



Г. П. Черепанов

Л. В. Ершов

**МЕХАНИКА
РАЗРУШЕНИЯ**

Г. П. ЧЕРЕПАНОВ, Л. В. ЕРШОВ

МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ



МОСКВА
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
1977

Рецензент Л. А. ГАЛИН

Черепанов Г. П., Ершов Л. В.

Ч46 Механика разрушения., «Машиностроение», 1977

224 с. с ил.

В книге рассмотрены конкретные конструкции (стержневые системы, безмоментные оболочки вращения, безопорные мосты, трубопроводы и др.) и вопросы механики их разрушения. Изложен один из наиболее общих методов математической физики — метод внешних и внутренних разложений. Дана теория наиболее часто встречающегося типа трещин технологического происхождения так называемых «горячих трещин». Рассмотрена динамическая прочность толстостенных цилиндрических оболочек при статических, динамических и случайных нагрузках. Дано точное решение одной пространственной задачи теории упругости.

Книга предназначена для инженерно-технических работников проектно-конструкторских организаций.

Ч $\frac{31301-014}{038(01)-77}$ 14-77

605

ИБ № 1271

Геннадий Петрович Черепанов, Леонид Викторович Ершов

МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ

Редактор издательства *Н. А. Иванова* Технический редактор *Н. В. Тимофеевко*
Переплет художника *В. Б. Исаева* Корректор *В. А. Воробьева*

Сдано в набор 13/1 1977 г. Подписано в печать 20/IV 1977 г. Т-09203
Формат 60×90 $\frac{1}{16}$ Бумага тип. № 1 Усл. печ. л. 14,0 Уч.-изд. л. 14,65
Тираж 10 000 экз. Заказ 1499 Цена 96 коп.

Издательство «Машиностроение», 107885, Москва, Б-78, 1-й Басманный пер., 3

Ленинградская типография № 6 Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли

193144, Ленинград, С-144, ул. Моисеенко, 10

Ч $\frac{31301-014}{038(01)-77}$ 14-77

© Издательство «Машиностроение», 1977 г.

Механика разрушения в настоящее время становится всеобъемлющей наукой о твердом теле, вбирающей в себя подобно полноводной реке многочисленные и разрозненные частные дисциплины о твердом теле: теорию упругости, теорию пластичности, теорию ползучести и вязкоупругости, сопротивление материалов и др. Конечной целью механики разрушения является оптимальное проектирование конструкций.

Эта книга представляет собой исследование авторов по механике разрушения, охватывающее довольно широкий круг актуальных проблем, представляющих непосредственный практический интерес, прежде всего для машиностроения. Однако ряд результатов может быть использован и в других областях, например в строительном и горном деле и в металлургии.

В книге применен комплексный подход к проблеме разрушения: в зависимости от конечной цели исследования используются как классические представления о бездефектном материале, так и современные представления о разрушении как о процессе развития внутренних дефектов материала. Для решения ряда вопросов прочности и проектирования можно вполне обойтись без более точных, но зато и гораздо более сложных, структурных теорий, учитывающих развитие трещин и дефектов в материале.

Математический аппарат, используемый в данной книге, весьма разнообразен. Он включает в себя методы решения различных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и для уравнений в частных производных (как линейных, так и нелинейных, а в ряде случаев с неизвестной заранее границей), методы нелинейного дискретного программирования, асимптотические методы, методы теории функций комплексного переменного.

В рамках классических теорий прочности рассмотрены вопросы оптимального проектирования конструкций. Подход основан на общем принципе равнопрочности, введенном ранее одним из авторов. Рассмотрены некоторые конкретные примеры конструкций: стержневые системы, безмоментные оболочки вращения, безопорные мосты, трубопроводы, навитые из волокон сосуда давления и др. Для решения обратной задачи теории упругости

применен принцип равнопрочности: определена форма отверстий и выточек из условия, что концентрация напряжений минимальна. Рассмотрены различные конкретные задачи. Показана тесная связь равнопрочных конструкций с конструкциями минимального веса.

Рассмотрены аварийный и безаварийный режимы работы многослойных клееных оболочек (первый из них представляет особый интерес в вопросах живучести пораженных конструкций).

Общий метод математической физики — метод внешних и внутренних разложений применен для вывода общих уравнений деформирования дискретно-армированного континуума. Из этого метода естественно вытекает основное представление механики хрупкого разрушения о коэффициенте интенсивности напряжений как о параметре, контролирующем локальное разрушение в устье трещины.

В книге изложена теория одного наиболее часто встречающегося типа трещин технологического происхождения, так называемых «горячих» трещин. Дефекты такого рода имеют первостепенное значение в сварочном и металлургическом производствах. Дан простой общий метод точного решения автоматических динамических задач теории упругости. В качестве примеров рассмотрены некоторые контактные задачи и задачи о трещинах. Рассмотрена динамическая прочность толстостенных цилиндрических оболочек при статических, динамических и случайных нагрузках. Приведено точное решение пространственной задачи теории упругости для внешности эллипсоидального отверстия, находящегося в тяжелом полупространстве. Для наиболее интересных частных случаев получены общие условия устойчивости выработок. Предлагается теория горного удара, а на ее основе — некоторые меры, которые могут служить для управления этим явлением.

Содержание гл. I представляет собой цикл лекций, подготовленных для школы — симпозиума по механике разрушения (Польша, 1974 г).

Глава I

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ*

§ 1. ПРИНЦИП РАВНОПРОЧНОСТИ

Оптимальное проектирование конструкций является обратной задачей механики твердого тела, и в этом ее основная сложность. Рассмотрим общий подход к оптимальному проектированию конструкций, позволяющий в простейших случаях свести проектирование к строго поставленным математическим задачам, а в более сложных случаях — помогающий искусству конструктора. Целевое назначение конструкции и внешние условия ее эксплуатации составляют основу технического задания для проектирования. На основе технического задания инженер, опираясь на опыт, создает начальный проект конструкции с неопределенными свободными параметрами, оптимальные значения которых определяются детальными расчетами. В результате, если конструкция не удовлетворяет всем условиям технического задания, необходимо изменить начальный проект.

Работоспособность конструкции зависит от следующих основных факторов, тесно связанных между собой: геометрии конструкции, материала, максимального уровня внешних нагрузок, характера внешней нагрузки (длительности, числа циклов и т. п.), температуры внешней среды, агрессивности среды, интенсивности электромагнитного излучения.

Пусть свободные параметры x_1, x_2, \dots, x_n описывают эти факторы для начального проекта конструкции. Прямая задача расчета заключается в следующем: в пространстве параметров (x_1, x_2, \dots, x_n) требуется найти область безопасной работы конструкции. Если такая область существует, то надо найти оптимальный проект, т. е. определить такие геометрические параметры и материалы, для которых выполнялось бы определенное условие мини-макса (например, условие минимальной массы или минимальной стоимости конструкции). Прямой и очевидный метод решения задачи оптимального конструирования заключается в решении бесконечно большого (или весьма большого) числа прямых задач для различных комбинаций геометрических параметров (и материалов) и в последующем сравнении полученных решений по требуемому мини-максу с целью выделения един-

* Эта глава написана совместно с А. Г. Таги-заде.

ственного решения. Задача конструктора заключается в том, чтобы разумно сузить круг конкурирующих проектов, подвергаемых точному расчету и испытаниям.

В рамках примерно заданных геометрических параметров конструкции полезен эвристический принцип равнопрочности, сразу приводящий к некоторой прямой математической проблеме относительно оставшихся неопределенными геометрических параметров искомого решения (например, толщины оболочки).

Примем следующие допущения.

1. Конструкция сделана из достаточно надежного материала, т. е. не содержит опасных трещиноподобных дефектов металлургического или технологического происхождения, не обнаруженных методами неразрушающего контроля.

2. Конструкция работает в условиях, исключающих опасное развитие в ней эксплуатационных трещин за требуемый промежуток времени (к эксплуатационным относятся усталостные, коррозионные, водорододиффузионные и другие трещины).

Эти допущения позволяют считать конструкцию «бездефектной» и для определения условия локального разрушения пользоваться феноменологическими теориями, в которых отсутствуют параметры, характеризующие структурные несовершенства материала (размер трещины, величину зерен или пор и т. д.). Все феноменологические теории (в сопротивлении материалов их называют теориями прочности) имеют характер функциональной зависимости между критическими значениями напряжений σ_{ij} , деформаций ε_{ij} , температуры T и времени t , полностью описывающими состояние элементарного объема. Иначе говоря, существует зависимость

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, T, t) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

такая, что при $f < 0$ локального разрушения не происходит, при $f = 0$ происходит разрушение рассматриваемого элементарного объема, а состояние $f > 0$ — невозможно.

Зависимость (1) определяется опытным путем на гладких образцах; размер образца, состояние материала, вид нагружения и внешние условия должны имитировать соответствующие условия для рассматриваемого элемента конструкции. Перечислим основные теории прочности.

Теория Галилея. Разрушение не происходит, если

$$\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < \sigma_b, \quad (2)$$

здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения; σ_b — временное сопротивление. Эта теория, как и теория Понселе, применима в основном в тех случаях, когда разрушение происходит от растяжения.

Теория Понселе. Разрушение не происходит, если

$$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) < \varepsilon_b, \quad (3)$$

здесь $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ — главные деформации, ϵ_B — предельно допустимая деформация.

Теория Кулона. Разрушение не происходит, если

$$\max (\tau_n - |\sigma_n| \operatorname{tg} \rho) < k, \quad (4)$$

здесь τ_n и σ_n — касательное и нормальное усилия на площадке с вектором нормали \vec{n} , максимум ищется среди всех возможных ориентаций вектора \vec{n} в данной точке; k — коэффициент сцепления; ρ — угол внутреннего трения.

При $\rho = 0$, что можно принять, например, для металлов, из неравенства (4) получается следующее:

$$\max (|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|) < 2k. \quad (5)$$

Теория Кулона применима в основном в тех случаях, когда разрушение происходит от сдвига.

Теория Мора. Разрушение не происходит, если

$$\max [\tau_n - f(\sigma_n)] < 0, \quad (6)$$

где функция $f(\sigma_n)$ определяется экспериментально.

В рамках этих теорий длительность и степень нестационарности нагружения, температуру, внешнюю среду и другие факторы можно учесть, считая, что постоянные материала $\sigma_B, \tau_B, k, \rho$ и др. зависят также от длительности действия нагрузок, от числа циклов, от температуры, от внешней среды и т. п., причем эту зависимость определяют экспериментально.

Например, согласно экспериментальным данным для одноосного растяжения постоянной нагрузкой величина σ_B для металлов, полимеров и горных пород зависит от абсолютной температуры T и длительности действия нагрузки t :

$$\sigma_B = \frac{U}{\gamma} - \frac{RT}{\gamma} \ln \frac{t}{\tau_0} \quad (t > \tau_0), \quad (7)$$

где U — энергия активации; γ — структурная постоянная; R — газовая постоянная; τ_0 — время пробега упругой волны на межатомное расстояние ($\tau_0 \sim 10^{-12}$ с). Согласно условию (7) разрушение происходит при любой сколь угодно малой нагрузке.

Существенным недостатком теорий прочности является то, что в случае сложного напряженного состояния локальное разрушение (т. е. нарушение условий вида (1)–(6)) часто не приводит к разрушению всей конструкции. Фактически в опасной точке появляется либо пластическая зона, либо образуется трещина, которые развиваются с увеличением нагрузок. Поэтому расчеты на прочность дают неудовлетворительные результаты для надрезов, выточек и других концентраторов напряжений.

3. Допускаем, что локальное разрушение приводит к разрушению или потере работоспособности конструкции в целом. Тем самым пренебрегаем устойчивым развитием пластических зон и

трещин от момента их возникновения до потери несущей способности всей конструкции; это допущение идет в запас прочности.

Конструкцию, удовлетворяющую допущениям (пп. 1, 2, 3), будем называть равнопрочной, если она спроектирована так, что разрушение [т. е., нарушение условий (1)—(6)] начинается в ней одновременно во всех точках конструкции (или же, если последнее невозможно, в максимально большой части конструкции). В такой конструкции весь материал «работает» равномерно и для заданного материала условие равнопрочности является также условием минимальной массы конструкции. Иначе говоря, конструкции минимальной массы суть равнопрочные конструкции*. Указанное требование, предъявляемое к конструкции при ее проектировании, будем называть принципом равнопрочности. Этот принцип сводится к принципу равнонапряженности лишь в простейших случаях; последний применяли для расчета формы сосудов давления, навитых из волокон, арок, дисков и др. Заметим, что минимум-макс, получаемый на основании принципа равнопрочности, будет условным или локальным в зависимости от исходных геометрических параметров конструкции. Поэтому необходимо стремиться к использованию этого принципа в проектировании на наиболее ранней стадии и в наиболее общих геометрических формах.

§ 2. ПРОСТЕЙШИЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

Оптимальное проектирование большинства статически определимых систем удастся выполнить достаточно просто на основе принципа равнопрочности, если известно решение прямой задачи. Рассмотрим вначале некоторые простейшие стержневые системы.

1. Тяжелый стержень. Пусть стержень длины l (рис. 1) находится под действием силы тяжести собственного веса и силы P , приложенной к его концу при $z = l$ (другой конец при $z = 0$ закреплен). Ускорение свободного падения и сила P направлены вдоль оси стержня. Требуется определить площадь поперечного сечения $S(z)$ равнопрочного стержня.

Имеем уравнение равновесия

$$\frac{dN}{dz} = -\rho g S \quad (8)$$

и условие равнопрочности

$$N = \sigma_b S, \quad (9)$$

где ρg — удельный вес; N — усилие. Решая эту систему уравнений с условием $N = P$ при $z = l$, получаем

$$S = \frac{P}{\sigma_b} e^{\lambda(l-z)}; \quad \lambda = \frac{\rho g}{\sigma_b}. \quad (10)$$

* Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Итак, площадь поперечного сечения равнопрочного стержня убывает экспоненциально с ростом z .

Применим полученное решение для проектирования троса минимального веса в связи с проблемой исследования океанских глубин при помощи батискафа. Пусть вес батискафа вместе с экипажем равен $P = 98 \cdot 10^3 \text{ Н}$. Оцинкованная сталь, используемая в тросах, имеет временное сопротивление около $196 \cdot 10^{-5} \text{ Н/м}^2$. С учетом коэффициента запаса, который для тросов обычно принимают равным 4, величина σ_B в формуле (10) будет равна $49 \times 10^{-5} \text{ Н/м}^2$. Для троса $\sigma_B = 98 \cdot 10^{-7} \text{ Н/м}^3$ (с запасом). Архимедовой силой пренебрегаем, что также идет в запас прочности (примерно 10%). Глубину океана примем равно 10 000 м (примерная глубина Марианской впадины, самой глубокой в мире). Отсюда, согласно формуле (10) площадь поперечного сечения равнопрочного троса, удерживающего батискаф,

$$S = S_{\max} e^{-\lambda z}, \quad \lambda = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1},$$

$$S_{\max} = 1478 \text{ мм}^2, \quad S_{\min} = 200 \text{ мм}^2, \quad (11)$$

здесь S_{\max} и S_{\min} — наибольшая и наименьшая величины площади поперечного сечения троса соответственно на поверхности океана и около батискафа. Технология производства такого троса легко осуществима практически. Заметим, что применение обычного троса постоянного сечения при указанных выше данных позволяет опускать батискаф лишь на глубину до 5000 м.

2. Вращающийся стержень. Пусть теперь тот же стержень длиной l вращается с угловой скоростью ω вокруг оси $z = 0$. На конце стержня имеется сосредоточенная масса M , силой тяжести пренебрегаем. Поперечное сечение S равнопрочного стержня в данной задаче определяем из следующих уравнений:

$$\frac{dN}{dz} = -\rho \omega^2 z S, \quad N = \sigma_B S \quad (12)$$

при $z = l$ $N = M \omega^2 l$.

Отсюда находим

$$S = \frac{M \omega^2 l}{\sigma_B} e^{\lambda(l^2 - z^2)}, \quad \text{где } \lambda = \frac{\rho \omega^2}{2 \sigma_B}. \quad (13)$$

Формула (13) позволяет рассчитать, например, площадь поперечного сечения равнопрочных лопаток в турбинах.

3. Примеры стержневых систем. В шарнирных безмоментных стержневых системах (рис. 2) усилия в соответствующих стержнях будут следующими:

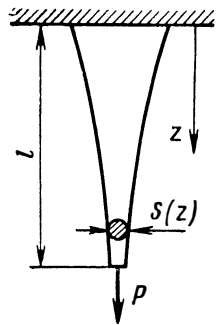


Рис. 1. Тяжелый равнопрочный стержень с грузом

для статически-определимой системы (рис. 2, а)

$$N_1 = P \cos \varphi (1 + \operatorname{ctg} \psi), \quad N_2 = -P \frac{\cos \varphi}{\sin \psi}; \quad (14)$$

для статически-неопределимой симметричной системы (рис. 2, б) материал предполагается упругим до разрушения,

$$N_1 = \frac{PE_1 S_1 l_2}{2E_2 S_2 l_1 + E_1 S_1 l_2}, \quad N_2 = \frac{PE_2 S_2 l_1}{\cos \varphi (2E_2 S_2 l_1 + E_1 S_1 l_2)}. \quad (15)$$

Здесь S , l_1 и E — площадь поперечного сечения, длина и модуль Юнга (индекс 1, 2 отвечает номеру стержня).

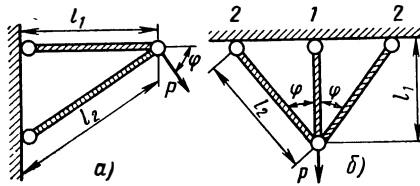


Рис. 2. Равнопрочные стержневые системы:

а — кронштейн с грузом; б — ферменная статически-неопределимая система

В последнем случае напряжения во всех стержнях будут растягивающими, так что равнопрочность системы достигается при выполнении следующего условия:

$$E_2 l_1 = E_1 l_2 \cos \varphi. \quad (16)$$

Для упругопластического материала условие (16) при $\sigma_B = \sigma_s$ будет условием одновременного перехода в пластическое состояние стержней 1 и 2. В случае, изображенном на рис. 2, а, потеря работоспособности стержня 2 может произойти или вследствие потери устойчивости (для достаточно тонкого стержня) или же вследствие разрушения материала от сжимающего напряжения. Принимая критическую силу равной эйлеровой силе, запишем

$$N_{2*} = \frac{\pi^2 EI}{l_2^2}, \quad (17)$$

отсюда при помощи принципа равнопрочности находим следующие параметры (рис. см. 2, а):

$$S_1 = \frac{P}{\sigma_B} \cos \varphi (1 + \operatorname{ctg} \psi); \quad (18)$$

$$S_2 = \frac{P \cos \varphi}{\sigma_{сж} \sin \psi}, \quad \text{если } \sigma_{сж} S_2 < \frac{\pi^2 EI}{l_2^2},$$

$$EI = \frac{Pl_2^2 \cos \varphi}{\pi^2 \sin \psi}, \quad \text{если } \frac{\pi^2 EI}{l_2^2} < \sigma_{сж} S_2.$$

Здесь $\sigma_{сж}$ — прочность стержня 2 на одноосное сжатие; EI — изгибная жесткость стержня 2. Величины S_2 и I зависят от формы поперечного сечения стержня.

4. Осевое сжатие, кручение и изгиб стержня. На основе принципа равнопрочности можно определить форму поперечного

сечения стержня, для которой критическая сила потери устойчивости будет максимальной для заданной площади поперечного сечения S , длины стержня l и массы материала m . Это будет тонкостенный полый круговой цилиндр, для которого величины S , m и момент инерции I

$$S = \pi r^2, \quad m = 2\pi r h l, \quad I = \pi r^2 h, \quad (19)$$

где r и h — радиус и толщина стенки полого цилиндра; ρ — плотность. Действительно, искомое сечение должно быть эссимметричным, т. е. иметь форму кольца; иначе потеря устойчивости будет происходить всегда в плоскости наименьшей жесткости стержня, и часть стержня вблизи нейтральной плоскости заведомо не будет «работать». Для заданной площади сечения наибольший момент инерции и, следовательно, изгибную жесткость имеет тонкое кольцо, охватывающее заданную площадь. Отсюда согласно формуле (17) получаем требуемый результат.

Тонкостенные полые круговые цилиндры, как легко доказать из аналогичных соображений, имеют также наибольшую крутильную жесткость, т. е. сопротивляемость кручению, по сравнению со стержнями той же длины, но любой другой формы (сделанных из той же массы того же материала). Приведем соответствующие значения крутильной жесткости k_t и изгибной жесткости EI для прямолинейных стержней оптимальной формы:

$$k_t = \frac{\mu m}{\rho l}, \quad EI = \frac{mES}{2\pi \rho l}. \quad (20)$$

Здесь μ — модуль сдвига.

Напомним физический смысл k_t и EI :

$$M = k_t \varphi, \quad M = EI \kappa, \quad (21)$$

здесь M — величина крутящего или изгибающего момента; φ и κ — угол кручения и кривизна стержня, полностью характеризующие деформацию стержня.

Тонкостенные круглые трубы обладают еще одним оптимальным геометрическим свойством: конструктивная эффективность тонкостенного полого кругового цилиндра наибольшая по сравнению с тонкостенными цилиндрами одинаковой толщины любой другой формы (той же длины), сделанными из того же количества материала. Конструктивной эффективностью Δ цилиндрической оболочки называют отношение объема V , заключенного внутри оболочки, к массе оболочки m (V и m приходятся на единицу длины):

$$\Delta = \frac{V}{m}. \quad (22)$$

Эта оптимальная конструктивная эффективность

$$\Delta = \frac{r}{2\rho h} = \frac{m}{4\pi\rho^2 h^2}. \quad (23)$$

Толщину h стенки определяют из расчета на прочность, теплозащиту и т. п.

Для сравнения приведем конструктивную эффективность цилиндрической оболочки прямоугольного поперечного сечения с измерениями a и b и сферической оболочкой той же толщины соответственно (в последнем случае V и m относятся ко всей сфере):

$$\Delta = \frac{ab}{2\rho h(a+b)} = \frac{ab}{m} \leq \frac{m}{16\rho^2 h^2}; \quad (24)$$

$$\Delta = \frac{r}{3\rho h} = \frac{m^{1/2}}{6\sqrt{\pi}(\rho h)^{1/2}}, \quad (25)$$

где r — радиус сферы.

Для замкнутых оболочек конструктивная эффективность сферы будет наибольшей. В условии (24) знак равенства относится к квадратному поперечному сечению.

Конструктивная эффективность является одним из важнейших параметров, определяющих практическое применение оболочки той или другой формы, когда целевым назначением конструкции является транспортирование или хранение. Чем больше величина Δ , тем рациональнее конструкция. Именно максимальной конструктивной эффективностью и наибольшей прочностью объясняется широкое распространение круговых цилиндрических оболочек в природе и в практике (стебли растений, кровеносные сосуды, трубопроводы, камеры сгорания ракетных двигателей и др.).

Строительство жилых зданий и сооружений в форме вертикально стоящих полых круговых цилиндров гораздо рациональнее и экономичнее, чем в форме параллелепипедов. Например, согласно формулам (23) и (24) при одинаковой жилой площади и кубатуре возведение стен здания в форме кругового цилиндра на 28% дешевле, чем в форме параллелепипеда с квадратным основанием (при одном и том же строительном материале). Для других параллелепипедов разница будет еще более ощутимой. Видимо, города будущего будут состоять из многоэтажных цилиндрических зданий.

В заключение рассмотрим осевое сжатие прямолинейного сплошного стержня радиуса r . Очевидно, при достаточно малой относительной длине l/r стержня потеря его работоспособности будет происходить вследствие разрушения, т. е. критическая сила N будет равной $\sigma_{сж} \pi r^2$ (для металлов величина $\sigma_{сж}$ имеет порядок предела текучести σ_s). При достаточно большой относительной длине l/r стержня потеря работоспособности происходит

вследствие потери упругой устойчивости, т. е. критическая сила будет равна эйлеровой (при шарнирно-опертых концах):

$$N = \frac{\pi^2 r^4 E}{4l^2}. \quad (26)$$

Аппроксимируя эти два предельных механизма разрушения на всю область l/r , находим относительную длину стержня, разделяющую зоны преимущественного влияния того или другого механизма:

$$\frac{l}{2r} \sim \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{E}{\sigma_{сж}}} \sim 10 \div 20. \quad (27)$$

Величина отношения $E/\sigma_{сж}$ для большинства конструкционных материалов имеет порядок 100—500. Чтобы построить более полную теорию устойчивости стержня, следует учитывать развитие пластических зон или трещин при изгибе стержня.

§ 3. РАВНОПРОЧНАЯ БЕЗМОМЕНТНАЯ НИТЬ

Рассмотрим гибкую тяжелую нить попеременного сечения, провисшую между двумя неподвижными опорами. Эта модель хорошо описывает многие реальные конструкции (провода на линиях электропередач, канаты, цепи, арки, некоторые безопорные мосты и т. д.). В данной задаче принцип равнопрочности приводит к требованию, чтобы растягивающее напряжение во всех точках нити было одинаковым. Определены форма прогиба и поперечное сечение равнопрочной нити. В качестве иллюстрации полученного решения возьмем проект равнопрочного висячего моста.

1. Введение и постановка задачи. Рассмотрим гибкую тяжелую нить переменного сечения, провисшую между двумя неподвижными опорами (рис. 3). Расстояние между опорами, находящимися на одном уровне, равно $2L$. Выберем начало координат rz в середине пролета; ось z направлена перпендикулярно к линии, соединяющей точки опоры (r — расстояние от оси z). Направление силы тяжести совпадает с направлением оси z . Максимальный прогиб нити будет при $r = 0$, обозначим его через a . Кривую прогиба нити будем обозначать через M , а текущую длину дуги кривой — через s (условимся, что при $r = 0$ будет $s = 0$).

Запишем уравнения равновесия

$$\frac{dN}{ds} + P_t = 0, \quad N + RP_n = 0. \quad (28)$$

Здесь N — усилие; R — радиус кривизны; P_n и P_t — нормальная и тангенциальная (к кривой M) составляющие силы тяжести (см. рис. 3), т. е.

$$P_n = \rho g S \cos \alpha, \quad P_t = \rho g S \sin \alpha, \quad (29)$$

где ρg — удельный вес материала нити; α — угол, составляемый нормалью к кривой M с осью z , S — площадь поперечного сечения нити.

Пусть уравнение кривой M имеет вид

$$z = z(s), \quad r = r(s). \quad (30)$$

Тогда

$$\cos \alpha = \frac{dr}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{dz}{ds}, \quad \frac{1}{R} = \frac{z''(s)}{r'(s)}. \quad (31)$$

Подставляя формулы (29) и (31) в уравнения (28), получим

$$\left. \begin{aligned} N'(s) + \rho g S z'(s) &= 0; \\ Nz''(s) + \rho g S (r'(s))^2 &= 0; \\ (r'(s))^2 + (z'(s))^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

При $S = \text{const}$ уравнения (32) были проинтегрированы Бернулли, который нашел цепную

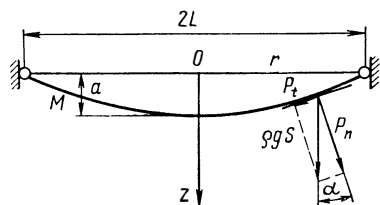


Рис. 3. Равнопрочная тяжелая цепь

линию. Нить постоянного сечения обрывается всегда вблизи точек опоры, так как в этих точках растягивающее напряжение будет максимальным. Поставим следующую задачу: определить площадь сечения и форму прогиба нити, в которой растягивающее напряжение было бы постоянным. Такую нить будем называть равнопрочной, весь материал которой «работает» равномерно. Очевидно, что равнопрочная нить для заданного материала с σ_B будет также нитью минимального веса, хотя доказать это весьма сложно, так как по существу для этого нужно решить задачу (32) для произвольной функции $S(\sigma)$ с до-

полнительным условием минимума функционала $\int_0^l S(s) ds$ (в области $N < \sigma_B S$), где $2l$ — длина всей нити. Для заданного веса равнопрочная нить будет иметь наименьшее напряжение по сравнению с максимальным напряжением в других нитях. В данной задаче согласно принципу равнопрочности должно выполняться следующее соотношение.

$$N = \sigma_B S. \quad (33)$$

Четыре уравнения (32) и (33) образуют замкнутую систему, служащую для нахождения неизвестных функций $z(s)$, $r(s)$, $N(s)$ и $S(s)$.

2. **Решение задачи.** Подставив соотношение (33) в первое уравнение (32) и проинтегрировав его, получим

$$S = S_0 e^{-\lambda z} \left(\lambda = \frac{\rho g}{\sigma_B} \right), \quad (34)$$

где S_0 — площадь поперечного сечения нити вблизи опор.

Подставляя формулы (33) и (34) во второе уравнение (32), находим

$$z'' + \lambda r'^2 = 0. \quad (35)$$

Исключая r' из этого уравнения и третьего уравнения (32), получаем

$$z'' - \lambda r'^2 = -\lambda. \quad (36)$$

Это уравнение сводится к следующему:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{1 - e^{2\lambda s}}{1 + e^{2\lambda s}}. \quad (37)$$

При этом было использовано условие при

$$s = 0 \quad dz/ds = 0. \quad (38)$$

Интегрируя уравнение (37) и считая, что $z = a$ при $s = 0$, находим

$$z = a - \frac{1}{\lambda} \ln \operatorname{ch} \lambda s. \quad (39)$$

Подставляя соотношение (37) в последнее уравнение (32) и решая его, получаем

$$r = \frac{2}{\lambda} \left(\operatorname{arctg} e^{\lambda s} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (40)$$

($r = 0$ при $s = 0$).

Длину всей нити $2l$ и максимальный прогиб a найдем из следующего условия:

при

$$s = l \quad z = 0; \quad r = L. \quad (41)$$

Отсюда по формулам (39) и (40) получаем

$$\left. \begin{aligned} l &= \frac{1}{\lambda} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \lambda L \right), \\ a &= \frac{1}{\lambda} \ln \operatorname{ch} \lambda l. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Площадь поперечного сечения равнопрочной нити согласно формулам (34) и (39)

$$S = S_0 \frac{\operatorname{ch} \lambda s}{\operatorname{ch} \lambda L}. \quad (43)$$

Формулы (33), (39), (40), (42), (43) дают полное решение поставленной задачи. Как видно, форма прогиба равнопрочной нити определяется единственным образом, а площадь ее поперечного сечения зависит от произвольного множителя S_0 , задающего масштаб.

На рис. 4 изображена кривая прогиба равнопрочной нити в безразмерных переменных z_* и r_* [(см. формулы (39), (40) и (42)]:

$$z_* = \ln \frac{\operatorname{ch} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \lambda L \right)}{\operatorname{ch} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} r_* \right)} = \ln \frac{\cos r_*}{\cos \lambda L} \quad (44)$$

$$z_* = \lambda z, \quad r_* = \lambda r.$$

Решение задачи имеет физический смысл только при выполнении условия

$$\lambda L < \pi/2. \quad (45)$$

При $\lambda L > \pi/2$ решения поставленной задачи не существует. Шарнирная опора может быть расположена в любом месте единой кривой прогиба; выбор точки опоры соответствует заданию L и a .

3. Проект равнопрочного безопорного моста. Полученное решение позволяет проанализировать, в частности, возможности проектирования равнопрочных безопорных (висячих) мостов, строительство которых во много раз дешевле обычных опорных мостов. Пусть в качестве несущего нагрузку материала используются стальные тросы, временное сопротивление которых равно примерно $196 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$, а коэффициент запаса 4—5. Поэтому величину рабочего напряжения σ_B в тросах можно принять равной $392 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$. Величину удельного веса $\rho g = 118 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$ (считая, что общий вес дополнительного груза, не несущего нагрузки, равен половине веса несущих тросов). Дополнительный груз распределяется вдоль моста по закону (43).

В рассматриваемом случае

$$\lambda = \frac{\rho g}{\sigma_B} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}.$$

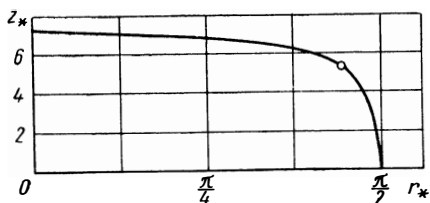


Рис. 4. Форма прогиба равнопрочной тяжелой нити

При помощи формул (42) и (43) определим для различных пролетов моста $2L$ максимальный прогиб a и отношение S_{\max}/S_{\min} , где S_{\max} и S_{\min} — общая площадь поперечного сечения несущих тросов вблизи опоры (при $r = L$) и при $r = 0$ соответственно ($S_{\max} = S_0$):

$2L$, км	2	4
a , м	150	640
S_{\max}/S_{\min}	1,045	1,212

Для строительства равнопрочных (висячих) мостов наиболее выгодно использовать естественные перепады высот (если используется решение только при $0 < r < L$) или же естественные возвышения (если используется решение при $-L < r < L$, как показано на рис. 3). Для оценки безопасной величины S_{\min} можно использовать вторую формулу (28) и выражение (33)

$$S_{\min} = -\frac{RP_N}{\sigma_B} = -\frac{r'(0)P_N}{\sigma_B z''(0)} = \frac{P_N}{\lambda \sigma_B}.$$

Здесь P_N — неучтенная в расчете (аварийная) нагрузка на единицу длины моста, сосредоточенная в том сечении моста, где площадь сечения несущих тросов минимальна. Примем, что $P_N = 98\,000$ Н/м; тогда $S_{\min} \approx 1$ м². Существенно, что прогиб равнопрочного моста зависит только от одного параметра $\rho g L / \sigma_B$, а пропускная способность его может быть взята любой за счет выбора параметра S_0 . Простые оценки показывают, что применение более легких композитных материалов в качестве несущих нагрузку (вместо стальных тросов) позволяет проектировать висячие мосты с длиной до 10—15 км и максимальным прогибом около 600 м.

§ 4. ПОДВОДНЫЕ ТРУБОПРОВОДЫ

Транспортировка газа или нефти при помощи подводного трубопровода, укладываемого на дне моря, экономически гораздо более выгодна, чем при помощи специальных судов-танкеров. В связи с сооружением подводных трубопроводов в последние 25 лет возникли две основные проблемы: как оптимально проектировать трассу трубопровода и его параметры в морских условиях?; какова оптимальная конструкция трубопровода? Решению этих проблем посвящен этот параграф.

1. Постановка и анализ задачи. Пусть требуется проложить трубопровод между пунктами A и B , разделенными водным бассейном. Выберем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы плоскость xy совпала с уровнем моря, а направление оси совпало с направлением силы тяжести (рис. 5). Дно моря представляет собой заданную поверхность

$$z = F(x, y), \tag{46}$$

проходящую через точки A и B , расположенные на уровне моря. Уравнение искомой кривой трубопровода, лежащей на этой поверхности, можно записать в виде

$$x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad z = z_0(s). \quad (47)$$

Здесь s — длина дуги кривой, отсчитываемая от точки A . Длину всего трубопровода (от A до B) обозначим через L .

Нефть (или газ) транспортируется под действием перепада давления

$$\Delta p = p_A - p_B, \quad (48)$$

где p_A и p_B — давление газа в точках A и B . Внутреннее давление нефти в трубе можно считать линейной функцией длины дуги:

$$p = p_A - (p_A - p_B) \frac{s}{L} \quad (49)$$

Рис. 5. Схема подводного трубопровода между пунктами A и B

(влиянием кривизны трубопровода на течение нефти или газа в трубе можно пренебречь).

Внешнее давление воды на трубу

$$p_0 = \rho_0 g z_0(s), \quad (50)$$

где $\rho_0 g$ — удельный вес морской воды.

Расход газа Q (масса газа, протекающая через поперечное сечение трубы в единицу времени) в установившемся режиме

$$Q = \pi r v \rho^2. \quad (51)$$

Здесь ρ и v — плотность и средняя скорость газа; r — радиус трубы. Скорость газа будет примерно постоянной по сечению трубы для развитых турбулентных течений, т. е. при достаточно больших числах Рейнольдса:

$$Re = \frac{2\rho v r}{\mu}. \quad (52)$$

Здесь μ — вязкость газа, сильно зависящая от температуры газа T ,

$$\mu = \mu_0(T); \quad (53)$$

$\mu_0(T)$ — заданная функция. Уравнение состояния газа

$$p = \rho R T, \quad (54)$$

где R — универсальная газовая постоянная. В случае нефти сжимаемостью можно пренебречь (нетрудно также учесть ее,

считая плотность ρ эмпирически задаваемой функцией давления p , т. е. $\rho = \rho(p)$.

Градиент давления газа вдоль трубы dp/ds является некоторой функцией числа Рейнольдса:

$$\frac{dp}{ds} = -\frac{\rho v^2}{r} C_f(\text{Re}). \quad (55)$$

Коэффициент трения $C_f(\text{Re})$ определяют опытным путем; здесь он задан. Отсюда для установившегося режима течения нефти, считаемой несжимаемой жидкостью, при изотермическом процессе $T = \text{const}$ и трубы постоянного сечения $r = \text{const}$ согласно условиям (51) и (52) получается линейная зависимость (49).

Уравнение энергии для потока газа в трубе имеет вид

$$\frac{dT}{ds} = \frac{T_0 - T}{r} \alpha_f(\text{Re}). \quad (56)$$

Здесь T_0 — температура трубы в рассматриваемой точке; α_f — коэффициент теплообмена, определяемый опытом.

Система уравнений (51)—(56) позволяет легко построить поле всех параметров установившегося течения нефти или газа в круглой трубе постоянного сечения в зависимости от s при заданном p_A и T_A , если величину T_0 считать известной функцией s , что верно только для заданной траектории трубопровода. В случае рассматриваемой здесь обратной задачи будем предполагать, что T_0 постоянно и равно средней температуре воды на дне моря (т. е. около 280—290 К). Отметим соотношение, являющееся результатом решения этой системы,

$$p_{\text{при } s=L} = p_B. \quad (57)$$

2. Определение параметров равнопрочного трубопровода. Величины p_A , p_B , Q определяются при проектировании техническим заданием. Трубопровод представляет собой круговую цилиндрическую оболочку из металла, покрытую изоляционной обмоткой из битума, стеклопластика и др. Требуется определить радиус r и толщину стенки оболочки h (s).

Соотношение (57) представляет собой зависимость между проектируемыми величинами r и L , для несжимаемой жидкости при $T = T_0$ оно имеет вид

$$\frac{p_A - p_B}{L} = \frac{Q^2}{\pi^2 \rho r^5} c_f \left(\frac{2Q}{\pi \mu r} \right). \quad (58)$$

В цилиндрической трубе в данном случае имеется только окружное усилие

$$N_\varphi = r(p - p_0), \quad N_\varphi = h\sigma_\varphi, \quad (59)$$

а осевое усилие равно нулю (предполагается, что труба полностью лежит на дне). Местные контактные напряжения пренебрежимо

малы. В данной задаче согласно принципу равнопрочности во всех сечениях трубопровода должно выполняться следующее соотношение:

$$\sigma_{\varphi} = \sigma_{\text{в}}. \quad (60)$$

Здесь $\sigma_{\text{в}}$ — временное сопротивление металла трубы с учетом коэффициента запаса, который в конструкциях подобного рода следует брать равным 5—10 (прочностью обмотки пренебрегаем).

При помощи соотношений (59) и (60) условие равнопрочности трубопровода запишется в виде

$$h(s) = \frac{r}{\sigma_{\text{в}}} [p(s) - \rho_0 g z_0(s)]. \quad (61)$$

Если трасса трубопровода задана, функции $p(s)$ и T легко определить из уравнений (51)—(56). Функцию $z_0(s)$ и величину L находят из геометрических соображений. Радиус r равнопрочного трубопровода вычисляют из соотношений вида (57) или (58), а толщину h стенки, являющуюся функцией длины дуги s , — соотношением (61).

Предлагаемый расчет позволяет обходиться без промежуточных компрессорных станций на дне моря, строительство и эксплуатация которых дороги. В том случае, когда по технологическим соображениям (связанным, например, с трудностями укладки труб большой толщины и диаметра на начальном участке трубопровода) строительство компрессорных станций оказывается неизбежным, этот расчет можно использовать для пролета между двумя ближайшими компрессорными станциями. Однако, прежде чем идти на сооружение таких станций, следует изучить также возможность применения на начальном участке более дорогих труб того же поперечного сечения, но повышенной прочности и гибкости (например, металлокстеклопластиковые трубы с несущей композитной обмоткой из стекловолокна; спаренные, строенные и т. д., трубы с центрами в одной и той же плоскости).

3. Выбор трассы трубопровода. Критерием оптимальности проекта является минимум стоимости строительства всего трубопровода, т. е. минимум следующей величины:

$$\Gamma = \int_0^L [\varphi(s) + \psi(z)] ds. \quad (62)$$

Здесь $\varphi(s)$ — стоимость единицы длины трубы, зависящая от материала и конструкции трубопровода (в частности, от диаметра труб и толщины стенок), но не зависящая от способа ее укладки на дне моря; $\psi(z)$ — стоимость прокладки единицы длины трубопровода, зависящая от глубины $z(s)$ моря и надежного способа укладки (прежде всего, от использования вспомогательных со-

ружений и плавучих средств). Функцию $\psi(z)$ при одном и том же способе прокладки можно аппроксимировать линейной функцией

$$\psi(z) = a + bz(s). \quad (63)$$

Здесь a и b — постоянные коэффициенты, зависящие от применяемого способа прокладки.

Для оптимального проектирования трассы трубопровода (и, в частности, величины L) наиболее удобен следующий метод, который легко и быстро осуществить, применяя ЭВМ. Каждый из проектов, отличающихся способами укладки и выбором трассы, должен содержать некоторое конечное число неопределенных параметров (величины r , p_A , p_B , L характеристики материала и транспортируемого углеводорода; геометрические параметры трассы). Функции c_f и α_f подбирают так, чтобы можно было уравнения (51)—(56) проинтегрировать аналитически. После этого при помощи соотношения (46) функционал Γ становится обычной функцией неопределенных параметров. Исследование этой функции на минимум в заданной области изменения переменных приводит к типичной задаче нелинейного программирования, для решения которой разработано много различных алгоритмов. Практически наиболее удобно получить вначале грубое аналитическое решение, используя дополнительные упрощающие допущения. Последнее можно использовать в качестве нулевого приближения в точном решении. Предположим, что глубина моря постоянна и равна z_0 , а температура газа в трубе постоянная и равна T_0 . Интегрирование системы (51)—(56) дает

$$p^2 = p_A^2 - \frac{2}{r} RT_0 s \rho^2 v^2 c_f \left(\text{Re} = \frac{2Q}{\pi \mu r} \right). \quad (64)$$

Отсюда согласно (57) и (61) получаем

$$p_A^2 - p_B^2 = \frac{2c_f(\text{Re})}{\pi^2 r^5} RT_0 L Q^2; \quad (65)$$

$$h = \frac{r}{\sigma_B} \left(\sqrt{p_A^2 - \frac{2c_f s}{\pi^2 r^5} RT_0 Q^2} - \rho_0 g z_0 \right). \quad (66)$$

Предположим дополнительно, что величина ϕ прямо пропорциональна h , т. е. $\phi = \delta h$, где δ не зависит от s , тогда

$$\begin{aligned} \Gamma &= L \left[\psi(z_0) - \frac{\delta r}{\sigma_B} \rho_0 g z_0 \right] + \\ &+ \frac{\pi^2 \delta r^6}{3 \sigma_B c_f R T_0 Q^2} \left[p_A^3 - \left(p_A^2 - \frac{2c_f R T_0 L Q^2}{\pi^2 r^5} \right)^{3/2} \right] = \\ &= \frac{\pi^2 r^5}{c_f R T_0 Q^2} \left\{ \frac{1}{2} \psi(z_0) (p_A^2 - p_B^2) + \right. \\ &\left. + \frac{\delta}{\sigma_B} \left[\frac{1}{3} (p_A^3 - p_B^3) - \frac{1}{2} \rho_0 g z_0 (p_A^2 - p_B^2) \right] \right\}. \quad (67) \end{aligned}$$

В частном случае, когда

$$\rho_A \gg \rho_B, \rho_A \gg \rho_0 g z_0, \quad (68)$$

по формулам (65)—(67) находим

$$\Gamma = L \left[\psi(z_0) + \frac{2}{3} \varphi_A \right]. \quad (69)$$

Здесь φ_A — стоимость единицы длины трубы в начальном пункте A .

Заметим, что при постоянной толщине труб по всей трассе общая стоимость строительства существенно больше

$$\Gamma = L [\psi(z_0) + \varphi_A]. \quad (70)$$

В этих оценках не был учтен тот факт, что прокладка более толстых труб дороже. Если принять, что величина $\psi(z_0)$ прямо пропорциональна h , то получим следующую оценку для общей стоимости строительства:

$$\Gamma = \frac{2}{3} L [\psi(z_0) + \varphi_A]. \quad (71)$$

Таким образом, строительство равнопрочного трубопровода оказывается примерно на 30% дешевле строительства трубопровода из труб постоянной толщины. Трасса трубопровода будет геодезической линией, т. е. отрезком прямой, проведенной между пунктами A и B . Использование разработанного выше точного подхода при помощи ЭВМ может значительно улучшить эти оценки.

4. Некоторые соображения об оптимальной конструкции трубопровода. Известны два основных способа укладки подводного трубопровода: при помощи специального многотоннажного судна—трубоукладчика с использованием стингеров (американский способ) и при помощи укладки сразу больших плетей методом S-образной кривой с использованием понтонов и нескольких малотоннажных неспециализированных барж (французский способ). Первый способ более надежен, но дорог, и требует больших начальных затрат. Второй способ дешевле, почти не требует начальных затрат, но требует точного управления многими плавучими средствами.

Во всяком случае, чем меньше изгибная жесткость трубопровода, тем проще и надежнее его укладка. Рассмотрим вопрос о том, при каких условиях применение спаренных труб может оказаться более рациональным. Для определенности ограничимся случаем, когда внутреннее давление газа не превышает порядка 98×10^{-3} Н/м², а перепад давления в трубе весьма мал. Площади поперечных сечений спаренной и одинарной трубы считаем одинаковыми. Изгибная жесткость EI и масса m единицы длины спа-

ренного и одинарного равнопрочных трубопроводов при этом будут равны соответственно

$$EI_2 = 2\pi r^4 \frac{\rho}{\sigma_b}, \quad m_2 = 4\pi \rho r^2 \frac{\rho}{\sigma_b}, \quad EI_1 = \pi R^4 \frac{\rho}{\sigma_b}, \quad m_1 = 2\pi \rho R^2 \frac{\rho}{\sigma_b}$$

$$(R = \sqrt{2}r), \quad (72)$$

т. е.

$$\frac{EI_2}{EI_1} = \frac{1}{2}; \quad \frac{m_2}{m_1} = 1.$$

Итак, расход материала на трубы одинаков и пропускная способность газопроводов также одинакова, но изгибная жесткость спаренного трубопровода в 2 раза меньше. В случае применения трубопровода, состоящего из n одинаковых равнопрочных труб, центры которых в поперечном сечении лежат на одной линии, изгибная жесткость уменьшается в n раз при том же расходе материала на трубы и той же пропускной способности. Следовательно, вместо применяемых в настоящее время толстостенных трубопроводов большого диаметра рациональнее и надежнее сооружение спаренных, строенных и т. д. трубопроводов рассмотренной конструкции меньшего диаметра и с более тонкими стенками. К этому нужно добавить еще, что вероятность хрупкого разрушения для толстых труб больше из-за наличия масштабного эффекта.

§ 5. СОСУДЫ ДАВЛЕНИЯ, НАВИТЫЕ ИЗ ВОЛОКОН ¹

Рассмотрим оптимальное проектирование некоторых сосудов давления, навитых из волокон. Общий анализ работы корпуса ракетного двигателя на твердом топливе (РДТТ) с точки зрения принципа равнопрочности приводит к выводу о том, что РДТТ минимального веса должен иметь специфическую конструкцию С-двигателя.

1. Общий анализ работы корпуса РДТТ ². Составной корпус РДТТ схематично можно представить в виде круговой цилиндрической оболочки, состоящей из двух слоев: металлической обечайки (обычно сталь, алюминий или титан) и композиционной обмотки (рис. 6, а). Последняя получается наматыванием высокопрочного волокна (обычно из специальных сортов стекла, иногда из дакрона, металлических нитей, или из волокон на основе бора, графита, карбида кремния и др.) со связующим на обечайку. Связующее (обычно эпоксидная смола или полиуретаны) полимеризуется в течение некоторого времени после намотки. Начальное натяжение

¹ G. P. Cherepanov. Optimal design of some filamentary cylindrical shells. Abstracts. Intern. Astronautical Congress, Amsterdam, 1974.

² В качестве эталона берется один из распространенных вариантов.

нитей падает в течение этого же времени, приближаясь к некоторому постоянному значению, зависящему в основном от периода полимеризации и физических свойств связующего. Существует оптимальное соотношение волокна и связующего, при котором достигается максимальная прочность армированной пластмассы (примерно 80% волокна и 20% связующего в объемных долях). При одноосном армировании прочность композита в направлении армирования достигает $(147 - 392) \cdot 10^{-5} \text{ Н/м}^2$ и более.

Наибольший интерес представляет удельная прочность материала, т. е. отношение временного сопротивления σ_B к удельному весу ρ . Конструктивная эффективность идеальной равнопрочной оболочки из волокон, нагруженной только внутренним давлением p , независимо от формы оболочки,

$$\Delta = \frac{\sigma_B}{3\rho p}, \quad \left(\Delta = \frac{V}{P} \right), \quad (73)$$

где V — объем, заключенный внутри оболочки весом P ; Δ — конструктивная эффективность (чем больше Δ при заданном p , тем более совершенна конструкция с точки зрения минимального веса).

Выведем эту важную формулу. Пусть имеется произвольная замкнутая оболочка, навитая из волокон; весом и прочностью связующего пренебрегаем. При действии внутреннего давления в нитях возникает относительное удлинение ϵ и напряжение σ ; это напряжение во всех нитях будет одинаковым согласно условию равнопрочности. Энергия деформации всех нитей будет

$$U = LS\sigma\epsilon = \frac{P}{\rho} \sigma\epsilon. \quad (74)$$

Здесь L — общая длина всех нитей; S — площадь поперечного сечения одной нити; ρ и P — удельный и общий вес нитей.

Вследствие равномерного относительного удлинения всех элементов оболочки на ϵ объем V , занимаемый ею, увеличится на δV :

$$\delta V = 3V\epsilon. \quad (75)$$

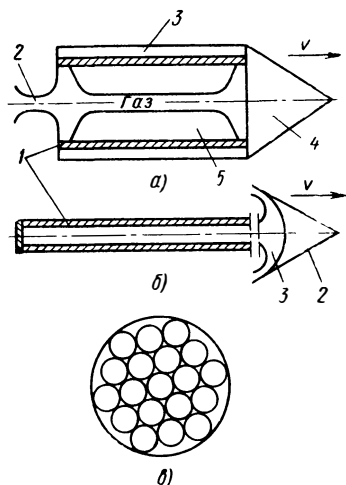


Рис. 6. Схема корпуса одноосного С-двигателя:

a — одна из традиционно применяемых конструкций (1 — цилиндрическая металлическая оболочка, 2 — сопло, 3 — композиционная обмотка, 4 — полезный груз, 5 — твердое топливо); *б* — схема С-двигателя (1 — композиционная цилиндрическая оболочка, 2 — полезный груз, 3 — сопловое устройство); *в* — поперечное сечение корпуса С-двигателя

При этом внутреннее давление p произведет работу

$$A = p\delta V. \quad (76)$$

По закону сохранения энергии $U = A$; отсюда при помощи формул (74)—(76) находим

$$\frac{V}{P} = \frac{\sigma}{3\rho p}. \quad (77)$$

По существу, пока было использовано лишь условие равнонапряженности нитей. Теперь потребуем, чтобы разрушение оболочки произошло из-за одновременного разрыва всех нитей (условие равнопрочности); это налагает дополнительные ограничения на конструкцию, исключаящие разрыв вдоль связующего или потерю устойчивости. Отсюда получается искомое выражение для конструктивной эффективности (73).

Конструктивная эффективность реальных изделий существенно меньше идеальной по двум основным причинам: а) наличие металлической обечайки (удельная прочность которой в несколько раз меньше, чем у высокопрочных композиционных материалов); б) наличие большого пассивного веса (прежде всего сопл, неравнонапряженных днищ с различными усиливающими элементами, а также громоздких устройств, служащих для стабилизации и управления ракетой).

Твердое горючее в камере сгорания по своим физическим свойствам представляет собой резиноподобное тело, способное к большим деформациям до разрушения. При отсутствии начальных трещиноподобных дефектов, которые могут привести к прогарам и к механическому разрыву топлива (т. е. к нерасчетному режиму горения, сопровождающемуся резким повышением давления в камере и, возможно, к последующему разрушению корпуса), давление в камере сгорания монотонно возрастает, а затем монотонно убывает во времени (сравнительно мало изменяясь на основном стационарном участке работы двигателя). Без большой ошибки можно считать, что это давление (как по закону Паскаля) передается резиноподобным топливом на корпус двигателя. Кривую давления (и, прежде всего, максимальное давление p , необходимое для расчета корпуса минимального веса) в первом приближении будем считать задаваемой величиной, которая определяется поверхностью горения, объемом камеры сгорания, критическим сечением сопла и т. п. Градиентом давления вдоль образующей на первом этапе расчета пренебрежем.

В таком квазистатическом приближении можно считать, что цилиндрический корпус должен выдерживать следующие растягивающие усилия от внутреннего давления в камере сгорания:

$$N_z = \frac{1}{2} pr, \quad N_\phi = pr. \quad (78)$$

Здесь r — радиус цилиндра; z и ϕ — осевое и окружное направления.

При обмотке волокна лишь в окружном направлении осевое усилие полностью воспринимается стальной обечайкой, так как прочность связующего примерно на два порядка меньше прочности волокна. Окружное усилие почти полностью воспринимается волокнами. Последнее объясняется особенностями совместной работы разномодульных (стальной и стеклопластиковой) оболочек и наличием технологического натяжения волокон, сжимающих обечайку. Если в момент работы двигателя это натяжение будет слишком мало, то почти все окружное усилие будет воспринято более жесткой стальной обечайкой. Этот режим крайне нерационален с точки зрения принципа равнопрочности (хотя волокна будут равнонапряжены). При достаточно высоком натяжении волокон в стальной обечайке имеют место значительные сжимающие напряжения, облегчающие ее работу и приводящие к первоначальному разрушению обмотки. Разумеется, существует такая величина натяжения волокон, которая обеспечивает пропорциональную совместную работу обечайки и обмотки и их одновременное разрушение (т. е. равнопрочность этой конструкции). Однако вследствие ползучести пластмассы натяжение волокон убывает со временем хранения, которое является существенно неопределенным параметром при расчете изделия. Таким образом, в рамках указанного конструктивного решения на основании принципа равнопрочности невозможно сколь-нибудь приблизиться к идеальной конструктивной эффективности (73).

2. Схема С-двигателя. Рассмотрим общую схему С-двигателя, основанного на следующих конструктивных признаках: отсутствие металлической обечайки; многозарядность камеры сгорания; большая относительная длина зарядов ($L/r \geq 50$, где L — длина цилиндрического заряда, r — его радиус); расположение единого соплового устройства впереди многозарядной камеры сгорания.

Каждый заряд (шашка) помещен в жаропрочный кожух и в корпус из высокопрочного композиционного материала; заряды изолированы друг от друга, и время начала горения каждого заряда определяется оператором (человеком или по заранее заданной программе). После сгорания твердого топлива в шашке оставшийся корпус заряда выбрасывается. Схема присоединения зарядов к сопловому устройству и само сопловое устройство могут быть различными в зависимости от назначения изделия. Например, сопловое устройство может представлять собой некоторое число осесимметрично расположенных отдельных насадок; наконец, оно может представлять собой единое осесимметричное сопло формы, схематично изображенной на рис. 6, б. Во всех случаях сила тяги, прикладываемая к соплу, создается за счет реакции отбрасываемых назад продуктов сгорания, движущихся со сверхзвуковой скоростью. Принцип его работы тот же, что и у сопла Лаваля, однако точный расчет несколько усложняется вследствие трехмерности течения.

С-двигатель имеет следующие очевидные преимущества принципиального порядка перед стандартной схемой, кратко рассмотренной в предыдущем параграфе:

а) при правильной системе намотки волокон на каждый отдельный заряд конструктивная эффективность С-двигателя при достаточно больших L/r может быть получена весьма близкой к идеальной;

б) многозарядность камеры сгорания и расположение соплового устройства впереди дает возможность более эффективно управлять ракетой и задавать различные режимы тяги (в частности, становятся ненужными некоторые сложные системы стабилизации и управления);

в) большая относительная длина зарядов, многозарядность и наличие единого соплового устройства позволяет отказаться от многоступенчатых двигателей, конструктивная эффективность которых принципиально не может быть близка к идеальной;

г) цилиндрические заряды небольшого радиуса (без металлической обечайки) технологически легче осуществимы, чем такие же заряды большого радиуса;

д) устройство С-двигателя представляет большие возможности в варьировании параметров двигателя (максимальная тяга, время работы, масса горючего, параметры маневрирования и ускорения) и, тем самым, позволяет расширить область применения РДТТ;

е) устройство отдельного порохового заряда (удлинненный цилиндр с центральным отверстием) позволяет обеспечить высокое давление газа в течение более короткого времени горения и при большей полноте сгорания (за счет большей поверхности горения и длинного канала); поэтому требования к калорийности и бездефектности твердого топлива могут быть значительно снижены, так как развитие осевых трещин — разрывов или прогаров в шашке приведет к меньшим колебаниям в давлении, чем в случае монолита примерно одинаковых размеров по всем направлениям (напомним, что скорость роста трещины не может превышать приблизительно половины скорости звука в твердом теле, а скорость звука в резиноподобном смесевом топливе имеет порядок или даже меньше скорости звука в продуктах сгорания).

Рассчитаем основные параметры С-двигателя. Определим вначале при помощи принципа равнопрочности оптимальное расположение волокон, составляющих вместе со связующим корпус отдельного заряда. Будем считать, что цилиндрическая оболочка из армированной пластмассы воспринимает осевое и окружное усилие N_z и N_ϕ , целиком приходящиеся на волокна. При непрерывной намотке натянутого волокна на цилиндрическую матрицу оно располагается вдоль геодезических линий цилиндра, т. е. вдоль винтовых линий. Напомним, что винтовая линия в каждой своей точке направлена под одним и тем же углом к образующей цилиндра. Пусть армирующие нити составляют два семейства

винтовых линий *, одно из которых направлено под углом $+\delta$ к оси цилиндра, а другое — под углом $-\delta$. Число нитей в каждом семействе одинаково. При любых δ волокна будут равнонапряжены (начальное технологическое натяжение постоянно), однако обмотка будет равнопрочной только в том случае, когда число волокон в поперечном сечении цилиндра будет в N_z/N_φ раз больше, чем в продольном сечении оболочки (из расчета на единицу длины). Отсюда получаем

$$\operatorname{tg} \delta = N_\varphi/N_z. \quad (79)$$

Для замкнутой цилиндрической оболочки, подверженной постоянному внутреннему давлению, согласно (78) будет $\operatorname{tg} \delta = 2$, т. е.

$$\delta = 63^\circ 30'. \quad (80)$$

При других углах армирования произойдет разрушение (вдоль связующего) или потеря устойчивости (из-за больших деформаций) до исчерпания несущей способности равнонапряженных нитей. Технологически этот угол армирования легко осуществить, придавая поступательное и вращательное движения цилиндрической матрице, так чтобы выполнялось соотношение

$$\omega r = v \operatorname{tg} \delta, \text{ т. е. } \omega r = 2v. \quad (81)$$

Здесь ω — угловая скорость вращения; v — скорость поступательного перемещения.

Процесс полимеризации (которым можно управлять, задавая, например, температуру окружающей среды) должен продолжаться в течение времени, необходимого для того, чтобы начальное натяжение волокон упало до значения, близкого к нулю. Прочность равнопрочной цилиндрической оболочки в осевом и окружном направлениях будет

$$\sigma_z = \frac{\sigma_b}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\sigma_b \operatorname{tg} \delta}{1 + \operatorname{tg} \delta}, \quad (82)$$

т. е.

$$\sigma_z = \frac{1}{3} \sigma_b, \quad \sigma_\varphi = \frac{2}{3} \sigma_b.$$

Здесь σ_b — временное сопротивление при одноосном растяжении в направлении армирования (при рабочей температуре).

Отсюда можно найти толщину равнопрочной обмотки

$$2h = \frac{N_z}{\sigma_z} = \frac{3pr}{2\sigma_b}. \quad (83)$$

Легко видеть, что при достаточно больших L/r , когда относительный вес днища будет пренебрежимо мал, конструктивная

* Этот случай имеет чисто иллюстративное значение; на практике его не применяют из-за неустойчивости волокон.

эффективность корпуса отдельного заряда будет равна идеальной, определяемой формулой (73). Конструктивная эффективность камеры сгорания в целом будет той же, если пренебречь (пассивным) весом соплового устройства и дополнительных конструктивных элементов, соединяющих заряды вместе. Для заданного миделя полезного груза, определяющего сопротивление ракеты в целом в гиперзвуковом режиме, диаметр поперечного сечения камеры сгорания также задан; оптимальное же число зарядов и их диаметр $2r$ определяются конструкцией соплового устройства, а также технологическими и экономическими соображениями. Длина L зарядов определяется назначением двигателя (количеством горючего); по существу, она ограничена лишь требованием устойчивости от осевого сжатия, возникающего при торможении. Различные неучтенные факторы (градиент температуры и давления вдоль оси заряда, дополнительные инерционные нагрузки, неосесимметричные возмущения, возможность горения в аварийном режиме и т. п.) естественно усложняют расчет, однако не изменяют общих выводов.

§ 6. БЕЗМОМЕНТНЫЕ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим заданные безмоментные оболочки переменной толщины, определяемой таким образом, чтобы в каждой точке оболочки выполнялся принцип равнопрочности. Проектирование равнопрочной безмоментной оболочки удастся выполнить достаточно просто, если в уравнения равновесия не входит толщина оболочки. В качестве примера таких объектов рассмотрим часто встречающиеся на практике оболочки вращения, находящиеся под действием внутреннего гидростатического давления.

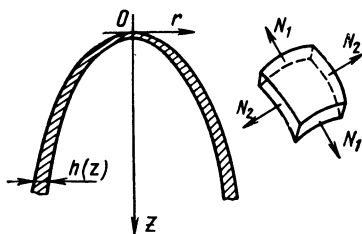


Рис. 7. Равнопрочная безмоментная оболочка вращения

Пусть уравнение средней поверхности тонкой оболочки задается уравнением $r = r(z)$ в цилиндрических координатах rz (рис. 7). Кривая $r = r(z)$ предполагается всюду вогнутой вниз (т. е. $r'' < 0$ всюду на кривой). Оболочка подвержена постоянному внутреннему гидростатическому давлению p . Тогда вдоль линий параллелей будут действовать главные усилия N_1 , а вдоль линий меридианов — главные усилия N_2 ; сдвигающие усилия на этих линиях будут равны нулю. Простой безмоментный расчет этой оболочки дает следующие растягивающие усилия:

$$N_1 = \frac{1}{2} pr \sqrt{1 + r'^2},$$

$$N_2 = p \frac{r [rr'' + 2(1 + r'^2)]}{2\sqrt{1 + r'^2}}. \quad (84)$$

Применяя общие уравнения (2) к данному случаю, для искомой толщины $2h(z)$ равнопрочной оболочки вращения получаем

$$2h(z) = \frac{pr}{2\sigma_B} \max \left\{ \sqrt{1+r'^2}, \frac{rr'' + 2(1+r'^2)}{\sqrt{1+r'^2}} \right\} \quad (85)$$

или

$$2h(z) = \frac{pr}{2\sigma_B} \begin{cases} \sqrt{1+r'^2}, & \text{если } rr'' + r'^2 + 1 < 0; \\ \frac{rr'' + 2\sqrt{1+r'^2}}{\sqrt{1+r'^2}}, & \text{если } rr'' + r'^2 + 1 > 0. \end{cases} \quad (86)$$

Выражение (86) справедливо лишь для однородной и изотропной оболочки. Если равнопрочная оболочка однородна, но ортотропна, причем прочностные свойства сохраняют осевую симметрию задачи, то ее толщина определяется из следующего уравнения:

$$\max \left(\frac{N_1}{2h} - \sigma_{B1}, \frac{N_2}{2h} - \sigma_{B2} \right) = 0, \quad (87)$$

где σ_{B1} , σ_{B2} — временные сопротивления материала оболочки для меридионального и параллельного волокон соответственно.

Рассматриваемый случай встречается в некоторых композитных конструкциях, когда тонкая металлическая оболочка вращения обматывается волокном только вдоль параллелей (и, может быть, вдоль меридианов).

Для ортотропной оболочки при помощи (87) и (84) получаем

$$2h(z) = \frac{pr}{2} \begin{cases} \frac{1}{\sigma_{B1}} \sqrt{1+r'^2}, & \text{если } rr'' + \left(2 - \frac{\sigma_{B2}}{\sigma_{B1}}\right) (1+r'^2) < 0 \\ \frac{rr'' + 2(1+r'^2)}{\sigma_{B2} \sqrt{1+r'^2}}, & \text{если } rr'' + \left(2 - \frac{\sigma_{B2}}{\sigma_{B1}}\right) (1+r'^2) > 0. \end{cases} \quad (88)$$

Формулы (88) справедливы только в том случае, когда прочностью начальной металлической матрицы (на которой происходит обмотка) можно пренебречь. Однако в большинстве случаев ее нужно учитывать, что нетрудно сделать при помощи тех же формул (88). Действительно, пусть толщина металлической оболочки равна $2h_1$, а толщина композитного слоя с временным сопротивлением σ_{BK} равна $2h_2$. Считаем, что величина h_1 задана (например, из соображений устойчивости при обмотке), а величина h_2 варьируется. Возможны следующие два механизма разрушения оболочки * при увеличении внутреннего давления p : 1) оболочка разрывается до разрушения композитного слоя; 2) оболочка и

* Случай, когда металлическая оболочка продолжает работать после разрыва композитного слоя, является самым неоптимальным с точки зрения принципа равнопрочности.

композитный слой разрываются одновременно. В первом случае толщину h_2 определяют по формуле (88) с величиной σ_B , равной прочности композита σ_{BK} . Во втором случае, который предпочтительней, так как соответствует принципу равнопрочности, имеем

$$\sigma_B h = \sigma_s h_1 + (h - h_1) \sigma_{BK}, \quad (h = h_1 + h_2), \quad (89)$$

где σ_s — предел текучести пластичного металла (перед разрывом композита металл находится в пластическом состоянии).

Подставляя величину σ_B (в направлении меридиана или параллели) в формулу (88), получаем уравнение относительно искомой толщины оболочки $2h$; решая это уравнение, находим

$$2h(z) = h_1 \left(1 - \frac{\sigma_s}{\sigma_{BK1}} \right) + \frac{pr}{2\sigma_{BK1}} \sqrt{1 + r'^2}, \quad (90)$$

если

$$rr'' + (1 + r'^2) \left(2 - \frac{\sigma_{BK2}}{\sigma_{BK1}} \right) + \frac{2\sigma_s h_1}{pr} \sqrt{1 + r'^2} \left(\frac{\sigma_{BK2}}{\sigma_{BK1}} - 1 \right) < 0; \quad (91)$$

$$2h(z) = h_1 \left(1 - \frac{\sigma_s}{\sigma_{BK2}} \right) + \frac{pr[rr'' + 2(1 + r'^2)]}{2\sigma_{BK2} \sqrt{1 + r'^2}},$$

если

$$rr'' + (1 + r'^2) \left(2 - \frac{\sigma_{BK2}}{\sigma_{BK1}} \right) + \frac{2\sigma_s h_1}{pr} \sqrt{1 + r'^2} \left(\frac{\sigma_{BK2}}{\sigma_{BK1}} - 1 \right) > 0.$$

Здесь σ_{BK1} и σ_{BK2} — временное сопротивление композита вдоль меридионального и параллельного волокон (металлическая оболочка считается изотропной). Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Эллиптическая оболочка. Пусть меридиональное сечение оболочки представляет собой эллипс

$$r = \frac{a}{b} \sqrt{2bz - z^2} \quad (0 < z < 2b, \quad b > a) \quad (92)$$

с главными диаметрами, равными $2a$ и $2b$; центр эллипса расположен в точке $r = 0$, $z = b$. Тогда

$$r' = \frac{a^2(b-z)}{b^2 r}, \quad r'' = -\frac{a^4}{b^2 r^3}. \quad (93)$$

Подставляя формулу (93) и (92) в (86), (88), (91) и (90), получаем толщину равнопрочной эллиптической оболочки. В простейшем случае однородного изотропного материала имеем

$$rr'' + r'^2 + 1 = 1 - \frac{a^2}{b^2} > 0$$

и, согласно (86) получаем

$$2h(z) = \frac{p}{2\sigma_B} \frac{2[br + a^2(1 - z/b)]^2 - a^4}{\sqrt{b^4 r^2 + a^4(b-z)^2}}. \quad (94)$$

При $z = b$ толщина равнопрочной оболочки будет наибольшей, а при $z = 0$ и $z = 2b$ — наименьшей.

2. Параболическая оболочка. Пусть меридиональное сечение оболочки представляет собой параболу

$$r = \sqrt{2\delta z}, \quad (95)$$

где δ — параметр параболы ($\delta > 0$).

В этом случае

$$r' = \frac{\delta}{r}, \quad r'' = -\frac{\delta^2}{r^3}.$$

Для однородного и изотропного материала согласно (86) имеем

$$2h(z) = \frac{\rho \sqrt{\delta}}{2\sigma_B} \frac{\delta + 4z + 4\sqrt{2\delta z}}{\sqrt{\delta + 2z}}. \quad (96)$$

Итак, толщина равнопрочной параболической оболочки монотонно возрастает с увеличением z . В некотором сечении ($z = \text{const}$) оболочка вращения может быть сопряжена с другими конструктивными элементами. В рассматриваемых оболочках положительной гауссовой кривизны краевой эффект будет затухать по мере удаления от края (а при специальных условиях сопряжения — шарнир плюс отсутствие смещения — может отсутствовать вовсе, что является наиболее желательным при проектировании конструкции).

