METHODS OF
MODERN MATHEMATICAL PHYSICS

II: FOURIER ANALYSIS, SELF-ADJOINTNESS

MICHAEL REED

Department of Mathematics
Duke University

BARRY SIMON

Departments of Mathematics
and Physics
Princeton University

ACADEMIC PRESS NEW YORK SAN FRANCISCO LONDON

A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers

1975

М. Рид, Б. Саймон

МЕТОДЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

2

Гармонический анализ
Самосопряженность

Перевод с английского

А. К. ПОГРЕБКОВА и В. Н. СУШКО

Под редакцией

М. К. ПОЛИВАНОВА

Издательство „Мир"
Москва 1978

ОГЛАВЛЕНИЕ

УДК 517.43:519.55

Второй том обширной монографии, задуманной авторами как изложение основных идей и методов современной математической физики, посвящен различным вопросам гармонического анализа и теории операторов в гильбертовом пространстве. Подробно изложена теория преобразований Фурье в классических пространствах и пространствах обобщенных функций, функциональные методы решения уравнений математической физики, теория расширений симметрических операторов, критерии самосопряженности, основы теории полугрупп и ряд других вопросов. В отличие от существующих математических руководств весь излагаемый материал представлен в форме, приспособленной к прямому применению в физических задачах, и проиллюстрирован многочисленными примерами. В частности, обсуждается теория лоренц-инвариантных мер и аксиомы Гординга — Вайтмана, применяемые в квантовой теории поля, описывается корректное построение свободного скалярного поля и связанных с ним представлений вейлевых коммутационных соотношений, формула Фейнмана — Каца и ее применения при решении динамических задач квантовой механики и квантовой теории поля. Замечания и задачи в конце каждой главы указывают развитие изложенных в основном тексте идей как в математическом, так и в физическом направлении.

Своеобразный подход авторов к материалу делает книгу интересной для всех, кто занимается функциональным анализом и его применениями.

Редакция литературы по математическим наукам

Р $\frac{20204-008}{041(01)-78}$ 8—78

Нашим родителям
Элен и Джеральду Ридам
Минни и Хаю Саймонам

ПРЕДИСЛОВИЕ

Этой книгой мы продолжаем нашу серию книг, посвященных методам функционального анализа в математической физике. В первом томе было объявлено содержание второго. Однако при подготовке материала нам стало ясно, что невозможно изложить все задуманное в одном томе с достаточной глубиной. Поэтому данный том включает лишь главы IX и X; мы надеемся в ближайшем будущем выпустить третий том, который будет содержать остальной материал по теории операторов. В качестве продолжения мы надеемся выпустить еще один том, посвященный алгебраическим методам.

Мы с удовольствием приносим благодарность

Э. Нельсону за чтение главы X и критические замечания; В. Бекнеру, X. Кальфу, Р. С. Филлипсу и А. С. Вайтману за чтение отдельных разделов;

многим другим нашим коллегам за ряд ценных предложений;

Ф. Армстронг за перепечатку большей части первого варианта рукописи;

Д. Хагедорн, Р. Израэль и Р. Вольперт за помощь в чтении корректур;

издательству «Академик Пресс» за помощь и терпение; Национальному научному фонду и фонду Альфреда П. Слоуна за финансовую поддержку;

Джеки и Марте за ободрение и понимание.

Июнь 1975

Майк Рид
Барри Саймон

ВВЕДЕНИЕ

Тот, кто занимается функциональным анализом,— прежде всего аналитик, а не выродившийся представитель топологов.

Э. ХИЛЛЕ

Большая часть книг по функциональному анализу страдает одним серьезным недостатком, который отчасти свойствен и первому тому нашего курса «Методов математической физики». Именно, предмет излагается в абстрактной и элегантной форме, как правило, без всякой связи с приложениями. Поэтому студенты, обучающиеся по этим книгам, не подозревают, что почти все глубокие идеи функционального анализа выросли непосредственно из «приложений» либо к классическим областям анализа, таким, как гармонический анализ или дифференциальные уравнения в частных производных, либо к другим наукам, в первую очередь к физике. Так, например, классическая теория электромагнитного потенциала побудила Фредгольма обратиться к интегральным уравнениям, что в свою очередь привело Гильберта, Шмидта, Г. Вейля и Рисса к построению абстрактных понятий гильбертова пространства и созданию теории компактных операторов. Квантовая механика послужила тем импульсом, который натолкнул фон Неймана на развитие теории неограниченных операторов, а позже привел его к работе над алгебрами операторов.

Однако невежество в истории вопроса—еще не самое страшное. Хуже, что студенты начинают считать абстрактное направление исследований в функциональном анализе наиболее плодотворным. Однако, по нашему мнению, дело обстоит как раз наоборот. Мы, конечно, не считаем абстрактное направление совершенно бесполезным, напротив, его роль очень важна—выделить идею из конкретной ситуации, освободить ее от всего лишнего и сделать возможно более простой и в то же время применимой к широкому кругу явлений. Но наиболее важно именно изучение конкретных приложений, а отнюдь не ответы на абстрактные вопросы об абстрактных объектах ради них самих.

В этом томе есть и абстрактные результаты, и приложения, но зато следующий будет содержать в основном приложения. Наше намерение состоит в том, чтобы предложить читателю полного курса сбалансированную точку зрения.

Мы надеемся, что этот том послужит нескольким целям. Для студентов, прежде незнакомых с излагаемыми здесь вопросами, он станет введением в обширный круг важных задач, а для специалистов по математической физике, уже работающих в этой области,—справочным пособием; кроме того, мы хотели познакомить читателей с более сложными и современными исследованиями, в которых нелегко разобраться по текущей литературе. Не все методы и приложения рассматриваются с одинаковой глубиной. Как правило, мы очень подробно обсуждаем математический аппарат и приложения в квантовой механике, но даем лишь беглое введение в задачи квантовой теории поля, классической механики и теории дифференциальных уравнений в частных производных. Наконец, некоторые из методов, развитых здесь, найдут свои приложения только в третьем томе. По всем этим причинам настоящий том охватывает очень разнообразный материал. Чтобы помочь читателю отобрать то, что его интересует, мы помещаем в конце каждой главы «Указания читателю».

Как и в первом томе, каждая глава содержит раздел под названием «Замечания». В нем даются литературные ссылки, а иногда проводится более подробное обсуждение отдельных вопросов, затронутых в основном тексте. Исторические комментарии всегда имеют тот недостаток, что отражают познания и предубеждения авторов, а в такой области математики, которая вырастает прямо из прикладных задач, проблема установления приоритета особенно трудна. Обычно в развитии такой теории наблюдаются два этапа. Сначала создается некоторый частный метод (как правило, очень трудный, связанный с длинными вычислениями и часто не строгий) решения небольшого класса задач. Позже выясняется, что этот метод содержит идеи, которыми можно воспользоваться в применении к другим задачам, и потому становится важным изучение метода самого по себе. Тогда эти идеи выделяются, изучаются на абстрактном уровне и приводятся в систему. Во вновь разработанном формализме исходная задача становится простым частным случаем. В такой ситуации часто не вполне ясно, какие из математических идей уже содержались в исходной работе. Кроме того, приписывание заслуги открытия может зависеть от того, что мы раньше узнали—старый метод вычисления или новый, более простой, но гораздо более абстрактный. Мы очень надеемся, что в таких случаях читатель будет принимать наши замечания только как указание на литературу, а не как суждение об исторической значимости той или другой из цитированных статей.

В заключение каждой главы мы предлагаем набор задач. Так же, как и в первом томе, мы время от времени переносим отдельные части доказательств в эти задачи, чтобы побудить читателя самого принять участие в развитии математики. Задачи, которые заполняют пробелы в тексте, помечены крестиком. Трудные задачи помечены звездочкой. Мы настоятельно советуем читателям решать задачи, потому что это наилучший способ изучать математику.

СОДЕРЖАНИЕ ДРУГИХ ТОМОВ

IX. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Следовательно, уравнение состояния имеет вид

$$F(x)=\int dqQ\cos qx.$$

Если бы мы подставили вместо Q какую-нибудь функцию от q и выполнили интегрирование от $q=0$ до $q=\infty$, то нашли бы некоторую функцию от x; требуется решить обратную задачу, т. е. установить, какая функция от q, будучи подставленной вместо Q, приведет в результате к заданной функции $F(x)$, — весьма замечательная задача, решение которой требует пристального изучения.

ЖОЗЕФ ФУРЬЕ

IX. 1. Преобразование Фурье на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Свертка

Преобразование Фурье — это инструмент, одинаково важный как в классическом, так и в современном анализе. Мы начнем с того, что определим прямое и обратное преобразования Фурье на пространстве Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ быстро убывающих функций из C^∞.

Определение. Пусть $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. **Преобразование Фурье** функции f есть функция $\hat{f}$, задаваемая равенством

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-i\mathbf{x}\cdot\lambda}f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},$$

где $\mathbf{x}\cdot\lambda=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\lambda_i$. **Обратное преобразование Фурье** функции f, обозначаемое $\check{f}$, есть функция

$$\check{f}(\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{i\mathbf{x}\cdot\lambda}f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Иногда мы будем писать $\hat{f}=\mathscr{F}f$.

Поскольку каждая функция из пространства Шварца лежит в $L^1(\mathbb{R}^n)$, предыдущие интегралы имеют смысл. Многие авторы начинают с обсуждения преобразования Фурье на $L^1(\mathbb{R}^n)$. Мы решили начать с пространства Шварца по двум причинам. Во-первых, преобразование Фурье — взаимно однозначное отображение пространства Шварца на себя (теорема IX.1). Это сразу облегчает переход к обратному преобразованию Фурье, которое, разумеется, есть просто обратное отображение. Иными словами, на пространстве Шварца прямое и обратное преобразования Фурье можно изучать единообразно. Хотя все это справедливо и для преобразования Фурье на $L^2(\mathbb{R}^n)$ (см. теорему IX.6), задать его на $L^2(\mathbb{R}^n)$ непосредственно с помощью интегральной формулы невозможно, так как функции из $L^2(\mathbb{R}^n)$ не обязаны лежать в $L^1(\mathbb{R}^n)$ и потребуется некоторый предельный переход. Во-вторых, коль скоро известно, что преобразование Фурье — взаимно однозначное ограниченное отображение $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, легко продолжить его на $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Как раз это продолжение играет основную роль в приложениях; см. § 5, 6 и 8.

Мы будем пользоваться стандартными мультииндексными обозначениями: мультииндекс

$$\alpha = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$$

— это n неотрицательных целых чисел. Множество всех мультииндексов будет обозначаться I_+^n. Символы $|\alpha|$, x^α, D^α и x^2 определяются следующим образом:

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i,$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Для доказательства того, что преобразования $\hat{}$ и $\check{}$ взаимно обратны, покажем, что справедлива такая

Лемма. Отображения $\hat{}$ и $\check{}$ суть непрерывные линейные отображения $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Далее, если α и β — мультииндексы, то

$$((i\lambda)^\alpha D^\beta \hat{f})(\lambda) = \widehat{D^\alpha ((-ix)^\beta f(x))}(\lambda). \tag{IX.1}$$

Доказательство. Отображение $\hat{}$, очевидно, линейно. Поскольку

$$(\lambda^\alpha D^\beta \hat{f})(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^\alpha (-ix)^\beta e^{-i\lambda\cdot x} f(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(-i)^\alpha} (D_x^\alpha e^{-i\lambda\cdot x}) (-ix)^\beta f(x)\, dx =$$

$$= \frac{(-i)^\alpha}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x} D_x^\alpha ((-ix)^\beta f(x))\, dx,$$

заключаем, что

$$\|\hat{f}\|_{\alpha,\beta} = \sup_{\lambda} |\lambda^{\alpha}(D^{\beta}\hat{f})(\lambda)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int |D_x^{\alpha}(x^{\beta}f)|\,dx < \infty;$$

поэтому $\hat{}$ переводит $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и справедливо соотношение (IX.1). Более того, если k достаточно велико, так что $\int (1+x^2)^{-k}\,dx < \infty$, то

$$\|\hat{f}\|_{\alpha,\beta} \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+x^2)^{-k}}{(1+x^2)^{-k}} |D_x^{\alpha}(-ix)^{\beta} f(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+x^2)^{-k}\,dx \right) \sup_x \{(1+x^2)^{+k} \cdot |D_x^{\alpha}(-ix)^{\beta} f(x)|\}.$$

Применяя правило Лейбница, легко получаем, что существуют такие мультииндексы α_j и β_j и константы c_j, что

$$\|\hat{f}\|_{\alpha,\beta} \leqslant \sum_{j=1}^{M} c_j \|f\|_{\alpha_j,\beta_j}.$$

Итак, отображение $\hat{}$ ограничено и, следовательно, по теореме V.4, непрерывно. Для отображения $\check{}$ доказательство аналогично. ∎

Теперь мы готовы доказать теорему обращения Фурье. Приводимое доказательство использует первоначальную идею Фурье.

Теорема IX.1 (теорема обращения Фурье). Преобразование Фурье — линейная взаимно непрерывная биекция $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Отображение, обратное к нему, — обратное преобразование Фурье, т. е. $\check{\hat{f}} = f = \hat{\check{f}}$.

Доказательство. Докажем, что $\check{\hat{f}} = f$. Доказательство равенства $\hat{\check{f}} = f$ проводится так же. Из $\hat{\check{f}} = f$ следует, что отображение $\hat{}$ сюръективно, а из $\check{\hat{f}} = f$ — что $\hat{}$ инъективно. Поскольку $\hat{}$ и $\check{}$ — непрерывные отображения $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, достаточно доказать равенство $\check{\hat{f}} = f$ для всех функций f, содержащихся в плотном множестве $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Пусть C_ε — куб в $\mathbb{R}^n$ объема $(2/\varepsilon)^n$ с центром в начале координат. Выберем ε достаточно малым так, чтобы носитель f содержался в C_ε. Положим

$$K_\varepsilon = \{k \in \mathbb{R}^n \mid \text{каждое число } k_i/\pi\varepsilon \text{ — целое}\}.$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{k \in K_\varepsilon} \left(\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^{n/2} e^{ik\cdot x}, f \right) \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^{n/2} e^{ik\cdot x}$$

— не что иное, как ряд Фурье для f, равномерно сходящийся в C_ε к f в силу непрерывной дифференцируемости f (теорема II.8). Итак,

$$f(x) = \sum_{k \in K_\varepsilon} \frac{\hat{f}(k)\, e^{ik\cdot x}}{(2\pi)^{n/2}} (\pi\varepsilon)^n. \tag{IX.2}$$

Поскольку $\mathbb{R}^n$ — объединение непересекающихся кубов объема $(\pi\varepsilon)^n$ с центрами в точках из K_ε, то правая часть (IX.2) оказывается римановой суммой для интеграла от функции $\hat{f}(k)\, e^{ik\cdot x}/(2\pi)^{n/2}$. По доказанной лемме $\hat{f}(k)\, e^{ik\cdot x} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, так что римановы суммы сходятся к интегралу. Итак, $\check{\hat{f}} = f$. ∎

Следствие. Пусть $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(k)|^2\, dk.$$

Доказательство. Это следствие вытекает скорее из доказательства, чем из утверждения теоремы IX.1. Если f имеет компактный носитель, то для достаточно малых ε

$$f(x) = \sum_{k \in K_\varepsilon} \left(\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^{n/2} e^{ik\cdot x},\ f(x)\right) \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^{n/2} e^{ik\cdot x}.$$

Поскольку $\left\{\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^{n/2} e^{ik\cdot x}\right\}_{k \in K_\varepsilon}$ — ортонормированный базис в $L^2(C_\varepsilon)$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx = \int_{C_\varepsilon} |f(x)|^2\, dx =$$

$$= \sum_{k \in K_\varepsilon} \left|\left(\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^{n/2} e^{ik\cdot x},\ f(x)\right)\right|^2 =$$

$$= \sum_{k \in K_\varepsilon} |\hat{f}(k)|^2 (\pi\varepsilon)^n \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(k)|^2\, dk.$$

Это доказывает следствие для $f \in C_0^\infty$. Так как отображение $\hat{}$ и норма $\|\cdot\|_2$ непрерывны на $\mathscr{S}$, а C_0^∞ плотно в нем, этот результат справедлив на всем $\mathscr{S}$. ∎

Пример 1. Вычислим фурье-образ функции $f(x)=e^{-\alpha x^2/2}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, где $\alpha>0$:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2/2}e^{-i\lambda\cdot x}\,dx=\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\exp\left(-t^2-it\lambda\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right)dt=\\&=\frac{e^{-\lambda^2/2\alpha}}{\sqrt{\alpha\pi}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\left(t+i\frac{\lambda}{\sqrt{2\alpha}}\right)^2\right]dt=\\&=\frac{e^{-\lambda^2/2\alpha}}{\sqrt{\alpha\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-t^2}\,dt=\frac{e^{-\lambda^2/2\alpha}}{\sqrt{\alpha}}.\end{aligned}$$

Предпоследнее равенство вытекает из интегральной формулы Коши с учетом экспоненциального убывания функции e^{-z^2} вдоль прямых, параллельных оси x.

Определим теперь преобразование Фурье на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Определение. Пусть $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда преобразование Фурье от T, обозначаемое $\hat{T}$, есть обобщенная функция умеренного роста, задаваемая равенством $\hat{T}(\varphi)=T(\hat{\varphi})$.

Предположим, что $h,\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; тогда в силу поляризационного тождества и следствия теоремы IX.1 имеем $(h,\varphi)=(\hat{h},\hat{\varphi})$. Подставляя $\overline{\hat{g}}=\check{\bar{g}}$ вместо h, находим

$$T_{\hat{g}}(\varphi)=\int\hat{g}(x)\varphi(x)\,dx=\int g(x)\hat{\varphi}(x)\,dx=T_g(\hat{\varphi})=\hat{T}_g(\varphi),$$

где $T_{\hat{g}}$ и T_g — обобщенные функции, соответствующие функциям $\hat{g}$ и g соответственно. Эта выкладка показывает, что преобразование Фурье на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ есть продолжение преобразования, определенного ранее на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема IX.2. Преобразование Фурье — взаимно однозначная линейная биекция $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, являющаяся единственным слабо непрерывным продолжением преобразования Фурье, заданного на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Если $\varphi_n\xrightarrow{\mathcal{S}}\varphi$, то по теореме IX.1 $\hat{\varphi}_n\xrightarrow{\mathcal{S}}\hat{\varphi}$, так что $T(\hat{\varphi}_n)\to T(\hat{\varphi})$ для каждого T в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Поэтому $\hat{T}(\varphi_n)\to\hat{T}(\varphi)$, откуда видно, что $\hat{T}$ — непрерывный линейный функционал на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Помимо этого, если $T_n\xrightarrow{w}T$, то $\hat{T}_n\xrightarrow{w}\hat{T}$, поскольку из $T_n(\hat{\varphi})\to T(\hat{\varphi})$ следует, что $\hat{T}_n(\varphi)\to\hat{T}(\varphi)$. Итак, отображение $T\mapsto\hat{T}$ слабо непрерывно.

Остальные свойства преобразования $\hat{}$ немедленно следуют из соответствующих утверждений для $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (см. задачу 19 гл. V). ∎

Пример 2. Вычислим фурье-образ производной дельта-функции в точке $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_b'(\varphi) &= \delta_b'(\hat{\varphi}) = \\ &= \delta_b\left(-\frac{d}{d\lambda}\hat{\varphi}(\lambda)\right) = \\ &= \delta_b\left(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\right)\int e^{-i\lambda x}(ix)\,\varphi(x)\,dx = \\ &= \int\left(\frac{ixe^{-ibx}}{\sqrt{2\pi}}\right)\varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Итак, фурье-образ δ_b' есть функция $ixe^{-ibx}/\sqrt{2\pi}$.

Введем теперь новую операцию над функциями.

Определение. Пусть $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда **сверткой** f и g, обозначаемой $f * g$, называется функция

$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y - x)\,g(x)\,dx.$$

Свертки возникают во многих ситуациях (мы уже фактически пользовались этим понятием в § VIII.1 при рассмотрении замкнутых операторов). В § 4 мы с помощью интерполяционных теорем получим L^p-оценки свертки $f * g$, выраженные через f и g. В этом разделе мы остановимся на свойствах свертки как отображения из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. На основе этих свойств будет показано, что свертку можно продолжить до отображения из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ в O_M^n, т. е. в пространство полиномиально ограниченных функций из C^∞. Свертки часто возникают в контексте преобразования Фурье, так как преобразование Фурье переводит произведения в свертки (теорема IX.3 (b) и теорема IX.4 (c)).

Теорема IX.3.

(a) Для каждой функции $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ отображение $g \longmapsto f * g$ из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ непрерывно.

(b) $\widehat{fg} = (2\pi)^{-n/2}\hat{f} * \hat{g}$ и $\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2}\hat{f}\,\hat{g}$.

(c) Для $f, g, h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ имеем $f * g = g * f$ и $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Доказательство. Исходя из поляризационного тождества и следствия теоремы IX.1, находим, что $(\varphi, \psi) = (\hat{\varphi}, \hat{\psi})$ для $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Фиксируя некоторое $y \in \mathbb{R}^n$ и применяя это равенство к $e^{iy\cdot x}\overline{f}(x)$

и g, получаем $(e^{iy\cdot x}\overline{f}, g) = (\widehat{e^{iy\cdot x}\overline{f}}, \hat{g})$. Но

$$(e^{iy\cdot x}\overline{f}, g) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot x} f(x)\, g(x)\, dx$$

и

$$(\widehat{e^{iy\cdot x}\overline{f}}, \hat{g}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\overline{(2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x + iy\cdot x}\, \overline{f(x)}\, dx}\right) \hat{g}(\lambda)\, d\lambda =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y-\lambda)\, \hat{g}(\lambda)\, d\lambda,$$

откуда следует, что $\widehat{fg} = (2\pi)^{-n/2} \hat{f} * \hat{g}$. С помощью обратного преобразования Фурье это утверждение можно сформулировать так:

$$(2\pi)^{n/2}\, \widehat{\check{f}\, \check{g}} = f * g.$$

Это показывает, что свертка как отображение $g \mapsto f * g$ есть композиция следующих операций: обратного преобразования Фурье, умножения на $(2\pi)^{n/2}\check{f}$ и прямого преобразования Фурье. Отсюда вытекает непрерывность свертки.

Утверждения пункта (c) тривиально следуют из (b). ∎

Для того чтобы продолжить отображение C_f: $g \mapsto f * g$ на $\mathcal{S}'$, найдем сначала непрерывное отображение $\tilde{C}_f'$: $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$, такое, что $\tilde{C}_f' \restriction \mathcal{S} = C_f$, а затем по определению будем считать $\tilde{C}_f'$ сверткой на $\mathcal{S}'$.

Определение. Предположим, что $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, и пусть $\tilde{f}(x)$ обозначает $f(-x)$. Тогда **свертка** T и f, обозначаемая $T * f$, есть обобщенная функция из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, задаваемая формулой

$$(T * f)(\varphi) = T(\tilde{f} * \varphi)$$

для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

То, что $T * f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, следует из непрерывности отображения $g \mapsto \tilde{f} * g$. Свойства построенного продолжения свертки резюмирует приводимая ниже теорема.

Пусть f_y обозначает функцию $f_y(x) = f(x-y)$, а $\tilde{f}_y$ — функцию $f(y-x)$. В тех случаях, когда f задается очень длинным выражением $(\ldots)$, мы иногда будем писать $(\ldots)^{\sim}$ вместо $(\tilde{\ldots})$.

Теорема IX.4. Для каждой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ отображение $T \mapsto T * f$ есть слабо непрерывное отображение $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, являющееся продолжением свертки, заданной на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Кроме того:

(a) $T*f$—полиномиально ограниченная функция из C^∞, т. е. $T*f\in O_M^n$. При этом $(T*f)(y)=T(\tilde{f}_y)$ и

$$D^\beta(T*f)=(D^\beta T)*f=T*D^\beta f, \qquad \text{(IX.3)}$$

(b) $(T*f)*g=T*(f*g)$,

(c) $\widehat{(T*f)}=(2\pi)^{n/2}\hat{f}\hat{T}$.

Доказательство. Поскольку отображение $T\mapsto T*f$ определено как сопряженное к ограниченному отображению из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$, оно автоматически слабо непрерывно. То, что оно продолжает свертку, заданную на $\mathscr{S}$, доказывается тривиальной заменой переменных. Свойства (IX.3), (b) и (c) сразу же следуют из соответствующих свойств свертки при $T\in\mathscr{S}$, а также свойства слабой плотности $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}'$ и того, что все операции: $\mathscr{F}$, D^β, умножение на $\hat{f}$ и свертка—слабо непрерывны на $\mathscr{S}'$.

Остается доказать первую часть пункта (a). Так как $T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, то из теоремы регулярности (теорема V.10) следует, что существуют ограниченная непрерывная функция h, целое положительное r и мультииндекс β, такие, что

$$T(\tilde{f}_y)=\int_{\mathbb{R}^n} h(x)(1+x^2)^r(D^\beta f)(y-x)\,dx.$$

Поскольку $D^\beta f\in\mathscr{S}$, то $T(\tilde{f}_y)$—бесконечно дифференцируемая функция y. Замена переменных $\tau=y-x$ показывает, что

$$|T(\tilde{f}_y)|\leqslant\|h\|_\infty\int_{\mathbb{R}^n}(1+x^2)^r|(D^\beta f)(y-x)|\,dx=$$
$$=\|h\|_\infty\int_{\mathbb{R}^n}(1+(y-\tau)^2)^r|D^\beta f(\tau)|\,d\tau,$$

откуда легко следует, что отображение $y\mapsto T(\tilde{f}_y)$ полиномиально ограничено. Аналогичное доказательство проходит и для производных функции $y\mapsto T(\tilde{f}_y)$. Итак, $T(\tilde{f}_y)\in O_M^n$.

Предположим, что обобщенная функция $S\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ задается полиномиально ограниченной непрерывной функцией s. Тогда, по теореме Фубини, для $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ находим

$$\begin{aligned}(S*f)(\varphi)&\equiv S(\tilde{f}*\varphi)=\\&=\int s(x)\Big(\int\tilde{f}(x-y)\,\varphi(y)\,dy\Big)dx=\\&=\int\Big(\int s(x)\,\tilde{f}_y(x)\,dx\Big)\varphi(y)\,dy=\\&=(S(\tilde{f}_y))(\varphi),\end{aligned}$$

так что $S*f=S(\tilde{f}_y)$. По теореме регулярности в общем случае $T=D^\alpha S$ для некоторой S рассматриваемого типа. Таким образом, согласно (IX.3),

$$\begin{aligned} T*f &= (D^\alpha S)*f = S*D^\alpha f = \\ &= S((D^\alpha f)_{\tilde{y}}) = (-1)^{|\alpha|} S(D^\alpha(\tilde{f}_y)) = \\ &= D^\alpha S(\tilde{f}_y) = T(\tilde{f}_y), \end{aligned}$$

что завершает доказательство. ∎

Теорема IX.5. Пусть $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\widehat{fT} \in O_M^n$ и $\widehat{fT}(k) = (2\pi)^{-n/2} T(fe^{-ik\cdot x})$. В частности, если T имеет компактный носитель и функция $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ тождественно равна единице в окрестности носителя T, то

$$\hat{T}(k) = (2\pi)^{-n/2} T(\psi e^{-ik\cdot x}).$$

Доказательство. По теореме IX.4 (c) и формуле обращения преобразования Фурье имеем $\widehat{fT} = (2\pi)^{-n/2} \hat{f} * \hat{T}$. Следовательно, $\widehat{fT} \in O_M^n$ и

$$\begin{aligned} \widehat{fT}(k) &= (2\pi)^{-n/2} \hat{T}(\tilde{\hat{f}}_k) = \\ &= (2\pi)^{-n/2} T(e^{-ik\cdot x} f). \ ∎ \end{aligned}$$

Заметим, что можно также определить свертку обобщенной функции $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ с функцией $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, полагая $(T*f)(y) = T(\tilde{f}_y)$. Доказательство, аналогичное доказательству теоремы IX.4, показывает, что $T*f$ есть функция из C^∞ (но не обязательно полиномиально ограниченная) и что справедливо равенство (IX.3).

Мы уже ввели понятие «аппроксимативной единицы» в § VIII.1. Теперь дадим

Определение. Пусть $j(x)$ — положительная функция из C^∞, носитель которой лежит внутри единичной сферы с центром в начале координат в $\mathbb{R}^n$, причем $\int j(x)\,dx = 1$. Последовательность функций $j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} j(x/\varepsilon)$ называется **аппроксимативной единицей.**

Предложение. Предположим, что $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, и пусть $j_\varepsilon(x)$ — аппроксимативная единица. Тогда $T*j_\varepsilon \to T$ слабо при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Если $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, то $(T*j_\varepsilon)(\varphi) = T(\tilde{j}_\varepsilon * \varphi)$ и достаточно показать, что $\tilde{j}_\varepsilon * \varphi \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)} \varphi$, а для этого в свою очередь достаточно показать, что $(2\pi)^{n/2} \hat{j}_\varepsilon \hat{\varphi} \xrightarrow{\mathscr{S}} \hat{\varphi}$. Так как $\hat{j}_\varepsilon(\lambda) = \hat{j}(\varepsilon\lambda)$ и $\hat{j}(0) = (2\pi)^{-n/2}$, то последовательность $(2\pi)^{n/2} \hat{j}_\varepsilon(x)$ сходится к 1 (равномерно на компактных множествах) и равномерно ограничена. Аналогично, $D^\alpha \hat{j}_\varepsilon$ равномерно сходится к нулю. Отсюда следует, что $(2\pi)^{n/2}\hat{j}_\varepsilon\hat{\varphi} \xrightarrow{\mathscr{S}} \hat{\varphi}$. ∎

IX.2. Область значений преобразования Фурье. Классические пространства

Мы определили преобразование Фурье на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. В этом разделе и далее в § IX.3 и IX.9 мы исследуем область значений преобразования Фурье, когда это преобразование сужено на различные подмножества из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Подобные задачи очень естественны и имеют исторический интерес, но, что важнее,— описание области значений преобразования Фурье очень полезно само по себе. В самом деле, часто легко изучить фурье-образ функции и хотелось бы знать, что из этого следует для самой функции. Начнем с двух теорем, легко вытекающих из построений § IX.1.

Теорема IX.6 (теорема Планшереля). Преобразование Фурье однозначно продолжается до унитарного отображения $L^2(\mathbb{R}^n)$ на $L^2(\mathbb{R}^n)$. Обратное преобразование однозначно продолжается до сопряженного отображения.

Доказательство. Следствие теоремы IX.1 утверждает, что если $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, то $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. Так как $\mathscr{F}[\mathscr{S}] = \mathscr{S}$, то $\mathscr{F}$ — сюръективная изометрия на $L^2(\mathbb{R}^n)$. ∎

Теорема IX.7 (лемма Римана—Лебега). Преобразование Фурье однозначно продолжается до ограниченного отображения из $L^1(\mathbb{R}^n)$ во множество $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ непрерывных функций, исчезающих на ∞.

Доказательство. Для $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ известно, что $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, поэтому $\hat{f} \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Оценка

$$\|\hat{f}\|_\infty \leqslant (2\pi)^{-n/2}\|f\|_1$$

тривиальна. Преобразование Фурье является, следовательно, ограниченным линейным отображением в $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ множества, плотного в $L^1(\mathbb{R}^n)$. По теореме об ограниченном линейном отображении оно однозначно продолжается до ограниченного линейного отображения всего пространства $L^1(\mathbb{R}^n)$ в $C_\infty(\mathbb{R}^n)$. ∎

Заметим, что преобразование Фурье переводит $L^1(\mathbb{R}^n)$ «в», а не «на» $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ (задача 16).

Свойства основных функций позволяют заключить, что продолжения преобразования Фурье на $L^1(\mathbb{R}^n)$ и $L^2(\mathbb{R}^n)$ суть сужения преобразования Фурье, заданного на $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, однако полезно иметь для них явные интегральные представления. В случае $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ построить такое представление легко, так как можно найти такие $f_m \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, что $\|f-f_m\|_1 \to 0$. Тогда для каждого λ имеем

$$\hat{f}(\lambda) = \lim_{m\to\infty} \hat{f}_m(\lambda) = \lim_{m\to\infty}\left\{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x} f_m(x)\,dx\right\} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x} f(x)\,dx.$$

Итак, преобразование Фурье функции из $L^1(\mathbb{R}^n)$ задается обычной формулой.

Предположим теперь, что $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, и пусть

$$\chi_R(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant R, \\ 0, & |x| > R. \end{cases}$$

Тогда $\chi_R f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\chi_R f \xrightarrow[R\to\infty]{L^2} f$, так что по теореме Планшереля $\widehat{\chi_R f} \xrightarrow[R\to\infty]{L^2} \hat{f}$. Для $\chi_R f$ имеем обычную формулу, поэтому

$$\hat{f}(\lambda) = \underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ (2\pi)^{-n/2} \int_{|x|\leqslant R} e^{-i\lambda\cdot x} f(x)\,dx,$$

где под l.i.m. понимается предел по L^2-норме. Иногда мы будем опускать условие $|x| \leqslant R$ и для $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ будем писать просто

$$\hat{f}(\lambda) = \mathrm{l.i.m.}\ (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i\lambda\cdot x} f(x)\,dx.$$

Выше было доказано, что $L^2(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\wedge} L^2(\mathbb{R}^n)$ и $L^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\wedge} L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (очевидно, что $C_\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$) и в обоих случаях преобразование $\hat{}$ — ограниченный оператор. Именно в таких ситуациях можно использовать интерполяционные теоремы, которые будут доказаны в дополнении к § 4.

Теорема IX.8 (неравенство Хаусдорфа — Юнга). Пусть $1 \leqslant q \leqslant 2$ и $p^{-1}+q^{-1}=1$. Тогда преобразование Фурье — ограниченное отображение $L^q(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ и его норма не превосходит $(2\pi)^{n(1/2-1/q)}$.

Доказательство. Применим теорему Рисса—Торина (теорему IX.17) при $q_0=2=p_0$, $p_1=\infty$ и $q_1=1$. Поскольку $\|\hat{f}\|_2=\|f\|_2$ и $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant (2\pi)^{-n/2}\|f\|_1$, заключаем, что $\|\hat{f}\|_{p_t} \leqslant C_t\|f\|_{q_t}$, где $p_t^{-1} = (1-t)/2$, $q_t^{-1} = (1-t)/2+t = 1-p_t^{-1}$, а $\log C_t = t\log(2\pi)^{-n/2}$. ∎

Теперь мы переходим к следующему естественному вопросу. Что такое фурье-образы конечных положительных мер на $\mathbb{R}^n$? Допустим, что по определению

$$\hat{\mu}(\lambda)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x}\,d\mu(x).$$

Тогда если $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, то

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\mu}(\lambda)\varphi(\lambda)\,d\lambda&=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x}d\mu(x)\right)\varphi(\lambda)\,d\lambda=\\&=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x}\varphi(\lambda)\,d\lambda\right)d\mu(x)=\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\varphi}(x)\,d\mu(x),\end{aligned}$$

и мы видим, что такое определение совпадает с сужением преобразования Фурье, заданного на $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, на положительные меры. Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_N\in\mathbb{R}^n$ и $\xi=\langle\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N\rangle\in\mathbb{C}^N$. Тогда

$$\sum_{i,j=1}^N\hat{\mu}(\lambda_i-\lambda_j)\bar{\xi}_j\xi_i=\int\left|\sum_{i=1}^N\xi_i e^{-i\lambda_i\cdot\mathbf{x}}\right|^2 d\mu(\mathbf{x})\geqslant 0.$$

Это показывает, что функция $\hat{\mu}(\lambda)$ обладает следующим свойством: для любых $\lambda_1,\ldots,\lambda_N\in\mathbb{R}^n$ матрица $\{\hat{\mu}(\lambda_i-\lambda_j)\}$ определяет положительный оператор на $\mathbb{C}^N$. Далее, по теореме о мажорированной сходимости $\hat{\mu}$ непрерывна, а поскольку

$$\begin{aligned}|\hat{\mu}(\lambda)|&\leqslant(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}|e^{-i\lambda\cdot\mathbf{x}}|\,d\mu(\mathbf{x})=\\&=(2\pi)^{-n/2}\mu(\mathbb{R}^n),\end{aligned}$$

то функция $\hat{\mu}(\cdot)$ также и ограничена.

Определение. Комплекснозначная ограниченная непрерывная функция f на $\mathbb{R}^n$, для которой $\{f(\lambda_i-\lambda_j)\}_{i,j}$ — положительная матрица на $\mathbb{C}^N$ при каждом N и любых $\lambda_1,\ldots,\lambda_N\in\mathbb{R}^n$, называется **положительно определенной функцией.**

Из этого определения сразу следуют такие три свойства положительно определенных функций. Пусть $N=1$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$; тогда

(1) $$f(0)\geqslant 0,$$

поскольку значение $f(0)$ должно быть положительным оператором на $\mathbb{C}^1$. Полагая $N=2$ и выбирая $\lambda_1=\mathbf{x}$, $\lambda_2=0$, видим, что матрица

$$\begin{pmatrix} f(0) & f(\mathbf{x}) \\ \overline{f(-\mathbf{x})} & f(0) \end{pmatrix}$$

должна быть положительной, а потому самосопряженной с положительным детерминантом. Это означает, что

$$f(\mathbf{x}) = \overline{f(-\mathbf{x})}, \tag{2}$$

$$|f(\mathbf{x})| \leqslant f(0). \tag{3}$$

Отметим, что, доказывая эти три свойства, мы нигде не пользовались ограниченностью $f(\mathbf{x})$, так что можно было опустить слово *ограниченная* в определении и получить ограниченность как следствие свойства (3). Очевидно, что всевозможные выпуклые комбинации или произведения на положительные скаляры положительно определенных функций вновь дают положительно определенные функции, так что эти функции образуют конус.

Теорема IX.9 (теорема Бохнера). *Множество фурье-образов конечных положительных мер на $\mathbb{R}^n$ составляет в точности конус положительно определенных функций.*

Доказательство. Мы приводим не оригинальное доказательство Бохнера, а несложное, но интересное построение, основанное на теореме Стоуна. Уже было показано, что фурье-образы конечных положительных мер суть положительно определенные функции. Требуется доказать обратное. Предположим, что f положительно определена. Пусть $\mathcal{K}^0$ — множество комплекснозначных функций на $\mathbb{R}^n$, каждая из которых отлична от нуля лишь в конечном числе точек. Тогда для φ, $\psi \in \mathcal{K}^0$ величина

$$(\psi, \varphi)_f = \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \overline{\psi(\mathbf{x})} \varphi(\mathbf{y})$$

обладает всеми свойствами корректно определенного внутреннего произведения, за исключением того, что $(\varphi, \varphi)_f$ может обращаться в нуль для некоторых $\varphi \neq 0$. Пусть $\mathcal{N}$ — множество таких φ; тогда $\mathcal{K}^0/\mathcal{N}$ — предгильбертово пространство с внутренним произведением $(\cdot, \cdot)_f$. Пусть $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$; определим оператор $U_\mathbf{t}$ на $\mathcal{K}^0$ формулой $(U_\mathbf{t} \varphi)(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}-\mathbf{t})$. Так как $U_\mathbf{t}$ сохраняет форму $(\cdot, \cdot)_f$, то он переводит классы эквивалентности в классы эквивалентности, а потому сводится к изометрии на $\mathcal{K}^0/\mathcal{N}$. Поскольку то же самое справедливо и для $U_{-\mathbf{t}}$, эта изометрия имеет плотную область значений и, следовательно, продолжается до унитарного оператора $\tilde{U}_\mathbf{t}$ на $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{K}^0/\mathcal{N}}$. Более того, $\tilde{U}_{\mathbf{t}+\mathbf{s}} = \tilde{U}_\mathbf{t} \tilde{U}_\mathbf{s}$, $\tilde{U}_0 = I$, а в силу непрерывности f группа $\tilde{U}_\mathbf{t}$ сильно непрерывна. Итак, отображение $\mathbf{t} \mapsto \tilde{U}_\mathbf{t}$ удовлетворяет условиям теоремы VIII.12 (обобщение теоремы Стоуна). Следовательно, существует проекторнозначная мера P_λ на $\mathbb{R}^n$, такая, что

$$(\varphi, \tilde{U}_t\psi)_f = \int_{\mathbb{R}^n} e^{it\cdot\lambda} d(\varphi, P_\lambda\psi)_f.$$

Пусть $\tilde{\varphi}_0$ — класс эквивалентности, содержащий функцию

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Тогда

$$f(t) = (\tilde{U}_t\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_0)_f = (\tilde{\varphi}_0, \tilde{U}_{-t}\tilde{\varphi}_0)_f = \int e^{-it\cdot\lambda} d(\tilde{\varphi}_0, P_\lambda\tilde{\varphi}_0)_f,$$

так что мы представили f как фурье-образ конечной положительной меры. ∎

Понятие положительной определенности можно обобщить на распределения. Если функция $f(x)$ ограничена и непрерывна, то она положительно определена тогда и только тогда, когда

$$\iint f(x-y)\overline{\varphi(y)}\varphi(x)\,dx\,dy \geqslant 0 \qquad \text{(IX.4)}$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно аппроксимировать интеграл в (IX.4) римановыми суммами. Это условие можно переписать так:

$$\iint f(\tau)\overline{\varphi(x-\tau)}\varphi(x)\,d\tau\,dx = \int f(\tau)(\bar{\tilde{\varphi}} * \varphi)(\tau)\,d\tau \geqslant 0, \qquad \text{(IX.5)}$$

где $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. Это подсказывает нам следующее

Определение. Обобщенная функция $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется **положительно определенной**, если $T(\bar{\tilde{\varphi}} * \varphi) \geqslant 0$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Следующее обобщение теоремы Бохнера принадлежит Шварцу. Оно особенно интересно, так как из него следует, что положительно определенные обобщенные функции с необходимостью суть обобщенные функции умеренного роста. Основные моменты доказательства намечены в задаче 20 (подробные ссылки см. в Замечаниях).

Теорема IX.10 (теорема Бохнера—Шварца). Обобщенная функция $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ положительно определена в том и только том случае, когда $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и T — фурье-образ положительной меры не более чем полиномиального роста.

Из этой теоремы следует, что если $f(x)$ — положительно определенная функция, то слабые производные $(-\Delta)^m f$ — положительно определенные обобщенные функции. Действительно, мера

$\mu = \hat{f}$ по теореме IX.9 конечна, а тогда $\widehat{(-\Delta)^m f} = |x|^{2m}\mu$ — положительная мера полиномиального роста.

Определим теперь, какие ограниченные измеримые функции оказываются положительно определенными обобщенными функциями. Ограниченная измеримая функция f на $\mathbb{R}^n$ называется **слабо положительно определенной**, если справедливо (IX.4). Поскольку (IX.5) следует из (IX.4), то распределение

$$T_f(\varphi) = \int f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

положительно определено, а потому $\hat{T}_f = \mu$ — полиномиально ограниченная положительная мера. Если $j_\varepsilon(x)$ — аппроксимативная единица, симметричная относительно начала координат, то

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &\geqslant T_f(j_\varepsilon * j_\varepsilon) = \hat{T}_f((\widecheck{j_\varepsilon * j_\varepsilon})) = \\ &= (2\pi)^{n/2}\mu(|\check{j}_\varepsilon(x)|^2) = \\ &= (2\pi)^{n/2}\int |\check{j}_\varepsilon(x)|^2\,d\mu(x).\end{aligned}$$

На каждом компактном подмножестве из $\mathbb{R}^n$ функция $\check{j}_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно стремится к $(2\pi)^{-n/2}$, так что μ-мера произвольного компактного множества меньше $(2\pi)^{n/2}\|f\|_\infty$, т. е. μ конечна.

В итоге мы попадаем в интересную ситуацию. Поскольку μ конечна, ее фурье-образ — непрерывная положительно определенная функция. А поскольку $\check{\mu}$ и f должны совпадать почти всюду, то справедливо такое

Предложение. Ограниченная слабо положительно определенная функция почти всюду равна непрерывной положительно определенной функции.

IX.3. Область значений преобразования Фурье. Аналитичность

В этом разделе мы исследуем связь между свойствами убывания функции или обобщенной функции на бесконечности и свойствами аналитичности ее преобразования Фурье. Самые радикально убывающие на бесконечности функции — это функции с компактным носителем. Мы докажем теоремы Пэли — Винера и Шварца, явно описывающие фурье-образы функций из C^∞ и распределений с компактным носителем. Затем будут сформулированы две теоремы, связывающие экспоненциальное убывание со свойствами аналитичности фурье-образов. И в заключение этого раздела мы опишем фурье-образы обобщенных функций умеренного роста, носители которых лежат в симметричных конусах. Есть еще целый ряд теорем такого же типа. Некоторые из них обсуждаются в замечаниях.

Предположим, что $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда для всех $\zeta = \langle \zeta_1, \ldots, \zeta_n \rangle \in \mathbb{C}^n$ определен интеграл

$$\hat{f}(\zeta) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i\zeta \cdot x} f(x)\, dx.$$

Более того, $\hat{f}(\zeta)$ — целая аналитическая функция от n комплексных переменных $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, поскольку мы можем дифференцировать под знаком интеграла. Далее, если носитель f содержится в сфере радиуса R, то интегрирование по частям дает

$$\prod_{i=1}^{n} (i\zeta_i)^{\alpha_i} \hat{f}(\zeta) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{|x| \leqslant R} e^{-i\zeta \cdot x} D^\alpha f(x)\, dx.$$

Взяв абсолютное значение обеих частей и воспользовавшись ограниченностью $\hat{f}(\zeta)$ на множестве $\{\zeta \mid |\operatorname{Im} \zeta| < \varepsilon\}$, легко находим, что для каждого N

$$|\hat{f}(\zeta)| \leqslant \frac{C_N e^{R|\operatorname{Im}\zeta|}}{(1+|\zeta|)^N} \quad \text{при всех } \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

где C_N — константа, зависящая от N и f. Интересно то, что эти оценки не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы функция f принадлежала $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Теорема IX.11 (теорема Пэли — Винера). Целая аналитическая функция $g(\zeta)$ от n комплексных переменных является фурье-образом функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с носителем в шаре $\{x \mid |x| \leqslant R\}$ тогда и только тогда, когда для каждого N существует такая константа C_N, что для всех $\zeta \in \mathbb{C}^n$

$$|g(\zeta)| \leqslant \frac{C_N e^{R|\operatorname{Im}\zeta|}}{(1+|\zeta|)^N}. \tag{IX.6}$$

Доказательство. Утверждение «только тогда» уже доказано. Предположим, что функция g целая и удовлетворяет оценке (IX.6). Пусть $\zeta = \lambda + i\eta$, где $\lambda, \eta \in \mathbb{R}^n$. Тогда при каждом η функция $g(\lambda + i\eta) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ как функция λ, так как в силу (IX.6) и формулы Коши ее производные убывают как обратный полином. Пусть

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \lambda} g(\lambda)\, d\lambda. \tag{IX.7}$$

Тогда, по теореме IX.1, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $g(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$. Следует показать, что носитель $f(x)$ содержится в шаре радиуса R. В силу неравенства (IX.6) и теоремы Коши можно сдвинуть область интегрирования в (IX.7) так, чтобы выполнялось равенство

$$f(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\lambda+i\eta)\cdot x} g(\lambda+i\eta)\,d\lambda. \qquad \text{(IX.8)}$$

Еще раз применяя (IX.6), имеем

$$|f(x)|\leqslant e^{R|\eta|-x\cdot\eta}(2\pi)^{-n/2}\int\frac{C_N}{(1+|\lambda+i\eta|)^N}\,d\lambda\leqslant$$
$$\leqslant e^{R|\eta|-x\cdot\eta}(2\pi)^{-n/2}\int\frac{C_N}{(1+|\lambda|)^N}\,d\lambda,$$

где N выбрано достаточно большим, чтобы интеграл в правой части сходился. Но $f(x)$ не зависит от η, поэтому, устремляя η к ∞ в подходящем направлении, мы убедимся в том, что $|f(x)|=0$ при $|x|>R$. ∎

Эта теорема допускает естественное обобщение на случай распределений с компактным носителем. Напомним, что обобщенная функция $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ имеет носитель в замкнутом множестве K тогда и только тогда, когда $T(\varphi)=0$ для любой основной функции φ с носителем в $\mathbb{R}^n\setminus K$. Если множество K компактно, то говорят, что T имеет **компактный носитель.** Множество обобщенных функций с компактным носителем образует пространство, дуальное к $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (см. задачи 39 и 40 из гл. V).

Теорема IX.12. Обобщенная функция $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель тогда и только тогда, когда $\hat{T}$ допускает аналитическое продолжение до целой аналитической функции $\hat{T}(\zeta)$ от n переменных, удовлетворяющей условию

$$|\hat{T}(\zeta)|\leqslant C(1+|\zeta|)^N e^{R|\operatorname{Im}\zeta|} \qquad \text{(IX.9)}$$

для всех $\zeta\in\mathbb{C}^n$ и некоторых констант C, N, R. Более того, если выполнено (IX.9), то носитель T содержится в шаре радиуса R.

Доказательство. Предположим, что $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель, и пусть φ — функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равная единице на носителе T. Положим $F(\zeta)=T[(2\pi)^{-n/2}e^{-i\zeta\cdot x}\varphi(x)]$. По теореме IX.5, $F(\lambda+i0)$ — фурье-образ T. Далее, поскольку

$$\left(\frac{\exp\left(-i\left(x_j(\zeta_j+h_j)+\sum\limits_{k\neq j}\zeta_k x_k\right)\right)\varphi(x)-e^{-i\zeta\cdot x}\varphi(x)}{h_j}\right)\xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} -ix_j e^{-i\zeta\cdot x}\varphi(x)$$

и $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, то функция $F(\zeta)$ дифференцируема в комплексном смысле по каждой переменной, а потому целая.

Поскольку $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, то

$$|T(f)| \leqslant C_1 \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant N \\ |\beta| \leqslant N}} \|x^\alpha D^\beta f\|_\infty$$

для некоторых N и C_1 и всех $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Итак, если носитель φ лежит внутри сферы радиуса R, то

$$|F(\zeta)| \leqslant C_2(1+R^n)(1+|\zeta|^N)\, e^{|\operatorname{Im} \zeta| R}.$$

Обратно, предположим, что $F(\zeta)$ — целая функция, удовлетворяющая оценке (IX.9). Тогда $F(\lambda+i0) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, т. е. $F(\lambda+i0)$ — фурье-образ некоторого распределения $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Пусть $j_\varepsilon(x)$ — аппроксимативная единица. Тогда, по теореме IX.4, $\widehat{T*j_\varepsilon} = (2\pi)^{-n/2}\hat{j}_\varepsilon(\lambda) F(\lambda)$. Поскольку j_ε имеет компактный носитель в $\{x \mid |x| \leqslant \varepsilon\}$, то, согласно теореме Пэли — Винера, для каждого M найдется такая константа C_M, что

$$|\hat{j}_\varepsilon(\zeta)| \leqslant \frac{C_M}{(1+|\zeta|)^{N+M}}\, e^{\varepsilon|\operatorname{Im} \zeta|}.$$

Поэтому

$$|(2\pi)^{-n/2}\hat{j}_\varepsilon(\zeta) F(\zeta)| \leqslant \frac{C_M C e^{(R+\varepsilon)|\operatorname{Im} \zeta|}}{(1+|\zeta|)^N},$$

откуда следует (снова по теореме Пэли — Винера), что носитель $T*j_\varepsilon$ содержится внутри сферы радиуса $R+\varepsilon$. Поскольку ε произвольно и $(T*j_\varepsilon) \to T$ слабо, мы заключаем, что носитель T содержится в шаре радиуса R с центром в начале координат. ∎

Один из естественных способов обобщить предыдущие теоремы состоит в том, чтобы заменить «условие компактности носителя» некоторым более слабым условием убывания на бесконечности. Две следующие теоремы (доказательства которых намечены в задаче 76) будут использованы в гл. XIII для доказательства того, что собственные функции, отвечающие связанным состояниям атомных гамильтонианов, экспоненциально убывают.

Теорема IX.13. Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. В таком случае $e^{b|x|}f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ при всех $b < a$ тогда и только тогда, когда $\hat{f}$ имеет аналитическое продолжение на множество $\{\zeta \mid |\operatorname{Im} \zeta| < a\}$, причем для каждого $\eta \in \mathbb{R}^n$, $|\eta| < a$, функция $\hat{f}(\cdot + i\eta) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и для любого $b < a$

$$\sup_{|\eta| \leqslant b} \|\hat{f}(\cdot + i\eta)\|_2 < \infty.$$

Теорема IX.14. Пусть $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что $\hat{T}$ — функция, допускающая аналитическое продолжение на множество $\{\zeta \mid |\operatorname{Im}\zeta| < a\}$ для некоторого $a > 0$. Предположим также, что для каждого $\eta \in \mathbb{R}^n$, $|\eta| < a$, функция $\hat{T}(\cdot + i\eta) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и для любого $b < a$

$$\sup_{|\eta| < b} \|\hat{T}(\cdot + i\eta)\|_1 < \infty.$$

Тогда T — ограниченная непрерывная функция, и для любого $b < a$ существует такая константа C_b, что

$$|T(x)| \leqslant C_b e^{-b|x|}.$$

Теоремы Пэли — Винера полезны для понимания некоторого класса теорем об аналитическом пополнении из теории функций многих комплексных переменных. Основной факт иллюстрируется следующим простым примером. Пусть D_r — полидиск, $D_r = \{\langle z, w\rangle \mid |z| < r, |w| < r\}$ в $\mathbb{C}^2$. Предположим, что f — аналитическая функция двух переменных в «поликольце» $D_1 \setminus \bar{D}_{1/2}$. Тогда для любого z из $1/2 < |z| < 1$ функция $g_z(w) \equiv f(z, w)$ аналитична в единичном круге, а для любого z из $|z| \leqslant 1/2$ эта же функция аналитична в кольце $1/2 < w < 1$. Итак, для каждого z существует лораново разложение

$$g_z(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z) w^n,$$

причем $a_n(z) = 0$ при $n < 0$ и $1 > |z| > 1/2$. Но, как легко видеть, $a_n(z)$ — аналитические функции z, так что $a_n(z) = 0$ при $n < 0$ и $|z| < 1$. Отсюда следует, что f допускает продолжение с $D_1 \setminus \bar{D}_{1/2}$ на весь D_1! Этот факт демонстрирует поразительное отличие от случая одной переменной, где для любого заданного открытого связного множества $\Omega \subset \mathbb{C}$ можно найти функцию f, аналитическую на Ω и не аналитическую ни на одном большем множестве.

Определение. Открытое связное множество $\Omega \subset \mathbb{C}$ называется **областью голоморфности**, если для любой точки $w \notin \Omega$ существует функция f, аналитическая в Ω, но не имеющая продолжения в w. Пусть $\Omega \subset \hat{\Omega} \subset \mathbb{C}^n$ — открытые связные множества. Множество $\hat{\Omega}$ называют **аналитическим пополнением** или **оболочкой голоморфности** Ω, если

(i) $\hat{\Omega}$ — область голоморфности.

(ii) Каждая функция, аналитическая в Ω, допускает продолжение на всю $\hat{\Omega}$.

В силу этого определения, не каждая открытая связная область обладает оболочкой голоморфности, однако если обобщить определение, допуская области $\hat{\Omega}$ многолистной структуры, то каждая Ω будет иметь единственную оболочку голоморфности. В предыдущем примере D_1—оболочка голоморфности области $D_1 \setminus \bar{D}_{1/2}$. Мы уже видели, что D_1 удовлетворяет условию (ii). Чтобы убедиться, что справедливо и (i), докажем такое

Предложение. Если $\Omega \subset \mathbb{C}^n$—произвольное открытое связное выпуклое множество, то Ω—оболочка голоморфности.

Доказательство. Для заданной точки $w \notin \Omega$ по теореме Хана—Банаха можно найти вещественный линейный функционал $l: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, такой, что $l(w) > \sup\limits_{z \in \Omega} l(z)$. Пусть

$$L(z) = l(z) - il(iz)$$

и $f(z) = M(L(z) - L(w))^{-1}$. Тогда функция f аналитична в Ω, поскольку $\operatorname{Re} L(z) \neq \operatorname{Re} L(w)$ для $z \in \Omega$, но сингулярна в точке w. ∎

Идеи Пэли—Винера полезны при рассмотрении оболочек голоморфности некоторых специальных областей.

Определение. Пусть множество $S \subset \mathbb{R}^n$ открыто. **Трубой над S** (обозначается $\mathcal{T}(S)$) называется множество

$$\mathcal{T}(S) = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}^n,\ y \in S\}.$$

Теорема IX.14.1 (теорема Бохнера о трубе). Пусть множество $S \subset \mathbb{R}^n$ открыто, и пусть $\hat{S}$—его открытая выпуклая оболочка. Тогда $\mathcal{T}(\hat{S})$—оболочка голоморфности $\mathcal{T}(S)$.

Набросок доказательства. Из предыдущего предложения следует, что каждая $\mathcal{T}(\hat{S})$—область голоморфности, так что достаточно доказать свойство (ii). Мы приведем набросок доказательства несколько более слабого результата, состоящего в том, что любая полиномиально ограниченная функция $f(z)$ на $\mathcal{T}(S)$ продолжается на $\mathcal{T}(\hat{S})$. Поскольку произвольную f можно заменить, например, функцией $e^{-z^2}f(z)$, это не является существенным ограничением, и общий результат может быть получен на основе этого частного случая. Выполнив сдвиг, можно без потери общности считать, что $0 \in S$. Пусть $g_y(x) = f(x + iy)$. При каждом $y \in S$ g_y есть распределение умеренного роста, так что можно ввести $T_y = \check{g}_y$. С помощью метода Пэли—Винера можно показать, что $T_y(x) = e^{x \cdot y} T_0(x)$. Итак, T_0—распределение умеренного роста, для которого $e^{x \cdot y} T_0(x)$—тоже распределение умеренного роста при всех $y \in S$. В силу приведенной ниже леммы, это справедливо для всех $y \in \hat{S}$, а тогда, обращая построение Пэли—Винера, находим, что $\hat{T}_0$ аналитична на $\mathscr{T}(\hat{S})$. ∎

Лемма. Пусть $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда множество таких y, что $e^{x \cdot y}T(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, выпукло.

Доказательство. Поскольку выпуклость определяется с помощью линейных отрезков, нетрудно видеть, что достаточно показать, что если T и $e^{\lambda}T(\lambda)$ лежат в $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, то и $e^{\theta\lambda}T(\lambda)$ лежит в $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ при всех $\theta \in (0, 1)$. Пусть ϕ_n есть n-я функция Эрмита (см. дополнение к § V.3). Введем функции

$$g_n(z) = \int T(\lambda)\, e^{iz\lambda}\phi_n(\lambda)\, d\lambda.$$

Функции g_n целые, поскольку $e^{iz\lambda}\phi_n(\lambda) \in S$. Так как $T, e^{\lambda}T(\lambda) \in \mathscr{S}'$, находим, что

$$|g_n(x)| \leqslant C(1+n^2)^m (2+x^2)^m,$$
$$|g_n(x-i)| \leqslant C(1+n^2)^m (2+x^2)^m$$

для подходящих C и m. Применяя принцип максимума к $(2+z^2)^{-m-1}g_n(z)$, видим, что $|g_n(-i\theta)| \leqslant D(1+n^2)^m$ для всех θ из интервала $(0, 1)$, так что $e^{\theta\lambda}T(\lambda) \in \mathscr{S}'$. ∎

Этот метод идеально приспособлен для применения в некоторых «вырожденных случаях». Так, при рассмотрении приведенного ниже результата следует иметь в виду случай множества $S = \{\langle y_1, y_2\rangle \mid y_1 = 0$ или $y_2 = 0;\ |y_1| + |y_2| < 1\}$, которое *не является* открытым.

Теорема IX.14.2 (теорема о трубе, вырожденный случай). Пусть $T_1(x_1, z_2)$ и $T_2(z_1, x_2)$ — обобщенные функции умеренного роста по переменным x ($x \in \mathbb{R}^n$) и полиномиально ограниченные аналитические функции по переменным z в области $\{z \in \mathbb{C}^n \mid |\operatorname{Im} z| < 1\}$, т. е. $T_1(x_1, z_2)$ при каждом z_2 есть обобщенная функция по x_1 и интеграл $\int g(x_1)T(x_1, z_2)\,dx_1$ аналитичен. Предположим, что $T_1(x_1, x_2 + i0) = T_2(x_1 + i0, x_2)$ в смысле обобщенных функций по обоим переменным. Тогда существует функция $f(z_1, z_2)$, аналитическая в $\mathscr{T}(\tilde{S})$, где $\tilde{S} = \{\langle y_1, y_2\rangle \mid |y_1| + |y_2| < 1\}$, такая, что $T_1(x_1, z_2) = f(x_1 + i0, z_2)$ и $T_2(z_1, x_2) = f(z_1, x_2 + i0)$.

Доказательство. Пусть $g(\lambda) = \check{T}_1(\cdot, \cdot + i0)(\lambda)$. Тогда по предположению $e^{\theta\lambda_1}g(\lambda)$ и $e^{\theta\lambda_2}g(\lambda)$ лежат в $\mathscr{S}'$ при $-1 < \theta < 1$, так что $e^{a\cdot\lambda}g(\lambda) \in \mathscr{S}'$ для $|a_1| + |a_2| < 1$, что и доказывает теорему. ∎

Следующий естественный вопрос: каковы аналитические свойства функции (обобщенной функции) с носителем на луче, в полупространстве или, более общо, в конусе? В качестве простого примера рассмотрим фурье-образ $\hat{f}$ некоторой функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ с носителем, содержащимся в $[0, \infty)$. Читатель может легко проверить, что

$$\hat{f}(\lambda - i\eta) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{-i(\lambda - i\eta)\cdot x} f(x)\, dx \qquad \text{(IX.10)}$$

— аналитическая функция, определенная в открытой нижней полуплоскости (т. е. при $\eta > 0$), и что $\hat{f}(\cdot - i\eta) \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \hat{f}$ при $\eta \downarrow 0$. Это означает, что $\hat{f}$, которая не обязана быть вещественно аналитической, есть «граничное значение» функции, аналитической в нижней полуплоскости. Изучение преобразований Фурье функций и распределений с носителями в полупространствах восходит к классическим исследованиям преобразования Лапласа и сыграло важную роль в современном анализе. Основные идеи и технические приемы здесь аналогичны употреблявшимся в теоремах IX.11 и IX.12. Однако имеется дополнительная трудность, вызванная необходимостью указать, в каком смысле преобразование Фурье есть «граничное значение» аналитической функции. Существует обширная коллекция такого рода теорем. Подробно мы рассмотрим лишь ту из них, которая понадобится нам в § IX.8 при изучении квантовой теории поля; другие кратко обсуждаются в Замечаниях.

Определение. Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, $|a| = 1$ и $\theta \in (0, \pi/2)$. Множество

$$\Gamma_{a,\theta} = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi \cdot a > |\xi| \cos\theta\}$$

называется **конусом вокруг** a **раствора** θ. Конус $\Gamma^*_{a,\theta} \equiv \Gamma_{a,\pi/2-\theta}$ называется **дуальным конусом**. В очевидных случаях мы будем опускать индексы и писать просто Γ и Γ^*.

Дуальный конус Γ^* либо содержит Γ (как на рис. IX.1), либо содержится в Γ. Заметим, что Γ^* — внутренность пересечения полупространств $\{\eta \mid \eta \cdot \xi > 0\}$, отвечающих $\xi \in \Gamma$. Если Γ — открытый передний световой конус в $\mathbb{R}^4$ (т. е. $\Gamma = \Gamma_{e_0, \pi/4}$, где e_0 — орт временной оси, и скорость света приравнена единице), то Γ^* также открытый передний световой конус. Для заданного открытого конуса $C \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\mathbb{R}^n - iC$ открытую область таких $\zeta = \langle \lambda_1 - i\eta_1, \lambda_2 - i\eta_2, \ldots, \lambda_n - i\eta_n \rangle \in \mathbb{C}^n$, что $\lambda = \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n \rangle \in \mathbb{R}^n$ и $\eta = \langle \eta_1, \ldots, \eta_n \rangle \in C$. Область $\mathbb{R}^n - iC$ называется **трубой с базой** C.

Теперь можно объяснить, что мы понимаем под «граничным значением».

Определение. Пусть $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, и пусть $F(\zeta)$ — функция, аналитическая в $\mathbb{R}^n - iC$ для некоторого конуса C. Предположим, что $F(\lambda - i\eta_0)$ при каждом фиксированном $\eta_0 \in C$ есть обобщенная функция умеренного роста (т. е. растет не быстрее полинома по λ)

и что при $t \downarrow 0$ в $\mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda - it\eta_0)\,\varphi(\lambda)\,d\lambda \longrightarrow S(\varphi)$$

для всех $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда говорят, что S — (обобщеннозначное) **граничное значение F в смысле $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.**

Предположим, что $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и что носитель T содержится в $\overline{\Gamma}_{a,\theta}$ с некоторыми $a \in \mathbb{R}^n$ и $\theta \in (0, \pi/2)$. Если распределение T

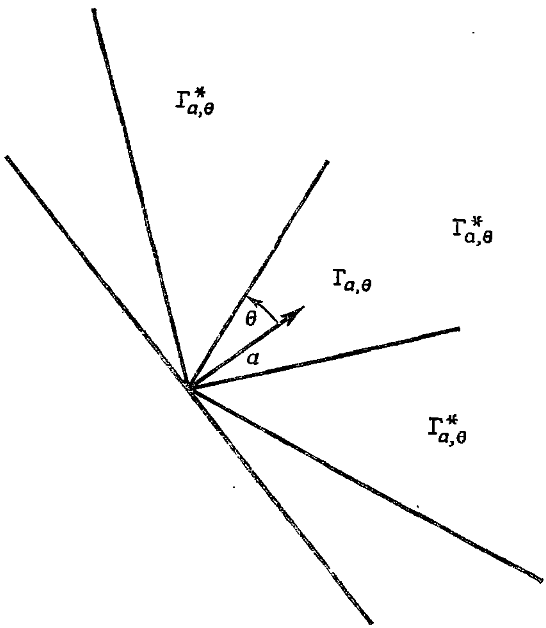

Рис. IX.1. Конусы $\Gamma_{a,\theta}$ и $\Gamma^*_{a,\theta}$.

задается функцией $T(x)$, то можно непосредственно продолжить $\hat{T}$ в трубу $\mathbb{R}^n - i\Gamma^*_{a,\theta}$, полагая

$$\hat{T}(\lambda - i\eta) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\Gamma_{a,\theta}} e^{-i(\lambda - i\eta)\cdot x}\,T(x)\,dx.$$

Для $\eta \in \Gamma^*_{a,\theta}$ интеграл имеет смысл, поскольку

$$\left|e^{-i(\lambda - i\eta)\cdot x}\right| = e^{-|\eta|\,|x|\cos(\eta,\,x)} \leqslant e^{-|x|\,d(\eta)},$$

где $d(\eta) \equiv |\eta| \min\limits_{x \in \partial\Gamma_{a,\theta}} \cos(\eta, x) = \operatorname{dist}(\eta, \partial\overline{\Gamma}^*_{a,\theta})$; см. рис. IX.1. Так как $T(x)$ полиномиально ограничена, то наличие множителя $e^{-|x|\,d(\eta)}$ означает возможность дифференцирования под знаком интеграла. Мы заключаем, что $\hat{T}(\lambda - i\eta)$ аналитична в трубе $\mathbb{R}^n - i\Gamma^*_{a,\theta}$, поскольку она бесконечно дифференцируема в комплексном смысле. Более того, если $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\eta_0 \in \Gamma^*_{a,\theta}$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{T}(\lambda - it\eta_0)\,\varphi(\lambda)\,d\lambda =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Gamma_{a,\theta}} e^{-i(\lambda - it\eta_0)\cdot x} \varphi(\lambda)\, T(x)\,dx\,d\lambda =$$

$$= \int_{\Gamma_{a,\theta}} e^{-t\eta_0\cdot x}\hat{\varphi}(x)\,T(x)\,dx \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[t\downarrow 0]{} \int_{\Gamma_{a,\theta}} \hat{\varphi}(x)\,T(x)\,dx = \hat{T}(\varphi)$$

по теореме о мажорированной сходимости. Итак, $\hat{T}$ — граничное значение функции $\hat{T}(\lambda - i\eta)$, аналитической в трубе $\mathbb{R}^n - i\Gamma^*_{a,\theta}$.

Если распределение T не задается функцией, а представимо в виде $P(D)G$, где G — полиномиально ограниченная непрерывная функция с носителем в $\overline{\Gamma}_{a,\theta}$, то можно положить

$$\hat{T}(\lambda - i\eta) = (2\pi)^{-n/2} P(i(\lambda - i\eta)) \int_{\Gamma_{a,\theta}} e^{-i(\lambda - i\eta)\cdot x} G(x)\,dx.$$

Так же, как и выше, можно показать, что функция $\hat{T}(\lambda - i\eta)$ аналитична в $\mathbb{R}^n - i\Gamma^*_{a,\theta}$ и что $\hat{T}$ — ее граничное значение. Теперь мы хотим доказать, что *всякую* обобщенную функцию умеренного роста с носителем в конусе можно представить в виде $T = P(D)G$ с некоторым дифференциальным оператором в частных производных $P(D)$ и некоторой полиномиально ограниченной непрерывной функцией G *с носителем в том же конусе*. Чтобы понять, что это — сильное утверждение, читателю следует вспомнить, что аналогичное утверждение для компактных множеств (а не для конусов) неверно. Дельта-функцию, например, нельзя представить как $P(D)G$, где G имеет носитель в начале координат.

Теорема IX.15 (лемма Броса — Эпштейна — Глазера). Пусть Γ — собственный открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$, $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и носитель T лежит в $\overline{\Gamma}$. Тогда существуют полиномиально ограниченная непрерывная функция G *с носителем в* $\overline{\Gamma}$ и дифференциальный оператор в частных производных $P(D)$, такие, что $T = P(D)G$.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ — базис в $\mathbb{R}^n$, состоящий из векторов, принадлежащих Γ. Каждый вектор $x \in \mathbb{R}^n$ можно единственным образом представить в виде $x = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{e}_i$, и поэтому $\{y_i\}_{i=1}^n$

можно использовать как координаты в $\mathbb{R}^n$. Введем функцию

$$F_m(y_1, \ldots, y_n) = (m!)^{-n} y_1^m y_2^m \ldots y_n^m \theta(y_1) \ldots \theta(y_n),$$

где θ — характеристическая функция множества $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0\}$. Тогда $F_m \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ и носитель F_m лежит в $\bar{\Gamma}$. Далее, если $Q(D) = \partial^n/\partial y_1 \ldots \partial y_n$, то, как легко может проверить читатель,

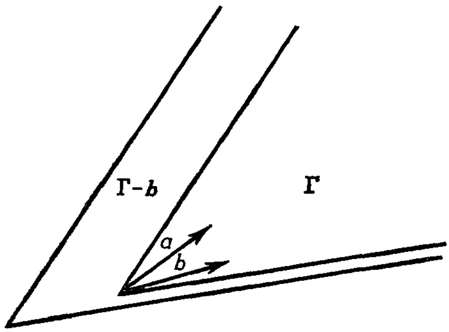

Рис. IX.2. Конус $\Gamma - b$.

$Q(D)^{m+1} F_m = \delta$. Покажем, что при достаточно больших m свертка $T*F_m$ — корректно определенная непрерывная функция с носителем в $\bar{\Gamma}$ и что $Q(D)^{m+1}(T*F_m) = T*Q(D)^{m+1}F_m = T*\delta = T$.

Если $b \in \Gamma$, то $\bar{\Gamma}$ содержится во внутренности множества $\bar{\Gamma} - b$, так что можно найти функцию ψ из C^∞, равную единице на $\bar{\Gamma}$ и имеющую носитель в $\bar{\Gamma} - b$ (рис. IX.2). Поскольку $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, существует такое N, что

$$|T(\varphi)| = |T(\psi\varphi)| \leqslant C_1 \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant N \\ |\beta| \leqslant N}} \| x^\alpha D^\beta (\psi\varphi) \|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant N \\ |\beta| \leqslant N}} \left(\sup_{x \in \bar{\Gamma} - b} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| \right) \equiv |||\varphi|||_b.$$

Итак, T имеет единственное продолжение, непрерывное по $|||\cdot|||_b$, на те функции f из C^N, для которых множество $(\operatorname{supp} f) \cap (\bar{\Gamma} - b)$ компактно.

Выберем $m = N+1$ и для $y \in \mathbb{R}^n$ положим $\tilde{F}_{N+1;\, y}(x) = F_{N+1}(y - x)$. Тогда функция $\tilde{F}_{N+1;\, y}$ принадлежит C^N и пересечение $(\operatorname{supp} \tilde{F}_{N+1;\, y}) \cap (\bar{\Gamma} - b)$ компактно (рис. IX.3). Более того, отображение $y \longmapsto \tilde{F}_{N+1;\, y}$ $|||\cdot|||_b$-непрерывно и полиномиально ограничено по y (см. рис. IX.2). Итак, функция $G(y) = T*F_{N+1}(y) \equiv T(\tilde{F}_{N+1;\, y})$ полиномиально ограничена и непрерывна и

$\operatorname{supp} G \subset \overline{\Gamma}$, поскольку

$$(\operatorname{supp} \tilde{F}_{N+1;\,y}) \cap \overline{\Gamma} = \varnothing, \qquad \text{если } y \notin \overline{\Gamma}.$$

Более того, если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то

$$(f*G)(y) = T((f*F_{N+1})_y^{\sim}) \tag{IX.11}$$

и

$$D^\alpha (f*G)(y) = T((D^\alpha f*F_{N+1})_y^{\sim}). \tag{IX.12}$$

Эти формулы аналогичны формулам из теоремы IX.4. Их также можно доказать, используя римановы суммы для интегралов

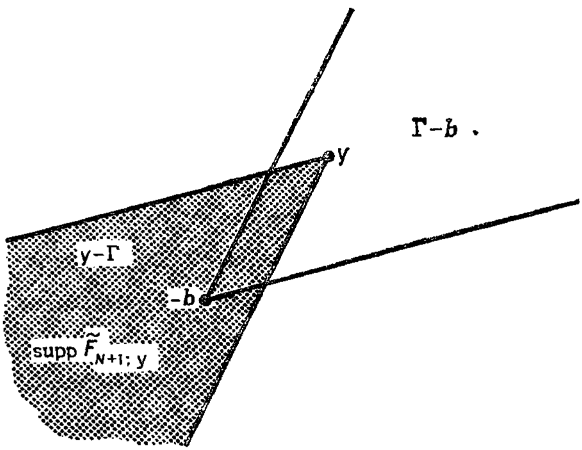

Рис. IX.3. Носитель $\tilde{F}_{N+1;\,y}$.

в правых частях и замечая, что эти суммы сходятся по $|||\cdot|||_b$. Пусть теперь $j_\varepsilon(x)$ — аппроксимативная единица; согласно предложению, доказанному в конце § IX.1, имеем

$$Q(D)^{N+2} G = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} Q(D)^{N+2} (j_\varepsilon * G) =$$

(по IX.12)

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} T((Q(D)^{N+2} j_\varepsilon * F_{N+1})_y^{\sim}) =$$

(по теореме IX.4)

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} T((j_\varepsilon * Q(D)^{N+2} F_{N+1})_y^{\sim}) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} T((\tilde{j}_\varepsilon)_y) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} j_\varepsilon * T = T. \blacksquare$$

Теорема IX.16. Пусть T — обобщенная функция умеренного роста с носителем в конусе $\overline{\Gamma}_{a,\theta}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $0 < \theta < \pi/2$. Тогда $\hat{T}$ — граничное значение в смысле $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ функции $\hat{T}(\lambda - i\eta)$, аналитической в трубе $\mathbb{R}^n - i\Gamma^*_{a,\theta}$. Более того, $\hat{T}(\lambda - i\eta)$ удовлетворяет неравенству

$$|\hat{T}(\lambda - i\eta)| \leqslant |P(\lambda - i\eta)|(1 + [\operatorname{dist}(\eta, \partial\Gamma^*_{a,\theta})]^{-N}) \qquad (\text{IX}.13)$$

с некоторым полиномом P и целым положительным N.

