = 1480$ bzw. $N = 60$ PS, $n = 955$.

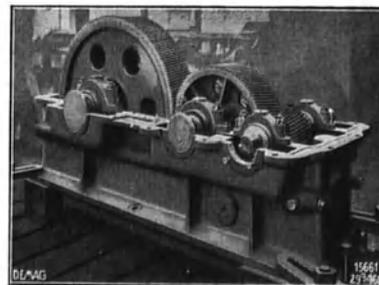


Abb. 73.15. Sondergetriebe mit Zwischenrad, um den vorgeschriebenen Achsabstand einzuhalten (Demag). $N = 250$ PS, $n = 1470/213$.

Ist Gußeisen als Werkstoff für die Zähne zu schwach, so wird ein Stahlkranz aufgeschraubt (Abb. 73.12). Für die Berechnung siehe Schrumpfverbindungen (Abschn. 24).

Um eine zuverlässige Lagerung und gute Schmierung zu erhalten, werden die Zahnräder in geschlossenen Gehäusen gelagert (Abb. 73.13 bis 73.15). Ungenügende Steifigkeit der Lagerung ist vielfach Ursache des schlechten Zahneingriffs. Die bei Straßenbahnmotoren gebräuchliche fliegende Anordnung des Ritzels ist ein typisches Beispiel für unzuweckmäßige Zahnradlagerung. Dadurch, sowie durch die fast immer zu kleine Zähnezah, ist die sehr rasche Abnutzung dieser Räder zu erklären.

74. Umlaufgetriebe.

Zajonz, R.: Die zeichnerische und rechnerische Untersuchung von Stirnrad-Umlaufgetrieben. Diss. T. H. Dresden 1938, mit Schrifttumsverzeichnis. (Als Beiheft IV der AutomobiltechnZ. März 1939 im Verlag Franckhsche Verlagsbuchhandlung Stuttgart erschienen.) — Pöschl, Th.: Dynamik des Differentialgetriebes. Z. VDI 78 (1934), S. 799/800.

Die Räder *a* und *c* sowie der Arm *AB* (Abb. 74.1) sind um eine durch *A* gehende Achse drehbar, während das Rad *b* sich um *B* drehen kann. Die Frage nach dem Zusammenhang zwischen den einzelnen Drehzahlen ist am einfachsten durch folgende Überlegungen zu beantworten. Das Übersetzungsverhältnis ist unabhängig von der Bewegung, die das System als Ganzes macht.

Die Drehzahlen um die Achse durch *A* seien wie folgt bezeichnet:

	Rad <i>a</i>	Arm <i>AB</i>	Rad <i>c</i>
Drehzahl	n_1	n_2	n_3

Geben wir dem ganzen System eine zusätzliche Drehzahl $-n_2$, so steht der Arm *AB* still. Die Drehzahlen um die Achse durch *A* sind nun:

Rad <i>a</i>	Arm <i>AB</i>	Rad <i>c</i>
$n_1 - n_2$	0	$n_3 - n_2$

Das Übersetzungsverhältnis zwischen Rad *a* und Rad *c* läßt sich nun in bekannter Weise daraus bestimmen, daß für ineinandergreifende Räder das Produkt $n z$ (Gl. 71.7) unverändert bleibt.

$$(n_1 - n_2) z_1 = - (n_3 - n_2) z_3 .$$

Dabei muß der Drehsinn beachtet werden; die Räder *a* und *c* drehen sich (bei stillstehendem Arm *AB*) in entgegengesetzter Richtung, was in obenstehender Gleichung durch das -- Zeichen zum Ausdruck kommt.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$n_1 z_1 + n_3 z_3 = n_2 (z_1 + z_3) \tag{74.1}$$

Die relative Drehzahl n'_b des Rades *b* um die eigene Achse folgt — wenn der Arm *AB* still steht — aus den Gleichungen: $z_2 n'_b = z_3 (n_3 - n_2) = - z_1 (n_1 - n_2)$, zu

$$n'_b = \frac{z_3 (n_3 - n_2)}{z_2} = - \frac{z_1 (n_1 - n_2)}{z_2} . \tag{74.2}$$

Die absolute Drehzahl n_b wird mit der zusätzlichen Drehzahl n_2 :

$$n_b = n'_b + n_2 = \frac{z_3 (n_3 - n_2)}{z_2} + n_2 z_2 = \frac{n_2 z_2 - z_1 (n_1 - n_2)}{z_2} . \tag{74.3}$$

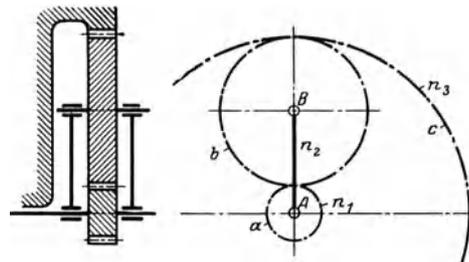


Abb. 74.1. Umlaufgetriebe.
a = Sonnenrad, *b* = Planetenrad.

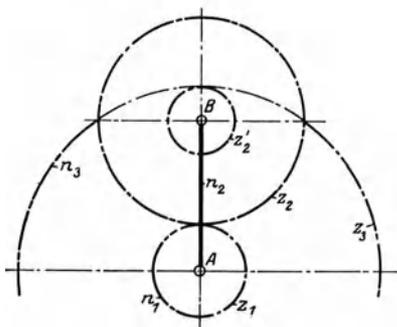


Abb. 74.2.

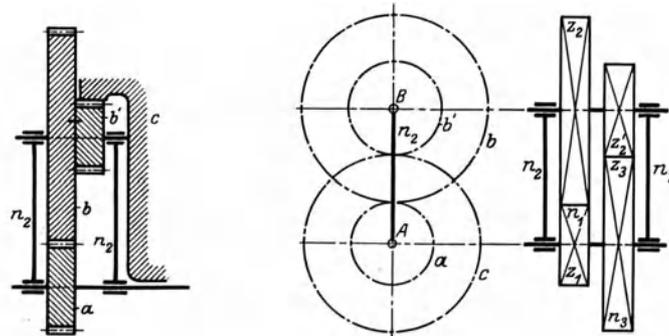


Abb. 74.3.

d. h.: Die Summe der Zähnezahlen der konzentrischen Räder muß durch die Anzahl der Planetenräder teilbar sein.

Um die Umfangskräfte und damit die Teilungen der Räder zu bestimmen, setzen wir voraus, daß außer den Drehmomenten keine äußeren Kräfte wirken. Dann gelten folgende Beziehungen:

1. Bei Vernachlässigung der Reibungsverluste muß die Summe der Leistungen gleich Null sein (Gesetz der Erhaltung der Energie):

$$L_1 + L_2 + L_3 = 0. \quad (74.7)$$

2. Da die Wellen konzentrisch gelagert sind, muß im Beharrungszustand auch die Summe der Drehmomente gleich Null sein.

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0. \quad (74.8)$$

Da Leistung = Drehmoment \times Winkelgeschwindigkeit ist, wird L proportional $M \cdot n$, so daß Gl. (7) auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$n_1 M_1 + n_2 M_2 + n_3 M_3 = 0.$$

Bei stillstehendem Arm und verlustfreier Übertragung sind An- und Abtriebleistung gleich groß, also

$$M_1 (n_1 - n_2) + M_3 (n_3 - n_2) = 0$$

und

$$\frac{n_1 - n_2}{n_3 - n_2} = -\frac{M_3}{M_1} = k. \quad (74.9)$$

Aus Gl. (8) folgt dann:

$$\frac{M_2}{M_1} = k - 1 \quad \text{und} \quad \frac{M_3}{M_2} = \frac{k}{1 - k}. \quad (74.10)$$

Durch die Konstante k sind also die Drehzahlen und die Momente eindeutig bestimmt.

Der Wirkungsgrad von Planetengetrieben. Wenn L_1 und L_2 Antriebsleistungen sind und L_3 der Abtrieb ist, so ist der Wirkungsgrad η des Planetengetriebes durch die Gleichung

$$\eta (L_1 + L_2) = L_3$$

festgelegt. Der Leistungsverlust des Getriebes ist Antrieb — Abtrieb:

$$L_1 + L_2 - L_3 = L_3 \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) \quad \text{oder proportional} \quad M_3 n_3 \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right). \quad (74.11)$$

Wenn die Drehmomente gleich bleiben, ist dieser Verlust unabhängig davon, welche Bewegung das Getriebe als Ganzes macht, da er durch die Relativbewegungen der Zähne verursacht wird.

Wir geben dem ganzen System wieder eine zusätzliche Drehzahl $-n_2$, damit der Arm stillsteht, und haben dann ein einfaches Vorgelege mit dem Wirkungsgrad η_v .

Die Momente: M_1 M_2 M_3
bleiben gleich. Die Drehzahlen sind nun: $n_1 - n_2$ 0 $n_3 - n_2$,
folglich werden die Leistungen proportional $M_1 (n_1 - n_2)$ 0 und $M_3 (n_3 - n_2)$.
(Antrieb) (Abtrieb)

Damit wird der Wirkungsgrad der Verzahnung als Vorgelege:

$$\eta_v = \frac{M_3 (n_3 - n_2)}{M_1 (n_1 - n_2)} \quad (74.12)$$

und der Energieverlust: $M_1 (n_1 - n_2) - M_3 (n_3 - n_2)$ oder mit η_v aus Gl. (12):

$$M_3 (n_3 - n_2) \left(\frac{1}{\eta_v} - 1 \right). \quad (74.13)$$

Dieser Verlust ist derselbe wie beim Planetengetriebe. Durch Gleichsetzen der Ausdrücke (11) und (13) erhält man:

$$M_3 (n_3 - n_2) \left(\frac{1}{\eta_v} - 1 \right) = M_3 n_3 \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right)$$

oder:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\eta} - 1 \right)}_{\text{Verlust im Umlaufgetriebe}} = \frac{n_3 - n_2}{n_3} \underbrace{\left(\frac{1}{\eta_v} - 1 \right)}_{\text{Verlust im Vorgelege}}. \quad (74.14)$$

Einen sehr ungünstigen Wirkungsgrad können Umlaufgetriebe aufweisen, wenn der umlaufende Arm AB angetrieben wird. Setzt man (Abb. 74.6) $n_1 = 0$, so folgt aus den gleichen Über-

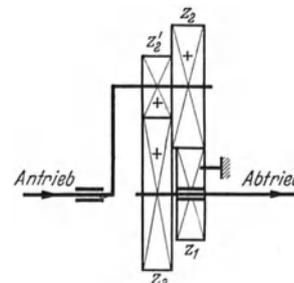


Abb. 74.6. Umlaufgetriebe mit schlechtem Wirkungsgrad.

legungen:
$$\left(\frac{1}{\eta} - 1\right) = \frac{n_2 - n_3}{n_3} \left(\frac{1}{\eta_v} - 1\right) = \frac{1}{k-1} \left(\frac{1}{\eta_v} - 1\right). \tag{73.15}$$

Ist z. B. $n_2/n_3 = -50 = \frac{k}{k-1}$, dann ist $\frac{1}{k-1} = 49$ und mit $\eta_v = 0,98$: $\frac{1}{\eta} = 1 + 49 \cdot 0,02$

oder $\eta = 0,51!$

Umlaufgetriebe werden in vielen Gebieten des Maschinenbaus verwendet (Hebezeuge, Spinn- und Flechtmaschinen, Automobilbau usw.). Eine konstruktive Schwierigkeit liegt in der zuverlässigen Lagerung und Schmierung der umlaufenden Teile.

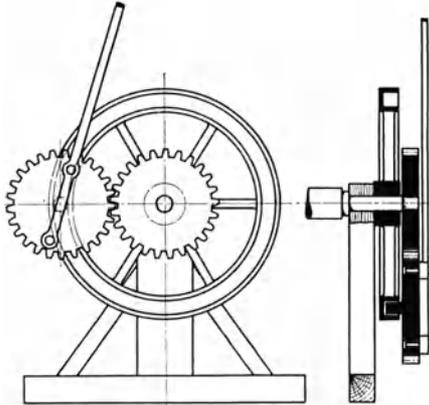


Abb. 74.7. Planetengetriebe nach Watts Patentzeichnung 1781. (Aus Matschoß.)

Auch James Watt verwendete bei seiner ersten Dampfmaschine ein Umlaufgetriebe zur Umsetzung der hin- und hergehenden Kolbenbewegung in eine drehende Bewegung (Abb. 74.7), da das Kurbelgetriebe patentiert war. Das Planetenrad b ist durch Bolzen mit der Schubstange so verbunden, daß es keine Drehbewegung um die eigene Achse ausführen kann. In Gl. (3) wird also die Drehzahl $n_b = \frac{-n_1 z_1 + n_2 z_1 + n_2 z_2}{z_2} = 0$ oder

$$n_1 = n_2 \frac{z_1 + z_2}{z_1}.$$

Anwendungsbeispiel 74.1. Die abgeleiteten Beziehungen können auch verwendet werden, um in einem Kugellager die Käfigdrehzahl und die Drehzahl der

Kugeln um ihre eigene Achse zu bestimmen. Wenn kein Gleiten zwischen den Kugeln und den Ringen auftritt, so arbeiten diese Teile wie Zahnräder zusammen. Die Gl. (4) bleibt demnach gültig, und zwar ist $k = d_a/d_i$.

Steht der Innenring still ($n_1 = 0$), so wird die Käfigdrehzahl

$$n'_b = n_3 \frac{d_a}{d} \left(1 - \frac{d_a}{d_i + d_a}\right), \quad n_2 = n_3 \frac{k}{1+k} = n_3 \frac{d_a}{d_i + d_a} \quad \text{und} \quad n_b = n_3 \frac{d_a}{d} \left[1 - \frac{d_a - d}{d_a + d_i}\right].$$

Steht der Außenring still ($n_3 = 0$), so ist die Käfigdrehzahl:

$$n_2 = \frac{n_1}{1+k} = n_1 \frac{d_i}{d_i + d_a} \cdot n_b = -n_1 \frac{d_i}{d} \left[1 - \frac{d_i + d}{d_i + d_a}\right].$$

Die relative Drehzahl der Kugeln um ihre eigene Achse folgt aus Gl. (4) zu:

$$n'_b = -\frac{d_i}{d} (n_1 - n_2) = -n_1 \frac{d_i}{d} \left[1 - \frac{d_i}{d_i + d_a}\right].$$

Für $d_i = 40$, $d = 10$, $d_a = 60$ mm und $n_3 = 0$ wird

$$n_2 = 0,4 n_1, \quad n'_b = -4 n_1 (1 - 0,4) = -2,4 n_1 \quad \text{und} \quad n_b = n'_b + n_2 = -2 n_1.$$

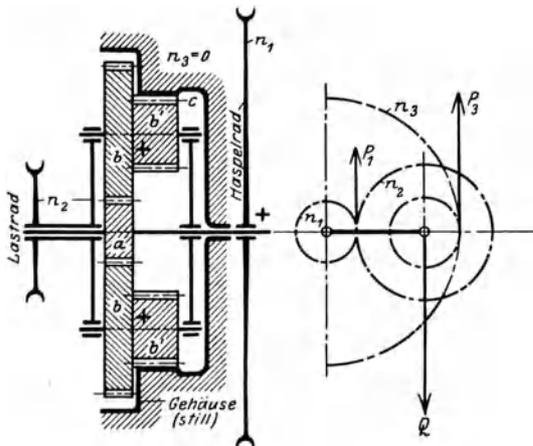


Abb. 74.8. Handflasenzug.

Anwendungsbeispiel 74.2. Handflasenzug für 1000 kg Tragkraft (Abb. 74.8). Die Übersetzung zwischen Haspel- und Lastkettenrad soll 1 : 9,4 werden. Das Haspelrad hat einen Durchmesser von 20 cm; die größte Kraft, die an der Haspelkette wirkt, sei 25 kg.

Da Innenverzahnung vorliegt, folgt aus Gl. (4) mit $n_3 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_1}{n_2} &= (1+k) = 9,4 & \text{oder} \\ k &= 8,4 = \frac{c}{b'} \cdot \frac{b}{a} \end{aligned} \right\} \tag{a}$$

Wegen dem richtigen Zusammenpassen der vier Räder besteht weiter die Bedingung:

$$a + b + b' = c^*.$$

* Diese Beziehung gilt für die Normverzahnung. Durch Anwendung der Zahnkorrekturen (vgl. Abschn. 71.4) kann die Achsentfernung in gewissen Grenzen geändert werden.

In diesen zwei Gleichungen sind vier Unbekannte, so daß zwei beliebig gewählt werden dürfen. Es ist zweckmäßig, die Durchmesser des kleinen Rades a und des innen verzahnten Rades c möglichst klein zu wählen, um einen kleinen und leichten Flaschenzug zu erhalten. Es sei z. B. $a = 18$ mm und $c = 90$ mm, dann wird $b + b' = 72$ mm, und aus Gl. (a) $b/b' = 1,68$. Aus diesen beiden Beziehungen die auf ganzen Zahlen gerundeten Werte $b' = 27$ und $b = 45$ mm. Aus Gl. (10) folgt: $M_2 = -\frac{n_1}{n_2} M_1 = -9,4 M_1$ und $M_3 = 8,4 M_1$. Mit einem Haspelrad-

$$P_1 = \frac{M_1}{a} = \frac{250}{1,8} = 140 \text{ kg} \quad \text{und} \quad P_3 = \frac{M_3}{c} = \frac{8,4 \cdot 250}{9} = 233 \text{ kg}.$$

Da es sich um sehr langsam laufende Räder handelt, sind sehr kleine Zähnezahlen zulässig, und die Zähne brauchen nur auf Festigkeit (mit $\xi = 1$) berechnet zu werden.

Wählt man die Breite der Räder zu 18 mm, dann ist: $P_1 = 1,8$ kg/mm und $P_3 = 13$ kg/mm. Mit $z_1 = z_2 = 12$ (also $\gamma = 15$, $m_1 = 3$ und $m_2 = 4,5$), so folgt aus Gl. (36) für Rad a , $\sigma_b = 19,5$ und für Rad c , $\sigma_b = 21,5$ kg/mm²; so daß St 60 als Werkstoff für die Räder ausreicht.

Bestimmung des Wirkungsgrades:

$$L_1 \text{ (Antrieb)} \quad L_2 \text{ (Abtrieb)} \quad L_3 = 0.$$

Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{L_2}{L_1}.$$

Der Reibungsverlust: $L_1 - L_2 = L_1(1 - \eta)$ bleibt unverändert, wenn dem ganzen System eine zusätzliche Drehzahl $-n_2$ gegeben wird und die Drehmomente gleich bleiben. Wir erhalten dann als

Momente	M_1	M_2	M_3
Drehzahlen	$n_1 - n_2$	0	$n_3 - n_2$
und Leistungen	$M_1(n_1 - n_2)$ (Antrieb)	0	$M_3(n_3 - n_2)$ (Abtrieb)

Der Wirkungsgrad des Vorgeleges wird dann:

$$\eta_v = \frac{M_3(n_3 - n_2)}{M_1(n_1 - n_2)}$$

und der Reibungsverlust:

$$M_1(n_1 - n_2) - M_3(n_3 - n_2) = M_1 n_1 (1 - \eta).$$

Damit wird:

$$M_1(n_1 - n_2)(1 - \eta_v) = M_1 n_1 (1 - \eta)$$

oder

$$\eta = 1 - \frac{n_1 - n_2}{n_1} (1 - \eta_v).$$

Da $n_1 = n_2(1 + k)$ und $n_1 - n_2 = n_2 k$ ist, wird

$$\eta = 1 - \frac{k}{k+1} (1 - \eta_v), \quad \text{also etwas größer als } \eta_v.$$

Anwendungsbeispiel 74.3. Berechnung des Antriebes eines Elektroflaschenzuges nach Abb. 74.9 (Bauart Demag) für 1000 kg Tragkraft. Motorleistung 1,7 PS bei 960 Uml./min Trommeldrehzahl $n_3 = 16,5$ /min.

Die Drehzahlen der Räder a , b , c seien:

$$n_1 \quad n_2 \quad n_3,$$

und nach Erteilung einer zusätzlichen Drehzahl $-n_2$

$$n_1 - n_2 \quad 0 \quad n_3 - n_2.$$

Der Arm AB steht nun still, so daß zwischen Drehzahlen und Zähnezahlen folgende Beziehung besteht:

$$(n_1 - n_2) z_1 = - (n_3 - n_2) z_3.$$

Das — Zeichen kommt daher, daß Trommel und Motor entgegengesetzte Drehrichtungen haben. Durch Umformung erhält man:

$$n_1 z_1 + n_3 z_3 = n_2 (z_1 + z_3).$$

Der Arm AB wird durch ein gewöhnliches Vorgelege a' , b' , c' (mit Innenverzahnung) angetrieben, so daß

$$n_2 = - n_3 \frac{z_3}{z_1'}.$$

Damit wird:

$$-\frac{n_1}{n_3} = \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_1 + z_3}{z_1} \cdot \frac{z'_3}{z'_1} \quad (\text{a})$$

Für das richtige Ineinandergreifen der Zahnräder müssen noch folgende Bedingungsgleichungen erfüllt sein:

$$a + 2b = c \quad \text{und} \quad a' + 2b' = c' \quad \text{oder} \quad z'_1 + 2z'_2 = z'_3 \quad \text{und} \quad z_1 + 2z_2 = z_3.$$

Da drei Gleichungen mit den 6 Unbekannten $z_1, z_2, z_3, z'_1, z'_2$ und z'_3 vorhanden sind, dürfen drei beliebige Annahmen gemacht werden:

1. Der Durchmesser $2a$ des Motorritzels sei = 32 mm.

2. Der Durchmesser $2c$ des innen verzahnten Rades c ist durch den Trommeldurchmesser eingeschränkt und sei 280 mm. Dann ist $b = \frac{1}{2}(140 - 16) = 62$ mm.

3. Der Ritzeldurchmesser $2a'$ sei 60 mm. Aus Gl. (a) folgt dann $z'_3/z'_1 = c'/a' = 5,06$, also $c' = 151,8$ mm.

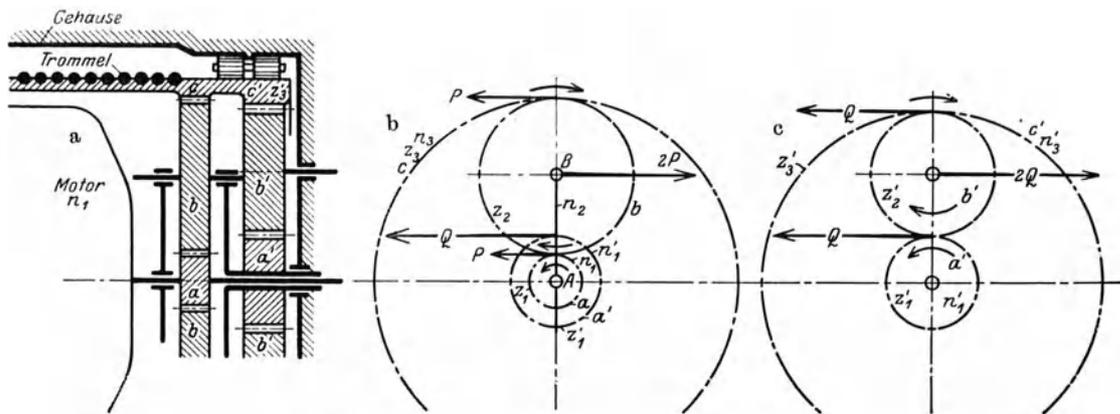


Abb. 74.9. Elektroflaschenzug.

Festigkeitsrechnung der beiden Ritzel: Das Drehmoment der Motorwelle ist:

$$M_1 = 71620 \frac{1,7}{960} = 127 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad \text{die Umfangskraft} \quad P = \frac{127}{1,6} = \text{rd. } 80 \text{ kg}, \quad \text{und die Umfangs-}$$

$$\text{geschwindigkeit des Ritzels: } v_1 = \frac{\pi \cdot 0,032 \cdot 960}{60} = 1,61 \text{ m/s}.$$

Wählt man die Breite des Ritzels zu 30 mm, dann ist $P_1 = 80/30 = 2,7 \text{ kg/mm}^2$. Mit $z_1 = 16$ ($m = 2, z_2 = 62$) und $\xi = 2$ folgt aus Gl. (71.45):

$$\left(\frac{p_{\max}}{173,8}\right)^2 = \frac{2 \cdot 2,7}{32} (1 + 16/62) = 0,22$$

also $p_{\max} = 82 \text{ kg/mm}^2$, was für die relativ kleine Umfangsgeschwindigkeit von nur 1,6 m/s zugelassen werden kann.

Die Kraft Q folgt aus der Gleichgewichtsbedingung für den Arm AB (Abb. 74.9 b):

$$2P \cdot (a + b) = Q \cdot a', \quad \text{zu} \quad Q = \frac{(16 + 62) \cdot 2 \cdot 80}{30} = 415 \text{ kg}.$$

Die Festigkeitsrechnung Gl. (71.36) gibt für $m = 5$ ($z'_1 = 12$) bei 40 mm Radbreite, $\sigma_b = 15 \text{ kg/mm}^2$, also etwa St 60.

Wirkungsgrad des Flaschenzuges.

Die Leistungen sind:

$$\begin{array}{ccc} L_1 & & L_2 \\ (\text{Antrieb}) & & \\ & & L_3 \\ & & (\text{Nutzleistung}) \end{array}$$

der Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{L_3}{L_1},$$

und der Verlust:

$$L_1 - L_3 = L_1 (1 - \eta). \quad (\text{b})$$

Wir geben dem ganzen System eine zusätzliche Drehzahl $-n_2$ und lassen die Drehmomente unverändert. Dann sind die Leistungen $M_1(n_1 - n_2)$ 0 $M_3(-n_3 - n_2)$,

$$\text{der Wirkungsgrad des Vorgeleges: } \eta_v = \frac{n_3 - n_2}{n_1 - n_2} \cdot \frac{M_3}{M_1}$$

$$\text{und der Verlust im Umlaufgetriebe: } M_1(n_1 - n_2) - M_3(-n_3 - n_2) = (n_1 - n_2)(1 - \eta_v) M_1.$$

Dazu kommt noch der Verlust im Armantrieb. Wenn η_1 der Wirkungsgrad des umlaufenden Armes und η_2 der Wirkungsgrad des Vorgeleges ist, das den Arm AB antreibt, so geht von dem Moment M_2 der $(1 - \eta_1 \eta_2)$ -te Teil verloren, so daß der Leistungsverlust

$$M_2 n_2 (1 - \eta_1 \eta_2) = M_1 \frac{2(a+b)}{a} n_2 (1 - \eta_1 \eta_2)$$

beträgt. Der Gesamtverlust ist also: $M_1 (n_1 - n_2) (1 - \eta_v) + M_1 \frac{2(a+b)}{a} n_2 (1 - \eta_1 \eta_2)$.

Durch Gleichsetzen mit Gl. (b) erhält man: $\frac{n_1 - n_2}{n_1} (1 - \eta_v) + (1 - \eta_1 \eta_2) \frac{2(a+b) n_2}{a \cdot n_1} = 1 - \eta$

oder mit $n_2 = -n_3 \frac{z_3}{z'_1}$: $1 + \frac{n_3}{n_1} \cdot \frac{z'_3}{z'_1} (1 - \eta_v) - (1 - \eta_1 \eta_2) \frac{2(z_1 + z_2)}{z_1} \cdot \frac{n_3}{n_1} \cdot \frac{z'_3}{z'_1} = 1 - \eta$.

Nach Wahl der Werte η_v, η_1, η_2 ist damit der Wirkungsgrad des Flaschenzuges bestimmt.

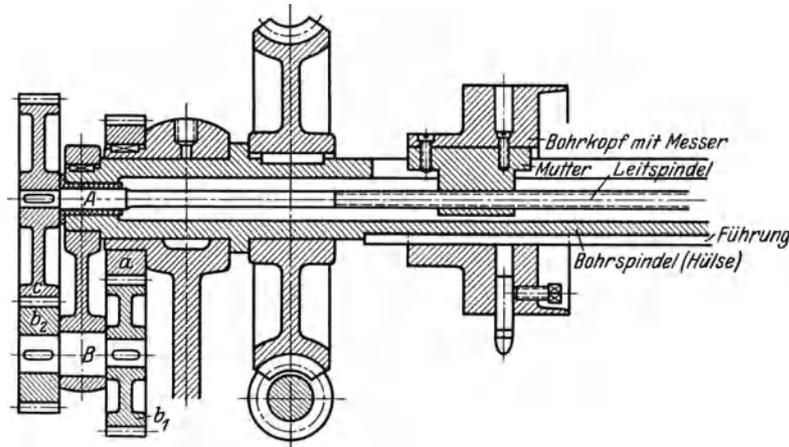


Abb. 74.10. Bohrspindel-Vorschubantrieb.

Anwendungsbeispiel 74.4. Bohrspindelvorschub. Die Leitspindel wird durch Außenverzahnung (nach Abb. 74.10) von der Bohrspindel angetrieben, und da das Rad a stillsteht ($n_1 = 0$), so folgt aus Gl. (4a) $-kn_3 = n_2 (1 - k)$, oder $-n_3 = n_2 \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

Bohrspindel und Schraubenmutter haben die gleiche Drehzahl. Auf die Verschiebung des Bohrkopfes wird deshalb nur die relative Verdrehung der Mutter gegen die Schraubenspindel übertragen, d. h., da $k > 1$ ist und beide entgegengesetzte Drehrichtungen haben:

$$n_3 + n_2 = \frac{1}{k} = \frac{a}{b_1} \cdot \frac{b_2}{c}$$

Wenn s die Steigung der Schraube ist, so ist die Verschiebung des Bohrkopfes $\frac{s}{k}$ für jede Umdrehung der Spindel.

Anwendungsbeispiel 74.5. Zählwerk mit großer Übersetzung (Abb. 74.11).

Aus der Abbildung folgt:

$$n_3 = n_0 \frac{z_0}{z_3} = \frac{9}{59} n_0 \quad \text{und}$$

$$n_1 = -n_0 \frac{z_0}{z'_1} = -\frac{9}{39} n_0$$

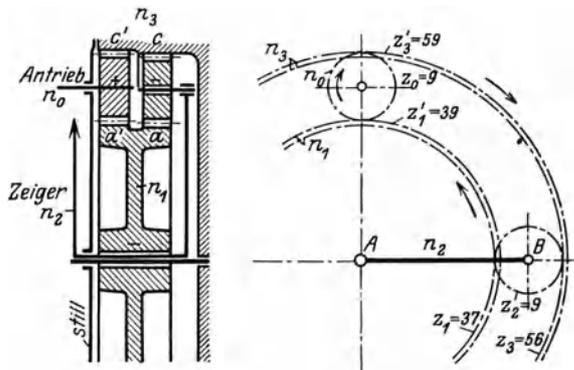


Abb. 74.11. Zählwerk mit großer Übersetzung.

Für das Umlaufgetriebe mit Innenverzahnung ($k = -$) ist:

$$n_1 + kn_3 = n_2 (1 + k), \quad \text{warin} \quad k = \frac{z_3}{z_1}, \quad n_1 + \frac{z_3}{z_1} n_3 = n_2 \left(1 + \frac{z_3}{z_1}\right)$$

Die Werte von n_1 und n_3 , sowie die Zähnezahlen eingesetzt, ergibt

$$-n_0 \left(\frac{9}{39} \cdot 37 - \frac{9}{59} \cdot 56\right) = n_2 (56 + 37)$$

oder

$$-\frac{n_2}{n_0} = \left(\frac{37}{39} - \frac{56}{59}\right) \cdot \frac{3}{31} = \frac{37 \cdot 59 - 56 \cdot 39}{39 \cdot 59} \cdot \frac{3}{31} = -\frac{1}{13 \cdot 58 \cdot 31}$$

und

$$\frac{n_0}{n_2} = 23777.$$

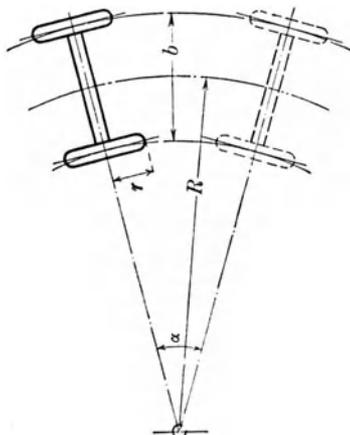


Abb. 74.12. (Aus Heller, Kraftwagenbau.)

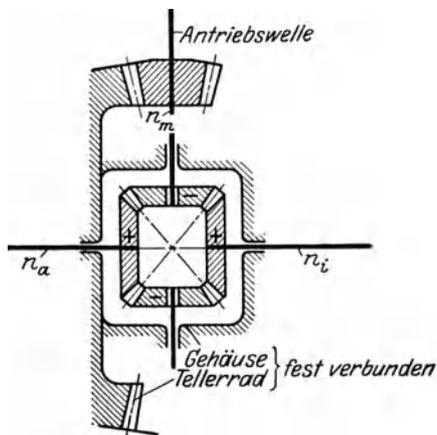


Abb. 74.13. Ausgleichgetriebe für Automobile.

Anwendungsbeispiel 74.6. Ausgleichgetriebe für Automobile. Die beiden hinteren Räder werden vom Motor angetrieben. Beim Fahren in gerader Richtung sind die Drehzahlen der Räder gleich groß, so daß eine einfache Übersetzung als Antrieb ausreichen würde. Wird in einer Krümmung vom mittleren Radius \$R\$ (Abb. 74.12) mit einer Winkelgeschwindigkeit \$\alpha\$ gefahren, so müssen die Räder — damit sie nicht gleiten — verschiedene Drehzahlen \$n_i\$ und \$n_a\$ erhalten, die durch die Gleichungen

$$\frac{\pi r n_a}{30} = \left(R + \frac{b}{2}\right) \alpha \quad \text{und} \quad \frac{\pi r n_i}{30} = \left(R - \frac{b}{2}\right) \alpha$$

bestimmt sind. Nach Addition erhält man $n_a + n_i = \frac{30 \alpha}{\pi r} \cdot 2 R = \text{konst.}$

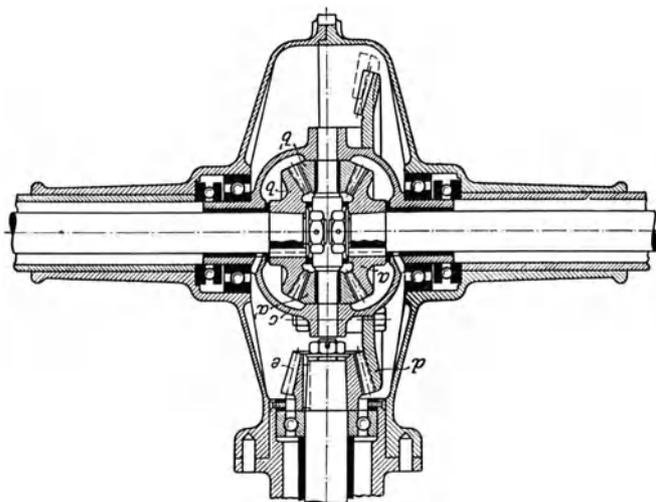


Abb. 74.14. Konstruktive Ausführung des Ausgleichgetriebes (aus Heller).

Um diese Bedingung zu erfüllen, werden die Räder durch ein Umlaufgetriebe (Ausgleichgetriebe genannt) angetrieben (Abb. 74.13/14). Der Zusammenhang der Drehzahlen folgt, nach Erteilung einer zusätzlichen Drehzahl \$-n\$, aus:

$$n_i - n = -(n_a - n) = n - n_a$$

oder $n_i + n_a = 2n = \text{konst.}$

Interessant und praktisch immer wieder zu Überraschungen führend sind Antriebe folgender Art, die z. B. bei Misch-, Sicht- und Sortiermaschinen und bei Walzenstühlen auftreten, und bei welchen zwecks Erhöhung der Leistung das ganze eine große zusätzliche Drehbewegung erhält.

Zahlenbeispiel 74.7. Erfahrungsgemäß hat bei einer Sichtmaschine der Schläger etwa zwei Umdrehungen weniger als die Trommel. Zwecks Erhöhung der Sichtleistung erhält Trommel und Schläger eine zusätzliche Drehzahl von 800/min (Abb. 74.15). Das Übersetzungsverhältnis

$$i = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{27}{28} \cdot \frac{30}{29} = \frac{405}{406}$$

Bei stillstehender Sichttrommel braucht die Maschine bei 350 mm Schlägerdurchmesser er-

fahrungsgemäß etwa 1 PS. Die Umfangsgeschwindigkeit ist dann $u = \pi \cdot 0,35 \cdot 2/60 = 0,037 \text{ m/s}$ entsprechend einer Umfangskraft am Schläger $P = 75/0,037 = 2050 \text{ kg}$, und am Zahnrad von 250 mm Durchmesser eine Umfangskraft $P_u = 35 \cdot 2050/25 = 2870 \text{ kg}$.

Wenn die Räderpaare nun 800 resp. 802 Umdrehungen/min machen, wird die Gleitgeschwindigkeit $v_g = (\omega_1 + \omega_2) e$ nach Gl. (71.48) und damit die erzeugte Wärme rd. 1600mal so groß, wie bei der stillstehenden Lichttrommel. Wenn der Wirkungsgrad eines Räderpaares bei stillstehender Trommel 99%, also der Verlust nur 1% ist, so wird infolge der 800fach vergrößerten Gleitgeschwindigkeit zwischen den Zahnflanken nun 16 PS in Wärme umgesetzt, die das Gehäuse ausstrahlen muß! Die Räder sind also sehr sorgfältig zu bearbeiten, zu schmieren und zu kühlen.

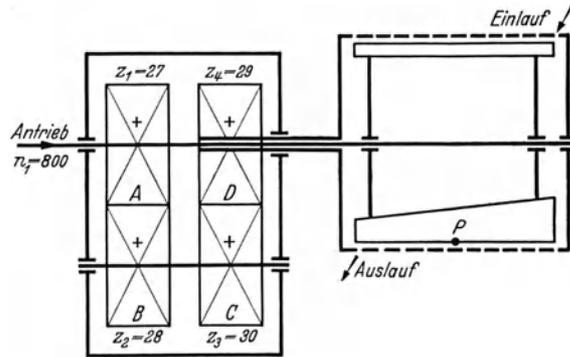


Abb. 74.15. Antrieb einer Sichtmaschine.

75. Schneckengetriebe.

75.1. Verzahnung.

Das Schneckengetriebe ist ein Getriebe für sich (meist senkrecht) kreuzende Achsen; es ist aus Schraube und Mutter entstanden. Wenn eine Schraube sich dreht und die Mutter gegen Verdrehung gesichert wird, so erhält diese eine reine Translation (Parallelverschiebung), Abb. 75.1. Wird die obere Hälfte der Mutter weggelassen und von der unteren Hälfte ein ziemlich weit von der Drehachse der Schraube entfernter Punkt M (Abb. 75.2) festgehalten, so beschreibt die Mutter eine drehende Bewegung um diesen Punkt.

Jeder Schraubengang entspricht einem Zahn des Rades. Ist g die Gangzahl der Schnecke und z die Zähnezah des Rades, so ist das

$$\text{Übersetzungsverhältnis } i = \frac{g}{z}. \quad (75.1)$$

Da die Mutter nun keine Translation, sondern eine Drehung ausführt, kann die Verzahnung des Rades kein reines Schraubengewinde mehr sein. Am einfachsten kann man sich die Verzahnung auf folgende Weise entstanden denken:

Das Profil der Schnecke entspricht einer Zahnstange, bei der die Parallelverschiebung durch Rotation und Schrägstellung der Zähne erreicht wird. Die Schnecke kann demnach durch eine Anzahl Zahnstangen 1 bis 7 (Abb. 75.3) ersetzt und das Profil des Rades nach dem allgemeinen Verzahnungsgesetz (Abschn. 71.1) daraus konstruiert werden. Alle diese Teilräder haben den gleichen Wälzkreis; die jeweiligen Wälzpunkte liegen auf CC . Daraus folgt, daß das Mittenprofil des Rades die Evolventenform eines Zahnrades hat, das mit der Zahnstange in richtigem Eingriff steht, während für alle anderen Schnittebenen die Profile ganz andere Formen erhalten.

Deshalb überträgt sich die Unempfindlichkeit der Evolventenräder in bezug auf den Achsabstand nicht auf Schneckengetriebe; diese sind im Gegenteil äußerst empfindlich auch gegen kleine Einbaufehler und müssen sehr sorgfältig gelagert werden.

Wird für die Zahnstange das normale Evolventenprofil mit geraden Flanken und 30° Spitzwinkel gewählt und sollen die Zahnflanken unterschnittfrei sein, so muß wie bei den Stirnrädern die kleinste Zähnezah des Rades 30 sein. Wenn der Konstrukteur sich an diese Bedingung hält,

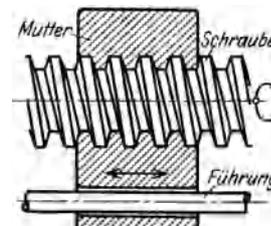


Abb. 75.1.

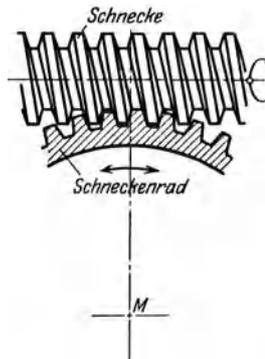


Abb. 75.2.

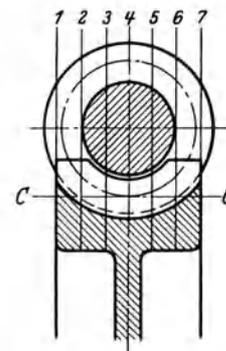


Abb. 75.3.

entfallen die Schwierigkeiten der Unterschneidung und der Korrektur. Für die genauere Untersuchung der Eingriffsverhältnisse sei auf Schiebel, Zahnräder II, verwiesen.

75.2. Herstellung.

Die Schnecke kann nur auf der Drehbank genau geschnitten werden. Da die meisten Drehbänke Leitspindeln mit Steigungen in englischen Zoll haben, findet man hier und da die Bedingung gestellt, die Teilung des Rades ebenfalls in englischen Zoll anzugeben. Weil aber immer durch ein Wechselrad von 127 Zähnen ($1''e = 25,4 \text{ mm}$) auch metrische Steigungen hergestellt werden können, zieht man auch hier Modulteilung vor, die durch das Zahnrad mit 97 Zähnen ($\pi \cdot 97/12 = 25,395 \sim 1''$) erzielt werden kann. Die Radzähne werden durch einen Fräser hergestellt, der bei der Erzeugung die gleiche Form und die genau gleiche Lage der Schnecke im Getriebe einnehmen muß.