3. Оболочка специальной формы. Пусть меридиональное сечение оболочки дано следующим уравнением:

$$r = k_0 z \sqrt{1 - \frac{z}{2b}} \quad (0 < z < 2b, k_0 > 0). \quad (97)$$

Вблизи точки $z = 0$ оболочка совпадает с конусом, угол которого $2 \operatorname{arctg} k_0$, а вблизи точки $z = 2b$ она имеет плавное закругление, как у эллиптической оболочки.

В этом случае

$$r' = k_0 \frac{1 - 3z/(4b)}{\sqrt{1 - z/(2b)}}, \quad r'' = \frac{k_0 \left(\frac{3z}{4b} - 2 \right)}{4b \left(1 - \frac{z}{2b} \right)^{3/2}}. \quad (98)$$

Подставляя формулы (97) и (98) в (90) и (91), находим толщину ортотропной оболочки минимального веса с композитной обмоткой.

4. Замкнутая тороидальная оболочка. Пусть средняя поверхность оболочки представляет собой тор, осью симметрии которого является ось z . Меридиональное сечение этой поверхности вращения представляет собой две одинаковые окружности радиуса a , симметричные относительно оси z (расстояние между центрами

этих окружностей равно $2d$). Внутри оболочки действует постоянное гидростатическое давление p . В этом случае растягивающие усилия

$$N_1 = \frac{1}{2} pa \left(1 + \frac{d}{r} \right), \quad N_2 = \frac{1}{2} pa, \quad (99)$$

причем $N_1 > N_2$. Применяя общие уравнения (2) к данному случаю, находим следующее выражение для толщины равнопрочной тороидальной оболочки:

$$2h = \frac{pa}{2\sigma_b} \left(1 + \frac{d}{r} \right). \quad (100)$$

Толщина монотонно убывает с удалением волокна от оси вращения. Материал оболочки предполагается однородным и изотропным.

5. Вращение оболочки. Пусть произвольная оболочка вращается с угловой скоростью ω вокруг своей оси z . В этом случае вследствие сил инерции в оболочке возникают следующие растягивающие усилия:

$$N_1 = 0, \quad N_2 = \rho \omega^2 hr^2; \quad (101)$$

ρ — плотность материала, а соответствующие напряжения

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \rho \omega^2 r^2. \quad (102)$$

В этом случае равнопрочности можно достигнуть (для оболочки любой толщины) только путем применения неоднородного материала и расположения его в оболочке таким образом, чтобы величина σ_b/ρ равнялась $\omega^2 r^2$.

§ 7. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ РАСТЯЖЕНИЯ РАВНОПРОЧНЫХ ПЛАСТИН И БЕЗМОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧЕК

Появление новых клеев, соединяющих металлы, в значительной мере стимулировало развитие многослойных конструкций, позволяющих варьировать их свойства и добиваться оптимального ешения. В частности, технологически легко выполнимы оболочки переменной толщины (со слоями различной протяженности в плане). Использование равнопрочных оболочек переменной толщины приводит к значительному снижению веса конструкции и экономии материала.

Рассмотрим тонкие пластины переменной толщины, находящиеся в обобщенном плосконапряженном состоянии. Пластина может иметь отверстия, выточки и т. п. К краям пластины приложены растягивающие усилия. Обозначим через x и y декартовы координаты в срединной плоскости пластины, являющейся плоскостью симметрии, а через $2h(x, y)$ — искомую толщину пластины. Деформации пластины будем считать упругими вплоть

до разрушения, а главные напряжения — растягивающими во всех точках пластины.

При этих условиях общие уравнения теории равнопрочных пластин будут иметь следующий вид:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + Y = 0; \quad (103)$$

закон Гука

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right); \\ N_y &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right); \\ N_{xy} &= \frac{Eh}{1+\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (104)$$

условие равнопрочности

$$\max \left\{ N_x + N_y \pm \sqrt{(N_x - N_y)^2 + 4N_{xy}^2} \right\} = 4h\sigma_B. \quad (105)$$

Здесь N_x , N_y , N_{xy} — соответствующие нормальные и сдвигающие усилия (приходящиеся на единицу длины); u и v — смещения; X и Y — компоненты вектора внешней нагрузки (приходящейся на единицу площади срединной поверхности) по осям x и y ; E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона; σ_B — прочность на разрыв (с учетом коэффициента запаса).

Шесть уравнений (103)—(105) образуют замкнутую систему относительно шести неизвестных функций u , v , h , N_x , N_y , N_{xy} . К этим уравнениям надо присоединить также граничные условия.

Приведем общие уравнения теории равнопрочных безмоментных оболочек:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_\alpha) - N_\beta \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_{\alpha\beta}) + N_{\alpha\beta} \frac{\partial A}{\partial \beta} + ABp_\alpha = 0, \quad (106)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (AN_\beta) - N_\alpha \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_{\alpha\beta}) + N_{\alpha\beta} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + ABp_\beta = 0,$$

$$\frac{N_\alpha}{R_1} + \frac{N_\beta}{R_2} + p_z = 0;$$

условие равнопрочности

$$\max \left\{ N_\alpha + N_\beta \pm \sqrt{(N_\alpha - N_\beta)^2 + 4N_{\alpha\beta}^2} \right\} = 4h\sigma_B. \quad (107)$$

Здесь α , β — криволинейные ортогональные координаты на срединной поверхности оболочки толщины $2h$ (α , β), совпадающие с линиями главных кривизн этой поверхности; z — нормаль к срединной поверхности (α , β , z образуют правую систему коор-

динат); R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки; A и B — коэффициенты первой квадратичной формы этой поверхности; N_α , N_β , $N_{\alpha\beta}$ — соответствующие нормальные и сдвигающая силы (приходящиеся на единицу длины); p_α , p_β , p_z — компоненты вектора внешней нагрузки, приходящейся на единицу площади срединной поверхности по осям α , β и z . Главные усилия предполагаются растягивающими во всех точках оболочки.

Четыре уравнения (106), (107) образуют замкнутую систему относительно четырех неизвестных функций N_α , N_β , $N_{\alpha\beta}$, h . В отсутствие объемных сил эта система расщепляется на систему (106) и уравнение (107), служащее для определения h . Последний случай для оболочек вращения был рассмотрен в предыдущем параграфе. Уравнения (106) справедливы при любом поведении материала (упругого, пластичного, вязкого и т. д.).

Полученные уравнения нелинейны, и поэтому общего решения их найти не удастся. Аналитическое исследование возможно лишь для некоторых частных случаев (в основном для осесимметричных задач). В общем случае нужно прибегнуть к численному решению при помощи ЭВМ.

В качестве примера точного расчета рассмотрим осесимметричную задачу о равнопрочном неравномерно нагретом тонком диске, вращающемся вокруг начала координат с угловой скоростью ω . Диск представляет собой кольцо $a \leq r \leq b$ в полярных координатах r , θ . Считаем, что при $r = a$ задано сжимающее напряжение $\sigma_r = -p_a$ (например, от посадки на вал), а при $r = b$ задано растягивающее напряжение $\sigma_r = p_b$ (например, от распределенной вдоль внешнего контура дополнительной массы типа лопаток и обода, как это имеет место в турбинах).

Уравнение равновесия может быть записано в следующем виде:

$$\frac{d}{dr}(h\sigma_r) + (\sigma_\theta - \sigma_r) \frac{h}{r} + \rho\omega^2 rh = 0. \quad (108)$$

Здесь σ_r и σ_θ — радиальное и окружное напряжения; ρ — плотность материала диска.

Закон Гука можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu\sigma_\theta) + \alpha t, & \left(\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} \right); \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu\sigma_r) + \alpha t, & \left(\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

Здесь ε_r и ε_θ — радиальная и окружная деформации; u_r — радиальное смещение; α — коэффициент температурного расширения; t — температура, являющаяся заданной функцией радиуса.

Условие равнопрочности имеет вид

$$\max(\sigma_\theta, \sigma_r) = \sigma_b. \quad (110)$$

Из уравнений (109) легко получить следующее соотношение:

$$\frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \alpha t = \frac{d}{dr} \left\{ r \left[\frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \alpha t \right] \right\}. \quad (111)$$

Требуется найти функцию $h(r)$ из уравнений (108), (110) и (111) при условии, что

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = -p_a, \quad \text{при } r = b \quad \sigma_r = \sigma_b. \quad (112)$$

Будем считать, что функция $t(r)$ монотонно возрастает с ростом r (это отвечает физическим условиям нагрева в дисках турбин). Тогда из физических соображений ясно, что будет существовать некоторый промежуточный радиус $r = c$ ($b \geq c \geq a$) и такой, что при $r < c$ будет $\sigma_\theta > \sigma_r$, а при $r > c$ будет $\sigma_r > \sigma_\theta$. Следовательно, уравнения (110) и (111) сводятся к следующим:

при $a \leq r \leq c$ $\sigma_\theta = \sigma_b$

$$\frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_b) + \alpha t = \frac{d}{dr} \left\{ r \left[\frac{1}{E} (\sigma_b - \nu \sigma_r) + \alpha t \right] \right\} \quad (113)$$

при $c \leq r \leq b$ $\sigma_r = \sigma_b$

$$\frac{1}{E} (\sigma_b - \nu \sigma_\theta) + \alpha t = \frac{d}{dr} \left\{ r \left[\frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_b) + \alpha t \right] \right\}. \quad (114)$$

Сравнивая (114) с граничным условием при $r = b$, получаем

$$p_b = \sigma_b. \quad (115)$$

Это условие должно выполняться всегда при наличии второй зоны.

Найдем решение линейных уравнений (113) и (114):

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \frac{1}{\nu r^{1+1/\nu}} \int_a^r r^{1/\nu} [(1 + \nu) \sigma_b + \alpha E r t'(r)] dr - \\ & - \frac{a}{r} p_a, \quad (a \leq r \leq c, \quad \sigma_r \leq \sigma_\theta = \sigma_b); \end{aligned} \quad (116)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = & \frac{1}{r^{1+\nu}} \int_c^r r^\nu [1 + \nu) \sigma_b - \alpha E r t'(r)] dr + \\ & + \frac{c}{r} \sigma_b \quad (c \leq r \leq b, \quad \sigma_\theta \leq \sigma_r = \sigma_b = p_b). \end{aligned} \quad (117)$$

Величину c определяют из условия непрерывности при $\sigma_r = \sigma_b$ это условие, согласно (116), приводит к следующему уравнению для отыскания c :

$$\nu c^{1+1/\nu} \left(\sigma_b + \frac{a}{c} p_a \right) = \int_a^c r^{1/\nu} [(1 + \nu) \sigma_b + \alpha E r t'(r)] dr. \quad (118)$$

Величина c , как видно, не зависит от b . Поэтому при $b < c$ второй зоны, определяемой формулой (117), не существует.

Теперь из уравнения (108) легко найти искомую толщину равнопрочного диска:

$$h(r) = h_a \exp \left\{ - \int_a^r \frac{\sigma_r' + \rho\omega^2 r + (\sigma_\theta - \sigma_r) r^{-1}}{\sigma_r} dr \right\}. \quad (119)$$

Здесь функции $\sigma_r(r)$ и $\sigma_\theta(r)$ определены формулами (116) и (117); $2h_a$ — толщина диска при $r = a$.

Величину h_a определяют из дополнительного условия при $r = b$:

$$2\sigma_r h = N_b, \quad (120)$$

где N_b — заданное усилие (например, при наличии сосредоточенной массы, равномерно распределенной вдоль края диска, $N_b = m\omega^2 b$); m — масса, приходящаяся на единицу длины.

Отсюда при помощи (116), (117) и (119) получаем следующие формулы:

при $b < c$

$$h_a = \frac{N_b}{2\sigma_r/\text{при } r=b} \exp \left\{ \int_a^b \frac{\sigma_r' + \rho\omega^2 r + (\sigma_b - \sigma_r) r^{-1}}{\sigma_r} dr \right\}; \quad (121)$$

при $b > c$

$$h_a = \frac{N_b}{2\sigma_b} \exp \left\{ \int_a^c \frac{\sigma_r' + \rho\omega^2 r + (\sigma_b - \sigma_r) r^{-1}}{\sigma_r} dr + \right. \\ \left. + \int_c^b \left[\frac{\rho\omega^2}{\sigma_b} r + \frac{1}{r} \left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_b} - 1 \right) \right] dr \right\}. \quad (122)$$

Здесь функции $\sigma_r(r)$ и $\sigma_\theta(r)$ определяются формулами (116) и (117).

Рассмотрим простейшие частные случаи.

1. Сплошной диск в однородном температурном поле. Пусть $a = 0$, $t'(r) = 0$. Тогда согласно формулам (116), (121) и (120) получаем всюду в диске

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_b, \quad h = h_a \exp \left(- \frac{\rho\omega^2}{2\sigma_b} r^2 \right),$$

$$h_a = \frac{N_b}{2\sigma_b} \exp \left(\frac{\rho\omega^2}{2\sigma_b} r^2 \right) \quad (0 \leq r \leq b). \quad (123)$$

2. **Бесконечная покоящаяся пластина с круговым отверстием.** Пусть $\omega = 0$, $t'(r) = 0$, $b \rightarrow \infty$. Тогда согласно формуле (116) находим

$$\sigma_r = \sigma_b \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^{1+1/\nu} \right] - \frac{a}{r} p_a, \quad \sigma_r \ll \sigma_\theta = \sigma_b. \quad (124)$$

При $r \rightarrow \infty$ будет $\sigma_r = \sigma_b$; это условие, аналогичное соотношению (115), показывает, что максимальное напряжение σ_b не может быть меньше задаваемого на границе (в данном случае при $r \rightarrow \infty$). Величина h определяется по формулам (120), (121) при условиях (124).

Рассмотрим подробнее при $t'(r) = 0$ уравнение (118), которое определяет области существования различных аналитических решений (116) и (117). В этом случае его можно записать как

$$1 + \frac{ap_a}{c\sigma_b} = 1 - \left(\frac{a}{c} \right)^{1+1/\nu}. \quad (125)$$

Единственным действительным корнем этого уравнения является $c = \infty$. Следовательно, в однородном температурном поле всегда реализуется только решение (116).

В общем случае неоднородного температурного поля уравнение (118) можно преобразовать к виду

$$\frac{ap_a}{\sigma_b} c^{1/\nu} + a^{1+1/\nu} = \frac{\alpha E}{\sigma_b} \int_a^c r^{(1+1/\nu)} t'(r) dr. \quad (126)$$

Пусть температурное поле аппроксимируется степенной функцией

$$t(r) = Ar^n, \quad (127)$$

где A и n — известные константы. В этом случае уравнение (126) запишется в виде

$$\frac{ap_a}{\sigma_b} c^{1/\nu} + a^{1+1/\nu} = \frac{\alpha n A E}{\sigma_b (n+1+1/\nu)} (c^{n+1+1/\nu} - a^{n+1+1/\nu}). \quad (128)$$

Это уравнение легко решается в радикалах при $\nu = 1/3$, $n = 2$, а также при $\nu = 1/4$, $n = 3$. Эти случаи представляют практический интерес.

§ 8. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ИЗГИБА РАВНОПРОЧНЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

При проектировании большинства конструкций не удастся обойтись без изгибного напряженного состояния пластин или оболочек. Рассмотрим вначале с точки зрения принципа равно-

прочности отдельный малый произвольно взятый элемент тонкой пластины или оболочки $2h \, d\alpha \, d\beta$ (рис. 8). Напомним, что при любой структуре этого элемента его напряженное состояние характеризуется четырьмя усилиями $N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}, N_{\beta\alpha}$; четырьмя моментами $M_\alpha, M_\beta, M_{\alpha\beta}, M_{\beta\alpha}$ и двумя перерезывающими силами Q_α, Q_β (где $\alpha\beta z$ — прямоугольная декартова система координат в рассматриваемой точке срединной поверхности оболочки, z — нормаль к этой поверхности).

В случае однородного и изотропного материала распределение напряжений по толщине пластины (по координате z) описывается двумя слагаемыми. Первое слагаемое не зависит от z ; оно описывает равномерное по z растяжение (сжатие) элемента в плоско-

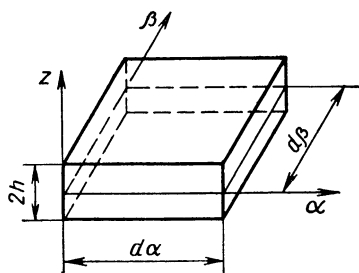


Рис. 8. Элемент оболочек

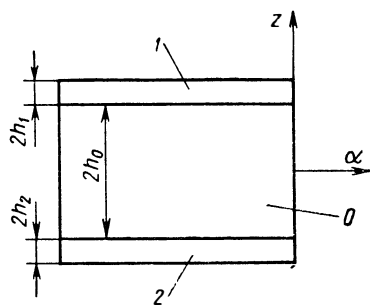


Рис. 9. Поперечное сечение трехслойной равнопрочной оболочки

сти $\alpha\beta$. Второе слагаемое представляет собой линейную функцию z ; оно описывает чистый изгиб элемента по некоторым двум перпендикулярным направлениям (вообще говоря, не совпадающим с α и β). Поэтому вследствие такого неравномерного распределения напряжений по z максимальные растягивающие напряжения в рассматриваемой точке при наличии изгиба всегда будут достигаться лишь на одной из поверхностей оболочки*. Следовательно, лишь одно волокно на поверхности $z = +h$ или $z = -h$ может быть предельно напряженным, весь остальной материал «работает» не до конца. Таким образом, при изгибе однородная оболочка не может быть равнопрочной.

Только применение оболочек, склеенных из слоев различных материалов, позволяет подойти к решению проблемы проектирования равнопрочной оболочки при изгибе. При этом на основании аналогичных соображений очевидно, что локальная структура элемента равнопрочной оболочки должна быть следующей. В трехслойной оболочке два крайних слоя должны быть максимально тонки, а средний слой — максимально толст (рис. 9). Жесткость

* От перерезывающих сил имеются также параболически распределенные по z касательные напряжения $\tau_{\alpha z}$ и $\tau_{\beta z}$.

и прочность крайних (несущих) слоев должны быть как можно больше, а средний слой (заполнитель) может иметь сравнительно малую жесткость и прочность. Заполнитель соединяет крайние слои в единое целое; материал заполнителя можно выбирать с малой плотностью. Большая часть нагрузки должна приходиться на крайние слои, причем слой, находящийся в состоянии растяжения, может быть навит из волокон, имеющих наиболее высокую удельную прочность. В качестве материала крайнего слоя, работающего на сжатие, оптимальным с точки зрения удельной прочности является материал типа стекла. Если последнее невозможно конструктивно или технологически, следует использовать прочные стали. Материал заполнителя выбирают из композитных материалов.

Таким образом, идеальная равнопрочная оболочка, работающая на изгиб и растяжение, должна удовлетворять следующим требованиям: трехслойность (между слоями — жесткое сцепление); в крайних (несущих) слоях отсутствует изгиб, они работают как безмоментные оболочки, одна — на растяжение, другая — на сжатие; средний слой (заполнитель) работает в основном на сдвиг и на сжатие; толщина каждого слоя (а следовательно, и всей оболочки) переменна и подлежит определению в процессе решения.

Для определения толщины слоев служат дополнительные условия равнопрочности, которые имеют следующий вид:

для слоя 1, работающего на растяжение,

$$\max(N_1, N_2) = 2\sigma_b h_1; \quad (129)$$

для слоя 2, работающего на сжатие,

$$\max(|N_1|, |N_2|) = 4\tau_b h_2; \quad (130)$$

для заполнителя 0

$$\max|\sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^2 + 4(\tau_{\alpha z}^2 + \tau_{\beta z}^2)}| = 2\tau_0^2. \quad (131)$$

Здесь N_1 и N_2 — главные усилия, σ_z , $\tau_{\alpha z}$ и $\tau_{\beta z}$ — соответствующие нормальное и касательные напряжения в заполнителе; σ_b , τ_b , τ_0 — постоянные прочности соответствующих слоев; $2h_1$ и $2h_2$ — толщина крайних слоев; $2h_0$ — толщина заполнителя. На основе принципа равнопрочности легко сформулировать соответствующие условия также на тот случай, когда оба крайних слоя имеют напряжения одного знака (растяжение или сжатие) или же когда в одном и том же слое имеются напряжения различных знаков.

Сформулируем общую систему уравнений теории изгиба равнопрочных пластин и оболочек.

Слой 1:

уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(BN_{\alpha 1} - N_{\beta 1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_{\alpha \beta 1}) + N_{\alpha \beta 1} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \right. \\ \left. + AB\rho_{\alpha 1} = 0, \quad (\rho_{\alpha 1} = -\tau_{\alpha z} + p_{\alpha 1}), \right. \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_{\beta 1} - N_{\alpha 1} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_{\alpha \beta 1}) + N_{\alpha \beta 1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \\ \left. + AB\rho_{\beta 1} = 0 \quad (\rho_{\beta 1} = -\tau_{\beta z} + p_{\beta 1}), \right. \\ \left. \frac{N_{\alpha 1}}{R_1} + \frac{N_{\beta 1}}{R_2} + p_{z1} = 0 \quad (\rho_{z1} = -\sigma_z + p_{z1}); \right\} \quad (132) \end{aligned}$$

уравнения закона Гука

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha 1} &= \frac{2E_1 h_1}{1 + \nu_1} \left(\frac{\nu_1}{1 - 2\nu_1} \Delta + e_{\alpha\alpha} \right); \\ N_{\beta 1} &= \frac{2E_1 h_1}{1 + \nu_1} \left(\frac{\nu_1}{1 - 2\nu_1} \Delta + e_{\beta\beta} \right); \\ N_{\alpha \beta 1} &= \frac{E_1 h_1}{1 + \nu_1} e_{\alpha\beta}, \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

где

$$\left. \begin{aligned} e_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{A} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v_1 + \frac{\omega_1}{R_1}; \\ e_{\beta\beta} &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\omega_1}{R_2} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u_1; \\ e_{\alpha\beta} &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_1}{A} \right) + \frac{B\partial}{A\partial \alpha} \left(\frac{v_1}{B} \right); \\ \Delta &= \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (Bu_1) + \frac{\partial}{\partial \beta} (Av_1) + \right. \\ &\quad \left. + AB \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \omega_1 \right]; \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

условие равнопрочности

$$\max [N_{\alpha 1} + N_{\beta 1} \pm \sqrt{(N_{\alpha 1} - N_{\beta 1})^2 + 4N_{\alpha \beta 1}^2}] = 2\sigma_s h_1. \quad (135)$$

Слой 2:

уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_{\alpha 2}) - N_{\beta 2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_{\alpha \beta 2}) + N_{\alpha \beta 2} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \\ \left. + AB\rho_{\alpha 2} = 0 \quad (\rho_{\alpha 2} = \tau_{\alpha z} + p_{\alpha 2}), \right. \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_{\beta 2}) - N_{\alpha 2} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_{\alpha \beta 2}) + N_{\alpha \beta 2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \\ \left. + AB\rho_{\beta 2} = 0 \quad (\rho_{\beta 2} = \tau_{\beta z} + p_{\beta 2}), \right. \\ \left. \frac{N_{\alpha 2}}{R_1} + \frac{N_{\beta 2}}{R_2} + p_{z2} = 0 \quad (\rho_{z2} = \sigma_z + p_{z2}); \right\} \quad (136) \end{aligned}$$

уравнения закона Гука

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha 2} &= \frac{2E_2 h_2}{1 + \nu_2} \left(\frac{\nu_2}{1 - 2\nu_2} \Delta + e_{\alpha\alpha} \right); \\ N_{\beta 2} &= \frac{2E_2 h_2}{1 + \nu_2} \left(\frac{\nu_2}{1 - 2\nu_2} \Delta + e_{\beta\beta} \right); \\ N_{\alpha\beta 2} &= \frac{E_2 h_2}{1 + \nu_2} e_{\alpha\beta}, \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

где

$$\left. \begin{aligned} e_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{A} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v_2 + \frac{\omega_2}{R_1}; \\ e_{\beta\beta} &= \frac{1}{B} \frac{\partial v_2}{\partial \beta} + \frac{\omega_2}{R_2} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u_2; \\ e_{\alpha\beta} &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_2}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v_2}{B} \right); \\ \Delta &= \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (B u_2) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A v_2) + AB \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \omega_2 \right]; \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

условие равнопрочности

$$\max |N_{\alpha 2} + N_{\beta 2} \pm \sqrt{(N_{\alpha 2} - N_{\beta 2})^2 + 4N_{\alpha\beta 2}^2}| = 4\tau_b h_2. \quad (139)$$

Слой 0 [заполнитель]:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial \tau_{\alpha z}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{\beta z}}{\partial z} = 0; \quad (140)$$

уравнения закона Гука

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\alpha z} &= \mu_0 \frac{u_1 - u_2}{2h_0}, \quad \left(\mu_0 = \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)} \right); \\ \tau_{\beta z} &= \mu_0 \frac{v_1 - v_2}{2h_0}; \\ \sigma_z &= E_0 \frac{\omega_1 - \omega_2}{2h_0}; \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

условие равнопрочности

$$\max |\sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^2 + 4(\tau_{\alpha z}^2 + \tau_{\beta z}^2)}| = 2\tau_0. \quad (142)$$

Здесь приняты следующие обозначения: $\alpha\beta$ — криволинейные ортогональные координаты на срединной поверхности слоя 0 (заполнителя), совпадающие с линиями главных кривизн этой

поверхности; z — нормаль к этой поверхности, направление z выбирают так, чтобы α, β, z составляло правую систему координат; R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности; A и B — коэффициенты первой квадратичной формы этой поверхности ($ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2$, где ds — дифференциал длины дуги на поверхности), $N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}$ с дополнительными индексами 1 или 2 — соответствующие усилия в безмоментных оболочках 1 или 2; u, ω, ω — компоненты вектора смещения по осям α, β и z (индексы 1 и 2 соответствуют слоям 1 и 2); $E_0, E_1, E_2, \nu_0, \nu_1, \nu_2$ — соответствующие модули Юнга и коэффициенты Пуассона; p_α, p_β, p_z с индексами 1 или 2 — соответствующие компоненты вектора внешней (поверхностной и объемной) нагрузки, приходящейся на единицу площади поверхности и относящейся к безмоментным оболочкам 1 или 2.

При выводе уравнений (132)—(142) предполагали также: а) толщина заполнителя мала по сравнению с характерным линейным размером оболочки (например, радиусом кривизны или характерным размером в плане), б) толщина крайних слоев мала по сравнению с толщиной заполнителя, в) напряжения от объемной силы в заполнителе малы по сравнению с напряжениями от других внешних нагрузок, г) выполняется соотношение $d\alpha d\beta \gg h_0^2$.

В случае криволинейных оболочек общая система уравнений (132)—(142) содержит всего 18 уравнений относительно 18 неизвестных функций: $h_0, h_1, h_2, \tau_{\alpha z}, \tau_{\beta z}, \sigma_z, N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}, v, \nu, \omega$ (последние шесть функций с индексом 1 и 2). Следовательно, система уравнений замкнута. В случае плоских пластин эта система уравнений сводится к следующей системе (запись системы дается в прямоугольных декартовых координатах xy).

Уравнения равновесия (слой 1)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy1}}{\partial y} + (p_{x1} - \tau_{xz}) &= 0; \\ \frac{\partial N_{xy1}}{\partial x} + \frac{\partial N_{y1}}{\partial y} + (p_{y1} - \tau_{yz}) &= 0; \\ N_{x1} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} + N_{y1} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} + 2N_{xy1} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x \partial y} + (p_{z1} - \sigma_z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (143)$$

Уравнения равновесия (слой 2)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy2}}{\partial y} + (p_{x2} + \tau_{\alpha z}) &= 0; \\ \frac{\partial N_{xy2}}{\partial x} + \frac{\partial N_{y2}}{\partial y} + (p_{y2} + \tau_{\beta z}) &= 0; \\ N_{x2} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x^2} + N_{y2} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial y^2} + 2N_{xy2} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x \partial y} + (p_{z2} + \sigma_z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (144)$$

Уравнения закона Гука (слои 1 и 2, индексы опущены)

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{2Eh}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right]; \\ N_y &= \frac{2Eh}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right]; \\ N_{xy} &= \frac{Eh}{1+\nu} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

В остальных уравнениях (135), (139), (141) и (142) нужно лишь изменить индексы $\alpha \rightarrow x$, $\beta \rightarrow y$. Эти уравнения вместе с уравнениями (143)—(145) составляют замкнутую систему относительно тех же 18 неизвестных функций. Можно составить более точные уравнения, учитывающие изгиб оболочки, в крайних слоях, однако такая конструкция не отвечает принципу равнопрочности. Если все же по экономическим или технологическим соображениям применение такой оболочки неизбежно, то наиболее рациональную ее толщину следует определять из обычных уравнений теории оболочек переменной толщины плюс одно условие «равнопрочности». Последнее формулируется следующим образом: максимальное растягивающее напряжение в одном из крайних волокон оболочки постоянно во всех точках оболочки (т. е. при всех α и β).

Как видно, уравнения теории равнопрочных пластин и оболочек (см. § 7 и этот параграф) являются существенно нелинейными. Поэтому аналитическое решение возможно лишь для небольшого круга задач, обладающих высокой степенью симметрии. Некоторые из таких задач были рассмотрены выше (§ § 2—7), другие (а таких большинство) — еще ждут своего решения. Наибольшие надежды связаны с применением ЭВМ и численных методов анализа.

§ 9. ИЗГИБ РАВНОПРОЧНЫХ БАЛОК И ПЛАСТИН

Пусть поперечное сечение балки имеет две оси симметрии, совпадающие с осями O_y и O_z (начало координат совпадает с центром сечения, ось O_x направлена вдоль центральной оси балки). Для определенности будем считать, что изгиб балки происходит вдоль плоскости O_{xy} . Запишем основные соотношения теории изгиба балок:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}, \quad \frac{dM}{dx} = -Q(x), \quad \frac{d^2M}{dx^2} = q(x),$$

$$\sigma_x = -\frac{M(x)}{I} y, \quad I = \iint_{S_F} y^2 dy dz. \quad (146)$$

Здесь v — смещение центральной оси балки; E — модуль Юнга материала; I — момент инерции поперечного сечения

балки; S_F ; M , Q и q — момент, перерезывающая сила и распределенная нагрузка соответственно; σ_x — напряжение.

Балку будем считать достаточно длинной, так что можно пренебречь касательными напряжениями.

Пусть форма поперечного сечения S_F балки задана; требуется определить оптимальное распределение размеров этого сечения вдоль оси балки (балка переменного поперечного сечения). В данном случае равнопрочность конструкции по всему объему недостижима, поэтому будем добиваться, чтобы равнопрочным было наиболее растянутое внешнее волокно балки во всех ее сечениях; иначе говоря, чтобы

$$\sigma_x = \sigma_B \text{ при } y = -h(x), \quad (147)$$

где $2h$ — высота балки.

На основании соотношений (146) и (147) получаем основные уравнения теории равнопрочных балок

$$M(x)h = \sigma_B I(h), \quad (148)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\sigma_B}{Eh}. \quad (149)$$

Первое уравнение является алгебраическим; разрешая его относительно h , находим $h(x)$; подставляя $h(x)$ во второе уравнение, получаем общее решение

$$v = \frac{\sigma_B}{E} \int dx \int \frac{dx}{h(x)}, \quad (150)$$

зависящее от двух произвольных постоянных, определяемых из условий закрепления на торцах. Рассмотрим конкретный случай.

Прямоугольное поперечное сечение [пластина]. В этом случае

$$I = \frac{4}{3} ah^3, \quad (151)$$

где $2a$ — толщина поперечного сечения балки.

Если a задано, то решая (148) и (147) совместно, находим

$$h(x) = \frac{\sqrt[3]{3}}{2\sqrt{a\sigma_B}} \sqrt[3]{M(x)}. \quad (152)$$

Если сечения балки заданы подобными

$$a = fa_0, \quad h = fh_0, \quad (153)$$

где a_0 и h_0 — заданы, то коэффициент подобия будет отыскиваемой функцией, равной согласно (148) и (150)

$$f(x) = \left[\frac{3M(x)}{4a_0\sigma_B h_0^2} \right]^{1/3}. \quad (154)$$

Формулы (152)—(154) позволяют по эпюре моментов сразу найти размеры равнопрочной балки.

Для достижения минимального веса можно варьировать параметр a (в первом случае) и параметры a_0, h_0 (во втором случае). Так как объем стержня равен $\int ah \, dx$, нужно требовать минимума величины соответственно

$$\sqrt{\frac{a}{\sigma_B}} \int \sqrt{M(x)} \, dx, \left[\frac{a_0}{h_0 \sigma_B^2} \right]^{1/3} \int [M(x)]^{2/3} \, dx. \quad (155)$$

При заданных внешних нагрузках нужно минимизировать множители, стоящие перед знаком интеграла (учитывая, что при слишком малой толщине балки возникает потеря устойчивости).

При учете массовых сил (например, тяжести или инерции) величина M в формуле (148) будет зависеть также от h . Например, для балки длиной $2l$, провисшей под действием только собственного веса, нагрузка $q = \rho g a h$ (где ρg — удельный вес) и уравнения задачи будут следующими:

$$d^2(ah)^2/dx^2 = -\lambda ah, \quad d^2v/dx^2 = \sigma_B/Eh, \quad \lambda = 3\rho g/4\sigma_B. \quad (156)$$

Первое уравнение служит для определения размеров равнопрочной балки. Опуская выкладки, запишем его решение для упомянутых выше двух случаев:

$$x = \sqrt{3} \int \frac{h \, dh}{\sqrt{c_1 - \lambda h^3}} \quad (a \text{ — задано}); \quad (157)$$

$$x = \int \frac{3f^2 \, df}{\sqrt{c_2 - (6\lambda/5h_0) f^5}} \quad (\text{сечения балки подобны}). \quad (158)$$

Здесь c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Формулы (157) и (158) определяют f и h как неявные функции x (интегралы в замкнутом виде не берутся, поэтому требуется численное интегрирование). Постоянные c_1 и c_2 определяют из граничных условий. Например, если балка длиной $2l$ свободно опирается на концах, а середина балки совпадает с началом координат, то можно найти следующие значения этих постоянных:

$$c_1 = \lambda h_{\max}^3, \quad c_2 = \frac{6\lambda}{5h_0} f_{\max}^5, \quad (159)$$

где f_{\max} и h_{\max} — наибольшие значения соответствующих функций (в середине балки). Получаем соответственно

$$x = \int_{h_{\max}}^h \frac{\sqrt{3} h \, dh}{\sqrt{\lambda (h_{\max}^3 - h^3)}}, \quad x = \int_{f_{\max}}^f \frac{3f^2 \, df}{\sqrt{(6\lambda/5h_0) (f_{\max}^5 - f^5)}}. \quad (160)$$

Момент в произвольном сечении x

$$M = -\rho g \int_l^x ah \, dx \quad (x \geq 0). \quad (161)$$

Отсюда при помощи (148) и (151) находим следующее уравнение для определения f_{\max} и h_{\max} :

$$\lambda \int_0^l ah \, dx = ah^2, \quad (162)$$

здесь a и h определяются формулами (160).

Аналогично можно рассматривать другие сечения, различные нагрузки и граничные условия. Двухавтовое сечение при изгибе с точки зрения конструкций минимальной массы представляет наибольший интерес. Его также можно рассматривать изложенным методом, при котором оптимальное решение находят из решения некоторой прямой (но нелинейной) задачи, минуя анализ напряженного состояния и прогибов. Легко убедиться непосредственной проверкой, что функция $h(x)$ или $f(x)$ для равнопрочной балки минимизирует общую массу балки по сравнению с другими наперед заданными функциями $h(x)$ или $f(x)$.

Примечание. Намотка в форме «Кокона» позволяет избежать этих недостатков, однако появляется большой мидель поперечного сечения, так как согласно принципу равнопрочности корпус РДТТ наибольшей эффективности при такой намотке должен быть близок к сфере. Следует отметить, что в задней части корпуса С-двигателя может находиться вспомогательное сопло.

Г л а в а II

РАВНОПРОЧНЫЕ ОТВЕРСТИЯ В УПРУГИХ ТЕЛАХ

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Пластины с отверстиями часто встречаются в различных конструкциях. Разрушение таких конструкций обычно начинается в местах наиболее резкой концентрации напряжений вблизи отверстий. Представляет интерес определение формы равнопрочных контуров отверстий, на которых технологически неизбежная концентрация напряжений была бы наименьшей по сравнению со всеми другими контурами.

Рассмотрим состояние в бесконечной изотропной и однородной упругой пластине, ослабленной криволинейными отверстиями, число которых может быть любым. Предположим, что к краям отверстий приложены постоянные нормальные и касательные усилия

$$\sigma_n = p, \quad \tau_{nt} = \tau, \quad (163)$$

а на бесконечности действует однородное поле постоянных напряжений *

$$\sigma_x = \sigma_x^\infty, \quad \sigma_y = \sigma_y^\infty, \quad \tau_{xy} = \tau^\infty. \quad (164)$$

Здесь xy — прямоугольные декартовы координаты; t и n — касательная и нормаль к контуру отверстия (образующие правую систему nt); σ_x , σ_y , τ_{xy} , σ_t , σ_n , τ_{tn} — соответственно компоненты тензора напряжения.

Поставим следующую задачу: найти форму отверстий и их взаимное расположение такое, чтобы тангенциальное нормальное напряжение σ_t , действующее на этих контурах, было постоянной величиной, одинаковой для всех отверстий. Таким образом, требуем, чтобы на всех контурах отверстий выполнялось условие

$$\sigma_t = \sigma = \text{const.} \quad (165)$$

Такие отверстия называют равнопрочными [83]. Величина σ , как и сами отверстия, подлежит определению. На равнопрочных отверстиях пластическая зона возникает одновременно по всему

* В случае двоякопериодического ряда отверстий условия, заменяющие (164), приведены в п. 5 данной главы. Эта глава основана на работе [90].

контур. Постановка и решение некоторых задач такого типа имеется в работах [19, 33—35, 59, 83—86, 134].

Компоненты напряжений представим [61] через потенциалы Колосова—Мухелишвили $\Phi(z)$ и $\psi(z)$

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad (z = x + iy);$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]. \quad (166)$$

Функции согласно условиям (164) при стремлении в бесконечность (при $z \rightarrow \infty$)*

$$\Phi(z) = \frac{1}{4} (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + O(z^{-2}),$$

$$\Psi(z) = b + O(z^{-2}), \quad (167)$$

где $b = \frac{1}{2} (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) + i\tau^\infty$.

Используя известные соотношения [61]

$$\sigma_t + \sigma_n = \sigma_x + \sigma_y,$$

$$\sigma_t - \sigma_n + 2i\tau_{tn} = e^{2i\alpha} (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}), \quad (168)$$

где α — угол между внешней нормалью к контуру и осью x , отсчитываемый от x к n . Граничные условия (163) и (165) на неизвестных контурах L_0 отверстий можно представить в виде

$$4 \operatorname{Re} \Phi(z) = \sigma + p, \quad (z \in L_0); \quad (169)$$

$$\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) = ae^{-2i\alpha}, \quad (z \in L_0), \quad (170)$$

где $a = \frac{1}{2} (\sigma - p) + i\tau$.

Если аналитическая функция ограничена внутри области (в том числе, в бесконечно удаленной точке), а на границе области ее действительная часть постоянна, то сама эта функция постоянна. Следовательно, решение краевой задачи (167), (169) для функции имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{1}{4} (\sigma + p), \quad (171)$$

причем

$$\sigma = \sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty - p. \quad (172)$$

Краевое условие (170) с учетом формулы (171) запишем в виде

$$e^{2i\alpha} \psi(z) = a, \quad (z \in L_0), \quad (173)$$

причем

$$\psi(z) = b + O(z^{-2}) \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

* Случай бесконечносвязной области является особым, и его следует рассматривать отдельно.

§ 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Перейдем на параметрическую плоскость комплексного переменного ζ при помощи конформного преобразования, осуществляемого аналитической функцией $\omega(\zeta)$

$$z = \omega(\zeta). \quad (174)$$

Напомним основные факты из теории конформных отображений многосвязных областей [46]: а) всякую n -связную область, включающую бесконечную удаленную точку, всегда можно конформно отобразить на внешнем виде некоторых n разрезов, параллельных действительной оси, с соответствием бесконечно удаленных точек; б) при $n \geq 3$ это отображение единственное, если задать поведение отображающей функции на бесконечности при $\zeta \rightarrow \infty$:

$$\omega(\zeta) = \zeta + o(1).$$

Будем считать, что искомая функция $\omega(\zeta)$ задает взаимно однозначное соответствие упругой области на плоскости z и внешнего вида соответствующего числа разрезов M на плоскости ζ , параллельной действительной оси (рис. 10).

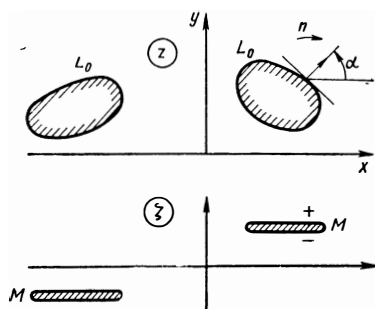


Рис. 10. Контуры равнопрочных отверстий в физической плоскости z и в параметрической плоскости ζ

Определим $e^{2i\alpha}$. Дадим приращение точке на плоскости z в направлении нормали к контуру L_0 :

$$dz = e^{i\alpha} |dz|. \quad (175)$$

Соответствующая точка плоскости ζ в силу конформности отображения переместится по нормали к разрезу, т. е. к действительной оси

$$d\zeta = \pm i |d\zeta|. \quad (176)$$

При помощи (175) и (176) находим

$$e^{i\alpha} = \frac{dz}{|dz|} = \frac{\omega'(\zeta) d\zeta}{|\omega'(\zeta)| |d\zeta|} = \pm i \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}.$$

Следовательно:

$$e^{2i\alpha} = -\frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}. \quad (177)$$

Краевую задачу (173) при помощи (177) запишем теперь так:

$$-\psi(\zeta) \omega'(\zeta) = \overline{a \omega'(\zeta)} \quad (\zeta \in M); \quad (178)$$

здесь $\psi(\zeta) = \Psi[\omega(\zeta)]$. Функции $\psi(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ подлежат определению из краевой задачи (178).

Возьмем действительную и мнимую часть в выражении (178), в результате получим

$$\operatorname{Re} F'(\zeta) = 0 \quad (\zeta \in M); \quad (179)$$

$$\operatorname{Im} G'(\zeta) = 0 \quad (\zeta \in M). \quad (180)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} F'(\zeta) &= \psi(\zeta) \omega'(\zeta) + \bar{a} \omega'(\zeta), \\ G'(\zeta) &= \psi(\zeta) \omega'(\zeta) - \bar{a} \omega'(\zeta). \end{aligned} \right\} \quad (181)$$

Функции $F'(\zeta)$ и $G'(\zeta)$ аналитичны всюду во внешности разрезов M . В окрестности бесконечно удаленной точки они ограничены, так как функции $\psi(\zeta)$ и $\omega'(\zeta)$ ограничены при $\zeta \rightarrow \infty$.

Поведение функций $F'(\zeta)$ и $G'(\zeta)$ в концах разрезов M определяется требованиями, накладываемыми на искомые контуры отверстий L_0 . Будем требовать, чтобы все контуры отверстий L_0 были гладкими, т. е. не содержали точек возврата и угловых точек. При этом дополнительном условии функция $\psi(\zeta)$ будет ограничена всюду в окрестности точек разрезов M , а функция $\omega'(\zeta)$ ограничена всюду, за исключением концов разрезов M , в окрестности которых функция $\omega(\zeta)$ будет иметь степенную особенность порядка $1/2$. В соответствии с этим условием на основе (181) аналитические функции $F'(\zeta)$ и $G'(\zeta)$ будут ограничены во всей плоскости ζ , за исключением концов разрезов M , в которых они будут иметь степенную особенность порядка $1/2$. Например, если точка ζ_M — конец одного из разрезов M , то при $\zeta \rightarrow \zeta_M$

$$F'(\zeta) = 0 \left(\frac{1}{\sqrt{\zeta - \zeta_M}} \right), \quad G'(\zeta) = 0 \left(\frac{1}{\sqrt{\zeta - \zeta_M}} \right). \quad (182)$$

Краевые задачи (179) и (180) представляют собой классические задачи Дирихле для внешности разрезов, причем решение этих задач найдем в классе функций, ограниченных на бесконечности и имеющих особенность вида (182) в концах разрезов. Именно к такой математической задаче приводит гидродинамическая проблема обтекания решеток профилей потенциальным потоком идеальной несжимаемой невесомой жидкости [73]. При этом функциям F и G соответствует комплексный потенциал скорости потока жидкости.

Таким образом, краевая задача (179) или (180) в математическом отношении совершенно аналогична следующей гидродинамической задаче: система M плоских профилей нулевой толщины в плоскости ζ обтекается потенциальным бесциркуляционным потоком идеальной несжимаемой жидкости (скорость потока на бесконечности ограничена), требуется найти комплексный потенциал течения.

После того как функции $F(\zeta)$ и $G(\zeta)$ будут найдены, искомые функции $\psi(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ определяют при помощи уравнений (181) по следующим формулам:

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{2a} \int [F'(\zeta) - G'(\zeta)] d\zeta = \frac{1}{2a} [F(\zeta) - G(\zeta)] + c_0; \quad (183)$$

$$\psi(\zeta) = \bar{a} \frac{F'(\zeta) + G'(\zeta)}{F'(\zeta) - G'(\zeta)} \quad (184)$$

(c_0 — произвольная постоянная).

Выясним еще одно условие, которое вытекает из физического требования отсутствия дислокаций при обходе контура каждого отверстия. Из выражения для комплексного вектора смещения [61] и формулы (171) легко получить следующие условия, которым должна удовлетворять функция $\omega(\zeta)$,

$$\oint \omega'(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta = 0. \quad (185)$$

Здесь контурный интеграл берется по контуру, охватывающему один из разрезов M . Число условий (185) равно числу разрезов. Деформируя контур интегрирования в верхний и нижний берега соответствующего разреза и используя условие (179), получим

$$\oint \overline{\omega'(\zeta)} d\zeta = 0. \quad (186)$$

Так как разрезы M параллельны мнимой оси, $d\zeta = \overline{d\zeta}$ следовательно, условие (186) означает, что функция $\omega(\zeta)$ должна быть однозначной при обходе любого из разрезов M . Однако это условие уже содержится в требовании конформности отображения, осуществляемого функцией $\omega(\zeta)$. Поэтому требование отсутствия дислокаций в многосвязной упругой области в данном случае вытекает из условия однозначности функции $\omega(\zeta)$.

Поле упругих напряжений согласно формулам (166), (171), (172), (178) и (181) находим из следующих соотношений:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty, \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = \frac{F'(\zeta) + G'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}. \quad (187)$$

Таким образом, развитый подход позволяет находить эффективное решение обратных задач плоской теории упругости для любого числа отверстий и при любом их расположении.

§ 3. ОДНО ИЛИ ДВА ОТВЕРСТИЯ

Двухсвязную и трехсвязную область всегда можно конформно отобразить на внешность соответствующего числа разрезов вдоль действительной оси [82].

1. Одно отверстие. В случае одного отверстия на плоскости будет один разрез, который без потери общности можно считать разрезом $(-1, +1)$ вдоль действительной оси.

Пусть при $\zeta \rightarrow \infty$ имеем $\omega(\zeta) = c_1 \zeta + 0(\zeta^{-1})$. Величину c_1 можно считать действительной. Это условие вместе с заданием длины разреза согласно теореме Римана исчерпывает возможный произвол в описании конформного преобразования двух заданных областей.

Согласно (181) при $\zeta \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} F'(\zeta) &= (b + \bar{a}) c_1 + 0(\zeta^{-2}); \\ G'(\zeta) &= (b - \bar{a}) c_1 + 0(\zeta^{-2}). \end{aligned} \quad (188)$$

Решение краевых задач (179) и (180) для внешности указанного разреза при условиях (182) и (188) имеет следующий вид [73]:

$$\left. \begin{aligned} F'(\zeta) &= ic_1 \operatorname{Im}(b + \bar{a}) + \frac{c_1 \zeta \operatorname{Re}(b + \bar{a}) + d_1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}}; \\ G'(\zeta) &= c_1 \operatorname{Re}(b - \bar{a}) + \frac{ic_1 \zeta \operatorname{Im}(b - \bar{a}) + id_2}{\sqrt{\zeta^2 - 1}}. \end{aligned} \right\} \quad (189)$$

Здесь при $\zeta \rightarrow \infty$ имеем $\sqrt{\zeta^2 - 1} = \zeta + 0(\zeta^{-1})$. Действительные постоянные d_1 и d_2 произвольны.

Интегрируя выражения (189), находим

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= ic_1 \zeta \operatorname{Im}(b + \bar{a}) + c_1 \sqrt{\zeta^2 - 1} \operatorname{Re}(b + \bar{a}) + \\ &+ d_1 \ln(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}); \end{aligned} \quad (190)$$

$$\begin{aligned} G(\zeta) &= c_1 \zeta \operatorname{Re}(b - \bar{a}) + ic_1 \sqrt{\zeta^2 - 1} \operatorname{Im}(b - \bar{a}) + \\ &+ id_2 \ln(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}). \end{aligned}$$

Отсюда при помощи (183), полагая $c_0 = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \omega(\zeta) &= \frac{c_1}{2} (m_1 \zeta + m_2 \sqrt{\zeta^2 - 1}) + \\ &+ \frac{d_1 - id_2}{2\bar{a}} \ln(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}), \end{aligned} \quad (191)$$

где $m_1 = 1 - \bar{b}/\bar{a}$, $m_2 = 1 + \bar{b}/\bar{a}$.

Функция $\omega(\zeta)$ должна быть однозначной во внешности разреза $(-1, +1)$. Согласно решению (191) это условие выполняется лишь в том случае, если $d_1 = d_2 = 0$, что и предполагаем в дальнейшем.

Уравнение контура отверстия в параметрическом виде получается из формулы (191) при $d_1 = d_2 = 0$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} c_1 (\zeta \operatorname{Re} m_1 \pm \sqrt{1 - \zeta^2} \operatorname{Im} m_2) \\ y &= \frac{1}{2} c_1 (\zeta \operatorname{Im} m_1 \pm \sqrt{1 - \zeta^2} \operatorname{Re} m_2) \quad (-1 < \zeta < 1) \end{aligned} \right\} \quad (192)$$

или в комплексном виде

$$z = \frac{1}{2} c_1 (m_1 \zeta \pm i m_2 \sqrt{1 - \zeta^2}), \quad (193)$$

где ζ — действительный параметр, меньший единицы (верхний знак в (192) отвечает верхнему берегу разреза, нижний — нижнему).

Исключая в формулах (192) параметр ζ , приходим к кривой второго порядка, которая представляет собой эллипс, так как на основании уравнения (193) любым значениям параметра ζ , по модулю меньшим единицы, отвечают конечные значения комплексного вектора кривой. Найдем основные параметры этого эллипса, представляющего собой искомый контур отверстия. Фокусы эллипса представляют собой точки ветвления на двулистной римановой поверхности функции $\zeta = \zeta(z)$, обратной функции (191). Отсюда находим комплексные векторы фокусов

$$Z_F = \pm \frac{1}{2} c_1 \sqrt{m_1^2 - m_2^2}. \quad (194)$$

Центр эллипса (середина отрезка, соединяющего фокусы) совпадает с началом координат. Угол, под которым большая ось эллипса наклонена к оси абсцисс,

$$\alpha_F = \frac{1}{2} \arg (m_1^2 - m_2^2). \quad (195)$$

Точка $z = \frac{1}{2} c_1 m_1$ согласно (193) лежит на эллипсе. Согласно фокальному свойству эллипса сумма расстояний от этой точки до фокусов равна большому диаметру эллипса $2a$, т. е.

$$a_1 = \frac{1}{4} c_1 (|\sqrt{m_1^2 - m_2^2} + m_1| + |m_1 - \sqrt{m_1^2 - m_2^2}|). \quad (196)$$

Полудлина малой оси эллипса равна $\sqrt{a_1^2 - |z_F|^2}$.

Таким образом, контуры искомого отверстия представляют собой семейство подобных эллипсов (так как c_1 — произвольный действительный параметр), ориентация и основные параметры которых даны формулами (194)—(196). В случае $\tau^\infty = \tau = 0$, когда величины m_1 и m_2 будут действительными, получается результат, полученный ранее другим методом [83].

2. Два отверстия. Внешность двух отверстий в плоскости z конформно отобразим на внешность двух разрезов (λ_1, λ_2) и

(λ_3, λ_4) вдоль действительной оси плоскости ζ с соответствием бесконечно удаленных точек. Не ограничивая общности, коэффициент c_1 в условии на бесконечности (188) можно считать действительным и положительным. Решение задач Дирихле (179) и (180) для указанных разрезов при условиях на бесконечности (188) имеет вид

$$F'(\zeta) = ic_1 \operatorname{Im}(b + \bar{a}) + \frac{c_1 \zeta^2 \operatorname{Re}(\bar{a} + b) + d_1 \zeta + d_2}{\sqrt{(\zeta - \lambda_1)(\zeta - \lambda_2)(\zeta - \lambda_3)(\zeta - \lambda_4)}},$$

$$G'(\zeta) = c_1 \operatorname{Re}(b - \bar{a}) + \frac{ic_1 \zeta^2 \operatorname{Im}(b - \bar{a}) + id_3 \zeta + id_4}{\sqrt{(\zeta - \lambda_1)(\zeta - \lambda_2)\zeta - \lambda_3)(\zeta - \lambda_4)}}. \quad (197)$$

Здесь d_1, d_2, d_3, d_4 произвольные действительные постоянные, корень в формулах (197) ведет себя как $\zeta^2 + 0(\zeta)$ при $\zeta \rightarrow \infty$. Постоянные λ_1 и λ_2 в данном случае можно положить $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$.

В формулах (197) содержится всего семь действительных постоянных. Четыре из них определяют из двух комплексных условий однозначности функции $\omega(\zeta)$ [см. формулу (187)]. Постоянная c_1 , задающая масштаб в физической плоскости z , неопределенна по самой постановке задачи. Остаются две постоянные, для определения которых на искомые контуры и их взаимное расположение нужно накладывать дополнительные требования. Таким образом, в общем несимметричном случае контуры искомого отверстия образуют семейство, зависящее от двух произвольных действительных параметров. Громоздкий результат интегрирования в эллиптических функциях опустим.

Рассмотрим подробнее симметричный случай, когда $\tau^\infty = \tau = 0$ (рис. 11). Здесь контуры обоих отверстий будут симметричны относительно осей абсцисс и ординат. Для определенности будем считать, что одно отверстие целиком расположено в левой полуплоскости ($x < 0$), а другое — симметрично в правой ($x > 0$). В формулах (197) можно положить (без ограничения общности)

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = 2, \quad (198)$$

$$d_1 = d_3 = d_4 = 0 \quad (\operatorname{Im} a = 0, \operatorname{Im} b = 0).$$

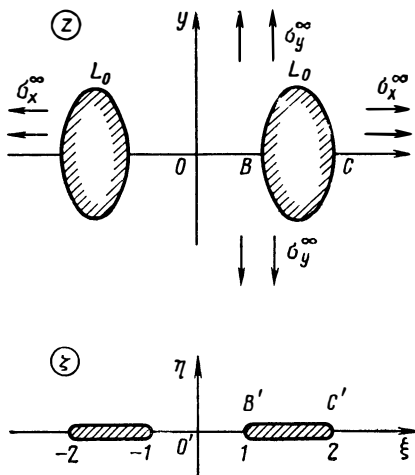


Рис. 11. Два равнопрочных отверстия в однородном поле напряжений

Последнее соотношение является следствием симметрии задачи и условия $dy/d\xi$ при $|\xi| < 1$.

В результате получим

$$F'(\xi) = \frac{c_1 \xi^2 (b+a) + d_2}{V(\xi^2-1)(\xi^2-4)}, \quad G'(\xi) = c_1 (b-a). \quad (199)$$

Отсюда при помощи формулы (183) вычисляем функцию $\omega(\xi)$; постоянную c_0 выбираем из условия, чтобы $\omega(0) = 0$:

$$\omega(\xi) = \frac{c_1}{2a} \left\{ \xi (a-b) + 2(a+b) E(\arcsin \xi, 1/2) - \right. \\ \left. - \left[(a+b) - 2 + \frac{1}{2} d_2 \right] F(\arcsin \xi, 1/2) \right\}. \quad (200)$$

Здесь F и E — эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. По формуле (200) при $\xi = 1$ можно получить координату точки B на контуре правого отверстия (рис. 11):

$$x_B = \frac{c_1}{2a} \left\{ a - b + 2(a+b) E(1/2) - \right. \\ \left. - k(1/2) \left[(a+b) 2 + \frac{1}{2} d_2 \right] \right\}. \quad (201)$$

Формулу контура удобнее определить непосредственно по формулам (199) и (183); находим (при $x > 0$ и $y > 0$) [24]

$$x = x_B + \frac{1}{2} c_1 (1 - b/a) (\xi - 1),$$

$$y = -\frac{1}{2} c_1 (1 + b/a) \int_1^\xi \frac{(\xi^2 + d_2) d\xi}{V(\xi^2-1)(4-\xi^2)} = \\ = -\frac{1}{2} c_1 (1 + b/a) \left[2E\left(\varphi, \frac{V\bar{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} d_2 F\left(\varphi, \frac{V\bar{3}}{2}\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\xi} V(4-\xi^2)(\xi^2-1) \right], \quad (202)$$

где

$$\varphi = \arcsin \frac{2\sqrt{\xi^2-1}}{\xi - \sqrt{3}}.$$

При $\xi = 2$, т. е. при $\varphi = \pi/2$, координата y контура отверстия (в точке c) должна равняться нулю. Это условие служит для определения неизвестной константы d_2 ; при помощи второй формулы (202) находим

$$d_2 = -\frac{4E\left(\frac{V\bar{3}}{2}\right)}{k\sqrt{3}/2} = -2,246. \quad (203)$$

Внося это значение d_2 в формулы (201) и (202), окончательно получим

$$\begin{aligned} x_B &= -c_1 (1,23 + 0,23b/a); \\ x &= x_B + \frac{1}{2} c_1 (1 - b/a) (\xi - 1); \\ y &= -\frac{1}{2} c_1 (1 + b/a) \left[2E(\varphi, \sqrt{3}/2) - \right. \\ &\quad \left. - 1,123 (\varphi, \sqrt{3}/2) - \frac{1}{\xi} \sqrt{(4 - \xi^2)(\xi^2 - 1)} \right], \end{aligned} \quad (204)$$

где

$$\varphi = \arcsin \frac{2\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi\sqrt{3}} \quad (1 < \xi < 2).$$

Таким образом, в случае симметричного расположения двух равнопрочных отверстий решение определяется с точностью до

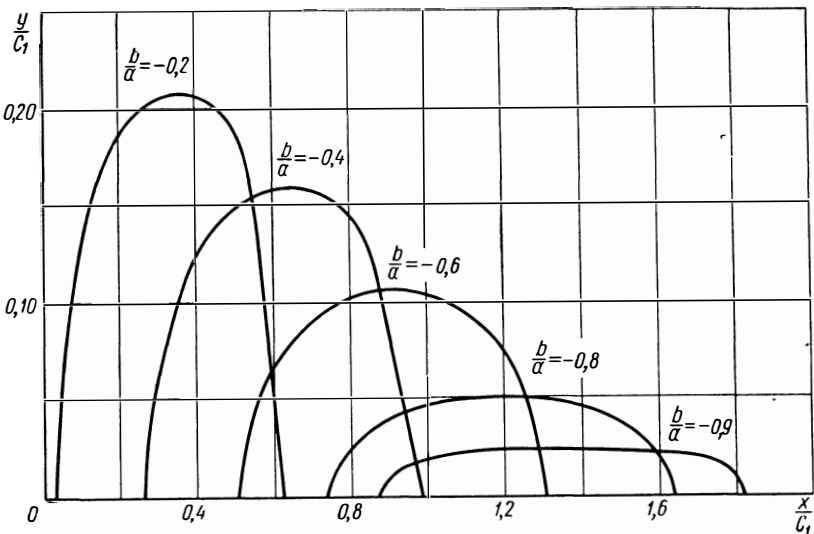


Рис. 12. Контур одного из двух равнопрочных отверстий при различных значениях b/a и при $y > 0$

одной произвольной положительной постоянной c_1 , задающей масштаб. Контур отверстия определяется уравнениями (204).

Отметим некоторые ограничения, которым должны удовлетворять внешние нагрузки, чтобы решение (204) имело физический смысл. Согласно самим формулам (204) для этого необходимо, чтобы имели место неравенства $|b/a| < 1$, где

$$\frac{b}{a} = \frac{\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty}{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty - 2p}. \quad (205)$$

На рис. 12 по формулам (204) построены контуры семейства равнопрочных отверстий при различных значениях b/a (для $x > 0$ и $y > 0$).

§ 4. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Если все контуры отверстий имеют общую ось симметрии, пересекающую их, то область любой связности, расположенная вне этих отверстий, конформно отображается на внешность разрезов вдоль одной и той же прямой (то же самое справедливо для многосвязных областей, обладающих циклической симметрией). В этом случае задача Дирихле имеет простое замкнутое

решение. Рассмотрим периодическую задачу, когда одинаковые отверстия с некоторым периодом $2L$ расположены вдоль оси x , необязательно являющейся их осью симметрии из-за наличия касательных напряжений (рис. 13).

При помощи конформного отображения $z = \omega(\zeta)$ перейдем на внешность периодической системы разрезов M вдоль действительной оси плоскости ζ (период решетки можно взять равным π).

В качестве условия на бесконечности по-прежнему используем условия (188); следует иметь в виду, что вторые слагаемые в этих формулах в данном случае будут описывать экспоненциальное убывание на бесконечности, а не степенное, как

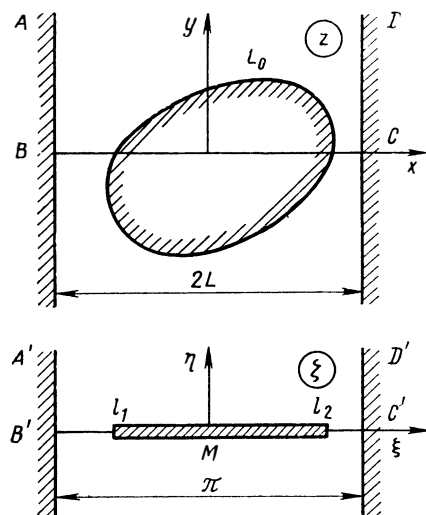


Рис. 13. Периодическая система равнопрочных отверстий в однородном поле напряжений (один период в физической и параметрической плоскости)

в случае конечного числа отверстий. Постоянную c_1 в рассматриваемом случае, очевидно, можно считать действительной и положительной. Решение краевых задач (179) и (180) при дополнительных условиях (182) и (188) легко найти на бесконечнолистной римановой поверхности функции $\sin \zeta$, разрезанной вдоль отрезка $(\sin e_1, \sin e_2)$ действительной оси на всех листах. Функция $\sin \zeta$ конформно преобразует внешность периодической системы разрезов M плоскости ζ на указанную риманову поверхность. Общее решение этих задач имеет вид

$$F'(\zeta) = i c_1 \operatorname{Im}(b + \bar{a}) + \frac{c_1 \sin \zeta \operatorname{Re}(b + \bar{a}) + d_1}{V(\sin \zeta - \sin e_1)(\sin \zeta - \sin e_2)},$$

$$G'(\zeta) = c_1 \operatorname{Re}(b - \bar{a}) + \frac{i c_1 \sin \zeta \operatorname{Im}(b - \bar{a}) + i d_2}{V(\sin \zeta - \sin e_1)(\sin \zeta - \sin e_2)}. \quad (206)$$

Здесь c_1, d_1, d_2, e_1, e_2 — неопределенные действительные постоянные; при $\sin \zeta \rightarrow \infty$ корень в формулах (206) ведет себя как

$\sin \xi + 0 (\sin^{-1} \xi)$. Функция $\omega(\xi)$ определяется формулой (183) при дополнительном условии $\omega(-\pi/2) = -L$ для отыскания постоянной c_0 (рис. 13):

$$\omega(\xi) = -L + \frac{1}{2a} \int_{-\pi/2}^{\xi} [F'(\xi) - G'(\xi)] d\xi. \quad (207)$$

Функция $\omega(\xi)$ должна удовлетворять двум дополнительным условиям: а) условие однозначности $\omega(\xi)$ при обходе разреза (l_1, l_2) ; б) условие соответствия точек c и c' , имеющее вид $\omega(\pi/2) = L$. Эти условия служат для отыскания четырех (из пяти) неопределенных коэффициентов в формулах (206) и (207). Таким образом, в общем несимметричном случае периодической задачи решение определяется с точностью до одной произвольной постоянной, т. е. равнопрочные контуры образуют семейство, зависящее от одного свободного параметра.

Рассмотрим подробнее симметричный случай, когда $\tau^\infty = \tau = 0$. Контур искомого отверстия L_0 в основном периоде (рис. 13) будет симметричен относительно осей абсцисс и ординат, а соответствующий ему отрезок M на плоскости ξ будет симметричным разрезом вдоль $(-l_0, l_0)$ с длиной, равной $2l_0$. В силу указанной симметрии в формулах (206) можно положить

$$l_1 = -l_0, \quad l_2 = l_0, \quad d_1 = d_2 = 0 \quad (\text{Im } a = \text{Im } b = 0).$$

Следовательно, находим

$$F'(\xi) = \frac{c_1(a+b) \sin \xi}{\sqrt{\sin^2 \xi - \sin^2 l_0}}, \quad G'(\xi) = c_1(b-a); \quad (208)$$

$$\begin{aligned} \omega(\xi) = & -L + \frac{1}{2} c_1 (1 - b/a) (\xi + \pi/2) - \\ & - \frac{1}{2} c_1 (1 + b/a) \arcsin(\cos \xi / \cos l_0) \end{aligned}$$

$$(\omega(-\pi/2) = -L). \quad (209)$$

Из условия соответствия точек c и c' (см. рис. 13), т. е. когда $\omega(\pi/2) = L$, при помощи (209) получим

$$c_1 = -(2aL)/(\pi b). \quad (210)$$

Найдем диаметр $2x_0$ равнопрочного отверстия в сечении $y = 0$; положив $\xi = l_0$ в формуле (209), получим

$$x_0 = \frac{1}{\pi} l_0 L (1 - a/b). \quad (211)$$

При помощи формул (209)—(211) запишем уравнение равнопрочного контура в следующем параметрическом виде (для $y > 0$, $|x| < L$):

$$x = \frac{1}{\pi} L (1 - a/b) \xi;$$

$$y = -\frac{1}{\pi} L (1 + a/b) \ln \left(\frac{\cos \xi}{\cos l_0} + \sqrt{\frac{\cos^2 \xi}{\cos^2 l_0} - 1} \right). \quad (212)$$

Семейство кривых (212) зависит от одного положительного параметра l_0 , меньшего $\pi/2$. Найдем диаметр $2y_0$ равнопрочного отверстия в сечении $x = 0$; положив $\xi = 0$ во второй формуле (212), получим

$$y_0 = -\frac{1}{\pi} L (1 + a/b) \ln \frac{1 + \sin l_0}{\cos l_0}. \quad (213)$$

Согласно физическому смыслу задачи величины x_0 и y_0 должны быть положительными (кроме того, очевидно, $x_0 < L$); отсюда на основании формул (211) и (213) внешние нагрузки должны удовлетворять следующему условию:

$$-1 < \frac{b}{a} < -\frac{l_0}{\pi - l_0}, \quad \text{где } \frac{b}{a} = \frac{\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty}{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty - 2p}. \quad (214)$$

Это неравенство приводит к следующим условиям существования искомого решения:

$$\begin{aligned} \text{а) } p > \sigma_y^\infty, \quad (\pi - 2l_0) \sigma_x^\infty < \pi \sigma_y^\infty - 2pl_0; \\ \text{б) } \sigma_y^\infty > p, \quad (\pi - 2l_0) \sigma_x^\infty > \pi \sigma_y^\infty - 2pl_0. \end{aligned} \quad (215)$$

Рассмотрим предельный случай одного отверстия в бесконечной плоскости из найденного периодического решения следующим предельным переходом в формулах (208)—(213):

$$L \rightarrow \infty, \quad l_0 \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow 0,$$

$$\xi L = -\frac{\pi b}{2a} c_1 \xi_1, \quad l_0 L = -\frac{\pi b}{2a} c_1, \quad (216)$$

где c_1 — (произвольно заданная) положительная постоянная; ξ — новое комплексное переменное. В частности, контур отверстия становится эллипсом:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} c_1 (1 - b/a) t; \\ y &= \frac{1}{2} c_1 (1 + b/a) \sqrt{1 - t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (-1 < t < 1) \quad (217)$$

Последнее решение существует при условии $|b/a| < 1$ (сравним с соответствующим условием (214) для периодической задачи).

На рис. 14 по формулам (212) построены контуры семейства равнопрочных отверстий при различных значениях l_0 и b/a (для $L > x > 0, y > 0$).