Обратно, предположим, что функция $F(\lambda - i\eta)$ аналитична в $\mathbb{R}^n - i\Gamma^*_{a,\theta}$ и удовлетворяет более слабым оценкам:

(i) Для каждого $\eta_0 \in \Gamma^*_{a,\theta}$ существует полином P_{η_0} от $2n$ переменных, такой, что при всех $\lambda \in \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \Gamma^*_{a,\theta}$

$$|F(\lambda - i(\eta_0 + \eta))| \leqslant |P_{\eta_0}(\lambda, \eta)|.$$

(ii) Существует целое $r \geqslant 0$, такое, что для каждого $\eta_0 \in \Gamma^*_{a,\theta}$ существует такой полином Q_{η_0}, что при всех $\lambda \in \mathbb{R}^n$ и $t \in (0,1]$

$$|F(\lambda - it\eta_0)| \leqslant \frac{|Q_{\eta_0}(\lambda)|}{t^r}.$$

Тогда существует обобщенная функция T умеренного роста с носителем в конусе $\overline{\Gamma}_{a,\theta}$, такая, что $\hat{T}$ — граничное значение $F(\lambda - i\eta)$ в смысле $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Более того, F можно восстановить по T с помощью формулы

$$F(\cdot - i\eta) = \widehat{e^{-\eta\cdot x}T}. \qquad (\text{IX}.14)$$

Доказательство. Пусть $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} T \subset \overline{\Gamma}_{a,\theta}$. По лемме Броса — Эпштейна — Глазера существует такая полиномиально ограниченная непрерывная функция G с носителем в $\overline{\Gamma}_{a,\theta}$, что $T = P(D)G$ для некоторого дифференциального оператора в частных производных $P(D)$. Из обсуждения, предшествующего лемме, мы уже знаем, что $\hat{T}$ — граничное значение функции

$$\hat{T}(\lambda - i\eta) = (2\pi)^{-n/2} P(i(\lambda - i\eta)) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\lambda - i\eta)\cdot x} G(x)\, dx.$$

Итак,

$$|\hat{T}(\lambda - i\eta)| \leqslant (2\pi)^{-n/2} |P(i(\lambda - i\eta))| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x| d(\eta)} |G(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C|P(i(\lambda - i\eta))|(1 + (d(\eta))^{-N}),$$

ибо $G(x)$ имеет носитель в $\overline{\Gamma}_{a,\theta}$ и растет на ∞ не быстрее, чем $|x|^{N-n}$ с некоторым N. Это завершает доказательство первого утверждения.

Обратно, предположим, что $F(\lambda - i\eta)$ аналитична в $\mathbb{R}^n - i\Gamma^*_{a,\theta}$ и что выполнены оценки (i) и (ii). Доказательство проводится в несколько шагов. Сначала мы покажем, что $F(\lambda - it\eta)$ имеет обобщенную функцию умеренного роста $\hat{T}_\eta$ своим граничным значением при $t \downarrow 0$. Затем убедимся, что этот предел не зависит от η. И, наконец, покажем, что носитель T лежит в $\overline{\Gamma}_{a,\theta}$.

Фиксируем некоторое $\eta_0 \in \Gamma^*_{a,\theta}$; тогда $F(\lambda - it\eta_0)$ при $0 < t \leqslant 1$ — распределение из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, которое мы обозначим $\hat{T}_{t,\eta_0}$. Пусть $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; положим

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda - it\eta_0)\,\psi(\lambda)\,d\lambda = \hat{T}_{t,\eta_0}(\psi).$$

Тогда

$$\frac{d^j}{dt^j} h(t) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda - it\eta_0)\left(i\eta_0 \cdot \frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^j \psi(\lambda)\,d\lambda,$$

так что

$$\left|\frac{d^j}{dt^j} h(t)\right| \leqslant C \sup_{\lambda} \frac{|Q_{\eta_0}(\lambda)\,(1+|\lambda|)^k|\,|(i\eta_0\cdot\partial/\partial\lambda)^j\,\psi(\lambda)|}{t^r}, \qquad \text{(IX.15)}$$

где k выбрано достаточно большим, чтобы интеграл $\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\lambda|)^{-k}d\lambda$ сходился.

Пусть $p = r + 2$. Тогда, по основной теореме анализа,

$$h(t_1) = -\int_{t_1}^{1}\int_{t_2}^{1}\cdots\int_{t_{p-1}}^{1}\left(\frac{d^p}{dt^p}h(t_p)\right)dt_p \ldots dt_2 + h(1) + \\ + \sum_{j=1}^{p-1} Q_j(t_1)\left(\frac{d^j}{dt_1^j}h\right)(1),$$

где Q_j — подходящие полиномы. Неравенства (IX.15) показывают, что существует предел $h(t_1)$ при $t_1 \downarrow 0$ и что каждое слагаемое в пределе не превосходит константы, умноженной на полунорму ψ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Итак, $F(\lambda - it\eta_0)$ сходится в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ при $t \downarrow 0$ к обобщенной функции умеренного роста, которую мы обозначим $\hat{T}_{0,\eta_0}$. Предположим теперь, что $\eta_1, \eta_2 \in \Gamma^*_{a,\theta}$ и что $\check{\psi}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\hat{T}_{t,\eta_1}(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda - it\eta_2 + it(\eta_2 - \eta_1))\,\psi(\lambda)\,d\lambda =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda - it\eta_2)\,\psi(\lambda - it(\eta_2 - \eta_1))\,d\lambda =$$

$$= \hat{T}_{t,\eta_2}\left(\widehat{e^{-t(\eta_2-\eta_1)\cdot x}\,\check{\psi}(x)}\right),$$

где для перехода ко второй строчке мы воспользовались тем, что $\psi(\lambda)$ — целая функция и для нее справедливы оценки теоремы Пэли — Винера, что позволило сдвинуть гиперплоскость интегрирования. Так как $\check{\psi}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то $\widehat{e^{-t(\eta_2-\eta_1)\cdot x}\check{\psi}(x)} \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)} \psi$ при $t\downarrow 0$. Таким образом, по теореме V.8

$$\hat{T}_{t,\eta_2}(e^{-t(\eta_2-\eta_1)\cdot x}\check{\psi}(x)) \longrightarrow \hat{T}_{0,\eta_2}(\psi)$$

и, следовательно, $\hat{T}_{0,\eta_1}(\psi)=\hat{T}_{0,\eta_2}(\psi)$. Поскольку такие ψ плотны в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, то $\hat{T}_{0,\eta_1}=\hat{T}_{0,\eta_2}$. Итак, предел $\hat{T}_{t,\eta_0}$ при $t\downarrow 0$ не зависит от η_0. Обозначим этот предел через $\hat{T}$.

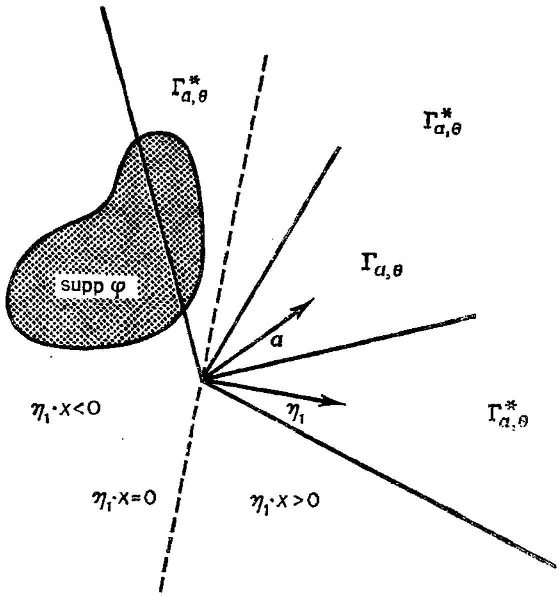

Рис. IX.4. Носитель φ.

Выше показано, что $F(\lambda-i\eta)$ имеет в качестве граничного значения обобщенную функцию $\hat{T}$ умеренного роста. Остается доказать, что носитель ее обратного преобразования Фурье T лежит в $\overline{\Gamma}_{a,\theta}$, и проверить (IX.14). Пусть задано $\eta_1\in\Gamma^*_{a,\theta}$; предположим, что $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель в открытом полупространстве $\{x\,|\,\eta_1\cdot x<0\}$. Тогда существует такое $\varepsilon>0$, что если $x\in\operatorname{supp}\varphi$, то $\eta_1\cdot x\leqslant-\varepsilon$ (рис. IX.4). Отсюда следует, что функция $\check{\varphi}$ целая и что для каждого N

$$|\check{\varphi}(\lambda - is\eta_1)| = \left|(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\lambda - is\eta_1)\cdot x}\varphi(x)\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_N e^{-s\varepsilon}}{(1+|\lambda - is\eta_1|^N)} \qquad \text{(IX.16)}$$

с некоторой константой C_N. Далее,

$$T_{t,\eta_1}(\varphi) = \hat{T}_{t,\eta_1}(\check{\varphi}) = \int F(\lambda - it\eta_1)\check{\varphi}(\lambda)\,d\lambda =$$
$$= \int F(\lambda - i(t+s)\eta_1)\,\check{\varphi}(\lambda - is\eta_1)\,d\lambda$$

по формуле Коши. Итак, применяя предположение (i) и выбирая N в оценке (IX.16) достаточно большим, находим, что при любом $s > 0$

$$|T_{t,\eta_1}(\varphi)| \leqslant Ce^{-s\varepsilon}$$

и, значит, $T_{t,\eta_1}(\varphi) = 0$. Следовательно, носитель T_{t,η_1} содержится в полупространстве $\{x \mid \eta_1\cdot x \geqslant 0\}$ при каждом $t > 0$. Так как $T_{t,\eta_1} \to T$ при $t \downarrow 0$, находим, что $\operatorname{supp} T \subset \{x \mid \eta_1\cdot x \geqslant 0\}$. Поскольку $\overline{\Gamma}_{a,\theta}$ — пересечение замкнутых подпространств $\{x \mid \eta_1\cdot x \geqslant 0\}$, где η_1 пробегает весь конус $\Gamma^*_{a,\theta}$, мы получаем, что $\operatorname{supp} T \subset \overline{\Gamma}_{a,\theta}$.

Наконец, допустим, что, как и выше, $\check{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda - i\eta)\,\psi(\lambda)\,d\lambda = \int F(\tau - is\eta)\,\psi(\tau - (s-1)\,i\eta)\,d\tau =$$
$$= \hat{T}_{s,\eta}\left(\widehat{e^{-(s-1)\eta\cdot x}\check{\psi}}\right) \longrightarrow$$
$$\xrightarrow[s\to 0]{} \hat{T}\left(\widehat{e^{\eta\cdot x}\check{\psi}}\right) =$$
$$= T\left(e^{-\eta\cdot x}\hat{\psi}\right) =$$
$$= \left(e^{-\eta\cdot x}T\right)(\hat{\psi}) =$$
$$= \left(\widehat{e^{-\eta\cdot x}T}\right)(\psi).$$

Это доказывает (IX.14) и завершает доказательство теоремы. ∎

Мы применим эту теорему при обсуждении аксиоматической квантовой теории поля в § 9.

IX.4. Оценки в L^p

Имеется большое число оценок для преобразований Фурье и сверток в пространствах L^p. Роль этих оценок состоит в том, что они определяют те условия на p и q, при которых преобразование Фурье или свертка с заданной функцией есть ограниченное отображение из L^p в L^q. Вывод таких оценок часто требует довольно тонкого применения L^p-интерполяционных теорем. В этом разделе мы сформулируем несколько подобных теорем и приведем примеры, показывающие, как они применяются к выводу оценок. В дополнении мы докажем первую из этих теорем (теорему IX.17) и, опираясь на идею ее доказательства, получим еще ряд интерполяционных теорем, которые пока не будем применять.

Простейшая L^p-интерполяционная теорема такова:

Теорема IX.17 (теорема Рисса—Торина). Пусть $\langle M, \mu\rangle$ и $\langle N, \nu\rangle$ — пространства с σ-конечными мерами. Пусть $1 \leqslant p_0, p_1, q_0, q_1 \leqslant \infty$, и предположим, что T — линейное преобразование из $L^{p_0}(M, d\mu) \cap L^{p_1}(M, d\mu)$ в $L^{q_0}(N, d\nu) \cap L^{q_1}(N, d\nu)$, удовлетворяющее условиям $\|Tf\|_{q_0} \leqslant M_0 \|f\|_{p_0}$ и $\|Tf\|_{q_1} \leqslant M_1 \|f\|_{p_1}$. Тогда для каждого $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$ и каждого $t \in (0, 1)$ имеем $Tf \in L^{q_t}$ и $\|Tf\|_{q_t} \leqslant C_t \|f\|_{p_t}$, где $p_t^{-1} = tp_1^{-1} + (1-t)p_0^{-1}$, $q_t^{-1} = tq_1^{-1} + (1-t)q_0^{-1}$ и $C_t = M_0^{1-t} M_1^t$.

Отметим, что если предположения этой теоремы выполнены, то по теореме об ограниченном линейном отображении T можно продолжить до ограниченного отображения из $L^{p_t}(M, d\mu)$ в $L^{q_t}(N, d\nu)$. Таким образом, теорема Рисса—Торина, по существу, утверждает следующее: множество пар $\langle p^{-1}, q^{-1}\rangle$, для которых оператор T: $L^p(M, d\mu) \to L^q(N, d\nu)$ ограничен, образует выпуклое подмножество плоскости, и логарифм нормы T — выпуклая функция на этом подмножестве. Теорема Рисса—Торина представляет собой частный случай интерполяционной теоремы Стейна, доказываемой в дополнении к этому разделу.

Одно из возможных приложений этой теоремы уже было продемонстрировано в § 2 (теорема Хаусдорфа—Юнга). Вот еще одно:

Пример 1 (теорема и неравенство Юнга). Для f и g из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ свертка определяется формулой

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, dy. \tag{IX.17}$$

Пусть $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, то в силу неравенства Гёльдера интеграл сходится абсолютно для всех x. Следовательно, (IX.17) дает определение $f * g$ при $f \in L^p$ и $g \in L^q$. Заметим, что $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$. Предположим теперь, что $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\int\int |f(x-y)\, g(y)|\, dx\, dy = \|f\|_1 \|g\|_1,$$

так что по теореме Фубини интеграл в (IX.17) существует при почти всех x и функция $f*g$ (определенная п.в.) удовлетворяет неравенству $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$. Теперь можно применить теорему Рисса—Торина для определения свертки на других пространствах L^p.

Пусть $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда $T_f(g)=f*g$ — ограниченный оператор из $L^1(\mathbb{R}^n)$ в $L^1(\mathbb{R}^n)$ (с нормой, не превосходящей $\|f\|_1$) и из $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (с нормой, не превосходящей $\|f\|_1$). Следовательно, по теореме Рисса—Торина T_f: $L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)$ и норма T_f не превосходит $\|f\|_1$. Фиксируем теперь $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\begin{aligned} &T_g\colon L^1(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n), &&\|T_g\|\leqslant\|g\|_p;\\ &T_g\colon L^q(\mathbb{R}^n)\to L^\infty(\mathbb{R}^n), &&\|T_g\|\leqslant\|g\|_p.\end{aligned}$$

Снова применяя теорему Рисса—Торина для интерполяции между 1 и q, находим, что оператор T_g действует из $L^r(\mathbb{R}^n)$ в $L^s(\mathbb{R}^n)$, где $r^{-1}=1-tp^{-1}$ и $s^{-1}=(1-t)p^{-1}$, и норма T_g не превосходит $\|g\|_p$. Исключая t, для $1\leqslant p,\ r,\ s\leqslant\infty$ при условии $p^{-1}+r^{-1}=1+s^{-1}$ находим

$$\|f*g\|_s\leqslant\|f\|_r\|g\|_p.$$

Это неравенство называется неравенством Юнга.

Иногда важно знать, что продолжение свертки до отображения из $L^p\times L^r$ в L^s, которое мы только что определили с помощью теоремы Рисса—Торина, все еще может быть вычислено почти всюду по интегральной формуле (IX.17). Доказательство, как и само продолжение, проводится в два приема. Пусть $p^{-1}+q^{-1}=1$, и пусть $f\in L^p$, $g\in L^1$ и $h\in L^q$. Не теряя общности, можно допустить, что f, g и h положительны. Тогда

$$\begin{aligned}\int h(x)\left(\int f(x-y)\,g(y)\,dy\right)dx &= \int g(y)\left(\int f(x-y)\,h(x)\,dx\right)dy\leqslant\\ &\leqslant\|f\|_p\|h\|_q\int g(y)\,dy=\\ &=\|f\|_p\|h\|_q\|g\|_1.\end{aligned}$$

Поскольку это выполняется для всех таких h, интеграл $\int f(x-y)\,g(y)\,dy$ сходится при почти всех x и лежит в L^p, причем его норма меньше или равна $\|f\|_p\|g\|_1$. Но отображение $f\longmapsto\int f(x-y)\,g(y)\,dy$ совпадает со сверткой для всех $f\in L^1\cap L^\infty$, а поэтому и для всех f из L^p.

Применим теперь этот же трюк еще раз. Пусть $p^{-1}+r^{-1}=1+s^{-1}$, и предположим, что $f\in L^p$, $g\in L^r$ и $h\in L^1\cap L^{s'}$, где $s'=s(s-1)^{-1}$. Тогда, согласно неравенствам Гёльдера и Юнга,

$$\begin{aligned}\int g(y)\left(\int f(x-y)\,h(x)\,dx\right)dy &\leqslant\|g\|_r\|\tilde f*h\|_{r'}\leqslant\\ &\leqslant\|g\|_r\|\tilde f\|_p\|h\|_{s'},\end{aligned}$$

поскольку в силу первой части наших рассуждений интеграл в скобках представляет свертку. Таким образом, по теореме Фубини $g(y)\cdot f(x-y)\,h(x)\in L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, $g(y)\,f(x-y)\cdot h(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$ как функция от y при почти всех x и

$$\int h(x)\left(\int f(x-y)\,g(y)\,dy\right)dx\leqslant\|g\|_r\|\tilde{f}\|_p\|h\|_{s'}.$$

В силу произвольности $h\in L^1\cap L^{s'}$, заключаем, что $f(x-y)\,g(y)\in L^1(\mathbb{R}^n)$ как функция y при почти всех x и $\int f(x-y)\,g(y)\,dy\in L^s(\mathbb{R}^n)$ с нормой, не превосходящей $\|f\|_p\|g\|_r$. Следовательно, поскольку ограниченные отображения $g\mapsto f*g$ и $g\mapsto\int f(x-y)\,g(y)\,dy$ совпадают на $L^1\cap L^r$, они совпадают на L^r.

Имеется классический результат Харди и Литтлвуда, гласящий, что если $p^{-1}+q^{-1}+\lambda=2$, $\lambda<1$ и $p,\ q>1$, то

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2}|f(x)\,g(y)|\,|x-y|^{-\lambda}\,dx\,dy<\infty, \tag{IX.18}$$

когда $f\in L^p(\mathbb{R})$, $g\in L^q(\mathbb{R})$. Это — усиление неравенства Юнга, поскольку последнее легко превратить в такое утверждение: если $p^{-1}+r^{-1}+q^{-1}=2$, то

$$\left|\iint\limits_{\mathbb{R}^2}f(x)\,g(y)\,h(x-y)\,dx\,dy\right|<\infty,$$

где $f\in L^p(\mathbb{R})$, $g\in L^r(\mathbb{R})$, $h\in L^q(\mathbb{R})$. Формула (IX.18) действительно усиливает это неравенство, так как $|x|^{-1}\notin L^1(\mathbb{R})$, а потому $|x|^{-\lambda}\notin L^{\lambda^{-1}}(\mathbb{R})$. Для того чтобы иметь возможность работать в подобных ситуациях, полезно ввести классы функций, большая часть которых не лежит ни в одном из пространств L^p.

Определение. Пусть $\langle M,\mu\rangle$ — пространство с σ-конечной мерой μ. Говорят, что функция f на M лежит в **слабом** L^p**-пространстве**, обозначается $f\in L^p_{\mathrm{w}}(M,\ d\mu)$, если существует такая постоянная $C<\infty$, что

$$\mu\{x\,|\,|f(x)|>t\}\leqslant Ct^{-p}\quad\text{для всех }t>0.$$

Для $f\in L^p_{\mathrm{w}}$ положим

$$\|f\|_{p,\mathrm{w}}=\sup_t\,(t^p\mu\{x\,|\,|f(x)|>t\})^{1/p}.$$

Отметим, что $\|\cdot\|_{p,\mathrm{w}}$ — не норма, поскольку она не удовлетворяет неравенству треугольника. Название слабое L^p-пространство объясняется тем, что $L^p\subset L^p_{\mathrm{w}}$ и $\|f\|_{p,\mathrm{w}}\leqslant\|f\|_p$ (см. задачу 24).

Далее, $f \in L^p$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^\infty \mu \{x \mid |f(x)| > t\} t^{p-1} dt < \infty.$$

Если $f \in L^p_w$, то этот интеграл может расходиться, но не сильнее, чем логарифмически.

Пример 2. Для функции $|x|^{-n/p}$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ имеем: $\mu \{x \mid |f(x)| > t\} = c_n t^{-p}$, где c_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, f лежит в $L^p_w(\mathbb{R}^n, dx)$, но не лежит в $L^q(\mathbb{R}^n, dx)$ ни при каком q.

Мы приведем без доказательства две интерполяционные теоремы о слабых L^p-пространствах. Доказательство одной из них (теоремы Ханта) вынесено в задачи, а литературные указания даны в Замечаниях.

Теорема IX.18 (интерполяционная теорема Марцинкевича). Пусть $\langle M, \mu\rangle$ и $\langle N, \nu\rangle$ — пространства с σ-конечными мерами и $1 \leqslant p_0 \leqslant q_0 \leqslant \infty$, $1 \leqslant p_1 \leqslant q_1 \leqslant \infty$, $q_0 \neq q_1$. Предположим, что T — линейное отображение, такое, что $T\colon L^{p_0}(M, d\mu) \to L^{q_0}_w(N, d\nu)$ и $T\colon L^{p_1}(M, d\mu) \to L^{q_1}_w(N, d\nu)$, причем

$$\|T\varphi\|_{q_0, w} \leqslant c_0 \|\varphi\|_{p_0},$$

$$\|T\psi\|_{q_1, w} \leqslant c_1 \|\psi\|_{p_1}$$

для всех $\varphi \in L^{p_0}(M, d\mu)$, $\psi \in L^{q_1}(M, d\mu)$. Тогда при любом $t \in (0, 1)$ отображение T продолжается до ограниченного линейного отображения из $L^{p_t}(M, d\mu)$ в $L^{q_t}(N, d\nu)$, где $p_t^{-1} = t p_1^{-1} + (1-t) p_0^{-1}$ и $q_t^{-1} = t q_1^{-1} + (1-t) q_0^{-}$. Его норма зависит только от t, c_i, q_i и p_i.

Теорема IX.19 (интерполяционная теорема Ханта). Пусть $\langle M, \mu\rangle$ и $\langle N, \nu\rangle$ — пространства с σ-конечными мерами и $1 \leqslant p_1 < p_0 \leqslant \infty$, $1 \leqslant q_1 < q_0 \leqslant \infty$. Предположим, что T — ограниченное линейное отображение из $L^{p_0}(M, d\mu)$ в $L^{q_0}(N, d\nu)$ и из $L^{p_1}(M, d\mu)$ в $L^{q_1}(N, d\nu)$. Тогда при любых $t \in (0, 1)$ оно продолжается до ограниченного линейного отображения из $L^{p_t}_w(M, d\mu)$ в $L^{q_t}_w(N, d\nu)$ (p_t и q_t определены выше). Более того, $\|Tf\|_{q_t, w} \leqslant C_t \|f\|_{p_t, w}$, где C_t зависит лишь от t, p_i, q_i и норм, отвечающих концам интервала изменения t.

Заметим, что теорема Марцинкевича — наиболее глубокая интерполяционная теорема, поскольку она превращает «слабую» информацию в сильную. Предостережем читателя, что необходимо помнить об условии $p < q$ (см. в задаче 77 пример трудностей, к которым приводит потеря этого условия). Отметим, что ни одна из «слабых» теорем, в отличие от теоремы Рисса — Торина, не дает логарифмически выпуклых оценок на норму.

В качестве примера того, как работают «в паре» две последние теоремы, выведем одно обобщение неравенства Харди — Литтлвуда.

Пример 3 (неравенство Соболева). Пусть $0<\lambda<n$, и пусть $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $h\in L^r(\mathbb{R}^n)$, где $p^{-1}+r^{-1}+\lambda n^{-1}=2$ и $1<p, r<\infty$. Тогда

$$\iint \frac{|f(x)||h(y)|}{|x-y|^\lambda}\,d^nx\,d^ny \leqslant C_{p,r,\lambda,n}\|f\|_p\|h\|_r. \qquad \text{(IX.19)}$$

Для доказательства этой оценки необходимо следующее обобщение неравенства Юнга: если $1<p, r, s<\infty$, $p^{-1}+r^{-1}=s^{-1}+1$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^r_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n)$, то $f*g\in L^s(\mathbb{R}^n)$ и $\|f*g\|_s\leqslant C\|f\|_p\cdot\|g\|_{r,\mathrm{w}}$. Фиксируем сначала $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$. Тогда неравенство Юнга (пример 1) показывает, что T_f: $L^r(\mathbb{R}^n)\to L^s(\mathbb{R}^n)$, где $T_f(g)=f*g$ и $1\leqslant r\leqslant p'$. Выбирая сначала $r=1$, а затем $r=p'$ и применяя теорему Ханта, находим, что при $1<r<p'$ отображение T_f: $L^r_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n)\to L^s_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n)$ ограничено. Теперь фиксируем $g\in L^r_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n)$. Известно, что отображение T_g: $L^p(\mathbb{R}^n)\to L^s_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n)$ ограничено для подходящим образом связанных p и s и $p\leqslant s$. Применяя теорему Марцинкевича, заключаем, что $f*g\in L^s(\mathbb{R}^n)$. Неравенство Соболева следует непосредственно из этого обобщения неравенства Юнга.

Некоторые из наиболее важных L^p-неравенств на $\mathbb{R}^n$ приведены в табл. IX.1. Имеются также L^p-оценки, содержащие производные; некоторые из них мы рассматриваем в Замечаниях к § IX.6.

Таблица IX.1

Название неравенства	Условия	Неравенство
Гёльдера	$1\leqslant p, q, r\leqslant\infty$ $p^{-1}+q^{-1}=r^{-1}$	$\|fg\|_r\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$
Хаусдорфа — Юнга	$1\leqslant p\leqslant 2$ $p^{-1}+q^{-1}=1$	$\|\hat f\|_q\leqslant(2\pi)^{(n/2-n/p)}\|f\|_p$
Юнга	$1\leqslant p, q, r\leqslant\infty$ $p^{-1}+q^{-1}=1+r^{-1}$	$\|f*g\|_r\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$
Обобщенное Юнга	$1<p, q, r<\infty$ $p^{-1}+q^{-1}=1+r^{-1}$	$\|f*g\|_r\leqslant C_{p,q}\|f\|_p\|g\|_{q,\mathrm{w}}$
Слабое Хаусдорфа — Юнга	$1<p<2$ $p^{-1}+q^{-1}=1$	$\|\hat f\|_{q,\mathrm{w}}\leqslant C_{p,n}\|f\|_{p,\mathrm{w}}$
Слабое Юнга	$1<r, p, s<\infty$ $p^{-1}+q^{-1}=1+r^{-1}$	$\|f*g\|_{r,\mathrm{w}}\leqslant C_{p,q}\|f\|_{p,\mathrm{w}}\|g\|_{q,\mathrm{w}}$

Дополнение к § IX.4. Абстрактная интерполяция

В этом дополнении мы докажем абстрактную интерполяционную теорему, а затем дадим некоторые ее приложения и, в частности, докажем теоремы Стейна и Рисса—Торина. Прежде чем обращаться к абстрактной теории, мы приведем два предложения, иллюстрирующих главную идею, лежащую в основе интерполяции.

Предложение 1. Пусть A и B—матрицы на пространстве $\mathbb{C}^n$ с естественным внутренним произведением, причем $A \geqslant 0$. Предположим, что $\|AB\| \leqslant 1$ и $\|BA\| \leqslant 1$. Тогда $\|A^{1/2}BA^{1/2}\| \leqslant 1$.

Доказательство. Предположим, что это предложение справедливо для всех $A > 0$. Тогда можно доказать, что оно справедливо для всех $A \geqslant 0$. В самом деле, пусть задано $A \geqslant 0$ и выполняются условия $\|AB\| \leqslant 1$, $\|BA\| \leqslant 1$; фиксируем $c > 0$ и положим $B' = B(1+c\|B\|)^{-1}$. Тогда $\|(A+c)B'\| \leqslant 1$ и $\|B'(A+c)\| \leqslant 1$. Так как $A+c > 0$, то находим, что $\|(A+c)^{1/2}B'(A+c)^{1/2}\| \leqslant 1$. Устремляя $c \downarrow 0$, получаем

$$\|A^{1/2}BA^{1/2}\| \leqslant 1.$$

Итак, можно считать, что $A > 0$.

Как из оценок для AB и BA получить оценки для $A^{1/2}BA^{1/2}$? Поскольку A^x может быть определен как самосопряженный оператор, естественно ввести функцию $F(x) = A^xBA^{1-x}$. Заметим, что $F(x)$ имеет аналитическое продолжение $F(z) = A^zBA^{1-z} = e^{z \log A}Be^{(1-z)\log A}$ на всю комплексную плоскость. Таким образом, условия предложения 1 говорят нам, что данная матричнозначная аналитическая функция $F(z)$ удовлетворяет неравенствам $\|F(0)\| \leqslant 1$ и $\|F(1)\| \leqslant 1$. Из этих неравенств мы должны вывести, что $\|F(1/2)\| \leqslant 1$. Это достигается при помощи одного классического результата из теории функций, принадлежащего Адамару.

Лемма (теорема Адамара о трех прямых). Пусть $\varphi(z)$—комплекснозначная функция, ограниченная и непрерывная в замкнутой полосе $\{z \mid 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1\}$, аналитическая во внутренности этой полосы и удовлетворяющая неравенствам

$$|\varphi(z)| \leqslant M_0, \qquad \text{если } \operatorname{Re} z = 0,$$

и

$$|\varphi(z)| \leqslant M_1, \qquad \text{если } \operatorname{Re} z = 1.$$

Тогда $|\varphi(z)| \leqslant M_0^{1-\operatorname{Re} z} M_1^{\operatorname{Re} z}$ для всех z из данной полосы.

Доказательство. Можно взять $M_0 = 1 = M_1$, так как всегда можно заменить $\varphi(z)$ на $\varphi(z) M_0^{z-1} M_1^{-z}$. Нужно показать, что $|\varphi(z)| \leqslant 1$ в данной полосе. Если $\varphi(z) \to 0$ на ∞ в полосе, то $|\varphi(z)| \leqslant 1$

по принципу максимума. Если же φ не убывает на ∞, рассмотрим $\varphi_n(z)=\varphi(z)e^{z^2/n}e^{-1/n}$. Поскольку $\varphi(z)$ ограничена, $\varphi_n(z)\longrightarrow 0$ при $z\longrightarrow\infty$ в полосе. Следовательно, $|\varphi_n(z)|\leqslant 1$ во всей полосе, ибо $|\varphi_n|\leqslant 1$ на границе. Это справедливо для всех n, и потому $|\varphi(z)|\leqslant 1$, так как $e^{z^2/n}e^{-1/n}\longrightarrow 1$ при $n\longrightarrow\infty$. ∎

Точно так же доказывается теорема Адамара для аналитических функций со значениями в банаховых пространствах. Мы будем пользоваться этим обобщением без пояснений. Теперь легко доказать предложение 1.

Завершение доказательства предложения 1. Если $y\in\mathbb{R}$, то $e^{iy\log A}$ унитарен, т. е. $\|e^{iy\log A}\|=1$. Таким образом, $\|F(z)\|=\|BA\|\leqslant 1$ на прямой $\operatorname{Re} z=0$ и $\|F(z)\|=\|AB\|\leqslant 1$ на прямой $\operatorname{Re} z=1$. Более того, если $0\leqslant\operatorname{Re} z\leqslant 1$, то $\|F(z)\|\leqslant(1+\|A\|)^2\|B\|$. Итак, по теореме о трех прямых $\|F(z)\|\leqslant 1$ для всех z из полосы $0\leqslant\operatorname{Re} z\leqslant 1$. В частности, $\|F(1/2)\|\leqslant 1$. ∎

Мы предлагаем читателю найти доказательство предложения 1, не опирающееся на интерполяцию (задача 51). Из теоремы о трех прямых вытекает простое доказательство неравенства Гёльдера.

Предложение 2 (неравенство Гёльдера). Пусть $\langle M,\mu\rangle$ — пространство с мерой, и предположим, что $f\in L^p(M,d\mu)$ и $g\in L^q(M,d\mu)$, где $p^{-1}+q^{-1}=1$. Тогда $fg\in L^1(M,d\mu)$ и $\|fg\|_1\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$.

Доказательство. Достаточно доказать неравенство Гёльдера в случае, когда f и g — неотрицательные простые функции (т. е. конечные линейные комбинации характеристических функций непересекающихся измеримых множеств конечной меры). Пусть

$$F(z)=\int_M f^{pz}g^{q(1-z)}\,d\mu.$$

Тогда $F(z)$ непрерывна и ограничена в полосе $0\leqslant\operatorname{Re} z\leqslant 1$ и аналитична внутри полосы. Если $\operatorname{Re} z=0$, то

$$|F(z)|\leqslant\int|f^{pz}g^{q(1-z)}|\,d\mu=\int|g|^q\,d\mu=\|g\|_q^q,$$

а если $\operatorname{Re} z=1$, то

$$|F(z)|\leqslant\int|f^{pz}g^{q(1-z)}|\,d\mu=\int|f|^p\,d\mu=\|f\|_p^p.$$

Итак, по теореме о трех прямых $|F(x)|\leqslant\|g\|_q^{q(1-x)}\cdot\|f\|_p^{px}$ для всех $0\leqslant x\leqslant 1$. В частности, для $x=p^{-1}$ находим, что

$$F\left(\frac{1}{p}\right)=\int_M fg\,d\mu\leqslant\|g\|_q\|f\|_p. \ ∎$$

Теорема Адамара лежит в основе общего подхода к интерполяционным теоремам с использованием методов комплексного анализа (литературные указания на другие подходы приведены в Замечаниях). Наше рассмотрение делится на две части. В первой мы показываем, что если X — векторное пространство с двумя нормами $\|\cdot\|^{(0)}$ и $\|\cdot\|^{(1)}$, удовлетворяющими некоторому условию согласованности, то можно ввести естественное семейство банаховых пространств $\{X_t \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, задающих интерполяцию пространств X_0 и X_1 — пополнений X по нормам $\|\cdot\|^{(0)}$ и $\|\cdot\|^{(1)}$. Отсюда легко получаем абстрактную интерполяционную теорему, а именно, если $\{X_t\}$ — интерполяция X_0 и X_1, а $\{Y_t\}$ — интерполяция Y_0 и Y_1, то любое отображение T, лежащее в $\mathscr{L}(X_0, Y_0)$ и в $\mathscr{L}(X_1, Y_1)$, однозначно продолжается до ограниченного отображения X_t в Y_t при каждом t. Во второй части мы покажем, как применяется эта абстрактная теорема в конкретных случаях. В частности, мы докажем теорему Стейна, из которой прямо следует теорема Рисса — Торина, а также несколько других интерполяционных теорем. Трудность, с которой приходится сталкиваться в частных случаях, состоит в конкретной идентификации пространств $\{X_t\}$ и $\{Y_t\}$.

Определение. Пусть X — комплексное векторное пространство. Две нормы $\|\cdot\|^{(0)}$ и $\|\cdot\|^{(1)}$ на X называются **согласованными**, если любая последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к нулю по одной норме и являющаяся последовательностью Коши по другой норме, сходится к нулю по обеим нормам. Если $\|\cdot\|^{(0)}$ и $\|\cdot\|^{(1)}$ согласованы, положим

$$\|x\|_+ = \inf\{\|y\|^{(0)} + \|z\|^{(1)} \mid x = y + z\}.$$

Предложение 3. Пусть $\|\cdot\|^{(0)}$ и $\|\cdot\|^{(1)}$ — согласованные нормы на комплексном векторном пространстве X. Тогда

(a) $\|\cdot\|_+$ — норма.

(b) Если X_0, X_1 и X_+ обозначают пополнения X по нормам $\|\cdot\|^{(0)}$, $\|\cdot\|^{(1)}$ и $\|\cdot\|_+$, то тождественное отображение X продолжается до непрерывного *инъективного* отображения X_0 в X_+ и X_1 в X_+.

Доказательство. Предположим, что $x \in X$ и $\|x\|_+ = 0$. Тогда существуют такие y_n и z_n, что $x = y_n + z_n$ и $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|^{(0)}} 0$, $z_n \xrightarrow{\|\cdot\|^{(1)}} 0$. Но тогда $y_n = x - z_n \xrightarrow{\|\cdot\|^{(1)}} x$, так что $x = 0$ в силу согласованности норм. Это доказывает (a).

Поскольку $\|\cdot\|_+ \leqslant \|\cdot\|^{(0)}$, тождественное отображение ι однозначно продолжается до непрерывного отображения X_0 в X_+. Предположим, что $x \in X_0$ и $\iota(x) = 0$. Тогда существуют такие

$x_n \in X$, что $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|^{(0)}} x$ и $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_+} 0$. Из второго утверждения следует, что существуют y_n, $z_n \in X$, для которых $x_n = y_n + z_n$, $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|^{(0)}} 0$ и $z_n \xrightarrow{\|\cdot\|^{(1)}} 0$. Таким образом, $z_n = x_n - y_n \xrightarrow{\|\cdot\|^{(0)}} x$. Поскольку нормы $\|\cdot\|^{(0)}$ и $\|\cdot\|^{(1)}$ согласованы, $z_n \xrightarrow{\|\cdot\|^{(0)}} 0$, так что отображение $\iota\colon X_0 \to X_+$ инъективно. То же доказательство проходит и для X_1. ∎

Справедливо и обратное утверждение: если $\|\cdot\|_+$ — норма, а продолжения отображения ι инъективны, то нормы $\|\cdot\|^{(0)}$ и $\|\cdot\|^{(1)}$ согласованы. Чтобы освоиться с согласованными и несогласованными нормами, читатель может проделать задачу 34.

Пусть S — замкнутая полоса $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1\}$, а S° — внутренность S, и пусть $\|\cdot\|^{(0)}$ и $\|\cdot\|^{(1)}$ — две согласованные нормы на комплексном векторном пространстве X. Определим $\mathcal{F}(X)$ как множество непрерывных функций f из S в X_+, аналитических в S° и удовлетворяющих условиям:

(i) если $\operatorname{Re} z = 0$, то $f(z) \in X_0$, а если $\operatorname{Re} z = 1$, то $f(z) \in X_1$;

(ii) $\sup\limits_{z \in S} \|f(z)\|_+ < \infty$;

(iii) $|||f||| = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \{\|f(it)\|^{(0)}, \|f(1+it)\|^{(1)}\} < \infty$.

Предложение 4.

(a) $\mathcal{F}(X)$ с нормой $|||\cdot|||$ есть банахово пространство.

(b) Для каждого $t \in [0, 1]$ подпространство
$$K_t = \{f \in \mathcal{F}(X) \mid f(t) = 0\}$$
замкнуто по норме $|||\cdot|||$.

Доказательство. Функционал $|||\cdot|||$, очевидно, положителен, полуаддитивен и положительно однороден. В силу теоремы о трех прямых и неравенств $\|\cdot\|_+ \leqslant \|\cdot\|^{(i)}$, $i = 0, 1$, видим, что
$$\sup_{z \in S} \|f(z)\|_+ \leqslant \sup_{\operatorname{Re} z = 0, 1} \|f(z)\|_+ \leqslant |||f|||. \tag{IX.20}$$

Итак, если $|||f||| = 0$, то $f \equiv 0$, т. е. $|||\cdot|||$ — норма на $\mathcal{F}(X)$. Чтобы убедиться в полноте $\mathcal{F}(X)$, предположим, что $\{f_n\}$ — последовательность Коши в $\mathcal{F}(X)$. Согласно (IX.20), эти функции равномерно сходятся к ограниченной непрерывной функции f на S. В силу равномерной сходимости, f аналитична на S° и удовлетворяет условиям (i), (ii) и (iii). Это доказательство полноты показывает также, что каждое из подпространств K_t замкнуто. ∎

Положим теперь
$$\tilde{X}_t = \mathcal{F}(X)/K_t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Обозначим факторнорму в пространстве $\tilde{X}_t$ через $\|\cdot\|^{(t)}$. Заметим, что X можно отождествить с подмножеством $\tilde{X}_t$ посредством отображения, переводящего каждый элемент $x \in X$ в $[x]$ — класс эквивалентности постоянной функции, значение которой равно x. Далее, $\tilde{X}_t$ можно отождествить с некоторым подмножеством X_+ посредством отображения, переводящего класс эквивалентности $[f]$ в общее значение его элементов в точке t. Это отображение, очевидно, инъективно, а следующее вычисление доказывает его непрерывность. Пусть $[f] \in \tilde{X}_t$ и $x = f(t)$. Согласно (IX.20), $\|x\|_+ \leqslant |||f|||$. Таким образом,

$$\|x\|_+ \leqslant \inf\{|||f||| \mid f \in \mathscr{F}(X),\ f(t) = x\} = \|[f]\|^{(t)}$$

Теперь определим X_t как пополнение X по норме $\|\cdot\|^{(t)}$. Итак, введенные нами пространства связаны следующим образом:

$$X \longrightarrow X_t \longrightarrow \tilde{X}_t \longrightarrow X_+,$$

где каждая стрелка — непрерывное инъективное отображение. При $t=0$ (соответственно $t=1$) X_t есть как раз пространство X_0 (соответственно X_1), с которого мы начинали. Чтобы убедиться в этом, выберем $x \in X$, и пусть $\|\cdot\|^{(0)}$ обозначает исходную норму в X_0. Если $f \in \mathscr{F}(X)$ и $f(0) = x$, то

$$\|x\|^{(0)} \leqslant \sup_{y \in \mathbb{R}} \{\|f(iy)\|^{(0)},\ \|f(1+iy)\|^{(1)}\} = |||f|||,$$

так что

$$\|x\|^{(0)} \leqslant \inf\{|||f||| \mid f(0) = x\}.$$

Обратно, пусть $c > 0$, и рассмотрим $f_c(z) = e^{-cz}x$. Тогда $\|f_c(iy)\|^{(0)} = \|x\|^{(0)}$ и величину $\sup\limits_{y \in \mathbb{R}} \|f_c(1+iy)\|^{(1)}$ можно сделать сколь угодно малой, выбирая c большим. Итак,

$$\|x\|^{(0)} = \inf\{|||f||| \mid f(0) = x\},$$

т. е. факторнорма есть в точности введенная выше норма $\|\cdot\|^{(0)}$. Доказательство для $t=1$ аналогично. Пространства X_t называются **интерполирующими пространствами** для X_0 и X_1, а нормы $\|\cdot\|^{(t)}$ — **интерполирующими нормами** для $\|\cdot\|^{(0)}$ и $\|\cdot\|^{(1)}$.

Заметим, что можно (хотя и не просто, см. задачу 37) доказать, что $X_t = \tilde{X}_t$, но нам это не потребуется. Единственное, что нам необходимо знать, — это что норма на X_t по определению равна факторнорме на $\mathscr{F}(X)/K_t$. Позднее, в примерах, когда нам придется отождествлять X_t с заданным банаховым пространством B_t, мы всегда будем делать это, показывая, что как X_t, так и B_t — пополнения X по одной и той же норме.

Теорема IX.20 (интерполяционная теорема Кальдерона — Лионса). Пусть X и Y — комплексные векторные пространства с заданными согласованными нормами $\|\cdot\|_X^{(0)}$ и $\|\cdot\|_X^{(1)}$ на X и $\|\cdot\|_Y^{(0)}$ и $\|\cdot\|_Y^{(1)}$ на Y. Предположим, что $T(\cdot)$ — аналитическая равномерно ограниченная непрерывная $\mathscr{L}(X_+, Y_+)$-значная функция на полосе S со следующими свойствами:

(i) $T(t)$: $X \longrightarrow Y$ при каждом $t \in (0, 1)$.

(ii) Для каждого $y \in \mathbb{R}$ имеем $T(iy) \in \mathscr{L}(X_0, Y_0)$ и

$$M_0 = \sup_{y \in \mathbb{R}} \|T(iy)\|_{\mathscr{L}(X_0, Y_0)} < \infty.$$

(iii) Для всех $y \in \mathbb{R}$ имеем $T(1+iy) \in \mathscr{L}(X_1, Y_1)$ и

$$M_1 = \sup_{y \in \mathbb{R}} \|T(1+iy)\|_{\mathscr{L}(X_1, Y_1)} < \infty.$$

Тогда для любого $t \in (0, 1)$

$$T(t)[X_t] \subset Y_t$$

и

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X_t, Y_t)} \leqslant M_0^{1-t} M_1^t.$$

Доказательство. Положим $U(z) = M_0^{z-1} M_1^{-z} T(z)$. Тогда $U(\cdot)$ обладает теми же свойствами, что и $T(\cdot)$, за исключением того, что оценки на $U(z)$ при $\operatorname{Re} z = 0$ и $\operatorname{Re} z = 1$ равны единице. Итак, без потери общности можно считать, что $M_0 = M_1 = 1$.

Если $f \in \mathscr{F}(X)$, то $T(z) f(z)$ — непрерывная ограниченная Y_+-значная функция на S, аналитическая в S°. По предположениям (ii) и (iii)

$$\|T(iy) f(iy)\|_Y^{(0)} \leqslant \|f(iy)\|_X^{(0)},$$
$$\|T(1+iy) f(1+iy)\|_Y^{(1)} \leqslant \|f(1+iy)\|_X^{(1)}$$

для каждого $y \in \mathbb{R}$. Значит, отображение J: $\mathscr{F}(X) \longrightarrow \mathscr{F}(Y)$, заданное как $(Jf)(z) = T(z) f(z)$, имеет норму, не превосходящую единицы. Более того, если

$$K_t^X = \{f \in \mathscr{F}(X) \mid f(t) = 0\} \text{ и } K_t^Y = \{f \in \mathscr{F}(Y) \mid f(t) = 0\},$$

то $J[K_t^X] \subset K_t^Y$. Итак, J сводится к сжатию $\tilde{J}_t$: $\tilde{X}_t \longrightarrow \tilde{Y}_t$. Поскольку $\tilde{J}_t$ действует на классах эквивалентности по формуле $\tilde{J}_t[f] = [T(t) f(t)]$, мы видим, что $\tilde{J}_t$ равно $T(t) \upharpoonright \tilde{X}_t$ при естественном отождествлении $\tilde{X}_t$ с подмножеством X_+. Наконец, поскольку $T(t)$: $X \longrightarrow Y$, то $T(t)[X_t] \subset Y_t$. ∎

Приведем теперь несколько примеров, показывающих, как применять эту абстрактную интерполяционную теорему.

Пример 1 (пространства L^p). Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с σ-конечной мерой, и предположим, что $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$. Пусть $X = L^{p_0}(M, d\mu) \cap L^{p_1}(M, d\mu)$, и пусть $\|\cdot\|^{(0)} = \|\cdot\|_{p_0}$, $\|\cdot\|^{(1)} = \|\cdot\|_{p_1}$. Покажем, что $X_t = L^{p_t}(M, d\mu)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, где $p_t^{-1} = tp_1^{-1} + (1-t)p_0^{-1}$, за исключением случая $p_1 = \infty$, когда (при $t = 1$) X_1 — замыкание X по норме $\|\cdot\|_\infty$ (которое может быть меньше, чем $L^\infty(M, d\mu)$). Доказательство состоит в демонстрации того, что нормы $\|\cdot\|^{(t)}$ и $\|\cdot\|_{p_t}$ совпадают на простых функциях, которые плотны в X. Пусть $t \in (0, 1)$, и пусть $\varphi(x)$ — простая функция, причем $\|\varphi\|_{p_t} = 1$. Положим, по определению,

$$f(z) = |\varphi(\cdot)|^{p_t(zp_1^{-1} + (1-z)p_0^{-1})} \exp(i \arg \varphi(\cdot)).$$

Тогда $f(z) \in X$ для каждого $z \in S$ и

$$\|f(iy)\|^{p_0}_{L^{p_0}(M,\, d\mu)} = \int_M \left| |\varphi(x)|^{p_t p_0 (iyp_1^{-1} + (1-iy)p_0^{-1})} \right| d\mu(x) =$$

$$= \int_M |\varphi(x)|^{p_t} d\mu(x) = 1.$$

Если $p_1 = \infty$, то $\|f(1+iy)\|_\infty = 1$, а если $p_1 < \infty$, то

$$\|f(1+iy)\|^{p_1}_{L^{p_1}(M,\, d\mu)} = \int_M \left| |\varphi(x)|^{p_t p_1 ((1+iy)p_1^{-1} - iyp_0^{-1})} \right| d\mu(x) =$$

$$= \int_M |\varphi(x)|^{p_t} d\mu(x) = 1.$$

Следовательно, $|||f||| = 1$, так что $\|f(t)\|^{(t)} = \|f\|_{\mathcal{F}(X)/K_t} \leqslant 1$. Поскольку значение f в точке t равно φ, имеем $\|\varphi\|^{(t)} \leqslant 1$. Итак, мы показали, что $\|\varphi\|^{(t)} \leqslant \|\varphi\|_{L^{p_t}}$ для всех простых функций φ.

Для доказательства обратного неравенства допустим, что $f \in \mathcal{F}(X)$ и φ — простая функция на M. Положим

$$g(z) = |\varphi(\cdot)|^{q_t(zq_1^{-1} + (1-z)q_0^{-1})} \exp(i \arg \varphi(\cdot)),$$

где $q_t^{-1} = 1 - p_t^{-1}$. Тогда, поскольку $f(z)$ аналитична и ограничена как всякая X_+-значная функция, функция $H(z) = \int_M f(z)\, g(z)\, d\mu$ аналитична и ограничена в S и $H(t) = \int \varphi f(t)\, d\mu$. По теореме о трех прямых,

$$
\begin{aligned}
|H(t)| &\leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}} \{|H(iy)|,\ |H(1+iy)|\} \leqslant \\
&\leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}} \{\|f(iy)g(iy)\|_{L^1},\ \|f(1+iy)g(1+iy)\|_{L^1}\} \leqslant \\
&\leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}} \left\{\|f(iy)\|_{L^{p_0}}\|g(iy)\|_{L^{q_0}},\ \|f(1+iy)\|_{L^{p_1}}\|g(1+iy)\|_{L^{q_1}}\right\} \leqslant \\
&\leqslant \left(\sup\left\{\|f(iy)\|_{L^{p_0}},\ \|f(1+iy)\|_{L^{p_1}}\right\}\right)\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot\left(\sup\left\{\|g(iy)\|_{L^{q_0}},\ \|g(1+iy)\|_{L^{q_1}}\right\}\right) = \\
&= |||f|||\cdot|||g||| = \|\varphi\|_{q_t}|||f|||
\end{aligned}
$$

в силу приведенного выше вычисления. Заметим, что обозначенные здесь тройными чертами нормы различны: одна получена из L^{p_0} и L^{p_1}, а вторая — из L^{q_0} и L^{q_1}. Поскольку

$$\left|\int \varphi f(t)\,d\mu\right| \leqslant \|\varphi\|_{q_t}|||f|||,$$

находим, что $f\in L^{p_t}$ и

$$\|f(t)\|_{L^{p_t}} \leqslant |||f|||.$$

Отсюда следует, что для простых ψ и для $f\in\psi+K_t$

$$\|\psi\|^{(t)} = \inf_{f\in\psi+K_t}|||f||| \geqslant \|\psi\|_{L^{p_t}}.$$

Итак, нормы $\|\cdot\|_{p_t}$ и $\|\cdot\|^{(t)}$ совпадают на простых функциях. Поскольку $X=L^{p_0}\cap L^{p_1}$ и простые функции плотны в X_t и L^{p_t}, заключаем, что $X_t=L^{p_t}$.

Сопоставляя доказанный факт, т. е. то, что $L^{p_t}=X_t$, с абстрактной интерполяционной теоремой, получаем, что справедлива

Теорема IX.21 (интерполяционная теорема Стейна). Пусть $\langle M,\mu\rangle$ и $\langle N,\nu\rangle$ — пространства с σ-конечными мерами и $1\leqslant p_0,\ p_1,\ q_0,\ q_1\leqslant\infty$. Предположим, что $T(\cdot)$ — непрерывная функция в полосе $S=\{z\mid 0\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant 1\}$ со значениями в

$$\mathscr{L}(L^{p_0}(M,\ d\mu)+L^{p_1}(M,\ d\mu),\ L^{q_0}(N,\ d\nu)+L^{q_1}(N,\ d\nu)),$$

которая равномерно ограничена, аналитична во внутренности полосы и удовлетворяет условиям

(i) $T(z)$: $L^{p_0}\cap L^{p_1}\to L^{q_0}\cap L^{q_1}$ для всех $z\in S$.

(ii) $T(iy)\in\mathscr{L}(L^{p_0}(M,\ d\mu),\ L^{q_0}(N,\ d\nu))$ для всех $y\in\mathbb{R}$ и

$$M_0=\sup_{y\in\mathbb{R}}\|T(iy)\|_{\mathscr{L}(L^{p_0},\ L^{q_0})}<\infty.$$

(iii) $T(1+iy) \in \mathscr{L}(L^{p_1}(M, d\mu), L^{q_1}(N, d\nu))$ для всех $y \in \mathbb{R}$ и

$$M_1 = \sup_{y \in \mathbb{R}} \| T(1+iy) \|_{\mathscr{L}(L^{p_1}, L^{q_1})} < \infty.$$

Тогда для каждого $t \in (0, 1)$

$$T(t): L^{p_t}(M, d\mu) \to L^{q_t}(N, d\nu)$$

и

$$\| T(t) \|_{\mathscr{L}(L^{p_t}, L^{q_t})} \leqslant M_0^{1-t} M_1^t,$$

где $p_t^{-1} = tp_1^{-1} + (1-t)p_0^{-1}$, $q_t^{-1} = tq_1^{-1} + (1-t)q_0^{-1}$.

Пользуясь тем, что $\bar{X}_t = X$, можно отказаться от условия (i) как в теореме Стейна, так и в теореме Кальдерона—Лионса. Отметим, что заключения теоремы остаются в силе и тогда, когда наложено более слабое условие аналитичности, а именно, функция $\int_N (T(z)\varphi)(y)\psi(y)\,d\nu(y)$ аналитична для всех простых функций φ и ψ. Теорема Рисса—Торина немедленно следует из интерполяционной теоремы Стейна: достаточно положить $T(z) = T$ для всех z.

Пример 2 ($\mathscr{I}_p$). Пусть $\mathscr{H}$—сепарабельное гильбертово пространство. Напомним, что класс операторов со следом $\mathscr{I}_1$—это множество таких операторов $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, что $\operatorname{tr}(|A|) < \infty$, причем $\mathscr{I}_1$ сопряжено к множеству компактных операторов $\operatorname{Com}(\mathscr{H})$ (теорема VI.26). Для $1 \leqslant p < \infty$ определим множество $\mathscr{I}_p$, полагая

$$\mathscr{I}_p = \{A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}) \mid |A|^p \in \mathscr{I}_1\},$$

и пусть $\|A\|_p = (\operatorname{tr}(|A|^p))^{1/p}$. Для $p = \infty$ положим $\mathscr{I}_\infty = \operatorname{Com}(\mathscr{H})$ и $\|A\|_\infty = \|A\|$. Если $|A|^p \in \mathscr{I}_1$, то по теореме Рисса—Шаудера (теорема VI.15) $\sigma(|A|^p) \setminus \{0\}$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности. Отсюда следует, что оператор $|A|$ компактен, а потому компактен и $A = U|A|$, так как $\operatorname{Com}(\mathscr{H})$—идеал в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Согласно теореме VI.17, A можно представить в виде $A = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (\psi_n, \cdot)\varphi_n$, где $\{\psi_n\}$ и $\{\varphi_n\}$—ортонормированные наборы, а λ_n—сингулярные значения A (ненулевые собственные значения $|A|$). Итак,

$$|A| = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (\psi_n, \cdot)\psi_n \quad \text{и} \quad |A|^p = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^p (\psi_n, \cdot)\psi_n,$$

поэтому

$$\|A\|_p = (\operatorname{tr}(|A|^p))^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^p \right)^{1/p}.$$

Это означает, что $\mathcal{I}_p$ есть не что иное, как множество компактных операторов, сингулярные значения которых лежат в l_p, а нормы равны нормам в l_p. Это справедливо даже при $p=\infty$.

Предложение 5. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $q^{-1}+p^{-1}=1$. Если $A \in \mathcal{I}_p$ и $B \in \mathcal{I}_q$, то $AB \in \mathcal{I}_1$ и $\|AB\|_1 \leqslant \|A\|_p \|B\|_q$.

Доказательство. При $p=1$, $q=\infty$ это утверждение было рассмотрено в задаче 28 гл. VI. Для $1<p<\infty$ доказательство аналогично доказательству неравенства Гёльдера, приведенному в предложении 2. Пусть $A=U|A|$ и $B=V|B|$ — полярные разложения A и B; положим

$$F(z)=\operatorname{tr}(U|A|^{pz}V|B|^{q(1-z)}).$$

Функция $F(z)$ ограничена и непрерывна на полосе $S=\{z \mid 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1\}$ и аналитична во внутренности этой полосы. Поскольку оператор $|A|^{pz}$ унитарен на прямой $\operatorname{Re} z=0$, а $|B|^{q(1-z)}$ унитарен на прямой $\operatorname{Re} z=1$, имеем

$$\begin{aligned}|F(iy)|&=|\operatorname{tr}(U|A|^{iyp}V|B|^{q}|B|^{iyq})| \leqslant \\ &\leqslant \operatorname{tr}(|B|^{q})=\|B\|_q^q, \\ |F(1+iy)|&=|\operatorname{tr}(U|A|^{p}|A|^{iyp}V|B|^{-iyq})| \leqslant \\ &\leqslant \operatorname{tr}(|A|^{p})=\|A\|_p^p.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались известными свойствами следа оператора: $\operatorname{tr}(CD)=\operatorname{tr}(DC)$ и $|\operatorname{tr}(CD)| \leqslant \|D\| \operatorname{tr}(C)$ при $C \geqslant 0$. Тогда по теореме о трех прямых $|F(z)| \leqslant \|A\|_p^{pz}\|B\|_q^{q(1-z)}$ для всех $z \in (0, 1)$. В частности, при $z=p^{-1}$ находим

$$|\operatorname{tr}(AB)|=|F(1/p)| \leqslant \|A\|_p \|B\|_q. \blacksquare$$

Предположим, что $A=U|A| \in \mathcal{I}_p$, и определим B формулой $B=|A|^{p-1}U^*\|A\|_p^{-p/q}$. Тогда

$$\begin{aligned}\|B\|_q&=\operatorname{tr}[||A|^{p-1}U^*|^q]^{1/q}\|A\|_p^{-p/q}= \\ &=\operatorname{tr}[(U|A|^{2(p-1)}U^*)^{q/2}]^{1/q}\|A\|_p^{-p/q}= \\ &=\operatorname{tr}[U|A|^{q(p-1)}U^*]^{1/q}\|A\|_p^{-p/q}= \\ &=\operatorname{tr}[|A|^{q(p-1)}]^{1/q}\|A\|_p^{-p/q}=1,\end{aligned}$$

поскольку $\operatorname{Ker} U=\operatorname{Ker} A$. Аналогичное вычисление показывает, что $\operatorname{tr}(AB)=\|A\|_p$. Итак, по предложению 5,

$$\|A\|_p=\sup_{\|D\|_q=1}|\operatorname{tr}(AD)|.$$

Предположим теперь, что A и C принадлежат $\mathcal{I}_p$. Тогда

$$\|A+C\|_p = \sup_{\|D\|_q=1} |\operatorname{tr}((A+C)D)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|D\|_q=1} |\operatorname{tr}(AD)| + \sup_{\|D\|_q=1} |\operatorname{tr}(CD)| =$$
$$= \|A\|_p + \|C\|_p.$$

Итак, $\mathcal{I}_p$—векторное пространство, а $\|\cdot\|_p$—норма в $\mathcal{I}_p$.

Предложение 6. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда

(a) $\mathcal{I}_p$—банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_p$.

(b) $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_p \subset \operatorname{Com}(\mathcal{H})$ и $\mathcal{I}_p$—замыкание множества операторов конечного ранга по норме $\|\cdot\|_p$.

(c) Если $A \in \mathcal{I}_p$, то $A^* \in \mathcal{I}_p$ и $\|A^*\|_p = \|A\|_p$.

Доказательство. При $p=\infty$ (a), (b) и (c)—стандартные свойства компактных операторов. Предположим поэтому, что $1 \leqslant p < \infty$. Для любой последовательности $\{\lambda_n\}$

$$\|\{\lambda_n\}\|_\infty \leqslant \|\{\lambda_n\}\|_p \leqslant \|\{\lambda_n\}\|_1,$$

так что

$$\|A\| \leqslant \|A\|_p \leqslant \|A\|_1.$$

Следовательно, любая последовательность Коши $\{A_n\}$ из $\mathcal{I}_p$ сходится в равномерной топологии к некоторому предельному оператору A. Читатель легко может проверить сам, что $A \in \mathcal{I}_p$ и $\|A_n - A\|_p \to 0$. Следовательно, $\mathcal{I}_p$ полно по норме $\|\cdot\|_p$. Как показано выше, каждый оператор $A \in \mathcal{I}_p$ компактен и $\|A\|_p = \|\{\lambda_n\}\|_{l_p}$, где $\{\lambda_n\}$—сингулярные значения A в представлении $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\psi_n, \cdot)\varphi_n$. Итак, операторы конечного ранга $A_M = \sum_{n=1}^{M} \lambda_n (\psi_n, \cdot)\varphi_n$ сходятся к A по $\|\cdot\|_p$-норме. Включения $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_p \subset \operatorname{Com}(\mathcal{H})$ немедленно следуют из приведенного выше неравенства. Этим доказаны (a) и (b).

Для доказательства (c) отметим, что A и A^* имеют одни и те же сингулярные значения. ∎

Предложение 7. Если $1 < p, q < \infty$ и $p^{-1}+q^{-1}=1$, то $\mathcal{I}_p^* = \mathcal{I}_q$.

Доказательство. Предложение 5 и сделанное после него замечание показывают, что для каждого $A \in \mathcal{I}_q$ отображение $B \mapsto \operatorname{tr}(AB)$ задает ограниченный линейный функционал на $\mathcal{I}_p$ с нормой $\|A\|_q$. Обратно, пусть $\Lambda \in \mathcal{I}_p^*$. Тогда, поскольку $\|A\|_p \leqslant \|A\|_1$, имеем $\Lambda \in \mathcal{I}_1^*$, так что по теореме VI.26 существует некоторый оператор $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, такой, что $\Lambda(B) = \operatorname{tr}(AB)$ для всех $B \in \mathfrak{I}_1$. Мы хотим показать, что $A \in \mathfrak{I}_q$. Его можно представить как $A = D + iC$, где D и C самосопряжены. Поскольку

$$|\operatorname{tr}(A^*B)| = |\operatorname{tr}(AB^*)| \leqslant \|\Lambda\| \|B^*\|_p = \|\Lambda\| \|B\|_p,$$

имеем

$$|\operatorname{tr}(DB)| \leqslant \|\Lambda\| \|B\|_p, \qquad |\operatorname{tr}(CB)| \leqslant \|\Lambda\| \|B\|_p.$$

Итак, достаточно доказать, что $A \in \mathfrak{I}_q$ в случае, когда A самосопряжен. Пусть $a > 0$ и $E(a, \infty)$ — спектральные проекторы A, соответствующие интервалу (a, ∞). Предположим, что $E(a, \infty)$ бесконечномерен, и пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированный базис для $E(a, \infty)$. Если ввести оператор

$$B_M = \left(\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} P_{\varphi_n}\right)\left(\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n^p}\right)^{-1/p},$$

где P_{φ_n} — проектор на φ_n, то $\|B_M\|_p = 1$. Но

$$\operatorname{tr}(AB_M) \geqslant \left(\sum_{n=1}^{M} \frac{a}{n}\right)\left(\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n^p}\right)^{-1/p} \xrightarrow{M \to \infty} \infty,$$

а это противоречит тому, что $|\operatorname{tr}(AB_M)| \leqslant \|\Lambda\|$. Итак, $E(a, \infty)$ конечномерен, и аналогичное доказательство показывает, что конечномерен $E(-\infty, -a)$. Отсюда следует, что оператор A компактен, а потому может быть представлен как $A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n P_{\psi_n}$ для некоторого ортонормированного набора $\{\psi_n\}$. Если $\{\gamma_n\}_{n=1}^{M}$ — произвольная конечная последовательность, такая, что $\left(\sum_{n=1}^{M} |\gamma_n|^p\right)^{1/p} = 1$, то $B_\gamma = \sum_{n=1}^{M} \gamma_n P_{\psi_n} \in \mathfrak{I}_p$ и

$$\left|\sum_{n=1}^{M} \gamma_n \mu_n\right| = |\operatorname{tr}(AB_\gamma)| \leqslant \|\Lambda\|,$$

откуда $\{\mu_n\} \in l_q$, поскольку $l_q = l_p^*$. Итак, $(\operatorname{tr}(|A|^q))^{1/q} = (\sum |\mu_n|^q)^{1/q} < \infty$ и $A \in \mathfrak{I}_q$. ∎

Предложение 8. Пусть $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$, и пусть $X = \mathfrak{I}_{p_0}$. Тогда $\|\cdot\|^{(0)} = \|\cdot\|_{p_0}$ и $\|\cdot\|^{(1)} = \|\cdot\|_{p_1}$ — согласованные нормы на X и $X_t = \mathfrak{I}_{p_t}$, где $p_t = tp_1^{-1} + (1-t)p_0^{-1}$.

Мы опускаем доказательство предложения 8, так как оно почти совпадает с доказательством из примера 1, за исключением того, что разложение $\varphi(x) = |\varphi(x)| \exp(i \arg \varphi(x))$ заменяется разложением $A = U|A|$, а интегрирование — взятием следа.

Теорема IX.22. Пусть $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ — сепарабельные гильбертовы пространства, которым соответствуют пространства операторов $\mathscr{I}_p^{(1)}$ и $\mathscr{I}_q^{(2)}$. Предположим, что T переводит $\mathscr{F}_1$ (операторы конечного ранга в $\mathscr{H}_1$) в $\mathrm{Com}(\mathscr{H}_2)$ и что

(i) $\|T(A)\|_{q_0} \leqslant M_0 \|A\|_{p_0}$ для всех $A \in \mathscr{F}_1$;

(ii) $\|T(A)\|_{q_1} \leqslant M_1 \|A\|_{p_1}$ для всех $A \in \mathscr{F}_1$.

Тогда $\|T(A)\|_{q_t} \leqslant M_1^t M_0^{1-t} \|A\|_{p_t}$ для всех $A \in \mathscr{F}_1$, так что T однозначно продолжается до ограниченного отображения $\mathscr{I}_{p_t}$ в $\mathscr{I}_{q_t}$, где $p_t^{-1} = tp_1^{-1} + (1-t)\, p_0^{-1}$ и $q_t^{-1} = tq_1^{-1} + (1-t)\, q_0^{-1}$.

Доказательство. Теорема сразу следует из предложения 8 и интерполяционной теоремы Кальдерона—Лионса. ∎

Пример 3 (оснащенные гильбертовы пространства). Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство и A — положительный самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$, причем $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, так что A^{-1} тоже самосопряжен (как A, так и A^{-1} могут быть неограниченными). Пусть $X = C^\infty(A) \cap C^\infty(A^{-1})$, и для каждого $m \in \mathbb{R}$ пусть $\mathscr{H}_m$ — пополнение X по норме $\|\varphi\|_m = \|A^{m/2}\varphi\|_{\mathscr{H}}$. В силу спектральной теоремы можно считать, что $\mathscr{H} = L^2(M, d\mu)$, где $\langle M, \mu\rangle$ — некоторое пространство с мерой, а A — умножение на некоторую функцию $f \geqslant 0$. Очевидно, что $\mathscr{H}_m = L^2(M, f^m d\mu)$, и короткое рассуждение показывает, что нормы $\|\cdot\|_m$ согласованы. Пусть m_0 и m_1 фиксированы и $m_t = tm_1 + (1-t)\, m_0$. Тогда доказательство, подобное приведенному в примере 1, показывает, что $X_t = \mathscr{H}_{m_t}$. Для доказательства включения $\mathscr{H}_{m_t} \subset X_t$ используется функция $F(z) = f(\cdot)^{zm_1 + (1-z)\, m_0}$. Для доказательства включения $X_t \subset \mathscr{H}_{m_t}$ используется естественное отождествление $\mathscr{H}_m^*$ с $\mathscr{H}_{-m}$. В задаче 35 читателю предлагается восстановить опущенные детали. Как только пространство X_t отождествлено с $\mathscr{H}_{m_t}$, можно применить абстрактную интерполяционную теорему для формулировки конкретных утверждений об операторах на $\mathscr{H}$. Вот два простых примера.

Предложение 9. Пусть A и B — положительные самосопряженные операторы, имеющие (вообще говоря, неограниченные) обратные, в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть T — ограниченное линейное преобразование $\mathscr{H}$ в себя, удовлетворяющее условиям

(i) $\|T\varphi\| \leqslant M_0 \|\varphi\|$ для всех $\varphi \in \mathscr{H}$;

(ii) $T\colon D(A^2) \to D(B^2)$ и $\|B^2 T\varphi\| \leqslant M_1 \|A^2\varphi\|$ для всех $\varphi \in D(A^2)$.

Тогда $T\colon D(A) \to D(B)$ и

$$\|BT\varphi\| \leqslant M_0^{1/2} M_1^{1/2} \|A\varphi\| \text{ для всех } \varphi \in D(A).$$

Предложение 10. Для $m \in \mathbb{R}$ через W_m обозначим m-е пространство Соболева (определение см. в § IX.6). Предположим, что $g \in C^k$ и $D^\alpha g$ ограничены для всех α с $|\alpha| \leqslant k$. Тогда для каждого m, такого, что $|m| \leqslant k$, $f \mapsto gf$ — ограниченное отображение W_m в W_m.

Доказательство. Покажем сначала, что отображение g: $W_k \to W_k$ ограничено. По предложению 1 из § IX.6 функция f тогда и только тогда принадлежит W_k, когда $D^\alpha f \in L^2$ для всех $|\alpha| \leqslant k$. Отсюда легко следует, что норма $\|f\|_{k,2} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha f\|_{L^2}$ эквивалентна норме $\|f\|_k$ на W_k. Применяя правило Лейбница и учитывая ограниченность производных g, получаем

$$\|gf\|_{k,2} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha gf\|_2 \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha f\|_2 = C\|f\|_{k,2}.$$

Итак, отображение g: $W_k \to W_k$ ограничено. В силу двойственности ограничено и g: $W_{-k} \to W_{-k}$. Пространства W_m — это оснащенные гильбертовы пространства, ассоциированные с оператором $-\Delta + I$, так что по интерполяционной теореме отображение g: $W_m \to W_m$ ограничено при каждом m с $|m| \leqslant k$. ∎

Еще одно применение $\mathcal{H}_m$-интерполяционных теорем приведено в доказательстве теоремы X.18. Другой пример интерполирующих пространств см. в задаче 36.

IX.5. Фундаментальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами

В этом и следующем разделах мы приведем два приложения преобразования Фурье к изучению дифференциальных уравнений в частных производных. Это — не книга по дифференциальным уравнениям, хотя мы время от времени и обращались к ним, поэтому и здесь наша цель — не детально обсудить технику или сформулировать наиболее сильные результаты, а пояснить и проиллюстрировать применение методов функционального анализа.

Как и в гл. V, $p(x)$ обозначает полином от нескольких переменных $x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, а $p(D)$ — дифференциальный оператор в частных производных, получаемый подстановкой $\partial/\partial x_j$ вместо x_j во всех местах, где x_j встречается в $p(x)$.

Определение. **Фундаментальным решением** для дифференциального оператора $p(D)$ называется обобщенная функция $E \in \mathcal{D}'$, такая, что $p(D)E = \delta$.

Фундаментальные решения интересуют нас по той причине, что если ввести $u = E * f$, где $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то

$$p(D)\,u = p(D)\,(E * f) = p(D)\,E * f = \delta * f = f.$$

Итак, если мы сможем найти фундаментальное решение, то получим теорему существования для всех дифференциальных уравнений в частных производных $p(D)\,u = f$, где $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Более того, если мы сможем найти выражение для E, то найдем явное представление для произвольного решения, а именно $u = E * f$.

Пример (уравнение Пуассона). Для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ в трехмерном пространстве фундаментальным решением является функция $E(\mathbf{r}) = -1/4\pi r$. В этом легко убедиться следующим образом. Обозначим через B_ε шар радиуса ε с центром в нуле. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Тогда

$$\begin{aligned}(\Delta E)(\varphi) &= E(\Delta\varphi) = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi r}\,\Delta\varphi\,dx = \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{-\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_\varepsilon} \frac{1}{4\pi r}\,\Delta\varphi\,dx\right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_\varepsilon} -\Delta\left(\frac{1}{4\pi r}\right)\varphi\,dx + \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\varphi\,\partial S - \right. \\ &\qquad \left. - \int_{\partial B_\varepsilon} \varphi\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi r}\right) dS\right\},\end{aligned}$$

где dS обозначает обычную меру на поверхности ∂B_ε шара B_ε. Первый член в правой части равен нулю. Второй член сходится к нулю, а третий сходится к $\varphi(0)$ при $\varepsilon \downarrow 0$, так как φ непрерывна в нуле. Итак, $\Delta E(\varphi) = \varphi(0)$, поэтому $\Delta E = \delta$.

Чтобы почувствовать, с какими трудностями связано построение фундаментальных решений, попробуем действовать формально. Нам хотелось бы решить дифференциальное уравнение $p(D)\,E = \delta$. Совершая преобразование Фурье над обеими частями уравнения, получаем $p(ix)\,\hat{E} = (2\pi)^{-n/2}$, поэтому следует ожидать, что

$$E = \widecheck{((2\pi)^{n/2}\,p(ix))^{-1}}.$$

Если $p(ix)$ не имеет вещественных нулей, то для определения E можно обратиться к преобразованию Фурье на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Однако $p(ix)$ — полином от нескольких переменных и может обладать целым многообразием нулей. Следовательно, функция $p(ix)^{-1}$ не обязана быть локально интегрируемой, а тогда интеграл

$\int p(ix)^{-1}\varphi(x)\,dx$, вообще говоря, не имеет смысла и непосредственная интерпретация $p(ix)^{-1}$ как распределения невозможна. Это напоминает ситуацию, описанную в примерах 6 и 9 из § V.3, где функцию $1/x$ одной переменной нельзя было непосредственно интерпретировать как обобщенную, поскольку она не обладала свойством локальной интегрируемости. Даже в приведенном там простом случае был необходим некоторый предельный переход. Подобно случаю $1/x$ и здесь можно ожидать, что различные предельные процедуры приведут к различным распределениям. И действительно, в общем случае дифференциальное уравнение в частных производных имеет много фундаментальных решений в $\mathscr{D}'$, а иногда больше одного и в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Теорема Мальгранжа—Эренпрейса утверждает, что каждый дифференциальный оператор в частных производных с постоянными коэффициентами $p(D)$ имеет фундаментальное решение. Доказательство опирается на методы комплексного анализа и теорему Хана—Банаха. Прежде чем привести схему доказательства, мы на простом примере проиллюстрируем ту его часть, которая основана на теореме Хана—Банаха. Рассмотрим оператор $I-\Delta$. В этом случае $p(ix)=1+x^2$ не имеет нулей, так что $\hat{E}=\{(2\pi)^{n/2}(1+x^2)\}^{-1}$—корректно определенная обобщенная функция умеренного роста, а E удовлетворяет уравнению $(I-\Delta)E=\delta$. Приведем теперь другое доказательство существования E, не опирающееся на продолжение фурье-образа на $\mathscr{S}'$. Пусть $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\begin{aligned}|\delta_0(\varphi)| &= |\varphi(0)| \leqslant \|\varphi\|_\infty \leqslant \\ &\leqslant \|\hat{\varphi}\|_1 = \|(1+|\lambda|^2)^m \hat{\varphi}(\lambda)\,(1+|\lambda|^2)^{-m}\|_1 \leqslant \\ &\leqslant C\|(1+|\lambda|^2)^m \hat{\varphi}(\lambda)\|_2,\end{aligned}$$

где m выбрано достаточно большим, чтобы $(1+|\lambda|^2)^{-m}\in L^2(\mathbb{R}^n)$. Применяя (IX.1) и теорему Планшереля, получаем

$$\|(1+|\lambda|^2)^m\hat{\varphi}(\lambda)\|_2=\|(1-\Delta)^m\varphi\|_2,$$

а потому

$$|\varphi(0)|\leqslant C\|(1-\Delta)^m\varphi\|_2. \qquad \text{(IX.21)}$$

Следовательно, отображение $\tilde{T}$ из $(I-\Delta)^m[C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]$ в $\mathbb{C}$, заданное как

$$\tilde{T}:\ (1-\Delta)^m\varphi\longmapsto\varphi(0),$$

определено и ограничено по L^2-норме. По теореме Хана—Банаха $\tilde{T}$ можно продолжить с $(I-\Delta)^m[C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]$ до ограниченного линейного функционала T на всем $L^2(\mathbb{R}^n)$. Из леммы Рисса следует, что существует $t(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, для которого

$$\begin{aligned}\delta(\varphi) = \varphi(0) = T((I-\Delta)^m \varphi) = \\ = \int t(x)(1-\Delta)^m \varphi\, dx = \\ = [(1-\Delta)^{m-1} T]((1-\Delta)\varphi).\end{aligned}$$

Если положить $E = (1-\Delta)^{m-1} T$, то очевидно, что $(1-\Delta) E = \delta$.