75.3. Wirkungsgrad.

Trotzdem das Schneckenprofil trapezförmig ist, genügt es, für die Untersuchung der Reibungsverhältnisse die Schnecke als flachgängige Schraube aufzufassen. Wie bei den Schrauben abgeleitet, ist das Drehmoment einer scharfgängigen Schraube:

$$M_d = P_a r_m \operatorname{tg}(\alpha + \varrho'), \tag{23.3 a}$$

worin $\operatorname{tg} \varrho' = \mu' = \frac{\mu}{\cos \beta}$ und μ die Reibungszahl ist. Für $\beta = 15^\circ$ ist $\cos \beta = 0,966$. Die Unsicherheit in der Wahl der Reibungszahl μ ist so groß, daß der Faktor $\frac{1}{\cos \beta}$ vernachlässigt und

$$M_d = P_a r_m \operatorname{tg}(\alpha + \varrho),$$

gesetzt werden darf, wobei das Drehmoment aus der übertragenen Leistung bekannt ist.

Der Wirkungsgrad der Schnecke

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varrho)} \tag{75.2}$$

wird ein Maximum für $\frac{d\eta}{d\alpha} = 0 = -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin^2(\alpha + \varrho)} + \frac{\operatorname{ctg}(\alpha + \varrho)}{\cos^2 \alpha}$

$$\operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \varrho) \sin^2(\alpha + \varrho),$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \sin(\alpha + \varrho) \cos(\alpha + \varrho),$$

$$\sin 2\alpha = \sin 2(\alpha + \varrho).$$

Das ist nur möglich für $\varrho = 0$ und für $2\alpha = 180 - 2(\alpha + \varrho)$ oder $\alpha = 45 - \frac{\varrho}{2}$.

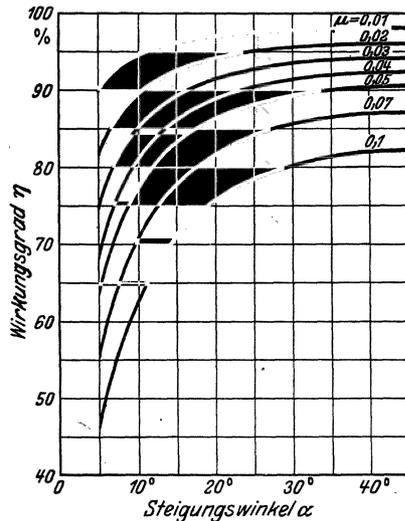


Abb. 75.4. Theoretischer Wirkungsgrad einer Schnecke.

Zahlentafel 75.1. Theoretischer Wirkungsgrad einer Schnecke.

$\alpha =$	5°	10°	15°	20°	25°	40°
$\mu = 0,01$	$\eta = 0,897$	0,945	0,961	0,970	0,974	0,980
2	813	895	926	941	950	960
3	743	850	892	914	927	941
4	682	809	861	888	904	922
5	634	772	831	863	882	904
0,07	552	707	778	817	841	869
0,10	463	627	709	756	785	819

Der Wirkungsgrad des ganzen Schneckengetriebes wird durch die Reibung in den Lagern noch etwas vermindert. Aus Abb. 75.4 können folgende Schlußfolgerungen gezogen werden:

1. Der Wirkungsgrad hängt in hohem Maße von der Reibungszahl μ ab. Ein hoher Wirkungsgrad ist durch genaue Herstellung der Zahnform und hauptsächlich durch zweckmäßige Schmierung und durch glatte Oberflächen zu erreichen.

2. Von einem Steigungswinkel der Schraube von etwa 15° an ist die Verbesserung des Wirkungsgrades nicht mehr bedeutend, besonders wenn die Reibungszahl klein ist. Dieser Umstand ist für die Praxis von großer Wichtigkeit, weil bei großen

Steigungen Eingriffs- und Herstellungsschwierigkeiten entstehen. Man wird deshalb möglichst Steigungswinkel von 15 bis 25° verwenden.

3. Nach Gl. (75.2) scheint der Wirkungsgrad von der Leistung unabhängig zu sein, da weder die Geschwindigkeit noch der Zahndruck in dieser Gleichung vorkommt. In Wirklichkeit ist aber die Reibungszahl μ und damit der Reibungswinkel ρ für geschmierte Flächen sowohl von der Gleitgeschwindigkeit als auch vom Druck abhängig.

Die zuverlässige Vorausbestimmung des Wirkungsgrades einer Schnecke ist nicht möglich, weil die Reibungszahl für halbflüssige Reibung z. Z. noch nicht berechnet werden kann. Die Versuche von Stribeck¹ zeigen, daß aber auch bei ungenauer Aufsührung ziemlich kleine Reibungszahlen erreicht werden können.

Für ein roh gegossenes, aber vollständig eingelaufenes Schneckengetriebe, bestehend aus einer gußeisernen Schnecke, eingängig

Kerndurchmesser = 60 mm
 Außendurchmesser = 95 mm
 Steigung = 25,13 mm
 = 8π ; $\text{tg } \alpha = 0,1$

Zahlentafel 75.2. Versuchswerte von Stribeck.

Gleitgeschwindigkeit m/s	Umfangskraft P kg	$\frac{P}{b}$ kg/cm	μ bei 60° C	n_{Schnecke}	n_{Rad}
0,5	500	65	0,060	120	4
1	500	65	051	240	8
1,5	500	65	047	360	12
2	400	52	040	480	16
3	250	32,5	030	720	24
4	160	21	0,025	960	32

und einem Schneckenrad aus Gußeisen

Teilkreisdurchmesser = 240 mm
 Zähnezahl = 30
 Zahnbreite = 77 mm

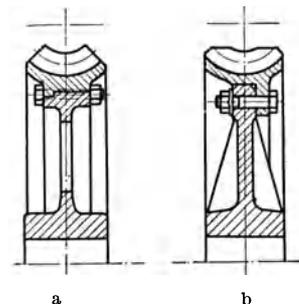
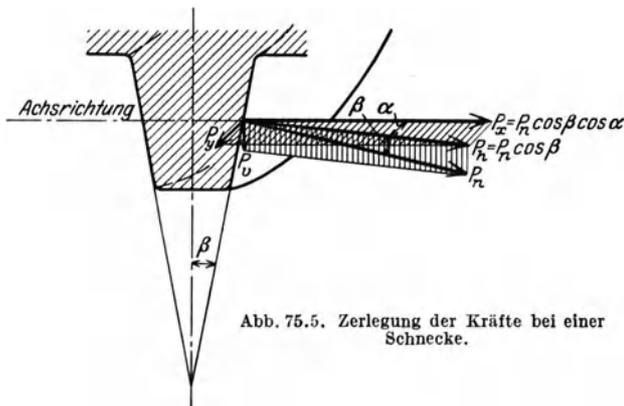
macht Stribeck die in Zahlentafel 74.2 zusammengestellten Angaben.

Aus diesen Versuchen folgt, daß das unten liegende Schneckenrad erst bei $n = 32$ genügend Öl zur Schmierung der Schnecke mitnimmt. Aus den Versuchen von Stodola², Westberg³ und Bach⁴ folgt weiter, daß für gut geschmierte und gut bearbeitete und gelagerte Schnecken Reibungszahlen von 0,01 bis 0,015 leicht erreichbar sind.

Die verhältnismäßig starke gleitende Reibung bei der Schnecke legt den Gedanken nahe, die Radzähne durch Rollen zu ersetzen (Pekrungetriebe). Die kleine Berührungsfläche zwischen Rolle und Schnecke erfordert sehr harte Materialien (vgl. Wälzlager), und da der Rollendurchmesser naturgemäß klein wird, ist die Verwendung auf verhältnismäßig kleine Umfangskräfte beschränkt.

75.4. Berechnung und Formgebung.

Die von der Schnecke auf das Rad wirkende Normalkraft P_n (Abb. 75.5) kann in zwei Komponenten, horizontal P_h und vertikal P_v , zerlegt werden. Die horizontale Kraft wird wieder in



zwei Richtungen zerlegt, axial P_x und — senkrecht dazu — P_y . Dazu kommt noch die Reibungskraft μP_n . Es wirken demnach:

¹ Z. VDI. 1898, S. 1156.

² Schweiz. Bauztg. Bd. 6 (1895) S. 16. ³ Z. VDI. 1902, S. 915 und Mitt. Forsch.-Arb. Heft 6.

⁴ Maschinenelemente und Z. VDI. 1903, S. 536 oder Mitt. Forsch.-Arb. Heft 11.

In der Horizontalebene:

$$\text{axial} \quad P = P_x - \mu P_n \sin \alpha = P_n (\cos \beta \cos \alpha - \mu \sin \alpha), \quad (75.3)$$

$$\text{senkrecht dazu:} \quad H = P_y + \mu P_n \cos \alpha = P_n (\cos \beta \sin \alpha + \mu \cos \alpha). \quad (75.4)$$

In der Vertikalebene:

$$P_v = P_n \sin \beta. \quad (75.5)$$

Die Berechnung der Zähne wird in ähnlicher Weise wie bei den Zahnrädern durchgeführt.
1. Festigkeit.

$$P = \frac{\sigma_b}{\gamma} b t.$$

Da die Zähnezahzahl des Rades meist größer als 30 bis 36 ist, kann $\gamma \approx 13$ gesetzt werden. Die Zahnbreite b ist, wie Abb. 75.5 zeigt, begrenzt, und zwar

$$b = 1,8 \div 2 \text{ bis } 2,5 t.$$

Die Schnecke wird immer aus naturhartem Stahl hergestellt, poliert, aber nicht gehärtet, weil sie sich beim Härten leicht verzieht.

Für das Schneckenrad kommen folgende Werkstoffe in Frage: Gußeisen ($\sigma_b < 375 \text{ at}$) wird nur bei kleinen Umfangsgeschwindigkeiten und für untergeordnete Zwecke verwendet, da die Gefahr des „Anfressens“ sehr groß ist; besser ist Phosphorbronze ($\sigma_b < 750 \text{ at}$) und am besten Stahlbronze (überschmiedet $\sigma_b = 1800$ bis 3000 at , je nach Qualität). Die Bronzекränze werden auf den gußeisernen Radkörper aufgezogen (Abb. 75.6) und durch Paßschrauben befestigt.

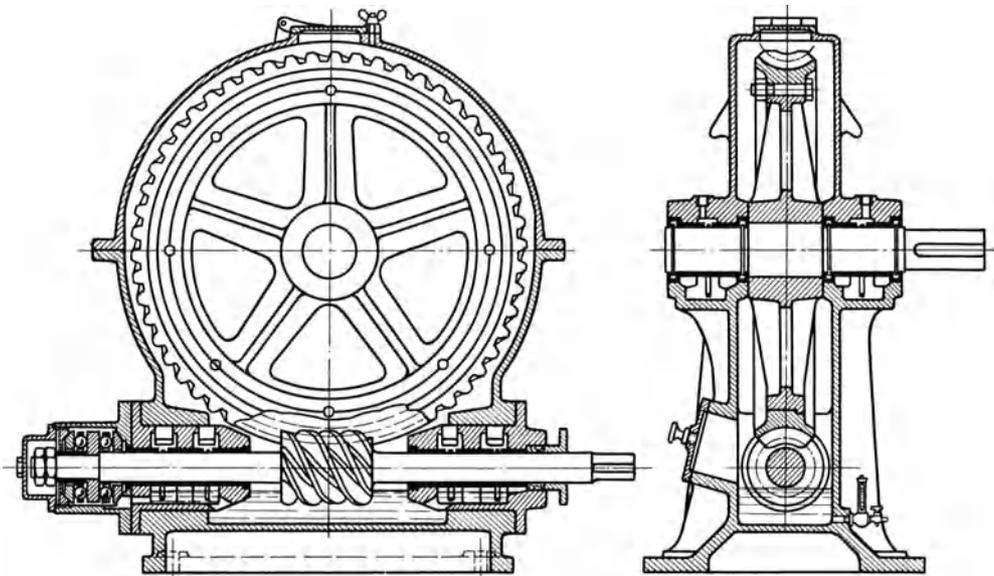


Abb. 75.7. Schneckengetriebe mit unten liegender Schnecke (Zahnräderfabrik Augsburg A.G.).

Der Steigungswinkel α der Schnecke ist bei Neukonstruktionen unbekannt, so daß die für die Festigkeitsrechnung erforderliche Umfangskraft P aus Gl. (5) nicht berechnet werden kann.

Schätzen wir aber den Wirkungsgrad der Schnecke $\eta = \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg}(\alpha + \varrho)}$ zu ungefähr 75%, so wird, wenn n_r die Drehzahl und R der Radius des Schneckenrades ist, das Drehmoment der Radwelle:

$$(M_d)_r = 71\,620 \frac{N \eta}{n_r} = P \cdot R.$$

Die Berechnung auf Festigkeit ist nur zulässig, wenn das Getriebe sehr kurze Zeit in Betrieb bleibt, z. B. beim Schleusenzug. In allen anderen Fällen ist die übertragbare Leistung durch die Flächenpressung und durch die Erwärmung des Getriebes eingeschränkt.

2. Flächenpressung. Das Schneckenrad kann als ein schrägverzahntes Zahnrad mit dem Neigungswinkel $\beta = 90 - \alpha$ betrachtet werden. In Gl. (71.45) ist dann $P_1 = P_a/b \cos \alpha$ und $\xi = 1$ zu setzen.

Für große Umfangskräfte ist Stahlbronze als Radmaterial zu verwenden, die viel härter ist als die meist gebräuchliche Phosphorbronze.

3. Erwärmung. Wenn die gesamte Reibungsarbeit in Wärme umgesetzt wird, so wird im Beharrungszustand stündlich die Wärmemenge

$$Q = \frac{(1 - \eta) N \cdot 3600}{427} \text{ kcal/h}$$

erzeugt. Diese Wärmemenge wird zum größten Teil vom Öl aufgenommen und durch das Gehäuse hindurch an die umgebende Luft abgegeben. Wenn O die Gehäuseoberfläche in m^2 ist, die innen durch das Öl erwärmt und außen durch die Luft gekühlt wird, und k die Wärmedurchgangszahl, d. i. die je m^2 und 1°C Temperaturunterschied vom Öl an die Luft in der Stunde abgegebene Wärme ist, so kann der Temperaturunterschied τ_0 zwischen Öl und Luft aus der Gleichung

$$Q = kO\tau_0$$

berechnet werden. Für schwach bewegte Luft kann $k \approx 15 \text{ kcal/m}^2\text{h } ^\circ \text{C}$ gesetzt werden. Die kühlende Oberfläche O des Gehäuses kann durch das Herunterrinnen des von der Schnecke abgeschleuderten Öles wirksam vergrößert werden.

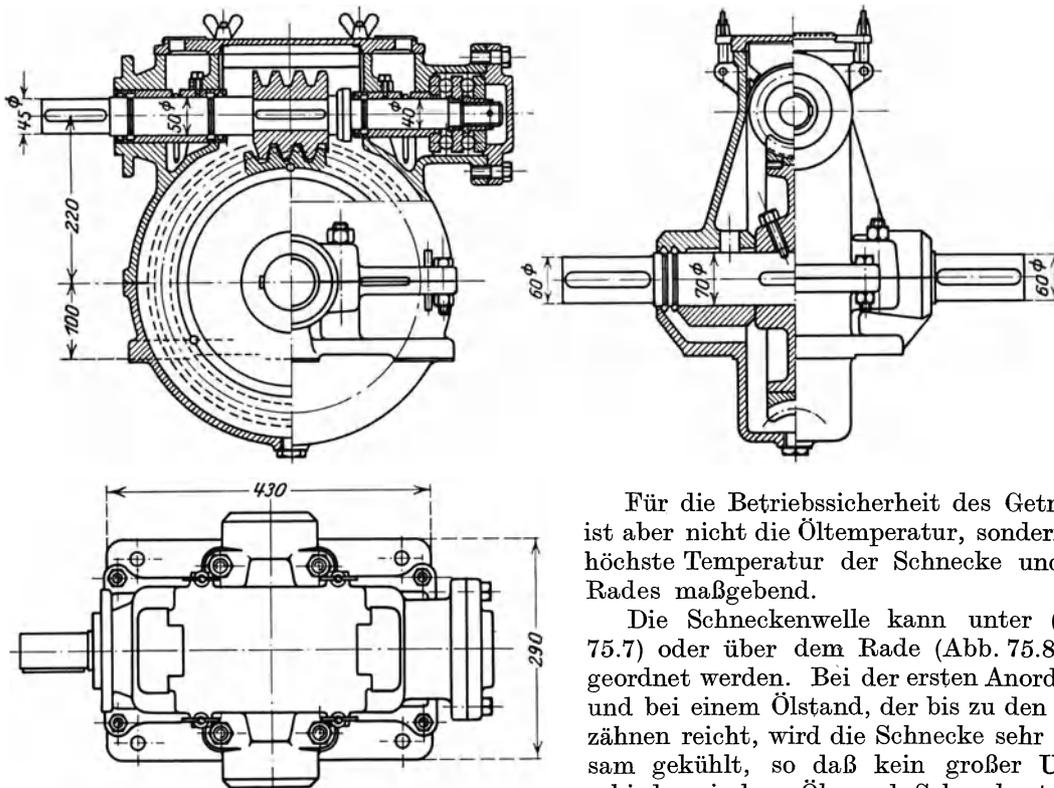


Abb. 75.8. Schneckengetriebe der Maschinenfabrik Oerlikon.

Stopfbüchse erforderlich, um das seitliche Abfließen des Öles zu verhindern. Die Stopfbüchse ist jedoch eine unangenehme Beigabe, die bei zu starkem Anziehen unnötige Reibungsverluste verursacht, und bei zu geringer Dichtung Ölverluste und unsauberen Betrieb zur Folge hat. Läßt man den Ölstand nur bis zur Schneckenwelle reichen, wodurch die Stopfbüchse überflüssig wird, dann ist auch die Kühlung der Schnecke und des Rades weniger wirksam.

Meist wird die Anordnung mit obenliegender Schnecke vorgezogen. Das Öl wird durch das Rad bis zur Eingriffstelle hochgeführt. Die Schmierung ist wirksam, wenn das Rad genügend rasch läuft und ein zähflüssiges Zylinderöl verwendet wird. Die Lagerschmierung der Schneckenwelle sollte dann von der Schneckenschmierung getrennt werden, da beide verschiedene Ölsorten verlangen. Die Kühlung der Schnecke ist in diesem Falle aber wesentlich schlechter, so daß Temperaturunterschiede von 40°C und mehr zwischen Schnecke und Öl auftreten können. Der zulässige Wert von τ_0 beträgt dann höchstens 30°C , während bei unten liegender Schnecke 70°C Temperaturunterschied zwischen Öl und Luft zulässig ist.

Bei aussetzendem Betrieb (z. B. Laufkatzenantrieb eines Werkstattkrans) kann das Getriebe

Für die Betriebssicherheit des Getriebes ist aber nicht die Öltemperatur, sondern die höchste Temperatur der Schnecke und des Rades maßgebend.

Die Schneckenwelle kann unter (Abb. 75.7) oder über dem Rade (Abb. 75.8) angeordnet werden. Bei der ersten Anordnung und bei einem Ölstand, der bis zu den Radzähnen reicht, wird die Schnecke sehr wirksam gekühlt, so daß kein großer Unterschied zwischen Öl- und Schneckentemperatur auftreten kann. Dabei ist aber eine

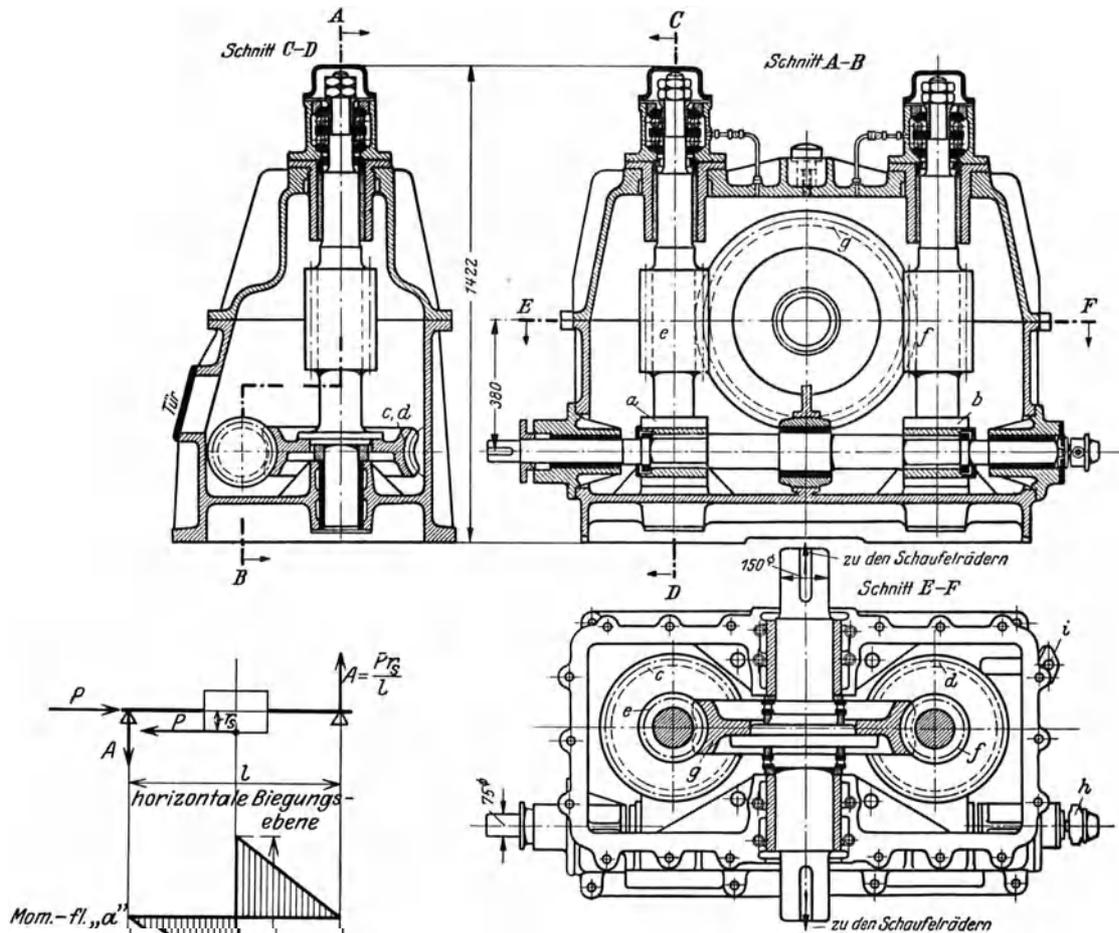


Abb. 75.9. Schneckengetriebe zum Antrieb eines Schaufelrad-Schiffes. $N_e = 100$ PS; $u = 375/25$. (Aus The Engineer 144 [1927] S. 665.)
a, b Schnecken der Antriebswelle; *c, d* zugehörige Schneckenräder;
e, f Schnecken der Zwischenwelle; *g* Schneckenrad der Schaufelradwelle;
h Ölpumpe, *i* Ölfilter.

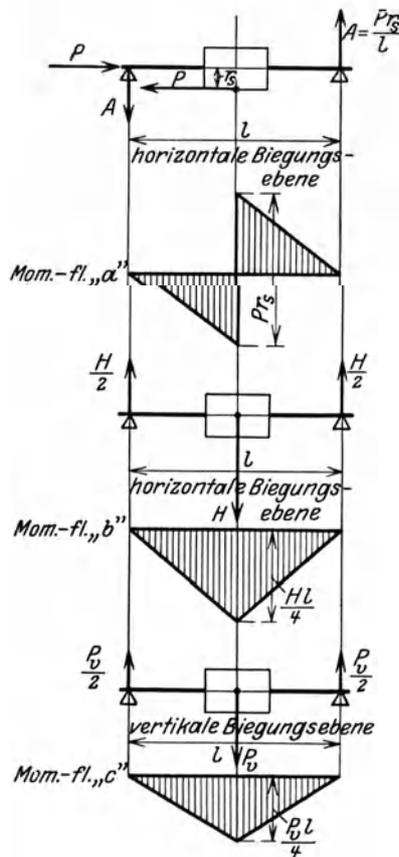


Abb. 75.10. Zur Berechnung der Schneckenwelle.

sich in den Ruhepausen abkühlen, so daß während der Betriebszeit mehr Wärme entwickelt werden darf, als das Gehäuse im Beharrungszustand abgeben kann.

Das Getriebe muß sehr sorgfältig gelagert werden und zwar so, daß die Radmittelebene genau in die Schneckenachse fällt und die Achsentfernung genau eingehalten wird. Die Lagerstellen sollen deshalb möglichst in einer Aufspannung des Werkstückes bearbeitet werden.

Die Schnecke muß möglichst eng gelagert werden, da Durchbiegungen der Welle den richtigen Eingriff stören. Auf die Schneckenwelle wirken: In der Horizontalebene:

1. die axiale Kraft P , die eine Biegemomentenfläche nach Abb. 75.10 a ergibt,
2. die dazu senkrechte Kraft H mit der Momentenfläche nach Abb. 75.10 b, und in der Vertikalebene:
3. die Kraft P_v mit der Momentenfläche nach Abb. 75.10 c.

Dazu kommt noch das Drehmoment M_d . Die Beanspruchungen und Formänderungen der Welle unter der Einwirkung dieser Kräfte sind nach Abschn. 31 zu bestimmen.

Das Getriebe wird am kleinsten, wenn die Schnecke aus einem Stück mit der Welle hergestellt wird. Die Bearbeitung ist wohl etwas teurer, aber alle Konstruktionen mit auf der Welle aufgekeilter Schnecke führen zu größeren Radabmessungen, wenn — mit Rücksicht auf den Wirkungsgrad — der gleiche Steigungswinkel eingehalten werden soll.

Außer den Traglagern muß sowohl für die Schnecke als auch für das Rad eine axiale Abstützung vorgesehen werden. Die Kleinheit der Längskraft an der Radwelle, verbunden mit der kleinen Gleitgeschwindigkeit, gestattet das unmittelbare Auffangen des Druckes durch die Stirnfläche der Radnabe. Der viel größere Axialdruck P der Schnecke wird durch ein Kugellager aufgenommen.

Schrifttum.

Buckingham, E.: Worm-Weel contact. Preliminary report of A. S. M. E. special research Com. of Worm gears. Trans. A. S. M. E. 48 (1926), S. 501/31. — Gruson, R.: Untersuchung von Schneckengetrieben. Versuchsfeld für Maschinenelemente der T. H. Berlin: Heft 7, Verlag Oldenburg 1927. — Duhnsen, W.: Berührungsverhältnisse der Globoidschnecken, Versuchsfeld für Maschinenelemente der T. H. Berlin: Heft 10, Verlag Oldenburg 1930. — Altmann, F. G.: Schraubgetriebe, ihre mögliche und ihre zweckmäßigste Ausbildung. VDI-Verlag 1932. — Vogel, W.: Eingriffsgesetze und analytische Berechnungsgrundlagen des zylindrischen Schneckentriebes. VDI-Verlag 1933. — Schulze-Allen, K.: Die Entwicklung der Schneckengetriebe. Werkzeugmasch. 40 (1936), S. 161/64. — Merritt, H. E.: Worm gear performance. Proc. Inst. Mech. Eng. (London) 129 (1935), S. 127/194. — Cormac, P.: A treatise on screws and worm gear, their mills and hobs. London: Chapman & Hall Ltd. 1936. — Abbott, W.: Worm gear contacts. Proc. Inst. Mech. Eng. London 135 (1936), S. 249/412. — Altmann, F. G.: Bestimmung des Zahnflankeneingriffs bei allgemeinen Schraubgetrieben. Forschung 8 (1937), S. 209/225. — Altmann, F. G. Fortschritte auf dem Gebiete der Schneckengetriebe. Z. VDI 83 (1939), S. 1245/49 u. 1271/73.

76. Kettentrieb.

Man unterscheidet Gliederketten und Laschen- oder Gelenkketten. Die Gliederketten werden weiter unterteilt in offene Ketten mit kurzen Gliedern (Abb. 12.71, Lastkette), mit langen Gliedern (Abb. 12.70, Schlingkette) und Stegketten (Abb. 12.72, Ankerkette).

Die Ketten werden in Rollen oder auf Trommeln so geführt, daß abwechselnd ein Glied in der Mittelrille läuft und das nächste senkrecht dazu sich auf den Umfang legt. Zum Arbeiten in verzahnten Kettenrädern (Abb. 76.1) können nur kalibrierte Ketten verwendet werden. Das sind Ketten, bei denen die Teilung der einzelnen Glieder genau gleich ist — soweit dies bei Schmiedearbeit überhaupt möglich ist. Dieses wird durch nachträgliches Stauchen oder Strecken der Glieder erreicht, womit der höhere Preis kalibrierter Ketten begründet ist. Die Kettenrollen werden dann so ausgeführt, daß sich die flachlaufenden Glieder mit etwas Spiel in den Umfang des Rades einbetten, so daß zwischen je zwei solcher Glieder sog. „Daumen“ stehen bleiben.

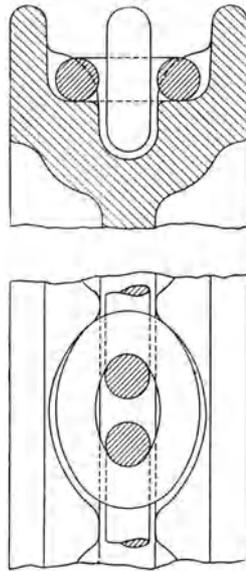


Abb. 76.1. Kettenrad für kalibrierte Ketten. (Aus Ernst.)

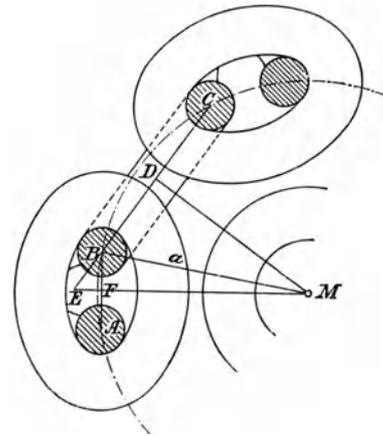


Abb. 76.2. (Aus Ernst.)

Der Teilkreisradius R , der immer bis zur Mittellinie des Gliedes gerechnet wird (Abb. 76.2), ist

$$MA = MB = R = \sqrt{MD^2 + DB^2}.$$

Wenn l die innere Baulänge des Gliedes ist, so ist $DB = \frac{1}{2}(l + d)$. Bei z Daumen müssen $2z$ Glieder im Rollenumfang Platz finden, so daß

$$\sphericalangle EMD = \gamma = \sphericalangle EBF = \frac{360}{2z} = \frac{180}{z}$$

ist. Dann ist

$$\begin{aligned} MD &= \frac{DE}{\operatorname{tg} \gamma} = \operatorname{ctg} \gamma (DB + EB) = \operatorname{ctg} \gamma \left(\frac{l+d}{2} + \frac{BF}{\cos \gamma} \right) = \frac{l+d}{2} \operatorname{ctg} \gamma + \frac{l-d}{2 \sin \gamma} \\ &= \frac{\frac{l}{2}(1 + \cos \gamma) - \frac{d}{2}(1 - \cos \gamma)}{\sin \gamma} = \frac{l \cos^2 \frac{\gamma}{2} - d \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{l}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} - d \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}, \end{aligned}$$

damit wird

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(l+d)^2 + \left(l \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} - d \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{l^2 \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\gamma}{2} + 1 \right) + d^2 \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} + 1 \right)}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{l}{\sin \frac{\gamma}{2}} \right)^2 + \left(\frac{d}{\cos \frac{\gamma}{2}} \right)^2} \quad (76.1)$$

Für schwache Ketten und große Daumenzahl verschwindet der Einfluß des zweiten Gliedes, so daß ohne merkbare Fehler für $z \geq 6$ und $d \leq 16$ mm

$$R = l/2 \sin \frac{\gamma}{2} \quad 76.2$$

gesetzt werden darf.

Der Vorteil der Ketten als Tragorgan bei Hebezeugen liegt darin, daß die Ketten sich über wesentlich kleinere Rollen biegen lassen als Seile, so daß das Lastmoment viel kleiner wird. Aus diesem Grunde werden bei Handflaschenzügen immer Ketten verwendet.

Die Kettenglieder sind als stark gekrümmte Stäbe zu berechnen (Zahlenbeispiel 12.8 bis 10).

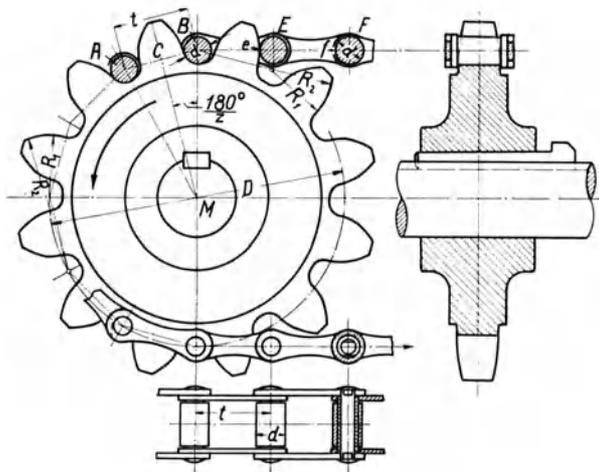


Abb. 76.3. Kettenrad für Stahlbolzenketten. (Aus Rötischer.)

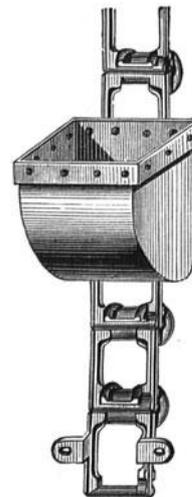


Abb. 76.4. Gelenk-
kette aus Temperguß
mit Befestigungs-
glied.

Gelenkketten werden als Zugorgan für Transportanlagen verwendet und erhalten besondere Glieder zur Befestigung der Fördererlemente (Abb. 76.4). Die Kettenräder (Abb. 76.3) erhalten Zähne, deren Form aus der Bewegung der Kettenglieder folgt. Punkt e des Bolzens E beschreibt einen Kreisbogen um den Mittelpunkt des Bolzens B , so daß alle Zähne (nicht die Lücken) unabhängig von der Zähnezahzahl gleich sind. Der Bolzen liegt am Grunde der Lücken auf; das Aufliegen der Laschen auf einem Absatz des Rades ist wegen der zusätzlichen Biegebeanspruchung zu vermeiden.

Infolge der gleichförmigen Gestalt und der Bearbeitung der einzelnen Glieder laufen Laschenkettens viel ruhiger als die rohen Gliederketten. Sie sind daher für größere Geschwindigkeiten geeignet und werden bei geeigneter Schmierung schon bis 30 m/s verwendet.

Der Kettentrieb wird mit Vorteil auch als stufenloses Regelgetriebe verwendet (P. I. V.-Getriebe, Werner Reimers K.-G. Bad Homburg¹). Zwei parallele Wellen tragen je ein Kegelpaar, das zusammen eine Keilrille bildet, in welcher eine endlose Kette paßt und die Drehbewegung überträgt. Bei einer Drehzahländerung werden die beiden Kegelpaare während des Betriebes durch ein Gestänge axial auf den Wellen verschoben und zwar so, daß die Verkleinerung des Abstandes zwischen den Kegeln des einen Paares eine Abstandsvergrößerung des anderen Paares zur Folge hat. Die Kette stellt sich dadurch auf andere Laufkreisdurchmesser ein. Zu diesem Zweck haben die Kegelscheiben eine Verzahnung, die mit dem Lamellenbündel der Kette eine Kegelverzahnung bildet. Die Kraftübertragung erfolgt über diese Zahnflanken zwangsläufig. Für höhere Drehzahlen und für kleine Leistungen kann die Übertragung auch durch Reibung erfolgen; Regelbereich 1:6 bis 1:10.

¹ Preger, E.: Stufenlos regelbare Kettengetriebe an Werkzeugmaschinen. *Werkst.-Techn.* 30 (1936), S. 68/72.

8. Der Kurbeltrieb.

81. Definitionen.

Neben dem in den Abschnitten 6 und 7 behandelten Getriebe zur Übertragung der drehenden Bewegung, gibt es eine große Anzahl anderer Getriebe für die Übertragung von Bewegungen¹. Nach der klassischen Definition von Reuleaux (1829—1900) ist eine Maschine eine Verbindung widerstandsfähiger Körper, durch welche Kräfte unter bestimmten Bewegungen, bestimmte Wirkungen ausüben können. Also ohne Bewegung keine Maschine; die Maschinenteile werden durch einander berührende Glieder gezwungen sich in bestimmter Weise zu bewegen (Zwanglauf). Sie bilden in ihren Oberflächen Elementenpaare, welche die eigentlichen (kinematischen) Elemente der Maschine sind. So sind z. B. Zapfen und Lager, Schraube und Mutter, Führungen usw., Elementenpaare, die durch ihre Form geschlossen sind (Umschlußpaare); andere, wie Riemen und Scheibe, oder die Zähne eines Räderpaares werden durch eine Kraft geschlossen (Kraftschluß). Für die Untersuchung der Bewegungen ist die Ausführungsart der Paare ohne Bedeutung; die Partner eines Umschlußpaares können z. B. ihre Rollen vertauschen, ohne die gegenseitige Bewegung zu beeinflussen.

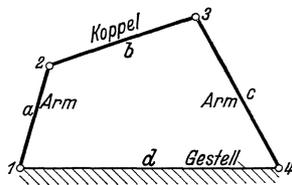


Abb. 81.1.

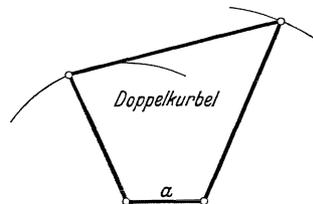


Abb. 81.2.

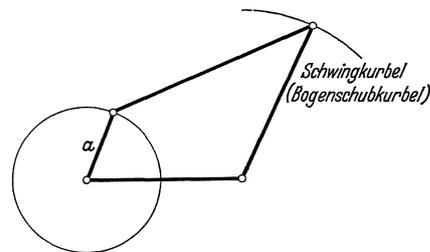


Abb. 81.3.

Man kann deshalb die Getriebelehre (Kinematik) abstrakt als Wissenschaft behandeln, ohne Rücksicht auf die praktische Verwirklichung. Als „Maschinengetriebe“ ist sie eine praktisch-wichtige und notwendige Erweiterung der Maschinenelemente und bildet die eigentliche Grundlage für die Konstruktion von vielen Arbeitsmaschinen (Werkzeug-, Textil-, Verpackungs-, Zeitungsdruckmaschinen, usw.).

Eine kinematische Kette ist eine durch Elementenpaare vermittelte bewegliche Verbindung von Körpern (Gliedern), die infolge ihrer dauernden Berührungen an den Paarungsstellen in ihrer gegenseitigen Beweglichkeit beschränkt sind. Die Kette ist geschlossen, wenn jedes Glied mit wenigstens zwei anderen Gliedern durch verschiedene Elementenpaare verbunden sind.

Ein Mechanismus ist eine zwangläufige kinematische Kette, bei welcher ein Glied (das Gestell) festgehalten wird.

Ein Getriebe ist ein Mechanismus, in dem ein bestimmtes Glied (der Antrieb) die Bewegung der übrigen Glieder hervorruft.

Eine Maschine ist ein Getriebe mit dem Zweck bestimmter Kraftwirkung, bzw. Arbeitsverrichtung.

Kurbeltriebe sind solche Getriebe, deren Glieder nur durch Umschlußpaare miteinander verbunden sind.

Das Gelenkviereck ist eine aus vier Rundlingspaaren mit parallelen Achsen gebildete kinematische Kette (Abb. 81.1). Man unterscheidet dabei:

¹ Beyer, R.: Technische Kinematik. J. A. Barth (Leipzig) mit ausführl. Schrifttum-Verzeichnis. — Rauh, K.: Praktische Getriebelehre. 2 Bde. Berlin: Julius Springer 1939.

Kurbel, die sich um die Achse frei drehen können,
Schwingen, deren Drehbewegung begrenzt ist,
Koppel, die das freie Ende von zwei Kurbeln oder Schwingen verbinden,
und das Gestell, das festgehalten wird.

Ein Schwingkurbel besteht aus einem Kurbel und einer Schwinde, verbunden durch den Koppel.

Satz von Grashof. Ein Gelenkviereck kann nur dann ein Schwingkurbel- oder Doppelkurbeltrieb liefern, wenn die Summe der kleinsten (a) und der größten (d) Gliedlänge nicht größer als die Summe der beiden anderen Gliedlängen (b und c) ist.

Durch Feststellung von a entsteht die Doppelkurbel (Abb. 81.2); durch Feststellung von eines der beiden benachbarten entsteht die Schwingkurbel (mit a als Kurbel) (Abb. 81.3). Für $a + d = b + c$ entsteht das „durchschlagende“ Gelenkviereck; für $a + d < b + c$, die Doppelschwinge.

Schrifttum.

Doppelschwinge als Geradführung: 1. Dreiecklenker von Roberts, Beyer, S. 64. 2. Schreibvorrichtung von Evans, Beyer, S. 64. 3. Geradführung von J. Watt, Beyer, S. 356. 4. Zykloidenlenker, Beyer, S. 64 u. 225. 5. Beileg- und Meßmaschinen für Gewebe der Textilindustrie. (O. Thiering, Getriebe der Textiltechnik, S. 49. Berlin: Julius Springer 1925.) 6. Demag-Doppellenker-Wippkran, Beyer, S. 65 u. 323. 7. AWF.-Getriebeblatt 623.

82. Das gerade Schubkurbelgetriebe.

Bei den Wärmekraftmaschinen (Dampfmaschinen, Verbrennungskraftmaschinen) wird die Spannkraft des Dampfes bzw. der Verbrennungsgase dazu benutzt, einen Kolben in einem Arbeitszylinder hin- und herzuschieben (Abb. 82.1). Die hin- und hergehende Kolbenbewegung

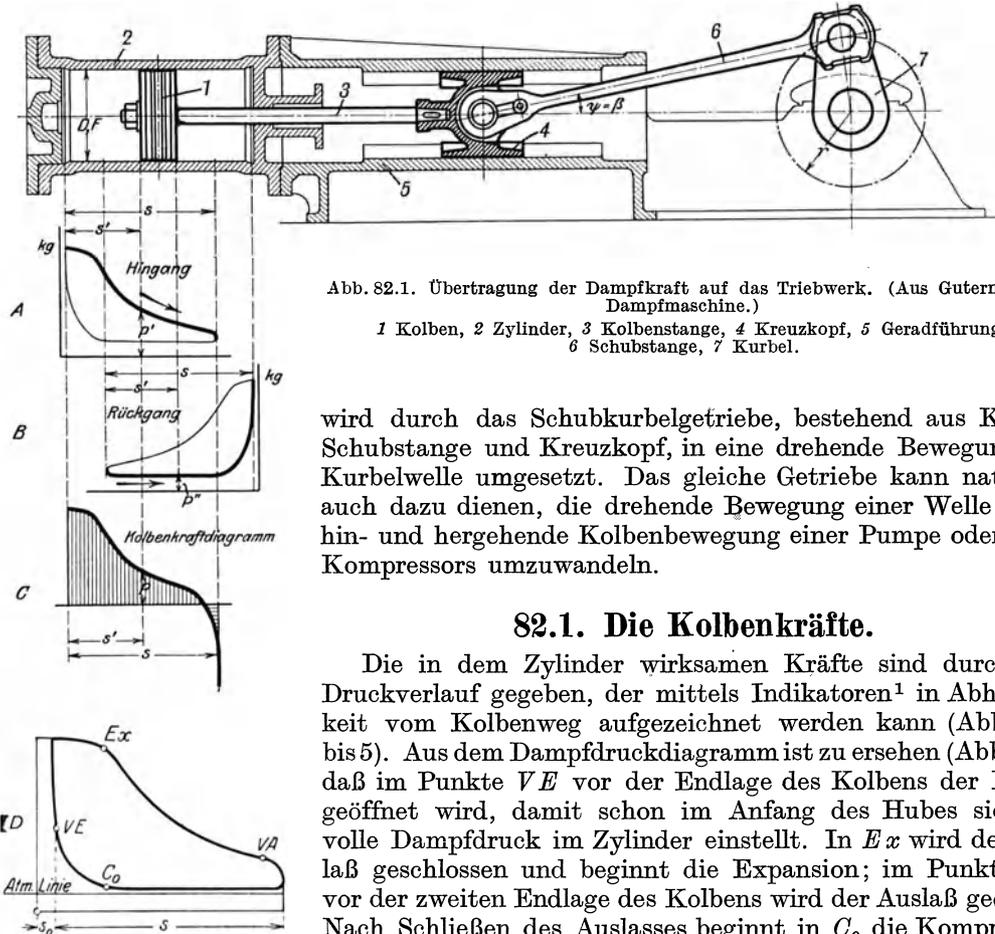


Abb. 82.1. Übertragung der Dampfkraft auf das Triebwerk. (Aus Gutermuth, Dampfmaschine.)
1 Kolben, 2 Zylinder, 3 Kolbenstange, 4 Kreuzkopf, 5 Geradführung, 6 Schubstange, 7 Kurbel.

wird durch das Schubkurbelgetriebe, bestehend aus Kurbel, Schubstange und Kreuzkopf, in eine drehende Bewegung der Kurbelwelle umgesetzt. Das gleiche Getriebe kann natürlich auch dazu dienen, die drehende Bewegung einer Welle in die hin- und hergehende Kolbenbewegung einer Pumpe oder eines Kompressors umzuwandeln.