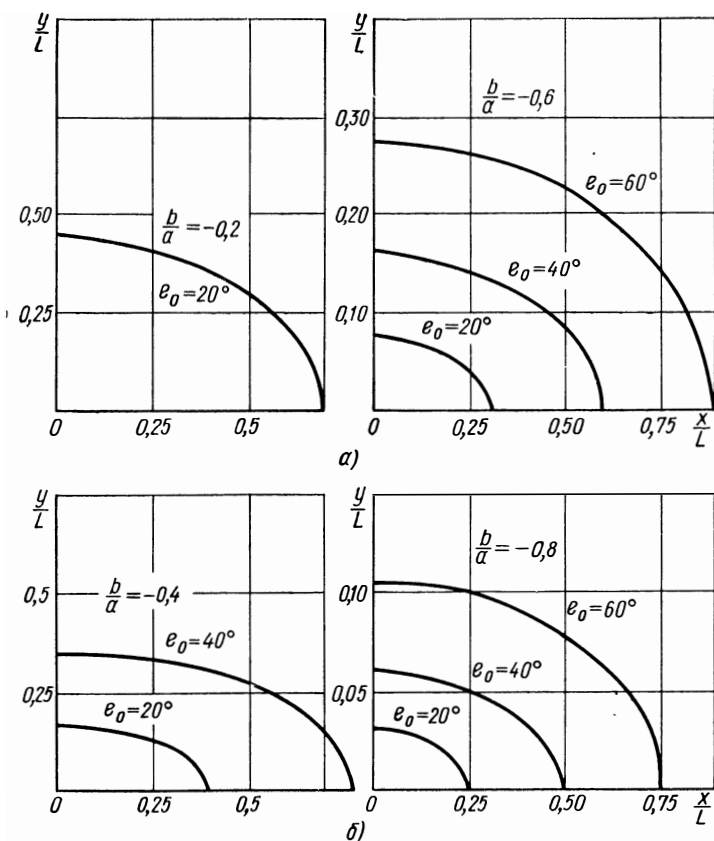


Рис. 14. Четверть контура одного из периодической системы равнопрочных отверстий при различных значениях b/a и l_0

§ 5. ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Пусть система равнопрочных отверстий образует двоякопериодическую прямоугольную решетку с основным периодом $2(L + iH)$ в плоскости z (рис. 15). Из соображений удобства решения временно будем считать, что в точке $x = 0, y = H$ (и других, ей соответствующих) заданы напряжения, т. е. при

$$z \rightarrow iH \quad \sigma_x = \sigma_x^\infty, \quad \sigma_y = \sigma_y^\infty, \quad \tau_{xy} = \tau^\infty. \quad (218)$$

Здесь $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau^\infty$ — некоторые постоянные величины.

Пусть конформное отображение $z = \omega(\zeta)$ преобразует в упругую область плоскости z внешность двоякопериодической системы разрезов плоскости ζ с соответствием трех точек основных периодов

$$A \leftrightarrow A', \quad B \leftrightarrow B', \quad D \leftrightarrow D'. \quad (219)$$

Период прямоугольной решетки на плоскости ζ , не ограничивая общности, можно считать равным $2 + 2hi$.

Указанными требованиями искомая функция $\omega(\zeta)$ определяется однозначно (для заданного контура отверстия L_0). Внешность контура L_0 в основном периоде плоскости z отображается на внешность разреза (l_1, l_2) вдоль действительной оси плоскости ζ .

Согласно формулам (166), (181) и (218) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \zeta \rightarrow ih \quad \omega(\zeta) &= iH + c_1(\zeta - ih) + \dots, \\ \psi(\zeta) &= b + 0(\zeta - ih), \quad F'(\zeta) = (b + \bar{a})c_1 + 0(\zeta - ih), \\ G'(\zeta) &= (b - \bar{a})c_1 + 0(\zeta - ih). \end{aligned} \right\} \quad (220)$$

Здесь c_1 — некоторая положительная величина, обозначения a и b совпадают с принятыми выше.

Пусть модуль

$$K(\sqrt{1 - k^2}) = hK(k), \quad (221)$$

а величина

$$\alpha = 1/K(k). \quad (222)$$

Эллиптический синус $w = \text{sn}(\zeta/\alpha, k)$ конформно преобразует внешность указанной двоякопериодической системы разрезов плоскости ζ на бесконечнолистную риманову поверхность w , разрезанную вдоль отрезка (w_1, w_2) действительной оси на всех листах

$$w_1 = \text{sn}(e_1/\alpha, k), \quad w_2 = \text{sn}(e_2/\alpha, k), \quad (223)$$

причем бесконечно удаленной точке на основном листе римановой поверхности соответствует точка $\zeta = ih$.

Используя риманову поверхность w и условия (220), общее решение краевых задач (179) и (180) можно записать так:

$$F'(\zeta) = ic_1 \text{Im}(b + \bar{a}) + \frac{c_1 w \text{Re}(b + \bar{a}) + d_1}{V(w - w_1)(w - w_2)}; \quad (224)$$

$$G'(\zeta) = c_1 \text{Re}(b - \bar{a}) + \frac{ic_1 w \text{Im}(b - \bar{a}) + id_2}{V(w - w_1)(w - w_2)}, \quad (225)$$

где $w = \text{sn}(\zeta/\alpha, k)$, при $w \rightarrow \infty$ корень в (225) ведет себя как $w + 0(1)$; c_1, d_1, d_2, w_1, w_2 — неопределенные действительные постоянные. Функцию $\omega(\zeta)$ определяем по формуле (183), причем

постоянную c_0 находим из условия соответствия точек A и A' . Четыре из указанных выше постоянных находим из условия однозначности функции $\omega(\xi)$ при обходе разреза (l_1, l_2) и из условия соответствия точек B и B' . Постоянная h находится из условия: функция $\omega(\xi) \rightarrow iH$ при $\xi \rightarrow ih$. Таким образом, в общем несимметричном случае двоякопериодической задачи решение определяется с точностью до одной произвольной постоянной, т. е. решетка равнопрочных контуров образует семейство, зависящее от одного свободного параметра.

До сих пор напряженное состояние считалось заданным в точке $z = iH$, что не отвечает физическому смыслу задачи. Определим дополнительные условия, которые адекватны постановке задачи и могут служить для определения постоянных $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty$ и τ_{xy}^∞ в полученном решении. Рассмотрим мысленно упругий прямоугольник со сторонами $2mL$ и $2nH$, состоящий из mn перфорированных прямоугольников $E_1E_2E_3E_4$ (m и n — целые числа, которые будем считать весьма большими). К сторонам этого прямоугольника приложены постоянные нормальные нагрузки N_x, N_y и постоянные касательные нагрузки N_{xy} и N_{yx} . На расстояниях, равных примерно двум периодам решетки, краевой эффект затухает и напряженное состояние становится практически идентичным тому, которое имеет место в идеально бесконечной решетке.

Условия равновесия всех внешних нагрузок, действующих на указанный прямоугольник, при $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ приводят к следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} 1) \int_{E_3E_4} \sigma_y dx &= \int_{E_1E_2} \sigma_y dx = 2LN_y; \\ 2) \int_{E_1E_4} \sigma_x dy &= \int_{E_2E_3} \sigma_x dy = 2HN_x; \\ 3) \int_{E_3E_4} \tau_{xy} dx &= \int_{E_1E_2} \tau_{xy} dx = 2LN_{xy}; \\ 4) \int_{E_1E_4} \tau_{xy} dy &= \int_{E_2E_3} \tau_{xy} dy = 2HN_{yx}. \end{aligned} \right\} \quad (226)$$

Кроме того, должно выполняться уравнение равновесия в моментах

$$4HL(N_{xy} - N_{yx}) = M. \quad (227)$$

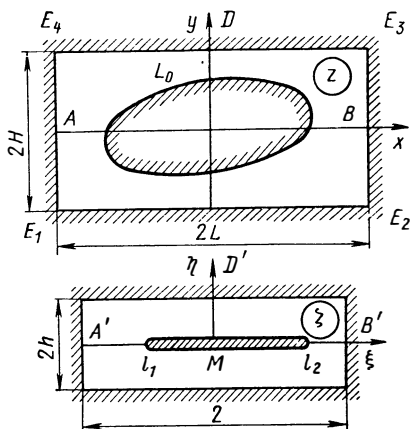


Рис. 15. Двоякопериодическая система равнопрочных отверстий (один период в физической и параметрической плоскости)

Здесь M — суммарный момент, производимый внешними касательными нагрузками τ на контуре отверстия L_0 :

$$M = \tau \oint_{L_0} |\vec{r} + \vec{ds}|, \quad (228)$$

где \vec{r} — радиус-вектор кривой L_0 , а \vec{ds} — вектор-элемент ее дуги.

Рассмотрим подробнее симметричный случай, когда $\tau = 0$, $N_{xy} = N_{yx} = 0$. Здесь контур искомого отверстия L_0 в основном периоде (см. рис. 15) будет симметричным относительно осей x и y , а соответствующий ему контур M на плоскости ζ будет разрезом вдоль $(-l_0, l_0)$. Симметрия относительно осей абсцисс и ординат сохранится на плоскости ζ и поверхности ω . В формулах (225) можно принять

$$\begin{aligned} l_1 &= -l_0, \quad l_2 = l_0, \quad d_1 = d_2 = 0, \\ \tau^\infty &= 0 \quad (\text{Im } a = \text{Im } b = 0). \end{aligned} \quad (229)$$

Следовательно, получаем

$$F'(\zeta) = \frac{c_1 (a+b) \text{sn}(\zeta/\alpha, k)}{\sqrt{\text{sn}^2(\zeta/\alpha, k) - \text{sn}^2(l_0/\alpha, k)}}, \quad G'(\zeta) = c_1 (b-a); \quad (230)$$

$$\begin{aligned} \omega(\zeta) &= -L + \frac{1}{2a} \int_{-1}^{\zeta} [F'(\zeta) - G'(\zeta)] d\zeta = \\ &= -L + \frac{1}{2} c_1 (1 - b/a) (\zeta + 1) + \frac{1}{2} c_1 (1 + b/a) I(\zeta). \end{aligned} \quad (231)$$

Здесь

$$\begin{aligned} I(\zeta) &= \int_{-1}^{\zeta} \frac{\text{sn}(\zeta/\alpha, k) d\zeta}{\sqrt{\text{sn}^2(\zeta/\alpha, k) - \text{sn}^2(l_0/\alpha, k)}} = \\ &= \frac{\alpha}{\text{dn}(l_0/\alpha, k)} \int_{\delta}^k \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - \delta^2)(1 - t^2)}}, \\ t &= \frac{\text{dn}(\zeta/\alpha, k)}{\text{dn}(l_0/\alpha, k)}, \quad \delta = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{\text{dn}(l_0/\alpha, k)}, \quad (\delta < 1). \end{aligned} \quad (232)$$

Корень $\sqrt{(t^2 - \delta^2)(1 - t^2)}$ в комплексной плоскости t представляет собой функцию, аналитическую во внешности разрезов вдоль действительной оси $(-1, -\delta)$ и $(\delta, 1)$; взята та ветвь этой функции, которая положительна на верхнем берегу разреза $(\delta, 1)$ действительной оси.

При этом были использованы известные соотношения из теории эллиптических функций (второй аргумент для кратности опускаем)

$$\left. \begin{aligned} \text{dn}^2 \zeta &= 1 - k^2 \text{sn}^2 \zeta, & \text{cn}^2 \zeta &= 1 - \text{sn}^2 \zeta, \\ d \text{dn} \zeta / d\zeta &= -k^2 \text{sn} \zeta \text{cn} \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (233)$$

При помощи эллиптического интеграла 1-го рода интеграл (232) можно записать так:

$$I(\xi) = \frac{\alpha}{\operatorname{dn}(l_0/\alpha, k)} F\left(\arcsin \frac{\sqrt{t^2 - \delta^2}}{t \sqrt{1 - \delta^2}}, \sqrt{1 - \delta^2}\right). \quad (234)$$

На основании формул (231) и (234) диаметр отверстия $2x_0$ в сечении $y = 0$ плоскости z легко найти из условия $\omega(-l_0) = -x_0$; получаем

$$\begin{aligned} x_0 = L - \frac{1}{2} c_1 \left(1 - \frac{b}{a}\right) (1 - l_0) + \\ + \frac{1}{2} c_1 \left(1 + \frac{b}{a}\right) \frac{\alpha k \sqrt{1 - \delta^2}}{\operatorname{dn}(l_0/\alpha, k)}. \end{aligned} \quad (235)$$

Из соответствия точек B и B' (рис. 15), т. е. $\omega(1) = L$, при помощи (231)—(234) находим

$$2L = c_1 \left(1 - \frac{b}{a}\right) - 2c_1 \left(1 + \frac{b}{a}\right) \frac{\alpha k \sqrt{1 - \delta^2}}{\operatorname{dn}(l_0/\alpha, k)}. \quad (236)$$

Из соответствия точек D и D' (рис. 15), т. е. $\omega(ih) = iH$, используя формулы (231)—(234), находим при $\xi \rightarrow ih$ $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} I = \frac{\alpha}{\operatorname{dn}(l_0/\alpha, k)} \left[\int_{\delta}^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - \delta^2)(1 - t^2)}} + \int_1^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - \delta^2)(1 - t^2)}} \right] = \\ = \frac{\alpha}{\operatorname{dn}(l_0/\alpha, k)} \left[k \sqrt{1 - \delta^2} + i \int_1^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - \delta^2)(t^2 - 1)}} \right] = \\ = \frac{\alpha}{\operatorname{dn}(l_0/\alpha, k)} [k \sqrt{1 - \delta^2} + ik(\delta)], \\ 2H = c_1 h \left(1 - \frac{b}{a}\right) + c_1 \left(1 + \frac{b}{a}\right) \frac{\alpha k(\delta)}{\operatorname{dn}(l_0/\alpha, k)}. \end{aligned} \quad (237)$$

Уравнение равнопрочного контура L_0 в основном периоде (при $-L < x < 0$, $x < 0$, $y > 0$) на основании формул (231) и (232) можно записать в следующем параметрическом виде:

$$\begin{aligned} x + iy = -x_0 + \frac{1}{2} c_1 (1 - b/a) (\xi + l_0) + \\ + \frac{i\alpha c_1 (1 + b/a)}{2 \operatorname{dn}(l_0/\alpha, k)} \int_1^t \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - \delta^2)(t^2 - 1)}}, \\ t = \frac{\operatorname{dn}(\xi/\alpha, k)}{\operatorname{dn}(l_0/\alpha, k)} = \sqrt{\frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\xi/\alpha, k)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(l_0/\alpha, k)}}, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= -x_0 + \frac{1}{2} c_1 (1 - b/a) (\xi + l_0); \\ y &= \frac{c_1 \alpha (1 + b/a)}{2 \operatorname{dn} (l_0/\alpha, k)} F \left(\arcsin \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - \delta^2}}, \delta \right) \\ & \quad (-l_0 \leq \xi \leq 0). \end{aligned} \right\} \quad (238)$$

Осталось определить постоянные σ_x^∞ и σ_y^∞ . Для этого достаточно использовать только первые два уравнения равновесия (226), которые при помощи формул (187) можно записать так:

$$\int_{E_3 E_4} \sigma_y dx = (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) (L - x_0) + \int_{-1}^{-l_0} [E'(\xi) + G'(\xi)] d\xi = 2LN_y. \quad (239)$$

$$\int_{F_1 F_4} \sigma_x dy = H (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + i \int_{-1}^{-1+ih} [F'(\xi) + G'(\xi)] d\xi = 2HN_x.$$

Используя решение задачи в форме (230)—(232), вычислим интегралы в формулах (239)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-l_0} [F'(\xi) + G'(\xi)] d\xi &= c_1 (b - a) (1 - l_0) + \\ &+ \frac{c_1 \alpha (a + b) k \sqrt{1 - \delta^2}}{\operatorname{dn} (l_0/\alpha, k)}; \\ \int_{-1}^{-1+ih} [F'(\xi) + G'(\xi)] d\xi &= ic_1 h (b - a) + \\ &+ c_1 (a + b) \int_{-1}^{-1+ih} \frac{\operatorname{sn} (\xi/\alpha, k) d (\xi/\alpha, k) d\xi}{\sqrt{\operatorname{sn}^2 (\xi/\alpha, k) - \operatorname{sn}^2 (l_0/\alpha, k)}} = \\ &= ic_1 h (b - a) + \frac{\alpha c_1 (a + b)}{\operatorname{dn} (l_0/\alpha, k)} \int_{\delta}^0 \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - \delta^2) (1 - t^2)}} = \\ &= ic_1 h (b - a) + \frac{i \alpha c_1 (a + b) k (\delta)}{\operatorname{dn} (l_0/\alpha, k)}. \end{aligned} \quad (240)$$

Подставляя вычисленные интегралы в уравнения (239), получим следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} 2(a+p)(L-x_0) + c_1(b-a)(1-l_0) + \\ + \frac{\alpha c_1(a+b)k\sqrt{1-\delta^2}}{\operatorname{dn}(l_0/\alpha, k)} = 2LN_y; \\ 2H(a+p) - c_1h(b-a) - \\ - \frac{\alpha c_1(a+b)k(\delta)}{\operatorname{dn}(l_0/\alpha, k)} = 2HN_x. \end{aligned} \right\} \quad (241)$$

При помощи второй формулы (238) найдем диаметр отверстия $2y_0$ в сечении $x=0$:

$$y_0 = \frac{\alpha c_1(1+b/a)F(\varphi_0, \delta)}{2 \operatorname{dn}(l_0/\alpha, k)}, \quad (242)$$

где

$$\varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{t_0^2 - 1}{t_0^2 - \delta^2}}, \quad t_0 = \frac{1}{\operatorname{dn}(l_0/\alpha, k)}.$$

Четыре уравнения (236), (237) и (241) служат для определения четырех постоянных. Одна из постоянных остается свободным параметром как и ранее. Анализ этой системы дан в § 7.

§ 6. ПРИЛОЖЕНИЕ К ТЕОРИИ КОНСТРУКЦИЙ МИНИМАЛЬНОЙ МАССЫ

Пусть конструкция или некоторый ее элемент представляют собой пластины с отверстиями, находящиеся в плоском напряженном состоянии. Толщина пластин считается постоянной. Предположим, что задано некоторое предельно допустимое нормальное напряжение (с учетом коэффициента запаса), определяемое из упругого расчета конструкции. Заметим, что во всех конструкциях, рассчитываемых на длительную работу, пластические зоны обычно не допускаются. Форма отверстий по технологическим причинам обычно бывает круговой.

В указанных допущениях, которые весьма часто реализуют на практике, нетрудно оценить выигрыш в массе конструкции, получаемый при использовании равнопрочных отверстий вместо стандартных круговых. Сравнение равнопрочных отверстий с другими показывает, что напряжение σ_t на них минимально по сравнению с максимальной величиной σ_t на любых других контурах отверстий*. В этом смысле равнопрочное отверстие также обладает свойством наибольшей прочности (по сравнению со всеми другими отверстиями).

* Это утверждение следует рассматривать как интуитивно очевидный факт, проверенный во многих случаях. Строгое доказательство его авторам неизвестно.

Отсюда вытекает следующее: конструкция с равнопрочными отверстиями обладает наименьшим весом по сравнению с аналогичными конструкциями, имеющими неравнопрочные отверстия. Действительно, две аналогичные конструкции с отверстиями различной формы из пластин разной толщины (естественно, из одного и того же материала) будут эквивалентны по прочности, если максимальное напряжение σ_t на контуре отверстий в этих конструкциях будет одним и тем же. Равнопрочные же отверстия позволяют применять пластины наименьшей толщины для любого заданного предельно допустимого напряжения. Приведем конкретные оценки. Пусть бесконечная пластина толщиной h_0 с круговым отверстием, свободным от нагрузок, подвержена однородному растяжению, которое полностью описывается усилиями P и βP , действующими по главным направлениям (β — некоторое число, $\beta \leq 1$).

В этом случае максимальное напряжение на контуре отверстия

$$\sigma_t^{\max} = (3 - \beta) P / h_0. \quad (243)$$

Аналогичная величина в случае равнопрочного отверстия в пластине толщиной h_{\min} согласно формуле (172)

$$\sigma_t^{\max} = (1 + \beta) P / h_{\min}. \quad (244)$$

Приравнивая эти две величины для конструкций, эквивалентных по прочности, получаем

$$h_{\min} = (1 + \beta) h_0 (3 - \beta). \quad (245)$$

Следовательно, применение равнопрочного отверстия вместо кругового позволяет уменьшить вес рассматриваемого элемента конструкции на

$$g = 200 (1 - \beta) / (3 - \beta), \quad \%, \quad (246)$$

не изменяя прочности. Например, если одно главное усилие в 2 раза больше другого, т. е. $\beta = 1/2$, использование равнопрочного отверстия вместо кругового позволяет уменьшить массу пластины на 40% с сохранением прочности. Можно показать, что с увеличением числа отверстий и при наличии границ величина g увеличивается. Поэтому формулу (246) можно рассматривать как нижнюю оценку возможного уменьшения массы конструкции.

§ 7. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА НЕКОТОРЫХ ПЕРФОРИРОВАННЫХ ПЛАСТИН С ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ РАВНОПРОЧНЫХ ОТВЕРСТИЙ

Уравнение семейства контуров равнопрочных отверстий в двоякопериодической задаче, рассмотренной в § 5, имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= -x_0 + \frac{1}{2} c_1 (1 - b/a) (\xi + l_0); \\ y &= \frac{\alpha c_1 (1 + b/a)}{2 \operatorname{dn}(l_0/\alpha, k)} F \left(\arcsin \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - \delta^2}}, \delta \right); \end{aligned} \right\} \quad (247)$$

где

$$t = \sqrt{\frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\xi/\alpha, k)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(l_0/\alpha, k)}} \quad -l_0 < \xi < 0.$$

Решение определено с точностью до одного произвольного параметра, в качестве которого можно взять c_1 . Введем следующие безразмерные переменные:

$$\left. \begin{aligned} x_{0*} &= \frac{x_0}{c_1}, & L_* &= \frac{L}{c_1}, & H_* &= \frac{H}{c_1}, \\ \lambda_* &= \frac{H}{L}, & \mu_* &= \frac{N_y}{N_x}, & b_* &= \frac{b}{a}, \\ a_* &= \frac{a}{\rho}, & \gamma &= \frac{\rho}{N_x}. \end{aligned} \right\} \quad (248)$$

При помощи этих обозначений уравнения (см. § 5), служащие для определения постоянных $l_0, h, \alpha, k, a_*, b_*, x_{0*}, \delta, d$, можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} h &= \frac{k(\sqrt{1-k^2})}{K(k)}; & \alpha &= \frac{1}{K(k)}; & \delta &= d\sqrt{1-k^2}; \\ d &= \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2(l_0/\alpha, k)}} = \frac{1}{\operatorname{dn}(l_0/\alpha, k)}; & x_{0*} &= \frac{1}{2} l_0 (1 - b_*); \\ L_* &= \frac{1}{2} (1 - b_*) - \alpha d (1 + b_*) k (\sqrt{1-\delta^2}); \\ 2H_* &= h (1 - b_*) + d\alpha (1 + b_*) k (\delta); \\ \frac{2\mu_* L_*}{\gamma a_*} &= 2(1 + 1/a_*) (L_* - x_{0*}) + \\ &+ (1 - l_0) (b_* - 1) + \alpha d (1 + b_*) k (\sqrt{1-\delta^2}), \\ \frac{2H_*}{\gamma a_*} &= 2H_* (1 + 1/a_*) - h (b_* - 1) - \alpha d (1 + b_*) k (\delta). \end{aligned} \quad (249)$$

Параметры $L_*, H_*, \lambda_*, \mu_*, \gamma$ заданы. Они могут изменяться в следующих пределах:

$$\left. \begin{aligned} 0 < L_* < \infty, & 0 < H_* < \infty, & 0 < \lambda_* < \infty, \\ -\infty < \mu_* < +\infty, & -\infty < \gamma < +\infty. \end{aligned} \right\} \quad (250)$$

Однако область изменения этих параметров, в которой существует решение системы (249), гораздо уже; границы этой области определяются из решения системы (249), удовлетворяющего следующим очевидным физическим условиям:

$$\left. \begin{aligned} 1 > l_0 > 0, & 1 > k > 0, & 1 > \delta > 0, \\ L_* > x_{0*} > 0, & +1 > b_* > -1. \end{aligned} \right\} \quad (251)$$

Результаты численного решения
для двоякопериодической системы отверстий

$$\lambda_* = 1; \mu_* = 1; \gamma = 2$$

L_*	x_{0*}	l_0	k	α	h	δ	b_*	a_*
0,42	0,28	0,33	0,97	0,36	0,38	0,35	-0,66	-0,66
0,50	0,31	0,36	0,94	0,41	0,47	0,47	-0,70	-0,63
0,59	0,34	0,38	0,91	0,45	0,55	0,55	-0,74	-0,61
0,67	0,37	0,41	0,88	0,49	0,62	0,62	-0,78	-0,59
0,71	0,38	0,42	0,84	0,51	0,69	0,67	-0,82	-0,57
0,77	0,41	0,44	0,81	0,54	0,76	0,71	-0,86	-0,55
0,84	0,44	0,46	0,78	0,57	0,83	0,75	-0,90	-0,54
0,91	0,46	0,48	0,75	0,59	0,90	0,79	-0,94	-0,52
1,00	0,50	0,49	0,72	0,61	0,97	0,81	-0,98	-0,51

$$\lambda_* = 1; \mu_* = 1; \gamma = 4$$

L_*	x_{0*}	l_0	k	α	h	δ	b_*	a_*
0,46	0,45	0,52	0,97	0,36	0,38	0,52	-0,73	-0,53
0,56	0,50	0,57	0,94	0,41	0,47	0,65	-0,76	-0,51
0,63	0,54	0,60	0,91	0,45	0,55	0,73	-0,78	-0,48
0,72	0,59	0,63	0,88	0,49	0,62	0,79	-0,81	-0,46
0,77	0,62	0,65	0,84	0,51	0,69	0,83	-0,85	-0,45
0,83	0,65	0,68	0,81	0,54	0,76	0,87	-0,88	-0,43
0,91	0,70	0,70	0,78	0,57	0,83	0,89	-0,91	-0,41
0,93	0,71	0,72	0,75	0,59	0,90	0,92	-0,95	-0,39
1,00	0,75	0,74	0,72	0,61	0,97	0,93	-0,99	-0,38

$$\lambda_* = 1; \mu_* = 1; \gamma = 8$$

L_*	x_{0*}	l_0	k	α	h	δ	b_*	a_*
0,67	0,66	0,72	0,91	0,45	0,55	0,85	-0,81	-0,59
0,73	0,69	0,75	0,88	0,49	0,62	0,89	-0,83	-0,56
0,79	0,73	0,78	0,84	0,51	0,69	0,92	-0,86	-0,54
0,84	0,77	0,80	0,81	0,54	0,76	0,94	-0,89	-0,51
0,89	0,80	0,83	0,78	0,57	0,83	0,96	-0,92	-0,49
0,94	0,83	0,85	0,75	0,59	0,90	0,97	-0,95	-0,47
0,98	0,86	0,87	0,72	0,61	0,97	0,98	-0,99	-0,44

Результаты численного решения системы (249) при некоторых значениях параметров приведены в табл. 1.

Рассмотрим некоторые контуры равнопрочных отверстий в двоякопериодической квадратной решетке, подвергнутой всестороннему сжатию, при различных значениях внутреннего давления (рис. 16).

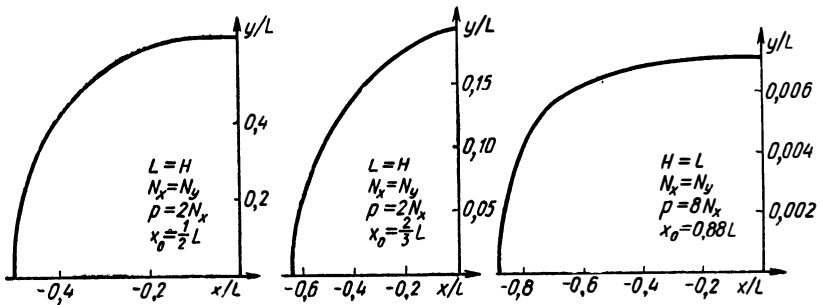


Рис. 16. Четверть контура одного из двоякопериодической системы равнопрочных отверстий при нескольких значениях параметров

Когда размеры отверстия малы по сравнению с периодами L и H решетки, получим результат, найденный в § 3. Действительно, при $l_0 \rightarrow 0$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn}(l_0/\alpha, k) &= \frac{l_0}{\alpha}, \quad \operatorname{dn}(l_0/\alpha, k) = 1; \\ \delta &= \sqrt{1-k^2}, \quad t = \sqrt{\frac{1-k^2(\xi/d)^2}{1-k^2(l_0/\alpha)^2}} = 1 - \frac{k^2(\xi^2 - l_0^2)}{2\alpha^2}; \\ \sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-\delta^2}} &= \sqrt{\frac{k^2/\alpha^2(l_0^2 - \xi^2)}{1-\delta^2}} = \frac{k}{\alpha} \sqrt{\frac{l_0^2 - \xi^2}{1-\delta^2}}; \\ \arcsin \sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-\delta^2}} &= \frac{k}{\alpha} \sqrt{\frac{l_0^2 - \xi^2}{1-\delta^2}}; \\ F\left(\arcsin \sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-\delta^2}}, \delta\right) &= \frac{k}{\alpha} \sqrt{\frac{l_0^2 - \xi^2}{1-\delta^2}}. \end{aligned} \right\} (252)$$

При $l_0 \rightarrow 0$ уравнения (247) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} c_1(\xi)(1-b/a); \\ y &= \frac{1}{2} c_1(1+b/a) \sqrt{l_0^2 - \xi^2}; \quad (-l_0 < \xi < 0). \end{aligned} \right\} (253)$$

Это параметрическое уравнение эллипса, совпадающее с уравнениями (217), если в (253) произвести замену $\xi \rightarrow l_0 t$, $c_1 \rightarrow l_0 c_1$.

§ 8. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ *

Как известно [44], всякую n -связную область S на комплексной плоскости z переменного, включающую бесконечно удаленную точку, можно отобразить на каноническую область, получаемую из плоскости ζ переменной выбрасыванием n кругов. При $n > 2$ отображение $\omega_0(\zeta)$, имеющее вид $\omega_0(\zeta) = c\zeta + \omega(\zeta)$ [где $\omega(\zeta)$ ограничена на бесконечности], зависит от $3n$ действительных параметров, шесть из которых (например, одну окружность, фиксированную точку на ней и центр еще одной окружности) можно задать произвольно (c — масштабный множитель). Следовательно, система равнопрочных контуров, если она существует, образует $(3n - 6)$ параметрическое семейство. Границы изменения параметров определяются из геометрических соображений. При наличии симметрии число параметров может уменьшиться.

Для определения компонент напряжения на границе Γ области S имеем [62] соотношения

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} \Phi_0(\zeta); \quad (254)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau = \frac{2(\zeta - a_k)}{r_k \omega_0(\zeta)} (\omega_0(\zeta) \Phi(\zeta) + \omega_0(\zeta) \Psi_0(\zeta)). \quad (255)$$

Здесь σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ — нормальные и касательные напряжения в полярной системе координат с полюсом в центре a_k k -й окружности с радиусом r_k и границей Γ_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Если на бесконечности задано однородное напряженное состояние с компонентами напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} , то [62]:

$$\Phi_0(\zeta) = 1/4 (\sigma_x + \sigma_y) + \Phi(\zeta);$$

$$\Psi_0(\zeta) = 1/2 (\sigma_y - \sigma_x) + \Psi(\zeta),$$

где $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ — голоморфны в области S и при $z \rightarrow \infty$ имеют асимптотику $0(z^{-2})$. Принимая, что $\sigma_r = p$ на всех контурах, положим $\sigma_0 = \sigma_x + \sigma_y - p$, тогда (254) имеет решение [87]

$$\Phi_0(\zeta) = 1/4 (\sigma_x + \sigma_y),$$

а соотношение (255) сводится к соотношению

$$\frac{acr_k^2}{(\zeta - a_k)^2} + \frac{ar_k^2 \omega(\zeta)}{(\zeta - a_k)^2} = cb + \omega(\zeta) \Psi(\zeta);$$

$$a = 1/2 (\sigma_x + \sigma_y) - p + i\tau, \quad b = 1/2 (\sigma_y - \sigma_x) + i\tau_{xy}. \quad (256)$$

* Этот параграф основан на работе [15].

Рассмотрим в формуле (256) второй член слева. Заметив, что при $\zeta \in \Gamma_k^2 / (\zeta - a_k)^2 = -d\zeta/d\xi$ запишем его в виде

$$\frac{r_k^2 \omega'(\zeta)}{(\zeta - a_k)^2} = -\lim_{\Delta\zeta} \frac{\Delta\zeta}{\Delta\xi} \frac{\omega(\zeta + \Delta\zeta) - \omega(\zeta)}{\Delta\zeta} = -\frac{d}{d\xi} \omega(\zeta). \quad (257)$$

Подставляя (257) в (256) и интегрируя, получим

$$F(\zeta) + \omega(\zeta) = -c \frac{b}{a} t - c \frac{r_k^2}{\zeta - a_k} + (\zeta \in F_k) + d_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (258)$$

$F(\zeta)$ — голоморфна в S_+ , $F'(\zeta) = -\omega'(\zeta) \psi(\zeta)/a$, d_k произвольные постоянные. Изменяя при необходимости d_k , добьемся, чтобы ограниченные функции $F(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ убывали на бесконечности. Для решения краевой задачи (258), следуя данным [103], функции $F(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ представим интегралами типа Коши:

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(t)}{t - \zeta} dt; \quad \omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(t)}{t - \zeta} dt, \quad (259)$$

где $u(t)$ — гладкая комплекснозначная функция на границе Γ .

Условия убывания на бесконечности удовлетворяются представлением (259). Подставляя (259) в (258), получим

$$u(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(t) d \ln \frac{t - \zeta}{t - \bar{\zeta}} - d_k = -c \frac{b}{a} t - c \frac{r_k}{\zeta - a_k}. \quad (260)$$

Постоянные d_k определим соотношением

$$d_k = \frac{-1}{2\pi r_k} \int_{\Gamma_k} u(t) ds; \quad ds = |dt|. \quad (261)$$

Уравнение (260) — фредгольмово с вещественным симметричным ядром. Отделяя в нем вещественную и мнимую части, получим пару интегральных уравнений относительно потенциалов двойного слоя $\mu(t)$ и $\nu(t)$ видоизмененной задачи Дирихле в классе ограниченных непрерывных в области S функций. Эти уравнения однозначно разрешимы [62], поэтому уравнение (260) при условии (261) также разрешимо для любой правой части.

В случае $n = 1$ имеется решение [87]

$$\omega(\zeta) = ba^{-1}\zeta^{-1}, \quad F(\zeta) = \zeta,$$

$$\omega_0(\zeta) = c(\zeta + ba^{-1}\zeta^{-1}),$$

которое совпадает с решением, полученным в § 3, если дополнительно преобразовать внешность единичного круга на внешность отрезка $[-1, 1]$ функцией Жуковского.

При $n > 1$ для решения (260) методом наименьших квадратов в $L_2\Gamma$ удобно (поскольку Γ состоит из окружностей) задаться конечномерными приближениями в виде

$$\sum_{p=1}^m \left\{ \frac{\alpha_{pk}}{(t-a_k)^p} + \frac{\beta_{pk}}{(1-a_k)^p} \right\} + \gamma_k \quad (t \in \Gamma_k).$$

Значения γ_k определяются независимо $\gamma_k = \int_{\Gamma_k} f(t) ds$ и в дальнейшем не рассматриваются, $f(t)$ — правая часть (260). Перенумеруем неизвестные α_{pk} и β_{pk} по правилу

$$x_{2(p-1)n+2k-1} = \alpha_{pk}, \quad x_{2(p-1)n+2k} = \beta_{pk}.$$

$$p = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Обозначая $\alpha_{pk}, \beta_{pk} = x_i; \alpha_{ul}, \beta_{ul} = x_j$, получим при $i + j - 1$ четном

$$a_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{ds}{(t-a_k)^p (t-a_l)^u} = - \sum_{s=1}^n r_s (a_s - a_k)^{-1} (a_s - a_l)^{-1} + \\ + \left\{ (-1)^p \binom{0;}{p} \frac{pr_k + ur_l}{(a_k - a_l)^{p+u}} \right\}; \quad k \neq l; \quad (262)$$

при $i + j - 1$ нечетном

$$a_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{ds}{(t-a_k)^p (t-a_l)^u} = \\ = \sum_{s=1}^n (-1)^u r_s \sum_{q=1}^u \binom{q-1}{u-1} \binom{p-1}{p+u-q-1} \times \\ \times \frac{(r_s^2/(a_s - a_l))^{u-q} (a_l - a_s)^{p-q}}{(r_s^2 - (a_k - a_s)(a_s - a_l))^{p+u-q}} + r_k^{-l}. \quad (263)$$

Интегралы в (262) и (263) вычислены с помощью вычетов; штрих означает, что под знаком суммы опущены члены с $S = k, l$ $\{a_{ij}\}$ — симметричная матрица нормальной системы. Выражения для свободного члена, имеют аналогичную, но более простую структуру. Для решения системы методом квадратных корней составлена программа и проведены расчеты на ЭВМ «Минск-22». Некоторую трудность представляет то обстоятельство, что на практике, кроме числа отверстий, заранее задаются их относительными размерами и взаимным расположением — геометрией области, причем последняя лишь неявно зависит от a_k и r_k — входных параметров программы. Накопленный опыт расчетов позво-

Рис. 17. Результаты численного расчета равнопрочного контура для случая двух отверстий

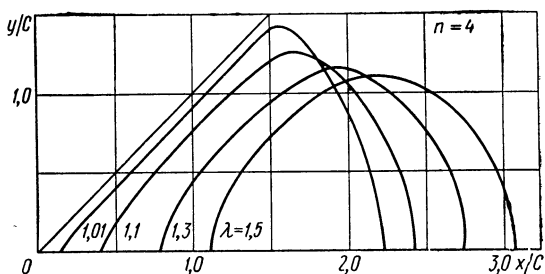
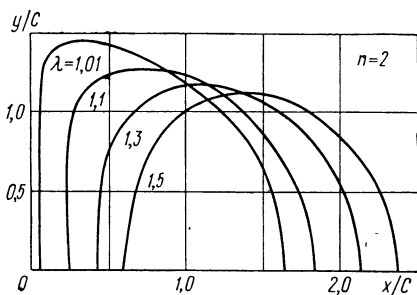


Рис. 18. Результаты численного расчета равнопрочного контура для случая четырех циклически-симметричных отверстий

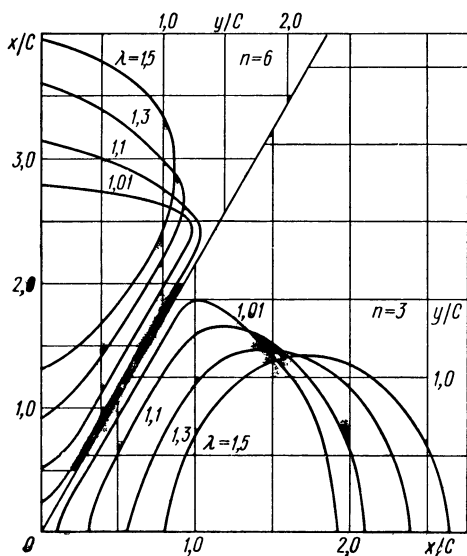


Рис. 19. Результаты численного расчета равнопрочного контура для случая трех и шести циклически-симметричных отверстий

ляет утверждать, что если отверстия не слишком близки между собой, параметры следует выбирать, перенося на плоскость ζ заданную геометрию плоскости z . В противном случае параметры выбирают из нескольких вариантов расчета.

Метод быстро сходится при любом относительном расположении отверстий.

В качестве иллюстрации метода рассмотрим случай n циклически-симметрично расположенных отверстий в случае $\sigma_r = p$, $\tau_{r\theta} = 0$ (равномерное давление на контурах отверстий при отсутствии усилий на бесконечности). Обозначим $\tau = 2\pi/n$, $|a_k| = H$. Имеем

$$a_{k+1} = e^{i\tau} a_k; \quad r_k = r; \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$\omega(\zeta e^{i\tau}) = e^{i\tau} \omega(\zeta); \quad F(\zeta e^{i\tau}) = e^{-i\tau} F(\zeta),$$

поэтому

$$\alpha_{pk} = e^{-i\tau} \alpha_{p, k-1}; \quad \beta_{pk} = e^{i\tau} \beta_{p, k-1},$$

и порядок системы (262) при фиксированном m понижается до $2m$. При решении (262) $m = 3 \div 15$. На рис. 17—19 построены искомые кривые при $n = 2, 3, 4, 6$ соответственно, для разных значений единственного независимого параметра

$$\lambda = H \sin \tau |2| r (\lambda \geq 1).$$

При $\lambda \gg 1$ уравнение (260) для данных граничных условий имеет очевидное решение

$$F(\zeta) = \sum_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{-1}; \quad \omega(\zeta) = \sum_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{-1}; \quad (\zeta \in \Gamma_l). \quad (264)$$

Штрих означает, что в сумме опущен член с $k = l$. Раскладывая (264) в ряд по степеням λ , приходим к решению задачи, полученному в работе [47] более сложным путем.

Глава III

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ МАТЕРИАЛОВ*

§ 1. ПРИНЦИП РАВНОПРОЧНОСТИ

Примем следующие допущения.

А. Материал не содержит опасных трещиноподобных дефектов металлургического или технологического происхождения, не обнаруженных методами неразрушающего контроля.

В. Материал работает в условиях, исключающих опасное развитие в нем эксплуатационных трещин за требуемый промежуток времени. К эксплуатационным относятся усталостные, коррозионные, водорододиффузионные и другие трещины.

Эти допущения позволяют считать материал «бездефектным» и для определения условия локального разрушения пользоваться феноменологическими теориями, в которых отсутствуют структурные параметры, характеризующие структурные несовершенства материала (размер трещины, величину зерен или пор и т. д.).

При этом критерий разрушения определяют опытами на гладких образцах; размер образца, состояние материала, вид нагружения и внешние условия должны соответствовать натуральным условиям для рассматриваемого элемента конструкции.

Существенным недостатком теорий прочности является то, что в случае сложного напряженного состояния локальное разрушение часто не приводит к разрушению всей конструкции. Фактически в опасной точке появляется либо пластическая зона, либо образуются трещины, которые развиваются с увеличением нагрузок. Поэтому теории прочности дают неудовлетворительные результаты в местах надрезов, выточек и других концентраторов напряжений.

Примем еще одно допущение.

С. Локальное разрушение приводит к разрушению или потере работоспособности конструкции в целом.

Тем самым, пренебрегается устойчивым развитием пластических зон и трещин от момента их возникновения до потери несущей способности всей конструкции. Очевидно, это допущение идет в запас прочности.

Материал, удовлетворяющий допущениям А, В, С, будем называть равнопрочным, если он спроектирован так, что разрушение начинается одновременно во всех точках конструкции

* Эта глава написана совместно с А. Г. Таги-заде и В. М. Смольским [88, 89, 110—114].

(или же, если последнее невозможно, в максимально большой части конструкции).

Очевидно, что в такой конструкции материал «работает» наиболее равномерно и для заданного материала равнопрочность является также необходимым условием минимального веса конструкции. Указанное требование, предъявляемое к материалу при его проектировании, будем называть принципом равнопрочности. Этот принцип сводится к принципу равнонапряженности лишь в простейших частных случаях; последний применялся для расчета формы сосудов давления, навитых из волокон [125, 139]. Заметим, что минимум веса, получаемый на основании принципа равнопрочности, вообще говоря, будет условным или локальным в силу зависимости от исходной геометрии конструкции. Поэтому необходимо стремиться к использованию принципа в проектировании на как можно более ранней стадии и в наиболее общих геометрических формах.

Для многих важных случаев постановка принципа равнопрочности позволила сформулировать прямые математические проблемы для отыскания оптимальной переменной толщины оболочки (пластины), а также ее формы. Несмотря на нелинейность эти проблемы были решены во многих интересных случаях [88—90, 110—112].

Следует подчеркнуть, что при использовании различных материалов минимум массы может быть достигнут и на неравнопрочных конструкциях или материалах. Именно такой случай рассматривается ниже в § 4—6.

§ 2. ВЫБОР МАТЕРИАЛОВ

Выбор оптимального материала зависит от назначения конструкции. При этом определяющими являются соображения принципа равнопрочности (т. е. конструктивные соображения), экономические и технологические соображения. Следует подчеркнуть, что конструкционный анализ, основанный на каких-либо идеализированных и, может быть, практически трудно реализуемых предположениях, представляет интерес вне зависимости от экономических или технологических соображений, поскольку последние обычно носят преходящий характер.

Процесс выбора оптимальных материалов, в идеале, может быть алгоритмизирован следующим образом. Все имеющиеся материалы, удовлетворяющие технологическим соображениям, нужно разбить на конкурирующие сочетания. Каждому сочетанию отвечает свой проект равнопрочной конструкции, размеры которой определяются при помощи теории равнопрочности. Затем проекты сравниваются по нескольким признакам. Основные из них следующие: технические возможности (например, скорость, управляемость и т. п.); экономические (общая стоимость конструкции, окупаемость и т. п.); эстетические и т. д.

Один из конкретных признаков должен быть признан в качестве основного признака сравнения, а для всех остальных — должны быть установлены приемлемые границы. Те проекты, которые не удовлетворяют последним, выходят из игры. В тех случаях, когда основной признак имеет меру, т. е. измерим, этот алгоритм приводит к простому перебору равнопрочных проектов, допущенных к сравнению по какому-либо мини-максу. Если признанный в качестве основного признак имеет естественную границу, то возможен выход на эту границу нескольких конкурирующих проектов. В этом случае среди оставшихся признаков следует выделить основной и повторить по нему процесс перебора. В тех случаях, когда признак неизмерим (удобство управления, качество, комфортабельность и т. п.), можно воспользоваться системой оценки его по баллам аналогично тому, как это принято, например, в спортивной гимнастике. Весьма часто качественный признак оценивают по двоичной системе («плохо» или «хорошо»).

Этот процесс выбора можно проиллюстрировать на простейшей задаче о выборе оптимального клея, которую можно сформулировать следующим образом. Пусть задано два слоя 1, 2 конкретных материалов, которые можно склеить, применяя клеи марок A_1, A_2, \dots, A_n с соответствующей стоимостью q_1, q_2, \dots, q_n на единицу поверхности (включая технологические затраты, связанные, например, с предварительной обработкой поверхности). Технологические возможности клеев оцениваем по двум основным признакам: сопротивлению нормальному отрыву (рис. 20, а) и сопротивлению переходу трещин из материала 1 в материал 2 (рис. 20, б).

Возможно сравнение также по другим признакам (по сопротивлению сдвигу, сопротивлению переходу трещины из слоя 2 в слой 1, длительной прочности, теплостойкости и т. д.). Считаем, что по этим признакам свойства конкурирующих клеев находятся в приемлемых границах.

Какой из признаков считать основным? Это зависит от назначения данного элемента конструкции и, следовательно, от характера нагрузок, которые должен выдерживать клей. В случае, изображенном на рис. 20, б, основным признаком, очевидно, будет сопротивление развитию трещины. Этот случай часто встречается на практике в изгибаемых многослойных пластинах, балках и оболочках. Если металлический слой 1 подвергается нестационарному (циклическому, случайному и т. п.) нагружению, то с поверхности в глубь слоя 1 обычно развивается усталостная трещина. Скорость ее роста зависит от коэффициента интенсивности напряжений. При выходе трещины на границу слоев даль-

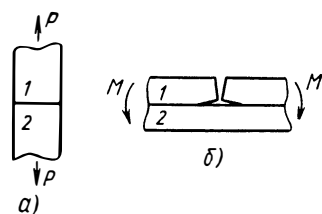


Рис. 20. Схема разрушения клеевых соединений:

а — растяжение — отрыв; б — изгиб — поперечный надрыв

нейшее развитие ее может происходить двояко в зависимости от свойств клея. Если клей недостаточно прочен, то трещина вначале пойдет по границе слоев и раздвоится; при этом коэффициент интенсивности напряжений в конце трещины уменьшится в несколько раз, что существенно задержит время перехода трещины из слоя 1 в слой 2. Если клей весьма прочен, то трещина сразу перейдет из одного слоя в другой, не раздваиваясь. Очевидно клеи, вызывающие раздваивание трещины, лучше; поэтому клеи, не обладающие этим свойством, нужно исключить из рассмотрения. Неправильный выбор клея может лишить многослойную конструкцию ее преимуществ перед однослойной. Оставшиеся клеи наиболее целесообразно сравнивать по сопротивлению сдвигу (чтобы не происходило расслаивания, сопротивление сдвигу должно быть достаточно велико). Клеи, удовлетворяющие и этому признаку, следует сравнивать по стоимости и выбирать наиболее дешевый.

В случае растяжения, изображенном на рис. 20, *a*, основным признаком, очевидно, будет сопротивление отрыву или усталостная прочность. Условие равнопрочности будет удовлетворять тот клей, прочность которого равна прочности слабейшей из склеиваемых компонент. Если разрыв произошел не вдоль площадки склеивания, то такой клей следует считать удовлетворительным. Дальнейшее сравнение производят по стоимости. Экономический критерий может заранее ограничить применение слишком дорогих клеев, в особенности для маловажных элементов. Этот процесс можно использовать также для выбора оптимального метода сварки или какого-либо другого технологического способа сцепления двух материалов.

§ 3. ПЛОСКОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ КЛЕЕННЫХ ПАНЕЛЕЙ

Пусть панель представляет собой пластину постоянной толщины h , составленную из k различных упругих склеенных слоев толщины h_i ($i = 1, 2, \dots, k$). Будем считать, что срединная плоскость панели является плоскостью симметрии задачи (включая внешние нагрузки и геометрию панели). Таким образом, рассмотрим обобщенное статическое плосконапряженное состояние панели (прямая задача). Анализ этого состояния позволит нам в дальнейшем перейти к постановке и решению обратных задач оптимального проектирования многослойных панелей.

Введем следующее основное допущение: средние смещения u , v и средние деформации ϵ_x , ϵ_y и γ_{xy} всех слоев одинаковы в соответствующих точках, расположенных на одной и той же нормали к срединной плоскости (xy — прямоугольные декартовы координаты в этой плоскости). Это допущение справедливо в том случае, когда взаимное проскальзывание слоев невозможно, а величина h гораздо меньше размеров пластины в плане. Определяющие урав-

нения в рассматриваемом приближении будут иметь следующий вид:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^{(i)}}{\partial y} + X^{(i)} &= 0, \\ \frac{\partial N_{xy}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial N_y^{(i)}}{\partial y} + Y^{(i)} &= 0; \end{aligned} \quad (265)$$

закон Гука

$$\begin{aligned} N_x^{(i)} &= \frac{2E_i h_i}{1 - \nu_i^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu_i \frac{\partial v}{\partial y} \right); \\ N_y^{(i)} &= \frac{2E_i h_i}{1 - \nu_i^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu_i \frac{\partial u}{\partial x} \right); \\ N_{xy}^{(i)} &= \frac{E_i h_i}{1 + \nu_i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (266)$$

Здесь E_i, ν_i — модуль Юнга и коэффициент Пуассона i -го слоя; $N_x^{(i)}, N_y^{(i)}, N_{xy}^{(i)}$ — соответствующие компоненты усилий, приложенных к i -му слою в его плоскости; $X^{(i)}, Y^{(i)}$ — компоненты реакции соседних слоев на i -й слой плюс объемная внешняя сила (на единицу поверхности слоя).

Отметим также следующие очевидные зависимости:

$$\left. \begin{aligned} N_x^{(i)} &= \sigma_x^{(i)} h_i, \quad N_y^{(i)} = \sigma_y^{(i)} h_i, \\ N_{xy}^{(i)} &= \tau_{xy}^{(i)} h_i, \quad \sum_{i=1}^k h_i = h, \\ N_x &= \sum_{i=1}^k N_x^{(i)}, \quad N_y = \sum_{i=1}^k N_y^{(i)}, \\ N_{xy} &= \sum_{i=1}^k N_{xy}^{(i)}, \quad \sigma_x = \frac{1}{h} N_x, \\ \sigma_y &= \frac{1}{h} N_y, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{h} N_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (267)$$

Здесь величины без верхнего индекса относятся к панели в целом, $\sigma_x^{(i)}, \sigma_y^{(i)}, \tau_{xy}^{(i)}$ — компоненты напряжений i -го слоя.

Дальнейшее основано также на следующем допущении: коэффициенты Пуассона всех слоев одинаковы:

$$\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n = \nu. \quad (268)$$

Напомним, что коэффициенты Пуассона большинства металлов весьма близки по величине. В этом случае, суммируя (265) и (266),

легко найти обычные уравнения теории плосконапряженного состояния

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + X &= 0, & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + Y &= 0, \\ N_x &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), & N_y &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ N_{xy} &= \frac{Eh}{1+\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (269)$$

Здесь

$$E = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^k E_i h_i; \quad (270)$$

X , Y — компоненты внешней силы, действующей на панель. Таким образом, получилась хорошо изученная плоская задача теории упругости; напряжения в слоях согласно (267) и (266)

$$\sigma_y^{(i)} = \sigma_y \frac{E_i}{E}, \quad \sigma_x^{(i)} = \sigma_x \frac{E_i}{E}, \quad \tau_{xy}^{(i)} = \tau_{xy} \frac{E_i}{E}. \quad (271)$$

В частности, в случае сквозных трещин нормального разрыва коэффициент интенсивности напряжений в каждом слое

$$K_I^{(i)} = K_I \frac{E_i}{E} \left(K_I = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^k h_i K_I^{(i)} \right). \quad (272)$$

Величину K_I вычисляют в зависимости от геометрии и внешних нагрузок [92, 140, 143].

Можно показать, что формулы (271) и (272) справедливы также в том случае, когда многослойная панель образует произвольную криволинейную оболочку, находящуюся в безмоментном состоянии (xy — декартовы координаты в касательной плоскости к срединной поверхности оболочки в рассматриваемой точке).

§ 4. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Определим вначале прочность растягиваемой многослойной панели. Будем различать два основных режима ее работы: безаварийный, когда панель можно считать бездефектной и нужно применять обычную теорию прочности, и аварийный, когда панель имеет сквозной дефект (например, усталостную трещину, брешь от метеорита или снаряда и т. п.). Сквозной дефект можно моделировать разрезом — трещиной даже в тех случаях, когда его фактическая форма довольно далека от математического разреза [66]. В зависимости от назначения конструкции тот или другой режим будет определяющим при оптимальном проектировании.

Безаварийный режим. Пусть сплошная плоская панель подвергнута одностороннему растяжению напряжением σ . Примем следу-

ющее основное допущение: каждый слой работает на разрушение так же, как если бы его боковые поверхности были свободны от напряжений. Это допущение справедливо только для хорошо подобранных клеев, соединяющих слои (см. выше раздел 2), когда клей сравнительно слабо сопротивляется складывающим напряжениям, так что при разрушении одного из слоев в соседних неразрушенных слоях можно пренебречь концентрацией напряжений на продолжении разрыва вследствие образования поперечной трещины вдоль клея (см. рис. 20). Это допущение выполнялось, например, в опытах Кауфмана по определению вязкости разрушения многослойных клеевых панелей [43]. В указанном допущении

диаграмма σ — ϵ для многослойной панели будет кусочно-линейной (рис. 21), если можно пренебречь пластичностью. Угловые точки на диаграмме соответствуют последовательному разрушению слоев. Величины $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ суть предельные деформации отдельных слоев в момент разрушения, перенумерованных в порядке убывания их жесткости. Отметим, что условие равнопрочности выполняется только в том случае, когда $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_k$. Однако в большинстве случаев наибольшей удельной прочности σ_B/h можно добиться на неравнопрочных панелях.

Найдем последовательно напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ на диаграмме σ — ϵ (рис. 21):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^k h_i \sigma^{(i)}(\epsilon_1), \\ \sigma_2 &= \frac{1}{h} \sum_{i=2}^k h_i \sigma^{(i)}(\epsilon_2), \dots \end{aligned} \quad (273)$$

Пусть наибольшее напряжение σ_B , выдерживаемое панелью, достигается при разрыве m -го слоя, т. е.

$$\sigma_B = \frac{1}{h} \sum_{i=m}^k h_i \sigma^{(i)}(\epsilon_m). \quad (274)$$

Отсюда удельная прочность, приходящаяся на единицу массы панели,

$$\frac{\sigma_B}{\rho} = \frac{\sum_{i=m}^k h_i \sigma^{(i)}(\epsilon_m)}{\sum_{i=1}^k h_i \rho_i} \left(\rho = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^k \rho_i h_i \right), \quad (275)$$

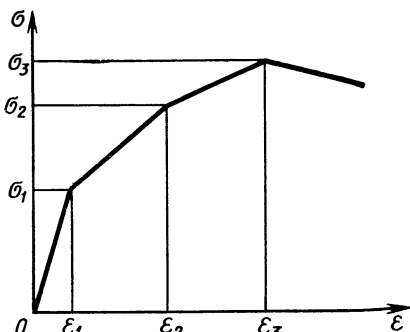


Рис. 21. Диаграмма σ — ϵ пластины, составленной из нескольких разнородных слоев

где ρ_i — плотность материала i -го слоя; $\sigma^{(i)}(\epsilon)$ — зависимость σ — ϵ материала i -го слоя.

В случае линейно-упругого поведения всех слоев будет

$$\frac{\sigma_B}{\rho} = \epsilon_m \frac{\sum_{i=1}^k h_i E_i}{\sum_{i=1}^k h_i \rho_i}. \quad (276)$$

Удельная прочность материала является одной из важнейших характеристик материала, определяющей перспективу его применения в космической и авиационной технике [43].

Поставим следующую задачу проектирования оптимальной панели. Пусть имеется n заготовок-листов, каждая из которых характеризуется величинами ρ_i , h_i , ϵ_i , $\sigma^{(i)}(\epsilon_m)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и задана матрица взаимного склеивания $\|c_{ij}\|$

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если лист } i \text{ склеивается с листом } j, \\ 0, & \text{если склеивания листов } i \text{ и } j \\ & \text{невозможно.} \end{cases} \quad (277)$$

(Склеивание может оказаться невозможным также по экономическим соображениям.)

Введем n двоичных независимых переменных x_i , которые характеризуют присутствие i -й заготовки в панели,

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я заготовка имеется в панели,} \\ 0, & \text{если } i\text{-й заготовки в панели нет.} \end{cases} \quad (278)$$

Требуется найти величины x_i и m , чтобы удельная прочность была максимальной, т. е. требуется максимизировать функцию

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n h_i \sigma^{(i)}(\epsilon_m) x_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i h_i x_i} \quad (279)$$

при следующих ограничениях:

$$a) \sum_{i=1}^n h_i \sigma^{(i)}(\epsilon_m) x_i \geq N_0, \quad (280)$$

$$b) \sum_{i=1}^n K_c^{(i)} h_i x_i \geq K_0. \quad (281)$$

в) выполнено условие склеивания листов в панель (282)

Условия (280) и (281) требуют, чтобы несущее усилие панели и ее вязкость разрушения были не меньше некоторых величин, заданных из конструктивных соображений. Для разрушения пане-

лей с весьма жесткими отдельными слоями справедлива концепция критической длины, аналогичная соответствующей концепции для композитов с волокнами [46, 58, 119, 129]. А именно, жесткие слои разделяются трещинами на отдельные участки, длина которых в направлении растяжения меньше критической длины

$$l_* = \frac{\sigma_i h_i}{2\tau_s}, \quad (283)$$

где τ_s — прочность клея на сдвиг.

Заметим, что к ограничениям (280)—(282) могут быть добавлены и совсем другие условия; например, из конструктивных соображений толщина панели может быть задана в некоторых допустимых границах.

Аварийный режим. Пусть по каким-либо непредвиденным причинам в панели образовалась сквозная трещина; требуется так спроектировать панель, чтобы работоспособность (живучесть) конструкции с трещиной была максимальной. Отметим, что трещиной можно с достаточно большой точностью моделировать брши и пробоины, по форме существенно отличающиеся от разреза [92].

Развитие образовавшейся трещины в панели, подвергнутой некоторому растяжению, зависит от коэффициента интенсивности напряжений на краю трещины. Согласно (272) и условию локального хрупкого разрушения развитие трещины вначале произойдет в том случае, в котором впервые будет достигнуто равенство

$$K_I^{(i)} = K_{Ic}^{(i)}, \text{ т. е. } K_I = \frac{E}{E_i} K_{Ic}. \quad (284)$$

Это продвижение фронта трещины вызовет перераспределение напряжений и дальнейшее поэтапное развитие фронта трещины проследить трудно. Однако ясно, что предельный стационарный режим роста трещины, когда локальное разрушение на фронте трещины во всех слоях происходит одновременно, отвечает условию равнопрочности, так как каждый из слоев предельно сопротивляется разрушению на фронте трещины. Заметим, что асимптотика, соответствующая поведению в конце трещины, в данном случае реализуется на расстоянии r от конца сквозной трещины, таких что $r \gg \Delta$, $h \ll r \ll l$, где Δ — характерный линейный размер «языка» фронта трещины, l — длина трещины (рис. 22).

Стационарному распространению равнопрочной трещины отвечает напряжение

$$\sigma = \lambda \frac{K_c}{\sqrt{\pi l}}, \quad (285)$$

где

$$K_c = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^k h_i K_c^{(i)}; \quad (286)$$

λ — некоторый безразмерный множитель, зависящий от формы панели в плане и расположения трещины; величина $K_c^{(i)}$ характе-

ризует предельное сопротивление i -го слоя развитию трещины. Она зависит от толщины h_i слоя; характерная зависимость $K_c^{(i)}$ от h_i для металлов изображена на рис. 23. Эта зависимость согласно допущению, сформулированному в начале анализа безаварийного режима работы, может быть определена в опытах на одном свободном слое.

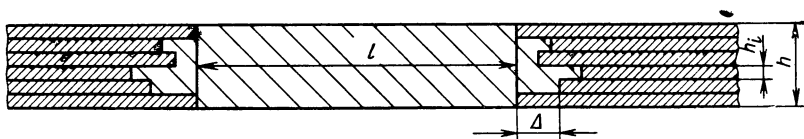


Рис. 22. Структура сквозной трещины в многослойной пластине; фронт трещины имеет сложное строение (однако вполне стандартное для каждой конкретной пластины и характеризующее согласно условию равнопрочности максимально возможное сопротивление развитию трещины)

Таким образом, если действующее в панели напряжение меньше σ , определяемого формулой (285), то образование щели длиной $2l$ не приведет к мгновенному хрупкому разрушению. Удельная прочность панели со сквозной трещиной, равная σ/ρ при одинаковой геометрии панели и трещины согласно (285), прямо пропорциональна множителю

$$\frac{\sum_{i=1}^k h_i K_c^{(i)}}{\sum_{i=1}^k h_i \rho_i} \quad (287)$$

Поэтому при расчете и прогнозе аварийных ситуаций для обеспечения максимума живучести конструкции следует проектировать панель так, чтобы величина (287) была максимальной.

Таким образом, в случае n заготовок — листов заданной толщины h_i приходим к следующей задаче оптимального проектирования: требуется максимизировать функцию

$$\Phi = \frac{\sum_{i=1}^n h_i K_c^{(i)} x_i}{\sum_{i=1}^n h_i \rho_i x_i} \quad (288)$$

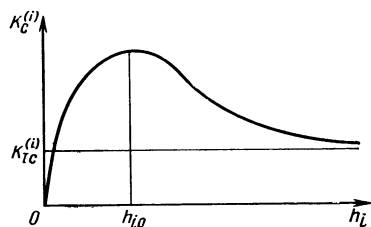


Рис. 23. Зависимость величины K_c i -го слоя от его толщины

по переменным x_i при ограничениях (280)—(282).

Если толщина листов может быть любой, т. е. завод-изготовитель заранее заказывает нужные ему листовые заготовки, то рассмотрение рис. 23 показывает, что оптимальная толщина листов равна величине h_{i0} , соответствующей максимуму вязкости разру-

шения слоя. Если по технологическим или экономическим причинам этого достичь нельзя, т. е. для всех заготовок $h_i > h_{i0}$, то оптимальная толщина листов отвечает минимальной возможной величине h_i .

§ 5. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Получающиеся задачи дробно-линейного программирования решаются в дальнейшем методами исследования операций. При малом числе заготовок задачу легко решить полным перебором всех вариантов, задавая порядок перебора от $n = 1$, к $n = 2$, $n = 3$ и т. д.

Нетрудно заметить, что из n заготовок без учета ограничений можно создать $\sum_{k=1}^n c_n^k k! / 2 \approx l \cdot n! / 2$ различных панелей. Ясно, что уже при $n = 7$ решать задачу полным перебором нерационально, поэтому для решения задачи применяют метод частичного перебора. Для выбранных листов панели проверка условия склеивания является достаточно сложной задачей. Поэтому вычислительный алгоритм, решающий поставленную задачу, для выбранного набора листов сначала должен проверить выполнение ограничений (280)—(281), затем увеличение функции (279) или функции (278) и, наконец, как самое трудоемкое, выполнение условия склеивания. Как предложено в работе [117], проверку ограничений и увеличения функции лучше проводить одновременно, т. е. решать серию задач на линейные неравенства:

$$\max \zeta, \quad \sum_{i=1}^n (\rho_i \zeta - K_c^{(i)}) h_i x_i < 0, \quad (289)$$

при ограничениях (280)—(281).

Эта задача решается гибкой процедурой перебора с правилом Балаша [138].

В процедуре перебора каждая переменная приобретает наименование: свободная, выбранная или помеченная. В случае нашей задачи свободные и помеченные переменные имеют значение 0, а выбранные переменные равны единице. Состояние поиска характеризуется списком и ранее определенным допустимым решением. Список содержит номера выбранных и полученных переменных, причем помеченные переменные отличают знак минус перед номером; свободные переменные в список не вносятся. Например, список

$$\{2, 4, 6, -8, -7, 10, 11, 14, -3, -5, -1\} \quad (290)$$

определяет переменные $x_2 = x_4 = x_6 = x_{10} = x_{11} = x_{14} = 1$, как выбранные, $x_8 = x_7 = x_3 = x_5 = x_1 = 0$, как помеченные, $x_9 = x_{12} = x_{13} = 0$, как свободные переменные; тем самым, списком

определяются значения всех переменных. По значениям переменных можно составить величину невыполнения ограничений d .

Так, для нашей задачи

$$d = \sum_{j=1}^l d_j,$$

где

$$d_1 = \begin{cases} s_1 - 10^{-7}, & s_1 \leq 0, \\ 0, & s_1 > 0, \end{cases} \quad s_1 = \sum_{i=1}^n (K_c^{(i)} - \rho_i \xi) h_i x_i. \quad (291)$$

Малая постоянная 10^{-7} обеспечивает $d_1 < 0$ при невыполнении строгого неравенства (289), что соответствует первому ограничению (289), остальные d_j строятся аналогично, а именно, если ограничение записано в виде $s_j \geq 0$, то

$$d_j = \begin{cases} s_j, & s_j < 0, \\ 0, & s_j \geq 0, \end{cases} \quad j = 2, 3. \quad (292)$$

Допустимым решением считается набор значений переменных, для которых выполнены ограничения ($d = 0$). Цель процедуры — перебрать допустимые решения с большими значениями максимизируемой функции. Перед начальным шагом процедуры список пуст (все переменные свободны) и $\xi = 0$. Затем последовательно осуществляются шаги процедуры. Шаг процедуры состоит из анализа списка, его изменения и проверки допустимого решения, если оно встретится.

При анализе списка определяется возможность выполнения ограничений, если некоторым или всем свободным переменным придать значение 1. Так, если для нашей задачи для списка невыполнено условие (289) ($d_1 < 0$), то, придав значение 1 только тем свободным переменным, для которых $K_c^{(i)} - \rho_i \xi > 0$, подсчитаем снова d_1 . Если $d_1 < 0$, то выполнить ограничения, в частности первое, свободными переменными нельзя. Аналогично проверяются и другие ограничения.

Если ограничения можно выполнить свободными переменными, то определяется та свободная переменная, перевод которой в выбранные и внесение в список сделает для нового списка максимальной величину d . Если для нового списка $d = 0$, то он определяет допустимое решение; для этого решения вычисляется максимизируемая функция и сравнением с d определяется, фиксировать ли новое допустимое решение (и менять ξ) или нет. Так, например, если список (290) допускает выполнение ограничений и в выбранную переменную надо обратить x_{12} , то новый список будет

$$\{2, 4, 6, 15, -8, -7, 10, 11, 14, -3, -5, -1, 12\}.$$

Если ограничения выполнить свободными переменными нельзя, то определяют, есть ли в списке выбранные переменные. При отсут-

ствии их поиск заканчивается. Если выбранные переменные в списке есть, то из последней группы (крайней справа) выбранных переменных переводится в фиксированные та, которая для нового списка сделает максимальной величину d . Новая фиксированная переменная ставится в списке в конце группы (справа) выбранных переменных, к которой она принадлежала; все фиксированные переменные справа от нее переименовываются в свободные (исключаются из списка). Так, если для списка (290) в фиксированную надо перевести переменную x_{11} , то новый список будет

$$\{2, 4, 6, 15, -8, -7, 10, 14, -11\}.$$

Итак, на каждом шаге либо в список вносится одна переменная и возможно допустимое решение, либо список не увеличивается и возможен конец поиска. В процессе поиска осуществляется частичный просмотр допустимых решений.

В процессе решения задачи каждое допустимое решение «проверяется на склеиваемость» следующим образом. Составим матрицу из тех элементов c_{ij} , для номеров i и j которых $x_i = x_j = 1$. Полученную матрицу дополняем единичными строкой и столбцом и нулевым элементом по диагонали. В этой матрице порядка $n_1 =$

$$= \sum_{i=1}^n x_i + 1 \text{ требуется отыскать } n_1 \text{ элементов, которые равны еди-}$$

нице и из которых можно составить замкнутый маршрут, т. е. так упорядочить, чтобы номер столбца предыдущего элемента совпадал с номером строки последующего и номер столбца последнего элемента совпадал с номером строки первого. Для решения этой задачи использован алгоритм ветвления, аналогичный использованному в работе [58]. Объектом ветвления является набор элементов исходной матрицы и матрица, порядок которой равен разности n_1 и числа элементов в наборе (в начальный момент набор элементов объекта пуст). Для объекта определяют возможность ветвления: если матрица содержит нулевую строку или столбец, то ветвление объекта заканчивается.

Для ветвления объекта определяют элементы ветвления и замыкания. Элемент ветвления $c_{ij} = 1$ является единственной единицей в строке i или столбце j , а если такого элемента в матрице нет, то для него сумма элементов в строке и столбце наименьшая.

Элемент замыкания с некоторыми или всеми элементами набора и элементом ветвления составляет замкнутый маршрут. Ветвление объекта A сводится к получению двух объектов. Один объект содержит тот же набор элементов, что и объект A , а матрица его отличается лишь элементом $c_{ij} = 0$. Набор другого объекта содержит набор A и элемент c_{ij} . Матрица другого объекта получается из матрицы объекта A исключением строки i и столбца j и обращением в нуль элемента замыкания. Алгоритм заключается в ветвлении объекта, набор которого содержит наибольшее число элементов. Если закончено ветвление всех объектов, то выбранные листы обра-

зывать клееную панель не могут. Если матрица одного из объектов единичная, то листы склеиваются в панель; порядок склеивания предписывается набором элементов.