Теперь мы готовы сформулировать теорему Мальгранжа — Эренпрейса и дать краткую схему ее доказательства.

Теорема IX.23 (теорема Мальгранжа—Эренпрейса). Для любого дифференциального оператора в частных производных с постоянными коэффициентами $p(D)$ на $\mathbb{R}^n$ существует обобщенная функция $E \in \mathscr{D}'$, такая, что $p(D) E = \delta$.

Доказательство. Положим $p^*(x) = p(-x)$ и $q(x) = p^*(ix)$, и пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Из теоремы Пэли—Винера известно, что для каждого $y \in \mathbb{R}^n$

$$\widehat{(p^*(D)\varphi)}(y+\zeta) = \hat{\varphi}(y+\zeta)\, q(y+\zeta)$$

— целая функция $\zeta \in \mathbb{C}^n$. Пусть $Q(x) = \sum_\alpha |D^\alpha q(x)|$. Отметим, что Q положительна и отделена от нуля. На первом шаге доказательства, применяя интегральную формулу Коши, показываем, что

$$\begin{aligned}|Q(x)\hat{\varphi}(x)| \leqslant C_1 \int_{|\zeta| \leqslant \varepsilon} |\hat{\varphi}(x+\zeta)\, q(x+\zeta)|\, d^{2n}\zeta = \\ = C_1 \int_{|\zeta| \leqslant \varepsilon} |\widehat{p^*(D)\varphi}(x+\zeta)|\, d^{2n}\zeta,\end{aligned}$$

где C_1 зависит от ε, но не зависит от φ, а $d^{2n}\zeta$ — мера Лебега на $\mathbb{C}^n$. Доказательство этого неравенства, использующее комплексный анализ, вынесено в задачу 41.

Воспользовавшись этой оценкой, получим

$$\begin{aligned}|\varphi(0)| \leqslant (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(y)|\, dy \leqslant \\ \leqslant C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|\zeta| \leqslant \varepsilon} |\widehat{p^*(D)\varphi}(y+\zeta)|\, |Q(y)|^{-1} d^{2n}\zeta \right) dy = \\ = C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|\lambda|^2 + |\mu|^2 \leqslant \varepsilon^2} |\widehat{p^*(D)\varphi}(y+\lambda+i\mu)|\, |Q(y)|^{-1}\, d\lambda\, d\mu\, dy.\end{aligned}$$

При $|\lambda|\leqslant\varepsilon$ неравенство $Q(y+\lambda)(Q(y))^{-1}\leqslant C_3$ справедливо независимо от y, так что

$$|\varphi(0)|\leqslant C_4\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{|\lambda|^2+|\mu|^2\leqslant\varepsilon^2}|\widehat{p^*(D)\varphi}(y+\lambda+i\mu)|(Q(y+\lambda))^{-1}d\lambda\, d\mu\, dy\leqslant$$

$$\leqslant C_5\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{|\mu|^2\leqslant\varepsilon^2}|\widehat{p^*(D)\varphi}(y+i\mu)|(Q(y))^{-1}\,d\mu\, dy. \qquad \text{(IX.22)}$$

Этот результат заменяет в данном случае простую априорную оценку (IX.21) предыдущего примера (все C_i зависят от ε, но не зависят от φ).

Дальнейшие рассуждения здесь те же, что и в примере. Пусть

$$\|\varphi\|_Q=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{|\mu|^2\leqslant\varepsilon^2}|\hat{\varphi}(y+i\mu)(Q(y))^{-1}|\,d\mu\, dy.$$

Покажем сначала, что $\|\cdot\|_Q$ — непрерывная норма на $\mathscr{D}$. Поскольку функция Q ограничена снизу, имеем

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_Q&\leqslant C_6\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{|\mu|\leqslant\varepsilon}|\hat{\varphi}(y+i\mu)|\,d\mu\, dy\leqslant\\&\leqslant C_7\sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n\\|\mu|\leqslant\varepsilon}}|(1+y^2)^{n+1}\hat{\varphi}(y+i\mu)|\leqslant\\&\leqslant C_7\sup_{|\mu|\leqslant\varepsilon}\|(1-\Delta)^{n+1}e^{\mu\cdot x}\varphi(x)\|_1.\end{aligned}$$

Правая часть — непрерывная норма на $C_0^\infty(K)$ для каждого компактного $K\subset\mathbb{R}^n$. Поскольку $\mathscr{D}$ наделено топологией индуктивного предела, $\|\cdot\|_Q$ — непрерывная норма на $\mathscr{D}$. Основная оценка (IX.22) показывает, что определено отображение

$$\tilde{E}:\ p^*(D)\varphi\longmapsto\varphi(0).$$

Это означает, что если $p^*(D)\varphi_1=p^*(D)\varphi_2$, то $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$. Отображение $\tilde{E}$ непрерывно, поскольку непрерывна норма $\|\cdot\|_Q$. Таким образом, по теореме Хана — Банаха существует некоторое отображение E в $\mathscr{D}'$, продолжающее $\tilde{E}$. Поскольку

$$(p(D)E)(\varphi)=E(p^*(D)\varphi)=\varphi(0),$$

то мы нашли фундаментальное решение для $p(D)$. ∎

IX.6. Эллиптическая регулярность

С омерзением и ужасом я отворачиваюсь от этой зловредной язвы — непрерывных функций, нигде не имеющих производных.

ЭРМИТ, в письме к СТИЛЬТЬЕСУ

Предположим, что u — слабое решение уравнения $-\Delta u = g$ в области Ω. Наша главная цель в этом разделе — доказать, что если функция g на Ω принадлежит C^∞, то и u на Ω принадлежит C^∞. Эта теорема, известная под названием леммы Вейля, имеет много важных обобщений. Мы ограничимся здесь доказательством леммы Вейля, а обсуждение ее обобщений вынесем в Замечания. Важность так называемых теорем «регулярности» состоит в том, что они обеспечивают второй шаг в доказательстве существования классических решений для некоторых классов эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. Сначала, для доказательства существования слабого решения, применяется теорема Хана — Банаха или рассуждения, основанные на самосопряженности (см. § IX.5 или § X.3), а затем с помощью теоремы регулярности доказывается, что каждое слабое решение есть классическое решение. В § V.4 мы отмечали, что уравнение $u_{tt} - u_{xx} = 0$ имеет много слабых решений, которые *не* являются классическими. Различие между двумя случаями: $u_{tt} - u_{xx} = 0$ и $u_{tt} + u_{xx} = 0$ — состоит в том, что полиномы xt, x, t и 1 могут быть все ограничены величиной $C(x^2 + t^2)$, но не $C(x^2 - t^2)$. Читатель увидит, как оценки такого типа входят в доказательство. Хотя теорема регулярности C^∞-типа (или даже C^k-типа) для неэллиптических дифференциальных операторов в частных производных не выполняется, тем не менее существует более слабая теорема регулярности, которую мы обсудим в Замечаниях к § IX.10.

Доказательство леммы Вейля делится на две части. Цель первой — показать, что если $-\Delta u = g$ и если все слабые производные g порядка, меньшего или равного m, суть L^2-функции, то и все слабые производные u порядка, меньшего или равного $m+2$, также представляют собой L^2-функции. Вторая часть, известная как лемма Соболева, показывает, что любая функция из $L^2(\mathbb{R}^n)$, у которой k слабых производных принадлежат $L^2(\mathbb{R}^n)$, где $k > (n/2) + \sigma$, равна (п. в.) некоторой функции из C^σ. Лемма Вейля получается объединением двух этих частей при дополнительном предположении, что $g \in C^\infty$.

Начнем с определения пространств Соболева и перечисления некоторых их важных свойств.

Определение. Говорят, что обобщенная функция $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит **m-му пространству Соболева** W_m $(m \in \mathbb{R})$, если

$\hat{T}$ — измеримая функция и

$$\|T\|_m^2 = \int (1+|\lambda|^2)^m |\hat{T}(\lambda)|^2 d\lambda < \infty.$$

Пространство W_m является гильбертовым относительно нормы $(T, T)^{1/2} = \|T\|_m$. Как и при исследовании квадратичных форм в § VIII.6, полезно отвлечься от соответствия между W_m^* и W_m, задаваемого леммой Рисса. Вместо этого мы отождествим W_m^* с W_{-m}, сопоставляя элементу $T \in W_{-m}$ функционал на W_m, определяемый формулой

$$T(S) = \int \hat{T}(-\lambda) \hat{S}(\lambda) d\lambda.$$

Такое отождествление естественно, так как оно согласуется со смыслом $T(\varphi)$, когда $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, а T рассматривается как элемент $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 1. Если m — неотрицательное целое число, то $f \in W_m$ тогда и только тогда, когда $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ для всех α, удовлетворяющих неравенству $|\alpha| \leqslant m$, где $D^\alpha f$ — производная в смысле обобщенных функций.

Доказательство. По теореме IX.2, $\widehat{D^\alpha T} = (i\lambda)^\alpha \hat{T}$ для всех T из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Если $T \in W_m$, то $(i\lambda)^\alpha \hat{T} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha| \leqslant m$, поэтому, согласно теореме Планшереля, $D^\alpha T \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Обратно, если $D^\alpha T \in$ $\in L^2(\mathbb{R}^n)$ для всех α при $|\alpha| \leqslant m$, то $(i\lambda)^\alpha \hat{T} = \widehat{D^\alpha T} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha| \leqslant m$, поэтому $T \in W_m$. ∎

Предложение 2. Пусть m — целое число. Если $T \in W_m$, а $\varphi \in C^{|m|}$ и имеет ограниченные производные, то $\varphi T \in W_m$.

Доказательство. Если $m \geqslant 0$, то утверждение следует из правила Лейбница и предложения 1. Если $m < 0$, то умножение на φ в W_m сопряжено умножению на φ в $W_{|m|}$ при естественном отождествлении W_m и $W_{|m|}^*$. Поэтому умножение на φ ограничено. ∎

Предложение 2 представляет собой частный случай предложения 10 из дополнения к § IX.4. Мы повторили здесь доказательство этой части предложения 10, так как оно не требует интерполяции.

Определение. Пусть Ω — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. **Локальное пространство Соболева** $W_m(\Omega)$ — это множество обобщенных функций $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, таких, что $\varphi T \in W_m$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с носителем в Ω.

Полезное свойство локальных пространств Соболева дает следующее

Предложение 3. Если Ω — открытая *ограниченная* область в $\mathbb{R}^n$, то каждое $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ лежит в $W_m(\Omega)$ с некоторым m. Это означает, что $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) = \bigcup\limits_{m=-\infty}^{\infty} W_m(\Omega)$.

Доказательство. Пусть η — функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, тождественно равная единице на $\bar{\Omega}$. Поскольку ηT — распределение с компактным носителем, то, по теореме IX.12, $|\widehat{(\eta T)}(\lambda)| \leqslant C(1+|\lambda|)^M$ для некоторого M. Итак, если p — целое число, большее чем $M+(n/2)$, то $\eta T \in W_{-p}$. По предложению 2, если $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$, то и $\varphi T = \varphi\eta T \in W_{-p}$. Итак, $T \in W_{-p}(\Omega)$. ∎

Теперь мы готовы провести первую часть доказательства леммы Вейля.

Лемма. Пусть $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$.

(a) Если $T \in W_m$ и $-\Delta T \in W_m$, то $T \in W_{m+2}$. Более того, если $T \in W_m$, то $\partial T/\partial x_j \in W_{m-1}$.

(b) Если $T \in W_m(\Omega)$ и $-\Delta T \in W_m(\Omega)$, то $T \in W_{m+2}(\Omega)$.

(c) Если $T \in W_m$ и m — целое число, то $T \in W_m(\Omega)$.

Доказательство. Для доказательства (a) заметим, что если $T \in W_m$, то $(1+|\lambda|^2)^{m/2}\hat{T} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, а если $-\Delta T \in W_m$, то $|\lambda|^2(1+|\lambda|^2)^{m/2}\hat{T} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Итак,

$$(1+|\lambda|^2)^{(m/2)+1}\hat{T} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

и, следовательно, $T \in W_{m+2}$. Далее, если $T \in W_m$, то $\lambda_j(1+|\lambda|^2)^{(m-1)/2}\hat{T} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, поэтому $\partial T/\partial x_j \in W_{m-1}$.

Для доказательства (b) отметим сначала, что правило Лейбница справедливо для произведения распределения и функции, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi T) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) T + \varphi \frac{\partial T}{\partial x_j}, \tag{IX.23}$$

$$-\Delta(\varphi T) = (-\Delta\varphi) T - 2\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial T}{\partial x_j} - \varphi\Delta T. \tag{IX.24}$$

Предположим теперь, что T и $-\Delta T$ лежат в $W_m(\Omega)$. Если $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, то, согласно (IX.23) и части (a), $\varphi\partial T/\partial x_j \in W_{m-1}$. Итак, по (IX.24), $-\Delta(\varphi T) \in W_{m-1}$, откуда в силу части (a) находим, что $\varphi T \in W_{m+1}$. Применяя теперь снова (IX.23), получаем, что $\varphi\partial T/\partial x_j \in W_m$, а тогда опять по (IX.24) находим, что $-\Delta(\varphi T) \in W_m$. Итак, из части (a) следует, что $\varphi T \in W_{m+2}$. Поскольку $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ было произвольным, $T \in W_{m+2}(\Omega)$. Это доказывает (b).

(c) следует из предложения 2. ∎

Теорема IX.24 (лемма Соболева). Пусть $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, и пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $T \in W_m(\Omega)$, где $m > n/2$, и пусть l — неотрицательное целое число, причем $l < m-(n/2)$. Тогда T на Ω равно некоторой функции из C^l.

Доказательство. Начнем со случая, когда $\Omega = \mathbb{R}^n$. Поскольку $T \in W_m$,

$$(1+|\lambda|^2)^{m/2}\hat{T} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Так как $(1+|\lambda|^2)^{-(n/4)-\varepsilon}$ тоже принадлежит $L^2(\mathbb{R}^n)$ при каждом $\varepsilon > 0$, мы заключаем, что

$$(1+|\lambda|^2)^{-(n/4)-\varepsilon}(1+|\lambda|^2)^{m/2}\hat{T}(\lambda) \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Следовательно, как только $|\alpha| \leqslant l$, имеем

$$|\lambda^\alpha \hat{T}(\lambda)| \leqslant |\lambda|^l (1+|\lambda|^2)^{-(m/2)+(n/4)+\varepsilon} G(\lambda),$$

где $G \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Можно выбрать такое $\varepsilon > 0$, что $l < m-(n/2)-2\varepsilon$, поэтому $\lambda^\alpha \hat{T} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ для каждого $|\alpha| \leqslant l$. По лемме Римана — Лебега

$$T(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{i\lambda \cdot x} \hat{T}(\lambda)\, d\lambda$$

и

$$\mathbf{S}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{i\lambda \cdot x} (i\lambda)\, \hat{T}(\lambda)\, d\lambda$$

— непрерывные функции со значениями в $\mathbb{R}$ и в $\mathbb{R}^n$ соответственно. Более того, по теореме о мажорированной сходимости отношение

$$\frac{T(x+h)-T(x)-\mathbf{h}\cdot\mathbf{S}(x)}{|h|} =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int \left[\frac{e^{i\lambda\cdot(x+h)} - e^{i\lambda\cdot x} - i\lambda\cdot\mathbf{h}e^{i\lambda\cdot x}}{|h|}\right] \hat{T}(\lambda)\, d\lambda$$

стремится к нулю при $|h| \downarrow 0$. Следовательно, T принадлежит C^1 и $\mathbf{D}T = \mathbf{S}$. Применяя свойство $(1+|\lambda|^l)\hat{T} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и повторяя этот процесс l раз, находим, что $T(x)$ непрерывно дифференцируема l раз.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть η и ψ принадлежат $C_0^\infty(\Omega)$, и предположим, что как η, так и ψ равны единице в окрестности N некоторой точки $x \in \Omega$. Поскольку $T \in W_m(\Omega)$, то ψT и ηT суть C^l-функции на $\mathbb{R}^n$. Далее, должно выполняться равенство $(\psi T)(x) = (\eta T)(x)$, поскольку в противном случае нашлась бы такая функция φ с носителем в N, что $T(\varphi) = (\psi T)(\varphi) \neq (\eta T)(\varphi) = T(\varphi)$. Итак, можно ввести функцию $F(x) = (\psi T)(x)$ на Ω, выбирая в качестве ψ произвольную функцию из $C_0^\infty(\Omega)$, равную единице в окрестности x. В силу доказанного выше $F(x)$ непрерывно дифференцируема l раз.

Доказательство завершается демонстрацией того, что в Ω распределение T задается функцией $F(x)$. Пусть φ, $\alpha \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\alpha(x)$ равна единице на $\operatorname{supp}\varphi$. Тогда

$$T(\varphi) = T(\alpha\varphi) = (\alpha T)(\varphi) = \int_\Omega F(x)\,\varphi(x)\,dx. \blacksquare$$

Лемма Соболева допускает обобщения на различные пространства L^p, а при некоторых условиях — на случай $l = m-(n/2)$. Эти обобщения доказываются сложнее, и мы их обсудим в Замечаниях.

Теорема IX.25 (лемма Вейля). Пусть u — слабое решение уравнения $-\Delta u = g$ на $\mathbb{R}^n$. Если g есть C^m-функция на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то на Ω решение u равно некоторой C^l-функции для каждого $l \in I_+$, удовлетворяющего неравенству $l < m - (n/2) + 2$. В частности, если g принадлежит C^∞ в Ω, то и u принадлежит C^∞ в Ω.

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что множество Ω ограничено. Поскольку $\varphi g \in W_m$ для каждого $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, то $g \in W_m(\Omega)$. Согласно предложению 3, $u \in W_k(\Omega)$ для некоторого k, ибо $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Если $k < m+2$, то вследствие условий $u \in W_k(\Omega)$, $-\Delta u = g \in W_k(\Omega)$ и леммы заключаем, что $u \in W_{k+2}(\Omega)$. Повторяя этот процесс, приходим к выводу, что $u \in W_{m+2}(\Omega)$, откуда в силу леммы Соболева следует, что u есть C^l-функция на Ω при $l < m-(n/2)+2$. $\blacksquare$

Теорема IX.26 (локальная регулярность уравнения Шредингера). Пусть u — слабое решение уравнения $(-\Delta + V)u = Eu$, где V — измеримая функция, а E — комплексное число. Тогда если V есть C^∞-функция на открытой области Ω, то и u бесконечно дифференцируема в этой области.

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что область Ω ограничена. Поскольку $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, то, по предложению 3, $u \in W_k(\Omega)$ для некоторого k. Но $V \in C^\infty(\Omega)$, поэтому $Vu \in W_k(\Omega)$ согласно предложению 2. Следовательно, $u \in W_k(\Omega)$ и $-\Delta u \in W_k(\Omega)$, так что по лемме $u \in W_{k+2}(\Omega)$. Повторно применяя лемму, находим, что $u \in \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} W_k(\Omega)$, откуда в силу леммы Соболева вытекает, что $u \in C^\infty(\Omega)$. $\blacksquare$

Заметим, что наш метод доказательства теоремы IX.26 можно обобщить и доказать, что если $V \in C^m(\Omega)$, то $u \in C^l(\Omega)$, когда $l < m-(n/2)+2$ (задача 45).

IX.7. Свободный гамильтониан в нерелятивистской квантовой механике

В этом разделе мы изучим $-\Delta$ как оператор на $L^2(\mathbb{R}^n)$. Для него существуют две разумные области определения:

$$D_{\max}=\{\varphi \mid \varphi\in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ и } \Delta\varphi\in L^2(R^n) \text{ в смысле обобщенных функций}\},$$

$$D_{\min}=C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Обозначим $-\Delta\restriction D_{\max}$ через $T_{\max}$, а $-\Delta\restriction D_{\min}$ через $T_{\min}$.

Теорема IX.27.

(a) $\varphi\in D_{\max}$ тогда и только тогда, когда $|\lambda|^2\hat\varphi(\lambda)\in L^2(\mathbb{R}^n)$, и в этом случае $T_{\max}\varphi=(|\lambda|^2\hat\varphi(\lambda))^\vee$.

(b) $T_{\max}$ самосопряжен.

(c) $T_{\min}$ в существенном самосопряжен и $\overline{T}_{\min}=T_{\max}$.

Доказательство. (а) немедленно следует из формулы $\widehat{-\Delta T}=|\lambda|^2\hat T$, справедливой для произвольной обобщенной функции умеренного роста. По предложению 1 из § VIII.3 умножение на $|\lambda|^2$ самосопряжено на $\{\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n) \mid |\lambda|^2\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n)\}$. Поскольку преобразование Фурье $\mathcal{F}$ унитарно и $T_{\max}=\mathcal{F}^{-1}|\lambda|^2\mathcal{F}$, то $T_{\max}$ самосопряжен на $D_{\max}$.

Для доказательства того, что $T_{\min}$ в существенном самосопряжен, достаточно показать, что $T^*_{\min}=T_{\max}$, поскольку тогда $\overline{T}_{\min}=T^{**}_{\min}=T_{\max}$. Предположим, что $\psi\in D(T^*_{\min})$. Тогда $(-\Delta\varphi,\psi)=(T_{\min}\varphi,\psi)=(\varphi,T^*_{\min}\psi)$ для всех $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Значит, $-\Delta\psi\in L^2(\mathbb{R}^n)$ в смысле обобщенных функций, поэтому $\psi\in D_{\max}$ и $T^*_{\min}\psi=-\Delta\psi=T_{\max}\psi$. Обратно, предположим, что $\psi\in D_{\max}$. Тогда $-\Delta\psi\in L^2(\mathbb{R}^n)$, так что для всех $\varphi\in C_0^\infty$ имеем $(-\Delta\varphi,\psi)=(\varphi,-\Delta\psi)$. Следовательно, $\psi\in D(T^*_{\min})$ и $T^*_{\min}\psi=-\Delta\psi$. ∎

Определение. Обозначим оператор $-\Delta$ с областью определения $D_{\max}$ через H_0 и назовем его **свободным гамильтонианом.**

В оставшейся части этого раздела мы применяем преобразование Фурье и оценки из § IX.4 к изучению различных свойств оператора H_0. Сначала мы докажем теорему, описывающую более подробно свойства функций из $D(H_0)$. Далее выведем явные формулы для $R_\lambda(H_0)$ и e^{itH_0}. И наконец мы докажем некоторые асимптотические свойства экспоненты e^{itH_0}, которые будут полезны при изучении теории рассеяния в гл. XII.

Так как H_0 самосопряжен, то и его степени H_0^m самосопряжены. Поскольку $H_0^m=\mathcal{F}^{-1}|\lambda|^{2m}\mathcal{F}$, область определения H_0^m — не что иное, как пространство Соболева W_{2m}, введенное в § IX.6. Из леммы Соболева (теорема IX.24) немедленно следует такое

Предложение. Вектор $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ принадлежит $C^\infty(H_0) = \bigcap_{m=1}^{\infty} D(H_0^m)$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $D^\alpha\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ для каждого α.

Более важно то, что сами векторы из $D(H_0)$ обладают следующими свойствами.

Теорема IX.28. Пусть $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ лежит в $D(H_0)$. Тогда

(a) Если $n \leqslant 3$, то φ—ограниченная непрерывная функция и для любого $a > 0$ существует некоторая константа b, не зависящая от φ, такая, что

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant a\|H_0\varphi\| + b\|\varphi\|. \qquad \text{(IX.25)}$$

(b) Если $n \geqslant 4$ и $2 \leqslant q < 2n/(n-4)$, то $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^n)$ и для любого $a > 0$ существует константа b (зависящая только от q, n и a), такая, что

$$\|\varphi\|_q \leqslant a\|H_0\varphi\| + b\|\varphi\|. \qquad \text{(IX.26)}$$

Доказательство. Согласно лемме Римана—Лебега и теореме Планшереля, утверждение (a) будет доказано, если показать, что $\hat\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|\hat\varphi\|_1 \leqslant a\|\lambda^2\hat\varphi\|_2 + b\|\hat\varphi\|_2. \qquad \text{(IX.27)}$$

Докажем (IX.27) в случае $n=3$. Пусть $\varphi \in D(H_0)$; тогда $(1+\lambda^2)\hat\varphi$ и $(1+\lambda^2)^{-1}$ принадлежат $L^2(\mathbb{R}^3)$, так что $\hat\varphi \in L^1(\mathbb{R}^3)$ и в силу неравенства Шварца

$$\|\hat\varphi\|_1 \leqslant c\|(\lambda^2+1)\hat\varphi\|_2 \leqslant c(\|\lambda^2\hat\varphi\|_2 + \|\hat\varphi\|_2), \qquad \text{(IX.28)}$$

где $c^2 = \int (1+\lambda^2)^{-2}\,d\lambda$. Для любого $r > 0$ положим $\hat\varphi_r(\lambda) = r^3\hat\varphi(r\lambda)$. Тогда $\|\hat\varphi_r\|_1 = \|\hat\varphi\|_1$, $\|\hat\varphi_r\|_2 = r^{3/2}\|\hat\varphi\|_2$ и $\|\lambda^2\hat\varphi_r\|_2 = r^{-1/2}\|\lambda^2\hat\varphi\|_2$. Итак, применяя (IX.28) к $\hat\varphi_r$, вследствие предыдущих неравенств получаем

$$\|\hat\varphi\|_1 \leqslant cr^{-1/2}\|\lambda^2\hat\varphi\|_2 + cr^{3/2}\|\hat\varphi\|_2$$

для любого $r > 0$. Если выбрать r достаточно большим, то получаем (IX.27).

В силу неравенства Хаусдорфа—Юнга и теоремы Планшереля для доказательства утверждения (b) необходимо лишь показать, что для любого p, удовлетворяющего неравенствам $2n/(n+4) < p \leqslant 2$, и любого $a > 0$ существует такая константа b, что

$$\|\hat\varphi\|_p \leqslant a\|\lambda^2\hat\varphi\|_2 + b\|\hat\varphi\|_2.$$

Согласно неравенству Гёльдера,

$$\|\hat{\varphi}\|_p^p \leqslant \|(1+\lambda^2)^{-p}\|_r \|(1+\lambda^2)^p |\hat{\varphi}|^p\|_s,$$

где $r^{-1}+s^{-1}=1$. Выбирая $s=2/p$, с помощью неравенства треугольника находим

$$\|(1+\lambda^2)^p |\hat{\varphi}|^p\|_s = (\|(1+\lambda^2)|\hat{\varphi}|\|_2)^p \leqslant$$
$$\leqslant (\|\hat{\varphi}\|_2 + \|\lambda^2\hat{\varphi}\|_2)^p.$$

Итак, если $\|(1+\lambda^2)^{-p}\|_{2(2-p)^{-1}} = c_1 < \infty$, то

$$\|\hat{\varphi}\|_p \leqslant c_1^{1/p} (\|\lambda^2\hat{\varphi}\|_2 + \|\hat{\varphi}\|_2).$$

Но

$$\|(1+\lambda^2)^{-p}\|_{2(2-p)^{-1}}^{2(2-p)^{-1}} = \int \frac{d\lambda}{(1+\lambda^2)^{2p(2-p)^{-1}}} < \infty,$$

если $4p(2-p)^{-1} > n$, т. е. если $p > 2n/(4+n)$. Метод доказательства того, что константа перед $\|\lambda^2\hat{\varphi}\|$ может быть выбрана сколь угодно малой, тот же, что и в части (а). ∎

Как мы увидим в § X.2, часть (b) этой теоремы справедлива в случае $n \geqslant 5$ и $q=2n/(n-4)$ при некотором фиксированном a.

Обратимся теперь к выводу явных формул для $(H_0-E)^{-1}$, где $E \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, и e^{-iH_0t}, где $\operatorname{Im} t \leqslant 0$. Поскольку $H_0 = \mathcal{F}^{-1}\lambda^2\mathcal{F}$, то $f(H_0) = \mathcal{F}^{-1} f(\lambda^2)\mathcal{F}$, где f — произвольная ограниченная измеримая функция. Это означает, что как $(H_0-E)^{-1}$, так и e^{-iH_0t} могут быть выражены через операторы умножения:

$$(H_0-E)^{-1} = \mathcal{F}^{-1}(\lambda^2-E)^{-1}\mathcal{F}; \qquad e^{-iH_0t} = \mathcal{F}^{-1}e^{-i\lambda^2 t}\mathcal{F}.$$

Поскольку преобразование Фурье переводит умножение в свертку, мы получим простые выражения для $(H_0-E)^{-1}$ и e^{-iH_0t} в виде свертки.

Пусть $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Обозначим оператор $\varphi \longmapsto \check{(f\hat{\varphi})}$ на $L^2(\mathbb{R}^n)$ через $f(-i\nabla)$. Отметим, что $f(-i\nabla)$ — корректно определенный ограниченный оператор в силу ограниченности умножения на f.

Теорема IX.29. Пусть $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Если* (i) $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *или* (ii) $\check{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *то*

$$(f(-i\nabla)\varphi)(x) = (2\pi)^{-n/2}\int \check{f}(x-y)\varphi(y)\,dy \qquad \text{(IX.29)}$$

для всех $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. *Интеграл сходится при всех* x *в случае* (i) *и при почти всех* x *в случае* (ii).

Доказательство. Предположим, что $f \in L^2 \cap L^\infty$ и $\varphi \in \mathcal{S}$. Тогда $f \in \mathcal{S}'$, так что по теореме IX.4

$$f(-i\nabla)\varphi \equiv \check{(f\hat{\varphi})} = (2\pi)^{-n/2}\check{f} * \varphi =$$
$$= (2\pi)^{-n/2}\int \check{f}(y)\varphi(x-y)\,dy;$$

следовательно, (IX.29) выполняется, если $\varphi\in\mathscr{S}$. Для $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n)$ можно найти такую последовательность $\varphi_m\in\mathscr{S}$, что $\varphi_m\xrightarrow{L^2}\varphi$. Поскольку $f\in L^\infty$, то $f\hat{\varphi}_m\xrightarrow{L^2}f\hat{\varphi}$, а тогда и $f(-i\nabla)\varphi_m\to f(-i\nabla)\varphi$. Итак, можно выбрать последовательность (также обозначаемую $\{\varphi_m\}$), такую, что $f(-i\nabla)\varphi_m\to f(-i\nabla)\varphi$ поточечно п. в. Поскольку $\check{f}\in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{m\to\infty}(f(-i\nabla)\varphi_m)(x)=\lim_{m\to\infty}(2\pi)^{-n/2}\int\check{f}(x-y)\varphi_m(y)\,dy=$$
$$=(2\pi)^{-n/2}\int\check{f}(x-y)\varphi(y)\,dy$$

для каждого $x\in\mathbb{R}^n$. Итак, (IX.29) доказано в случае (i).

Для доказательства (IX.29) в случае (ii) заметим, что если f_m и φ принадлежат $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, то $f_m(-i\nabla)\varphi=(2\pi)^{-n/2}\check{f}_m*\varphi$. Выберем $f_m\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ так, чтобы $\check{f}_m\xrightarrow{L^1}\check{f}$. Тогда $f_m\xrightarrow{L^\infty}f$, следовательно, $f_m\hat{\varphi}\xrightarrow{L^2}f\hat{\varphi}$. Отсюда

$$f(-i\nabla)\varphi=\lim_{m\to\infty}(2\pi)^{-n/2}\check{f}_m*\varphi=$$
$$=(2\pi)^{-n/2}\check{f}*\varphi$$

в силу неравенства Юнга. Поскольку ограниченные операторы $f(-i\nabla)$ и свертка с $(2\pi)^{-n/2}\check{f}$ совпадают на $\mathscr{S}$, они совпадают на всем $L^2(\mathbb{R}^n)$. То, что свертка задается абсолютно сходящимся интегралом, доказано в примере 1 из § IX.4 ∎

Пример 1 (свободная резольвента, $n=3$). Пусть $E=-\varkappa^2$, где $\operatorname{Re}\varkappa>0$. Таким образом, $E\in\rho(H_0)$. Поскольку $f(\lambda)\equiv(\lambda^2+\varkappa^2)^{-1}\in L^2(\mathbb{R}^3)\cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$, то можно применить часть (i) теоремы IX.29 и вычислить $(H_0-E)^{-1}$. Поскольку $f\in L^2$,

$$(2\pi)^{-3/2}\check{f}(x)=\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,(2\pi)^{-3}\int\limits_{|\lambda|\leqslant R}\frac{e^{i\lambda\cdot x}}{\lambda^2+\varkappa^2}\,d\lambda.$$

Переходя к сферическим координатам, положим $u=\cos\sigma=\lambda\cdot x/|x||\lambda|$ и $r=|\lambda|$. Тогда

$$(2\pi)^{-3/2}\check{f}(x)=\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,(2\pi)^{-2}\int\limits_0^R\int\limits_{-1}^1\frac{e^{ir|x|u}}{r^2+\varkappa^2}r^2\,dr\,du=$$
$$=\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\frac{(2\pi)^{-2}}{i|x|}\int\limits_{-R}^R\frac{e^{ir|x|}r}{r^2+\varkappa^2}\,dr=$$
$$=\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\frac{(2\pi)^{-2}}{i|x|}\int\limits_{C_R}\frac{\tilde{r}e^{i\tilde{r}|x|}}{(\tilde{r}+i\varkappa)(\tilde{r}-i\varkappa)}\,d\tilde{r},$$

где $\tilde{r}$ лежит в комплексной плоскости r, а контур C_R — ломаная, показанная на рис. IX.5. Для каждого $|x|$ предел существует и равен $e^{-\varkappa|x|}/4\pi|x|$. Значит, по теореме IX.29

$$(n=3) \qquad [(H_0+\varkappa^2)^{-1}\varphi](x)=(4\pi)^{-1}\int\frac{e^{-\varkappa|x-y|}}{|x-y|}\varphi(y)\,dy. \qquad \text{(IX.30)}$$

Функцию $G_0(x, y; E)=e^{-\varkappa|x-y|}/4\pi|x-y|$ часто называют **свободной функцией Грина.**

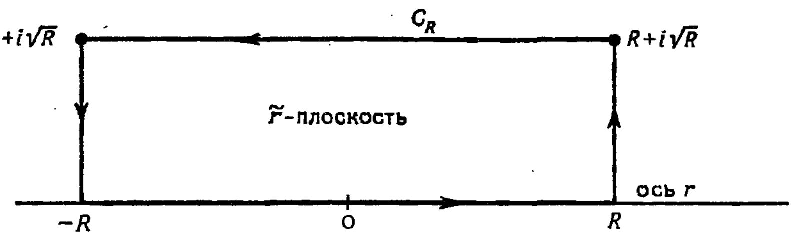

Рис. IX.5. Контур C_R.

Пример 2 (свободная резольвента, $n\neq 3$). Если n не равно 1 или 3, вычислить обратное преобразование Фурье от $(\lambda^2+\varkappa^2)^{-1}$ не так просто, как в примере 1; оно выражается через функции Бесселя. Нетрудно видеть, однако, что если $f(\lambda)=(\lambda^2+\varkappa^2)^{-1}$, то $\check{f}\in L^1(\mathbb{R}^n)$ (см. пример 6 из § IX.10 и задачу 49). Итак, мы оказываемся в рамках случая (ii) теоремы IX.29. Дополнительные свойства функций Грина даны в задаче 49.

Пример 3 (свободный пропагатор). Мы хотим вывести явную формулу для e^{-iH_0t}, $t\in\mathbb{R}$, — унитарной группы, определяющей свободную квантовую динамику. Функция $e^{-i\lambda^2t}$ не удовлетворяет ни одному из условий теоремы IX.29, поэтому поступим следующим образом. Предположим, что $\alpha\in\mathbb{C}$ и $\operatorname{Re}\alpha>0$. Тогда

$$e^{-\lambda^2\alpha}\in L^2(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

так что

$$(e^{-H_0\alpha}\varphi)(x)=\left(\frac{1}{4\pi\alpha}\right)^{n/2}\int e^{-|x-y|^2/4\alpha}\varphi(y)\,dy,$$

поскольку $\mathcal{F}^{-1}(e^{-\lambda^2\alpha})=(2\alpha)^{-n/2}e^{-x^2/4\alpha}$ (пример 1 из § IX.1). Предположим теперь, что $\varphi\in L^1\cap L^2$. Поскольку $e^{-i(t-i\varepsilon)H_0}\varphi\xrightarrow{L^2}e^{-itH_0}\varphi$ при $\varepsilon\downarrow 0$, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся поточечно п. в. Итак,

$$
\begin{aligned}
(e^{-itH_0}\varphi)(x) &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(e^{-i(t-i\varepsilon)H_0}\varphi)(x) = \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(4\pi i(t-i\varepsilon))^{-n/2}\int e^{-|x-y|^2/4i(t-i\varepsilon)}\varphi(y)\,dy = \\
&= (4\pi it)^{-n/2}\int e^{i|x-y|^2/4t}\varphi(y)\,dy
\end{aligned}
$$

по теореме о мажорированной сходимости. Для произвольной $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n)$ теперь можно применить прием из § IX.2 и заключить, что

$$(e^{-itH_0}\varphi)(x) = \text{l.i.m.}\,(4\pi it)^{-n/2}\int e^{i|x-y|^2/4t}\varphi(y)\,dy. \qquad \text{(IX.31)}$$

Функцию $P_0(x, y; t) = (4\pi it)^{-n/2}e^{i|x-y|/4t}$ часто называют **свободным пропагатором.**

Чтобы показать, сколь полезны эти явные формулы, выведем из (IX.31) два следствия, применяемые в теории рассеяния. Первое из них — оценка, отражающая расплывание свободных волновых пакетов.

Теорема IX.30. Пусть H_0 — свободный гамильтониан на $\mathbb{R}^n$. Пусть $2\leqslant q\leqslant\infty$ и $p=(1-q^{-1})^{-1}$. Тогда

$$\|e^{-itH_0}\varphi\|_q \leqslant t^{-n(p^{-1}-1/2)}\|\varphi\|_p. \qquad \text{(IX.32)}$$

Доказательство. Так как оператор e^{-itH_0} унитарен на $L^2(\mathbb{R}^n)$, то $\|e^{-itH_0}\varphi\|_2=\|\varphi\|_2$. Если $\varphi\in L^1\cap L^2$, то из (IX.31) следует, что $\|e^{-itH_0}\varphi\|_\infty\leqslant(4\pi t)^{-n/2}\|\varphi\|_1$. По теореме Рисса—Торина e^{-itH_0} однозначно продолжается до отображения из $L^p(\mathbb{R}^n)$ в $L^q(\mathbb{R}^n)$ и справедлива оценка (IX.32). ∎

Другое приложение формулы (IX.31) — доказательство явной асимптотической формулы для e^{-itH_0}.

Теорема IX.31. Пусть H_0 — свободный гамильтониан на $\mathbb{R}^n$, и предположим, что $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$(e^{-itH_0}\varphi)(x) \longrightarrow (2it)^{-n/2}e^{ix^2/4t}\hat{\varphi}(x/2t) \qquad \text{(IX.33)}$$

в том смысле, что L^2-норма разности левой и правой частей стремится к нулю при $t\to\infty$.

Доказательство. Для фиксированного t отображение V_t: $\varphi\mapsto$ $\mapsto (2it)^{-n/2}e^{ix^2/4t}\hat{\varphi}(x/2t)$ унитарно, поэтому необходимо лишь доказать утверждение теоремы для $\varphi\in\mathcal{S}$, а затем применить $\varepsilon/3$-прием. Поскольку

$$e^{i|x-y|^2/4t} = e^{ix^2/4t}e^{-ix\cdot y/2t}e^{iy^2/4t},$$

из (IX.31) имеем

$$(e^{-iH_0t}\varphi)(x)-(V_t\varphi)(x)=(4\pi it)^{-n/2}e^{ix^2/4t}\cdot\int(e^{iy^2/4t}-1)e^{-ix\cdot y/2t}\varphi(y)\,dy=$$
$$=\frac{e^{ix^2/4t}}{(2it)^{n/2}}\hat{G}_t\left(\frac{x}{2t}\right),$$

где $G_t(y)=(e^{iy^2/4t}-1)\varphi(y)$. Следовательно,

$$\|e^{-iH_0t}\varphi-V_t\varphi\|_2=(2t)^{-n/2}\|\hat{G}_t(\cdot/2t)\|_2=\|\hat{G}_t(\cdot)\|_2=\|G_t\|_2\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{4t}\|y^2\varphi(y)\|_2\to 0 \text{ при } t\to\infty.$$

На предпоследнем шаге мы воспользовались оценкой

$$|e^{iy^2/4t}-1|=\left|\int_0^{y^2/4t}\frac{d}{dx}(e^{ix})\,dx\right|\leqslant\frac{y^2}{4t}.\ \blacksquare$$

Формула (IX.33) допускает простую физическую интерпретацию. Чтобы убедиться в этом, введем массу, полагая $H_0=(-1/2m)\Delta$. Если система при $t=0$ находится в состоянии φ, то по (IX.33) асимптотическая плотность вероятности для координаты равна $(m/t)^n\cdot|\hat{\varphi}(mx/t)|^2$. Но $|\hat{\varphi}(\lambda)|^2$ — начальная плотность вероятности для импульса. Значит, при больших временах вероятность обнаружить частицу в точке x в момент времени t пропорциональна вероятности того, что в начальный момент она обладала импульсом mx/t. Следовательно, при больших временах квантовая свободная частица ведет себя подобно свободной классической, начавшей движение из $x=0$ в момент $t=0$ с плотностью импульса $|\check{\varphi}(\lambda)|^2$.

IX.8. Аксиомы Гординга—Вайтмана

В этом разделе мы обсудим некоторые приложения преобразования Фурье к теории квантовых полей. Читателю не обязательно обладать предварительным опытом в квантовой теории поля. Мы начнем с краткой истории проблемы, сформулируем аксиомы Вайтмана и определим функции Вайтмана. Затем мы применим преобразование Фурье для доказательства свойств аналитичности вайтмановых функций, наброска доказательства PCT-теоремы и вывода представления Челлена—Лемана для двухточечной функции. В дополнении мы рассмотрим лоренц-инвариантные меры.

Квантовая теория поля родилась в двадцатые годы из попытки соединить квантовую механику и специальную теорию относительности в квантовом обобщении классических моделей электромагнитных явлений. С тех пор теория поля широко применялась для построения моделей многих явлений, в которых участвуют элементарные частицы. С самого начала основателям этой теории (Гейзенбергу, Паули, Дираку) было ясно, что в ней скрыто множество математических трудностей. Однако теория поля продолжала расти и к сороковым годам превратилась в мешанину «фольклорных» теорем, гипотез и сложных вычислений по теории возмущений, причем толком доказать что-либо было невозможно, потому что основной объект теории, сами поля, были определены весьма смутно. Но, несмотря на отсутствие твердого математического основания, Швингер, Фейнман, Томонага, Дайсон и другие сумели к концу сороковых годов систематизировать теорию возмущений, и это позволило проводить вычисления в электродинамике. Поразительное экспериментальное подтверждение этих вычислений позволяло допускать, что в рамках квантовой теории поля существуют разумные математические модели, по крайней мере для некоторых взаимодействий элементарных частиц.

В такой именно обстановке Гординг и Вайтман сформулировали определение «квантового поля», предложив систему математических свойств, которыми, как они показали, должна обладать любая теория квантованных полей. Эти свойства называются **аксиомами Вайтмана.** Изучение этих аксиом и их математических следствий обычно называется **аксиоматической квантовой теорией поля.** Это название отчасти сбивает с толку, потому что у многих создается ошибочное представление, что основной интерес представляют сами аксиомы, а не их математические следствия и построение конкретных примеров. По этой причине направление это иногда называют также «общей теорией квантованных полей».

Для простоты мы приведем аксиомы лишь для «теории эрмитова скалярного поля», а о других случаях упомянем в Замечаниях. Мы пользуемся системой единиц, в которой константа Планка, деленная на 2π, и скорость света равны единице. В силу краткости обсуждения каждого из свойств, сами определения довольно развернуты.

Эрмитова скалярная квантовая теория поля *есть четверка* $\langle\mathscr{H}, U, \varphi, D\rangle$, *обладающая следующими свойствами* (1—8).

Свойство 1 **(релятивистская инвариантность состояний).** $\mathscr{H}$ *есть сепарабельное гильбертово пространство, а* $U(\cdot, \cdot)$ *—сильно непрерывное унитарное представление на* $\mathscr{H}$ *собственной ортохронной группы Пуанкаре.*

Собственная ортохронная группа Пуанкаре определяется следующим образом. Пусть $x=\langle x^0, x^1, x^2, x^3\rangle$ и $y=\langle y^0, y^1, y^2, y^3\rangle$ — два вектора в $\mathbb{R}^4$. Лоренцево скалярное произведение векторов

x и y, по определению, равно $x^0y^0-x^1y^1-x^2y^2-x^3y^3$. Компонента x^0 называется временно́й, а $\langle x^1, x^2, x^3\rangle$ — пространственными компонентами x. Обозначим через x_μ компоненты вектора $\tilde{x}=\langle x^0, -x^1, -x^2, -x^3\rangle$; тогда лоренцево скалярное произведение x и y — не что иное, как обычное внутреннее произведение x и $\tilde{y}$. Применяя эйнштейново правило суммирования по одинаковым верхним и нижним индексам, мы будем иногда записывать суммму $\sum_{\mu=0}^{3} x^\mu y_\mu$ просто как $x^\mu y_\mu$. **Лоренцева группа** $\mathscr{L}$ есть множество линейных преобразований на $\mathbb{R}^4$, сохраняющих лоренцево скалярное произведение. **Собственная ортохронная (иначе, специальная) группа Лоренца** $\mathscr{L}_+^\uparrow$ — это подгруппа $\mathscr{L}$, состоящая из таких $\Lambda\in\mathscr{L}$, что $\det\Lambda=1$, а матричный элемент Λ между вектором $\langle 1, 0, 0, 0\rangle$ и им же самим положителен. **Собственная ортохронная группа Пуанкаре** $\mathscr{P}_+^\uparrow$ — это множество пар $\langle a, \Lambda\rangle$, где $a\in\mathbb{R}^4$, $\Lambda\in\mathscr{L}_+^\uparrow$, снабженное групповой операцией

$$\langle a, \Lambda_1\rangle\langle b, \Lambda_2\rangle=\langle a+\Lambda_1 b, \Lambda_1\Lambda_2\rangle.$$

Группа $\mathscr{P}_+^\uparrow$ естественно действует на $\mathbb{R}^4$ по формуле $\langle a, \Lambda\rangle x=\Lambda x+a$ и иногда называется семейством релятивистских преобразований пространства $\mathbb{R}^4$.

Если положить $\Lambda=I$, то $U(a)=U(a, I)$ — сильно непрерывное унитарное представление $\mathbb{R}^4$. Из теоремы VIII.12 следует, что существуют четыре коммутирующих самосопряженных оператора P_0, P_1, P_2, P_3 в $\mathscr{H}$ и проекторнозначная мера E_Ω на $\mathbb{R}^4$, такая, что

$$(\varphi, U(a)\varphi)=(\varphi, \exp(ia^\mu P_\mu)\varphi)=\int_{\mathbb{R}^4} e^{ia^\mu\lambda_\mu}d(\varphi, E_\lambda\varphi). \quad \text{(IX.34)}$$

Оператор P_0 называется **гамильтонианом** (или оператором энергии), а P_j, $j=1, 2, 3$, — **операторами импульса.**

Свойство 2 **(спектральное условие).** *Проекторнозначная мера E_Ω на $\mathbb{R}^4$, соответствующая $U(a, I)=e^{ia^\mu P_\mu}$, обладает носителем в замкнутом переднем световом конусе.*

Замкнутый передний световой конус — множество $\bar{V}_+=\{x\mid x\cdot\tilde{x}\geqslant 0,\ x^0\geqslant 0\}$. Его внутренность будет обозначаться через V_+. Спектральное условие эквивалентно такому условию: P_0 и $P_0^2-P_1^2-P_2^2-P_3^2$ — положительные операторы.

Свойство 3 **(существование и единственность вакуума).** *Существует единственный вектор $\psi_0\in\mathscr{H}$, такой, что $U(a, I)\psi_0=\psi_0$ для всех $a\in\mathbb{R}^4$. Он называется* **вакуумом.**

Из свойства 3 следует, что точка $\langle 0, 0, 0, 0\rangle$ имеет ненулевую E_Ω-меру и что $E_{\langle 0,0,0,0\rangle}$ имеет одномерную область значений. Представления $U(0, \Lambda)$ оставляют $\operatorname{Ran} E_{\langle 0,0,0,0\rangle}$ инвариантным, поэтому $U(0, \Lambda) \restriction \operatorname{Ran} E_{\langle 0,0,0,0\rangle}$ — одномерное представление $\mathscr{L}_+^\uparrow$. Поскольку единственное одномерное представление $\mathscr{L}_+^\uparrow$ — тождественное, мы получаем, что $U(a, \Lambda)\psi_0 = \psi_0$ для всех $\langle a, \Lambda\rangle \in \mathscr{P}_+^\uparrow$.

Свойство 4 **(инвариантные области определения полей).** *Существуют плотное подпространство $D \subset \mathscr{H}$ и отображение φ из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ во множество (неограниченных) операторов в $\mathscr{H}$, такие, что*

(i) *для каждого $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ имеем $D \subset D(\varphi(f))$, $D \subset D(\varphi(f)^*)$ и $\varphi(f)^* \restriction D = \varphi(\bar{f}) \restriction D$;*

(ii) $\psi_0 \in D$ *и* $\varphi(f) D \subset D$ *для всех* $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$.

(iii) *При фиксированном $\psi \in D$ отображение $f \mapsto \varphi(f)\psi$ линейно.*

В ранних формулировках теории поля φ рассматривали как операторнозначную функцию, хотя создатели теории и понимали, что $\varphi(x)$ — весьма сингулярный объект. По аналогии с классическим электромагнитным полем оператор $\varphi(x)$ назывался «полем в точке x». Такая формулировка вела к различным трудностям, которые были преодолены, когда поле φ стали понимать как операторнозначное распределение, а не как операторнозначную функцию. Иными словами, φ определено на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, а не на $\mathbb{R}^4$. При этом $\varphi(f)$ следует рассматривать как пространственно-временно́е среднее гипотетического поля $\varphi(x)$ с усредняющей функцией f. Символически это выглядит так:

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^4} \varphi(x) f(x)\, dx.$$

Уже Бор и Розенфельд указали, что с физической точки зрения невозможно измерить напряженность электрического поля в точке в силу специфических квантовомеханических эффектов, связанных с принципом неопределенности. Поэтому и с математической и с *физической* точек зрения разумно рассматривать **сглаженное поле** $\varphi(f)$. Действительно, можно показать (задача 53), что в квантовой теории поля, обладающей свойствами 1—8, поле $\varphi(f)$ не может быть результатом интегрирования хорошо определенной операторнозначной функции $\varphi(x)$ с $f(x)$.

Выбор в качестве пространства основных функций $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, а не $C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ или еще какого-нибудь пространства, не обязателен. Детальное исследование этой проблемы провел Джаффе (см. Замечания). Мы ввели именно условие (ii) для того, чтобы **вакуумные средние** $(\psi_0, \varphi(f_1) \ldots \varphi(f_n)\psi_0)$ имели смысл. Можно было бы подумать, что разумнее считать $\varphi(f)$ самосопряженным в существенном на D, а не просто симметрическим, но такое дополнительное требование, по-видимому, не приводит к важным следствиям.

Свойство 5 **(регулярность поля).** *Для любых ψ_1 и ψ_2 из D отображение $f \longmapsto (\psi_1, \varphi(f)\psi_2)$ есть обобщенная функция умеренного роста.*

Из свойств 4 и 5 следует более сильное утверждение: для $\psi \in D$ отображение $f \longmapsto \varphi(f)\psi$ сильно непрерывно (задача 54).

Свойство 6 **(пуанкаре-инвариантность поля).** *Для каждого $\langle a, \Lambda\rangle \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ имеем $U(a, \Lambda) D \subset D$ и для всех $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, $\psi \in D$*

$$U(a, \Lambda)\varphi(f) U(a, \Lambda)^{-1}\psi = \varphi(\langle a, \Lambda\rangle f)\psi,$$

где

$$\langle a, \Lambda\rangle f(x) = f(\Lambda^{-1}(x-a)).$$

Условие инвариантности часто формально записывают в виде

$$U(a, \Lambda)\varphi(x) U(a, \Lambda)^{-1} = \varphi(\Lambda x + a).$$

Свойство 7 **(локальная коммутативность или микроскопическая причинность).** *Если f и $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ имеют пространственно-подобные носители, то для всех $\psi \in D$*

$$[\varphi(f)\varphi(g) - \varphi(g)\varphi(f)]\psi = 0.$$

Говорят, что два множества S_1, $S_2 \subset \mathbb{R}^4$ **пространственно-подобны**, если из $x \in S_1$ и $y \in S_2$ следует, что $(x-y)\cdot\widetilde{(x-y)} < 0$. Свойство 7 — математическая формулировка квантовомеханического утверждения о том, что измерения в пространственно-подобных областях не могут интерферировать друг с другом.

Свойство 8 **(цикличность вакуума).** *Множество D_0 конечных линейных комбинаций векторов вида $\varphi(f_1)\ldots\varphi(f_n)\psi_0$ плотно в $\mathcal{H}$.*

Это свойство устанавливает, что гильбертово пространство $\mathcal{H}$ не слишком велико, или, иначе говоря, что теория может быть описана посредством единственного поля φ.

Это завершает определение эрмитовой скалярной квантовой теории поля. Далее есть два пути, по которым может развиваться математическое исследование. Во-первых, можно изучать следствия этих аксиом. К этому типу принадлежала основная масса работ по аксиоматической теории поля в пятидесятых и в начале шестидесятых годов. В оставшейся части этого раздела мы покажем, как для вывода некоторых следствий из этих аксиом применяется преобразование Фурье. Вторая большая задача состоит в построении моделей, удовлетворяющих всем аксиомам (или по крайней мере некоторым из них). Когда эти аксиомы формулировались, было уже известно, что они непротиворечивы, ибо теория свободного поля (см. § X.7) обладает всеми этими свойствами. Но, к сожалению, теория свободного поля описывает систему частиц, не взаимодействующих друг с другом. Оказалось, что построить примеры интересных (т. е. учитывающих взаимодействия) теорий очень трудно. Некоторые успехи в решении этой задачи были достигнуты только в последние годы (см. § X.7 и гл. XIX).

Обсуждение некоторых следствий сформулированных выше аксиом мы начнем с определения функционалов

$$\mathcal{W}_n(f_1, \ldots, f_n) = (\psi_0, \varphi(f_1) \ldots \varphi(f_n)\psi_0).$$

$\{\mathcal{W}_n\}$ называются **функциями Вайтмана, или вайтмановыми обобщенными функциями, или вакуумными средними**; иногда $\mathcal{W}_n$ называют **n-точечной функцией**. В гл. XVII мы увидим, что можно восстановить всю теорию поля, если известны ее функции Вайтмана. Пусть $\psi_1 = \varphi(\overline{f}_{k-1}) \ldots \varphi(\overline{f}_1)\psi_0$ и $\psi_2 = \varphi(f_{k+1}) \ldots \varphi(f_n)\psi_0$. Тогда, согласно свойству 4, ψ_1 и ψ_2 лежат в D, а значит, в силу свойства 5, $\mathcal{W}_n(f_1, \ldots, f_n) = (\psi_1, \varphi(f_k)\psi_2)$ непрерывна по f_k при фиксированных остальных f. Итак, $\mathcal{W}_n(f_1, \ldots, f_n)$ — раздельно непрерывный мультилинейный функционал на $\mathop{\times}\limits_1^n \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. Следовательно, по теореме о ядре (теорема V.12) существует обобщенная функция $\tilde{\mathcal{W}}_n$ из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{4n})$, такая, что $\mathcal{W}_n(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \tilde{\mathcal{W}}_n(f_1 \times f_2 \times \ldots \times f_n)$, если $f_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. Мы будем обозначать $\tilde{\mathcal{W}}_n$ также через $\mathcal{W}_n$.

Из свойств 3 и 6 следует, что $\mathcal{W}_n$ обладает свойством инвариантности:

$$\mathcal{W}_n(\langle a, \Lambda\rangle f_1, \ldots, \langle a, \Lambda\rangle f_n) = \mathcal{W}_n(f_1, \ldots, f_n)$$

для всех $\langle a, \Lambda\rangle \in \mathcal{P}_+^\uparrow$. В частности,

$$\mathcal{W}_n(f_1(x_1-a), f_2(x_2-a), \ldots, f_n(x_n-a)) = \mathcal{W}_n(f_1, \ldots, f_n). \quad \text{(IX.35)}$$

Из (IX.35), как показывает простое построение (см. задачу 56), следует, что существует распределение $W_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{4n-4})$, для которого символически

$$\mathcal{W}_n(x_1, \ldots, x_n) = W_n(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_{n-1} - x_n).$$

Иными словами, для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$

$$\mathcal{W}_n(f) = \int_{\mathbb{R}^4} W_n(f_{(x)})\,dx,$$

где

$$f_{(x)}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = f(x, x-\xi_1, x-\xi_1-\xi_2, \ldots, x-\xi_1-\ldots-\xi_{n-1}).$$

Мы уже ввели обозначение V_+ для переднего светового конуса и $\overline{V}_+$ для замкнутого переднего светового конуса. Определим теперь

$$V_+^{(n)} = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in \mathbb{R}^{4n} \mid x_i \in V_+ \text{ для каждого } i\}.$$

Подчеркнем, что $V_+^{(n)}$ и его замыкание $\overline{V}_+^{(n)}$ — конусы. Пусть

$$\mathcal{T}_n = \mathbb{R}^{4n} - iV_+^{(n)}.$$

Мы будем называть $\mathcal{T}_n$ **трубой будущего.**

Теперь мы готовы сформулировать и доказать важную теорему для вайтмановых обобщенных функций.

Теорема IX.32. Для каждого $n \geqslant 1$ носитель $\hat{W}_n$ лежит в $-\overline{V}_+^{(n-1)}$ и W_n есть граничное значение функции, аналитической в трубе будущего $\mathcal{T}_{n-1}$.

Доказательство. Пусть задано k, $1 \leqslant k \leqslant n$, и пусть $a \in \mathbb{R}^4$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_n(f_1(x_1) \ldots f_k(x_k) f_{k+1}(x_{k+1}-a) \ldots f_n(x_n-a)) &= \\
= (\psi_0, \varphi(f_1) \ldots \varphi(f_k) U(a) \varphi(f_{k+1}) \ldots \varphi(f_n)\psi_0) &= \\
= \int_{\mathbb{R}^4} e^{i\lambda\cdot\tilde{a}} d(\psi_1, E_\lambda\psi_2) &= \\
= \int_{\mathbb{R}^4} e^{i\tilde{\lambda}\cdot a} d(\psi_1, E_\lambda\psi_2) &= \\
= \int_{\mathbb{R}^4} e^{i\lambda\cdot a} d(\psi_1, E_{\tilde{\lambda}}\psi_2),
\end{aligned}$$

где $\psi_1 = \varphi(f_k)^* \ldots \varphi(f_1)^*\psi_0$ и $\psi_2 = \varphi(f_{k+1}) \ldots \varphi(f_n)\psi_0$. Согласно свойству 2, носитель $d(\psi_1, E_\lambda\psi_2)$ лежит в $\overline{V}_+$. Поскольку отображение $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$ переводит $\overline{V}_+$ в себя, то и $d(\psi_1, E_{\tilde{\lambda}}\psi_2)$ имеет носитель в $\overline{V}_+$. Положим теперь

$$g(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = \prod_{j=2}^{n} f_j\left(-\sum_{i=1}^{j-1}\xi_i\right)$$

и допустим, что функция $h_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ вещественнозначна. В дальнейших выкладках аргументы $\xi_2, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_{n-1}$ функции g опускаются. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}^4} h_k(a)\mathscr{W}_n(f_1(x_1)\ \dots\ f_k(x_k-a)\ \dots\ f_n(x_n-a))\,da= \tag{IX.36}$$

$$=\int_{\mathbb{R}^4}\int_{\mathbb{R}^4} W_n(g(\xi_1-x_1,\ \xi_k+a))f_1(x_1)h_k(a)\,dx_1\,da=$$

$$=W_n\Big(\int_{\mathbb{R}^4}\int_{\mathbb{R}^4} g(\xi_1-x_1,\ \xi_k+a)f_1(x_1)h_k(a)\,dx_1\,da\Big)=$$

$$=W_n(g*(f_1\tilde{h}_k))=(2\pi)^{(n-1)/2}\,\hat{W}_n(\check{g}\check{f}_1\hat{h}_k),$$

где $\tilde{h}_k(a)=h_k(-a)$. С другой стороны,

$$(\text{IX.36})=\int_{\mathbb{R}^4} h_k(a)\int_{\mathbb{R}^4} e^{i\tilde{\lambda}\cdot a}d(\psi_1,\ E_{\tilde{\lambda}}\psi_2)\,da=$$

$$=(2\pi)^{1/2}\int_{\mathbb{R}^4}\check{h}_k(\lambda)\,d(\psi_1,\ E_{\tilde{\lambda}}\psi_2).$$

Следовательно, $\hat{W}_n(\check{g}\check{f}_1\hat{h}_k)=0$, если $(\operatorname{supp}\check{h}_k)\cap\bar{V}_+=\varnothing$. Поскольку это справедливо для каждого k и поскольку конечные линейные комбинации функций $\check{f}_1\check{g}$ плотны в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n-4})$, заключаем, что носитель $\hat{W}_n$ содержится в $-\bar{V}_+^{(n-1)}$. Утверждение теоремы следует теперь из теоремы IX.16. ∎

Поскольку база конуса $\bar{V}_+^{(n-1)}$ не является сферической (при $n>2$), нам пришлось применить обобщение теоремы IX.16, приведенное в задаче 23. Термин «граничное значение» в формулировке теоремы означает граничное значение в смысле обобщенных функций умеренного роста, как объяснено в § IX.3. Оценки теоремы IX.16 порождают соответствующие оценки, которые мы здесь не приводим, для аналитического продолжения вайтмановых распределений.

Одно из важных применений аналитических свойств состоит в демонстрации того, что функции Вайтмана обладают определенными свойствами симметрии. Приведем схему типичного рассуждения. Для упрощения обозначений мы позволим себе считать распределения Вайтмана обычными функциями $W_n(\xi_1,\ \dots,\ \xi_{n-1})$. Читатель легко восстановит опущенные при этом основные функции. Пределы всегда берутся в смысле $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4n-4})$.

Вследствие свойства 6

$$W_n(z_1,\ \dots,\ z_{n-1})=W_n(\Lambda z_1,\ \dots,\ \Lambda z_{n-1}) \tag{IX.37}$$

для всех $z_j=\xi_j-i\eta_j$, $\eta_j\in V_+$ и $\Lambda\in\mathscr{L}_+^{\uparrow}$. Заметим, что правая часть (IX.37) имеет смысл, поскольку Λ: $V_+\to V_+$. Пусть $\mathscr{L}_+(\mathbb{C})$ обозначает множество *комплексных* 4×4-матриц Λ с детерминантом единица, удовлетворяющих условию $\Lambda z\cdot\widetilde{\Lambda z}=z\cdot\tilde{z}$. Тогда

$\mathscr{L}_+(\mathbb{C})$ — шестипараметрическое комплексное многообразие, содержащее шестипараметрическое вещественное многообразие $\mathscr{L}_+^\uparrow$. Элегантный технический результат — теорема Баргмана — Холла — Вайтмана — утверждает, что W_n можно продолжить до аналитической функции на

$$\mathscr{T}_{n-1}^{e} = \{\langle \Lambda z_1, \ldots, \Lambda z_{n-1}\rangle \mid \langle z_1, \ldots, z_{n-1}\rangle \in \mathscr{T}_{n-1},\ \Lambda \in \mathscr{L}_+(\mathbb{C})\},$$

так что (IX.37) по-прежнему выполняется, но Λ теперь может пробегать все $\mathscr{L}_+(\mathbb{C})$. Множество $\mathscr{T}_{n-1}^{e}$ называется **расширенной трубой будущего.** Оно содержит некоторые вещественные точки, называемые **точками Йоста.** В действительности можно показать, что $\langle \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\rangle \in \mathscr{T}_{n-1}^{e} \cap \mathbb{R}^{4n-4}$ тогда и только тогда, когда все векторы вида $\xi = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \xi_j$, где $\lambda_j \geqslant 0$ и $\sum \lambda_j > 0$, пространственно-подобны, т. е. $\xi \cdot \xi < 0$. Поэтому если $\langle x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_{n-1} - x_n\rangle$ — точка Йоста, то

$$(x_i - x_j) \cdot (\widetilde{x_i - x_j}) < 0$$

при любых i и j. Из свойства 7 теперь следует, что

$$\mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_n) = \mathscr{W}_n(x_n, \ldots, x_1),$$

или

$$W_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = W_n(-\xi_{n-1}, \ldots, -\xi_1), \qquad \text{(IX.38)}$$

когда $\langle \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\rangle$ — точка Йоста. Так как $-I \in \mathscr{L}_+(\mathbb{C})$, то (IX.37) и (IX.38) вместе дают

$$W_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = W_n(\xi_{n-1}, \ldots, \xi_1). \qquad \text{(IX.39)}$$

Поскольку W_n аналитична в $\mathscr{T}_{n-1}^{e}$ и (IX.39) выполняется на открытом подмножестве $(4n-4)$-мерного подпространства, (IX.39) выполняется во всей $\mathscr{T}_{n-1}^{e}$, т. е.

$$W_n(z_1, \ldots, z_{n-1}) = W_n(z_{n-1}, \ldots, z_1) \qquad \text{(IX.40)}$$

для $z = \langle z_1, \ldots, z_{n-1}\rangle \in \mathscr{T}_{n-1}^{e}$. Если $z_j = \xi_j - i\eta_j$, причем $\eta_j \in V_+$, то, по теореме IX.16, $W_n(z_1, \ldots, z_{n-1})$ сходится к $W_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, а $W_n(z_{n-1}, \ldots, z_1)$ сходится к $W_n(\xi_{n-1}, \ldots, \xi_1)$ в смысле обобщенных функций при $\eta \downarrow 0$. Итак, (IX.39) справедливо для всех $\langle \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\rangle \in \mathbb{R}^{4n-4}$, а тогда

$$\mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_n) = \mathscr{W}_n(-x_n, \ldots, -x_1) \qquad \text{(IX.41)}$$

для всех $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in \mathbb{R}^{4n}$. Введем теперь оператор Θ формулой

$$\Theta\varphi(f_1)\ldots\varphi(f_{n+1})\psi_0 = \varphi(\bar{\tilde{f}}_1)\ldots\varphi(\bar{\tilde{f}}_{n+1})\psi_0$$

и продолжим Θ на все множество D_0 по вещественной линейности. Согласно (IX.41), оператор Θ сохраняет норму, а потому хорошо определен. Легко проверить, что $\Theta(\psi_1+\psi_2)=\Theta(\psi_1)+\Theta(\psi_2)$ и $\Theta(c\psi)=\bar{c}\Theta\psi$. Такой оператор называется **сопряженно-линейным**. Согласно свойству 8, D_0 плотно в $\mathscr{H}$, и так как $\Theta^2=I$, то Θ однозначно продолжается до антиунитарного оператора на $\mathscr{H}$, удовлетворяющего условию

$$\Theta\varphi(f)\Theta^{-1}=\varphi(\bar{\bar{f}})\quad\text{для всех } f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^4).$$

Существование такого Θ и составляет содержание знаменитой ***PCT*-теоремы** в случае эрмитовой скалярной теории поля.

Отметим, что пользоваться указанными выше аналитическими свойствами следует с некоторой осторожностью. Например, из (IX.38) и аналитичности следует, что

$$W_n(z_1, \ldots, z_{n-1})=W_n(-z_{n-1}, \ldots, -z_1) \qquad \text{(IX.42)}$$

во всей расширенной трубе будущего. Однако мы *не можем* отсюда заключить, переходя к граничным значениям, что

$$W_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})=W_n(-\xi_{n-1}, \ldots, -\xi_1) \qquad \text{(IX.43)}$$

для $\langle\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\rangle\in\mathbb{R}^{4n-4}$. Функция Вайтмана $W_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ есть граничное значение $W_n(z_1, \ldots, z_{n-1})$ при $z_j\to x_j$ в трубе будущего. Но если $\eta_j\in V_+$, то $-\eta_j\notin V_+$, а поэтому и $\langle -z_{n-1}, \ldots, -z_1\rangle$ не принадлежит трубе будущего. Следовательно, предел $W_n(-z_{n-1}, \ldots, -z_1)$ в смысле $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4n-4})$ может не иметь ничего общего с $W_n(-\xi_{n-1}, \ldots, -\xi_1)$.

Вайтмановы аксиомы налагают весьма сильные ограничения на распределения W_n. В качестве последней иллюстрации этого факта применим методы преобразования Фурье к выводу представления Челлена—Лемана для двухточечной функции W_2. Чтобы сделать это, нам потребуется одна теорема о лоренц-инвариантных мерах. Для каждого $m\geqslant 0$ пусть $H_m=\{p\in\mathbb{R}^4 \mid p\cdot\tilde{p}=m^2,\ p_0>0\}$. Множества H_m, называемые **массовыми гиперболоидами**, инвариантны относительно $\mathscr{L}_+^\uparrow$. Пусть j_m—гомеоморфизм H_m на $\mathbb{R}^3$ (а в случае $m=0$ на $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$), такой, что j_m: $\langle p_0, p_1, p_2, p_3\rangle\mapsto\langle p_1, p_2, p_3\rangle=\mathbf{p}$. Определим меру Ω_m на H_m, полагая

$$\Omega_m(E)=\int\limits_{j_m(E)}\frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{m^2+|\mathbf{p}|^2}}$$

для любого измеримого множества $E\subset H_m$. Как легко видеть, мера Ω_m $\mathscr{L}_+^\uparrow$-инвариантна. В действительности Ω_m—единственная с точностью до произвольного постоянного множителя $\mathscr{L}_+^\uparrow$-инвариантная мера на H_m (см. дополнение к этому разделу). Более того, каждая полиномиально ограниченная $\mathscr{L}_+^\uparrow$-

инвариантная мера на $\bar{V}_+$ есть сумма δ-функции, умноженной на константу, и интеграла по мерам Ω_m. Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

Теорема IX.33. Пусть μ — полиномиально ограниченная мера с носителем в $\bar{V}_+$. Если μ $\mathscr{L}_+^\uparrow$-инвариантна, то существуют полиномиально ограниченная мера ρ на $[0, \infty)$ и константа c, такие, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^4} f\,d\mu = cf(0) + \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{H_m} f\,d\Omega_m \right) d\rho(m)$$

для всех $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$.

Доказательство. См. дополнение к этому разделу. ∎

Теорема IX.34 (представление Челлена — Лемана). Пусть W_2 — двухточечная функция некоторой полевой теории, удовлетворяющей аксиомам Вайтмана и следующему дополнительному условию: $(\psi_0, \varphi(f)\psi_0) = 0$ для всех $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$. Тогда существует полиномиально ограниченная положительная мера на $[0, \infty)$, такая, что для всех $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$

$$W_2(f) = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{H_m} \hat{f}\,d\Omega_m \right) d\rho(m).$$

Символически

$$W_2(x) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{i} \Delta_+(x;\, m^2)\,d\rho(m),$$

где

$$\Delta_+(x;\, m^2) = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp\left(-ix_0\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2} + i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}\right)}{\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2}}\,d^3\mathbf{k}.$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$. Тогда

$$\iint \overline{f(x)}\, f(y)\, W_2(x-y)\,dx\,dy = (\psi_0,\ \varphi(\bar{f})\,\varphi(f)\,\psi_0) = \\ = \|\varphi(f)\,\psi_0\|^2 \geqslant 0.$$

Итак, W_2 — положительно определенная обобщенная функция. По теореме Бохнера — Шварца $\check{W}_2$ — полиномиально ограниченная мера, а по теореме IX.27 носитель $\check{W}_2$ содержится в $\bar{V}_+$. Поскольку $\mathscr{W}_2$ $\mathscr{L}_+^\uparrow$-инвариантна, то и W_2 инвариантна, и читатель легко проверит, что отсюда следует $\mathscr{L}_+^\uparrow$-инвариантность $\check{W}_2$. Итак, $\check{W}_2$ удовлетворяет всем условиям теоремы IX.33, а потому

$$W_2(f) = c\hat{f}(0) + \int_0^\infty \left(\int_{H_m} \hat{f}\, d\Omega_m \right) d\rho(m)$$

с некоторой полиномиально ограниченной мерой ρ на $[0, \infty)$ и константой c.

Чтобы завершить доказательство, воспользуемся тем, что, по предположению, $(\psi_0, \varphi(f)\psi_0) = 0$ для всех $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, и докажем, что $c = 0$. Пусть $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$. Положим $G(a) = (\varphi(g)\psi_0, U(-a, I)\varphi(g)\psi_0)$. Тогда

$$G(a) = (\psi_0, \varphi(\bar{g})\varphi(g_{-a}(x))\psi_0) = (W_2 * g_{-a})(\bar{g}) =$$
$$= (W_2 * g)(\bar{g}_a) = (W_2 * g * \bar{\tilde{g}})(a).$$

Следовательно, $\check{G}$—это мера $|\check{g}(k)|^2 \check{W}_2$. Но

$$G(a) = \int e^{-ia\cdot\tilde{\lambda}} d(\varphi(g)\psi_0, E_\lambda\varphi(g)\psi_0) =$$
$$= \int e^{-ia\cdot\lambda} d(\varphi(g)\psi_0, E_{\tilde{\lambda}}\varphi(g)\psi_0),$$

так что $\check{G}$ есть также и мера $(2\pi)^2 d(\varphi(g)\psi_0, E_{\tilde{\lambda}}\varphi(g)\psi_0)$. В силу единственности вакуума (свойство 3) масса меры $d(\varphi(g)\psi_0, E_{\tilde{\lambda}}\varphi(g)\psi_0)$ в начале координат равна $|(\psi_0, \varphi(g)\psi_0)|^2$, что равно нулю по предположению. Итак, $|\check{g}(k)|^2 \check{W}_2$ не имеет массы в начале координат. Так как это верно для всех $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, мы заключаем, что $c = 0$. ∎

Отметим, что теорему IX.32 вместе со свойством микроскопической причинности можно применить для вывода свойств аналитичности некоторых обобщенных функций, связанных с коммутаторами поля. Например, если, по определению,

$$C_2(y - x) = (\psi_0, \varphi(x)\varphi(y)\psi_0) - (\psi_0, \varphi(y)\varphi(x)\psi_0),$$

то, согласно свойству 7, носитель C_2 лежит в $\bar{V}_+ \cup (-\bar{V}_+)$. Такую обобщенную функцию можно записать в виде $C_2 = R_2 + A_2$, где $\operatorname{supp} R_2 \subset \bar{V}_+$, а $\operatorname{supp} A_2 \subset -\bar{V}_+$ (см. задачу 56). Очевидно, что R_2 определено с точностью до обобщенной функции с носителем в начале координат. Поскольку $\operatorname{supp} R_2 \subset \bar{V}_+$, преобразование Фурье R_2 аналитично в трубе $\mathbb{R}^4 - iV_+$. Для R_2 это видно непосредственно из представления Челлена—Лемана. Для взаимодействующих полей общего типа хотелось бы доказать, что коммутаторы высших порядков C_n представимы в виде суммы обобщенных функций с носителями в конусах. Тогда соответствующие запаздывающие функции R_n имели бы в качестве фурье-образов граничные значения аналитических функций. Свойства аналитичности распределений $\hat{R}_n$ прямо связаны с аналитичностью амплитуды рассеяния.