82.1. Die Kolbenkräfte.

Die in dem Zylinder wirksamen Kräfte sind durch den Druckverlauf gegeben, der mittels Indikatoren¹ in Abhängigkeit vom Kolbenweg aufgezeichnet werden kann (Abb. 82.1 bis 5). Aus dem Dampfdruckdiagramm ist zu ersehen (Abb. 1 D), daß im Punkte VE vor der Endlage des Kolbens der Einlaß geöffnet wird, damit schon im Anfang des Hubes sich der volle Dampfdruck im Zylinder einstellt. In Ex wird der Einlaß geschlossen und beginnt die Expansion; im Punkte VA vor der zweiten Endlage des Kolbens wird der Auslaß geöffnet. Nach Schließen des Auslasses beginnt in C0 die Kompression des im Zylinder zurückgebliebenen Dampfes. Das Diagramm

¹ Für die Beschreibung von Indikatoren s. Gramberg: Technische Messungen, 5. Aufl. Berlin: Julius Springer 1925.

zeigt die Vorgänge auf einer Kolbenseite; bei der doppeltwirkenden Maschine spielt sich auf der anderen Seite der gleiche Vorgang ab (Abb. 1 B). Die tatsächlich auf den Kolben wirkenden Kräfte ergeben sich als Unterschied der auf beiden Seiten gleichzeitig wirkenden Kräfte (Abb. 1 C). In einer beliebigen Kolbenstellung s' ist deshalb die Kolbenkraft

$$P = p' F_1 - p'' F_2, \quad (82.1)$$

wenn p' und p'' die Drücke und F_1 und F_2 die wirksamen Kolbenflächen sind, die (durch das Fehlen der Kolbenstange auf einer Seite) verschieden sein können.

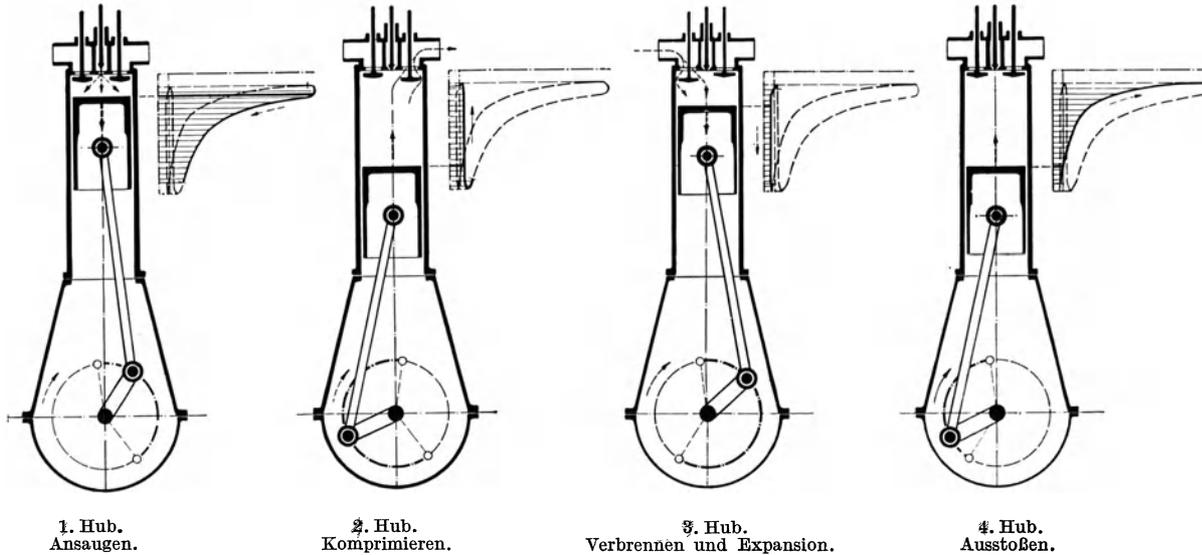


Abb. 82.2. Viertakt-Gleichdruckmaschine. (Aus Weihe, Maschinenkunde.)

Bei den Verbrennungskraftmaschinen unterscheidet man zwei Verfahren: Das Verpuffungs- und das Gleichdruckverfahren. Beide können in vier oder in zwei Hügen (Takten) durchgeführt werden (Vier- oder Zweitaktmaschine).

Beim Verpuffungsverfahren (für Gas und Leichtöle) wird ein brennbares Gasmisch im Arbeitszylinder angesaugt (1. Hub), verdichtet (2. Hub) und dann durch einen elektrischen Funken entzündet. Die Verbrennung erfolgt im Endpunkt des Kolbens bei annähernd gleichem Volumen sehr rasch (explosiv). Die Verbrennungstemperatur ist ungefähr 1300 bis 1600° C. Der Gasdruck steigt fast plötzlich bis etwa 20 at und wirkt während der Expansion (3. Hub) arbeitsleistend auf den Kolben. Kurz vor dem Hubende läßt das Auslaßventil die verbrannten Gase mit einer Temperatur von 400 bis 500° C ins Freie treten.

Beim Gleichdruckverfahren (Abb. 82.2, Dieselmotor) für Schweröle wird nur die Verbrennungsluft im Arbeitszylinder angesaugt (1. Hub) und so hoch verdichtet (2. Hub), daß der eingespritzte flüssige Brennstoff sich sofort entzündet, wobei der Druck auf 35 bis 40 at steigt. Der Brennstoff wird bei wachsendem Hubvolumen in solchen Mengen eingeführt, daß der Verbrennungsdruck ungefähr konstant bleibt. Dann folgt Abschluß des Brennstoffventils und Expansion des Gases (3. Hub). Der vierte Hub schiebt die Abgase durch das Auspuffventil. Beim Viertakt wird also das Laden und Entladen des Arbeitszylinders durch den Arbeitskolben besorgt. Unter vier Kolbenhügen ist demnach nur ein Arbeitshub.

Beim Zweitakt wird das Laden und Entladen des Arbeitszylinders durch besondere Pumpen besorgt. Dann ist jeder Kolbenhingang ein Arbeitshub und jeder Rückgang ein Verdichtungs-
hub. In der Nähe des Totpunktes müssen die verbrannten Gase aus dem Zylinder entfernt werden. Die hierfür zur Verfügung stehende Zeit ist äußerst kurz, so daß große Austrittsquerschnitte (Schlitze in der Zylinderwand) erforderlich sind (Abb 82.3).

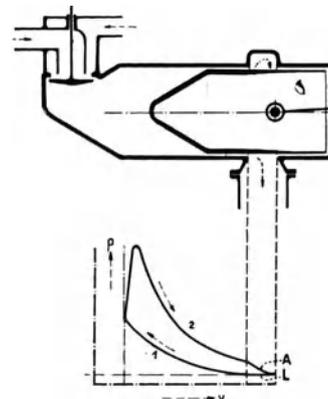


Abb. 82.3. Zweitaktmaschine.
(Aus Weihe.)

82.2. Die Kolbenwege.

Zu einer beliebigen Kurbelstellung C (Abb. 82.4) findet man die Kreuzkopfstellung K , indem man einen Kreisbogen mit der Stangenlänge l um die Kurbelzapfenmitte C schlägt. Die Kolbenstellungen sind um eine bestimmte Länge von der Kreuzkopfstellung entfernt.

Es ist übersichtlicher, die Kolbenstellungen näher an die Kurbelstellungen zu rücken, indem man die Endstellungen des Kolbens mit den Totlagen der Kurbel (A und B) zusammenfallen läßt. Man findet die Kolbenstellung C' dann durch Schlagen eines Kreisbogens mit der Stangen-

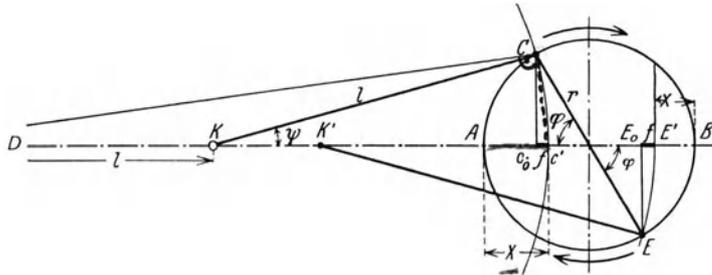


Abb. 82.4. Kolbenwege.

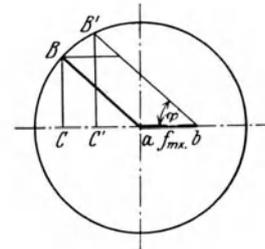


Abb. 82.5. Konstruktion der Kolbenstellung nach Brix.

länge l um die Kreuzkopfzapfenmitte K . Für eine unendlich lange Schubstange ergeben sich die Kolbenstellungen durch senkrechte Projektion der Kurbelzapfenmitte auf die Pleuellage:

$$AC_0 = r(1 - \cos \varphi). \tag{82.2}$$

Bei endlicher Stangenlänge ist der Kolben um den Betrag f (oft als Fehlerglied bezeichnet) von C_0 entfernt:

$$x = r(1 - \cos \varphi) \pm f. \tag{82.3}$$

Das $+$ -Zeichen gilt für den Hingang, das $-$ -Zeichen für den Rückgang, wenn der Winkel φ immer von der Anfangslage des Kolbens aus gemessen wird. Im rechtwinkligen Dreieck $DC'C$ ist: $r^2 \sin^2 \varphi = f(2l - f)$. Wenn f gegen $2l$ vernachlässigt wird, so ist $r^2 \sin^2 \varphi = 2fl$ oder

$$f = \frac{r^2}{2l} \sin^2 \varphi \tag{82.4}$$

und damit $x = r(1 - \cos \varphi) \pm \frac{r^2}{2l} \sin^2 \varphi. \tag{82.5}$

Bei Dampfmaschinen ist $r/l = 1/5$; bei Verbrennungsmaschinenkraft $r/l = 1/4,5$ bis $1/4$ und noch weniger. Durch die Vernachlässigung von f gegen $2l$ entsteht ein verhältnismäßiger Fehler von $f/2l$. Der Größtwert von f für $\varphi = 90^\circ$ ist $f_{\max} = r^2/2l$, so daß der größte Fehler $r^2/4l^2$ ist. Für $r/l = 1/5$ ist der Fehler von f_{\max} gleich 1% und damit der größte Fehler des Pleuellages $1/2000$ des Hubes $2r$.

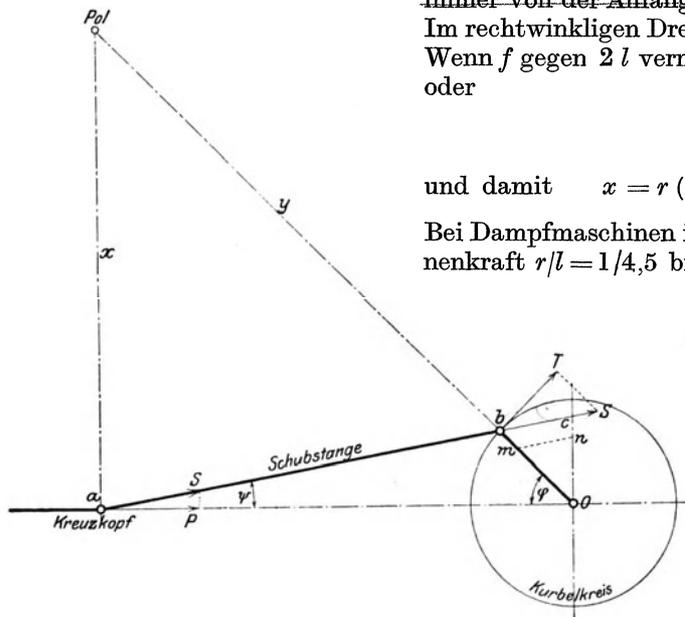


Abb. 82.6. Darstellung der Pleuellagenbewegung als Drehung um einen Pol. (Aus Gutermuth.)

Die Pleuellage kann man auch durch folgende, zuerst von Brix¹ angegebene Näherungskonstruktion finden. Man trage in b (Abb. 82.5) in der Entfernung f_{\max} aus a den Pleuellage φ auf. Die vertikale Projektion des Schnittpunktes B' mit dem Pleuellagekreis gibt die gesuchte Pleuellage C' . Der kleine Bogen BB' als Gerade aufgefaßt hat nämlich die Länge $f_{\max} \sin \varphi = \frac{r^2}{2l} \sin \varphi$ und damit ist $CC' = \frac{r^2}{2l} \sin^2 \varphi$ gleich dem Fehler-

¹ Z. VDI. 1897, S. 431.

82.3. Die Geschwindigkeiten.

Die Umfangsgeschwindigkeit des Kurbelzapfens ist $v = \omega r$. Die Geschwindigkeit des geradlinig auf der Gleitbahn geführten Kreuzkopfes folgt daraus, daß die ebene Bewegung der Schubstange als eine Drehung um das Momentanzentrum P (Abb. 82.6) aufgefaßt werden kann. Dann verhalten sich die Kolbengeschwindigkeit c und die Umfangsgeschwindigkeit des Kurbelzapfens v wie die Entfernungen x und y von P , d. h. $c = v x/y$. Aus den ähnlichen Dreiecken abP und bOC folgt: $x/y = \overline{OC}/r$, so daß $c = \omega \cdot \overline{OC}$ ist. Wenn die Umfangsgeschwindigkeit v durch den Kurbelradius dargestellt wird, so gibt die Strecke OC die Kolbengeschwindigkeit. In Abb. 82.7 ist die Abhängigkeit der Kolbengeschwindigkeit vom Kolbenweg dargestellt. Die größte Kolbengeschwindigkeit ist

$$c_{\max} = v/\cos\psi_{\max} \approx 1,02 v. \quad (82.6)$$

Unter mittlerer Kolbengeschwindigkeit c_m versteht man diejenige Geschwindigkeit, mit der sich der Kolben bewegen müßte, um bei gleichförmiger Bewegung den Kolbenhub $s = 2r$ in der gleichen Zeit t zu durchlaufen ($c_m t = 2r$). Bei n Umdrehungen der Kurbelwelle in der Minute ist $t = \frac{60}{2n} = \frac{30}{n}$ und damit

$$c_m = \frac{rn}{15} \text{ m/s} = \frac{2}{\pi} \cdot v. \quad (82.7)$$

Die mittlere Kolbengeschwindigkeit ist also das $2/\pi = 0,637$ fache der Kurbelzapfengeschwindigkeit.

82.4. Die Beschleunigungen.

Durch Differentiation der Gl. (5) für den Kolbenweg nach der Zeit erhält man die Kolbenbeschleunigung

$$c = \frac{dx}{dt} = r\omega \left(\sin\varphi \pm \frac{r}{2l} \sin 2\varphi \right), \quad (82.8)$$

weil $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ ist. Die nochmalige Differentiation nach der Zeit ergibt die Kolbenbeschleunigung b

$$b = \frac{dc}{dt} = r\omega^2 \left(\cos\varphi \pm \frac{r}{l} \cos 2\varphi \right), \quad (82.9)$$

und zwar gilt das $+$ -Zeichen wieder für den Hingang, das $-$ -Zeichen für den Rückgang.

Für den Hingang ist für $\varphi = 0^\circ$, (OTP)

$$b = r\omega^2 \left(1 + \frac{r}{l} \right) \quad \text{und}$$

$$\text{für } \varphi = 180^\circ, b = -r\omega^2 \left(1 - \frac{r}{l} \right).$$

Trägt man zu den Kolbenstellungen die zugehörigen Kolbenbeschleunigungen als Ordinaten auf, so erhält man eine Parabel. Daraus folgt folgende einfache Konstruktion¹: Man trägt die Beschleunigungen für die beiden Totstellungen in A und B auf (Abb. 82.8). Im Schnittpunkt E von CD mit AB wird die Strecke $EF = 3r/l$ aufgetragen; dann sind CF und FD die Tangenten der Parabel in A und B . Nach der Tangentenmethode ist die Parabel dadurch vollständig bestimmt.

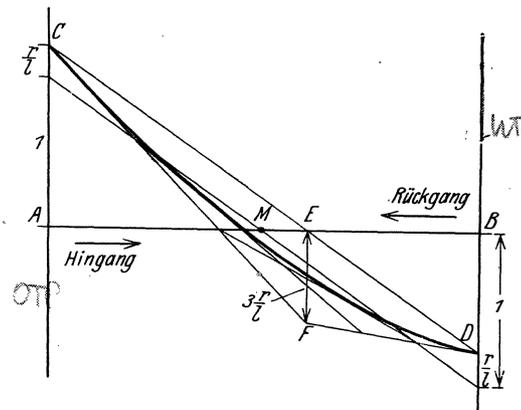


Abb. 82.8. Konstruktion der Beschleunigungen.

82.5. Die Kräfte.

Die Kolbenkraft P kann in zwei Komponenten zerlegt werden, nämlich in Richtung der Schubstange, $S = \frac{P}{\cos\psi}$ (Abb. 82.9), und senkrecht zur Gleitbahn $N = P \operatorname{tg}\psi$. Die Stangenkraft S wird am größten, wenn ψ am größten ist. Für $\operatorname{tg}\psi_{\max} = r/l = 0,2$ ist $N_{\max} = 0,2 P$ und $S_{\max} = 1,02 P$, d. h. die Stangenkraft kann für die meisten Zwecke gleich der Kolbenkraft gesetzt werden. Bei der in Abb. 82.9a gezeichneten Kolbenstellung ist der Normaldruck N beim Hingang nach unten gerichtet; das ist auch beim Rückgang der Fall, wie man aus Abb. 82.9b erkennt. Beim Kompressor dagegen geht die treibende Kraft von der Kurbel aus (Abb. 82.10), der Normaldruck wirkt nach oben.

¹ Für den Beweis s. Tolle: Regelung der Kraftmaschinen, 3. Aufl., S. 35—37. Berlin: Julius Springer 1921.

Die Stangenkraft S bewirkt eine Drehung der Kurbelwelle mit dem Moment:

$$M = S \cdot r \sin(\varphi + \psi) = T \cdot r. \quad (82.10)$$

T ist die tangentielle und R die radiale Komponente von S (Abb. 82.11). In den Kolbenendlagen ist $T = 0$, so daß von diesen Stellungen aus die Maschine durch eigene Kraft nicht anlaufen kann. Deshalb werden diese Stellungen als „Totlagen“ bezeichnet.

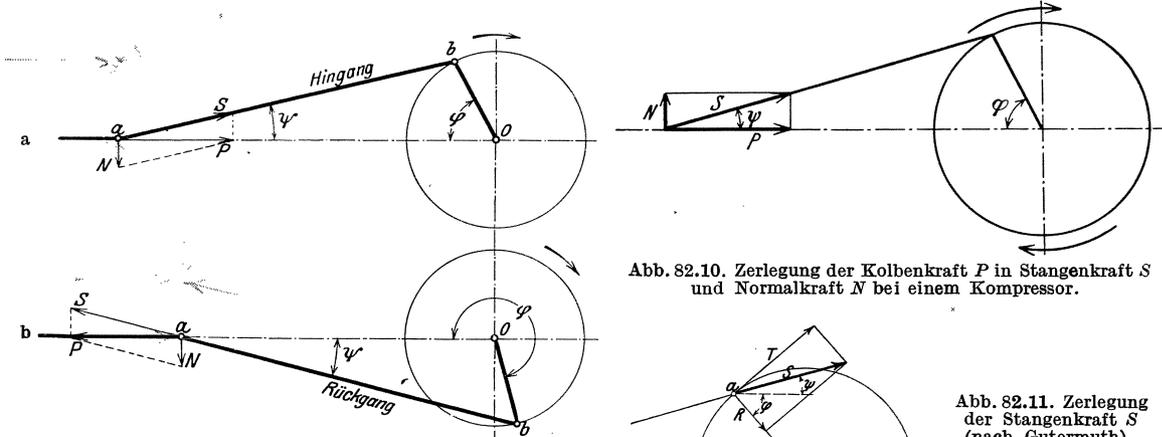


Abb. 82.9. Zerlegung der Kolbenkraft P in Stangenkraft S und Normalkraft N bei einer Kraftmaschine. (Aus Gutermuth.)

Abb. 82.10. Zerlegung der Kolbenkraft P in Stangenkraft S und Normalkraft N bei einem Kompressor.

Abb. 82.11. Zerlegung der Stangenkraft S (nach Gutermuth).

Neben diesen Kräften sind noch die durch die Beschleunigungen bedingten Massenkräfte zu berücksichtigen.

Für die hin- und hergehenden Teile (Kolben, Kolbenstange und Kreuzkopf) mit der Gesamtmasse m_1 ist die Beschleunigungskraft $P_1 = -bm_1$, wobei b aus Gl. (9) zu entnehmen ist.

Für die drehenden Teile, deren Gesamtmasse m_2 im Kurbelzapfenmittel konzentriert gedacht ist, ist $P_2 = -m_2 r \omega^2$, weil $r \omega^2$ die nach dem Drehpunkt gerichtete Zentripetalbeschleunigung ist.

Bei der Schubstange hat jeder Punkt eine nach Größe und Richtung verschiedene Beschleunigung, die aus den bekannten Beschleunigungen der beiden Endpunkte bestimmt werden kann.

Man kann zur Berechnung der Massenkräfte die Schubstange nach der Theorie der Ersatzpunkte auch durch einige Massenpunkte ersetzen, deren Größe und Lage zueinander so zu bestimmen sind, daß das Ersatzsystem die Stange statisch und dynamisch vollkommen ersetzt. Die Bedingungen hierfür lauten:

1. Summe der Massen der Ersatzpunkte = Gesamtmasse der Stange,
2. Schwerpunkt des Ersatzsystems = Schwerpunkt der Stange, und
3. Massenträgheitsmoment des Ersatzsystems bezüglich der in Betracht kommenden Drehachsen muß gleich dem Massenträgheitsmoment der Stange sein.

Selbstverständlich wird man immer bestrebt sein mit möglichst wenig Ersatzpunkten auszukommen, die bei der vorliegenden ebenen Bewegung naturgemäß in einer Ebene liegen¹.

Reduktion auf zwei Ersatzpunkte, die mit dem Schwerpunkt in einer Linie liegen. Dann ist:

1. $m_1 + m_2 = m$
2. wenn s_1 und s_2 die Entfernungen vom Schwerpunkt sind:

$$m_1 \cdot s_1 = m_2 \cdot s_2$$

3. Massenträgheitsmoment: $\Theta_s = m \cdot \varrho^2 = m_1 \cdot s_1^2 + m_2 \cdot s_2^2$ in bezug auf den Schwerpunkt.

Diese drei Gleichungen enthalten die vier Unbekannten, m_1 , m_2 , s_1 und s_2 , so daß eine Größe z. B. die Lage des einen Punktes (s_1) beliebig gewählt werden darf. Dann ist

$$s_2 = \varrho^2/s_1, \quad m_1 = \frac{m \cdot \varrho^2}{s_1^2 + \varrho^2} \quad \text{und} \quad m_2 = \frac{m \cdot s_1^2}{s_1^2 + \varrho^2}. \quad (82.11)$$

Das einfachste Anwendungsbeispiel ist der Ersatz des physikalischen Pendels durch ein gleichwertiges mathematisches. Man verlegt einfach die Masse m_1 in die Pendelachse und bekommt als Pendellänge

$$l = s_1 + s_2 = s_1 + \varrho^2/s_1.$$

¹ Ausführlich in Wittenbauer: Graphische Dynamik, Abschnitt IX. Berlin: Julius Springer 1923.

Man nennt den Massenpunkt m_2 auch den Stoßmittelpunkt des Körpers, denn es ist ohne weiteres klar, daß, wenn der Körper im Ersatzpunkt m_2 durch Kräfte senkrecht $m_1 m_2$ getroffen wird, diese im Aufhängepunkt m_1 keine Kraftwirkung ausüben.

Zwei Ersatzpunkte reichen immer aus, wenn die Lage eines Punktes in bezug auf dem Schwerpunkt beliebig gewählt werden kann. Das ist bei der Schubstange nicht der Fall, da wir als Ersatzpunkte am liebsten die Endpunkte der Stange festlegen möchten. Wir brauchen also mindestens drei Ersatzpunkte. Da nur drei Gleichungen vorhanden sind, können drei Bedingungen beliebig gewählt werden, z. B. die Lage zweier Ersatzpunkte (m_1 und m_2) in bezug auf dem Schwerpunkt und als dritter Ersatzpunkt (m_3) der Schwerpunkt selbst. Diese drei Punkte werden so gewählt, daß sie auf einer Linie liegen. Dann lauten die drei Gleichungen:

1. $m_1 + m_2 + m_3 = m$
2. $m_1 \cdot s_1 = m_2 \cdot s_2$ und
3. $m_1 \cdot s_1^2 + m_2 \cdot s_2^2 = m \cdot \rho^2,$

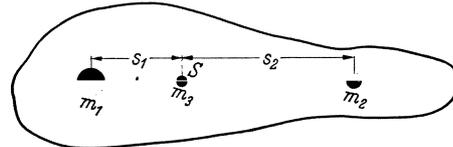


Abb. 82.12.

woraus

$$m_1 = \frac{m \rho^2}{s_1 (s_1 + s_2)}, \quad m_2 = \frac{m \rho^2}{s_2 (s_1 + s_2)} \quad \text{und} \quad m_3 = m \left(1 - \frac{\rho^2}{s_1 s_2} \right). \quad (82.12)$$

Die Form der Schubstange wird nun so gewählt, daß $m_3 = 0$ wird. Der Schwerpunkt der Stange wird in bekannter Weise durch Auswiegen, das Trägheitsmoment durch den Pendelversuch bestimmt.

Bezieht man die Massenkräfte auf den Kolbenquerschnitt F (cm²), so sind sie als Massendruck p_b den auf die Kolbenfläche wirkenden Arbeitsdrücken p vergleichbar.

$$p_b = \frac{m_g}{F} r \omega^2 \left(\cos \varphi + \frac{r}{l} \cos 2 \varphi \right) = \frac{G_0}{F \cdot g} r \omega^2 \left(\cos \varphi + \frac{r}{l} \cos 2 \varphi \right). \quad (82.13)$$

Für Kolbenmaschinen ist es zweckmäßig, das Gewicht der hin- und hergehenden Teile auf 1 Liter des Hubvolumens des Arbeitszylinders zu beziehen ($G_0 = G/2F \cdot r$). Da das Hubvolumen $= 2 \cdot F \cdot r \text{ cm}^3 = \frac{2 F \text{ cm}^2 \cdot r \text{ meter}}{10}$ Liter ist, so wird $G_0 = \frac{10 G_g}{2 F \cdot r} \text{ kg/l}$ und mit $c_m = \frac{2}{\pi} v$ oder $v^2 = 2,5 c_m^2$

$$p_{b, \max} = 2 G_0 \left(1 + \frac{r}{l} \right) \cdot \left(\frac{v}{10} \right)^2 = 5 G_0 \left(1 + \frac{r}{l} \right) \left(\frac{c_m}{10} \right)^2 \text{ kg/cm}^2. \quad (82.14)$$

Für Kolbenpumpen ist	$c_m = 2$ bis 4 m/s und $G_0 = 6$ bis 8 kg/l
„ ortsfeste Kraftmaschinen	$= 4$ „ 6 „ $= 5$ „ 8 „
„ Fahrzeugmotoren	$= 6$ „ 10 „ $= 3$ „ 4 „
„ Flugmotoren	$= 8$ „ 14 „ $= 2$ „ 3 „
„ Rennmotoren	$= 15$ „ 20 „ < 2 „

Für ein Flugzeugmotor z. B. mit $G_0 = 2$, $r/l = 1/4$, $c_m = 15 \text{ m/s}$ ist $p_{\max} = 28 \text{ kg/cm}^2$.

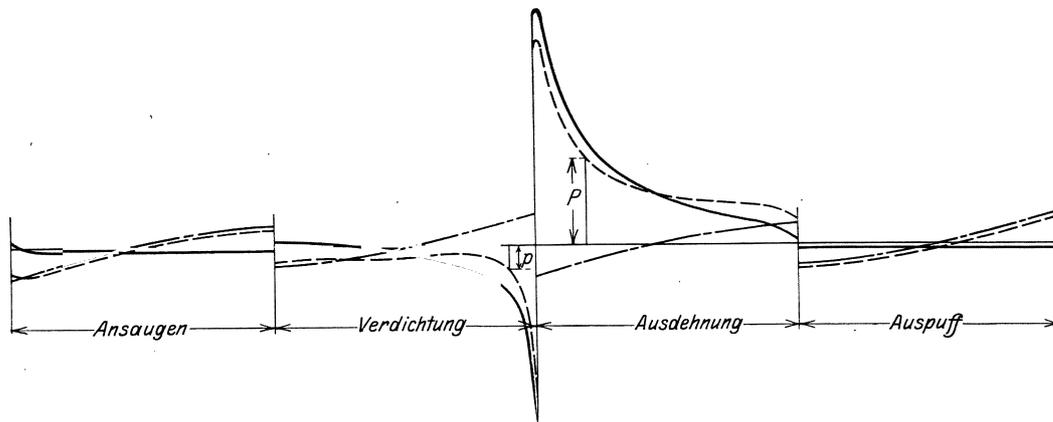
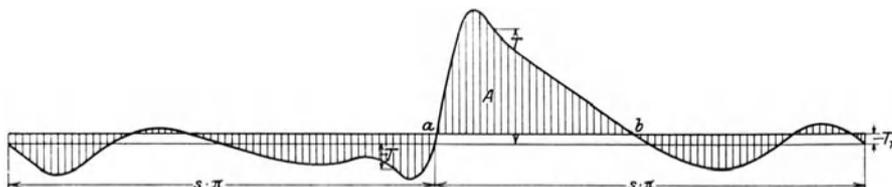


Abb. 82.13. Kolben- und Massenkräfte eines Viertakt-Dieselmotors (nach Dubbel, Ölmaschinen). NB.: Die strichpunktierten Linien geben die Massenkräfte, die gestrichelten Linien die resultierenden Kolbenkräfte an.

Die Massenkräfte sind für einen Viertakt-Dieselmotor in Abb. 82.13 in Abhängigkeit der Kolbenwege dargestellt. Die totalen Kolbenkräfte erhält man durch algebraische Addition. Damit ist auch die totale tangentielle Kraft T für jede Kolbenstellung bestimmt. Da das Drehmoment

der Kurbelwelle $= T \cdot r$ ist, so gibt der Verlauf der tangentialen Kraft auch ein Bild für die Veränderlichkeit des Momentes. In Abb. 82.14 ist für die Viertaktmaschine der Verlauf der tangentialen Kräfte T in Abhängigkeit des abgewickelten Kurbelkreises ($2\pi r = \pi s$) dargestellt (Drehkraftkurve oder Tangentialdruckdiagramm).

Abb. 82.14. Tangentialdruckdiagramm eines Viertakt-Dieselmotors. (Aus Dubbel.)



82.6. Gleichförmigkeit des Ganges.

Da die Arbeitsentnahme aus der Kraftmaschine im Beharrungszustand meist gleichmäßig, oft aber auch periodisch veränderlich ist, besteht nicht in jedem Augenblick Gleichgewicht zwischen der treibenden Kraft T und dem Widerstand. Bei konstantem Widerstand ist das Widerstandsdiagramm ein Rechteck, das — auf der gleichen Grundlinie errichtet — dem Tangentialdruckdiagramm im Beharrungszustand der Maschine inhaltsgleich sein muß. Zeitweilig leistet aber die tangentiale Kraft T mehr Arbeit als zur Überwindung des Widerstandes erforderlich ist, d. h. die Drehung wird beschleunigt. Zu anderen Zeiten ist die von der Kraft T geleistete Arbeit kleiner, und die Drehung wird verzögert. Die Maschine erhält demnach eine ungleichmäßige Drehbewegung.

Bezeichnet man mit ω_{\min} die kleinste (z. B. im Punkte a , Abb. 83.14) und mit ω_{\max} die größte Winkelgeschwindigkeit (z. B. Punkte b), so nennt man

$$\omega = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} \quad (82.15)$$

die mittlere Winkelgeschwindigkeit. Der Wert

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega} \quad (82.16)$$

wird als Ungleichförmigkeitsgrad der Maschine bezeichnet.

Die zulässige Ungleichförmigkeit ist von der Art der Maschine abhängig. Für Dynamomaschinen ist $\delta = \frac{1}{200}$ bis $\frac{1}{300}$, weil die Spannung und damit die Helligkeit des elektrischen Lichtes sehr stark von der Drehzahl abhängt. Bei Spinnmaschinenantrieb kann $\delta = \frac{1}{50}$ bis $\frac{1}{100}$ gewählt werden, je nach der Feinheit der Garnsorte usw.

82.7. Schwungräder.

Um die Ungleichförmigkeit der Drehbewegung klein zu halten, ordnet man auf der Kurbelwelle eine Masse (Schwungrad) an. Ein mit der Winkelgeschwindigkeit ω umlaufendes Rad, dessen Massenträgheitsmoment Θ ist, besitzt eine kinetische Energie (Wucht) von $A = \frac{\Theta \omega^2}{2}$ kgm/s. Diese Energie muß, um das Rad auf die Winkelgeschwindigkeit ω zu bringen, als Beschleunigungsarbeit geleistet werden. Das Rad kann die Energie teilweise oder vollständig wieder abgeben, wenn die Drehzahl geändert oder wenn es zur Ruhe gebracht wird (z. B. Schwungradpresse, Abb. 61.2). Die vom Rad abwechselnd aufzunehmende und abzugebende Arbeit ist

$$A = \frac{\Theta}{2} (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) = \Theta \omega^2 \delta. \quad (82.17)$$

Der Wert von A kann aus dem Tangentialdruckdiagramm entnommen werden¹. Damit ist das Massenträgheitsmoment des Schwungrades bestimmt.

$$\Theta = \frac{A}{\omega^2 \delta} = \frac{GD^2}{4g}. \quad (82.18)$$

Nimmt man an, daß der Schwungradkranz allein rund 90% des Massenträgheitsmomentes liefert, so ist das Kranzgewicht

$$G_1 = 0,9 \frac{4 Ag}{\omega^2 \delta D^2} = \frac{3240}{n^2 \delta D^2} A. \quad (82.19)$$

Der Kranzdurchmesser ist durch die zulässige Umfangsgeschwindigkeit des Rades eingeschränkt.

¹ Wittenbauer, F.: Graphische Dynamik, J. Springer, Berlin, gibt in Abschnitt 42 eine viel allgemeinere Methode zur Berechnung des Schwungradgewichtes.

Schwungräder kommen nicht nur bei den Kolbenmaschinen, sondern auch bei vielen Werkzeugmaschinen, z. B. Stanzen, Scheren, Pressen vor. Bei solchen Maschinen pflegt man $\delta = 1/4$ anzunehmen; aus Gl. (16) folgt dann $\omega_{\min}/\omega_{\max} = 7/9$.

82.8. Ausgleich der Massenwirkungen.

Die inneren Kräfte, wie Kolbendruck P , Stangenkraft S , Normaldruck N (Abb. 82.15), die immer paarweise auftreten und sich gegenseitig aufheben, können die Bewegung des Gesamtschwerpunktes der Maschine nicht beeinflussen. Sie erzeugen auch kein Drehmoment, da die gleich großen Momente $S \cdot h$ und $N \cdot x$ entgegengesetzt gerichtet sind und sich deshalb ebenfalls aufheben¹. Bewegt sich der Gesamtschwerpunkt der Maschine durch die Bewegung ein-

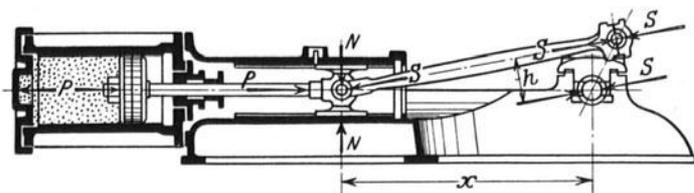


Abb. 82.15. (Aus Tolle.)

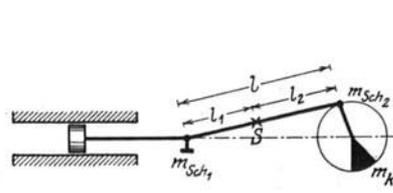


Abb. 82.16. (Aus Föppl, Schwingungslehre.)

zerner Teile, so müssen dazu äußere Kräfte wirken, die durch die Fundamentschrauben übertragen werden. Um diese wechselnden Kräfte, die Erschütterungen verursachen, zu vermeiden, sollte der Gesamtschwerpunkt keine Verschiebung erfahren; dazu genügt es, den Gesamtschwerpunkt der bewegten Teile allein in Ruhe zu halten. Die Bewegung des ganzen Getriebes kann — was die Massenwirkungen anbelangt — durch die Bewegung von zwei Massenpunkten ersetzt werden, nämlich:

1. Die Gesamtmasse der hin- und hergehenden Teile, sowie ein Teil der Masse der prismatischen Schubstange wird im Kreuzkopf konzentriert gedacht und erhält eine geradlinige Bewegung (Masse m_g).

2. Die Gesamtmasse aller drehenden Teile wird auf den Kurbelradius r reduziert, in welchem Punkte noch der Rest der Schubstangenmasse angreift.

Die Schwerpunktsbewegung der drehenden Masse kann in einfacher Weise durch eine Gegenkurbel m_k (Abb. 82.16) vollständig ausgeglichen werden.

Die Massenkraft P_b der hin- und hergehenden Bewegung ist nach Gl. (9):

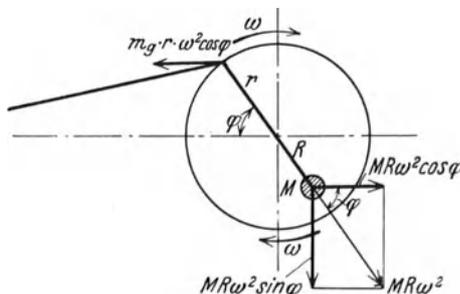


Abb. 82.17.

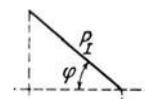


Abb. 82.18. (Aus Föppl.)

$$P_b = m_g r \omega^2 \cos \varphi + m_g \frac{r^2}{l} \omega^2 \cos 2\varphi = P_I \cos \varphi + P_{II} \cos 2\varphi. \quad (82.20)$$

Die Gesamtkraft P_b kann demnach in die beiden Teilkräfte $P_I \cos \varphi$ und $P_{II} \cos 2\varphi$ zerlegt werden. Man nennt $P_I \cos \varphi$ die Massenkraft erster Ordnung (mit dem Größtwert $P_I = m r \omega^2$) und $P_{II} \cos 2\varphi$ die Massenkraft zweiter Ordnung, dessen Größtwert $= m_g \omega^2 r^2/l$, also $r/l = \frac{1}{2}$ mal kleiner als P_I ist. Meist begnügt man sich praktisch mit dem Ausgleich der (größeren) Massenkräfte erster Ordnung.

Der Ausgleich der Massenkräfte erster Ordnung durch ein rotierendes Gegengewicht ist nicht möglich. Wenn gegenüber dem Kurbelzapfen (Abb. 82.17) ein Gegengewicht M in der Entfernung R vom Drehpunkt so gebracht wird, daß

$$m_g r = M R,$$

so sind wohl die beiden horizontalen Massenkräfte gleich und heben sich gegenseitig auf, aber es wird eine senkrechte Komponente $M R \omega^2 \sin \varphi$ hinzugefügt. Das Gegengewicht M bewirkt also nur eine Umbiegung der Massenkraft um 90° . Da vertikale Schwingungen weniger stark empfunden werden als horizontale, so kann dieser „Ausgleich“ bei horizontalen Maschinen vorteilhaft sein; bei vertikalen Maschinen ist er vollständig unangebracht.

Die Massenkraft $P_I \cos \varphi$ stellt man am zweckmäßigsten als Vektor dar (Abb. 18). Bei einer

¹ Der Beweis folgt sofort durch Einsetzen der Werte: $N = P \operatorname{tg} \psi$, $S = \frac{P}{\cos \psi}$ und $h = x \sin \psi$.

Einzylindermaschine kann diese Kraft nicht ausgeglichen werden; zum vollständigen Massen- ausgleich sind somit Mehrzylindermaschinen erforderlich. Dabei kann

$$\sum P_I \cos \varphi = P_{I,1} \cos \varphi_1 + P_{I,2} \cos \varphi_2 + P_{I,3} \cos \varphi_3 + \dots = 0 \quad (82.21)$$

werden. Man setzt dabei die Vektoren $P_{I,1}, P_{I,2}, P_{I,3}$, usw. zu einem Vektor P zusammen, dessen Projektion auf die Mit- tellinie Null werden sollte (Abb. 82.19).

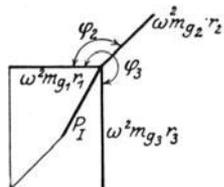


Abb. 82.19. Zusammen- setzung der Vektoren für eine Dreizylindermaschine.

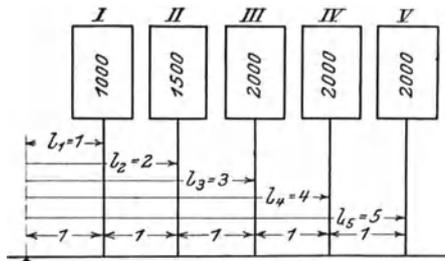


Abb. 82.20. (Aus Dubbel, Dampfmasch.)