Физический смысл алгоритма проверки условия склеивания заключается в том, что к отобранным коммуникациям всегда добавляется такая, чтобы оставшиеся разрешенные коммуникации создавали как можно больше склеиваемых комбинаций.

Поскольку процедура перебора обеспечивает скорейшее выполнение ограничений (280)—(282) и вязкость разрушения у заготовок большой толщины меньше, первое допустимое решение имеет минимальную Φ среди всех допустимых решений. Затем алгоритм перебирает части допустимых решений и для каждого из них проверяют условие склеивания.

§ 6. ЦЕЛЕВОЙ АЛГОРИТМ ПЕРЕБОРА

В гибкой процедуре перебора при переходе от одного набора переменных к другому используется правило равномерного выполнения ограничений и критерия (правило Балаша). Допустимое решение можно искать и с помощью другого правила, учитывающего только критерий. При таком поиске удобно расположить переменные в порядке убывания критерия (удельной вязкости разрушения или удельной прочности).

Правило перебора сводится к следующему. Если для текущего набора переменных ограничения можно удовлетворить свободными переменными, то в список вводится и становится выбранной переменной с наименьшим порядковым номером. Если ограничения для этого набора переменных выполнены или свободными переменными их удовлетворить нельзя, то из списка исключаются справа все помеченные переменные до ближайшей выбранной, которая переводится в помеченные. Таким образом, порядок переменных в списке всегда определяется их номером, и потому список полностью определяется знаками на местах соответствующих переменных. Например, список $\{+, +, -, -, +\}$ определяет переменные $x_1 = x_2 = x_5 = 1$ как выбранные, $x_3 = x_4 = 0$ как помеченные; остальные переменные свободные. Весь список можно задать числом в двоичной системе и количеством переменных в списке, что удобно при применении вычислительной техники.

Поиск с таким правилом выгодно применять, когда допустимых решений много (много одинаковых заготовок или ограничения и условия склеивания не обременительны). Оптимальное решение определяется быстрее, однако проверка его оптимальности требует большего перебора, чем при решении с правилом равномерного выполнения ограничений и критерия.

§ 7. КОМПРОМИСНЫЙ КРИТЕРИЙ

Кроме указанного однокритериального подхода (по безаварийному или аварийному режимам работы) можно применять также подход, основанный на компромиссном критерии, представляющем

собой некоторую комбинацию критериев (279) и (288). При этом подходе целесообразно вначале найти величину F_{\max} в безаварийном режиме, затем величину Φ_{\max} — в аварийном режиме; окончательным решением будем считать такое решение, которое минимизирует следующую функцию;

$$\psi = \varphi^2 + \lambda f^2$$

$$\left(\varphi = \frac{\Phi_{\max} - \Phi}{\Phi_{\max}}, \quad f = \frac{F_{\max} - F}{F_{\max}} \right). \quad (293)$$

Здесь λ — некоторое число, определяющее относительную важность аварийного или безаварийного режима.

В качестве компромиссного критерия можно взять также критерий минимальной вероятности разрушения. Выведем его.

Пусть, в каждом режиме для значения относительного отклонения критерия от оптимального известны вероятности и разрушения конструкции [$p^c(f)$ для аварийного режима и $p^o(\varphi)$ для безаварийного режима]. Если еще известны вероятности того, что в момент разрушения конструкция работала в аварийном или безаварийном режиме (p_c и p_o соответственно), то по формуле полной вероятности, вероятность разрушения конструкции

$$P = p_c p^c(f) + p_o p^o(\varphi) \quad (294)$$

$$(p_c + p_o = 1),$$

и в качестве критерия надо взять минимум этой функции. Поскольку $p^c(f)$ и $p^o(\varphi)$ не являются монотонно убывающими функциями, вероятностный критерий (294) при p_c , близком к единице, не совпадает с F (и при p_c , близком к нулю, не совпадает с Φ). Тем не менее, он является приемлемым компромиссным критерием в промежуточной области изменения p_c (когда величины p_c и p_o сравнимы). Возможны и другие варианты компромиссного критерия [20].

§ 8. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

На ЭЦВМ М-20 по данному алгоритму численно сконструированы четыре панели из десяти наборов одинаковых заготовок и трех материалов (алюминиевые и титановые сплавы, характеристики которых даны в табл. 2). В каждом наборе имелось по две заготовки. Требовалось создать по две панели с максимальной удельной вязкостью разрушения при ограничениях на их толщины $2 \text{ см} \leq h \leq 4 \text{ см}$ и $4 \text{ см} \leq h \leq 6 \text{ см}$ соответственно, для одной из этих панелей возможность склеивания не проверялась, а для другой условия склеивания предписывались фиктивной матрицей (табл. 3). Удельная вязкость разрушения панелей и номера входящих в них заготовок представлены в табл. 4. Проверка на склеиваемость при фиктивной исходной матрице значительно увеличивает время счета задачи. Так, определение оптимальной панели с указанными гра-

Характеристика

№ заготовки	1	2	3	4
Материал	Сталь ВКС-1	Алюминиевый сплав 1201		
Состав, %	0,39% С, 1,75% Cr, 1,08% Si, 0,6% Ni, 0,83% Mn, 0,07% V, 0,53% Mo	5,8—6,8% Cu, 0,3% Mn, 0,02—0,1% Ti, 0,1—0,25% Zr, 0,05—0,15% V, 0,2% Si, 0,3% Fe, 0,2% Mg		
Состояние материала	Закалка 940° С и охлажде- ние на воздухе, отпуск 3 ч при 270° С	Закаленное и состаренное		
$\rho \cdot 10^3$, кг/см ³	$7,79 \cdot 10^{-6}$	$2,6 \cdot 10^{-6}$		
E , Н/см ²	$2009 \cdot 10^{-5}$	$71\ 834 \cdot 10^{-8}$		
$\sigma_{0,2}$, Н/м ²	$153,86 \cdot 10^{-7}$	$235,2 \cdot 10^{-8}$		
σ_B , Н/м ²	$1813 \cdot 10^{-8}$	$352,8 \cdot 10^{-8}$		
δ , %	5	6		
h , м	$2 \cdot 10^3$	$35 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$
K_C , Н/см ² /2	$77\ 665 \cdot 10^3$	$62\ 818 \cdot 10^3$	$5243 \cdot 10^4$	$45\ 668 \cdot 10^3$

материалов

5	6	7	8	9	10	11	12
Титановый сплав ВТ14			Сталь ВЛД	Алюминиевый сплав 7075-T6			
3,5—5,5% Al, 2,5—3,8% Mo, 0—1,5% V, 0,01—0,1% Zr			0,3% C, 0,9% Mn, 1,0% Ni, 1,07% W, 0,9% Si, 0,5% Cr, 0,5% Mo	5—7% Zn, 1,8—2,8% Mg, 1,4—2,0% Cu, 0,2—0,6% Mn, 0,1—0,25% Cr			
Закаленное и состаренное			Закалка 930° C, охлаждение на воздухе, отпуск 3 ч при 210° C	Закаленное и охлажденное до исходного состояния			
4,52 · 10 ⁻⁶			7,9 · 10 ⁻⁶	2,6 · 10 ⁻⁶			
1127 · 10 ⁻⁶			2009 · 10 ⁻⁵	6958 · 10 ⁻⁷			
1176 · 10 ⁻⁸			1372 · 10 ⁻⁸	411,6 · 10 ⁻⁸			
1274 · 10 ⁻⁸			1675,8 · 10 ⁻⁸	490 · 10 ⁻⁸			
6			7	8			
12 · 10 ⁻⁴	14 · 10 ⁻⁴	24 · 10 ⁻⁴	2 · 10 ⁻³	26 · 10 ⁻⁴	3 · 10 ⁻³	4 · 10 ⁻³	5 · 10 ⁻³
8722 · 10 ⁴	796 152 × × 10 ²	562 9 12 × × 10 ²	18 424 · 10 ⁴	89 818 × × 10 ³	819 966 × × 10 ²	755 972 × × 10 ²	686 · 10 ⁵

Результаты расчета

Ограничения	Проводилась проверка условий склеивания	Номера заготовок, входящих в оптимальную панель	Критерий (см ³ /з)
2—4 см	Нет	2, 9, 10, 11, 11, 10, 9, 2	3,001 · 10 ⁶
	Да	4, 9, 10, 11, 11, 10, 9, 4	2,48 · 10 ⁶
2—6 см	Нет	3, 9, 10, 11, 12, 12, 11, 10, 9, 3	2,743 · 10 ⁶
	Да	5, 3, 2, 6, 9, 10, 11, 11, 10, 9, 6, 2, 3, 5	2,56 · 10 ⁶
Аварийный режим		1, 2, 3, 5, 9, 10, 11, 12, 12, 11, 10, 9, 5, 3, 2, 1	2,53 · 10 ⁶
Безаварийный режим		1, 5, 6, 7, 8, 8, 7, 6, 5, 1	25 200

Таблица 4

Фиктивная матрица склеивания
(*i* — номер заготовки, см. табл. 3)

<i>i</i>	2	3	4	5	6	7	9	10	11	12
2	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
3	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0
4	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0
5	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
6	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
7	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
9	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
10	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1
11	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
12	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0

ницами толщин панели для истинной матрицы потребовало 0,4 и 3 мин, а для фиктивной матрицы склеивания — 8 и 34 мин соответственно.

В двух других примерах из всего множества материалов (см. табл. 1) сконструированы две панели для работы в аварийном ($N_0 = 0,147$ Н/м²) и безаварийном ($K_0 = 9800$ Н/м²) режимах. Условие склеивания не проверялось. Как видно из табл. 2 две последние панели состоят в основном из различных листов.

Следует заметить, что при малом числе ограничений изложенный выше алгоритм следует применять при «дефиците» заготовок в наборе. Если допустить произвольное число заготовок в наборе, то во всех примерах оптимальной по критерию максимума удельной вязкости разрушения будет панель из однотипных заготовок № 9 (см. табл. 1), а при учете склеивания — панель из заготовок № 9 и № 10 склеенных поочередно: 9—10—9—10—9 для $2 \text{ см} \leq h \leq 4 \text{ см}$.

Глава IV
МЕТОД ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ РАЗЛОЖЕНИЙ
В МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ*

§ 1. ОБЩИЙ МЕТОД

Метод внешних и внутренних разложений широко применяют в аналитических исследованиях краевых задач математической физики, описываемых эллиптическими системами дифференциальных уравнений в частных производных. Рассмотрим применение этого метода для вывода общих уравнений деформирования дискретно-армированного континуума (пространство, армированное оболочками или стержнями, оболочка, армированная стержнями); размерность армирующего тела предполагается меньшей размерности связующего материала. Строгая теория таких объектов представляет интерес в связи с изучением композиционных материалов.

Пусть в некоторой области D трехмерного пространства требуется найти решение определенной краевой задачи для эллиптической системы дифференциальных уравнений в частных производных. Пусть область D обладает следующим свойством: в ней можно ввести безразмерный (геометрический) малый параметр $0 \leq \varepsilon \ll 1$.

Этот параметр представляет собой отношение $\varepsilon = l/L$, где l и L — некоторые характерные линейные размеры области D (l — будем называть внутренним параметром, а L — внешним).

Метод внешних и внутренних разложений заключается в следующем. Из области D образуются две более простые области (которые обозначим через D_l и D_L); они получаются при помощи следующих предельных переходов:

$$D_l = \lim_{l \rightarrow \infty} D \quad (l \text{ конечно}); \quad (295)$$

$$D_L = \lim_{L \rightarrow \infty} D \quad (L \text{ конечно}). \quad (296)$$

Данную краевую задачу для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений решаем отдельно для области D_l и области D_L . Соответствующие решения обозначим через $S_l(r, l)$ и $S_L(\vec{r}, L)$, где \vec{r} — радиус-вектор точки в области D (решение S_l будем называть внутренним, а решение S_L — внешним).

* Изложение этой главы основано на работе [93].

Будем исходить из того, что решение исходной краевой задачи для области D (обозначаемое через $S_0(\varepsilon, \vec{r})$) существует и оно единственно. Найдем следующие асимптотики полученных решений:

$$S_I^\infty(\vec{r}, l) = S_I(\vec{r}, l) \text{ при } r \gg l, \quad (297)$$

$$S_L^0(\vec{r}, L) = S_L(\vec{r}, L) \text{ при } r \ll L. \quad (298)$$

$$(r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Здесь предполагается, что начало декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 выбрано в точке «наибольшей вариации», т. е. в той точке, где решение исходной краевой задачи для области D меняется наибольшим образом. (В этой точке функция $\partial S_0/\partial \varepsilon$ имеет максимум.) Обычно точку «наибольшей вариации» нетрудно угадать заранее из физических соображений. В случае плоских или локально-плоских краевых задач координату x_3 можно считать равной нулю.

Функции $S_I^\infty(\vec{r}, l)$ и $S_L^0(\vec{r}, L)$ будем называть внутренним и внешним разложением соответственно. Из теоремы существования и единственности исходной краевой задачи для области D вытекает следующее:

1°. Внутреннее и внешнее разложение совпадают, т. е.

$$S_I^\infty(\vec{r}, l) = S_L^0(\vec{r}, L). \quad (299)$$

2°. Внутреннее решение определяется с точностью до нескольких неопределенных постоянных, определяющих его поведение на бесконечности (при $r \rightarrow \infty$).

3°. Общее число неопределенных постоянных и сами разложения S_I^∞ и S_L^0 с точностью до коэффициентов определяются из общего решения краевой задачи для области D_s :

$$D_s = \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ l \rightarrow 0}} D. \quad (300)$$

Краевая задача для области D_s называется сингулярной, а ее решение — сингулярным решением. Теория сингулярных решений в линейной теории упругости и некоторые ее приложения даны в работе [98].

Решение сингулярной задачи не единственно и определяется с точностью до нескольких неопределенных коэффициентов; некоторые сингулярные решения отбрасываются по физическим соображениям.

4°. Внешнее решение единственно, если его асимптотика в нуле (при $r \rightarrow 0$) совпадает с сингулярным решением, удовлетворяющим дополнительным физическим условиям.

Решение исходной задачи «сшивается» из внутреннего и внешнего решений вдоль некоторого слоя или «пояса» (охватывающего начало координат) при помощи «условия сшивания» (299). Геометрическая форма и размеры этого «пояса» зависят от конкретной задачи. Внутри «пояса» справедливо внутреннее решение, а вне «пояса» — внешнее решение.

Некоторые обобщения метода. а) Параметры l или L могут быть связаны не с геометрией области D , а с физическими процессами, отраженными в коэффициентах решаемой системы дифференциальных уравнений и граничных условий. В этом случае величины l или L будут характеризовать область действия того или иного физического эффекта. б) Область «наибольшей вариации» может быть не точка (как предполагалось до сих пор), а линия или поверхность.

В обоих указанных случаях данное выше описание метода полностью сохраняется с точностью до несущественных и совершенно очевидных изменений.

При предельных переходах (295), (296) или (300) упрощается не только область, но также сами дифференциальные уравнения. Поэтому этот метод представляет большие возможности для аналитических исследований. Ниже рассмотрим некоторые его приложения в теории упругости и механике разрушения.

§ 2. УРАВНЕНИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ДИСКРЕТНО-АРМИРОВАННОГО КONTИНУУМА

Континуум, армированный оболочкой. Рассмотрим область в трехмерном пространстве, заполненную двумя упругими материалами, одно из которых занимает область D_1 типа тонкого криволинейного слоя или оболочки, так что справедливо условие

$$h \ll R. \quad (301)$$

Здесь h — характерная толщина оболочки; R — характерный радиус кривизны срединной поверхности оболочки. Вдоль границы контакта упругие материалы жестко сцеплены.

В данном случае малым параметром ϵ является отношение h/R . Область D_1 при больших R и конечных h представляет собой классическую оболочку, изучаемую в специальных курсах теории оболочек*. Составляющие (X'_1, X'_2, X'_3) вектора интенсивности

* Строго говоря, при $N \rightarrow \infty$ получается бесконечный плоский слой постоянной толщины в бесконечном упругом пространстве. Внутренние различия в напряжениях будут представлять собой некоторые ограниченные величины, различные при $x'_3 \rightarrow +\infty$ и $x'_3 \rightarrow -\infty$ и удовлетворяющие только условиям равновесия. Таким образом, тонкая оболочка получается безмоментной и не влияющей на распределение напряжений. Подход, излагаемый в тексте, позволяет учесть эффект самостоятельной передачи упругой энергии вдоль оболочки; этот подход справедлив в том случае, когда модуль Юнга оболочки существенно больше модуля Юнга основного материала.

приведенной поверхностной нагрузки по осям подвижной системы координат $x_1'x_2'x_3'$

$$X_1' = \begin{bmatrix} \tau_{x_1'x_3'} \\ \tau_{x_1'x_2'} \end{bmatrix}, \quad X_2' = \begin{bmatrix} \tau_{x_2'x_3'} \\ \tau_{x_2'x_1'} \end{bmatrix}, \quad X_3' = \begin{bmatrix} \sigma_{x_3'} \end{bmatrix}. \quad (302)$$

Здесь ось x_3' направлена по нормали к срединной поверхности оболочки, оси x_1' и x_2' лежат в касательной плоскости; $\tau_{x_1'x_3'}$, $\tau_{x_2'x_3'}$, $\sigma_{x_3'}$ — соответствующие компоненты напряжения в основном материале; скобки $[A]$ означают скачок величины A при пересечении оболочки в направлении положительной нормали

(т. е. $A \Big|_{z=h/2}^{z=-h/2}$). Считаем, что координаты x_1' и x_2' образуют криволинейную ортогональную систему координат на срединной поверхности оболочки.

Обозначим через v_1, v_2, v_3 составляющие вектора смещения срединной поверхности оболочки по осям x_1', x_2', x_3' . Общие уравнения теории оболочек можно записать в виде *

$$L_{ij}v_j = X_i' \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (303)$$

Здесь L_{ij} — определенные линейные дифференциальные операторы по x_1' и x_2' (см., например, книгу [17]); они зависят от геометрии оболочки и от упругих постоянных. В случае линейной вязкоупругости упругим постоянным соответствуют некоторые линейные операторы по времени, характерные для материала оболочки.

По известному полю v_1, v_2, v_3 при помощи соотношений теории оболочек можно полностью установить возмущающее поле деформаций и напряжений в оболочке. Наложение на него составляющих $\tau_{x_3x_1'}$, $\tau_{x_3x_2'}$, σ_{x_3} (равных соответствующих напряжениям, взятым из внешнего решения при $z = -h/2$) дает искомое поле напряжений в оболочке.

Пусть x_1, x_2, x_3 образуют некоторую неподвижную прямоугольную декартову систему координат. Тогда согласно (303) компоненты X_1, X_2, X_3 поверхностной нагрузки по этим осям координат будут следующими:

$$X_i = \alpha_{ij} L_{jk} v_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (304)$$

Здесь α_{mn} — косинус угла между осями x_m' и x_n , т. е. некоторая геометрическая характеристика оболочки.

Область D_L , которая получается при $h \rightarrow 0$ (R конечно), представляет собой всю область D , разрезанную вдоль срединной по-

* По повторяющемуся индексу производится суммирование.

верхности оболочки (математический разрез нулевой толщины). Противоположные берега разреза сцеплены в соответствующих точках, лежащих на одной и той же нормали; в точках разреза к телу приложена внешняя сила интенсивности $(-X_1, -X_2, -X_3)$. Последнее вытекает из уравнений равновесия и является аналогом «условия сшивания» внутреннего и внешнего решений.

Уравнения теории упругости для области D_L с объемной силой (уравнения Ляме) можно записать в виде

$$M_{ij}U_j = -X_i f_0(x_1, x_2, x_3) \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (305)$$

где $f_0 = \delta [x_1 - \varphi_1(x'_1, x'_2), x_2 - \varphi_2(x'_1, x'_2), x_3 - \varphi_3(x'_1, x'_2)]$.

Здесь u_1, u_2, u_3 — составляющие вектора смещения по осям x_1, x_2, x_3 ; M_{ij} — определенные линейные дифференциальные операторы второго порядка по x_1, x_2, x_3 , зависящие от упругих постоянных; эти операторы можно найти в учебниках по теории упругости. В случае линейной вязкоупругости упругим постоянным соответствуют некоторые линейные операторы по времени, характерные для основного материала. Уравнения

$$x_i = \varphi_i(x'_1, x'_2) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (306)$$

представляют собой уравнения срединной поверхности оболочки. Функция $f_0(x_1, x_2, x_3)$ в правой части (305) представляет собой дельта-функцию, определяемую следующим образом:

$$\int_{D_L} F(x_1, x_2, x_3) f_0(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \\ = F[\varphi_1(x'_1, x'_2), \varphi_2(x'_1, x'_2), \varphi_3(x'_1, x'_2)], \quad (307)$$

где $F(x_1, x_2, x_3)$ — произвольная непрерывная функция.

Уравнения (305) описывают внешнее решение исходной задачи. Согласно условию жесткого сцепления смещение срединной поверхности оболочки, определяемое из решения внутренней задачи (304), т. е. вектор (v_1, v_2, v_3) , должен равняться смещению соответствующей точки той же поверхности, определяемому из решения внешней задачи (305), т. е. вектору (u_1, u_2, u_3) . Следовательно, на поверхности (306) должно выполняться условие

$$v_k = \alpha_{kl} u_l \quad (k, l = 1, 2, 3). \quad (308)$$

При помощи этого соотношения уравнение (304) запишем так:

$$X_i = \alpha_{ij} L_{jk} \alpha_{kl} u_l \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3). \quad (309)$$

Здесь использовано то обстоятельство, что дифференцирование в операторах L_{jk} производится только по переменным x'_1 и x'_2 [т. е. вдоль поверхности (306)].

Подставляя теперь величины X_i из (309) в (305), находим иско-
мые уравнения деформирования упругого или вязкоупругого
континуума, армированного оболочкой:

$$M_{ij}U_j = -\delta (x_1 - \varphi_1, x_2 - \varphi_2, x_3 - \varphi_3) \alpha_{ij} L_{jk} \alpha_{kl} u_l. \quad (310)$$

$$(i, j, k, l = 1, 2, 3).$$

В предельном случае, когда модуль Юнга основного материала
стремится к нулю, отсюда получаются обычные уравнения теории
оболочек для армирующей компоненты. В другом предельном
случае, когда изгибная и продольная жесткость оболочки стре-
мится к нулю, получаются обычные уравнения теории упругости.

Оболочка, армированная криволинейными стержнями. Совер-
шенно аналогичный метод позволяет вывести следующие общие
уравнения теории оболочек, армированных стержнями:

$$L_{ij}v_j = -\delta [x'_1 - \psi_1(s), x'_2 - \psi_2(s)] N_{ij}v_j \quad (311)$$

$$(i, j = 1, 2, 3).$$

Здесь уравнение главной оси растяжения криволинейного
стержня (которая по предположению расположена на срединной
поверхности оболочек) дается уравнениями $x'_i = \psi'_i(s)$, где $i =$
 $= 1, 2$. Величины v_1, v_2, v_3 представляют собой составляющие
вектора смещения по осям x'_1, x'_2, x'_3 соответственно; N_{ij} — изве-
стные линейные дифференциальные операторы по s , зависящие
также от геометрии стержня и его упругих постоянных. Осталь-
ные обозначения пояснены выше.

Континуум, армированный стержнями. Приведем еще общие
уравнения деформирования упругого или вязкоупругого конти-
нуума, армированного тонкими криволинейными стержнями, сде-
ланными из другого упругого или вязкоупругого материала; эти
уравнения выводятся методом, совершенно аналогичным изложен-
ным выше:

$$M_{ij}U_j = -\delta [x_1 - \kappa_1(s), x_2 - \kappa_2(s), x_3 - \kappa_3(s)] N_{ij} \alpha_{jk} u_k$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3). \quad (312)$$

Здесь $x_i = \kappa_i(s)$ — уравнения главной оси стержня; α_{jk} —
косинус угла между осями x_j и x'_k , оси x'_2 и x'_3 совпадают с глав-
ными осями инерции сечения стержня, ось x'_1 направлена вдоль
главной оси растяжения стержня; остальные обозначения иден-
тичны принятым выше.

Уравнения (310)—(312) представляют собой общие уравнения
деформирования линейного дискретно-армированного континуума.
Все они содержат в качестве коэффициентов при некоторых членах
дельта-образные функции. Уравнения автоматически учитывают
структуру неоднородного континуума, поэтому граничные условия
для него, как и для однородного тела, ставятся только на границе

области D . В частности, армированной может быть граница области D или некоторая часть границы. Нетрудно написать также соответствующие динамические уравнения, рассматривая силы инерции как некие массовые силы.

Развитая теория дискретно-армированного континуума позволяет поставить в рамках строгого подхода многие интересные задачи оптимального проектирования и материаловедения. Теория годится, очевидно, для тех случаев, когда модуль Юнга армирующей компоненты велик (или хотя бы сравним) с модулем Юнга основного материала.

§ 3. ОТВЕРСТИЯ И ПОЛОСТИ В УПРУГИХ ТЕЛАХ

В том случае, когда модуль Юнга инородного включения существенно меньше модуля Юнга основного материала, а также, когда предел пластичности (прочности) включения значительно меньше напряжений, действующих в основном материале, требуется дополнительное исследование. Предположим, что включение по-прежнему залегает в виде тонкого слоя или стержня в основном материале. В этом случае самостоятельной передачей упругой энергии вдоль слоя (дальнодействием слоя) можно пренебречь, нужно учитывать лишь локальную работу слоя на растяжение (сжатие) и на сдвиг. Граничные условия при этом с границы сцепленного контакта можно переносить на срединную поверхность оболочки (что соответствует предельному переходу $h \rightarrow 0$ к области D_L для внешнего решения, где h — толщина слоя).

Внутреннее решение (для плоского слоя толщиной h) получается однородным, причем

$$\left. \begin{aligned} \tau_{x'_1 x'_3} &= \mu \frac{[v_1]}{h}, \quad [\tau_{x'_1 x'_3}] = 0; \\ \tau_{x'_2 x'_3} &= \mu \frac{[v_2]}{h}, \quad [\tau_{x'_2 x'_3}] = 0; \\ \sigma_{x'_3} &= E \frac{[v_3]}{h}, \quad [\sigma_{x'_3}] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (313)$$

Внешнее решение представляет собой решение соответствующей краевой задачи теории упругости для области D с математическим разрезом вдоль срединной поверхности оболочки; на разрезе должны выполняться граничные условия (313). Нетрудно составить граничные условия также для того случая, когда слой находится в пластическом состоянии или же на границе контакта допускается проскальзывание с трением (или без трения). В частном случае при $E \rightarrow 0$ получается трещино-подобная полость со свободными от нагрузок берегами.

Пусть теперь в области D имеется полость (или включение), все измерения которой одного порядка (характерный линейный

размер ее равен l). Через L обозначим характерный линейный размер самого тела. Начало координат возьмем в центре полости. Тогда при $l/L \ll 1$ внутреннее решение состоит в решении соответствующей краевой задачи для данного отверстия, лежащего в безграничном пространстве; в качестве условия на бесконечности принимается, что поле напряжений и деформаций в бесконечно удаленной точке совпадает с первыми членами тэйлоровского разложения в начале координат решения задачи для области D без полости. Внешнее решение заключается в решении исходной задачи для области D без полости, но с особенностью в начале координат, полностью определяемой асимптотикой убывания внутреннего решения на бесконечности. Последнее решение позволяет определить влияние отверстия на поле деформаций и напряжений во всей области.

Замечание. Как видно, во внешней задаче смещения дискретно-армированного тела непрерывны всюду внутри области D ; разрыв терпят лишь производные от смещений (на поверхности или линии армирования). В случае рыхлого включения разрыв терпят сами смещения.

§ 4. ПРИЛОЖЕНИЕ К МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ

Практически все материалы имеют плоские дефекты типа трещиноподобных разрывов или полостей. Перечислим некоторые из них.

1. Микротрещины в стекле (их продольный размер варьируется в пределах 10^{-7} — 10^{-3} см).

2. Трещины сдвига — дислокации — в металлах (размером порядка 10^{-8} — 10 см).

3. Технологические трещины в металлах и полимерах (размером 10^{-3} — 10 см). К технологическим трещинам относят сварочные трещины; трещины, возникающие при термообработке, запрессовке, ковке и других процессах; зоны окисленного металла и пр.

4. Эксплуатационные трещины в металлах и полимерах (размером 10^{-3} — 10 см). К эксплуатационным трещинам относят усталостные трещины; коррозионные трещины; диффузионноводородные трещины и т. п.

5. Трещины в металлах, возникающие в металлургическом процессе (размером 10^{-5} — 1 см). К ним относят раковины и пустоты, возникающие при остывании металла в слитках; зоны окисленного металла; зоны охрупченного металла; инородные включения, прочность которых меньше прочности основного металла, и пр.

6. Трещины сдвига в земной коре, возникающие при землетрясениях (размером 10^{+5} — 10^{+7} см).

7. Тектонические трещины в земной коре (размером 10^{+3} — 10^{+6} см).

8. Рыхлые прослойки в горной породе (размером 1 — 10^4 см).

9. Структурные трещины в полимерах и горных породах (размером 10^{-7} — 1 см).

10. Выработки в горной породе, когда одно из измерений выработки гораздо меньше двух других. Именно такую форму имеют выработки, возникающие при добыче полезного ископаемого, залегающего в виде слоя (например, угля).

Поле напряжений и деформаций в телах с трещиноподобными полостями можно представить себе [98] склеенными из двух решетий, одно из которых описывает детально все особенности структуры вблизи края трещины (внутреннее разложение), а другое описывает поле напряжений и деформаций в теле с математическим разрезом нулевой толщины, проведенным вдоль срединной поверхности полости (внешнее разложение). Предельные асимптотики того и другого решения с точностью до множителей представляют собой решение канонической сингулярной задачи теории упругости для полубесконечного плоского разреза с прямолинейным краем. Это решение имеет следующую структуру:

$$f = K_I f_1(r, \theta) + K_{II} f_2(r, \theta) + K_{III} f_3(r, \theta). \quad (314)$$

Здесь f — искомая функция (напряжения, деформации, смещения); r, θ — полярные координаты с центром в конце разреза; f_1, f_2, f_3 — некоторые определенные функции, K_I, K_{II}, K_{III} — произвольные множители.

Условие склеивания внутреннего и внешнего решений приводит к трем условиям равенства соответствующих множителей в их асимптотиках. Эти три условия представляют собой дополнительное условие на бесконечности для отыскания единственного внутреннего разложения.

Вследствие концентрации напряжений разрушение начинается на краю полости, т. е. в области действия внутреннего разложения. Независимо от внутреннего разложения критериальное состояние разрушения согласно (314) определяется некоторым соотношением вида

$$F(K_I, K_{II}, K_{III}) = 0. \quad (315)$$

Здесь функция F и фигурирующие в ней постоянные зависят от внутреннего разложения (но из самого разложения эти функции определить, очевидно, нельзя).

Практически удобнее проводить опыты на образцах с трещинами, моделирующими данную полость и структуру ее края, чем (также в опытах) определять критерий начала разрушения где-то внутри области действия внутреннего разложения. По существу, внутреннее разложение можно определять только теоретическим путем, применяя какую-либо модель механизма локального разрушения.

Таким образом, наиболее прямым и безошибочным способом является определение функции F опытным путем. Например, в случае трещин нормального разрыва, когда $K_{II} = K_{III} = 0$, эта функция имеет вид

$$K_I - K_{Ic} = 0, \quad (316)$$

здесь K_{Ic} — некоторая опытная константа.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Иногда при остывании сварочного шва в нем развиваются так называемые «горячие» трещины, которые приводят к браку изделия. Аналогичное явление образования «раковин» и пустот в слитках наблюдается в металлургическом процессе.

Рассмотрим теоретическую модель, в рамках которой можно решить задачу об образовании и развитии горячей трещины. Решение этой задачи позволит сравнить различные тепловые режимы и выбрать наиболее благоприятный.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в контакте с твердым металлом, имеющим некоторую постоянную температуру $T = 0$, находится расплав, который мгновенно затвердевает, так что его температура в начальный момент постоянна и равна $T = T_0$. Вследствие остывания горячего металла в заполненной им области возникают растягивающие напряжения, так как на границе контакта металлы предполагаются жестко сваренными. С течением времени растягивающие напряжения возрастают, вызывая рост начальной наиболее опасной трещины или какого-либо эквивалентного дефекта. При $t \rightarrow \infty$ остаточные напряжения и размер горячей трещины будут максимальными. Будем считать металлы термоупругими телами, чтобы все пластические эффекты были сосредоточены лишь в малых областях вблизи контура трещин. В этом случае поставленная задача о развитии горячей трещины может быть решена в рамках механики хрупкого разрушения.

Введем также следующие допущения: а) все термоупругие постоянные не зависят от температуры и являются одинаковыми как для холодного, так и для горячего металла; б) металлы представляют собой однородное и изотропное тело; в) это тело находится в плосконапряженном состоянии (тонкая пластина).

Эти допущения не имеют принципиального характера, однако позволяют найти простое эффективное решение многих практически интересных задач и выявить некоторые основные качественные эффекты. Полученные решения, как известно, можно использовать также для случая плоской деформации, если заменить упругие коэффициенты.

¹ Эта глава основана на работе [51].

Сформулируем упрощенную задачу. Пусть в момент $t = 0$ произвольная область S в бесконечной однородной и изотропной упругой пластинке мгновенно нагревается до постоянной температуры $T = T_0$. Остальная часть тела имеет температуру $T = 0$ при $t = 0$. На границе области S нет скачка смещения; это соответствует физически замене области S , нагретой шайбой точно таких же размеров. Требуется определить развитие начальной трещины во времени. Перемещения, напряжения и главный вектор сил (а также вращение) в бесконечно удаленной точке считаются равными нулю.

§ 2. КИНЕТИКА РОСТА ГОРЯЧЕЙ ТРЕЩИНЫ

Пусть область S в приведенной выше постановке задачи представляет собой прямоугольник со сторонами $2x_0$ и $2y_0$. Начало декартовых координат x и y выберем в центре прямоугольника, ось x направим параллельно той стороне, длина которой равна $2x_0$ (рис. 24). Пусть начальная трещина длиной $2l$ расположена вдоль оси x с центром в начале координат. Берега трещины свободны от внешних нагрузок. Коэффициент интенсивности напряжений на конце трещины в данной задаче с точностью, примерно равной 10%, годится также для того случая,

когда вдоль оси y будет свободная от внешних нагрузок граница тела или области.

Порядок решения задачи будет следующим. Вначале определяем температурное поле; затем из уравнений термоупругости для тела без трещины находим напряжение σ_y при $y = 0$ $|x| < l$; это напряжение с обратным знаком подставляем в известное общее выражение для коэффициента интенсивности напряжений в случае изолированной трещины и изотермического процесса. Зависимость константы K_c от температуры вне интервала хладноломкости можно интерполировать следующей линейной функцией:

$$K_c = K_{c0} + AT(l, 0, t), \quad (317)$$

где K_{c0} — есть константа K_c при $T = 0$, A — некоторая эмпирическая постоянная. Приравнявая $K_I = K_c$ согласно условию Гриффитса-Ирвина, получаем в неявной форме искомую зависимость длины трещины от времени,

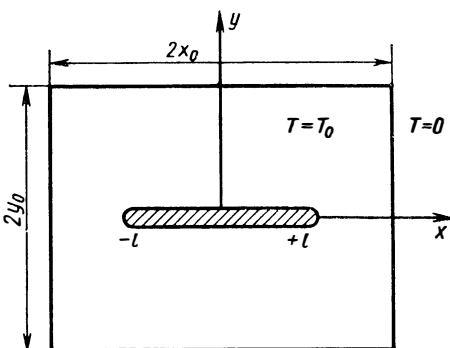


Рис. 24. «Горячая» трещина, образующаяся при остывании расплавленного металла в прямоугольной матрице

Решение краевой задачи

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (-\infty < x, y < +\infty), \quad (318)$$

$$T = \begin{cases} T_0 = \text{const} & (x, y \in S) \\ 0 & (x, y \notin S) \end{cases}$$

будет следующим:

$$\left. \begin{aligned} T(x, y, t) = & \frac{T_0}{4} \left[\text{Erf} \left(\frac{x+x_0}{2\sqrt{at}} \right) + \right. \\ & \left. + \text{Erf} \left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{at}} \right) \right] \left[\text{Erf} \left(\frac{y+y_0}{2\sqrt{at}} \right) + \text{Erf} \left(\frac{y_0-y}{2\sqrt{at}} \right) \right], \\ & \text{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-u^2) du, \end{aligned} \right\} \quad (319)$$

где a — коэффициент температуропроводности.

Компоненты тензора напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} выражаются через термоупругий потенциал перемещений ψ в виде

$$\sigma_x = -2G \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = -2G \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = 2G \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}; \quad (320)$$

$$\Delta \psi = (1 + \nu) \alpha T, \quad (321)$$

где G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; α — коэффициент линейного расширения.

Дифференцируя (321) по t и учитывая (318), получим

$$\Delta \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} - (1 + \nu) \alpha a T \right] = 0. \quad (322)$$

Как видно, функция $\partial \psi / \partial t - (1 + \nu) \alpha a T$ является гармонической по всей плоскости и, следовательно, может быть либо постоянной величиной, либо некоторой функцией времени $g(t)$. Без нарушения общности функцию $g(t)$ можно считать равной нулю, так как вместо потенциала ψ можно ввести потенциал

$$\psi' = \psi - \int_0^t g(\tau) d\tau.$$

Таким образом, для потенциала ψ получается уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = (1 + \nu) \alpha a T.$$

Интегрирование его приводит к формуле

$$\psi = (1 + \nu) \alpha a \int_0^t T dt + \psi_0(x, y), \quad (323)$$

где $\psi_0(x, y)$ — потенциал перемещений, соответствующий начальной температуре, т. е. $\Delta\psi_0 = (1 + \nu)\alpha T_0$ внутри области S , вне области S $\Delta\psi_0 = 0$.

Отсюда получаем

$$\psi_0(x, y) = -\frac{(1 + \nu)\alpha T_0}{2\pi} \iint_S \ln\left(\frac{1}{R}\right) d\xi d\eta, \quad (324)$$

где $R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$.

При помощи (319), (323), (324) и (320) находим

$$\begin{aligned} \sigma_y = & -\frac{G(1 + \nu)\alpha T_0}{4\sqrt{\pi}} \left\{ 4\sqrt{\pi}\kappa(x, y) + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y + y_0}{x + x_0}\right) + \right. \right. \\ & + \operatorname{arctg}\left(\frac{y_0 - y}{x_0 - x}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{y_0 - y}{x_0 + x}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{y_0 + y}{x_0 - x}\right) \left. \right] - \\ & - \int_0^t \frac{1}{\tau\sqrt{a\tau}} \left[(x + x_0) \exp\left(-\frac{(x + x_0)^2}{4a\tau}\right) + \right. \\ & + (x_0 - x) \exp\left(-\frac{(x_0 - x)^2}{4a\tau}\right) \left. \right] \left[\operatorname{Erf}\left(\frac{y + y_0}{2\sqrt{a\tau}}\right) + \right. \\ & \left. \left. + \operatorname{Erf}\left(\frac{y_0 - y}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right] d\tau \right\}, \quad (325) \end{aligned}$$

$$\kappa(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y \in S) \\ 0 & (x, y \notin S) \end{cases}.$$

Так как коэффициент интенсивности напряжений для изолированной трещины

$$K_I = -\frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l \sigma_y(x, 0, t) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} dx,$$

то, используя (325), находим

$$\begin{aligned} K_I = & \frac{GT_0(1 + \nu)\alpha}{\sqrt{\pi l}} \left\{ \pi l + \frac{2}{\pi} \int_{-l}^l \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y_0}{\xi + x_0}\right) + \right. \right. \\ & + \operatorname{arctg}\left(\frac{y_0}{x_0 - \xi}\right) \left. \right] \sqrt{\frac{l+\xi}{l-\xi}} d\xi - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-l}^l \int_0^t \frac{1}{x\sqrt{ax}} \left[(\xi + \right. \\ & \left. + x_0) e^{-\frac{(\xi+x_0)^2}{4ax}} + (x_0 - \xi) e^{-\frac{(x_0-\xi)^2}{4ax}} \right] \operatorname{Erf}\left(\frac{y_0}{2\sqrt{ax}}\right) \sqrt{\frac{l+\xi}{l-\xi}} dx d\xi \right\}. \quad (326) \end{aligned}$$

При $t \rightarrow \infty$ имеем

$$K_1 = GT_0 (1 + \nu) \alpha \sqrt{\pi l}. \quad (327)$$

Длина образовавшейся горячей трещины согласно (327)

$$l_\infty = \frac{K_c^2}{\pi [GT_0 (1 + \nu) \alpha]^2} \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (328)$$

Предполагаем, что трещина не выходит из области S .

Для любого момента времени на основании критерия локального разрушения $K_1 = K_c$ и (317), (326) находим

$$K_{c0} \left\{ 1 + \frac{AT_0}{2K_{c0}} \operatorname{Erf} \times \right. \\ \times \left(\frac{y_0}{2\sqrt{at}} \right) \left[\operatorname{Erf} \left(\frac{l+x_0}{2\sqrt{at}} \right) + \right. \\ \left. \left. + \operatorname{Erf} \left(\frac{x_0-l}{2\sqrt{at}} \right) \right] \right\} = K_1(l, t). \quad (329)$$

Рис 25. Кинетика роста «горячей» трещины

Здесь правая часть определяется формулой (326). На рис. 25 в безразмерных переменных $l_* = l/l_\infty$ и $t_* = 4at/x_0^2$ приведены кривые 1—3 кинетики роста горячей трещины, построенные при помощи уравнений (326) и (329) для следующих значений параметров:

$$x_0 = y_0 = l_\infty, A = K_{c0}/T_0, K_{c0}/(2T_0), 0$$

соответственно.

Отметим, что вычисления проведены на БЭСМ-4 в течение нескольких минут.

§ 3. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ РАЗМЕР ГОРЯЧИХ ТРЕЩИН

Докажем вначале одну теорему из теории термоупругости для произвольной односвязной области S .

Теорема. Пусть при $t = 0$

$$T(x, y, 0) = \bar{T}_0 \text{ внутри области } S \text{ и } T(x, y, 0) \text{ вне области } S. \quad (330)$$

Тогда при $t \rightarrow \infty$

$$\sigma_y = \sigma_x = -G(1 + \nu) \alpha T_0, \tau_{xy} = 0 \text{ внутри области } S.$$

Доказательство. Решение уравнения теплопроводности (318), удовлетворяющее условиям (330), имеет вид

$$T(x, y, t) = \frac{T_0}{4\pi at} \iint_S \exp(-R^2/4at) d\xi d\eta. \quad (331)$$

Аналогично предыдущему при помощи (321)—(324) находим потенциал

$$\psi(x, y, t) = \frac{(1 + \nu) \alpha T_0}{4\pi} \left\{ \int_0^t \frac{1}{\tau} \left[\iint_S \exp(-R^2/(4a\tau)) d\xi d\eta \right] d\tau - \right. \\ \left. - 2 \iint_S \ln\left(\frac{1}{R}\right) d\xi d\eta. \right. \quad (332)$$

Так как контур области S не зависит от времени t , получаем

$$\psi(x, y, t) = \frac{(1 + \nu) \alpha T_0}{4\pi} \iint_S \left[\int_0^t \frac{1}{\tau} \exp(-R^2/4a\tau) d\tau - \right. \\ \left. - 2 \ln\left(\frac{1}{R}\right) \right] d\xi d\eta. \quad (333)$$

При помощи (320) находим напряжения внутри области S

$$\sigma_y = -G(1 + \nu) \alpha T_0 - \frac{G(1 + \nu) \alpha T_0}{2\pi} \iint_S \left\{ 2 \frac{(y - \eta)^2 - (x - \xi)^2}{R^4} + \right. \\ \left. + \int_0^t \frac{1}{4a^2\tau^3} [(x - \xi)^2 - 2a\tau] \exp(-R^2/4a\tau) d\tau \right\} d\xi d\eta; \\ \sigma_x = -G(1 + \nu) \alpha T_0 - \frac{G(1 + \nu) \alpha T_0}{2\pi} \iint_S \left\{ 2 \frac{(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}{R^4} + \right. \\ \left. + \int_0^t \frac{1}{4a^2\tau^3} [(y - \eta)^2 - 2a\tau] \exp(-R^2/4a\tau) d\tau \right\} d\xi d\eta; \quad (334) \\ \tau_{xy} = -\frac{2G(1 + \nu) \alpha T_0}{\pi} \iint_S \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{R^4} \times \\ \times \left[1 - \frac{R^4}{16a^2} \int_0^t \frac{1}{\tau^3} \exp(-R^2/4a\tau) d\tau \right] d\xi d\eta.$$

Вычисляя внутренние интегралы в формулах (334), имеем

$$\sigma_y = -G(1 + \nu) \alpha T_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \iint_S \frac{1}{R^4} [(y - \eta)^2 - (x - \xi)^2 + \right. \\ \left. + 2(x - \xi)^2 \Gamma(2, R^2/4at) - R^2 \exp(-R^2/4at)] d\xi d\eta \right\};$$

$$\sigma_x = -G(1 + \nu)\alpha T_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \iint_S \frac{1}{R^4} [(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2 + \right. \\ \left. + 2(y - \eta)^2 \Gamma(2, R^2/4at) - R^2 \exp(-R^2/4at)] d\xi d\eta \right\}; \quad (335)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{G(1 + \nu)\alpha T_0}{2\pi} \iint_S \frac{4(x - \xi)(y - \eta)}{R^4} [1 - \Gamma(2, R^2/4at)] d\xi d\eta;$$

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

Так как $\Gamma(2, R^2/4at) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$, то, переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$ в (335), получаем

$$\sigma_y = \sigma_x = -G(1 + \nu)\alpha T_0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (336)$$

Таким образом, в области S при $t \rightarrow \infty$ остаточные напряжения создают состояние всестороннего равномерного растяжения. Заметим, что двустороннее растяжение способствует хрупкому разрушению в большей степени, чем одностороннее.

Доказанная теорема позволяет указать асимптотический размер l_∞ горячей трещины при $t \rightarrow \infty$ для произвольной области S ; этот размер, очевидно, по-прежнему дается формулой (328), если только трещина не выходит из области S . Отсюда следует, что если длина начальной трещины $2l_0$ меньше, чем $2l_\infty$, т. е. выполняется условие

$$l_0 < \frac{K_c^2}{\pi [GT_0(1 + \nu)\alpha]^2}, \quad (337)$$

то начальная трещина не развивается. Формула (337) дает простой достаточный критерий, при выполнении которого горячая трещина не образуется. Отметим, что характеристики материала l_0 и K_c в (337) соответствуют остывшему металлу при $T = 0$.

§ 4. ХРУПКОЕ РАЗРУШЕНИЕ ОТ ЛОКАЛЬНОГО НАГРЕВА

Пусть при $t = 0$ на границе области S возникает скачок нормального смещения, соответствующий мгновенному нагреванию шайбы S до температуры T_0 , если шайба до нагревания была вставлена без натяга (температура остальной части тела равна нулю при $t = 0$). В результате при $t = 0$ в теле вне области S возникнут растягивающие напряжения, которые могут привести к образованию трещины. Напряжения в шайбе будут сжимающими. При $t = 0$ напряжения во всем теле в этом случае, очевидно, будут стремиться к нулю. При $t = 0$ напряжения будут наибольшими, причем в шайбе реализуется состояние всестороннего равномерного сжатия:

$$\sigma_x = \sigma_y = -G(1 + \nu)\alpha T_0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (338)$$

Очевидно, что трещина в данном случае образуется мгновенно при $t = 0$ и в дальнейшем не развивается.

Описанный механизм хрупкого разрушения типичен для локального нагрева ненарушенного материала (например, образование трещины в толстостенном стакане с быстро налитой горячей водой).

В большинстве практически интересных случаев для хрупких материалов длина трещины, образующейся от локального нагрева, гораздо больше характерного линейного размера области S . В этом последнем случае можно применить простой асимптотический метод решения задачи, основанный на «принципе микроскопа». Представим себе, что к контуру области S в точках A и C выходят

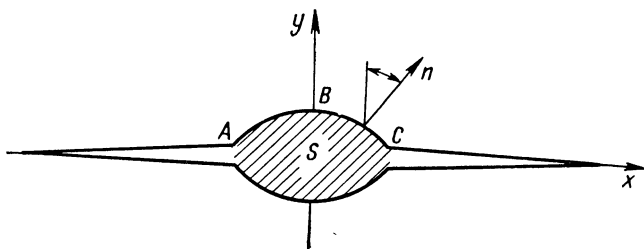


Рис. 26. Образование хрупких трещин от быстрого локального нагрева области s

трещины (рис. 26). Для простоты примем, что область S симметрична относительно осей x и y . К границе области S будут приложены нагрузки (со стороны шайбы), определяемые формулой (338). Определим размеры асимптотически больших трещин. На основе принципа микроскопа, применимом в том случае, когда линейные размеры области S малы по сравнению с длиной трещины (или же с ее радиусом в осесимметричном случае), приходим к следующим сингулярным задачам.

Плоская задача. Пусть к противоположным берегам прямолинейной сквозной трещины длиной $2l$, находящейся в бесконечной пластине, приложены равные и противоположно направленные сосредоточенные силы P ; сила P действует в середине трещины перпендикулярно к ее поверхности. На бесконечности напряжение отсутствует. При помощи (338) находим главный вектор нагрузок, приложенных к дуге ABC со стороны нагретой области S (см. рис. 26):

$$P = G(1 + \nu)\alpha T_0 \int_{ABC} \cos(n\hat{y}) ds = G(1 + \nu)\alpha T_0 L, \quad (339)$$

где L — длина проекции дуги ABC на ось x .

В рассматриваемом случае коэффициент интенсивности напряжений

$$K_I = \frac{P}{\pi\sqrt{2l}}. \quad (340)$$

Согласно критерию локального разрушения длина хрупкой трещины определяется условием $K_1 = K_c$,

$$K_c = \frac{P}{\pi \sqrt{2l}}. \quad (341)$$

Отсюда находим длину асимптотически больших трещин

$$l = \frac{1}{2} \left[\frac{GT_0(1+\nu)\alpha L}{\pi K_c} \right]^2. \quad (342)$$

Осесимметричная задача. Пусть некоторая область V , имеющая три плоскости симметрии, в начальный момент времени мгновенно нагрелась до температуры T_0 . В результате мгновенного хрупкого разрушения образовалась дискообразная трещина, и в том наиболее часто встречающемся случае, когда ее радиус велик по сравнению с размером области V , на основании метода внешних и внутренних разложений приходим к следующей задаче.

Пусть к противоположным поверхностям круговой дискообразной трещины радиуса R , находящейся в бесконечном теле, приложены равные и противоположно направленные сосредоточенные силы P ; сила P действует по оси круглой дискообразной трещины. В этом случае

$$P = G(1+\nu)\alpha T_0 \iint (\bar{n}_z, \bar{ds}) = G(1+\nu)\alpha T_0 S_0, \quad (343)$$

где S_0 — площадь проекции границы области V на плоскость трещины.

Коэффициент интенсивности напряжений

$$K_1 = \frac{P}{(\pi R)^{3/2}}. \quad (344)$$

При помощи критерия локального разрушения $K_1 = K_c$ находим радиус дискообразной трещины

$$R = \pi^{-1} \left[\frac{G(1+\nu)\alpha T_0 S_0}{K_{1c}} \right]^{2/3}. \quad (345)$$

Например, в случае эллипсоидальной области V имеем

$$S_0 = 4ab, \quad R = \pi^{-1} \left[\frac{4G(1+\nu)\alpha ab T_0}{K_{1c}} \right]^{2/3}. \quad (346)$$

Здесь a и b — главные полуоси эллипса в сечении эллипсоида дискообразной трещиной.

**НЕКОТОРЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ
МЕХАНИКИ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ¹****§ 1. ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ. МЕТОД РЕШЕНИЯ**

На основе функционально-инвариантных решений волнового уравнения, предложенных В. И. Смирновым и С. Л. Соболевым, в этой главе излагается замкнутое решение широкого класса автомобильных проблем динамической теории упругости. Этот класс охватывает следующие задачи: а) полуплоскость, произвольно нагруженная на границе (в том числе случай, когда концы нагруженных участков движутся с произвольными постоянными скоростями); б) контактная задача для полуплоскости, когда концы контактных площадок перемещаются с произвольными постоянными скоростями; в) совокупность произвольно нагруженных разрезов вдоль одной и той же прямой, движущихся с постоянными скоростями, причем скорости разных концов разрезов могут быть различными.

Решение указанных задач сводится в простейших случаях к совокупности задач Дирихле или смешанных задач Келдыша — Седова теории аналитических функций комплексного переменного. Процедура нахождения решения оказывается принципиально не более сложной, чем для аналогичных задач статики и стационарной динамики. Вначале выводятся общие представления решения через аналитические функции комплексного переменного для произвольного индекса автомобильности и дано описание общего метода решения. Затем метод демонстрируется на некоторых конкретных задачах из указанного класса. Рассмотрение ограничено плоскими задачами для однородного и изотропного тел, однако метод нетрудно обобщить на случай анизотропного кусочно-однородного тела, когда верхняя и нижняя полуплоскости имеют различные упругие постоянные.

В пп. 6, 7, 8 этой главы дано решение некоторых динамических (в том числе, неавтомобильных) задач методом Винера—Хопфа.

В 1932 г. В. И. Смирнов и С. Л. Соболев обнаружили класс решений волнового уравнения, в котором решение представляется через аналитическую функцию комплексного переменного [72] (см. § 5 этой главы). В этот класс входят, в частности, автомобильные задачи. Методом Смирнова—Соболева было проанализировано

¹ Эта глава основана на работах [94—97, 115].

несколько интересных задач из теории дифракции упругих плоских волн на разрезе [81, 78] и угле, однако в большинстве решений динамических задач теории упругости, полученных за последние 20 лет, использованы гораздо более громоздкие методы, требующие большого объема вычислительных работ. Вот некоторые наиболее известные из таких решений.

Решена задача о внезапном появлении прямолинейного полубесконечного неподвижного разреза в постоянном поле растягивающих напряжений [133], а также задача, в которой тот же разрез двигался с неизменной скоростью с момента его появления [107]. Исследовано [108] распространение разреза с постоянной скоростью в обе стороны, при этом начальная длина его равна нулю, а поле растягивающих напряжений считается постоянным (соответствующая осесимметричная задача рассмотрена в работах [49, 116]). Аналогичные задачи рассмотрены в работах [104, 127, 94]. В работе [141] рассмотрены некоторые динамические задачи о распространении трещин и приведен довольно подробный обзор литературы. В работах [105, 106, 109] задача Броберга [108] была обобщена на случай анизотропного материала и на случай произвольно заданной на щели нормальной нагрузки, сохраняющей автомодельность задачи. Все указанные решения автомодельны с индексом $(0, 0)$ (см. монографию [91]).

К этим задачам примыкают также контактная задача об ударе клином по полуплоскости [48], задача о движении с постоянной скоростью сосредоточенной силы по границе полуплоскости, начиная с некоторого начального момента [23], контактная задача об ударе плоского штампа о полуплоскость [19]. В задачах [48, 23, 80] индекс автомодельности иной. Большое число аналогичных автомодельных задач рассмотрено для акустического приближения, которому соответствует сложный сдвиг в теории упругости [69].

В недавних работах [118, 95] одновременно и независимо была решена задача о движении с постоянной скоростью полубесконечного разреза (как в задаче Бейкера); к берегам разреза приложены сосредоточенные силы. Это решение можно использовать в качестве функции Грина в случае произвольных статических нагрузок. Используя характерное свойство коэффициента интенсивности напряжений в полученном решении, удалось обобщить его на случай произвольной непостоянной скорости движения разреза при произвольных внешних нагрузках [118].

В данной работе изложен общий подход к указанным задачам динамической теории упругости, который позволяет получать их решение весьма просто в замкнутом виде. Этот подход основан на общих представлениях решения через аналитические функции комплексного переменного, которые позволяют сразу формулировать указанные автомодельные задачи как некоторые проблемы Римана—Гильберта для полуплоскости (в простейших случаях получается задача Дирихле и смешанная задача Келдыша—Седова).

Проблема Римана—Гильберта для полуплоскости легко решается при помощи стандартных методов [22, 62]. В § 2—4 этой главы рассмотрены также некоторые конкретные задачи о штампах, о движущихся нагрузках и щелях. Указанный общий подход применяли ранее для решения различных частных задач [6, 4, 8]. Его можно обобщить также на соответствующие осесимметричные задачи.

Пусть однородное и изотропное упругое тело находится в условиях плоской деформации. Основные уравнения динамической теории упругости в данном случае имеют следующий вид:

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{\partial v_2}{\partial y}, \quad (347)$$

$$\Delta u_k = \frac{1}{c_k^2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \quad \Delta v_k = \frac{1}{c_k^2} \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} \quad (k = 1, 2)$$

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right). \quad (348)$$

Здесь $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ — составляющие смещения по осям x и y декартовых координат соответственно; c_1 и c_2 скорости продольной и поперечной волн ($c_1 > c_2$)

Компоненты σ_x , σ_y , τ_{xy} тензора напряжений согласно закону Гука (μ — постоянная Ляме)

$$\sigma_x = \mu \left[\frac{c_1^2}{c_2^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right];$$

$$\sigma_y = \mu \left[\frac{c_1^2}{c_2^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right]; \quad (349)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Укажем класс автомодельных плоских задач динамической теории упругости, решение которых при помощи комплексных переменных z_1 и z_2 , где

$$z_k = \frac{xt - iy \sqrt{t^2 - c_k^{-2}(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2} \quad (k = 1, 2) \quad (350)$$

сводится к краевой задаче Римана—Гильберта из теории аналитических функций одной комплексной переменной (в простейших случаях — к задаче Дирихле или к смешанной задаче Келдыша—Седова). Этот класс охватывает следующие задачи [91].

Первая основная задача (задача А): а) бесконечное упругое полупространство $y \geq 0$ имеет любое число нагруженных участков вдоль оси x , концы этих участков, имеющие координаты x_n , пере-

мещаются с постоянными скоростями v_n , так что $x_n = v_n t$ (в частности, скорости некоторых концов могут быть равными нулю); б) в начальный момент времени $t = 0$ полупространство покоится; в) нормальные и касательные нагрузки на указанных участках представляют собой произвольные линейные комбинации следующих функций:

$$\frac{d^m f_n(x)}{dx^m} \frac{dk j_l(t)}{dt^k}, \quad (351)$$

$$f_i(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi < 0 \\ \xi^i & \text{при } \xi > 0. \end{cases} \quad (352)$$

Здесь k, l, m, n — произвольные целые положительные числа.

Вторая основная задача (задача В): а) бесконечное упругое пространство имеет любое число разрезов вдоль оси x , концы разрезов x_n перемещаются с постоянными скоростями v_n , так что $x_n = v_n t$ (в частности, некоторые v_n могут равняться нулю); б) в начальный момент времени $t = 0$ пространство покоится; в) нормальные и касательные нагрузки на разрезах представляют собой произвольные линейные комбинации функций (351) (см. также (352)), при этом нагруженные участки могут не совпадать с разрезами, а двигаться со своими скоростями.

Контактная задача (задача С): а) бесконечное упругое полупространство $y \geq 0$ имеет любое число нагруженных участков оси x , концы этих участков, имеющие координаты x_n перемещаются с постоянными скоростями, так что $x_n = v_n t$; б) в начальный момент времени $t = 0$ пространство покоится; в) на нагруженных участках поставлены граничные условия одного из трех типов: 1) нормальное и касательное смещения заданы как некоторые произвольные линейные комбинации из функции вида (351), (352) (шероховатый штамп); 2) касательное напряжение равно нулю, а нормальное смещение является линейной комбинацией функции вида (351), (352) (гладкий штамп); 3) касательное напряжение прямо пропорционально нормальному напряжению (т. е. задается кулонов закон сухого трения $\tau_{xy} = k\sigma_y$), а нормальное смещение — линейная комбинация функции вида (351), (352).

При $m > n$ первый множитель в (351) с точностью до численного коэффициента представляет собой $(m - n + 1)$ -ю производную дельта-функции Дирака; это же замечание относится ко второму множителю с очевидным соответствием индексов $m \rightarrow k, n \rightarrow l$.

Тип автомодельности задачи А, В или С определяется двумя числами $m-n$ и $k-l$. Пару чисел $(m-n, k-l)$ будем называть индексом автомодельности задач А, В, С. При решении задач указанного выше типа следует вначале определить индекс автомодельности граничной задачи или же представить граничные условия в виде линейной суперпозиции автомодельных задач с различными индексами. Затем для каждого индекса надо вывести соответ-

ствующие общие представления через аналитические функции, а потом уже решать конкретные краевые задачи теории аналитических функций, получающиеся из граничных условий. В общем случае граничных условий, приведенных выше, приходится решать краевую задачу Римана—Гильберта с разрывными коэффициентами для одного комплексного переменного на полуплоскости; эта задача хорошо изучена, и ее замкнутое решение не доставляет трудностей [22, 62].

Отметим сразу же следующие два обстоятельства.

1. Произвольная непрерывная функция двух переменных x и t в любой замкнутой области может быть равномерно аппроксимирована некоторым многочленом, т. е. суммой членов вида $x^m t^n$. Каждому такому числу в граничных условиях задач А, В и С [см. (351) и (352)] отвечает определенный индекс автомодельности. Следовательно, случай, когда заданные нагрузки или смещения представляют собой произвольные непрерывные функции, сводится к рассматриваемому. Кроме того, произвольную функцию x и t можно представить в виде линейной суперпозиции δ_0 -образных и δ_1 -образных функций, для каждой из которых решение будет автомодельным и может быть использовано в качестве функции Грина.

2. Из решения краевых задач А, В и С решения соответствующих статических и стационарных динамических задач плоской теории упругости получаются как некоторые предельные случаи. Укажем соответствующие предельные переходы.

Предельная квазистатическая задача

$$v_{tt} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad v_{tt} t \rightarrow a_{tt}. \quad (353)$$

Предельная квазистационарная динамическая задача

$$v_{tt} = v + \varepsilon_{tt}, \quad \varepsilon_{tt} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \varepsilon_{tt} t \rightarrow a_{tt}, \quad (354)$$

здесь v и a_{tt} — некоторые константы.

Следовательно, указанный класс решений динамической теории упругости, по существу, является некоторым аналогом плоской статической задачи для полуплоскости [61], а также плоской стационарной динамической задачи для полуплоскости [21, 137].

Выведем общие представления для наиболее употребительных типов автомодельности. Из анализа размерностей следует, что для каждого индекса автомодельности существуют функции, удовлетворяющие волновому уравнению и являющиеся однородными функциями x , y и t нулевого измерения. Это следующие функции:

1°. смещения u и v задачи С, индекс (1,0);

2°. напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} задачи А и В, индекс (0,0);

3°. потенциалы смещения φ и Φ , задачи А и В, индекс (1,0); напомним, что

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad (355)$$

4°. функции Lu и Lv , задача С, индекс (m, n)

5°. функции $L\sigma_x, L\sigma_y, L\tau_{xy}$ задачи А и В, индекс (m, n) .

В 4° и 5° под L подразумевается следующий линейный дифференциальный оператор:

$$L = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n}. \quad (356)$$

Указанные однородные функции x, y, t нулевого измерения представляем в виде суммы двух слагаемых; одно из них, очевидно, удовлетворяет волновому уравнению для продольных волн, а другое — волновому уравнению для поперечных волн. Первое из этих слагаемых может быть представлено как действительная часть некоторой аналитической функции от z_1 , а второе — как действительная часть другой аналитической функции от z_2 [см. § 5 этой главы и формулу (464)]. При $y = 0$ имеем

$$z_1 = z_2 = t/x \quad (y = 0). \quad (357)$$

Вводя комплексное переменное z , вещественная часть которого равна t/x , граничные задачи вида А, В или С одного индекса сводим к краевой задаче Римана—Гильберта от одного комплексного переменного z , но для нескольких функций. Впрочем, в рассматриваемых случаях все функции могут быть выражены через одну, и задача приводится к стандартной задаче Римана—Гильберта для одной функции. В простейших случаях получается задача Дирихле и смешанная задача Келдыша—Седова.

Найдем общие представления для указанных пяти случаев.

1°. Смещения u и v — однородные функции. Согласно формулам (348) и (350) имеем

$$u = \operatorname{Re} [f_1(z_1) + f_2(z_2)], \quad v = \operatorname{Re} [f_3(z_1) + f_4(z_2)]. \quad (358)$$

Четыре неизвестные функции комплексных переменных должны удовлетворять двум условиям (347), которые принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[f'_1(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial y} \right] &= \operatorname{Re} \left[f'_3(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial x} \right]; \\ \operatorname{Re} \left[f'_2(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial x} \right] &= -\operatorname{Re} \left[f'_4(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (359)$$

Дифференцируя (457), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_k}{\partial x} &= \frac{z_k \sqrt{c_k^{-2} - z_k^2}}{y z_k - x \sqrt{c_k^{-2} - z_k^2}}, \\ \frac{\partial z_k}{\partial y} &= \frac{c_k^{-2} - z_k^2}{y z_k - x \sqrt{c_k^{-2} - z_k^2}}, \quad (k = 1, 2), \end{aligned} \quad (360)$$

отсюда

$$\begin{aligned} \sqrt{c_1^{-2} - z_1^2} f_1'(z_1) &= z_1 f_3'(z_1); \\ z_2 f_2'(z_2) &= -\sqrt{c_2^{-2} - z_2^2} f_4'(z_2). \end{aligned} \quad (361)$$

Таким образом, однородные смещения u и v при помощи (358) представляются через четыре аналитические функции, связанные двумя равенствами (361). А представления для напряжений получаются из (358), (360), (361) по формулам (349):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \mu \operatorname{Re} \left[\frac{c_2^{-2} - 2(c_1^{-2} - z_1^2)}{z_1^2} f_1'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial x} + 2f_2'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial x} \right]; \\ \sigma_y &= \mu \operatorname{Re} \left[\frac{c_2^{-2} - 2z_1^2}{z_1^2} f_1'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial x} - 2f_2'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial x} \right]; \\ \tau_{xy} &= \mu \operatorname{Re} \left[2f_1'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{c_2^{-2} - 2z_2^2}{z_2 \sqrt{c_2^{-2} - z_2^2}} f_2'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (362)$$

2°. Напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} — однородные функции. Согласно закону Гука, первые производные смещений по координатам будут также однородными функциями. Следовательно, их можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \operatorname{Re} [f_1(z_1) + f_2(z_2)], & \frac{\partial u}{\partial y} &= \operatorname{Re} [f_3(z_1) + f_4(z_2)]; \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \operatorname{Re} [f_5(z_1) + f_6(z_2)], & \frac{\partial v}{\partial y} &= \operatorname{Re} [f_7(z_1) + f_8(z_2)]. \end{aligned} \quad (363)$$

Восемь неизвестных функций комплексных переменных в (363) должны удовлетворять следующим шести условиям, четыре из которых — следствия (347):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right), & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} \right), & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (364)$$

Окончательно, используя формулы (360), находим представления

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \operatorname{Re} [g_1(z_1) + g_2(z_2)]; & \frac{\partial u}{\partial y} &= \operatorname{Re} [g_3(z_1) + g_4(z_2)]; \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \operatorname{Re} [g_3(z_1) + g_5(z_2)], & \frac{\partial v}{\partial y} &= \operatorname{Re} [g_6(z_1) - g_2(z_2)]. \end{aligned} \quad (365)$$

Здесь шесть неизвестных функций комплексного переменного должны удовлетворять следующим четырем равенствам, вытекающим из (364),

$$\begin{aligned} z_1 g_3'(z_1) &= \sqrt{c_1^{-2} - z_1^2} g_1'(z_1); & z_1 g_6'(z_1) &= \sqrt{c_1^{-2} - z_1^2} g_3'(z_1); \\ z_2 g_2'(z_2) &= -\sqrt{c_2^{-2} - z_2^2} g_5'(z_2); \\ z_2 g_4'(z_2) &= -\sqrt{c_2^{-2} - z_2^2} g_2'(z_2). \end{aligned} \quad (366)$$

Подставляя (365) в формулы (349), получим напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \mu \operatorname{Re} \left\{ \frac{c_1^2}{c_2^2} [g_1(z_1) + g_6(z_1)] - 2g_6(z_1) + 2g_2(z_2) \right\}; \\ \sigma_y &= \mu \operatorname{Re} \left\{ \frac{c_1^2}{c_2^2} [g_1(z_1) + g_6(z_1)] - 2g_1(z_1) - 2g_2(z_2) \right\}; \\ \tau_{xy} &= \mu \operatorname{Re} \{ 2g_3(z_1) + g_4(z_2) + g_5(z_2) \}. \end{aligned} \quad (367)$$

3°. Потенциалы φ и Φ — однородные функции. Так как φ удовлетворяет волновому уравнению для продольных волн, а Φ — для поперечных волн, то функции φ и Φ можно представить в виде

$$\varphi = \operatorname{Re} f_1(z_1), \quad \Phi = \operatorname{Re} f_2(z_2). \quad (368)$$

Подставляя (367) в (349) и (355), получим

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{Re} \left[f_1'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial x} + f_2'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial y} \right]; \\ v &= \operatorname{Re} \left[f_1'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial y} - f_2'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial x} \right]; \end{aligned} \quad (369)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\mu \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{c_2^{-2} - 2(c_1^{-2} - z_1^2)}{z_1} f_1'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial x} + 2z_2 f_2'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial y} \right]; \\ \sigma_y &= -\mu \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{c_2^{-2} - 2z_1^2}{z_1} f_1'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial x} - 2z_2 f_2'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial y} \right]; \\ \tau_{xy} &= -\mu \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial t} \left[2z_1 f_1'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial y} + \frac{c_2^{-2} - 2z_2^2}{z_2} f_2'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (370)$$

4°. Функции Lu, Lv — однородные. В этом случае для любого линейного дифференциального оператора L будут, очевидно, справедливы представления (358), (362), в которых вместо смещений u, v и напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ нужно подставить Lu, Lv и $L\sigma_x, L\sigma_y, L\tau_{xy}$ соответственно.