Дополнение к § IX.8. Лоренц-инвариантные меры

В этом дополнении мы докажем те свойства лоренц-инвариантных мер, которые применялись в § IX.8, в частности теорему IX.33. Сначала нам потребуются некоторые общие результаты о мерах на произведениях пространств.

Теорема IX.35. (а) Пусть X — локально компактное пространство, и пусть $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — семейство гомеоморфизмов X в себя. Предположим, что существует одна и только одна (с точностью до постоянного множителя) бэрова мера μ, инвариантная относительно всех T_α. Пусть Y — другое локально компактное пространство; определим $T_\alpha \times I$ так: $T_\alpha \times I$: $\langle x, y\rangle \mapsto \langle T_\alpha x, y\rangle$ для всех $\langle x, y\rangle \in X\times Y$. Тогда любая бэрова мера ρ на $X\times Y$, инвариантная относительно всех отображений $T_\alpha\times I$, имеет вид $\rho=\mu\otimes\nu$, где ν — некоторая бэрова мера на Y.

(b) Если X и Y — локально компактные пространства и $\mu_1\otimes\nu_1=\mu_2\otimes\nu_2$, где μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 — ненулевые меры, то $d\mu_1 = c\,d\mu_2$ и $d\nu_1=c^{-1}d\nu_2$.

Доказательство. Пусть мера ρ инвариантна относительно $T_\alpha\times I$. Выберем $f\geqslant 0$ из $\varkappa(Y)$ — множества непрерывных функций с компактным носителем. Пусть ρ_f — отображение из $\varkappa(X)$ в $\mathbb{R}$, заданное формулой ρ_f: $g\mapsto\rho(g\otimes f)$. Поскольку ρ_f — положительная линейная форма на $\varkappa(X)$, то это бэрова мера. К тому же, ρ_f инвариантна относительно отображений T_α, поскольку мера ρ инвариантна относительно $T_\alpha\times I$, а потому, согласно предположению теоремы, $\rho_f=c_f\mu$ с некоторой константой c_f. Так как, опять-таки по предположению, $\mu\neq 0$, можно найти такую положительную функцию $g\in\varkappa(X)$, что $\mu(g)>0$. Тогда $c_f=\rho(g\otimes f)/\mu(g)$ — положительная линейная форма на $\varkappa(Y)$, а значит, $c_f=\nu(f)$, где ν — некоторая мера Бэра, т. е. $\rho=\mu\otimes\nu$. Это доказывает (а).

Для доказательства (b) заметим сначала, что μ_1 и μ_2, а также ν_1 и ν_2 должны иметь одни и те же множества меры нуль. Пусть f и g — характеристические функции множеств E и F соответственно в X и Y, где $\mu_1(f)\neq 0\neq\nu_2(g)$. Тогда $\mu_2(E)/\mu_1(E) = \nu_1(F)/\nu_2(F)$, откуда немедленно следует (b). ∎

Нам потребуются некоторые сведения о мерах на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^+$.

Теорема IX.36. (а) Любая трансляционно инвариантная мера Бэра на $\mathbb{R}^n$ представляет собой произведение меры Лебега на константу.

(b) Всякая мера Бэра на $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, инвариантная относительно всех преобразований T_a: $x \mapsto e^a x$ (для всех $a \in \mathbb{R}$), представляет собой произведение константы на меру dx/x.

Доказательство. Сначала докажем (a) для случая $n=1$. Нужно только показать, что если μ трансляционно инвариантна и $\mu([0, 1])=1$, то μ — мера Лебега. Поскольку $\mu(\{x\})$ не зависит от x, а отрезок $[0, 1]$ содержит бесконечно много точек, то должно выполняться равенство $\mu(\{x\})=0$. Тогда $\mu([0, 1))=1$. Поскольку $[0, 1)$ — объединение n трансляций полуинтервала $[0, 1/n)$, то $\mu([0, 1/n))=1/n$, а отсюда легко получить, что $\mu([0, r))=r$ для любого положительного рационального числа r. Из трансляционной инвариантности тогда вытекает, что если a и b рациональны и $a<b$, то $\mu((a, b))=b-a$. Но поскольку μ — мера Бэра, она регулярна, откуда следует, что $\mu((a, b))=b-a$ для всех $a<b$. Так как μ определяется значениями на конечных открытых интервалах, она должна быть мерой Лебега.

Доказательство завершается по индукции. Предположим, что единственные трансляционно инвариантные меры на $\mathbb{R}^k$ — это произведения $d^k x$ на константы, и пусть ρ — трансляционно инвариантная мера на $\mathbb{R}^{k+1} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$. Поскольку ρ инвариантна относительно подгруппы трансляций вида $T \times I$, она имеет вид $d^k x \otimes d\nu$ в силу теоремы IX.35(a). Так как ρ инвариантна и относительно подгруппы вида $I \times T$, она имеет вид $d\mu \otimes dx$. Таким образом, по теореме IX.35 (b), $\rho = c\, d^k x \otimes dx = c\, d^{k+1} x$.

(b) следует из (a), поскольку отображение $\ln$: $x \mapsto \ln x$ — гомеоморфизм $\mathbb{R}^+$ на $\mathbb{R}$, при котором T_a переходит в сдвиг на a. ∎

Теперь мы готовы изучать лоренц-инвариантные меры на $\overline{V}_+$, т. е. полиномиально ограниченные меры с носителем в $\overline{V}_+$, инвариантные относительно $\mathscr{L}_+^\uparrow$. Конус $\overline{V}_+$ можно представить как $\overline{V}_+ = \{0\} \cup \left(\bigcup_{m=0}^{\infty} H_m \right)$. Далее, преобразования из $\mathscr{L}_+^\uparrow$ переводят множество $\{0\}$ и каждое из H_m в себя. Сначала рассмотрим H_m и покажем, что для него существует только одна инвариантная мера Ω_m (определенная в § 8). Затем будет доказана теорема IX.33, гласящая, что любая лоренц-инвариантная мера на $\overline{V}_+$ может быть получена «сложением» δ-функции, сосредоточенной в $\langle 0, 0, 0, 0 \rangle$, и этих инвариантных мер на H_m. Несмотря на многочисленные замены переменных в следующих ниже доказательствах, идея всех этих доказательств одна и та же: гомеоморфно отобразить интересующее нас пространство на произведение $X \times Y$, исследовать инвариантные меры на X и Y при помощи теоремы IX.36, а затем определить инвариантные меры на $X \times Y$ (а потому и на исходном пространстве), применяя теорему IX.35.

Лемма. Мера $\Omega_m(\cdot)$ на H_m инвариантна относительно $\mathscr{L}_+^\uparrow$.

Доказательство. Непосредственный способ убедиться в лоренц-инвариантности Ω_m — вычислить действие произвольного $\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$ на H_m и доказать, что якобиан преобразования обеспечивает неизменность Ω_m. Более поучительное доказательство основано на том, что мера d^4x инвариантна относительно $\mathscr{L}_+^\uparrow$, поскольку из $\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$ следует, что $\det \Lambda = 1$. Далее, если $f \in C_0^\infty(0, \infty)$, то, поскольку $\overline{V}_+$ есть $\mathscr{L}_+^\uparrow$-инвариантное множество, мера $f(x \cdot \tilde{x})\chi d^4x$ также $\mathscr{L}_+^\uparrow$-инвариантна; здесь χ — характеристическая функция множества $\overline{V}_+$. Отобразим теперь V_+ гомеоморфно на $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ посредством h: $\langle x_0, \mathbf{x}\rangle \mapsto \langle \mathbf{x}, y\rangle$, где $y = x \cdot \tilde{x}$. Тогда $\partial y/\partial x_0 = 2x_0$, так что

$$d^4x = \frac{d^3\mathbf{x}\, dy}{2\sqrt{m^2 + \mathbf{x}^2}}.$$

Значит, мера

$$\Omega^f(E) = \int\limits_{h[E]} \frac{f(y)\, d^3\mathbf{x}\, dy}{\sqrt{m^2 + \mathbf{x}^2}}$$

$\mathscr{L}_+^\uparrow$-инвариантна. Если $f_n(y)$ — последовательность функций из $C_0^\infty(0, \infty)$, сходящаяся к $\delta(y - m^2)$, где $m > 0$, то Ω^{f_n} сходится к Ω_m в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^4)$, а потому Ω_m $\mathscr{L}_+^\uparrow$-инвариантна в том смысле, что $\Omega_m(g(x)) = \Omega_m(g(\Lambda x))$ для всех $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, $\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$. Простая выкладка показывает, что $\Omega_m(E) = \Omega_m(\Lambda E)$ для $m > 0$. Поскольку $\Omega_m \to \Omega_0$ в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^4)$ при $m \downarrow 0$, доказан и случай $m = 0$. ∎

В соответствии со способом построения $d\Omega_m$ в предыдущем доказательстве, в физической литературе $d\Omega_m$ иногда обозначают $\theta(x^0)\delta(x^2 - m^2)d^4x$ или даже $\theta(x^0)\delta(x^2 - m^2)$.

Теорема IX.37. Ω_m — единственная $\mathscr{L}_+^\uparrow$-инвариантная мера на H_m, $m \geqslant 0$.

Доказательство. Начнем с выбора новой системы координат на $\mathbb{R}^4$, полагая $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 - x_3)$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + x_3)$ и $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2\rangle \in \mathbb{R}^2$. В этой новой системе лоренцево внутреннее произведение равно

$$x \cdot \tilde{x} = 2z\tau - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}.$$

На любом H_m при $m > 0$ можно использовать τ и $\mathbf{x}$ как координаты, поскольку $z = (2\tau)^{-1}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + m^2)$. Отметим, что если $x \in H_m$ и $m > 0$, то как z, так и τ лежат в $(0, \infty)$.

Пусть ρ — инвариантная мера на H_m $(m > 0)$, и пусть s — гомеоморфизм H_m на $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$, задаваемый формулой $x \mapsto \langle \mathbf{x}, \tau\rangle$.

Пусть L_a, где $a \in \mathbb{R}$, — линейное преобразование на $\mathbb{R}^4$: $\tau \mapsto e^a\tau$, $z \mapsto e^{-a}z$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$. Поскольку L_a сохраняет форму $2z\tau - \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$, отображает V_+ в себя и $\det L_a = 1$, оно является преобразованием Лоренца и sL_as^{-1}: $\langle \mathbf{x}, \tau\rangle \mapsto \langle \mathbf{x}, e^a\tau\rangle$. Так как $s(d\rho)$ — мера на $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+$, инвариантная относительно sL_as^{-1} для всех $a \in \mathbb{R}$, из теорем IX.36 (b) и IX.35 (a) находим, что $s(d\rho) = d\mu(\mathbf{x}) \otimes d\tau/\tau$.

Пусть теперь $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ и $T_\mathbf{b}$: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ — преобразование вида

$$T_\mathbf{b}: \langle \tau, z, \mathbf{x}\rangle \mapsto \langle \tau, z + \mathbf{b}\cdot\mathbf{x} + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2\tau, \mathbf{x} + \tau\mathbf{b}\rangle.$$

Короткое вычисление показывает, что $T_\mathbf{b} \in \mathscr{L}_+^\uparrow$. Очевидно, что $sT_\mathbf{b}s^{-1}$: $\langle \mathbf{x}, \tau\rangle \mapsto \langle \mathbf{x} + \tau\mathbf{b}, \tau\rangle$. Пусть t: $\langle \mathbf{x}, \tau\rangle \mapsto \langle \mathbf{x}/\tau, \tau\rangle$. Тогда t: $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+$ и $tsT_\mathbf{b}s^{-1}t^{-1}$: $\langle \mathbf{x}, \tau\rangle \mapsto \langle \mathbf{x}+\mathbf{b}, \tau\rangle$. Применяя теоремы IX.36 (a) и IX.35 (a), находим, что $ts(d\rho) = d^2\mathbf{x} \otimes d\nu(\tau)$, т. е. $s(d\rho) = d^2\mathbf{x} \otimes d\nu(\tau)/\tau^2$.

Поскольку $s(d\rho) = d\mu \otimes d\tau/\tau$ и $s(d\rho) = d^2\mathbf{x} \otimes d\nu(\tau)/\tau^2$, по теореме IX.35 (b) получаем, что $s(d\rho) = cd^2\mathbf{x} \otimes d\tau/\tau$. Поскольку s устанавливает взаимно однозначное соответствие между мерами на H_m и мерами на $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+$, оказывается, что существует не более одной (с точностью до постоянного множителя) меры на H_m, инвариантной относительно $\mathscr{L}_+^\uparrow$. Из леммы следует, что по крайней мере одна такая мера существует; таким образом, она существует и единственна.

Доказательство для случая $m = 0$ аналогично. Нужно только заметить, что множество $\{x \mid \tau = 0\}$ должно иметь ρ-меру нуль. ∎

Доказательство теоремы IX.33. Пусть μ — полиномиально ограниченная мера, инвариантная относительно $\mathscr{L}_+^\uparrow$, с носителем в $\overline{V}_+$. Пусть χ_0 — характеристическая функция множества H_0, а χ — характеристическая функция множества $\bigcup_{m>0} H_m$. Тогда $\chi_0\mu$ $\mathscr{L}_+^\uparrow$-инвариантна, так что $\chi_0\mu = e\Omega_0$, т. е. $\mu = \mu(\{0\})\delta_0 + e\Omega_0 + \chi\mu$. Пусть j — гомеоморфизм $\bigcup_{m>0} H_m$, заданный как j: $\langle x_0, \mathbf{x}\rangle \mapsto \langle \mathbf{x}/\widetilde{x\cdot x}, \widetilde{x\cdot x}\rangle$. Для каждого $\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$ матрица $j\Lambda j^{-1}$ действует на $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+$ как произведение $\Lambda_s \times I$. Мера $j(\chi\mu)$ инвариантна относительно отображений $\Lambda_s \times I$. По теореме IX.37 существует единственная мера Ω на $\mathbb{R}^3$, инвариантная относительно всех Λ_s, и $\Omega = c_m j(\Omega_m)$ для каждого m. По теореме IX.35 (a), $h(\chi\mu) = \Omega \otimes \tilde{\rho}$ для некоторой меры Бэра $\tilde{\rho}$ на $(0, \infty)$. Иначе говоря, для $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$

$$\int_{\overline{V}+} f(x)\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \left(\int_{\mathbb{R}^3} f(j^{-1}(x))'d\Omega \right) d\tilde{\rho}(m) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} \left(\int_{H_m} f(x)\,c_m\,d\Omega_m \right) d\tilde{\rho}(m).$$

Определим теперь ρ на $[0, \infty)$ как $\rho = c_m\tilde{\rho} + e\delta_0$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^4} f(x)\,d\mu(x) = \mu(\{0\})\,f(0) + \int_{m \geqslant 0} \left(\int f(x)\,d\Omega_m\right) d\rho(m).$$

Факт полиномиальной ограниченности ρ следует из полиномиальной ограниченности μ. ∎

IX. 9. Сужение на подмногообразия

Пусть M — гиперплоскость или компактное подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ размерности $n-1$ или меньше. В этом разделе рассматривается следующая проблема: какие f из $L^2(\mathbb{R}^n)$ допускают естественное сужение на M? Поскольку мера Лебега множества M в $\mathbb{R}^n$ равна нулю, не каждую f можно сузить на M. Мы надеемся, что сможем сузить хотя бы те f, в классе эквивалентности которых имеется достаточно гладкий представитель. Например, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ имеет естественное сужение $T_M f$, задаваемое просто набором значений f на M. Идея нашего подхода — построить банахово пространство B, такое, что $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset B \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ и $\|T_M f\|_{L^2(M)} \leqslant C\|f\|_B$ для $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Если $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ плотно в B, то можно применить теорему об ограниченном линейном отображении и продолжить T_M на все B. Другой подход к проблеме сужения рассматривается в Замечаниях к § IX.10.

Что же следует выбрать в качестве такого банахова пространства B? Наш опыт подсказывает, что условия гладкости f эквивалентны условиям на скорость убывания $\hat{f}$, поэтому естественно попытаться воспользоваться пространствами Соболева W_m. Для удобства обозначений введем пространство L^2_m — **пространство** L^2 **с весом**. Говорят, что $f \in L^2_m(\mathbb{R}^n)$, тогда и только тогда, когда $\hat{f} \in W_m$, т. е. тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^m\,|f(x)|^2\,dx < \infty.$$

Возникает естественный вопрос: какая проблема двойственна поставленной проблеме сужения? Точнее, заданному $f \in L^2(M)$ можно сопоставить распределение умеренного роста $T^*_M f$ на $\mathbb{R}^n$, используя правило $T^*_M f\colon\ \varphi \longmapsto \int_M f(x)\,\varphi(x)\,d\omega$, где ω — естественная мера (см. ниже) на M. Каковы свойства роста обобщенной функции $\mathscr{F}_M f \equiv \widehat{T^*_M f}$? Начнём с решения этих двух проблем для гиперплоскостей.

Теорема IX.38. Пусть $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, и предположим, что M — плоскость в $\mathbb{R}^n$ коразмерности k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

(a) Пусть $T_M f$ — сужение f на M. Тогда существует такая константа C (не зависящая от f), что $\|T_M f\|_{L^2(M)} \leqslant C\|f\|_{W_m}$ для всех $m > k - 1/2$. Таким образом, T_M однозначно продолжается до ограниченного отображения W_m в $L^2(M)$.

(b) Пусть $d_M x$ — мера Лебега на M (определенная, например, с помощью переноса M в начало координат и выбора ортонормированного базиса), и пусть $f \in L^2(M, d_M x)$. Положим, по определению,

$$(\mathcal{F}_M f)(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_M e^{-ix\cdot\lambda} f(x)\, d_M x. \qquad \text{(IX.44)}$$

Тогда $\mathcal{F}_M f$ — фурье-образ f, рассматриваемой как обобщенная функция умеренного роста, и $\mathcal{F}_M f \in L^2_m(\mathbb{R}^n)$ для всех $m < -k + 1/2$.

Доказательство. Приведем доказательство для случая $n = 2$, $k = 1$. Доказательство общего случая основано на той же идее, и мы его оставим в качестве упражнения (задача 57). Поскольку как условия, так и заключения теоремы не зависят от трансляций и поворотов M, можно допустить, что $M = \{\langle x_1, 0\rangle \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$.

Чтобы доказать (a), выберем $m > 1/2$. Тогда

$$|f(x_1, 0)| \leqslant \int \left| \int \frac{e^{ix_1\lambda_1}}{2\pi} \hat{f}(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1 \right| d\lambda_2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int \frac{d\lambda_2}{(1+\lambda_2^2)^m} \right)^{1/2} \left(\int (1 + |\lambda_2|^2)^m \left| \int e^{ix_1\lambda_1} \hat{f}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{d\lambda_1}{2\pi} \right|^2 d\lambda_2 \right)^{1/2},$$

откуда, по теореме Планшереля для одной переменной,

$$\int |f(x_1, 0)|^2\, dx_1 \leqslant C \int \left(\int (1 + |\lambda_2|^2)^m \left| \int e^{ix_1\lambda_1} \hat{f}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{d\lambda_1}{\sqrt{2\pi}} \right|^2 d\lambda_2 \right) dx_1 =$$
$$= C \int (1 + |\lambda_2|^2)^m |\hat{f}(\lambda_1, \lambda_2)|^2\, d\lambda_1 d\lambda_2 \leqslant$$
$$\leqslant C \int (1 + |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2)^m |\hat{f}(\lambda_1, \lambda_2)|^2\, d\lambda_1 d\lambda_2 =$$
$$= C\|f\|_{W_m}.$$

Итак, отображение сужения $T_M f = f(\cdot, 0)$ продолжается до ограниченного отображения из W_m в $L^2(M)$.

Теперь предположим, что $g \in L^2(M, d_M x) = L^2(\mathbb{R})$. Пусть χ_n — характеристическая функция интервала $(-n, n)$. Тогда $\chi_n(x_1) g(x_1) \delta(x_2)$ — распределение на $\mathbb{R}^2$ с компактным носителем, так что по теореме IX.5

$$\widehat{\chi_n g \delta}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\lambda_1 x_1} \chi_n(x_1) g(x_1)\, dx_1.$$

Если $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$, то

$$\iint \left(\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\lambda_1 x_1}\chi_n(x_1)\,g(x_1)\,dx_1\right)\varphi(\lambda_1, \lambda_2)\,d\lambda_1 d\lambda_2 \to$$
$$\to \iint \left(\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\lambda_1 x_1} g(x_1)\,dx_1\right)\varphi(\lambda_1, \lambda_2)\,d\lambda_1 d\lambda_2,$$

так что, поскольку $\chi_n g \to g$ слабо и преобразование Фурье слабо непрерывно, $(2\pi)^{-1}\int e^{-i\lambda_1 x_1}\cdot g(x_1)\,dx_1$ представляет собой фурье-образ $g(x_1)\,\delta(x_2)$ как распределения на $\mathbb{R}^2$. Для завершения доказательства положим $m < -1/2$. Тогда

$$\iint (1+|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2)^m\,|(\mathscr{F}_{\mathbb{R}}g)(\lambda_1, \lambda_2)|^2\,d\lambda_1 d\lambda_2 \leqslant$$
$$\leqslant (2\pi)^{-1}\iint (1+|\lambda_2|^2)^m\,|\hat{g}(\lambda_1)|^2\,d\lambda_1 d\lambda_2 =$$
$$= (2\pi)^{-1}\left(\int (1+|\lambda_2|^2)^m\,d\lambda_2\right)\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R})},$$

так что $\mathscr{F}_{\mathbb{R}}g \in L^2_m(\mathbb{R}^2)$. ∎

Обратимся теперь к случаю, когда M — компактное подмногообразие.

Определение. **Гиперповерхностью** M в $\mathbb{R}^n$ называется множество точек со следующими свойствами: существует вещественнозначная C^∞-функция F на $\mathbb{R}^n$, такая, что $M=\{x \mid F(x)=0\}$, причем $\nabla F = \langle \partial F/\partial x_1, \ldots, \partial F/\partial x_n\rangle \neq 0$ при каждом $x \in M$. Более общая формулировка: **регулярно вложенное подмногообразие коразмерности** k есть множество точек, где k вещественнозначных C^∞-функций обращаются в нуль и, кроме того, якобиан $\{\partial F_i/\partial x_j\}_{1\leqslant i\leqslant k,\ 1\leqslant j\leqslant n}$ имеет ранг k в каждой точке в M.

Для упрощения обозначений мы обсудим лишь случай коразмерности 1. Если задана F, то гиперповерхность (более общо, регулярно вложенное подмногообразие) оказывается снабженной естественной мерой. Опишем ее в окрестности $x \in M$. Так как $\nabla F(x) \neq 0$, то $\partial F/\partial x_l \neq 0$ для некоторого l. По теореме о неявной функции можно найти окрестность N точки x и гладкую функцию h_l на $\mathbb{R}^{n-1}$, такие, что $x_l = h_l(x_1, \ldots, \hat{x}_l, \ldots, x_n)$ для всех $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in N \cap M$, где $\langle x_1, \ldots, \hat{x}_l, \ldots, x_n\rangle$ означает, что l-я координата опущена. Для каждого $S \subset (N \cap M)$ положим

$$\omega_N(S) = \int_{h_l^{-1}(S)} \frac{dx_1 \ldots \widehat{dx_l} \ldots dx_n}{|\partial F/\partial x_l|}.$$

Тогда, применяя правило дифференцирования сложной функции и учитывая якобиан замены переменных, мы видим, что мера

ω_N не зависит от того, какое выбрано l, лишь бы выполнялось условие $\partial F/\partial x_l \neq 0$. Объединяя меры ω_N, можно получить естественную меру на всем M. Читатель может проверить, что естественная мера на S^{n-1} (т. е. поверхности единичного шара в $\mathbb{R}^n$) совпадает с обычной мерой на сфере, если

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1\right).$$

Отметим, что построенная нами мера зависит от F. Но если M компактно, то любые две такие меры абсолютно непрерывны по отношению друг к другу, а их производные Радона—Никодима ограничены положительными константами как сверху, так и снизу. Таким образом, соответствующие пространства L^2 на M совпадают в том смысле, что нормы в них эквивалентны. Предостережем читателя: на M имеется естественная мера, которую можно построить геометрически, но которая может отличаться от построенных нами (см. Замечания). Если M компактно, то пространство L^2, соответствующее этой геометрической мере, то же, что для мер, построенных по F.

Теорема IX.39. Пусть M—регулярно вложенное компактное подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ коразмерности k, заданное k функциями $F_1, \ldots, F_k$ из C^∞. Обозначим через ω естественную индуцированную меру на M. Предположим, что $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(a) Пусть $T_M f$—сужение f на M. Тогда для всех $m > k - 1/2$ существует такая константа C (не зависящая от f), что $\|T_M f\|_{L^2(M,\, d\omega)} \leqslant C \|f\|_{W_m}$, и потому T_M однозначно продолжается до ограниченного отображения из W_m в $L^2(M, d\omega)$.

(b) Пусть $f \in L^2(M, d\omega)$; положим

$$(\mathcal{F}_M f)(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_M e^{-ix\cdot\lambda} f(x)\, d\omega. \tag{IX.45}$$

Тогда $\mathcal{F}_M f$—фурье-образ обобщенной функции умеренного роста на $\mathbb{R}^n$, задаваемой функцией f, причем $\mathcal{F}_M f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{F}_M f \in L^2_m(\mathbb{R}^n)$ для всех $m < -k + 1/2$.

Доказательство. Как и ранее, приведем доказательство лишь для случая коразмерности 1. Доказательство состоит в основном из тех же вычислений, что и в теореме IX.38, за исключением того, что многообразие следует разбить на конечное число кусков, каждый из которых затем спрямляется, так что можно пользоваться теоремой Планшереля. Таким способом будет доказано (b). А тогда, пользуясь двойственностью, можно избежать вычислений в (a).

Пусть $f \in L^2(M, d\omega)$. Тогда функции f можно поставить в соответствие обобщенную функцию с компактным носителем, задав ее как функционал

$$\varphi \longmapsto \int_M f(x)\varphi(x)\, d\omega.$$

Поскольку эта обобщенная функция имеет компактный носитель, из теоремы IX.5 следует, что формула (IX.45) дает ее преобразование Фурье. При этом $\mathcal{F}_M f$ лежит в C^∞ по теореме Пэли—Винера для распределений.

На основе теоремы о неявной функции, в силу компактности многообразия M, можно найти его разложение на непересекающиеся измеримые множества $S_1, \ldots, S_N$:

$$S_j = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid x_{l(j)} = \\ = h_j(x_1, \ldots, \hat{x}_{l(j)}, \ldots, x_n), \langle x_1, \ldots, \hat{x}_{l(j)}, \ldots, x_n\rangle \in V_j\},$$

где V_j—измеримое подмножество $\mathbb{R}^{n-1}$, $c_1 < (\partial F/\partial x_{l(j)})(y) < c_2$ для всех $y \in S_j$ и $c_1 > 0$, $c_2 < \infty$. Положим, по определению,

$$G_j(\lambda) = (2\pi)^{-n/2} \int_{S_j} e^{-i\lambda\cdot x} f(x)\, d\omega.$$

Для простоты обозначений допустим, что $l(j) = n$. Тогда

$$G_j(\lambda) = (2\pi)^{-n/2} \int_{V_j} \exp\left(-i\lambda_n h_j(x_1, \ldots, x_{n-1}) - i\sum_1^{n-1} \lambda_i x_j\right) \times \\ \times \left(\frac{f(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_j(x_1, \ldots, x_{n-1}))}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_j(x_1, \ldots, x_{n-1}))}\right) dx_1 \ldots dx_{n-1},$$

и то же вычисление, что и в доказательстве теоремы IX.38 (b), позволяет при $m < -1/2$ воспользоваться для оценки интеграла по λ_n множителем $(1+\lambda^2)^m$, а затем применить теорему Планшереля и получить

$$\|G_j\|^2_{L^2_m(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \int_{V_j} \frac{|f(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_j(x_1, \ldots, x_{n-1}))|^2}{\left|\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_j(x_1, \ldots, x_{n-1}))\right|^2} dx_1 \ldots dx_{n-1} \leqslant \\ \leqslant \frac{C}{c_1} \|f\|^2_{L^2(M \cap S_j, d\omega)}.$$

Суммируя от 1 до N, находим, что существует константа $\tilde{C}$, для которой $\|\mathcal{F}_M f\|_{L^2_m(\mathbb{R}^n)} \leqslant \tilde{C} \|f\|_{L^2(M, d\omega)}$ при всех f. Это доказывает (b).

Мы видим, что отображение $\mathcal{F}_M$: $L^2(M, d\omega) \to L^2_{-m}(\mathbb{R}^n)$ ограничено при $m > 1/2$. Можно отождествить $L^2_m(\mathbb{R}^n)$ с сопряженным к $L^2_{-m}(\mathbb{R}^n)$, сопоставляя каждому $f \in L^2_m(\mathbb{R}^n)$ функционал

$$g \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx.$$

Следовательно, $\mathcal{F}^*_M$ — ограниченное отображение $L^2_m(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(M, d\omega)$. Поэтому каждой функции $f \in W_m$ можно однозначно сопоставить функцию $T_M f = \mathcal{F}^*_M(\hat{f})$ на $L^2(M, d\omega)$, причем так, что если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то это отображение — не что иное, как сужение f на M. Кроме того, $\|T_M f\|_{L^2(M, d\omega)} \leqslant \tilde{C} \|f\|_{W_m}$. ∎

Часто важно знать, как изменяются отображения сужения при изменении подмногообразия M. Рассмотрим случай, когда $M = S^{n-1}$, и пусть $S^{n-1}_\lambda = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n x_i^2 - \lambda = 0 \right\}$. Из теоремы IX.39 следует, что отображение сужения T_λ есть ограниченное отображение из $W_m(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(S^{n-1}_\lambda, d\omega)$ для каждого λ, если $m > 1/2$. Положим $(U_\lambda f)(x) = f(\lambda x)$; тогда U_λ: $L^2(S^{n-1}_\lambda, d\omega) \to L^2(S^{n-1}, d\omega)$. Мы хотели бы выяснить свойства непрерывности семейства отображений $U_\lambda T_\lambda$: $W_m(\mathbb{R}^n) \to L^2(S^{n-1}, d\omega)$.

Определение. Функция g из метрического пространства $\langle X, \rho \rangle$ в банахово пространство $\langle B, \|\cdot\| \rangle$ называется **непрерывной по Гёльдеру порядка** α, $\alpha \in (0, 1]$, если для каждого $x \in X$ существует такое $\delta > 0$, что $\|g(x) - g(y)\| \leqslant C\rho(x, y)^\alpha$ для всех y, удовлетворяющих условию $\rho(x, y) < \delta$.

Теорема IX.40. Пусть $R_\lambda = U_\lambda T_\lambda$ — семейство отображений сужения, определенных выше при $m > 1/2$. Тогда для каждого $f \in W_m(\mathbb{R}^n)$ функция $R_\lambda f$ непрерывна по Гёльдеру порядка α как $L^2(S^{n-1}, d\omega)$-значная функция λ для каждого α, где $0 < \alpha < m - 1/2$.

Доказательство. Приведем только схему доказательства, оставляя детали читателю (задача 58). Пусть $f \in L^2(S^{n-1}, d\omega)$; определим «растянутое» преобразование Фурье формулой

$$(\mathcal{F}^{(\lambda)} f)(k) = (2\pi)^{-n/2} \int_{S^{n-1}} e^{-ik\cdot\lambda x} f(x)\, d\omega.$$

Заметим, что $|e^{-ik\cdot\lambda x} - e^{-ik\cdot\lambda' x}| \leqslant C |\lambda - \lambda'|^\alpha |k|^\alpha$ для любого $\alpha \leqslant 1$. На основе этого доказывается, что

$$\|\mathcal{F}^{(\lambda)} f - \mathcal{F}^{(\lambda')} f\|_{L^2_{-m}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C |\lambda - \lambda'|^\alpha \|f\|_{L^2(S^{n-1}, d\omega)},$$

если $\alpha < m - 1/2$. Поскольку $R_\lambda f = (\mathcal{F}^{(\lambda)})^* \hat{f}$ (в смысле сопряженности пространств, описанной в доказательстве теоремы IX.39), находим, что

$$\| R_\lambda f - R_{\lambda'} f \| \leqslant C_\alpha |\lambda - \lambda'|^\alpha \| f \|_{W_m}. \quad ∎$$

Отметим, что можно доказать следующий более сильный результат. Пусть $n+1/2 < m \leqslant n+3/2$. Тогда функция $R_\lambda f$, рассматриваемая как отображение из $W_m(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(S^{n-1}, d\omega)$, непрерывно дифференцируема n раз и ее n-я производная непрерывна по Гёльдеру порядка α для всех $0 < \alpha < m-n-1/2$.

Последняя наша задача в этом разделе — исследование отображения

$$f \mapsto \check{\left((k^2-\lambda)^{-1}\hat{f}\right)}$$

для положительных λ. Это отображение интересно нам потому, что оно представляет собой неограниченный оператор $(-\Delta-\lambda)^{-1}$ для $\lambda > 0$. Изучение оператора $(-\Delta-\lambda)^{-1}$ будет продолжено в § XIII.7, где рассматриваются спектральные свойства некоторых квантовомеханических гамильтонианов. Идея следующей теоремы такова: функция $(k^2-\lambda)^{-1}$ сингулярна лишь на $S^{n-1}_{\lambda^{1/2}}$, т. е. на сфере радиуса $\lambda^{1/2}$, так что если сужение $\hat{f}$ на $S^{n-1}_{\lambda^{1/2}}$ равно нулю, то можно ожидать, что отображение $f \mapsto \check{\left((k^2-\lambda)^{-1}\hat{f}\right)}$ не так уж и сингулярно. Для удобства обозначим норму на $L^2_\alpha(\mathbb{R}^n)$ через $\|\cdot\|_\alpha$.

Теорема IX.41. Пусть $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}^n)$ для некоторого $\alpha > 1/2$, и предположим, что сужение функции $\hat{f}$ (задаваемое теоремой IX.39) на сферу радиуса $\lambda^{1/2}$ $(\lambda > 0)$ — нулевая функция. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$

$$B_\lambda f \equiv \check{\left((k^2-\lambda)^{-1}\hat{f}\right)} \in L^2_{\alpha-1-2\varepsilon}.$$

Более того, для любых $\varepsilon > 0$, $\alpha > 1/2$ и $\lambda > 0$ существует такая постоянная C, что

$$\| B_\lambda f \|_{\alpha-1-2\varepsilon} \leqslant C \| f \|_\alpha$$

для всех $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}^n)$, для которых $\hat{f}$ обращается в нуль на $S^{n-1}_{\lambda^{1/2}}$. При этом C остается ограниченной, когда λ пробегает произвольное компактное подмножество в $(0, \infty)$.

Доказательство теоремы IX.41 мы разобьем на ряд лемм. Первая — прямое следствие того факта, что L^2_α — множество фурье-образов элементов пространства Соболева W_α, а также доказательства предложения 2 из § IX.6.

Лемма 1. Пусть F — некоторая C^∞-функция, такая, что все ее производные ограничены. Тогда отображение $f \mapsto (F\hat{f})\check{}$ ограничено на каждом L^2_α.

Наш метод доказательства теоремы IX.41 таков: сначала мы докажем ее для случая $n=1$, а затем, применяя этот частный случай в процедуре «раскроя и склеивания», получим доказательство общего случая.

Лемма 2. Пусть $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R})$, причем $\alpha > 1/2$ (так что $f \in L^1(\mathbb{R})$). Предположим, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$. Тогда

(a) Существует однопараметрическое семейство обобщенных функций умеренного роста, удовлетворяющих условию $k\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$. Каждая из них — непрерывная функция, и лишь одна из них такова, что $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$.

(b) Для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ функция g удовлетворяет оценке

$$|g(x)| \leqslant C \|f\|_\alpha (1+|x|^2)^{-\frac{1}{2}(\alpha - \frac{1}{2} - \varepsilon)}, \tag{IX.46}$$

где C зависит только от α и ε.

Доказательство. Пусть $g(x)$ задана соотношением

$$g(x) = i\int\limits_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = -i\int\limits_{x}^{\infty} f(y)\,dy. \tag{IX.47}$$

Предположим, что $x < 0$, и выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $\alpha > 1/2 + \varepsilon$. Тогда

$$|g(x)|^2 \leqslant \left| \int\limits_{-\infty}^{x} |f(y)|\,(1+|y|^2)^{\alpha/2}\,(1+|y|^2)^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\varepsilon} \times \right.$$

$$\left. \times\,(1+|x|^2)^{-\frac{1}{2}(\alpha-\frac{1}{2}-\varepsilon)}\,dy \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant (1+|x|^2)^{-(\alpha-1/2-\varepsilon)}\,\|f\|^2_\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|y|^2)^{-1/2-\varepsilon}\,dy.$$

Для $x \geqslant 0$ применяется аналогичное построение, опирающееся на второе равенство в (IX.47). Так как $f \in L^1(\mathbb{R})$, то g абсолютно непрерывна и $g'(x)=if(x)$, а потому $k\hat{g}(k)=\hat{f}(k)$. В силу заданных условием свойств f, имеем $g(x)\to 0$ при $x\to\pm\infty$. Если g_β—другое распределение умеренного роста, удовлетворяющее равенству $k\hat{g}_\beta=\hat{f}$, то $k(\hat{g}-\hat{g}_\beta)=0$, так что носитель $\hat{g}-\hat{g}_\beta$ сосредоточен в начале координат. Отсюда следует, что $\hat{g}_\beta-\hat{g}$—конечная линейная комбинация дельта-функции и ее производных. Поскольку $k(\hat{g}_\beta-\hat{g})=0$, коэффициенты членов с производными обращаются в нуль, так что $\hat{g}_\beta=\hat{g}+\beta\delta_0$. Отсюда следует, что $g_\beta=g+\beta(2\pi)^{-1/2}$. Это показывает, что $g_\beta\to 0$ на $\pm\infty$ тогда и только тогда, когда $\beta=0$. ∎

Теперь можно доказать одномерный случай теоремы IX.41.

Лемма 3. Пусть $\lambda>0$ и $\alpha>1/2$. Предположим, что $h\in L^2_\alpha(\mathbb{R})$ и $\hat{h}(\pm\lambda^{1/2})=0$. Тогда существует непрерывная функция g, стремящаяся к нулю на бесконечности, такая, что $(k^2-\lambda)\hat{g}=\hat{h}$. Кроме того, g удовлетворяет неравенству

$$|g(x)|\leqslant D_\lambda\|h\|_\alpha(1+|x|^2)^{-1/2(\alpha-1/2-\varepsilon)}, \tag{IX.48}$$

где D_λ—константа, зависящая только от λ, α и ε. При фиксированных α и ε константа D_λ ограничена, когда λ меняется в любом компактном подмножестве в $(0,\infty)$.

Доказательство. Простые соображения, основанные на формуле $\widehat{e^{i\gamma x}f(x)}(k)=\hat{f}(k-\gamma)$, в силу леммы 2 показывают, что если $\hat{h}(\gamma)=0$, то существует функция g, удовлетворяющая $\widecheck{\text{(IX.46)}}$, причем $(k-\gamma)\hat{g}=\hat{h}$. Обозначим такую g через $(k-\gamma)^{-1}\hat{h}$. Выберем такую C^∞-функцию χ, что $\chi(k)=0$, если $k<-{}^1/_2\lambda^{1/2}$, и $\chi(k)=1$, если $k>{}^1/_2\lambda^{1/2}$, и положим

$$F_1(k)=(k+\lambda^{1/2})^{-1}\chi(k),\qquad F_2(k)=(k-\lambda^{1/2})^{-1}(1-\chi(k)),$$

так что $(k-\lambda^{1/2})^{-1}F_1+(k+\lambda^{1/2})^{-1}F_2=(k^2-\lambda)^{-1}$. Пусть $f_i=\widecheck{F_i\hat{h}}$. По лемме 1, $\|f_i\|_\alpha\leqslant C_{i,\alpha}\|h\|_\alpha$. Пусть $\hat{g}=(k-\lambda^{1/2})^{-1}\hat{f}_1+(k+\lambda^{1/2})^{-1}\hat{f}_2$. Тогда $(k^2-\lambda)\hat{g}=\hat{h}$ и

$$\begin{aligned}|g(x)|&\leqslant C[\|f_1\|_\alpha+\|f_2\|_\alpha](1+|x|^2)^{-1/2(\alpha-1/2-\varepsilon)}\leqslant\\&\leqslant D\|h\|_\alpha(1+|x|^2)^{-1/2(\alpha-1/2-\varepsilon)}.\end{aligned}$$

То, что D_λ ограничена, когда λ пробегает компактное подмножество в $(0,\infty)$, прямо следует из приведенного доказательства. ∎

Заметим, что в силу (IX.48) справедливо неравенство

$$\int |g(x)|^2 (1+|x|^2)^{\alpha-1-2\varepsilon} dx \leqslant D^2 \|h\|_\alpha^2 \int (1+|x|^2)^{-1/2-\varepsilon} dx,$$

так что лемма 3 в действительности представляет собой усиленный вариант теоремы IX.41 в случае $n=1$.

Лемма 4. Пусть $f\in L_\alpha^2(\mathbb{R}^n)$, причем $\alpha>1/2$, и предположим, что $\hat{f}$ обращается в нуль на сфере радиуса λ. Тогда для почти всех $p\in\mathbb{R}^{n-1}$ функция

$$h_p(y)\equiv(2\pi)^{-(n-1)/2}\int e^{-i(p_1x_1+\ldots+p_{n-1}x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)\, d^{n-1}x$$

лежит в $L_\alpha^2(\mathbb{R})$ и при почти всех $p\in\mathbb{R}^{n-1}$, таких, что $|p|\leqslant\lambda$, $\hat{h}_p(\pm\sqrt{\lambda^2-|p|^2})=0$.

Доказательство. Если бы f лежала в $L^1(\mathbb{R}^n)$, то заключение леммы было бы тривиальным. Но нам придется проделать несколько более сложную работу. Поскольку $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)\left(1+\sum_1^{n-1} x_i^2+y^2\right)^{\alpha/2}\in L^2(\mathbb{R}^n)$, то, как известно, и $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)(1+y^2)^{\alpha/2}\in L^2(\mathbb{R}^n)$. Значит, по теореме Планшереля,

$$\int |h_p(y)|^2 (1+|y|^2)^\alpha dy\, d^{n-1}p<\infty.$$

Отсюда следует, что $h_p(\cdot)\in L_\alpha^2(\mathbb{R})$ при почти всех p. Выберем теперь $f_m\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ так, чтобы $\|f-f_m\|_\alpha\to0$. По теореме IX.39, $\hat{f}_m\to\hat{f}$ в $L^2(S_\lambda^{n-1})$. Следовательно, переходя, если необходимо, к подпоследовательностям, можно считать, что

(1) $\hat{f}_m(p, \pm\sqrt{\lambda-|p|^2})\to0$ при почти всех $p\in\mathbb{R}^{n-1}$ с $|p|^2<\lambda$;
(2) $\|f_m-f\|_\alpha\leqslant4^{-m}$.

Положим, по определению,

$$h_p^{(m)}(y)=(2\pi)^{-(n-1)/2}\int \exp\left(-i\sum_{i=1}^{n-1} p_ix_i\right) f_m(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)\, d^{n-1}x.$$

Мы утверждаем, что $\|h_p^{(m)}-h_p\|_{L_\alpha^2(\mathbb{R})}\to0$ п. в. по p. Действительно, на основании доводов, приведенных в начале доказательства, $\int \|h_p^{(m)}-h_p\|_\alpha^2 d^{n-1}p\leqslant4^{-2m}$. Следовательно, для каждого m множество $U_m=\{p\,|\,\|h_p^{(m)}-h_p\|_\alpha<2^{-m}\}$ имеет дополнение, мера которого меньше 4^{-m}. Пусть $T_m=\bigcap_{n\geqslant m} U_n$, и пусть μ — мера Лебега. Тогда $\mu(\mathbb{R}^{n-1}\setminus T_m)\leqslant4^{-m+1}$, так что $\mu(\mathbb{R}^{n-1}\setminus\bigcup_m T_m)=0$. Но на каждом T_m имеем $h_p^{(m)}\to h_p$ в $L_\alpha^2(\mathbb{R})$, так что $\|h_p^{(m)}-h_p\|_\alpha\to0$

для почти всех p. Следовательно, по теореме IX.39,

$$\hat{h}_p^{(m)}(\pm\sqrt{\lambda^2-|p|^2}) \to \hat{h}_p(\pm\sqrt{\lambda^2-|p|^2}) = \hat{f}(p, \sqrt{\lambda^2-|p|^2})$$

при почти всех p с $|p|^2<\lambda$. Так как $\hat{h}_p^{(m)}(\pm\sqrt{\lambda-|p|^2}) = \hat{f}_m(p, \pm\sqrt{\lambda-|p|^2})$, то из (1) вытекает, что $\hat{h}_p(\pm\sqrt{\lambda-|p|^2})=0$. ∎

Лемма 5. Фиксируем $\lambda>0$, и пусть

$$V=\left\{k \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n-1}|k_i|^2+|k_n-\lambda^{1/2}|^2<\frac{1}{4}\lambda\right\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Пусть $f\in L^2_\alpha(\mathbb{R}^n)$, $\alpha>1/2$, и предположим, что $\hat{f}$ имеет носитель в V и что $\hat{f}\restriction S_\lambda^{n-1}=0$. Тогда

$$B_\lambda f=\widehat{(k^2-\lambda)^{-1}\hat{f}}\in L^2_{\alpha-1-2\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \quad \text{и} \quad \|B_\lambda f\|_{\alpha-1-2\varepsilon}\leqslant C'\|f\|_\alpha.$$

Доказательство. Определим $h_p(y)$, как в лемме 4, и заметим, что в силу доводов в начале доказательства леммы 4

$$\int\|h_p\|_\alpha^2\,d^{n-1}p\leqslant\|f\|_\alpha^2. \tag{IX.49}$$

По предположению, $h_p=0$, если $|p|>{}^1/_2\lambda^{1/2}$. Для каждого p с $|p|<{}^1/_2\lambda^{1/2}$ введем $\hat{g}_p(k)=(k^2-(\lambda-|p|^2))^{-1}\hat{h}_p(k)$. Тогда, по лемме 3,

$$|g_p(y)|^2\leqslant D^2\|h_p\|_\alpha^2(1+|y|^2)^{-(\alpha-1/2-\varepsilon)}.$$

Поскольку

$$g_p(y)=(2\pi)^{-(n-1)/2}\int\exp\left(-i\sum_{i=1}^{n-1}p_ix_i\right)(B_\lambda f)(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)\,d^{n-1}x,$$

теорема Планшереля и (IX.49) дают

$$\int|(B_\lambda f)(x_1, \ldots, x_n)|^2\,d^{n-1}x\leqslant D^2\|f\|_\alpha^2(1+|x_n|^2)^{-(\alpha-1/2-\varepsilon)}.$$

Теперь надо рассмотреть два случая. Если $\alpha-1-2\varepsilon\leqslant0$, то

$$(1+|x|^2)^{\alpha-1-2\varepsilon}\leqslant(1+|x_n|^2)^{\alpha-1-2\varepsilon},$$

так что

$$\|B_\alpha f\|_{\alpha-1-2\varepsilon}^2\leqslant\int|(B_\lambda f)(x_1, \ldots, x_n)|^2(1+|x_n|^2)^{\alpha-1-2\varepsilon}\,d^nx\leqslant$$
$$\leqslant D^2\|f\|_\alpha^2\int(1+|x_n|^2)^{-1/2-\varepsilon}\,dx_n.$$

С другой стороны, если $\alpha-1-2\varepsilon>0$, нужна более тонкая аргументация. Пусть $\mathrm{e}_n=(0, 0, \ldots, 1)$. Если e — единичный вектор, достаточно близкий к e_n, то, подобно тому, как это было сделано выше, можно показать, что

$$\int |(B_\lambda f)(x_1, \ldots, x_n)|^2 (1+|\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}|^2)^{\alpha-1-2\varepsilon} d^n x \leqslant D_1^2 \|f\|_\alpha^2. \quad \text{(IX.50)}$$

Выберем единичные векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ вблизи $\mathbf{e}_n$ так, чтобы $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$ образовали базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует такая константа C, что

$$1+|\mathbf{x}|^2 \leqslant C \sum_{i=1}^n (1+|\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_i|^2).$$

Отсюда для некоторой другой константы C' получаем

$$(1+|\mathbf{x}|^2)^{\alpha-1-2\varepsilon} \leqslant C' \sum_{i=1}^n (1+|\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_i|^2)^{\alpha-1-2\varepsilon}.$$

Следовательно, по (IX.50),

$$\|B_\lambda f\|_{\alpha-1-2\varepsilon}^2 \leqslant C' D_1^2 \|f\|_\alpha^2. \blacksquare$$

Доказательство теоремы IX.41. Простые соображения, основанные на компактности, показывают, что $\mathbb{R}^n$ можно покрыть конечным числом окрестностей $V_1, \ldots, V_m$, таких, что

$$V_i = \{k \mid |k-\lambda^{1/2} e_i| \leqslant {}^1/_2 \lambda^{1/2}\} \text{ при } i=1, 2, \ldots, m-2,$$

где $e_1, \ldots, e_{m-2}$ — единичные векторы и

$$V_{m-1} = \{k \mid |k| \leqslant {}^3/_4 \lambda^{1/2}\}, \qquad V_m = \{k \mid |k| \geqslant {}^5/_4 \lambda^{1/2}\}.$$

Выберем C^∞-функции $\{\chi_i\}_{i=1}^m$ с $\operatorname{supp}\chi_i \subset V_i$ так, чтобы $\sum_{i=1}^m \chi_i = 1$.

По лемме 1, $\sum_{i=1}^m \|\widecheck{\chi_i \hat{f}}\|_\alpha \leqslant C_1 \|f\|_\alpha$. Следовательно, по лемме 1 при $i=m-1$ и $i=m$ и лемме 5 при $i \leqslant m-2$, получаем

$$\|B_\lambda f\|_{\alpha-1-2\varepsilon} \leqslant \sum_{i=1}^m \|\widecheck{(k^2-\lambda)^{-1} \chi_i \hat{f}}\|_{\alpha-1-2\varepsilon} \leqslant C_2 \|f\|_\alpha. \blacksquare$$

Strč prst skrz krk — *Чешская скороговорка*

IX.10. Произведения обобщенных функций, волновые фронты, осцилляторные интегралы

В этом разделе мы хотим обсудить некоторые результаты, связанные с проблемой определения произведения двух обобщенных функций. В случае когда $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $S \in O_M^n$, произведение ST уже было определено (см. пример 7 и операцию 1 в § V.3). В приложениях часто встречаются более сингулярные произведения. Например, в теории свободного квантованного поля желательно определить $\theta(x-y)\Delta_+(x-y)+$ $+\theta(y-x)\Delta_+(y-x)$, где Δ_+ — двухточечная функция Паули (см. теорему IX.34) и

$$\theta(f)=\int\limits_{x_0\geqslant 0} f(x)\,d^4x.$$

Проблема определения произведений состоит отнюдь не в построении одного конкретного произведения TS, а в определении произведения, обладающего разумными свойствами, для широкого класса T и S. В предыдущем примере как θ, так и Δ_+ сингулярны при $x=0$, но в определенном смысле, который будет уточнен, эти сингулярности совместны, что позволяет нам определить $\theta\Delta_+$.

Мы подойдем к проблеме определения произведений в два этапа. Сначала мы «локализуем» T и S таким образом, чтобы рассматривать лишь распределения с компактным носителем. Потом мы воспользуемся тем, что фурье-образ произведения есть свертка фурье-образов сомножителей, и попытаемся определить TS так, чтобы $\widehat{TS}=(2\pi)^{-n/2}\hat{T}*\hat{S}$. Этот путь исследования произведений естественно приведет нас к понятию волнового фронта распределения. В заключение этого раздела мы разработаем метод вычисления волнового фронта для одного класса обобщенных функций, называемых осцилляторными интегралами. И наконец мы применим эту технику для определения обсуждавшегося выше произведения.

Заметим, что у нас не будет случая применить развиваемую ниже технику осцилляторных интегралов и что определить произведение $\theta\Delta_+$ можно и без помощи этой техники. Мы включили сюда ее изложение отчасти для того, чтобы дать введение в ряд важных идей, находящих приложения в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Некоторые из этих приложений будут указаны в Замечаниях.

Для пояснения процедуры локализации рассмотрим сначала случай, когда T и S сингулярны в различных точках в смысле следующего определения.

Определение. Пусть $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Будем говорить, что $x\in\mathbb{R}^n$ — **регулярная точка** T, когда существуют окрестность U точки x и функция F из C^∞ на U, такие, что $T(f)=\int f(x)F(x)\,dx$ для всех $f\in\mathcal{D}$, для которых $\operatorname{supp} f\subset U$. Дополнение множества регулярных точек T называется **сингулярным носителем** T и будет обозначаться $\operatorname{sing\,supp}(T)$.

Из этого определения сразу следует такое

Предложение. Сингулярный носитель T есть замкнутое подмножество носителя T.

Есть частный случай, когда легко определить TS. Для этого достаточно локализовать то понятие произведения, которое мы ввели в § V.3.

Теорема IX.42. Пусть T и S принадлежат $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что $\operatorname{sing\,supp}(T) \cap \operatorname{sing\,supp}(S) = \varnothing$. Тогда существует единственная $W \in \mathscr{D}'$, такая, что

(a) Если $x \notin \operatorname{sing\,supp}(S)$ и S совпадает с некоторой C^∞-функцией F вблизи x, то $W = FT$ вблизи x. Иными словами, если $S(f) = \int F(x) f(x)\,dx$ для всех f с $\operatorname{supp} f \subset U$, где U — открытое множество вблизи x, то $W(f) = T(Ff)$ для всех f с $\operatorname{supp} f \subset U$.

(b) Если $x \notin \operatorname{sing\,supp}(T)$ и T совпадает с некоторой C^∞-функцией G вблизи x, то $W = GS$ вблизи x.

Доказательство. Докажем сначала, что существует не более одной такой W. Действительно, предположим, что W_1 и W_2 удовлетворяют (a), (b), и пусть задана f. Пусть B_R обозначает шар радиуса R. Поскольку $\operatorname{sing\,supp}(T) \cap \operatorname{sing\,supp}(S) = \varnothing$, для любого $x \in B_{2R}$ можно найти такой шар $B_{r(x)}^{(x)}$ радиуса $r(x)$ с центром в x, что $W_1(g) = W_2(g)$ для всех g с $\operatorname{supp} g \subset B_{r(x)}^{(x)}$, ибо или (a), или (b) справедливы вблизи x как для W_1, так и для W_2. Выберем конечное множество $x_1, \ldots, x_k$ в B_{2R} так, чтобы $\bigcup_{i=1}^{k} B_{r(x_i)/2}^{(x_i)} \supset \overline{B}_R$, и выберем неотрицательные $\chi_1, \ldots, \chi_k$, такие, что

$$\chi_i \in C_0^\infty, \quad \operatorname{supp} \chi_i \subset B_{r(x_i)}^{(x_i)} \quad \text{и} \quad \chi_i \restriction B_{r(x_i)/2}^{(x_i)} \equiv 1.$$

Положим $h = \sum_{i=1}^{k} \chi_i$, и пусть χ — функция из C_0^∞, тождественно равная единице на B_R с носителем в N — окрестности $\overline{B}_R$, на которой h ограничена снизу строго положительной константой. Тогда для любой $f \in C_0^\infty$ с $\operatorname{supp} f \subset B_R$ можно написать

$$f = f \sum_{i=1}^{k} \chi\chi_i h^{-1} = \sum_{i=1}^{k} f\chi_i h^{-1} \equiv \sum_{i=1}^{k} f_i,$$

где $f_i = \chi_i h^{-1} f$ принадлежит C^∞, причем $\operatorname{supp} f_i \subset B_{r(x_i)}^{(x_i)}$. В силу предыдущих рассуждений, $W_1(f_i) = W_2(f_i)$, так что $W_1(f) = W_2(f)$. Поскольку R произвольно, $W_1 = W_2$.

Это доказывает единственность. Предположим теперь, что для каждого R можно построить распределение W_R на $\mathscr{D}(B_R)$.

Тогда, на основе доказанной выше единственности, распределения W_R при разных R должны совпадать на их общей области определения, т. е. если $R_2 > R_1$, то $W_{R_2} \upharpoonright \mathscr{D}(B_{R_1}) = W_{R_1}$, так что распределения W_R «подстраиваются» друг к другу, образуя функционал на $\mathscr{D}$, непрерывный в силу непрерывности на каждом $\mathscr{D}(B_R)$.

Фиксируем теперь R. Каждая точка $x \in B_{2R}$ является регулярной точкой или T, или S, а потому выберем $B_{r(x)}^{(x)}$ так, чтобы или $S \upharpoonright B_{r(x)}^{(x)}$ было C^∞-функцией F_x, или $T \upharpoonright B_{r(x)}^{(x)}$ было C^∞-функцией G_x. Как и выше, выберем конечное множество точек x_i и пронумеруем их так, чтобы $x_1, \ldots, x_l$ соответствовали функциям F_{x_i}, а $x_{l+1}, \ldots, x_k$—функциям G_{x_i}. Так же как и выше, пусть $u_i = \chi\chi_i h^{-1}$; тогда u_i принадлежит C^∞, $\operatorname{supp} u_i \subset B_{r(x_i)}^{(x_i)}$ и $\sum_{i=1}^{k} u_i = 1$ на $\overline{B}_R$. Зададим W_R формулой

$$W_R(f) = \sum_{i=1}^{l} T(F_{x_i} u_i f) + \sum_{i=l+1}^{k} S(G_{x_i} u_i f). \tag{IX.51}$$

Проверку того, что (IX.51) удовлетворяет (a) и (b), оставляем читателю. ∎

Описанная выше процедура определения $W(f)$ с помощью функций $u_i f$ называется локализацией. В предыдущем построении имеется одно важное обстоятельство, благодаря которому мы ничего не теряем при локализации: локальные кусочки можно сложить вместе. Это целиком связано с тем, что топология на $\mathscr{D}$ определена локально, т. е. для непрерывности функционала T на $\mathscr{D}$ достаточно, чтобы были непрерывны его сужения на каждое $\mathscr{D}(B_R)$. Для топологии на $\mathscr{S}$ это не верно. В самом деле, можно взять две обобщенные функции умеренного роста T и S, которые имеют произведение TS по теореме IX.42, но произведение это не будет обобщенной функцией умеренного роста!

Пример 1. Пусть F—ограниченная C^∞-функция $F(x) = \exp(ie^x)$. Поскольку F ограничена, $F \in \mathscr{S}'$. Пусть F'—производная F в смысле обобщенных функций. Ясно, что $F' \in \mathscr{S}'$. В применении к любой $g \in \mathscr{D}$

$$F'(g) = \int g(x)(ie^x) F(x)\, dx, \tag{IX.52}$$

хотя (IX.52) и не верно для произвольной $g \in \mathscr{S}$. Пусть $\overline{F}$ — распределение умеренного роста, равное $\exp(-ie^x)$. Рассматривая $\overline{F}$ и F' как обобщенные функции из $\mathscr{D}'$, можно найти их сингулярные носители и убедиться, что они пусты. А тогда по теореме IX.42 можно определить такой элемент W из $\mathscr{D}'$, что

$W = -i\overline{F}F'$. Оказывается, W есть не что иное, как e^x, но e^x не обладает умеренным ростом (так как любая *положительная* обобщенная функция умеренного роста должна задаваться полиномиально ограниченной мерой).

Этот пример иллюстрирует непригодность техники локализации для обобщенных функций умеренного роста. Например, F' локально представляется C^∞-функцией, но не равна никакой C^∞-функции как элемент $\mathscr{S}'$.

Теперь мы попробуем определить произведения распределений, сингулярные носители которых могут иметь общую часть. Наиболее важное свойство произведений, которое мы хотим сохранить,— их связь со свертками через преобразование Фурье. Конечно, в общем случае элементы $T \in \mathscr{D}'$ могут не иметь фурье-образов, но если мы проведем локализацию, т. е. рассмотрим некоторое fT, где $f \in \mathscr{D}$, то, по теореме IX.12, $\widehat{fT}$—целая аналитическая функция. Поэтому испытаем такое

Определение. Пусть T, $S \in \mathscr{D}'$. Будем говорить, что $W \in \mathscr{D}'$ есть **произведение** T и S, если для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ существует такая функция $f \in \mathscr{D}$, что $f = 1$ вблизи x и для каждого $k \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$\widehat{f^2W}(k) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{fT}(l)\, \widehat{fS}(k-l)\, dl, \qquad \text{(IX.53)}$$

где интеграл абсолютно сходится. Если такое распределение W существует, то мы говорим, что **существует произведение** T **и** S.

Теорема IX.43.

(a) Произведение W корректно определено, т. е. существует не более одного W, удовлетворяющего данному выше определению.

(b) Если $f \in \mathscr{D}$ и $T \in \mathscr{D}'$, то fT существует и задается обычным определением, т. е. $fT(g) = T(fg)$.

(c) Если TS, $(TS)V$, SV и $T(SV)$ все существуют, то $T(SV) = (TS)V$. Если TS существует, то существует ST и $TS = ST$.

(d) Если T и S—обобщенные функции с непересекающимися сингулярными носителями, то TS существует и задается произведением W из теоремы IX.42.

(e) Если T и S—обобщенные функции с компактным носителем, то достаточным условием существования TS является абсолютная сходимость интеграла $\int \hat{T}(l)\hat{S}(k-l)\,dl$ для каждого

k и полиномиальная ограниченность определяемой этим интегралом функции от k.

(f) Достаточное условие существования $W = TS$ состоит в существовании для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ такой $f \in \mathscr{D}$, что $f(x) \neq 0$ и интеграл в правой части (IX.53) абсолютно сходится к полиномиально ограниченной функции от k.

(g) Если TS существует, то $\operatorname{supp}(TS) \subset \operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} S$.

Доказательство. Докажем (a) и (g), а остальное оставим в качестве задач. Отметим сначала, что если выполнено (IX.53), то для любой $g \in \mathscr{D}$

$$\widehat{gf^2W} = (2\pi)^{-n/2}\widehat{gfT} * \widehat{fS} = (2\pi)^{-n/2}\widehat{fT} * \widehat{gfS}. \qquad \text{(IX.54)}$$

Это следует из ассоциативности $\hat{g} * (\widehat{fT} * \widehat{fS}) = (\hat{g} * \widehat{fT}) * \widehat{fS}$, которая имеет место, поскольку необходимые замены переменных законны вследствие требования абсолютной сходимости интеграла в (IX.53). Итак, если и W_1, и W_2 удовлетворяют определению, то для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ можно найти f и g, тождественно равные единице вблизи x, такие, что $\widehat{f^2W_1} = (2\pi)^{-n/2}\widehat{fT} * \widehat{fS}$ и $\widehat{g^2W_2} = (2\pi)^{-n/2}\widehat{gT} * \widehat{gS}$. По (IX.54) заключаем, что $\widehat{f^2g^2W_1} = \widehat{f^2g^2W_2}$, поэтому $W_1 - W_2$ обращается в нуль вблизи x, откуда в силу соображений, приведенных в доказательстве теоремы IX.42, следует, что эта разность равна нулю.

Для доказательства (g) нужно только показать, что если $x \notin \operatorname{supp} T$, то $x \notin \operatorname{supp}(TS)$, а затем вспомнить о симметрии. В силу построений из теоремы IX.42, достаточно показать, что $TS(f) = 0$ для всех f с носителем в некоторой малой окрестности N точки x. Поэтому выберем N так, чтобы $T(f) = 0$, если $\operatorname{supp} f \subset N$. Тогда $fT \equiv 0$, поскольку для всех $g \in \mathscr{D}$ имеем $fT(g) = T(fg) = 0$. Итак, в силу (c), $f(TS) = (fT)S = 0$. Пусть, наконец, χ — произвольная функция из $\mathscr{D}$, тождественно равная единице на N; тогда $TS(f) = TS(f\chi) = (f\,TS)(\chi) = 0$. ∎

Пример 2. Пусть $T = S = \delta$ на $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Тогда $\hat{T} = \hat{S} = (2\pi)^{-1/2}$ и для любой f, тождественно равной единице вблизи $x = 0$, имеем $fT = T$, так что интеграл (IX.53) расходится. Следовательно, произведения TS не существует.

Пример 3. $T = S = \mathscr{P}(1/x) - i\pi\delta(x)$, где $\mathscr{P}$ — главное значение в смысле Коши (пример 6 из § V.3). Как мы уже видели (задача 22 из гл. V),

$$T = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{x + i\varepsilon}. \qquad \text{(IX.55)}$$

Применяя (IX.55), легко показать (задача 54), что

$$\hat{T}(k) = -(2\pi)^{-1/2}(2\pi i)\,\theta(k), \tag{IX.56}$$

где θ—функция Хевисайда, определенная в примере 8 из § V.3. Итак,

$$(2\pi)^{-1/2}\int \hat{T}(l)\,\hat{S}(k-l)\,dl = -(2\pi)^{-3/2}(2\pi)^2\int \theta(l)\,\theta(k-l)\,dl =$$
$$= -(2\pi)(2\pi)^{-1/2}k\theta(k) = (ik)\,\hat{T}(k).$$

Таким образом, в силу утверждения (e) предыдущей теоремы, TS существует и $TS = -T'$, или, в явном виде,

$$(TS)(f) = \lim_{a\downarrow 0}\int_a^\infty \left(\frac{f(x)+f(-x)-2f(0)}{x^2}\right)dx - i\pi f'(0).$$

Пример 4. Существует простое обобщение примера 3 на распределения в $\mathbb{R}^n$. А именно, если носители фурье-образов T и S лежат в выпуклом конусе, причем дуальный конус C имеет непустую внутренность, то можно показать, что $\hat{T}*\hat{S}$ существует. В этом случае имеется другой способ определения TS (задача 62). Действительно, так как $\hat{T}$ имеет носитель в конусе, то по теореме IX.16 существует аналитическая функция $\tilde{T}$ на $\mathbb{R}^n+iC$, причем $T = \lim\limits_{\varkappa\downarrow 0,\ \varkappa\in C}\tilde{T}(\cdot+i\varkappa)$. Тогда, поскольку $\tilde{T}$ и $\tilde{S}$ полиномиально ограничены при $\varkappa\to 0$, этим свойством обладает и $\tilde{T}\tilde{S}$, так что $\lim\limits_{\varkappa\downarrow 0,\ \varkappa\in C}\tilde{T}(\cdot+i\varkappa)\,\tilde{S}(\cdot+i\varkappa)$ существует и задает обобщенную функцию. Она совпадает с произведением TS, определенным нашей общей процедурой.

В примере 3 и T, и S сингулярны при $x=0$, но их фурье-образы ведут себя плохо не по всем направлениям. Это наводит на мысль выделить сингулярные направления, а также сингулярные точки.

Определение. Пусть $T\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Точка $\langle x, k\rangle\in\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ называется **регулярно направленной точкой** T, если существуют окрестность N точки x, окрестность M точки k и функция $g\in\mathscr{D}$, тождественно равная единице в N, такие, что при каждом $m>0$ найдется константа C_m, для которой

$$|S(\lambda p)| \equiv |\widehat{gT}(\lambda p)| \leqslant C_m(1+|\lambda|)^{-m} \tag{IX.57}$$

при всех $p\in M$, $\lambda\in\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Дополнение в $\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ множества регулярно направленных точек называется **волновым фронтом** T и обозначается $WF(T)$.

Итак, $\langle x, k\rangle$ — регулярно направленная точка, если локализация gT распределения T около x обладает фурье-образом, убывающим быстрее любой степени в некотором конусе около k (рис. IX.6).

Теорема IX.44. Пусть $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда

(a) $WF(T)$ — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

(b) Для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ множество

$$WF_x(T) \equiv \{k \mid \langle x, k\rangle \in WF(T)\}$$

есть конус, т. е. из $k \in WF_x(T)$ и $\lambda > 0$ следует, что $\lambda k \in WF_x(T)$.

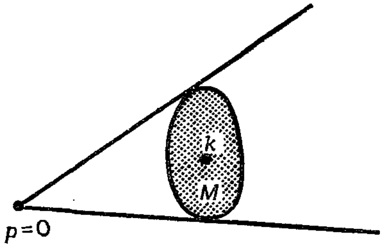

Рис. IX.6. Конус $\bigcup\limits_{\lambda>0} (\lambda M)$.

(c) $WF(T+S) \subset WF(T) \cup WF(S)$.

(d) Множество $\{x \mid WF_x(T) \neq \varnothing\}$ есть $\operatorname{sing\,supp}(T)$.

(e) Если $T \in \mathscr{S}'$ и носитель $\hat{T}$ лежит в замкнутом конусе C, то $WF_x(T) \subset C$ для каждого x.

(f) Пусть M — диффеоморфизм $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, т. е. C^∞-отображение с C^∞-обратным, и пусть $T \circ M$ — обобщенная функция

$$(T \circ M)(f) = T(g^{-1}(f \circ M^{-1})),$$

где g — детерминант якобиевой матрицы dM_x, состоящей из элементов $(dM_x)_{ij} = \partial M_i / \partial x_j$. Пусть отображение M_*: $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ определяется формулой

$$M_* \langle x, k\rangle = \langle M(x), dM_x^*(k)\rangle,$$

где dM_x^* — матрица, сопряженная к dM_x по отношению к евклидову внутреннему произведению на $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$WF(T \circ M) = M_*[WF(T)].$$

Доказательство. (a) — (c) немедленно следуют из определения $WF(T)$. Для случая линейного преобразования координат (f) доказывается легко, но в общем случае необходимы довольно тонкие рассуждения (задача 75). Для доказательства (d) следует показать, что x — регулярная точка тогда и только тогда, когда $\langle x, k\rangle$ — регулярное направление для всех $k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Утверждение «только тогда» очевидно, поэтому предположим, что $\langle x, k\rangle$ — регулярное направление для каждого k. Тогда для каждого k на единичной сфере $S = \{k \mid |k| = 1\}$ существуют такие g_k, N_k, M_k, что выполняется (IX.57). В силу компактности S можно выбрать $k_1, \ldots, k_m$ так, чтобы $\bigcup\limits_{i=1}^{m} M_{k_i} \supset S$. Пусть $g = \prod\limits_i g_{k_i}$ и $N = \bigcap N_{k_i}$.

По (IX.57) и приведенной ниже лемме $\widehat{gT}$ убывает быстрее любой степени в каждом множестве $\bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda\tilde{M}_{k_i}$, где $\tilde{M}_{k_i}$ — произвольное компактное подмножество M_{k_i}, а потому $\widehat{gT}$ обладает этим свойством и в $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Отсюда следует, что $\widehat{g^2T}=(2\pi)^{-n/2}\hat{g}*\widehat{gT}$ лежит в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и, значит, $g^2T\in C^\infty$. Поскольку g тождественно равна 1 вблизи x, то T бесконечно дифференцируема вблизи x.

Чтобы доказать (e), выберем положительную вблизи x функцию f, причем такую, что $\hat{f}$ имеет компактный носитель. Тогда $\widehat{fT}(k)=\hat{T}(g_k)$, где $g_k(l)=(2\pi)^{-n/2}\hat{f}(l-k)$. Если $k\notin C$, то для некоторого малого открытого множества U вблизи k имеем $\bar{U}\cap C=\varnothing$. Для всех больших λ также $\operatorname{supp} g_{\lambda l}\cap C=\varnothing$ при всех $l\in U$, а потому $\widehat{fT}(k)$ обращается в нуль на λU при больших λ. Теперь для заданного x возьмем такое $h\in\mathscr{D}$, что $hf\equiv 1$ вблизи x. Согласно лемме, $\widehat{hfT}$ убывает быстрее любой степени в $\bigcup\limits_{\lambda>0}\lambda\tilde{U}$, где $\tilde{U}$ — некоторая компактная окрестность k в U. ∎

Следующая лемма завершает доказательство теоремы IX.44.

Лемма. Пусть M — открытое множество, отделенное от 0, и предположим, что $S\in O_M^n$ удовлетворяет (IX.57) при всех $\lambda\in\mathbb{R}_+$, $k\in M$. Пусть $\tilde{M}$ — произвольное компактное подмножество в M, и пусть $h\in\mathscr{S}$. Тогда $h*S$ удовлетворяет (IX.57) для всех $k\in\tilde{M}$, $\lambda\in\mathbb{R}_+$.

Доказательство. Пусть $U=\bigcup\limits_{\lambda>0}\lambda M$. Разобьем интеграл на два слагаемых:

$$(S*h)(\lambda k)=\int\limits_{l\in U} S(l)\,h(\lambda k-l)\,dl+\int\limits_{l\notin U} S(l)\,h(\lambda k-l)\,dl.$$

На U выполняется неравенство $|S(l)|\leqslant C_m(1+|l|)^{-m}$ для любого m, а на всем $\mathbb{R}^n$ для всех j — неравенство $|h(l)|\leqslant D_j(1+|l|)^{-j}$. Теперь

$$|\lambda k|+1\leqslant|\lambda k-l|+|l|+1\leqslant(|\lambda k-l|+1)(|l|+1),$$

так что для любого k

$$\left|\int\limits_{l\in U} S(l)\,h(\lambda k-l)\,dl\right|\leqslant\int D_jC_{j+n+1}(|\lambda k|+1)^{-j}(|l|+1)^{-n-1}\,dl\leqslant$$

$$\leqslant(\text{const})(|\lambda k|+1)^{-j}.$$

Далее, пусть $\tilde{U}=\bigcup\limits_{\lambda>0}\lambda\tilde{M}$, и пусть $\alpha=\sup\{l\cdot k\,|\,|l|=|k|=1,$ $l\notin U,\ k\in\tilde{U}\}$. Тогда, поскольку $\tilde{M}$ компактно, а M открыто, $\alpha<1$. Итак, при $l\notin U,\ k\in\tilde{U}$

$$|l-k|^2\geqslant|l|^2+|k|^2-2\alpha|l||k|\geqslant(1-\alpha)(|l|^2+|k|^2)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}(1-\alpha)(|l|+|k|)^2,$$

поэтому $|l-k|\geqslant\beta(|l|+|k|)$ для подходящего $\beta>0$. Далее, так как $S\in O_M^{\prime}$, то $|T(k)|\leqslant E(1+|k|^p)$ для подходящего p и $|h(l)|\leqslant$ $\leqslant D_{p+n+1+m}(1+|l|)^{-(p+n+1+m)}$. Следовательно, для $k\in\tilde{U}$

$$\left|\int\limits_{l\notin U}S(l)\,h(\lambda k-l)\,dl\right|\leqslant$$
$$\leqslant ED_{p+n+1+m}\int(1+|\lambda k|+|l|)^{-p-n-m-1}(1+|l|)^p\,dl\leqslant$$
$$\leqslant\text{const}\,(|\lambda k|+1)^{-m}.$$

Итак, при $k\in\tilde{U}$

$$|(S*h)(\lambda k)|\leqslant\text{const}\,(1+|\lambda k|)^{-m}.$$

Поскольку $\inf\{|k|\,|\,k\in\tilde{M}\}>0$, лемма доказана. ∎

Пример 2 еще раз. $WF(\delta)=\{\langle 0,\lambda\rangle\,|\,\lambda\neq 0\}$.

Пример 3 еще раз. $WF(\mathscr{P}(1/x)-i\pi\delta(x))=\{\langle 0,\lambda\rangle\,|\,\lambda>0\}$.

Даже если $\langle x,k\rangle\in WF(T)$, то $\widehat{gT}$ полиномиально ограничено в направлении k, поскольку gT — распределение умеренного роста. Итак, в «хороших» направлениях $\widehat{gT}$ падает быстрее любого полинома, а в «плохих» направлениях $\widehat{gT}$ полиномиально ограничено. Следовательно, чтобы произвольный интеграл типа $\int\widehat{gT}(l)\,\widehat{gS}(k-l)\,dl$ сходился, достаточно, чтобы каждое направление было хорошим либо для T, либо для S. Это приводит к следующему результату, являющемуся первой основной теоремой этого раздела.