Da die Massenkräfte bei Mehr- zylindermaschinen nicht in einer Ebene wirken, so müssen auch die Momente dieser Kräfte ver- schwinden (Abb. 82.20), d. h. es muß

$$\sum P_I l \cos \varphi = 0 \quad (82.22)$$

sein. Das im Zylinder Arbeit leistende Medium hat unmittelbar keinen Einfluß auf die Massen- kräfte. Bei Dampfmaschinen können verschiedenartige Zylinder (Hochdruck-, Mitteldruck-, Niederdruckzylinder) mit verschiedenen Massen m_g und verschiedenen Entfernungen a auf- treten. Bei Verbrennungskraftmaschinen dagegen sind die Massen der bewegten Teile für jeden Zylinder genau gleich und ebenso die Entfernungen a der Zylinder¹.

83. Sonderformen des Kurbeltriebes.

83.1. Die Kurbelschleife.

Der Kurbelzapfen bewegt sich mittels eines Gleitstückes in einer senkrecht zur Kolbenstange angeordneten Führung (Abb. 83.1); sie wird bei gedrängt gebauten Dampfmaschinen und auch bei Stanzen verwendet.

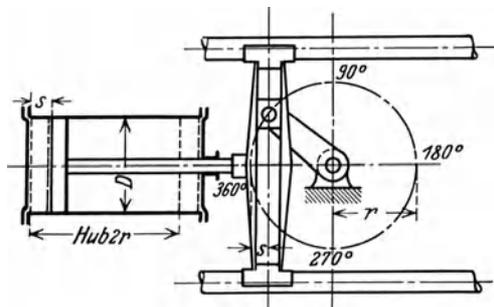


Abb. 83.1. Kurbelschleife.

Der Kolbenweg ist:

$$x = r (1 - \cos \varphi).$$

Die Kolbengeschwindigkeit:

$$c = \frac{dx}{dt} = \omega r \sin \varphi$$

und die Beschleunigung:

$$b = \frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 r \cos \varphi.$$

83.2. Exzenter.

Ein Exzenter ist eine Kurbel, deren Zapfen so groß ist, daß er die Kurbelwelle mit umfaßt (Abb. 83.2); dadurch wird das Aufbringen auf gerade Wellen möglich. Die Zapfenerweiterung allein hat also zu einer auffallenden Formänderung der Kurbel geführt. Der große Zapfendurch- messer D verursacht große Reibungsverluste und eine Beschränkung des Verwendungsgebietes in dem Sinne, daß sich ein Exzenter nur für die Kraftabgabe von der Welle aus, aber nicht umgekehrt verwenden läßt. Das Drehmoment der Stangenkraft S ist wie bei der Kurbel:

$$M_a = S \cdot e \sin (\varphi + \psi).$$

Das Moment der Reibungskraft μS ist

$$M_r = \mu S \xi,$$

wobei der Hebelarm ξ je nach der Exzenterstellung zwischen $s + d/2$ und $e + D/2$ schwankt. Sobald nun das Reibungsmoment größer als das Moment der Stangenkraft S ist, tritt Selbst- sperrung ein. Das ist der Fall, wenn

$$e \sin (\varphi + \psi) < \mu \xi$$

ist, bei dem veränderlichen Winkel $\varphi + \psi$, also über einen großen Teil des Exzenterweges.

Der Wirkungsgrad eines Exzenters ist wie folgt zu berechnen: Die Nutzarbeit für eine Um-

¹ Ausführlicher in den Lehrbüchern über Kolbenkraftmaschinen.

drehung der Welle ist $2eS$ und die Reibungsarbeit $\mu S \pi D$, so daß der Wirkungsgrad eines Exzenters:

$$\eta = \frac{e}{e + \mu \pi D/2} \tag{83.1}$$

ist. Um kleine Reibungszahlen zu erreichen, muß in erster Linie der Bügel starr sein, sonst wirken die Ringe eher als Bandbremse statt als Lager. Die Schraubenentfernung soll also möglichst klein, die Bügelabmessungen groß gehalten werden (Abb. 83.3).

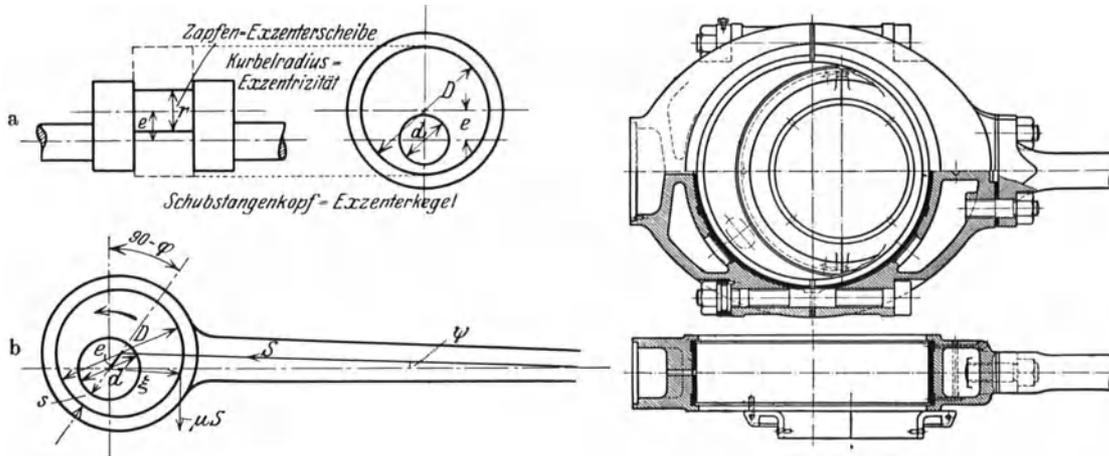


Abb. 83.2.

Abb. 83.3. (Aus Dubbel, Taschenbuch.)

Abb. 83.2 und 83.3. Exzenter.

83.3. Der versetzte Kurbeltrieb.

Die Normalkomponente N (Abb. 82.11), die bei den einfachwirkenden Maschinen als seitlicher Kolbendruck wirkt, verursacht einseitiges Auslaufen des Zylinders. Bestimmt man bei dem versetzten Kurbeltrieb (Abb. 83.4) den Verlauf der Seitendrücke aus dem resultierenden Kolbendruck, so findet man, daß während des Arbeitshubes der größte (durch den Explosionsdruck hervorgerufene) Seitendruck wesentlich kleiner wird. Bei den anderen Hübten dagegen nimmt der Seitendruck, der hauptsächlich durch die Massenwirkung verursacht wird, zu und ist zum Teil entgegengesetzt gerichtet.

Die Versetzung des Zylinders gegenüber der Kurbelwelle hat demnach den Erfolg, daß die Seitendrücke sich gleichmäßiger nach beiden Seiten verteilen. Dadurch erstreckt sich die Abnutzung des Zylinders gleichmäßiger über die ganze Lauffläche, und auch der Reibungsverlust wird verkleinert.

Beim versetzten Kurbeltrieb ändern sich natürlich auch die Kolbenwege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen¹.

Die Beschleunigungen ergeben sich zu

$$b = r \omega^2 \left(\cos \varphi + \frac{r}{l} \cos 2\varphi + \frac{a}{l} \sin \varphi \right), \tag{83.2}$$

so daß noch ein Glied $\frac{a}{l} \sin \varphi$ zu den Beschleunigungen des geraden Schubkurbelgetriebes zu addieren ist; dadurch fällt die Beschleunigungskurve für Hin- und Rückgang verschieden aus.

83.4. Die Kurbelschwinge.

Das Kurbelgetriebe in seiner bei Kraftmaschinen üblichen Form ist für den Antrieb von Werkzeugmaschinen mit einer hin- und hergehenden Hauptbewegung wenig geeignet, und zwar aus folgenden Gründen:

1. Die geradlinige Bewegung erfolgt mit einer stark veränderlichen Geschwindigkeit (Abb. 82.9) die, als Schnittgeschwindigkeit verwendet, keinen glatten Schnitt zustande kommen läßt.

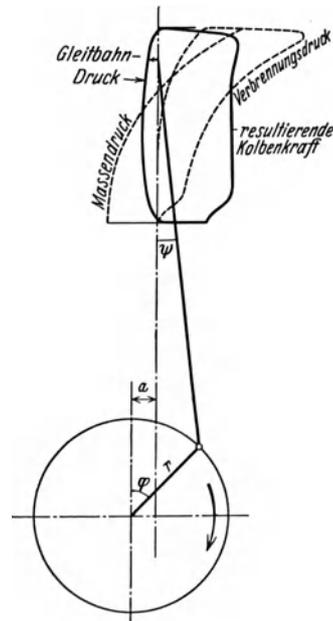


Abb. 83.4. Versetzter Kurbeltrieb.

¹ Vgl. z. B. Heller: Motorwagenbau. Bd. 1, 2. Aufl., S. 190. Berlin: Julius Springer 1925.

2. Der Vor- und Rücklauf erfolgt in der gleichen Zeit, während es wirtschaftlicher ist, die Rücklaufzeit (Leerlauf) zu verkürzen.

Durch Anwendung der Kurbelschwinge kann sowohl die Schnittgeschwindigkeit verbessert als auch der Rücklauf beschleunigt werden. Die Kurbel (Abb. 83.5) dreht sich gleichförmig um A , während die Schleife um den Zapfen B schwingen kann.

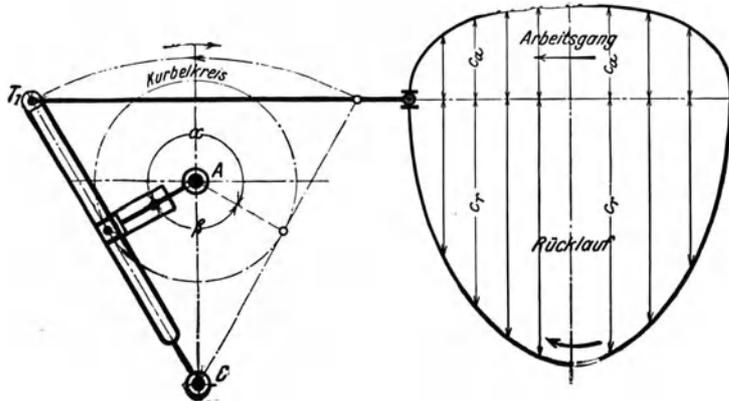


Abb. 83.5. Kurbelschwinge. (Aus Hülle, Werkzeugmaschinen.)

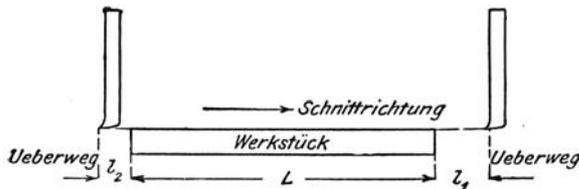


Abb. 83.6. Hub und Hobellänge. (Aus Hülle, Werkzeugmaschinen.)

Schwingt sie aus ihrer linken Totlage T_1 in die rechte T_2 (Arbeitsgang), so durchläuft die Kurbel den Winkel α . Beim Zurückschwingen von T_2 nach T_1 (Rückgang) wird der kleinere Winkel β durchlaufen. Ist nun z. B. $\alpha = 2,5\beta$, so ist auch der Rücklauf 2,5 mal rascher als der Arbeitsgang. Der ganze Hub kann nicht als nützliche Arbeitslänge verwendet werden, weil für den Auslauf und auch für das Schalten des Werkzeuges

Überwege erforderlich sind (Abb. 83.6). Werden diese Strecken l_1 und l_2 abgerechnet, so erfolgt die Bearbeitung mit ziemlich gleichmäßiger Geschwindigkeit.

83.5. Schüttelrinnenantrieb.

Die von einer geraden Schubkurbel angetriebene Rinne stützt sich auf schräggehende Federn (Abb. 83.7). Der Ausschlag ist sehr klein gegenüber der Länge der Pleuelstange und der Stützfeder, so daß diese als unendlich lang angesehen werden dürfen. Die horizontale Beschleunigung der Rinne ist dann $\omega^2 r \cos \varphi$, und (da die Rinne sich auf einer unter dem Winkel α geneigten Geraden bewegt) die vertikale Beschleunigung $\omega^2 r \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha$.

Der Auflagedruck N eines in der Rinne liegenden Körpers vom Gewichte G

$$N = G + m\omega^2 r \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha$$

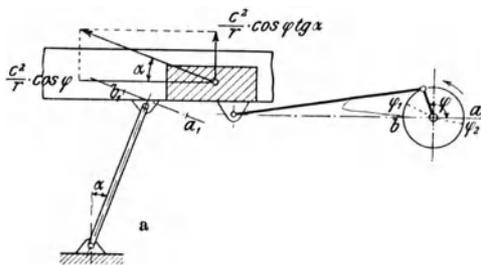


Abb. 83.7 a, b. Schüttelrinnenantrieb. (Aus Hanffstengel, Förderung von Massengütern.)

ist am größten für $\varphi = 0$, wo $\cos \varphi = 1$ und am kleinsten für $\varphi = \pi$, wo $\cos \varphi = -1$ wird. Ist z. B. $n = 400$, $r = 0,015$ m und $\alpha = 20^\circ$ ($\operatorname{tg} \alpha = 0,364$), so ist

$$N_{\max} = G \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 r}{900 \cdot g} \operatorname{tg} \alpha \right) = 1,975 G$$

und

$$N_{\min} = G (1 - 0,975) = 0,025 G.$$

Bei einer geringen Vergrößerung der Drehzahl wird N_{\min} negativ, d. h. der Körper würde sich von der Rinne abheben und eine springende Bewegung ausführen.

Der Reibungswiderstand $R = \mu N$ beeinflusst die Bewegung des Körpers in horizontaler Richtung. Er beschleunigt den Körper, solange die Geschwindigkeit der Rinne die größere ist, und verzögert ihn, sobald er der Rinne voreilt. Die Beschleunigung bzw. Verzögerung des Körpers ist (Abb. 83.6)

$$p = \frac{R}{m} = \frac{\mu N}{m} = \mu (g + \omega^2 r \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha),$$

woraus die Körpergeschwindigkeit $v_1 = \int_0^{\varphi} p dt$ und der Förderweg $s = \int v dt$ graphisch bestimmt werden können (vgl. Abschn. 66).

84. Schubstangen (Pleuelstangen) und Geradföhrungen (Kreuzköpfe).

Die Schubstange besteht aus den beiden Köpfen und dem sie verbindenden Schaft (Abb. 84.1). Bei der Konstruktion der Köpfe und des Kreuzkopfes ist zu beachten, daß die Länge auch bei Abnutzung der Gleitflächen unverändert bleibt. Eine Verkürzung oder Verlängerung ändert die Kompression im Zylinder und kann sogar den Kolben zum Anschlagen bringen. Auf die Nachstellbarkeit der sich abnutzenden Lagerstellen muß deshalb besondere Sorgfalt gelegt werden.

84.1. Das Kurbelzapfenende.

Gekröpfte Wellen (Abschn. 33) erfordern einen zweiseitigen (offenen) Kopf. Bei Stirnkurbeln kann der geschlossene Kopf (wie beim Kreuzkopfen) verwendet werden, doch wird der Zusammenbau dadurch erschwert.

Die meist vorkommende Bauart des offenen Kopfes ist der „Marinekopf“ (Abb. 84.2/3). Für die Nachstellung werden einzeln herausnehmbare Bleche oder eine abzufeilende stärkere

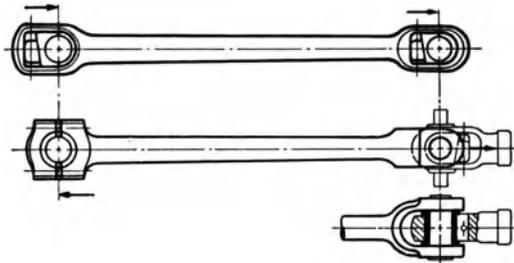


Abb. 84.1. Schubstange mit den beiden Köpfen. (Aus Rötischer.)

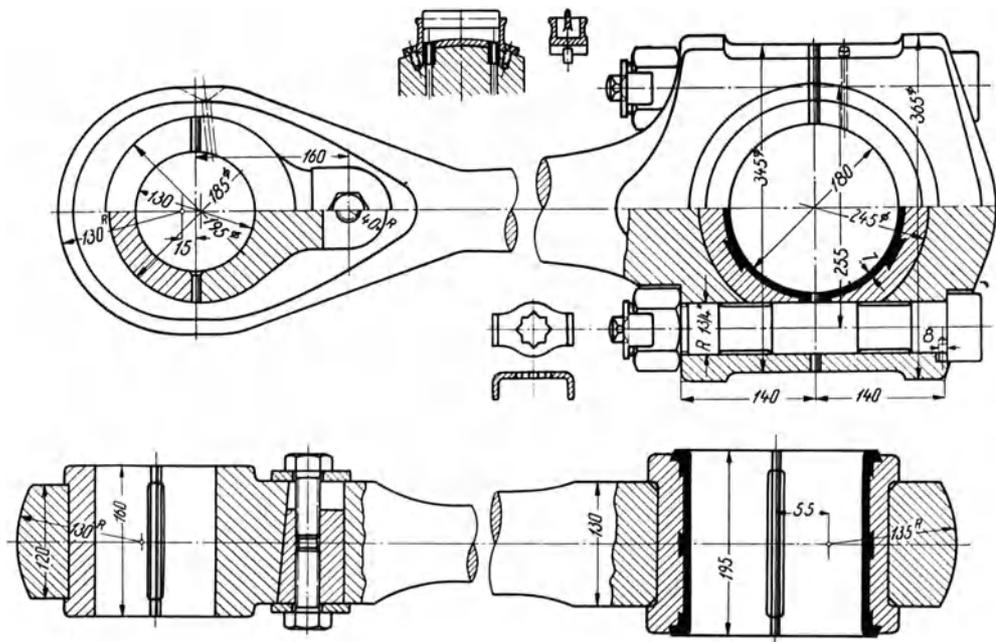


Abb. 84.2. Schubstange. (Aus Rötischer.)

Beilage zwischen Stange und Deckel gelegt. Um die Schmiedearbeit der Stange zu erleichtern, wird der Stangenkopf auch mehrteilig ausgeführt.

Abgesehen von ganz kleinen Ausführungen oder sehr langsam laufenden Maschinen, die

Bronzelager erhalten, werden die Lagerschalen immer mit Weißmetall ausgegossen. Schalen aus Gußeisen oder Stahlguß müssen vorher sorgfältig verzinkt werden, damit das Weißmetall gut daran haftet. Bei raschlaufenden Leichtmotoren wird — um die Abmessungen möglichst klein zu halten — das Weißmetall auch direkt in die Stange gegossen (Abb. 84.4). Beim Auslaufen eines solchen Lagers wird aber die Pleuelwelle angegriffen und auch die ganze Pleuelstange gefährdet. Außerdem verzinnen sich legierte Stähle schwer. (Vgl. hier die allgemeinen Bemerkungen über Lagermetalle S. 219). Bei raschlaufenden Leichtmotoren hat das Weißmetall nur eine Dicke von 1 bis 2 mm.

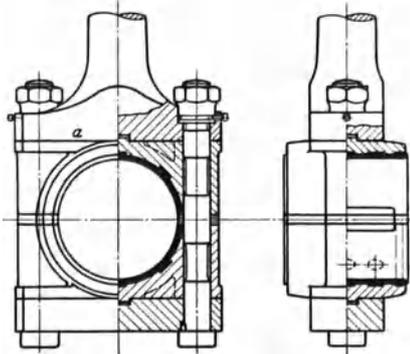


Abb. 84.3. (Aus Röttscher.)

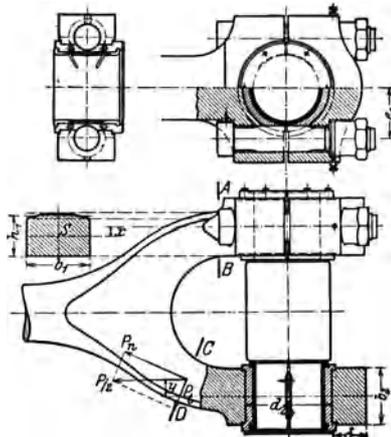


Abb. 84.5. Offener Schubstangenkopf in Gabelform. (Aus Dubbel.)

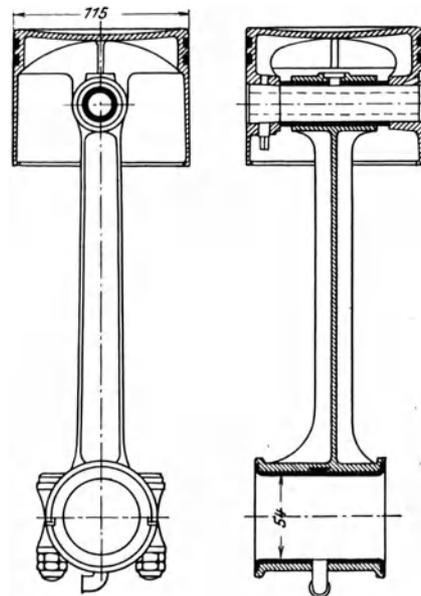


Abb. 84.4. (Aus Heller, Motorwagen.)

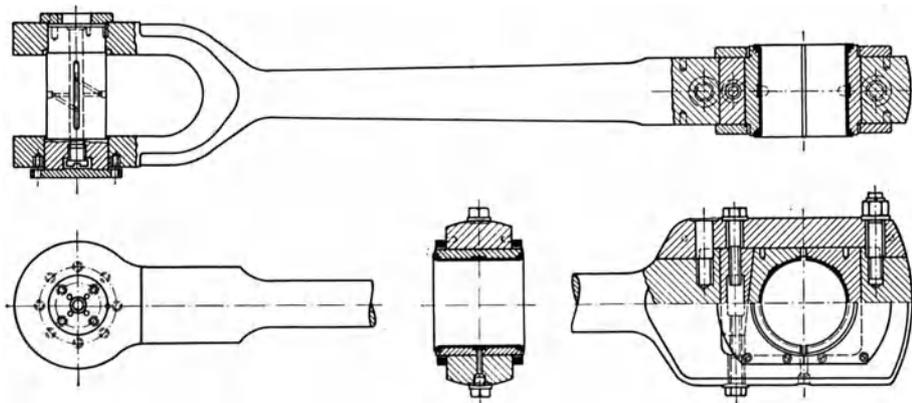


Abb. 84.6. Schubstange. (Aus Dubbel, Ölmaschinen.)

Die runden Schalen sind gegen Verdrehung zu sichern, indem z. B. die Befestigungsschrauben in die Lagerschalen einschneiden (Abb. 84.2). Besondere Beachtung ist den Verbindungsschrauben zu schenken. Sie werden durch die größte Stangenkraft auf Zug beansprucht, erfahren aber eine weit gefährlichere, stoßweise Beanspruchung (vgl. Abschn. 23.4).

Durch die elastischen Formänderungen des Deckels und der Verbindungsschrauben wird das Lagerspiel s vergrößert. Der Deckel ist demnach recht kräftig (starr) auszuführen, indem die Entfernung der Schrauben von der Stangenmittellinie so klein wie möglich gemacht wird und runde Köpfe mit kleinem Kopfdurchmesser ($D = 1,35d + 4 \text{ mm}$) gewählt werden. Die Verbindungs-

dungsschrauben sind auch möglichst kurz zu halten; die Vergrößerung des Schraubenvolumens kann demnach nur durch die Vergrößerung der Querschnittsfläche f erreicht werden.

Der Beschleunigungsdruck kann bei schnellaufenden Maschinen eine seitliche Verschiebung des Lagerdeckels verursachen. Die Verbindungsschrauben sind deshalb, wenigstens auf kurze Strecken, einzupassen (Abb. 84.2, 3 u. 5). Wirksamer können die Querkräfte durch besondere Paßkanten (Abb. 84.4) aufgenommen werden, so daß die Schrauben vollständig entlastet sind. Die Muttern müssen sorgfältig gegen Lockerung gesichert werden. Meist wird Feingewinde gewählt, das durch die Pennsche Schraube (Abb. 23.35) gesichert wird.

In Abb. 84.6 sind die für nicht ganz zuverlässig gehaltenen Bolzen durch einen seitlich aufgesetzten Bügel ersetzt.

84.2. Kreuzkopfende und Kreuzkopf.

Schubstangenkopf und Kreuzkopf bilden eine gelenkartige Verbindung (Abb. 84.1). Die Gabel kann dabei sowohl am Kreuzkopf (Abb. 84.7) als auch an der Schubstange angeordnet werden (Abb. 84.8). Die erste Ausführungsform überwiegt und kommt bei den einfachwirk-

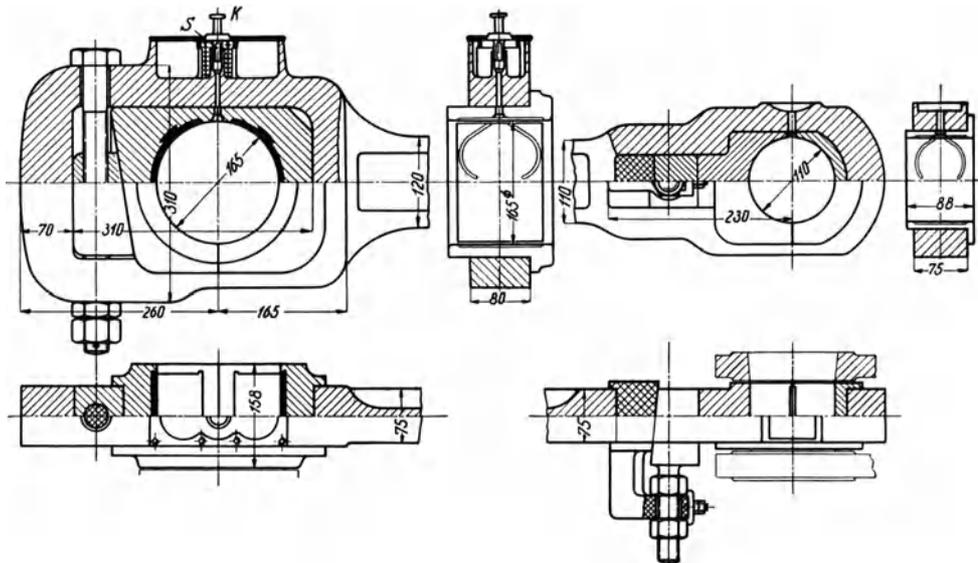


Abb. 84.7. (Aus Rötischer.)

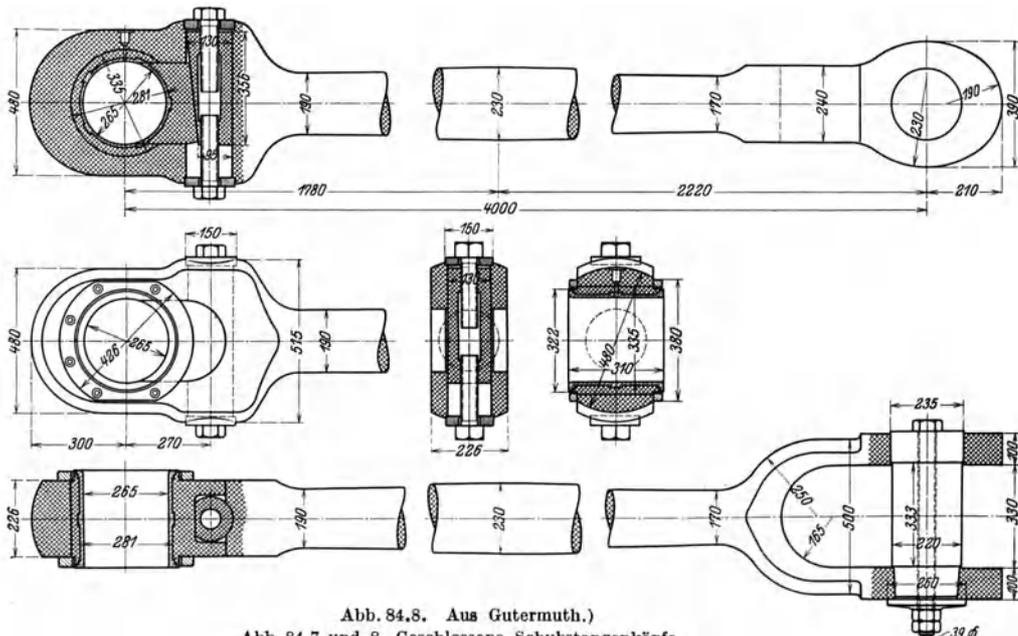


Abb. 84.8. Aus Gutermuth.)

Abb. 84.7 und 8. Geschlossene Schubstangenköpfe.

den Maschinen immer vor, wenn der Kolben gleichzeitig als Kreuzkopf dient (Abb. 82.4). Die Schubstange erhält dann einen sog. geschlossenen Kopf mit Nachstellung durch Keile. Der Keil (mit einer Neigung von 1 : 7 bis 1 : 8) kann dabei senkrecht zum Zapfen (Abb. 84.2/7 u. 8 links) oder parallel dazu (Abb. 84.7 rechts) angeordnet werden, und zwar sowohl außen (Abb. 84.7 links) von der Stangenmitte aus gerechnet als auch innen (Abb. 84.2, 84.8 links, 84.7 rechts). Ausschlaggebend für die zu wählende Anordnung ist die Möglichkeit des einfachen Zusammenbaues und der Nachstellung ohne Änderung der Stangenlänge (Abb. 84.1). Die Anordnung senkrecht zum Zapfen überwiegt, weil dafür mehr Platz vorhanden ist.

Der meist konische Zapfen sitzt in der Gabel fest (Abb. 84.8 rechts und 84.6 links) und muß gegen Verdrehung gesichert werden. Zapfen mit gleichbleibendem Durchmesser werden fast nur verwendet, wenn der Kolben gleichzeitig als Kreuzkopf dient. Abb. 84.9 zeigt eine gute Befestigung durch geschlitzte, konische Spannhülsen.

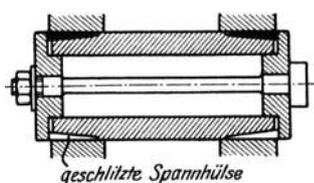


Abb. 84.9.

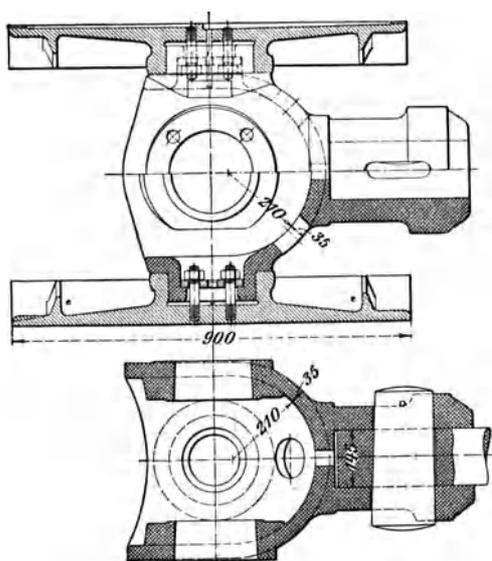


Abb. 84.10.

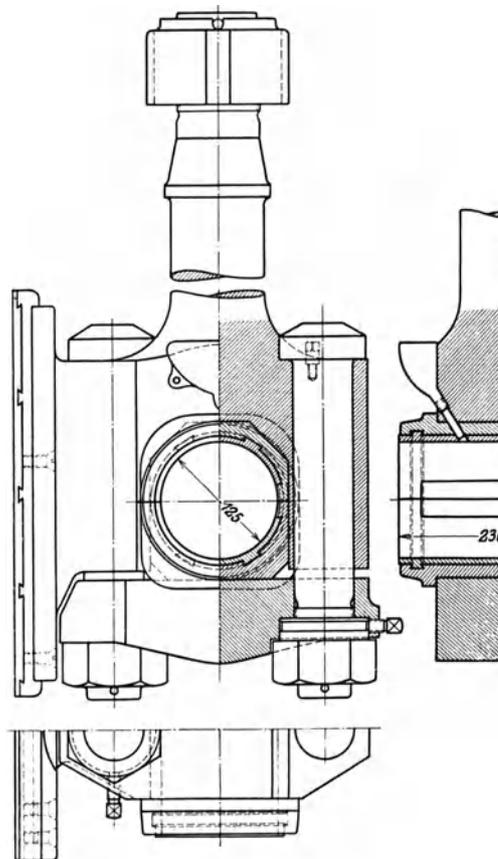


Abb. 84.11.

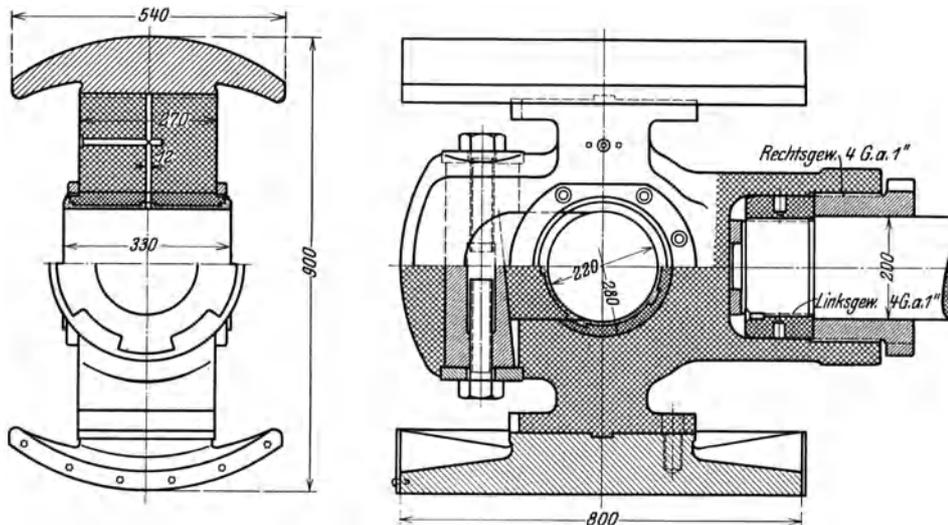
Der geschlossene Stangenkopf ist als statisch unbestimmter, stark gekrümmter Träger zu berechnen (Abschn. 12.5).

Bei den Kreuzköpfen unterscheidet man zwei Hauptformen, je nachdem der Kopf den Zapfen (Zapfenkreuzkopf, Abb. 84.10) oder das Lager trägt (Lagerkreuzkopf, Abb. 84.11 u. 12). Der Zapfenkreuzkopf hat meist Gabelform, so daß der Zapfen an beiden Enden gestützt ist.

Abgesehen von ganz kleinen Ausführungen werden die Gleitschuhe stets besonders aufgesetzt und fast immer aus Gußeisen hergestellt und mit Weißmetall ausgegossen. Die Schuhe werden erst nach dem Aufsetzen fertig gedreht, so daß die Verbindung die verhältnismäßig große Kraft bei der Bearbeitung aushalten muß. Bei zylindrischer Gleitbahn (Abb. 84.10 u. 12) ist der Kreuzkopf auch gegen seitliche Verschiebung gesichert.

Bei den einfach wirkenden Maschinen (Abb. 82.2) wird der Kolben gleichzeitig auch als Geradföhrung verwendet (Abb. 84.4) und hat dann zwei verschiedene Aufgaben zu erfüllen, gute Abdichtung und Aufnahme der Geradföhrungsdrücke. Die gute Abdichtung verlangt eine gleichmäßige Auflage der Dichtungsringe auf den ganzen Zylinderumfang, wobei die Dichtungsringe

keine große Drücke aufnehmen können (vgl. Zahlenbeispiel 12.2). Es ist deshalb zweckmäßig, beide Aufgaben zu trennen und den Kolben mit besonderen Gleitschuhen zu versehen (Abb. 84.13) oder als Kreuzkopfkolben auszubilden (Abb. 84.14).



84.3. Der Schaft¹

wird im ungünstigsten Fall (beim Anlaufen) durch den vollen Verbrennungsdruck bzw. Dampfdruck $F \cdot p_{\max} = P$ auf Knickung beansprucht. Für Dieselmotoren ist $p_{\max} = 35$ bis 40 at; für Verpuffungsmaschinen kleiner als 30 at und für Dampfmaschinen ist p_{\max} gleich dem Dampfdruck.

Da die beiden Stangenenden frei drehbar gelagert sind, wird die zulässige Stangenkraft S nach der Eulerschen Knickformel (Abschnitt 18.1):

$$S = \frac{1}{n} \frac{\pi^2}{l^2} J E \text{ kg .}$$

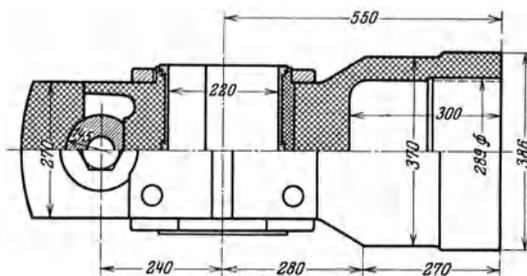


Abb. 84.12.

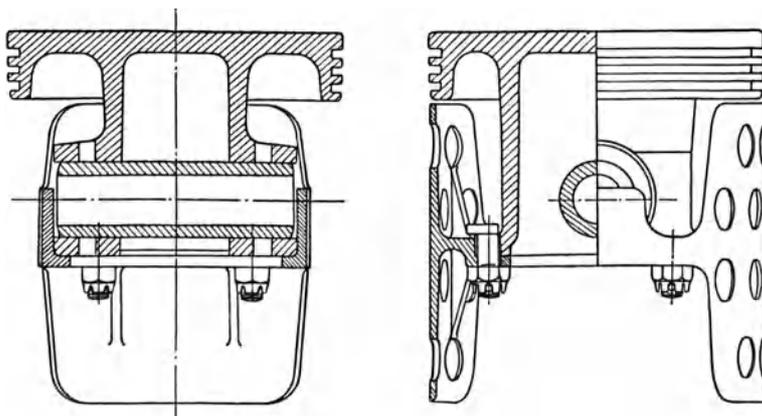


Abb. 84.13. Aluminiumkolben mit Gußeisengleitschuhen. (Aus Ricardo.)

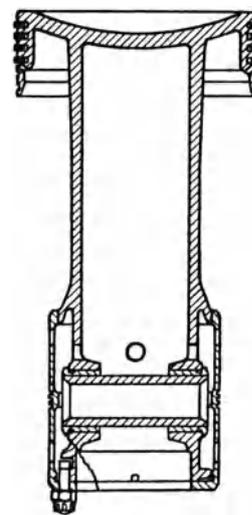


Abb. 84.14. Kreuzkopfkolben. (Aus Ricardo.)

Als Sicherheitsfaktor n wird in der Literatur angegeben:

$n = 20$ bis 25 für Dampfmaschinen und $n = 30$ für Verbrennungskraftmaschinen.

Die scheinbar sehr hohe Knicksicherheit ist aber in Wirklichkeit gar nicht vorhanden, denn erstens

¹ Schneter, E.: Berechnung und Gestaltung der Pleuelstangen schnelllaufender Pleuelmaschinen. Diss. T. H. Berlin 1936; Auszug. Automobiltechnik Z. 39 (1936), S. 375/81.

liegen die Abmessungen meist außerhalb des Geltungsbereiches der Eulerschen Formel, und zweitens beanspruchen die Trägheitskräfte (Abb. 84.15) die Stange gleichzeitig auf Biegung, so daß infolge der elastischen Durchfederung f noch ein zusätzliches Biegemoment $P \cdot f$ entsteht.

Die Knicksicherheit ist senkrecht zur Biegungsebene wesentlich größer als in der Biegungsebene, weil die Stange dort als an beiden Enden eingespannt betrachtet werden kann (Vgl. S. 126). Deshalb erhält die Schubstange bei raschlaufenden Maschinen I-Querschnitt (Abb. 84.4), und zwar so, daß das Verhältnis der Trägheitsmomente in beiden Richtungen ungefähr 1 : 3 ist. Bei kleinen Stangen wird der Schaft als Gesenkschmiedestück hergestellt und womöglich nicht nachgearbeitet. Bei größeren Stangen (Lokomotiven) wird die I-Form durch Ausfräsen hergestellt. Wo es auf große Gewichtsersparnis ankommt (Flugzeugmotoren) benützt man auch Stangen mit ringförmigem Querschnitt, die allerdings in der Herstellung sehr teuer sind, weil sie aus dem Vollen gebohrt werden müssen. Der Hohlraum kann zum Anbringen der zum Kolben führenden Schmierölleitung benützt werden.

Die zusätzliche Beanspruchung durch die Massenkräfte

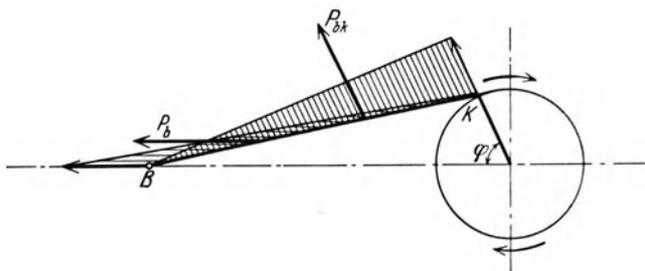


Abb. 84.15. Massenkräfte der Schubstange.

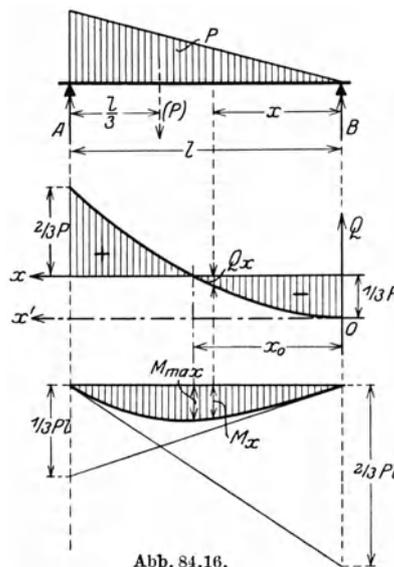


Abb. 84.16.

ist nicht so einfach zu überblicken, weil die Beschleunigungen in jedem Punkt der Stange sich aus zwei Komponenten, für die geradlinige und für die drehende Bewegung, zusammensetzt und die sich nach Größe oder Richtung mit der Stangenlage ändern. Die gefährlichste Beanspruchung durch die Radialbeschleunigung ($p_r = r \cdot \omega^2$) tritt auf, wenn diese senkrecht zur Stange gerichtet ist. In dieser Stangenlage ist die Kreuzkopfgeschwindigkeit ein Maximum (vgl. Abschn. 82.3), so daß die Beschleunigungen der geradlinigen Bewegung dann gleich Null sind.

Bei einer prismatischen Stange sind die Massenkräfte wie eine Dreieckbelastung über die Stange verteilt (Abb. 84.16) mit den Auflagerreaktionen $A = 2/3 P$ und $B = 1/3 P$. Das Biegemoment

$$M_x = B \cdot x - P \cdot \frac{x^2}{l^2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{Pl}{3} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right)$$

wird ein Maximum für $x = l/3$. $M_{\max} = 0,129 P \cdot l$ ist nur unwesentlich größer als wenn P gleichmäßig über die Stangenlänge verteilt wäre ($M_{\max} = 1/8 P \cdot l$).