5°. Функции $L\sigma_x, L\sigma_y, L\tau_{xy}$ — однородные. В этом случае будут иметь место представления (365)—(367), в которые вместо сме-

щений u , v и напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} нужно подставить Lu , Lv и $L\sigma_x$, $L\sigma_y$, $L\tau_{xy}$ соответственно.

Таким образом, во всех указанных представлениях, по существу, участвуют только две независимые неизвестные функции комплексного переменного, как и в статических задачах теории упругости.

Общие представления задач, симметричных относительно оси x . Выделим достаточно широкий класс задач динамической теории упругости (симметричных относительно оси x), при решении которых ставится граничное условие

$$\tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0. \quad (371)$$

В этом случае можно получить общее представление решения через одну аналитическую функцию (одного и того же вида для всех указанных выше типов автомодельности).

Граничное условие (371) на основании представлений (358) и (362), (363) и (367), (368)—(369) приводит к следующему дополнительному равенству:

однородные смещения

$$2 \sqrt{c_1^{-2} - z^2} \sqrt{c_2^{-2} - z^2} f_1'(z) + (c_2^{-2} - 2z^2) f_2'(z) = 0; \quad (372)$$

однородные напряжения

$$2g_3(z) + g_4(z) + g_5(z) = 0; \quad (373)$$

однородные потенциалы

$$2z \sqrt{c_1^{-2} - z^2} f_1'(z) + (c_2^{-2} - 2z^2) f_2'(z) = 0. \quad (374)$$

Это равенство вместе с равенствами (361), (366) или (368) позволяет выразить все величины только через одну неизвестную аналитическую функцию комплексного переменного.

Аналогичный класс задач в статической теории упругости был найден Вестергардом [145].

Введем следующие обозначения:

в случае, когда функции Lu , Lv однородны,

$$u^0 = Lu, \quad v^0 = Lv,$$

$$\sigma_x^0 = L\sigma_x, \quad \sigma_y^0 = L\sigma_y, \quad \tau_{xy}^0 = L\tau_{xy}; \quad (375)$$

а в случае, когда функции $L\sigma_x$, $L\sigma_y$, $L\tau_{xy}$ однородны,

$$u^0 = \frac{\partial}{\partial t} Lu, \quad v^0 = \frac{\partial}{\partial t} Lv, \quad (376)$$

$$\sigma_x^0 = \frac{\partial}{\partial t} L\sigma_x, \quad \sigma_y^0 = \frac{\partial}{\partial t} L\sigma_y, \quad \tau_{xy}^0 = \frac{\partial}{\partial t} L\tau_{xy};$$

в случае, когда потенциалы φ , Φ однородны,

$$\begin{aligned}
 u^0 &= \int_0^t u(x, y, \tau) d\tau, & v^0 &= \int_0^t v(x, y, \tau) d\tau, \\
 \sigma_x^0 &= \int_0^t \sigma_x(x, y, \tau) d\tau, & \sigma_y^0 &= \int_0^t \sigma_y(x, y, \tau) d\tau, \\
 \tau_{xy} &= \int_0^t \tau_{xy}(x, y, \tau) d\tau.
 \end{aligned} \tag{377}$$

Во всех указанных случаях функции u^0 и v^0 будут однородными. При помощи введенных обозначений все общие представления через одну аналитическую функцию можно привести к следующему одному виду:

$$\left. \begin{aligned}
 u^0 &= \operatorname{Re} [U_1(z_1) + U_2(z_2)], & v^0 &= \operatorname{Re} [V_1(z_1) + V_2(z_2)]; \\
 \sigma_x^0 &= \frac{\mu}{c_2^{-2}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{[c_2^{-2} - 2(c_1^{-2} - z_1^2)](c_2^{-2} - 2z_1^2)}{c_1^{-2} - z_1^2} \times \right. \\
 &\quad \left. \times W'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial y} - 4z_2^2 W'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial y} \right\}; \\
 \sigma_y^0 &= \frac{\mu}{c_2^{-2}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(c_2^{-2} - 2z_1^2)^2}{c_1^{-2} - z_1^2} W'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial y} + 4z_2^2 W'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial y} \right\}; \\
 \tau_{xy} &= \frac{\mu}{c_2^{-2}} \operatorname{Re} \left\{ 2(c_2^{-2} - 2z_1^2) W'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial x} - \right. \\
 &\quad \left. - 2(c_2^{-2} - 2z_2^2) W'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial x} \right\}.
 \end{aligned} \right\} \tag{379}$$

Здесь функции $U_k(z)$ и $V_k(z)$ выражаются через функцию $W(z)$ так:

$$\begin{aligned}
 U_1'(z) &= \frac{z(c_2^{-2} - 2z^2)}{c_2^{-2} \sqrt{c_1^{-2} - z^2}} W'(z), & V_1'(z) &= \frac{c_2^{-2} - 2z^2}{c_2^{-2}} W'(z), \\
 U_2'(z) &= -\frac{2z \sqrt{c_2^{-2} - z^2}}{c_2^{-2}} W'(z), & V_2'(z) &= \frac{2z^2}{c_2^{-2}} W'(z).
 \end{aligned} \tag{380}$$

Функции $v^0(x, 0, t)$ и $\sigma_y^0(x, 0, t)$ выражаются через функцию $W(z)$ следующим образом:

$$y = 0, \quad U^0 = \operatorname{Re} W(z) \quad (z = t/x); \tag{381}$$

$$y = 0, \quad \sigma_y^0 = \frac{1}{t} \operatorname{Re} \left\{ -\frac{\mu}{c_2^{-2}} \frac{zS(z)}{\sqrt{c_1^{-2} - z^2}} W'(z) \right\}. \tag{382}$$

Здесь и в дальнейшем через $S(z)$ обозначается функция

$$S(z) = (c_2^{-2} - 2z^2)^2 + 4z^2 \sqrt{c_1^{-2} - z^2} \sqrt{c_2^{-2} - z^2}, \quad (383)$$

аналитическая во внешности разрезом $(-c_2^{-1}, -c_1^{-1})$ и (c_1^{-1}, c_2^{-1}) плоскости z и действительная вне этих разрезов при $\text{Im } z = 0$.

Отметим, что единственным действительным корнем уравнения $S(z) = 0$ является величина, обратная скорости волн Рейли.

В задачах с заданными внешними нагрузками удобно использовать функцию $F(z)$, аналитическую в верхней (и нижней) полуплоскости

$$F(z) = -\frac{\mu}{c_2^{-2}} \frac{zS(z)}{\sqrt{c_1^{-2} - z^2}} W'(z). \quad (384)$$

Отметим следующую формулу, вытекающую из соотношений (382) и (384):

$$y = 0, \quad \sigma_y^0 = t^{-1} \text{Re } F(z) \quad (z = t/x). \quad (385)$$

§ 2. ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА

Граничные условия основной задачи для полуплоскости будут следующими:

$$\sigma_y = f_1(x, t), \quad \tau_{xy} = f_2(x, t) \quad \text{при } y = 0. \quad (386)$$

Задача 2.1. Задача о действии мгновенного сосредоточенного импульса I , приложенного к границе полуплоскости, формулируется следующим образом:

$$\sigma_y = -I \delta_1(x) \delta_1(t), \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad (387)$$

где $\delta_1(x)$ — функция Дирака. Эта классическая задача Лэмба.

В этом случае потенциалы φ и Φ будут однородными, и можно использовать формулы (377)—(385). При помощи формул (385) и (377) граничные условия (387) запишутся так:

$$\text{Im } z = 0, \quad \text{Re } F'_i(z) = -I \delta_1\left(\frac{x}{t}\right) \left(z = \frac{t}{x}\right). \quad (388)$$

Здесь использовано соотношение $t \delta_1(x) = \delta_1\left(\frac{x}{t}\right)$ из теории обобщенных функций.

Условие (388) можно записать так:

$$\text{Im } z = 0, \quad \text{Re } F\left(\frac{1}{z}\right) = -I \delta_1(z). \quad (389)$$

Решение задачи Дирихле (389) имеет вид [22, 62]

$$F\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{I_i}{\pi z}, \quad F_-(z) = -\frac{I_i}{\pi} z. \quad (390)$$

По формуле (384) находим

$$W'(z) = \frac{ic_2^{-2}}{\pi\mu} \frac{\sqrt{c_1^{-2} - z^2}}{S(z)}. \quad (391)$$

Задача 2.2. Пусть постоянная сосредоточенная сила P при $t \geq 0$ приложена перпендикулярно к границе полуплоскости и движется с постоянной скоростью v вдоль оси x , при $t < 0$ полуплоскость покоилась. Граничные условия этой задачи будут следующими:

$$\sigma_y = -P\delta_1(x - vt)\delta_0(t), \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad (392)$$

где $\delta_0'(t)$ — функция Хевисайда. По определению, $\delta_0'(t) = \delta_1(t)$.

В этом случае смещения очевидно будут однородными функциями.

Согласно формулам (385) и (375), в которых $L = 1$, граничные условия (392) можно записать так:

$$\text{Im } z = 0, \quad \text{Re } F(x) = -P\delta_1(x - vt)t\delta_0(t) \quad (393) \\ (z = t/x, t > 0).$$

Так как при $t > 0$ $\text{Im } z = 0$, $\text{Re } F\left(\frac{1}{z}\right) = -P\delta_1(z - v)$, то граничное условие (397) запишется так:

$$\text{Im } z = 0, \quad \text{Re } F\left(\frac{1}{z}\right) = -P\delta_1(z - v). \quad (394)$$

Решение задачи Дирихле (394) имеет следующий вид:

$$F\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{Pi}{\pi(z - v)},$$

т. е.

$$F(z) = -\frac{iPv^{-1}z}{\pi(v^{-1} - z)}. \quad (395)$$

По формуле (384) имеем

$$W'(z) = \frac{Pic_2^{-2}v^{-1}}{\pi\mu S(z)} \frac{\sqrt{c_1^{-2} - z^2}}{(v^{-1} - z)}. \quad (396)$$

Смещения и напряжения находим отсюда по формулам (375), (378)—(380) при $L = 1$. При $v = 0$ из (396) получается соответствующее решение для неподвижной силы. Решению задачи 2.2 методом интегральных преобразований посвящена статья [23].

Задача 2.3. Пусть на границе полуплоскости $y > 0$ с постоянной скоростью v в обе стороны оси x распространяется постоянное давление p ; при $|x| > vt$ граница свободна от нагрузок:

$$\sigma_y = -p, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad |x| < vt; \\ \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad |x| > vt. \quad (397)$$

В этой задаче напряжения, очевидно, будут однородными функциями. Согласно формулам (376) и (385), в которых нужно положить $L = 1$, граничные условия (397) примут вид

$$\operatorname{Im} z = 0, \quad \operatorname{Re} F(z) = -pvt [\delta_1(x - vt) + \delta_1(x + vt)] \\ (z = t/x, \quad t > 0). \quad (398)$$

Так как при $t > 0$

$$t\delta_1(x - vt) = \delta_1\left(\frac{x}{t} - v\right), \quad t\delta_1(x + vt) = \delta_1\left(\frac{x}{t} + v\right),$$

граничные условия (398) можно записать так:

$$\operatorname{Im} z = 0, \quad \operatorname{Re} F\left(\frac{1}{z}\right) = -pv [\delta_1(z - v) + \delta_1(z + v)]. \quad (399)$$

Решение задачи Дирихле (399) имеет следующий вид:

$$F\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{pvi}{\pi(z - v)} - \frac{pvi}{\pi(z + v)}, \quad (400)$$

т. е.

$$F(z) = -\frac{2pv^{-1}iz}{\pi(v^{-2} - z^2)}, \\ W'(z) = \frac{2pv^{-1}c_2^{-2}i \sqrt{c_1^{-2} - z^2}}{\pi\mu(v^{-2} - z^2)S(z)}.$$

Смещение и напряжения находим отсюда по формулам (376), (378)—(380) при $L = 1$.

§ 3. ЗАДАЧИ СО ЩЕЛЯМИ

Рассмотрим некоторые задачи о движении трещин с постоянными скоростями; эти задачи представляют интерес для механики разрушения.

Задача 3.1. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в начале координат появляется разрез и начинает распространяться с постоянной скоростью v в обе стороны оси x ; берега разреза подвержены постоянной нормальной нагрузке p (рис. 27). Примем $v < c_R$, где c_R — скорость поверхностных волн Рейли.

Граничные условия задачи для полуплоскости $y > 0$ имеют вид

$$\sigma_y = -p, \quad \tau_{xy} = 0; \quad \text{при } y = 0, \quad |x| < vt; \\ v = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad |x| > vt. \quad (401)$$

При этом в невозмущенной области

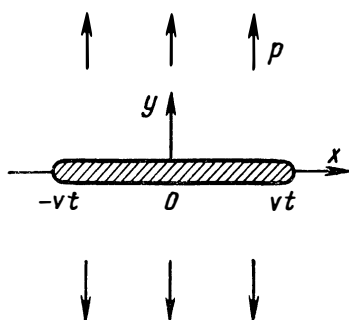
$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } x^2 + y^2 \gg c_1^2 t^2. \quad (402)$$

В этой задаче напряжения, очевидно, будут однородными функциями. Согласно формуле (376) при $L = 1$, а также (381) и (382), граничные условия (401) приводят к следующей краевой задаче:

$$\operatorname{Im} z = 0, \quad |\operatorname{Re} z| < v^{-1}, \quad \operatorname{Re} W(z) = 0;$$

$$\operatorname{Im} z = 0, \quad |\operatorname{Re} z| > v^{-1}, \quad \operatorname{Im} W'(z) = 0. \quad (403)$$

Для решения этой задачи необходимо знать поведение аналитической функции $W(z)$ при $|z| \rightarrow v^{-1}$ и при $z \rightarrow \infty$. Бесконечно удаленной точке плоскости z соответствует начало координат физической плоскости, где смещение $u = 0$, а смещение v ограничено. Принимая во внимание представления (376), (379), и (380), отсюда имеем



$$z \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} W(z) = 0 \quad (1),$$

$$\operatorname{Im} W(z) = 0. \quad (404)$$

Интегрируя второе условие (403) с учетом (404), его можно записать так:

$$\operatorname{Im} z = 0, \quad |\operatorname{Re} z| > v^{-1},$$

$$\operatorname{Im} W(z) = 0. \quad (405)$$

Рис. 27. Трещина в однородном поле растяжения (задача Брода берга)

Смещение v вблизи конца щели $x = vt$ обращается в нуль и прямо пропорционально [91] множителю $(vt - x)^{1/2}$; следовательно, согласно формулам (376), (378) и (380), функция $W(z)$ ведет себя так.

$$W(z) = 0 [(z \pm v^{-1})^{-1/2}] \quad \text{при } z \rightarrow \mp v^{-1}. \quad (406)$$

Решение краевых задач (403)—(406) имеет вид [22, 62]

$$W(z) = \frac{Az + B}{\sqrt{z^2 - v^{-2}}};$$

$$(\sqrt{z^2 - v^{-2}} = z + 0(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty), \quad (407)$$

где A и B — некоторые постоянные (постоянная A — вещественна). Согласно условию симметрии смещение v на щели четная функция x , поэтому отсюда согласно формулам (381) и (407) находим $B = 0$. Следовательно:

$$W(z) = \frac{Az}{\sqrt{z^2 - v^{-2}}}, \quad W'(z) = -\frac{Av^{-2}}{(z^2 - v^{-2})^{3/2}}. \quad (408)$$

При помощи формул (381) и (382) отсюда находим смещение на щели и напряжение σ_y на продолжении щели:

$$v = Av^{-1} \sqrt{(vt)^2 - x^2} \quad \text{при } y = 0, \quad |x| \leq vt, \quad (409)$$

$$\sigma_y = A_\mu \left(\frac{c_2}{v} \right)^2 \operatorname{Re} \int_{c_1^{-1}}^{t/x} \frac{S(\tau) d\tau}{\sqrt{c_1^{-2} - \tau^2} (\tau^2 - v^{-2})^{3/2}}$$

при $y = 0, \quad vt < x < c_1 t.$ (410)

Постоянную A определим из условия (401), которое с учетом (410) принимает вид

$$A_\mu \left(\frac{c_2}{v} \right)^2 \operatorname{Re} \int_{c_1^{-1}}^M \frac{S(\tau) d\tau}{\sqrt{c_1^{-2} - \tau^2} (\tau^2 - v^{-2})^{3/2}} =$$

$$= -p \quad (v^{-1} < M \leq \infty). \quad (411)$$

Вычисление интеграла в (411), существующего в смысле главного значения, приводит к следующему выражению:

$$A = \frac{\rho c^2}{\mu c_2^2 I}, \quad I = \frac{1}{v^{-1} (v^{-2} - c_1^{-2})} \{ [c_2^{-4} + 4c_1^{-2} (v^{-2} - c_1^{-2})] K(\omega_1) -$$

$$- [c_2^{-4} - 4v^{-2} (c_1^{-2} + c_2^{-2}) + 8v^{-4}] E(\omega_1) -$$

$$- 4c_2^{-2} (v^{-2} - c_1^{-2}) K(\omega_2) + 8v^{-2} (v^{-2} - c_1^{-2}) E(\omega_2) \},$$

$$\omega_k = \sqrt{1 - \frac{c_k^{-2}}{v^{-2}}} \quad (k = 1, 2). \quad (412)$$

Здесь K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Вычисление всех величин, представляющих физический интерес, дано в работе Броберга [108], решение которого гораздо более сложно.

Если на полученное решение наложить однородное растяжение $\sigma_y = p$, то, очевидно, получится решение задачи о распространении разреза со свободными берегами.

Предположим теперь, что нагрузка на разрезе в задаче Броберга возрастает прямо пропорционально времени, т. е. вместо (401) имеется граничное условие $\sigma_y = -pt$, где $p = \text{const}$. Решение этой задачи получается, очевидно, из решения задачи Броберга: если в последнем смещения и напряжения заменить соответственно на скорости и производные по времени от напряжений.

Задача 3.2. Найдем решение задачи Бейкера (107): полубесконечный разрез $x < 0, y = 0$ появляется внезапно в момент времени $t = 0$ и начинает распространяться вдоль оси x с постоянной скоростью v (рис. 28).

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad x < vt; \\ v = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad x > vt. \end{aligned} \quad (413)$$

При помощи (381)—(385) условия (412) приводят к следующей краевой задаче Гильберта:

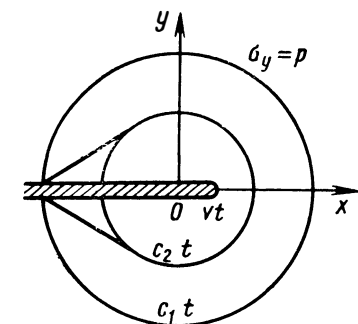
$$\begin{aligned} \operatorname{Im} z = 0; \quad \operatorname{Re} z < c_1^{-1}, \quad \operatorname{Re} z > v^{-1}, \quad \operatorname{Re} F(z) = 0; \\ \operatorname{Im} z = 0, \quad c_2^{-1} \leq \operatorname{Re} z \leq v^{-1}, \quad \operatorname{Im} F(z) = 0; \\ \operatorname{Im} z = 0, \quad c_1^{-1} < \operatorname{Re} z \leq c_2^{-1}, \quad \operatorname{Im} \frac{F(z)}{S(z)} = 0. \end{aligned} \quad (414)$$

Решение этой задачи, симметричное относительно действительной оси, при асимптотическом условии (406) имеет вид [22, 62]

$$\begin{aligned} F(z) = \frac{Ai(z - c_R^{-1})}{\sqrt{z - c_1^{-1}} (z - v^{-1})^{3/2}} \exp \Gamma(z); \\ \Gamma(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{c_1^{-1}}^{c_2^{-1}} \operatorname{arctg} \frac{4\tau^2 \sqrt{(\tau^2 - c_2^{-2})(c_2^{-2} - \tau^2)}}{(c_2^{-2} - 2\tau^2)^2} \frac{d\tau}{\tau - z}. \end{aligned} \quad (415)$$

Здесь радикал $\sqrt{z - v^{-1}}$ однозначен в плоскости z с разрезом $(-\infty, v^{-1})$ вдоль вещественной оси, при $\sqrt{z - v^{-1}} > 0$ при $\operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z > v^{-1}$; A — вещественная постоянная, определяемая из условия при $x^2 + y^2 \geq c_1^2 t^2$ (рис. 28) и равная

$$A = \frac{p}{I},$$



$$I = \operatorname{Re} \int_M^{c_1^{-1}} \frac{(\tau - c_R^{-1}) \exp \Gamma^-(\tau)}{\tau \sqrt{\tau - c_1^{-1}} (v^{-1} - \tau)^{3/2}} d\tau, \quad (416)$$

Рис. 28. Полубесконечная трещина в однородном поле растяжения (задача Бэйкера)

где $\Gamma^-(z)$ — предельное значение функции $\Gamma(z)$ снизу.

Исследование решения можно найти в работе Бейкера [107], в которой для отыскания решения была применена громоздкая техника Винера—Хопфа.

Задача 3.3. Пусть под действием мгновенных сосредоточенных в начале координат импульсов величины I , направленных вдоль оси y и в противоположном направлении симметрично относительно оси x , начинает распространяться разрез $-vt \leq x \leq$

$\leq vt$, $y = 0$. Берега разреза свободны от нагрузок, начальные условия — нулевые. Граничные условия для полуплоскости $y > 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -I\delta_1(x)\delta_1(t), \quad \tau_{xy} = 0 \text{ при } y = 0, |x| < vt; \\ v &= 0, \quad \tau_{xy} = 0 \text{ при } y = 0, |x| > vt \quad (v < c_R). \end{aligned} \quad (417)$$

В этом случае потенциалы смещения φ и Φ будут однородными функциями. Согласно (381) и (382) придем к следующей задаче:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} z &= 0, \quad |\operatorname{Re} z| < v^{-1}, \quad \operatorname{Re} W'(z) = 0; \\ \operatorname{Im} z &= 0, \quad |\operatorname{Re} z| > v^{-1}, \\ \operatorname{Im} \left[\frac{zS(z)}{\sqrt{z^2 - c_1^{-2}}} W'(z) \right] &= \frac{Ic_2^{-2}}{\mu} \delta_1\left(\frac{x}{t}\right) \quad (z = t/x). \end{aligned} \quad (418)$$

Задача (418) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} z &= 0, \quad |\operatorname{Re} z| < v, \\ \operatorname{Im} \frac{1}{z^2} W'\left(\frac{1}{z}\right) &= -\frac{Ic_2^{-2}}{2\mu(c_2^{-2} - c_1^{-1})} \delta_1(z); \\ \operatorname{Im} z &= 0, \quad |\operatorname{Re} z| > v, \quad \operatorname{Re} \frac{1}{z^2} W'\left(\frac{1}{z}\right) = 0, \end{aligned} \quad (419)$$

так как $S(z) = -2z^2(c_2^{-2} - c_1^{-2}) + 0(1)$ при $z \rightarrow \infty$.

На основании формул (377) и (382) при $z \rightarrow v^{-1}$ функция $W(z)$ имеет порядок $0(\sqrt{z - v^{-1}})$, так как напряжение σ_y в конце трещины имеет особенности вида $r^{-1/2}$.

Решение задачи Келдыша—Седова (419) при указанном асимптотическом условии имеет вид

$$\frac{1}{z^2} W'\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{Ic_2^{-2} \sqrt{z^{-2} - v^{-2}}}{2\pi\mu(c_2^{-2} - c_1^{-2})}; \quad (420)$$

$$W'(z) = \frac{Ic_2^{-2} \sqrt{z^2 - v^{-2}}}{2\pi\mu(c_2^{-2} - c_1^{-2}) z^2}. \quad (421)$$

Смещения и напряжения определяются при помощи представлений (377)—(382). Например, смещения берегов разреза

$$v = \frac{Ic_2^{-2}v^{-1}}{2\pi\mu(c_2^{-2} - c_1^{-2})} \frac{\sqrt{(vt)^2 - x^2}}{t^2} \quad (y = 0, |x| < vt). \quad (422)$$

Для механики разрушения основной интерес представляет поле напряжения вблизи конца разреза, описываемое коэффициентом интенсивности напряжений K_I :

$$K_I = \lim_{x \rightarrow vt} [\sigma_y \sqrt{2\pi(x-vt)}]. \quad (423)$$

В рассматриваемом случае

$$K_I = -\frac{IS(v^{-1})}{2\pi^{1/2}v^{-1/2}(v^{-2}-c_1^{-2})(c_2^{-2}-c_1^{-2})t^{3/2}}. \quad (424)$$

Задача 3.4. Приведем решение задачи, аналогичной предыдущей, считая, что разрез распространяется под действием возрастающей во времени силы pt , сосредоточенной в начале координат.

Граничные условия будут следующими:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -pt\delta_1(x), \quad \tau_{xy} = 0 \text{ при } y = 0, |x| < vt; \\ v &= 0, \quad \tau_{xy} = 0 \text{ при } y = 0, |x| > vt \quad (v < c_R). \end{aligned} \quad (425)$$

В этом случае, очевидно, напряжения — однородные функции. Решение граничной задачи (425) находим аналогично предыдущему, оно имеет вид

$$W'(z) = \frac{\rho c_2^{-2}}{2\pi\mu(c_2^{-2}-c_1^{-2})} \frac{z^2}{(z^2-v^{-2})^{3/2}}. \quad (426)$$

При этом, согласно (376), (378) и (426) получено смещение берегов разреза (при $y = 0, |x| < vt$) и коэффициент интенсивности напряжений

$$v = \frac{\rho c_2^{-2}t}{2\pi\mu(c_2^{-2}-c_1^{-2})} \left[\ln \left| \frac{vt + \sqrt{(vt)^2 - x^2}}{x} \right| - 2 \frac{\sqrt{(vt)^2 - x^2}}{vt} \right]. \quad (427)$$

$$K_I = -\frac{\rho S(v^{-1})t^{1/2}}{2\pi^{1/2}(v^{-2}-c_1^{-2})^{1/2}(c_2^{-2}-c_1^{-2})}. \quad (428)$$

При помощи развитого метода нетрудно построить также решения для движущейся щели с движущимися импульсами или сосредоточенными силами. Используя эти решения в качестве функций Грина, можно построить аналитическое решение задачи в случае произвольно нагруженной щели.

§ 4. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 4.1. Пусть клиновидный штамп с углом раствора с постоянной скоростью v_0 вдавливаются в полуплоскость (рис. 29). Клинь считается тупым и симметричным относительно оси y . В начальный момент времени $t = 0$ вершина клина совпадала с началом координат. Трение между клином и упругой полуплоскостью отсутствует. Начальные условия нулевые.

Граничные условия задачи таковы:

$$v = v_0 t - ctg\alpha |x|, \quad \tau_{xy} = 0 \text{ при } y = 0, |x| < vt;$$

$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \text{ при } y = 0, |x| > vt. \quad (429)$$

Ограничимся случаем $v < c_R$, величина v подлежит определению из решения.

В рассматриваемой задаче скорости являются однородными функциями, поэтому будем пользоваться представлениями (375), (378)—(385) при $L = \partial/\partial t$.

Граничные условия (429) приводят к следующей краевой задаче:

$$\text{Im } z = 0, \quad |\text{Re } z| < v^{-1},$$

$$\text{Re } F(z) = 0;$$

$$\text{Im } z = 0, \quad |\text{Re } z| > v^{-1},$$

$$\text{Im } F(z) = 0. \quad (430)$$

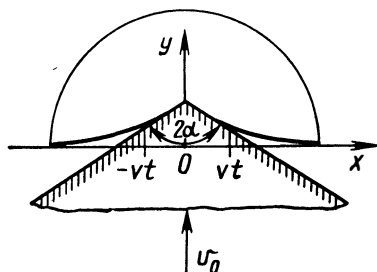


Рис. 29. Динамическое внедрение клина в упругое полупространство

Ищется то решение краевой задачи (430), которое удовлетворяет следующим физическим условиям:

- 1) напряжение ограничено вблизи площадки контакта $x = \pm vt$;
- 2) в угловой точке $x = 0$ напряжения имеют интегрируемую особенность;
- 3) напряжения $\sigma_y(x, 0, t)$ на контактной площадке представляют собой четную функцию x . Эти условия, как можно показать, позволяют построить единственное решение краевой задачи (430) в следующем виде (A — вещественная постоянная)

$$F(z) = - \frac{Az}{\sqrt{z^2 - v^{-2}}}. \quad (431)$$

Величины A и v найдем из следующих условий под штампом:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v_0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -ctg\alpha \text{ при } y = 0, 0 < x < vt. \quad (432)$$

Эти условия при помощи (375), (381) и (384) принимают вид

$$\frac{Ac_2^{-2}}{\mu} \text{Re} \int_{c_1^{-1}}^{v^{-1}} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{S(\tau)} = v_0,$$

$$\frac{Ac_2^{-2}}{\mu} \text{Re} \int_{c_1^{-1}}^{v^{-1}} \frac{\tau\varphi(\tau) d\tau}{S(\tau)} = ctg\alpha, \quad \varphi(\tau) = - \frac{\sqrt{\tau^2 - c_1^{-2}}}{\sqrt{v^{-2} - \tau^2}}. \quad (433)$$

Из (433) получим постоянную A и уравнение для v :

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\mu v_0}{c_2^{-2} I_1}, \quad \frac{I_1(v)}{I_2(v)} = v_0 \operatorname{tg} \alpha; \\ I_1 &= \operatorname{Re} \int_{c_2^{-1}}^{v^{-1}} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{S(\tau)} + \int_{c_1^{-1}}^{c_2^{-1}} \frac{(c_2^{-2} - 2\tau^2)^2 \varphi(\tau) d\tau}{S(\tau) S_1(\tau)}; \\ I_2 &= \operatorname{Re} \int_{c_2^{-1}}^{v^{-1}} \frac{\tau \varphi(\tau) d\tau}{S(\tau)} + \int_{c_1^{-1}}^{c_2^{-1}} \frac{\tau (c_2^{-2} - 2\tau^2)^2 \varphi(\tau) d\tau}{S(\tau) S_1(\tau)}; \\ S_1(\tau) &= (c_2^{-2} - 2\tau^2)^2 - 4\tau^2 \sqrt{c_1^{-2} - \tau^2} \sqrt{c_2^{-2} - \tau^2}. \end{aligned} \right\} \quad (434)$$

При помощи формул (431) и (385) при $L = \partial/\partial t$ получим распределение давления под штампом и величину суммарной силы

$$\sigma_y = -A \ln \left| \frac{vt + \sqrt{(vt)^2 - x^2}}{x} \right| \quad \text{при } y = 0, |x| \leq vt; \quad (435)$$

$$p = - \int_{-vt}^{vt} \sigma_y(x, 0, t) dx = \pi A v t. \quad (436)$$

Эта задача, но более сложным путем рассмотрена, Б. В. Костровым [49]. Однако автор принял значение скорости равным $v = v_0 \operatorname{tg} \alpha$, в то время как величина v должна находиться из решения задачи согласно уравнению (434).

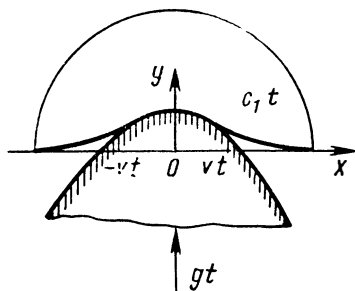


Рис. 30. Динамическое внедрение параболического штампа в упругое полупространство

Задача 4.2. Рассмотрим равноускоренное вдавливание в полуплоскость симметричного относительно оси y параболического штампа (рис. 30). Начальные условия считаются нулевыми.

Граничные условия задачи

$$v = 1/2gt^2 - bx^2, \quad \tau_{xy} = 0$$

$$\text{при } y = 0, |x| < vt;$$

$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0$$

$$\text{при } y = 0, |x| > vt, \quad (437)$$

где b и g — заданные постоянные.

Величина v должна быть определена в процессе решения.

В этой задаче ускорения будут однородными функциями, так что следует применять представления (375), (378)—(385) при $L = \partial^2/\partial t^2$.

Граничные условия (437) приводят к краевой задаче (430) для функции $F(z)$. Ищем решение этой задачи, удовлетворяющее

следующим физическим условиям: 1) напряжения ограничены вблизи концов площадки контакта $x = \pm vt$ и в начале координат при $x = 0$; 2) напряжение $\sigma_y(x, 0, t)$ на контактной площадке представляет собой четную функцию x . Эти дополнительные условия позволяют построить единственное решение краевой задачи (437) в следующем виде:

$$F(z) = \frac{2Av^{-1}z}{(z^2 - v^2)^{3/2}}. \quad (438)$$

Здесь A — вещественная постоянная. Величины A и v найдем из условий под штампом, вытекающих из (437),

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = g, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -2b \quad \text{при } y = 0, |x| < vt. \quad (439)$$

Эти условия при помощи формул (375), (438), (381) и (384) можно привести к следующим соотношениям:

$$A = \frac{\mu g}{c_2^{-2} I_1}, \quad \frac{I_1(v)}{I_2(v)} = \frac{g}{2b},$$

$$I_1 = -\operatorname{Re} \int_{c_1^{-1}}^M \frac{\sqrt{\tau^2 - c_2^{-2}} d\tau}{S(\tau) (v^2 - \tau^2)^{3/2}},$$

$$I_2 = \operatorname{Re} \int_{c_1^{-1}}^M \frac{\tau^2 \sqrt{\tau^2 - c_1^{-2}} d\tau}{S(\tau) (v^2 - \tau^2)^{3/2}} \quad (v^{-1} < M \leq \infty), \quad (440)$$

которые служат для определения A и v (второе является уравнением относительно v). Из (438) и (385) найдем распределение напряжения под штампом и величину суммарной силы, действующей на штамп,

$$\sigma_y = -2A \sqrt{(vt)^2 - x^2} \quad \text{при } y = 0, |x| < vt, \quad (441)$$

$$p = - \int_{-vt}^{vt} \sigma_y(x, 0, t) dx = \pi A v^2 t^2. \quad (442)$$

Заметим, что на основании (435) и (441) распределение давления под штампом в рассмотренных динамических задачах совпадает со статическим, если ширину контактной площадки брать равной $2vt$.

Задача 4.3. Рассмотрим динамическую задачу о расклинивании хрупкого тела. Пусть в упругой плоскости в начальный момент времени $t = 0$ начинает расширяться с постоянной скоростью v_0 в обе стороны перпендикулярно к оси x полубесконечный клин (рис. 31). Одновременно из конца клина на его продолжении

начинает распространяться с постоянной скоростью v прямолинейная трещина; берега щели свободны от напряжений. Начальная толщина клина считается равной нулю; остальные начальные условия — также нулевые. Задача симметрична относительно оси x , поэтому достаточно найти решение в полуплоскости $y > 0$.

Граничные условия задачи имеют вид

$$\left. \begin{aligned} v = v_0 t, \quad \tau_{xy} = 0 \text{ при } y = 0, \quad x > 0; \\ \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \text{ при } y = 0, \quad -vt < x < 0; \\ v = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \text{ при } y = 0, \quad x < -vt. \end{aligned} \right\} \quad (443)$$

В этой задаче скорости будут однородными функциями, поэтому будем пользоваться формулами (375) и (378)—(382) при $L = \partial/\partial t$.

Первое граничное условие в (443) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = v_0 \delta_1(t) \text{ при } y = 0, \quad x > 0.$$

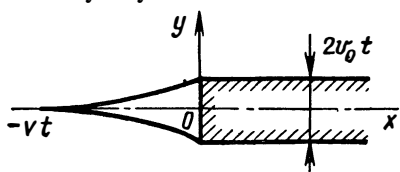


Рис. 31. Динамическое расклинивание упругого тела

$$(444)$$

Граничные условия (443) с учетом (444) приводят к краевой задаче Келдыша—Седова:

$$\text{Im } z = 0, \quad -\infty < \text{Re } z < -v^{-1}, \quad \text{Im } W'(z) = 0;$$

$$\text{Im } z = 0, \quad -v^{-1} < \text{Re } z < \infty, \quad \text{Re } W'(z) = v_0 \delta_1(z). \quad (445)$$

Ищем решение этой задачи, которое удовлетворяет следующему условию: напряжения имеют интегрируемую особенность в конце трещины при $x = -vt$ и в конце клина при $x = 0$. Можно показать, что это дополнительное условие позволяет построить единственное решение краевой задачи (445); которое имеет вид [22, 62]

$$W'(z) = \frac{iv_0 v^{-3/2}}{\pi} \frac{Az - 1}{z(z + v^{-1})^{3/2}}, \quad (446)$$

где A — вещественная постоянная; радикал $\sqrt{z + v^{-1}} > 0$ на нижнем берегу разреза $(-v^{-1}, +\infty)$ вещественной оси. Эту постоянную определим из условия

$$\sigma_y = 0 \text{ при } y = 0, \quad -vt < x < 0,$$

которое принимает вид

$$\text{Re} \int_{-c_1^{-1}}^M \frac{i(A\tau - 1) S(\tau) d\tau}{\tau \sqrt{c_1^{-2} - \tau^2} (\tau + v^{-1})^{3/2}} = 0 \quad (-\infty \leq M < -v^{-1}). \quad (447)$$

Из (447) получим

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{I_1}{I_2}, \quad I_1 = \int_{-c_1^{-1}}^{-c_2^{-1}} \frac{\varphi_2(\tau) d\tau}{\tau} + \\
 &+ \int_{-c_2^{-1}}^{-v^{-1}} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\varphi_1(\tau)}{\tau} \right] \frac{d\tau}{\sqrt{\tau + v^{-1}}} - \varphi_0; \\
 I_2 &= \int_{-c_1^{-1}}^{-c_2^{-1}} \varphi_2(\tau) d\tau + \int_{-c_2^{-1}}^{-v^{-1}} \frac{d}{d\tau} [\varphi_1(\tau)] \frac{d\tau}{\sqrt{\tau + v^{-1}}} + c_2^{-1} \varphi_0; \\
 \varphi_0 &= \frac{2c_2^{-3}}{\sqrt{\tau^2 - c_1^{-2}} (v^{-1} - c_2^{-1})}; \quad \varphi_1(\tau) = \frac{2S(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - c_1^{-2}}}; \\
 \varphi_2(\tau) &= \frac{(c_2^{-2} - 2\tau^2)^2}{\sqrt{\tau^2 - c_1^{-2}} (\tau + v^{-1})^{3/2}}. \tag{448}
 \end{aligned}$$

По формулам (376), (381), (382) с учетом (446) и (423) находим смещение верхнего берега щели и коэффициент интенсивности напряжений в конце динамической трещины:

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{2v_0}{\pi} \left[\left(1 + \frac{A}{v} \right) \sqrt{\frac{|x|(vt+x)}{v}} + t \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{vt+x}{|x|}} \right] \\
 &(y = 0, \quad -vt \leq x \leq 0), \tag{449}
 \end{aligned}$$

$$K_1 = - \frac{2\sqrt{2}\mu v_0 (1 - Av^{-1}) S(v^{-1}) t^{1/2}}{\pi^{1/2} c_2^{-2} v^{-1/2} (v^{-2} - c_1^{-2})^{1/2}}. \tag{450}$$

Г. В. Колосовым, Н. И. Мухелишвили, Г. М. Вестергардом, Л. А. Галиным и И. Р. Радока был открыт класс статических и стационарно-динамических задач упругости, эффективное решение которых находилось при помощи теории функции комплексного переменного. Развитый выше подход, основанный на функционально-инвариантных решениях Смирнова—Соболева, позволяет применить эти методы для эффективного решения аналогичного класса динамических задач теории упругости.

§ 5. ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим волновое уравнение в плоском случае (a^{-1} — скорость распространения волн)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{451}$$

Ищем решения волнового уравнения следующего вида [72, 145]:

$$u(x, y, t) = f(\tau), \quad (452)$$

где $f(\tau)$ — аналитическая функция τ ; переменная τ определяется уравнением

$$l(\tau)t + m(\tau)x + n(\tau)y + p(\tau) = 0. \quad (453)$$

Здесь $l(\tau)$, $m(\tau)$, $n(\tau)$, $p(\tau)$ — некоторые аналитические функции комплексного переменного τ . Уравнение (453) определяет τ как функцию переменных x , y и t .

Вычисляя вторые производные по x , y и t от функции u при помощи (453) и подставляя их в уравнение (451), получим уравнение вида (штрих означает дифференцирование по τ)

$$\frac{1}{\delta'} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[f_1(\tau) \frac{m^2(\tau) + n^2(\tau) - a^2 l^2(\tau)}{\delta'} \right] = 0;$$

$$\delta' = l'(\tau)t + m'(\tau)x + n'(\tau)y + p'(\tau) = 0. \quad (454)$$

Из (454) следует, что $f(\tau)$ — решение волнового уравнения (451), если коэффициенты вспомогательного уравнения (453) удовлетворяют соотношению

$$m^2(\tau) + n^2(\tau) - a^2 l^2(\tau) = 0. \quad (455)$$

Очевидно, как вещественная, так и мнимая части функции $f(\tau)$ в отдельности тоже удовлетворяют волновому уравнению (451) [72].

Построенные решения $f(\tau)$ волнового уравнения были впервые найдены В. И. Смирновым и С. Л. Соболевым в 1932 г. [72].

Рассмотрим частный случай функционально-инвариантных решений волнового уравнения, когда функции $p(\tau) = 0$.

Учитывая (455), положим

$$l(\tau) = 1, \quad m(\tau) = -z, \quad n(\tau) = -\sqrt{a^2 - z^2}. \quad (456)$$

Тогда уравнение (453) примет вид

$$t - zx - \sqrt{a^2 - z^2}y = 0, \quad (457)$$

или

$$1 - z\xi - \sqrt{a^2 - z^2}\eta = 0 \quad (\xi = x/t, \quad \eta = y/t). \quad (458)$$

Здесь ветвь радикала фиксирована условием (z — новая комплексная переменная)

$$\sqrt{a^2 - z^2} = iz + 0(z^{-1}).$$

Из (457) видим, что решения волнового уравнения $f(z)$ будут функциями аргументов ξ и η , т. е. однородными функциями x , y , t нулевого измерения.

Исследуем подробно уравнение (458). Радикал $\sqrt{a^2 - z^2}$ однозначен в плоскости комплексного переменного z с разре-

зом $(-a, +a)$ вдоль вещественной оси. Решая уравнение (458) относительно z , получим

$$z = \frac{\xi - i\eta \sqrt{1 - a^2(\xi^2 + \eta^2)}}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{xt - iy \sqrt{t^2 - a^2(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2}. \quad (459)$$

Здесь радикалы имеют положительный знак при

$$i \sqrt{t^2 - a^2(x^2 + y^2)} > 0, \quad x^2 + y^2 > a^{-2}t^2, \quad y \rightarrow +0. \quad (460)$$

При фиксированных ξ и η в силу (458) имеем прямую. Будем рассматривать ту часть прямой, на которой $t > 0$, и назовем полупрямую лучом. Согласно (460) эти лучи образуют конический пучок с вершиной в начале координат и с углом раствора $\operatorname{arctg} a^{-1}$ при вершине, причем ось пучка — ось t . Уравнение (458) или (459) приводит в соответствие лучам этого пучка комплексные значения плоскости z с разрезом $(-a, +a)$ вдоль вещественной оси. Отметим, что лучам, образующим поверхность пучка:

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = a^{-2}t^2, \quad (461)$$

соответствуют точки разреза плоскости z . Оси пучка $x = y = 0$ или $\xi = \eta = 0$ соответствует бесконечно далекая точка плоскости. Полуплоскости $y > 0$ ($y < 0$) соответствует полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$ ($\operatorname{Im} z > 0$).

Исследуем значения z для точек (ξ, η) , которые лежат вне упомянутого пучка, т. е. для точек, в которых выполнено неравенство

$$\xi^2 + \eta^2 \geq a^{-2} \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 \geq a^{-2}t^2. \quad (462)$$

Уравнение (458) при условии (462) дает два вещественных корня, принадлежащих отрезку $(-a, +a)$:

$$z_{1,2} = \frac{\xi \pm \eta \sqrt{a^2(\xi^2 + \eta^2) - 1}}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{xt \pm y \sqrt{a^2(x^2 + y^2) - t^2}}{x^2 + y^2}. \quad (463)$$

Пусть $M_0(x_0, y_0, t_0)$ — некоторая точка вне конического пучка, при этом ее координаты удовлетворяют неравенству (462), а z_{10} и z_{20} — соответствующие значения z согласно (463). Подставляя значения $z = z_{10}$, $z = z_{20}$ в уравнение (458), имеем две плоскости в пространстве xyt , проходящие через точку M_0 . Отсюда всякому значению z_0 , находящемуся на разрезе $(-a, +a)$ соответствует некоторая плоскость в пространстве xyt . Эта плоскость будет проходить через луч поверхности конического пучка, соответствующий значению $z = z_0$, и касаться поверхности. В противном случае плоскость пересекла бы эту поверхность и ее часть пошла бы внутрь конического пучка. Тогда получилось бы, что точкам, лежащим внутри пучка, соответствует вещественное значение $z = z_0$. Согласно (459) и (460) этого быть не может.

Пусть $f(z)$ — аналитическая однозначная функция на плоскости с разрезом $(-a, +a)$ и соответствующее решение

$$u(x, y, t) = \operatorname{Re} f(z) \quad (464)$$

определено внутри конического пучка (460). Укажем способ непрерывного продолжения этого решения в пространстве вне конического пучка (462). Проведем семейство полуплоскостей p_+ , касательных к поверхности пучка (461) одного направления, взяв в (463), например, только верхний знак плюс. Эти касательные полуплоскости не будут пересекаться и заполнят часть пространства вне пучка. На одной из таких плоскостей $f(z)$ сохраняет постоянное значение и можно определить однозначным образом решение $u(x, y, t)$ вне пучка, пользуясь той же формулой (464), которая дает решение внутри конического пучка. Аналогичным способом можно продолжить решение вне конического пространства по полуплоскостям p_- другого направления. Можно функцию u разбить на два слагаемых $u = u_1(z) + u_2(z)$ и продолжить одно из них по полукасательным p_+ , а другое по полукасательным p_- . Отсюда следует, что способов продолжения имеется бесчисленное множество.

§ 6. УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ ПРОСТРАНСТВА С РАЗРЕЗОМ

Приложение методов теории функций комплексной переменной к задачам теории упругости, начатое Г. В. Колосовым и Н. И. Muskhelishvili, в значительной мере стимулировало интерес к проблеме Римана, к которой, как оказалось, приводятся многие задачи теории упругости. Усилиями Т. Карлемана, Ф. Д. Гахова, Н. И. Muskhelishvili, И. Н. Векуа и многих других авторов была создана стройная теория краевой задачи Римана. Почти одновременно выяснилось, что многие другие задачи математической физики приводятся к этой же проблеме, если применить метод Винера—Хопфа или же его модификацию — метод Джонса [136].

При помощи указанных методов рассмотрим проблему дифракции упругих волн на полубесконечном прямолинейном разрезе, свободном от внешних нагрузок [97]. Вначале строим решение для стационарного случая, которое используется ниже для решения общей нестационарной задачи. В случае плоской деформации стационарную задачу другим методом изучал А. В. Мауе [135]; в случае продольного сдвига решение этой задачи (точнее, математически эквивалентной ей оптической задаче о дифракции волны на экране) было получено А. Зоммерфельдом [142].

Рассмотрим стационарный волновой процесс в плоскости xy , считая, что зависимость от времени всех переменных физических величин выражается множителем $\exp(-i\omega t)$, где ω — частота колебаний, t — время.

Уравнения плоской теории упругости имеют вид [72]

$$\Delta\Phi + k_1^2\Phi = 0, \quad \Delta\Psi + k_2^2\Psi = 0. \quad (465)$$

Здесь $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ — потенциалы продольной и поперечной волн соответственно; k_1 и k_2 — волновые числа; Δ — оператор Лапласа; xy — прямоугольные декартовы координаты.

Будем пользоваться следующими соотношениями [72]:

$$v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x};$$

$$\frac{\sigma_y}{2\mu} = -\left(\frac{1}{2}k_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi - \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y};$$

$$\frac{\tau_{xy}}{2\mu} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}k_2^2\right)\Psi. \quad (466)$$

Здесь v — составляющая смещения по оси y ; σ_y и τ_{xy} — напряжения; μ — модуль сдвига [множитель $\exp(-i\omega t)$ в этих формулах опущен].

Пусть монохроматическая волна сжатия или растяжения с максимальным напряжением σ_{\max} с двух сторон падает на полубесконечный разрез вдоль отрицательной полуоси x под прямым углом (рис. 32). Для простоты выкладок задачу считаем симметричной относительно оси x .

Сингулярная граничная задача имеет следующий вид:

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0 \text{ при } y = 0; x < 0;$$

$$\tau_{xy} = 0, \quad v = 0 \text{ при } y = 0, x > 0; \quad (467)$$

$$\Phi_0 = \frac{\sigma_{\max}}{\mu k_2^2} e^{ik_1 y}, \quad \Psi_0 = 0 \quad (y > 0);$$

$$\text{при } r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty; \quad (468)$$

$$\Phi = 0 \quad (r^{3/2}), \quad \Psi = 0 \quad (r^{3/2})$$

$$\text{при } r \rightarrow 0 \text{ (условие на ребре [94])}. \quad (469)$$

Методом разделения переменных нетрудно прийти к следующему виду решения:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1;$$

$$\Phi_1 = - \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda) \left(\frac{1}{2}k_2^2 - \lambda^2\right) e^{i(\lambda x + \sqrt{k_2^2 - \lambda^2} y)} d\lambda \quad (y > 0);$$

$$\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda) \lambda \sqrt{k_1^2 - \lambda^2} e^{i(\lambda x + \sqrt{k_2^2 - \lambda^2} y)} d\lambda. \quad (470)$$

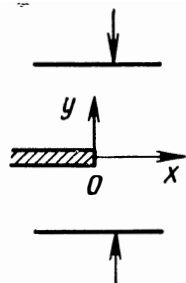


Рис. 32. Дифракция плоской волны на неподвижной щели

Здесь $R(\lambda)$ — неизвестная функция; функция $\sqrt{k^2 - \lambda^2}$ аналитична в комплексной плоскости λ с двумя полубесконечными разрезами вдоль действительной оси $(-\infty, -k)$ и (k, ∞) ; подразумевается ветвь этой функции, действительная и положительная при $-k < \lambda < k$, т. е. положительно мнимая на верхнем берегу левого разреза и на нижнем берегу правого разреза. Контур интегрирования в (470) показан на рис. 33.

Решение (470) удовлетворяет дифференциальным уравнениям (465), условию излучения [136, 142] и граничному условию $\tau_{xy} = 0$ при $y = 0$.

Выберем функцию $R(\lambda)$ так, чтобы удовлетворить оставшимся граничным условиям, условию на бесконечности и условию на разбре.

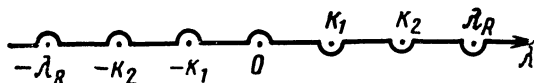


Рис. 33. Контур интегрирования в комплексной плоскости λ

По формулам (466) находим при $y = 0$ величины σ_y и v , соответствующие потенциалам Φ_1 и ψ :

$$\frac{\sigma_y}{2\mu} = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda) A(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda,$$

$$v = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda) B(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (\text{при } y = 0),$$

где

$$A(\lambda) = \lambda^2 \sqrt{(k_1^2 - \lambda^2)(k_2^2 - \lambda^2)} + \left(\frac{1}{2}k_2^2 - \lambda^2\right)^2,$$

$$B(\lambda) = -\frac{1}{2}k_2^2 \sqrt{k_1^2 - \lambda^2}. \quad (471)$$

Отсюда, используя обратное преобразование Фурье, получаем

$$\left. \begin{aligned} A(\lambda) R(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sigma_y}{\mu}\right)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx = \Omega^+(\lambda) + \Omega^-(\lambda); \\ B(\lambda) R(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (v)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx = v^+(\lambda) + v^-\lambda; \end{aligned} \right\} (472)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \Omega^+(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\sigma_y}{2\mu} \right)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx; \\
 \Omega^-(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sigma_y}{2\mu} \right)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx; \\
 v^+(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 (v)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx; \\
 v^-(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (v)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx.
 \end{aligned} \right\} (473)$$

Искомые функции $\Omega^-(\lambda)$ и $v^+(\lambda)$ аналитичны соответственно в нижней и верхней полуплоскостях комплексной переменной λ . Напомним, что граница, разделяющая эти полуплоскости, проходит так, как показано на рис. 33 (в частности, точке $\lambda = 0$, $\lambda = -k_1$, $\lambda = -k_2$ принадлежат нижней полуплоскости, а точки $\lambda = k_1$ и $\lambda = k_2$ — верхней полуплоскости).

Оставшиеся неудовлетворенными граничные условия (467) запишутся так:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\sigma_y}{2\mu} \right)_{y=0} &= -\frac{\sigma_{\max}}{2\mu} \text{ при } y=0, x < 0; \\
 (v)_{y=0} &= -i \frac{k_1 \sigma_{\max}}{\mu k^2} x \text{ при } y=0, x > 0.
 \end{aligned} \quad (474)$$

Подставляя эти значения в $\Omega^+(\lambda)$ и $v^-(\lambda)$ находим

$$\Omega^+(\lambda) = -\frac{\sigma_{\max} i}{4\pi\lambda\mu}, \quad v^-(\lambda) = \frac{i k_1 \sigma_{\max}}{2\pi\mu k^2 \lambda^2}. \quad (475)$$

При вычислении брали конечную часть расходящегося интеграла, как обычно в теории волн [136].

Подставляя найденные функции в соотношения (472), исключая из них $R(\lambda)$ и обозначая через $F(\lambda)$ функцию

$$F(\lambda) = \frac{2}{k_2^2 - k_1^2} \left[\lambda^2 - \frac{\left(\frac{1}{2} k_2^2 - \lambda^2 \right)^2}{\sqrt{(k_1^2 - \lambda^2)(k_2^2 - \lambda^2)}} \right], \quad (476)$$

приходим к следующей краевой задаче Римана:

$$\begin{aligned}
 i \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \right) \sqrt{k_2^2 - \lambda^2} F(\lambda) v^+(\lambda) - \Omega^-(\lambda) &= -\frac{i\sigma_{\max}}{4\pi\mu\lambda} + \\
 + \frac{k_1 \sigma_{\max}}{2\pi\mu k^2 \lambda^2} \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \right) \sqrt{k_2^2 - \lambda^2} F(\lambda). & \quad (477)
 \end{aligned}$$

Функции $F(\lambda)$ и $\sqrt{k_2^2 - \lambda^2}$ представим в виде произведений

$$F(\lambda) = F^+(\lambda) F^-(\lambda), \quad \sqrt{k_2^2 - \lambda^2} = \sqrt{k_2 + \lambda} \sqrt{k_2 - \lambda}. \quad (478)$$

Здесь $F^+(\lambda)$ и $F^-(\lambda)$ — функции, аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскости λ . Согласно выбору ветви функции $\sqrt{k_2^2 - \lambda^2}$ и контура, разделяющего нижнюю и верхнюю полуплоскости λ (см. рис. 33), $\sqrt{k_2 + \lambda}$ будет аналитической функцией в верхней полуплоскости (разрез вдоль $y = 0$, $-k_2 > \lambda > -\infty$), а $\sqrt{k_2 - \lambda}$ — аналитической функцией в нижней полуплоскости (разрез вдоль $y = 0$, $\infty > \lambda > k_2$).

Задачу факторизации функции $F(\lambda)$ решил А. В. Мауе [135], воспользуемся его результатом

$$F^\pm(\lambda) = \frac{\lambda_R \pm \lambda}{k_2 \pm \lambda} \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_{\mp k_1}^{\mp k_2} \operatorname{arctg} \frac{\left(\frac{1}{2} k_2^2 - z^2\right)^2}{z^2 \sqrt{(z^2 - k_1^2)(k_2^2 - z_2)}} \frac{dz}{z - \lambda} \right], \quad (479)$$

где $\lambda_R = \omega/c_R$, c_R — скорость распространения поверхностных волн Рейли ($c_R < c_2$).

С учетом факторизации уравнение (477) можно записать так:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) \sqrt{k_2 + \lambda} F^+(\lambda) \left[i\nu^+(\lambda) - \frac{k_1 \sigma_{\max}}{2\pi\mu k_2^2 \lambda_2} \right] = \\ = \frac{\Omega^-(\lambda)}{F^-(\lambda) \sqrt{k_2 - \lambda}} - \frac{i\sigma_{\max}}{4\pi\mu\lambda F^-(\lambda) \sqrt{k_2 - \lambda}}. \end{aligned} \quad (480)$$

Так как второй член в правой части этого уравнения имеет полюс при $\lambda = 0$, а точка $\lambda = 0$ согласно рис. 33 принадлежит нижней полуплоскости, преобразуем этот член следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{i\sigma_{\max}}{4\pi\mu\lambda F^-(\lambda) \sqrt{k_2 - \lambda}} = \frac{i\sigma_{\max}}{4\pi\mu\lambda F^-(0) \sqrt{k_2}} + \\ + \frac{i\sigma_{\max} [F^-(0) \sqrt{k_2} - F^-(\lambda) \sqrt{k_2 - \lambda}]}{4\pi\mu\lambda F^-(\lambda) \sqrt{k_2 - \lambda} F^-(0) \sqrt{k_2}}. \end{aligned} \quad (481)$$

Здесь значение функции $F^-(\lambda)$ в точке $\lambda = 0$

$$F^-(0) = F^+(0) = \frac{k_2 \sqrt{k_2}}{\sqrt{2k_1(k_2^2 - k_1^2)}} = \frac{c_1 \sqrt{c_1}}{\sqrt{2c_2(c_2^2 - c_1^2)}}. \quad (482)$$

Учитывая это преобразование, уравнение Винера—Хопфа можно записать в такой форме:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) \sqrt{k_2 + \lambda} F^+ \left[i v^+(\lambda) - \frac{k_1 \sigma_{\max}}{2\pi\mu k_2^2 \lambda^2} \right] + \\ & + \frac{i\sigma_{\max}}{4\pi\mu\lambda F^-(0) \sqrt{k_2}} = \frac{\Omega^-(\lambda)}{F^-(\lambda) \sqrt{k_2 - \lambda}} - \\ & - \frac{i\sigma_{\max} [F^-(0) \sqrt{k_2} - F^-(\lambda) \sqrt{k_2 - \lambda}]}{4\pi\mu\lambda F^-(\lambda) \sqrt{k_2} - \lambda F^-(0) \sqrt{k_2}}. \end{aligned} \quad (483)$$

Левая часть этого уравнения представляет собой функцию, аналитическую в верхней полуплоскости λ , а правая часть — функцию, аналитическую в нижней полуплоскости λ . Согласно принципу непрерывного продолжения левая и правая части этого уравнения являются аналитическим продолжением друг друга. Осталось выяснить поведение определенной таким образом функции, аналитической во всей плоскости λ , в бесконечно удаленной точке. Для этого воспользуемся следующим известным соотношением [136]. Если при $-1 < \delta < 0$

$$\sigma(x) = Ax^\delta \begin{pmatrix} x \rightarrow +0 \\ x \rightarrow \infty \end{pmatrix}, \quad (484)$$

то

$$\Omega(\lambda) = A\Gamma(\delta + 1) \lambda^{-\delta-1} \begin{pmatrix} \lambda \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0 \end{pmatrix},$$

здесь

$$\Omega(\lambda) = \int_0^\infty \sigma(x) e^{-\lambda x} dx;$$

$\Gamma(\delta + 1)$ — гамма-функция. В этих формулах нужно брать либо верхние, либо нижние предельные переходы.

Согласно условию на ребре (469) и формулам (484) аналитическая функция стремится к нулю на бесконечности. Следовательно, по теореме Лиувилля она тождественно равна нулю во всей плоскости. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} v^+(\lambda) &= \frac{k_1 \sigma_{\max}}{2\pi\mu k_2^2 \lambda^2 i} - \frac{\sigma_{\max}}{4\pi\mu F^-(0) \sqrt{k_2} \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) \lambda \sqrt{k_2 + \lambda} F^+(\lambda)}; \\ \Omega^-(\lambda) &= \frac{i\sigma_{\max}}{4\pi\mu\lambda} \left[1 - \frac{F^-(\lambda) \sqrt{k_2 - \lambda}}{F^-(0) \sqrt{k_2}} \right]. \end{aligned} \quad (485)$$

При помощи преобразования Фурье восстанавливаем напряжение σ_y на продолжении разреза и смещение v его берегов, отве-

чающие исходной граничной задаче и описываемые потенциалами Φ и ψ :

$$v = -\frac{ik_1\sigma_{\max}}{\mu k_2^2} x - \frac{\sigma_{\max}}{4\pi\mu\sqrt{k_2}F^-(0)} \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} d\lambda}{\lambda\sqrt{k_2 + \lambda}F^+(\lambda)};$$

$$\sigma_y = \sigma_{\max} - \frac{i\sigma_{\max}}{2\pi\mu F^-(0)\sqrt{k_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} \sqrt{k_2 - \lambda} F^-(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (486)$$

Теперь определим коэффициент интенсивности напряжений K_I , представляющий наибольший интерес для приложений.

Найдем сначала, что

$$\Omega^-(\lambda) = \frac{\sigma_{\max}}{4\pi\mu F^-(0)\sqrt{k_2}} \lambda^{-1/2} \text{ при } \lambda \rightarrow \infty. \quad (487)$$

Так как при $x \rightarrow +0$ $\sigma_y = K_I/\sqrt{2\pi x}$, то отсюда можно окончательно найти (с учетом опускаемого ранее экспоненциального множителя)

$$K_I = (1+i)\sigma_{\max} \frac{\sqrt{2c_2(c_1^2 - c_2^2)}}{c_1\sqrt{c_1}} \sqrt{\frac{c_2}{\omega}} e^{-i\omega t}. \quad (488)$$

Здесь c_1 и c_2 — скорости продольной и поперечной волн.

Эта формула годится не только для полубесконечных разрезов, но также и для конечных трещин при наличии пограничного слоя, т. е. когда $\omega \gg c_1/l$, где l — длина трещины.

В случае разрезов конечных размеров наиболее эффективным образом является метод асимптотических разложений искомого решения уравнений (465) по малым и большим волновым числам. Разложение по малым параметрам k_1^2 и k_2^2 приводит к цепочке стандартных граничных задач статической теории упругости с объемными силами, определяемыми предыдущим приближением. При больших волновых числах (малый параметр при старшей производной) вблизи фронта трещины возникает пограничный слой, где требуется точный анализ задачи для полубесконечного разреза; вне пограничного слоя решение по аналогии с геометрической оптикой строится элементарно. Склеивание асимптотических разложений при малых и больших частотах позволяет получить эффективное решение для всей области частот.

§ 7. ВОЗДЕЙСТВИЕ ИМПУЛЬСНЫХ НАГРУЗОК НА РАЗРЕЗ

Для решения динамических задач о воздействии произвольных ударных (импульсных) нагрузок, например ударных волн, на неподвижные разрезы применим следующий метод. Ударный

импульс $\sigma(t)$, движущийся в упругом теле, представляет собой «пакет» монохроматических волн, которому соответствует комплексная спектральная функция

$$\bar{\sigma}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(t) e^{i\omega t} dt. \quad (489)$$

Ширина спектра $\Delta\omega$ и длительность импульса Δt связаны соотношением неопределенностей, аналогичным принципу Гейзенберга в квантовой механике:

$$\Delta\omega \Delta t \approx 2\pi. \quad (490)$$

Следовательно, чем более «размазан» импульс $\sigma(t)$, тем более компактен спектр, и наоборот.

Величина $\bar{\sigma}(\omega) d\omega/\sqrt{2\pi}$ представляет собой амплитуду монохроматической волны $\exp(-i\omega t)$ в этом «пакете»; она создает коэффициент интенсивности напряжений $\bar{K}_1(\omega) d\omega \exp(-i\omega t)$ на фронте трещины. При этом коэффициент $K_1(\omega)$, соответствующий монохроматической волне с частотой ω , определяется из решения задачи об установившихся колебаниях, рассмотренной выше. Отсюда, применяя принцип суперпозиции, находим коэффициент интенсивности напряжений $K_1(t)$ в вершине трещины при произвольном динамическом ударе:

$$K_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{K}_1(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (491)$$

Аналогично можно найти и другие величины.

Рассмотрим, например, задачу о воздействии произвольных ударных нагрузок на полубесконечную щель, расположенную вдоль $y = 0, x < 0$, используя при этом полученное выше точное решение этой задачи в случае установившихся колебаний. Ограничимся лишь выражением для коэффициента интенсивности напряжений, представляющим наибольший интерес для механики разрушения. Формулы для напряжений и смещений в упругом пространстве опустим. При помощи (488) получим

$$K_1(t) = (1+i) \frac{\sqrt{2c_2(c_1^2 - c_2^2)}}{c_1 \sqrt{2\pi c_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{c_2}{\omega}} \bar{\sigma}_y(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (492)$$

Здесь функция $\bar{\sigma}_y(\omega)$ определяется заданным импульсом $\sigma_y(t)$ посредством формулы (489).

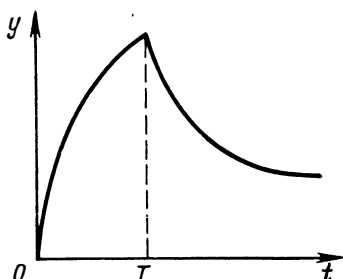


Рис. 34. Зависимость коэффициента интенсивности напряжений от времени для прямоугольного импульса напряжений

Рассмотрим некоторые конкретные частные случаи общей формулы (492).

Пусть импульс напряжений $\sigma_y(t)$ имеет прямоугольную форму:

$$\sigma_y(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > T \\ \sigma_0 & \text{при } 0 < t < T, \end{cases} \quad (493)$$

где σ_0 и T — постоянные

Спектральная функция этого импульса

$$\bar{\sigma}_y(\omega) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi i \omega}} (e^{i\omega T} - 1). \quad (494)$$

Подставляя это значение в формулу (492) и вычисляя интеграл, находим в этом случае

$$K_1(t) = \frac{4\sigma_0 c_2}{c_1 \sqrt{\pi c_1}} \sqrt{c_1^2 - c_2^2} \operatorname{Re}(\sqrt{t} - \sqrt{t-T}). \quad (495)$$

Следовательно, при $t < T$ коэффициент интенсивности напряжений прямо пропорционален \sqrt{t} , а при $t > T$ прямо пропорционален $\sqrt{t} - \sqrt{t-T}$. График функции $y = \operatorname{Re}(\sqrt{t} - \sqrt{t-T})$ изображен на рис. 34.

Наиболее интересны следующие предельные частные случаи этой задачи.

1. *Бесконечно длинный импульс.* При этом $T \rightarrow \infty$ и

$$K_1(t) = \frac{4\sigma_0 c_2 \sqrt{t}}{c_1 \sqrt{\pi c_1}} \sqrt{c_1^2 - c_2^2}. \quad (496)$$

Этот случай физически соответствует мгновенному образованию полубесконечного разреза в бесконечной упругой плоскости, подвергнутой однородному растяжению напряжением σ_0 . Непосредственное решение этой автомодельной динамической задачи теории упругости можно получить, используя общий метод § 1.

2. *Мгновенный импульс.* При этом $T \rightarrow 0$, так что $\sigma_0 T \rightarrow p$, где p — величина суммарного импульса, и

$$K_1(t) = \frac{2pc_2}{c_1 \sqrt{\pi c_1 t}} \sqrt{c_1^2 - c_2^2}. \quad (497)$$

Эта задача тоже автомодельна. Соотношение (497) справедливо также для произвольного импульса при больших временах $t \gg \Delta t$, где Δt — продолжительность импульса.

Трещины, присутствующие в упругом теле, «срезают» частоты: $\omega \geq c_1/l$, где l — характерная длина трещины. Трещина длиной l полностью отражает колебания с частотой $\omega \gg c_1/l$, являясь для них своеобразным «зеркалом». Трещиноватое упругое тело, таким образом, непроницаемое для звуковых частот $\omega \geq c_1/l$;

поэтому оно моделирует ударные импульсы, «срезая» высоко-частотную часть их спектра. В силу принципа неопределенностей наибольшей модуляции подвергаются короткие импульсы с крутыми фронтами. При прохождении через трещиноватое тело форма импульса сглаживается и округляется.

Эти свойства трещин — полостей и трещиноватых тел могут представлять интерес, например, для обнаружения внутренних дефектов типа трещин в напряженных конструкциях посредством звукового облучения высокой частоты, для создания искусственных полостей — «зеркал» в горном массиве в целях облегчения сейсморазведки, для определения средней трещиноватости горных пород, для защиты сооружений от взрывов путем создания искусственных трещинообразных полостей и т. п.

§ 8. РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ БЭЙКЕРА

Рассмотрим решение задачи, когда в упругом теле внезапно появляется и развивается с постоянной скоростью c ($c < c_R$) полубесконечная трещина под действием сосредоточенной силы. Рассматриваемая задача со смешанными граничными условиями на полуплоскости решена методами преобразований, включающими аппарат Винера—Хопфа. Очевидно, ее можно решить также общим методом, изложенным в § 1 данной главы.

Рассмотрим сингулярную граничную задачу для полубесконечного разреза в подвижной системе координат x, y :

$$u \equiv v \equiv 0, \quad t \leq 0;$$

$$\sigma_y = T \delta(x) H(t), \quad x < 0, \quad y = 0, \quad t > 0,$$

$\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{для } t > 0, \\ 0 & \text{для } t \leq 0, \end{cases}$$

$$\tau_{xy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y = 0, \quad t > 0,$$

$$v = 0, \quad x \geq 0, \quad y = 0, \quad t > 0, \quad (498)$$

$$\sigma_{ik} = 0 (r^{-1/2}) \text{ при } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad t > 0.$$

Начало неподвижной системы x', y' лежит в точке, в которой находится конец трещины в момент ее появления при $t = 0$. Подвижная система координат x, y выбрана так, чтобы ее начало все время оставалось в вершине трещины, т. е. $x = x' - ct$; $y = y'$.

Задачу можно также сформулировать в потенциалах перемещений φ и Φ [75]. Эти потенциалы удовлетворяют обычным

волновым уравнениям в неподвижной системе координат, но если определить новые функции f и g как

$$f(x, y, t) = \varphi(x', y', t), \quad g(x, y, t) = \Phi(x', y', t), \quad (499)$$

то эти функции будут удовлетворять следующим уравнениям в подвижной системе координат:

$$\left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right) f_{xx} + f_{yy} = \frac{1}{c_1^2} (-2cf_{xt} + f_{tt}); \quad (500)$$

$$\left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right) g_{xx} + g_{yy} = \frac{1}{c_2^2} (-2cg_{xt} + g_{tt}). \quad (501)$$

Скорость волн сжатия и сдвига

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}; \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad (502)$$

где λ и μ — упругие постоянные Ляме; ρ — плотность материала.