Теорема IX.45. Пусть T и S — обобщенные функции. Предположим, что множество

$$WF(T)\oplus WF(S)\equiv\{\langle x,k_1+k_2\rangle\,|\,\langle x,k_1\rangle\in WF(T);\ \langle x,k_2\rangle\in WF(S)\}$$

не содержит ни одного элемента вида $\langle x,0\rangle$. Тогда произведение TS существует и

$$WF(TS)\subset WF(T)\cup WF(S)\cup[WF(T)\oplus WF(S)]. \qquad \text{(IX.58)}$$

Доказательство. По определению, нужно задать произведение только локально. Итак, для фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$ пусть $\Gamma_1 = WF_x(T)$, $\Gamma_2 = WF_x(S)$. По предположению $0 \notin \Gamma_1 + \Gamma_2$, так что в силу замкнутости Γ_1 и Γ_2 имеем $\sup\{k_1 \cdot k_2 \mid k_1 \in \tilde{\Gamma}_1, -k_2 \in \tilde{\Gamma}_2\} < 1$, где через $\tilde{C}$ для любого конуса C обозначено множество $\{x \in C \mid |x| = 1\}$. Для любых замкнутых конусов K_1, K_2 в $\{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$, таких, что $\tilde{\Gamma}_1 \subset \tilde{K}_1^{\text{int}}$, $\tilde{\Gamma}_2 \subset \tilde{K}_2^{\text{int}}$ (int обозначает «внутренность»), можно, в силу соображений компактности, найти f, тождественно равную единице вблизи x и такую, что

$$|\widehat{fT}(k)| \leqslant c_j (1 + |k|)^{-j} \quad \text{при всех } k \notin K_1 \text{ и всех } j, \tag{IX.59}$$

$$|\widehat{fS}(k)| \leqslant d_j (1 + |k|)^{-j} \quad \text{при всех } k \notin K_2 \text{ и всех } j. \tag{IX.60}$$

Более того, поскольку fT и fS обладают компактными носителями, существуют m и D, такие, что

$$|\widehat{fS}(k)| + |\widehat{fT}(k)| \leqslant D (1 + |k|)^m \quad \text{при всех } k. \tag{IX.61}$$

Предположим, что K_1, K_2 выбраны столь «близкими» к Γ_1, Γ_2, что справедливо неравенство

$$\beta = \sup\{k_1 \cdot k_2 \mid k_1 \in \tilde{K}_1, -k_2 \in \tilde{K}_2\} < 1.$$

Это всегда возможно, поскольку соответствующая точная верхняя грань с заменой K_i на Γ_i не превосходит 1.

Докажем, что интеграл

$$I(k) = \int\limits_{l_2 = k - l_1} \widehat{fS}(l_1)\, \widehat{fT}(l_2)\, dl_1$$

абсолютно сходится, полиномиально ограничен и убывает быстрее любой степени в окрестности любого направления $k \notin K_1 \cup K_2 \cup (K_1 + K_2)$. Отсюда, в силу части (e) теоремы IX.43, будет следовать существование произведения, а также включение $WF_x(TS) \subset K_1 \cup K_2 \cup (K_1 + K_2)$. Так как K_i — произвольно малый конус вокруг Γ_i, мы получим тогда, что $WF_x(TS) \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup (\Gamma_1 + \Gamma_2)$, что завершает доказательство теоремы.

Представим $I(k)$ в виде суммы четырех интегралов:

$$I(k) = I_1(k) + I_2(k) + I_3(k) + I_4(k)$$

по четырем областям $l_1 \in K_1$, $l_2 \in K_2$; $l_1 \in K_1$, $l_2 \notin K_2$; $l_1 \notin K_1$, $l_2 \in K_2$; $l_1 \notin K_1$, $l_2 \notin K_2$. Ниже будет часто применяться неравенство из предыдущей леммы:

$$|x| + 1 \leqslant (|y| + 1)(|x - y| + 1). \tag{IX.62}$$

Согласно (IX.59), (IX.60) и (IX.62),

$$|I_4(k)| \leqslant c_j d_{n+j+1} \int (|l_1|+1)^{-n-j-1} (|l_1-k|+1)^{-j} dl_1 \leqslant$$
$$\leqslant (|k|+1)^{-j} \left[c_j d_{n+j+1} \int (|l_1|+1)^{-n-1} dl_1 \right],$$

так что интеграл I_4 сходится и убывает во всех направлениях быстрее любой степени.

Далее, $I_1(k)=0$ всюду, за исключением $k \in K_1+K_2$, поэтому чтобы оценить вклад I_1, требуется доказать лишь сходимость этого интеграла и его полиномиальную ограниченность, так как включение $WF(I_1) \subset K_1+K_2$ выполняется автоматически. Если $l_1 \in K_1$, $l_2 \in K_2$, то

$$|l_1+l_2|^2 \geqslant \frac{1}{2}(1-\beta)(|l_1|+|l_2|)^2.$$

Итак, при фиксированном k в интеграл I_1 входят только такие l_1, l_2, для которых $|l_1|$, $|l_2| \leqslant 2(1-\beta)^{-1}|k|$. Применяя (IX.61), видим, что $I_1(k)$ сходится и

$$I_1(k) \leqslant \int\limits_{|l_1| \leqslant 2(1-\beta)^{-1}|k|} D^2 [1+2(1-\beta)^{-1}|k|]^{2m} dl_1 =$$
$$= D^2 [1+2(1-\beta)^{-1}|k|]^{2m+n} \times (\text{объем единичного шара}).$$

Рассмотрим наконец I_2 (доказательство для I_3 аналогично). По (IX.61) и (IX.60)

$$I_2(k) \leqslant D d_{j+m+n+1} \int\limits_{k-l_2 \in K_1} (1+|k-l_2|)^m (1+|l_2|)^{-j-m-n-1} dl_2.$$

Если проигнорировать условие $k-l_2 \in K_1$ и применить неравенство $|k-l_2| \leqslant |k|+|l_2|$, то видно, что интеграл сходится и полиномиально ограничен. Но мы утверждаем даже, что $I_2(k_0)$ полиномиально убывает при $k_0 \notin K_1$, так что $WF(I_2) \subset K_1$. Действительно, если $k_0 \notin K_1$, выберем конус K_3 вокруг k_0 так, чтобы $\sup\{k_1 \cdot k_2 \mid k_1 \in \tilde{K}_1,\ k_2 \in \tilde{K}_3\} = \gamma < 1$. Тогда для $k \in K_3$, $k-l_2 \in K_1$ получим $|l_2| \geqslant {}^1/_2(1-\gamma)(|k|+|k-l_2|)$, а потому при $k \in K_3$

$$I_2(k) \leqslant D d_{j+m+n+1} \int (1+|l_1|)^m \left[1+\frac{1}{2}(1-\gamma)(|k|+\right.$$
$$\left. +|l_1|)\right]^{-j-m-n-1} dl_1 \leqslant \text{const}\,(1+|k|)^{-j}.$$

Итак, $WF(I_2) \subset K_1$. По теореме IX.44(c)

$$WF(I) \subset \bigcup_{j=1}^{4} WF(I_j) \subset (K_1+K_2) \cup K_1 \cup K_2. \ \blacksquare$$

Пример 3 в третий раз. $WF(\mathscr{P}(1/x)-i\pi\delta(x))=\{\langle 0,\lambda\rangle\mid\lambda>0\}$. Следовательно, по теореме IX.45 существуют все степени $\mathscr{P}(1/x)-i\pi\delta(x)$.

Пример 5. Пусть x_1, x_2 — координаты в $\mathbb{R}^2$, и пусть $\delta(x_1)$, $\delta(x_2)$ определены обычным образом, например

$$\int f(x_1, x_2)\,\delta(x_1)\,dx_1\,dx_2=\int f(0, x_2)\,dx_2.$$

Тогда

$$WF(\delta(x_1))=\{\langle 0, x_2;\ \lambda, 0\rangle\mid x_2\in\mathbb{R},\ \lambda\neq 0\},$$
$$WF(\delta(x_2))=\{\langle x_1, 0;\ 0, \lambda\rangle\mid x_1\in\mathbb{R},\ \lambda\neq 0\}.$$

По предыдущей теореме $\delta(x_1)\,\delta(x_2)$ существует и, очевидно, есть $\delta(x_1, x_2)$ — обобщенная функция, переводящая f в $f(0)$.

Чтобы воспользоваться развитой нами техникой, необходим метод вычисления волновых фронтов. Рассмотрим сначала один частный пример, который затем обобщим настолько, чтобы это позволило вычислить волновой фронт двухточечной функции $\Delta_+(x; m^2)$ свободного квантового поля.

Пример 6. Пусть T_α — фурье-образ функции $(2\pi)^{-1/2}(1+|k|^2)^\alpha$ в $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Если α равно целому положительному n, то носитель

$$T_n=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\delta^{(2m)}(x),$$

очевидно, сосредоточен в нуле, причем $WF(T_n)=\{\langle 0,\lambda\rangle\mid\lambda\neq 0\}$. Можно также явно, посредством интегрирования по контуру, вычислить T_{-1}:

$$T_{-1}(x)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}(1+k^2)^{-1}\,dk=\frac{1}{2}e^{-|x|}$$

и вообще все T_{-n}. Множество $\{0\}$ не является носителем T_{-1}, однако является его сингулярным носителем. Это наводит на мысль, что $\{0\}$ — сингулярный носитель T_α при произвольном α. Как это можно показать? Если $T_\alpha\in C^\infty$ вне нуля, то можно ожидать, что *глобально* x^nT_α становится все более гладким с ростом n. Более того, если можно показать, что для любого m существует n, при котором $x^nT_\alpha\in C^m(\mathbb{R})$, то, очевидно, T_α бесконечно дифференцируема вне нуля. Но

$$\widehat{x^nT_\alpha}=\left(i\frac{d}{dk}\right)^n\hat{T}_\alpha\equiv f_{\alpha,n},$$

откуда, проводя явное вычисление, получаем

$$|f_{\alpha,n}(k)|\leqslant C(1+k^2)^{\alpha-n/2}.$$

Итак, для любых фиксированных α и m можно найти такое n, что $k^m f_{\alpha,n}(k) \in L^1$ (например, $n > m + 2\alpha + 1/2$) и потому T_α принадлежит C^∞ вне $x = 0$. Наконец, ясно, что распределения T_α не являются гладкими около нуля. Действительно, по смыслу теоремы Пэли—Винера и в связи с тем, что функция $(1+k^2)^\alpha$ аналитична в полосе $|\operatorname{Im} k| < 1$, распределение T_α и все его производные убывают экспоненциально. Если бы $T_\alpha \in C^\infty$ в нуле, то T_α и $\hat{T}_\alpha$ принадлежали бы $\mathcal{S}$.

В предыдущих рассуждениях было важно то, что все производные $\hat{T}_\alpha$ убывают все быстрее и быстрее, т. е. то, что это распределение ведет себя не так, как $x^{-n} \sin x$, производные которого асимптотически суть $\pm x^{-n} \sin x$ или $\pm x^{-n} \cos x$ на бесконечности. В этой связи введем такое

Определение. C^∞-функция F на $\mathbb{R}^n$ называется **символом порядка** k на $\{0\} \times \mathbb{R}^n$, если для всех $\alpha \in I_+^n$ существует такая константа d_α, что

$$|(D^\alpha F)(x)| \leqslant d_\alpha (1 + |x|)^{(k - |\alpha|)}.$$

Обобщенная функция F на $\mathbb{R}^n$ называется **приближенным символом порядка** k на $\{0\} \times \mathbb{R}^n$, если для любого $\alpha \in I_+^n$ существуют компактное множество S_α и такая постоянная d_α, что F вне S_α равна функции из $C^{|\alpha|}$, удовлетворяющей неравенству

$$|(D^\alpha F)(x)| \leqslant d_\alpha (1 + |x|)^{(k - |\alpha|)}.$$

Условие «на $\{0\} \times \mathbb{R}^n$» добавлено потому, что это определение сейчас станет частным случаем другого, более общего. А пока мы будем опускать это условие.

Теорема IX.46. Пусть F — приближенный символ порядка k. Пусть $T = \hat{F}$. Тогда сингулярный носитель T или пуст, или равен $\{\langle 0, \ldots, 0 \rangle\}$.

Доказательство, основанное на идеях примера 6, мы оставляем читателю (задача 66). ∎

Предыдущая теорема не покрывает многих примеров, представляющих интерес. Например, напомним, что $\Delta_+(x; m^2)$ имеет вид

$$\Delta_+(x; m^2) = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int \exp(i\psi(x, \mathbf{k})) \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}},$$

где $\psi(x, \mathbf{k}) = -x_0 \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{k}$. Это чем-то похоже на примеры функций, удовлетворяющих условиям теоремы IX.46, однако фазовый множитель сложнее, чем $e^{ik \cdot x}$, а переменных интегрирования меньше, чем в преобразовании Фурье. Введем поэтому более широкий класс подходящих функций и распределений.

Определение. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Функция $a(\cdot, \cdot)\colon \Omega\times\mathbb{R}^s \to \mathbb{C}$ называется **символом порядка** m на $\Omega\times\mathbb{R}^s$, если для каждого компакта $K\subset\Omega$ и любых $\alpha\in I_+^n$, $\beta\in I_+^s$ существует такая константа $d_{\alpha,\beta,K}$, что

$$|(D_x^\alpha D_\theta^\beta a)(x, \theta)| \leqslant d_{\alpha,\beta,K}(1+|\theta|)^{m-|\beta|} \tag{IX.63}$$

при всех $x\in K$, $\theta\in\mathbb{R}^s$. Семейство всех символов порядка m с полунормами

$$\|a\|_{\alpha,\beta,K} = \sup_{x\in K,\, \theta}(1+|\theta|)^{|\beta|-m}|(D_x^\alpha D_\theta^\beta a)(x, \theta)|$$

будет обозначаться $\mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$.

Будем говорить, что $a(\cdot, \cdot)\colon \Omega\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{C}$ есть **асимптотический символ порядка** m на $\Omega\times\mathbb{R}^s$, если $a=a_1+a_2$, где $a_1\in\mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$ и где (i) a_2 имеет компактный носитель по переменным θ и (ii) отображение $x\mapsto a_2(x, \cdot)$ принадлежит C^∞ как отображение из Ω в $L^\infty(\mathbb{R}^s)$.

Определение. **Фазовой функцией** на $\Omega\times\mathbb{R}^s$ называется такая функция $\varphi\colon \Omega\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}$, что

(i) φ непрерывна и однородна степени 1 по θ, т. е. $\varphi(x, \lambda\theta) = \lambda\varphi(x, \theta)$ для всех $\langle x, \theta\rangle\in\Omega\times\mathbb{R}^s$ и $\lambda\geqslant 0$;

(ii) φ принадлежит C^∞ на $\Omega\times(\mathbb{R}^s\setminus\{0\})$;

(iii) φ не имеет критических точек в $\Omega\times(\mathbb{R}^s\setminus\{0\})$, т. е. $(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^s)$-значная функция $\langle \mathrm{grad}_x\varphi, \mathrm{grad}_\theta\varphi\rangle$ никогда не обращается в нуль.

Определение. **Осцилляторный интеграл на** $\Omega\times\mathbb{R}^s$ есть формальное выражение вида

$$\int\limits_{\theta\in\mathbb{R}^s} e^{i\varphi(x,\theta)}a(x, \theta)\,d\theta,$$

где φ — фазовая функция, а a — асимптотический символ.

Пример 7. Мы можем написать

$$\Delta_+(x; m^2) = \frac{i}{2(2\pi)^3}\int e^{i\varphi(x,\theta)}a(x, \theta; m)\,d\theta,$$

где

$$\varphi(x, \theta) = -x_0|\theta| + \mathbf{x}\cdot\theta,$$
$$a(x, \theta; m) = (m^2+|\theta|^2)^{-1/2}\exp(-ix_0[(m^2+|\theta|^2)^{1/2}-|\theta|]).$$

Пусть $\Omega=\mathbb{R}^4$. Очевидно, что φ — фазовая функция, поскольку $\partial\varphi/\partial x_0 = |\theta|\neq 0$, если $\langle x, \theta\rangle\in\mathbb{R}^4\times(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$. Функция a не принадлежит C^∞, поскольку $|\theta|$ не является гладкой около нуля, но, применяя неравенство $|\sqrt{m^2+\theta^2}-|\theta||\leqslant C(1+|\theta|)^{-1}$, нетрудно доказать, что a — асимптотический символ порядка -1 (задача 68). Покажем, например, что $\partial a/\partial\theta_i$ убывает как $|\theta|^{-2}$ (при больших θ). Пусть $f=(m^2+\theta^2)^{-1/2}$ и $g=[(m^2+|\theta|^2)^{1/2}-|\theta|]$. Тогда

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\theta_i}\right|=\left|\frac{\theta_i}{\theta}\right|\left|\frac{\theta}{(m^2+\theta^2)^{-3/2}}\right|\leqslant c\,|\theta|^{-2} \text{ для больших } \theta$$

и

$$\left|\frac{\partial g}{\partial\theta_i}\right|=\left|\frac{\theta_i}{\theta}\right|\left|[(m^2+|\theta|^2)^{-1/2}\,\theta-1]\right|\leqslant[(1+m^2|\theta|^{-2})^{-1/2}-1]\leqslant c\,|\theta|^{-2}.$$

Таким образом,

$$\left|\frac{\partial a}{\partial\theta_i}\right|\leqslant\left|\frac{\partial f}{\partial\theta_i}\right|+\left|x_0 f\frac{\partial g}{\partial\theta_i}\right|\leqslant c\,|\theta|^{-2}.$$

Поскольку a — асимптотический символ, то Δ_+ — осцилляторный интеграл.

Мы держим курс на общую теорему, утверждающую, что любой осцилляторный интеграл естественным образом определяет некоторое распределение, и описывающую явным образом волновой фронт так определенного распределения. Сначала без доказательства отметим два простых факта (задача 69).

Лемма 1. C^∞-функции с компактными носителями в $\Omega\times\mathbb{R}^s$ плотны в $\mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$ в топологии $\mathrm{Sym}(\Omega, s, m')$, если только $m'>m$. В частности, отображение из множества функций с компактным носителем в некоторое топологическое пространство имеет не более одного непрерывного продолжения на $\bigcup_{m<\infty}\mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$, которое непрерывно на каждом $\mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$ в его естественной топологии.

Лемма 2. Пусть $a(x, \theta)$ — функция с компактным носителем в $\Omega\times\mathbb{R}^s$, так что $x\longmapsto a(x, \theta)$ принадлежит C^∞ как L^∞-значная функция на Ω. Тогда для любой фазовой функции интеграл $\int a(x, \theta)\,e^{i\varphi(x,\theta)}d\theta$ принадлежит C^∞ по x.

Для основной теоремы нам потребуется ввести еще одно понятие и изучить его свойства.

Определение. Пусть $\varphi(x, \theta)$ — фазовая функция на $\Omega\times\mathbb{R}^s$, где Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$M(\varphi)=\{\langle x, \theta\rangle\in\Omega\times\mathbb{R}^s\setminus\{0\}\mid(\nabla_\theta\varphi)(x, \theta)=0\},$$
$$SP(\varphi)=\{\langle x, (\nabla_x\varphi)(x, \theta)\rangle\mid\langle x, \theta\rangle\in M(\varphi)\}\subset\Omega\times\mathbb{R}^n.$$

$SP(\varphi)$ называется **многообразием стационарной фазы для** φ.

Лемма 3. *$SP(\varphi)$ — замкнутое* подмножество в $\Omega\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, и если $\langle x, k\rangle \in SP(\varphi)$, то $\langle x, \lambda k\rangle \in SP(\varphi)$ для всех $\lambda > 0$.

Доказательство. Поскольку φ — фазовая функция, она не имеет критических точек, а потому если $\langle x, \theta\rangle \in M(\varphi)$, то $\nabla_x\varphi \neq 0$. Итак, $SP(\varphi) \subset \Omega\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. Если $\langle x, \theta\rangle \in SP(\varphi)$, то и $\langle x, \lambda\theta\rangle \in \in SP(\varphi)$, так как φ однородна степени 1 и, значит, $(\nabla_x\varphi)(x, \lambda\theta) = \lambda(\nabla_x\varphi)(x, \theta)$. Наконец, $M(\varphi)$ замкнуто как множество нулей непрерывной функции. Легко убедиться, что и множество $\{x \mid M_x(\varphi) \neq \varnothing\}$ замкнуто. Поскольку функция $\nabla_x\varphi$ непрерывна, множество $SP(\varphi)$ замкнуто как график непрерывной функции на замкнутом множестве. ▌

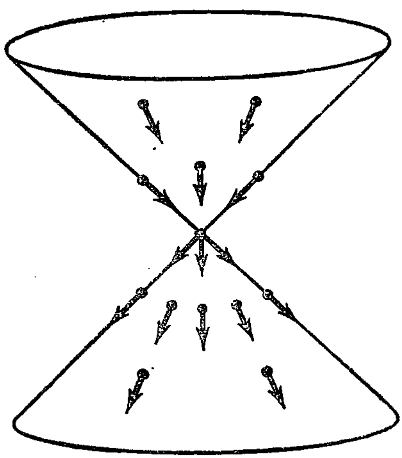

Рис. IX.7. Множество $SP(\varphi)$.

Пример 7, продолжение. $\varphi(x, \boldsymbol{\theta}) = -x_0|\boldsymbol{\theta}| + \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}$. Таким образом,

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}}\varphi = -x_0\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}|^{-1} + \mathbf{x},$$

откуда

$$M(\varphi) = \{\langle x, \boldsymbol{\theta}\rangle \mid x = 0\} \cup \{\langle x, \boldsymbol{\theta}\rangle \mid |\mathbf{x}| = |x_0| \neq 0;\ \boldsymbol{\theta} = \lambda\mathbf{x}/x_0,\ \text{где } \lambda > 0\}.$$

Поскольку $\nabla_x\varphi(x, \boldsymbol{\theta}) = \langle -|\boldsymbol{\theta}|, \boldsymbol{\theta}\rangle$, заключаем, что

$$SP(\varphi) = \{\langle 0, 0;\ -|\boldsymbol{\theta}|, \boldsymbol{\theta}\rangle \mid \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3\} \cup$$
$$\cup \{\langle \pm|\mathbf{x}|, \mathbf{x};\ -\lambda|\mathbf{x}|, \mp\lambda\mathbf{x}\rangle \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ и } \lambda > 0\}.$$

Итак, множество $\{x \mid SP_x(\varphi) \neq \varnothing\}$ есть световой конус $\{x \mid x_0 = \pm|\mathbf{x}|\}$, а $SP(\varphi)$ — семейство векторов, касательных к световому конусу, свето-подобных (т. е. $x\cdot\tilde{x} = 0$) и имеющих отрицательную временнýю компоненту (см. рис. IX.7).

Теперь мы переходим ко второй основной теореме этого раздела.

Теорема IX.47. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — фиксированное открытое множество, и пусть $\varphi(x, \theta)$ — фиксированная фазовая функция на $\Omega\times\mathbb{R}^s$. Тогда каждому асимптотическому символу a на $\Omega\times\mathbb{R}^s$ можно сопоставить такую обобщенную функцию $D_\varphi(a)$ на Ω, что

(a) Отображение $a \mapsto D_\varphi(a)$ линейно.

(b) Если носитель a по переменной θ компактен, то $D_\varphi(a)$ есть C^∞-функция, равная

$$\int\limits_{\theta\in\mathbb{R}^s} a(x,\theta)\, e^{i\varphi(x,\theta)}\, d\theta.$$

(c) Сужение $D_\varphi(\cdot)$ на множество $\mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$ есть непрерывная функция из $\mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$ в $\mathcal{D}'_\Omega$.

D_φ однозначно определяется условиями (a)—(c) и, более того,

(d) Для любого асимптотического символа a множество $WF(D_\varphi(a))$ принадлежит $SP(\varphi)$ — многообразию стационарной фазы для φ.

Распределение $D_\varphi(a)$ записывается в виде формального выражения

$$D_\varphi(a) = \int a(x,\theta)\, e^{i\varphi(x,\theta)}\, d\theta.$$

Основной элемент доказательства — развитие и применение процедуры «интегрирования по частям», обобщающей равенство $-ix^{-1}(d/dk)\,e^{ikx} = e^{ikx}$, которым мы пользовались при анализе примера 6.

Лемма 4. Пусть φ — фазовая функция на $\Omega\times\mathbb{R}^s$, где $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Тогда существуют функции $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_n$ и c на $\Omega\times\mathbb{R}^s$, такие, что

(1) $a_i \in \mathrm{Sym}(\Omega, s, 0)$; $i = 1, \ldots, s$;

(2) $b_j \in \mathrm{Sym}(\Omega, s, -1)$; $j = 1, \ldots, n$;

(3) $c \in \mathrm{Sym}(\Omega, s, -1)$;

(4) ${}^tVe^{i\varphi} = e^{i\varphi}$,

где V — дифференциальный оператор

$$V = \sum_{j=1}^{s} a_j \frac{\partial}{\partial\theta_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial}{\partial x_k} + c,$$

а ${}^tV$ — его сопряженный

$${}^tVf = -\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial}{\partial\theta_j}(a_j f) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(b_k f) + cf.$$

Доказательство. Поскольку φ не имеет критических точек на $\Omega\times(\mathbb{R}^s\setminus\{0\})$, функция $\eta(x,\theta)$, заданная равенством

$$\eta(x,\theta) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^2 + |\theta|^2 \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}\right)^2,$$

на $\Omega\times(\mathbb{R}^s\setminus\{0\})$ не обращается в нуль. Более того, в силу однородности φ по θ порядка 1, η — однородная функция порядка 2, т. е. $\eta(x, \lambda\theta)=\lambda^2\eta(x, \theta)$. Пусть $\chi(\theta)$ — функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^s)$, тождественно равная единице вблизи $\theta=0$, и пусть

$$\tilde{a}_j=-i(1-\chi)\eta^{-1}|\theta|^2\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j},$$
$$\tilde{b}_k=-i(1-\chi)\eta^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j},$$
$$\tilde{c}=\chi.$$

Положим $U=\sum_j\tilde{a}_j\,\partial/\partial\theta_j+\sum_k\tilde{b}_k\,\partial/\partial x_k+\tilde{c}$. Тогда $Ue^{i\varphi}=-i(1-\chi)\times\times\eta^{-1}(\eta ie^{i\varphi})+\chi e^{i\varphi}=e^{i\varphi}$. Более того, $\tilde{a}_j$, $\tilde{b}_k$ — функции из C^∞, однородные по θ вблизи $\theta=\infty$ (например, $\tilde{a}_j(\lambda\theta, x)=\tilde{a}_j(\theta, x)$, если $\lambda>1$, а θ больше радиуса $\operatorname{supp}\chi$). В результате производные от $\tilde{a}_j$ и $\tilde{b}_k$ однородны вблизи бесконечности как раз так, как это нужно для того, чтобы $\tilde{a}_j\in\operatorname{Sym}(\Omega, s, 0)$ и $\tilde{b}_k\in\in\operatorname{Sym}(\Omega, s, -1)$. Очевидно, $\tilde{c}\in\operatorname{Sym}(\Omega, s, -1)$. Полагая $a_j=-\tilde{a}_j$, $b_j=-\tilde{b}_j$, $c=\tilde{c}-\sum_{j=1}^{s}\partial a_j/\partial\theta_j-\sum_{k=1}^{n}\partial b_k/\partial x_k$, завершаем доказательство леммы. ∎

Доказательство теоремы IX.47. Пусть a — асимптотический символ. Напишем $a=a_1+a_2$, где a_1 имеет компактный носитель, а a_2 — символ. Тогда $D_\varphi(a_1)$ определяется по (b) и принадлежит C^∞ по лемме 2. Более того, если можно построить $D_\varphi(a_2)$, удовлетворяющую (b) и (c), то по лемме 1 она определена однозначно.

Мы утверждаем, что тем самым осталось показать, что $D_\varphi(a)$, определенная по (b), непрерывно продолжается на $\bigcup_{m>0}\operatorname{Sym}(\Omega, s, m)$ (в смысле (c)) и что для любого символа a имеем $WF(D_\varphi(a))\subset\subset SP(\varphi)$. Действительно, если $WF(T)=\varnothing$, то $WF(T+S)\subset WF(S)$ и $WF(S)=WF(T+S-T)\subset WF(T+S)$ и поэтому из $WF(D_\varphi(a_1))=\varnothing$ следует, что $WF(D_\varphi(a))=WF(D_\varphi(a_2))\subset SP(\varphi)$.

Пусть теперь a имеет компактный носитель в $\Omega\times\mathbb{R}^s$ и принадлежит C^∞. Пусть $D_\varphi(a)$ — обобщенная функция, заданная C^∞-функцией $\int a(x, \theta)e^{i\varphi(x, \theta)}\,d\theta$. Выберем $f\in\mathcal{D}_\Omega$. Тогда для любого целого p

$$\begin{aligned}[D_\varphi(a)](f)&=\int a(x, \theta)e^{i\varphi(x, \theta)}f(x)\,dx\,d\theta=\\&=\int[({}^tV)^pe^{i\varphi(x, \theta)}]\,a(x, \theta)f(x)\,dx\,d\theta=\\&=\int e^{i\varphi(x, \theta)}V^p(a(x, \theta)f(x))\,dx\,d\theta,\end{aligned}$$

так что

$$|[D_\varphi(a)](f)| \leqslant \int |V^p(a(x,\theta) f(x))|\, dx\, d\theta.$$

Теперь легко видеть, что $\langle a, f\rangle \mapsto af$ — непрерывное билинейное отображение $\mathrm{Sym}(\Omega, s, m) \times C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$ и что V — непрерывное отображение $\mathrm{Sym}(\Omega, s, m) \longrightarrow \mathrm{Sym}(\Omega, s, m-1)$ (задачи 70, 71). Итак, $V^p(a(x,\theta) f(x))$ — символ порядка $m-p$ с компактным носителем и, в частности,

$$|V^p(a(x,\theta) f(x))| \leqslant |||a|||_p \|f\|_p (1+|\theta|)^{m-p}$$

для подходящих норм $|||\cdot|||_p$ и $\|\cdot\|_p$ на $\mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$ и $C_0^\infty(K)$ ($\operatorname{supp} f \subset K \subset \Omega$; K компактно). Фиксируя $p > n+m$, найдем

$$|D_\varphi(a)(f)| \leqslant C_{p,K} |||a|||_p \|f\|_p,$$

где $C_{p,K}$ — постоянная, зависящая лишь от K и p. Итак, отображение $a \mapsto D_\varphi(a)$ из $C_0^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^s)$ в $\mathcal{D}'_\Omega$ продолжается до непрерывного отображения из $\mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$ в $\mathcal{D}'_\Omega$.

Теперь остается только доказать, что $WF(D_\varphi(a)) \subset SP(\varphi)$ для любого $a \in \mathrm{Sym}(\Omega, s, m)$. Чтобы сделать это, следует еще немного усовершенствовать нашу технику.

Лемма 5. Пусть M — открытое множество в Ω, а C — конус в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, причем множество $M \times C$ не пересекается с $SP(\varphi)$. Тогда существуют функции $A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_n$ и D на $M \times C \times (\mathbb{R}^s \setminus \{0\})$, такие, что

(a) A_i, B_j и D принадлежат C^∞ на $M \times C \times (\mathbb{R}^s \setminus \{0\})$ и однородны степени -1 *совместно* по $\langle k, \theta\rangle$, т. е. $A_i(x, \lambda k, \lambda\theta) = \lambda^{-1} A_i(x, k, \theta)$, и т. д.

(b) ${}^tV_k \exp(i\tilde{\varphi}) = \exp(i\tilde{\varphi})$, где

$$V_k = \sum_{j=1}^{s} A_j(x, k, \theta)\, |\theta| \frac{\partial}{\partial\theta_j} + \sum_{l=1}^{n} B_l(x, k, \theta) \frac{\partial}{\partial x_l} + D$$

и

$$\tilde{\varphi}(x, k, \theta) = \varphi(x, \theta) - k \cdot x.$$

Доказательство. Пусть

$$\tilde{\eta}(x, \theta, k) = |\theta|^2 \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}\right)^2 + \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_l} - k_l\right)^2.$$

Тогда, в силу определения $SP(\varphi)$, функция $\tilde{\eta}$ не обращается в нуль на $M\times[C\times(\mathbb{R}^s\setminus\{0\})]$. Положим, по определению,

$$A_j=+i\tilde{\eta}^{-1}|\theta|\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j},$$
$$B_l=+i\tilde{\eta}^{-1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}-k_l\right),$$
$$C=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial(|\theta|A_j)}{\partial\theta_j}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial B_k}{\partial x_k}.$$

Поскольку $\tilde{\eta}$ на $M\times C\times(\mathbb{R}^s\setminus\{0\})$ не обращается в нуль и однородна степени 2 по $\langle k, \theta\rangle$, завершаем доказательство так же, как в случае леммы 3. ∎

Окончание доказательства теоремы IX.47. Предположим, что $\langle x_0, k_0\rangle\notin SP(\varphi)$. Выберем окрестность $M\times C$ точки $\langle x_0, k_0\rangle$, как в лемме 5. Пусть χ — некоторая $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$-функция с носителем в M, тождественно равная единице вблизи x_0. Для каждой пары целых положительных m, n найдем непрерывную норму $|||\cdot|||_{(m,n)}$ на $\operatorname{Sym}(\Omega, s, m)$, такую, что

$$|\widehat{\chi D_\varphi(a)}(k)|\leqslant|||a|||_{(m,n)}(1+|k|)^{-n}\quad\text{для всех } k\in C \tag{IX.64}$$

при любом $a\in C_0^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^s)$. По уже доказанной непрерывности, (IX.64) продолжается на все $a\in\operatorname{Sym}(\Omega, s, m)$, и тем самым доказано, что $\langle x_0, k_0\rangle\notin WF(D_\varphi(a))$. Выберем функцию $\psi(\theta)$ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^s)$, тождественно равную единице при $|\theta|<1$ и тождественно равную нулю при $|\theta|>2$. Представим a как $a=\psi a+(1-\psi)a$. По лемме 2, $\widehat{\chi D_\varphi(\psi a)}(k)$ удовлетворяет оценке вида (IX.64). При $k\in C$ имеем

$$\begin{aligned}|\widehat{\chi D_\varphi((1-\psi)a)}(k)|&=\\ &=\left|\int\exp(i\tilde{\varphi}(x,k,\theta))\chi(x)(1-\psi(\theta))a(x,\theta)\,dx\,d\theta\right|=\\ &=\left|\int\exp(i\tilde{\varphi}(x,k,\theta))V_k^p[\chi(x)a(x,\theta)(1-\psi(\theta))]\,dx\,d\theta\right|\leqslant\\ &\leqslant\int\left|V_k^p[\chi a(1-\psi)]\right|dx\,d\theta.\end{aligned}\tag{IX.65}$$

На основании свойств однородности A, B, D по $\langle k, \theta\rangle$ можно утверждать, что $|V_k^p[\chi a(1-\psi)]|\leqslant|||a|||(|k|+|\theta|)^{-p}(1+|\theta|)^m$, где $|||\cdot|||$ — норма на $\operatorname{Sym}(\Omega, s, m)$. Поскольку $1-\psi$ обращается в нуль при $|\theta|<1$ для всех θ в интеграле (IX.65), справедливы неравенства

$$(|k|+|\theta|)^{-1}\leqslant(|k|+1)^{-1},$$
$$(|k|+|\theta|)^{-1}\leqslant(|\theta|)^{-1}\leqslant(1/2+1/2|\theta|)^{-1},$$

а тогда получаем (IX.64), выбирая достаточно большое p и учитывая, что множитель χ делает интегрирование в (IX.65) конечным. ∎

На протяжении этой главы были развиты различные методы применения преобразования Фурье к анализу функций или распределений. Теперь эти методы можно применить к анализу распределения $\Delta_+(x;\ m^2)$.

Теорема IX.48. Двухточечная функция $\Delta_+(x;\ m^2)$ свободного поля обладает следующими свойствами:

(a) Δ_+ лоренц-инвариантна.

(b) $$WF(\Delta_+) = \{\langle 0,\ 0,\ -|\theta|,\ \theta\rangle \mid \theta \in \mathbb{R}^3\} \cup$$
$$\cup \{\langle \pm|\mathbf{x}|,\ \mathbf{x},\ -\lambda|\mathbf{x}|,\ \mp\lambda\mathbf{x}\rangle \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,\ \lambda > 0\}.$$

(c) Существуют такие C^∞-функции f_s, f_t^+ и f_t^- на $(0,\ \infty)$, что

$$\Delta_+(x;\ m^2) = \begin{cases} f_s(x^2;\ m^2), & \text{если } x^2 < 0, \\ f_t^+(x^2;\ m^2), & \text{если } x^2 > 0,\ x_0 > 0, \\ f_t^-(x^2;\ m^2), & \text{если } x^2 > 0,\ x_0 < 0, \end{cases}$$

где $x^2 = x\cdot\tilde{x} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

(d) При $y > 1$ имеем $f_s(y^2) \leqslant C_\varepsilon \exp(-(m-\varepsilon)\,y)$.

(e) $\lim\limits_{y\to\infty} |y|^{2n} f_t^\pm(y) = 0$.

(f) $f_t^+(y) = \overline{f_t^-(y)}$.

Доказательство. (a) следует из того факта, что Δ_+ — фурье-образ лоренц-инвариантной меры. Для доказательства (b) отметим, что в силу нашего анализа примера 7 и теоремы IX.47 множество $WF(\Delta_+)$ содержится в $S_0 \cup S_+ \cup S_-$, где $S_0 = \{\langle 0, 0, -|\theta|, \theta\rangle \mid \theta \in \mathbb{R}^3\}$, $S_\pm = \{\langle \pm|\mathbf{x}|,\ \mathbf{x},\ -\lambda|\mathbf{x}|,\ \mp\lambda\mathbf{x}\rangle \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0},\ \lambda > 0\}$. Более того, в силу лоренц-инвариантности Δ_+, лоренц-инвариантным должно быть и $WF(\Delta_+)$, а это означает, что S_+ либо содержится в $WF(\Delta_+)$, либо не пересекается с ним. Если бы S_+ не пересекалось с $WF(\Delta_+)$, то обобщенная функция Δ_+ равнялась бы некоторой функции из C^∞ на $\{\langle t,\ \mathbf{x}\rangle \mid t > 0\}$. Поскольку мы увидим, что $\Delta_+(t_0,\ \mathbf{x})$ и ее производные экспоненциально убывают при $\mathbf{x} \to \infty$ и при фиксированном t_0, из предыдущего следовало бы, что при $t_0 > 0$ функция $\Delta_+(t_0,\ \cdot)$ принадлежит $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Но ее фурье-образ не лежит даже в L^1, поэтому множество S_+ не может не пересекаться с $WF(\Delta_+)$. В силу (f), раз известно, что $S_+ \subset WF(\Delta_+)$, можно заключить, что $S_- \subset WF(\Delta_+)$. Наконец, поскольку $WF(\Delta_+)$ замкнуто и $S_0 \subset \overline{S}_+$, имеем $S_0 \subset WF(\Delta_+)$. Из (b) следует, что сингулярный носитель Δ_+ есть $\{x \mid x^2 = 0\}$, значит, Δ_+ принадлежит

C^∞ в рассматриваемых областях и лоренц-инвариантна. Это доказывает (c).

Для доказательства (d) рассмотрим обобщенную функцию на $\mathbb{R}^3$, фурье-образ которой есть $(k^2+m^2)^{-1/2}$. В соответствии с идеями теоремы Пэли — Винера (задача 76) и фактом аналитичности $(k^2+m^2)^{-1/2}$ в трубе, эта обобщенная функция падает экспоненциально с любым показателем $a<m-\varepsilon$. Поскольку $\Delta_+(0, x)$ — как раз такая обобщенная функция (с точностью до константы), доказано (d).

Для доказательства (e) отметим, что формально

$$f_t^\dagger(x^2;\ m^2)=\frac{i}{2(2\pi)^3}\int \exp\left(-i\,|x|\sqrt{m^2+k^2}\right) d^3k/\sqrt{k^2+m^2}.$$

Проводя анализ точно так же, как в примере 6, видим, что функция $|x|^{2n} f_t^\dagger(x^2;\ m^2)$ ограничена, коль скоро $n\geqslant 2$ (задача 72).

Наконец, в силу вещественности $\hat{\Delta}_+$ имеем $\Delta_+(-x)=\overline{\Delta_+(x)}$, что доказывает (f). ∎

Следствие. Произведение $\theta(x_0)\,\Delta_+(x;\ m^2)$, где $\theta(x_0)$ определено формулой $\theta(f)=\int\limits_{x_0\geqslant 0} f(x)\,d^4x$, существует.

Доказательство. $WF(\theta)=\{\langle 0, \mathbf{x}, \pm\lambda, 0\rangle \mid \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\ \lambda\in\mathbb{R}_+\}$, так что $WF(\theta)\oplus WF(\Delta_+)$ не содержит ни одного вектора вида $\langle x, 0\rangle$. Следовательно, по теореме IX.45 произведение существует. ∎

ЗАМЕЧАНИЯ

§ *IX.1.* Вывод формулы обращения, который дал сам Ж. Фурье, содержится в его классической работе La Théorie Analytique de Chaleur, Didot, Paris, 1822. Хотя по современным стандартам его рассуждения нельзя рассматривать как «строгое доказательство», они содержат все основные моменты приведенного нами доказательства. Идея определения преобразования Фурье сначала на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, а затем его сужение на классические пространства предложена Л. Шварцем и описана в его монографии Théorie des Distributions, v. II, Hermann, Paris, 1954. Ясно написанная книга Шварца представляет собой основной источник для изучения преобразования Фурье на пространствах обобщенных функций и теории сверток обобщенных функций.

Разложение Эрмита, обсуждавшееся в дополнении к § V.3, можно применить к построению более коротких доказательств формулы обращения Фурье и теорем Планшереля, так как $\hat{\phi}_n(k)=(-i)^n\,\phi_n(k)$.

§ *IX.2.* Лемма Римана — Лебега была доказана первоначально Риманом только для узкого класса функций в работе: B. Riemann, Ueber der Darstellbarkeit einer Funktion durch einen trigonometrische Reihe, Math. Werke, Teubner, 1876, S. 213—253 (см. русский перевод: Б. Риман, Сочинения, Гостехтеориздат, М.— Л., 1948, стр. 225—261); а позже Лебегом уже для всего множества L^1: H. Lebesgue, Sur les Séries Trigonométriques, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 20 (1903), 453—485. Теорема Планшереля опубликована в работе: M. Plancherel, Contribution à l'étude de la représentation d'un fonction arbitraire par des intégrales définies, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 30 (1910), 289—335.

Теорема Хаусдорфа—Юнга была первоначально доказана в работе: W. Young, Sur la généralisation du théorème de Parseval, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A—B*, **155** (1912), 30—33, и обобщена в работе: F. Hausdorff, Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourierreihen, *Math. Z.*, **16** (1923), 163—169.

Бохнер опубликовал доказательство своей теоремы в книге: S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Akademie-Verlag, Berlin, 1932 (см. русский перевод: С. Бохнер, Лекции об интегралах Фурье, Физматгиз, М., 1962). Для обобщенных функций она доказана в книге Шварца. Приведенное нами доказательство теоремы Бохнера опирается на теорему Стоуна. Обратно, теорему Стоуна можно вывести из теоремы Бохнера (см. E. Hopf, Ergodentheorie, Springer-Verlag, Berlin, 1937, или Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954).

В каком-то смысле наиболее «естественно» L^p-теория преобразования Фурье формулируется на произвольной локально компактной абелевой группе; см. главы XIV и XV.

§ *IX.3*. На тесную связь между свойствами носителя функции и свойствами аналитичности ее фурье-образа впервые указали Р. Пэли и Н. Винер в книге: R. Paley, N. Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain, Amer. Math. Soc. Colloqium Publication, Providence, R. I., 1934 (см. русский перевод: Н. Винер и Р. Пэли, Преобразование Фурье в комплексной области, «Наука», М., 1964). В их книге рассматривались функции из L^2 и граничные значения в смысле L^2 (см. ниже). Тем не менее всевозможные теоремы, связывающие свойства носителя со свойствами преобразования Фурье, обычно называют теоремами Пэли—Винера. Связь между аналитичностью и свойствами преобразования Фурье далее исследовалась Титчмаршем: Е. К. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 1948.

Обобщение на случай распределений с компактным носителем впервые было дано Л. Шварцем в статье Transformation de Laplace des distributions, Comm. Sém. Math. Lund, tome suppl. dédié à M. Riesz (1952). Более подробно связь между носителем и аналитичностью для функций, сосредоточенных на компактных выпуклых уравновешенных множествах, устанавливается в задаче 22.

Дальнейшее рассмотрение понятия оболочки голоморфности см. в следующих книгах: С. Бохнер, У. Т. Мартин, Функции многих комплексных переменных, ИЛ, М., 1951; Р. Ганнинг, Х. Росси, Аналитические функции многих комплексных переменных, «Мир», М., 1969; L. Nachbin, Holomorphic Functions, Domains of Holomorphy and Local Properties, North Holland, 1970; Л. Хёрмандер, Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, «Мир», М., 1968. По поводу приложений к квантовой теории поля см. указанные в Замечаниях к § IX.8 лекции Эпштейна и работу Вайтмана в *J. Indian Math. Soc.*

Теорема Бохнера о трубе содержится в работе: S. Bochner, A Theorem on analytic continuation of functions in several variables, *Ann. Math.*, **39** (1938), 14—19. Связь между теоремами о трубе и теоремой Пэли—Винера была отмечена И. Стейном и его сотрудниками, см. И. М. Стейн, Г. Вейс, Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, «Мир», М., 1974. В частности, теорема для вырожденного случая была доказана на основе этих идей в статье: R. A. Kunze, E. M. Stein, Uniformly Bounded Representations, II, *Am. J. Math.*, **83** (1967), 723—786 (см. лемму 21). Независимо Мальгранж и Цернер доказали этот же результат, применяя более классические методы; см. лекции Эпштейна.

Идея рассматривать фурье-образы распределений более общего вида как граничные значения аналитических функций также восходит к Шварцу, который доказал, что если обобщенная функция $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ имеет носитель в конусе Γ, то функция $F(\lambda - i\eta t) = \widehat{e^{-i\eta \cdot x} T}$ обладает полиномиальным ростом в смысле оценок (i) и (ii) при $t \to \infty$ и $t \to 0$. Для доказательства такого ослабленного варианта одной половины теоремы IX.16 нет нужды применять лемму Броса — Эпштейна — Глазера. Если $a \in \Gamma$, выбирается такая C^∞-функция φ, что $\operatorname{supp} \varphi \in \Gamma - a$ и $\varphi(x) = 1$ при $x \in \bar{\Gamma}$. Тогда функция $F(\lambda - it\eta) = \widehat{e^{-t\eta \cdot x} \varphi(x) T}$ аналитична в $\mathbb{R}^n - i\Gamma^*$, удовлетворяет ограничениям на рост и имеет $\hat{T}$ в качестве граничного значения. Однако для получения оценки (IX.13), обеспечивающей полиномиальный рост около всей границы множества $\mathbb{R}^n - i\Gamma^*$, уже необходима лемма Броса — Эпштейна — Глазера, доказанная в работе: J. Bros, H. Epstein, V. Glaser, On the connection between analyticity and Lorentz covariance of Wightman functions, *Comm. Math. Phys.*, **6** (1967), 77—100. Приведенное доказательство второй половины теоремы IX.16 принадлежит Л. Гордингу (не опубликовано). Его доказательство основано на идеях Кёте и Тильмана, которые поняли, что необходимым условием для того, чтобы аналитическая функция имела в качестве граничного значения на гладкой границе обобщенную функцию, является полиномиальный рост (см. G. Köthe, Die Randverteilungen Analytischer Funktionen, *Math. Z.*, **57** (1952), 13—33, и H.-G. Tillman, Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen, *Math. Z.*, **59** (1953), 61—83. Отметим, что теорема IX.16 сформулирована и доказана нами для симметричного относительно вращений конуса $\Gamma_{a,\theta}$, но то же доказательство можно провести для произвольного выпуклого конуса (задача 23). Тогда сопряженный конус Γ^* определяется формулой $\Gamma^* = \{\eta \mid \eta \cdot x \geqslant 0 \text{ при всех } x \in \Gamma\}$.

Существует другая формулировка теорем типа Пэли — Винера в терминах функций из L^2. Предположим, что $f \in L^2(0, \infty)$. Тогда функция $F(\lambda - i\eta) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty e^{-i\lambda x} e^{-\eta x} f(x)\, dx$ удовлетворяет таким условиям:

(i) F аналитична в открытой нижней полуплоскости,

(ii) $\sup\limits_{\eta \geqslant 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda - i\eta)|^2 d\lambda \right\} < \infty$

и

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda - i\eta) - \hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda \to 0$ при $\eta \to 0$

по теореме Лебега о мажорированной сходимости. Это означает, что $F(\lambda - i\eta)$ принимает граничное значение $\hat{f}(\lambda)$ в смысле L^2. Аналитические функции в открытой нижней полуплоскости, удовлетворяющие условиям (i), (ii), и (iii), называют функциями класса Харди — Лебега $\mathscr{H}^2(\mathbb{R})$. В цитированной выше книге Винера и Пэли доказано обратное утверждение, а именно, если $F(\lambda - i\eta)$ принадлежит классу Харди — Лебега, то существует такая функция $f \in L^2(0, \infty)$, что $F(\lambda - i\eta) = \widehat{e^{-\eta x} f}$ и $F(\lambda - i\eta) \xrightarrow{L^2} \hat{f}(\lambda)$ при $\eta \downarrow 0$. Другая теорема такого типа утверждает, что $\widehat{e^{-\eta x} f(x)}$ тогда и только тогда принадлежит $L^2(\mathbb{R})$ при всех $\eta \in (\alpha, \beta)$, где (α, β) — открытый интервал, содержащий нуль, когда $\hat{f}(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение $\hat{f}(\lambda - i\eta)$ в полосу $\alpha < \eta < \beta$ и $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\lambda - i\eta)|^2 d\lambda < \infty$ для каждого $\eta \in (\alpha, \beta)$. Читатель без труда обобщит эти теоремы на случай многих переменных.

По теореме IX.13 фурье-образ функции f, убывающей быстрее любой экспоненты,— целая функция. О связях между типом аналитической функции и скоростью убывания см. L. Ehrenpreis, Fourier Analysis in Several Complex Variables, Wiley (Interscience), New York, 1970.

§ IX.4. L^p-оценки вызывали интерес уже на ранней стадии развития функционального анализа. Неравенство Юнга было доказано в работе: W. Young, The determination of the summability of a function, *Proc. London Math. Soc.*, **12** (1913), 71—78. Неравенство Харди—Литтлвуда появилось в статье: G. Hardy, J. Littlewood, Some properties of fractional integrals, I, *Math. Z.*, **27** (1928), 565—608. Ранее подобное неравенство для пространств последовательностей было опубликовано в статье: G. Hardy, J. Littlewood, G. Pólya, The maximum of a certain bilinear form, *Proc. London Math. Soc.*, **25** (1926), 265—268. Их работа, в основном, является обобщением работы Гильберта по билинейным формам $\sum\limits_{m,n} a_n b_m/(n+m)$, см. H. Weyl, Singulare Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorems, Inaugural Dissertation, Göttingen, 1908. С. Л. Соболев доказал сведением к случаю $n=1$ обобщение этого неравенства в статье: Об одной теореме функционального анализа, *Матем. сб.*, **4 (46)** (1938), 471—497. Сильное упрощение доказательства содержится в работе: N. du Plessis, Some theorems about the Riesz fractional integral, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **80** (1955), 124—134.

Теорема Хаусдорфа—Юнга утверждает следующее: если $p^{-1}+q^{-1}=1$ и $1\leqslant p\leqslant 2$, то норма преобразования Фурье из L^p в L^q не превосходит $(2\pi)^{n(1/2-1/p)}$. Недавно Бекнер (см. W. Beckner, Inequalities in Fourier Analysis, *Ann. Math.*, **102** (1975), 159—182) доказал, что эта норма на самом деле равна

$$C(p,q)=\left[\left(\frac{p}{2\pi}\right)^{1/p}\Big/\left(\frac{q}{2\pi}\right)^{1/q}\right]^{n/2}.$$

То, что норма не может быть меньше этой величины, видно из равенства $\|\hat{f}\|_q=C(p,q)\|f\|_p$, где $f=e^{-x^2/2}$.

Теорема Рисса—Торина была первоначально доказана М. Риссом (M. Riesz, Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionelles linéaires, *Acta Math.*, **49** (1926), 465—497). Идея применения методов комплексных переменных принадлежит К. Торину (C. Thorin, Convexity Theorems, *Comm. Sém. Math. Lund*, **9** (1948)). Идея распространения теоремы Рисса—Торина на аналитические семейства принадлежит И. Стейну (см. E. Stein, Interpolation of Linear Operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **83** (1956), 482—492).

Прежде чем были формально определены слабые L^p-пространства, были доказаны неравенства, которые теперь мы могли бы описать, сказав, что некоторое отображение из L^p в слабое L^p ограничено. Понятие «слабое L^p-пространство» оказалось, таким образом, естественной абстракцией. Эти неравенства появились впервые в связи с L^1 в работе: G. Hardy, J. Littlewood, A maximal theorem with function theoretic applications, *Acta Math.*, **54** (1930), 81—116, а затем для L^p—в указанной ниже статье Марцинкевича.

Теорема Марцинкевича была анонсирована в статье: J. Marcinkiewicz, Sur l'interpolation d'opérateurs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **208** (1939), 1272—1273, а во всей полноте доказана А. Зигмундом (A. Zygmund, On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operators, *J. Math.*, **35** (1956), 223—248). Теорема Ханта появилась в работе: R. Hunt, An extension of the Marcinkiewicz theorem to $L(p, q)$ spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), 803—807.

Пространства $L(p, q)$—обобщение слабых L^p-пространств. Они были введены Г. Лоренцем в статье: G. Lorentz, On some new functional spaces, *Ann. Math.*, **51** (1950), 37—55. Предположим, что $\langle M, \mu\rangle$—пространство с мерой.

Для каждой измеримой функции f на M можно определить измеримую функцию на $\mathbb{R}$ равенством

$$f^*(x)=\inf\{y>0\mid \lambda_f(y)\leqslant x\},$$

где $\lambda_f(y)=\mu\{x\mid |f(x)|>y\}$ — распределение функции f. Введем $L(p, q)$ как множество таких функций на M, что $\|f\|^*_{p,q}<\infty$. Здесь

$$\|f\|^*_{p,q}=\begin{cases}\left(\dfrac{q}{p}\displaystyle\int_0^\infty [t^{1/p}f^*(t)]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}, & 1<p<\infty,\ 1<q<\infty,\\ \sup\limits_{t>0}\{t^{1/p}f^*(t)\}, & 1<p\leqslant\infty,\ q=\infty.\end{cases}$$

Итак, $L^p=L(p, p)$ и $L^p_{\mathrm{w}}=L(p,\infty)$. На самом деле можно показать, что если $1<q_1\leqslant p\leqslant q_2\leqslant\infty$, то

$$L(p,\ q_1)\subset L^p\subset L(p,\ q_2)\subset L^p_{\mathrm{w}}.$$

Обсуждение этих пространств и связанных с ними интерполяционных теорем см. в статье: R. Hunt, On $L(p,\ q)$ spaces, *Enseignement Math.*, **12** (1966), 247—276. Вполне доступное обсуждение интерполяционных теорем (в частности, доказательство теоремы Марцинкевича) можно найти в книге И. М. Стейна и Г. Вейса, Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, «Мир», М., 1974.

Абстрактная теория интерполяции, изложенная в дополнении к § IX.4, принадлежит Кальдерону: A. Calderón, Intermediate spaces and interpolation, the complex method, *Studia Math.*, **24** (1964), 113—190, и Лионсу: J. Lions, Théorèmes de traces et d'interpolation I, II, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **13** (1959), 389—403; **15** (1960), 317—331; III: *J. Math. Pures Appl.*, **42** (1963), 195—203. Существуют и другие методы абстрактной интерполяции. Описание этих и родственных вопросов см. в обзорной статье С. Г. Крейна и Ю. И. Петунина, Шкалы банаховых пространств, *УМН*, **21**, вып. 2 (1966), 89—168.

Теорема Адамара о трех прямых — это не что иное, как одна из большой группы теорем, называемых теоремами Фрагмена — Линделёфа, которые по существу являются обобщениями принципа максимума на различные неограниченные области. Оригинальные работы таковы: E. Phragmén, Sur une extension d'un théorème classique de la théorie des fonctions, *Acta Math.*, **28** (1904), 351—368, и E. Lindelöf, E. Phragmén, Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulièr, *Acta Math.*, **31** (1908), 381—406. В ограниченном случае теорема о трех прямых была анонсирована в заметке Адамара: J. Hadamard, Sur les fonctions entières, *Bull. Soc. Math. France*, **24** (1896), 186—187.

Материал, обсуждаемый в примере 2 дополнения,— частный случай некоммутативной теории интегрирования. В общем случае желательно определить аналоги L^p-пространств для произвольной алгебры фон Неймана (в нашем случае эта алгебра есть $\mathscr{L}(\mathscr{H})$). Основная литература по этой теории: J. Dixmier, Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs, *Bull. Soc. Math. France*, **81** (1953), 9—39; I. Segal, A non-commutative extension of abstract integration, *Ann. Math.*, **57** (1953), 401—457, исправление: ibid. **58** (1953), 595—596, и R. Kunze, $\mathscr{L}_p$ Fourier transforms on locally compact unimodular groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **89** (1958), 519—540. Некоторые из приведенных нами доказательств следуют идеям и предложениям Э. Нельсона (E. Nelson, Notes on noncommutative integration, *J. Functional Analysis*, **15** (1974), 103—116).

§ IX.5. Теорема Мальгранжа — Эренпрейса была независимо доказана Б. Мальгранжем (B. Malgrange, Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des equations de convolution, *Ann. Inst. Fourier*

(Grenoble), **6** (1955—56), 271—355) и Л. Эренпрейсом (L. Ehrenpreis, Solution of some problems of division, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 883—903). Фундаментальные решения в течение долгого времени были стандартным техническим приемом в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и граничных задач для эллиптических уравнений. В качестве введения в эти методы см. соответствующий раздел монографии Р. Куранта и Д. Гильберта, Методы математической физики, т. 1, Гостехтеориздат, М.— Л., 1951, стр. 297 и далее. Более современный подход читатель найдет, обратившись к четырем книгам: Стакгольда, Фридмана, Агмона и Хёрмандера, на которые мы ссылались в замечаниях к § V.4.

Теорема Мальгранжа—Эренпрейса показывает, что уравнение $P(D)f=\delta$ имеет решение в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Возникает естественный вопрос: существует ли решение, принадлежащее $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$? Утвердительный ответ на этот вопрос дал Л. Хёрмандер, доказавший более сильное утверждение: $P(D)[\mathcal{S}']=\mathcal{S}'$ (см. L. Hörmander, On the division of generalized functions by polynomials, *Ark. Mat.*, **3** (1958), 555—568). Общее рассмотрение областей значений дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, заданных на различных пространствах обобщенных функций, см. в работе М. С. Аграновича, Об уравнениях в частных производных с постоянными коэффициентами, *УМН*, **16**, вып. 2 (1961), 27—93.

§ IX.6. Лемма Вейля содержится в работе: H. Weyl, The method of orthogonal projection in potential theory, *Duke Math. J.*, **1** (1940), 414—444. Лемма и пространства Соболева введены в статье: С. Соболев, Об одной теореме функционального анализа, *Матем. сб.*, **4** (46) (1938), 471—497, и книге: С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, Л., 1950.

Лемма Вейля имеет много обобщений. Рассмотрим два из них. Пусть Ω — открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, и пусть $C_{\alpha\beta}(x)$, $0\leqslant|\alpha|$, $|\beta|\leqslant m$,— набор m раз непрерывно дифференцируемых функций. Дифференциальный оператор $A=\sum\limits_{|\alpha|,\,|\beta|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}C_{\alpha\beta}(x)D^{\beta}$ называется **сильно эллиптическим**, если

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{|\alpha|,\,|\beta|=m}C_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha}\xi^{\beta}\right\}\geqslant C_0|\xi|^{2m},\qquad C_0>0,$$

для всех $x\in\Omega$ и всех вещественных векторов $\xi\in\mathbb{R}^n$. Следующая теорема принадлежит К. О. Фридрихсу (K. O. Friedrichs, Differentiability of solutions of elliptic partial differential equations, *Math. Scand.*, **1** (1953), 55—72).

Теорема. Пусть φ—слабое решение уравнения $A\varphi=f$. Если $f\in W_k(\Omega)$, то $\varphi\in W_{k+2m}(\Omega)$.

Л. Хёрмандер ввел следующее определение (см. L. Hörmander, On the theory of general partial differential operators, *Acta Math.*, 94 (1955), 161—248). Дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами $P(D)=P(i^{-1}\partial/\partial x_1,\ldots$ $\ldots,i^{-1}\partial/\partial x_n)$ на Ω (открытом, но не обязательно ограниченном) называется **гипоэллиптическим**, если для всякой $f\in C^{\infty}(\Omega)$ каждое решение φ уравнения $P(D)\varphi=f$ в смысле обобщенных функций, локально принадлежащее L^2 в Ω, лежит в $C^{\infty}(\Omega)$. Далее, Хёрмандер доказал, что справедлива такая

Теорема. Оператор $P(D)$ гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда для каждой большой константы M_1 существует такая положительная константа M_2, что каждый нуль $\zeta=\xi+i\eta$ полинома $P(\zeta)$, удовлетворяющий неравенству $|\eta|\leqslant M_2$, удовлетворяет также и неравенству $|\zeta|\leqslant M_1$.

Читатель легко проверит, что оператор Δ гипоэллиптичен, а $\partial^2/\partial x^2-\partial^2/\partial t^2$— нет. Эта теорема допускает различные обобщения на операторы с переменными коэффициентами (см. L. Hörmander, On the interior regularity of the solutions of partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **9** (1958), 197—218; B. Malgrange, Sur une classe d'opérateurs différentielles hypoelliptiques, *Bull. Soc. Math. France*, **85** (1957), 283—306; J. Peetre, A proof of the hypoellipticity of formally hypoelliptic differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **16** (1961), 737—747).

Лемма Соболева (а потому и вытекающая из нее теорема регулярности) может быть обобщена на различные L^p-пространства. Мы говорим, что функция f лежит в $L^p_k(\mathbb{R}^n)$, если все ее частные производные порядка меньшего или равного k принадлежат $L^p(\mathbb{R}^n)$. Лемму Соболева обобщает такая

Теорема. Предположим, что k — положительное целое и $q^{-1}=p^{-1}-k/n$.

(a) Если $q<\infty$ (т. е. $p<n/k$), то $L^p_k(\mathbb{R}^n)\subset L^q(\mathbb{R}^n)$ и естественное вложение непрерывно.

(b) Если $q=\infty$ (т. е. $p=n/k$), то сужение любой функции $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ на компактное подмножество $\mathbb{R}^n$ принадлежит $L^r(\mathbb{R}^n)$ при каждом $r<\infty$.

(c) Если $p>n/k$, то каждую функцию $f\in L^p_k(\mathbb{R}^n)$ можно так подправить на множестве нулевой меры, что полученная функция станет непрерывной.

Доказательство этой теоремы и другие родственные результаты можно найти в книге И. Стейна, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, «Мир», М., 1973.

Рассмотренные нами неравенства Соболева ограничивают L^q-норму функции ее L^p-нормой и L^p-нормами некоторых ее производных. В некоторых частных случаях L^q-норму функции можно ограничить только L^p-нормами производных, если функция мала на бесконечности. Например, в § X.13 мы докажем и будем применять оценку

$$\|f\|_6\leqslant C\sum_{i=1}^{3}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_2$$

для функций на $\mathbb{R}^3$.

Часть (a) предыдущей теоремы тесно связана с неравенством Соболева из § IX.4 (см. (IX.19)). Например, пусть $k=2$, $n\geqslant 3$, и пусть $\lambda=(n-2)$. Тогда для любой функции $h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ при подходящей константе c_n выполняется равенство $c_n\int|x-y|^{-\lambda}(\Delta h(y))\,dy=h(x)$. Это следует из теоремы IX.29 и того факта, что $d_n|x|^{-\lambda}$ — фурье-образ функции k^{-2} (задача 50(a)). Итак, из (IX.19) следует, что $\|h\|_q\leqslant d(p,q,n)\|\Delta h\|_p$, где $(1-q^{-1})+p^{-1}+\lambda n^{-1}=2$, т. е. $q^{-1}=$ $=p^{-1}-2n^{-1}$.

§ *IX.7*. Большая часть этого раздела — общеизвестные факты. Теорема IX.31 принадлежит Долларду (J. Dollard, Asymptotic Convergence and the Coulomb Interaction, *J. Math. Phys.*, **5** (1964), 729—738).

§ *IX.8*. Аксиомы Гординга — Вайтмана были сформулированы Л. Гордингом и А. С. Вайтманом еще в начале пятидесятых годов, однако авторы считали преждевременной публикацию их без нетривиальных примеров. Тем не менее предварительные варианты этих аксиом появились в различных местах, и на их основе была развита теория рассеяния Хаага — Рюэля (см. § XII.15). Эта теория в свою очередь оказалась столь красивой и физически осмысленной, что вызвала публикацию самих аксиом в работе: A. S. Wightman, L. Gårding, Fields as operator-valued distributions, *Ark. Fys.*, **28** (1964), 129—189.

Эти аксиомы рассматриваются весьма подробно вместе с их многочисленными следствиями в следующих двух книгах: Р. Стритер, А. С. Вайтман, PCT, спин и статистика и все такое, «Наука», М., 1966, и Р. Йост, Общая теория квантованных полей, «Мир», М., 1967. Эти книги содержат также много ссылок на более ранние работы по этой проблеме.

Первый вопрос, естественно возникающий по поводу вайтмановых аксиом, — вопрос об их непротиворечивости. Этот вопрос не тривиален в силу большого количества затрагиваемых аксиомами математических структур. Действительно, если коммутатор в аксиоме локальной коммутативности заменить антикоммутатором, то аксиомы становятся противоречивыми (см. ниже теорему о связи спина и статистики). В § X.7 мы продемонстрируем непротиворечивость аксиом, показав, что им удовлетворяет свободное поле Клейна — Гордона массы m. До сих пор не доказано, что существует хотя бы одна действительно интересная теоретико-полевая модель в четырехмерном пространстве-времени, включающая описание взаимодействующих частиц, которая удовлетворяет аксиомам Вайтмана. Недавно были построены модели, удовлетворяющие аналогу вайтмановых аксиом в двух измерениях; см., например, сборник Constructive Quantum Field Theory (G. Velo, A. S. Wightman, eds.), Springer-Verlag, Berlin, 1973[1]), и указанную там литературу или монографию Б. Саймона, Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, «Мир», М., 1976.

Поскольку мы до сих пор не обладаем большими классами математических моделей, не говоря уже о полном описании явлений физики элементарных частиц, над аксиомами было проведено множество «экспериментов». Эти эксперименты состояли в небольшом изменении аксиом, поисках эквивалентных систем аксиом или формулировке систем аксиом, основанных на некоторых фундаментальных структурах, отличных от локальной полевой структуры, лежащей в основе теории Гординга—Вайтмана.

Если мы хотим слегка изменить аксиомы, то один из кандидатов на изменение — чисто техническая аксиома, квалифицирующая пространство основных функций как $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$. Действительно, «в фольклоре» существует теорема, уверяющая, что класс формальных моделей, называемых неренормируемыми лагранжевыми моделями, приведет к вайтмановым функциям, не являющимся полиномиально ограниченными в трубе. Это может иметь место только в том случае, если применяется пространство основных функций, отличное от $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$. Джаффе предложил и исследовал целый класс других пространств основных функций, все еще позволяющих сформулировать условие микроскопической причинности (см. A. Jaffe, High energy behavior in quantum field theory, strictly localizable fields, *Phys. Rev.*, 158 (1967), 1454—1461).

Существуют два типа эквивалентных переформулировок вайтмановых аксиом. Первый принадлежит Вайтману, который выписал набор постулатов для последовательности обобщенных функций умеренного роста $\{\mathscr{W}_n \mid \mathscr{W}_n \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4n})\}$ и доказал, что эти постулаты гарантируют, что $\mathscr{W}_n$ оказываются вайтмановыми обобщенными функциями некоторой единственной полевой теории, удовлетворяющей аксиомам Гординга — Вайтмана, и, обратно, что эти постулаты справедливы в любой вайтмановой теории поля. Эта **теорема реконструкции** появилась в его статье: A. S. Wightman, Quantum field theory in terms of vacuum expectation values, *Phys. Rev.*, 101 (1956), 860—866, и обсуждается ниже в гл. XVII. Статья Вайтмана не содержала «перевода» аксиомы единственности вакуума в свойства $\mathscr{W}_n$. Это было добавлено позже благодаря работам: K. Hepp, R. Jost, D. Ruelle, O. Steinmann, Necessary conditions on Wightman functions, *Helv. Phys. Acta*, 34 (1961), 542—544, и H. Borchers, On the structure of the algebra of field observables, *Nuovo Cimento*, 24 (1962), 214—236.

Другая переформулировка вайтмановых аксиом осуществляется в терминах **функций Швингера**, которые суть сужения вайтмановых функций на такие точки в симметризованной расширенной трубе будущего (т. е. в объединении расширенной трубы будущего и ее образов при перестановке координат в x-про-

[1]) Часть статей этого сборника переведена; см. Конструктивная теория поля, «Мир», М., 1977.

странстве), у которых пространственные координаты чисто вещественны, а временные — чисто мнимы. Этот способ связан с евклидовым подходом в теории поля, который мы обсуждаем ниже, так что мы временно отложим исторический обзор его развития. Аксиомы для швингеровых функций, эквивалентные аксиомам Вайтмана, можно найти в работе: K. Osterwalder, R. Schrader, Axioms for Euclidean Green's functions, I, *Comm. Math. Phys.*, **31** (1973), 83—112; II, ibid., **42** (1975), 281—305.

Наконец, имеются такие аксиоматические схемы, в которых основные структурные элементы отличаются от локальных полей. В одной из таких схем подчеркивается роль «асимптотических полей», благодаря чему устанавливается непосредственная связь с теорией рассеяния. Эта схема аксиом принадлежит Леману, Симанзику и Циммерману (H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmerman, Zur Formulierung Quantisierter Feldtheorien, *Nuovo Cimento*, **1** (1955), 205—225; On the formulation of quantum field theories, II, *Nuovo Cimento*, **6** (1957), 319—333). К. Хепп доказал, что из теории рассеяния Хаага — Рюэля (см. § XII.15) следует, что один из вариантов ЛСЦ-аксиом справедлив в любой вайтмановой теории, к которой добавлено соответствующее предположение о массовом спектре. См. K. Hepp, On the connection between the LSZ and Wightman quantum field theory, *Comm. Math. Phys.*, **1** (1965), 95—111, а также его статью в сборнике Axiomatic Field Theory (Brandeis Summer Institute, 1965), Gordon and Breach, New York, 1966.

Другой подход к локальной квантовой аксиоматике основан на применении банаховых алгебр. Еще фон Нейман предложил применять алгебры ограниченных операторов для аксиоматизации квантовой механики и разработал именно с этой целью большую часть теории W^*-алгебр («алгебр фон Неймана»). Его работы разъяснил и расширил И. Сигал (I. Segal, Postulates for general quantum mechanics, *Ann. Math.*, **48** (1947), 930—947). В пятидесятые годы Сигал отстаивал алгебраический подход к проблемам теории поля, а в 1964 г. Р. Хааг и Д. Кастлер сформулировали систему аксиом в статье: R. Haag, D. Kastler, An algebraic approach to quantum field theory, *J. Math. Phys.*, 5 (1964), 848—861 (см. также H. Araki, Local quantum theory, I, в сб. Local Quantum Theory (R. Jost, ed.), Academic Press, New York, 1969). Между аксиомами Хаага — Кастлера и аксиомами Вайтмана нет прямой связи. *Если* поля в вайтмановых аксиомах самосопряжены, то из их спектральных проекторов можно построить семейство алгебр, однако по техническим причинам не очевидно, что они удовлетворяют аксиомам Хаага — Кастлера. Например, из коммутативности полей в смысле Вайтмана не обязательно следует коммутативность спектральных проекторов (см. § VIII.5). С другой стороны, не ясно, как восстановить поля из локальных алгебр Хаага — Кастлера. Тем не менее эти две системы аксиом тесно связаны, и естественно ожидать, что в разумных моделях справедливы и те, и другие. Именно так обстоит дело в двумерных моделях, построенных до сих пор. Мы обсудим алгебраический подход в теории поля в гл. XIX.

Третий подход включает в себя аналитическое продолжение рассматриваемых величин в область мнимых времен, где группа Пуанкаре заменяется евклидовой группой. На уровне теории возмущений эта идея восходит к Дайсону (F. Dyson, The S-matrix in quantum electrodynamics, *Phys. Rev.*, 75 (1949), 1736—1755), а на уровне функций Вайтмана — к статьям Вайтмана (1956 г.) и Холла — Вайтмана, которые обсуждаются ниже. Именно на этом уровне продолжения функций Вайтмана действуют аксиомы Остервальдера — Шрадера. Однако имеется подход, быть может, более специальный, так как он не следует из одних только вайтмановых аксиом, в котором разыскиваются евклидовы *поля*, т. е. операторы, вакуумные средние которых суть функции Швингера. Этот подход впервые пропагандировали Швингер (J. Schwinger, On the Euclidean structure of relativistic field theory, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 44 (1958), 956—965) и Накано (T. Nakano, Quantum field theory in terms of Euclidean parameters, *Progr. Theoret. Phys.*, **21** (1959), 241—259). Связь этой формулировки с вероятностными идеями, такими, как формула Фейнмана — Каца из § X.10, и с классической статистической механикой впервые подчеркнул Симанзик (K. Symanzik, Euclidean quantum fields, I, equations for a scalar model, *J. Math. Phys.*, 7 (1966), 510—525; Euclidean quantum field theory, в сб. Local Quantum Theory (R. Jost, ed.), Academic Press, New York, 1969). Впоследствии Э. Нельсон (E. Nelson, Construction of Quantum Fields from Markoff Fields, *J. Functional Analysis*, 12 (1973), 97—112) предложил систему аксиом, определяющую евклидову теорию поля, и показал, что из любой такой теории можно вывести квантовую теорию поля, удовлетворяющую аксиомам Вайтмана. Обратная задача: что нужно добавить к вайтмановым аксиомам, чтобы можно было построить евклидову теорию, удовлетворяющую всем аксиомам Нельсона,— не решена окончательно, однако частичное решение можно найти в статье: B. Simon, Positivity of the Hamiltonian semigroup and the construction of Euclidean region fields, *Helv. Phys. Acta*, **46** (1974), 686—696. В этой статье содержится пример, удовлетворяющий аналогу аксиом Вайтмана для одномерного пространства-времени, но *не* удовлетворяющий аксиомам Нельсона, что указывает на существование в евклидовых теориях поля некоторых дополнительных структур.

Теорема Баргмана — Холла — Вайтмана была опубликована в статье: D. Hall, A. Wightman, A theorem on invariant analytic functions with applications to relativistic quantum field theory, *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.*, 31 (1957), 1—41. Имя Баргмана в названии теоремы связано с тем вкладом, который он сделал в ее доказательство.

«Предвестница» *PCT*-теоремы была доказана в работе: G. Lüders. On the equivalence of invariance under time reversal and under particle-antiparticle conjugation for relativistic field theories. *Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd.*, **28** (1954), 1—17. Сама *PCT*-теорема была доказана В. Паули (см. его статью: Принцип запрета, группа Лоренца, отражение пространства-времени и заряда, в сб. «Нильс Бор и развитие физики», под ред. В. Паули, ИЛ, М., 1958) и Йостом (R. Jost, Eine Bemerkung zum CTP Theorem, *Helv. Phys. Acta*, **30** (1957), 409—416). Обсуждение физической важности *PCT*-теоремы см. в книге С. Газиоровича, Физика элементарных частиц, «Наука», М., 1969, стр. 543—555.

Представление для двухточечной функции, полученное в теореме IX.34, называется представлением Челлена — Лемана потому, что впервые оно было открыто Умэдзавой и Камефучи (H. Umezawa, S. Kamefuchi, The vacuum in Quantum Electrodynamics, *Progr. Theoret. Phys.*, 6 (1951), 543—558). См. также работы Челлена (G. Källen, On the definition of the renormalization constants in quantum electrodynamics, *Helv. Phys. Acta*, 25 (1952), 417—434) и Лемана (H. Lehmann, Über Eigenschaften von Ausbreitungsfunktionen und Renormierungskonstanten quantisierter Felder, *Nuovo Cimento*, 11 (1954), 342—357).