Bei jeder Umdrehung der Kurbelwelle wird die Stange zweimal gebogen, so daß Schwingungen auftreten, die gefährlich werden, sobald die Schwingungszahl mit der Eigenschwingungszahl der Stange zusammenfällt. Nach Gl. (33.12) ist die kritische Schwingungszahl $\omega_k = \sqrt{Ag/f_0}$ mit $A \approx 1, 2$.

9. Rohrleitungen.

Diese dienen zur Fortleitung und Verteilung von Flüssigkeiten und Gasen und bilden wichtige Elemente in fast allen Zweigen des Maschinenbaues. In Gas- und Wasserwerken, bei Heizungs-, Lüftungs-, Kühl- und Entstaubungsanlagen, bei Dampfkesseln und Kältemaschinen usw. werden Flüssigkeiten in weit verzweigten Leitungen verteilt. Aber auch bei der Kühlung elektrischer Maschinen (Generatoren und Transformatoren) muß die Kühlflüssigkeit (Luft oder Öl) so durch die Wicklungen geführt werden, daß dort, wo viel Wärme entwickelt wird, auch eine entsprechende Menge Kühlflüssigkeit vorbeiströmt. Diese Flüssigkeitsströmungen sind nach den gleichen Gesetzen zu berechnen wie verzweigte Rohrleitungen.

91. Normen.

Im November 1925 wurden von einer internationalen Konferenz, an der die hauptsächlichsten Industriestaaten von Europa vertreten waren, allgemeine Normen für Rohre, Flanschen usw. festgelegt. Bezeichnungen: Die Nennweite (*NW*) entspricht ungefähr dem lichten Durchmesser wie in Zahlentafel 91.1 angegeben.

Nenndrücke (*ND*) sind die Drücke, für welche die Rohre und Flanschen berechnet sind (Zahlentafel 91.2).

Zahlentafel 91.1. Nennweiten.

1	10	100 mm
		125 "
1,5	15	150 "
2	20	200 "
2,5	25	250 "
3	32	300 "
		350 "
4	40	400 "
		450 "
5	50	500 "
6	60	600 "
		700 "
8	80	800 "
		„ usw.

Betriebsdrücke (*BD*) sind Drücke, die für die verschiedenen Flüssigkeiten bei normalen Betriebsverhältnissen als Höchstdruck angewendet werden sollen.

Für BD I (Wasser bis zu 100° C) ist der Betriebsdruck gleich dem Nenndruck,
 „ BD II (Dampf u. Gas bis 300° C) ist $BD = 0,8 ND$, und
 „ BD III (Heißdampf bis 400° C und gefährliche Gase) ist $BD = 0,64 ND$.

Probedrücke (*PD*) sind Drücke, bei denen Einzelteile durch Wasserdruck abgepreßt werden; sie gelten nicht für fertig verlegte Leitungen.

Zahlentafel 91.2.

Rohrleitungen, Druckstufen und Temperaturgrenzen.
 Auszug aus den Normen VSM 18320.

Nenndruck ND	Größter zulässiger Betriebsdruck				Gemeinsamer Probedruck
	I Flansche und Rohre	II Flansche und Rohre	III		
			Flansche	Rohre	
1	1	1			2
2					
2,5	2,5	2			4
3,2					
4	4	3,2			6,5
5					
6	6	5			10
8	8	6			13
10	10	8			16
12,5	12,5	10			20
16	16	13		10	25
20	20	16		13	32
25	25	20	20	16	40
32	32	25		20 ¹	50
40	40	32	32	25	60
50	50	40		32 ¹	75
64	64	50	40	40	96
80	80	64		50	120
100	100	80	64	64	150
125	125	100		80	190
160	160	125	100	100	240
200	200	160		125	300
250	250	200	160	160	375
320	320	250		200	480
400	400	320	250	250	600
500	500	400			750
640	640	500			960
800	800	640			1200
1000	1000	800			1500

¹ Bei diesen Betriebsdrücken gilt der zugehörige Probedruck nur beim Abpressen eines Rohres ohne Flansch, wird aber ein Rohr mit Flansch abgepreßt, so gilt der Probedruck für den Flansch.

Die abgekürzte Bezeichnung des Nenndruckes (*ND* und zugehörige Druckzahl) darf zur Kennzeichnung von Rohrleitungsteilen nicht benutzt werden. Dafür sind die abgekürzten Bezeichnungen der Betriebsdrücke (*BD I bis III*) zu verwenden.

Die Wanddicken werden, soweit sie nicht von der Herstellung abhängig sind, nach der Kesselformel (Gl. 14.4) berechnet:

$$s = \frac{p \cdot D_i}{2 \sigma_{zul} \cdot \varphi} + c$$

Hierin ist φ das Güteverhältnis der Rohrnaht (vgl. Abschn. 21.3, Nietverbindungen). Für nahtlose Rohre ist $\varphi = 1$, für schmelzgeschweißte $\varphi = 0,8$. Der Zuschlag c wird wegen der Abrostung eingeführt; für Stahlrohre ist $c = 0,1$ cm.

Man unterscheidet:

a) Gasrohre, stumpfgeschweißt bis etwa 50 mm Durchmesser, ohne Garantie für die Ein-

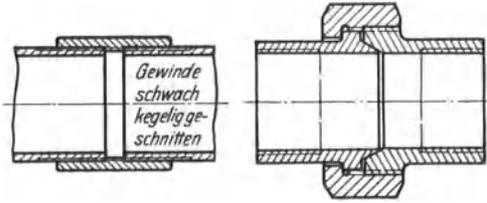


Abb. 91.1: Muffe und Verschraubung zur Verbindung von Gasrohren. (Aus Rötischer.)

haltung bestimmter Festigkeitseigenschaften des Werkstoffes, also für untergeordnete Zwecke (Zahlentafel 23.1, Gasrohrgehwinde), Abb. 91.1 u. 2.

b) Schmelzgeschweißte Stahlrohre, St. 34.28, $\delta_5 = 25\%$ (Zahlentafel 91.3).

c) Nahtlose Stahlrohre (Zahlentafel 91.4).

Die zulässigen Spannungen für weichen Stahl (St 34) kann für die drei Betriebsdrücke durch folgende Überlegung festgesetzt werden, wenn für Heißdampf eine etwas größere Sicherheit als für kaltes Wasser gewählt wird:

Für	<i>BD I</i>	<i>BD II</i>	<i>BD III</i>
ist die Temperatur	bis 120° C	300° C	400° C
die Streckgrenze	2300	1500	1200 kg/cm ²
und die zulässige Spannung	1100	625	500 kg/cm ²
nach den Normen ist	800	640	500 kg/cm ²

Die in den Normen auf Grund der Erfahrung festgelegten niedrigen Spannungen für *BD I* berücksichtigen die zusätzlichen Beanspruchungen (Wasserschläge), die bei nicht stationären Strömungen auftreten. Für *BD II* wird Stahl mit 45 bis 55 kg/mm² Bruchfestigkeit und 17% Dehnung verwendet.

Für höhere Temperaturen reichen unlegierte C-Stähle nicht mehr aus (vgl. Abb. 13.20). Durch Legierungszusätze (Molybdän, Chrom, Kupfer) ist es gelungen, die Festigkeit auch bei höheren Temperaturen zu steigern; ausschlaggebend ist die Erhöhung der Dauerstandfestigkeit bei den betreffenden Temperaturen¹.

Mo.Cu. Stahl, $K_z = 38$ bis 45 kg/mm², Bezeichnungen *KU 23, SK 11, TH 30* und *Marwa 12 P*, bis 450° C geeignet; Dauerstandfestigkeit bei 400° C, 14 bei 450°, 12 und bei 500° C, 9 kg/mm².

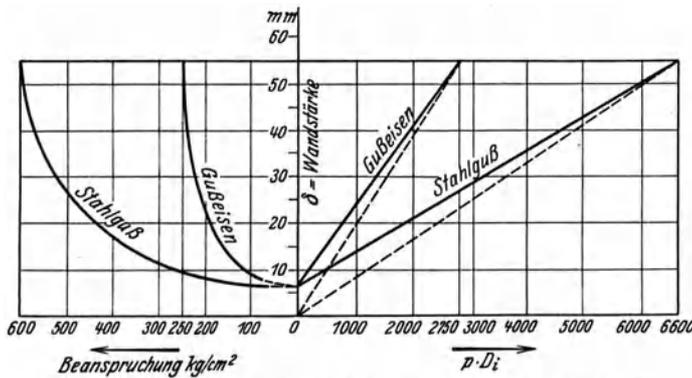


Abb. 91.3. Wandstärken und Beanspruchungen für Gußrohre. $p = ND$ in at, $D_i = NW$ in cm.

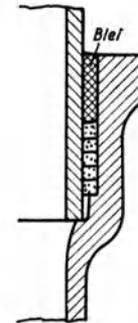


Abb. 91.4. Verbindungsmuffe für Gußrohre. (Aus Rötischer.)

Mo · Cu-Stahl, $K_z = 45$ bis 55 kg/mm². Bezeichnungen: *KU 33, SK 11h, TH 31* und *Marwa 13 P*, bis 500° C geeignet; Dauerstandfestigkeit bei 450° C 15, bei 500° C 12 und bei 550° C, 5 kg/mm².

¹ Beyer, K.: Über Werkstoff-Fragen im Rohrleitungsbau. Arch. Wärmewirtsch. 18 (1937) S. 185/88.

Zahlentafel 91.3. Schmelzgeschweißte Stahlrohre (Auszug aus den Normen VSM 18352 bis 54 resp. DIN 2453/54). Werkstoff St 34.28. Maße in mm

Nennweite NW mm	Außendurchmesser a mm	Nenndruck kg/cm ²											
		ND 1 u. 2,5		ND 6		ND 10		ND 16		ND 25		ND 40	
		Wanddicke s mm	Gewicht kg/m	mm s	Gewicht kg/m								
50	57	1,5	2,09	2	2,76	2,5	3,42						
60	70	1,5	2,58	2	3,42	2,5	4,24						
70	76	2	3,72	2,5	4,62	3	5,50						
80	89	2	4,37	2,5	5,43	3	6,49						
100	108	2	5,33	2,5	6,62	3	7,91						
125	133	2,5	8,20	3	9,80	3,5	11,4						
150	159	2,5	9,83	3	11,80	3,5	13,7	3	11,8	4	15,3	6	22,6
200	216	2,5	13,4	3	16,1	3,5	18,7	4	20,9	5	26,0	8	41
250	267	2,5	16,6	3	19,9	3,5	23,2	4,5	29,1	6	38,6	9	57,3
300	318	3	23,7	3,5	27,7	4	31,5	5	38,6	7	53,7	11	83,3
350	368	3	27,5	4	36,6	5	45,6	6	54,6	8	72,4	12	107
400	419	3	31,4	4	41,8	5	52,2	6	62,4	9	93	14	143
450	470	3	35,2	4	46,8	5	58,4	7	81,4	10	116	15	171
500	521	3	39,0	4	51,9	5	64,7	8	103	11	141	16	203
600	622	3	46,5	5	77,3	6	93	9	138	13	198		
700	720	4	72	5	89,8	7	125	10	178	15	266		
800	820	4	82	5	102	7	143	11	224	16	323		
900	920	4	92,1	6	138	8	183	13	296	18	408		
1000	1020	5	127	7	178	9	229	14	353	20	503		
1200	1220	5	153	7	213	11	334	16	484				
1400	1420	5	178	8	284	12	425	18	634				

Zahlentafel 91.4. Nahtlose Stahlrohre (Auszug aus den Normen VSM 18350/51 resp. DIN 2450/51). Maße in mm

Wo keine Abmessungen angegeben sind, gelten die des nächst höheren Nenndruckes.

St 34.28		Nenndruck kg/cm ²													
Nennweite NW	Außendurchmesser a	ND 1 ÷ 32		ND 40		ND 50		ND 64		Außendurchmesser a	ND 80		ND 100		
		Wanddicke s	Gewicht kg/m	Wanddicke s	Gewicht kg/m	Wanddicke s	Gewicht kg/m	Wanddicke s	Gewicht kg/m		Wanddicke s	Gewicht kg/m	Wanddicke a	Gewicht kg/m	
6	10					1,5	0,31			10			2,5	0,46	
8	12					1,5	0,39			12			2,5	0,59	
10	14					2	0,59			14			3	0,81	
15	20					2	0,79			18			3	1,11	
20	25					2	1,13			25			3	1,68	
25	30					2,5	1,70			30			3,5	2,26	
32	38					2,5	2,19			38			3,5	2,98	
40	44,5					2,5	2,59			44,5			3,5	3,57	
50	57					2,75	3,68			57	3,5	4,62	4,5	5,86	
60	70					3	4,96			70	6,5	6,5	5	8,02	
70	76			3	5,40	4	7,10			76	5	8,76	6	10,3	
80	89			3,25	6,87	4	8,38			89	5	10,4	6	13,1	
100	108			3,75	9,64	5	12,7			108	6	15,1	7	17,4	
125	133			4	12,7	5	15,8	6	18,8	133	7	21,8	9	27,0	
150	159			4,5	17,2	5,5	20,8	6,5	24,5	159	8	29,8	10	36,7	
200	216			6,5	33,6	7,5	38,6	9	45,9	216	11	55,6	13	65,1	
250	267			7,5	48,0	9	57,3	11	69,5	267	14	87,4	16	99,2	
300	318	8	61,2	9	68,6	11	83,3	13	97,8						
350	368 ¹	8	71,0	10	88,3	12	105,4	15	131						
400	419 ¹	9,5	95,9	11	111,0	14	140	18	178						
St 45.29		ND 1 ÷ 40		ND 50		ND 64		ND 80				ND 100			
Nenndruck kg/cm ²															

¹ Für ND 80 statt 368, 419; 381, 432.

Das Kaltbiegen der Rohre ist für Dampfleitungen ungeeignet. Die Rohre müssen warm gemacht und mit trockenem Sand vollständig gefüllt werden, um Querschnittsänderungen beim Biegen zu vermeiden. Der Sand muß natürlich restlos entfernt werden (Durchblasen der Leitung vor der Inbetriebsetzung). Für Biegungen von Dampfleitungen mit hohem Druck ist es emp-

Zahlentafel 91.5. Gußeiserne Flansche (Abb. 91.5 u. 6.)
Auszug aus den Normen VSM. 18420/25 resp. DIN 2530/35.

Maße mm		Nenndruck 2,5—6						Nenndruck 10						Nenndruck 16					
Nennweite	Dichtungs-leist.-Höhe	Wanddicke	Flansch-		Dichtungs-leist.-Durchm.	Schrauben		Wanddicke	Flansch-		Dichtungs-leist.-Durchm.	Schrauben		Wanddicke	Flansch-		Dichtungs-leist.-Durchm.	Schrauben	
			Durch-messer	Dicke		Anzahl	Durch-messer		Durch-messer	Dicke		Anzahl	Durch-messer		Durch-messer	Dicke		Anzahl	Durch-messer
NW	f	S	D	b	g	Z	Zoll	S	D	b	g	Z	Zoll	S	D	b	g	Z	Zoll
10	2	6	75	12	35	4	3/8	6	90	14	40	4	1/2	6	90	14	40	4	1/2
15	2	6	80	12	40	4	3/8	6	95	14	45	4	1/2	6	95	14	45	4	1/2
20	2	6,5	90	14	50	4	3/8	6,5	105	16	58	4	1/2	6,5	105	16	58	4	1/2
25	2	7	100	14	60	4	3/8	7	115	16	68	4	1/2	7	115	16	68	4	1/2
32	2	7	120	60	70	4	1/2	7	140	18	78	4	5/8	7	140	18	78	4	5/8
40	3	7,5	130	16	80	4	1/2	7,5	150	18	88	4	5/8	7,5	150	18	88	4	5/8
50	3	7,5	140	16	90	4	1/2	7,5	165	20	102	4	5/8	7,5	165	20	102	4	5/8
60	3	8	150	16	100	4	1/2	8	175	20	112	4	5/8	8	175	20	112	4	5/8
70	3	8	160	16	110	4	1/2	8	185	20	122	4	5/8	8	185	20	122	4	5/8
80	3	8,5	190	18	128	4	5/8	8,5	200	22	138	4	5/8	8,5	200	22	138	8	5/8
100	3	9	210	18	148	4	5/8	9	220	22	158	8	5/8	9,5	220	24	158	8	5/8
125	3	9,5	140	20	178	8	5/8	9,5	250	24	188	8	5/8	10	250	26	188	8	5/8
150	3	10	265	20	202	8	5/8	10	285	24	212	8	3/4	11	285	26	212	12	3/4
200	3	11	320	22	258	8	5/8	11	340	26	268	12	3/4	12	340	30	268	12	3/4
250	3	12	375	24	312	12	5/8	12	395	28	320	12	3/4	14	405	32	320	12	7/8
300	4	13	400	24	365	12	3/4	13	445	28	370	12	3/4	15	460	32	378	12	7/8
350	4	14	490	26	415	12	3/4	14	505	30	430	16	3/4	16	520	36	438	16	7/8
400	4	14	540	28	465	16	3/4	14	565	32	482	16	7/8	18	580	39	490	16	1
450	4	15	595	28	520	16	3/4	15	615	32	532	20	7/8	19	640	40	550	20	1
500	4	16	645	30	570	20	3/4	16	670	34	585	20	7/8	21	715	42	610	20	1 1/8
600	5	17	755	30	670	20	7/8	17	780	36	685	20	1	24	840	48	725	20	1 1/4

Zahlentafel 91.6. Stahlgußflansche (Abb. 91.5 u. 6.)
Auszug aus den Normen VSM 18432/36 resp. DIN 2543/47.

Maße mm		Nenndruck 25						Nenndruck 40						Nenndruck 64					
Nennweite	Höhe der Dichtleiste	Wanddicke	Flansch-		Dichtungs-leist.-Durchm.	Schrauben		Wanddicke	Flansch-		Dichtungs-leist.-Durchm.	Schrauben		Wanddicke	Flansch-		Dichtungs-leist.-Durchm.	Schrauben	
			Durch-messer	Dicke		Anzahl	Durch-messer		Durch-messer	Dicke		Anzahl	Durch-messer		Durch-messer	Dicke		Anzahl	Durch-messer
NW	f	S	D	b	g	Z	Zoll	S	D	b	g	Z	Zoll	S	D	b	g	Z	Zoll
10	2	6	90	16	40	4	1/2	6	90	16	40	4	1/2	8	100	20	50	4	1/2
15	2	6	95	16	45	4	1/2	6	95	16	45	4	1/2	8	105	20	55	4	1/2
20	2	6,5	105	18	58	4	1/2	6,5	105	18	58	4	1/2	9	130	22	68	4	5/8
25	2	7	115	18	68	4	1/2	7	115	18	68	4	1/2	9	140	24	78	4	5/8
32	2	7	140	18	78	4	5/8	7	140	18	78	4	5/8	9	155	24	85	4	3/4
40	3	7,5	150	18	88	4	5/8	7,5	150	18	88	4	5/8	9	170	26	98	4	3/4
50	3	7,5	165	20	102	4	5/8	8	165	20	102	4	5/8	10	180	26	108	4	3/4
60	3	8	175	22	112	8	5/8	8,5	175	22	112	8	5/8	10	190	26	118	8	3/4
70	3	8	185	22	122	8	5/8	8,5	185	22	122	8	5/8	10	204	26	132	8	3/4
80	3	8,5	200	24	138	8	5/8	9	200	24	138	8	5/8	11	215	28	142	8	3/4
100	3	9,5	235	24	162	8	3/4	10	235	24	162	8	3/4	12	250	30	170	8	7/8
125	3	10	270	26	188	8	7/8	11	270	26	188	8	7/8	13	295	34	205	8	1
150	3	11	300	28	218	8	7/8	12	300	28	218	8	7/8	14	345	36	240	8	1 1/8
200	3	12	360	30	278	12	7/8	14	275	34	285	12	1	16	415	42	300	12	1 1/4
250	3	14	425	32	335	12	1	16	450	38	345	12	1 1/8	19	470	46	355	12	1 1/4
300	4	15	485	34	390	16	1	17	515	42	410	16	1 1/8	21	530	52	415	16	1 1/4
350	4	16	555	38	450	16	1 1/8	19	580	46	465	16	1 1/4	23	600	56	475	16	1 3/8
400	4	18	620	40	505	16	1 1/4							26	670	60	530	16	1 1/2
450	4	19	670	42	555	20	1 1/4							28	715	64	575	20	1 1/2
500	4	21	730	44	615	20	1 1/4							31	800	68	645	20	1 3/4
600	5													35	930	76	750	20	2

Zahlentafel 91.7. Randabstände e für Gußflansche (Abb. 91.6).

Schraubendurch-messer in Zoll . . .	3/8''	1/2''	5/8''	3/4''	7/8''	1''	1 1/8''	1 1/4''	1 3/8''	1 1/2''	1 3/4''	2''
Randabstand,,e“ mm	12,5	15	20	22,5	25	27,5	32,5	35	37,5	42,5	47,5	55

fehlenswert, Rohre mit etwas größerer Wandstärke zu wählen als für gerade Rohre notwendig wäre. Je kleiner der Biegungsradius ist, um so größer wird die Verminderung der Wandstärke in der äußeren Biegezone des Rohres. Man wählt als mittleren Krümmungsradius etwa den 4- bis 6fachen Rohrdurchmesser.

d) Blechrohre aus dünnem, galvanisiertem oder aus schwarzem Blech, gefalzt für Lüftungs- und Entstaubungsanlagen.

e) Gußeisenrohre (Zahlentafel 91.5) werden meist stehend gegossen. Man unterscheidet Muffenrohre (Abb. 91.4) und Flanschenrohre (Abb. 91.5 u. 6). Die Biegefestigkeit des Werkstoffes ist $K_b = 24 \text{ kg/mm}^2$. Die zulässigen Spannungen und die Zuschläge c sind in Abb. 91.3 eingetragen.

Seit einer Reihe von Jahren ist die Herstellung von Gußrohren durch das Schleudergußverfahren vereinfacht und verbessert worden¹. Das flüssige Eisen wird in eine rotierende, schwach geneigte und in der Längsachse verschiebbare Form (Kokille) eingeführt, die außen durch Wasser gekühlt wird. Durch die Wirkung der Zentrifugalkraft wird das flüssige Eisen an die Innenwand der Kokille geschleudert, bleibt dort haften und erstarrt. Nach dem Gießen werden die Rohre sorgfältig ausgeglüht. Die Festigkeitseigenschaften so hergestellter Gußrohre überragen diejenigen der Sandgußrohre in jeder Richtung, so daß dafür die zulässige Beanspruchung 1,7 bis 1,8mal größer angenommen werden darf ($\sigma_{zul} = 350 \text{ bis } 500 \text{ kg/cm}^2$).

Für im Boden verlegte Rohre ist das Gußrohr besser geeignet als das Stahlrohr, weil die Gußhaut gegen Rosten und Korrosionen weniger empfindlich ist. Gußrohre finden deshalb in ausgedehntem Maße Verwendung zu Wasser-, Gas- und Kanalisationsleitungen. Infolge der Bewegungen des Erdreiches überwiegt bei diesen Leitungen die Muffe (Abb. 91.4) als Rohrverbindung, die in gewissem Grade beweglich ist, wenn die Rohre mit etwas Spiel im Grunde der Muffe verlegt werden. Die Abdichtung erreicht man durch geteerte Hanfstricke oder durch Blei, das in den Muffenraum gegossen und dort verstemmt wird. Die Muffenverbindung ist deshalb schwer lösbar. Für frei verlegte Leitungen werden ausnahmslos Flanschenrohre verwendet.

Zum Schutz gegen Rosten werden die auf 100 bis 150° C erwärmten Rohre in ein Asphalt- oder Teerbad getaucht. Das Muffeninnere und das Rohrende sind durch Kalkmilchanstrich frei zu lassen, um das Spritzen des heißen Bleies beim Abdichten zu vermeiden.

f) Stahlgußrohre, $K_z = 4500 \text{ kg/cm}^2$, Bruchdehnung $\delta_5 = 17\%$ (Zahlentafel 91.6). Zuschlag c und zulässige Spannung sind in Abb. 91.3 eingetragen.

In den letzten Jahren sind auch andere Werkstoffe als Eisen und Stahl für Rohrleitungen verwendet worden, wie Porzellan, Eternit, Gummi, Mipolan usw., die für manche Zwecke recht geeignet erscheinen².

Flanschverbindungen. a) Fester Flansch für gegossene Rohre, Formstücke und Armaturen (Abb. 91.5). Die in Zahlentafel 5 eingetragenen Werte gelten für BDI. Für BDII ist die obere Grenze für die Verwendung von Gußeisen aus Zahlentafel 91.7 zu entnehmen.

Der Randabstand e (Abb. 91.6) ist für alle Rohre gleich und nur vom Schraubendurchmesser abhängig (Zahlentafel 91.8).

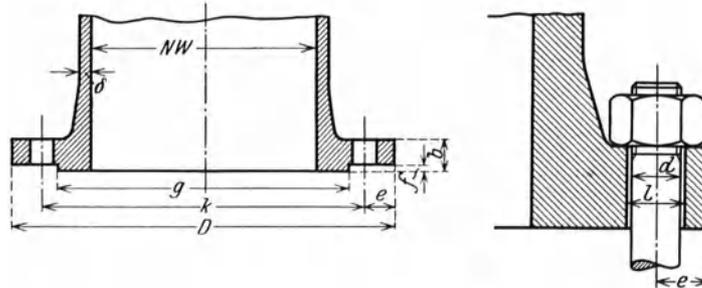


Abb. 91.5 und 91.6. Anschlußflansch für Gußrohre.
(Zahlentafel 91.5, 6 u. 7.)

Zahlentafel 91.8. Grenze für die Verwendung von Gußeisenrohren für Dämpfe und Gase unterhalb 300° C.

ND kg/cm ²	Höchst- zulässiger Betriebsdruck kg/cm ²	Größte Nennweite in mm bei Temperaturen	
		bis 200° C	200 bis 300° C
2,5	2	1600	800
6	5	1000	500
10	8	600	300
16	13	400	200
25	20	250	
40	32	150	

¹ Schleudergußrohren der L. von Rollschen Eisenwerke, Choix. Bericht Nr. 12 des Schweiz. Verbandes f. d. Mat.-Prüf. d. Technik 1928.

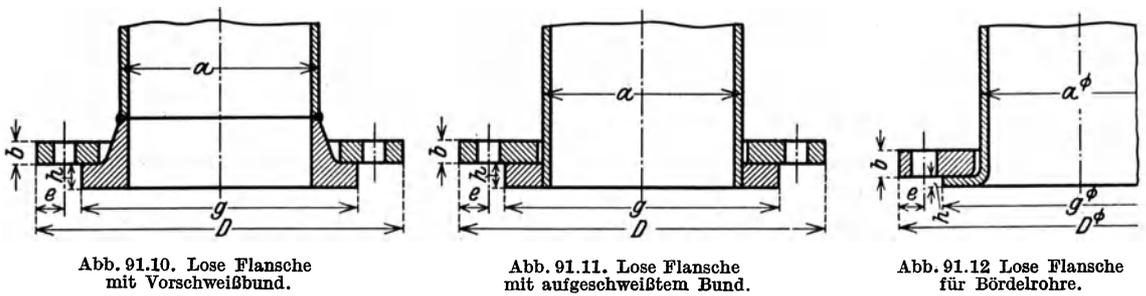
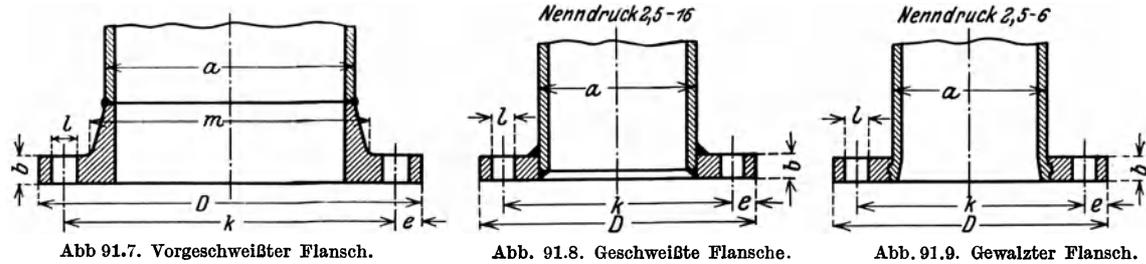
² Nehlep, H.: Betriebseignung verschiedener Roharten. Arch. Wärmewirtsch. 18 (1937), S. 13/17. — Jordan, Gg.: Rohre aus Hartporzellan. Heizg. u. Lüftg. 12 (1938), S. 40/42. — Lutz, H.: Verarbeitung polymerer Kunststoffe im Rohrleitungsbau. Z. VDI. 81 (1937), S. 47/51.

Jeder Flansch erhält eine durch 4 teilbare Anzahl Schraubenlöcher, die so anzuordnen sind, daß auf die vertikale und horizontale Achse keine Löcher fallen.

b) Vorgeschweißter Flansch (Abb. 91.7) verwendbar im ganzen Nennweiten- und Druckgebiet. Diese Verbindung ist bei Qualitätsschweißung einwandfrei und für alle Durchflußstoffe verwendbar.

Für die Berechnung der losen Flansche, siehe Zahlenbeispiel 14.2, und für die Berechnung der Schrauben Abschn. 23.41.

c) Walzflansch (Abb. 91.9) nur für nahtlose Rohre aus weichem Material verwendbar; das Flanschmaterial soll härter als das Rohrmaterial sein. Aufgewalzte Flansche sind für Dampfleitungen nicht zu empfehlen. Wenn der Flansch noch kalt ist und die Rohrwand schon warm,



Zahlentafel 91.9. Maße der losen Flansche (Abb. 91.10 bis 12).

Auszug aus den Normen VSM 18525/38 resp. DIN 2639—73.

Rohr		Nenndruck 1 bis 6						Nenndruck 10 bis 16 ¹						Nenndruck 25 bis 40 ¹							
Nennwerte	Außen-durch-messer	Durch-messer	für Nenndruck			Durch-messer	Dicke	Schrauben		Durch-messer	Dicke	Durch-messer	Dicke	Schrauben		Durch-messer	Dicke	Durch-messer	Dicke	Schrauben	
			1	2,5	6			Anzahl	Ge-winde					Anzahl	Ge-winde					Anzahl	Ge-winde
NW	a	D	b	b	b	g	h	Z	Zoll	D	b	g	h	Z	Zoll	D	b	g	h	Z	Zoll
10	14	75	10	10	10	35	8	4	3/8	90	14	40	10	4	1/2	90	16	40	12	4	1/2
15	20	80	10	10	10	40	8	4	3/8	95	14	45	10	4	1/2	95	16	45	12	4	1/2
20	25	90	10	10	10	50	10	4	3/8	105	14	58	12	4	1/2	105	16	58	14	4	1/2
25	30	100	12	12	12	60	10	4	3/8	115	16	68	12	4	1/2	115	18	68	14	4	1/2
32	38	120	12	12	12	70	10	4	1/2	140	16	78	12	4	5/8	140	18	78	14	4	5/8
40	44,5	130	12	12	12	80	10	4	1/2	150	16	88	12	4	5/8	150	18	88	14	4	5/8
50	57	140	12	12	12	90	12	4	1/2	165	16	102	14	4	5/8	165	20	102	16	4	5/8
60	70	150	12	12	12	100	12	4	1/2	175	16	112	14	4	5/8	175	20	112	16	8	5/8
70	76	160	12	12	12	110	12	4	1/2	185	16	122	14	4	5/8	185	20	122	16	8	5/8
80	89	190	14	14	14	128	14	4	5/8	200	18	138	16	8	3/8	200	22	138	18	8	5/8
100	108	210	14	14	14	148	14	4	5/8	220	18	158	16	8	5/8	235	22	162	20	8	3/4
125	133	240	14	14	14	178	14	8	5/8	250	18	188	8	8	5/8	270	24	188	22	8	7/8
150	159	265	14	14	14	202	14	8	5/8	285	18	212	18	8	4/4	300	24	218	22	8	7/8
200	216	320	16	16	16	258	16	8	5/8	340	20	268	20	12	4/4	360	26	278	24	12	7/8
250	267	375	20	20	20	312	18	12	5/8	395	22	320	22	12	4/4	425	30	335	24	12	1
300	318	440	22	22	24	365	18	12	3/4	445	26	370	22	12	4/4	485	34	390	28	16	1
350	368	490	22	22	26	415	18	12	3/4	505	28	430	22	16	4/4	555	38	450	32	16	1 1/8
400	419	540	22	24	28	465	20	16	3/4	565	32	482	24	16	7/8	620	42	505	34	16	1 1/4
450	470	595	22	24	30	520	20	16	3/4	615	34	532	24	20	7/8	670	46	550	36	20	1 1/4
500	251	645	22	26	32	570	22	20	3/4	670	38	585	26	20	7/8	730	50	615	38	20	1 1/4

¹ Ab NW 150 mm nur gültig für ND 10 resp. 25.

treten im eingewalzten Ende Druckspannungen auf, die mit dem Walzdruck (vgl. S. 166) bleibende Formänderungen verursachen. Wird nun der Flansch ebenfalls warm und dehnt sich aus, so wird die Verbindung lose und undicht, wodurch schon viele und schwere Unfälle entstanden sind.

d) Lose Flansche (Zahlentafel 91.9 und Abb. 91.10 bis 91.12). Die Verbindung mit losen, d. h. auf dem Rohr drehbaren Flanschen hat den Vorteil, daß auf die Schraubenlochstellung keine Rücksicht zu nehmen ist. Sie bietet daher für die Montage große Vorteile; dagegen werden die Schrauben bei dieser Verbindung länger als bei den festen Flanschen. Deshalb ist die Verwendung der losen Flansche auf den Nennweiten- und Druckbereich beschränkt.

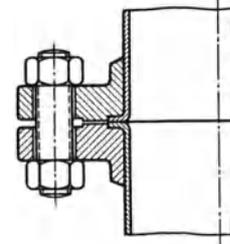


Abb. 91.13.

Eine gute Verbindung für hohe Drücke ist der Bördelschweißflansch mit geschliffenen Flanschen nach Abb. 91.13.

Eine für lange Rohrleitungen besonders zu empfehlende gute Verbindung ohne Flanschen ist in Abb. 91.14 dargestellt (nach dem Vorschlag von Prof. F.K. Th. von Iterson). Die kreuzweise schraffierten Teile sind zugeschweißte Öffnungen in der Muffe und müssen reichlich bemessen sein, um größere Zugkräfte aushalten zu können als das Rohr. Die niederländischen Staatsminen in Heerlen haben mit dieser Verbindung sehr gute Erfahrungen gemacht.

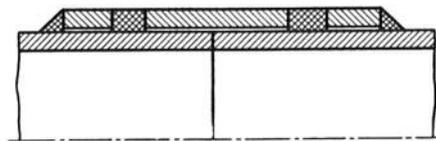


Abb. 91.14. Rohrverbindung nach v. Iterson.

92. Theoretische Grundlagen¹.

92.1. Die Energiegleichung idealer Flüssigkeiten.

Unter einer „idealen“ Flüssigkeit versteht man eine Flüssigkeit, deren Teilchen sich untereinander wie auch an den Rohrwänden reibungslos bewegen. Bei den folgenden Untersuchungen beschränken wir uns auf stationäre Strömungen, bei denen

1. das spezifische Gewicht und die Temperatur unveränderlich sind,
2. keine äußere Arbeit geleistet oder zugeführt wird und
3. keine Umwandlung der inneren Wärme in Arbeit auftritt.

Diese Annahmen sind bei der Strömung von tropfbaren Flüssigkeiten in Rohrleitungen immer zulässig, für elastische nur bei kleinen Druckänderungen.

Nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie bleibt die Summe aller Energien bei der Strömung unverändert. Die potentielle Energie setzt sich aus zwei Teilen zusammen: der Gewichts- und der Druckenergie. Die Gewichtsenergie für 1 kg Flüssigkeit in der Höhe z beträgt: $z \cdot 1 = z$ kgm. Wenn die Flüssigkeit an dieser Stelle unter dem äußeren Druck p (kg/m^2) steht, so ist die Druckenergie für 1 kg Flüssigkeit: $1 \cdot p/\gamma = h$ kgm. Die Geschwindigkeitsenergie ($m \cdot c^2/2$) ist für 1 kg Flüssigkeit: $c^2/2 g$ kgm.

Die Energiegleichung lautet also:

$$z\gamma + p + \frac{c^2}{2g}\gamma = \text{konst.} \quad (\text{Gleichung von D. Bernoulli, 1738.}) \quad (92.1)$$

92.2. Ausfluß aus Gefäßen.

Das vereinfachte Bild einer idealen Flüssigkeit kann mit Vorteil beim Ausfluß von Flüssigkeiten aus einfachen Mündungen verwendet werden. Aus einem bis zur Oberfläche F_1 (Abb. 92.1) gefüllten Gefäß fließe Wasser aus der Bodenöffnung F_2 , wobei durch Zufluß die Höhe h unverändert bleibe. Dann folgt aus Gl. (1):

$$(z_1 - z_2) + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g} = 0. \quad (92.2)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt, da für stationäre Strömungen, das in der Zeiteinheit durchfließende Flüssigkeitsgewicht G von Ort und Zeit unabhängig ist:

$$G/\gamma = F_1 c_1 = F_2 c_2 \quad (92.3)$$

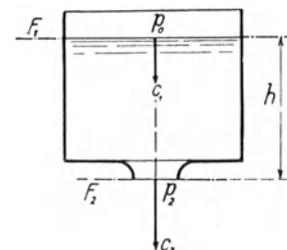


Abb. 92.1. (Aus Bánki, Energieumwandlungen.)

¹ Prandtl-Tietjens. Hydro- und Ärodynamik. Bd. I (1929), Bd. 2 (1931). Berlin: Julius Springer.

wobei vorausgesetzt ist, daß die Geschwindigkeit c gleichmäßig über den Querschnitt verteilt ist. Setzt man $z_1 - z_2 = h$, so wird

$$c_2 = \sqrt{2g \frac{h + \frac{p_1 - p_2}{\gamma}}{1 - \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2}}, \quad (92.4)$$

und wenn F_2 gegenüber F_1 vernachlässigt werden darf:

$$c_2 = \sqrt{2g \left(h + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \right)}. \quad (92.5)$$

Wenn das Gefäß innen und außen unter dem gleichen Druck $p_1 = p_2$ steht, so ist

$$c_2 = \sqrt{2gh} \quad (\text{Ausflußgleichung von Torricelli, 1638}) \quad (92.6)$$

Bei elastischen Flüssigkeiten ist die Änderung der Gewichtsenegie in den meisten Fällen gegenüber der Druckenergie vernachlässigbar. Setzt man $p_1 - p_2 = p$, so ist unter den gemachten Voraussetzungen

$$c_2 = \sqrt{\frac{2gp}{\gamma}}. \quad (92.7)$$

Alle physikalischen Flüssigkeiten, tropfbare und elastische, besitzen in mehr oder weniger hohem Maße die Eigenschaft der Zähigkeit. Diese äußert sich darin, daß in der strömenden Flüssigkeit Schubspannungen auftreten. Auch haftet die Flüssigkeit an den Wandungen.

Dadurch wird die mittlere Ausflußgeschwindigkeit c verkleinert auf

$$c = \psi \sqrt{2gh}, \quad (92.8)$$

worin $\psi < 1$ ist. Die Unterschiede, die zwischen „idealen“ und „wirklichen“ Flüssigkeiten bestehen, werden also durch den Korrekturfaktor ψ berücksichtigt. Da die Flüssigkeit an der Wandung haftet kann infolge ihrer Zähigkeit tatsächlich keine gleichmäßige Ausflußgeschwindigkeit nach Gl. (8) auftreten. Sie darf also z. B. nicht zur Berechnung der kinetischen Energie der Flüssigkeit verwendet werden.

J. Weisbach¹ fand bei seinen Versuchen über die Ausströmung von Wasser aus gut abgerundeten Mündungen, daß im Mittel 3% des theoretischen Wertes der Geschwindigkeit durch die Reibung verlorengehen, also $\psi = 0,97$ ist.

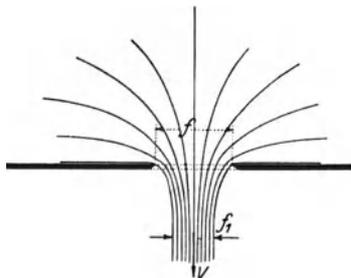


Abb. 92.2. (Aus Pöschl, Hydraulik.)

Ist die Ausflußmündung scharfkantig, so muß bei dem plötzlichen Richtungswechsel (Abb. 92.2) eine Einschnürung (Kontraktion) des Strahles auftreten, die die ausfließende Flüssigkeitsmenge noch weiter vermindert. Ist f der Querschnitt der Ausflußöffnung und f_1 der Querschnitt des austretenden Strahles, so nennt man

$$\alpha = f_1/f \quad (92.9)$$

die Einschnürungszahl. Die Ausflußmenge ist dann

$$G = f_1 c = \alpha \psi f \sqrt{2gh} = \mu f \sqrt{2gh}, \quad (92.10)$$

$\mu = \alpha \psi$ wird Ausflußzahl genannt. Für den Ausfluß von reibungslosen Flüssigkeiten aus scharfkantiger Mündung liefert die hydrodynamische Theorie² den Wert

$$\alpha = \frac{\pi}{\pi + 2} = 0,611. \quad (92.11)$$

Für die gut abgerundete Mündung ist $\alpha = 1$; die Einschnürungszahlen α sind also in hohem Maße von der Formgebung (Abrundung) der Mündung abhängig, sie können nur durch Versuche bestimmt werden. Die Mannigfaltigkeit der Mündungsformen ist so groß, daß eine „Normung“ unbedingt notwendig ist. In der Praxis verwendet man sowohl die scharfkantige Ausflußöffnung als auch die gut abgerundete Ausflußöffnung (Düse). Einige Versuchsergebnisse über Ausflußzahlen sind in Abb. 93.1 zusammengestellt.

Die Einführung von Korrekturfaktoren in die Gleichungen für ideale = verlustfreie Flüssigkeiten muß natürlich vollständig versagen, sobald es sich darum handelt die Strömungsverluste oder die Geschwindigkeitsverteilung zu berechnen.

¹ Weisbach, J.: Ingenieur-Mechanik Bd. 1.

² Lorenz: Technische Hydrodynamik, S. 295.