Индексы в уравнениях (500), (501) обозначают производные по указанным переменным.

Уравнения в частных производных (500) и (501) при помощи преобразований Лапласа и Фурье приводим к виду

$$\bar{\bar{f}}_{yy} = \left[s^2 + \frac{1}{c_1^2} (p + ics)^2\right] \bar{\bar{f}} \equiv \gamma_1^2(s, p) \bar{\bar{f}}; \quad (503)$$

$$g_{yy} = \left[s^2 + \frac{1}{c_2^2} (p + ics)^2\right] \bar{\bar{g}} \equiv \gamma_2^2(s, p) \bar{\bar{g}},$$

решения которых

$$\begin{aligned} \bar{\bar{f}} &= A_1(s, p) e^{+\gamma_1 y} + A(s, p) e^{-\gamma_1 y}, \\ \bar{\bar{g}} &= B_1(s, p) e^{+\gamma_2 y} + B(s, p) e^{-\gamma_2 y}. \end{aligned} \quad (504)$$

Здесь первое преобразование — преобразование Лапласа по времени — обозначается одной черточкой:

$$\bar{\dot{f}} \equiv \bar{\dot{f}}(x, y, p) = \int_0^{\infty} f(x, y, t) e^{-pt} dt, \quad (505)$$

где комплексное число p имеет положительную действительную часть. Второе преобразование — экспоненциальное преобразование Фурье по координате x обозначается двумя черточками

$$\bar{\bar{f}} \equiv \bar{\bar{f}}(s, y, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\dot{f}}(x, y, p) e^{isx} dx, \quad (506)$$

где $s = (\sigma + i\tau)$ — комплексное число.

Так как общее решение для функций \bar{f} , \bar{g} имеет при

$$s = -\frac{ip}{c_1 - c}, \quad s = \frac{ip}{c_1 + c} \quad \text{и} \quad s = -\frac{ip}{c_2 - c}, \quad s = \frac{ip}{c_2 + c}$$

точки ветвления, соответственно, то надо произвести разрез в плоскости $s = \sigma + it$ так, чтобы функции (504) представляли те решения уравнений (503), которые после обратных преобразований дадут функции $f(x, y, t)$ и $g(x, y, t)$, удовлетворяющие всем условиям задачи.

Разрезы будем делать так, как показано на рис. 35. Тогда с помощью аналитического продолжения найдем, что $\gamma \rightarrow +|s|$ при $\sigma \rightarrow \pm\infty$ и, следовательно, решение (504) будет ограниченным при $y \rightarrow \infty$ для всех s , если выбрать $A_1(s, p) \equiv B_1(s, p) \equiv 0$. Значит решение (504) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{f} &= A(s, p) e^{-\gamma_1 y}, \\ \bar{g} &= B(s, p) e^{-\gamma_2 y}. \end{aligned} \quad (507)$$

Вид функций $A(s, p)$, $B(s, p)$ определяется согласно граничным условиям.

Применяя преобразования Лапласа и Фурье к соотношениям для напряжений и перемещений, имеем

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_y &= (\lambda + 2\mu)\bar{f}_{yy} - \lambda s^2 \bar{f} + 2\mu is \bar{g}_y; \\ \bar{\tau}_{xy} &= \mu(-2is \bar{f}_y + s^2 \bar{g} + \bar{g}_{yy}); \\ \bar{v} &= \bar{f}_y + is \bar{g}. \end{aligned} \right\} \quad (508)$$

Согласно граничным условиям (498) получаем

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xy}|_{y=0} &= 0, \quad \bar{v}|_{y=0} = v^-(s); \\ \bar{\sigma}_y|_{y=0} &= \Omega^+(s) - \frac{T}{\rho} \exp(-isl); \end{aligned} \quad (509)$$

$$\left(v^-(s) = \int_{-\infty}^0 (\bar{v})_{y=0} e^{isx} dx, \quad \Omega^+(s) = \int_0^{\infty} (\bar{\sigma}_y)_{y=0} e^{isx} dx \right).$$

Найденное значение для $\sigma_y|_{y=0} = 0$ соответствует сосредоточенной силе, приложенной в точке $(x + l, 0)$. Поэтому в решении делаем предельный переход $l \rightarrow 0$.

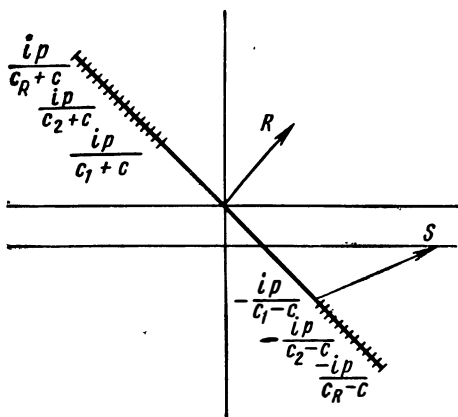


Рис. 35. Разрезы в комплексной плоскости s , служащие для выделения необходимых ветвей двузначных функций $\gamma_1(s)$ и $\gamma_2(s)$

Учитывая (507), (509) в (508) (при $y = 0$), находим

$$-\frac{T}{p} \exp(-isl) + \Omega^+(s) = A [(\lambda + 2\mu)\gamma_1^2 - \lambda s^2] - 2\mu is\gamma_2 B; \quad (510)$$

$$0 = 2is\gamma_1 A + (s^2 + \gamma_2^2) B; \quad v^-(s) = -\gamma_1 A + isB.$$

Исключая из систем уравнений A и B и обозначая через $F(s)$ функцию

$$F(s) = -D \left\{ \frac{\left[s^2 + \frac{(p+ics)^2}{2c_2^2} \right]^2}{\left[s^2 + \frac{(p+ics)^2}{c_1^2} \right]^{1/2} \left[s^2 + \frac{(p+ics)^2}{c_2^2} \right]^{1/2} - s^2} - s^2 \right\} \frac{1}{\left(s - \frac{ip}{c} \right)^2}; \quad (511)$$

$$D = \frac{\left(1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2} \right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2} \right)^{1/2} - \left(1 - \frac{c^2}{2c_2^2} \right)^2},$$

приходим к следующему уравнению Винера—Хопфа:

$$-\frac{4\mu c_2^2}{c^2} \frac{1}{D} F(s) \left[s^2 + \frac{(p-ics)^2}{c_2^2} \right]^{1/2} v^-(s) = \Omega^+(s) + \Omega^-(s); \quad (512)$$

$$\Omega^-(s) = -\frac{T}{p} \exp(-isl).$$

Задачу факторизации для функции $F(s)$ решил Бэйкер [107], воспользуемся его результатом

$$F(s) = F^+(s) F^-(s);$$

$$F^\pm(s) = \frac{s}{ip} \pm \frac{1}{c_R \mp c} \times \frac{1}{\frac{s}{ip} \pm \frac{1}{c_2 \mp c}}$$

$$\times \exp \left[\int_{(c_1 \pm c)^{-1}}^{(c_2 \pm c_1)^{-1}} \frac{1}{\pi} \arctg \left\{ \frac{\left[\xi^2 - \frac{(1 \pm c\xi)^2}{2c_2^2} \right]^2}{\xi^2 \left[\xi^2 - \frac{(1 \pm c\xi)^2}{c_1^2} \right]^{1/2} \left[\frac{(1 \pm c\xi)^2}{c_2^2} - \xi^2 \right]^{1/2}} \right\} \times \right. \\ \left. \times \frac{d\xi}{\xi + \frac{s}{ip}} \right]; \quad (513)$$

$$\gamma_2^- = \left[\left(1 + \frac{c}{c_2} \right) s - \frac{ip}{c_2} \right]^{1/2};$$

$$\gamma_2^+ = \left[s^2 + \frac{(p+ics)^2}{c_2^2} \right]^{1/2} \gamma_2 = \gamma_2^+ \gamma_2^- \gamma_2^+ = \left[\left(1 - \frac{c}{c_2} \right) s + \frac{ip}{c_2} \right]^{1/2}$$

(c_R — скорость распространения поверхностных волн Релея).

С учетом факторизации (513) уравнение (512) принимает вид

$$-\frac{4\mu c_2^2}{c^2 D} F^-(s) \gamma_2^-(s) v^-(s) = \frac{\Omega^+(s)}{\gamma_2^+(s) F^+(s)} + \frac{\Omega^-(s)}{F^+(s) \gamma_2^+(s)}. \quad (514)$$

Второе слагаемое в правой части этого уравнения представляет расходящуюся волну на бесконечности $\text{Im } s > 0$.

Рассмотрим функцию

$$\Sigma(s) = \frac{\Omega^-(s)}{F^+(s) \gamma_2^+(s)}.$$

При помощи интеграла типа Коши функцию $\Sigma(s)$ можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \Sigma(s) &= \Sigma^+(s) - \Sigma^-(s); \\ \Sigma^\pm(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty \pm i\omega}^{+\infty \pm i\omega} \frac{\Sigma(\xi)}{\xi - s} d\xi; \\ \left(-\frac{\text{Re } p}{c_1 - c} < -\omega < \text{Im } s < \omega < \frac{\text{Re } p}{c_1 + c} \right). \end{aligned} \right\} \quad (515)$$

Функции $\Sigma^\pm(s)$ аналитичны в верхней и нижней полуплоскости s соответственно.

Согласно (515) уравнение Винера—Хопфа (514) можно записать так:

$$-\frac{4\mu c_2^2}{c^2 D} F^-(s) \gamma_2^-(s) v^-(s) + \Sigma^-(s) = \frac{\Omega^+(s)}{\gamma_2^+(s) F^+(s)} + \Sigma^+(s). \quad (516)$$

Левая часть этого уравнения представляет собой функцию, аналитическую в нижней полуплоскости s , а правая — функцию, аналитическую в верхней полуплоскости s . Согласно принципу непрерывного продолжения левая и правая части этого уравнения являются аналитическим продолжением друг друга. Осталось выяснить поведение определенной таким образом функции, аналитической во всей плоскости s в бесконечно удаленной точке. Для этого применяем теорему абелева типа [136]. Согласно условию [98] на «ребре» при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$, $\sigma_{,k} = 0$ ($r^{-1/2}$) нетрудно показать, что аналитическая функция стремится к нулю на бесконечности. Тогда в силу теоремы Лиувилля она тождественно равна нулю во всей плоскости s .

Таким образом, находим

$$\Omega^+(s) = -\gamma_2^+(s) F^+(s) \Sigma^+(s);$$

$$v^-(s) = \frac{c^2 D}{4\mu c_2^2} \frac{\Sigma^-(s)}{F^-(s) \gamma_2^-(s)}.$$

Найдем коэффициент интенсивности напряжений (формулы для напряжений и смещений в упругом пространстве опустим), который имеет особый интерес для механики разрушения.

Используя теоремы абелева типа и упругую особенность в конце трещины [91], после предельного перехода находим

$$K_1(t) = \frac{T \sqrt{2(1-c/c_2)}}{F^+(1/c) \sqrt{c\pi t}} \text{ при } t > 0.$$

Г л а в а VII

**НЕКОТОРЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ
ПРОЧНОСТИ УПРУГИХ ТОЛСТОСТЕННЫХ
КОНСТРУКЦИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ***

§ 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Сложность конструктивных форм, многообразие действующих нагрузок, высокие требования к надежности конструкций создают большие трудности при расчете пространственного напряженного состояния цилиндрических тел на основе методов точной теории упругости. Однако используемые зачастую в инженерной практике различные варианты упрощенной теории упругости даже при решении задач статики не всегда дают удовлетворительные результаты. Оказывается, только часть статических характеристик, рассчитанная по этим теориям, может быть достаточно точным приближением к решению задач, основанному на классической теории упругости [47].

Что касается задач динамики, то сопоставление результатов исследований свободных колебаний полого упругого цилиндра, проведенное на основе уравнений линейной теории упругости и различных теорий толстостенных оболочек [120, 122], показывает, что, когда отношение внутреннего радиуса цилиндра к внешнему радиусу меньше 0,5, то только точная теория дает полную характеристику распределения напряжений. В связи с этим предъявляются повышенные требования к методам динамического расчета прочности, устойчивости и напряженно-деформированного состояния толстостенных конструкций цилиндрической формы.

При анализе напряжений и деформаций, возникающих в толстостенных цилиндрических конструкциях в зависимости от формы конструкции и условий ее нагружения, выделяют две основные задачи: определение напряженно-деформированного состояния цилиндрических элементов конструкции в случае осесимметричного нагружения и в случае общего динамического нагружения [76, 123].

Значительные успехи в постановке и решении указанных выше задач были достигнуты в связи с использованием численных методов и ЭВМ [120, 122]. Не будем останавливаться на анализе отмеченных работ, которые в основном посвящены рассмотрению собственных колебаний конструкций цилиндрических форм, и

* Эта глава написана совместно с Г. А. Брусиловской.

перейдем к исследованию вынужденных колебаний, возникающих вследствие динамического нагружения боковых поверхностей конструкции. В качестве расчетной схемы за элемент конструкции в дальнейшем принимаем полый упругий круговой цилиндр.

Уравнения движения изотропного упругого цилиндра возьмем в виде [56]

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{vmatrix}, \quad (517)$$

где

$$A_{11} = \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial x^2};$$

$$A_{12} = (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} = A_{21}; \quad A_{13} = (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \right);$$

$$A_{22} = \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2};$$

$$A_{23} = (\lambda + 3\mu) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{2r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \right) = A_{32};$$

$$A_{31} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial r}; \quad A_{33} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) +$$

$$+ \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right).$$

На боковой поверхности цилиндра рассмотрим три компоненты напряжения, действующие в радиальном направлении. Соотношения между ними и деформациями имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial r} + \lambda \left(\frac{w}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} \right); \\ \tau_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right); \\ \tau_{rx} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (518)$$

Здесь u , v , w перемещения соответственно в осевом (x), тангенциальном (φ) и радиальном (r) направлениях (рис. 36); λ , μ — постоянные Ляме; ρ — плотность материала.

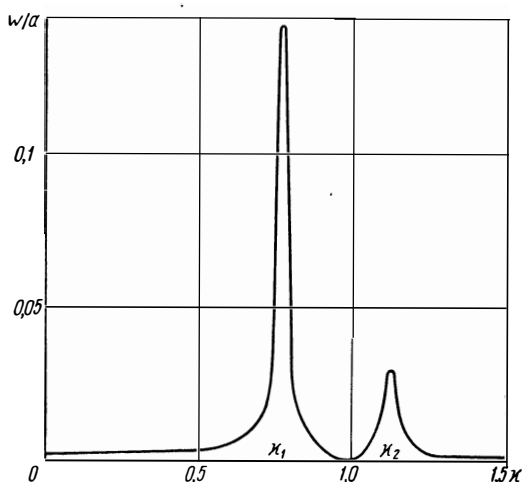


Рис. 36. Зависимость радиального перемещения от безразмерной частоты k

§ 2. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА БЕСКОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

Рассмотрим осесимметричную задачу об определении реакции полого упругого цилиндра, когда на его боковые поверхности действует стационарная по времени нагрузка. Не ограничивая общности предлагаемого метода, граничные условия примем в виде

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rx} = \tau = g_1(x) e^{i\omega t} \text{ при } r = a; \\ \sigma_{rr} = \sigma = -g_2(x) e^{i\omega t} \text{ при } r = a; \\ \tau_{rx} = \sigma_{rr} = 0 \text{ при } r = b. \end{aligned} \right\} \quad (519)$$

Здесь a , b — соответственно внутренний и внешний радиусы цилиндра; $\tilde{\omega}$ — частота вынуждающей нагрузки.

Предположим далее, что $g_1(x)$ — нечетная функция аргумента x , а $g_2(x)$ — четная, т. е. нагружение внутренней боковой поверхности симметрично относительно среднего сечения $x = 0$, и функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ удовлетворяют условиям разложения функций в ряд Фурье.

Тогда, полагая

$$\left. \begin{aligned} u(r, x, t) = u_\beta(r) \sin \frac{\beta}{a} x e^{i\omega t}; \\ w(r, x, t) = w_\beta(r) \cos \frac{\beta}{a} x e^{i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (520)$$

для касательных и нормальных напряжений будем иметь

$$\begin{aligned}\tau(r, x, t) &= \tau_{\beta}(r) \sin \frac{\beta}{a} x e^{i\omega t}; \\ \sigma(r, x, t) &= \sigma_{\beta}(r) \cos \frac{\beta}{a} x e^{i\omega t}.\end{aligned}\quad (521)$$

На основании (519), (520) система (517) примет вид

$$\begin{vmatrix} A_{11}^{\beta} & A_{13}^{\beta} \\ A_{31}^{\beta} & A_{33}^{\beta} \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 w_{\beta}}{\partial t^2} \end{vmatrix}\quad (522)$$

при следующих граничных условиях:

$$\tau_{\beta} = \mu \left(-\frac{\beta}{a} w_{\beta} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial r} \right) = b_{\beta} e^{i\omega t}, \quad \text{при } r = a;$$

$$\sigma_{\beta} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w_{\beta}}{\partial r} + \lambda \left(\frac{w_{\beta}}{r} + \frac{\beta}{r} u_{\beta} \right) = -a_{\beta} e^{i\omega t} \quad \text{при } r = a; \quad (523)$$

$$\tau_{\beta}(r) = \sigma_{\beta}(r) = 0, \quad \text{при } r = b.$$

Здесь

$$A_{11}^{\beta} = \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\beta^2}{a^2};$$

$$A_{13}^{\beta} = -\frac{\beta}{a} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right); \quad A_{31}^{\beta} = (\lambda + 2\mu) \frac{\beta}{a} \frac{\partial}{\partial r};$$

$$A_{33}^{\beta} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) - \mu \frac{\beta^2}{a^2};$$

a_{β} , b_{β} — коэффициенты разложения функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$ в ряд Фурье.

Далее, используя соотношения (520), (521) уравнения колебаний (522) преобразуем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений канонического вида, где в качестве независимых переменных входят как перемещения, так и напряжения [12]

$$\frac{d\vec{u}_{\beta}}{d\xi} = A_{\beta}(\xi, \omega) \vec{u}_{\beta}\quad (524)$$

при граничных условиях

$$M\vec{u}_{\beta}(\xi) |_{\xi=1} = \vec{\gamma}_1; \quad N\vec{u}_{\beta}(\xi) |_{\xi=d} = \vec{\gamma}_2,\quad (525)$$

причем

$$\vec{u}_{\beta} = \left\{ u_1 = \frac{u_{\beta}}{a}, \quad u_2 = \frac{w_{\beta}}{a}, \quad u_3 = \frac{\tau_{\beta}}{E}, \quad u_4 = \frac{\sigma_{\beta}}{E} \right\}.$$

Здесь $\xi = r/d$ — безразмерная переменная; d — отношение внешнего радиуса цилиндра к внутреннему; E — модуль упругости; M, N — прямоугольные матрицы вида (4×2) ; $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2$ — заданные векторы, определяющиеся граничными условиями (519) и соответственно (523). Элементы матрицы $A(\xi, \omega) = [a_{ij}]$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{14} = a_{23} = 0, \quad a_{12} = -a_{43} = \beta, \quad a_{13} = 2(1 + \nu); \\ a_{21} = -a_{34} = -\frac{\beta\nu}{1-\nu}, \quad a_{22} = -\frac{\nu}{(1-\nu)\xi}, \quad a_{24} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}; \\ a_{31} = \frac{\beta^2}{1-\nu^2} - \kappa^2, \quad a_{32} = a_{41} = \frac{\nu\beta}{(1-\nu^2)\xi}, \quad a_{33} = -\frac{1}{\xi}; \\ a_{42} = \frac{1}{\xi^2(1-\nu^2)} - \kappa^2, \quad a_{44} = -\frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)\xi}; \end{aligned} \quad (526)$$

где ν — коэффициент Пуассона, $\kappa^2 = a^2\omega^2 \frac{\rho}{E}$.

Суперпозиция решений системы (522), (524) в зависимости от значений параметра β дает решение для симметричного нагружения боковой поверхности.

Остановимся подробнее на случае $\beta \neq 0$, т. е. будем рассматривать как радиальные, так и продольные колебания цилиндра (индекс β в дальнейшем опускаем).

Для каждого фиксированного ω общее решение системы (524) с граничными условиями (525) представляем в виде

$$\vec{u}(\xi) = \vec{u}_0(\xi) + \sum_{k=1}^2 c_k \vec{u}_k(\xi), \quad (527)$$

где $\vec{u}_0(\xi)$ — частное решение системы, удовлетворяющее граничному условию на внутренней поверхности цилиндра; $u_k(\xi)$ — совокупность линейно-независимых решений системы уравнений (524).

Интегрируя численно систему

$$\frac{d\vec{u}_0}{d\xi} = A(\xi, \omega) \vec{u}_0; \quad (528)$$

$$\frac{d\vec{u}_k}{d\xi} = A(\xi, \omega) \vec{u}_k,$$

с соответствующими начальными условиями в каждой точке интервала интегрирования определяется решение краевой задачи по формуле (527), если известны постоянные c_k , которые определяются из неоднородной системы алгебраических уравнений, полученной путем удовлетворения (527) граничным условиям при $\xi = d$.

При численном интегрировании задач Коши (528) может возникнуть неустойчивость процесса интегрирования. В результате влияние вычислительной погрешности не всегда удается с достаточной точностью получить решение на другом конце интервала интегрирования и, следовательно, определить постоянные c_k . Путем соответствующего выбора частных решений $\vec{u}_0(\xi)$ и $\vec{u}_k(\xi)$ можно построить устойчивый алгоритм решения краевой задачи, проводя в некоторых промежуточных точках интервала ортонормирование векторов $\vec{u}_k(\xi)$ по схеме Грамма—Шмидта.

Пусть в которой точке ξ_1 имеем n векторов

$$\vec{y}_0(\xi_1) = \vec{u}_0(\xi_1), \quad \vec{y}_1(\xi_1) = \vec{u}_1(\xi_1) \cdot \dots \cdot \vec{y}_n = (\xi_1) = u_n(\xi_1). \quad (529)$$

Проортонормируем (529) следующим образом:

$$\omega_{11} = \sqrt{(\vec{y}_0; \vec{y}_0)}, \quad \vec{z}_1 = \frac{1}{\omega_{11}} \vec{y}_0,$$

$$\omega_{21} = (\vec{y}_1, \vec{z}_1), \quad \omega_{22} = \sqrt{(\vec{y}_1, \vec{y}_1) - \omega_{21}^2}, \quad \vec{z}_2 = \frac{1}{\omega_{22}} (\vec{y}_1 - \omega_{21} \vec{z}_1), \quad (530)$$

.

$$\vec{z}_n = \frac{1}{\omega_{nn}} (\vec{y}_n - \omega_{n1} \vec{z}_1 - \omega_{n2} \vec{z}_2 - \dots - \omega_{n, m-1} \vec{z}_{n-1}),$$

$$\omega_{0n} = (\vec{y}_0, \vec{z}_n) \quad \vec{z}_0 = \vec{y}_0 - \omega_{01} \vec{z}_1 - \omega_{02} \vec{z}_2 - \dots - \omega_{0n} \vec{z}_n.$$

В формулах (530) скобками обозначено скалярное произведение векторов. Следует отметить, что \vec{y}_0 не нормируется. Полученные в процессе ортонормирования векторы \vec{z}_j используются как начальные условия при интегрировании по следующему участку.

Как частный случай при однородных граничных условиях (519) и соответственно (525) следует задача о собственных колебаниях полого упругого цилиндра. Действительно, в этом случае при $\xi = d$ из (527) будем иметь систему однородных алгебраических уравнений и, следовательно, для нетривиальных c_k , например при свободной от напряжений внешней криволинейной поверхности получаем уравнение для определения собственных частот

$$W(d, \omega) = \begin{vmatrix} u_{31}(d, \omega), & u_{32}(d, \omega) \\ u_{41}(d, \omega), & u_{42}(d, \omega) \end{vmatrix} = 0. \quad (531)$$

Здесь и далее в обозначении элемента u_{ij} ; i — компонента решения; j — номер решения.

Уравнение (531) решается численным методом (методом проб), сущность которого состоит в следующем. Для исходных зна-

чений E , ν , d задается ряд последовательных значений параметра ω . Для каждого ω вычисляется величина определителя $W(\omega)$. Значения ω , соответствующие пересечению кривой $W = f(\omega)$ оси абсцисс, дают искомые величины частот. Значения ω_n образуют бесконечную последовательность собственных частот.

Граничные условия типа (519) могут быть заданы как на внутренней, так и на внешней криволинейных поверхностях цилиндра. При этом изменяется система линейно-независимых векторов $u_k(0)$, берущаяся в качестве начальных условий для задач Коши, вектор $\vec{u}_0(\xi)$, соответственно элементы частотного определителя (531); в то же время алгоритм решения сохраняется неизменным.

Итак, при каждом фиксированном ω , не совпадающем с собственной частотой цилиндра (определение собственных частот является частным случаем приводимого алгоритма), можно по формулам (520), (521), (527) определить перемещения и напряжения, возникающие в полом упругом цилиндре при динамическом воздействии.

Чтобы иметь возможность рассчитывать указанные характеристики на резонансных (собственных частотах), необходимо учесть рассеяние энергии в материале цилиндра. Примем в качестве гипотезы внутреннего трения получившую широкое распространение в строительной механике гипотезу комплексного модуля упругости [78], согласно которой $E^* = E(1 + i\gamma)$, где γ — есть логарифмический декремент колебаний, деленный на число π . Тогда, с учетом разделения действительных и мнимых частот компонентов исходного вектора $\vec{u}(\xi)$, приходим к краевой задаче такого же вида, но с порядком системы, равным восьми, причем алгоритм решения полученной системы остается прежним [14]. Следовательно, учет рассеяния энергии в материале цилиндра позволяет определять реакцию полого толстостенного упругого цилиндра на действие гармонической нагрузки на любых частотах, включая резонансные. Полагая $\omega = 0$, приходим к задаче статики цилиндра. Таким образом, приведенный алгоритм позволяет одновременно определять как перемещения, так и напряжения по толщине цилиндра.

На основе изложенного алгоритма рассчитаны частотные характеристики для цилиндра бесконечной длины с параметрами $\nu = 0,3$, $d = 1,5$. Рассмотрена внешняя нагрузка вида

$$g_1(x) = 0, \quad g_2(x) = \sigma_0 \cos \frac{\beta}{a} x, \quad \text{где } \sigma_0 = 0,001, \quad \beta = 1.$$

Отсюда $\vec{\gamma}_1 = \{0, -\sigma_0\}$, $\vec{\gamma}_2$ — нулевой вектор,

$$M = N = \begin{bmatrix} 0010 \\ 0001 \end{bmatrix}.$$

На рис. 36 построена амплитудно-частотная характеристика для перемещений с двумя пиками на двух низших собственных частотах цилиндра. На рис. 37 показана аналогичная амплитудно-фазовая частотная характеристика в окрестности тех же собственных частот.

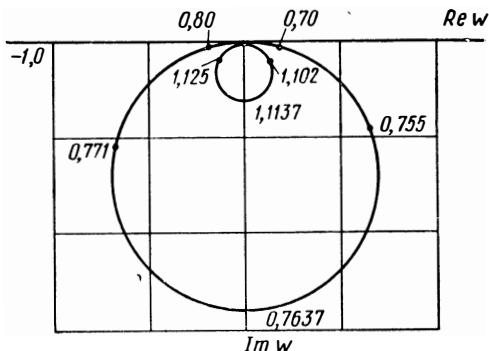


Рис. 37. Амплитудно-фазовая частотная характеристика цилиндра

в качестве характерной точки на рис. 37 принимали также, как и на рис. 36 точку на внутренней поверхности цилиндра. Цифры на рис. 37 означают безразмерные частоты ω вынуждающей нагрузки.

На рис. 38 показаны изменения мнимых частей u/a и w/a по толщине цилиндра на первой и второй резонансных частотах, пронормированные для каждого тона колебаний к максимальному значению перемещения. Указанные характеристики полностью совпадают с собственными формами колебаний ($\text{Im} \frac{\omega}{a}$ отвечают штриховые линии, цифры 1, 2 — указывают номер формы. По оси абсцисс отложена относительная координата вдоль толщины цилиндра, отсчитываемая от внутренней поверхности).

Достоинством предлагаемых алгоритмов является одновременное определение значений u , w , τ и σ , что позволяет легко находить другие характеристики, обуславливающие динамический эффект (например, деформации, напряжение σ_θ):

$$\sigma_\theta = (\lambda + 2\mu) \frac{w}{r} + \lambda \times$$

$$\times \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \text{ и пр.}$$

Заметим также, что приведенные алгоритмы можно легко использовать и в других расчетных схемах, например, при определении напряженно-деформированного состояния цилиндра по расчетной схеме, принятой в работе [78].

Результаты изменения напряжения σ_θ в случае внешнего или внутреннего воздействия приведены на рис. 39, 40.

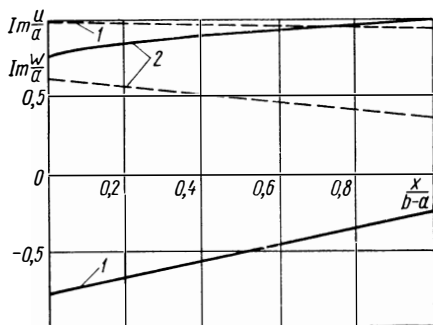


Рис. 38. $\text{Im} \frac{u}{a}$, $\text{Im} \frac{w}{a}$ на первой резонансной частотах

На рис. 39 представлена зависимость мнимых частей напряжения σ_θ/E на первой резонансной частоте соответственно для $d = 1,5$ и $d = 5$. По оси абсцисс отложена относительная координата вдоль толщины цилиндра, отсчитываемая от внутренней поверхности. Приведенные кривые полностью совпадают с соответствующими собственными формами колебаний.

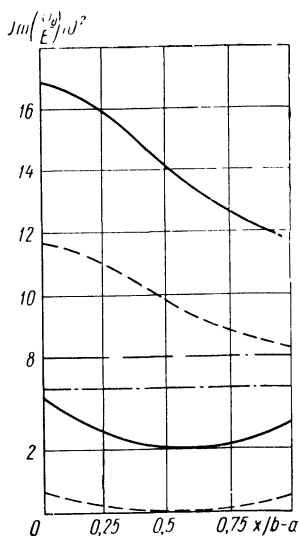


Рис. 39. Поведение $\text{Im} \frac{\sigma_\theta}{E}$ на первой резонансной частоте

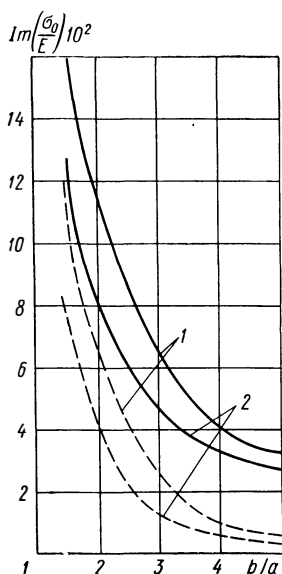


Рис. 40. Зависимость $\text{Im} \frac{\sigma_\theta}{E}$ от величины отношения b/a на первой резонансной частоте

Зависимость напряжения $\text{Im} \left[\frac{\sigma_\theta}{E} \right]$ от отношения b/a на первой резонансной частоте иллюстрирует рис. 40 (на рис. 39, 40 сплошными линиями обозначены результаты внешнего давления, штриховыми — внутреннего. Цифра 1 — соответствует точке внутренней поверхности, 2 — точке внешней поверхности). В качестве характерной точки взята точка, находящаяся в среднем сечении цилиндра ($x = 0$) и отстоящая от внутренней поверхности на расстоянии, равном $1/5$ толщины цилиндра.

§ 3. ДИНАМИКА ПОЛОГО ЦИЛИНДРА БЕСКОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ НАГРУЖЕНИИ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим осесимметричную задачу об определении напряженно-деформированного состояния полого упругого кругового цилиндра, когда внешняя нагрузка является произвольной функ-

цией времени, т. е. уравнения колебаний (517) рассмотрим при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \tau &= \sigma = 0 \text{ при } r = a, \\ \tau &= g_1(x) p_1(t) \text{ при } r = b, \\ \sigma &= g_2(x) p_2(t) \text{ при } r = b. \end{aligned} \quad (532)$$

Пусть начальные условия имеют вид

$$u = w = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

(Здесь и в дальнейшем используются принятые выше обозначения.) $f_1(t)$, $f_2(t)$ — произвольные непрерывные функции времени; $g_1(x)$, $g_2(x)$ — соответственно нечетная и четная функции.

Полагая аналогично (520)

$$\begin{aligned} u(r, x, t) &= u_\beta(r, t) \sin \frac{\beta}{a} x; \\ w(r, x, t) &= w_\beta(r, t) \cos \frac{\beta}{a} x; \\ \tau(r, x, t) &= \tau_\beta(r, t) \sin \frac{\beta}{a} x; \\ \sigma(r, x, t) &= \sigma_\beta(r, t) \cos \frac{\beta}{a} x, \end{aligned} \quad (533)$$

приходим к системе вида (522) при следующих граничных и начальных условиях:

$$\begin{aligned} \tau_\beta &= b_\beta p_1(t) \text{ при } r = b; \\ \sigma_\beta &= -a_\beta p_2(t) \text{ при } r = b; \end{aligned} \quad (534)$$

$$\begin{aligned} \tau_\beta &= \sigma_\beta = 0 \text{ при } r = a; \\ u_\beta &= w_\beta = \frac{\partial u_\beta}{\partial t} = \frac{\partial w_\beta}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (535)$$

Для решения настоящей задачи о вынужденных колебаниях цилиндра под действием динамических нагрузок типа (532) и, следовательно (534), приложенных к боковой поверхности, заменим $b_\beta p_1(t)$ и $a_\beta p_2(t)$ объемными силами, действующими соответственно в осевом и радиальном направлениях. Эти нагрузки считаем приложенными в тонком кольце $b - \varepsilon \leq r \leq b$ так, что граничные условия (534) станут однородными, а уравнения (522) неоднородными.

Если затем введем безразмерные переменные $\xi = r/a$, $\tau = a \sqrt{\frac{E}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} t$, то, используя (533) и (534), систему

(522) преобразуем к матричному виду аналогично (524), где в качестве независимых переменных входят как перемещения, так и напряжения

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} = A_{\beta}(\xi) \vec{u}_{\beta} + M \vec{G}_{\beta} + M \frac{\partial^2 \vec{u}_{\beta}}{\partial \tau^2} \quad (536)$$

при граничных условиях

$$U_1 \vec{u}_{\beta}(1) = U_2 \vec{u}_{\beta}(d) = 0, \quad (537)$$

и начальных условиях (535).

Ненулевые элементы матрицы $A(\xi) = \|a_{ij}(\xi)\|$ определяют по формулам (526), за исключением $a_{31}(\xi)$ и $a_{42}(\xi)$, в которых вторые слагаемые будут равны нулю,

$$\vec{G}_{\beta} = \{G_{1\beta}, G_{2\beta}, 0, 0\}, \quad G_{1\beta} = \rho_1(\tau) \delta(\xi - d),$$

$$G_{2\beta} = -\rho_2(\tau) \delta(\xi - d),$$

где $\delta(\xi - d)$ является дельта-функцией Дирака;

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E & 0 \end{bmatrix}; \quad U_1 = U_2 = \begin{bmatrix} 0010 \\ 0001 \end{bmatrix}; \quad E \text{ — единичная матрица } (2 \times 2).$$

Суперпозиция решений системы (535), (536), (537) для различных значений параметра β дает искомого решение (индекс β в дальнейшем опускаем).

Решение системы (535), (536), (537) возьмем в виде

$$\vec{u}(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(\tau) \vec{u}_i(\xi). \quad (538)$$

Здесь $\varphi_i(\tau)$ — искомые функции времени; $\vec{u}_i(\xi)$ — собственные формы колебаний. Собственные частоты колебаний ω_i определяются из характеристического определителя, которые в случае граничных условий (537) имеют вид (531).

Для собственных форм $u_i(\xi)$ нетрудно получить следующее условие ортогональности:

$$\int_1^d (u_i u_j + \omega_i \omega_j) \xi d\xi = 0, \quad i \neq j. \quad (539)$$

Применяя к системе (536) метод Бубнова—Галеркина и используя соотношение (539) для искомых функций $\varphi_i(\tau)$, получим

$$a_i [\ddot{\varphi}_i(\tau) + \lambda_i^2 \varphi_i(\tau)] = P_i(\tau). \quad (540)$$

Здесь

$$a_i = \int_1^d (u_i^2 + \omega_i^2) \xi d\xi;$$

$$\lambda_i^2 = \frac{a^2 \rho (1 + \nu) (1 - 2\nu)}{E} \omega_i^2;$$

$$\rho_i(\tau) = \rho_2(\tau) \omega_i(1) - \rho_i(\tau) u_i(1).$$

В (540) точками обозначено дифференцирование по τ .
Для учета рассеяния энергии в материале цилиндра приме-

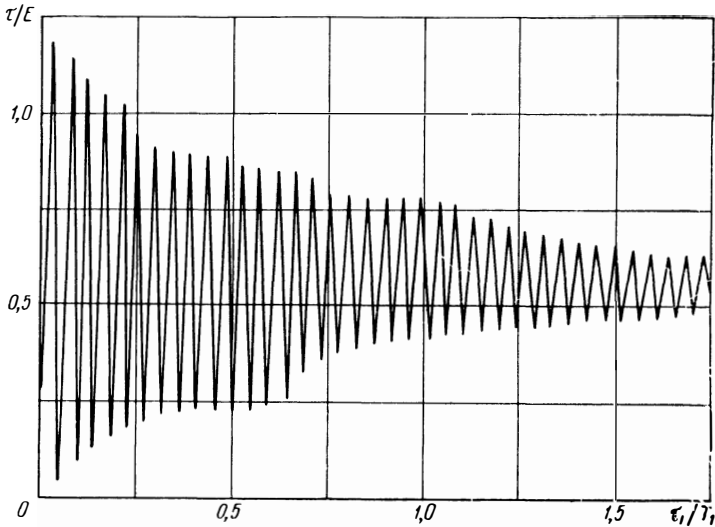


Рис. 41. Зависимость касательного напряжения τ/E от безразмерного параметра τ/T_1

ним аналогично предыдущему гипотезу комплексного модуля упругости [78].

Тогда уравнение (540) примет вид

$$a_i [\ddot{\varphi}_i(\tau) + \eta_i^2 (1 + i\gamma_i) \varphi_i(\tau)] = \rho_i(\tau), \quad (541)$$

где γ_i — логарифмический декремент собственных колебаний, деленный на число π .

В соответствии с (535) решение (541) можно записать в виде

$$\varphi_i(\tau) = -\frac{1}{a_i} \int_0^\tau e^{\frac{-\gamma_i \eta_i (\tau - \tau_1)}{2}} \rho_i(\tau) \sin \eta_i (\tau - \tau_1) d\tau_1. \quad (542)$$

Таким образом, формулы (533), (538) и (542) позволяют определить напряженно-деформированное состояние цилиндрической конструкции, имеющей вид полого упругого цилиндра.

Результаты расчетов по изложенной методике приведены на рис. 41, где показаны изменения касательного напряжения τ/E в зависимости от безразмерного параметра t/T_1 , где $T_1 = 2\pi/\lambda_1$. Параметры цилиндра полагали равными $\nu = 0,3$, $b/a = 1,2$, $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = \cos x$, $p_2(t)$ — единичная функция Хевисайда. Декремент колебаний γ_i на всех точках полагали одинаковым и равным 0,05. В качестве характерной точки принята точка, находящаяся на расстоянии 0,476 от внутренней поверхности. В расчетах учитывали шесть членов ряда (538).

Далее приведем аналитическое решение рассмотренной задачи (536)—(537), полученное авторами на основе решения спектральной задачи типа [13]

$$\frac{d\bar{u}_\varepsilon(\xi, \omega)}{d\xi} = [A(\xi) - \omega^2 M] \bar{u}_\varepsilon(\xi, \omega) + M \bar{G}_\varepsilon(\xi, \omega). \quad (543)$$

Граничные условия имеют вид (537).

Легко убедиться, что система (543) получена из (536) при помощи обобщенного комплексного преобразования Фурье [16]:

$$\left. \begin{aligned} F[u(\xi, \tau)] = \bar{u}_\varepsilon(\xi, \omega) &= \int_0^\infty e^{i\omega\tau - \varepsilon\tau} u(\xi, \tau) d\tau, \\ [\bar{u}_\varepsilon(\xi, \omega)]^{-1} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega\tau} \bar{u}(\xi, \omega + i\varepsilon) d\omega \end{aligned} \right\} \quad (544)$$

(индекс ε в дальнейшем опускаем).

Решение задачи (543) при граничных условиях (537) запишем следующим образом [66]:

$$\bar{u}(\xi, \omega) = \sum_{k=1}^2 c_k u(\xi) + \int_1^d p(\xi, x, \omega) f(x, \omega) dx. \quad (545)$$

Элементы матрицы $p(\xi, x, \omega)$ вычисляем по формуле

$$p_{ij}(\xi, x, \omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 u_{ik}(\xi, \omega) z_{kj}(x, \omega) + \\ + \sum_{k=3}^4 u_{ik}(\xi, \omega) z_{kj}(x, \omega) \text{ при } 1 \leq x < \xi \leq d: \\ - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 u_{ik}(\xi, \omega) z_{kj}(x, \omega) \text{ при } 1 \leq \xi < x \leq d: \end{cases} \quad (546)$$

$$f(x, \omega) = \{0, 0, \bar{G}_1(x, \omega), \bar{G}_2(x, \omega)\},$$

где $u = \|u_{ik}\|$ — фундаментальная матрица решений однородной системы дифференциальных уравнений, соответствующей

системе (543), причем первые два решения u_1 и u_2 фундаментальной системы тождественно удовлетворяют граничным условиям при $\xi = 1$, $u^{-1} = \|z_{ij}\|$.

Коэффициенты c_1 и c_2 определяем из условия удовлетворения общего решения (545) граничным условиям при $\xi = d$.

Поставим далее найденные коэффициенты в соотношение (545) и воспользуемся Миттаг—Лефлеровским разложением мероморфной функции $Q(\xi, x, \omega)$, полученной после подстановки c_1 и c_2 в (545). Полюсы последней образуют бесконечную последовательность чисел ω_k , ω_k^2 — квадраты собственных частот.

Затем после обратного преобразования по второй формуле (544) решение задачи (535)—(537) принимает вид

$$u(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_1^d \frac{R(\xi, x, \omega_k^2)}{\omega_k} \int_0^{\tau} \sin \omega_k(\tau - \tau_1) MG(x, \tau) d\tau_1 dx. \quad (547)$$

Здесь $R = \|r_{ij}\| = \text{Res} [g_{ij}(x, \xi, \omega)]$;

$$g_{ij}(\xi, x, \omega) = - \sum_{s=1}^2 \sum_{l=3}^4 \sum_{p=3}^4 \frac{u_{is}(\xi, \omega) v_{sl}(d, \omega) u_{lp}(d, \omega) z_{pj}(x, \omega)}{W(d, \omega)}$$

определяется по формуле (531); v_{sl} — алгебраическое дополнение элемента u_{ls} определителя $W(d, \omega)$. Теперь на основании формулы (547) легко найти динамические характеристики цилиндра, используя соотношения (533) и, следовательно, построить решение рассматриваемой задачи.

При исследовании напряженно-деформированного состояния упругой цилиндрической конструкции под действием динамических, в том числе и импульсивных нагрузок, часто возникают затруднения из-за сложности конструкций. Точное исследование деформаций и напряжений, возникающих в цилиндрических конструкциях для общих случаев загрузки, затруднено.

Ниже рассмотрим задачу для кольца в случае плоского напряженного состояния под действием неосесимметричных нагрузок и задачу о плоской деформации толстостенной упругой круговой цилиндрической конструкции под действием случайного нагружения. Результаты исследований показывают, что принимаемые различные упрощения в части математической постановки задачи, можно с достаточной точностью приблизиться к решению конкретной технической задачи.

§ 4. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В УПРУГОМ КОЛЬЦЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДИНАМИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

Итак, в предположении, что нагрузка неосесимметрична, рассмотрим задачу о кольце (случай плоского напряженного состояния).

Приняв вместо λ параметр $\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + \mu}$, основная система уравнений (517) принимает вид

$$\begin{vmatrix} A'_{22} & A'_{23} \\ A'_{32} & A'_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix} = \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\rho}{G} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{vmatrix}. \quad (548)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A'_{22} &= \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; \\ A'_{23} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} - \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2 \partial \varphi}; \\ A'_{32} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \left(\frac{1-\nu}{2r} \right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \right]; \\ A'_{33} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{(1-\nu)}{2r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Пусть граничные условия имеют вид $u = w = 0$ при $r = a$
 $\sigma_r = -g_1(\varphi, t)$, $\tau_{rx} = g_2(\varphi, t)$ при $r = b$, (549)

где $g_1(\varphi, t)$, $g_2(\varphi, t)$ — удовлетворяют условиям разложимости функций в ряд Фурье.

Не ограничивая общности решения, для простоты изложения начальные условия полагаем нулевыми.

Решение уравнений (548) при граничных условиях (549) возьмем в виде [58]

$$\left. \begin{aligned} v(r, t, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r, t) [\cos n\varphi + \sin n\varphi]; \\ w(r, t, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n(r, t) [\sin n\varphi - \cos n\varphi]. \end{aligned} \right\} \quad (550)$$

Функции $g_1(t, \varphi)$ и $g_2(t, \varphi)$ можно разложить в бесконечные ряды по синусам и косинусам:

$$g_i(\varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{in}^{(1)}(t) \sin n\varphi + \sum_{n=0}^{\infty} g_{in}^{(2)}(t) \cos n\varphi \quad (i = 1, 2). \quad (551)$$

Здесь функции g_{in} соответствуют симметричному относительно $\varphi = 0$ нагружению боковой поверхности; $g_{in}^{(2)}$ — антисимметричному.

Используя (550) и (551), преобразуем систему (548) к виду

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_n}{\partial \xi^2} = A_n(\xi) \vec{u}_n + M \vec{G}_n + M \frac{\partial^2 \vec{u}_n}{\partial t^2} \quad (552)$$

при граничных условиях

$$U_1 \vec{u}_n(1) = U_2 \vec{u}(d) = 0. \quad (553)$$

В соотношениях (552), (553) $\vec{u} = \left\{ \frac{v_n}{a}, \frac{w_n}{a}, \frac{\tau_r^{nz}}{E}, \frac{\sigma^n}{E} \right\}$, $G_n = \{G_{1n}, G_{2n}, 0, 0\}$, причем $G_{1n} = g_{1n}^{(1)}(\tau) \delta(\xi - d)$, $G_{2n} = g_{2n}^{(1)}(\tau) \delta(\xi - d)$ для системы (552), соответствующей симметричному относительно $\varphi = 0$ нагружению и $G_{1n} = -g_{1n}^{(2)} \delta(\xi - d)$, $G_{2n} = g_{2n}^{(2)} \delta(\xi - d)$ при антисимметричном относительно $\varphi = 0$ нагружению

$$M = \begin{vmatrix} 00 \\ E0 \end{vmatrix}, \quad U_1 = \begin{vmatrix} 1000 \\ 0100 \end{vmatrix}, \quad U_2 = \begin{vmatrix} 0010 \\ 0001 \end{vmatrix},$$

$$A_n(\xi) = \|a_{ij}\|;$$

$$a_{11} = -\frac{v}{\xi}, \quad a_{12} = -\frac{v}{\xi} n = -a_{44}; \quad a_{13} = \frac{1-v}{2};$$

$$a_{21} = -a_{33} = \frac{1}{\xi}; \quad a_{22} = -\frac{1}{2} a_{31} = \frac{1}{\xi}, \quad a_{23} = 1, \quad a_{31} = \frac{2(Hv)}{\xi^2};$$

$$a_{32} = \frac{2n(1-v)}{\xi^2} = a_{41}, \quad a_{34} = -\frac{(1-v)}{\xi}, \quad a_{42} = \frac{2n^2(1+v)}{\xi^2},$$

$$a_{24} = a_{43} = 0.$$

Безразмерные переменные и параметры системы соответствуют принятым выше обозначениям.

Решение последней задачи будет иметь вид

$$u_{in}(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^{(1)}(t) u_{in}(r) \quad (554)$$

для осесимметричных колебаний и

$$u_{in}(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^{(2)}(t) u_{in}(r) \quad (555)$$

для антисимметричных колебаний; $\psi^{(l)}(t)$ — искомые функции времени; $\vec{u}_i(r)$ — собственные формы колебаний ($l = 1, 2$).

Характеристический определитель при граничных условиях (553) имеет вид (531), в качестве линейно-независимых векторов для соответствующих задач Коши следует взять векторы $\{0, 0, 1, 0\}$, $\{0, 0, 0, 1\}$.

Используя далее соотношения типа (539) по методу Бубнова—Галеркина, приходим к уравнениям для искомым функций

$$b_{in} [\ddot{\psi}_{in}^{(l)}(\tau) + \lambda_{in}^2 (1 + \eta_{in}) \psi_{in}^{(l)}(\tau)] = p_{in}^{(l)}(\tau) \quad (l = 1, 2). \quad (556)$$

Здесь

$$b_{i1} = \int_1^d (v_{in}^2 + w_{in}^2) \xi d\xi;$$

$$p_{in}^{(1)}(\tau) = -d [g_{2n}^{(1)}(\tau) v_i(d) - g_{in}^{(1)}(\tau) w_i(d)];$$

$$p_{2n}^{(2)}(\tau) = -d [g_{2n}^{(2)}(\tau) v_i(d) - g_{in}^{(2)}(\tau) w_i(d)].$$

Из соотношений (556) аналогично (542) будем иметь

$$\psi_{in}^{(l)} = \frac{d}{b_i} \int_0^{\tau} \frac{e^{-\eta_{in} \lambda_{in} (\tau - \tau_1)}}{2} p_{in}^{(l)}(\tau) \sin \lambda_{in} (\tau - \tau_1) d\tau_1. \quad (557)$$

$$(l = 1, 2).$$

Отсюда на основании (550), (554), (555), (557) следует решение исходной задачи.

§ 5. СЛУЧАЙНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА

В простейшем случае плоской задачи теории упругости радиальное и тангенциальное напряжения выражаются через деформации $\epsilon_r = \partial w / \partial r$ и $\epsilon_\varphi = w / r$ по известным формулам [56] и дифференциальное уравнение радиальных колебаний принимает вид

$$(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (558)$$

Рассмотрим уравнение (558) при граничных условиях

$$r \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} w = -p(t), \text{ при } r = a,$$

$$r \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} w = 0, \text{ при } r = b \quad (559)$$

и начальных условиях

$$w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \text{ при } t = 0 \quad (560)$$

(Здесь сохранены ранее принятые обозначения).

Действие поверхностной силы $p_0(t)$ заменим объемной радиальной силой $F(r, t)$, приложенной в тонком кольце, прилегающем к данной поверхности $a \ll r_- \ll a + \lambda$.

Положим

$$\rho F(r, t) = \begin{cases} -\frac{p_0(t)}{\lambda}, & \text{при } a \ll r \ll a + \lambda, \\ 0, & \text{при } a + \lambda \ll r \ll b. \end{cases}$$

Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получим решение, соответствующее давлению, приложенному к внутренней поверхности. Следовательно, вместо (558) будем иметь

$$(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} \right) + \rho F(r, t) = \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}, \quad (561)$$

граничные условия примут вид

$$r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \omega = 0, \quad \text{при } r = a, b. \quad (562)$$

Для начальных условий по-прежнему справедливо (560).

Решение задачи (561), (562), (560) будем искать в виде разложения в ряд по собственным функциям

$$\omega(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} S_i(t) R_i(\xi_i r). \quad (563)$$

Здесь $S_i(t)$ — искомые функции времени;

$$R_i(\xi, r) = [\xi Y_1'(\xi_i b) + h Y_1(\xi_i b)] j(\xi_i r) - \\ - [\xi_i j'(\xi_i b) + h j(\xi_i b)] Y_1(\xi_i r); \quad (564)$$

ξ_i — корни некоторого трансцендентного уравнения [57]; $h = \frac{\lambda}{a(\lambda + 2\mu)}$, $Y_1(x)$, $J_1(x)$ — функции Бесселя.

Подставляя ряд (563) в уравнение (561) и учитывая рассеяние энергии в материале цилиндра, которое происходит в реальных процессах, получим уравнение, описывающее поведение функций $S_i(t)$:

$$S_i''(t) + 2\beta_i v_2 S_i'(t) + v_2^2 \beta_i^2 S_i(t) = Q_i(t), \quad (565)$$

где

$$Q_i(t) = \frac{\int_a^b F(r, t) R_i r dr}{\int_a^b R_i^2 r dr}; \quad (566)$$

$v_2^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$, β_i — характеристики затухания, равные логарифмическим декрементам соответствующих форм собственных колебаний, деленным на 2π .

Интеграл в числителе (566) вычисляется, а именно

$$\int_a^b F(r, t) R_i(\xi_i r) r dr = -\frac{1}{\rho} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^{a+\lambda} \frac{1}{\rho} p_0(t) \times \\ \times R_i(\xi_i r) r dr = -\frac{a}{\rho} p_0(t) R_i(\xi_i a). \quad (567)$$

Предположим далее, что $p_0(t)$ — равномерно распределенное внутреннее давление является случайной функцией времени с известной корреляционной функцией

$$K_{p_0 p_0}(t_1, t_2) = \overline{p_0(t_1) p_0(t_2)}$$

(Черта сверху означает осреднение по ансамблю реализаций случайной функции.)

Тогда на основании соотношений (566), (567) корреляционная функция правых частей (565) будет иметь вид

$$K_{Q_i Q_j}(t_1, t_2) = \frac{a^2 \xi_i^2 \xi_j^2 R_i(\xi_i a) R_j(\xi_j a)}{\rho^2 L_i(\xi_i) L_j(\xi_j)} K_{p_0 p_0}(t_1, t_2), \quad (568)$$

где за $L_i(\xi_i)$ обозначен интеграл, который стоит в знаменателе выражения (566) и определяется по формуле

$$\int_a^b R_i(r) r dr = \frac{1}{\xi_i^2} \left\{ \frac{b^2}{2} \left[h^2 + \xi_i^2 \left(1 - \frac{1}{\xi_i^2 b^2} \right) R_i(\xi_i b) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{\pi^2} \left[k^2 + \xi_i^2 \left(1 - \frac{1}{\xi_i^2 a^2} \right) \right] \right], \quad k = \frac{\lambda}{b(\lambda + 2\mu)}, \quad h = \frac{\lambda}{a(\lambda + 2\mu)} \right\}. \quad (569)$$

Остановимся подробно на случае, когда внутреннее давление $p_0(t)$ представлено стационарной случайной функцией времени и переходный процесс прекращается за конечное время за счет рассеяния энергии. Процесс на выходе рассматриваем как стационарный. Без ограничения общности можно принять для математического ожидания внутреннего давления $M[p_0(t)] = 0$. Корреляционная функция будет зависеть лишь от разности $t_2 - t_1 = \tau$, что позволяет ввести преобразование Фурье

$$K_{p_0 p_0}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{p_0 p_0}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega; \\ \Phi_{p_0 p_0}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{p_0 p_0}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (570)$$

Имея в виду формулу (569), для спектральной плотности сил $Q_i(t)$ получим следующее выражение:

$$\Phi_{Q_i Q_j}(\omega) = \frac{a^2 R_i(\xi_i a) \xi_i^2 R_j(\xi_j a) \xi_j^2}{\rho^2 L_i(\xi_i) \alpha_j(\xi_j)} \Phi_{p_0 p_0}(\omega). \quad (571)$$

Далее, используя передаточную функцию системы, на основании (570), (571) получим для искомым функций времени корреляционную функцию

$$K_{S_i S_j}(\tau) = \frac{1}{2} \frac{a^2 R_i(\xi_i a) \xi_i^2 R_j(\xi_j a) \xi_j^2}{\rho^2 L_i(\xi_i) L_j(\xi_j)} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_{p_0 p_0}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega}{[(\xi_i v_2)^2 - \omega^2 - 2i\beta_i v_2 \xi_i \omega] [(\xi_j v_2)^2 - \omega^2 + 2i\beta_j v_2 \xi_j \omega]}. \quad (572)$$

Наибольший практический интерес, очевидно, представляют значения корреляционной функции (572) при $t_1 = t_2$, следовательно, при $\tau = 0$.

В заключение приведем пример вычисления средних квадратов радиального и тангенциального напряжений, а также радиальных перемещений, когда внутреннее давление $p_0(t)$ представляет собой стационарный процесс с корреляционной функцией

$$K_{p_0 p_0}(\tau) = e^{-\alpha |\tau|}, \quad M[p_0(t)] = 0.$$

Тогда на основании (572) будем иметь

$$S_i S_j = K_{S_i S_j}(0) = \frac{a^2 R_i(\xi_i a) \xi_i^2 R_j(\xi_j a) \xi_j^2}{2\pi \rho L_i(\xi_i) L_j(\xi_j)} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\alpha^2 + \omega^2) [\omega_i^2 - \omega^2 - 2i\beta_i \omega_i \omega] [\omega_j^2 - \omega^2 + 2i\beta_j \omega_j \omega]}. \quad (573)$$

Здесь $\omega_i = \xi_i v_2$.

Используя далее теорию вычетов и основываясь на взаимном расположении собственных частот (предельный период расположения корней трансцендентного уравнения $T = \frac{\pi}{a(d-1)}$ при $\alpha \gg \beta_i$ взаимной корреляцией можно пренебречь и, обозначив интеграл в правой части формулы (573) за γ_{ij} , для γ_{ii} имеем

$$\gamma_{ii} = \frac{1}{(\xi_i v_2)^4 \alpha \left[n_i^2 + \left(\frac{\alpha}{v_2 \xi_i} \right)^2 \right]^2 - 4\beta_i^2 n_i^2 \left(\frac{\alpha}{v_2 \xi_i} \right)^2} + \frac{\left(\frac{\alpha}{v_2 \xi_i} \right)^2 + n_i^2 - 2n_i^2 \beta_i^2 - 2n_i \beta_i^2}{4(\xi_i v_2)^5 \beta_i n_i^3 \left[\left(\frac{\alpha}{v_2 \xi_i} \right)^2 + n_i^2 - 2n_i \beta_i^2 \right] + n_i \beta_i (1 - \beta_i^2)}, \quad (574)$$

и отсюда на основании формул (563), (573), (574) для среднего квадрата радиальных перемещений получим

$$\omega^2(r) = \sum_{i=1}^{\infty} K_{S_i S_j}(0) R_i^2(\xi_i r). \quad (575)$$

Аналогичные формулы получаются для средних квадратов тангенциального и радиального напряжений. Следует заметить, что сходимость ряда (575), а также рядов, представляющих средние квадраты перемещений и напряжений, ухудшится при увеличении $d = b/a$. На рис. 42 приведены графики значений $|\bar{\sigma}_\theta|$ в зависимости от величины d , причем сплошные линии соответствуют давлению на внешнюю поверхность, а штриховые на внутреннюю. Кривые 1 определяют $|\bar{\sigma}_\theta|$ при $r = a$, а кривые 2 при $r = b$. В расчетах полагали $E = 1960 \text{ Н/м}^2$; $\beta_i = 0,05$; $\nu = 0,33$; $\alpha = 1$; $b = 0,75 \text{ м}$. Величина d варьировалась в пределах $1 \leq d \leq 3$. При $d = 1,25$ для получения точности 10^{-3} требовалось взять четыре члена. Для практических приложений такое решение можно считать точным.

Из приведенных графиков видно, что для обоих случаев нагружения $|\bar{\sigma}_\theta|$ при $r = a$ с увеличением d сначала возрастает, а затем для внутреннего давления становится очень малым. При давлении на внешнюю поверхность $|\bar{\sigma}_\theta|$ в точке $r = a$ с увеличением d достигает весьма больших значений, что соответствует результатам, приведенным в работе Сузуки [76] для нестационарного нагружения боковых поверхностей цилиндра.

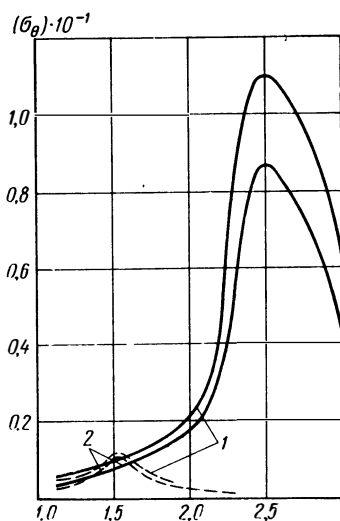


Рис. 42. Зависимость модуля тангенциального напряжения от величины отношения b/a

Г л а в а VIII
 К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫРАБОТОК
 В ГОРНОМ МАССИВЕ¹

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим однородное, изотропное, упругое тело, которое содержит отверстие в форме трехосного эллипсоида с полуосями a, b, c ($a \geq b \geq c$). Выберем в качестве центра прямоугольной, прямолинейной системы координат центр эллипсоида, а оси системы координат направим по осям эллипсоида, как показано на рис. 43. Поверхность эллипсоида считаем свободной от внешних нагрузок. Предположим, что на бесконечности тело подвергается линейно зависящим от координат напряжением, чьи главные оси параллельны осям координат, т. е.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 + \sigma_{11}x + \sigma_{12}y + \sigma_{13}z; & \sigma_y &= \sigma_2 + \sigma_{21}x + \sigma_{22}y + \sigma_{23}z; \\ \sigma_z &= \sigma_3 + \sigma_{31}x + \sigma_{32}y + \sigma_{33}z; & \tau_{xy} &= \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \end{aligned} \quad (576)$$

Здесь σ_i и σ_{ij} — заданные постоянные.

Математически, при отсутствии объемных сил, задача сводится к определению во внешности эллипсоида поля перемещений $\bar{U}(u, v, w)$, удовлетворяющего уравнениям Лямэ

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\gamma} \text{grad } \theta = 0, \quad \theta = \text{div } \vec{u}, \quad (577)$$

и такого, что поле напряжений, связанное с ним формулами

$$\sigma_x = \frac{2\gamma\mu}{1-2\gamma} \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \dots, \quad (578)$$

удовлетворяет на бесконечности условиям (576), а на поверхности эллипсоида не создает касательных и нормальных напряжений.

Постановка и решение этой задачи представляет интерес, по крайней мере, для следующих приложений: а) растяжение и изгиб балок или пластин с эллипсоидальной внутренней полостью; б) равновесие горного массива с эллипсоидальной выработкой; в) хрупкое разрушение тел с плоскими трещинами, имеющими в плане форму эллипса; г) стоксово движение эллипсоидального пузыря в вязкой жидкости.

¹ Эта глава основана на работах [60, 99, 100].

В 1949 г. М. А. Садовский и Е. Штернберг [138] решили указанную задачу при $\sigma_{ij} = 0$ в функциях Лямэ нулевой, первой и второй степени [62]. Решение задач было сведено к системе из пяти линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов.

В частном случае сплющенного эллипсоида — щели (когда $c = 0$) решение этой задачи значительно упрощается, если использовать результаты исследований А. И. Лурье [52] и Л. А. Галина [20] (см. книгу [23]) по теории потенциала. Следует отметить также работу М. К. Кассира и Г. С. Си [128], в которой получены результаты, аналогичные результатам Л. А. Галина [20]. Независимо от работ [20, 52] А. Е. Грин и И. Н. Снеддон [123] дали решение задачи о растяжении упругого тела с плоской трещиной эллиптической формы в плане, используя математическую аналогию этой задачи с проблемой обтекания плоской эллиптической пластины несжимаемой идеальной жидкостью. Решение этой задачи хорошо известно [130]. Д. Р. Ирвин [126] вычислил коэффициент интенсивности напряжений в задаче Д. Е. Грина к И. Н. Снеддона, используя их решение.

† В дальнейшем решаем задачу (576) в предположении, что $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Решение общей задачи (576) получается суперпозицией полученного ниже решения [99] с решением М. А. Садовского и Е. Штернберга*.

§ 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Используем [149] эллипсоидальные координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, причем в дальнейшем предполагаем строгую упорядоченность полуосей от большей к меньшей (рис. 43):

$$x = RmS_1S_2S_3, \quad y = -\frac{Rm}{R'}c_1c_2c_3, \quad z = \frac{im}{RR'}d_1d_2d_3. \quad (579)$$

Здесь введены следующие обозначения [146]:

$$S_1 = \frac{1}{R \operatorname{sn} \alpha_1}, \quad S_2 = \frac{1}{\operatorname{dn}(\alpha_2, R')}, \quad S_3 = \operatorname{sn} \alpha_3,$$

$$c_1 = \frac{\operatorname{dn} \alpha_1}{iR \operatorname{sn} \alpha_1}, \quad c_2 = -\frac{iR' \operatorname{sn}(\alpha_2, R')}{\operatorname{dn}(\alpha_2, R')}, \quad c_3 = \operatorname{cn} \alpha_3,$$

$$d_1 = \frac{\operatorname{cn} \alpha_1}{i \operatorname{sn} \alpha_1}, \quad d_2 = \frac{R' \operatorname{cn}(\alpha_2, R')}{\operatorname{dn}(\alpha_2, R')}, \quad d_3 = \operatorname{dn} \alpha_3,$$

* В связи с этим следует упомянуть выполненные приблизительно одновременно с [99] исследования П. А. Кунина и В. И. Подильчука, которые независимо предложили свои методы решения аналогичного класса трехмерных задач. Однако указанные авторы, по существу, ограничились чисто методологической стороной вопроса, не заботясь о каких-либо приложениях и практических рекомендациях.

$$m = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad R = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}, \quad R' = \sqrt{1 - R^2},$$

$$\beta_1 = \alpha_1 + iK', \quad \beta_2 = K + i\alpha_2, \quad \beta_3 = \alpha_3,$$

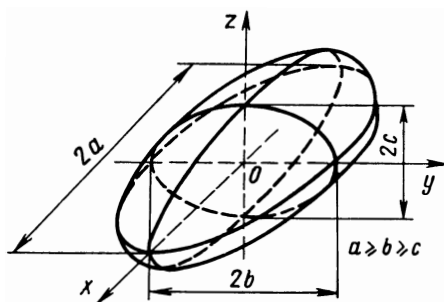
$$S_j = \operatorname{sn} \beta_j, \quad c_j = \operatorname{cn} \beta_j, \quad d_j = \operatorname{dn} \beta_j \quad (j = 1, 2, 3), \quad (580)$$

где $\operatorname{sn} \alpha$, $\operatorname{cn} \alpha$, $\operatorname{dn} \alpha$ — эллиптические функции Якоби, соответствующие модулю R ; $\operatorname{sn}(\alpha, R')$, $\operatorname{cn}(\alpha, R')$, $\operatorname{dn}(\alpha, R')$ — эллиптические функции Якоби, соответствующие модулю; $4K$ и $2iK'$ — действительный и мнимый периоды функций $\operatorname{sn} \beta$.

Из формул (579) легко получить

$$\frac{x^2}{m^2 S_j^2} - \frac{y^2}{m^2 c_j^2} - \frac{R^2 z^2}{m^2 d_j^2} = 1 \quad (j = 1, 2, 3). \quad (581)$$

Рис. 43. Выемка в форме эллипсоида в бесконечном пространстве



Отсюда видно, что координатные поверхности $\alpha_j = \operatorname{const}$ представляют ортогональное семейство эллипсоидов, однополостных и двуполостных гиперboloидов. Преобразование (579) отображает взаимно-однозначно параллелепипед ($0 < \alpha_1 \leq K$, $0 \leq \alpha_2 \leq K'$, $0 \leq \alpha_3 \leq K$) пространства $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ на первый октант ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) пространства xyz . Если α_1^0 выбрать так, что

$$S_1^0 = \operatorname{sn}(\alpha_1^0 = ik') = \frac{1}{R \operatorname{sn} \alpha_1^0} = \frac{a}{m}, \quad (582)$$

то из формул (581) при $j = 1$ получаем уравнение эллипсоида с полуосями a, b, c . Если $\alpha_1 \rightarrow 0$, то $(x, y, z) \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что внешность нашего эллипсоида в новой системе координат отображается на область $0 < \alpha_1 \leq \alpha_1^0$, где α_1^0 определяется формулой (582).

Дифференциальные соотношения по x, y, z нетрудно привести к новым координатам при помощи коэффициентов Гауссовой квадратичной формы:

$$ds^2 = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{d\alpha_j}{h_j} \right)^2. \quad (583)$$

Здесь

$$h_1 = \frac{1}{Rmq_2q_3}, \quad h_2 = \frac{1}{Rmq_1q_3}, \quad h_3 = \frac{1}{Rmq_1q_2},$$

$$q_1^2 = s_2^2 - s_3^2, \quad q_2^2 = s_3^2 - s_1^2, \quad q_3^2 = s_1^2 - s_2^2. \quad (584)$$

В частности, оператор Лапласа можно записать так:

$$\Delta\varphi = Rmh_1h_2h_3 \sum_{j=1}^3 q_j^2 \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_j^2}. \quad (585)$$

Используем общие решения уравнений Ляме (577) в форме Буссинеска—Папковича—Нейбера [21, 53]:

$$\begin{aligned} a) \quad 2\vec{\mu}\vec{u} &= x \operatorname{grad} X - (3 - 4\gamma) X \operatorname{grad} x; \\ b) \quad 2\vec{\mu}\vec{u} &= y \operatorname{grad} Y - (3 - 4\gamma) Y \operatorname{grad} y; \\ c) \quad 2\vec{\mu}\vec{u} &= z \operatorname{grad} Z - (3 - 4\gamma) Z \operatorname{grad} z; \\ d) \quad 2\vec{\mu}\vec{u} &= \operatorname{grad} F. \end{aligned} \quad (586)$$

Здесь X, Y, Z, F — произвольные, гармонические во внешности эллипсоида функции.

При помощи формул (578), (584) и (586) можно получить следующие представления компонент тензора напряжения τ_{ij} в эллипсоидальной системе координат.