Из § IX.8 ясна важность проблемы вычисления оболочек голоморфности симметризованной трубы будущего для n-точечной функции. Случай трехточечной функции см. в работе: G. Källen, A. S. Wightman, The analytic properties of the vacuum expectation values of a product of three scalar local fields, *Math.-Fys. Skr. Danske Vid. Selsk.*, 1 (1958). Общее обсуждение вопросов аналитичности в квантовой теории поля см. в работе Вайтмана: A. S. Wightman, Quantum field theory and analytic functions of several complex variables, *J. Indian Math. Soc.*, **24** (1960), 625—677, или в работе А. Эпштейна, Амплитуды рассеяния в квантовой теории поля, в книге К. Хеппа, А. Эпштейна, Аналитические свойства амплитуд рассеяния в локальной квантовой теории поля, Атомиздат, М., 1971.

Опишем, наконец, кратко роль «спина» в теории поля и проистекающую из необходимости описания «спинорных полей» модификацию аксиом. Чтобы объяснить связанные с понятием спина тонкости, нам придется вернуться к обсуждению динамики в Замечаниях к § VIII.11. Там динамика сначала была описана не унитарными операторами U_t, удовлетворяющими условию

$U_{t+s}=U_tU_s$, а автоморфизмами состояний α_t, для которых $\alpha_{t+s}=\alpha_t\alpha_s$. Нетривиальный факт состоит в том, что любой такой автоморфизм, являющийся квадратом другого автоморфизма, индуцируется некоторым унитарным оператором U, определяемым однозначно с точностью до фазового множителя (т. е. $U \longmapsto e^{i\theta}U$). Следовательно, U_t можно выбрать так, что U_t индуцирует α_t, а тогда, в силу единственности с точностью до фазы, $U_{t+s}=\lambda(t, s)U_tU_s$, где $\lambda(t, s)$ — фазовый множитель. В случае динамики, для которой группой является $\mathbb{R}$, всегда можно найти такой фазовый множитель $\mu(t)$, что $\lambda(t, s)=\mu(t+s)\mu(t)^{-1}\mu(s)^{-1}$, и потому $V(t)=\mu(t)U(t)$ удовлетворяет условию $V(t+s)=V(t)V(s)$. Подобный анализ проходит и для группы Пуанкаре, но лишь до определенного момента. Здесь действительно получается сильно непрерывное отображение $\mathscr{L}_+^\uparrow$ в группу унитарных операторов, удовлетворяющее условию $U(AB)=\lambda(A, B)U(A)U(B)$, где $\lambda(A, B)$ — фазовый множитель. Но теперь уже, вообще говоря, нельзя получить представление с помощью замены $V(A)=\mu(A)U(A)$ для подходящего μ. Точнее, возникает следующая ситуация.

Имеется группа $SL(2, \mathbb{C})$ и двукратное отображение Λ этой группы на $\mathscr{L}_+^\uparrow$. С помощью $\mathbb{R}^4$ и $SL(2, \mathbb{C})$ строится группа $InSL(2, \mathbb{C})=SL(2, \mathbb{C})\times\mathbb{R}^4$ (умножение в теоретико-множественном смысле) с групповой операцией

$$\langle A, a\rangle\langle B, b\rangle=\langle AB, a+\Lambda(A)b\rangle.$$

Тогда $\tilde{\Lambda}$: $\langle A, a\rangle \longmapsto \langle\Lambda(A), a\rangle$ — двукратное отображение $InSL(2, \mathbb{C})$ на группу $\mathscr{P}_+^\uparrow$. Основная теорема утверждает, что по заданному отображению $\tilde{U}$ из $InSL(2, \mathbb{C})$ во множество унитарных операторов, удовлетворяющему условию $\tilde{U}(\langle A, a\rangle\langle B, b\rangle)=\lambda(A, a, B, b)\tilde{U}(\langle A, a\rangle)\tilde{U}(\langle B, b\rangle)$, можно найти такой множитель $\mu(\cdot)$ на $InSL(2, \mathbb{C})$, что для $\tilde{V}(\langle A, a\rangle)=\mu(A, a)\tilde{U}(\langle A, a\rangle)$ будет выполняться равенство $\tilde{V}(\langle A, a\rangle\langle B, b\rangle)=\tilde{V}(\langle A, a\rangle)\tilde{V}(\langle B, b\rangle)$. Пусть задано U — представление с точностью до фазы группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$. Тогда можно определить $\tilde{U}$ на $InSL(2, \mathbb{C})$ формулой $\tilde{U}(A, a)=U(\tilde{\Lambda}\langle A, a\rangle)$ и таким образом сопоставить U представление группы $InSL(2, \mathbb{C})$. Эта редукция принадлежит Баргману и Вигнеру (см. статьи, указанные в пункте (4) нашего обсуждения динамики в Замечаниях к § VIII.11; см. также гл. XIV).

Пусть 1 и -1 — два элемента группы $SL(2, \mathbb{C})$, переходящие в единичный элемент из $\mathscr{L}_+^\uparrow$ под действием Λ (в самом деле, $SL(2, \mathbb{C})$ — группа всех комплексных 2×2-матриц с детерминантом 1, и матрицы 1 и -1 переходят в единицу $\mathscr{L}_+^\uparrow$, если положить $\Lambda(A)_{\mu\nu}=\mathrm{tr}(\sigma_\mu A\sigma_\nu A^{-1})$, где $\sigma_0=1$, а σ_i $(i=1, 2, 3)$ — матрицы Паули). Тогда неприводимое представление V группы $InSL(2, \mathbb{C})$ всегда принадлежит одному из двух типов: либо $V(\langle -1, 0\rangle)=1$, либо $V(\langle -1, 0\rangle)=-1$. Эти типы обычно называют соответственно случаем с целым спином и случаем с полуцелым спином, поскольку собственные значения оператора J_z углового момента (т. е. инфинитезимального генератора подгруппы в $SL(2, \mathbb{C})$, описывающей повороты вокруг оси z) равны соответственно $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ или $\pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \ldots$. Заметим, что естественно продолжить анализ неприводимых представлений группы $InSL(2, \mathbb{C})$, с тем чтобы пополнить набор инвариантов, а именно, ввести массу и «спин» (см., например, статью Вигнера), но ниже нам потребуется лишь классификация по $V(\langle -1, 0\rangle)=\pm 1$. Отметим также, что случаи целого спина — это именно те случаи, когда представление группы $InSL(2, \mathbb{C})$ является в точности представлением группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$, а не представлением лишь с точностью до множителя.

Определим теперь спинорные поля, отложив временно обсуждение их связи со спином. Пусть $S(\cdot)$ — *конечномерное* (заведомо неунитарное!) неприводимое представление группы $SL(2, \mathbb{C})$ на пространстве размерности d. **Спинорное** поле типа S — это объект, удовлетворяющий аксиомам, сформулированным для эрмитова скалярного поля, со следующими пятью изменениями:

(1) Одно поле $\varphi(\cdot)$ заменяется набором d полей: $\langle\varphi_1(\cdot), \ldots, \varphi_d(\cdot)\rangle$.

(2) Не требуется, чтобы поля $\varphi_i(f)$ при вещественной f были симметрическими.

(3) Закон преобразования (свойство 6) заменяется таким:

$$U(\Lambda, a)\varphi_i(x)U(\Lambda, a)^{-1} = \sum_{j=1}^{d} S(A^{-1})_{ij}\varphi_j(\Lambda x + a),$$

где $\Lambda = \Lambda(A)$.

(4) От вакуума требуется лишь, чтобы он был цикличен относительно множества операторов

$$\{\varphi_1(f), \ldots, \varphi_d(f), \varphi_1^*(f), \ldots, \varphi_d^*(f) \mid f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)\}.$$

(5) Соотношение $\varphi(f)\varphi(g) - \varphi(g)\varphi(f) = 0$, если носители f и g пространственно-подобны, заменяется одним из следующих:

(a) (статистика Бозе)

$$\varphi_i(f)\varphi_j(g) - \varphi_j(g)\varphi_i(f) = 0,$$
$$\varphi_i^*(f)\varphi_j(g) - \varphi_j(g)\varphi_i^*(f) = 0;$$

(b) (статистика Ферми)

$$\varphi_i(f)\varphi_j(g) + \varphi_j(g)\varphi_i(f) = 0,$$
$$\varphi_i^*(f)\varphi_j(g) + \varphi_j(g)\varphi_i^*(f) = 0.$$

В зависимости от того, выполняется ли $S(-1) = 1$ или $S(-1) = -1$, мы говорим о спинорных полях целого или полуцелого спина. Тогда справедлива следующая замечательная

Теорема (о связи спина и статистики). Пусть $\{\varphi\}$ — поле типа S. Тогда если поле $\{\varphi\}$ подчиняется статистике Бозе, то оно является спинорным полем целого спина, а если статистике Ферми,— то полуцелого спина.

Теорема о связи спина и статистики для свободных полей появилась в работах Фирца и Паули (M. Fierz, Über die relativistische Theorie kräftfreier Teilchen mit beliebigem Spin, *Helv. Phys. Acta*, **12** (1939), 3—37; W. Pauli, On the connection between spin and statistics, *Phys. Rev.*, **58** (1940), 716—722). Общий случай рассмотрен в следующих статьях: G. Lüders, B. Zumino, Connection between spin and statistics, *Phys. Rev.*, **110** (1958), 1450—1453; N. Burgoyne, On the connection of spin with statistics, *Nuovo Cimento*, 8 (1958), 607—609. В случае когда имеется теория с несколькими различными полями, связь спина с соотношениями коммутации несколько усложняется. См. книгу Стритера и Вайтмана и работу: G. F. Dell'antonio, On the connection of spin with statistics, *Ann. Phys.*, **16** (1961), 153—157.

Для спинорных полей также существует *PCT*-теорема. *PCT*-оператор Θ действует на поля по правилу

$$\Theta\varphi_i(x)\Theta^{-1} = \sum_{j=1}^{d} A_{ij}\varphi_j^*(-x),$$

где A — некоторая известная матрица, зависящая только от S. Обсуждение этого вопроса см. в указанных выше статьях о *PCT* или в книге Стритера и Вайтмана.

Проводилось также рассмотрение «полей с бесконечным спином», когда $S(A)$ заменяется некоторым *бесконечномерным* представлением группы $SL(2, \mathbb{C})$. Одна из трудностей, связанных с этими полями, состоит в том, что для них могут не выполняться теоремы Баргмана—Холла—Вайтмана и *PCT*; см. A. Oksak, I. Todorov, Invalidity of the TCP-theorem for infinite-component fields, *Comm. Math. Phys.*, **11** (1968), 125—130.

Скажем, наконец, несколько слов о связи между спинорными полями и спином частиц. «Частицы» входят в теорию поля как собственные состояния оператора «массы» $M=\sqrt{H^2-\mathbf{P}^2}\equiv(\tilde{P}\cdot P)^{1/2}$. Подпространства $\mathcal{H}_m=\{\psi \mid M\psi=m\}$ инвариантны относительно $In\,SL(2, \mathbb{C})$, и представление $In\,SL(2, \mathbb{C})$ на $\mathcal{H}_m$ разлагается в прямую сумму неприводимых представлений. Если в этой сумме лишь одно слагаемое, то говорят, что имеется только одна частица массы m, а ее спин — инвариант, ассоциированный с представлением. В общем случае существует лишь довольно слабое соответствие между «спином», задаваемым представлением S, и спином частиц теории. Однако одна важная связь остается. Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — поля (не обязательно из одного и того же набора и не обязательно различные), то вектор $\varphi_1(f_1)\ldots\varphi_n(f_n)\psi_0$ может иметь ненулевые проекции на одночастичные состояния полуцелого спина (соответственно целого спина) только тогда, когда полуцелым спином обладает нечетное (соответственно четное) число полей φ_i. Это позволяет связать физический спин частицы с ее статистикой. Помимо этой одной связи, почти ничего добавить нельзя, так как может оказаться, что частиц больше, чем полей, или полей больше, чем частиц, или имеются частицы, спины которых не связаны со спинами полей. (Все эти явления происходят, например, с должным образом модифицированными свободными полями, основанными на простой модели из § X.7.)

§ *IX.9*. Идеи и доказательства этого раздела восходят к работам: E. Gagliardo, Caratterizzazioni delle trace sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabli, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **27** (1957), 284—305; N. Aronszajn, K. Smith, Theory of Bessel Potentials, I, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **11** (1961), 385—475. Более детальное исследование проблемы сужения см. в книге И. Стейна, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, «Мир», М., 1973, гл. VI.

Результаты о сужениях, которые мы рассматриваем, справедливы как для плоских, так и для искривленных подмногообразий. Гораздо более тонкими являются результаты, справедливые лишь для искривленных подмногообразий. Например, если $f\in L^p(\mathbb{R}^2)$ и $p<4/3$, то $\hat{f}$ можно сузить до L^2-функции на единичном круге, но при $p>1$ может оказаться, что сужение на отрезки координатных осей невозможно. Этот результат и его обобщения появились в работе: C. Fefferman, Inequalities for Strongly Singular Convolution Operators, *Acta Math.*, **124** (1970), 9—36.

Геометрическая мера, на которую мы ссылались непосредственно перед теоремой IX.39, представляет собой обобщение длины кривой. Интуитивно ее можно описать следующим образом. В любой точке $x\in M$ выберем ортонормированный набор векторов, касательных к M в этой точке, и возьмем меру Лебега на касательном пространстве относительно этих координат. Тогда мера очень малого множества около x приближенно равна мере Лебега его ортогональной проекции на касательное пространство. На обычном языке дифференциальной геометрии это есть мера на M, ассоциированная с метрикой на M, индуцированной естественной метрикой на $\mathbb{R}^n$.

§ *IX.10*. Аппарат волновых фронтов и осцилляторных интегралов был развит с целью изучения дифференциальных операторов в частных производных, а не только для решения скромной проблемы определения произведений обобщенных функций. Наше обсуждение служит введением в этот аппарат. При этом мы близко следуем некоторым частям работы Хёрмандера: L. Hörmander, Fourier integral operators, I, *Acta Math.*, **127** (1971), 79—183. В этой статье введено понятие волнового фронта, причем первоначальное определение его дается через псевдодифференциальные операторы (см. ниже). Эквивалентность определения Хёрмандера и нашего доказана в его статье. Понятия, аналогичные понятию волнового фронта, можно найти в работе: M. Sato, Hyper-functions and partial differential equations, Conference on Functional Analysis and Related Topics, Swets and Zeitlinger, Tokyo, 1969, pp. 91—94. Тщательно разобранные приложения аппарата волновых фронтов и осцилляторных интегралов к дифференциальным уравнениям в частных производных можно найти в статье: J. Duistermaat, L. Hörmander, Fourier integral operators, II, *Acta Math.*, **128** (1972), 183—269.

Интегральные операторы Фурье — естественный продукт нескольких направлений исследования. Псевдодифференциальные операторы естественно возникают как обобщение дифференциальных операторов в частных производных с переменными коэффициентами. Пусть $a_i \in C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и пусть p_i — однородный полином степени i. Тогда для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(x)\, p_i(-iD)\,\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i(x)\,\big(p_i(\theta)\,\hat{\varphi}(\theta)\big)^{\vee} =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\theta} \left(\sum_{i=1}^{N} a_i(x)\, p_i(\theta)\right) \hat{\varphi}(\theta)\, d\theta.$$

Так как p_i — полином степени i, то $\sum_{i=1}^{N} a_i(x)\, p_i(\theta)$ — символ порядка N. Если эту сумму заменить произвольным символом порядка N, то соответствующий оператор

$$(A\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\theta}\, a(x, \theta)\, \hat{\varphi}(\theta)\, d\theta$$

называется **псевдодифференциальным оператором** порядка N. Систематический анализ таких операторов был проведен Коном и Ниренбергом: J. Kohn, L. Nirenberg, On the algebra of pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, 18 (1965), 269—305.

Псевдодифференциальные операторы нулевого порядка называются **сингулярными интегральными операторами**. Такие операторы возникают в классической процедуре сведения граничной задачи в области Ω для эллиптических операторов к интегральному уравнению на $\partial\Omega$ (см. пример в § VI. 5). Обсуждение этой процедуры см., например, в работе: L. Hörmander, Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary value problems, *Ann. Math.*, 83 (1966), 129—209 (русский перевод в сб. «Псевдодифференциальные операторы», «Мир», М., 1967, стр, 166—296); см. также статью: R. Seeley, Elliptic singular integral equations, in Singular Integrals, Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1967, pp. 308—315, где дан подробный исторический обзор.

Для неэллиптических уравнений довольно естественно заменить $x\cdot\theta$ более сложной фазовой функцией, и по такому пути шли многие авторы до появления систематизированного подхода Хёрмандера: P. D. Lax, Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, *Duke J. Math.*, **24** (1957), 627—646; D. Ludwig, Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem, *Comm. Pure Appl. Math.*, 13 (1960), 473—508; В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические мётоды, Изд-во МГУ, М., 1965; Г. И. Эскин, Задача Коши для гиперболических уравнений в свертках, *Матем. сб.*, **74** (**116**) (1967), 262—297; Ю. В. Егоров, О канонических преобразованиях псевдодифференциальных операторов, *УМН*, **24**, вып. 5 (149) (1969), 235—236; L. Nirenberg, F. Trèves, On local solvability of linear partial differential equations, Parts I, II, *Comm. Pure Appl. Math.*, **23** (1970), 1—38; 459—510. Книга В. П. Маслова, в частности, содержит идеи, оказавшиеся решающими в дальнейшем развитии этой теории.

Волновые фронты особенно полезны при исследовании свойств регулярности (и нерегулярности) решений дифференциальных уравнений в частных производных. Имеется, например, следующее обобщение теоремы об эллиптической регулярности (см., в частности, указанную выше статью Дейстермата и Хёрмандера).

Теорема. Пусть $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant n} a_\alpha(x) D^\alpha$ — дифференциальный оператор в частных производных с коэффициентами из C^∞, и пусть f — некоторая C^∞-функция. Если $T \in \mathscr{D}'_{\mathbb{R}^n}$ есть решение уравнения $P(x, D)T = f$, то

$$WF(T) \subset \left\{ \langle x, k\rangle \,\middle|\, \tilde{P}(x, k) \equiv \sum_{|\alpha| = n} a_\alpha(x) k^\alpha = 0 \right\}. \qquad \text{(IX.66)}$$

Существует и еще большее уточнение этой теоремы, утверждающее, что если точка (x_0, k_0) из правой части (IX.66) лежит в $WF(T)$, то автоматически в $WF(T)$ целиком лежит и ассоциированное множество (бихарактеристическая полоса с начальной точкой (x_0, k_0)). Эта уточненная теория известна под названием «распространение сингулярностей», и корни ее лежат в геометрической оптике.

Пример 1 указал нам О. Э. Ланфорд III.

Теорема IX.44(f) допускает естественную переформулировку, если рассматриваются распределения на многообразии M. Она утверждает, что $WF(T)$ — подмножество кокасательного к M пучка.

Теорема IX.46 имеет приложение к проблеме сужения обобщенной функции на вложенное подмногообразие, т. е. к проблеме, которую мы обсуждали с другой точки зрения в § IX.9. Рассмотрим случай кривой, вложенной в $\mathbb{R}^n$ (общий случай см. в работе Хёрмандера: Fourier integral operators, I, теорема 2.5.11). Пусть F: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ — инъективная C^∞-функция, удовлетворяющая условиям: (i) $\operatorname{grad} F(t) \neq 0$ при любом t; (ii) $\lim_{t \to \pm\infty} |F(t)| = \infty$ (такая F называется регулярно вложенной собственной простой гладкой кривой). Любая функция $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет «сужение» на кривую F, а именно $F_*(g)(t) = g(F(t))$. Пусть теперь $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Можно ли придать разумный смысл символу $F_*(T)$ хотя бы для некоторого множества распределений $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$? Чтобы сделать это, перефразируем определение $F_*(g)$. Для заданной функцин $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ пусть $f\delta_F$ — распределение из $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, задаваемое равенством

$$(f\delta_F)(g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(F(t))\, dt.$$

Если $F_*(g)$ рассматривать как распределение, то

$$F_*(g)(f) = (f\delta_F)(g).$$

Уместнее сказать, что если выбрана функция $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, тождественно равная единице в окрестности множества $\{F(t) \mid t \in \operatorname{supp} f\}$, то

$$F_*(g)(f) = [g(f\delta_F)](\chi), \qquad \text{(IX.67)}$$

где $g(f\delta_F)$ — произведение функции g и обобщенной функции $f\delta_F$. Если множество $WF(T) \oplus WF(f\delta_F)$ отделено от $\{\langle x, 0\rangle\}$, то можно применить (IX.67) для определения $F_*(T)$! Итак, следует найти $WF(f\delta_F)$. Простое построение (задача 67) показывает, что $WF(\delta_F)=\{\langle x, k\rangle \mid x=F(t);\ k\cdot\operatorname{grad} F=0,\ k\neq 0\}$, т. е. это есть **ортогональный пучок** $N(F)$ к кривой F, и что $WF(f\delta_F)\subset \subset WF(\delta_F)$. Следовательно, в силу теоремы IX.46 справедлива такая

Теорема. Если распределение $T\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ имеет волновой фронт, не пересекающийся с ортогональным пучком $N(F)$, то $F_*(T)$ можно определить формулой (IX.67) и, кроме того,

$$WF(F_*(T))\subset F^*(WF(T))\equiv\{\langle t, \operatorname{grad} F\cdot k\rangle \mid \langle F(t), k\rangle\in WF(T)\}.$$

ЗАДАЧИ

1. Найдите фурье-образ функции $3x^2+1$.

†*2.* Восполните детали, касающиеся сходимости римановых сумм к интегралу, в конце доказательства теоремы IX.1.

3. (a) Пусть R — операция вращения и R^t — транспонированная операция. Пусть $f\in\mathscr{S}$. Докажите, что $\widehat{f\circ R}=\hat{f}\circ R^t$.

(b) Пусть D_λ — отображение $D_\lambda x=\lambda x$ на $\mathbb{R}^n$. Пусть $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что

$$\widehat{f\circ D_\lambda}=\lambda^{-n}\hat{f}\circ D_{\lambda^{-1}}.$$

(c) Пусть $T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что

$$(\widehat{T\circ R})=\hat{T}\circ R^t,\qquad \widehat{T\circ D_\lambda}=\lambda^{-n}\hat{T}\circ D_{\lambda^{-1}}.$$

4. Вычислите с помощью уравнения (V.4) фурье-образ главного значения по Коши $\mathscr{P}(1/x)$.

5. Вычислите фурье-образ функции $f(x)=e^{-\alpha x^2/2}$, действуя следующим образом:

(a) Докажите, что $-\lambda\hat{f}(\lambda)=\alpha d\hat{f}(\lambda)/d\lambda$, и выведите отсюда, что $\hat{f}(\lambda)= =ce^{-\lambda^2/2\alpha}$.

(b) Докажите с помощью формулы Планшереля, что $c=1/\sqrt{\alpha}$.

(c) Проверьте явным образом в этом примере формулу обращения Фурье.

6. Пусть $\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$. Положим $\psi_n=x^n\in\mathscr{H}$ при $n=0, 1, \ldots$.

(a) Докажите, что $\sum\limits_{m=0}^{M}((ik)^m/m!)\,\psi_m \xrightarrow[M\to\infty]{} e^{ikx}$ на $\mathscr{H}$ в топологии нормы.

(b) Предположим, что $\eta\in\mathscr{H}$ и $(x^m, \eta)=0$ для всех m. Докажите, что $\eta=0$. [*Указание*: покажите, что $\widehat{\eta e^{-x^2}}=0$.]

(b′) Получите результат (b) без обращения к преобразованию Фурье. [*Указание*: используйте факт тотальности множества функций $(x\pm i)^{-n}$ в $C_\infty(\mathbb{R})$ и формулу $(x+i)^{-1}=i\int\limits_0^\infty e^{-s}e^{isx}\,ds$.]

(c) Пусть $\{H_n\}$ — ортонормированное множество, полученное из $\{\psi_n\}$ с помощью ортогонализации Грама—Шмидта. Докажите, что $\{H_n\}$ — базис в $\mathscr{H}$.

(d) Докажите, что $\{H_n(x)e^{-x^2/2}\}_{n=0}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R}, dx)$.

(e) Докажите, что $H_n(x)e^{-x^2/2}$ совпадает с n-й функцией Эрмита (определенной в дополнении к § V.3).

7. Пусть $\{A_n(\lambda)\}$ — полиномы, определенные формулой

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda)\frac{\alpha^n}{n!} = e^{-\alpha^2+2\alpha\lambda}.$$

Положим $\phi_n(\lambda) = (2^n n!)^{-1/2} A_n(\lambda)e^{-\lambda^2/2}$.

(a) Докажите, что

$$\phi_n(\lambda) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!}} e^{\lambda^2/2}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^n e^{-\lambda^2},$$

т. е. $\phi_n(\lambda)$ совпадают с функциями Эрмита из дополнения к § V.3.

(b) Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ и $(f, \phi_n) = 0$ для всех $n = 0, 1, \ldots$. Докажите, что для всех a

$$\int f(x)e^{-(x-a)^2/2}\,dx = 0.$$

(c) Покажите с помощью преобразования Фурье, что $f = 0$, если $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-(x-a)^2/2}\,dx = 0$ для всех a.

(d) Выведите отсюда, что $\{\phi_n\}$ — базис в $L^2(\mathbb{R}, dx)$.

8. Цель этой задачи — доказать теорему Планшереля и формулу обращения с помощью функций Эрмита. Пусть

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right) \quad \text{и} \quad A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right).$$

(a) Докажите, что $\widehat{A^\dagger f}(\lambda) = -i(A^\dagger\hat{f})(\lambda)$, если $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

(b) Докажите, что $\hat{\phi}_n = (-i)^n\phi_n$.

(c) Считая известным, что функции Эрмита образуют базис в $L^2(\mathbb{R})$, докажите теорему Планшереля и формулу обращения.

9. Предположим, что C — непрерывное отображение $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ в $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, коммутирующее со сдвигами. Докажите существование такого $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, что $C(\varphi) = T * \varphi$ для всех $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. [*Указание*: если $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, то $T(\varphi) = (T * \tilde{\varphi})(0)$.]

10. Докажите (без обращения к преобразованию Фурье), что при фиксированной $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ отображение $g \mapsto f * g$ есть непрерывное линейное преобразование из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

11. Пусть μ_1 и μ_2 — конечные борелевы меры на $\mathbb{R}^n$. Положим

$$(\mu_1 * \mu_2)(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_1(E-y)\, d\mu_2(y).$$

(a) Докажите, что $\mu_1 * \mu_2$ — конечная борелева мера на $\mathbb{R}^n$, $\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1$ и для любой $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$

$$(\mu_1 * \mu_2)(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\, d\mu_1(x)\, d\mu_2(y).$$

(b) Докажите, что $\mu_1 * \mu_2$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, если либо μ_1, либо μ_2 абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Приведите пример, когда $\mu_1 * \mu_2$ не абсолютно непрерывна.

12. Преобразования Фурье борелевых мер с единичной полной массой на $\mathbb{R}$ иногда называют «характеристическими функциями». Говорят, что характеристическая функция $E(\lambda)$ **бесконечно делима**, если для любого положительного целого n существует характеристическая функция $E_n(\lambda)$, такая, что $E(\lambda) = (E_n(\lambda))^n$.

(a) Пусть μ — борелева мера единичной массы на $\mathbb{R}$ и E — соответствующая характеристическая функция. Докажите, что E бесконечно делима тогда и только тогда, когда для всех n существует борелева мера μ_n единичной массы, такая, что

$$\mu = \underbrace{\mu_n * \mu_n * \ldots * \mu_n}_{n \text{ раз}}.$$

(b) Покажите, что

$$E(\lambda) = \exp(i\alpha\lambda - \beta\lambda^2/2) + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda x} - 1)\, d\rho$$

— бесконечно делимая характеристическая функция, если $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geqslant 0$ и ρ — борелева мера конечной массы на $\mathbb{R}$. Выведите формулу (свертки) для соответствующих мер в терминах α, β и ρ. Что за мера отвечает $\rho = 0$? Что за мера отвечает $\alpha = 0 = \beta$ и $\rho = \delta(x - x_0)$?

Замечание: существует описание фурье-образов всех бесконечно делимых обобщенных функций, известное как формула Леви — Хинчина. См., например, L. Breiman, Probability, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1968, pp. 193—195.

13. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и K — компактное подмножество в Ω. Докажите, что в $C_0^\infty(\Omega)$ существует функция, равная единице на K. [*Указание*: см. задачу 61 гл. V.]

14. Цель этого упражнения — доказать новым способом формулу обращения Фурье. Предположим, что $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(a) Докажите, что существует $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \frac{\sin x}{x}\, dx$. Обозначим этот предел через d. Покажите, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \frac{\sin Rx}{x}\, dx = d \text{ для любого } R > 0.$$

(b) Докажите, что

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{f(y-u)+f(y+u)}{2} - f(y)\right] \frac{\sin Ru}{u}\, du \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

[Используйте лемму Римана — Лебега.]

(c) С помощью (b) выведите равенство

$$4df(y) = \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-R}^{R} e^{i(y-x)\cdot k} f(k)\, dk \right) dx.$$

(d) Докажите, что $f(y) = (\sqrt{2\pi}/4d) \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky}\, \hat{f}(k)\, dk.$

(e) Полагая $f(x) = e^{-x^2/2}$, докажите, что $d = \pi/2$.

15. Цель этого упражнения — дать новое доказательство теоремы Планшереля.

(a) Дайте прямое доказательство равенства

$$\widehat{f*g} = (2\pi)^{n/2}\, \hat{f}\, \hat{g}$$

при $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Пусть $\tilde{f}(x) = f(-x)$; докажите, что

$$(f*\bar{\tilde{f}})(y) = \int |\hat{f}(k)|^2 e^{iky}\, dk.$$

(c) Положите $y = 0$ и докажите, что

$$\int |f(x)|^2\, dx = \int |\hat{f}(k)|^2\, dk.$$

***16.** Докажите, что отображение $L^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\wedge} C_\infty(\mathbb{R}^n)$ не сюръективно, указав функцию из $C_\infty(\mathbb{R}^n)$, не входящую в область значений этого отображения.

17. Цель этой задачи — развить теорию преобразования Фурье на $L^1(\mathbb{R}^n)$ без обращения к $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

(a) Докажите путем прямого вычисления, что при $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{f}(\lambda) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda x} f(x)\, dx$$

— ограниченная непрерывная функция. [*Указание*: примените теорему о мажорированной сходимости.]

(b) Докажите, что если $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то $\hat{f}(\lambda) \longrightarrow 0$ при $|\lambda| \longrightarrow \infty$. [*Указание*: докажите, что $2\hat{f}(\lambda) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\lambda} (f(x) - f(x - \pi\lambda/|\lambda|^2))\, dx$.]

(c) Докажите путем прямого вычисления, что $(2\pi)^{n/2} \hat{f}\hat{g} = \widehat{f*g}$.

18. Найдите функцию $f(x)$, обладающую всеми свойствами положительно определенной функции, кроме непрерывности. Какой положительно определенной функции она равна почти всюду?

19. Укажите положительно определенную обобщенную функцию, которая не является обычной функцией. Что представляет собой ее фурье-образ?

**20.* Докажите теорему Бохнера—Шварца (теорему IX.10). [*Указание*: подражайте нашему доказательству теоремы Бохнера, используя внутреннее произведение $(\varphi, \psi) = T(\tilde{\bar{\varphi}} * \psi)$ и формулу $T(\tilde{\bar{\varphi}} * \varphi_x) = (T * \bar{\varphi} * \tilde{\varphi})(x)$.]

21. Что говорит обобщение теоремы Пэли—Винера на распределения с компактным носителем о фурье-образах распределений с носителем в начале координат? Получите тот же результат с помощью прямого применения теоремы V.11.

22. Пусть C—выпуклое компактное уравновешенное множество в $\mathbb{R}^n$. Пусть

$$C^\circ = \{k \mid k \cdot x \geqslant -1 \text{ для всех } x \in C\}$$

—его поляра. Пусть ρ—функционал Минковского на множестве C°, т. е.

$$\rho(\eta) = \sup_{x \in C} (\eta \cdot x) = \inf_{\lambda > 0} \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda\eta \in C^\circ\}.$$

Докажите следующий вариант теоремы Пэли—Винера:

Носитель функции $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ лежит в C тогда и только тогда, когда $\hat{f}$ есть сужение на $\mathbb{R}^n$ целой функции $\hat{f}(z)$, для которой при любом n существует такая константа D_n что

$$|\hat{f}(z)| \leqslant D_n (1 + |z|^2)^{-n} e^{-\rho(\operatorname{Im} z)}.$$

23. Проведите обобщение теоремы IX.16 для случая, когда конус $\Gamma_{\alpha, \theta}$ заменен произвольным собственным открытым выпуклым конусом Γ и когда

$$\Gamma^* = \{\eta \mid \eta \cdot x \geqslant 0 \text{ для всех } x \in \Gamma\}.$$

24. (a) Пусть f—измеримая функция на пространстве с мерой $\langle M, \mu \rangle$. Пусть

$$m_f(t) = \mu\{x \mid |f(x)| > t\}.$$

Докажите, что если $f \in L^p(M, d\mu)$, то

$$\int_M |f|^p \, d\mu = -\int_0^\infty t^p \, dm_f(t) \qquad \text{(интеграл Стильтьеса).}$$

(b) Докажите, что если $f \in L^p(M, d\mu)$, то

$$m_f(t) \leqslant \|f\|_p^p \, t^{-p}.$$

(c) Докажите, что $f \in L^p(M, d\mu)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^\infty t^{p-1} m_f(t) \, dt < \infty,$$

и что в этом случае $\|f\|_p^p = p \int_0^\infty t^{p-1} m_f(t) \, dt$.

25. Докажите, что в случае, когда $r < p < s$ и $f \in L^r_{\mathrm{w}} \cap L^s_{\mathrm{w}}$, функция f лежит в L^p и

$$\|f\|_p^p \leqslant \left(\frac{1}{p-r} + \frac{1}{s-p}\right) [\|f\|_{r,\,\mathrm{w}}^r]^{(s-p)/(s-r)} [\|f\|_{s,\,\mathrm{w}}^s]^{(p-r)/(s-r)}.$$

26 (интерполяционная теорема Ханта).

(a) Пусть $1 \leqslant p_0 < p_1 < \infty$, $0 < t < 1$, $p^{-1} = tp_1^{-1} + (1-t)p_0^{-1}$. Покажите, что $f \in L_w^p$ тогда и только тогда, когда существует такое C, что для $\lambda > 0$ функцию f можно представить в виде $f = f_{0,\lambda} + f_{1,\lambda}$, где $f_{0,\lambda} \in L^{p_0}$, $f_{1,\lambda} \in L^{p_1}$ и

$$\|f_{0,\lambda}\|_{p_0} \leqslant C|\lambda|^{1-(p/p_0)}, \qquad \|f_{1,\lambda}\|_{p_1} \leqslant C|\lambda|^{1-(p/p_1)}.$$

[*Указание*: испробуйте $f_{0,\lambda}(x) = f(x)$, если $|f(x)| > \lambda$.]

(b) Докажите, что $\|f\|_{p,w} = C$, где C — наименьшая из констант, которые можно применять в части (a) этой задачи.

(c) С помощью (a) и (b) докажите интерполяционную теорему Ханта.

27. (a) Пусть $f \in L^p(M, d\mu)$. Докажите, что $t^p\mu\{x \mid |f(x)| > t\} \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow 0$ или ∞.

(b) Задайте метрику на $L_w^p(M, d\mu)$ соотношением $\rho(f, g) = \|f-g\|_{p,w}$. Докажите, что в этой метрике $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ не плотно в $L_w^p(\mathbb{R}^n, dx)$.

Замечание. В теореме Ханта T определяется в L_w^p не при помощи соображений плотности (которые, как явствует из предыдущего, не работают), а путем демонстрации возможности представления $f \in L_w^p$ при $p_0 < p < p_1$ в виде $f = f_0 + f_1$, где $f_0 \in L^{p_0}$ и $f_1 \in L^{p_1}$. Благодаря этому T можно определить равенством $Tf = Tf_0 + Tf_1$.

†*28.* Восполните детали вывода неравенства Соболева (пример 3 в § 4).

29. Докажите, что расширение преобразования Фурье на $L^p(\mathbb{R}^n)$, которое дает теорема Хаусдорфа — Юнга, совпадает с сужением на $L^p(\mathbb{R}^n)$ преобразования Фурье на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

30 (слабая теорема Хаусдорфа — Юнга). Докажите, что $\hat{f} \in L_w^q$, если $f \in L_w^p$, где $1 < p < 2$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

31. Докажите теорему Юнга в случае $1 \leqslant p$, $q \leqslant 2$, $r \geqslant 2$, применяя неравенство Гёльдера и теорему Хаусдорфа — Юнга.

32 (слабая теорема Юнга). Примените обобщенное неравенство Юнга для доказательства того, что $f * g \in L_w^r$, если $f \in L_w^p$, $g \in L_w^q$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1 + r^{-1}$, $1 < p, q, r < \infty$.

**33.* Дайте доказательство предложения 1 из дополнения к § IX.4, не использующее интерполяции.

34. (a) Пусть $\|\cdot\|_0$ есть L^2-норма на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\|f\|_1 = \|f\|_0 + |f(0)|$. Покажите, что $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_1$ не согласованы. Тем не менее вычислите интерполирующие пространства X_t.

(b) Пусть $X = C[0, 1]$. Положим $\|f\|_0 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$. Пусть $\|f\|_1 =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|f(r_n)|,$$ где $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторое упорядочение рациональных чисел. Покажите, что $\|f\|_+ = 0$ для всех $f \in X$.

†35. Восполните детали доказательства равенства $X_t = \mathcal{H}_{m_t}$ в примере 3 из дополнения к § IX.4.

36. Предположим, что $\alpha \in \mathbb{R}$, $p > 1$. Пусть H^p_α — пополнение $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме $\|\varphi\|_{\alpha, p} = \|(1+k^2)^{\alpha/2}\hat{\varphi}\|_p$.

(a) Покажите, что нормы $\|\cdot\|_{\alpha, p}$ согласованы.

(b) Пусть $p_0, p_1 > 1$ и $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ фиксированы. Докажите, что пространства X_t, интерполирующие $H^{p_0}_{\alpha_0}$ и $H^{p_1}_{\alpha_1}$, равны $H^{p_t}_{\alpha_t}$ для каждого $0 \leqslant t \leqslant 1$, где $p_t = tp_1^{-1} + (1-t)p_0^{-1}$ и $\alpha_t = t\alpha_1 + (1-t)\alpha_0$.

*37. Пусть X — комплексное векторное пространство с согласованными нормами $\|\cdot\|^{(0)}$ и $\|\cdot\|^{(1)}$. Цель этой задачи — дать набросок доказательства равенства $X_t = \tilde{X}_t$ из дополнения к § 4. Мы пользуемся введенными там обозначениями.

(a) Покажите, что если $x \in X_0 \cap X_1$, то в X существуют такие x_n, что $x_n \longrightarrow x$ по обеим нормам.

(b) С помощью (a) и неравенства

$$\|x\|_+ \leqslant \|x\|^{(t)} \leqslant \max\{\|x\|^{(0)}, \|x\|^{(1)}\}$$

докажите, что для вывода равенства $\tilde{X}_t = X_t$ достаточно доказать, что $X_0 \cap X_1$ плотно в $\tilde{X}_t$.

(c) Определим $\mathcal{F}_\infty$ как множество тех $f \in \mathcal{F}$, для которых

(i) $\|f(ia)\|^{(0)} \longrightarrow 0$ при $a \longrightarrow \pm\infty$;

(ii) $\|f(1+ia)\|^{(1)} \longrightarrow 0$ при $a \longrightarrow \pm\infty$;

(iii) $\|f(z)\|_+ \longrightarrow 0$ при $\operatorname{Im} z \longrightarrow \pm\infty$ в полосе равномерно по $\operatorname{Re} z$.

Докажите, что $\mathcal{F}_\infty/(\mathcal{F}_\infty \cap K_t) = \mathcal{F}(X)/K_t$.

(d) Предположим, что $h \in \mathcal{F}(X)$ и $h(z) = h(z+ia)$ для всех $z \in S$. Определим

$$y_n(t) = a^{-1}\int_0^a e^{-2\pi(t+is)n/a}\, h(t+is)\, ds.$$

Покажите, что $y_n(t) = y_n$ не зависит от t, $y_n \in X_0 \cap X_1$ и

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=-m}^{m} y_n e^{2\pi i n z/a} \xrightarrow{\ |||\cdot|||\ } h(z),$$

где сходимость равномерна относительно y по норме $\|\cdot\|^{(1)}$ для $z = 1+iy$ и по норме $\|\cdot\|^{(0)}$ для $z = iy$.

(e) Покажите, что множество функций из $\mathcal{F}_\infty$ вида $\exp(\beta z^2) \times \times \left(\sum_{n=1}^{N} x_n \exp(\alpha_n t)\right)$, где $x_n \in X_0 \cap X_1$, $\beta > 0$, α_n и N произвольны, плотно в $\mathcal{F}_\infty$. [*Указание*: поскольку $\exp(2\beta z^2) f \xrightarrow{\beta \to 0} f$, достаточно взять только функции вида $g = \exp(2\beta z^2) f$. Пусть $h = \exp(\beta z^2) f$. Покажите, что

$$h_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(t + inm)$$

— корректно определенный периодический элемент из $\mathcal{F}(X)$. Затем примените (d) и утверждение $\lim_{n\to\infty} \exp(\beta z^2) h_n = g$.]

(f) Заключите, что $X_t = \tilde{X}_t$.

38. (a) Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированное множество (не обязательно полное) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Покажите, что $\|C\varphi_n\| \to 0$ для любого компактного оператора C на $\mathcal{H}$.

(b) Пусть $F \in L^1(\mathbb{R}^n, dx)$. Определим

$$(A\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x-y)\varphi(y)\,dy.$$

Докажите, что A не является компактным оператором, если только F — ненулевая функция.

39. (a) Пусть $f \in L^p_{\mathrm{w}}$, $g \in L^{p'}_{\mathrm{w}}$, где $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$. Предположим, что q удовлетворяет неравенству $q^{-1} + p^{-1} < 1$. Докажите, что тогда для всех $h \in L^q$

$$\|f(g * h)\|_q \leqslant C_{p,\,q} \|f\|_{p,\,\mathrm{w}} \|g\|_{p',\,\mathrm{w}} \|h\|_q.$$

(b) Пусть $0 < s < n/q$. Пусть $|p|$ — оператор $\sqrt{-\Delta}$ на $L^q(\mathbb{R}^n)$. Покажите, что $|x|^{-s} |p|^{-s}$ определяет ограниченное отображение $L^q(\mathbb{R}^n)$ в себя.

40. Пусть $N(h, f)$ — оператор $g \longmapsto h(f * g)$ на $L^2(\mathbb{R}^n)$.

(a) Докажите, что $N(h, f) \in \mathcal{J}_2$, если $h, f \in L^2$, и $\|N(h, f)\|_{\mathcal{J}_2} \leqslant \|h\|_2 \|f\|_2$.

(b) Докажите, что $\|N(h, f)\|_{\mathrm{op}} \leqslant \|h\|_p \|f\|_q$, если $p^{-1} + q^{-1} = 1$ и $p \geqslant 2$.

(c) Докажите, что $N(h, f)$ — компактный оператор, если $h \in L^p$, $g \in L^q$, $2 \leqslant p < \infty$.

(d) Докажите, что $N(h, f) \in \mathcal{J}_p$, если $f \in L^1 \cap L^2$, $h \in L^p$, $2 \leqslant p < \infty$. [*Указание*: используйте интерполирование.]

†*41.* В этой задаче дается набросок рассуждения с применением теории функций комплексного переменного, которое используется в доказательстве теоремы Мальгранжа — Эренпрейса.

(a) Пусть $f(z)$ — функция одного комплексного переменного, аналитическая в круге $|z| \leqslant 1$, и пусть $p(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_0$. Докажите, что

$$|a_0 f(0)| \leqslant (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})\, p(e^{i\theta})|\, d\theta.$$

[*Указание*: пусть $q(z) = \left(\prod_j (\bar{z}_j z - 1)/(z - z_j)\right) p(z)$, где z_j — нули f, лежащие внутри единичного круга. Воспользуйтесь тем, что q аналитична в замкнутом круге и $|q(z)| = |p(z)|$ при $|z| = 1$.]

(b) Пусть f и p такие, как в (a). Докажите, что

$$|a_k f(0)| \leqslant \frac{m!}{k!\,(m-k)!}(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})\,p(e^{i\theta})|\,d\theta.$$

(c) Пусть $F(\zeta)$ — целая функция n комплексных переменных и $p(\zeta)$ — полином степени n. Предположим, что $g(\zeta)$ — неотрицательная интегрируемая функция с компактным носителем, зависящая только от абсолютных значений $|\zeta_i|$, $i=1, \ldots, n$. Докажите, что

$$|F(0)\,D^{\alpha}p(0)|\int_{\mathbb{C}^n}|\zeta|^{\alpha}g(\zeta)\,d\zeta \leqslant C_0\int_{\mathbb{C}^n}|F(\zeta)\,p(\zeta)|\,g(\zeta)\,d\zeta$$

($d\zeta$ — мера Лебега на $\mathbb{C}^n$, а C_0 — константа, зависящая от α и m).

(d) Пользуясь частью (c), докажите неравенство

$$|\tilde{q}(x)\,\hat{\varphi}(x)| \leqslant C_1\int_{|\zeta|\leqslant\varepsilon}|\hat{\varphi}(x+\zeta)\,q(x+\zeta)|\,d\zeta,$$

нужное для доказательства теоремы Мальгранжа — Эренпрейса.

Ссылка: К. Иосида, Функциональный анализ, «Мир», М., 1967, стр. 257—259.

42. Найдите явное выражение для фундаментального решения дифференциального уравнения $u''=f$.

43. Что говорят о регулярности собственных функций гамильтониана атома теоремы регулярности из § 6?

Ссылки: T. Kato, *Comm. Pure Appl. Math.*, **10** (1957), 151—171; § XIII.10 в томе 3 этой монографии.

44. (a) Определим оператор $\bar{\partial}$ на множестве бесконечно дифференцируемых функций из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ соотношением $\bar{\partial}f=\partial f/\partial x+i\partial f/\partial y$, где $z\in\mathbb{C}$ представлено в виде $z=x+iy$. Докажите, что условие $\bar{\partial}f=0$ является переформулировкой уравнений Коши — Римана.

(b) Пусть $T\in\mathcal{D}'_{\mathbb{R}^2}$, где $\mathbb{R}^2$ представляет комплексную плоскость $\mathbb{C}$, и пусть $\bar{\partial}=\partial/\partial x+i\partial/\partial y$. Докажите, что если $\bar{\partial}T=0$, то T — аналитическая функция. [*Указание*: докажите, что $\Delta T=0$, и воспользуйтесь теоремой об эллиптической регулярности.]

(c) Пусть $T\in\mathcal{D}_{\mathbb{R}^{2n}}$. Предположим, что $\bar{\partial}_j T=0$ для всех $j=1, 2, \ldots, n$. Докажите, что T — аналитическая функция.

45. (a) Докажите, что $Vu\in W_k(\Omega)$, если Ω — ограниченное открытое множество, $V\in C^m(\Omega)$, $u\in W_k(\Omega)$ и $k\leqslant m$.

(b) Докажите, что $u\in C^l(\Omega)$ при $l<m-(n/2)+2$, если u — слабое решение уравнения $-\Delta u+Vu=Eu$ и $V\in C^m(\Omega)$.

**46*. С помощью неравенства Соболева (IX.19) докажите теорему L^p-вложения Соболева, т. е. утверждение о том, что $g=((1+k^2)^{-\alpha}\hat{f})^{\vee}\in L^q$, если $q^{-1}=p^{-1}-n\alpha^{-1}$ ($\alpha>0$, $1<p$, $q<\infty$) и $f\in L^p$.

47. Предположим, что $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ и $\partial f/\partial x_i \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $i=1, 2, 3$. Докажите, что $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ для всех $p < 6$. [*Указание*: используйте теорему Планшереля, функцию $(1+|k|^2)^d$ и теорему Хаусдорфа — Юнга.]

48. Пусть $\{f_\alpha\}_{|\alpha| \leqslant m}$ — семейство $C^{|\alpha|}$-функций на $\mathbb{R}^n$. Пусть T и S — дифференциальные операторы:

$$T\varphi = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \bar{f}_\alpha D^\alpha \varphi, \qquad S\varphi = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (f_\alpha \varphi).$$

Пусть $T_{\min}$ обозначает оператор T, определенный на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, а $T_{\max}$ — оператор T, определенный на $\{\varphi \mid \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n),\ T\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$. Аналогично определим $S_{\min}$ и $S_{\max}$.

(a) Докажите, что $S^*_{\min} = T_{\max}$, $T^*_{\min} = S_{\max}$.

(b) Докажите, что $T_{\min}$ в существенном самосопряжен тогда и только тогда, когда одновременно $T_{\min} = S_{\min}$ и $T_{\max}$ самосопряжен.

Замечание. В случае, когда $T_{\min} = S_{\min}$, говорят, что T *формально самосопряжен*. Однако может случиться, что T формально самосопряжен, но даже не самосопряжен в существенном; пример: $-\Delta - x^4$ на $\mathbb{R}^n$. Подробнее это обсуждается в дополнении к § X.1 и в § X.5.

49. Пусть $H_n(x; \varkappa) = \mathcal{F}^{-1}((\lambda^2+\varkappa^2)^{-1})$, так что $G_0(x, y) = H_n(x-y; \varkappa)$ — свободная функция Грина на $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $\varkappa > 0$.

(a) Докажите, что $H_n(x; \varkappa) = \varkappa^{n-2} H_n(x\varkappa; 1)$.

(b) Докажите, что

$$H_n(x; 1) = (4\pi)^{-n/2} \int_0^\infty e^{-\delta} e^{-|x|^2/4\delta} \frac{d\delta}{\delta^{n/2}}. \qquad \text{(IX.68)}$$

[*Указание:* воспользуйтесь явным видом свободного пропагатора и соотношением

$$(H_0+1)^{-1} = \int_0^\infty e^{-t} e^{-tH_0}\, dt.]$$

(c) Докажите, что $H_n(x; 1)$ монотонно убывает по x, положительна и при $n \geqslant 3$

$$H_n(x; 1) \leqslant |x|^{2-n}.$$

(d) Докажите, что при $n \geqslant 3$

$$\lim_{|x| \to 0} |x|^{n-2} H_n(x; 1) = (4\pi)^{-n/2} \int_0^\infty e^{-1/4y} \frac{dy}{y^{n/2}}.$$

[*Указание к* (c) *и* (d): положите $y = \delta/|x|^2$.]

(e) Докажите, что $\lim\limits_{|x| \to \infty} e^{|x|} |x|^{n/2-1/2} H_n(x; 1)$ существует и отличен от нуля. [*Указание:* положите $y = 2\delta/|x|$.]

50. (a) Пусть $T_\alpha = |x|^{-\alpha} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < n$. Докажите, что $\hat{T}_\alpha$ — бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, причем $\hat{T} \circ R = \hat{T}$

для любого вращения R и $\hat{T}\circ D_\lambda=\lambda^{-n+\alpha}\hat{T}$ для D_λ, определенного в задаче 3. Выведите отсюда, что

$$\widehat{|x|^{-\alpha}}(k)=C_{\alpha,n}|k|^{-n+\alpha}.$$

(b) Пусть $T_{\alpha,\lambda}=(|k|^2+\lambda^{-2})^{-\alpha/2}$, $0<\alpha<n$, на $\mathbb{R}^n$. Докажите, что $\hat{T}_{\alpha,\lambda}\to\hat{T}_{\alpha,0}$ при $\lambda\to 0$ равномерно на компактных множествах из $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Докажите, что $\hat{T}_{\alpha,\lambda}=\lambda^{-n+\alpha}\hat{T}_{\alpha,1}\circ D_{\lambda^{-1}}$, и выведите отсюда, что $|k|^{n-\alpha}\hat{T}_{\alpha,1}(k)$ ограничена в единичном шаре.

(c) Докажите, что $\hat{T}_{\alpha,1}(k)$ экспоненциально убывает и $\hat{T}_{\alpha,1}(k)\in L_w^{n/(n-\alpha)}$.

51. Пусть $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\alpha>0$. Докажите, что существует такая константа $C_{\alpha,\varphi}$, что

$$\sup_{|x|\leqslant 1}\left|\left(\frac{x}{t}\right)^\alpha(e^{-itH_0}\varphi)(x)\right|\leqslant C_{\alpha,\varphi}t^{-n/2}\quad\text{при } t>1.$$

Ссылка: J. Kupsch and W. Sandas, Møller Operators for Scattering on Singular Potentials, *Comm. Math. Phys.*, 2 (1966), 147—154.

52. Пусть $H_0=-\Delta$ на $\mathbb{R}^n$.

(a) Докажите, что $-\Delta$ при $n\geqslant 4$ в существенном самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$.

(b) Предположим, что $n\leqslant 3$ и $A=-\Delta\restriction C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. Пусть $\varphi=\widehat{(\lambda^2-i)^{-1}}$. Докажите, что $\varphi\in D(A^*)$ и $A^*\varphi=i\varphi$. Заключите отсюда, что $-\Delta$ при $n\leqslant 3$ не самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$.

53. Докажите с помощью представления Челена—Лемана, что квантованное поле $\varphi(x)$ не может быть корректно определенной операторнозначной *функцией* на $\mathbb{R}^4$. [*Указание:* докажите, что в таком случае среднее $(\psi_0,\ \varphi(x)\varphi(y)\psi_0)$ было бы ограниченной функцией, что в итоге давало бы равенство $\varphi(f)\psi_0=0$ для всех $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, нарушающее цикличность ψ_0.]

54. Пусть $f_n\to f$ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$. Пусть $\psi\in D$. Используя свойства 3 и 4 из § IX.8, докажите, что отображение $\langle f,g\rangle\mapsto\langle\psi,\ \varphi(f)\varphi(g)\psi\rangle$ непрерывно по совокупности переменных. Выведите отсюда, что $\varphi(f_n)\psi\to\varphi(f)\psi$.

55. (a) Пусть $g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, причем $\int_{-\infty}^{\infty}g(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1=0$ для всех $\langle x_2,\ldots,x_n\rangle\in\mathbb{R}^{n-1}$. Докажите, что $g=\partial h/\partial x_1$ для некоторой функции $h\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(b) Пусть $T\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, причем $T(x_1+a,x_2,\ldots,x_n)=T(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ для всех a в том смысле, что $T(U_af)=T(f)$ для всех $f\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, где $(U_af)(x_1,\ldots,x_n)=f(x_1-a,\ldots,x_n)$. Докажите, что существует такая $S\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$, что

$$T(x_1,x_2,\ldots,x_n)=S(x_2,\ldots,x_n)$$

в том смысле, что $T(f)=S(I_1(f))$ для всех $f\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, где $(I_1(f))(x_2,\ldots,x_n)=\int f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1$. [*Указание:* возьмите

$F \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ со свойством $\int F(t)\,dt = 1$. Вспомните задачу 47 гл. V, откуда следует, что $\partial T/\partial x_1 = 0$. Наконец, воспользуйтесь частью (a) для доказательства равенства

$$g = f - F(x_1)\, I_1(f) = \partial h/\partial x_1.]$$

(c) Пусть T и S — такие же, как в (b). Докажите, что S — обобщенная функция умеренного роста, если такова T.

56. Цель этой задачи — доказательство того, что любую обобщенную функцию умеренного роста T с носителем в $\overline{V}_+ \cup (-\overline{V}_+)$ можно записать в виде $T = R + A$, где $\operatorname{supp} R \subset \overline{V}_+$ и $\operatorname{supp} A \subset -\overline{V}_+$.

(a) Пусть f — функция класса C^∞ на единичной сфере S в $\mathbb{R}^4$, равная 1 на $\overline{V}_+ \cap S$ и 0 на $-\overline{V}_+ \cap S$. Пусть $\chi(x) = f(x/|x|)$. Покажите, что $(x^2)^n \chi(x)$ — функция класса C^{2n-1}.

(b) Предположим, что $|T(g)| \leqslant \sum\limits_{|\alpha| \leqslant N,\, |\beta| \leqslant M} \|x^\alpha D^\beta g\|_\infty$. Докажите, что $(x^2)^{M+1} T$ можно записать в виде $S_+ + S_-$, где $\operatorname{supp} S_+ \subset \overline{V}_+$, $\operatorname{supp} S_- \subset -\overline{V}_+$. [*Указание:* положите $S_+(f) = T[(x^2)^{M+1} \chi f]$.]

(c) Выберем фиксированную h из $C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ так, чтобы $h \equiv 1$ вблизи $x = 0$. Пусть

$$Hf = (x^2)^{-M-1} \left[f - \sum_{|\beta| \leqslant 2M+1} \frac{(D^\beta f)(0)}{\beta!} x^\beta h \right].$$

Докажите, что $T(f) = (x^2)^{M+1} T(Hf) + T_0$, где T_0 имеет носитель, сосредоточенный в нуле.

†*57*. Докажите теорему IX.38 в случае коразмерности, большей единицы.

†*58*. Восполните детали доказательства теоремы IX.40.

59. Приведите пример такой обобщенной функции умеренного роста T, задаваемой полиномиально ограниченной C^∞-функцией F, чтобы семейство сдвигов $\{T_x\}$ было ограничено как семейство обобщенных функций, но F *не была* ограниченной функцией. [*Указание:* видоизмените пример 1 в § IX.10.]

†*60*. Закончите доказательство теоремы IX.43.

61. Пусть T, $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ таковы, что существуют произведения TS, $T'S$ и TS'. Докажите, что $(TS)' = T'S + TS'$.

62. Пусть C — выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью. Пусть $\mathscr{A}$ — семейство функций, аналитических в $\mathbb{R}^n + iC$, полиномиально ограниченных на бесконечности и при $\operatorname{Im} z \downarrow 0$. Пусть $BV(F)$ для $F \in \mathscr{A}$ обозначает граничное значение F в смысле обобщенных функций. Докажите, что произведение $BV(F)\, BV(G)$ существует и

$$BV(F)\, BV(G) = BV(FG),$$

если F, $G \in \mathscr{A}$.

63. Докажите, что $WF(D^\alpha T) = WF(T)$ для любого $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ и любого $\alpha \in I_+^n$.

64. (a) Докажите, что

$$WF(fT) \subset \{\langle x, k\rangle \mid x \in \operatorname{supp} f;\ \langle x, k\rangle \in WF(T)\}$$

и что

$$WF(fT) \supset \{\langle x, k\rangle \mid f(x) \neq 0;\ \langle x, k\rangle \in WF(T)\}$$

для любых $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Приведите пример f, T, таких, как в части (a), для которых

$$WF(fT) \neq \{\langle x, k\rangle \mid x \in \operatorname{supp} f;\ \langle x, k\rangle \in WF(T)\}.$$

*65. (a) Определим асимптотический конический носитель $ACS(T)$ обобщенной функции T как дополнеине к множеству тех $k \neq 0$, для которых существуют окрестность N и число Λ_0, такие, что $\operatorname{supp} T \cap \lambda N = \varnothing$ при $\lambda > \Lambda_0$. Докажите, что $ACS(T)$ — замкнутый конус.

(b) Докажите, что $WF_x(T) \subset ACS(\hat{T})$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и любого $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(c) Не пользуясь техникой осцилляторных интегралов, получите сведения о $WF(\Delta_+)$, достаточные для доказательства существования произведения $\theta\Delta_+$.

66.†(a) Докажите теорему IX.46.

(b) Усовершенствуйте теорему IX.46, найдя условия на асимптотический символ F порядка k, необходимые и достаточные для того, чтобы $\operatorname{sing\,supp}(\hat{F}) = \varnothing$.

67. Определим $\operatorname{Sym}(\Omega, s, m, \rho, \delta)$ так, как был определен $\operatorname{Sym}(\Omega, s, m)$, но с заменой (IX.63) условием

$$\left|\left(D_x^\alpha D_\theta^\beta a\right)(x, \theta)\right| \leqslant d\,(1 + |\theta|)^{m - \rho|\beta| + \delta|\alpha|}.$$

Распространите теорему IX.49 на случай $\delta < 1$, $\rho > 0$.

†68. Докажите, что

$$a(x, \theta;\ m) = (m^2 + |\theta|^2)^{-1/2} \exp\left(-ix_0\left[(m^2 + |\theta|^2)^{1/2} - |\theta|\right]\right)$$

есть асимптотический символ порядка -1.

†69. Докажите леммы 1 и 2 в доказательстве теоремы IX.47.

†70. Докажите, что преобразование V, использованное в доказательстве теоремы IX.47, отображает $\operatorname{Sym}(\Omega, s, m)$ непрерывно на $\operatorname{Sym}(\Omega, s, m-1)$.

†71. Докажите, что $\langle a, f\rangle \longmapsto af$ — непрерывное билинейное отображение $\operatorname{Sym}(\Omega, s, m) \times C_0^\infty(\Omega)$ в $\operatorname{Sym}(\Omega, s, m)$.

†72. Завершите доказательство пункта (c) теоремы IX.48. [*Указание:* покажите, что

$$t^n \exp(it\omega(k)) = \left[\frac{\omega(k)}{i|k|^2}(\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{k}})\right]^n e^{it\omega(k)},$$

где $\omega(k) = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$.]

†73. В ситуации, описанной в Замечаниях к § IX.10, докажите, что $WF(f\delta_F) \subset N(F)$ и что $WF(\delta_F) = N(F)$.

†74. Найдите два таких распределения T, S с компактным носителем, что TS существует, но $\int \hat{T}(l)\,\hat{S}(k-l)\,dl$ абсолютно расходится для всех k.

†*75. Цель этой задачи — доказать формулу замены переменных в пункте (f) теоремы IX.44.

(a) Проверьте формулу, когда M — линейное преобразование.

(b) Покажите, что достаточно доказать равенство

$$WF_{x=0}(T \circ M) = WF_{x=0}(T)$$

для любого диффеоморфизма M со свойствами $M(0)=0$ и $dM_{x=0} =$ = тождественное отображение и любого распределения T с компактным носителем.

(c) Докажите, что если $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то

$$\widehat{g(T \circ M)}(l) = (2\pi)^{-n} \iint g(x)\,\hat{T}(k) \exp[i(k \cdot M(x) - l \cdot x)]\,dx\,dk$$

в том смысле, что эта интегральная формула правильна, если функция $(1+k^2)^{n+1/2}\,\hat{T}(k)$ ограничена и для фиксированного l отображение

$$T \longmapsto \text{интеграл}$$

непрерывно по норме $\|T\|_m = \sup\limits_k \|(1+k^2)^{-m}\,\hat{T}(k)\|$ для каждого $m>0$. [*Указание:* примените интегрирование по частям, основанное на равенстве $|(dM_x^*)^{-1}\,\mathrm{grad}_x\,(k \cdot M(x))| = |k|$.]

(d) Предположим, что k_0 — единичный вектор, не принадлежащий $WF_{x=0}(T)$. Покажите, что при условиях части (b) можно так выбрать открытые конусы C_0 и C_1 вокруг k_0 и окрестность N точки $x=0$, что (i) при каждом m

$$\sup_{k \in C_1} (1+k^2)^m\,|\widehat{gT}(k)| < \infty$$

для любого g с $\mathrm{supp}\, g \subset N$;

(ii) $\quad \sup\{l \cdot [dM_x^*(k)] \mid l \in C_0,\ \ k \notin C_1,\ \ x \in N;\ \ |l| = |k| = 1\} = \alpha < 1.$

(e) Докажите, что при любом m верхняя грань

$$\sup_l \left| (1+l^2)^m \int\limits_{k \in C_1} g(x)\,\hat{T}(k) \exp[i(k \cdot M(x) - l \cdot x)]\,dx\,dk \right|$$

конечна. [*Указание:* воспользуйтесь неравенством (i) части (d) и интегрированием по частям, основанным на равенстве $l^2 \exp(-il \cdot x) = -\Delta_x[\exp(-il \cdot x)]$.]

(f) Пусть

$$F(k, l) = \int g(x) \exp[i(k \cdot M(x) - l \cdot x)]\,dx.$$

Докажите, что при любом $m > 0$

$$\sup\{(1+\lambda^2)^m\,F(\lambda k_0, \lambda l_0) \mid k_0 \notin C_1,\ l_0 \in C_0,\ |k_0 + l_0| = 1\} < \infty.$$

[*Указание:* воспользуйтесь неравенством (ii) части (d) и интегрированием по частям, основанным на равенстве

$$|dM_x^*(k) - l|^{-2}\,\{(dM_x^*(k) - l) \cdot \mathrm{grad}_x\,[k \cdot M(x) - l \cdot x]\} = 1.]$$

(g) Докажите, что $\sup\limits_{k \notin C_1,\, l \in C_0} (1+|k|+|l|)^m F(k, l) < \infty$ для всех m, и заключите отсюда, что $k \notin WF_{x=0}(T \circ M)$.

(h) Используя симметрию и только что доказанное включение $WF_{x=0}(T) \supset WF_{x=0}(T \circ M)$, завершите доказательство.

†76. Цель этой задачи — дать набросок доказательств теорем IX.13 и IX.14.

(a) Докажите, что $\exp(b|x|) f \in L^2$ для всех $b < a$ тогда и только тогда, когда $\exp(\eta \cdot x) f \in L^2$ для всех $\eta \in \mathbb{R}^n$ с $|\eta| < a$.

(b) Докажите, что $\hat{f}(\cdot)$ аналитически продолжается в область $\{z \mid |\operatorname{Im} z| < a\}$ и $\hat{f}(\cdot + i\eta) = (\exp(\eta \cdot x) f)\hat{}$, если $\exp(b|x|) f \in L^2$ при всех $b < a$. Докажите оценку, указанную в теореме IX.13.

(c) Предположим, что $\hat{f}$ аналитически продолжается в трубу $\{z \mid |\operatorname{Im} z| < a\}$ и ограничена заданным образом. С помощью интегральной формулы Коши докажите, что для любых $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\eta \in \mathbb{R}^n$ с $|\eta| < a$

$$\int \overline{g(x)} f(x)\, dx = \int \overline{\hat{g}(k - i\eta)}\, \hat{f}(k + i\eta)\, dk.$$

(d) Докажите, что если f удовлетворяет условиям части (c) и $h_\eta = \hat{f}(\cdot + i\eta)$, то $\check{h}_\eta(x) = e^{\eta \cdot x} f$ почти всюду, и таким образом завершите доказательство теоремы IX.13.

(e) Подражая изложенным рассуждениям, докажите теорему IX.14.

77. (a) С помощью интерполяционной теоремы Ханта докажите, что при $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}$, где p и q меньше ∞, а $r > 1$, $fg \in L^r_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n)$, если $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Покажите, что если бы интерполяционная теорема Марцинкевича выполнялась без ограничения $p_i \leqslant q_i$, то из $f \in L^4(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^4_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n)$ следовало бы, что $fg \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(c) Найдите конкретные функции $f \in L^4(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^4_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n)$, для которых $fg \notin L^2(\mathbb{R}^n)$.

78. (соотношение неопределенностей). Пусть $P = -i\hbar(d/dx)$ и $Q = x$ — операторы в $L^2(\mathbb{R})$. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ и $\|\varphi\| = 1$. Положим

$$m_p = (P\varphi, \varphi), \qquad m_q = (Q\varphi, \varphi),$$
$$\sigma_p^2 = \|(P - m_p)\varphi\|^2, \qquad \sigma_q^2 = \|(Q - m_q)\varphi\|^2.$$

(a) С помощью коммутационного соотношения $PQ - QP = -i\hbar$ докажите, что $\sigma_p \sigma_q \geqslant \hbar/2$.

(b) Переформулируйте результат части (a) в терминах μ_q и μ_p — спектральных мер операторов Q и P, ассоциированных с φ, и объясните, что он означает с точки зрения измерений координаты и импульса в квантовой механике (см. § VIII.11).

(c) Переформулируйте результат части (a) как утверждение о преобразовании Фурье.

УКАЗАНИЯ ЧИТАТЕЛЮ

Глава IX, по существу, замкнута, и для ее чтения требуются минимальные предварительные знания. Читатель должен знать свойства интеграла Лебега, элементарные понятия из теории гильбертовых и банаховых пространств, определения и основные свойства пространства Шварца быстро убывающих функций и его сопряженного — пространства обобщенных функций умеренного роста. Этот материал содержится в главах I—III и § V.1—V.3 первого тома, так же как и во многих других руководствах по функциональному анализу. Эпизодические ссылки на теоремы первого тома обычно носят описательный характер, так что читатель, знакомый с другими учебниками, легко может понять, о чем идет речь.

Ниже мы дадим описание материала от раздела к разделу. А сейчас скажем кратко о содержании главы в целом. Наиболее важный материал содержится в § 1, 2 и первой части § 3. Читателю, которого интересует главным образом квантовая механика, следует ознакомиться в особенности с § 1, 2, первой частью § 3 и § 4, 7, частично с § 9 и дополнением к § 4. Читателю, которого интересует квантовая теория поля, следует познакомиться с § 1, 2, 3, 8. По поводу дифференциальных уравнений следует читать § 1, 2, первую часть § 3, § 4, 5, 6 и 10.

Основные свойства преобразования Фурье даны в § 1, 2, 4 и первой части § 3. В § 1 определено преобразование Фурье на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, которое затем продолжено на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ путем перехода к сопряженному отображению. Доказана теорема обращения Фурье, определена операция свертки и исследованы ее свойства. В § 2 изучается область значений преобразования Фурье, задаваемого на классических пространствах, и доказываются теоремы Планшереля, Хаусдорфа—Юнга и Бохнера. В первой части § 3 доказаны теоремы Пэли—Винера, характеризующие фурье-образы функций класса C^∞ и распределений с компактными носителями. Во второй части § 3 доказана более трудная теорема, характеризующая фурье-образы обобщенных функций умеренного роста в $\mathbb{R}^4$ с носителями в конусах. При первом чтении эту часть можно пропустить, если только читатель не интересуется аксиомами Вайтмана (§ 8). Наконец, в § 4 приведены различные L^p-оценки, связывающие преобразования Фурье и свертки. Читателю следует знать, как используются интерполяционные теоремы, приводимые в дополнении, поскольку они составляют основной инструмент доказательства оценок. Идея интерполирования красива, но доказательства интерполяционных теорем громоздки, поэтому доказательства в дополнении следует при первом чтении опустить.

В остальных разделах 5—10 речь идет о более современном материале и приложениях. Разделы 5 и 6 содержат применения преобразования Фурье в теории дифференциальных уравнений в частных производных. В § 5 доказано существование фундаментальных решений уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. В § 6 исследуются пространства Соболева и доказывается, что каждое слабое решение уравнения $\Delta u = f$ на самом деле является классическим решением (лемма Вейля).

В § 7 с помощью преобразования Фурье выводятся свойства свободного квантовомеханического гамильтониана $H_0 = -\Delta$, его резольвенты $(H_0+\varkappa^2)^{-1}$ и группы $\exp(-itH_0)$, им порождаемой.

В § 8 приводятся и обсуждаются аксиомы Гординга—Вайтмана квантовой теории эрмитова скалярного поля. Никакого предварительного знакомства с квантовой теорией поля для чтения этого раздела не требуется. Мы показываем, как можно использовать преобразование Фурье для определения свойств аналитического продолжения функций Вайтмана и для доказательства PCT-теоремы. Дополнение технического характера посвящено выводу явного представления для полиномиально ограниченной лоренц-инвариантной меры с носителем в замкнутом переднем световом конусе.

В § 9 рассматривается вопрос о том, какие L^2-функции на $\mathbb{R}^n$ допускают естественное сужение на подмногообразия меньшей размерности. Этот материал не будет использоваться вплоть до исследования спектра квантовомеханических гамильтонианов в гл. XIII. При первом чтении следует разобраться в утверждении теоремы IX.41 и общей идее доказательства, опустив кровопролитные детали.

Раздел 10 задуман как введение в теорию волновых фронтов и осцилляторных интегралов — двух важных инструментов изучения уравнений в частных производных с непостоянными коэффициентами. Эту теорию можно использовать для того, чтобы сформулировать условия, при которых определено произведение двух обобщенных функций. В томах 2 и 3 материал § 10 не используется.

X. САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ И СУЩЕСТВОВАНИЕ ДИНАМИКИ

Мы привыкли считать, что когда нечто изменяется, оно находится в состоянии изменения, а когда нечто движется, оно пребывает в состоянии движения. Теперь нам известно, что это не так.

Б. РАССЕЛ

X.1. Расширения симметрических операторов

Мы начинаем эту главу с изучения симметрических операторов и их расширений. Прежде всего мы хотим ответить на два вопроса: когда симметрические операторы обладают самосопряженными расширениями, и если такие расширения есть, то как их охарактеризовать? На эти вопросы отвечает развитая фон Нейманом теория индексов дефекта, которую мы будем строить с использованием многих технических приемов, уже применявшихся при доказательстве основного критерия самосопряженности (теорема VIII.3) в гл. VIII.

Начать полезно с объяснения того, почему нас интересуют симметрические несамосопряженные операторы. Очень часто в квантовой механике или квантовой теории поля физические соображения приводят к формальному выражению для гамильтониана системы, которое обычно представляет собой дифференциальный оператор в подходящем L^2-пространстве. Мы говорим «формальному» в том случае, когда область определения гамильтониана не задана точно. Обычно легко найти плотную область, на которой формальный гамильтониан задает корректно определенный симметрический оператор H. Но квантовая динамика должна задаваться унитарной группой, а из теоремы Стоуна (теорема VIII.8) известно, что инфинитезимальный генератор такой группы должен быть самосопряженным. Если замыкание $\overline{H}$ оператора H самосопряжено, то можно использовать $\overline{H}$. Но если $\overline{H}$ не самосопряжено, то естественно спросить: имеет ли $\overline{H}$ самосопряженные расширения? И если таких расширений несколько, то какое из них надо выбрать для описания динамики? В случае, когда самосопряженных расширений существует несколько, они обычно отвечают различному *физическому поведению* описываемой системы. И потому задача выбора «правильного» самосопряженного расширения — это не просто вопрос математической «техники», но проблема, тесно связанная с физикой описываемых явлений. Дальнейшее обсуждение этой проблемы проводится в примерах 1 и 2 этого раздела.

Отметим, что в этом разделе обсуждаются расширения *замкнутых* симметрических операторов. Это не приводит к потере общности, поскольку любой симметрический оператор имеет замыкание, а оператор и его замыкание имеют одни и те же замкнутые расширения.

Теорема X.1. Пусть A — замкнутый симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда

(1a) Величина $\dim[\operatorname{Ker}(\lambda I - A^*)]$ постоянна при изменении λ в открытой верхней полуплоскости.

(1b) Величина $\dim[\operatorname{Ker}(\lambda I - A^*)]$ постоянна при изменении λ в открытой нижней полуплоскости.

(2) Спектр A заполняет *одно* из следующих множеств в $\mathbb{C}$:
  (a) замкнутую верхнюю полуплоскость;
  (b) замкнутую нижнюю полуплоскость;
  (c) всю плоскость;
  (d) подмножество вещественной оси.

(3) Оператор A самосопряжен тогда и только тогда, когда реализуется случай (2d).

(4) Оператор A самосопряжен тогда и только тогда, когда *обе* размерности, о которых идет речь в (1a) и (1b), равны нулю.

Доказательство. Пусть $\lambda = \nu + i\mu$, $\mu \neq 0$. Поскольку A симметричен,

$$\|(\lambda - A)\varphi\|^2 \geqslant \mu^2\|\varphi\|^2 \tag{X.1}$$

для всех $\varphi \in D(A)$. Из этого неравенства и замкнутости A немедленно вытекает, что $\operatorname{Ran}(\lambda - A)$ — замкнутое подпространство в $\mathscr{H}$. Более того,

$$\operatorname{Ker}(\lambda - A^*) = \operatorname{Ran}(\bar{\lambda} - A)^{\perp}. \tag{X.2}$$

Эти утверждения доказываются, как в теореме VIII.3, где $\lambda = i$.