92.3. Laminarströmung in Rohren.

In einem geraden, kreisförmigen Rohr kann aus Symmetriegründen die Geschwindigkeit w nur von der Entfernung y von der Rohrachse abhängig sein. Auf ein Volumenelement (Abb. 92.3) wirken am Umfang die Schubspannungen τ und an den beiden Endflächen die Pressungen p und $p-dp$, so daß die resultierende Kraft:

$$\tau \cdot 2 \pi y dz + \pi y^2 dp$$

im Beharrungszustand gleich Null ist. Mit der Newton'schen Hypothese (Vgl. Abschn. 42.2):

$$\tau = \eta \frac{dw}{dy}$$

wird

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{y}{2\eta} \frac{dp}{dz} = -\frac{\Delta p}{2l\eta} \cdot y. \quad (92.12)$$

Aus der Integration (bei der η unabhängig von y angenommen wird) folgt, da für $y = r, w = 0$ ist:

$$w = \frac{\Delta p}{4l\eta} (r^2 - y^2) \quad (92.13)$$

d. h.: die Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt hat einen parabolischen Verlauf (Abb. 92.4). Die durch das Rohr strömende Flüssigkeitsmenge ist:

$$G = \int_0^r w \cdot 2 \pi y dy = \frac{2 \pi \Delta p}{4l\eta} \int_0^r (r^2 y - y^3) dy = \frac{\pi \cdot r^4}{8l\eta} \Delta p$$

und die mittlere Geschwindigkeit

$$w_m = \frac{G}{\pi r^2} = \frac{r^2}{8l\eta} \Delta p. \quad (92.14)$$

Die maximale Geschwindigkeit für $y = 0$ folgt aus Gl. (13) zu $w_{\max} = \frac{r^2}{4l\eta} \Delta p$, ist also doppelt so groß wie die mittlere Geschwindigkeit.

Weiter folgt daraus die als Poiseuillesche Gleichung bekannte Beziehung:

$$\Delta p = \frac{8 \eta}{r^2} \cdot w_m \cdot l. \quad (92.15)^1$$

Die Versuche zeigten, daß, solange die Geschwindigkeit klein ist und eine bestimmte Grenze, die sog. kritische Geschwindigkeit, nicht überschreitet, der Druckverlust tatsächlich dem obenstehenden Gesetz folgt. Oberhalb dieser Grenzgeschwindigkeit ändert sich der Charakter der Flüssigkeitsströmung vollständig, indem die geordnete (laminare) Strömung in eine (turbulente) Wirbelströmung übergeht. Der Druckverlust folgt dann einem ganz anderen Gesetz.

92.4. Turbulente Strömung.

Die Frage, wie die Entstehung der turbulenten Strömung erklärt werden kann, ist seit Reynolds' Veröffentlichungen Gegenstand vieler mathematischer und experimenteller Untersuchungen gewesen², ohne daß es bisher gelungen wäre, die Turbulenz mathematisch befriedigend zu erfassen. Die Untersuchungen haben aber gezeigt, daß es möglich ist, durch eine besondere Sorgfalt in der Versuchsanordnung (wie gut abgerundeten Einströmquerschnitt, Beruhigungsgefäße, Anlaufstrecke, Vermeidung jeglicher Erschütterungen usw.) die Grenze, wo die Laminarströmung in die turbulente übergeht, bedeutend höher zu legen³.

Daraus kann gefolgert werden, daß die Hypothese von Newton als Grundlage der Hydrodynamik wohl richtig zu sein scheint, daß aber die daraus folgende Laminarströmung nicht stabil ist, sondern sich, durch Störungen beschleunigt, in Wirbelströmung auflöst, bei der die Geschwindigkeiten fortgesetzt Schwankungen nach Größe und Richtung unterworfen sind.

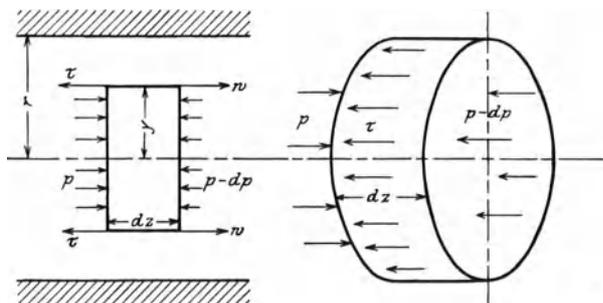


Abb. 92.3.

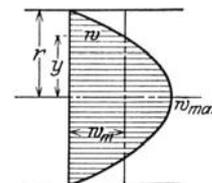


Abb. 92.4. Geschwindigkeitsverlauf bei Laminarströmung.

¹ Poiseuille: Recherches expérimentels sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. Comptes Rendus. Bd. 11 (1840), S. 961 u. 1041.

² von Kármán: Über laminare und turbulente Reibung. Z. M. M. Bd. 1 (1921) S. 233.

³ Schiller, L.: Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung. Z. ang. Math. Mech. Bd. 1 1921, S. 436; Mitt. Forsch.-Arb. 1922, H. 248.

Für die verwickelten tatsächlichen Geschwindigkeiten der einzelnen Flüssigkeitsteilchen muß also die allgemeine Theorie gültig bleiben.

Für diese Einzelgeschwindigkeiten und Bahnen interessiert man sich in der Praxis aber gar nicht, und für die praktisch wichtige Hauptbewegung der strömenden Flüssigkeit gilt, wie gesagt, die Theorie auch nicht annähernd. Da ist der Ingenieur also vollständig auf den Versuch angewiesen, und dieser Weg wird dann auch immer eingeschlagen.

Bei der Ausführung der Versuche zur Erforschung der Rohrreibungswiderstände geht man von der Überlegung aus, daß die zu überwindende, hemmende Kraft R von der benetzten Oberfläche $U \cdot l$ des Rohres abhängt (wenn U der Umfang des Rohrquerschnittes und l die Rohrlänge ist) und ein Teil der kinetischen Energie $\left(\frac{w^2}{2g}\gamma\right)$ vernichtet:

$$R = c \cdot U \cdot l \frac{w^2}{2g} \gamma.$$

Zur Überwindung der Reibungskraft R entsteht bei der Strömung ein Druckverlust $\Delta p = R/F$, worin F = Rohrquerschnitt. Damit wird:

$$\Delta p = c \frac{U}{F} l \frac{w^2}{2g} \gamma.$$

Für kreisförmige Rohre ist $U = \pi d$, $F = \frac{\pi}{4} d^2$, also $\frac{U}{F} = \frac{4}{d}$, und wenn $4c = \zeta$ gesetzt wird, ist

$$\Delta p = \zeta \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} \gamma. \quad (92.16)$$

Man nennt $d_{ae} = 4F/U$ den äquivalenten oder gleichwertigen Durchmesser eines Rohres von beliebiger Querschnittsform, weil für ein Kreisrohr

$$4F/U = d \quad (92.17)$$

ist. Da der Koeffizient ζ an Stelle nicht bekannter Gesetze tritt, so ist zu erwarten, daß er veränderlich ist. Die Bemühungen der vielen Experimentatoren gingen nun dahin, die Abhängigkeit von ζ von den verschiedenen Faktoren d , w , γ , η , usw., zu bestimmen. Trotz der großen Anzahl Versuchsergebnisse ist die Aufgabe immer noch nicht allgemein gelöst¹, so daß für besondere Fälle immer wieder neue Versuche angestellt werden müssen.

92.5. Das Ähnlichkeitsprinzip.

Der Ingenieur bezweckt durch seine Versuche, Grundlagen für ähnliche Verhältnisse zu gewinnen. Die Ähnlichkeit zweier Probleme schließt in erster Linie die geometrische Ähnlichkeit, zum mindesten in allen wesentlichen Faktoren, ein. Diese Bedingung ist aber nicht ausreichend, um technisch vollständig ähnliche Probleme zu erhalten, denn alle Faktoren, die eine Rolle spielen, müssen dabei berücksichtigt werden. Hier ist nun die vorher gemachte Feststellung wichtig, daß die Differentialgleichung der Flüssigkeitsströmung als richtig betrachtet werden darf, wenn auch das Integral eine nicht stabile Lösung gibt. Das Prinzip der Ähnlichkeit gestattet nun, auch ohne Integration aus den Differentialgleichungen einige Folgerungen von grundlegender Bedeutung abzuleiten.

Wenn wir uns — der Einfachheit halber — auf eindimensionale Flüssigkeitsströmungen beschränken, so folgt aus Gl. (42.5):

$$\frac{dp}{dx} - \frac{d\tau}{dy} = \rho \frac{dw}{dt}. \quad (92.18)$$

Mit $\frac{d\tau}{dy} = \eta \frac{d^2 w}{dy^2}$ lautet die Bewegungsgleichung:

$$\frac{dp}{dx} - \eta \frac{d^2 w}{dy^2} = \rho \frac{dw}{dt}. \quad (92.19)$$

Die Geschwindigkeit w ist im allgemeinen sowohl von der Zeit t als auch vom Ort x abhängig, $w = f(x, t)$, so daß $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt}$ ist. Für stationäre Strömungen ist $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$, und damit $\frac{dw}{dt} = w \frac{dw}{dx}$. Setzen wir diesen Wert in die Bewegungsgleichung (19) ein, so erhalten

¹ Siehe z. B. die Zusammenstellung in Bánki, D.: Energieumwandlungen in Flüssigkeiten Bd. 1, S. 61 bis 70 und S. 94 bis 100. Berlin: Julius Springer.

wir mit $\frac{\eta}{\rho} = \nu$ (kinematische Zähigkeit genannt):

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} - \nu \cdot \frac{d^2 w}{dy^2} = w \frac{dw}{dx}. \quad (92.20)$$

Haben wir nun zwei verschiedene Strömungen (1 und 2), die in ihrer ganzen Ausdehnung ähnlich sein sollen, so müssen sämtliche Vorgänge darin durch eine und dieselbe Funktion F zwischen den Koordinaten x, y und den verschiedenen Parametern (ρ, w, ν) darstellbar sein. Dies setzt aber voraus, daß die Differentialgleichungen der beiden Strömungen

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{dp_1}{dx_1} - \nu_1 \frac{d^2 w_1}{dy_1^2} = w_1 \frac{dw_1}{dx_1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\rho_2} \frac{dp_2}{dx_2} - \nu_2 \frac{d^2 w_2}{dy_2^2} = w_2 \frac{dw_2}{dx_2}$$

identisch und die Randbedingungen gleich sind. Verhalten sich nun bei beiden Strömungen sämtliche Längen, also auch die Koordinaten, wie $\frac{l_2}{l_1} = f_l$, die Drücke wie $\frac{p_2}{p_1} = f_p$, die Geschwindigkeiten wie $\frac{w_2}{w_1} = f_w$, die kinematischen Zähigkeiten wie $\frac{\nu_2}{\nu_1} = f_\nu$, die Dichten wie $\frac{\rho_2}{\rho_1} = f_\rho$ und setzen wir diese Proportionalitätsfaktoren f in die zweite Differentialgleichung ein, so erhalten wir:

$$\frac{1}{f_\rho f_l} \cdot \frac{f_p}{f_l} \cdot \frac{dp_1}{dx_1} - f_\nu \nu_1 \cdot \frac{f_w d^2 w_1}{f_l^2 dy_1^2} = \frac{f_w^2}{f_l} w_1 \frac{dw_1}{dx_1}.$$

Daraus folgt, daß beide Differentialgleichungen identisch sind, wenn:

$$\frac{f_p}{f_\rho f_l} = f_\nu \cdot \frac{f_w}{f_l^2} = \frac{f_w^2}{f_l}$$

ist. Aus dieser Doppelgleichung können wir folgende Beziehungen ableiten:

$$\frac{f_w^2}{f_l} \cdot \frac{f_l^2}{f_\nu f_w} = \frac{f_w \cdot f_l}{f_\nu} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{f_p}{f_\rho} \cdot \frac{1}{f_w^2} = 1.$$

Führen wir darin die Proportionalitätsfaktoren wieder ein, so wird:

$$\frac{w_2 l_2}{\nu_2} = \frac{w_1 l_1}{\nu_1} = \frac{wl}{\nu} = \text{Konst} = Re. \quad (92.21)$$

Diese Konstante wird nach Osborne Reynolds, der zuerst Ähnlichkeitsbetrachtungen angestellt hat, als Reynoldssche Zahl bezeichnet.

Weiter muß auch

$$\frac{p_2}{\rho_2 w_2^2} = \frac{p_1}{\rho_1 w_1^2} = \frac{p}{\rho w^2} = \text{Konst} = Eu \quad (\text{nach Euler}) \quad (92.22)$$

sein. Diese beiden Bedingungen müssen erfüllt sein, damit zwei Strömungen ähnlich sind. Wie aus der Ableitung folgt, sind sie aber nicht unabhängig voneinander, so daß $Eu = F(Re)$ ist. Schlußfolgerung: Zwei Flüssigkeitsströmungen sind ähnlich, wenn die Reynoldsschen Zahlen in beiden Fällen gleich sind.

In manchen Fällen (z. B. bei der Flüssigkeitsreibung, Abschn. 42) dürfen die Massenkräfte (Beschleunigungen) gegenüber den Zähigkeitskräften vernachlässigt werden. Für solche „schleichende“ Bewegungen lautet die Differentialgleichung (20):

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx} - \frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{d^2 w}{dy^2} = 0. \quad (92.23)$$

Wendet man die gleichen Ähnlichkeitsbetrachtungen darauf an, so erhält man (wie leicht ersichtlich) als Kennzahl für schleichende Flüssigkeitsbewegungen:

$$\frac{p \cdot l}{\eta w} = \frac{P_1}{\eta w} = Gü \quad (92.24)$$

die Gumbelsche Kennzahl ($Gü$). Es ist nun leicht verständlich, daß dieser Faktor in allen Gleichungen der Flüssigkeitsreibung vorkommt. Durch die Festlegung der Spaltform kommt eine Einschränkung hinzu; für Lager mit Lagerspiel ist $\Phi = \psi^2 \cdot Gü$ und für ebene Gleitflächen $(h_0/a)^2 \cdot Gü$ die kennzeichnende Größe, die in Abschnitt 42.2 u. 3 mit Φ bezeichnet ist.

In anderen Fällen wieder können die Zähigkeitsglieder der Gl. (20) gegenüber den Massenkräften vernachlässigt werden. Das ist z. B. der Fall bei starken Wirbelungen (Wellen), durch welche die Reibung größtenteils aufgehoben wird. Die Differentialgleichung lautet dann:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = w \cdot \frac{dw}{dx} = \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{dp}{dx} \quad (92.25)$$

woraus (da p/γ die Dimension einer Länge l hat) die Froude'sche Kennzahl

$$w^2/g \cdot l = Fr \quad (92.26)$$

die bei der Berechnung von Schiffswiderständen gebräuchlich ist.

Man kann das Ähnlichkeitsprinzip auch auf eine ganz andere Weise formulieren, indem man von der selbstverständlichen Tatsache ausgeht, daß alle physikalischen Vorgänge unabhängig vom Maßsystem sein müssen, das wir Menschen (willkürlich) eingeführt haben (metrisches, englisches, technisches, physikalisches Maßsystem, usw.). Sie müssen also immer durch Gleichungen formuliert werden können, deren Glieder dimensionslose Größen (Kennzahlen) sind. Bridgman, P. W.: Theorie der physikalischen Dimensionen. Deutsche Übersetzung von H. Holl. J. B. Teubner 1932.

Aus Gl. (22) folgt, daß der Druck p und damit auch der Druckunterschied:

$$\Delta p = Eu \frac{\gamma}{g} w^2$$

oder, da $Eu = F(Re)$ ist:

$$\Delta p = F(Re) \frac{\gamma}{g} w^2. \quad (92.27)$$

Der Druckverlust in einer strömenden Flüssigkeit ist demnach eine Funktion der Reynoldsschen Zahl. Aus den Ähnlichkeitsbetrachtungen folgt nun, daß in Gl. (16) ζ nicht von den einzelnen Faktoren (w, l, ν, η, γ), sondern nur von einem einzigen Faktor $Re = wl/\nu$ abhängt, $\zeta = F(Re)$.

Darin liegt auch die Bedeutung des Ähnlichkeitsprinzipes für die experimentelle Forschung. Alle Formeln über den Druckverlust, die diese Beziehung nicht berücksichtigen, müssen als unzuverlässig abgelehnt werden.

In der Gleichung für Re ist l irgendeine als Ausgangsmaß gewählte Abmessung, während Re eine absolute (unbenannte) Zahl ist.

Reynolds nimmt als Ausgangsmaß den Rohrdurchmesser, andere den Radius und wieder andere den hydraulischen Radius F/U . Obschon es grundsätzlich gleich ist, welches von diesen dreien gewählt wird, so muß dies doch beim Vergleich der Zahlenwerte beachtet werden. Es scheint mir am zweckmäßigsten, den Rohrdurchmesser zu wählen, so daß

$$Re = \frac{w \cdot d}{\nu}. \quad (92.21)$$

Unterhalb der kritischen Geschwindigkeit folgt $\zeta = F(Re)$ direkt aus der Hagen-Poiseuilleschen Gleichung (15):

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{8\eta}{r^2} w l = \frac{32\eta}{d^2} w l = \zeta \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} \gamma, \\ \zeta &= 64 \frac{\eta g}{\gamma w d} = \frac{64}{Re}. \end{aligned} \quad (92.28)^1$$

Auch der Übergang von laminarer in turbulente Strömung muß für alle Flüssigkeiten bei der gleichen (kritischen) Reynoldsschen Zahl (Re_k) stattfinden, deren Größe durch Störungen (Erschütterungen) beeinflusst werden kann. Für die Strömung in Kreisrohren ist $Re_k \approx 2300$.

Oberhalb der kritischen Geschwindigkeit muß die Gestalt der Funktion $\zeta = F(Re)$ aus den Versuchen abgeleitet werden.

92.6 Die Laminarströmung in Spalten

wurde im Abschn. 42.2 ausführlich behandelt. Für $U = 0$ ist die Geschwindigkeitsverteilung in einem Spalt von konstanter Höhe:

$$w = \frac{\Delta p}{2\eta l} (y^2 - hy) \quad (42.9)$$

und die hindurchströmende Flüssigkeitsmenge für die Einheit der Spaltbreite:

$$G_1 = \frac{h^3}{12 \cdot \eta} \cdot \frac{\Delta p}{l} \quad (42.10)$$

Für einen ringförmigen Spalt von der Breite $\pi \cdot d_m$ ist

$$G = \frac{h^3}{12 \cdot \eta} \cdot \frac{\Delta p}{l} \pi d_m. \quad (92.29)$$

¹ Versuche von Ruckes bestätigen diese Beziehung für Luft in Haarröhrchen bei Geschwindigkeiten bis 300 m/s. Z. VDI 1908, Bd. 52, S. 2065.

Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit w_m ist:

$$w_m = \frac{G}{\pi d_m h} = \frac{h^2}{12 \eta} \cdot \frac{\Delta p}{l} \quad (92.30)$$

und der Druckverlust:

$$\Delta p = \frac{12 \eta}{h^2} w_m l. \quad (92.31)$$

Der äquivalente Durchmesser ist nach Gl. (17):

$$d_{ae} = \frac{4F}{U} = \frac{4 \pi d_m h}{2 \pi d_m} = 2 h. \quad (92.32)$$

Der Übergang von laminarer zur turbulenten Strömung muß demnach bei der kritischen Reynoldsschen Zahl $Re_k = w \cdot 2 h / \nu = 2300$ erfolgen.

Für die Strömung in einem Ölspalt ($h = 0,1 \text{ mm} = 10^{-4} \text{ m}$, $\gamma = 950 \text{ kg/m}^3$, $\eta = 0,002 \text{ kg} \cdot \text{s/m}^2$) folgt w_k aus $2300 = \frac{w_k \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 950}{9,81 \cdot 0,002}$ zu $w_k = \text{rd. } 200 \text{ m/s}$, so daß die Strömung im Ölspalt eines Gleitlagers bei allen praktisch vorkommenden Gleitgeschwindigkeiten laminar ist.

Schreibt man den Druckverlust $\Delta p = \zeta \frac{l}{d_{ae}} \frac{w^2}{2g} \gamma$, so folgt aus der Gleichsetzung mit Gl. (31):

$$\frac{12 \eta}{h^2} \cdot w \cdot l = \zeta \frac{l}{2 h} w^2 \rho / 2$$

$$\zeta = \frac{48 \eta}{h \rho w} = \frac{48 \nu}{w h} = 96 / Re. \quad (92.33)$$

worin

$$Re = w \cdot 2 h / \nu \quad (92.34)$$

ist.

93. Versuchswerte.

93.1. Ausflußzahlen.

Die Versuchsergebnisse dürfen im allgemeinen nur auf genau gleiche oder streng ähnliche Anordnungen übertragen werden. Neben der genauen geometrischen Ähnlichkeit der Begrenzungsflächen ist für die Ähnlichkeit der Flüssigkeitsströmung die Gleichheit der Reynoldsschen Zahlen (Re) die notwendige Voraussetzung. Dabei muß aber immer beachtet werden, daß das Ähnlichkeitsprinzip unter vereinfachenden Annahmen abgeleitet wurde. Diese Voraussetzungen sind, neben der genauen geometrischen Ähnlichkeit, u. a.:

1. Kleine Druckunterschiede bei der Strömung, so daß die Änderungen des Volumens und der Zähigkeit mit dem Druck vernachlässigt werden können. Bei großen Druckunterschieden ist der Ausfluß von Gasen und Dämpfen kein rein mechanischer, sondern zugleich ein thermodynamischer Vorgang.

2. Überall gleiche Temperaturen.

3. Vernachlässigung der Schwerkraft.

4. Keine Änderung des Aggregatzustandes (Verdampfung, Kondensation).

5. Gleiche Anfangsbedingungen.

Wenn z. B. die Ausflußöffnung eine andere Lage am Gefäß oder einen anderen Durchmesser erhält oder wenn die Höhe des Flüssigkeitsstandes im Gefäß geändert wird, so sind die Strömungen, streng genommen, nicht mehr ähnlich, weil die genaue geometrische Ähnlichkeit der Versuchsbedingungen nicht mehr erfüllt ist. Die Versuchsergebnisse dürfen dann nicht mehr von dem einen auf den anderen Fall übertragen werden.

Dem Einfluß der Schwerkraft ist es z. B. zuzuschreiben, daß die Ausströmung von Wasser oder von Luft aus einem Gefäß, auch bei gleichen Reynoldsschen Zahlen, nicht mehr genau ähnlich ist. Es wird nur selten vorkommen, daß zwei praktische Probleme genau ähnlich sind. Die Versuche müssen deshalb auch weiter klarstellen, welche Abweichungen von der genauen Ähnlichkeit bedeutungslos sind und welche einen ausschlaggebenden Einfluß ausüben.

Wenn die Zuflußgeschwindigkeit vernachlässigt wird, d. h. die Flüssigkeit aus einer im Verhältnis zum Gefäß kleinen Bodenöffnung und unter ständigem Druck h frei ausströmt, so

kann bei strenger Erfüllung der Ähnlichkeitsbedingungen die Ausflußzahl μ nur eine Funktion der Reynoldsschen Zahl sein.

$$\mu = f\left(\frac{wd}{\nu}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2gh} \cdot d}{\nu}\right) = f\left(\frac{\sqrt{h} \cdot d}{\nu}\right). \quad (93.1)$$

Ausführliche Messungen über den Ausfluß von Wasser und Sole bei verschiedenen Temperaturen hat Dr. A. Schneider¹ ausgeführt. Er stellt seine Versuchsergebnisse durch eine Kurvenschar $\mu = f(h, d)$ dar. In Abb. 93.1 sind die gemessenen Ausflußzahlen in Abhängigkeit von $\sqrt{h} \cdot d$ eingetragen. Bei vollständig ähnlicher Strömung müßten sämtliche Versuchsergebnisse durch eine Kurve darstellbar sein. Wie die Abbildung zeigt, trifft dies nicht genau zu. Die Abweichungen liegen aber z. T. innerhalb der Genauigkeit der ausgeführten Messungen. Der verhältnismäßige Meßfehler lag bei den Versuchen zwischen $\pm 0,2\%$ und $\pm 0,5\%$, so daß z. B. für den Wert $\mu = 0,61$ die Meßgenauigkeit zwischen 0,606 und 0,614 liegt. Dadurch sind

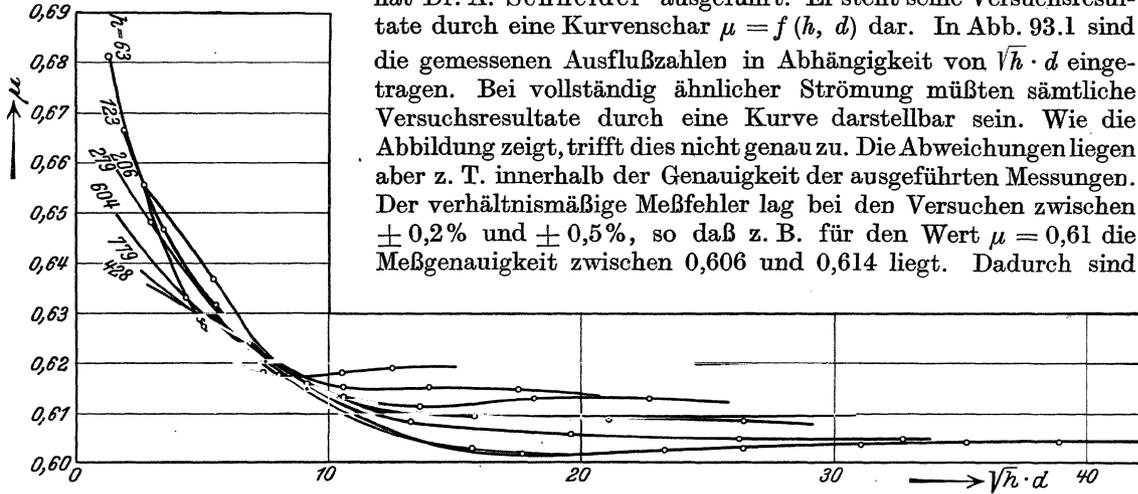


Abb. 93.1. Ausflußzahlen nach Versuchen von Dr. A. Schneider.

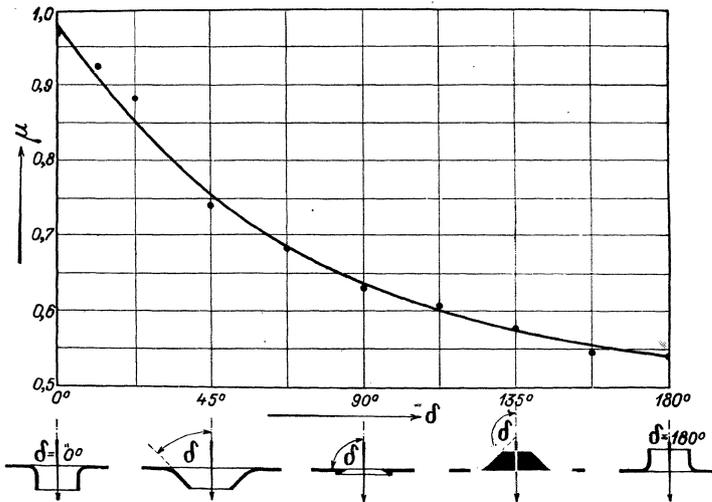


Abb. 93.2. Ausflußzahlen für verschiedene Mündungen. (Aus Banki.)

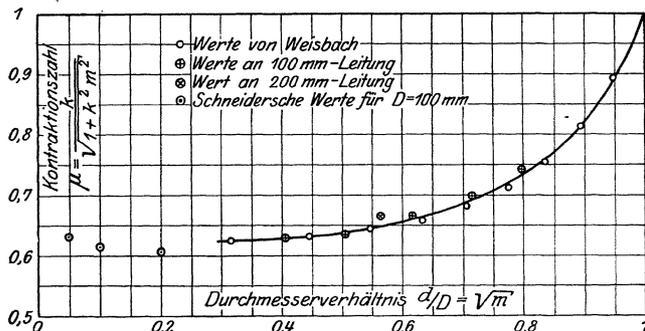


Abb. 93.3. Versuche über den Ausfluß von Wasser. (Aus Gramberg, Techn. Mess.)

auch die zu kleinen Werte von $\mu < 0,61$ zu erklären, die ungenau sind, weil für reibungslose Flüssigkeit, als untere Grenze, $\mu = 0,61$ ist (vgl. Gl. 92.11). Kleine Werte von h , verbunden mit großen Werten von d , können das gleiche Produkt $\sqrt{h} \cdot d$ liefern wie große Höhen bei kleinen Ausströmöffnungen. Wenn die Reynoldsschen Zahlen dann in beiden Fällen gleich sind, so ist doch keine geometrische Ähnlichkeit mehr vorhanden. Dadurch lassen sich die Abweichungen bei kleinen Werten von $\sqrt{h} \cdot d$ erklären.

Für den Ausfluß von Luft fand A. O. Müller² für die scharfkantige Mündung $\mu = 0,60$.

Den Einfluß der Form der Ausflußöffnung zeigt Abb. 93.2, die die Ausflußzahlen für verschieden geformte Kreisöffnungen nach Versuchen von Weisbach darstellt.

Strömt die Flüssigkeit nicht aus einem sehr großen Behälter, sondern aus einer Rohrleitung mit dem Querschnitt F_1 , so ist bei Verwendung von scharfkantigen Mündungen die Kontraktion des austretenden

¹ Schneider, A.: Ausflußkoeffizienten von Poncelet-Öffnungen. VDI-Forschungsheft Nr. 213 (1919).
² Müller, A.O.: Messungen von Gasmengen mit der Drosselscheibe. VDI-Forschungsheft. Nr. 49 (1908).

Strahles unvollkommen. Die Kontraktionszahl muß von dem Wert 0,61 für kleine Werte von $F_2/F_1 = m$ auf den Wert 1 für $F_2/F_1 = 1$ steigen (Abb. 93.3).

93.2. Druckverlust in glatten Rohren bei turbulenter Strömung.

Blasius, H.: Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. VDI-Forschungsheft Nr. 131 (1913). — Nikuradse, J.: Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren. VDI-Forschungsheft Nr. 356 (1932). — Schiller, L.: Rohrwiderstand bei hohen Reynoldsschen Zahlen. Vorträge a. d. Gebiete der Aerodynamik, Aachen 1929. Berlin: Julius Springer 1930.

Blasius verwendet dazu die sorgfältig durchgeführten Versuche der amerikanischen Ingenieure Saph und Schoder über den Druckverlust von Wasser in glatten Rohren und findet für den Faktor ζ in Gl. (91.16):

$$\zeta = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}. \quad (93.2)$$

Seither sind die Versuche öfter mit Wasser und Luft wiederholt worden; sie bestätigen die Blasius'sche Gleichung bis Re kleiner als 100000. Für größere Reynoldssche Zahlen ist für glatte Rohre die Gleichung von Nikuradse die genaueste

$$\zeta = 0,0032 + 0,221 Re^{-0,237} \quad (93.3)$$

gültig von $Re = 10^5$ bis $Re = 3 \cdot 10^8$. Daraus folgt, daß für sehr große Reynoldssche Zahlen ζ konstant wird, so daß der Druckverlust dann mit w^2 proportional ist (Abb. 93.5).

Schiller und Hermann haben insbesondere den Einfluß der Zulaufverhältnisse auf den Druckverlust untersucht. Er ist recht bedeutend und hängt von der Länge der vorgeschalteten Beruhigungsstrecke und von allen dabei verwendeten Beruhigungsmaßnahmen ab.

Zwischen dem Druckverlust Δp und der Schubspannung an der Wand τ_0 besteht eine einfache Beziehung, die aus dem Gleichgewicht der Kräfte abgeleitet werden kann (Abb. 93.4):

$$\frac{\pi}{4} d^2 dp = \tau_0 \pi d \cdot dx.$$

Daraus folgt:

$$\tau_0 = \frac{d}{4} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{4l} \cdot d. \quad (93.4)$$

Durch Einsetzen des Wertes von Δp aus Gl. (92.16) erhält man:

$$\tau_0 = \frac{\zeta}{8} w^2 \cdot \rho. \quad (93.5)$$

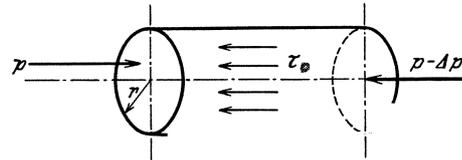


Abb. 93.4.

93.3. Geschwindigkeitsverteilung¹.

Aus der experimentellen Gleichung für den Druckverlust läßt sich (nach den Überlegungen von Prandtl und von Karman) die Geschwindigkeitsverteilung bei turbulenter Strömung bestimmen. Da die Flüssigkeit an der Wand haftet, hängt die Geschwindigkeit sicher von der Schubspannung τ_0 ab. Die noch unbekannte Geschwindigkeitsverteilung

$$u = F(\tau_0, \eta, y, \rho)$$

kann nach steigenden Potenzen der Entfernung y von der Wand entwickelt werden. Das erste Glied in der Entwicklung lautet:

$$u = F_1 \cdot y^x \quad (93.6)$$

worin F_1 eine noch unbekannte Funktion von τ_0 , η und ρ ist. Die Dimensionsgleichheit der linken und der rechten Seite der Gl. (6) kann nur dann erreicht werden, wenn F_1 eine Potenzfunktion ist. Nun hat $\sqrt{\tau_0/\rho}$ die Dimension einer Geschwindigkeit (nach Prandtl „Schubspannungsgeschwindigkeit“ u^* genannt). Die einzige dimensionsrichtige Kombination ist deshalb:

$$u = B \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{\frac{1+x}{2}} \cdot \left(\frac{y\rho}{\eta} \right)^x \quad (93.7)$$

worin B eine absolute (unbenannte) Zahl ist. Unter der Voraussetzung eines konstanten Geschwindigkeitsprofils wird bei Vergrößerung der Durchflußmenge die Geschwindigkeit w_e proportional wachsen. Die Schubspannung τ_0 wächst jedoch nach dem Blasius'schen Wert aus Gl. (2) mit der $7/4$ Potenz der Durchflußmenge, so daß $(1+x)/2 = 4/7$ oder $x = 1/7$ sein muß. Bei tur-

¹ Nikuradse, J.: Untersuchungen über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen. VDI-Forschungsheft 281 (1926).

bulenter Strömung in Rohren ändert sich die Geschwindigkeit mit der $1/7$ -Potenz des Abstandes von der Rohrwand. (Gesetz von Prandtl und von Karmàn.)

Versuche von Stanton und von Nikuradse haben dieses Gesetz für Rohre mit kreisförmigen, rechteckigen und dreieckigen Querschnitt bestätigt. Nur in der unmittelbaren Wandnähe und in der Rohrachse treten Abweichungen auf. Die Abweichungen in der Wandnähe sind begreiflich, weil

$$u = u_0 \left(\frac{y}{r} \right)^{1/7} \quad (93.8)$$

für $y = 0$ eine vertikale Tangente, also eine unendlich große Schubspannung ergibt, während τ_0 tatsächlich einen endlichen Wert hat. Das $1/7$ -Potenzgesetz kann demnach in unmittelbarer Wandnähe nicht mehr gültig bleiben. Eine etwas bessere Annäherung an die Messung in der Rohrmitte erhält man durch den Ansatz:

$$u = u_0 \left\{ 1 - \left(\frac{z}{r_0} \right)^n \right\}^{1/7} \quad (93.9)$$

wobei über den Exponent n frei verfügt werden kann. Alle Versuche liegen zwischen den Exponenten 1 und 2.

Infolge der beschränkten Gültigkeit der Gleichung von Blasius ist auch das $1/7$ Potenzgesetz nur gültig bis $Re < 100\,000$. In diesem Gebiet liegen aber die meisten praktischen Anwendungen. Für größere Reynoldsschen Zahlen nimmt x mit zunehmenden Werten von Re ab; z. B. fand Nikuradse für $Re = 4$. 43 . 396 . $3240 \cdot 10^3$

$$x = 1/6 \quad 1/7 \quad 1/8,5 \quad 1/10 \quad \text{ist.}$$

In einer neueren Fassung seiner Ideen geht Prandtl nicht mehr von einer Potenzformel für die Geschwindigkeitsverteilung aus, sondern von der „universellen“. Mit der Größe $u^* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ läßt sich eine „dimensionslose“ Geschwindigkeit u/u^* bilden und gleicherweise eine Art Reynoldsschen Kennzahl u^*y/ν . Trägt man nach den Versuchen von Nikuradse

$$u/u^* = \text{Funktion}(u^*y/\nu)$$

auf, so erhält man für alle Reynoldsschen Zahlen eine einzige Kurve, also eine universale Geschwindigkeitsverteilung:

$$\log(u/u^*) = 5,5 + 5,75 \log u^*y/\nu$$

wobei nur in unmittelbarer Wandnähe, für $u^*y/\nu < 10$ systematische Abweichungen feststellbar sind (Laminare Grenzschicht). Die Versuchswerte streuen etwas und je nachdem man die Punkte in der Wandnähe oder in der Rohrachse etwas mehr bevorzugt, bekommt man andere Zahlenwerte.

Mit Gl. (8) wird die mittlere Geschwindigkeit im Rohr

$$w = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r u_0 \left(\frac{y}{r} \right)^x 2 \pi z dz$$

worin $z = r_0 - y$ und $dz = -dy$ ist. Durch Integration erhält man:

$$w = \frac{2}{(x+1)(x+2)} u_0 \quad (93.10)$$

und mit $x = 1/7$:

$$w = \frac{49}{60} u_0 = 0,816 u_0 \quad (93.11)$$

Mit Gl. (9) wird für $n = 1,25(2)$: $w/u_0 = 0,838(0,875)$.

Die zuverlässigsten Messungen liefern $w/u_0 = 0,84$.

Aus der Gleichsetzung der Gleichungen (7) und (8) folgt:

$$B \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{4/7} \cdot \frac{1}{\nu^{1/7}} = \frac{u_0}{r_0^{1/7}} \quad (93.12)$$

Setzt man darin die Werte von τ_0 und ζ aus den Gleichungen (5) und (2) ein, so erhält man mit $w/u_0 = 0,84$:

$$B = 2^{1/7} \left(\frac{8}{0,3164} \right)^{4/7} \cdot \frac{u_0}{w} = 8,57.$$

Mit dem Wert $B = 8,7$ ($n \approx 1,5$) folgt aus Gl. (12):

$$\tau_0 = 0,0225 \rho u_0^2 \left(\frac{\nu}{u_0 r_0} \right)^{1/4} \quad (93.13)$$

93.4. Prandtl'sche Grenzschicht¹.

Von der turbulenten Strömung einer Flüssigkeit kann man sich folgendes Bild machen. In ähnlicher Weise wie die Reibung zwischen festen Körpern durch kleine, fortgesetzte Erschütte-

¹ Prandtl, L.: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandl. des III. Intern. Math. Kongreß 1904, Leipzig 1905.

rungen unwirksam gemacht werden kann, werden durch die Pulsationen der turbulenten Strömung die Schubspannungen stark vermindert. Dabei ist zu beachten, daß die Erschütterungen erst recht mit großem Energieaufwand verbunden sind. Die Hauptbewegung einer turbulenten Strömung kann demnach annähernd als reibungsfrei betrachtet werden. Weil dabei aber die Randbedingung, daß die Flüssigkeit an der Wand haftet, nicht zu erfüllen ist, versagt diese (klassische) Theorie der Hydrodynamik vollständig in der Nähe der Begrenzungsflächen von Flüssigkeiten und festen Körpern. L. Prandtl hat nun die Theorie wesentlich erweitert durch die Annahme, daß die reibungsfreie Strömung bis auf eine an die Wandung grenzende Schicht (die Prandtl'sche Grenzschicht) gültig bleibt. In dieser Schicht ändert sich die Geschwindigkeit von Null an der Wand bis zum Wert der gleichmäßigen Geschwindigkeit der reibungsfreien Strömung. In der unmittelbaren Wandnähe ist die Strömung laminar; die Geschwindigkeitsverteilung also parabelförmig. Man kann nun die Dicke δ dieser Laminarschicht aus der Schubspannung τ_0 berechnen, wenn man in der dünnen Schicht die Parabel durch die Anfangstangente ersetzt. Man erhält dann mit Gl. (5) die Beziehung:

$$\tau_0 = \eta \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} = \eta \frac{u'}{\delta'} = \frac{\zeta}{8} w^2 \rho \quad (93.14)$$

worin u' die Geschwindigkeit an der Grenze der Laminarschicht ist, die nur einen Bruchteil φ der mittleren Geschwindigkeit w sein kann. Mit $\frac{\eta g}{\nu} = \nu$, $w \cdot d/\nu = Re$ und ζ aus Gl. (2), wird die relative Dicke der Laminarschicht:

$$\frac{\delta'}{d} = \frac{8\varphi}{\zeta Re} = \frac{\varphi}{0,03955 Re^{0,75}} \quad (93.15)$$

L. Prandtl hat zur Berechnung von $\varphi = u'/w$ zuerst angenommen, daß die Grenze da liegt, wo beide Geschwindigkeitskurven (für Laminar- und turbulente Strömung) die gleiche Tangente haben; die aus der Schubspannung τ_0 bekannt ist.

$$\frac{d}{dy} \left\{ u_0 \left(\frac{y}{r} \right)^{1/7} \right\}_{y=\delta} = \frac{1}{7} \frac{u_0}{r} \left(\frac{r}{\delta'} \right)^{6/7} = \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} = \frac{\tau_0}{\eta} = \frac{\zeta}{8\eta} w^2 \rho.$$

Unter der Voraussetzung, daß das $1/7$ -Potenzgesetz bis zur Grenze der Laminarschicht gültig bleibt, ist $(r/\delta')^{1/7} = (u_0/u')$; setzt man weiter $u_0/w = 1,2$, so wird:

$$\varphi = u'/w = 1,2 \left(\frac{2 \cdot 1,2}{7 \cdot 0,0395} \right)^{1/6} Re^{-1/8} = 1,72 Re^{-1/8}. \quad (93.16)$$

Nach neueren Untersuchungen ist $\varphi = 1,4 Re^{-0,1}$. Vgl. ten Bosch: Wärmeübertragung, 3. Aufl. S. 113.

Für $Re = 10^5$	$5 \cdot 10^5$	10^6
ist $\varphi = 0,44$	0,37	0,35

Für $Re = 5 \cdot 10^5$ ist $\zeta = 0,013$ und $\varphi = 0,37$ und

$$\frac{\delta'}{d} = \frac{8 \cdot 0,37}{0,013 \cdot 5 \cdot 10^5} = 4,5 \cdot 10^{-4}$$

für $d = 100$ mm ist $\delta' = 0,05$ mm.

93.5. Druckverlust in rauhen Rohren¹.

Für rauhe Rohre muß, als neuer Faktor für ähnliche Verhältnisse, noch die relative Rauheit der Rohroberfläche berücksichtigt werden. Solange die Unebenheiten der Rohrwandung innerhalb der Laminarschicht bleiben, kann die Rauheit keinen wesentlichen Einfluß auf den Strömungswiderstand haben; für solche Rohre gelten die Gleichungen (2) und (3) für glatte Rohre. Wird die Laminarschicht mit zunehmender Geschwindigkeit so dünn, daß alle Rauheits-erhebungen aus ihrer hervorrage, dann wird der Druckverlust ausschließlich durch Wirbelbildung verursacht. In diesem Bereich muß der Widerstandsbeiwert ζ unabhängig von der Reynoldsschen Zahl sein. Nach den Versuchen von Nikuradse¹ gilt dann die einfache Formel:

$$\zeta = 1/(1,74 + 2 \log r/c)^2 \quad (93.17)$$

Zwischen diesen beiden Bereichen liegt ein Übergangsbereich, in welchem $\zeta = F(Re, \varepsilon/r)$, aber immer kleiner als nach Gl. (17) ist.