Случай a :

$$\begin{aligned} \tau_{11} = & -\frac{s_1s_2s_3}{Rmq_3^2q_3^2} \frac{\partial^2 X}{\partial\alpha_1^2} + \frac{c_1d_1s_2s_2}{Rmq_3^2q_3^2} \left[s_1^2 \left(\frac{1}{q_3^2} - \frac{1}{q_2^2} \right) + 2 \right] \frac{\partial X}{\partial\alpha_1} - \\ & - \frac{s_1s_2s_3s_2c_2d_2}{Rmq_1^2q_3^2} i \frac{\partial X}{\partial\alpha_2} - \frac{s_1s_2s_3s_3c_3d_3}{Rmq_1^2q_2^2} \frac{\partial X}{\partial\alpha_2} + \\ & + 2\gamma \left(-\frac{c_1d_1s_2s_3}{Rmq_3^2q_3^2} \frac{\partial X}{\partial\alpha_1} - \frac{s_1c_2d_2s_3}{Rmq_1^2q_3^2} i \frac{\partial X}{\partial\alpha_2} - \frac{s_1s_2c_3d_3}{Rmq_1^2q_2^2} \frac{\partial X}{\partial\alpha_2} \right), \end{aligned} \quad (587)$$

$$\begin{aligned} \tau_{12} = & \frac{s_1s_2s_3}{Rmq_1q_2q_3^2} i \frac{\partial^2 X}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} - \frac{s_1s_2s_3s_1c_1d_1}{Rmq_1q_2d_3^2} i \frac{\partial X}{\partial\alpha_2} - \\ & - \frac{s_1s_2s_3s_2c_2d_2}{Rmq_1q_2q_3^2} \frac{\partial X}{\partial\alpha_1} + (1 - 2\gamma) \frac{s_1c_2d_2s_3}{Rmq_1q_2q_3^2} \frac{\partial X}{\partial\alpha_2} - \\ & - (1 - 2\gamma) \frac{c_1d_1s_2s_3}{Rmq_1q_2q_3^2} i \frac{\partial X}{\partial\alpha_2}, \dots \end{aligned}$$

Случай b :

$$\begin{aligned} \tau_{11} = & \frac{c_1c_2c_3}{RR'mq_3^2q_3^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial\alpha_1^2} + \frac{s_1d_1c_2c_3}{RR'mq_3^2q_3^2} \left[c_1^2 \left(\frac{1}{q_3^2} - \frac{1}{q_2^2} \right) + 2 \right] \frac{\partial Y}{\partial\alpha_1} + \\ & + \frac{c_1c_2c_3s_3c_2d_2}{RR'mq_1^2q_3^2} i \frac{\partial Y}{\partial\alpha_2} + \frac{c_1c_2c_3s_3c_3d_3}{RR'mq_2^2q_3^2} \frac{\partial Y}{\partial\alpha_3} + \\ & + 2\gamma \left(-\frac{s_1d_1c_2c_3}{RR'mq_3^2d_3^2} \frac{\partial Y}{\partial\alpha_1} - \frac{c_1s_2d_2c_3}{RR'mq_1^2q_3^2} i \frac{\partial Y}{\partial\alpha_2} + \right. \\ & \left. + \frac{c_1c_2s_3d_3}{RR'mq_1^2q_2^2} \frac{\partial Y}{\partial\alpha_3} \right), \end{aligned} \quad (588)$$

$$\begin{aligned} \tau_{12} = & -\frac{c_1 c_2 c_3}{RR' m q_1 q_2 q_3^2} i \frac{\partial^2 Y}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{c_1 c_2 c_3 s_1 c_1 d_1}{RR' m q_1 q_2 q_3^4} i \frac{\partial Y}{\partial \alpha_2} + \\ & + \frac{c_1 c_2 c_3 s_2 c_2 d_2}{RR' m q_1 q_2 q_3^4} \frac{\partial Y}{\partial \alpha_2} + (1 - 2\gamma) \frac{c_1 s_2 d_2 c_3}{RR' m q_1 q_2 q_3^2} \frac{\partial Y}{\partial \alpha_1} - \\ & - (1 - 2\gamma) \frac{s_1 d_1 c_2 c_3}{RR' m q_1 q_2 q_3^2} i \frac{\partial Y}{\partial \alpha_2}, \dots \end{aligned}$$

Случай *c*:

$$\begin{aligned} \tau_{11} = & -\frac{d_1 d_2 d_3}{R^3 R' m q_2^2 q_3^2} i \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_1^2} + \frac{s_1 c_1 d_2 d_3}{R^3 R' m q_2^2 q_3^2} \left[d_1' \left(\frac{1}{q_3^2} - \frac{1}{q_2^2} \right) - 2R^2 \right] i \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} + \\ & + \frac{d_1 d_2 d_3 s_2 c_2 d_2}{R^3 R' m q_1^2 q_3^4} \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} - \frac{d_1 d_2 d_3 s_3 c_3 d_3}{R^3 R' m q_1^4 q_2^2} i \frac{\partial z}{\partial \alpha_3} + \\ & + 2\gamma \left(\frac{s_1 c_1 d_2 d_3}{RR' m q_2^2 q_3^2} i \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} - \frac{d_1 s_2 c_2 d_3}{RR' m q_1^2 q_3^2} \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} - \frac{d_1 d_2 s_3 c_3}{RR' m q_1^2 q_2^2} i \frac{\partial z}{\partial \alpha_3} \right), \\ \tau_{12} = & -\frac{d_1 d_2 d_3}{R^3 R' m q_1 q_2 q_3^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \\ & + \frac{d_1 d_2 d_3 c_1 s_1 d_1}{R^3 R' m q_1 q_2 q_3^4} \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} - \frac{d_1 d_2 d_3 s_2 c_2 d_2}{R^3 R' m q_1 q_2 q_3^4} i \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} - \\ & - (1 - 2\gamma) \left[\frac{d_1 s_2 c_2 d_3}{RR' m q_1 q_2 q_3^2} \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} - \frac{s_1 c_1 d_2 d_3}{RR' m q_1 q_2 q_3^2} \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} \right], \dots \quad (589) \end{aligned}$$

Случай *d*:

$$\begin{aligned} \tau_{11} = & -\frac{1}{R^2 m^2 q_3^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_1^2} + \frac{s_1 c_1 d_1}{R^2 m^2 q_2^2 q_3^2} \left(\frac{1}{q_3^2} - \frac{1}{q_2^2} \right) \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} - \\ & - \frac{s_2 c_2 d_2}{R^2 m^2 q_1^2 q_3^4} i \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_2^2} - \frac{s_3 c_3 d_3}{R^2 m^2 q_1^2 q_2^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_3^2}, \\ \tau_{12} = & \frac{1}{R^2 m^2 q_1 q_2 q_3^2} i \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{s_2 c_2 d_2}{R^2 m^2 q_1 q_2 q_3^4} \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} - \\ & - \frac{s_1 c_1 d_1}{R^2 m^2 q_1 q_2 q_3^4} i \frac{\partial F}{\partial \alpha_2}, \dots \quad (590) \end{aligned}$$

Здесь приведены только компоненты напряжений τ_{11} и τ_{12} , другие компоненты напряжений получаются из них круговой заменой индексов у функций *s*, *c*, *d*, *q* и заменой знаков частного дифференцирования по следующей схеме:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \rightarrow (-i) \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \rightarrow i \frac{\partial}{\partial \alpha_3}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha_1}$$

(здесь $\bar{}$ и в дальнейшем $\ll M-N \gg$ означает *M* заменить на *N*).
Функции *X*, *Y*, *Z*, *F* удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta \varphi = 0$, решение которого имеет вид [146]

$$\varphi = \prod_{j=1}^3 u_j(\beta_j). \quad (591)$$

Здесь каждая функция u_j (β_j) представляет собой решение уравнения Ляме:

$$\frac{d^2 u_j}{d\beta_j^2} = [n(n+1)R^2 s_j^2 - p(1+R^2)] u_j. \quad (592)$$

Каждому целому n соответствует $2n+1$ значений p , при которых уравнение (592) имеет периодическое решение. Обозначим это решение — функцию Ляме первого рода степени n и типа p — через $\lambda_p^n(\alpha_i)$ (связь α_i с β_i дана формулами (580)). Другое линейно-независимое с этим решение уравнения (592) — функцию Ляме второго рода степени n — можно получить известной квадратурой

$$\Lambda_p^n(\alpha_i) = \lambda_p^n(\alpha_i) \int_0^{\alpha_i} [\lambda_p^n(\tau)]^{-2} d\tau. \quad (593)$$

Поле напряжений (576) создает на поверхности эллипсоида следующие напряжения: при $\alpha = \alpha_1^0$

$$\tau_{11} = -\frac{1}{(R')^2 q_1^2 q_2^2 q_3^2} [(R')^2 \sigma_x c_1^2 d_1^2 s_2^2 s_3^2 + \sigma_y s_1^2 d_1^2 c_2^2 c_3^2 - \sigma_z s_1^2 c_1^2 d_2^2 d_3^2]; \quad (594)$$

$$\tau_{12} = -\frac{s_1 c_1 d_1 s_2 c_2 d_2}{(R')^2 q_1 q_2 q_3^2} [(R')^2 \sigma_x s_3^2 + \sigma_y c_3^2 - \sigma_z d_3^2], \dots,$$

где σ_x , σ_y , σ_z определены формулами (576) и (579). Остальные компоненты напряжений получаются круговой заменой индексов.

Будем искать поле напряжений, исчезающих на бесконечности и удовлетворяющих с обратным знаком граничному условию (594). Наложение этого поля и напряжений (576) дает искомое распределение напряжений.

Указанное поле будем строить в виде линейной комбинации основных полей напряжений, каждое из которых отвечает одной гармонической функции X , Y , Z или F в общем решении. Согласно формулам (587)—(590) и (594) основные напряжения симметричны по переменным α_2 , α_3 , кроме того, они должны быть периодичны по этим переменным в силу выбора системы координат. Поэтому гармоническая функция в формулах (587)—(590) должна иметь вид

$$U_p^n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \lambda_p^n(\alpha_2) \lambda_p^n(\alpha_3) [b_1 \lambda_p^n(\alpha_1) + B_1 \lambda_p^n].$$

Согласно условию $r_{ij} \rightarrow 0$ при $\alpha_1 \rightarrow 0$, получаем, что $b_1 = 0$. Поэтому будем использовать только такие гармонические функции:

$$U_p^n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \lambda_p^n(\alpha_1) \lambda_p^n(\alpha_2) \lambda_p^n(\alpha_3). \quad (595)$$

Граничным условиям (594) можно удовлетворить, если в решениях вида a , b , c использовать функции Ляме степени 0 и 2, а в ре-

шениях вида (1) — функции Ляме степени 1 и 3. Напомним, что в задаче Садовского и Штернберга в решениях вида (а), (в), (с) были использованы функции Ляме первой степени, а в решениях вида (d) — функции Ляме степени 0 и 2.

Таким образом, метод решения заключается в том, что решение задачи ищется в виде линейной комбинации функций Ляме указанной степени; коэффициенты при этих функциях должны быть выбраны так, чтобы точно удовлетворить граничным условиям (594) на поверхности эллипсоида. При этом решение задачи сводится к решению линейной алгебраической системы уравнений относительно искомых коэффициентов.

Дальнейшее упрощение решения представляется, если использовать следующее обстоятельство. Предположим, что функции X, Y, Z, F уже выбраны и при формальной замене функций Якоби

$$s \rightarrow ic, c \rightarrow d/R, d \rightarrow -iRs \quad (596)$$

заменяются на функции Y, Z, X, F соответственно, с точностью до постоянных множителей (возможно, чисто мнимых). Тогда при формальной замене (596) в формулах (587)—(590) решения (а), (b), (с), (d) переходят соответственно в решения (b), (с), (а), (d) с точностью до постоянных множителей (опять, возможно чисто мнимых). Отсюда следует, что достаточно определить основные решения в случае, когда

$$\sigma_{11} \neq 0, \sigma_{21} \neq 0, \sigma_{31} \neq 0, \text{ а остальные } \sigma_{ij} = 0, \quad (597)$$

так как, осуществляя в этих основных решениях формальную замену переменных (596), можно получить основные решения для всех остальных случаев.

§ 3. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Подставим условия (597) в формулы (576) и (594). Мы видим, что в формуле (594) для τ_{11} содержатся произведения $s_2 s_3 c_2^2 c_3^2$ и $s_2 s_3 d_2^2 d_3^2$. Поэтому будем выбирать те основные решения, которые содержат эти произведения в τ_{11} . Учитывая все предыдущие замечания, для случая (597) получаем следующий набор основных решений:

$$Y = -\frac{m}{R'} S_3 s_2 c_2 c_3 c_3; \quad Z = \frac{im}{R^2 R'} S_2 s_2 d_2 s_3 d_3;$$

$$X = mC_1^3 (\alpha_3 c_2^2 + \beta_3 d_2^2 / R^2) (\alpha_3 c_3^2 + \beta_3 d_3^2 / R^2);$$

$$X = mC_1^4 (\alpha_4 c_2^2 + \beta_4 d_2^2 / R_2) (\alpha_4 c_3^2 + \beta_4 d_3^2 / R^2);$$

$$F = Rm^2 D_1^5 s_2 (\alpha_5 c_2^2 + \beta_5 d_2^2 / R^2) s_3 (\alpha_5 c_3^2 + \beta_5 d_3^2 / R^2);$$

$$F = Rm^2 D_1^6 s_2 (\alpha_6 c_2^2 + \beta_6 d_2^2 / R^2) s_3 (\alpha_6 c_3^2 + \beta_6 d_3^2 / R^2);$$

$$X = m\alpha_1; \quad F = Rm^2 S s_2 s_3. \quad (598)$$

Здесь пары постоянных α_j, β_j ($j = 3, 4, 5, 6$) связаны соотношениями

$$\alpha_j + \beta_j = 1 \quad j = 3, 4, 5, 6$$

и условиями того, что

$$(\alpha_j c^2 + \beta_j d^2/R^2), \quad j = 3, 4 \text{ и } s(\alpha_j c^2 + \beta_j d^2/R^2), \quad j = 5, 6$$

являются решениями уравнения Ляме (592). Осуществив необходимые выкладки, получаем для них следующие значения:

$$\begin{aligned} \alpha_{3,4} &= \frac{1}{3R^{12}} \{1 + R^{12} \pm \sqrt{1 - R^{12} + R^{14}}\}; \\ \alpha_{5,6} &= \frac{1}{5R^{12}} \{1 + 2R^{12} \pm \sqrt{1 - R^{12} + 4R^{14}}\}. \end{aligned} \quad (599)$$

Большими буквами обозначены функции Ляме второго рода, которые легко вычисляются интегрированием

$$\begin{aligned} S &= s_1 \int_0^{\alpha_1} \frac{d\tau}{s_1^2(\tau)} = s_1 [\alpha_1 - E(\alpha)]; \\ C &= c_1 \int_0^{\alpha_1} \frac{d\tau}{c_1^2(\tau)} = c_1 \left[\alpha_1 - E(\alpha_1) \frac{1}{R^{12}} \right] + \frac{d}{R^2 s_1}; \\ D &= d_1 \int_0^{\alpha_1} \frac{d\tau}{d_1^2(\tau)} = \frac{1}{R^{12}} \left[d_1 E(\alpha_1) - \frac{c_1}{s_1} \right]; \\ S_1 &= c_1 d_1 \int_0^{\alpha_1} \frac{d\tau}{c_1^2(\tau) d_1^2(\tau)} = \frac{1}{R^{14}} \left\{ c_1 d_1 [R^{12} \alpha_1 - (1 + R^2) E(\alpha_1)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d_1^2 + R^2 c_1^2}{s_1} \right\}; \\ S_2 &= s_1 d_1 \int_0^{\alpha_1} \frac{d\tau}{s_1^2(\tau) d_1^2(\tau)} = s_1 d_1 \left[\alpha_1 - \left(1 - \frac{R^2}{R^{12}}\right) E(\alpha_1) \right] - \frac{R^2 c}{R^{12}}; \\ S_3 &= s_1 c_1 \int_0^{\alpha_1} \frac{d\tau}{s_1^2(\tau) c_1^2(\tau)} = s_1 c_1 \left[2\alpha_1 - \left(1 + \frac{1}{R^{12}}\right) E(\alpha_1) \right] + \frac{d_1}{R^{12}}; \end{aligned} \quad (600)$$

$$\begin{aligned} C_{1,4}^{3,4} &= (\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2) \int_0^{\alpha_1} \frac{d\tau}{(\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)^2} = \\ &= -\frac{3R^2(\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)}{2R^{12}(\alpha - \beta/R^2)} \left[\alpha_1 + \frac{1}{2R^2 + \beta} (E(\alpha_1) - \alpha_1) \right] - \frac{c_1 d_1}{s_1}, \\ &\quad \alpha = \alpha_{3,4}; \quad \beta = \beta_{3,4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1^{5,6} &= s_1 (\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2) \int_0^{\alpha_1} \frac{d\tau}{s_1^2(\tau) (\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)^2} = \\
&= \frac{5R^2}{2R^{12} (\beta^2/R^2 - \alpha^2 R^2)} \{s_1 (\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2) \times \\
&\times \{R^2 \alpha_1 + [3(\alpha R^2 + \beta) - 2(1 + R^2)] [\alpha_1 - E(\alpha_1)]\} - c_1 d_1\}, \\
E(\alpha_1) &= \int_0^{\alpha_1} dn^2 \tau d\tau. \\
\alpha &= \alpha_{5,6}; \quad \beta = \beta_{5,6}.
\end{aligned}$$

Решение 1:

$$\begin{aligned}
\tau'_{11} &= \frac{s_3 s_2 s_3}{R (R')^2 c_1} \left\{ \frac{c_2^2 c_3^2}{q_2^2 q_3^2} d_1^2 [2s_1^2 + 4\gamma (c_1^2 - s_1^2)] + \right. \\
&\quad \left. + 2\gamma (s_1^2 + c_1^2) (R^2 c_1^2 - d_1^2) \right\} + \\
&\quad + \frac{c_1 d_1 s_2 s_3 c_2^2 c_3^2}{R (R')^2 q_2^2 q_3^2} \left[\frac{1}{q_2^2} - \frac{1}{q_3^2} - \frac{2 - 2\gamma}{c_1^2} \right], \\
\tau'_{22} &= \frac{s_3 s_2 s_3}{R (R')^2 c_1} \left\{ \frac{c_1^2 c_3^2}{q_1^2 q_3^2} d_2^2 [2s_2^2 + 4\gamma (c_2^2 - s_2^2)] + \right. \\
&\quad \left. + 2\gamma (s_2^2 + c_2^2) (R^2 c_2^2 - d_2^2) \right\} - \\
&\quad - \frac{c_1 d_1 s_2 s_3 c_2^2 c_3^2}{R (R')^2 q_2^2 q_3^2} \left[\frac{1}{q_3^2} + \frac{2\gamma}{c_1^2} \right], \\
\tau'_{33} &= \frac{s_3 s_2 s_3}{R (R')^2 c} \left\{ \frac{c_1^2 c_2^2}{q_1^2 q_2^2} d_3^2 [2s_3^2 + 4\gamma (c_3^2 - s_3^2)] + \right. \\
&\quad \left. + 2\gamma (s_3^2 + c_3^2) (R^2 c_3^2 - d_3^2) \right\} + \\
&\quad + \frac{c_1 d_1 s_2 s_3 c_2^2 c_3^2}{R (R')^2 q_2^2 q_3^2} \left[\frac{1}{q_3^2} - \frac{2\gamma}{c_1^2} \right], \tag{601} \\
\tau'_{12} &= \frac{c_2 d_2 s_3 c_3^2}{R (R')^2 q_1 q_2^2 q_3^2 s_1} \left\{ s_3 d_1 [(2 - 4\gamma) s_1^2 s_2^2 + 2\gamma (s_1^2 c_2^2 + s_2^2 c_1^2)] + \right. \\
&\quad \left. + 2\gamma s_2^2 + \frac{s_1^2 c_2^2}{q_3^2} \right\}; \\
\tau'_{23} &= \frac{c_1 c_2 c_3 d_2 d_3 s_3}{R (R')^2 q_1^2 q_3} [(2 - 4\gamma) s_2^2 s_3^2 + 2\gamma (s_2^2 c_3^2 + s_3^2 c_2^2)]; \\
\tau'_{31} &= \frac{c_3 d_3 s_2 c_2^2}{R (R')^2 q_1 q_2^2 q_3 s_1} \left\{ s_3 d_1 [(2 - 4\gamma) s_1^2 s_3^2 + 2\gamma (s_1^2 c_3^2 + s_3^2 c_1^2)] + \right. \\
&\quad \left. + 2\gamma s_3^2 + \frac{s_1^2 c_3^2}{q_2^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Решение 2:

$$\begin{aligned}
 \tau_{11}^2 &= \frac{s_2 s_2 s_3}{R (R')^2 d_1} \left\{ \frac{d_2^2 d_3^2}{q_2^2 q_3^2} c_1^2 \left[-2s_1^2 - 4\gamma \frac{d_1^2 - R^2 s_1^2}{R^2} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - 2\gamma (d_1^2 - R^2 c_1^2) (d_1^2 + R^2 s_1^2) \right\} - \\
 &\quad - \frac{c_1 d_1 s_2 s_3 d_2^2 d_3^2}{R (R')^2 q_2^2 q_3^2} \left[\frac{1}{q_3^2} - \frac{1}{q_2^2} - \frac{(2-2\gamma) R^2}{d_1^2} \right], \\
 \tau_{22}^2 &= \frac{s_2 s_2 s_3}{R (R')^2 d_1} \left\{ \frac{d_1^2 d_3^2}{q_1^2 q_3^2} c_2^2 \left[-2s_2^2 - 4\gamma \frac{d_2^2 - R^2 s_2^2}{R^2} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - 2\gamma (d_2^2 - R^2 c_2^2) (d_2^2 + R^2 s_2^2) \right\} + \frac{c_1 d_1 s_2 s_3 d_2^2 d_3^2}{R^5 (R')^2 q_2^2 q_3^2} \left[\frac{1}{q_3^2} + \frac{2\gamma R^2}{d_1^2} \right]; \\
 \tau_{33}^2 &= \frac{s_2 s_2 s_3}{R (R')^2 d_1} \left\{ \frac{d_1^2 d_2^2}{q_1^2 q_2^2} c_3^2 \left[-2s_3^2 - 4\gamma \frac{d_3^2 - R^2 s_3^2}{R^2} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - 2\gamma (d_3^2 - R^2 c_3^2) (d_3^2 + R^2 s_3^2) \right\} = \frac{c_1 d_1 s_2 s_3 d_2^2 d_3^2}{R^5 (R')^2 q_2^2 q_3^2} \left[\frac{1}{q_2^2} - \frac{2\gamma R^2}{d_1^2} \right]; \\
 \tau_{12}^2 &= \frac{c_2 d_2 s_3 d_3^2}{R^3 (R')^2 q_1 q_2 q_3^2 s_1} \left\{ -S_2 c_1 [(2-4\gamma) R^2 s_1^2 s_2^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 2\gamma (s_1^2 d_2^2 + s_2^2 d_1^2)] + \frac{s_1^2 d_2^2}{R^2 q_2^2} - 2\gamma s_2^2 \right\}; \\
 \tau_{23}^2 &= \frac{d_1 d_2 d_3 c_2 c_3 s_2}{R^3 (R')^2 q_1^2 q_2 q_3} [(2-4\gamma) R^2 s_2^2 s_3^2 + 2\gamma (s_2^2 d_3^2 + s_3^2 d_2^2)]; \\
 \tau_{31}^2 &= \frac{c_3 d_3 s_2 d_2^2}{R^3 (R')^2 q_1 q_2^2 q_3 s_1} \left\{ -s_2 c_1 [(2-4\gamma) R^2 s_1^2 s_3^2 + 2\gamma (s_1^2 d_3^2 + s_3^2 d_1^2)] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{s_1^2 d_3^2}{R^2 q_2^2} - 2\gamma s_3^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Решение 3 и 4:

$$\begin{aligned}
 \tau_{11}^{3,4} &= \frac{2c_1 s_1 s_2 s_3 (\alpha c_2^2 + \beta d_2^2/R^2) \alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2}{R q_2^2 q_3^2 (\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)} c_1^2 d_1^2 \left\{ (4\gamma - 2) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{s_1^2}{\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2} \right\} + \frac{2c_1 s_1 s_2 s_3 \alpha \beta (d_1^2 - R^2 c_1^2)^2}{R^3 (\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)} \left\{ 1 - 2\gamma + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{s_1^2}{\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2} \right\} + \frac{c_1 d_1 s_1^2 s_2 s_3}{R q_2^2 q_3^2} \frac{(\alpha c_2^2 + \beta d_2^2/R^2) (\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2)}{(\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)} \times \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{q_3^2} - \frac{1}{q_2^2} + \frac{2-2\gamma}{s_1^2} \right];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{22}^{3,4} &= \frac{2c_1s_1s_2s_3}{R(\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)} \left\{ \frac{(\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)(\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2)}{q_1^2 q_3^2} \times \right. \\
&\quad \times c_2^2 d_2^2 \left[4\gamma - 2 - \frac{s_2^2}{\alpha c_2^2 + \beta d_2^2/R^2} \right] + \\
&\quad \left. + \frac{\alpha\beta(d_3^2 - R^2 c_3^2)^2}{R^2} \left[1 - 2\gamma + \frac{s_3^2}{\alpha c_2^2 + \beta d_2^2/R^2} \right] \right\} + \\
&\quad + \frac{s_1^2 c_1 d_1 s_2 s_3 (\alpha c_2^2 + \beta d_2^2/R^2)(\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2)}{R q_2^2 q_3^2 (\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)} \left[\frac{2\gamma}{s_1^2} - \frac{1}{q_2^2} \right]; \\
\tau_{33}^{3,4} &= \frac{2c_1s_1s_2s_3}{R(\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)} \left\{ \frac{(\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)(\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2)}{R q_2^2 q_3^2 (\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)} \times \right. \\
&\quad \times c_3^2 d_3^2 \left[4\gamma - 2 - \frac{s_3^2}{\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2} \right] + \\
&\quad \left. + \frac{\alpha\beta(d_3^2 - R^2 c_3^2)^2}{R^2} \left[1 - 2\gamma + \frac{s_3^2}{\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2} \right] \right\} + \\
&\quad + \frac{s_2^2 c_1 d_1 s_2 s_3 (\alpha c_2^2 + \beta d_2^2/R^2)(\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2)}{R q_2^2 q_3^2 (\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)} \left[\frac{2\gamma}{s_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \right]; \\
\tau_{12}^{3,4} &= \frac{s_3 c_2 d_2 (\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2)}{R q_1 q_2 q_3^2 (\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)} \left\{ -2C_1 c_1 d_1 [s_1^2 s_2^2 + (1 - 2\gamma) s_1^2 (\alpha c_2^2 + \right. \\
&\quad \left. + \beta d_2^2/R^2) + (1 - 2\gamma) (\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2) s_2^2] + \right. \\
&\quad \left. + \left[2s_2^2 - \frac{s_3^2 (\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2)}{q_3^2} + (1 - 2\gamma) (\alpha c_2^2 + \beta d_2^2/R^2) \right] s_1 \right\}; \\
\tau_{23}^{3,4} &= -\frac{2c_1s_1c_2d_2c_3d_3}{R q_1^2 q_2 q_3} [s_2^2 s_3^2 + (1 - 2\gamma) s_2^2 (\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2) + \\
&\quad + (1 - 2\gamma) s_3^2 (\alpha c_2^2 + \beta d_2^2/R^2)]; \\
\tau_{31}^{3,4} &= \frac{s_2 c_3 d_3 (\alpha c_2^2 + \beta d_2^2/R^2)}{R q_1 q_2^2 q_3 (\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)} \left\{ -2c_1 c_1 d_1 [s_1^2 s_3^2 + (1 - 2\gamma) s_1^2 \times \right. \\
&\quad \times (\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2) + (1 - 2\gamma) s_3^2 (\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)] + \\
&\quad \left. + s_1 \left[2s_3^2 + \frac{s_3^2 (\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2)}{q_3^2} + (1 - 2\gamma) (\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2) \right] \right\}; \\
C_1 &= c_1^{3,4}; \quad \alpha = \alpha_{3,4}; \quad \beta = \beta_{3,4}.
\end{aligned}$$

Решение 5 и 5':

$$\begin{aligned}
 \tau_{11}^5 &= \frac{2D_1 s_2 s_3}{R(\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)} \left\{ \frac{(\alpha c_3^2 + \beta d_2^2/R^2)(\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2)}{q_3^2 q_3^2} c_1^2 d_1^2 \times \right. \\
 &\times \left[2 - \frac{s_1^2}{\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2} \right] + \alpha \beta (d_1^2 - R^2 c_1^2)^2 \left[\frac{s_1^2}{\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2} + 1 \right] \Big\} + \\
 &+ \frac{c_1 d_1 s_2 s_3 (\alpha c_2^2 + \beta d_2^2/R^2)(\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2)}{R q_3^2 q_3^2 (\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)} \left(\frac{1}{q_3^2} - \frac{1}{q_2^2} \right), \\
 \tau_{22}^5 &= \frac{2D_1 s_2 s_3}{R(\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)} \left\{ \frac{(\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)(\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2)}{q_1^2 q_3^2} \times \right. \\
 &\times c_2^2 d_2^2 \left[2 - \frac{s_2^2}{\alpha c_2^2 + \beta d_2^2/R^2} \right] + \alpha \beta (d_2^2 - R^2 c_2^2)^2 \left[\frac{s_2^2}{\alpha c_2^2 + \beta d_2^2/R^2} + 1 \right] \Big\} - \\
 &- \frac{c_1 d_1 s_2 s_3 (\alpha c_2^2 + \beta d_2^2/R^2)(\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2)}{R q_3^2 q_3^2 (\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)}, \\
 \tau_{33}^5 &= \frac{2D_1 s_2 s_3}{R(\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)} \left\{ \frac{(\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)(\alpha c_2^2 + \beta d_2^2/R^2)}{q_1^2 q_2^2} \times \right. \\
 &\times c_3^2 d_3^2 \left[2 - \frac{s_3^2}{\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2} \right] + \alpha \beta (d_3^2 - R^2 c_3^2)^2 \times \\
 &\times \left[\frac{s_3^2}{\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2} + 1 \right] \Big\} + \frac{c_1 d_1 s_2 s_3 (\alpha c_2^2 + \beta d_2^2/R^2)(\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2)}{R q_2^2 q_3^2 (\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)}, \\
 \tau_{12}^5 &= \frac{s_3 c_2 d_2 (\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2)}{R q_1 q_2 q_3^2 s_1 (\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)} \left\{ 2D_1 c_1 d_1 [s_1^2 (\alpha c_2^2 + \beta d_2^2/R^2) + \right. \\
 &+ s_2^2 (\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2) - s_1^2 s_2^2] + 2s_2^2 - \frac{s_1^2 (\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2)}{q_3^2} \Big\}, \\
 \tau_{23}^5 &= \frac{2D_1 c_2 d_2 c_3 d_3}{R q_1^2 q_2 q_3} [s_3^2 (\alpha c_2^2 + \beta d_2^2/R^2) + s_2^2 (\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2) - s_2^2 s_3^2], \\
 \tau_{31}^5 &= \frac{s_2 c_3 d_3 (\alpha c_2^2 + \beta d_2^2/R^2)}{R q_1 q_2^2 q_3 s_1 (\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2)} \left\{ 2D_1 c_1 d_1 [s_1^2 (\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2) + \right. \\
 &+ s_3^2 (\alpha c_1^2 + \beta d_1^2/R^2) - s_1^2 s_3^2] + 2s_3^2 + \frac{s_1^2 (\alpha c_3^2 + \beta d_3^2/R^2)}{q_2^2} \Big\}, \\
 D_1 &= D_1^{5,6}; \quad \alpha = \alpha_{5,6}; \quad \beta = \beta_{5,6}.
 \end{aligned}$$

Решение 6:

$$\begin{aligned}\tau_{11}^6 &= \frac{c_1 d_1 s_2 s_3}{R q_2^2 q_3^2} \left[s_1^2 \left(\frac{1}{q_2^2} - \frac{1}{q_3^2} \right) + 2 - 2\gamma \right]; \quad \tau_{23}^6 = 0; \\ \tau_{22}^6 &= \frac{s_1^2 c_1 d_1 s_2 s_3}{R q_2^2 q_3^2} \left[\frac{2\gamma}{s_1^2} - \frac{1}{q_3^2} \right]; \quad \tau_{31}^6 = \frac{s_1 s_2 c_3 d_3}{R q_1 q_2^2 q_3} \left[2 - 2\gamma + \frac{s_1^2}{q_2^2} \right]; \\ \tau_3^6 &= \frac{s_1^2 c_1 d_1 s_2 s_3}{R q_2^2 q_3^2} \left[\frac{2\gamma}{s_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \right], \quad \tau_{12}^6 = \frac{s_1 c_2 d_2 s_3}{R q_1 q_2 q_3^2} \left[2 - 2\gamma - \frac{s_1^2}{q_3^2} \right].\end{aligned}$$

Решение 7:

$$\begin{aligned}\tau_{11}^7 &= \frac{c_1 d_1 s_2 s_3}{R q_2^2 q_3^2} \left(\frac{1}{q_2^2} - \frac{1}{q_3^2} \right); \quad \tau_{23}^7 = 0; \\ \tau_{22}^7 &= -\frac{c_1 d_1 s_2 s_3}{R q_2^2 q_3^2}; \quad \tau_{31}^7 = \frac{s_1 s_2 c_3 d_3}{R q_1 q_2^2 q_3}; \\ \tau_{33}^7 &= \frac{c_1 d_1 s_2 s_3}{R q_2^2 q_3^2}; \quad \tau_{12}^7 = -\frac{s_1 c_2 d_2 s_3}{R q_1 q_2 q_3^2}.\end{aligned}$$

Как уже отмечалось, в формулах (601) приведены основные решения для случая (597). Для остальных случаев основные решения получаются формальной заменой эллиптических функций (596) как в формулах (601), так и в функциях Ляме второго рода. Поэтому в формулах (601) $d_1^2 - R^2 c_1^2$ и т. д. не заменяются постоянными, так как при указанной замене переменных их значения меняются.

Итак, мы получили восемь основных решений. Постараемся теперь некоторой линейной комбинацией этих решений удовлетворить граничным условиям на поверхности эллипсоида (594), т. е. подберем константы A_1, \dots, A_7, A_5 так, чтобы было

$$\sum_{i=5, 1}^7 A_i \tau_{i,i}^7 = \tau_{i,i}^{\alpha}, \quad \text{при } \alpha = \alpha_1 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (602)$$

Это условие приводит к линейной алгебраической системе из 11 уравнений с восьмью неизвестными, среди которых семь уравнений линейно независимы. Поэтому для построения решения достаточно семь основных решений и одно решение можно отбросить; мы отбросим решение 5'.

Таким образом, при помощи (594), (601), (602) мы приходим к следующей системе линейных уравнений относительно неизвестных A_1, A_2, \dots, A_7 :

$$\begin{aligned}& \frac{1}{R^{12} c_1} [(K_1 + 1) d_1 - 2\gamma s_2 (s_1^2 + c_1^2) (d_1^2 - R^2 c_1^2)] A_1 - \\ & - \frac{1}{R^{12} d_1} [(K_2 + 1) R^2 c_1 + 2\gamma s_2 (d_1^2 - R^2 c_1^2) (d_1^2 + R^2 s_1^2)] A_2 + \\ & + \left[\left(-K_3 + \frac{s_1^2}{(\alpha_3 c_1^2 + \beta_3 d_1^2 / R^2)} \right) \frac{c_1 d_1}{(\alpha_3 c_1^2 + \beta_3 d_1^2 / R^2)} + \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2c_1^3\alpha_3\beta_3(d_1^2 - R^2c_1^2)^2}{R^2(\alpha_3c_1^2 + \beta_3d_1^2/R^2)} \left(1 - 2\gamma + \frac{s_1^2}{\alpha_3c_1^2 + \beta_3d_1^2/R^2} \right) A_3 + \\
& + \left[\left(-K_4 + \frac{s_1^2}{\alpha_4c_1^2 + \beta_4d_1^2/R^2} \right) \frac{c_1d_1}{\alpha_4c_1^2 + \beta_4d_1^2/R^2} + \right. \\
& + \frac{2c_1^4\alpha_4\beta_4(d_1^2 - R^2c_1^2)^2}{R^2(\alpha_4c_1^2 + \beta_4d_1^2/R^2)} \left(1 - 2\gamma + \frac{s_1^2}{\alpha_4c_1^2 + \beta_4d_1^2/R^2} \right) A_4 + \\
& + \left[\left(-K_5 + \frac{1}{\alpha_5c_1^2 + \beta_5d_1^2/R^2} \right) \frac{c_1d_1}{\alpha_5c_1^2 + \beta_5d_1^2/R^2} + \right. \\
& + \left. \frac{2\alpha_5\beta_5D_1^3(d_1^2 - R^2c_1^2)^2}{R^2(\alpha_5c_1^2 + \beta_5d_1^2/R^2)} \left(1 + \frac{s_1^2}{\alpha_5c_1^2 + \beta_5d_1^2/R^2} \right) \right] A_5 = \\
& = -\sigma_{21} \frac{s_1^2d_1^2}{R^{12}} + \sigma_{31} \frac{R^4}{R^{12}} s_1^3c_1^2 - \sigma_{11}s_1c_1^2d_1^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_1A_1 - K_2A_2 - R^{12}K_3A_3 - R^{12}K_4A_4 - R^{12}K_5A_5 = \\
= s_1^3c_1d_1(\sigma_{31}R^2 + \sigma_{11}R^{12} - \sigma_{21});
\end{aligned}$$

$$c_1^2A_1 - \frac{d_1^2}{R^2}A_2 + s_1^2R^{12}A_3 + s_1^2R^{12}A_4 + R^{12}A_5 = 0;$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{R^{12}} [K_1 - 1 + 2\gamma s_3d_1(s_1^2 + c_1^2)] A_1 + \alpha_3 \left\{ 1 - K_3 + \right. \\
& + (1 - 2\gamma) \left[1 - 2c_1^3s_1c_1d_1 \left[1 + \frac{s_1^2}{\alpha_3c_1^2 + \beta_3d_1^2/R^2} \right] \right\} A_3 + \\
& + \alpha_4 \left\{ 1 - K_4 + (1 - 2\gamma) \left[1 - 2c_1^4s_1c_1d_1 \left[1 + \frac{s_1^2}{\alpha_4c_1^2 + \beta_4d_1^2/R^2} \right] \right] \right\} A_4 + \\
& + \alpha_5 \left\{ -K_5 - \frac{1}{\alpha_5c_1^2 + \beta_5d_1^2/R^2} + 2D_1^5c_1d_1 \left[1 + \frac{s_1^2}{\alpha_5c_1^2 + \beta_5d_1^2/R^2} \right] \right\} A_5 = \\
& = s_1^3c_1d_1 \left(\sigma_{11} \frac{d_1^2 + R^2c_1^2}{d_1^2 - R^2c_1^2} - \frac{\sigma_{12}}{R^{12}} \right); \tag{603}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{R^{12}} [K_2 - 1 + 2\gamma s_2c_1(d_1^2 + R^2s_1^2)] A_2 + \beta_3 \left\{ 1 - K_3 + \right. \\
& + (1 - 2\gamma) \left[1 - 2c_1^3c_1s_1d_1 \left[1 + \frac{s_1^2}{\alpha_3c_1^2 + \beta_3d_1^2/R^2} \right] \right\} A_3 + \\
& + \beta_4 \left\{ 1 - K_4 + (1 - 2\gamma) \left[1 - 2c_1^4s_1c_1d_1 \left[1 + \frac{s_1^2}{\alpha_4c_1^2 + \beta_4d_1^2/R^2} \right] \right] \right\} A_4 + \\
& + \beta_5 \left\{ -K_5 - \frac{1}{\alpha_5c_1^2 + \beta_5d_1^2/R^2} 2D_1^5c_1d_1 \left[1 + \frac{s_1^2}{\alpha_5c_1^2 + \beta_5d_1^2/R^2} \right] \right\} A_5 = \\
& = s_1^3c_1d_1 \left[-\sigma_{11} \frac{R^2(s_1^2 + c_1^2)}{d_1^2 - R^2c_1^2} + \sigma_{31} \frac{R^2}{R^{12}} \right],
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{R^{12}} K_1 A_1 + \alpha_3 A_3 K_3 + \alpha_4 A_4 K_4 + \alpha_5 A_5 K_5 + \frac{(2\gamma - 2) R^2}{d_1^2 - R^2 c_1^2} A_6 =$$

$$= -s_1^3 c_1 d_1 \left[\sigma_{11} \frac{d_1^2 + R^2 s_1^2}{d_1^2 - R^2 c_1^2} - \frac{\sigma_{21}}{R^{12}} \right],$$

$$-\frac{c_1^2}{R^{12}} A_1 - \alpha_3 s_1^2 A_3 - \alpha_4 s_1^2 A_4 - \alpha_5 A_5 + \frac{R^2 s_1^2}{d_1^2 - R^2 c_1^2} A_6 + \frac{R^2}{d_1^2 - R^2 c_1^2} A_7 = 0.$$

Здесь

$$K_1 = (1 - 2\gamma) - s_3 d_1 [2s_1^2 + 4\gamma (c_1^2 - s_1^2)].$$

Здесь

$$K_2 = (1 - 2\gamma) - s_2 c_1 [2R^2 s_1^2 + 4\gamma (d_1^2 - R^2 s_1^2)];$$

$$K_3 = (2 - 2\gamma) - 2c_1^2 s_1 c_1 d_1 \left[(2 - 4\gamma) + \frac{s_1^2}{\alpha_3 c_1^2 + \beta_3 d_1^2 / R^2} \right] +$$

$$+ \frac{s_1^2}{\alpha_3 c_1^2 + \beta_3 d_1^2 / R^2}; \quad (604)$$

$$K_4 = (2 - 2\gamma) - 2c_1^4 s_1 c_1 d_1 \left[(2 - 4\gamma) + \frac{s_1^2}{\alpha_4 c_1^2 + \beta_4 d_1^2 / R^2} \right] +$$

$$+ \frac{s_1^2}{\alpha_4 c_1^2 + \beta_4 d_1^2 / R^2};$$

$$K_5 = D_1^5 c_1 d_1 \left[4 - \frac{2s_1^2}{\alpha_5 c_1^2 + \beta_5 d_1^2 / R^2} \right] + \frac{1}{\alpha_5 c_1^2 + \beta_5 d_1^2 / R^2}.$$

Окончательно решение исходной задачи (576)—(578) в напряжениях записывается следующим образом:

$$\tau_{11} = -\frac{1}{(R')^2 q_1^2 q_2^2 q_3^2} [(R')^2 \sigma_x c_1^2 d_1^2 s_2^2 s_3^2 + \sigma_y s_1^2 d_1^2 c_2^2 c_3^2 - \sigma_z s_1^2 c_1^2 d_2^2 d_3^2] +$$

$$+ \sum_{i=1}^7 A_i \tau_{11}^i. \quad (605)$$

$$\tau_{12} = -\frac{s_1 c_1 d_1 s_2 c_2 d_2}{(R')^2 q_1 q_2 q_3^2} [(R')^2 \sigma_x s_3^2 + \sigma_y c_3^2 - \sigma_z d_3^2] + \sum_{i=1}^7 A_i \tau_{12}^i, \dots,$$

где постоянные A представляют собой решение линейной системы (603). Это решение можно было бы записать при помощи формул Крамера, которые опускаем ввиду их громоздкости. Удобнее решать систему (603) непосредственно для каждого конкретного случая, применяя стандартные методы приближенных вычислений и счетно-решающие устройства.

§ 4. ПРОСТРАНСТВО С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНОЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИЗГИБА

Используем полученное решение для определения коэффициента интенсивности напряжений около эллиптической трещины, находящейся в линейном поле напряжений. Для получения эллиптической трещины (рис. 44) из эллипсоидального отверстия надо устремить к нулю меньшую полуось эллипса, или, что то же самое, устремить α_1^0 к K . Так как формулы (604) и коэффициенты системы (603) содержат эллиптические функции Якоби, удобно ввести малый параметр ε следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \operatorname{cn} \alpha_1^0 &= \varepsilon; \\ s_1 &= \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) + 0(\varepsilon^4); \\ c_1 &= \frac{R'}{iR^2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2R^{12}} \right) + 0(\varepsilon^4); \\ d_1 &= \frac{\varepsilon}{i} + 0(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (606)$$

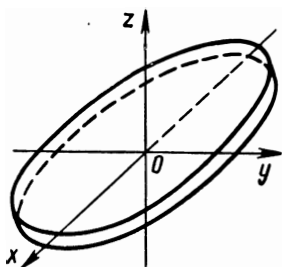


Рис. 44. Трещина эллиптической формы в плане как предельный случай сплюсненного эллипсоида

Подставим эти значения эллиптических функций в формулы (604) и в коэффициенты системы (603), получаем

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{R'}{iR^2} \left[2\alpha_1 - \left(1 + \frac{1}{R^{12}} \right) E(\alpha_1) \right] + 0(\varepsilon); \\ S_2 &= -\frac{R}{iR'} + \frac{\varepsilon}{iR} \left[\alpha_1 - \left(1 - \frac{R^2}{R^{12}} \right) E(\alpha_1) \right] + 0(\varepsilon^2); \\ C_j^i &= -\frac{2R^2}{4\beta_j R^{12}} \left[\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_j R^2 + \beta_j} (E(\alpha_1) - \alpha_1) \right] + 0(\varepsilon), \quad j = 3, 4; \\ K_1 &= 1 - 2\gamma + 0(1); \\ K_2 &= -(1 - 2\gamma) + \frac{(2 - 4\gamma) \varepsilon R'}{R^2} \left[\alpha_1 - \left(1 - \frac{R^2}{R^{12}} \right) E(\alpha_1) \right], \\ K_j &= 2 - 2\gamma - \frac{1}{\alpha_j R^{12}} + 0(\varepsilon^2), \quad j = 3, 4; \\ K_5 &= -\frac{R^2}{\alpha_5 R^{12}} + 0(\varepsilon^2); \end{aligned} \quad (607)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\gamma}{R} \left[2\alpha_1^0 - \left(1 + \frac{1}{R^{12}} \right) E(\alpha_1^0) \right] A_1 - \frac{(2-2\gamma)}{R} \times \\
& \times \left[\alpha_1^0 - \left(1 - \frac{R^2}{R^{12}} \right) E(\alpha_1^0) \right] A_2 - \frac{2R^{12}\alpha_3\beta_3}{R(\alpha_3^2 - \beta_3^2/R^2)} \times \\
& \times \left(1 - 2\gamma - \frac{1}{\alpha_3 R^{12}} \right) \left(\alpha_1^0 + \frac{1}{\alpha_3 R^2 + \beta_3} \right) [E(\alpha_1^0) - \alpha_1^0] A_3 - \\
& - \frac{2R^{12}\alpha_4\beta_4}{R(\alpha_4^2 - \beta_4^2/R^2)} \left(1 - 2\gamma - \frac{1}{\alpha_4 R^{12}} \right) \left(\alpha_1^0 + \frac{1}{\alpha_4 R^2 + \beta_4} \right) \times \\
& \times [E(\alpha_1^0) - \alpha_1^0] A_4 + a_{15}A_5 = \sigma_{31}Rm; \tag{608}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1-2\gamma}{R^{12}} A_1 + \frac{1-2\gamma}{R^{12}} A_2 - \left(2 - 2\gamma - \frac{1}{\alpha_3 R^{12}} \right) A_3 - \\
& - \left(2 - 2\gamma - \frac{1}{\alpha_4 R^{12}} \right) A_4 + \frac{R^2}{\alpha_5 R^{12}} A_5 = 0; \tag{609}
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{R^2} A_1 - \frac{\varepsilon^2}{R^2 R^{12}} A_2 - \frac{1}{R^2} A_3 - \frac{1}{R^2} A_4 - A_5 = 0; \tag{610}$$

$$-\frac{2\gamma}{R^{12}} A_1 + \frac{2\gamma}{R^{12}} A_3 + \frac{2\gamma}{R^{12}} A_4 + \frac{2R^2}{R^{12}} A_5 = 0; \tag{611}$$

$$\frac{2-4\gamma}{R^{12}} A_2 + \frac{2\gamma\beta_2}{R^{12}\alpha_2} A_3 + \frac{2\gamma\beta_4}{R^{12}\alpha_4} A_4 - \frac{2R^2\beta_5}{R^{12}\alpha_5} A_5 = 0; \tag{612}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1-2\gamma}{R^{12}} A_1 + \alpha_3 \left(2 - 2\gamma - \frac{1}{\alpha_3 R^{12}} \right) A_3 + \alpha_4 \left(2 - 2\gamma - \frac{1}{\alpha_4 R^{12}} \right) A_4 - \\
& - \frac{R^2}{R^{12}} A_5 - \frac{(2-2\gamma)R^2}{R^{12}} A_6 = 0; \tag{613}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{R^2} A_1 - \frac{\alpha_3}{R^2} A_3 - \frac{\alpha_4}{R^2} A_4 - \alpha_5 A_5 + \frac{1}{R^{12}} A_6 + \frac{R^2}{R^{12}} A_7 = 0. \tag{614}$$

Выражение для коэффициента a_{15} не приводится, так как оно не оказывает влияния на дальнейшее решение. Полагаем теперь $\varepsilon = 0$; после этого система легко решается. Из (610) и (611) следует

$$A_1 = A_3 + A_4, \quad A_5 = 0. \tag{615}$$

Затем из (612) находим

$$A_2 = -\frac{2\gamma}{2-4\gamma} \left\{ \frac{\beta_3}{\alpha_3} A_3 + \frac{\beta_4}{\alpha_4} A_4 \right\}. \tag{616}$$

Далее из (609) получаем зависимость между A_3 и A_4

$$A_4 = -\frac{1-2R^{12}+1/\alpha_3}{1-2R^{12}+1/\alpha_4} A_3; \quad (617)$$

теперь из (608) после несложных преобразований находим

$$A_3 = \frac{mR\sigma_{31}(1-2R^{12}+1/\alpha_4)}{f(1/\alpha_4-1/\alpha_3)};$$

$$A_4 = -\frac{mR\sigma_{31}(1-2R^{12}+1/\alpha_3)}{f(1/\alpha_4-1/\alpha_3)}; \quad A_5 = 0; \quad (618)$$

$$A_1 = \frac{mR\sigma_{31}}{f}; \quad A_2 = \frac{2\gamma mR^3\sigma_{31}}{(1-2\gamma)f}; \quad A_6 = 0,$$

где

$$f = \frac{4\gamma-1}{1-2\gamma} R \left\{ \alpha_1^0 + \left(\frac{R^2}{R^{12}} - 1 \right) E(\alpha_1^0) \right\}. \quad (619)$$

Постоянная A_7 не имеет значения, так как не влияет на распределение напряжений в малой окрестности контура трещины.

Формула (605) с полученными константами A_i дает распределение напряжений около контура эллиптической трещины. С целью определения коэффициента интенсивности напряжений, вычислим напряжение в плоскости трещины на ее продолжении.

Уравнение внешности эллипса в его плоскости будет $\alpha_2 = = K'(d_2 = 0)$ и в эллиптических функциях записывается так:

$$s_2 = \frac{1}{R}, \quad c_2 = \frac{R'}{iR}, \quad d_2 = 0.$$

Поэтому надо вычислить напряжение τ_{22} . Близость точки, в которой вычисляется напряжение, к точке контура трещины характеризуется тем же малым параметром ε и соотношениями (606). Подставим значения (606) и (619) в формулы (602) для τ_{22}^j ($j = 1, 2, 3, 4, 7$). Получаем

$$\tau_{22}^1 = \frac{RR'c_3^2s_3}{\varepsilon^3d_3^2} + \frac{RR'c_3^2s_3}{\varepsilon d_3^2} \left\{ -\frac{2\gamma}{R^{12}} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R^{12}} - \frac{2}{d_3^2} \right] \right\} + 0(1);$$

$$\tau_{22}^2 = \frac{(2-2\gamma)s_3}{RR'\varepsilon} + 0(1);$$

$$\tau_{22}^3 = -\frac{RR's_3(\alpha_3c_3^2 + \beta_3d_3^2/R^2)}{\varepsilon^3d_3^2} + \frac{RR's_3(\alpha_3c_3^2 + \beta_3d_3^2/R^2)}{\varepsilon d_3^2} \times$$

$$\times \left\{ 2\gamma - \frac{1}{2} \left[2 - \frac{2}{\alpha_3R^{12}} + \frac{1}{R^{12}} - \frac{2}{d_3^2} \right] \right\} + 0(1); \quad (620)$$

$$\tau_{22}^4 = -\frac{RR's_3(\alpha_4c_3^2 + \beta_4d_3^2/R^2)}{\varepsilon^3d_3^2} + \frac{RR's_3(\alpha_4c_3^2 + \beta_4d_3^2/R^2)}{\varepsilon d_3^2} \times$$

$$\times \left\{ 2\gamma - \frac{1}{2} \left[2 - \frac{2}{\alpha_4R^{12}} + \frac{1}{R^{12}} - \frac{2}{d_3^2} \right] \right\} + 0(1);$$

$$\tau_{22}^7 = -\frac{R^3R's_3}{\varepsilon^3d_3^2} - \frac{R^3R's_3}{2\varepsilon d_3^2} \left(\frac{1}{R^{12}} - \frac{2}{d_3^2} \right) + 0(1).$$

Используя значения постоянных (618), составим линейную комбинацию (605). В ней, в силу уравнений (610), (611) и (614) (при $\varepsilon = 0$) коэффициенты при $\frac{1}{\varepsilon^2}$ и $\frac{1}{R^{12}} - \frac{2}{d_3^2}$ обращаются в нуль. Получаем

$$\begin{aligned} \tau_{22} = & A_1 \left(-\frac{2\gamma R^3 m s_3 c_3^2}{R' \varepsilon d_3^2} + A_2 \frac{(2 - 2\gamma) R m s_3}{R' \varepsilon} + \right. \\ & + \frac{2\gamma R^3 R' m s_3}{\varepsilon d_3^2} \{ A_3 (\alpha_3 c_3^2 + \beta_3 d_3^2 / R^2) + A_4 (\alpha_4 c_3^2 + \beta_4 d_3^2 / R^2) \} + \\ & + \frac{R^3 R' m s_3}{\varepsilon d_3^2} \left\{ A_3 (\alpha_3 c_3^2 + \beta_3 d_3^2 / R^2) \left(\frac{1}{R^{12} \alpha_3} - 1 \right) + \right. \\ & \left. + A_4 (\alpha_4 c_3^2 + \beta_4 d_3^2 / R^2) \left(\frac{1}{R^{12} \alpha_4} - 1 \right) \right\} + 0(1) = \\ = & \frac{4\gamma - 1}{1 - 2\gamma} \frac{R^2 m s_3 \sigma_{31}}{\varepsilon R' f} + 0(1) = \frac{R R' m s_3 \sigma_{31}}{\varepsilon [R^{12} \alpha_1^0 - (R^{12} - R^2) E(\alpha_1^0)]} + 0(1). \quad (621) \end{aligned}$$

Найдем зависимость между малым параметром ε и малым расстоянием r точки от контура трещины. Осуществим приращение $(-\Delta\alpha)$ по аргументу α_1 в точке $(\alpha_1 = K, \alpha_2 = K', \alpha_3 - \text{произвольно})$ так, чтобы

$$d_1(K - \Delta\alpha) = \frac{\varepsilon}{i}$$

или, разлагая в ряд по $\Delta\alpha$ функцию d_1 , в точке $\alpha_1 = K$

$$R^2 s_1(K) c_1(K) \Delta\alpha + 0((\Delta\alpha)^3) = \frac{\varepsilon}{i}.$$

Следовательно, $\varepsilon = K' \Delta\alpha$.

Определим, какое r соответствует малому приращению $\Delta\alpha$

$$\begin{aligned} \Delta x = R m \frac{d^2 s_1(K)}{2 d \alpha_1^2} (\Delta\alpha)^2 s_2 s_3 = \frac{m R^{12}}{2 R} s_3 (\Delta\alpha)^2, \\ \Delta y = -\frac{R m}{R'} \frac{d^2 c_1(K)}{2 d \alpha_1^2} (\Delta\alpha)^2 c_2 c_3 = \frac{m R'}{2 R} c_3 (\Delta\alpha)^2. \quad (622) \end{aligned}$$

Здесь s_2 и c_2 берутся в точке $\alpha_2 = K'$ из формулы (619)

$$r^2 (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = \frac{m^2 R^{12}}{4 R^2} d_3^2 (\Delta\alpha)^4, \quad r = \frac{m R'}{2 R} d_3 (\Delta\alpha)^2.$$

Итак, получаем

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2r R R'}{m d_3}}. \quad (623)$$

На контуре трещины

$$x = \frac{m}{R} s_3, \quad y = \frac{R'm}{R} c_3, \quad d_3^2 = c_3^2 + R^{12} s_3^2 = \\ = \frac{R^2 R^{12}}{m^2} \left(\frac{y^2}{R^{14}} + x^2 \right), \quad \varepsilon = \sqrt{2r} \left(x^2 + \frac{y^2}{R^{14}} \right)^{-1/4}. \quad (624)$$

Подставим эти значения ε и s_3 в формулу (621), находим

$$\tau_{22} = \frac{R^2 R' x \sigma_{31}}{\sqrt{2r} [R^{12} \alpha_1^0 - (R^{12} - R^2) E(\alpha_1^0)]} \left(x^2 + \frac{y^2}{R^{14}} \right)^{1/4} + 0(1). \quad (625)$$

Выразим x и y на контуре трещины через полярный угол β , отсчитываемый от оси X . Тогда $x = a \cos \beta$, $y = b \sin \beta$. Так как смещение $\Delta\alpha$ в силу ортогональности системы координат взято по нормам к контуру трещины, то коэффициент интенсивности напряжений K_{Ia} связан с постоянной σ_{31} следующей формулой

$$K_{Ia} = \sigma_{31} a \sqrt{a\pi} \frac{\sqrt{R'} R^2 \cos \beta}{[\alpha_1^0 R'^2 + (R^2 - R'^2) E(\alpha_1^0)]} \left(\frac{b^2}{a^2} \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \right)^{1/4}. \quad (626)$$

Напомним, что здесь σ_1^0 и $E(\alpha_1^0)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Коэффициент интенсивности напряжений для случая, когда ось изгибающего момента совпадает с большой полуосью эллипса, можно получить, используя формальное преобразование (596) к формулам (601) и коэффициентам линейной системы (603), а затем переходя к аналогичным пределам с учетом формул (606) и (619). Однако его можно получить путем формальной замены полуосей и следующих перестановок:

$$a \rightarrow b, \quad \beta \rightarrow \frac{\pi}{2} - \beta, \quad R \rightarrow \frac{iR}{R'}, \\ R' \rightarrow \frac{1}{R'}, \quad \alpha_1^0 \rightarrow R' \alpha, \quad E(\alpha_1^0) \rightarrow E/R', \quad (627)$$

$$\sigma_{31} \rightarrow \sigma_{32}$$

в формуле (626). Прделав это, получим

$$K_{Ib} = \frac{\sigma_{32} b \sqrt{b\pi} R^2}{(1 + R^2) E - \alpha R'^2} \sin \beta \left(\frac{b^2}{a^2} \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \right)^{1/4}. \quad (628)$$

Рассмотрим некоторые предельные частные случаи полученных формул.

Если учесть разложения полных эллиптических интегралов

$$E = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{R^2}{4} + O(R^3) \right], \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{R^2}{4} + O(R^3) \right], \quad (629)$$

то из формул (626) и (628) легко получается значение коэффициента интенсивности напряжений для круглой трещины, находящейся в линейном поле напряжения ($b \rightarrow a$, $R \rightarrow 0$, $R' \rightarrow 1$)

$$K_I = \frac{4a\sqrt{a}}{3\sqrt{\pi}} (\sigma_{31} \cos \beta + \sigma_{32} \sin \beta). \quad (630)$$

При $a \rightarrow \infty$, $R' \rightarrow 0$ эллипс вырождается в две параллельные прямые $dR^{12} \rightarrow 0$. Поэтому из (628) мы получаем формулу для

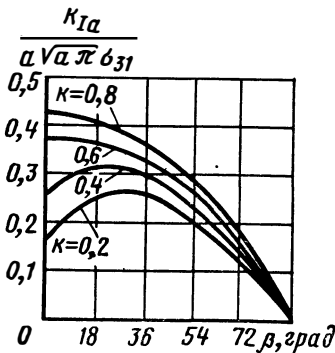


Рис. 45. Зависимость безразмерного коэффициента интенсивности напряжений на краю трещины от угла при $\sigma_{32} = 0$ (см. формулу 626)

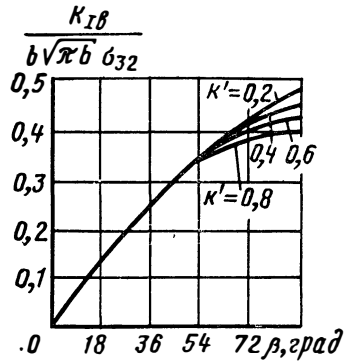


Рис. 46. Зависимость безразмерного коэффициента интенсивности напряжений на краю трещины от угла при $\sigma_{31} = 0$ (см. формулу 628)

коэффициента интенсивности напряжений около линейной плоскости трещины, находящейся в условиях плоской деформации и подверженной моменту $\sigma = \sigma_{32}y$ на бесконечности.

На рис. 45 и 46 изображены графики функций $K_{Ia}/\sigma_{31}a\sqrt{a\pi}$ и $K_{Ib}/b\sqrt{\pi b b_32}$ в зависимости от угла β при различных отношениях b/a .

§ 5. ПРОСТРАНСТВО С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНОЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСТЯЖЕНИЯ

Аналогичным методом разложения по малому параметру основных решений и коэффициентов линейной системы уравнений можно получить коэффициент интенсивности напряжений около внутренней эллиптической трещины из решения М. А. Садовского и Е. Штернберга [138]. Система линейных уравнений [138],

формула (50) при помощи соотношений (606) приводится к следующему виду:

$$\begin{bmatrix} \frac{2\gamma R^2(\alpha - E)}{R'}, & \frac{2\gamma R^2(R'^2\alpha - E)}{R'}, & -\frac{(2-2\gamma)R^2E}{R'}, & 0, & a_{15} \\ (1-2\gamma), & (1-2\gamma), & -(1-2\gamma), & 0, & a_{25} \\ \frac{1}{R^2}, & \frac{R'^2}{R^2}, & \frac{\varepsilon^2}{R^2}, & 0, & \bar{p} \\ \frac{1-2\gamma}{R^2}, & \frac{(1-2\gamma)R'^2}{R^2}, & -\frac{(1-2\gamma)\varepsilon^2}{R^2}, & 0, & -\bar{p} \\ \frac{1}{R^4}, & \frac{R'^4}{R^4}, & \frac{\varepsilon^2}{R^4}, & 1, & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R^3\sigma}{R'} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (631)$$

Здесь приведены только первые члены разложения по ε коэффициентов линейной системы. Выражения для коэффициентов a_{15} , a_{25} , a_{55} не выписаны, так как они не влияют на дальнейшее решение. Полагая $\varepsilon = 0$, тогда из третьего и четвертого уравнений легко получаем $A_5 = 0$, $A = R^{12}A_2$, а из второго уравнения $A_3 = R^2A_2$. Окончательно решение получим в виде

$$A_1 = \frac{\sigma R^{12}}{2RE}, \quad A_2 = -\frac{\sigma}{2RE}, \quad A_3 = -\frac{\sigma R}{2E}, \quad A_4 = -\frac{\sigma R^{12}}{2R^3E}. \quad (632)$$

Основные решения (607)–(611) работы [138] в случае растяжения с учетом соотношений (606) и (619) имеют следующие разложения по ε :

$$\tau_{22}^1 = -\frac{RR's_3^2}{\varepsilon^3 d_3^2} + \frac{RR's_3^2}{\varepsilon d_3^2} \left[2\gamma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2R'^2} + \frac{1}{d_3^2} \right] + 0(1);$$

$$\tau_{22}^2 = -\frac{RR'c_3^2}{\varepsilon^3 d_3^2} - \frac{RR'c_3^2}{\varepsilon d_3^2} \left[2\gamma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2R'^2} + \frac{1}{d_3^2} \right] + 0(1);$$

$$\tau_{22}^3 = -\frac{(2-2\gamma)R'}{R\varepsilon} + 0(1);$$

$$\tau_{22}^4 = -\frac{R^3R'}{\varepsilon^3 d_3^2} - \frac{R'R^3}{\varepsilon d_3^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2R'^2} - \frac{1}{d_3^2} \right] + 0(1). \quad (633)$$

Составим теперь линейную комбинацию

$$\tau_{22} = \sum_{j=1}^4 \tau_{22}^j A_j. \quad (634)$$

В силу уравнений (631) коэффициенты при $\frac{1}{2R'^2} - \frac{1}{d_3^2} + \frac{1}{2}$, $\frac{1}{\varepsilon^3}$ обращаются в нуль, поэтому получаем

$$\begin{aligned} \tau_{22} &= \frac{RR's_3^2}{\varepsilon d_3^2} 2\gamma A_1 - \frac{RR'c_3^2}{\varepsilon d_3^2} 2\gamma A_2 - \frac{(2-2\gamma)R'}{R\varepsilon} A_3 = \\ &= \frac{R'\varepsilon}{\varepsilon E d_3^2} [\gamma R'^2 s_3^2 + \gamma c_3^2 + (1-\gamma)d_3^2] = \frac{R'\varepsilon}{\varepsilon E}. \end{aligned} \quad (635)$$

Окончательно, используя формулу (624), находим

$$\tau_{22} = \frac{\sigma \sqrt{b}}{E \sqrt{2r}} \left(\sin^2 \beta + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \beta \right)^{1/4},$$

т. е. коэффициент интенсивности напряжений в данном случае

$$K_I = \frac{\sigma \sqrt{\pi b}}{E} \left(\sin^2 \beta + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \beta \right)^{1/4}. \quad (636)$$

В итоге, на основе формул (626), (628) и (636) получаем коэффициент интенсивности напряжений для эллиптической трещины, находящейся в упругом пространстве под совместным действием растягивающих напряжений и изгибающих моментов:

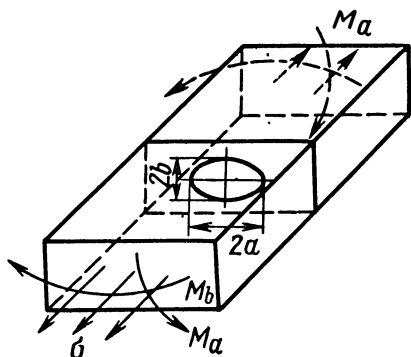


Рис. 47. Изгиб и растяжение бруса с внутренней трещиной эллиптической формы в плане

$$\begin{aligned} K_I &= \left(\frac{b^2}{a^2} \cos^2 \beta + \right. \\ &+ \left. \sin^2 \beta \right)^{1/4} \sqrt{\pi b} \left\{ \frac{\sigma}{E} + \right. \\ &+ \frac{\sigma_{31} a \cos \beta R^2}{\alpha R'^2 + E (R^2 - R'^2)} + \\ &+ \left. \frac{\sigma_{32} b \sin \beta R^2}{(1 + R^2) E - \alpha R'^2} \right\}, \end{aligned} \quad (637)$$

где a , b — полуоси эллипса ($a > b$) см. рис. 44; β — полярный угол, отсчитываемый от большей полуоси;

$$R' = \frac{b}{a}; \quad R = \sqrt{1 - R'^2};$$

$$\alpha = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-R^2x^2)}}, \quad E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-R^2x^2}{1-x^2}} dx; \quad (638)$$

σ — растягивающее напряжение, нормальное к плоскости трещины;

$$\sigma_{31} = \frac{M_b}{I_b}; \quad \sigma_{32} = \frac{M_a}{I_a};$$

M_a, M_b — действующие моменты с осями изгиба, совпадающими с полуосями a и b эллипса соответственно; I_a, I_b — моменты инерции поперечного сечения относительно оси a или b соответственно (рис. 47).

§ 6. ПРИЛОЖЕНИЕ К ГОРНОМУ ДЕЛУ

Для горного дела полученное решение представляет наибольший интерес в том случае, когда в формулах (576) отличны от нуля только коэффициенты $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{11}, \sigma_{22}$ и σ_{33} , а остальные коэффициенты равны нулю. При этом получается задача о концентрации напряжений в окрестности выработки (рис. 48), находящейся в упругом горном массиве и имеющей форму произвольного трехосного эллипсоида, одна из осей которого совпадает с направлением силы тяжести (в частности, это могут быть шаровая выемка, бесконечный туннель произвольного эллиптического поперечного сечения, сплюснутый эллипсоид, по очертанию в плане имеющий форму произвольного эллипса, и т. д.).

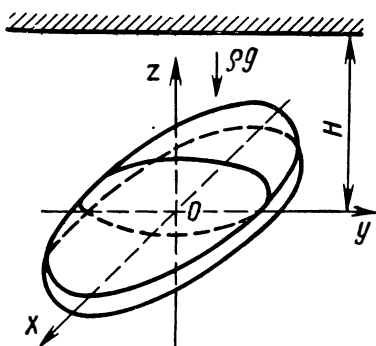


Рис. 48. Эллипсоидальная выемка в тяжелом полупространстве

Все эти проблемы с большим трудом поддаются эффективному математическому решению и поэтому, несмотря на то, что постановка их известна уже больше ста лет, их решения не были получены до сих пор, за исключением простейших частных случаев.

Для тяжелого упругого полупространства поле напряжений вдали от выработки определяется следующими формулами:

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\gamma}{(1-\gamma)} \rho g (H - z), \quad \sigma_z = -\rho g (H - z);$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \quad (639)$$

Здесь H — расстояние от центра эллипсоида до свободной поверхности; ρ — средняя плотность горного массива; g — ускорение свободного падения; γ — средний коэффициент Пуассона горного массива.

Следовательно, в формулах (576) и в полученном решении нужно брать такие значения коэффициентов:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\frac{\gamma \rho g H}{1 - \gamma}; \quad \sigma_3 = -\rho g H;$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \frac{\gamma \rho g}{1 - \gamma}; \quad \sigma_{33} = \rho g. \quad (640)$$

Дальнейший анализ полученных решений позволит дать обоснованные критерии устойчивости (и безопасности) выработок или выемок указанного типа в прочных скальных породах.