Покажем теперь, что при достаточно малых $\eta \in \mathbb{C}$ подпространства $\operatorname{Ker}(\lambda - A^*)$ и $\operatorname{Ker}((\lambda + \eta) - A^*)$ имеют одинаковые размерности. Пусть u из $D(A^*)$ лежит в $\operatorname{Ker}((\lambda + \eta) - A^*)$, причем $\|u\| = 1$. Предположим, что $(u, v) = 0$ для всех $v \in \operatorname{Ker}(\lambda - A^*)$. Тогда, в силу (X.2), $u \in \operatorname{Ran}(\bar{\lambda} - A)$, так что в $D(A)$ существует φ со свойством $(\bar{\lambda} - A)\varphi = u$. В итоге

$$\begin{aligned} 0 = (((\lambda + \eta) - A^*)u, \varphi) = (u, (\bar{\lambda} - A)\varphi) + \bar{\eta}(u, \varphi) = \\ = \|u\|^2 + \bar{\eta}(u, \varphi), \end{aligned}$$

что при $|\eta| < |\mu|$ приводит к противоречию, поскольку, в силу (X.1), $\|\varphi\| \leqslant \|u\|/|\mu|$. Таким образом, если $|\eta| < |\mu|$, то в подпространстве $\mathrm{Ker}((\lambda+\eta)-A^*)$ не существует вектора u, лежащего в $\mathrm{Ker}(\lambda-A^*)^{\perp}$. Теперь простые соображения, основанные на свойствах проекторов (задача 4), показывают, что

$$\dim[\mathrm{Ker}((\lambda+\eta)-A^*)]\leqslant\dim[\mathrm{Ker}(\lambda-A^*)].$$

Аналогичные соображения показывают, что если $|\eta|<|\mu|/2$, то $\dim[\mathrm{Ker}(\lambda-A^*)]\leqslant\dim[\mathrm{Ker}((\lambda+\eta)-A^*)]$, откуда

$$\dim[\mathrm{Ker}(\lambda-A^*)]=\dim[\mathrm{Ker}((\lambda+\eta)-A^*)]$$

при $|\eta|<|\mu|/2$. Поскольку размерность $\dim[\mathrm{Ker}(\lambda-A^*)]$ локально постоянна, она постоянна во всей верхней полуплоскости и постоянна (но, вообще говоря, другая) в нижней полуплоскости. Это доказывает (1).

Из (X.1) вытекает, что при $\mathrm{Im}\,\lambda\neq 0$ оператор $\lambda-A$ всегда обладает ограниченным левым обратным, а из (X.2) следует, что обратный оператор задан всюду тогда и только тогда, когда $\dim[\mathrm{Ker}(\bar{\lambda}-A^*)]=0$. Таким образом, из части (1) доказываемой теоремы следует, что каждая из открытых полуплоскостей — верхняя и нижняя — целиком принадлежит либо спектру оператора A, либо его резольвентному множеству. С учетом замкнутости $\sigma(A)$ отсюда вытекает (2). Утверждения (3) и (4) представляют собой, в сущности, переформулировки теоремы VIII.3. ∎

Следствие. Если A — полуограниченный замкнутый симметрический оператор, т. е. $(A\varphi, \varphi)\geqslant -M\|\varphi\|^2$, то $\dim[\mathrm{Ker}(\lambda-A^*)]$ постоянна для всех $\lambda\in\mathbb{C}\setminus[-M, \infty)$.

Доказательство. Это следствие вытекает из доказательства теоремы X.1, ибо те же рассуждения о неизменности размерности можно провести для всех вещественных λ из $(-\infty, -M)$, связав тем самым константы, относящиеся к верхней и нижней полуплоскостям. ∎

Следствие. Если в резольвентное множество замкнутого симметрического оператора попадает хотя бы одно вещественное число, то такой оператор самосопряжен.

Доказательство. Так как резольвентное множество открыто и в рассматриваемом случае содержит точку вещественной оси, оно содержит также точки верхней и нижней полуплоскости. Утверждение следствия вытекает тогда из пункта (3) теоремы X.1. ∎

Поскольку размерности ядер операторов $i-A^*$ и $i+A^*$ играют важную роль в теории расширений, удобно дать им специальные наименования.

Определение. Пусть A — симметрический оператор и

$$\mathcal{K}_+ = \operatorname{Ker}(i - A^*) = \operatorname{Ran}(i + A)^\perp,$$
$$\mathcal{K}_- = \operatorname{Ker}(i + A^*) = \operatorname{Ran}(-i + A)^\perp.$$

Множества $\mathcal{K}_\pm$ называются **дефектными подпространствами** оператора A. Пара чисел $n_\pm$, определяемых равенствами $n_\pm = \dim[\mathcal{K}_\pm]$, называется **индексами дефекта** оператора A.

Отметим, что в качестве индексов дефекта может выступать любая пара неотрицательных целых чисел; возможно даже, что n_+ или n_- (или оба они сразу) равны бесконечности. В задаче 1 читателю предлагается построить соответствующие примеры.

Приступим теперь к построению замкнутых симметрических расширений оператора A. Пусть B — некоторое такое расширение. Тогда для $\varphi \in D(B^*)$ и всех $\psi \in D(A)$

$$(\psi, B^*\varphi) = (B\psi, \varphi) = (A\psi, \varphi).$$

Следовательно, $\varphi \in D(A^*)$ и $B^*\varphi = A^*\varphi$, так что

$$A \subseteq B \subseteq B^* \subseteq A^*. \tag{X.3}$$

Введем две полуторалинейные формы на $D(A^*)$:

$$(\varphi, \psi)_A = (\varphi, \psi) + (A^*\varphi, A^*\psi),$$
$$[\varphi, \psi]_A = (A^*\varphi, \psi) - (\varphi, A^*\psi).$$

Подпространство из $D(A^*)$, в котором для любой пары векторов φ, ψ справедливо равенство $[\varphi, \psi]_A = 0$, назовем **A-симметрическим.** Называя подпространство из $D(A^*)$ **A-замкнутым** или **A-ортогональным**, будем иметь в виду внутреннее произведение, задаваемое формой $(\cdot, \cdot)_A$.

Лемма. Пусть A — замкнутый симметрический оператор. Тогда

(a) Замкнутые симметрические расширения оператора A суть сужения A^* на A-замкнутые A-симметрические подпространства из $D(A^*)$.

(b) Множества $D(A)$, $\mathcal{K}_+$ и $\mathcal{K}_-$ суть A-замкнутые взаимно A-ортогональные подпространства из $D(A^*)$ и

$$D(A^*) = D(A) \oplus_A \mathcal{K}_+ \oplus_A \mathcal{K}_-.$$

(c) Существует взаимно однозначное соответствие между A-замкнутыми A-симметрическими подпространствами $S \subset D(A^*)$, содержащими $D(A)$, и A-замкнутыми A-симметрическими подпространствами $S_1 \subset \mathcal{K}_+ \oplus_A \mathcal{K}_-$, задаваемое равенством $S = D(A) \oplus_A S_1$.

Доказательство. Для доказательства (a) заметим, что из (X.3) следует, что любое симметрическое расширение A содержится в A^*. Далее, расширение замкнуто тогда и только тогда, когда его область определения A-замкнута, и симметрично тогда и только тогда, когда его область определения A-симметрична.

Для доказательства (b) отметим, что $D(A)$ само по себе A-замкнуто, поскольку замкнут оператор A, а $\mathcal{K}_\pm$ тоже A-замкнуты, поскольку они уже замкнуты в более слабой топологии, порождаемой обычным внутренним произведением. Ортогональность этих трех подпространств доказывается прямым вычислением, которое мы опускаем. Предположим, что $\psi \in D(A^*)$ и $\psi \perp_A D(A) \oplus_A \mathcal{K}_+ \oplus_A \mathcal{K}_-$. Для $\varphi \in D(A)$ имеем $(\varphi, \psi)+(A^*\varphi, A^*\psi)= =(\varphi, \psi)_A=0$, так что

$$(\varphi, \psi)=-(A\varphi, A^*\psi).$$

Следовательно, $A^*\psi \in D(A^*)$ и $A^*A^*\psi=-\psi$. Далее, из соотношения

$$(A^*+i)(A^*-i)\psi=(A^*A^*+I)\psi=0$$

заключаем, что $(A^*-i)\psi \in \mathcal{K}_-$. Но если $\varphi \in \mathcal{K}_-$, то

$$\begin{aligned} i(\varphi, (A^*-i)\psi) &= (\varphi, \psi)+(A^*\varphi, A^*\psi)= \\ &= (\varphi, \psi)_A=0, \end{aligned}$$

поскольку $\psi \perp_A \mathcal{K}_-$. Таким образом, $(A^*-i)\psi=0$, т. е. $\psi \in \mathcal{K}_+$. Поскольку $\psi \perp_A \mathcal{K}_+$, то $\psi=0$, что и завершает доказательство (b).

Пусть S_1 есть A-замкнутое A-симметрическое подпространство в $\mathcal{K}_+ \oplus_A \mathcal{K}_-$ и $\varphi=\varphi_0+\varphi_1$, $\psi=\psi_0+\psi_1$, где $\varphi_0, \psi_0 \in D(A)$; $\varphi_1, \psi_1 \in S_1$. Тогда $[\varphi_0, \psi_0]_A=0$, ибо A — симметрический оператор, и $[\varphi_1, \psi_1]_A=0$, ибо подпространство S_1 A-симметрично. Далее,

$$\begin{aligned} [\varphi_0, \psi_1]_A &= (A^*\varphi_0, \psi_1)-(\varphi_0, A^*\psi_1)= \\ &= (A\varphi_0, \psi_1)-(\varphi_0, A^*\psi_1)=0 \end{aligned}$$

в силу того, что $\varphi_0 \in D(A)$ и $\psi_1 \in D(A^*)$. Аналогичное рассуждение показывает, что $[\varphi_1, \psi_0]_A=0$. Таким образом,

$$[\varphi, \psi]_A=[\varphi_0, \psi_0]_A+[\varphi_1, \psi_0]_A+[\varphi_0, \psi_1]_A+[\varphi_1, \psi_1]_A=0$$

и $S=D(A)\oplus_A S_1$ представляет собой A-симметрическое подпространство, которое A-замкнуто, поскольку $D(A)$ и S_1 оба A-замкнуты и A-ортогональны.

Обратно, пусть S является A-замкнутым A-симметрическим подпространством в $D(A^*)$, содержащим $D(A)$. Пусть $S_1=S \cap \cap(\mathcal{K}_+ \oplus_A \mathcal{K}_-)$. Тогда S_1 очевидно A-замкнуто и A-симметрично. Предположим теперь, что $\varphi \in S$. Тогда вектор φ однозначно представим в виде $\varphi=\varphi_0+\varphi_1$, где $\varphi_0 \in D(A)$ и $\varphi_1 \in \mathcal{K}_+ \oplus_A \mathcal{K}_-$. Поскольку $D(A) \subset S$, то $\varphi_0 \in S$, откуда вытекает, что φ_1 также лежит в S. В итоге $\varphi_1 \in S_1$ и $S=D(A)\oplus_A S_1$. Это доказывает (c). ∎

Теперь мы подготовлены к доказательству основной теоремы этого раздела.

Теорема X.2. Пусть A — замкнутый симметрический оператор. Замкнутые симметрические расширения оператора A находятся во взаимно однозначном соответствии с частичными изометриями (относительно исходного внутреннего произведения) пространства $\mathcal{K}_+$ в $\mathcal{K}_-$. Если U — одна из таких изометрий с начальным подпространством $I(U) \subseteq \mathcal{K}_+$, то отвечающее ей замкнутое симметрическое расширение A_U задано на области

$$D(A_U) = \{\varphi + \varphi_+ + U\varphi_+ \mid \varphi \in D(A),\ \varphi_+ \in I(U)\}$$

и

$$A_U(\varphi + \varphi_+ + U\varphi_+) = A\varphi + i\varphi_+ - iU\varphi_+.$$

Если $\dim[I(U)] < \infty$, то индексы дефекта A_U равны

$$n_\pm(A_U) = n_\pm(A) - \dim[I(U)].$$

Доказательство. Пусть A_1 — замкнутое симметрическое расширение оператора A. Из доказанной выше леммы мы знаем, что $D(A_1) = D(A) \oplus_A S_1$, где S_1 есть A-замкнутое A-симметрическое подпространство в $\mathcal{K}_+ \oplus_A \mathcal{K}_-$. Если $\varphi \in S_1$, то имеет место однозначное разложение $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$. Из A-симметричности S_1 следует, что

$$0 = (A^*\varphi, \varphi) - (\varphi, A^*\varphi) =$$
$$= 2i(\varphi_-, \varphi_-) - 2i(\varphi_+, \varphi_+),$$

откуда

$$\|\varphi_+\|^2 = \|\varphi_-\|^2. \tag{X.4}$$

Поскольку S_1 — подпространство в $\mathcal{K}_+ \oplus_A \mathcal{K}_-$, (X.4) показывает, что отображение $\varphi_+ \mapsto \varphi_-$ задает изометрию подпространства $\mathcal{K}_+$ в $\mathcal{K}_-$. Обозначим соответствующее частично изометрическое отображение через U. Тогда

$$D(A_1) = \{\varphi + \varphi_+ + U\varphi_+ \mid \varphi \in D(A),\ \varphi_+ \in I(U)\} \tag{X.5}$$

и

$$A_1(\varphi + \varphi_+ + U\varphi_+) = A^*(\varphi + \varphi_+ + U\varphi_+) = A\varphi + i\varphi_+ - iU\varphi_+. \tag{X.6}$$

Обратно, пусть U — изометрия подпространства $\mathcal{K}_+$ в $\mathcal{K}_-$; определим $D(A_1)$ и A_1 формулами (X.5) и (X.6). Тогда $D(A_1)$ есть A-замкнутое A-симметрическое подпространство в $D(A^*)$, так что, в силу леммы, A_1 — замкнутое симметрическое расширение A.

Утверждение об индексах дефекта легко вывести, рассмотрев области значений операторов $i + A_1$ и $i - A_1$, заданных на $D(A_1)$. ∎

Следствие. Пусть A — замкнутый симметрический оператор с индексами дефекта n_+ и n_-. Тогда

(a) A самосопряжен тогда и только тогда, когда $n_+ = 0 = n_-$.

(b) A обладает самосопряженными расширениями тогда и только тогда, когда $n_+ = n_-$. Существует взаимно однозначное соответствие между самосопряженными расширениями оператора A и унитарными отображениями из $\mathcal{K}_+$ на $\mathcal{K}_-$.

(c) Если $n_+ = 0 \neq n_-$ или $n_- = 0 \neq n_+$, то A не имеет нетривиальных симметрических расширений (такие операторы называются **максимальными симметрическими**).

Пример 1. Рассмотрим с нескольких точек зрения пример, уже приводившийся в § VIII.2. Пусть T—оператор $i\,d/dx$ в $L^2(0, 1)$ с областью определения $D(T) = \{\varphi \mid \varphi \in AC[0, 1],\ \varphi(0) = 0 = \varphi(1)\}$. В § VIII.2 было показано, что T^*—это оператор $i\,d/dx$, определенный на $D(T^*) = AC[0, 1]$.

Поскольку оператор T столь прост и поскольку область определения сопряженного оператора T^* известна нам в явном виде, мы можем построить самосопряженные расширения T, не прибегая к помощи только что развитой техники. Поучительно с этого и начать. Предположим, что S—симметрическое расширение T. Так как $D(S^*) \subset D(T^*)$, то функции из $D(S^*)$ абсолютно непрерывны и $S^*\varphi = i\,d\varphi/dx$. Следовательно, при $\varphi \in D(S)$ и $\psi \in D(S^*)$ интегрирование по частям дает

$$(S\varphi, \psi) - (\varphi, S^*\psi) = \overline{\varphi(1)}\,\psi(1) - \overline{\varphi(0)}\,\psi(0) = 0. \qquad (X.7)$$

Отсюда в случае $S = T$ мы видим, почему T не самосопряжен. Граничные условия, наложенные на функции из $D(T)$, столь сильны, что функции из $D(T^*)$ не надо подчинять никаким граничным условиям, для того чтобы обратить в нуль правую часть (X.7). Поэтому все, что необходимо сделать,—это расширить множество функций из $D(S)$, подчиняя их более общим граничным условиям, так чтобы равенство (X.7) требовало выполнения *тех же самых* граничных условий от функций из $D(S^*)$. Сделаем это. Пусть S—самосопряженное расширение T и $\varphi \in D(S) \setminus D(T)$. Тогда (X.7) требует, чтобы $|\varphi(1)|^2 = |\varphi(0)|^2$, а поскольку $\varphi \notin D(T)$, то $\varphi(0) \neq 0$, и потому существует такое α с $|\alpha| = 1$, что $\varphi(1) - \alpha\varphi(0) = 0$. Если ψ—любая другая функция из $D(S)$, то (X.7) требует, чтобы $\psi(1) = \alpha\psi(0)$ с *тем же самым* α. Следовательно, $S \subset T_\alpha$, где $T_\alpha = i\,d/dx$ на

$$D(T_\alpha) = \{\varphi \mid \varphi \in AC[0, 1],\ \varphi(1) = \alpha\varphi(0)\}.$$

Поскольку T_α симметричен, а S самосопряжен, то $S = T_\alpha$ для некоторого α.

Теперь определим, какие T_α самосопряжены. Выберем $\varphi \in D(T_\alpha)$ и $\psi \in D(T_\alpha^*)$. Тогда (X.7) требует, чтобы

$$\bar{\alpha}\,\overline{\varphi(0)}\,\psi(1) - \overline{\varphi(0)}\,\psi(0) = 0,$$

и потому $\psi(1) = \alpha\psi(0)$. Таким образом, $\psi \in D(T_\alpha)$ и $D(T_\alpha^*) = D(T_\alpha)$, т. е. T_α самосопряжен при каждом α. В итоге множество самосопряженных расширений оператора T представляет собой набор операторов $\{T_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{C}, \ |\alpha| = 1\}$.

Покажем теперь, как этот же результат можно получить с помощью общей техники, развитой в настоящем разделе. Для определения подпространства $\mathcal{K}_+$ нужно найти решения уравнения $T^*\psi = i\psi$. Если $\psi \in D(T^*)$, то $\psi \in AC[0, 1]$ и равенство $i\,d\psi/dx = i\psi$ означает, что функция ψ' также абсолютно непрерывна. Повторение этого рассуждения показывает, что любое решение уравнения $T^*\psi = i\psi$ на самом деле бесконечно дифференцируемо и удовлетворяет уравнению $\psi' = \psi$. Значит, $\mathcal{K}_+ = \{ce^x \mid c \in \mathbb{C}\}$ и аналогично $\mathcal{K}_- = \{ce^{-x} \mid c \in \mathbb{C}\}$. Следовательно, индексы дефекта оператора T суть $\langle 1, 1\rangle$. Пусть

$$\varphi_+ = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^2 - 1}}\,e^x \quad \text{и} \quad \varphi_- = \frac{\sqrt{2}\,e}{\sqrt{e^2 - 1}}\,e^{-x}$$

— нормированные векторы из $\mathcal{K}_\pm$. Тогда частичными изометриями из $\mathcal{K}_+$ в $\mathcal{K}_-$ будут только отображения $\varphi_+ \mapsto \gamma\varphi_-$, где $|\gamma| = 1$. По теореме X.2 единственными симметрическими расширениями оператора T будут операторы $A_\gamma = i\,d/dx$ с областями определения

$$D(A_\gamma) = \{\varphi + \beta\varphi_+ + \gamma\beta\varphi_- \mid \varphi \in D(T), \ \beta \in \mathbb{C}\}.$$

В силу последнего утверждения теоремы X.2 каждый A_γ имеет нулевые индексы дефекта и, следовательно, самосопряжен. Для того чтобы убедиться в совпадении этих операторов с теми, которые мы построили чуть выше, отметим, что для $\psi \in D(A_\gamma)$

$$\psi(0) = \frac{\beta(1 + \gamma e)\sqrt{2}}{\sqrt{e^2 - 1}} \quad \text{и} \quad \psi(1) = \frac{\beta(\gamma + e)\sqrt{2}}{\sqrt{e^2 - 1}},$$

и потому

$$\psi(1) = \frac{\gamma + e}{1 + \gamma e}\,\psi(0) = \alpha\psi(0), \quad \text{где} \quad |\alpha| = \left|\frac{\gamma + e}{1 + \gamma e}\right| = 1.$$

Обратно, если $\psi(1) = \alpha\psi(0)$, то ψ можно записать в виде $\psi = \varphi + \beta\varphi_+ + \gamma\beta\varphi_-$ с некоторым β и $\gamma = (\alpha - e)/(1 - \alpha e)$. Следовательно, $A_\gamma = T_\alpha$.

Обсудим теперь ту же проблему с «физической» точки зрения. Предположим, что у нас есть гладкий волновой пакет $\varphi(x)$ на $[0, 1]$, который обращается в нуль около граничных точек и который сдвигается направо (рис. X.1). Для достаточно малых y

(таких, что пакет не достигает конечной точки) сдвиги даются семейством операторов $U(y)$: $\varphi(x) \to \varphi(x-y)$. В квантовой механике сдвиги должны быть представлены унитарной группой, генератор которой есть оператор импульса. В случае пакета $\varphi(x)$ это так и есть:

$$\lim_{y \to 0} \frac{U(y)\varphi - \varphi}{iy} = \lim_{y \to 0} \frac{\varphi(x-y) - \varphi(x)}{iy} = i\frac{d\varphi}{dx}.$$

В итоге генератор сдвигов действует на функции с носителем, не содержащим граничных точек, как оператор $i\,d/dx$. На самом

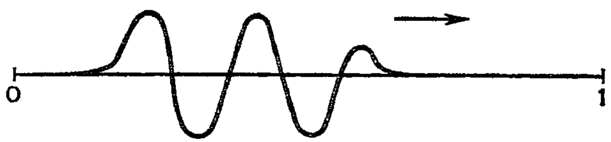

Рис. X.1. Волновой пакет $\varphi(x)$.

деле $i\,d/dx$ симметричен на $C_0^1(0, 1)$ — множестве C^1-функций с компактным носителем на $(0, 1)$, и его замыкание есть как раз наш оператор T. Но T не самосопряжен и причина ясна: мы задали сдвиги $U(y)$ только на таких функциях, носители которых не содержат нуля и единицы, и потому только для достаточно малых y (зависящих от носителя). Нужно еще уточнить, что произойдет, когда волновой пакет достигнет конца отрезка $[0, 1]$! Если мы хотим, чтобы сдвиги представлялись унитарной группой, то надо считать, что части волнового пакета, выходящие за одну границу отрезка $[0, 1]$, должны возвращаться через другую (так, как будто отрезок $[0, 1]$ свернут в окружность). Таким образом, унитарность требует, чтобы

$$\int_0^1 |\varphi(x-y)|^2\,dx = \int_0^1 |\varphi(x)|^2\,dx,$$

где $x-y$ означает сдвиг по модулю 1. Но у нас остается еще свобода в выборе фазы части волнового пакета, входящей через точку нуль. В силу принципа суперпозиции все функции при своем возвращении через нуль должны изменяться на одинаковую фазу. Следовательно, «сдвиги» различных типов как раз и задаются путем фиксирования α, $|\alpha| = 1$, и требования, чтобы все приемлемые волновые пакеты $\psi_y \equiv \varphi(\cdot + y)$ удовлетворяли условию $\psi_y(1) = \alpha\psi_y(0)$ для *всех* «моментов времени» y. Именно такое движение и задается с помощью $\exp\{iyT_\alpha\}$, где T_α — оператор, описанный выше. Таким образом, даже в этой физически тривиальной ситуации мы убеждаемся в том, что *различные* самосопряженные расширения соответствуют *различной физике*.

Простой и полезный критерий существования самосопряженного расширения у симметрического оператора дает доказываемая ниже теорема, но сначала дадим такое

Определение. Антилинейное отображение C: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ (т. е. $C(\alpha\varphi+\beta\psi)=\bar{\alpha}C\varphi+\bar{\beta}C\psi$) называется **сопряжением**, если оно сохраняет норму и если $C^2=I$.

Теорема X.3 (теорема фон Неймана). Пусть A — симметрический оператор, и пусть существует сопряжение C со свойствами C: $D(A)\to D(A)$ и $AC=CA$. Тогда A имеет равные индексы дефекта и потому обладает самосопряженными расширениями.

Доказательство. Мы знаем, что $C^2=I$ и $CD(A)\subseteq D(A)$, поэтому $CD(A)=D(A)$. Предположим, что $\varphi_+\in\mathcal{K}_+$ и $\psi\in D(A)$. Тогда

$$0=\overline{(\varphi_+,\ (A+i)\psi)}=(C\varphi_+,\ C(A+i)\psi)=$$
$$=(C\varphi_+,\ (A-i)\,C\psi).$$

Поскольку C отображает $D(A)$ на $D(A)$, вектор $C\varphi_+$ лежит в $\mathcal{K}_-$, так что C: $\mathcal{K}_+\to\mathcal{K}_-$. Аналогичное рассуждение показывает, что C: $\mathcal{K}_-\to\mathcal{K}_+$. Наконец, так как C сохраняет норму, получаем

$$\dim[\mathcal{K}_+]=\dim[\mathcal{K}_-]. \ \blacksquare$$

Пример 2 (шредингерова частица на полупрямой). Пусть A — оператор $-d^2/dx^2$ в $L^2(0,\infty)$ с областью определения $C_0^\infty(0,\infty)$. Операция комплексного сопряжения коммутирует с A, и потому из теоремы X.3 следует равенство индексов дефекта оператора A. Мы хотим найти решения уравнений $A^*\varphi=\pm i\varphi$. Поскольку $L^2(0,\infty)\subset\mathcal{D}'_{(0,\infty)}$, мы интересуемся слабыми решениями (см. § V.4) уравнений $-d^2\varphi/dx^2=\pm i\varphi$. Из теоремы о регулярности (теорема IX.25) следует, что эти решения бесконечно дифференцируемы и, таким образом, являются классическими решениями. Согласно элементарной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, классическими решениями уравнения $-\varphi''(x)=i\varphi(x)$ служат функции

$$\exp\{(-1+i)\,x/\sqrt{2}\},\qquad \exp\{(1-i)\,x/\sqrt{2}\},$$

а классическими решениями уравнения $-\varphi''(x)=-i\varphi(x)$ — функции

$$\exp\{(1+i)\,x/\sqrt{2}\},\qquad \exp\{(-1-i)\,x/\sqrt{2}\}.$$

Поскольку только $\exp\{(-1+i)\,x/\sqrt{2}\}$ и $\exp\{(-1-i)\,x/\sqrt{2}\}$ лежат в $L^2(0,\infty)$, мы видим, что индексы дефекта равны $\langle 1, 1\rangle$. Используя теорему X.2 и проводя анализ, похожий на рассуждения второй части примера 1, читатель легко покажет (задача 5), что самосопряженные расширения A можно параметризовать с помощью множества $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, задавая

$$D(A_a) = \{\psi \mid \psi \in AC^2[0, \infty], \ \psi'(0) + a\psi(0) = 0\},$$

если $a \in \mathbb{R}$, и

$$D(A_\infty) = \{\psi \mid \psi \in AC^2[0, \infty], \ \psi(0) = 0\}.$$

Все расширения действуют на отвечающих им областях определения как $-d^2/dx^2$. Пространство $AC^2[0, \infty]$ представляет собой множество функций из $L^2(0, \infty)$, у которых слабые производные лежат в $AC[0, \infty]$; в частности, эти функции непрерывно дифференцируемы.

Физическая интерпретация этих граничных условий такова. Поскольку оператор импульса равен $-i\,d/dx$ и $-i\,(d/dx)\exp\{-ikx\} = -k\exp\{-ikx\}$, функция $\exp\{-ikx\}$ — это плоская волна, движущаяся налево с импульсом $k > 0$; иначе говоря, это приходящая волна с импульсом k. Функция $\exp\{ikx\}$ — это уходящая волна с импульсом k. Пусть $a < \infty$ фиксировано. Функции $\exp\{\pm ikx\}$ из-за своего поведения на ∞ не лежат в $L^2(0, \infty)$, но мы игнорируем это, так как сейчас интересуемся их поведением вблизи начала. Однако и около нуля ни $\exp\{ikx\}$, ни $\exp\{-ikx\}$ не лежат в $D(A_a)$, поскольку они не удовлетворяют граничным условиям. Но если взять $\alpha = (ik-a)/(ik+a)$, то $\exp\{-ikx\} + \alpha\exp\{ikx\}$ удовлетворяет граничным условиям $\psi'(0) + \alpha\psi(0) = 0$ и (с точностью до поведения на ∞) лежит в $D(A_a)$. Таким образом, оператор A_a порождает динамику, согласно которой плоская волна с импульсом k отражается в начале координат, меняя фазу на величину $\alpha(k) = (ik-a)/(ik+a)$. Случай $a = \infty$ отвечает потенциалу твердой стенки, когда изменение фазы при всех импульсах равно $\alpha = -1$. Подчеркнем, что изменение фазы различных плоских волн различно для разных самосопряженных расширений. Таким образом, *разные* самосопряженные расширения отвечают *разной физике*.

Менее тривиальное применение теоремы X.3 демонстрируется в следующем примере, для которого важно только *существование* некоторого самосопряженного расширения. Читателю рекомендуется сравнить этот пример с похожим на него доказательством теоремы Бохнера (теорема IX.9), где соответствующее утверждение о существовании выводилось из теоремы Стоуна.

Пример 3 (проблема моментов Гамбургера). Пусть ρ — положительная мера на $\mathbb{R}$ и

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \, d\rho(x). \qquad \text{(X.8)}$$

Числа a_n называются **моментами** меры ρ. Проблема моментов Гамбургера состоит в отыскании требований к последовательности вещественных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, гарантирующих существование меры, удовлетворяющей (X.8). Известно весьма элегантное решение этой проблемы.

Теорема X.4. Последовательность вещественных чисел $\{a_n\}$ служит моментами положительной меры на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда для всех N и всех $\beta_0, \ldots, \beta_N \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n, m=0}^{N} \bar{\beta}_n \beta_m a_{n+m} \geqslant 0. \tag{X.9}$$

Доказательство. Предположим сначала, что ρ — положительная мера и (X.8) выполнено. Тогда

$$\sum_{n, m=0}^{N} \bar{\beta}_n \beta_m a_{n+m} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n=0}^{N} \beta_n x^n \right|^2 d\rho \geqslant 0.$$

Обратно, предположим, что справедливо (X.9). Пусть P — множество полиномов на $\mathbb{R}$ с комплексными коэффициентами. Определим на P полуторалинейную форму

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \beta_n x^n, \ \sum_{m=0}^{N} \alpha_m x^m \right) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \bar{\beta}_n \alpha_m a_{n+m}.$$

В силу (X.9) эта форма неотрицательна. Пусть $Q = \{\psi \mid \psi \in P, (\psi, \psi) = 0\}$ и $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство, полученное пополнением P/Q относительно внутреннего произведения $(\cdot, \cdot)$. Рассмотрим отображение A: $P \longrightarrow P$, определяемое формулой

$$A: \sum_{n=0}^{N} \beta_n x^n \longmapsto \sum_{n=0}^{N} \beta_n x^{n+1}.$$

Нетрудно увидеть, что A симметрично и что $A: Q \longrightarrow Q$, поскольку в силу неравенства Шварца

$$(A\psi, A\psi) = |(A^2\psi, \psi)| \leqslant (A^2\psi, A^2\psi)^{1/2} (\psi, \psi)^{1/2}.$$

Таким образом, A поднимается до симметрического оператора $\hat{A}$ в $\mathscr{H}$ с областью определения P/Q. Если через C обозначить обычное комплексное сопряжение на P, то C также поднимается до отображения $\hat{C}$: $P/Q \longrightarrow P/Q$. Легко проверить, что $\hat{C}$ продолжается до сопряжения на $\mathscr{H}$ и что $\hat{A}\hat{C} = \hat{C}\hat{A}$. В силу теоремы X.3 оператор $\hat{A}$ имеет некоторое самосопряженное расширение; обозначим его $\tilde{A}$. Пусть ρ — спектральная мера вектора 1 в P. Тогда

$$\int x^n \, d\rho(x) = (1, \tilde{A}^n 1) = (1, x^n) = a_n. \blacksquare$$

В гл. XVI мы увидим, что теорему X.4 можно доказать другим способом, применяя теорему Хана—Банаха, а в § X.6 мы обсудим проблему Гамбургера с точки зрения единственности ее решения.

Дополнение к § X.1. Движение на полупрямой, метод Вейля[1]

Любой болван способен изрекать общие истины, но только глубокий ум различает те частности, к которым они относятся.

ДЖОРДЖ ЭЛИОТ (ДАНИЕЛЬ ДЕРОНДА)

В этом дополнении мы обсуждаем как классическое, так и квантовомеханическое движение частицы в потенциале на полупрямой. Сравнение этих двух случаев ясно проявляет аналогии и различия между классической и квантовой механикой и предоставляет возможность применить теоремы об индексах дефекта для построения теории Вейля обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того, решение квантовомеханической задачи на полупрямой можно использовать при анализе многомерных сферически симметричных потенциалов (см. пример 4).

Начнем с классического случая. Пусть $x(t)$ и $v(t)$—положение и скорость частицы, движущейся на полупрямой $(0, \infty)$ в потенциале $V(x)$, который мы будем считать непрерывно дифференцируемым с производной $V'(x)$, удовлетворяющей условию Липшица равномерно на каждом компактном подмножестве из $(0, \infty)$. Гамильтониан этой системы равен $H(x, v) = mv^2/2 + V(x)$, а уравнения движения имеют вид

$$\dot{x}(t) = v(t), \qquad \dot{v}(t) = -V'(x(t))/m. \tag{X.10}$$

Для любых заданных $x_0 > 0$, v_0, $t_0 > 0$ стандартные соображения, основанные на теории сжимающих отображений (см. § V.6), доказывают существование единственной пары $\langle x(t), v(t)\rangle$, дающей для всех t, близких к t_0, решение уравнений (X.10), удовлетворяющее условиям $x(t_0) = x_0$, $v(t_0) = v_0$. Следующее предложение показывает, что единственный случай, когда локальное решение не продолжается до глобального,—это случай частицы, достигающей нуля или уходящей на бесконечность за конечное время.

[1]) В оригинале: limit point—limit circle methods.—*Прим. ред.*

Предложение 1. Предположим, что глобального решения уравнений (X.10), удовлетворяющего начальным условиям $x(t_0) = x_0 > 0$, $v(t_0) = v_0$, не существует, т. е. максимальный интервал времени, для которого решение с этими начальными данными существует, равен $[t_0, \tau)$, где $\tau < \infty$. Тогда

$$\text{либо } \lim_{t \uparrow \tau} x(t) = 0, \qquad \text{либо } \lim_{t \uparrow \tau} x(t) = \infty.$$

Доказательство. В силу изложенного в § V.6 способа построения локального решения и предположений о свойствах $V(x)$, для любого компактного подмножества $K \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}$ существует такое T_K, что (X.10) при $t \in (t_1 - T_K, t_1 + T_K)$ имеет единственное решение с заданными значениями $\langle x_1, v_1 \rangle \in K$ при $t = t_1$. Отсюда ясно, что в случае, когда решение нельзя продолжить за момент времени $t = \tau$, оно не может лежать в K ни при каких $t > \tau - T_K$. Для завершения доказательства нам нужно усилить это утверждение, перейдя от утверждения о том, что точка $\langle x(t), v(t) \rangle$ со временем должна покинуть любое компактное подмножество фазового пространства $(0, \infty) \times \mathbb{R}$, к утверждению о том, что $x(t)$ в конце концов покидает любое компактное подмножество $C \subset (0, \infty)$. Именно здесь существенно применение закона сохранения энергии. Поскольку $H(x(t), v(t)) = H(x_0, v_0) = E_0$, то в случае, когда $x(t)$ лежит в некотором компактном подмножестве C, пара $\langle x(t), v(t) \rangle$ принадлежит компактному множеству

$$C \times \left\{ v(t) \,\middle|\, |v(t)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{m}} \left(E_0 - \inf_{x \in C} V(x)\right)^{1/2} \right\}.$$

Таким образом, для каждого n существует такое t_n, что $x(t) \notin (1/n, n)$ при всех $t > t_n$, а отсюда, в силу непрерывности $x(t)$, вытекает наше предложение. ∎

Приведенные рассуждения показывают, каким образом сохранение энергии входит в доказательство существования глобального решения для классической системы с одной степенью свободы. В § X.13 мы применим метод, основанный на законе сохранения энергии, для доказательства существования глобального решения в случае классической системы с бесконечным числом степеней свободы.

Определение. Будем говорить, что классическое движение, порождаемое потенциалом V, **полно** в 0 (соответственно в ∞) (или что сам потенциал V полон в 0 (соответственно в ∞)), если не существует точки $\langle x_0, v_0 \rangle \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$, такой, что $x(t)$ достигает 0 (соответственно ∞) за конечное время.

Таким образом, если потенциал V полон и в 0 и в ∞, то глобальное решение существует для всех начальных условий $\langle x_0, v_0 \rangle$. Следующая теорема решает вопрос о том, когда V полон.

Теорема X.5. Пусть $V(x)$ обладает непрерывной производной, удовлетворяющей условию Липшица равномерно на каждом компактном подмножестве в $(0, \infty)$. Классическое движение, порождаемое потенциалом $V(x)$,

(a) неполно в 0 тогда и только тогда, когда $V(x)$ ограничен сверху около нуля;

(b) неполно в ∞ тогда и только тогда, когда $V(x)$ ограничен сверху при $x \geqslant 1$ и

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{K-V(x)}} < \infty \text{ для некоторого } K > \sup_{x \geqslant 1} V(x).$$

Доказательство. Потенциал V не ограничен сверху около нуля тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $x_n \to 0$, что $V(x_n) \to \infty$. Предположим, что V не ограничен сверху около нуля. Благодаря сохранению энергии

$$mv(t)^2/2 + V(x(t)) = mv_0^2/2 + V(x_0),$$

так что $V(x(t)) \leqslant mv_0^2/2 + V(x_0)$. Таким образом, $x(t)$ никогда не может совпадать с x_n при достаточно большом n и, следовательно, $x(t)$ никогда не окажется около нуля. Поэтому V полон в нуле. Обратно, предположим, что $V(x) \leqslant M$ на $(0, 1)$. Пусть $x(0) = x_0 = 1$; выберем скорость v_0 отрицательной и такой, чтобы $mv_0^2/2 + V(1) = 1 + M$. Тогда $mv(t)^2/2 \geqslant 1$ при всех t и частица достигнет нуля за конечное время. Это доказывает (a).

Если $V(x)$ не ограничен сверху на $(1, \infty)$, то соображения, аналогичные уже изложенным, показывают, что V полон в ∞. Поэтому предположим, что $V(x) \leqslant M$ при всех $x \in [1, \infty)$ и что для некоторых начальных условий $\langle x_0, v_0 \rangle$ и $\tau < \infty$, $\tau \in \mathbb{R}$, справедливо равенство $\lim_{t \to \tau} x(t) = \infty$. Пусть $K = \max\{M + 1, mv_0^2/2 + V(x_0)\}$. Тогда для всех $t \in (0, \tau)$

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{K - V(x(t))}.$$

При этом для частицы, начавшей двигаться направо, $x(t)$ должно строго возрастать, ибо в противном случае сохранение энергии и единственность решения уравнений (X.10) повлекли бы за собой то, что частица никогда не достигла бы ∞. Следовательно, существует такое $t_1 < \tau$, что если $t \in (t_1, \tau)$, то $dx/dt > 0$ и $x(t) \geqslant 1$.

Отсюда

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int\limits_{x(t_1)}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{K-V(x)}} \leqslant \int\limits_{x(t_1)}^{\infty} \frac{dt}{dx} dx = \tau - t_1 < \infty.$$

Обратно, если

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{K-V(x)}} < \infty \text{ для некоторого } K > \sup_{x \geqslant 1} V(x),$$

то мы выбираем начальные условия $x_0 = 1$, $v_0 > 0$ так, чтобы $E = mv_0^2/2 + V(x_0) = K$. Тогда $dx/dt > 0$ при всех $t > 0$ и

$$\int\limits_{0}^{\infty} \left(\frac{dt}{dx}\right) dx = \sqrt{\frac{m}{2}} \int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{K-V(x)}} < \infty,$$

в силу чего время достижения ∞ конечно. ∎

Обратимся теперь к квантовомеханическому случаю, где требуется предположить только непрерывность на $(0, \infty)$ вещественной функции $V(x)$. Квантовым аналогом классического гамильтониана $H(x, v)$ будет формальный оператор $-(2m)^{-1} d^2/dx^2 + V(x)$. Обозначим через H оператор $-d^2/dx^2 + V(x)$ на $L^2(0, \infty)$ с областью определения $D(H) = C_0^\infty(0, \infty)$, где $C_0^\infty(0, \infty)$ — множество функций класса C^∞ с носителями, отделенными от 0 и ∞ (мы опускаем несущественный множитель $1/2m$). Используя вещественность $V(x)$ и интегрируя по частям, видим, что H — симметрический оператор. Предположим, что $\psi \in D(H^*)$; тогда

$$\left(-\frac{d^2\varphi}{dx^2} + V\varphi, \psi\right) = (\varphi, H^*\psi),$$

или

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}\varphi, \psi\right) = (\varphi, H^*\psi) - (\varphi, V\psi)$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(0, \infty)$. Таким образом, вторая слабая производная ψ'' локально принадлежит L^2, ибо $V(x)\psi(x) \in L^2$ локально. В силу леммы Соболева, ψ' абсолютно непрерывна и $(-\psi'' + V\psi) \in L^2(0, \infty)$ (хотя по отдельности каждый из членов около нуля или бесконечности может не принадлежать L^2). Следовательно, функции в $D(H^*)$ вполне хороши и H^* действует как раз так, как мы ожидали. Наконец, заметим, что H коммутирует с комплексным сопряжением и потому имеет равные индексы дефекта. Сведем все это в специальное

Предложение 2. Предположим, что $V(x)$ — вещественная непрерывная функция на $(0, \infty)$. Пусть H — оператор $-d^2/dx^2+V(x)$ с областью определения $C_0^\infty(0, \infty)$. Тогда

(a) H симметричен.

(b) Если $\psi \in D(H^*)$, то ψ непрерывно дифференцируема, ψ' абсолютно непрерывна, ψ'' локально принадлежит L^2, $-\psi''+ +V\psi \in L^2(0, \infty)$ и

$$H^*\psi = -\psi''+V\psi.$$

(c) H обладает равными индексами дефекта.

Важность предложения 2 состоит в том, что с его помощью вопросы об индексах дефекта оператора H сводятся к вопросам о решениях классического обыкновенного дифференциального уравнения $-\psi''+V\psi = \pm i\psi$. Мы завершим подготовку к общему анализу, доказав такое

Предложение 3. Пусть $Q(x)$ — непрерывная комплекснозначная функция на $(0, \infty)$. Тогда множество решений уравнения $\varphi''(x) = Q(x)\varphi(x)$ на $(0, \infty)$ является двумерным векторным пространством дважды непрерывно дифференцируемых функций. Для любых двух решений φ и ψ вронскиан $W(x) = \varphi'(x)\psi(x)- -\varphi(x)\psi'(x)$ постоянен и равен нулю тогда и только тогда, когда φ и ψ — линейно зависимые функции.

Доказательство. Мы докажем существование глобального решения с произвольно фиксированными начальными данными $\langle\varphi(1), \varphi'(1)\rangle \in \mathbb{C}^2$ при $x=1$. Согласно обсуждению, проведенному в § V.6, локальное решение существует, и потому точно так же, как при доказательстве предложения 1, можно утверждать, что глобального решения нет только тогда, когда $\alpha(x) = \langle\varphi(x), \varphi'(x)\rangle$ достигает бесконечности при некотором конечном x_0, отличном от нуля. Покажем, что это не может случиться ни при каком $x_0 > 1$; доказательство для $x_0 < 1$ аналогично. Положим

$$q(x_0) = \sup\{|Q(x)|+1 \mid 1 \leqslant x \leqslant x_0\}.$$

С помощью дифференциального уравнения выводим, что при $1 \leqslant x \leqslant x_0$

$$\alpha'(x) = \langle\varphi'(x), Q(x)\varphi(x)\rangle,$$

так что $|\alpha'(x)| \leqslant q(x_0)|\alpha(x)|$ и

$$|\alpha(x)| \leqslant |\alpha(1)| + q(x_0)\int_1^x |\alpha(y)|\,dy. \qquad \text{(X.11)}$$

В итоге, итерируя (X.11), получаем

$$|\alpha(x)| \leqslant |\alpha(1)|\,e^{q(x_0)(x-1)}$$

для всех $1 \leqslant x \leqslant x_0$. Это доказывает существование по крайней мере двух независимых глобальных решений. Более того, в силу локальной единственности, их не более двух и, следовательно, ровно два.

Утверждения о $W(x)$ немедленно выводятся с помощью дифференцирования из того, что $W(x)$ есть детерминант матрицы

$$\begin{pmatrix} \psi & \varphi \\ \psi' & \varphi' \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Исследуем теперь индексы дефекта оператора H, изучая решения уравнения

$$-\varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = \lambda\varphi(x). \tag{X.12}$$

Теорема X.6. Пусть $V(x)$ — непрерывная вещественная функция на $(0, \infty)$.

(a) Если $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, то по крайней мере одно ненулевое решение (X.12) лежит в L^2 около нуля и по крайней мере одно решение лежит в L^2 около ∞.

(b) Если хотя бы для одного $\lambda \in \mathbb{C}$ оба решения (X.12) лежат в L^2 около бесконечности (соответственно около нуля), то и для *всех* $\lambda \in \mathbb{C}$ оба решения (X.12) лежат в L^2 около бесконечности (соответственно около нуля).

Доказательство. Рассмотрим сначала оператор B на $L^2(1, 2)$, действующий на области определения $D(B) = \{u \in AC^2[1, 2] \mid u(1) = u(2) = u'(1) = u'(2) = 0\}$ по формуле $Bu = -u'' + Vu$. Подражая рассуждениям, использованным в примерах 1 и 2 § X.1, и применяя предложение 3, легко обнаружить, что индексы дефекта оператора B равны $\langle 2, 2\rangle$. В частности, если $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, то $\operatorname{Ran}(B-\lambda)$ не плотно в $L^2(1, 2)$, т. е. можно найти $v \in C_0^\infty(1, 2)$ со свойством $v \notin \operatorname{Ran}(B-\lambda)$.

Пусть теперь $\tilde{H}$ — самосопряженное расширение оператора H в $L^2(0, \infty)$. Так как $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, можно найти функцию $u \in D(\tilde{H}) \subset D(H^*)$, удовлетворяющую равенству $(\tilde{H}-\lambda)u = v$. При этом u не может обращаться в нуль и на $(0, 1)$, и на $(2, \infty)$, ибо если это так, то ее сужение на $[1, 2]$ лежало бы в $D(B)$, что противоречит условию $v \notin \operatorname{Ran}(B-\lambda)$.

Предположим, что u не равна тождественно нулю на $(0, 1)$. Тогда ее сужение $\tilde{u}$ на $(0, 1)$ удовлетворяет (X.12) на $(0, 1)$ и квадратично интегрируемо около нуля. Рассмотрим $D(A) = \{f \in D(\tilde{H}) \mid f \equiv 0$ в $[1, \infty)\}$ как (плотное) подмножество в $L^2(0, 1)$. Область значений оператора $A - \lambda \equiv (\tilde{H}-\lambda) \upharpoonright D(A)$ не плотна, ибо комплексно сопряженная с $\tilde{u}$ функция $\bar{\tilde{u}}$ обладает свойствами $\bar{\bar{u}} \in D(A^*)$ и $(A^*-\bar{\lambda})\bar{\bar{u}}=0$. В результате можно найти функцию $w \in C_0^\infty(0, 1)$, которая не принадлежит $\operatorname{Ran}(A-\lambda)$. В силу самосопряженности $\tilde{H}$ существует такая $f \in D(\tilde{H})$, что $(\tilde{H}-\lambda) f = w$. Так как $w \notin \operatorname{Ran}(A-\lambda)$, функция f не может обращаться в нуль тождественно на $[1, \infty)$, и потому мы получаем ненулевое решение уравнения (X.12), квадратично интегрируемое около ∞. Если u не обращается тождественно в нуль на $(2, \infty)$, можно воспользоваться аналогичным рассуждением. Это докажет (а).

Для доказательства (b) предположим, что φ_1 и φ_2 — два независимых решения уравнения (X.12) при некотором $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, что оба они лежат в L^2 около ∞ и нормированы условием $\varphi_1'(x)\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\varphi_2'(x)=1$. Пусть u — решение того же уравнения при $\lambda=\lambda_1 \neq \lambda_0$. Возьмем $c \in (0, \infty)$. Тогда прямое вычисление показывает, что

$$u(x)-(\lambda_1-\lambda_0)\int_c^x (\varphi_1(x)\varphi_2(\xi)-\varphi_1(\xi)\varphi_2(x))u(\xi)\,d\xi$$

удовлетворяет (X.12) при $\lambda=\lambda_0$, поэтому

$$u(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+ \\ +(\lambda_1-\lambda_0)\int_c^x (\varphi_1(x)\varphi_2(\xi)-\varphi_1(\xi)\varphi_2(x))\,u(\xi)\,d\xi$$

с некоторыми константами c_1 и c_2. Определим $\|f\|^2_{[c,x]} = \int_c^x |f(x)|^2 dx$ и выберем M так, чтобы $\|\varphi_1\|_{[c,\infty]} < M$ и $\|\varphi_2\|_{[c,\infty]} < M$. Тогда в силу неравенства Шварца

$$|u(x)| \leqslant |c_1||\varphi_1(x)|+|c_2||\varphi_2(x)|+ \\ +|\lambda_1-\lambda_0|(|\varphi_1(x)|+|\varphi_2(x)|)M\|u\|_{[c,x]},$$

откуда

$$\|u\|_{[c,x]} \leqslant |c_1|M+|c_2|M+2M^2|\lambda_1-\lambda_0|\|u\|_{[c,x]}.$$

Следовательно, если $|\lambda_1-\lambda_0| \leqslant 1/4M^2$, то $\|u\|_{[c,x]}/2 \leqslant (|c_1|+|c_2|)M$ для всех x, и потому $u \in L^2$ около ∞. Поскольку путем выбора констант c достаточно большими можно сделать M как угодно малым, мы доказали (b) для случая, когда речь идет о ∞. Утверждение, относящееся к нулю, доказывается точно так же. ■

Будем говорить, что $V(x)$ отвечает случаю **предельной окружности** на бесконечности (соответственно в нуле), если для некоторого и, следовательно, для всех λ *все* решения уравнения

$$-\varphi''(x)+V(x)\varphi(x)=\lambda\varphi(x)$$

квадратично интегрируемы на бесконечности (соответственно в нуле). Если $V(x)$ не отвечает случаю предельной окружности на бесконечности (соответственно в нуле), то будем говорить, что $V(x)$ отвечает случаю **предельной точки.** О происхождении этой терминологии см. Замечания. Теперь докажем, что справедлива

Теорема X.7 (критерий Вейля). Пусть $V(x)$ — непрерывная вещественная функция на $(0, \infty)$. Оператор $H=-d^2/dx^2+V(x)$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(0, \infty)$ тогда и только тогда, когда $V(x)$ отвечает случаю предельной точки и в нуле, и на бесконечности.

Доказательство. Если $V(x)$ отвечает случаю предельной окружности и в нуле, и на бесконечности, то индексы дефекта H суть $\langle 2, 2\rangle$. Если $V(x)$ отвечает предельной окружности на одном конце и предельной точке на другом, то H обладает индексами дефекта $\langle 1, 1\rangle$. Поэтому если $V(x)$ не отвечает случаю предельной точки на обоих концах, то H не самосопряжен в существенном.

Теперь предположим, что $V(x)$ отвечает предельной точке на обоих концах. Положим $W_x(f, g)=\overline{f(x)}g'(x)-\overline{f'(x)}g(x)$ для $f, g\in D(H^*)$. Функция W_x непрерывна, и для нее справедливо соотношение

$$W_b(f, g)-W_a(f, g)=\int_a^b[\overline{(H^*f)(x)}g(x)-\overline{f(x)}(H^*g)(x)]\,dx,$$

которое доказывается интегрированием по частям. Поскольку подынтегральное выражение в правой части принадлежит $L^1(0, \infty)$, существуют пределы $W_\infty(f, g)=\lim_{b\to\infty}W_b(f, g)$, $W_0(f, g)=\lim_{a\to 0}W_a(f, g)$ и

$$W_\infty(f, g)-W_0(f, g)=(H^*f, g)-(f, H^*g).$$

Если мы сможем показать, что левая часть равна нулю, то докажем симметричность H^* и, следовательно, самосопряженность в существенном H.

Выберем $c\in(0, \infty)$. Пусть B — сужение H на $C_0^\infty(0, c)\subset L^2(0, c)$ и $A=-d^2/dx^2+V(x)$ на

$$D(A)=\{\varphi\mid\varphi\in C^\infty(0, c),\ \varphi=0 \text{ около нуля},\ \varphi(c)=0\}.$$

Поскольку $B \subset A$, имеем $\bar{B} \subset \bar{A}$. Но в $D(\bar{A})$ существуют функции, для которых $\varphi'(c) \neq 0$, а в $D(\bar{B})$ таких функций нет, поэтому $\bar{A}$ — *нетривиальное* замкнутое и симметрическое расширение $\bar{B}$. Так как оба решения уравнения $-\varphi''+V\varphi = \pm i\varphi$ лежат в L^2 около c и только одно из них лежит в L^2 около нуля, индексы дефекта оператора B равны $\langle 1, 1\rangle$. Поэтому индексы дефекта $\bar{A}$ суть $\langle 0, 0\rangle$, и оператор $\bar{A}$ самосопряжен.

Пусть теперь $f, g \in D(H^*)$. Выберем f_1, $g_1 \in C_0^\infty(0, \infty)$ так, чтобы $f(c)+f_1(c)=0$, $g(c)+g_1(c)=0$. Положим $f_2=f+f_1$, $g_2 = g+g_1$. Тогда

$$-W_0(f, g) = W_c(f_2, g_2) - W_0(f_2, g_2) = \\ = (\bar{A}f_2, g_2) - (f_2, \bar{A}g_2) = 0,$$

поскольку f_2, $g_2 \in D(A^*) = D(\bar{A})$. Следовательно, $W_0(f, g) = 0$; аналогичное рассуждение доказывает, что $W_\infty(f, g) = 0$. ∎

Теперь мы хотим изучить вопрос о том, когда $V(x)$ отвечает случаю предельной точки на обоих концах. Обсуждение, проведенное в примерах 1, 2 из § 1, наталкивает на мысль о том, что H самосопряжен в существенном тогда и только тогда, когда при классическом движении, порождаемом $V(x)$, частица не достигает 0 или ∞, и потому нет нужды задавать граничные условия в нуле или бесконечности (сейчас мы увидим, в какой мере справедлива эта классическая аналогия).

Определение. Назовем потенциал $V(x)$ **квантовомеханически полным**, если $H = -d^2/dx^2 + V(x)$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(0, \infty)$. Будем говорить, что $V(x)$ **полон на** ∞ (соответственно **в нуле**), если по крайней мере одно решение уравнения $\varphi''(x) = V(x)\varphi(x)$ не лежит в L^2 около ∞ (соответственно около нуля).

В примере 2 § 1 было показано, что потенциал $V(x) \equiv 0$ не полон. Это не удивительно, поскольку свободная классическая частица, начав движение налево, достигнет нуля за конечное время.

Обсудим сначала случай, относящийся к ∞. Стандартное достаточное условие таково:

Теорема X.8. Пусть $V(x)$ — непрерывная вещественная функция на $(0, \infty)$. Предположим, что существует положительная дифференцируемая функция $M(x)$, обладающая свойствами

(i) $V(x) \geqslant -M(x)$,

(ii) $\int\limits_1^\infty (M(x))^{-1/2}\,dx=\infty$,

(iii) $M'(x)/(M(x))^{3/2}$ ограничено около ∞.

Тогда $V(x)$ отвечает случаю предельной точки (полон) на ∞.

Доказательство. Покажем, что оба решения уравнения $-\varphi''(x)+V(x)\varphi(x)=0$ не могут лежать в L^2 около ∞. Если $0<c_1<c<\infty$ и u — вещественное решение, принадлежащее L^2 около ∞, то

$$-K_1\equiv-\int\limits_{c_1}^{\infty}u^2(x)\,dx\leqslant-\int\limits_{c_1}^{c}u^2(x)\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{c_1}^{c}\frac{V(x)}{M(x)}u^2(x)\,dx=\int\limits_{c_1}^{c}\frac{u''(x)\,u(x)}{M(x)}\,dx.$$

Интегрирование по частям показывает, что u удовлетворяет неравенству

$$-\frac{u'(x)\,u(x)}{M(x)}\Bigg]_{c_1}^{c}+\int\limits_{c_1}^{c}\frac{(u'(x))^2}{M(x)}\,dx-\int\limits_{c_1}^{c}\frac{u'(x)\,u(x)\,M'(x)}{(M(x))^2}\,dx\leqslant K_1 \qquad \text{(X.13)}$$

для всех c. С помощью (iii) найдем такое K_2, что

$$\int\limits_{c_1}^{c}\frac{u'(x)\,u(x)\,M'(x)}{(M(x))^2}\,dx\leqslant K_2\left(\int\limits_{c_1}^{c}\frac{(u'(x))^2}{M(x)}\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{c_1}^{c}(u(x))^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Предположим, что $\int\limits_{c_1}^{\infty}((u'(x)^2/M(x))\,dx=\infty$. Тогда в силу последнего неравенства, предположения относительно u и неравенства (X.13) произведение $u'(x)\,u(x)$ положительно около ∞. Но это означает, что $u'(x)$ и $u(x)$ всегда имеют одинаковые знаки, чего не может быть, поскольку u принадлежит L^2 около бесконечности. Следовательно, $\int\limits_{c_1}^{\infty}((u'(x)^2/M(x))\,dx<\infty$.

Теперь предположим, что φ и ψ — независимые решения уравнения $-\varphi''+V\varphi=0$, лежащие в L^2 около ∞. Можно считать, что φ и ψ вещественнозначны и нормированы условием $\varphi(x)\psi'(x)-\varphi'(x)\psi(x)=1$. Тогда

$$\left(\frac{1}{M(x)}\right)^{1/2}=\frac{\varphi(x)\,\psi'(x)}{(M(x))^{1/2}}-\frac{\varphi'(x)\,\psi(x)}{(M(x))^{1/2}}$$

должно лежать в L^1 около ∞, что противоречит (ii). ∎

Следствие. Пусть потенциал $V(x)$ дифференцируем на $(0, \infty)$ и ограничен сверху константой K на $[1, \infty)$. Предположим, что

(i) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{K-V(x)}}=\infty,$

(ii) $V'(x)|V(x)|^{-3/2}$ ограничено около бесконечности.

Тогда $V(x)$ отвечает случаю предельной точки около ∞.

Таким образом, если $V(x)$ классически полон около ∞ (условие (i)) и, сверх того, удовлетворяет условию (ii), то $V(x)$ квантовомеханически полон. По существу, условие (ii) говорит о том, что производная V' не должна быть слишком велика по сравнению с V. Следующие примеры показывают, что как с физической, так и с математической точек зрения классический и квантовый случаи не эквивалентны, если производная V' достаточно велика.

Пример 1 (потенциал V, полный на ∞ квантовомеханически, но не полный там классически). Потенциал $V(x)$ представляет собой серию ступенек, связанных между собой гладкими кривыми, сосредоточенными на очень коротких интервалах (α_i, β_i) (рис. X.2). Ясно, что $\int\limits_0^\infty (1/\sqrt{-V(x)})\,dx<\infty$, и потому классическое движение неполно на ∞. Покажем, что если ступеньки достаточно круты, то квантовое движение полно на ∞. Физи-

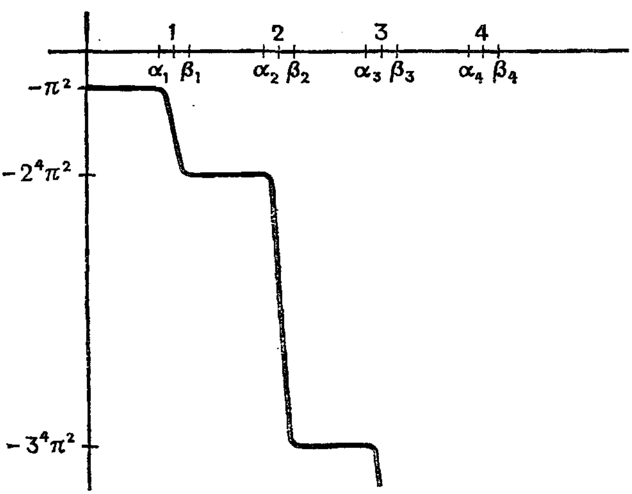

Рис. X.2. График V.

ческая причина этого в том, что часть квантовомеханической волны отражается от каждой крутой ступеньки, совокупность которых устроена так, чтобы отраженные волны были когерентными. Для того чтобы понять идею доказательства, рассмотрим случай бесконечно крутых ступенек, когда $\alpha_k = k = \beta_k$. Пусть $\varphi(x) = -\cos(n^2\pi x - n(n-1)\pi/2)$ для $n-1 \leqslant x \leqslant n$. Тогда $\varphi \in D(H^*)$, $\varphi'' = V\varphi$ и $\varphi \notin L^2$ около ∞. Покажем теперь, что эти бесконечно крутые ступеньки можно сгладить так, чтобы одно из решений уравнения

$$\varphi''(x) = V(x)\varphi(x) \tag{X.14}$$

оставалось вне $L^2(0, \infty)$.

Для этого на коротких интервалах (α_k, β_k) сделаем потенциал V монотонно убывающим, причем так, чтобы он стал дважды непрерывно дифференцируемым. Возьмем $\alpha_1 = 1$ и положим $\varphi(x) = -\cos(\pi x)$ на $(0, 1]$. При $x = 1$ имеем $\varphi(1) = 1$ и $\varphi'(1) = 0$. Мы хотим выбрать β_1 так, чтобы решение не слишком убывало около β_1. Поскольку $V(x) < 0$, решение будет выпуклым вниз до следующего нуля функции $\varphi(x)$, который мы обозначим через r_1. На интервале $I_1 = (1, \min\{r_1, \alpha_2\})$ функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) - 1 = \int_1^x \left(\int_1^s V(t)\varphi(t)\,dt \right) ds, \tag{X.15}$$

откуда вытекает, что

$$|\varphi(x) - 1| \leqslant \frac{1}{2}(x-1)^2 (\sup_{I_1} |V(t)|)(\sup_{I_1} |\varphi(t)|) \leqslant \frac{1}{2}(x-1)^2 (2^4\pi^2).$$

Выберем β_1 таким, чтобы $|\varphi(\beta_1) - 1| \leqslant 1/4$. Теперь можно задать потенциал на интервале (α_1, β_1), причем какой бы способ сглаживания мы ни выбрали, предыдущая оценка гарантирует неравенство $\varphi(\beta_1) \geqslant 1 - 1/4$. На (β_1, α_2) функция $\varphi_2(x)$ имеет вид $A_2 \cos(2^2\pi x - \gamma_2)$, где $|A_2| \geqslant 1 - 1/4$. Теперь возьмем в качестве α_2 ближайшую к $x = 2$ точку, где φ_2 достигает максимума. Выберем β_2 (используя ту же идею, что и выше) так, чтобы $\varphi(\beta_2) \geqslant 1 - 1/4 - 1/8$. Таким способом мы построим решение $\varphi(x)$ вида

$$A_n \cos(n^2\pi x - \gamma_n)$$

на (β_{n-1}, α_n) с $|A_n| \geqslant 1/2$. В итоге $\varphi \notin L^2(0, \infty)$ и, в силу теоремы X.6, потенциал V отвечает случаю предельной точки на ∞.

Пример 2 (потенциал V, полный на ∞ классически и не полный там квантовомеханически). Наш потенциал будет иметь вид

$$V(x) = \frac{1}{x^2} - x^4 + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(x),$$

где σ_k — очень узкие гладкие пики возрастающей высоты, так что $V(k)=k$ (рис. X.3). Поскольку V не ограничен сверху на ∞, движение классически полно. Из теоремы X.9 (см. ниже) следует, что потенциал $V_1(x)=x^{-2}-x^4$ квантовомеханически не полон на ∞, т. е. соответствующий гамильтониан H_1 не самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(0, \infty)$. Далее для доказательства несамосопряженности $H=H_1+\sum\sigma_k(x)$ на $C_0^\infty(0, \infty)$ в случае, когда пики σ_k достаточно узки, мы применим метод § X.2. Поскольку в силу теоремы X.10 (см. ниже) потенциал $V=V_1+\sum\sigma_k$ отвечает предельной точке в нуле, он должен отвечать предельной окружности на бесконечности. Физическая причина такого поведения в том, что при достаточно узких пиках квантовая частица может благодаря туннельному эффекту проходить сквозь них, тогда как классическая частица поворачивает обратно.

Для доказательства несамосопряженности в существенном H покажем, что на языке § X.2 сумма $\sum\sigma_k$ $(-d^2/dx^2+V_1)$-ограничена на $C_0^\infty(0, \infty)$ с относительной гранью, меньшей единицы. Это означает, что для некоторого $a<1$

$$\|(\sum\sigma_k)\varphi\|^2 \leqslant a^2\|-\varphi''+V_1\varphi\|^2+b^2\|\varphi\|^2 \qquad \text{(X.16)}$$

для всех $\varphi\in C_0^\infty(0, \infty)$. В силу симметричной формы теоремы Като — Реллиха (теорема X.13) это влечет за собой одновременную самосопряженность или несамосопряженность в существенном на $C_0^\infty(0, \infty)$ операторов $-d^2/dx^2+V_1$ и $-d^2/dx^2+V_1+\sum\sigma_k$.

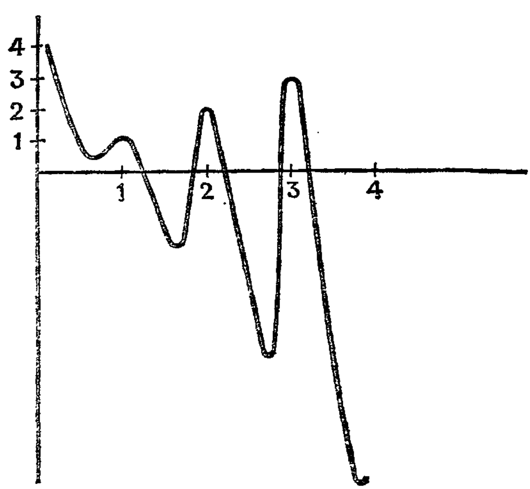

Рис. X.3. График V.

Чтобы доказать (X.16), используем следующую оценку типа оценки Соболева, которую в задаче 10 мы предлагаем доказать читателю. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $I_4^y = \{x \mid |x-y| \leqslant 1/4\}$ и $I_2^y = \{x \mid |x-y| \leqslant 1/2\}$. Тогда существует не зависящая от φ и y постоянная C, такая, что

$$\sup_{x \in I_4^y} |\varphi|^2 \leqslant C\left(\|\varphi''\|^2_{L^2(I_2^y)} + \|\varphi\|^2_{L^2(I_2^y)}\right). \tag{X.17}$$

Пусть $\sigma_k(x) \in C_0^2(I_4^k)$ таковы, что $V_1(x) + \sigma_k(x)$ достигает своего максимума на отрезке I_4^k в точке k и величина этого максимума равна k. Пусть $\varepsilon(k)$ — диаметр носителя $\sigma_k(x)$. Тогда для $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\|\sigma_k\varphi\|^2 \leqslant 4\varepsilon(k)\, k^8 \sup_{I_4^k} |\varphi|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 4\varepsilon(k)\, k^8 \left(\|\varphi''\|^2_{L^2(I_2^k)} + \|\varphi\|^2_{L^2(I_2^k)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 8\varepsilon(k)\, k^8 \left[\|-\varphi'' + V_1\varphi\|^2_{L^2(I_2^k)} + \|V_1\varphi\|^2_{L^2(I_2^k)} + \|\varphi\|^2_{L^2(I_2^k)}\right],$$

поскольку $\|\psi_1\|^2 \leqslant \|\psi_1\|^2 + \|\psi_1 + 2\psi_2\|^2 = 2\|\psi_1 + \psi_2\|^2 + 2\|\psi_2\|^2$. Выберем теперь $\varepsilon(k)$ таким малым, чтобы $8\varepsilon(k)\, k^8 \leqslant 1/2$ и $\sup_{x \in I_2^k} |16\varepsilon(k)\, k^8 V_1(x)| \leqslant 1$. Тогда

$$\left\|\sum_{k=1}^\infty \sigma_k\varphi\right\|^2 = \sum_{k=1}^\infty \|\sigma_k\varphi\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{2}\|-\varphi'' + V_1\varphi\|^2_{L^2(I_2^k)} + 2\|\varphi\|^2_{L^2(I_2^k)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|-\varphi_1'' + V_1\varphi\|^2 + 2\|\varphi\|^2.$$

Это завершает доказательство неравенства (X.16).

Следующая теорема показывает, что если производные от V не слишком велики по сравнению с V, потенциал V классически полон на ∞ тогда и только тогда, когда он полон на ∞ квантовомеханически (доказательство см. в работах, указанных в Замечаниях).

Теорема X.9. Пусть V — дважды непрерывно дифференцируемая вещественная функция на $(0, \infty)$. Предположим, что $V(x) \to -\infty$ при $x \to \infty$ и что

$$\int_0^\infty \left(\frac{[(-V)^{1/2}]'}{(-V)^{3/2}}\right)' (-V)^{-1/4}\, dx < \infty$$

с некоторым c. Потенциал V отвечает случаю предельной точки на ∞ тогда и только тогда, когда $\int\limits_c^\infty (-V(x))^{-1/2}\,dx=\infty$, т. е. тогда и только тогда, когда потенциал V классически полон на ∞.

Пример 3. Пусть $c>0$. Из приведенной теоремы легко заключить, что $-d^2/dx^2-cx^\alpha$ отвечает случаю предельной точки на ∞ тогда и только тогда, когда $\alpha\leqslant 2$. Дальнейшее обсуждение этого примера см. в § X.5.

Обратимся теперь к вопросу полноты в нуле. Существует широкое разнообразие теорем, гарантирующих реализацию в нуле случая предельной точки либо предельной окружности. Для положительных потенциалов соответствующие условия дает следующая

Теорема X.10. Пусть V непрерывен и *положителен* около нуля. Если $V(x)\geqslant 3/4x^2$ около нуля, то $-d^2/dx^2+V(x)$ отвечает случаю предельной точки в нуле. Если около нуля $V(x)\leqslant\leqslant(3/4-\varepsilon)x^{-2}$ при некотором $\varepsilon>0$, то $-d^2/x^2+V(x)$ отвечает случаю предельной окружности.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $V(x)=c/x^2$, $c>0$. Два независимых решения уравнения $-\varphi''(x)+(c/x^2)\varphi(x)=0$ суть x^{α_1} и x^{α_2}, где $\alpha_1=(1+\sqrt{1+4c})/2$ и $\alpha_2=(1-\sqrt{1+4c})/2$. Функция x^{α_1} всегда лежит в L^2 около нуля, но x^{α_2} лежит в L^2 около нуля тогда и только тогда, когда $\alpha_2>-1/2$, т. е. тогда и только тогда, когда $c<3/4$. Таким образом, уравнение $-\varphi''(x)+(c/x^2)\varphi(x)=0$ обладает двумя независимыми решениями, входящими в L^2 около нуля тогда и только тогда, когда $c<3/4$.

Теперь мы докажем теорему, используя идею сравнения. Предположим, что V и $\tilde V$ оба положительны на интервале $(0, b)$ и $V(x)\geqslant\tilde V(x)$. Предположим, что $A>0$; пусть u_A — решение уравнения $u''(x)=V(x)u(x)$, удовлетворяющее условиям $u(b/2)=2$, $u'(b/2)=-A$, и пусть $\tilde u_A$ — решение уравнения $\tilde u''(x)=\tilde V(x)\tilde u(x)$, удовлетворяющее условиям $\tilde u(b/2)=1$, $\tilde u'(b/2)=-A/2$. Несложное рассуждение показывает, что $u_A(x)>\tilde u_A(x)$ для всех $x\in(0, b/2)$. Выбирая в качестве A два различных положительных числа, мы получим два независимых решения двух соответствующих уравнений. Это означает, что, если уравнение $\tilde u''(x)=\tilde V(x)\tilde u(x)$ имеет решение, не лежащее в L^2 около нуля, то же верно для уравнения $u''(x)=V(x)u(x)$. Таким образом, если $\tilde{V}$ отвечает случаю предельной точки около нуля, то же справедливо и для V, а если V отвечает случаю предельной окружности, то же справедливо и для $\tilde{V}$. В сочетании с результатами, относящимися к случаю $V(x)=cx^{-2}$, это доказывает теорему. ∎

Другое полезное условие того, что V отвечает случаю предельной окружности в нуле, дает требование убывания $V(x)$ при стремлении x к нулю. Доказательство намечено в задаче 7. Точно так же, как и в случае ∞ (пример 2), можно построить потенциал V, который не полон в нуле классически, но полон там квантовомеханически.

Следующий пример показывает, что сведения, почерпнутые из задач на полупрямой, можно применять в некоторых многомерных задачах.

Пример 4 (сферически симметричные потенциалы). Потенциал на $\mathbb{R}^n$, зависящий только от расстояния $r=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ от начала координат, называется сферически симметричным. Пусть $D=C_0^\infty(\mathbb{R}^n\diagdown\{0\})$ — множество функций класса C^∞ с компактными носителями, отделенными от нуля. Изучим $-\Delta+V(r)$ на D. Мы можем рассматривать каждый элемент $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n)$ как функцию от r и $n-1$ переменных ξ на сфере S^{n-1}. В этих переменных

$$\|f\|_2^2=\int_0^\infty\left(\int_{S^{n-1}}|f(r,\ \xi)|^2\,d\Omega\right)r^{n-1}\,dr,$$

где $d\Omega$ — обычная мера на сфере. Пусть $\tilde{D}$ — множество функций из D, являющихся конечными линейными комбинациями произведений $f(r)\,g(\xi)$. Множество $\tilde{D}$ в силу теоремы II.10 тоже плотно в $L^2(\mathbb{R}^n)$, поскольку $L^2(\mathbb{R}^n)=L^2(\mathbb{R}^+,\ r^{n-1}\,dr)\otimes L^2(S^{n-1},\ d\Omega)$. На функции вида $f(r)\,g(\xi)$ оператор $-\Delta+V(r)$ действует следующим образом:

$$(-\Delta+V(r))\,f(r)\,g(\xi)=$$
$$=\left(-\frac{d^2}{dr^2}+V(r)-\frac{n-1}{r}\frac{d}{dr}\right)f(r)g(\xi)-\frac{1}{r^2}f(r)\,Bg(\xi),$$

где B — оператор Лапласа—Бельтрами на $L^2(S^{n-1})$. Оказывается (см. Замечания), что B в существенном самосопряжен и отрицателен на $C^\infty(S^{n-1})$, обладает только точечным спектром конечной кратности и все его собственные функции бесконечно дифференцируемы. Обозначим через K_l собственное подпространство, отвечающее l-му собственному значению $\varkappa_l$ (мы располагаем собственные значения в убывающем порядке, начиная с $\varkappa_0=0$). Тогда

$$L^2(\mathbb{R}^+,\ r^{n-1}dr)\otimes L^2(S^{n-1},\ d\Omega)=\bigoplus_{l=0}^{\infty}L_l,$$

где

$$L_l=L^2(\mathbb{R}^+,\ r^{n-1}dr)\otimes K_l.$$

Положим $D_l=\tilde{D}\cap L_l$; тогда

$$(-\Delta+V(r))\restriction D_l=\left(-\frac{d^2}{dr^2}-\frac{n-1}{r}\frac{d}{dr}+V(r)-\frac{\varkappa_l}{r^2}\right)\otimes I.$$

Для того чтобы на основе теоремы VIII.33 и задачи 1а вывести самосопряженность в существенном на $\tilde{D}$ и, следовательно, на D оператора $-\Delta+V(r)$, нужно только доказать, что для каждого l

$$-\frac{d^2}{dr^2}-\frac{(n-1)}{r}\frac{d}{dr}+V(r)-\frac{\varkappa_l}{r^2}$$

самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)\subset L^2(\mathbb{R}^+,\ r^{n-1}dr)$.

Пусть U: $L^2(\mathbb{R}^+,\ r^{n-1}dr)\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^+,\ dr)$ — унитарный оператор, действующий по формуле $\varphi(r)\mapsto r^{(n-1)/2}\varphi(r)$. Этот оператор переводит $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ в себя и

$$U\left(-\frac{d^2}{dr^2}-\frac{n-1}{r}\frac{d}{dr}+V(r)-\frac{\varkappa_l}{r^2}\right)U^{-1}=$$
$$=-\frac{d^2}{dr^2}+V(r)+\left(\frac{(n-1)(n-3)}{4}-\varkappa_l\right)\frac{1}{r^2}. \quad \text{(X.18a)}$$

Каждое $\varkappa_l$ меньше или равно нулю, поэтому в силу теоремы X.10 каждый из этих операторов самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, если

$$V(r)+\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}\geqslant\frac{3}{4r^2}. \quad \text{(X.18b)}$$

С другой стороны, если

$$0\leqslant V(r)+\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}\leqslant\frac{c}{r^2},\qquad c<\frac{3}{4}, \quad \text{(X.18c)}$$

то один или более из операторов в (X.18a) не самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$. В итоге доказана следующая

Теорема X.11. Пусть $V(r)$ — непрерывный сферически симметричный потенциал на $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Если $V(r)$ удовлетворяет (X.18b), то $-\Delta+V(r)$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. Если $V(r)$ удовлетворяет (X.18c), то $-\Delta+V(r)$ не самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$.