Eingehende Untersuchungen über den Einfluß der Rauheit auf den Strömungswiderstand haben gezeigt, daß die Wandrauheit durch die Größe ε allein nicht vollständig erfassbar ist, weil die Strömung außer von der Größe der Wandlererhebungen noch von deren Gestalt, gegen-

¹ Nikuradse, J.: Strömungsgesetze in rauhen Rohren. VDI-Forschungsheft Nr. 361 (1933).

seitigem Abstand und Verteilung auf der Rohrwand abhängt. Die Übertragung der Gl. (17) von Nikuradse (Rauheit durch Sandkörner) auf andere Verhältnisse, z. B. gezogene Eisenrohre oder Gußrohre, ist deshalb immer noch unsicher.

In der Praxis des Maschinenbaues werden hauptsächlich nahtlos gezogene Rohre verwendet, für welche die ζ -Werte nach den verschiedenen Versuchen und Literaturangaben z. T. recht stark auseinandergehen, so daß die Vorausberechnung des Druckverlustes immer mit einer großen Unsicherheit verbunden war. Diese Lücke ist kürzlich durch systematische Forschungsarbeiten nun geschlossen worden. Das Ergebnis ist in Abb. 93.5

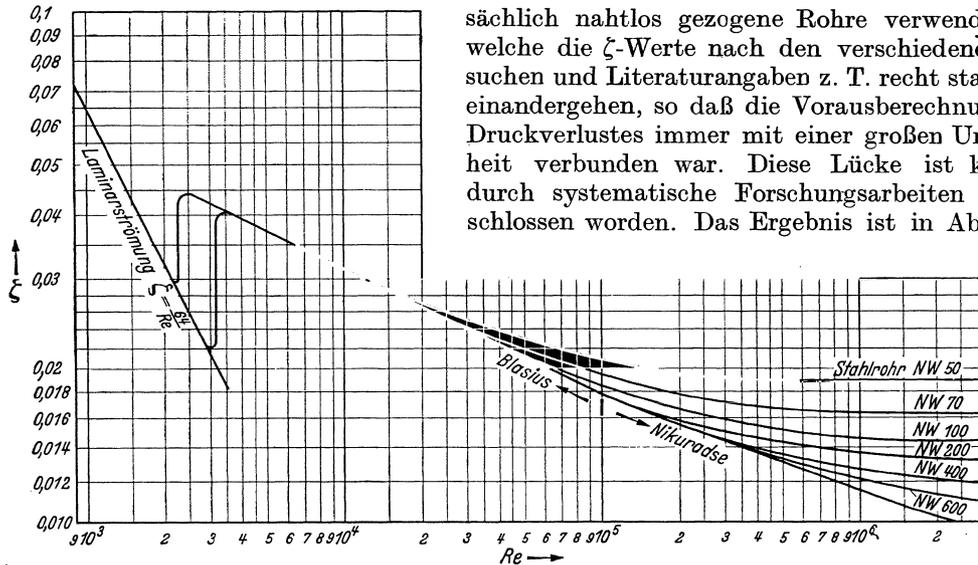


Abb. 93.5. Druckverlust in nahtlos gezogenen Stahlrohren¹.

dargestellt und gilt für handelsübliche Stahlrohre, die sorgfältig zusammengeschweißt sind.

Bei sehr hohen Geschwindigkeiten elastischer Flüssigkeiten kommt noch ein Zuschlag hinzu infolge der beschleunigten Strömung. Die nachfolgende Zusammenstellung gibt dafür Richtwerte, die eine gewisse Sicherheit einschließen:

Geschwindigkeit . . .	50	100	150 m/s
Überhitzter Dampf . . .	1	5	10%
Stadtgas bei 20° C. . .	2	8	15%
Luft bei 20° C	3	15	30%

93.6. Querschnittsänderungen.

Schrifttum.

Andres, J. K.: Versuch über die Umsetzung von Wassergeschwindigkeit in Druck. VDI-Forschungsheft 76 (1909). — Riffart, A.: Versuche mit Verdichtungsdüsen (Diffusoren). VDI-Forschungsheft Nr. 257 (1922). — Dönch, Fr.: Untersuchungen über divergente und konvergente turbulente Strömungen mit kleinen Öffnungswinkeln. VDI-Forschungsheft Nr. 282 (1926).

Nach Gl. (92.2) wäre es gleichgültig, ob zwischen den Querschnitten F_1 und F_2 eines horizontalen Rohres die Strömung von F_1 nach F_2 gerichtet ist oder umgekehrt. Ob Geschwindigkeit in Druck (verzögerte Strömung von F_1 nach F_2) oder umgekehrt Druck in Geschwindigkeit umgesetzt wird (beschleunigte Strömung von F_2 nach F_1); in beiden Fällen beträgt der Druckunterschied (Abb. 93.6):

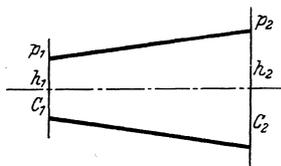


Abb. 93.6.

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g} \quad (93.18)$$

In wirklichen Flüssigkeiten trifft diese Annahme nicht zu. Mit der Geschwindigkeitsabnahme (infolge Erweiterung des Querschnittes) ist ein Druckanstieg in der Bewegungsrichtung verbunden. Nach sehr kurzer Zeit jedoch verlieren die in der dünnen Grenzschicht befindlichen Flüssigkeitsteilchen infolge der Reibung soviel an kinetischer Energie, daß sie nicht weiter in das Gebiet ansteigenden Druckes vorzudringen vermögen. Sie kommen sehr bald zur Ruhe, beginnen sich infolge der Drucksteigerung nach rückwärts zu bewegen und lösen sich in Wirbel auf, was natürlich mit einem erhöhten Druckverlust verbunden ist. Während die beschleunigte Strömung fast verlustfrei erfolgt, sind Querschnittserweiterungen immer mit be-

¹ Zimmermann, E.: Arch. Wärmewirtsch. 17 (1936) S. 101 und 19 (1938) S. 243/47.

deutenden Druckverlusten verbunden. Man setzt:

$$p_2 - p_1 = \Delta p = \xi \frac{c^2}{2g} \gamma. \tag{93.19}$$

Zur Berechnung des Verlustes geht man am zweckmäßigsten aus vom Impulssatz. Unter Impuls oder Bewegungsgröße J versteht man das Produkt aus Masse m und Geschwindigkeit w ($J = m \cdot w$). Die Newtonsche Gleichung für die Bewegung eines Massenpunktes (Kraft = Masse \times Beschleunigung):

$$P = m \frac{dw}{dt}$$

kann auch geschrieben werden:

$$P = \frac{d}{dt} (m \cdot w) = \frac{dJ}{dt}.$$

Sie gilt sowohl für ein abgegrenztes System diskreter Massenpunkte

$$\sum P = \frac{d}{dt} \sum (m \cdot w) = \frac{dJ}{dt}$$

als auch für eine stetige Flüssigkeitsmenge

$$\sum P = \frac{d}{dt} \int_F w \cdot dm = \frac{dJ}{dt}, \tag{93.20}$$

wenn dabei beachtet wird, daß die betrachtete Flüssigkeitsmenge dauernd aus den gleichen Teilchen besteht. Sie sollte also durch eine bewegliche (flüssige) Fläche begrenzt werden, so daß während der Untersuchung (zeitliche Differentiation) keine Flüssigkeit durch die einmal gezogene Grenze ein- oder austreten kann. Die Änderung des Impulses in der Zeiteinheit eines von einer flüssigen Fläche eingeschlossenen Gebietes ist gleich der Resultierenden der äußeren Kräfte.

Für die Berechnung der Impulsänderung ist es aber zweckmäßiger eine raumfeste Kontrollfläche zu wählen. Der Impulssatz hat nämlich nur für stationäre Bewegungen praktische Bedeutung, bei denen jedes Flüssigkeitsteilchen an einem festgehaltenen Ort in der Zeit dt durch ein anderes Teilchen von gleicher Geschwindigkeit ersetzt wird. Die Impulsänderung ist dann gleich dem durch die Kontrollfläche strömenden Impuls (Impulsfluß).

$$\sum P = \frac{d}{dt} \int_{\text{Oberfl.}} w \, dm = \int_{\text{Oberfl.}} p \, dF. \tag{93.21}$$

Der besondere Wert des Impulssatzes liegt darin, daß er — allein aus der Kenntnis des Zustandes an der Begrenzungsfläche — über physikalische Vorgänge aussagt, ohne diese im Innern zu kennen.

Bei einer plötzlichen Erweiterung (Abb. 93.7) löst sich der Strahl in AA sofort von der Wandung ab um diese z. B. bei BB wieder zu erreichen. Der Winkelraum ACB (der oft, aber recht unzuweckmäßig als „tote“ Ecke bezeichnet wird) steht in AA , infolge der größeren Geschwindigkeit unter einem kleineren Druck als in BB . Dieser Druckunterschied hat eine starke Rückströmung von B nach A zur Folge, die sich mit bedeutendem Energieverlust in Wirbel auflöst.

Wir legen nun eine (möglichst einfache) Kontrollfläche, die durch CC , BB und durch die Wandung CB begrenzt ist.

Da durch die Wandung CB keine Flüssigkeit strömen kann, geht der gesamte Impulsfluß ausschließlich durch die Flächen AA und BB , wobei wir annehmen wollen, daß in diesen Querschnitten eine konstante mittlere Geschwindigkeit w_1 bzw. w_2 vorhanden ist, was, streng genommen, nicht zutrifft. Der Impulsfluß ($\rho F w \cdot w$) ist dann, da ρ konstant ist:

$$\rho F_1 w_1^2 - \rho F_2 w_2^2.$$

Als äußere Kräfte wirken auf den Grenzflächen CC und BB die Drücke p_1 bzw. p_2 , so daß nach dem Impulssatz:

$$\rho F_1 w_1^2 - \rho F_2 w_2^2 = F_2 (p_1 - p_2).$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung: $F_1 w_1 = F_2 w_2$ folgt daraus:

$$p_1 - p_2 = \rho w_2 (w_1 - w_2),$$

Bei verlustfreien Übergang wäre (nach Bernoulli): $p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} (w_1^2 - w_2^2)$

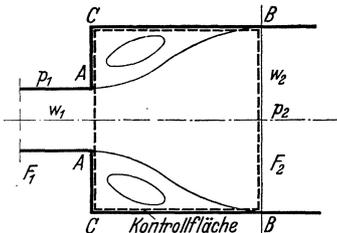


Abb. 93.7.
Erweiterungsverlust.

so daß der Verlust durch die plötzliche Erweiterung

$$\Delta p = p'_2 - p_2 = p'_2 - p_1 - (p_2 - p_1) = \frac{\rho}{2} (w_1^2 - w_2^2) - \rho w_2 (w_1 - w_2)$$

ist, oder

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} (w_1 - w_2)^2. \tag{93.22}$$

Versuche von V. Blaess haben gezeigt, daß diese Gleichung infolge der gemachten Voraussetzungen, nicht genau zutrifft.

Setzt man $\Delta p = \xi_1 \frac{w_1^2}{2} \rho$, so wird: $\xi_1 = \left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right)^2$ (93.23a)

und für $\Delta p = \xi_2 \frac{w_2^2}{2} \rho$: $\xi_2 = \left(\frac{F_2}{F_1} - 1\right)^2$. (93.23b)

Plötzliche Querschnittsänderungen treten in Rohrleitungen beim Einbau von Reduktionsmuffen auf. In Zahlentafel 93.1 sind die Widerstandszahlen ξ nach Gl. (23a) mit den Versuchswerten von M. Hottinger¹ verglichen. Aus den Versuchen scheint zu folgen, daß die ξ -Werte nicht nur vom Verhältnis F_1/F_2 , sondern auch von der absoluten Größe der Durchmesser abhängig sind.

Zahlentafel 93.1. ξ -Werte der Reduktionsmuffen GF 40 — Erweiterung.

	2-1½''	2-¾''	2-1''	2-¾''	¾-1''	¾-¾''	¾-½''	¾-¾''	¾-½''	¾-¾''
F_2/F_1	0,605	0,450	0,254	0,161	0,564	0,358	0,197	0,099	0,550	0,276
ξ (Gl. 22)	0,155	0,30	0,56	0,70	0,19	0,41	0,63	0,82	0,20	0,52
ξ Versuch	0,10	0,28	0,44	0,50	0,13	0,34	0,69	1,0	0,29	0,52

Es war schon den alten Ägyptern bekannt, daß durch Aufsetzen eines kurzen Rohrstückes die Wassermenge bei den Bewässerungsanlagen erhöht werden kann (Abb. 93.8). Durch eine scharfkantige Mündung mit dem Querschnitt F strömt nach Gl. (92.10) mit $\alpha = 0,64$ und $\psi = 0,97$ die Wassermenge

$$G_1 = \alpha \psi \cdot F \sqrt{2gh} = 0,61 F \sqrt{2gh}.$$

Setzt man ein kurzes Rohr von gleichem Querschnitt F auf und mit einer solchen Länge, daß der Endquerschnitt vollständig mit Wasser durchströmt wird, so folgt aus der Energiegleichung ($w_0 = 0$) unter Berücksichtigung des Erweiterungsverlustes nach Gl. (22):

$$h = \frac{w^2}{2g} + \frac{(w_1 - w)^2}{2g}$$

worin w_1 die Geschwindigkeit bei der größten Kontraktion des Strahles, also $w_1 = \alpha w = 0,64 w$ ist. Dann wird:

$$2gh = w^2 \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \right]$$

und unter Berücksichtigung der Strömung von nichtidealen Flüssigkeiten

$$w = \psi \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2}} = 0,82 \sqrt{2gh} \quad \text{und} \quad G_2 = 0,82 F \sqrt{2gh}.$$

Diese interessante Tatsache ist leicht verständlich, da im Querschnitt F_1 (mit der Geschwindigkeit w_1) ein kleinerer Druck herrschen muß als der Umgebungsdruck.

93.7. Richtungsänderungen.

Schrifttum.

Nippert, H.: Über den Strömungsverlust in gekrümmten Kanälen. VDI-Forschungsheft Nr. 320 (1929). — Hofmann, A.: Der Verlust in 90°-Rohrkrümmern mit gleichbleibendem Kreisquerschnitt. Mitt. d. Hydraul. Inst. der T. H. München. Heft 3, Oldenburg-1929. — Rambach, R.: Plötzliche Umlenkung

¹ Gesundheitsing. 1928, S. 727.

(Stoß) von Wasser in geschlossenen unter Druck durchströmten Kanälen. VDI-Forschungsheft Nr. 327 (1930). — Richter, H.: Der Druckabfall in gekrümmten Rohren. VDI-Forschungsheft Nr. 338 (1930). — Zimmermann, E.: Der Druckabfall in 90° Stahlrohrbogen. Beitrag zur praktischen Rohrleitungsberechnung. Arch. Wärmewirtsch. 19 (1938), S. 265/69.

Strömt eine Flüssigkeit durch ein gerades Rohr, so kann man — nach dem Vorgehen der klassischen Hydraulik — die Strömung durch parallele Flüssigkeitsfäden beschreiben, deren Geschwindigkeit in der Nähe der Wandung kleiner als in der Mitte ist. Kommt nun ein solcher Flüssigkeitsstrom in einen Krümmer (Abb. 93.9), so werden die mittleren Teilchen mit der größeren Geschwindigkeit nach außen gedrängt. Es entstehen dadurch in den Querschnitten des Krümmers die in Abb. 93.9b angedeuteten Sekundärströmungen, die sich der Hauptgeschwindigkeit überlagern. Die Parallelität der Flüssigkeitsfäden ist demnach in einem Krümmer grundsätzlich unmöglich. Der Einfluß des Krümmers beschränkt sich deshalb auch nicht auf die Länge des Bogenstückes, sondern erstreckt sich noch auf ein längeres Stück des nachfolgenden geraden Rohres (ca $l = 25d$). Es ist deshalb oft gebräuchlich, den Druckverlust in einem Krümmer gleich dem Druckverlust eines geraden Rohres von einer bestimmten (äquivalenten) Länge $l_{ae} = X \cdot l$ zu setzen.

$$\Delta p = \xi_k \frac{w^2}{2g} \gamma = X \left(\zeta \frac{l}{d} \right) \frac{w^2}{2g} \gamma.$$

Für ein Rohrbogen mit der Länge $l = \varphi \cdot D/2$ ($\varphi =$ Ablenkungswinkel in Bogenmaß), wird

$$\xi_k = X \zeta \cdot \frac{\varphi D}{2d} \quad \text{oder} \quad X = \frac{2 \xi_k}{\zeta \varphi} \cdot \frac{d}{D}. \quad (93.24)$$

Über den Druckverlust in Rohrkrümmern liegen zahlreiche Versuche vor, deren Ergebnisse sich z. T. widersprechen. Nach den neuesten Versuchen von H. Richter mit glatten Rohren ist

$$\xi_k = 0,2075 a' a Re^{-0,235} \quad (93.25)$$

worin

$$a' = 2,9 \varphi^{1,108} \quad (93.26)$$

ist und a aus Abb. 93.10 zu entnehmen ist. Aus dieser Abbildung folgt, daß für D/d größer als 6

$$a = 0,241 D/d$$

gesetzt werden kann. In diesem Fall wird mit dem ζ -Wert aus Gl. (93.2)

$$X = \frac{2 \cdot 0,2075 \cdot 0,241 D/d \cdot 2,9 \varphi^{1,108} Re^{-0,235}}{0,3164 Re^{-0,25} \varphi} \cdot \frac{d}{D} = 0,93 \varphi^{0,108} Re^{0,015} \quad (93.27)$$

also praktisch unabhängig von der Reynoldsschen Zahl und vom Krümmungsverhältnis D/d .

Für $Re = 5 \cdot 10^4$ und $\varphi = \pi/2$ ist $\varphi^{0,108} = 1,07$ und $X = 1,16$ und
für $\varphi = \pi$ $\varphi^{0,108} = 1,13$ und $X = 1,23$

Der Krümmungsverlust ist demnach überwiegend Rohrreibung.

Für D/d kleiner als 6 ist

$$X = \frac{2 \cdot 0,2075 \cdot a \cdot 2,9 \varphi^{1,108} Re^{-0,235}}{0,3164 Re^{0,25} \varphi} \cdot \frac{d}{D} = 3,8 \varphi^{0,108} Re^{0,015} a \cdot d/D \quad (13.28)$$

also auch unabhängig von der Reynoldsschen Zahl, während

$$\xi_k = \frac{3,8 \varphi^{0,108} a \cdot d \cdot 0,3164}{Re^{0,235} \cdot D \cdot 2} \cdot \varphi \frac{D}{d}$$

und für $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\xi_k = a \cdot Re^{-0,235}, \quad (93.29)$$

also unabhängig vom D/d ist. Die a -Werte müssen nun aus Abb. 93.10 abgelesen werden. Die berechneten X und ξ_k -Werte sind in Zahlentafel (93.2) zusammengestellt und zeigen, daß für kleine Werte von D/d , ξ_k noch ziemlich stark von der Reynoldsschen Zahl abhängt. Dadurch und infolge der Rauheit der Oberfläche wird es erklärlich, daß die einzelnen Versuchswerte oft stark verschieden sein können.

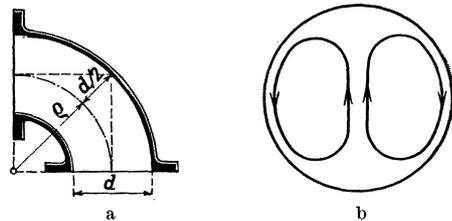


Abb. 93.9. Rohrkrümmer. $e = D/2$.

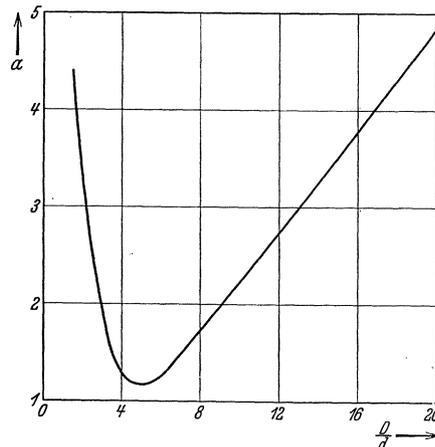


Abb. 93.10. Druckverlust in gekrümmten Rohren.

Zahlentafel 93.2. Werte von ξ_k und X für $D/d < 6$.

D/d	a	X (90°)	ξ_k -Werte für		
			Re = 10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶
5	1,18	1,2	0,12	0,07	0,037
4	1,3	1,5	0,13	0,074	0,041
3	2	3,1	0,2	0,115	0,064
2	3,5	8,4	0,35	0,2	0,11
1,5	5	14,6	0,5	0,29	0,16
1	10	47	1	0,58	0,32

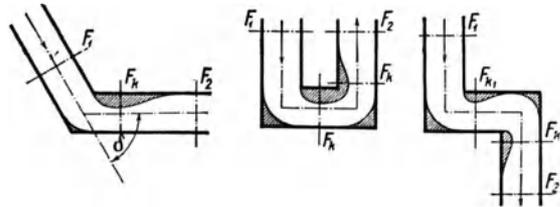


Abb. 93.11. Abb. 93.12. Abb. 93.13.
(aus Bánki, Energieumwandlungen.)

Zahlentafel 93.3. Widerstandszahlen für GF-Krümmen¹.

Lichte Weite	14	20	25	34	39	49 mm
Kniestück \square ξ	1,7	1,7	1,3	1,1	1,0	0,83
Bogen 90° \curvearrowright ξ	1,2	1,1	0,86	0,53	0,42	0,51
Bogen 180°, weit \curvearrowright ξ	—	0,89	0,89	0,96	—	0,66
Bogen 180°, eng \curvearrowleft ξ	—	1,7	—	1,8	—	1,8

Eine plötzliche Richtungsänderung (Knierohr Abb. 93.11) ist immer mit einer Querschnittsänderung verbunden, durch welche der größte Teil des Druckverlustes verursacht wird, während die eigentliche Richtungsänderung nur verhältnismäßig wenig Druckverlust zur Folge hat. Dies bestätigt ein Versuch Weisbachs, bei dem er — die Rohrleitung in derselben Ebene unmittelbar nacheinander brechend (Abbildung 93.12) — annähernd den gleichen Druckverlust fand wie bei nur einmaliger Ablenkung. Der Verlust steigt auf das 1¹/₂fache, wenn die zweite Richtungsänderung senkrecht zur ersten und auf das Doppelte, wenn der zweite Richtungswechsel zwar in der gleichen Ebene, aber in einer zur ersten entgegengesetzten Richtung erfolgt (Abb. 93.13).

93.8. Absperrorgane. Schrifttum.

Wiese, F. F.: Betriebseignung von Absperrorganen. Arch. Wärmewirtsch. 17 (1936), S. 120/23. — Schaumann, A.: Druckregelventile für Dampf und Wasser. Z. VDI 82 (1938), S. 251/57. — Ebersohl, H.: Absperrorgane für Hochdruck-Dampfleitungen. Beispiele neuerer Bauarten. Arch. Wärmewirtsch. 19 (1938), S. 203/05.

Je nach der Art der Flüssigkeit und dem Durchmesser des Rohres werden verschiedene Absperrmittel verwendet. Sie müssen bei geringen Durchströmverlusten sicher und dauernd abdichten.

Man unterscheidet:

1. Hähne: Das Verschlußstück gleitet in Drehbewegung auf der Sitzfläche, ohne seine Höhenlage zu ändern.
2. Ventile: Das Verschlußstück, das sich senkrecht zur Sitzfläche bewegt, wird vom Sitz abgehoben.
3. Schieber: Das Verschlußstück bewegt sich parallel zur Sitzfläche.
4. Klappen: Das Verschlußstück wird durch eine Drehbewegung um eine seitlich liegende Achse vom Sitz abgehoben; es klappt auf.

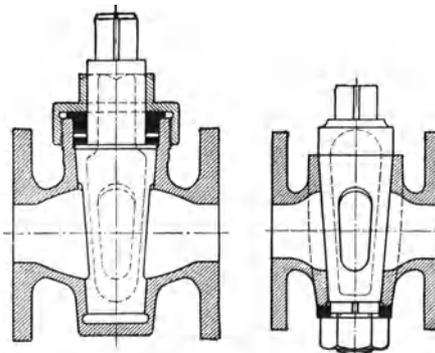


Abb. 93.14. Durchgangshähne. (Aus Dubbel, Taschenbuch.)

Hähne werden im allgemeinen für kleine Rohrquerschnitte und für nicht zu warme Flüssigkeiten verwendet. Hahnküküen und Gehäuse dichten längs schwach geneigten, kegelförmigen Flächen ab (Abb. 93.14), Neigung normal 1:12). Der runde Rohrquerschnitt wird in einen länglichen Schlitz übergeführt, damit der Durchmesser des Hahnkegels nicht zu groß wird. Die Änderung der Querschnittform muß ohne Änderung der Querschnittsgröße durchgeführt werden, damit die Flüssigkeit nicht gedrosselt wird. Durch das Drehen des Hahnkes darf der Anpreßdruck zwischen Küküen und Gehäuse nicht geändert werden; die Unterlegscheibe zwischen Gehäuse und Mutter sitzt deshalb auf einem Vierkant am Hahnküküen.

¹ Nach den Versuchen von Brabbée: Mitt. 15 d. Prüfstelle f. Heizungs- u. Lüftungseinrichtungen der Techn. Hochsch. Berlin. Oldenburg 1913 und von M. Hottinger: Gesundheitsingenieur 1929.

Absperrventile werden als Durchgangsventil (Abb. 93.15) oder als Eckventil (Abb. 93.16) ausgeführt. Für Wasser und kalte Flüssigkeiten werden die Dichtungsflächen aus Bronze hergestellt oder Lederdichtungen eingelegt; für gesättigte Dämpfe Dichtungen aus Jenkinsmasse (Abb. 93.15). Da die Dehnungszahl von Bronze größer als von Eisen ist, dürfen für warme Flüssigkeiten keine Bronzebüchsen in gußeiserne Gehäuse eingesetzt werden. Für überhitzten Dampf werden Nickeldichtungsringe in Stahlgußgehäusen verwendet (Abb. 93.16); die Ausdehnungszahlen für Nickel und Stahl sind ungefähr gleich groß. Besondere Schwierigkeit bietet die

Nickeldichtungsringe in Stahlgußgehäusen verwendet (Abb. 93.16); die Ausdehnungszahlen für Nickel und Stahl sind ungefähr gleich groß. Besondere Schwierigkeit bietet die

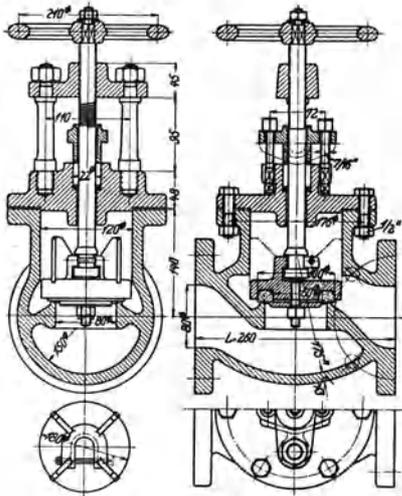


Abb. 93.15. Durchgangsventil mit Jenkins Dichtung. (Aus Rötischer.)

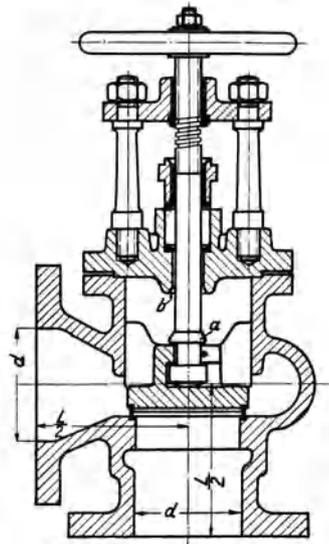


Abb. 93.16. Eckventil mit Nickel-dichtungsringen. (Aus Rötischer.)

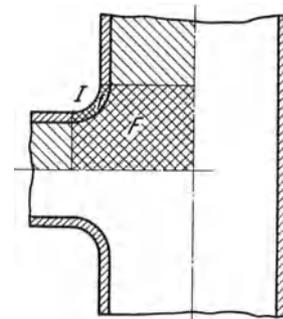


Abb. 93.17.

Festigkeitsberechnung von Ventilgehäusen, Abzweigungen und von anderen Formstücken. Zweifellos wird das Gehäuse beim Übergang zum Rohr geschwächt; eine Verstärkung durch Vergrößerung der Wandstärke ist dort aus gießereitechnischen Gründen meist unzweckmäßig. Prof. F. Rötischer¹ hat folgende Näherungsrechnung zur Abschätzung der in der Kehle auftretenden Spannungen vorgeschlagen. Die zylindrischen Teile der Wandung (Abb. 93.17) nehmen (nach der Kesselformel) die Drücke auf, die auf den einfach schraffierten Flächen wirken. Die Kehle I vom Querschnitt $f = \text{Wandstärke} \times \text{Bogenlänge}$ muß demnach die auf der doppelt schraffierten Fläche F wirkende Belastung aufnehmen, so daß die Spannung dann

$$\sigma_z = F \cdot p / f \text{ kg/cm}^2$$

wird. Je schärfer der Übergang, um so kleiner ist f und um so größer die Spannung. Diese Überschlagrechnung zeigt deutlich die große Gefahr bei scharfen Ecken. Kugelförmige Ventilkörper bieten beim Anschluß zylindrischer Stutzen günstige Übergangsformen.

Die Widerstandszahlen solcher Ventile sind sehr groß, $\xi = 2,6$ bis 9^2 . Schon kleine Änderungen in der Ausführungsform können großen Einfluß auf den Strömungswiderstand haben. Die Führungsrippen unter dem Ventilteller (Abb. 93.18) z. B. erhöhen, nach den Versuchen von A. J. ter Linden³, den Widerstand um 66%.

Die Bestrebungen, den Durchflußwiderstand der Ventile zu verkleinern, haben in den letzten Jahren zu anderen Gehäuseformen geführt, wodurch z. B. beim Koswa-Ventil (Abb. 93.19) relativ kleine Durchflußzahlen ($\xi = 1,7$ bis $2,7$ je nach Durchmesser) und beim Freiflußventil (Abb. 93.20) noch kleinere Werte erreicht worden sind. Dennoch sind Ventile für große Geschwindigkeiten und für schwere Flüssigkeiten (z. B. überhitzten Dampf von hohem Druck)

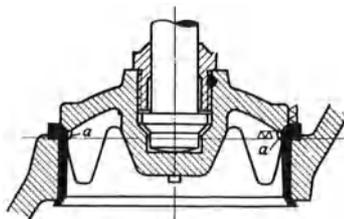


Abb. 93.18.

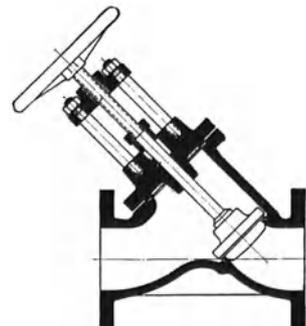


Abb. 93.19. Koswa-Ventil $\xi = 1,7$ bis $2,7$.

¹ Maschinenelemente Bd. I, S. 350.

² Vgl. die Versuche von Brabbée u. M. Hottinger. (Fußnote 1, S. 438).

³ Polytechnisches Weekblad 1927, S. 161.

ungeeignet. In solchen Fällen und überall dort, wo der Druckverlust möglichst klein gehalten werden muß, sind Absperrschieber zu verwenden (Abb. 93.21 ÷ 93.23), deren Widerstandszahlen je nach Ausführungsform und Durchmesser zwischen 0,2 und 0,4 liegen.

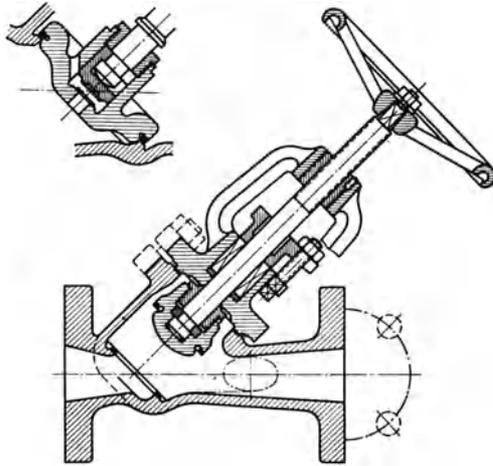


Abb. 93.20. Panzerfreiflußventil von Amag-Hilpert.

Bei den selbsttätigen Ventilen (Rückschlag-, Saug- oder Druckventilen) wird ein Teil der Strömungsenergie dazu benötigt, den Ventilteller offenzuhalten. Der Strömungswiderstand ist demnach größer, als wenn nur Richtungs- und Querschnittsänderungen in Frage kämen. Der Einfluß des Ventilgewichtes tritt besonders bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten stark in Erscheinung. Die hier auftretenden Strömungserscheinungen und die Durchflußwiderstände sind sehr verwickelt und von vielen Faktoren abhängig¹; sie können hier nicht näher behandelt werden.

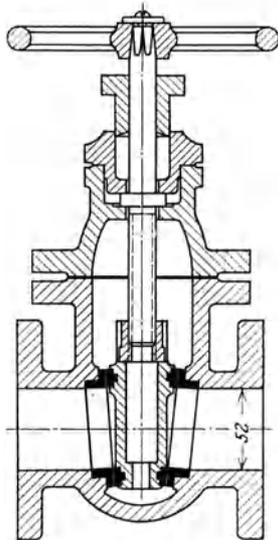


Abb. 93.21. Absperrschieber (von Roll, Clus).

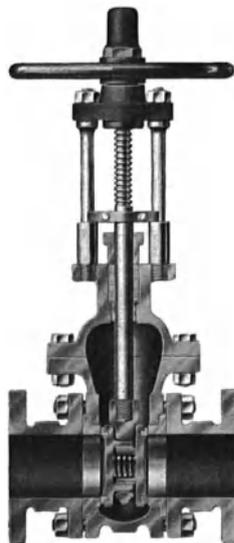


Abb. 93.22. Heißdampfabsperreschieber. (Masch.-Fabr. Dickers, Hengelo.)

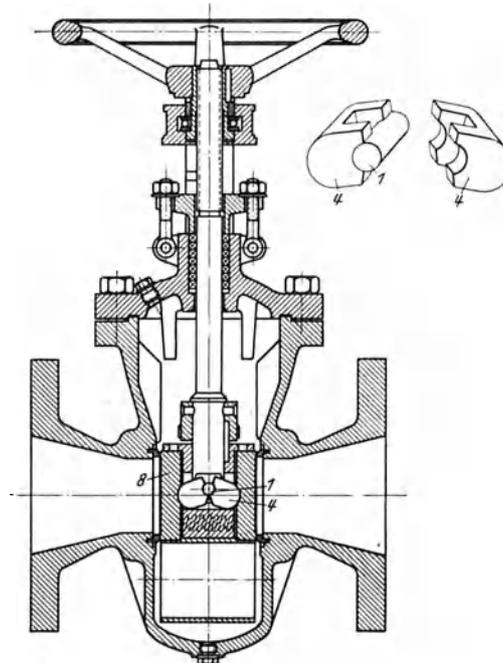


Abb. 93.23. Borsig-Schieber H. W.

94. Berechnung von Rohrleitungen.

Unter Berücksichtigung des Druckverlustes Δp , der zur Überwindung der Strömungswiderstände erforderlich ist, lautet die Energiegleichung (92.2)

$$z_1 \gamma + p_1 + \frac{w_1^2}{2g} \gamma = z_2 \gamma + p_2 + \frac{w_2^2}{2g} \gamma + \Delta p. \quad (94.1)$$

Setzt man $z_1 - z_2 = z$ und $p_1 - p_2 = p$, so ist:

$$z \gamma + p = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} \gamma + \Delta p. \quad (94.2)$$

Wird der Höhenunterschied z vernachlässigt und strömt die Flüssigkeit aus einem großen Behälter, so daß $w_1 = 0$ gesetzt werden kann, dann vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$p = \frac{w^2}{2g} \gamma + \Delta p. \quad (94.3)$$

¹Schrenk, E.: Versuche über Strömungsarten, Ventilwiderstand und Ventilbelastung. VDI-Forsch.-Heft Nr. 272 (1925).

Drückt man, wie im vorhergehenden Abschnitt erläutert, die Druckverluste durch die Geschwindigkeitshöhe aus, so ist

$$p = \left(1 + \zeta \frac{l}{d} + \sum \xi\right) \frac{w^2}{2g} \gamma = A \cdot \frac{w^2}{2g} \gamma. \quad (94.4)$$

Strömt die Flüssigkeit schon mit der Geschwindigkeit $w_1 = w_2 = w$ zu, so wird

$$p = \left(\zeta \frac{l}{d} + \sum \xi\right) \frac{w^2}{2g} \gamma = A_1 \frac{w^2}{2g} \gamma. \quad (94.5)$$

Zu den Einzelwiderständen ξ sind auch die Rohrverbindungen zu rechnen, die je nach der Sorgfalt der Ausführung und der Art der Verbindung wesentliche Druckverluste verursachen können. Nach den Versuchen von M. Hottinger¹ steigt z. B. für Gasrohrmuffen (GF 270) der Wert von ξ von 0,05 für Rohre größer als 1'' bis auf $\xi = 0,4$ bis 0,5 für $\frac{3}{8}$ ''-Gasrohr. Bei zusammengesetzten Rohren kommt der Einfluß nicht einwandfreier Schweißung um so mehr zur Geltung, je kleiner der Rohrdurchmesser ist, weil die Querschnittsverengungen durch Schweißtropfen dann verhältnismäßig größer sind. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei Flanschverbindungen mit vorstehenden Dichtungen oder bei nicht genau aufeinander passenden Rohren. Tadellose Schweißung oder Flanschverbindung erzeugen bei größeren Rohrdurchmessern keinen zusätzlichen Druckverlust. Für jede Rundschweißung eines $\frac{1}{2}$ ''-Gasrohres ist (nach den Versuchen von M. Hottinger) auch bei tadelloser Schweißung $\xi = 0,12$; bei nicht einwandfreien Schweißungen ist $\xi = 0,2$ bis 0,7. Eine gute Schweißverbindung wird durch Einlegen einer dünnen Hülse erreicht (Abb. 94.1) oder nach Abb. 91.14. Auch das Rauwerden der Rohrfläche durch Korrosion im Betrieb muß berücksichtigt werden. Dampfleitungen rosten im allgemeinen nicht; sie können aber durch Salz oder Schmutzablagerungen rauher werden. Für die Berechnung des Druckverlustes ist es deshalb zweckmäßig einen Zuschlag von bis zu 50% auf den theoretischen Werten zu machen um diese Faktoren zu berücksichtigen.

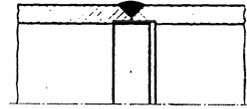


Abb. 94.1.
Gute Rohrverschweißung.

Wenn eine bestimmte Flüssigkeitsmenge G m³/s durch das Rohr gefördert werden soll, so folgt die Strömungsgeschwindigkeit w in m/s aus der Kontinuitätsgleichung.

$$G = \frac{\pi}{4} d^2 w \text{ m}^3/\text{s}. \quad (94.6)$$

Aus den beiden Gleichungen (4) und (6) läßt sich bei gegebenem Rohrdurchmesser der erforderliche Druck p oder bei gegebenem Druck der Rohrdurchmesser bestimmen.

Zahlenbeispiel 94.1. Es ist die Luftgeschwindigkeit einer Saugleitung zu berechnen (Länge = 80 m, 200 mm \varnothing mit zwei Bogen von 90° und $\rho = 5d$), wenn der Unterdruck am gut abgerundeten Saugstutzen des Ventilators 40 mm Wassersäule = 40 kg/m² beträgt, und der Drosselschieber ganz bzw. halb geöffnet ist.

Die Schwierigkeit bei solchen Aufgaben liegt darin, daß ζ zunächst nicht genau zu bestimmen ist. Man nimmt deshalb ζ erst schätzungsweise an und kontrolliert nachher, ob die Wahl richtig war. Für Rohre aus glattem Schwarzblech sei $\zeta = 0,016$ angenommen.

Für jeden Rohrkrümmer mit $\rho = 5d$ ist (nach Zahlentafel 93.2) $X = 1,2$; die äquivalente Länge des Rohrkrümmers

$$l_{ae} = X \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 5d = 1,9 \text{ m}.$$

Bei vollständig geöffnetem Drosselschieber und verlustfreiem Eintritt der Luft in die Saugleitung ist dann:

$$p = \left(1 + 0,016 \frac{84}{0,2}\right) \frac{w^2}{2g} \gamma = 8,0 \frac{w^2}{2g} \gamma = 40 \text{ kg/m}^2.$$

Daraus folgt, wenn für Luft $\sqrt{\frac{2g}{\gamma}} = 4$ gesetzt wird:

$$w = 4 \sqrt{\frac{40}{8}} = 9,0 \text{ m/s}.$$

Da die Luftgeschwindigkeit nun bekannt ist, kann der Wert von ζ nachgerechnet werden. Weil die kinematische Zähigkeit von Luft von 20° C gleich 0,15 cm²/s ist², so wird die Reynoldssche Zahl

$$Re = \frac{w \cdot d}{\nu} = \frac{900 \text{ cm/s} \cdot 20 \text{ cm}}{0,15 \text{ cm}^2/\text{s}} \approx 120000$$

¹ Gesundheitsingenieur 1928.

² ten Bosch: Die Wärmeübertragung, 3. Aufl., S. 257.

und nach Abb. (93.5) $\zeta = 0,017$. Mit diesem Wert wird bei geöffnetem Drosselschieber:

$$\Delta p = \left(1 + 0,017 \frac{84}{0,2}\right) \frac{w^2}{2g} \gamma = 40 \text{ kg/m}^2 = 8,66 \frac{w^2}{2g} \gamma$$

oder

$$w = 8,7 \text{ m/s}.$$

Bei halb geöffnetem Drosselschieber wird, mit $\xi = 3$ aus nachfolgender Zusammenstellung

Für Schieber	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	geschlossen
ist nach Weisbach	$\xi = 0$	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8	
und nach V. Blaess	$\xi = 0,05$	0,08	0,8	1,5	3,0	8,6	20	98	

$$p = \left(1 + 0,017 \frac{88}{0,2} + 3\right) \frac{w^2}{2g} \gamma = 11,66 \frac{w^2}{2g} \gamma = 40, \text{ und}$$

$$w = 7,5 \text{ m/s},$$

so daß noch $\frac{7,5}{8,5} \cdot 100 = \text{rd. } 85\%$ der Luftmenge bei vollgeöffnetem Schieber durchgeht.