Полезные ископаемые, в особенности уголь, часто залегают в виде пластов небольшой толщины. Поэтому горные выработки часто имеют форму, близкую к плоским математическим разрезам (размеры, выработки в плане велики по сравнению с мощностью пласта). Для таких выработок условие устойчивости (или безопасности) формируется особенно просто, если обратиться к механике разрушения [99]. А именно, если коэффициент интенсивности напряжений K_I меньше K_{Ic}^* по абсолютной величине, то разрушения не происходит; как только K_I достигает величины K_{Ic}^* , происходит разрушение в некоторой окрестности той точки контура выработки, где K_I равно K_{Ic}^* по модулю.

Итак, локальное условие устойчивости (или безопасности) имеет следующий вид [99]

$$|K_I| \leq K_{Ic}^*. \quad (641)$$

Можно показать, что K_{Ic}^* равно следующей величине*:

$$K_{Ic}^* = \eta \sigma_s \sqrt{h}. \quad (642)$$

Здесь σ_s — абсолютная величина наименьшего сопротивления сдвигу в системе «пласт—порода» (это может быть пласт, порода и, чаще всего, контакт пласта с породой); h — мощность (толщина) пласта; η — безразмерный коэффициент, зависящий от внутренней структуры пласта и окружающих пород в рассматриваемой окрестности тупика выработки, а также от отношения упругих и прочностных характеристик породы пласта к окружающей. Коэффициент η по величине имеет порядок единицы.

Коэффициент интенсивности напряжений K_I вычисляется для математического разреза нулевой толщины, форма которого в плане точно соответствует контуру выработки.

Таким образом, на основе общего решения (637) и общего локального критерия устойчивости (641) нетрудно получить критерий безопасности (или критерий устойчивости) для следующих двух типов выработок.

* Учет начальных напряжений разного масштаба (в частности, внутризеренных напряжений) может существенно изменить эту оценку.

Горизонтальная выработка эллиптической формы в плане (рис. 49).

Критерий безопасности имеет вид

$$\frac{\rho g H \sqrt{\pi b}}{E} \left(\sin^2 \beta + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \beta \right)^{1/4} < \eta \sigma_s \sqrt{h}. \quad (643)$$

Условие (643) должно выполняться в любой точке контура, т. е. при любых углах β . Так как наиболее опасная точка будет,

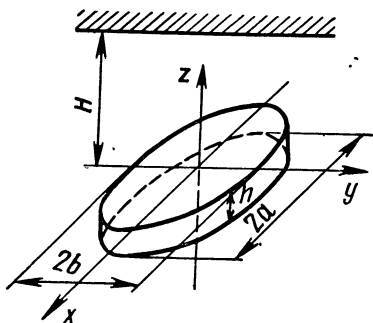


Рис. 49. Горизонтальная выработка эллиптической формы в плане

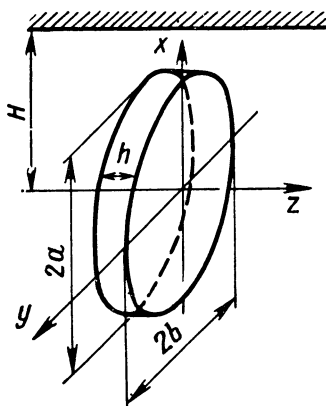


Рис. 50. Вертикальная выработка эллиптической формы в плане

очевидно, при $\beta = \pm\pi/2$, то из (643) легко получить следующее достаточное условие безопасности:

$$\rho g H \sqrt{\pi b} < \eta E \sigma_s \sqrt{h}. \quad (644)$$

Напомним, что E здесь обозначает эллиптический интеграл (638).

В частности, когда выработка имеет форму круга, будет $a = b$, $E = \pi/2$ и условие (644) принимает вид

$$2\rho g H \sqrt{\pi b} < \pi \eta \sigma_s \sqrt{h}. \quad (645)$$

Аналогично, когда выработка имеет в плане форму полосы, будет $a/b \rightarrow \infty$, $E \rightarrow 1$ и условие (644) запишется так:

$$\rho g H \sqrt{b\pi} < \eta \sigma_s \sqrt{h}. \quad (646)$$

Критерии (644)—(646) позволяют сформулировать определенные практические рекомендации по прогнозированию опасности наступления явлений обрушения выброса и горного удара.

Вертикальная выработка эллиптической формы в плане (рис. 50). Критерий безопасности имеет такой вид:

$$\frac{\gamma \rho g}{(1 - \gamma)} \sqrt{b\pi} \left(\sin^2 \beta + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \beta \right)^{1/4} \times \left[\frac{H}{E} - \frac{bR^2 \sin \beta}{(1 + R^2)E - \alpha (R')^2} \right] < \eta \sigma_s \sqrt{h}. \quad (647)$$

Наиболее опасной точкой, очевидно, является точка $\beta = \pi/2$. Поэтому достаточное условие безопасности на основании (647) будет следующим:

$$\frac{\gamma \rho g}{1-\gamma} \sqrt{b\pi} \left[\frac{H}{E} - \frac{bR^2}{(1+R^2)E - \alpha(R')^2} \right] < \eta \sigma_s \sqrt{h}. \quad (648)$$

В частности, для выработки, имеющей в плане форму круга, будет $a = b$ и $R \rightarrow 0$, так что условие (648) запишется в виде

$$\frac{2\gamma \rho g}{1-\gamma} \sqrt{\frac{b}{\pi}} \left(H - \frac{2}{3} b \right) < \eta \sigma_s \sqrt{h}. \quad (649)$$

Когда выработка имеет форму вертикальной полосы постоянной толщины h и ширины $2b$, будет $a/b \rightarrow \infty$, $E \rightarrow 1$, а условие (648) будет таким:

$$\frac{\gamma \rho g}{(1-\gamma)} \sqrt{b\pi} \left(H - \frac{b}{2} \right) < \eta \sigma_s \sqrt{h}. \quad (650)$$

Полученные точные критерии позволяют дать приближенные оценки безопасности (устойчивости) также для выработок более сложной формы. К ним относятся, например, выработки прямоугольной формы в плане, совокупность выработок такой формы и др

§ 7. УСТОЙЧИВОСТЬ ГОРНЫХ ОТКОСОВ И ОТКРЫТЫХ ВЫРАБОТОК

Для проектирования открытых выработок весьма важной является проблема выбора оптимального угла откоса, удовлетворяющего технологическим условиям и требованиям безопасности. До сих пор проблема устойчивости откосов решается на основе теории предельного состояния [73, 79], согласно которой в момент потери устойчивости некоторые сплошные области горного массива переходят в предельное состояние, определяемое законом Кулона со сцеплением. Однако на практике в большинстве случаев потеря устойчивости возникает не вследствие перехода в предельное состояние сплошных массивов, а вследствие скольжения по поверхности раздела различных областей, не находящихся в предельном состоянии. Таким образом, в более точной теории следует изучать развитие поверхностей скольжения (или трещин сдвига), причем противоположные берега трещин должны взаимодействовать согласно закону Кулона со сцеплением.

В продолжение работ [50, 100, 101] на одном важном частном случае рассмотрим точную постановку задачи о развитии поверхностей сдвига в горном массиве и некоторые приближенные оценки этого решения, позволяющие найти простые критерии устойчивости в зависимости от высоты и угла откоса, а также от физических и геометрических характеристик горного массива.

Постановка точной задачи. Рассмотрим край открытой выработки глубиной H с углом откоса α (рис. 51). Ограничимся плоской деформацией, считая, что все характеристики задачи неизменны вдоль оси z и можно ограничиться рассмотрением одного сечения массива в плоскости xy (x, y — декартовы прямоугольные координаты, ось x совпадает с дневной поверхностью, сила тяжести действует в направлении, противоположном оси y). Это ограничение не принципиально, однако оно позволяет сделать изложение более наглядным. Обычно горный массив бывает неоднородным и анизотропным; наиболее опасным и часто встречающимся случаем является тот, когда неравномерные слои с различными прочностными свойствами наклонены под некоторым углом β , меньшим, чем α (рис. 51).

Потеря устойчивости откоса происходит обычно вследствие развития поверхности сдвига, которая проходит по Σ участкам, наиболее неблагоприятным с точки зрения интенсивности горного давления и прочности прослоек (например, в тектонических трещинах или между слоями массива). Задачу о развитии поверхности сдвига решаем в следующей последовательности: вначале анализируем напряжения и деформации в массиве в отсутствие поверхности сдвига, который с учетом тектонических напряжений позволяет определить место возникновения первичного сдвига, т. е. наиболее слабое место; затем при помощи методов механики разрушения рассматриваем задачу о развитии поверхности сдвига из найденного первичного разрыва.

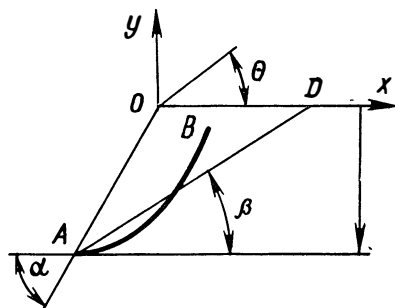


Рис. 51. Откос с криволинейной трещиной скольжения

На обоих этапах решения задачи с помощью ЭВМ (например, с помощью метода конечных элементов или некоторых его модификаций) можно учесть все основные факторы: прочностные свойства, неоднородность, анизотропию и неупругие свойства массива, нагрузки, водонасыщенность и т. п., если разумеется, будет известно распределение этих характеристик в горном массиве. В результате численного решения определяем критическую глубину или угол откоса выработки в зависимости от физических и геометрических параметров задачи.

Однако обычно свойства и строение массива известны заранее лишь весьма приблизительно. Поэтому приобретают большое значение достаточно простые и надежные оценки устойчивости, основанные на некоторых идеализированных предположениях о горном массиве.

Выделим четыре основных способа установления таких оценок.

1. Ограничиваются первым этапом решения задачи (без поверхности разрыва) и считают, что, как только в какой-либо точке массива будет достигнуто условие Кулона

$$\max (\tau_n - \sigma_n \operatorname{tg} \delta) = k \quad (651)$$

откос потеряет устойчивость. Здесь τ_n и σ_n — касательное и нормальное напряжение в этой точке на площадке с вектором нормали \vec{n} , δ и k — соответственно угол внутреннего трения и коэффициент сцепления материала в данной точке.

2. Материал массива считают жесткопластическим, при этом в момент потери устойчивости сплошная зона вблизи поверхности откоса и всего бокового выступа переходит в предельное состояние с локальным условием (576). Поверхность скольжения определяют при этом как огибающую поверхностей слабого разрыва в области предельного состояния [53, 138].

3. Материал массива считают жесткопластическим, при этом в момент потери устойчивости в предельное состояние переходят только узкие слои массива (толщиной их пренебрегают), соединяющие дневную поверхность с боковой поверхностью откоса. Выбор этих поверхностей скольжения основывается на анализе геологического строения массива.

4. Материал массива считают упругопластическим, при этом с увеличением глубины выработки сплошная зона предельного состояния развивается из окрестности точки A , где пересекаются дно и боковая поверхность. Потере устойчивости откоса отвечает выход зоны предельного состояния на дневную поверхность.

Из всех указанных подходов наиболее предпочтительным является третий, так как он наиболее прост, гибок и ближе стоит к точной постановке. С точки зрения запаса прочности первый подход наиболее приемлем, однако лишь в условиях наличия достаточно полной информации о массиве.

Упрое решение для тяжелого клина. Пусть тяжелое однородное и изотропное упругое тело занимает сектор $0 < r < \infty$, $\pi + \alpha < \theta < 2\pi$ (см. рис. 51), где r , θ — полярные координаты. По прочностным свойствам тело может быть произвольно неоднородным и анизотропным. Границы клина при $\theta = 0$ и $\theta = \pi + \alpha$ свободны от нагрузок, т. е. $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$. Напряжения в этом теле будут следующими (дневная поверхность при $\theta = 0$):

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{3 \sin \theta + \sin (\theta - 2\alpha)}{2 \sin^2 \alpha} \rho g r;$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = \rho g r e^{i\theta} \left\{ -\frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha} \left[1 - e^{2i(\theta-\alpha)} (2 + e^{-2i\alpha}) \right] + i \left[1 - e^{2i(\theta-\alpha)} - \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha} (1 - e^{2i(\theta-\alpha)} (2 - e^{-2i\alpha})) \right] \right\}. \quad (652)$$

Здесь σ_r , σ_θ , $\sigma_{r\theta}$ — компоненты напряжения; ρ — плотность; g — ускорение свободного падения; i — мнимая единица.

Это решение используем для оценки критерия устойчивости согласно первому методу, считая что поле напряжений (652) имеет место вблизи края выработки с конфигурацией, изображенной на рис. 51. Это допущение неточно, так как при этом не учитывается сдерживающее влияние материала, находящегося на дне выработки в области $\pi < \theta < \pi + \alpha$; однако ясно, что оно идет в запас прочности. Решение (652) легко обобщить на случай произвольной упругой анизотропии и на некоторые случаи упругой неоднородности; для наших целей в данном случае это не имеет значения.

Условие (651) для плоской деформации изотропного в прочностном отношении тела можно привести к виду

$$\begin{aligned} & 1/4 (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \tau_{r\theta}^2 = \\ & = 1/4 \sin^2 \delta (\sigma_r + \\ & + \sigma_\theta + 2h)^2, \quad h = k \operatorname{ctg} \delta. \end{aligned} \quad (653)$$

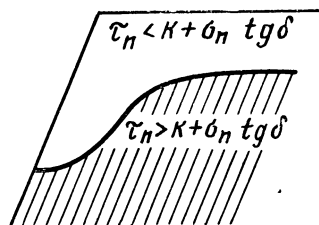


Рис. 52. Схема расположения области предельного состояния в окрестности откоса

Подставляя (652) в (653) и проверяя все наиболее опасные точки (с учетом прочностной неоднородности, т. е. зависимости δ и k от координат r и θ), находим то место, в котором впервые возникает локальное разрушение.

Если тело однородно по прочности, то сдвигка впервые произойдет в точке A с координатами $\theta = \pi + \alpha$, $r = H/\sin \alpha$. Отсюда при помощи (579) и (580) можно найти критерий устойчивости откоса; в данном случае он будет следующим:

$$\rho g H \leq \frac{2k \sin^2 \alpha \cos \delta}{\sin \delta + 1}. \quad (654)$$

Анализ решения (652) показывает, что область, в которой нарушается условие предельного равновесия (651), начинается на некоторой глубине, а вблизи вершины клина предельное состояние никогда не достигается (рис. 52). Примерно такую же форму, очевидно, будет иметь область предельного состояния для однородного изотропного упругопластического тела при всюду непрерывном решении (четвертый подход).

Слоистый трещиноватый массив. Приведем образец применения третьего подхода на одном частном, но практически важном примере. Пусть горный массив перерезан тектоническими трещинами, расположенными под углом β к дневной поверхности (см. рис. 51). В этом случае при проведении открытой выработки возникает опасность обрушения бортов карьера, если $\alpha > \beta$, так как прочность заполнителя трещин обычно гораздо меньше прочности основных пород. Скольжение очевидно будет происходить по плоскости трещины, исходящей из точки A . Пренебрегая

упругими смещениями самого массива, можно считать, что в момент потери устойчивости весь заполнитель в узкой полоске между берегами рассматриваемой тектонической трещины переходит в предельное состояние, а весь остальной материал остается абсолютно жестким. В данном случае, очевидно, второй (общепринятый) подход неприменим.

Условие равновесия треугольной области AOD (см. рис. 51), очевидно будет следующим:

$$\rho g S (\sin \beta - \cos \beta \operatorname{tg} \delta) \leq kL. \quad (655)$$

Здесь S — площадь треугольника AOD ; L — длина AD ; коэффициенты k и δ описывают взаимодействие берегов трещины.

Из решения треугольника имеем

$$S = 1/2 H^2 (\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha),$$

$$L = H / \sin \beta. \quad (656)$$

На основании (655) и (656) условие устойчивости откоса примет вид

$$\rho g H \sin 2\beta (\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha) (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \delta) \leq 4k. \quad (657)$$

Интересно сравнить критерий (657) с критерием, получающимся по первому подходу, согласно которому потеря устойчивости произойдет в тот момент, когда в точке A на площадке, наклоненной под углом β к дневной поверхности, будет достигнуто предельное условие (651). В последнем случае на основе (652) и (651) условие устойчивости будет

$$\rho g H [\sin (2\alpha - 2\beta + \delta) - \sin \delta] \leq 2k \cos \delta \sin^2 \alpha. \quad (658)$$

Положим, например, $\beta = 45^\circ$, $\delta = 30^\circ$. В этом случае границы безопасных областей, которые согласно критериям (657) и (658) имеют вид

$$1/2 \rho g H / k \leq f(\alpha, \beta, \delta) \quad (659)$$

изображены на рис. 53. Кривая 1 отвечает критерию (657), кривая 2 — критерию (658). Из фактических соображений ясно, что в данном случае критерии (657) и (658) представляют собой оценки сверху и снизу соответственно истинного критерия, получающегося из решения задачи в точной постановке. Сравнение этих критериев, полученных на основе различных приближенных подходов, показывает, сколь велико расхождение между ними и насколько велика потребность в точном исследовании, учитывающем постепенное развитие поверхностей сдвига.

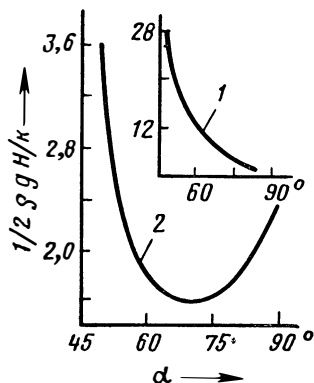


Рис. 53. Оценка безопасной области устойчивости откоса согласно приближенным критериям (657) и (658)

§ 8. ПРИРОДА ГОРНОГО УДАРА В ПОДЗЕМНЫХ ВЫРАБОТКАХ

Горным ударом называют взрывообразное внезапное разрушение породы в окрестности выработки, происходящее без выделения газа; это одно из проявлений горного давления тем опаснее, чем больше глубина горных работ и прочность породы. Горные удары наблюдаются при прохождении подготовительных выработок в их действующих забоях, еще более часты горные удары в целиках различного назначения, в забоях очистных выработок. В подготовительных выработках горные удары с выбросом горной

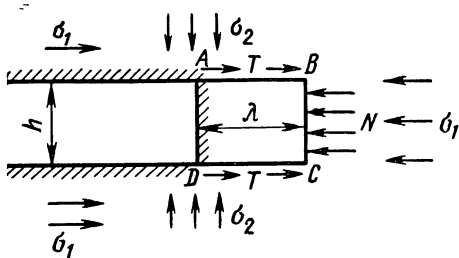


Рис. 54. Поперечное сечение края горизонтальной выемки прямоугольной формы

массы происходят в забоях, стенках выработок и в почве. В старых выработках, в старых целиках эти удары, как правило, весьма большой мощности. Часто горные удары не сопровождаются выбросом массы и выработки, а проявляются лишь в виде сейсмической волны, аналогичной землетрясению. Сила толчка способна в этих случаях травмировать, повредить оборудование и т. д. Достаточно полное представление о состоянии этой проблемы и ее связи с другими аспектами горного дела можно получить из работ [1, 26].

Механизм возникновения горного удара можно уяснить из следующей простейшей теоретической схемы [2, 103]. Пусть в горном массиве, который представим для простоты однородным и изотропным телом, проводится горизонтальная выработка высотой h (рис. 54). Считаем, что выработка имеет прямоугольную форму и находится в поле горного давления ($\sigma_1 = \kappa_v H$ — боковое, $\sigma_2 = \gamma H$ — вертикальное); размеры выработки в плане существенно превышают h , при этом все процессы деформирования и разрушения будем рассматривать в плоскости чертежа (плоская задача). Мысленно вырежем прямоугольную область $ABCD$ длиной λ на продолжении выработки (см. рис. 54) и приложим к границам этой области AB , BC и CD нормальные и касательные нагрузки, равные соответствующим напряжениям в сплошном теле.

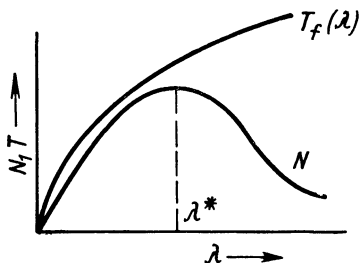


Рис. 55. Схема распределения по глубине сил горного давления, вызывающих горный удар, и суммарных сил сопротивления разрушению

Рассмотрим равновесие этой области в зависимости от параметра λ . Единственное уравнение равновесия имеет вид

$$N(\lambda) = T(\lambda), \quad (660)$$

где N и T — суммарные нормальная и касательная нагрузки.

Остальные нагрузки, не указанные на рис. 54, очевидно, не дают вклада в уравнение равновесия. Анализ поля упругих напряжений показывает, что функция $N(\lambda)$ качественно имеет вид, изображенный на рис. 55 на расстоянии λ^* примерно равном $(1-2)h$, имеется максимум $N(\lambda)$. Физический смысл $N(\lambda)$ — сила давления, вызывающая горный удар

$$N(\lambda) = \beta(\lambda) h \gamma H. \quad (661)$$

Здесь β — безразмерный коэффициент концентрации напряжений, зависящий от формы выработки, а также от расположения и типа крепи (его определяют из решения соответствующей задачи теории упругости или опытным путем); γ — средний удельный вес горной породы; H — глубина заложения выработки.

Величина $T(\lambda)$ представляет суммарную силу сопротивления горному удару (разрушению), очевидно, она не может превосходить некоторой предельной величины $T_f(\lambda)$, характеризующей прочность породы. Функция $T_f(\lambda)$ монотонно возрастает с увеличением λ и имеет вид (рис. 55)

$$T_f(\lambda) = \alpha(\lambda) \lambda \sigma_c. \quad (662)$$

Здесь α — безразмерная функция λ , зависящая также от формы выработки; σ_c — предел прочности на одноосное сжатие.

Из элементарных физических соображений $\alpha(\lambda)$ монотонно убывает от

$$\alpha = 1 \text{ при } \lambda = 0 \quad (663)$$

до

$$\alpha \sim 1/2 \text{ при } \lambda \sim h. \quad (664)$$

Из указанного характера кривых очевидно, что явление горного удара объясняется первоначальным касанием кривых $N(\lambda)$ и $T_f(\lambda)$ не в начале координат, а при некотором $\lambda_* \neq 0$. Если бы равенство $N(\lambda) = T(\lambda)$ впервые достигалось при $\lambda_* = 0$, то проблемы горного удара не существовало бы, так как при $\lambda_* = 0$ происходило бы явление, аналогичное обрушению кровли. Управление процессом обрушения кровли не представляет трудностей вследствие его равномерности и маломощности.

Таким образом, необходимое условие возникновения горного удара можно записать как

$$N = \beta \gamma h H > T_f = \alpha \lambda \sigma_c \text{ при } \lambda_* > 0. \quad (665)$$

Усложняющие факторы — неоднородность и неизотропность горной породы, естественная трещиноватость, неупругость дефор-

мационных свойств породы, различные формы выработки и крепи — значительно затрудняют количественное описание возникновения горного удара, но не влияют на указанную выше качественную картину. Условие (665) сохраняется и в последующих случаях, однако теперь уже β и α существенно зависят от указанных факторов.

Целесообразно отметить, что последний фактор (различные формы выработки и крепи) наиболее эффективно и единообразно учитывают в расчетах в том случае, когда выполняется условие тонкой структуры $L \gg h$, где L — характерный линейный размер выработки в плане. При этом сила, вызывающая горный удар, описывается единственным параметром поля напряжения в окрестности края выработки — ирвиновским коэффициентом интенсивности напряжений K_I , который определяют из решения соответствующей упругой задачи при $h = 0$. В этом случае условие возникновения горного удара

$$K_I > \delta \sigma_c \sqrt{h}. \quad (666)$$

Здесь δ зависит лишь от формы закругления забоя выработки и относительных характеристик прочности породы.

Динамика горного удара. В связи с особенностями роста трещин в сжатых телах [100, 124] горному удару всегда предшествует устойчивое квазистатическое развитие трещин, что используется для обнаружения угрозы горного удара регистрацией звуковых импульсов. Согласно имеющимся наблюдениям [41] для горных ударов в прочных породах наиболее характерной является частота звуковых импульсов: при числе «щелчков» меньше 20 в 1 ч горного удара не бывает; при 30 звуковых импульсах и больше горный удар возможен, а при 80 импульсах в 1 ч горный удар неизбежен; примерно за 1 ч до наступления горного удара наступает тишина и звуковые импульсы полностью отсутствуют.

Динамика разрушения вслед за потерей устойчивости равновесия описывается в рамках общей теории самоподдерживающегося разрушения [124]. Приведем вытекающие из нее полезные оценки максимальной скорости движения v отдельных частиц разрушающейся породы

$$v = \beta_{\max} g H / c \quad (667)$$

и их средний линейный размер

$$r_0 \approx 3TE / (\beta_{\max}^2 \gamma^2 H^2). \quad (668)$$

Здесь c — скорость распространения продольных волн; β_{\max} — наибольшее значение функции $\beta(\lambda)$; T — удельная поверхностная энергия; E — модуль Юнга.

Предупреждение и использование горных ударов при помощи энергии взрыва. Приведенный выше анализ механизма возникновения горных ударов наталкивает на мысль использования энер-

гии взрыва в целях управления горным ударом. Возможны следующие принципиальные схемы (подробнее см. следующий параграф).

1. Создание продольных полостей в плоскости выработки. Такие полости, как бы удлиняя выработку и выходя в очаг сжимающих напряжений, разгружают породу и смягчают горный удар, в пределе сводя его к разрушению типа обрушения кровли.

2. Создание поперечных полостей, перпендикулярных к направлению движения выработки, в области максимума силы $N(\lambda)$, вызывающей горный удар. Этот способ более эффективен по сравнению с предыдущим, так как, не изменяя предельной силы $T_f(\lambda)$ сопротивления разрушению, позволяет «срезать» максимум на кривой $N(\lambda)$ (см. рис. 55).

3. Взрывание достаточно мощных зарядов в области максимума $N(\lambda)$ (при $\lambda = \lambda_*$ или несколько глубже при $\lambda > \lambda_*$) так, чтобы поднять пик кривой $N(\lambda)$ до предельной кривой T_f и тем самым вызвать горный удар ограниченной мощности, регулируя систему взрывания (взрывы в различных местах с задержкой воспламенения).

Еще более перспективной для проходки глубоких выработок представляется комбинация способов 2 и 3: почти одновременное создание поперечной полости на расстоянии $\sim 2\lambda_*$ и разрушение породы при помощи взрыва и горного удара на расстоянии λ_* .

§ 9. ПРЕДУПРЕЖДЕНИЕ ГОРНЫХ УДАРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭНЕРГИИ ВЗРЫВА

Повышение глубины горных работ связано с увеличением вероятности возникновения горных ударов вследствие перенапряженного состояния пород [73]. Возникновение таких ударов особо опасно при проходке подготовительных горных выработок, нарушающих первоначальное естественное устойчивое состояние горных пород и при определенных условиях ведущих к мгновенной разгрузке среды — горному удару.

Для решения задачи предупреждения горных ударов важное значение имеет оценка деформационных свойств горных пород. Такая оценка возможна на основе общей модели горных пород как сплошной упругопластической среды. В таких средах при напряжениях, меньших некоторого напряжения σ_s , как сжатие, так и разгрузки горных пород происходят упруго (рис. 56), а при $\sigma > \sigma_s$ — примерно по закону

$$\varepsilon = \frac{\sigma_s}{E} + \frac{(\sigma - \sigma_s)}{K}, \quad (669)$$

где ε — деформация среды; σ_s — предельное напряжение упругой деформации; E — модуль упругости; σ — общее напряжение; K — коэффициент упрочнения среды.

Когда $\sigma < \sigma_s$, при снятии нагрузки среда возвращается в исходное состояние без остаточных деформаций, при $\sigma > \sigma_s$ в среде сохраняются остаточные деформации, величина которых зависит от максимальных напряжений, достигаемых при сжатии. В горных породах, как показывают эксперименты, достижение предела упругости наблюдается при относительных деформациях 0,0002—0,0003.

Важнейшим условием профилактики горных ударов является соотношение

$$\sigma < \sigma_{пр}, \quad (670)$$

где $\sigma_{пр}$ — предел прочности породы на сжатие.

В общем случае соблюдение этого условия для скальных пород не представляет трудностей, поскольку $\sigma_{пр}$ является величиной довольно значительной, тогда как σ , в соответствии с гидростатической теорией давления на глубине даже 2—3 км не превышает 0,78—0,98 Н/м².

Однако задача значительно осложняется наличием в горных породах тектонически нарушенных участков, на которых $\sigma_{пр}$ в естественных условиях залегания значительно снижается. В то же время положение усугубляется тем, что на участках, прилегающих к забою выработок, формируется местная зона концентрации напряжений, вызывающая резкое увеличение действующего напряжения по отношению к остальным вмещающим породам. Наличие таких местных зон концентрации напряжений, где действующие усилия превышают необходимые для разрушения среды, и является основной причиной возникновения горных ударов. В этих случаях соблюдение условия (670) достаточно затруднено. Возникает задача предупреждения горных ударов разгрузкой пород до их естественного упругого состояния при оживлении в среде системы естественных статистически распределенных микро- и макротрещин, способных резко ослабить местную концентрацию напряжений.

Для обоснования и физического объяснения методов предупреждения горных ударов изобразим процесс накопления упругой энергии в породах как периодически повторяющийся процесс в координатах энергия—время (рис. 57). Тогда можно отметить, что в некоторый момент времени t , приуроченный к вскрытию перенапряженных горизонтов, массив горных пород характеризуется энергией устойчивого состояния W_0 . По мере течения времени t в массиве пород наблюдается накопление упругой энергии сжатия W_1 , ведущей к неустойчивому состоянию горных

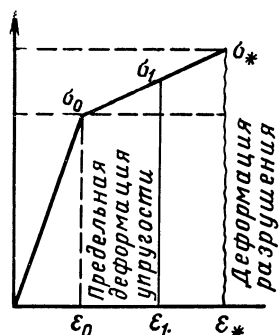


Рис. 56. Схематичная диаграмма σ — ε упрочняющейся упруго-пластической горной породы

пород. И, наконец, при накоплении энергии W_2 , достаточной для деформации горных пород за пределами упругости, происходит мгновенная разгрузка пород в форме горного удара. После этого процесс повторяется. Намеченная схема дает основание к выбору, по крайней мере, двух основных направлений предупреждения горных ударов. Одним из таких направлений является разгрузка перенапряженного массива горных пород с энергией на предварительно формируемую в среде щель (трещину). Такая разгрузка среды переводит ее в более устойчивое состояние, характеризующееся энергией W_0 без накопления энергии W_2 , при которой наступает горный удар.

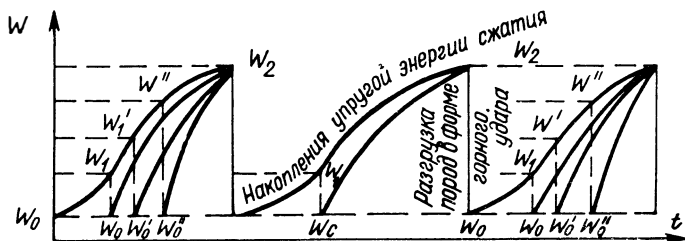


Рис. 57. Процесс изменения упругой энергии горной породы в окрестности края выработки как периодически повторяющийся процесс (при достаточно большой глубине выработки, когда горный удар неизбежен, если не проведены профилактические мероприятия)

Однако после закрытия трещин в среде снова происходит интенсивное накопление упругой энергии с W_0 до W_2 , которое по времени может быть более интенсивным, чем первоначальное, ввиду более высокой сжимаемости среды. При этом по мере увеличения глубины горных пород и приближения общей энергетической ситуации к W_1 , W_1' и т. д. разгрузка горных пород на возбуждаемую искусственно трещиноватость будет все менее эффективной, поскольку из разгруженного состояния W_0' и W_0'' среда все быстрее возвращается в опасное по горным ударам энергетическое состояние W_2 . Это и обуславливает второй, более целесообразный в данном случае, метод борьбы с горными ударами.

Сущность второго направления предупреждения горных ударов заключается в искусственном инициировании самого горного удара переводом среды из энергетического состояния W_1 , W_1' или W_1'' в состояние W_2 , достигаемое взрывом в возможном очаге горного удара заряда ВВ, который по своей энергии достаточен для перевода среды имеющей энергию более или менее устойчивого состояния W_1 , W_1' или W_1'' в состояние W_2 , характерное для горного удара,

$$E \geq W_2 - W_1. \quad (671)$$

Таким образом, следует различать два принципиальных направления предупреждения горных ударов: пассивный, когда за счет разгрузки среды идет снижение ее напряженного состояния, и активный, когда за счет взрыва заряда ВВ в возможном очаге горного удара идет повышение напряженного состояния среды вплоть до момента инициирования самого горного удара с последующим ослаблением напряженного состояния среды.

Пассивное предупреждение горных ударов. Разгрузка горных пород в зоне концентрации напряжений возможна при условии предварительного взрывания серии зарядов ВВ в шпурах для формирования в массиве щели достаточной ширины, на которую была бы возможна разгрузка перенапряженной породы. При этом серия зарядов ВВ должна быть достаточна для оживления естественной системы трещин и роста новых трещин, достаточных для разгрузки среды.

Анализ показывает [100], что при проведении горизонтальной выработки высотой h , имеющей форму, близкую к прямоугольной,

в поле горного давления, слагаемого из бокового давления N_2 и вертикального гидростатического давления N_1 , впереди выработки на расстоянии, равном $(1-2)h$, имеется внутренний очаг концентрации упругой энергии и сжимающих напряжений σ_* (рис. 58). Напряжение, действующее в очаге концентрации напряжений, имеющем размеры h , может быть оценено как

$$\sigma_* = \frac{1}{2} h (N_1 \beta_1 + N_2 \beta_2), \quad (672)$$

где h — высота выработки; N_1 — вертикальное горное давление как следствие гидростатического давления; N_2 — боковое горное давление, являющееся следствием действия главным образом тектонических напряжений; β_1 и β_2 — коэффициенты концентрации напряжений.

Под действием указанного напряжения в этом очаге могут распространиться сдвиговые трещины AO и OB (рис. 58). Этот период, предшествующий горному удару, сопровождается треском и формированием клина AOB , который затем выжимается горным давлением. Второй этап характеризуется катастрофическим выходом трещин из точек AOB к углам выработки, где также имеются местные очаги концентрации напряжений, и последующим выбором породы. Непосредственно перед вторым этапом происходит перераспределение напряжений, приводящее к увеличению σ_*

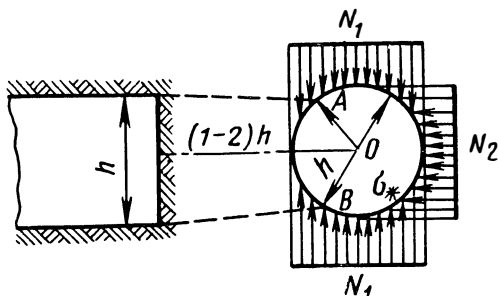


Рис. 58. Внутренний очаг наибольшей концентрации упругой энергии на продолжении выработки

и уменьшению расстояния до очага концентрации напряжений λ , т. е. выработка продвигается вперед.

Таким образом, причиной горного удара является внутренний очаг концентрации упругой энергии и сжимающих напряжений впереди выработки в зоне $(1-2)h$. Поэтому опасность горного удара может быть в значительной степени снижена изменением формы забоя выработки путем сведения ее на конус. В этом случае представляется возможным вывести очаг концентрации напряжений на острие конуса, вследствие чего при разрушении происходило бы немедленное обрушение породы и накопления упругой энергии в среде не было бы. Однако эти рекомендации не устраняют в целом возможности стреляния породы из вершины конуса, не говоря уже о технических трудностях проведения выработки с коническим выбоем в скальных породах.

Более радикальным решением в данном случае представляется использование разгрузочного взрывания, в результате которого в очаге концентрации напряжений формируется щель, на которую возможна разгрузка сжатой среды. При этом деформация разгрузки должна превышать или, по крайней мере, равняться деформации сжатой в очаге концентрации напряжений среды.

Деформация среды, сжатой в очаге концентрации, может быть определена из условий (669) и (672):

$$\varepsilon = \frac{\sigma_s}{E} + \frac{\sigma_* - \sigma_s}{K} = \frac{\sigma_s}{E} + \frac{0,5h(\gamma H\beta_1 + N_2\beta_2) - \sigma_s}{K}. \quad (673)$$

Необходимая деформация разгрузки может быть определена из условий разгрузки очага конструкции напряжений

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{h}, \quad (674)$$

где Δ — ширина разгрузочной щели; h — характерный размер очага концентрации напряжений, примерно равный высоте выработки.

Тогда общим условием предупреждения горных ударов методом разгрузочного взрывания должно быть

$$\frac{\sigma_s}{E} + \frac{\sigma_* - \sigma_s}{K} \leq \frac{\Delta}{h}. \quad (675)$$

Формирование щели при разгрузочном взрывании является главным образом следствием разгрузки пород на свободный объем зоны местного действия взрыва. В этом случае средняя ширина трещин в объеме действия скважин или шпуров разгрузочного взрывания может быть определена из уравнения

$$a\Delta = \pi d_k^2/4, \quad (676)$$

где a — расстояние между шпурами; d_k — диаметр зоны местного действия взрыва.

Диаметр зоны местного действия взрыва при коэффициенте заряжения, близком к единице, меняется в зависимости от начального диаметра зарядной камеры и механической прочности окружающих пород как

$$d_k^2 = d_c^2 \left[\frac{1000}{\sigma_{сж}^{0,75}} \right], \quad (677)$$

где d_c — диаметр скважин; $\sigma_{сж}$ — сопротивление пород одному сжатию.

При изменении коэффициента заряжения

$$K = d_0^2 l / d_c^2 L, \quad (678)$$

зависимость (676) принимает вид

$$d_k^2 = d_c^2 \left[\frac{1000}{\sigma_{сж}^{0,75}} \right]^{0,85} \sqrt[5]{K}, \quad (679)$$

где l — длина заряженной части шпуров разгрузочного взрывания; L — общая длина шпуров разгрузочного взрывания; d_0 — диаметр заряда.

Тогда из формул (676)—(679) получаем

$$\Delta = \frac{\pi d_c^2}{4} \left[\frac{1000}{\sigma_{сж}^{0,75}} \right]^{0,85} \sqrt[5]{K}. \quad (680)$$

Из условия (675) получаем общую формулу для определения проектных взрывных работ, направленных на формирование щели заданных размеров с целью разгрузки среды в очаге концентрации напряжений

$$\frac{\pi d_c^2}{4ah} \left[\frac{1000}{\sigma_{сж}^{0,75}} \right]^{0,85} \sqrt[5]{K} \geq \frac{\sigma_s}{E} + \frac{\sigma_* - \sigma_s}{K}. \quad (681)$$

Так как основной целью разгрузочного взрывания является снятие напряжений в очаге их концентрации (рис. 58), удаленном от забоя выработки на расстояние (1—2) h в глубь массива, длина разгрузочных шпуров должна составлять в этом случае (1,5—2) h . Разгрузочные шпуры бурят по центру забоя выработки. Расстояние между шпурами определяют по формулам (674)—(681).

Заряжение шпуров при формировании щелей наиболее целесообразно осуществлять по методике патрон через патрон, принимая 10%-ную забойку по длине шпуров.

Наряду со специфической методикой бурения и заряжения шпуров разгрузочное взрывание предусматривает и специальную последовательность взрывания. Чтобы избежать инициирования неуправляемого горного удара, сначала надо взрывать заряды

в разгрузочных шпурах на глубине (1,5—2,0) h , затем с коротким замедлением (17—20 мс) — отбойные шпуры на глубине h . Таким образом, в результате проведенных работ продвижение за цикл с учетом коэффициента использования шпура (к. и. ш.) составит (0,8—0,9) h и разгрузка пород на глубину (1,5—2,0) h (рис. 59).

Активное предупреждение горных ударов. Сущность этого метода заключается в искусственном инициировании самого горного удара за счет взрыва заряда ВВ, достаточного по своей энергии для перевода среды в энергетическое состояние, характерное для горного удара:

$$E = W_2 - W_1, \quad (682)$$

где E — энергия взрывчатого разложения ВВ; W_2 — энергия упругопластического напряженного состояния горных пород, характерного для горных ударов; W_1 — энергия упругопластического напряженного состояния горных пород, характерного для сравнительно устойчивого их состояния.

Рис. 59. Схема методики разгрузочного взрывания с целью формирования щели

Для определения энергии E , W_2 и W_1 можно воспользоваться моделью сплошной упругопластической среды (см. рис. 56). Плотность энергии, характерная для сравнительно устойчивого состояния горных пород, может быть определена экспериментально из диаграммы сжатия породы:

$$W_1 = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon, \quad (683)$$

или

$$W_1 = \frac{\sigma_0 \varepsilon_0 + \sigma_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{2}, \quad (684)$$

где σ_0 — предел упругого поведения горных пород; ε_0 — предельная деформация упругости; σ_1 — напряжение горных пород, предшествующее горному удару; ε_1 — деформация, предшествующая горному удару.

Аналогично можно определить и плотность энергии горных пород во время самого горного удара:

$$W_2 = \frac{\sigma_0 \varepsilon_0 + \sigma_* (\varepsilon_* - \varepsilon_0)}{2}, \quad (685)$$

где σ_* и ε_* — напряженное состояние пород и деформация пород во время горного удара.

Практически энергия устойчивого состояния горных пород может быть определена методом акустического каротажа либо методом разгрузки. Энергия сжатия пород в период горного удара может быть определена на основе обработки результатов имевших место горных ударов в предположении, что вся потенциальная энергия сжатой среды W_2 перешла в кинетическую энергию выброса:

$$W_2 = \frac{\gamma \ln K_p c_0^2 V}{2g}, \quad (686)$$

где γ — объемный вес горных пород; K_p — коэффициент разрыхления; c_0 — начальная скорость выброса продуктов разрушения; V — объем выброса; g — ускорение свободного падения.

Более удобно определять энергию горного удара с помощью сейсмических приборов [26]. При наличии надежной корреляции между определяемой сейсмической энергией и общей выделяющейся энергией взрыва этот способ позволяет быстро и достаточно точно определить энергию горного удара.

По формулам (685) и (686) можно установить напряженное состояние пород в период горного удара в предположении, что данное напряжение равномерно распределено по очагу концентрации напряжений высотой h :

$$V \left[\frac{\sigma_0 \varepsilon_* + \sigma_* (\varepsilon_* - \varepsilon_0)}{2} \right] = \frac{\gamma \ln K_p c_0^2}{2g} V. \quad (687)$$

Зная общий объем зоны концентрации напряжений, можно установить и общий запас потенциальной энергии сжатой среды: $W_1 = \sigma_1 V_0$ и $W_2 = \sigma_* V_0$.

Тогда необходимая для искусственного инициирования горного удара энергия взрывчатого разложения ВВ должна составить

$$E = \sigma_* V_0 - \sigma_1 V_0.$$

При этом энергию E взрывчатого разложения ВВ можно представить формулой $E = QQ_V^{1+\eta}$, где Q — вес заряда ВВ; Q_V — потенциальная энергия ВВ; η — коэффициент полезного использования энергии взрыва (обычно $\eta = 0,04 \div 0,06$).

Учитывая, что удельный расход ВВ в зоне местной концентрации напряжений $q = \frac{Q}{V_0}$, получаем $q = \frac{\sigma_* - \sigma_1}{Q_V^{1+\eta}}$, что дает основание установить необходимый и достаточный удельный расход ВВ для искусственного возбуждения горных ударов в зоне местной концентрации напряжений для разгрузки среды в этом очаге.

Анализ полученных зависимостей показывает, что для опре-

деления расчетных параметров взрыва, направленного на искусственное инициирование горных ударов, необходимо знать напряженное состояние среды в момент возможного горного удара σ_* и в момент относительно устойчивого состояния среды σ_1 , потенциальную энергию ВВ Q_V и коэффициент η .

В отличие от метода разгрузочного взрывания метод искусственного инициирования горных ударов должен предусматривать принципиально иную методику как бурения, так и взрывания, заключающуюся в следующем. По контуру горной выработки

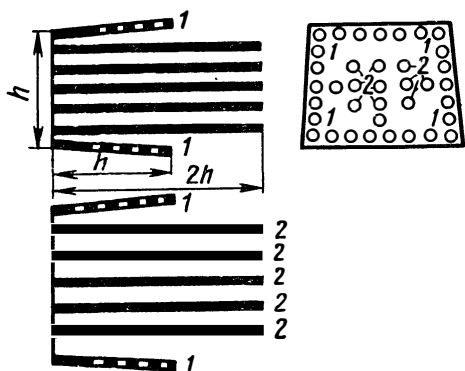


Рис. 60. Схема методики взрывания для искусственного инициирования горных ударов

на расстоянии 40—45 см производят бурение контурных шпуров на глубину h . Затем по площади забоя равномерно обуривают шпуров для размещения заряда ВВ, инициирующего горный удар на глубину $2h$. В контурные шпуров заряды ВВ помещают по методике патрон через патрон, а в основные шпуров — сплошной заряд на глубину $2h$ длиной h .

При взрывании мгновенно производят взрыв контурных шпуров на глубину h , создавая тем самым ослабление прочностных связей в массиве, а затем с замедлениями 17—20 мс внутри массива производят мощный взрыв для инициирования работы потенциально сжатой среды на глубине $(1-2)h$, благодаря чему обеспечивается уходка за цикл h и разгрузка горных пород также на глубину $2h$ (рис. 60).

Результаты выполненных исследований позволяют сделать следующие выводы.

1. Возникновение горных ударов является следствием перенапряженного состояния пород в окрестностях забоя выработки, вероятность которого увеличивается с повышением глубины горных работ.

2. Предупредить горные удары можно двумя методами: пассивной разгрузки горных пород на предварительно формируемую взрывом щель и активной разгрузки горных пород инициированным горным ударом при взрыве определенного заряда ВВ.

3. Разработанные методы расчета параметров активной и пассивной разгрузки пород, склонных к горным ударам, подлежат широкой производственной проверке в соответствующих горно-технических условиях.

1. Авершин С. Г. Горные удары. М., Углетехиздат, 1955, с. 235.
2. Авершин С. Г., Мосинец В. Н., Черепанов Г. П. О природе горного удара в выработках. Доклады АН СССР, т. 204, № 3, 1972.
3. Алимжанов М. Т., Ершов Л. В. Устойчивость равновесия тел и некоторые задачи теории горного давления. — В сб. «Проблемы механики твердого деформированного тела (к 60-летию акад. Новожилова В. В.)». Ленинград, «Судостроение», 1970.
4. Афанасьев Е. Ф., Черепанов Г. П. Автомодельная задача динамической теории упругости для щели с точечным источником. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 6.
5. Афанасьев Е. Ф. Некоторые однородные решения динамической теории упругости. В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа (к 80-летию академика Мухелишвили). М., «Наука», 1972.
6. Афанасьев Е. Ф. Класс автомодельных задач динамической теории упругости для щели. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 3.
7. Афанасьев Е. Ф., Черепанов Г. П. Автомодельная задача динамической теории упругости для полуплоскости. — В кн.: Успех и достижения механики деформируемых тел (к 100-летию академика Б. Г. Галеркина). М., «Наука», 1973.
8. Афанасьев Е. Ф., Черепанов Г. П. Некоторые динамические задачи теории упругости. ПММ, т. 37, вып. 4, 1973, с. 618—639.
9. Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика, т. 1, Гостехтеориздат, 1950, с. 900.
10. Болотин В. В., Григolloк Э. И. Устойчивость упругих и неупругих систем. В сб.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. М., «Наука», 1972.
11. Брусиловская Г. А. К вопросу о радиальных колебаниях полого упругого цилиндра. Вестник АН Каз. ССР, 1974, № 2.
12. Брусиловская Г. А., Ершов Л. В. Динамика полого симметрично нагруженного упругого кругового цилиндра. — «Прикладная математика и механика», 1974, № 3.
13. Брусиловская Г. А., Ершов Л. В. К расчету полого упругого толстостенного цилиндра на действие динамической нагрузки общего вида. «Проблемы прочности», 1975, № 2.
14. Брусиловская Г. А., Ершов Л. В. О расчете частотных характеристик некоторых колебательных систем. В сб.: Вопросы радиоэлектроники. Вып. 6, 1973.
15. Вигдергауз С. Б. Интегральное уравнение обратной задачи плоской теории упругости. ПММ, Вып. 4, 1975.
16. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1967, с. 436.
17. Власов В. З. Общая теория оболочек. ГИТТЛ, М.—Л., 1949, с. 784.
18. Волкович В. Л., Даргейко Л. Ф. Об одном алгоритме выбора компромиссного решения для линейных критериев. «Кибернетика», 1972, № 5, с. 133—136.
19. Галин Л. А., Черепанов Г. П. О напряженном состоянии вблизи отверстий в пластинах из полимерных материалов. Доклады АН СССР, т. 167, 1966, № 1.
20. Галин Л. А. О давлении штампа эллиптической формы в плане на упругое полупространство. ПММ, т. 11, вып. 2, 1947.

21. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Физматгиз, 1953.
22. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963, с. 639.
23. Гольдштейн Р. В. Волны Релея и резонансные явления в упругих телах. ПММ, т. 29, вып. 3, 1965.
24. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962, с. 1100.
25. Гузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев, «Наукова думка», 1971.
26. Добыча полезных ископаемых на больших глубинах. Труды V Международного горного конгресса. М., «Недра», 1968.
27. Ершов Л. В., Телиянец В. Н. Об устойчивости равновесия упругой полосы. — «Механика твердого тела», 1967, № 6.
28. Ершов Л. В., Телиянец В. Н. Об общих соотношениях метода малого параметра в осесимметричных задачах теории малых упруго-пластических деформаций. ПМФТ, 1961, № 3.
29. Ершов Л. В. Приближенное решение осесимметричных упруго-пластических задач. — «Известия АН СССР, ОТН, «Механика и машиностроение», 1959, № 3.
30. Ершов Л. В. О постановке задачи устойчивости горных выработок. ДАН СССР, т. 143, № 2, 1962.
31. Ершов Л. В. К вопросу о проявлении горного давления в вертикальном шахтном стволе. «Механика и машиностроение», 1962, № 6.
32. Ершов Л. В. Об устойчивости упругопластического равновесия в задачах горного давления. Автореферат на соискание ученой степени доктора технических наук. МГИ, 1964.
33. Иванов Г. М., Космодамианский А. С. К решению задач с неизвестной границей при наличии циклической симметрии. Труды Николаевского кораблестроительного института, 1973.
34. Иванов Г. М., Космодамианский О. С. Обернена пружно-пластична периодична задача. Доповиди АН УРСР, 1971, № 10.
35. Иванов Г. М., Космодамианский О. С. Обернена подвійно-періодична задача плоской теории кружности. Доповиди АН УРСР, 1972, № 9.
36. Ивлев Д. Д. Приближенное решение упруго-пластических задач теории идеальной пластичности. ДАН СССР, т. 113, § 2, 1957.
37. Ивлев Д. Д. Приближенное решение задач теории малых упругопластических деформаций. ДАН СССР, т. 113, № 3, 1957.
38. Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. О приближенном решении осесимметричных упругопластических задач методом малого параметра. Вестник МГУ, 1958, № 2.
39. Ивлев Д. Д. К теории плоской деформации упрочняющегося пластического материала. ПММ, т. XXIV, вып. 4, 1960.
40. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехтеориздат, 1948, с. 376.
41. Исследование горного давления геофизическими методами. М., «Наука», 1967, с. 215.
42. Ишлинский А. Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости. Укр. мат. журнал, т. 6, 1954, № 2.
43. Кауфман Д. Г. Вязкость разрушения листов, плит и многослойных клееных панелей из алюминия. Труды Американского общества инженеров механиков, серия, т. 89, № 3, 1967.
44. Келдыш М. В. Конформное отображение многосвязных областей на канонические области. Успехи матем. наук, 1939, № 6.
45. Колтунов М. А. Упругость и прочность цилиндрических тел. М., «Высшая школа», 1975, с. 526.
46. Кортен Х. Т. Разрушение армированных пластиков. «Мир», 1967.
47. Космодамианский А. С. Распределение напряжений в изотропных многосвязных средах. Изд-во Донецкого Гос. ун-та, 1972.
48. Костров Б. В. Автомодельные динамические задачи о вдавливании жесткого штампа в упругое полупространство. «Механика и машиностроение», 1964, № 4.

49. Костров Б. В. Осесимметричная задача о распространении трещины нормального разрыва. ПММ, т. 28, вып. 4, 1964.
50. К теории устойчивости горных откосов и открытых выработок. Доклады АН СССР, т. 211, № 4, 1973. Авт.: В. В. Ржевский, Л. В. Ершов, Л. К. Либерман, Г. П. Черепанов.
51. Кулиев В. Д., Черепанов Г. П. К теории «горячих» трещин. ПМТФ, № 2, 1974.
52. Лейбензон Л. С. О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек. Собр. тр., т. 1, 1951.
53. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., 1955, с. 491.
54. Лурье А. И. Некоторые контактные задачи упругости. ПММ, т. 5, вып. 3, 1941.
55. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехтеориздат, 1955, с. 491.
56. Ляв А. Математическая теория упругости. М. — Л., 1934.
57. Ляо, Кассел. Поведение находящейся под давлением цилиндрической оболочки при действии движущейся нагрузки. Перевод «Прикладная механика», № 3, 1972.
58. Милейко С. Т., Сорокин П. М., Циблин А. М. Прочность боралюминия — композита с хрупким волокном. «Механика полимеров», 1973, № 5.
59. Мирсалимов В. М. Обратная упругая задача для плоскости; ослабленной двумя одинаковыми отверстиями. Материалы республиканской конференции. Баку, 1971.
60. Мосинец В. Н., Черепанов Г. П. Предупреждение горных ударов с использованием энергии взрыва. — В сб.: Взрывное дело, № 71/28, М., «Недра», 1972.
61. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966, с. 707.
62. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968, с. 511.
63. Неймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., Гостехтеориздат, 1948.
64. Новацкий В. Теория упругости. М., «Мир», 1975, с. 872.
65. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М., Гостехиздат, 1948.
66. Основы строительной механики ракет. М., «Высшая школа», 1969. Авт.: Л. И. Балабух, К. С. Колесников и др. 509 с.
67. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. Изд-во «Наука». 1966, с. 752.
68. Работнов Ю. Н., Шестириков С. А. Устойчивость стержней и пластинок при ползучести. ПММ, т. XXI, вып. 3, 1957.
69. Сагомоян А. Я., Поручиков А. Я. Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости. Изд-во МГУ, 1970, с. 119.
70. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, М., 1950, с. 443.
71. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 3, ч. II. Изд. 8. М., «Наука», 1969, с. 672.
72. Соболев С. Л. Некоторые вопросы теории распространения колебаний. — В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л. — М., ОНТИ, 1937, с. 468—617.
73. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. М., Физматгиз, 1960, с. 343.
74. Соколовский В. В. Теория пластичности. М., «Высшая школа», 1969, с. 608.
75. Сорокин Е. С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М., Стройиздат, 1960.
76. Сузуки. Движение упругого кольца под действием нестационарного нагружения. «Прикладная механика», сер. Е, № 2, 1966.
77. Феодосьев В. И. Применение шагового метода к анализу устойчивости сжатого стержня. ПММ, т. XXVII, в. 5, 1963.
78. Филиппов А. Ф. Некоторые задачи дифракции плоских упругих волн. ПММ, т. 20, вып. 6, *1956.

79. **Фисенко Г. Л.** Устойчивость бортов карьеров и отвалов. М., «Недра», 1965, с. 378.
80. **Флитман Л. М.** Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости. ПММ, т. 23, вып. 4, 1959.
81. **Фридман М. М.** Дифракция плоской упругой волны относительно полубесконечной прямолинейной жесткозакрепленной щели. ДАН СССР, т. 60, № 7, 1948.
82. **Чаплыгин С. А.** К теории триплана. Собрание сочинений, т. II, 1948.
83. **Черепанов Г. П.** Некоторые задачи теории упругости и пластичности с неизвестной границей. В кн.: Приложение теории функций в механике сплошной среды, т. I. М., «Наука», 1965.
84. **Черепанов Г. П.** Обратная упруго-пластическая задача в условиях плоской деформации. Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 1, 1963.
85. **Черепанов Г. П.** Одна обратная задача теории упругости. Инж. ж., ММТ, № 3, 1966.
86. **Черепанов Г. П.** Равнопрочная выработка в горном массиве. — В кн.: Проблемы механики горных пород. «Наука», Каз. ССР, 1966.
87. **Черепанов Г. П.** Обратная задача плоской теории упругости. ПММ, вып. 5, 1974.
88. **Черепанов Г. П., Смольский В. В., Таги-заде А. Г.** Оптимальное проектирование некоторых инженерных материалов. Изв. АН АССР, т. 29, 1976.
89. **Черепанов Г. П., Таги-заде А. Г.** Изгиб равнопрочных балок. Куйбышев, Труды Куйбышевского Гос. Ун-та, 1975.
90. **Черепанов Г. П.** Обратные задачи плоской теории упругости. ПММ, вып. 6, 1974.
91. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974, с. 640.
92. **Черепанов Г. П.** О сингулярных решениях в теории упругости. — В кн.: Механика твердого деформируемого тела (к 60-летию акад. В. В. Новожилова). Л., Судпромгиз, 1970.
93. **Черепанов Г. П.** Метод внешних и внутренних разложений в теории упругости. — В сб.: Механика твердого тела (к 60-летию Ю. Н. Работнова). М., «Машиностроение», 1975.
94. **Черепанов Г. П.** Некоторые задачи теории трещин в гидродинамической постановке. ПММ, т. 27, вып. 6, 1963.
95. **Черепанов Г. П., Кулиев В. Д.** Решение одной динамической задачи теории упругости. Изв. АН Азерб. ССР, 1972, № 4.
96. **Черепанов Г. П.** О влиянии импульсов на развитие начальных трещин. ПМТФ, 1963, № 1.
97. **Черепанов Г. П.** Дифракция упругих волн на разрезе. В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа (к 80-летию Н. И. Мухелишвили). М., «Наука», 1972.
98. **Черепанов Г. П.** Инвариантные Г-интегралы и некоторые их приложения в механике. ПММ, т. 41, вып. 3, 1977.
99. **Черепанов Г. П., Смольский В. М.** Напряжения в окрестности эллипсоидальной выработки в горном массиве. В кн.: Проблемы механики горных пород. Алма-Ата, «Наука», 1969.
100. **Черепанов Г. П.** О развитии трещин в сжатых телах. ПММ, т. 30, вып. I, 1966.
101. **Черепанов Г. П., Либерман Л. К.** Математический метод оптимального проектирования горных работ. Горный журнал, 1971, № 9.
102. **Черепанов Г. П., Таги-заде А. Г.** Одна новая обратная задача теории упругости. — В кн.: Механика деформируемого твердого тела, Изд. Куйбышевского Гос. ун-та, 1976, № 2.
103. **Шерман Д. И.** Об одном способе рассмотрения краевых задач теории функций и двумерных задач теории упругости. — В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа (к 80-летию Н. И. Мухелишвили). М., «Наука», 1972.

104. **Achenbach I. D., Nuismer R.** Fracture generated by a dilatational wave. Intern. J. Fract. Mech., 1971, vol. 7, No. 1.
105. **Atkinson C.** The propagation of a brittle crack in anisotropic material. Intern. J. Engng Sci., 1965, vol. 3, No. 6.
106. **Atkinson C.** A simple model of relaxed expanding crack. Archiv Phys., 1967, Bd. 35, H. 5.
107. **Baker B. R.** Dynamic stresses created by a moving cracks. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 3.
108. **Broberg K. B.** The propagation of a brittle crack. Archiv. Phys., 1960, Bd. 18, H. 2.
109. **Burridge R., Willis I. R.** The self—similar problem of the expanding elliptical crack in an anisotropic solid. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1969, vol. 66, p. 2.
110. **Cherepanov G. P., Taghi-Zade A. G.** Extension of Plates and Shells of Uniform Strength, Letters in Applied and Engng Science, N2, 1975.
111. **Cherepanov G. P., Taghi-Zade A. G.** Bending of Plates and Shells of Uniform Strength, Letters in Applied and Engng Science, N3, 1975.
112. **Cherepanov G. P., Optjmal Design of Some Filamentary Cylindrical Shells, Abstracts of Intern. Astronaut Congr., Amsterdam, 1974.**
113. **Cherepanov G. P., Smolky V. M. Taghi-Zade A. G.,** On Optimal Design of Some Engineering Materials. Journal of Engineering Materials and Technology Trans. ASME, 1975.
114. **Cherepanov G. P., Smolsky V. M.** An Application of Operation Research to Material Design. Paper on the second National Symposium on Computerized Structural Analysis and Design, March, 1976.
115. **Cherepanov G. P. Afanas'ev E. F.,** Some Dynamic Problems of the Theory of Elasticity, Intern. Journal of Engng. Sci., 1974, vol. 12, pp. 665—690.
116. **Craggs I. W.** The growth of a disk—shaped crack. Intern. J. Engng Sci., 1966, vol. 4, N2.
117. **Freeman R. I.** Computational Experience with a «Balasian» Integer Programming Algorithm, Operations Berearch, 1966, vol. 14, No. 15, 935—941.
118. **Freundl B.** Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading J. Mech. Phys. Solids, 1972, vol. 20, No. 3, 4; vol. 21, No. 2.
119. **Garg S. K., Svalbonas V., Gurtman G. A.** Analysis of Structural Composite Matirials, M. Dekker Inc., N.—Y., 1973.
120. **Gazic C.** Three—Dimensional Investigation of the Propagation of walles in Hollow Circular Cylinderes. Journal of the Acoust Society of America, 1959, vol. 31, N5.
121. **Green A. E. and Sneddon I. N.** The distribution of stresses in the neighborhood of a flat elliptical crack in an elastic solid., Proc. Cambridge Phil. Soc., vol. 116, p. 159, 1950.
122. **Greenspon I.** Vibration of Thick walled Cylindrical Shell. Comparisons of the Exact Theory with Approximate Theories. Journal of the Acoust Society of America.
123. **Herrman G., Mirsky I.** Three—dimensional and Shell Theory Analysis of Axially symmetric motions of Cylinders. J. Appl. Mech. 1956. Vol. 23, N4.
124. **Hoek E., Bieniawski Z.** Brittle fracture propagation in rock under compression. Intern. J. Fract. Mechanics, vol. 1, N3, 1965.
125. **Hoffman G. A.** The Effect of Filamentary Materials on Pressure Vessel Design, Proc. of Intern. Astronaut Congr. Pergamon Press, N.—Y., 1960.
126. **Irwin G. R.,** Crack extension force for a part—trough crack in a plate., Trans. ASME, ser. E, J. Appl. Mech., vol. 19, No. 4, 1962.
127. **Iahanshani A. A.** A diffraction problem and crack propagation. Trans. ASME, ser. E, J. Appl. Mech., 1967, vol. 34, No. 1.
128. **Kassir M. K. and Sih G. C.** Three dimensional thermoelastic problems of planes of discontinuity or cracks in solids. pp. 117—146 of shaw, 1967, W. A.
129. **Kelly A., Davies G. I.** The Principles of the Fibre Reinforcement of Metals, Metallurgical Reviews, vol. 10, No. 37, pp. 1—78, 1965.
130. **Lamb H.** Hydrodynamics, 6th Ed., Cambridge Univ. Press. 1932. Русский перевод: Г. Лэмб, Гидродинамика, 1932.

131. **Little I. D. C., Murty K. G., Sweenkey D. W., Karel G.**, — An algorithm for the Travelling Salesman Problem, *Operations Research*, 1963, No. 11, 972—989.
132. **Maue A. W.** Die Beugung elastischer Wellen an der Halbebene. *ZAMM*, 1953, Bd. 33, H. 1—2.
133. **Maue A. W.** Die Entspannungs—well bei plötzlichem Einschni eines gespannten elastischen kovpevs. *ZAMM*, 1954, Bd. 34, H. 1—2.
134. **Neuber H.** Zur optimierung der Spannungs—konzentration. В кн. *Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа*. М., «Наука», 1972.
135. **Nghiem Ph. Tuan.** A Flexible Tree—Search Method for Integer Programming Problems, *Operations Research*, 1971, vol. 19, No. 1, 115—122.
136. **Noble B.** *Methods Based on the Wiener—Hopf Tecnique for the Solution of Partial Differential Equations*, Pergamon Press, 1958.
137. **Radok I. R. M.** On the solutions of problems of dynamic plane elasticity, *Quart. Appl. Math.*, 1956, vol. 14, No. 3.
138. **Sadowsky M. A. and Sternberg E.** Stress concentration around ellipsoidal cavity, *J. Appl. Mech.*, vol. 16, p. 149, 1949.
139. **Schuerch M. U., Burggraf O. R.** *Analytical Design for Optimum Filamentary Pressure Vessels*, ARSI, vol. 34, No. 5, 1964.
140. **Sih G. C.** *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Recent Developments in Fracture Mechanics. Theory and Methods of Solving Crack Problems.* Noordhoff Internation Publishing Leyden 1973.
141. **Sih G. C.** Some elastodynamic problems of crack., *Intern. J. Fract. Mech.*, 1968, vol. 4, No 1.
142. **Sommerfeld A.** *Vorlesungen über theoretixhe physik.* Bd. 4 (optik). Wiesbaden, 1950.
143. **Tada H., Paris P. C., Irwin G. R.** *The Stress Analysis of Cracks*, Hanbbook. DEL Research Corporation. 1973.
144. **Webb D., Atkinson C.** A note on a penny—shaped crack expanding under a non—uniform internal pressure. *Int. J. Engng. Sci.*, vol. 7, No. 6, 1969.
145. **Westergard H. M.** Bearing pressures and cracks., *J. Appl. Mech.*, vol. 6, No. 2, 1939.
146. **Whittaker E. T. and Watson G. N.** *A Course of Modern Analysis*, Camb. Univ. Press, 1927. Русский перевод: Уиттекер и Ватсон. Курс современного анализа т. 2, 1934.

Введение		3
Г л а в а	I. Оптимальное проектирование конструкций	5
	§ 1. Принцип равнопрочности	5
	§ 2. Простейшие стержневые системы	8
	§ 3. Равнопрочная безмоментная нить	13
	§ 4. Подводные трубопроводы	17
	§ 5. Сосуды давления, навитые из волокон	23
	§ 6. Безмоментные оболочки	29
	§ 7. Общие уравнения теории растяжения равнопрочных пластин и безмоментных оболочек	33
	§ 8. Общие уравнения теории изгиба равнопрочных пластин и оболочек	38
	§ 9. Изгиб равнопрочных балок и пластин	44
Г л а в а	II. Разнопрочные отверстия в упругих телах	48
	§ 1. Постановка задачи и основные соотношения	48
	§ 2. Метод решения краевой задачи	50
	§ 3. Одно или два отверстия	52
	§ 4. Периодическая задача	58
	§ 5. Двойкопериодическая задача	61
	§ 6. Приложение к теории конструкций минимальной массы	67
	§ 7. Численные примеры расчета некоторых перфорированных пластин с двойкопериодической системой равнопрочных отверстий	68
	§ 8. Интегральное уравнение обратной задачи плоской теории упругости	72
Г л а в а	III. Оптимальное проектирование некоторых многослойных материалов	77
	§ 1. Принцип равнопрочности	77
	§ 2. Выбор материалов	78
	§ 3. Плосконапряженное состояние многослойных клееных панелей	80
	§ 4. Некоторые задачи оптимального проектирования	82
	§ 5. Метод решения задачи оптимального проектирования	87
	§ 6. Целевой алгоритм перебора	90
	§ 7. Компромиссный критерий	90
	§ 8. Численные примеры	91
		223

Глава	IV. Метод внешних и внутренних разложений в механике разрушения	95
	§ 1. Общий метод	95
	§ 2. Уравнения деформирования дискретно-армированного континуума	97
	§ 3. Отверстия и полости в упругих телах	101
Глава	V. Теория «горячих» трещин	104
	§ 1. Постановка задачи	104
	§ 2. Кинетика роста горячей трещины	105
	§ 3. Асимптотический размер горячих трещин	108
	§ 4. Хрупкое разрушение от локального нагрева	110
Глава	VI. Некоторые динамические задачи механики хрупкого разрушения	113
	§ 1. Общие представления. Метод решения	113
	§ 2. Первая основная задача	123
	§ 3. Задачи со щелями	125
	§ 4. Контактные задачи	130
	§ 5. Функционально-инвариантные решения волнового уравнения	135
	§ 6. Установившиеся колебания пространства с разрезом	138
	§ 7. Воздействие импульсных нагрузок на разрез	144
	§ 8. Решение обобщенной задачи Бэйкера	147
Глава	VII. Некоторые динамические задачи прочности упругих толстостенных конструкций цилиндрической формы	153
	§ 1. Общие положения	153
	§ 2. Напряженно-деформированное состояние полого цилиндра бесконечной длины при стационарном нагружении	155
	§ 3. Динамика полого цилиндра бесконечной длины при нестационарном нагружении боковой поверхности	161
	§ 4. Напряжения и деформации, возникающие в упругом кольце под действием динамического нагружения	166
	§ 5. Случайное нагружение толстостенной упругой цилиндрической конструкции. Плоская задача	169
Глава	VIII. К теории устойчивости выработок в горном массиве	174
	§ 1. Постановка задачи	174
	§ 2. Метод решения задачи	175
	§ 3. Построение решения	180
	§ 4. Пространство с эллиптической трещиной под действием изгиба	189
	§ 5. Пространство с эллиптической трещиной под действием растяжения	194
	§ 6. Приложение к горному делу	197
	§ 7. Устойчивость горных откосов и открытых выработок	200
	§ 8. Природа горного удара в подземных выработках	205
	§ 9. Предупреждение горных ударов с использованием энергии взрыва	208
Список литературы		217

ПОПРАВКА

На с. 5 в сноске вместо слов: «Эта глава написана совместно с А. Г. Таги-заде» следует читать: Параграфы 3, 7 и 8 этой главы написаны совместно с А. Г. Таги-заде.

Примечание на с. 47 относится к с. 25.

96 коп.



«МАШИНОСТРОЕНИЕ»