Zahlenbeispiel 94.2. Durch eine Dampfleitung von 179 mm lichter Weite nach Abb. 94.2 strömen stündlich 49,7 t überhitzter Dampf von 29,85 ata und 353° C mit einem mittleren spezifischen Gewicht von 10,7 kg/m³. Wie groß ist der Druckverlust zwischen den Punkten 1 und 2, wenn

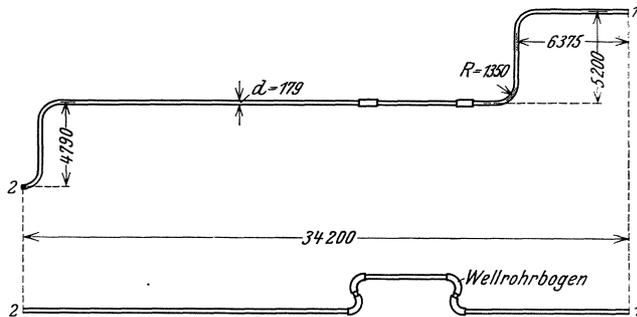


Abb. 94.2 zum Zahlenbeispiel 94.2.

die Widerstandszahl eines Wellrohrbogens $\xi = 3,1$ ist? Die äquivalente Länge eines Rohrkrümmers ist gleich der wirklichen Länge, da für $D/d = \frac{1350}{179} = 7,5$ (nach Zahlentafel 93.2) $X \approx 1$ ist. Die gestreckte Mittellinie des Rohres ist rd. 45,4 m.

Die Rohrverbindung nach Abb. 91.14 zeigt an den Verbindungsstellen eine glatte Fläche, so daß keine zusätzliche Widerstände dafür in Rechnung zu setzen sind. Weil die Dampfgeschwindigkeit in den Punkten 1 und 2 gleich groß ist, so ist der Druckverlust Δp :

$$\Delta p = \left(\zeta \frac{l_{ae}}{d} + \sum \xi\right) \frac{w^2}{2g} \gamma.$$

Die Dampfgeschwindigkeit folgt aus der Kontinuitätsgleichung zu:

$$w = \frac{49700}{10,7 \cdot 3600 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0,179^2} = 51,2 \text{ m/s}.$$

Da die kinematische Zähigkeit ν des Dampfes¹ bei dem angegebenen Druck und bei 350° C etwa $2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ist, so wird die Reynoldssche Zahl

$$Re = \frac{wd}{\nu} = \frac{51,2 \cdot 0,179}{2,5} \cdot 10^6 = 3,66 \cdot 10^6.$$

Für Stahlrohr NW 120 ist nach Abb. 93.5, $\zeta = 0,014$. Damit wird

$$\Delta p = \left(0,014 \frac{45,4}{0,179} + 2 \cdot 3,1\right) \frac{w^2}{2g} \gamma = (3,6 + 6,2) \frac{w^2}{2g} \gamma = 9,8 \frac{51,2^2}{19,6} \cdot 10,7 = 14000 \text{ kg/m}^2 = 1,4 \text{ at}.$$

Gemessen wurde² $\Delta p = 1,39 \text{ at}$. Aus der Rechnung erkennt man den großen Druckverlust der Ausgleichbogen aus Wellrohr. Kämen am Anfang und am Ende der Leitung noch je ein Normalabsperrentil mit $\xi = 4,5$ hinzu, so würde der Druckverlust verdoppelt, so daß Absperrschieber mit möglichst kleinem Durchgangswiderstand einzubauen sind.

94.1. Wirtschaftlicher Rohrdurchmesser.

Die Aufgabe, eine bestimmte Flüssigkeitsmenge durch eine Rohrleitung zu fördern, kann in verschiedener Weise gelöst werden. Man kann ein enges Rohr wählen, so daß der Druckunterschied zwischen Anfang und Ende der Leitung groß wird, oder man kann einen großen Durch-

¹ ten Bosch, Die Wärmeübertragung, 3. Aufl. S. 262.

² Polytechn. Weekblad Bd. 23 (1929), S. 779.

messer festlegen, um mit einem geringen Überdruck auszukommen. Im ersten Fall sind die Anlagekosten der Leitung niedrig, dagegen die Betriebskosten hoch, im zweiten Fall die Anlagekosten hoch bei kleinen Betriebskosten. Die wirtschaftlichste Lösung ist nun die, bei der die Gesamtjahreskosten am kleinsten werden.

Die Werkstoffkosten der Leitung sind proportional Rohrlänge \times Durchmesser \times Wandstärke s , oder da — nach der Kesselformel — für einen konstanten Druck s prop d ist, sind die Materialkosten proportional $l \times d^2$. Dazu kommen die Kosten der Armaturen, evtl. Isolierung, Verlegung usw. Wir wollen annehmen, daß die Gesamtkosten der verlegten Leitung mit $l \cdot d^{1,5}$ proportional sind, dann ist das Anlagekapital der Leitung

$$A = a \cdot d^{1,5} \cdot l_{ae}$$

worin a für einen bestimmten Werkstoff, einen bestimmten Druck und für eine bestimmte Art der Verlegung konstant ist. Nehmen wir $p\%$ für Verzinsung, Amortisation und Unterhalt an, so betragen die Besitzkosten der Leitung pro Jahr

$$a \cdot l_{ae} \cdot d^{1,5} \cdot p/100 \text{ Mark .}$$

Für die Förderung von G m³/s bei einem Druckunterschied von Δp kg/m² sind die jährlichen Betriebskosten bei z Stunden Betriebsdauer je Tag und 300 Arbeitstagen je Jahr

$$\frac{G \Delta p}{75 \eta} \cdot 300 z \cdot b \text{ Mark ,}$$

wenn b M für 1 PSh zu bezahlen sind. Nimmt man den Wirkungsgrad $\eta = 2/3$, so sind die jährlichen Betriebskosten

$$6 \cdot G \cdot \Delta p \cdot b \cdot z \text{ Mark/Jahr .}$$

Wird zur Erzeugung des Druckes eine besondere Pumpe oder Maschinenanlage notwendig, die C Mk. je PS kostet, dann sind dafür jährlich

$$\frac{G \cdot \Delta p}{75 \eta} \cdot C \cdot \frac{p'}{100} = \frac{G \Delta p C p'}{5000} \text{ Mark}$$

für Verzinsung, Amortisation und Unterhalt zu rechnen, was wir bei dieser Übersichtsrechnung nicht weiter berücksichtigen wollen.

$$\text{Da } \Delta p = \left(1 + \zeta \frac{l}{d} + \sum \xi\right) \frac{w^2}{2g} \gamma = \frac{l_{ae}}{d} \frac{w^2}{2g} \gamma \quad \text{und} \quad w = \frac{G}{\frac{\pi}{4} d^2} \text{ m/s}$$

$$\text{ist, so wird} \quad K = \frac{16 \zeta l_{ae} G^3 \gamma}{2 g \pi^2 d^5} 6 bz + \frac{a l_{ae} d^{1,5} p}{100} .$$

Die Jahreskosten K werden ein Minimum, wenn $\frac{\partial K}{\partial d} = 0$ ist,

$$\frac{\partial K}{\partial d} = -\frac{16 \zeta G^3 \gamma}{2 g \pi^2} \cdot \frac{5}{d^6} 6 bz + \frac{1,5 a p d^{0,5}}{100} = 0 , \quad (94.7)$$

woraus d zu berechnen ist. In dieser Gleichung ist a in RM/m-Länge und m-Durchmesser; p in %; γ in kg/m³; b in RM/PSh; z in Stunden, d in m einzusetzen.

Bei Dampfleitungen muß außerdem noch der Wärmeverlust berücksichtigt werden¹.

94.2. Die äquivalente Düse².

Die Flüssigkeitsmenge, die bei verlustfreier Strömung aus einem großen Gefäß durch eine gut abgerundete Düse mit dem Querschnitt F_d strömt, ist

$$G = F_d \sqrt{2 g \frac{p}{\gamma}} .$$

Durch ein Rohr mit dem Querschnitt F strömt bei gleichem Überdruck p nach Gl. (5) die Flüssigkeitsmenge:

$$G = F \cdot w = F \sqrt{\frac{1}{A} \cdot \frac{2 p g}{\gamma}} .$$

¹ Ausführlicher in R. Biel: Die wirtschaftlich günstigsten Rohrweiten, Oldenburg 1930.

² Der Begriff stammt von dem französischen Bergingenieur D. Murgue (1873) und ist von Dr.-Ing. V. Blaeß in seinem Buche: Die Strömungen in Rohren, Oldenburg 1911, in etwas geänderter Form übernommen worden.

Beide Flüssigkeitsmengen sind gleich groß, wenn

$$F_d = F/\sqrt{A} \tag{94.8}$$

ist. Das Rohr kann demnach vollständig durch eine „gleichwertige“ verlustfreie Düse mit dem Querschnitt F_d ersetzt werden.

Zahlenbeispiel 94.3. Wie groß ist die gleichwertige Düse für die Rohrleitung in dem Zahlenbeispiel 94.1, wenn der Drosselschieber geöffnet ist.

Aus der Gleichung $F_{ae} = \frac{F}{\sqrt{8}} = 0,38 F$ folgt, daß rd. 62% des Rohrquerschnittes durch Rohrreibung abgedrosselt werden.

94.3. Verzweigte Leitungen.

Ersetzt man nun jeden Strang einer verzweigten Leitung (Abb. 94.3a) durch eine gleichwertige Düse mit dem Querschnitt F_{a_1} bzw. F_{a_2} (Abb. 94.3 b), so folgt die durch jedes Rohr strömende Flüssigkeitsmenge sofort aus den Gleichungen:

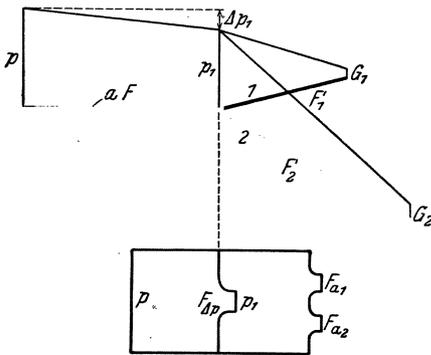


Abb. 94.3 a und b.

$$G_1 = F_{a_1} \sqrt{2g \frac{p_1}{\gamma}} \quad \text{und} \quad G_2 = F_{a_2} \sqrt{2g \frac{p_2}{\gamma}}$$

Wenn die gesamte Flüssigkeitsmenge $G = G_1 + G_2$ gegeben ist, so wird

$$G_1 = \frac{F_{a_1}}{F_d} G \quad \text{und} \quad G_2 = \frac{F_{a_2}}{F_d} G, \tag{94.9}$$

worin $F_d = F_{a_1} + F_{a_2}$ ist.

Hauptstrang a mit dem Querschnitt F kann auch durch eine gleichwertige Düse mit dem Querschnitt $F_{\Delta p}$ ersetzt werden (Abb. 94.3 b), so daß

$$F_{\Delta p} = \frac{F}{\sqrt{\zeta \frac{l}{d} + \Sigma \xi}}$$

ist. Nennt man F_{ae} die gleichwertige Düse der ganzen verzweigten Leitung, so ist

$$F_{ae} = \frac{G}{\sqrt{2g \frac{p}{\gamma}}} \quad \text{oder} \quad \frac{G^2}{F_{ae}^2} = 2g \frac{p}{\gamma}$$

Aus der Gleichung $p = \Delta p + p_1$ folgt mit

$$F_a = \frac{G}{\sqrt{2g \frac{p_1}{\gamma}}} \quad \text{oder} \quad \frac{G^2}{F_a^2} = 2g \frac{p_1}{\gamma}$$

und

$$F_{\Delta p} = \frac{G}{\sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma}}} \quad \text{oder} \quad \frac{G^2}{F_{\Delta p}^2} = 2g \frac{\Delta p}{\gamma}$$

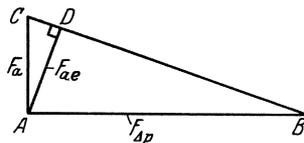


Abb. 94.4.

$$\frac{1}{F_{ae}^2} = \frac{1}{F_{\Delta p}^2} + \frac{1}{F_a^2} \quad || \tag{94.10}$$

Die Strecke F_{ae} kann aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC (Abb. 94.4) mit den Seiten F_a und $F_{\Delta p}$ als Höhe $AD = F_{ae}$ konstruiert werden. Der Beweis folgt aus den ähnlichen Dreiecken ACD und ABC

$$\frac{F_a}{F_{ae}} = \frac{\sqrt{F_a^2 + F_{\Delta p}^2}}{F_{\Delta p}} \quad \text{oder} \quad \frac{F_a^2}{F_{ae}^2} = \frac{F_a^2}{F_{\Delta p}^2} + 1$$

und nach Division durch F_a^2

$$\frac{1}{F_{ae}^2} = \frac{1}{F_{\Delta p}^2} + \frac{1}{F_a^2} \quad (\text{q. e. d.})$$

Nicht nur jedes Rohr, sondern auch irgendein Teil des Rohres kann durch eine Düse ersetzt werden, was z. B. überaus lehrreich ist, um die Wirkung eines Regelventiles zu untersuchen. Das Ventil wird durch eine Düse $F_{d_2} = F/\sqrt{\xi}$, das vorgeschaltete Rohrstück durch eine Düse F_{d_1} ersetzt. Die gleichwertige Düse des ganzen Rohres kann dann nach Gl. (10) berechnet oder kon-

struiert werden (Abb. 94.4) und ist nicht nur von der Ventilstellung, sondern auch von dem Widerstand der vorgeschalteten Rohrstrecke abhängig.

Wenn das Ventil
ist

$\frac{4}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	offen ist,
$\xi = 4$	16	36	100	

Die gleichwertigen Düsen verhalten sich dann, wie

$\xi = 2$	4	6	10
-----------	---	---	----

Für $F_1/F_2 = 1/10$ ist $F_d = 100\%$ 95% 92% 90% (Abb. 94.5);
die Regulierung versagt also vollständig, wie z. B. bei jeder Zentralheizung.

Für $F_1/F_2 = 1/1$ ist $F_d = 100\%$ 64% 43% 27% (Abb. 94.6),

so daß eine gute Regulierung möglich ist. Das Regulierventil muß also, um seinen Zweck zu erfüllen, auf die vorgeschaltete Leitung abgestimmt werden. Man schaltet vor dem Ventil einen Widerstand ein, so daß die gleichwertigen Düsen des geöffneten Ventils und der Leitung etwa gleich groß werden. (Abb. 94. 7/8).

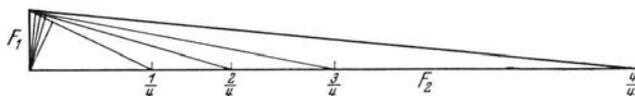


Abb. 94.5. Die Regulierung versagt, wenn die gleichwertige Düse der vorgeschalteten Leitung klein ist im Verhältnis zur gleichwertigen Düse des vollständig geöffneten Ventils.

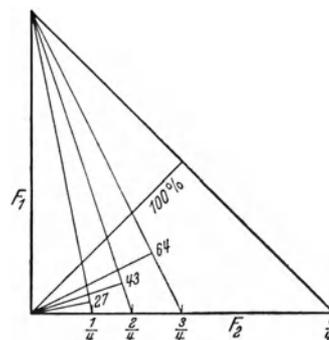


Abb. 94.6. Gute Regulierung, wenn Ventil auf Leitung abgestimmt ist.

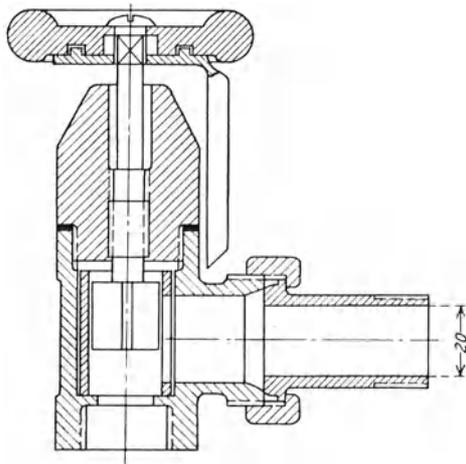


Abb. 94.7. Heizungs-Regulierhahn. Mit der Drehung des Handrades öffnet oder schließt eine geschlitzte Hülse (die federnd abdichtet) den Durchfluß. Der in der Höhe einstellbare Kolben drosselt die Durchflußöffnung.

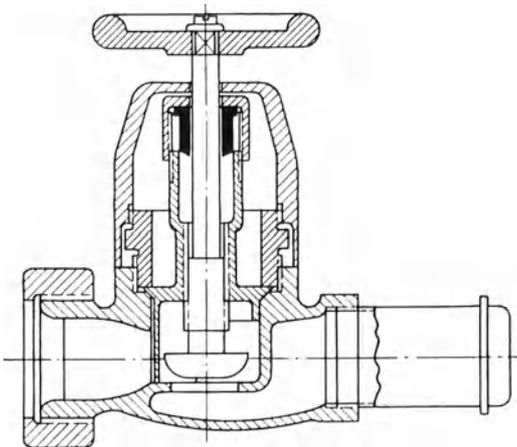


Abb. 94.8. Regulierventil für Heizungen. Die Durchflußöffnung wird durch Drehung einer Hülse gedrosselt.

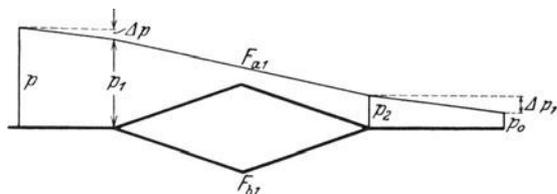


Abb. 94.9. Verzweigte Leitung.

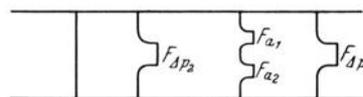


Abb. 94.10. Gleichwertige Düse einer verzweigten Leitung.

Jede noch so oft verzweigte Leitung setzt sich aus einer Reihe von solchen einfachen Abzweigungen zusammen, so daß hiermit die Aufgabe auch allgemein gelöst ist¹.

Werden die verzweigten Leitungen wieder zusammengeführt (Abb. 94.9), so erhält man durch die Einführung von gleichwertigen Düsen auch hier eine übersichtliche Lösung (Abb. 94.10).

Eine Voraussetzung der Rechnung war, daß an den Zweigstellen kein Druckverlust entsteht. Das ist der Fall, wenn die Geschwindigkeit der zu und abfließenden Ströme gleich groß sind, d. h. wenn die Querschnitte der Verzweigungen sich verhalten wie ihre zuge-

¹ Für Zahlenbeispiele siehe Blaeß, V.: Die Strömung in Rohren, Abschnitt 7.

hörigen gleichwertigen Düsen. Das kann bei Rohrleitungen aus Blech immer erreicht werden. Bei den genormten Rohren mit sprungweiser Änderung des Durchmessers ist das nicht erreichbar. Dann treten an den Zweigstellen zusätzliche Druckverluste auf, die durch plötzliche Geschwindigkeitsänderung und (bei \perp -Stücken) durch Richtungsänderungen verursacht werden; sie können nach den Angaben in Abschn. 93.6 schätzungsweise bestimmt werden¹. Bei Saugleitungen entsteht durch die Vereinigung der mit verschiedener Geschwindigkeit strömenden Flüssigkeiten eine Injektorwirkung, die den langsameren Strom beschleunigt. Daraus folgt, daß sich eine Rohrleitung — als Druck- oder Saugleitung verwendet — nicht genau gleich verhält.

Eine weitere Voraussetzung der Rechnung war die stationäre Strömung. Ist das nicht der Fall, wie z. B. bei Kolbenpumpen oder beim Öffnen und Schließen eines Ventils, so treten Schwingungen und Druckerhöhungen auf, die hier nicht näher untersucht werden sollen².

94.4. Betriebsbeanspruchungen.

Schrifttum.

Blech, K.: Betriebseignung von Dehnungsausgleichern. Arch. Wärmewirtsch. 18 (1937), S. 211/215. — Strien, H.: Betriebseignung von Dampfleitungs-Entwässerungen (Mitt. d. Rohrleitungsausschusses der A.D.K. Berlin). Arch. Wärmewirtsch. 19 (1938) S. 13/19. — Schwenk, E.: Rohrunterstützungen von Dampfleitungen (Mitt. d. Rohrleitungsausschusses der A.D.K. Berlin). Arch. Wärmewirtsch. 19 (1938) S. 183/86.

Es ist (auch nach den Normen) gebräuchlich bei der Festigkeitsrechnung der Rohrleitungen nur den inneren Druck zu berücksichtigen. Bei Dampfleitungen kommen zusätzliche Beanspruchungen infolge der Temperaturänderungen hinzu, die von Fall zu Fall leicht berechnet werden können. Als Beispiel wurde auf S. 65 ein Expansionsbogen berechnet, wobei noch der

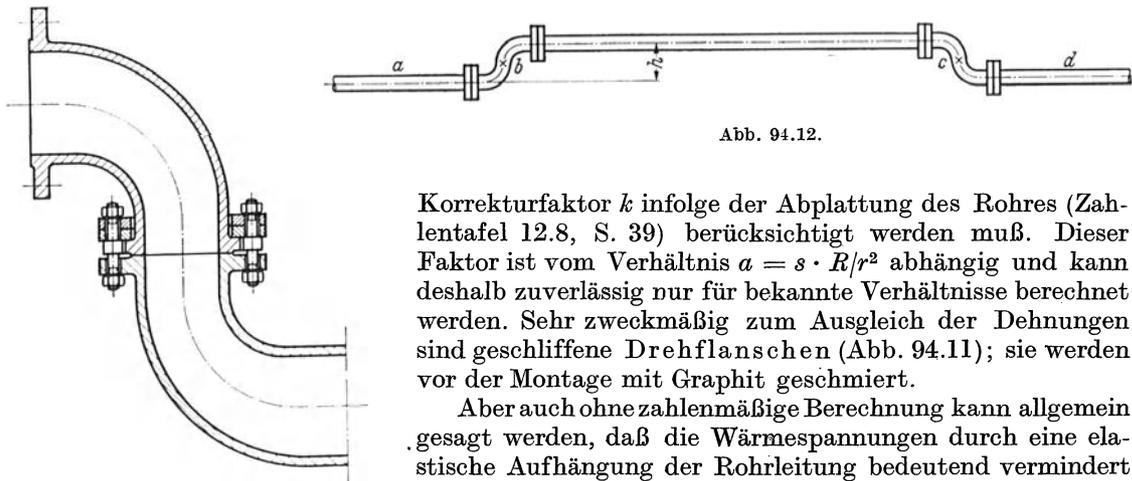


Abb. 94.12.

Korrekturfaktor k infolge der Abplattung des Rohres (Zahlentafel 12.8, S. 39) berücksichtigt werden muß. Dieser Faktor ist vom Verhältnis $a = s \cdot R/r^2$ abhängig und kann deshalb zuverlässig nur für bekannte Verhältnisse berechnet werden. Sehr zweckmäßig zum Ausgleich der Dehnungen sind geschliffene Drehflanschen (Abb. 94.11); sie werden vor der Montage mit Graphit geschmiert.

Abb. 94.11. Drehflansche (nach v. Iterson.)

Aber auch ohne zahlenmäßige Berechnung kann allgemein gesagt werden, daß die Wärmespannungen durch eine elastische Aufhängung der Rohrleitung bedeutend vermindert werden. Zwei Doppelbogen nach Abb. 94.12 reichen im allgemeinen aus, die Dehnungen ohne gefährliche Spannungserhöhung auszugleichen. In fast allen Fällen können die erforderlichen Bogen durch die immer vorhandenen Richtungsänderungen zwanglos untergebracht werden; besondere Expansionsbogen werden dadurch meist überflüssig.

Am gefährlichsten werden die Beanspruchungen bei der Inbetriebsetzung der Leitung. Selbstverständlich sind alle Dampfleitungen (auch Druckluftleitungen) mit einem kleinen Gefälle zu verlegen um das Kondenswasser abzuleiten; auch alle Wassersäcke sind zu vermeiden. Dennoch wird bei der Inbetriebsetzung das Absperrventil zunächst nur wenig geöffnet um die Leitung vorzuwärmen und die oft sehr harten Wasserschläge zu mildern. Das kalte Kondensat strömt dann unten, der heiße Dampf oben im Rohr. Dadurch entstehen bedeutende Temperaturunterschiede im Rohrquerschnitt. Das Rohr wird krumm und diese Verformungen sind bedeutend größer als bei der gleichmäßigen Erwärmung des Rohres. Insbesondere die Befestigungsschrauben die schon bis zur zulässigen Grenze vorgespannt sind (vgl. Abschn. 23.4) werden dadurch überbeansprucht und müssen recht kräftig und elastisch ausgeführt werden um ein Undichtwerden der Leitung zu vermeiden.

¹ Neue Untersuchungen von Vogel, G.: Mitt. d. hydraul. Inst. der Techn. Hochsch. München. H. 2, S. 60. Petermann, F.: Ebenda H. 3, S. 98.

² Allgemeine Theorie über die veränderliche Bewegung des Wassers in Leitungen. 1. Teil: Rohrleitungen von Lorenzo Allievi. Deutsche Ausgabe von R. Dubs und V. Batailliard. Berlin: Julius Springer 1909.

95. Dichtungen.

Die Aufgabe der Dichtungen ist es, den Austritt der Flüssigkeit durch irgendeine Trennfuge zu verhindern, oder (da eine vollkommene Abdichtung nicht immer erreichbar ist) die austretende Flüssigkeitsmenge möglichst klein zu halten.

Wenn die zu verbindenden Teile relativ in Ruhe sind, wie bei den Flanschverbindungen (Abschn. 91.1) oder bei der Ölablaßschraube, so erfolgt die Abdichtung durch besondere Zwischenlagen (Packungen), die je nach der Temperatur, dem Druck und der Art der Flüssigkeit verschieden gewählt werden. Die Packungen bestehen aus weichem Werkstoff, der beim gleichmäßigen Anziehen der Schrauben örtlich stark beansprucht und zum Teil auch bleibend verformt werden. Gute Dichtungen werden deshalb in einem allseitig geschlossenen Raum zusammengepreßt oder zwischen Nut und Feder (Abb. 95.1 und 2). Die vorstehenden Teile der einen Flansche bieten oft Schwierigkeiten beim Zusammenbau und beim Auseinandernehmen der Leitung; sie sind deshalb in den neuen Rohrnormen (Abschn. 91) nicht mehr aufgenommen. Die beste Dichtung, besonders für hohe Drücke und Temperaturen sind sauber geschliffene Flächen (Abb. 91.2 u. 91.6), die auch bei wiederholtem Lösen gut dichten (z. B. eingeschliffene Ventilsitze, Hähne).

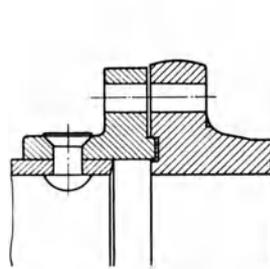


Abb. 95.1.

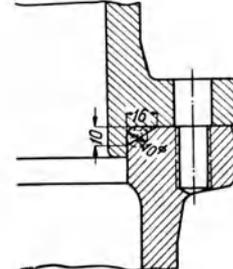


Abb. 95.2.

Rohrverbindungen mit eingeschlossenen Dichtmitteln.

95.1. Der glatte Spalt.

Viel schwieriger ist die Dichtung bei relativ bewegten Teilen (Wellen Spindeln), da die Bewegung nur möglich ist, wenn zwischen den Teilen Spiel vorhanden ist. Die Flüssigkeitsmenge, die durch einen Spalt verlorengeht, folgt bei Laminarströmung aus Gl. (42.27):

$$G = \frac{h^3}{12\eta} \cdot \frac{\Delta p}{l} \cdot \pi d_m \quad (92.29)$$

Sie kann bei einem endlichen Überdruck Δp nur dann gleich Null werden, wenn η oder l unendlich groß ist. Große Zähigkeit kann durch Einschalten einer sehr zähen Sperrflüssigkeit im Spalt (Fett) erreicht werden. Die Vergrößerung der Länge l ist aus konstruktiven Gründen begrenzt. Den größten Einfluß auf die Erzielung einer wirksamen Dichtung, hat die Kleinhaltung der Spalthöhe h , welche in Gl. (92.29) in der dritten Potenz vorkommt. Eine gute Dichtung muß demnach durch genaues Einpassen (Einschleifen) der bewegten Teile erreicht werden, wobei allerdings eine Nachstellung bei Abnutzung der Dichtflächen fehlt.

Für eine gute Dichtung muß der Ringspalt auch genau konzentrisch sein; beim exzentrischen Spalt ist der Flüssigkeitsverlust größer, nämlich

$$G_e = G \left(1 + \frac{3}{2} \frac{e^2}{h^2} \right) \quad (95.1)$$

worin e die Exzentrizität ist.

Der glatte, genau konzentrische Spalt ist die beste Dichtung, solange darin Laminarströmung vorhanden ist. Bei turbulenter Strömung kann der Druckverlust

$$\Delta p = \zeta \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} \gamma \quad (92.16)$$

mit dem ζ -Wert für glatte Rohre von Blasius:

$$\zeta = 0,3164/Re^{0,25} \quad (93.2)$$

berechnet werden. Nichtkreisförmige Rohre werden durch Einführung des äquivalenten Durchmessers

$$d_{ae} = 4 F/U \quad (92.17)$$

auf Kreisrohre zurückgeführt, so daß der Druckverlust dann

$$\Delta p = \zeta \frac{l}{d_{ae}} w^2 \frac{\rho}{2} \quad (95.2)$$

ist. Für den Ringspalt ist $d_{ae} = 2h$ (Gl. 92.32) und der Druckverlust:

$$\Delta p = \frac{0,3164 \nu^{0,25}}{(w \cdot 2h)^{0,25}} \cdot \frac{l}{2h} \cdot w^2 \frac{\rho}{2} = 0,067 \frac{w^{1,75}}{h^{1,25}} \nu^{0,25} l \cdot \rho \quad (95.3)$$

woraus

$$w = 4,6 h^{0,7} \left(\frac{\Delta p}{l \rho} \right)^{0,57} \nu^{-0,143}$$

und der Flüssigkeitsverlust G , für die Spaltbreite l :

$$G_1 = 9,2 h^{1,7} \left(\frac{\Delta p}{l \rho} \right)^{0,57} \nu^{-0,143} \quad (95.4)$$

ist proportional mit $h^{1,7}$, gegenüber h^3 bei Laminarströmung Gl. (92.29).

Beiden Stopfbüchsen wird die Packung in einem allseitig geschlossenen Raum zusammengedrückt (Abb. 93.15, 16, 21 bis 23). Die Preßfläche der Flansche (Brille) ist schwach konisch, damit die Packung nicht nur zusammengedrückt wird, sondern auch radial dichtet. Weichpackungen aus Baumwolle in Fett (evtl. mit Grafit) getränkt sind geeignet zum Abdichten von Wasser, Satttdampf, Luft und anderen Gasen bei mäßigen Drücken (4—7 at); das Fett dient zur Schmierung der Gleitfläche und zum Abdichten. Für hohe Drücke und Temperaturen verwendet man sorgfältig geschliffene, metallische Packungen aus Weißmetall oder Gußeisen. Bei den hohen Drehzahlen der Dampfturbinen auch Kohlerringe. Bei der Kompression von giftigen Gasen sind außerdem Sperrflüssigkeiten erforderlich.

95.2. Kolbendichtungen.

Metallische Dichtungsringe aus Gußeisen verwendet man auch bei den Kolben (Abb. 95.3); ihre Festigkeitsrechnung wurde in Zahlenbeispiel 12.2 erläutert.

Die Ringe müssen sehr genau in die Nuten passen, ohne zu klemmen. Sie werden deshalb nicht nach außen, sondern auch an den beiden Seiten geschliffen. Beim Spiel der Ringe in den Nuten würde eine Art Pumpbewegung entstehen, so daß das Schmieröl hinten um die Ringe laufen würde. Das ist namentlich bei Verbrennungskraftmaschinen schädlich, weil das Öl dort wegen Mangel an Verbrennungsluft an den Wandungen verkocht und so zu Störungen Anlaß gibt. Man sorgt deshalb unter dem untersten Kolbenring für Ölablauf (Abb. 95.4). Die Mitnahme des Öles durch die Kolbenringe ist nicht ganz zu vermeiden. Damit die Gleitflächen

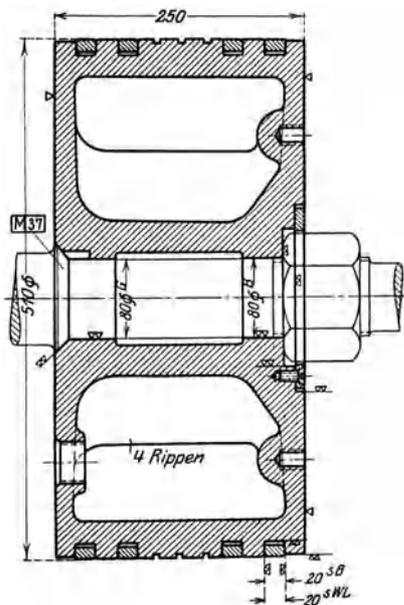


Abb. 95.3. Hochdruckkolben.

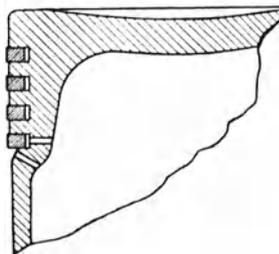


Abb. 95.4. Kolbenringe mit Ölablauf
(Aus Ricardo).

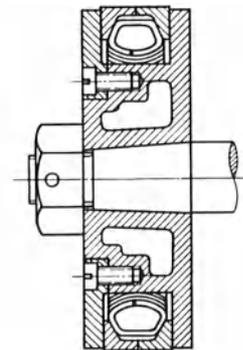


Abb. 95.5. Buckley-Dichtung
(Aus Rötischer).

genügend geschmiert werden, sind die Kanten leicht abzurunden (vgl. Abschn. 42.23). Dadurch wird aber immer eine bestimmte Ölmenge gefördert.

Bei großem Kolbendurchmesser bietet es oft Schwierigkeiten, dem Ring auf dem ganzen Umfang die nötige gleichmäßige Spannung zu geben. In solchen Fällen werden die Ringe durch besondere, hinter ihnen liegende Federn angepreßt (Abb. 95.5). Solche aus vielen Einzelteilen bestehende Ausführungen sind recht empfindlich und versagen vielfach.

Bei vertikal angeordneten und doppelwirkenden Maschinen wirken auf den Kolben nur vertikale Kräfte. Dieser Fall ist für das gleichmäßige Anliegen der Dichtungsringe am günstigsten. Bei horizontalen Maschinen übt das Kolbengewicht G und bei allen einfachwirkenden, wo die Kolben gleichzeitig als Kreuzkopf dient, auch der Normaldruck N eine Kraft senkrecht

zur Kolbenbewegung aus. Diese Kräfte können weder durch die schwachen Kolbenringe noch durch die Stopfbüchsen aufgenommen werden, so daß der Kolben selbst im Zylinder schleift. Die Breite des Kolbens kann ähnlich wie die Abmessungen ebener Gleitflächen bei Flüssigkeitsreibung berechnet werden. Meist wird die Flächenpressung p zwischen Kolben und Zylinder

$$p = \frac{N + G}{l \cdot D} < 1 \text{ at}$$

gewählt, worin l die wirklich tragende Kolbenbreite ist, in welche die Kolbenringe, die lediglich zur Abdichtung dienen sollten, nicht eingerechnet werden dürfen. Bei großen Maschinen (Großgasmaschinen, Niederdruckzylinder von Lokomotiven) wird der Kolben von der beidseitig geführten Stange getragen, um die Normalkräfte klein zu halten.

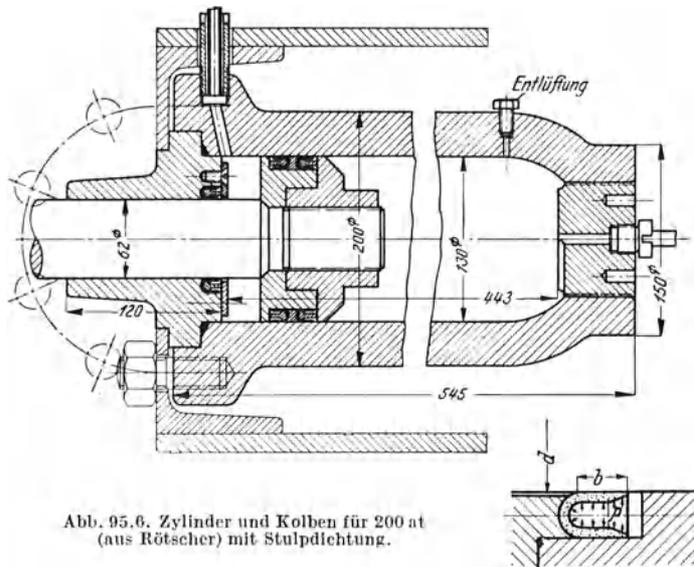


Abb. 95.6. Zylinder und Kolben für 200 at (aus Rötischer) mit Stulpdichtung.



Abb. 95.7. Stulppresse (aus Rötischer).

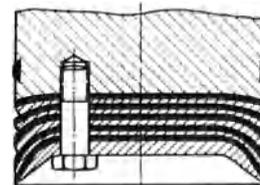


Abb. 95.8. Abdichtung eines Preßkolbens für 5000 at (aus Rötischer).

Ledermanschetten (Stulpdichtungen) werden für kalte Flüssigkeiten (bis etwa 40° C) und für die höchsten Drücke verwendet (Abb. 95.6 u. 8). Ein geschlossener, in warmem Wasser aufgeweichter Lederring wird U-förmig gepreßt (Abb. 95.7). Der gut eingefettete Ring legt sich beim Einbau leicht federnd an die Wandung. Beim Betrieb preßt die Flüssigkeit von der offenen Seite her das Leder an die Wand und dichtet selbsttätig ab. Eine an Huberpresen bei Drücken bis 5600 at bewährte Lederdichtung zeigt Abb. 95.8; sie besteht aus mehreren Lagen zugehärteten Leders, die durch Metallscheiben getrennt sind.

95.3. Labyrinth-Dichtungen

beruhen auf den Druckverlust bei einer plötzlichen Querschnittserweiterung:

$$\Delta p = (w_1 - w_2)^2 \rho / 2 \tag{93.22}$$

Sie bestehen aus wiederholten Erweiterungen des Spaltquerschnittes (Abb. 95.9) und sind besonders bei turbulenter Strömung wirksam, weil der Erweiterungsverlust durch Wirbelbildung verursacht wird. Der Druckverlust ist um so größer (die Dichtung um so besser), je größer $(w_1 - w_2)$ ist. Die Geschwindigkeit w_1 kann durch genaues Einschleifen vergrößert werden; die Geschwindigkeit w_2 wird durch die Kammerbreite B beeinflusst (vgl. Abb. 95.9). Die Breite B ist praktisch von größter Bedeutung, weil sie unmittelbar auf die Gesamtlänge der Dichtung einwirkt. Es scheint, daß der günstigste Wert von $B/s = 6$ ist. Die Kanten der Dichtungsscheiben sollen scharf sein; die Kammertiefe T hat weniger Einfluß auf den Dichtungsverlust.

Der Dichtungsverlust wird durch die Stangen-

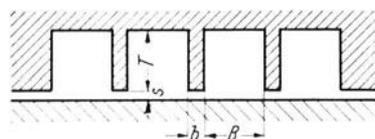


Abb. 95.9. Labyrinthdichtung.

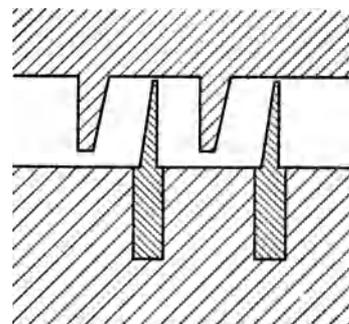


Abb. 95.10.

geschwindigkeit in der Längsrichtung der Dichtung (z. B. bei Kolbenmaschinen) nur wenig beeinflusst. Wird der Erweiterungsverlust noch mit einem Richtungswechsel verbunden (Abb. 95.10), so ist die Dichtung noch etwas besser.

Schrifttum.

Siebel, E., Hering, W. G. und A. Raible: Versuche über das Verhalten von Dichtungen. *Forschung* 5 (1934), S. 298/305. — Diegmann, H.: Flachdichtungen gegen Wasser, Gase, Luft, Öl und Benzin. *Arch. f. Wärmewirtsch.* (1934), S. 210. — Diegmann, H.: Versuche über das Verhalten verschiedener Dichtungsmitteln unter Flüssigkeitsdruck. *Werkstattstechn.* 31 (1937), S. 133/36. — Becker, E.: Strömungsvorgänge in ringförmigen Spalten und ihre Beziehungen zum Poiseuillischen Gesetz. *VDI-Forschungsheft* Nr. 46 (1907). — Salzmann, F. und P. Fravi: Über Leckverluste an Ventilspindeln. *Escher Wyss. Mitteilungen.* Zürich 10 (1937) Nr. 3.

Gronau, H.: Untersuchung von Stopfbüchsen-Packungen und Manschettendichtungen für hohen hydraulischen Druck. *Versuchsfeld für Maschinenelemente der T. H. Berlin* Heft 11 (1935), Verlag Oldenburg. — Krisam, F.: Stopfbüchsen für Kreiselpumpen mit hohen Drücken und Temperaturen. *Z. VDI* 82 (1938), S. 1382/83. — Eweiß, M.: Reibungs- und Undichtigkeitsverluste an Kolbenringen. *Diss. T. H. Zürich*, 1935. — Williams, C. G. und H. A. Young: Piston-ring blow-by on high speed petrol-engines. *Engg.* 147 (1939), S. 693/94. — Castleman, R. A.: A hydrodynamical theory of piston ring lubrication. *Physics* 7 (1936), S. 364/67. — Illmer, L.: Piston-ring friction in high-speed engines. *Trans. A. S. M. E.* 59 (1937), S. 1/6. — Bouman, C. A.: Lubrication of piston rings. *Gen. Discuss. Lubrication and Lubricants*, Okt. 1937 Gruppe 2 S. 29/34. *Proc. Inst. Mech. Eng.* London. — Young, H. J.: Wear of cylinders and piston rings. *Gen. Discussion Lubrication and Lubricants* Oct. 1937, Group 2 S. 209/16. *Proc. Inst. Mech. Eng.* London.

Just, K.: Labyrinthdichtungen für Wasser. *Diss. T. H. Berlin* 1910. — Gercke, M. J.: Labyrinthdichtungen. *Die Wärme* 57 (1934) S. 513/17. (Berechnung der Ausflußmenge unter Entspannung). — Keller, C.: Strömungsversuche Labyrinthdichtungen für Dampfturbinen. *Escher Wyss Mitt.* 7 (1934) S. 9. — Egli, A.: The leakage of steam through labyrinth seals. *Trans. A. S. M. E.* 57 (1935) S. 115/122 (Paper FSP 57.5 und 57 (1935) S. 445/46 (Discussion)). — The leakage of gases through narrow channels. *Journ. appl. Mech.* 4 (1937) S. A. 63/67. (Berechnung der Ausflußmenge unter Entspannung). — Trutnovsky, K.: Labyrinth spalte und ihre Anwendung im Kolbenmaschinenbau. *Forschung* 8 (1937), S. 131/143. (Versuche mit Druckluft.) — Trutnovsky, K.: Spaltdichtungen. *Z. VDI* 83/1939) S. 857/58.

Druckfehlerberichtigung.

Seite 321. Erste Zeile unterhalb Abb. 63.22: Lies **Seilsteifigkeit** statt **Seilfestigkeit**.

„ 401. In Abb. 82.2 sind die Bilder zum 1. und 3. Hub, sowie die Bilder zum 2. und 4. Hub zu vertauschen.