Отметим, что эта теорема, в частности, показывает, что $-\Delta$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ тогда и только тогда, когда $n \geqslant 4$. При $n=4$ это довольно тонкий факт, но при $n \geqslant 5$ он доказывается не очень сложно (задача 9). Первая часть теоремы X.11 обобщается на нецентральные потенциалы (см. § X.4).

X.2. Возмущения самосопряженных операторов

В этом разделе доказывается несколько теорем, утверждающих самосопряженность $A+B$ при условии, что A самосопряжен, а B не слишком велик по сравнению с A. Эти теоремы находят важные применения в квантовой механике. Сначала определим, что подразумевается под «малым» возмущением.

Определение. Пусть A и B — плотно определенные линейные операторы в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Предположим, что

(i) $D(B) \supset D(A)$;

(ii) для некоторых a и b из $\mathbb{R}$ и всех $\varphi \in D(A)$

$$\|B\varphi\| \leqslant a\|A\varphi\| + b\|\varphi\|. \tag{X.19a}$$

В таком случае говорят, что оператор B **ограничен относительно** A или просто A-**ограничен**. Точная нижняя грань всех таких a называется **относительной гранью оператора** B **по отношению к** A или просто A-**гранью**. Если относительная грань равна нулю, то говорят, что B **бесконечно мал** по отношению к A, и пишут $B << A$. Отметим, что обычно константу b нужно выбирать побольше, а константу a поменьше.

Иногда удобно заменить требование (ii) другим требованием:
(iii) для некоторых $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}$ и для всех $\varphi \in D(A)$

$$\|B\varphi\|^2 \leqslant \tilde{a}^2\|A\varphi\|^2 + \tilde{b}^2\|\varphi\|^2. \tag{X.19b}$$

Если выполняется (iii), то (ii) выполняется тоже, причем $a=\tilde{a}$, $b=\tilde{b}$. Если же справедливо (ii), то можно установить справедливость (iii) с $\tilde{a}^2=(1+\varepsilon)a^2$, $\tilde{b}^2=(1+\varepsilon^{-1})b^2$ при каждом $\varepsilon > 0$. Таким образом, точная нижняя грань всех a в (ii) равна точной нижней грани всех $\tilde{a}$ в (iii). Отметим, что для проверки неравенства (ii) или (iii) его достаточно доказать на существенной области оператора A.

Основной результат о возмущениях дает следующая

Теорема X.12 (Като — Реллих). Предположим, что оператор A самосопряжен, B симметричен и A-ограничен с A-гранью $a < 1$. Тогда $A+B$ самосопряжен на $D(A)$ и самосопряжен в существенном на любой существенной области оператора A. Более того, если A ограничен снизу числом M, то $A+B$ ограничен снизу числом $M-\max\{b/(1-a),\ a|M|+b\}$, где a, b — константы из (X.19a).

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{Ran}(A+B\pm i\mu_0)=\mathscr{H}$ при некотором $\mu_0>0$. Для $\varphi\in D(A)$ имеем

$$\|(A+i\mu)\varphi\|^2=\|A\varphi\|^2+\mu^2\|\varphi\|^2.$$

Отсюда, полагая $\varphi=(A+i\mu)^{-1}\psi$, заключаем, что $\|A(A+i\mu)^{-1}\|\leqslant 1$ и $\|(A+i\mu)^{-1}\|\leqslant\mu^{-1}$. Поэтому, применяя (X.19a) с $\varphi=(A+i\mu)^{-1}\psi$, находим

$$\|B(A+i\mu)^{-1}\psi\|\leqslant a\|A(A+i\mu)^{-1}\psi\|+b\|(A+i\mu)^{-1}\psi\|\leqslant$$
$$\leqslant\left(a+\frac{b}{\mu}\right)\|\psi\|.$$

Таким образом, при большом μ_0 норма оператора $C=B(A+i\mu_0)^{-1}$ меньше единицы, так как $a<1$. Отсюда вытекает, что $-1\notin\sigma(C)$, т. е. что $\operatorname{Ran}(I+C)=\mathscr{H}$. Поскольку A самосопряжен, $\operatorname{Ran}(A+i\mu_0)$ также совпадает с $\mathscr{H}$. Таким образом, из уравнения

$$(I+C)(A+i\mu_0)\varphi=(A+B+i\mu_0)\varphi \text{ для } \varphi\in D(A)$$

следует, что $\operatorname{Ran}(A+B+i\mu_0)=\mathscr{H}$. Доказательство равенства $\operatorname{Ran}(A+B-i\mu_0)=\mathscr{H}$ аналогично. В итоге в силу основного критерия (теорема VIII.3) $A+B$ самосопряжен на $D(A)$.

Прямым следствием (X.19) является включение $D(\overline{A\upharpoonright D_0})\subset D(\overline{(A+B)\upharpoonright D_0})$, так что $A+B$ самосопряжен в существенном на любой существенной области A.

Наконец, докажем утверждение о полуограниченности. Предположим, что $t\in\mathbb{R}$ и $-t<M$. Тогда $\operatorname{Ran}(A+t)=\mathscr{H}$ и оценка, аналогичная проведенной выше, показывает, что $\|B(A+t)^{-1}\|<1$, если

$$-t<M-\max\left\{\frac{b}{1-a},\ a|M|+b\right\}.$$

Таким образом, $\operatorname{Ran}(A+B+t)=\mathscr{H}$ для таких t и $(A+B+t)^{-1}=(A+t)^{-1}(I+C)^{-1}$, откуда вытекает, что $-t\in\rho(A+B)$. ∎

Часто оказывается полезной следующая симметричная форма теоремы Като — Реллиха. Ее применение см. в примере 3 дополнения к § X.1.

Теорема X.13. Пусть A и C — симметрические операторы. Предположим, что D — линейное подмножество, такое, что $D\subseteq D(A)$, $D\subseteq D(C)$ и

$$\|(A-C)\varphi\|\leqslant a(\|A\varphi\|+\|C\varphi\|)+b\|\varphi\|$$

для всех $\varphi\in D$, где $a<1$. Тогда

(a) Оператор A самосопряжен в существенном на D тогда и только тогда, когда C самосопряжен в существенном на D.

(b) $D(\overline{A \restriction D}) = D(\overline{C \restriction D})$.

Доказательство. Пусть $B = A - C$ и $D(B) = D$. Положим $F(\alpha) = C + \alpha B$ для $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Тогда $F(0) = C$, $F(1) = A$ и $C\varphi = F(\alpha)\varphi - \alpha B\varphi$, $A\varphi = F(\alpha)\varphi + (1-\alpha)B\varphi$ для всех $\varphi \in D$. Таким образом, неравенство из условия теоремы дает

$$\|B\varphi\| \leqslant a(\|A\varphi\| + \|C\varphi\|) + b\|\varphi\| \leqslant$$
$$\leqslant 2a\|F(\alpha)\varphi\| + a\|B\varphi\| + b\|\varphi\|,$$

или

$$\|B\varphi\| \leqslant \frac{2a}{1-a}\|F(a)\varphi\| + \frac{b}{1-a}\|\varphi\|. \tag{X.20}$$

Пусть $0 \leqslant \alpha' \leqslant 1$. Если $2a\alpha'/(1-a) < 1$, то из неравенства (X.20) и теоремы X.12 следует, что $F(\alpha+\alpha') = F(\alpha) + \alpha' B$ самосопряжен в существенном на D тогда и только тогда, когда таков оператор $F(\alpha)$. В итоге, начав с $\alpha = 0$ и применяя полученное утверждение конечное число раз, доказываем (a). В задаче 13 читателю предлагается с помощью похожих рассуждений доказать (b). ∎

Следующая теорема распространяет теорему X.12 на случай относительной грани, равной 1; правда, утверждение при этом несколько ослабляется.

Теорема X.14 (теорема Вюста). Пусть A самосопряжен, а B симметричен, причем $D(B) \supset D(A)$. Предположим, что для некоторого b и всех $\varphi \in D(A)$

$$\|B\varphi\| \leqslant \|A\varphi\| + b\|\varphi\|. \tag{X.21a}$$

Тогда $A + B$ самосопряжен *в существенном* на $D(A)$ или на любой существенной области оператора A.

Доказательство. Простые соображения убеждают в том, что достаточно доказать самосопряженность в существенном оператора $A + B$ на $D(A)$. Предположим, что $(A + B + i)^* h = 0$. Для каждого $t < 1$ оператор $A + tB$ самосопряжен на $D(A)$ в силу теоремы X.12. Таким образом, существует такое $\varphi_t \in D(A)$ с нормой $\|\varphi_t\| \leqslant \|h\|$, что $(A + tB + i)\varphi_t = h$. Положим $\psi_t = h - (t-1)B\varphi_t$. Тогда простое вычисление дает $(\psi_t, h) = 0$. В силу (X.21a)

$$\|A\varphi_t\| \leqslant \|(A + tB)\varphi_t\| + \|tB\varphi_t\| \leqslant$$
$$\leqslant \|(A + tB)\varphi_t\| + t\|A\varphi_t\| + tb\|\varphi_t\|,$$

и потому

$$(1-t)\|A\varphi_t\| \leqslant \|(A + tB)\varphi_t\| + tb\|\varphi_t\|.$$

Поскольку $\|(A + tB)\varphi_t\|^2 = \|h\|^2 - \|\varphi_t\|^2$, функция $(1-t)\|A\varphi_t\|$ ограничена при $t \uparrow 1$. Далее, в силу опять-таки (X.21a), при

$t \uparrow 1$ ограничены функция $(1-t)\|B\varphi_t\|$ и, следовательно, $\|\psi_t\|$. Пусть теперь $\eta \in D(A)$. Тогда

$$\lim_{t\uparrow 1}(\psi_t - h, \eta) = \lim_{t\uparrow 1}(t-1)(\varphi_t, B\eta) = 0.$$

Поскольку совокупность $\|\psi_t\|$ равномерно ограничена, мы заключаем, что $h = \text{w-}\lim\limits_{t\uparrow 1}\psi_t$. Но тогда $(h, h) = \lim(h, \psi_t) = 0$, т. е. $h = 0$. Отсюда $\operatorname{Ker}(A+B+i)^* = \{0\}$. Доказательство тривиальности $\operatorname{Ker}(A+B-i)^*$ аналогично. ∎

Выбирая $A = -B$, убеждаемся, что невозможно заменить в утверждении теоремы X.14 «самосопряженность в существенном» на «самосопряженность». Отметим еще, что существуют контрпримеры, показывающие ложность утверждения теоремы X.14 в случае, когда относительная грань больше единицы (см. пример 4 в конце этого раздела). Отметим также, что, согласно проведенному выше обсуждению неравенств (X.19), условие (X.21a), нужное для применения теоремы X.14, само вытекает из неравенства

$$\|B\varphi\|^2 \leqslant \|A\varphi\|^2 + b^2\|\varphi\|^2, \tag{X.21b}$$

которое эквивалентно операторному неравенству

$$B^2 \leqslant A^2 + b^2. \tag{X.21c}$$

Перейдем теперь к основному применению теоремы Като — Реллиха — анализу гамильтонианов атомов. Сначала введем несколько новых классов функций.

Определение. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с мерой. Обозначим через $L^r(M, d\mu) + L^s(M, d\mu)$ множество измеримых функций f на M, которые можно представить в виде суммы $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in L^r(M, d\mu)$ и $f_2 \in L^s(M, d\mu)$.

Теорема X.15. Пусть $V \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ — вещественнозначная функция. Тогда $-\Delta + V(x)$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ и самосопряжен на $D(-\Delta)$.

Доказательство. Поскольку функция V вещественнозначна, оператор умножения на V самосопряжен на

$$D(V) = \{\varphi \mid \varphi \in L^2(\mathbb{R}^3),\ V\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)\}.$$

Пусть $V = V_1 + V_2$, где $V_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ и $V_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Тогда

$$\|V\varphi\|_2 \leqslant \|V_1\|_2\|\varphi\|_\infty + \|V_2\|_\infty\|\varphi\|_2, \tag{X.22}$$

так что $D(V) \supset C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. В силу теоремы IX.28, при любом заданном $a > 0$ существует такое $b > 0$, что

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant a\|\Delta\varphi\|_2 + b\|\varphi\|_2 \tag{X.23}$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Это неравенство и (X.22) дают

$$\|V\varphi\|_2 \leqslant a\|V_1\|_2\|-\Delta\varphi\|_2+(b+\|V_2\|_\infty)\|\varphi\|_2$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Таким образом, V оказывается $-\Delta$-ограниченным и имеет произвольно малую грань на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Поскольку $-\Delta$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, теорема Като—Реллиха утверждает, что $-\Delta+V$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. ∎

Пример 1. Пусть $V(r)=-e^2/r$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Тогда $-\Delta-e^2/r$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Теорема X.16 (Като). Пусть $\{V_k\}_{k=1}^m$ — набор вещественнозначных измеримых функций, каждая из которых принадлежит $L^2(\mathbb{R}^3)+L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Обозначим через $\{y_{k,\alpha}\}$, $k=1, \ldots, n$; $\alpha=1,2,3$, координаты в $\mathbb{R}^{3n}$. Пусть $V_k(\mathbf{y}_k)$ — оператор умножения на $L^2(\mathbb{R}^{3n})$, получаемый выбором в качестве $\mathbf{y}_k$ соответствующих координат $y_{k,\alpha}$. Тогда $-\Delta+\sum_{k=1}^{m} V_k(\mathbf{y}_k)$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^{3n})$, где Δ — лапласиан на $\mathbb{R}^{3n}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала отдельно одну из функций V_k. Учитывая возможность поворота системы координат, можно считать, что переменными в $V_k(\cdot)$ являются x_1, x_2, x_3. (Это справедливо в силу инвариантности $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ и $-\Delta$ относительно вращения координат). Пусть Δ_1 обозначает лапласиан по переменным x_1, x_2, x_3. Принимая во внимание оценку (X.23) и учитывая «эквивалентность» неравенств (X.19a) и (X.19b), для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{3n})$ получаем

$$\begin{aligned}\|V_k\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{3n})} &\leqslant a^2\int|-\Delta_1\varphi(x_1, \ldots, x_{3n})|^2\,dx_1\ldots dx_{3n}+\\ &\qquad+b^2\int|\varphi(x_1, \ldots, x_{3n})|^2\,dx_1\ldots dx_{3n}=\\ &=a^2\int\left|\sum_{i=1}^{3} p_i^2\hat{\varphi}(p_1, \ldots, p_{3n})\right|^2 dp_1\ldots dp_{3n}+b^2\|\varphi\|^2\leqslant\\ &\leqslant a^2\int\left|\sum_{i=1}^{3n} p_i^2\hat{\varphi}(p_1, \ldots, p_{3n})\right|^2 dp_1\ldots dp_{3n}+b^2\|\varphi\|^2=\\ &=a^2\|-\Delta\varphi\|^2+b^2\|\varphi\|^2.\end{aligned}$$

В итоге с помощью неравенства Шварца заключаем, что

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} V_k(\mathbf{y}_k)\varphi\right\|^2 \leqslant m^2a^2\|-\Delta\varphi\|^2+m^2b^2\|\varphi\|^2$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{3n})$. Поскольку a можно выбрать как угодно малым, сумма $\sum_{k=1}^{m} V_k(\mathbf{y}_k)$ бесконечно мала относительно $-\Delta$. Следовательно, согласно теореме Като—Реллиха, $-\Delta+\sum_{k=1}^{m} V_k(\mathbf{y}_k)$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^{3n})$. ∎

Пример 2 (гамильтонианы атомов). Пусть $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ из $\mathbb{R}^3$ образуют ортогональные координаты в $\mathbb{R}^{3n}$. Тогда оператор

$$-\sum_{i=1}^{n} \Delta_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{ne^2}{|\mathbf{x}_i|}+\sum_{i<j}^{n}\frac{e^2}{|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j|}$$

самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^{3n})$.

По поводу применения теоремы Като—Реллиха к обыкновенным дифференциальным операторам см. задачу 7.

Существует аналог теоремы Като—Реллиха в теории форм, который можно использовать, когда форма $(B\varphi, \varphi)$ «мала» относительно формы $(A\varphi, \varphi)$, хотя оператор B и не A-ограничен. Несмотря на то что утверждение нижеследующей теоремы похоже на теорему X.12, его доказательство носит совершенно иной характер.

Теорема X.17 (КЛМН-теорема). Пусть A — положительный самосопряженный оператор и $\beta(\varphi, \psi)$ — такая симметрическая квадратичная форма на $Q(A)$, что

$$|\beta(\varphi, \varphi)| \leqslant a(\varphi, A\varphi)+b(\varphi, \varphi) \text{ для всех } \varphi \in D(A) \qquad (X.24)$$

при некоторых $a<1$ и $b \in \mathbb{R}$. Тогда существует единственный самосопряженный оператор C, для которого $Q(C)=Q(A)$ и

$$(\varphi, C\psi)=(\varphi, A\psi)+\beta(\varphi, \psi) \text{ для всех } \varphi, \psi \in Q(C).$$

Оператор C ограничен снизу числом $-b$, и любая область самосопряженности в существенном оператора A является существенной областью для C.

Доказательство. Введем на $Q(A)$ форму $\gamma(\varphi, \psi)=(\varphi, A\psi)+\beta(\varphi, \psi)$. В силу (X.24)

$$\gamma(\varphi, \varphi) \geqslant (1-a)(\varphi, A\varphi)-b(\varphi, \varphi) \geqslant -b(\varphi, \varphi),$$

так как A положителен. Следовательно, γ ограничена снизу числом $-b$. Более того,

$$(1-a)(\varphi, A\varphi)+(\varphi, \varphi) \leqslant \gamma(\varphi, \varphi)+(b+1)(\varphi, \varphi) \leqslant$$
$$\leqslant (1+a)(\varphi, A\varphi)+(2b+1)(\varphi, \varphi).$$

Таким образом, нормы $\|\cdot\|_{+1,A}$ и $\|\cdot\|_{+1,\gamma}$ на $Q(A)$ эквивалентны.

Поскольку область $Q(A)$ замкнута относительно $\|\cdot\|_{+1,A}$, она замкнута и относительно $\|\cdot\|_{+1,\gamma}$. Поэтому γ — полуограниченная замкнутая квадратичная форма на $Q(A)$. Теперь теорема вытекает из утверждения и доказательства теоремы VIII.15. ∎

Эта теорема подсказывает естественное

Определение. Пусть A — положительный самосопряженный оператор. Предположим, что B — самосопряженный оператор, удовлетворяющий условиям

(i) $Q(B)\supset Q(A)$,

(ii) $|(\varphi, B\varphi)|\leqslant a(\varphi, A\varphi)+b(\varphi,\varphi)$, $\varphi\in Q(A)$,

для некоторого $a>0$ и $b\in\mathbb{R}$. Тогда говорят, что B **ограничен относительно** A **в смысле форм.** Если a можно выбрать как угодно малым, то говорят, что B **бесконечно мал по отношению к** A **в смысле форм** (и пишут $B\ll A$).

Если B самосопряжен и ограничен в смысле форм ($a<1$) относительно положительного самосопряженного оператора A, то КЛМН-теорема придает смысл $A+B$. Подчеркнем, что так определенная сумма «$A+B$» может *отличаться* от операторной суммы. Существуют примеры, когда B A-ограничен в смысле форм, хотя $D(A)\cap D(B)=\{0\}$. На самом деле, как показывает следующий пример, форма β из КЛМН-теоремы не обязана быть ни формой, порождаемой оператором, ни даже замыкаемой формой.

Пример 3. Пусть $A=-d^2/dx^2$ на $\mathbb{R}$. Определим для любых $\varphi,\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ форму $\beta(\varphi,\psi)=\overline{\varphi}(0)\psi(0)$. В силу леммы Соболева для любого $a>0$ существует такое b, что

$$\|\varphi\|_\infty^2\leqslant a(\varphi,-\varphi'')+b\|\varphi\|^2.$$

По этой причине можно воспользоваться теоремой X.17 и определить $-d^2/dx^2+\delta$! Функция $\psi\in Q(-d^2/dx^2)\subset C_\infty(\mathbb{R})$ входит в область определения $-d^2/dx^2+\delta$ тогда и только тогда, когда $(-\psi''(x)+\delta(x)\psi(0))\in L^2(\mathbb{R})$, где производная понимается в смысле теории обобщенных функций. Например, если $\psi(x)$ около нуля ведет себя как $1+|x|/2$, бесконечно дифференцируема вне нуля и имеет компактный носитель, то $\psi\in D(-d^2/dx^2+\delta(x))$, поскольку $\delta(x)\psi(0)$ в точности компенсирует член $-\delta(x)\psi(x)$, появляющийся в $-\psi''(x)$. Таким образом, $D(A+B)$ может содержать векторы, не входящие ни в $D(A)$, ни в $D(B)$, но для которых происходит компенсация в «$A\psi+B\psi$».

Следующая теорема показывает, что когда B A-ограничен, он ограничен относительно A и в смысле форм.

Теорема X.18. Пусть A — положительный самосопряженный оператор. Предположим, что B самосопряжен. Тогда

(a) Если B A-ограничен и имеет A-грань a, то B ограничен относительно A в смысле форм и его A-грань в смысле форм равна a.

(b) Из $B << A$ вытекает $B \prec\prec A$.

Доказательство. Пусть $C^\infty(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$, $\mu > 0$ и $\mathcal{H}_n$ — замыкание $C^\infty(A)$ относительно нормы $\|\varphi\|_n = \|(A+I)^{n/2}\varphi\|$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Отображение C из $C^\infty(A)$ в $\mathcal{H}$ продолжается до ограниченного оператора из $\mathcal{H}_m$ в $\mathcal{H}_{-n}$ тогда и только тогда, когда $(A+I)^{-n/2} C (A+I)^{-m/2}$ ограничено на $C^\infty(A)$ в обычной операторной норме.

Если B A-ограничен и его A-грань равна a, то $B(A+\mu I)^{-1}$ и $(A+\mu I)^{-1}B$ ограничены величиной $(a+b/\mu)$. Рассуждения примера 3 из дополнения к § IX.4 показывают, что оператор

$$(A+\mu I)^{-1/2} B (A+\mu I)^{-1/2}$$

также ограничен величиной $a+b/\mu$, откуда немедленно следует, что

$$(\varphi, B\varphi) \leqslant (a+b/\mu)(\varphi, (A+\mu I)\varphi)$$

для всех $\varphi \in D_\infty(A)$. Поскольку $\mu > 0$ произвольно, тем самым доказаны и (a) и (b). ∎

КЛМН-теорему иногда можно использовать для определения гамильтонианов и тогда, когда не применима теорема Реллиха. Для того чтобы было понятно, что (L^2+L^∞)-класс потенциалов не включает в себя все «разумные» потенциалы, отметим, что, как давно известно из физики, потенциалы вида $V_\alpha(r) = -r^{-\alpha}$ порождают разумную квантовую динамику при условии $\alpha < 2$. Но $V_\alpha \in L^2+L^\infty$, только если $\alpha < 3/2$! Таким образом, при $3/2 \leqslant \alpha < 2$ нельзя применять теорему Реллиха (см. задачу 14). Однако можно воспользоваться теоремой X.17. Сначала получим предварительную оценку.

Лемма (принцип неопределенности). Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4r^2} |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \leqslant \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}.$$

Доказательство. Можно считать, что ψ — вещественнозначная функция. Тогда

$$\nabla(r^{1/2}\psi) = r^{1/2}\nabla\psi + \frac{1}{2} r^{-3/2}\mathbf{r}\psi.$$

Таким образом, если $r \neq 0$, то

$$|\nabla\psi|^2 = |r^{-1/2}\nabla(r^{1/2}\psi) - \frac{1}{2}r^{-2}\mathbf{r}\psi|^2 \geqslant$$
$$\geqslant -r^{-3/2}\psi\frac{\partial}{\partial r}(r^{1/2}\psi) + \frac{1}{4}r^{-2}|\psi|^2 =$$
$$= -\frac{1}{2r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r|\psi|^2) + \frac{1}{4}r^{-2}|\psi|^2.$$

Поэтому

$$\int|\nabla\psi|^2 d\mathbf{r} \geqslant \int\frac{1}{4r^2}|\psi|^2 d\mathbf{r} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r}\int_{S^2} r|\psi|^2 d\Omega\, dr =$$
$$= \int\frac{1}{4r^2}|\psi|^2 d\mathbf{r}. \blacksquare$$

Предложение. Если $\alpha < 2$, то $-r^{-\alpha} << -\Delta$.

Доказательство. Пусть заданы $\varphi \in C_0^\infty$ и $a > 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $1/r^\alpha \leqslant a/4r^2$ для всех $r \leqslant \varepsilon$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{r^\alpha}|\varphi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = \int_{|\mathbf{r}|\leqslant\varepsilon}\frac{1}{r^\alpha}|\varphi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} + \int_{|\mathbf{r}|>\varepsilon}\frac{1}{r^\alpha}|\varphi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \leqslant$$
$$\leqslant a\int_{|\mathbf{r}|\leqslant\varepsilon}|\nabla\varphi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} + \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\int_{|\mathbf{r}|>\varepsilon}|\varphi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \leqslant$$
$$\leqslant a\int_{\mathbb{R}^3}(-\Delta\varphi(\mathbf{r}))\overline{\varphi(\mathbf{r})}\, d\mathbf{r} + \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\int_{\mathbb{R}^3}|\varphi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}. \blacksquare$$

Это предложение показывает, что при $3/2 < \alpha < 2$ для определения $-\Delta - r^{-\alpha}$ можно использовать теорему X.17. Класс $L^2 + L^\infty$ образует естественный класс потенциалов, связанный с теоремой Като—Реллиха (см. задачу 14). Но естественного класса потенциалов, связанного с КЛМН-теоремой, не существует.

Определение. Измеримая функция V на $\mathbb{R}^3$ называется **потенциалом Рольника**, если

$$\|V\|_R^2 \equiv \int_{\mathbb{R}^3}\frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2}d^3x\, d^3y < \infty.$$

Обозначим множество потенциалов Рольника через R.

Множество R становится полным векторным пространством при наделении его нормой Рольника $\|\cdot\|_R$. Более того, в силу неравенства Соболева (IX.19), $L^{3/2}(\mathbb{R}^3) \subset R$; в частности, если $\alpha < 2$, то $r^{-\alpha} \in R + L^\infty$. Аналогом теоремы Като служит

Теорема X.19.
(а) Если $V \in R + L^\infty(\mathbb{R}^3)$, то $V << -\Delta$.

(b) Если $V_i(\mathbf{r})$ и $V_{ij}(\mathbf{r})$ лежат в $R+L^\infty$ и

$$V=\sum_{i=1}^{N} V_i(\mathbf{r}_i)+\sum_{i,\,j=1}^{N} V_{ij}(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)$$

на $\mathbb{R}^{3N}$, то $V<<-\Delta$.

Доказательство можно найти в ссылках, данных в Замечаниях или в задаче 17. Напоминаем читателю еще раз, что смысл, придаваемый выражению $-\Delta+V$ КЛМН-теоремой, *может отличаться* от смысла, которое имеет это выражение как операторная сумма, определенная на $D(-\Delta)\cap D(V)$.

Задача нахождения условий на потенциалы в $\mathbb{R}^s$, при которых $-\Delta+V$ является самосопряженным оператором, широко изучалась при помощи теоремы Реллиха и КЛМН-теоремы. В доказательствах необходимых неравенств часто применяются L^p-оценки § IX.4 и интерполяционные теоремы, поэтому результаты обычно зависят от размерности s. Ниже мы дадим тому два примера. Другие теоремы можно найти в § X.4 и в ссылках, приведенных в Замечаниях.

Теорема X.20. Пусть $s\geqslant 4$. Если $V\in L^p(\mathbb{R}^s)$ для некоторого $p>s/2$, то $V<<-\Delta$.

Доказательство. Благодаря теореме IX.27 мы знаем, что

$$(1+k^2)\,\hat{u}(k)\in L^2(\mathbb{R}^s),$$

если $u\in D(-\Delta)$. Более того, $(1+k^2)^{-1}\in L^p(\mathbb{R}^s)$, поскольку $p>s/2$, и потому в силу неравенства Гёльдера $\hat{u}\in L^q$ и

$$\|\hat{u}\|_q\leqslant\|(1+k^2)^{-1}\|_p\|(1+k^2)\,\hat{u}\|_2,$$

где $q^{-1}=p^{-1}+1/2$. Следовательно, в силу неравенства Хаусдорфа—Юнга $u\in L^r(\mathbb{R}^s)$, где $r^{-1}=-p^{-1}+1/2$. Поскольку $V\in L^p$, из неравенства Гёльдера следует, что $Vu\in L^2$. Таким образом, $D(V)\supset D(-\Delta)$ и

$$\begin{aligned}\|Vu\|_2&\leqslant\|V\|_p\|u\|_r\leqslant\|V\|_p\|\hat{u}\|_q=\\&=\|V\|_p\|(1+tk^2)^{-1}(1+tk^2)\,\hat{u}\|_q\leqslant\\&\leqslant\|V\|_p\|(1+tk^2)^{-1}\|_p\|(1+tk^2)\,\hat{u}\|_2\leqslant\\&\leqslant(\|V\|_p\|(1+k^2)^{-1}\|_p)\,t^{-s/2p}\,(\|u\|_2+t\|-\Delta u\|_2).\end{aligned}$$

Поскольку $p>s/2$, эта оценка показывает, что $V<<-\Delta$. ∎

Доказанную теорему можно распространить на пограничный случай $p=s/2$, когда $s\geqslant 5$, но в действительности тогда справедливо более сильное утверждение:

Теорема X.21 (теорема Стрихарца). Пусть $s\geqslant 5$ и $V\in L_{\mathrm{w}}^{s/2}$. Тогда V Δ-ограничен, и его относительная грань меньше или равна $C\|V\|_{s/2,\,\mathrm{w}}$, где C зависит только от s.

Доказательство. Достаточно показать, что $\|V(I+\Delta)^{-1}\varphi\|_2 \leqslant C\|V\|_{s/2,\,w}\|\varphi\|_2$ для всех $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^s)$. Поскольку $(I+\Delta)^{-1}\varphi = G*\varphi$, где G — фурье-образ функции $(1+p^2)^{-1}$ на $\mathbb{R}^s$, нам понадобятся свойства G, установленные в задаче 49 *или* 50 гл. IX. Учитывая экспоненциальное убывание $G(x)$ на ∞ и оценку $\overline{\lim\limits_{|x|\to 0}}\, |x|^{s-2}|G(x)| < \infty$, легко установить, что мера Лебега $\mu\{x \mid |G(x)| \geqslant t\}$ ограничена величиной $C_2 t^{s/(s-2)}$ при некотором $C_2 > 0$. В итоге с помощью неравенства из задачи 39 гл. IX, взятого при $p = s/2$ и $q = 2$, получаем

$$\|V(G*\varphi)\|_2 \leqslant C_3\|V\|_{s/2,\,w}\|G\|_{s/(s-2),\,w}\|\varphi\|_2. \quad \blacksquare$$

Следствие. Пусть μ — мера Лебега на $\mathbb{R}^s$ при $s \geqslant 5$. Если $V(x)$ — вещественнозначная измеримая функция и

$$\lim_{t\to\infty} t^{s/2}\mu\{x \mid |V(x)| \geqslant t\} = 0,$$

то $V << -\Delta$. В частности, если $V \in L^{s/2}(\mathbb{R}^s)$, то $V << -\Delta$.

Пример 4. Пусть $s=5$. Из теорем X.10 и X.11 следует, что $-\Delta+\alpha/r^2$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^5\setminus\{0\})$ тогда и только тогда, когда $\alpha \geqslant -1{,}25$. Далее, $-\Delta$ также самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^5\setminus\{0\})$. Читатель легко проверит, что $1/r^2 \in L_w^{5/2}(\mathbb{R}^5)$, поэтому в силу теоремы Стрихарца α/r^2 ограничен относительно $-\Delta$. Таким образом, замыкание сужения $(-\Delta+\alpha/r^2)\restriction C_0^\infty(\mathbb{R}^5\setminus\{0\})$ содержит

$$(-\Delta+\alpha/r^2)\restriction C_0^\infty(\mathbb{R}^5).$$

Следовательно, в случае $\alpha < -1{,}25$ оператор $-\Delta+\alpha/r^2$ на $C_0^\infty(\mathbb{R}^5)$ не самосопряжен в существенном.

В задаче 15 читателю предлагается показать, что $-d^2/dx^2 + c/x^2$ ограничен снизу на $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ в смысле форм тогда и только тогда, когда $c \geqslant -1/4$. В итоге с помощью метода примера 4 дополнения к § X.1 можно заключить, что в смысле форм $-\Delta+\alpha/r^2$ ограничен снизу на $C_0^\infty(\mathbb{R}^5\setminus\{0\})$ тогда и только тогда, когда $\alpha \geqslant -2{,}25$. Следовательно, если α заключено в пределах $-2{,}25 \leqslant \alpha < -1{,}25$, то для определения оператора $-\Delta+\alpha/r^2$ можно применять технику квадратичных форм, использованную в теореме VIII.15, несмотря на то, что этот оператор не самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^5)$ (рис. X.4).

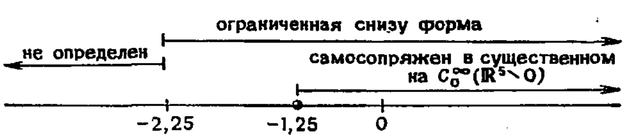

Рис. X.4. Оператор $-\Delta+(\alpha/r^2)$ при $n=5$.

Пример 5 (операторы Шредингера для систем с магнитными полями). Согласно гамильтоновой теории классической механики, энергия системы с магнитным полем, записанная через координаты $\mathbf{q}$ и канонически сопряженные импульсы $\mathbf{p}=m\dot{\mathbf{q}}+e\mathbf{A}/c$, имеет вид

$$E=\frac{1}{2m}(\mathbf{p}-e\mathbf{A}/c)^2+V(\mathbf{q}),$$

где $\mathbf{A}$ — **магнитный векторный потенциал**, связанный с **магнитным полем** $\mathbf{B}$ соотношением

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}. \tag{X.25}$$

Опираясь на соответствие между классическими выражениями для энергии и квантовомеханическими операторами Гамильтона (§ VIII.11), можно убедиться, что гамильтониан n-частичной системы в магнитном поле таков:

$$H=\sum_{j=1}^{n}(2m_j)^{-1}\left(-i\nabla_j-\frac{e_j}{c}\mathbf{A}\right)^2+V(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n). \tag{X.26}$$

Особенно важен случай

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{x}\times\mathbf{B}_0 \tag{X.27}$$

при постоянном $\mathbf{B}_0$, ибо он отвечает постоянному магнитному полю $\mathbf{B}=\mathbf{B}_0$. Такое поле приводит к так называемому эффекту Зеемана, но его описание требует специальных методов (см. § 4), поскольку $\mathbf{A}$ растет на бесконечности. Здесь же мы отметим, что методы теории возмущений действительно позволяют рассмотреть магнитные векторные потенциалы некоторого типа. Сейчас мы подробно приведем один результат, относящийся к случаю операторной теории возмущений, а анализ случая, относящегося к теории форм, оставим читателю (задача 36).

Теорема X.22. Предположим, что каждая компонента потенциала $\mathbf{A}$ — вещественнозначная функция из $L^4(\mathbb{R}^3)+L^\infty(\mathbb{R}^3)$, что $\nabla\cdot\mathbf{A}\in L^2(\mathbb{R}^3)+L^\infty(\mathbb{R}^3)$ (в смысле обобщенных функций) и что V — вещественнозначная функция из L^2+L^∞. При $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ положим

$$H\varphi=-\Delta\varphi+(-2i\mathbf{A}\cdot\nabla\varphi)-i(\nabla\cdot\mathbf{A})\varphi+V\varphi+A^2\varphi.$$

Тогда H самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Доказательство. Интегрирование по частям показывает, что H симметричен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, а условия, наложенные на V, A^2 и $\nabla\cdot\mathbf{A}$, были выбраны так, чтобы с помощью теоремы X.15 можно было вывести соотношения $V<<-\Delta$ и $\nabla\cdot\mathbf{A}<<-\Delta$. Покажем, что $\mathbf{A}\cdot\nabla \ll -\Delta$; с учетом теоремы X.12 отсюда будет следовать самосопряженность в существенном оператора H на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Предположим, что $A \in L^4(\mathbb{R}^3)$. В силу неравенств Гёльдера и Хаусдорфа—Юнга, имеем

$$\left\| A^{(i)} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right\| \leqslant \| A^{(i)} \|_4 \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right\|_4 \leqslant \| A^{(i)} \|_4 \| p_i \hat{\varphi}(p) \|_{4/3} \leqslant$$
$$\leqslant \| A^{(i)} \|_4 \| (1+|p|)^{-\alpha} \|_4 \| (1+|p|)^{\alpha} p_i \hat{\varphi}(p) \|_2,$$

где в качестве α можно взять любое фиксированное число из интервала (3/4, 1). Для любого $a>0$ существует такое b, что, в силу теоремы Планшереля,

$$\| (1+|p|)^{\alpha} p_i \hat{\varphi}(p) \|_2 \leqslant \| (b + a|p|^2) \hat{\varphi}(p) \|_2 \leqslant$$
$$\leqslant a \| \Delta\varphi \|_2 + b \| \varphi \|_2.$$

В итоге $A^{(i)}\partial/\partial x_i \ll -\Delta$. Утверждение, относящееся к части A, принадлежащей L^∞, может быть доказано с помощью отдельного рассмотрения. ∎

Теоремы теории возмущений просты, элегантны и применимы в таком большом числе случаев, что критерием эффективности любого другого метода доказательства самосопряженности служит применимость этого метода там, где нельзя прямо опираться на теоремы X.12, X.14 или X.17. Одним из простейших физически интересных примеров такой ситуации служит **гамильтониан ангармонического осциллятора** $-d^2/dx^2+x^2+x^4$, а также его аналоги в $\mathbb{R}^s$ и более общие операторы вида $-d^2/dx^2+x^2+x^{2m}$ $(m=2, 3, \ldots)$. И $H_0=-d^2/dx^2+x^2$, и $V=x^4$ самосопряжены в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R})$, но ни один из них не является малым возмущением другого. Мы будем использовать оператор $-d^2/dx^2+x^2+x^4$ в качестве пробного камня при оценке многих обсуждаемых далее методов доказательства самосопряженности; мы дадим пять различных доказательств самосопряженности в существенном этого оператора на $C_0^\infty(\mathbb{R})$! Все эти доказательства распространяются на случай оператора

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\left(-\frac{d^2}{dx_i^2}+\omega_i^2 x_i^2\right)+\sum_{i,j,k,l=1}^{n} b_{ijkl}x_i x_j x_k x_l$$

и доказывают его самосопряженность в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, если $a_1, \ldots, a_n > 0$ и если

$$\sum_{i,j,k,l} b_{ijkl}x_i x_j x_k x_l \geqslant 0$$

для всех x. Все они, кроме двух, допускают обобщение на случай операторов возмущения вида x^{2m} и их аналогов в пространствах более высокой размерности. Отметим еще, что при рассмотрении *одномерного* ангармонического осциллятора можно применять также метод Вейля, обсуждавшийся в дополнении к § X.1.

Существует один способ совместного применения теорем X.12 и X.14 (теорем Като—Реллиха и Вюста) к операторам, которые прямо не охватываются теоремами теории возмущений. С помощью этого метода, известного как прием Конради, мы получим первое доказательство самосопряженности в существенном гамильтониана ангармонического осциллятора на $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Прием Конради доказывает самосопряженность в существенном $X+Y$ на некотором множестве D в три этапа, по следующей схеме.

(a) Найдем такой оператор Z, что сумма $X+Z$ самосопряжена в существенном на $D\subset D(X)\cap D(Z)$. При этом Z не есть малое возмущение X. Характерным примером такого Z может служить степень X на $D=C^\infty(X)$.

(b) Докажем самосопряженность в существенном на D суммы $X+Z+Y$. Обычно это делается путем доказательства $(X+Z)$-ограниченности оператора Y с $(X+Z)$-гранью, меньшей единицы, что позволяет применить теорему Като—Реллиха. Подчеркнем, что, поскольку Z не есть малое возмущение X, оператор Y может быть $(X+Z)$-ограниченным, не будучи X-ограниченным.

(c) Для некоторых b и всех $\psi\in D$ докажем оценку $\|Z\psi\|\leqslant\leqslant\|(X+Y+Z)\psi\|+b\|\psi\|$. Тогда в силу теоремы Вюста $X+Y==X+Y+Z-Z$ самосопряжен в существенном на D. Обычно эта оценка (имеющая вид (X.21a)) доказывается путем доказательства более сильной операторной оценки вида (X.21c): $Z^2\leqslant(X+Y+Z)^2+b^2$.

Конечно, применяя прием Конради, нужно разумно выбирать Z.

Пример 6 (первое доказательство самосопряженности в существенном $-d^2/dx^2+x^2+x^4$ на $C_0^\infty(\mathbb{R})$). Пусть $X=-d^2/dx^2+x^2$ и $Y=x^4$. Пусть $Z=cX^2$, где c — положительная постоянная, которую мы фиксируем в процессе доказательства. Пусть $D==C^\infty(X)=\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Докажем самосопряженность в существенном $X+Y$ на D; простые рассуждения, позволяющие вывести отсюда самосопряженность в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R})$, читателю предлагается провести самому. Мы знаем, что функции Эрмита (см. дополнение к § V.3) образуют полное ортонормированное множество в $L^2(-\infty,\infty)$ (гл. IX, задачи 6 и 7) и что $X\psi_n==(2n+1)\psi_n$. Из дополнения к § V.3 следует, что $\operatorname{Ran}(X+1)==\mathscr{S}(\mathbb{R})$, откуда вытекает самосопряженность в существенном X на $\mathscr{S}$. В силу спектральной теоремы $X+Z$ самосопряжен в существенном на $D=C^\infty(X)$. Этим завершается первый шаг приема Конради. Перепишем X и Y с помощью операторов A, $A^\dagger$, введенных в дополнении к § V.3: $X=2A^\dagger A+1$, $Y=$

$= {}^1/_4\,(A+A^\dagger)^4$. Пользуясь неравенством

$$\|A_1^\# \ldots A_n^\# \psi\| \leqslant c_n \|X^{n/2}\psi\| \tag{X.28}$$

(где каждый $A_i^\#$ равен либо A, либо $A^\dagger$), легко доказать, что $\|Y\psi\| \leqslant d\|X^2\psi\| \leqslant dc^{-1}\|(X+Z)\psi\|$. Положив $c=2d$, выведем с помощью теоремы Като—Реллиха самосопряженность в существенном $X+Y+Z$ на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Этим завершается второй шаг приема Конради. Наконец, давайте докажем, что для некоторой постоянной e

$$Z^2 \leqslant (X+Y+Z)^2 + e. \tag{X.29}$$

Вычисляем:

$$\begin{aligned}(X+Y+Z)^2 &= (X+Y)^2 + Z^2 + Z(X+Y) + (X+Y)Z = \\ &= (X+Y)^2 + Z^2 + 2cX^3 + 2cXYZ + 2c[X,[X,Y]] \geqslant \\ &\geqslant Z^2 + 2cX^3 + 2c[X,[X,Y]],\end{aligned}$$

где надо воспользоваться неотрицательностью Y, равенством $[X,[X,Y]] = X^2Y + YX^2 - 2XYX$ и учесть, что все проделанные манипуляции законны в применении к векторам из $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Наконец, заметим, что $[X,[X,Y]]$ можно записать как сумму 16 мономов вида $A_1^\# A_2^\# A_3^\# A_4^\#$. Таким образом, применяя теорему X.18, неравенство (X.28) и симметричность $[X,[X,Y]]$, заключаем, что

$$-[X,[X,Y]] \leqslant fX^2 \leqslant X^3 + (f+1).$$

Это доказывает (X.29) и позволяет с помощью теоремы Вюста вывести самосопряженность в существенном оператора $X+Y = X+Y+Z-Z$ на D.

Еще раз прием Конради мы используем в примере 3 § X.9 (см. также задачу 22).

X.3. Положительность и самосопряженность I: квадратичные формы

Выше уже было доказано несколько утверждений о положительных или полуограниченных операторах; см., например, теоремы X.12 и X.17. В этом и следующем разделах мы воспользуемся двумя различными понятиями положительности для доказательства новых теорем о самосопряженности. В настоящем разделе применяется понятие положительного оператора и техника квадратичных форм. В следующем—тот факт, что при обычной в приложениях реализации гильбертова пространства в виде $L^2(M, d\mu)$ оно содержит выделенный конус неотрицательных почти всюду функций. Другие приложения условий положительности будут появляться и дальше в этой главе, например в теореме X.55, и в последующих главах, например в § XIII.11.

Из первого следствия теоремы X.1 вытекает, что полуограниченный симметрический оператор A обладает равными индексами дефекта, и потому в силу теоремы фон Неймана такой оператор всегда имеет самосопряженные расширения. Среди них существует выделенное расширение, называемое **расширением по Фридрихсу**, которое получается из квадратичной формы, порождаемой оператором A.

Теорема X.23 (расширение по Фридрихсу). Пусть A — положительный симметрический оператор и $q(\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$ для $\varphi, \psi \in D(A)$. Тогда q — замыкаемая квадратичная форма и ее замыкание $\hat{q}$ служит квадратичной формой единственного самосопряженного оператора $\hat{A}$. Оператор $\hat{A}$ является положительным расширением A, и нижняя граница его спектра есть нижняя грань формы q. Далее, $\hat{A}$ — единственное самосопряженное расширение A, область определения которого содержится в области определения формы $\hat{q}$.

Доказательство. Пусть $(\varphi, \psi)_{+1} = q(\varphi, \psi) + (\varphi, \psi)$. Тогда $(\cdot, \cdot)_{+1}$ — внутреннее произведение на $D(A)$, так что можно пополнить $D(A)$ по $(\cdot, \cdot)_{+1}$ и получить гильбертово пространство $\mathcal{H}_{+1}$. Ясно, что q продолжается до замкнутой формы $\hat{q}$ на $\mathcal{H}_{+1}$, но для доказательства замкнутости $\hat{q}$ на $\mathcal{H}$ необходимо показать, что $\mathcal{H}_{+1}$ — это подпространство в $\mathcal{H}$. Пусть $i: D(A) \to \mathcal{H}$ — тождественное отображение. Поскольку $\|\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_{+1}$, i ограничено и в силу теоремы об ограниченном линейном отображении (теорема I.7) продолжается до ограниченного отображения $\hat{i}$: $\mathcal{H}_{+1} \to \mathcal{H}$ с нормой, меньшей или равной единице. Покажем, что $\hat{i}$ инъективно. Пусть $\hat{i}(\varphi) = 0$. Тогда существуют такие $\varphi_n \in D(A)$, что $\|\varphi - \varphi_n\|_{+1} \to 0$ и $\|\hat{i}(\varphi_n)\| = \|\varphi_n\| \to 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{+1} &= \lim_{n,\, m \to \infty} (\varphi_n, \varphi_m)_{+1} = \\ &= \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} \{(\varphi_m, A\varphi_n) + (\varphi_m, \varphi_n)\} = 0,\end{aligned}$$

ибо $\varphi_n \in D(A)$ и $\|\varphi_m\| \to 0$. Таким образом, $\hat{i}$ инъективно и, значит, $\mathcal{H}_{+1} \subset \mathcal{H}$. Заметьте, что в доказательстве корректности определения $\hat{i}$ мы пользуемся только положительностью q, но при доказательстве его инъективности применяется предположение о том, что q порождается оператором.

Поскольку $\hat{q}$ замкнута и симметрична, теорема VIII.15 гарантирует существование единственного самосопряженного оператора $\hat{A}$, такого, что $D(\hat{A}) \subset Q(\hat{q})$ и $\hat{q}(\varphi, \psi) = (\varphi, \hat{A}\psi)$, если $\varphi \in Q(\hat{q})$ и $\psi \in D(\hat{A})$. Предположим теперь, что $\varphi \in D(A)$. Тогда благодаря непрерывности $\hat{q}$

$$(A\varphi, \psi) = \hat{q}(\varphi, \psi) = (\varphi, \hat{A}\psi).$$

Поскольку это справедливо для всех $\psi \in D(\hat{A})$, мы заключаем, что $\varphi \in D(\hat{A}^*) = D(\hat{A})$ и $\hat{A}^*\varphi = \hat{A}\varphi = A\varphi$. Следовательно, $\hat{A}$ есть расширение A. Аналогичное доказательство показывает, что если A_e — любое симметрическое расширение A, для которого $D(A_e) \subset Q(\hat{q})$, то $\hat{A}$ расширяет A_e. Таким образом, если A_e самосопряжен, то $\hat{A} = A_e$.

Легкое доказательство утверждения о спектре A мы оставляем читателю. ∎

В § VIII.6 мы доказали, что квадратичная форма $q(\varphi, \psi) = \varphi(0)\psi(0)$ на $C_0^\infty(\mathbb{R})$ незамыкаема. В терминологии предыдущего доказательства причина этого в том, что $\mathscr{H}_{+1}$ совпадает с $\{\langle\psi, a\rangle \mid \psi \in L^2(\mathbb{R}),\ a \in \mathbb{R}\}$, где a — «значение» ψ в нуле, и потому отображение i: $\langle\psi, a\rangle \longrightarrow \psi$ не взаимно однозначно.

Две привлекательные особенности расширений по Фридрихсу состоят в том, что сохраняется нижняя граница и область определения оператора $\hat{A}$ содержится в области определения формы $\hat{q}$. В некоторых случаях об области определения $\hat{A}$ можно сказать еще больше; см. Замечания и теорему X.32.

Пример 1. Пусть $A = -d^2/dx^2$ на $C_0^\infty(0, 1)$. Тогда

$$\|\psi\|_{+1}^2 = \|d\psi/dx\|^2 + \|\psi\|^2.$$

Если $\psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{+1}} \psi$, то ψ обладает производной из L^2. Отсюда следует, что

$$|\psi_n(a) - \psi(a)| \longrightarrow 0$$

для каждого $a \in [0, 1]$. Таким образом, для всех $\varphi \in D(\hat{A})$ имеем $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$, т. е. расширение по Фридрихсу $\hat{A}$ оператора $-d^2/dx^2$ является самосопряженным расширением с граничными условиями $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$. Спектр этого расширения равен $\{(n\pi)^2 \mid n = 1, 2, \ldots\}$, тогда как $\{\sin(n\pi x)\}$ — соответствующие собственные функции. Поскольку $\hat{A}$ ограничен снизу числом π, это же должно быть верно и в отношении исходной формы, порождаемой оператором A. Таким образом, интегрируя по частям, мы выводим классическое неравенство

$$\int_0^1 |\varphi'(x)|^2\, dx \geqslant \pi^2 \int_0^1 |\varphi(x)|^2\, dx$$

для функций $\varphi \in C_0^\infty(0, 1)$. Заметим, что тот же результат можно получить с помощью прямого вычисления с использованием рядов Фурье. Далее подчеркнем, что другое самосопряженное расширение A может иметь меньшую нижнюю границу, чем $\hat{A}$. Например, нижняя граница самосопряженного расширения, отвечающего граничным условиям $\varphi'(0) = 0 = \varphi'(1)$, равна нулю. С другой стороны, самосопряженные расширения, отличные от расширения по Фридрихсу, могут иметь одинаковую с ним нижнюю границу. Например, собственные значения самосопряженного расширения $\tilde{A}$, отвечающего граничным условиям $\varphi(0) = -\varphi(1)$, $\varphi'(0) = -\varphi'(1)$, равны $(n\pi)^2$, $n = 1, 3, \ldots$, и двукратно вырождены.

Пусть A_0 — расширение A, отвечающее граничным условиям $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = -\varphi'(1)$. Читатель легко убедится, что индексы дефекта A_0 равны $\langle 1, 1\rangle$. Ясно, что и $\hat{A}$, и $\tilde{A}$ расширяют A_0. Поэтому даже в случае индексов дефекта $\langle 1, 1\rangle$ самосопряженное расширение, отличное от фридрихсова, может иметь одинаковую с ним нижнюю границу.

Пример 2 (слабые решения уравнений в частных производных). Пусть Ω — открытая область в $\mathbb{R}^n$, и пусть A — оператор $-\Delta + I$ с областью определения $C_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Этот оператор симметричен и ограничен снизу единицей. Если $\hat{A}$ — расширение A по Фридрихсу, то $\hat{A} \geqslant I$ и $\operatorname{Ran}(\hat{A}) = L^2(\Omega)$. Таким образом, для любого $g \in L^2(\Omega)$ существует такое $f \in D(\hat{A})$, что $\hat{A}f = g$. Поэтому если $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, то

$$(\varphi, g) = (\varphi, \hat{A}f) = (\hat{A}\varphi, f) = ((-\Delta + I)\varphi, f),$$

т. е. для каждого $g \in L^2(\Omega)$ уравнение

$$(-\Delta + I) f = g$$

имеет слабое решение $f \in L^2(\Omega)$. Поскольку $\Delta f = (f - g) \in L^2(\Omega)$, можно воспользоваться леммой Соболева (§ IX.6) и показать, что f в определенном смысле регулярна. Если $g \in C_0^\infty(\Omega)$, то последовательное применение Δ к уравнению $\Delta f = f - g$ доказывает, что $f \in \bigcap_{m=1}^{\infty} W_m(\Omega)$, так что в этом случае из леммы Соболева вытекает бесконечная дифференцируемость f.

С другим применением расширения по Фридрихсу можно познакомиться в задаче 25, где читателю предлагается вывести условия разрешимости проблемы моментов Стильтьеса, представляющие собой аналог условий Гамбургера на полупрямой $[0, \infty)$ вместо $(-\infty, \infty)$. В этой задаче, как и в приведенном выше примере, существенно то, что нижняя граница фридрихсова расширения оператора A совпадает с нижней границей A. Это наводит на мысль исследовать нижние границы других самосопряженных расширений.

Предложение. Пусть A — полуограниченный симметрический оператор с конечными индексами дефекта. Тогда любое самосопряженное расширение оператора A ограничено снизу (возможно, величиной, меньшей исходной нижней границы).

Доказательство. Пусть $\tilde{A}$ — самосопряженное расширение A с соответствующей проекторнозначной мерой P_Ω. Предположим, что индексы дефекта A равны n. Тогда по теореме X.2 $D(\tilde{A}) = D(A) + S$, где S — некоторое n-мерное векторное пространство. Пусть K меньше нижней границы A, равной M. Тогда $\dim P_{(K,\,M)} \leqslant n$. Иначе в $D(A) \cap \operatorname{Ran} P_{(K,\,M)}$ можно было бы найти ненулевой вектор, что противоречит ограниченности снизу оператора A величиной M. Следовательно, $\dim P_{(-\infty,\,M)} \leqslant n$ и $\tilde{A}$ ограничено снизу. ∎

При бесконечных индексах дефекта полуограниченный симметрический оператор может иметь не ограниченные снизу самосопряженные расширения (задача 26). Но даже и в этом случае всегда существует множество ограниченных снизу самосопряженных расширений. На самом деле, если сам A не самосопряжен в существенном, то у него всегда есть отличные от фридрихсова ограниченные снизу расширения.

Теорема X.24. Пусть A — симметрический ограниченный снизу оператор. Если единственным ограниченным снизу самосопряженным расширением A является расширение по Фридрихсу $\hat{A}$, то A самосопряжен в существенном.

Доказательство. В соответствии с приведенным выше предложением нужно рассмотреть только случай бесконечных индексов дефекта. Предположим, что $\hat{A}$ — расширение A по Фридрихсу, и пусть $\tilde{A}$ — симметрическое расширение A, содержащееся в $\hat{A}$ и имеющее индексы дефекта, равные 1 (по поводу метода построения такого расширения см. теорему X.2). Тогда $\tilde{A}$ ограничен снизу и в силу предложения все его самосопряженные расширения также ограничены снизу. По этой причине A имеет более одного ограниченного снизу самосопряженного расширения, если только его индексы дефекта не равны нулю. ∎

Другое применение положительности и техники квадратичных форм можно найти в следующей теореме фон Неймана. Операторное доказательство этой теоремы, данное самим фон Нейманом, не использовало квадратичных форм.

Теорема X.25. Пусть A — *замкнутый* плотно определенный оператор, и пусть

$$D(A^*A) = \{\psi \in D(A) \mid A\psi \in D(A^*)\}.$$

Определим на $D(A^*A)$ оператор A^*A формулой $(A^*A)\psi = A^*(A\psi)$. Тогда A^*A самосопряжен.

Доказательство. Определим на $D(A) \times D(A)$ формулой $b(\varphi, \psi) = (A\varphi, A\psi)$ форму $b(\varphi, \psi)$. Она неотрицательна, и, поскольку оператор A замкнут, b замкнута как квадратичная форма. Пусть B — самосопряженный оператор, ассоциированный с b в соответствии с теоремой VIII.15. Покажем, что $B = A^*A$. При этом следует учитывать, что a priori не очевидно, что в $D(A^*A)$ есть хоть один вектор, отличный от нуля.

Пусть $\mathscr{H}_{+1} \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{H}_{-1}$ — шкала пространств, определяемая с помощью b, как в доказательстве теоремы VIII.15. Определим $\hat{A}^*: \mathscr{H} \to \mathscr{H}_{-1}$ соотношением $(\hat{A}^*\varphi)(\psi) = (\varphi, A\psi)$. В силу определения сопряженного оператора $D(A^*) = \{\varphi \mid \hat{A}^*\varphi \in \mathscr{H}\}$ и $A^* = \hat{A}^* \upharpoonright D(A^*)$. Пусть $\hat{B}: \mathscr{H}_{+1} \to \mathscr{H}_{-1}$ — естественное отображение, задаваемое равенством $(\hat{B}\varphi, \psi) = b(\varphi, \psi)$. Из доказательства теоремы VIII.15 следует, что $D(B) = \{\varphi \in \mathscr{H}_{+1} \mid \hat{B}\varphi \in \mathscr{H}\}$ и $B = \hat{B} \upharpoonright D(B)$. Пусть теперь $\varphi, \psi \in \mathscr{H}_{+1}$. Тогда

$$[\hat{A}^*(A\varphi)](\psi) = (A\varphi, A\psi) = (\hat{B}\varphi)(\psi),$$

так что $\hat{B} = \hat{A}^*A$. В итоге

$$\begin{aligned} D(B) &= \{\varphi \in \mathscr{H}_{+1} \mid \hat{B}\varphi \in \mathscr{H}\} = \\ &= \{\varphi \in \mathscr{H}_{+1} \mid A^*(A\varphi) \in \mathscr{H}\} = \\ &= \{\varphi \in \mathscr{H}_{+1} \mid A\varphi \in D(A^*)\} = D(A^*A) \end{aligned}$$

и $B = \hat{B} \upharpoonright D(B) = A^*A$. ∎

Из проведенного доказательства вытекает такое

Следствие. Пусть A — замкнутый оператор. Тогда любая существенная область определения A является существенной областью определения формы оператора A^*A.

Следствие. Если оператор A симметрический и A^2 плотно определен, то A^*A — фридрихсово расширение A^2.

Пример 3. Пусть $A = i\,d/dx$ с областью определения

$$D(A) = \{\varphi \mid \varphi \in AC[0, 1],\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}.$$

Мы уже видели, что

$$D(A^*) = \{\varphi \mid \varphi \in AC[0, 1]\}$$

и $A^*\varphi = i\,d\varphi/dx$. Из определений $D(AA^*)$ и $D(A^*A)$ и доказанной выше теоремы сразу следует, что A^*A — самосопряженное расширение $-d^2/dx^2$ с граничными условиями $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$, а AA^* — самосопряженное расширение $-d^2/dx^2$ с граничными условиями $\varphi'(0) = 0 = \varphi'(1)$.

Пример 4 (операторы Шредингера в присутствии магнитных полей). Методы квадратичных форм можно использовать для определения самосопряженных гамильтонианов вида (X.26) без явного описания операторных областей определения. Рассмотрим сначала случай $V = 0$. Пусть $\mathbf{A} \in L^2(\mathbb{R}^3)_{\text{loc}}$. Пусть T_j — замыкание симметрического оператора $i\,\partial/\partial x_j + eA_j/c$ на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Простое обобщение теоремы X.25 показывает, что $H = \sum_{j=1}^{3} T_j^* T_j$ можно определить как самосопряженный оператор на

$$\left\{ \psi \in \bigcap_{j=1}^{3} D(T_j) \,\middle|\, T_j \psi \in D(T_j^*) \right\}.$$

Тот же метод работает, если $V \geqslant 0$ и $V \in L^1_{\text{loc}}$. В любом случае

$$Q(H) = \left(\bigcap_{j=1}^{3} D(T_j) \right) \cap Q(V).$$

В следующем разделе мы опишем $D(-\Delta + V)$, когда $V \geqslant 0$ и $V \in L^1_{\text{loc}}$.

В завершение этого раздела соберем в одном месте некоторые факты о строго положительных симметрических операторах, которые мы уже доказали. Разумеется, каждый полуограниченный симметрический оператор становится строго положительным после прибавления к нему подходящей постоянной.

Теорема X.26. Пусть A — строго положительный симметрический оператор, т. е. $(A\varphi, \varphi) \geqslant c(\varphi, \varphi)$ для всех $\varphi \in D(A)$ и некоторого $c > 0$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(a) A самосопряжен в существенном;

(b) $\operatorname{Ran}(A)$ плотна;

(c) $\operatorname{Ker}(A^*) = \{0\}$;

(d) A обладает только одним полуограниченным самосопряженным расширением.

X.4. Положительность и самосопряженность II: поточечная положительность

Результаты предыдущего раздела основывались на понятии положительного оператора, имеющем смысл в любом гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. В этом разделе мы используем положительность другого типа. Она связана с L^2-пространствами и основана на понятии положительного вектора. Это понятие внутренне присуще не самому $\mathscr{H}$, а его реализации как L^2-пространства. Оно будет появляться неоднократно на протяжении этого курса и будет играть основную роль в § XIII.11. Поскольку гильбертово пространство квантовой механики обычно задается как некоторое L^2-пространство, оно обладает структурой, порождаемой положительными векторами. Имея положительные векторы, можно ввести положительные операторы умножения, т. е. операторы умножения $\psi(x) \mapsto V(x)\psi(x)$, переводящие положительные векторы в положительные. Главный результат этого раздела касается самосопряженности в существенном операторов: $-\Delta + V(x)$, когда $V \geqslant 0$ удовлетворяет некоторым весьма слабым дополнительным условиям, и шредингерова гамильтониана системы с произвольным магнитным полем.

Сначала распространим понятие положительности на обобщенные функции.

Определение. Пусть $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Будем говорить, что обобщенная функция T **положительна**, и писать $T \geqslant 0$, если $T(f) \geqslant 0$ для всех поточечно неотрицательных f из $\mathscr{D}$. В случае если T, $S \in \mathscr{D}'$ и $T - S \geqslant 0$, будем писать $T \geqslant S$.

Сразу же отметим два факта о положительных обобщенных функциях. Во-первых, если $T(f) = \int F(x) f(x)\, d^n x$, где F — непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$, то $T \geqslant 0$ в том и только том случае, когда $F(x) \geqslant 0$ для всех x. Во-вторых, если T_n — последовательность положительных обобщенных функций и $T_n \to T$ слабо, то предел T положителен.

Наш результат о самосопряженности основывается на следующем элегантном неравенстве для обобщенных функций.

Теорема X.27 (неравенство Като). Пусть функция u на $\mathbb{R}^n$ локально принадлежит L^1 и ее лапласиан Δu в смысле обобщенных функций также локально принадлежит L^1. Положим

$$(\operatorname{sgn} u)(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } u(x) = 0, \\ \overline{u(x)}/|u(x)|, & \text{если } u(x) \neq 0, \end{cases}$$

так что $\operatorname{sgn} u \in L^\infty$, а $(\operatorname{sgn} u)\Delta u$ локально принадлежит L^1 и потому является обобщенной функцией. Тогда лапласиан $\Delta|u|$

в смысле обобщенных функций удовлетворяет следующему неравенству:

$$\Delta |u| \geqslant \operatorname{Re}[(\operatorname{sgn} u)\Delta u]. \tag{X.30}$$

Пример 1. Чтобы облегчить понимание этого результата, рассмотрим случай $n=1$ с функцией $u \in C^\infty(\mathbb{R})$, строго положительной при $x>0$ и строго отрицательной при $x<0$. Тогда $|u|$ есть C^∞-функция на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, но в точке $x=0$ ее первая производная испытывает скачок величины $2u'(0)$. Поэтому

$$\frac{d^2}{dx^2}|u| = (\operatorname{sgn} u)\frac{d^2}{dx^2}u + 2u'(0)\,\delta(x)$$

и (X.30) выполняется, ибо $u'(0) \geqslant 0$.

Доказательство теоремы X.27. Предположим сначала, что u принадлежит классу C^∞, и пусть u_ε задана формулой

$$u_\varepsilon(x) = \sqrt{|u(x)|^2+\varepsilon^2}, \tag{X.31}$$

так что u_ε тоже принадлежит классу C^∞. Дифференцируя квадрат (X.31), получаем

$$2u_\varepsilon(x)[\operatorname{grad} u_\varepsilon(x)] = 2\operatorname{Re}[\overline{u(x)}(\operatorname{grad} u(x))]. \tag{X.32}$$

Поскольку из (X.31) следует, что $|u_\varepsilon| \geqslant |u|$, из (X.32) следует, что

$$|\operatorname{grad} u_\varepsilon| \leqslant |\overline{u(x)}|\,|u_\varepsilon(x)|^{-1}|\operatorname{grad} u(x)| \leqslant |\operatorname{grad} u(x)|. \tag{X.33}$$

Беря дивергенцию от (X.32), получаем

$$u_\varepsilon \Delta u_\varepsilon + |\operatorname{grad} u_\varepsilon|^2 = \operatorname{Re}(\bar u \Delta u) + |\operatorname{grad} u|^2;$$

с учетом (X.33) это дает неравенство

$$u_\varepsilon \Delta u_\varepsilon \geqslant \operatorname{Re}(\bar u \Delta u)$$

поточечно и, следовательно, в смысле обобщенных функций.

В результате

$$\Delta u_\varepsilon \geqslant \operatorname{Re}(\operatorname{sgn}_\varepsilon(u)\Delta u), \tag{X.34}$$

где

$$\operatorname{sgn}_\varepsilon(u(x)) = \overline{u(x)}/u_\varepsilon(x).$$

Теперь пусть u — произвольная локально суммируемая функция, $\Delta u \in L^1_{\text{loc}}$, и пусть j_δ — аппроксимативная единица, т. е. $j_\delta(x) = j(x/\delta)\cdot\delta^{-n}$, где $j \geqslant 0$, $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\int j(x)\,d^nx = 1$. Пусть $u^\delta = u * j_\delta$. Поскольку u^δ бесконечно дифференцируема,

$$\Delta(u^\delta)_\varepsilon \geqslant \operatorname{Re}(\operatorname{sgn}_\varepsilon(u^\delta)\Delta u^\delta) \tag{X.35}$$

для любых ε, $\delta > 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и устремим δ к 0. Тогда $u^\delta \to u$ по локальной L^1-норме, а потому и в $\mathscr{D}'$. В частности, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $u^\delta(x) \to u(x)$ поточечно почти всюду. Следовательно, $\operatorname{sgn}_\varepsilon(u^\delta) \to \operatorname{sgn}_\varepsilon(u)$ поточечно почти всюду. Так как $\Delta u^\delta = (\Delta u)^\delta$ и $\Delta u \in L^1_{\text{loc}}$, то $\Delta u^\delta \to \Delta u$ в L^1_{loc}. Теперь легко видеть, что $\operatorname{sgn}_\varepsilon(u^\delta)\Delta u^\delta \to \operatorname{sgn}_\varepsilon(u)\Delta u$ в $\mathscr{D}'$, и потому, устремив δ в (X.35) к 0, заключаем, что (X.34) выполняется для u. Теперь устремим к нулю ε. Тогда последовательность $\operatorname{sgn}_\varepsilon(u)$ сходится к $\operatorname{sgn}(u)$ поточечно, оставаясь равномерно ограниченной ($|\operatorname{sgn}_\varepsilon u| \leqslant 1$), так что обе части (X.34) сходятся в $\mathscr{D}'$ к соответствующим частям (X.30). ∎

Типичным приложением теоремы X.27 служит

Теорема X.28. Пусть $V \in L^2(\mathbb{R}^n)_{\text{loc}}$ и $V \geqslant 0$ поточечно. Тогда $-\Delta + V$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. В силу теоремы X.26 нужно только доказать, что из

$$(-\Delta + V + 1)^* u = 0 \tag{X.36}$$

следует $u = 0$. Но в силу того, что область определения $-\Delta + V$ равна C_0^∞, равенство (X.36) эквивалентно равенству

$$(-\Delta + V + 1)u = 0, \qquad u \in L^2(\mathbb{R}^n), \tag{X.37}$$

где производная понимается в смысле обобщенных функций. Из (X.35) следует, что $\Delta u = (Vu + u) \in L^1_{\text{loc}}$, поскольку и u, и $V + 1$ лежат в L^2_{loc}. Таким образом, в силу теоремы X.27

$$\Delta|u| \geqslant \operatorname{Re}(\operatorname{sgn} u\, \Delta u) = \operatorname{Re}(\operatorname{sgn} u\,(Vu + u)) = (V+1)|u|. \tag{X.38}$$

В частности, $\Delta|u| \geqslant 0$.

Пусть j_δ — аппроксимативная единица, как в предыдущей теореме, и пусть $w = |u|$, $w^\delta = w * j^\delta$. Тогда $\Delta w^\delta = w * \Delta j_\delta \in L^2$, так что $w^\delta \in D(\Delta)$ и потому $(w^\delta, \Delta w^\delta) \leqslant 0$, причем равенство имеет место только при $w^\delta = 0$. Но $\Delta w^\delta = \Delta|u| * j_\delta \geqslant 0$ в смысле обобщенных функций и потому $\Delta w^\delta \geqslant 0$ поточечно. Таким образом, $(w^\delta, \Delta w^\delta) \geqslant 0$, так что $w^\delta = 0$. Поскольку $w^\delta \to w$ при $\delta \to 0$, имеем $w = 0$ и, следовательно, $u = 0$. ∎

Пример 2 (самосопряженность в существенном оператора $-d^2/dx^2 + x^2 + x^4$ на $C_0^\infty(\mathbb{R})$; второе доказательство). Поскольку функция $x^2 + x^4$ положительна и локально принадлежит L^2, из теоремы X.28 следует, что $-d^2/dx^2 + x^2 + x^4$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R})$. И вообще, $-\Delta + P(x_1, \ldots, x_n)$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ при любом ограниченном снизу полиноме P.

Пример 3. Пусть $V(x)=2|x|^{-2}$ в $L^2(\mathbb{R}^5)$. Тогда $-\Delta+V$ в силу теоремы X.28 (или теоремы X.11) самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^5)$. С другой стороны, $V\in L^2_{\text{loc}}$ и $-\Delta-V$ ограничен снизу, но не самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^5)$ (см. теорему X.11 и пример 4 в § X.2). Таким образом, условие $V\geqslant 0$ в теореме X.28 полностью исключить нельзя.

Теорема X.28 допускает много различных обобщений.

Теорема X.29. Пусть $V=V_1+V_2$, где $V_1\geqslant 0$, $V_1\in L^2(\mathbb{R}^n)_{\text{loc}}$ и V_2—ограниченный относительно $-\Delta$ оператор умножения с $-\Delta$-гранью $a<1$. Тогда $-\Delta+V$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. В частности, если V—такой оператор умножения, что $V_+=\max(V,\ 0)\in L^2_{\text{loc}}$ и $V_-=\min(V,\ 0)\in L^p+L^\infty$, где $p=2$ при $n\leqslant 3$, $p>2$ при $n=4$ и $p=n/2$ при $n\geqslant 5$, то $-\Delta+V$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. После повторения аргументов теоремы X.28 остается только показать, что если $(-\Delta+V+b)u=0$ (в смысле обобщенных функций) и $u\in L^2(\mathbb{R}^n)$, то $u=0$; здесь b—большая константа, которую мы выберем ниже. Поскольку $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\subset$ $\subset D(-\Delta)\subset D(V_2)$, имеем $V_2\in L^2_{\text{loc}}$; поэтому с помощью неравенства Като получаем аналог (X.38):

$$\Delta|u|\geqslant(V+b)|u|\geqslant(V_2+b)|u|.$$

Таким образом,

$$(-\Delta+b)|u|\leqslant -V_2|u|. \tag{X.39}$$

Теперь, пользуясь явным выражением для ядра оператора $(-\Delta+b)^{-1}$ (задача 50 гл. IX), можно убедиться, что он переводит положительные элементы $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в положительные, а поскольку этот оператор самосопряжен, он переводит в себя и множество положительных элементов из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Более того, поскольку V_2 ограничен относительно $-\Delta$,

$$\left|\int V_2(x)\,|u(x)|\,f(x)\,dx\right|\leqslant(\text{const})\,\|u\|_{L_2}\|(-\Delta+1)f\|,$$

так что $V_2|u|$—обобщенная функция медленного роста. В итоге (X.39) дает

$$|u|\leqslant-(-\Delta+b)^{-1}V_2|u|. \tag{X.40}$$

Так как $-\Delta$-грань оператора V_2 меньше 1, можно выбрать b таким, что $\|(-\Delta+b)^{-1}V_2\|\leqslant(a+1)/2<1$. Тогда, в силу (X.40),

$$\|u\|\leqslant\|(-\Delta+b)^{-1}V_2\|\,\|u\|,$$

и потому $\|u\|=0$. ∎

Приведем без доказательства теорему, обобщающую часть теоремы X.11 на нецентральный случай.

Теорема X.30 (Кальф—Вальтер—Шминке—Саймон). Пусть $V=V_1+V_2$, где $V_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $V_1 \in L^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})_{\text{loc}}$, удовлетворяет неравенству

$$V_1(\mathbf{r}) \geqslant -n(n-4)/4r^2.$$

Тогда $-\Delta+V$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Доказательство, использующее неравенство Като, можно найти в работах, указанных в Замечаниях.

Теорема X.29 допускает другое доказательство, интересное тем, что оно опирается на следующий красивый результат о положительности в L^2-пространствах.

Определение. Ограниченный оператор A в $L^2(X, d\mu)$ называется **сохраняющим положительность**, если $(A\varphi)(x) \geqslant 0$ почти всюду, когда $\varphi(x) \geqslant 0$ почти всюду. Полугруппа $\{T(t)\}$ называется сохраняющей положительность, если таковы операторы $T(t)$ при каждом $t \geqslant 0$.

Теорема X.31 (Дэвис—Фари). Пусть H_0—такой положительный самосопряженный оператор в $L^2(X, d\mu)$, что полугруппа $\exp[-tH_0]$ сохраняет положительность. Пусть V—оператор умножения и $V \geqslant 0$. Предположим, что $H=H_0+V$ самосопряжен в существенном на $D(H_0) \cap D(V)$. Пусть W—оператор умножения, ограниченный относительно H_0. Тогда W ограничен относительно H, причем если

$$\|W\psi\| \leqslant a\|(H_0+b)\psi\| \quad \text{при всех } \psi \in D(H_0),$$

то

$$\|W\psi\| \leqslant a\|(H+b)\psi\| \quad \text{при всех } \psi \in D(H).$$

Доказательство. Предположим, что $\|W(H_0+b)^{-1}\| \leqslant a$. Покажем, что

$$\|W(H+b)^{-1}\| \leqslant a.$$

Поскольку $\exp[-tH_0]$ сохраняет положительность, этим свойством обладает и $(H_0+b)^{-1} = \int\limits_0^\infty e^{-bt}\exp[-tH_0]\,dt$. Кроме того, в силу теоремы Троттера, $\exp[-tH] = \text{s-}\lim\limits_{n\to\infty}(\exp[-tH_0/n] \times \exp[-tV/n])^n$ сохраняет положительность, и потому $(H+b)^{-1}$ обладает тем же свойством. Дальше мы докажем (см. теорему X.55), что в случае, когда A ограничен и сохраняет положительность, $|A\psi| \leqslant A|\psi|$ поточечно для всех ψ. По этой причине сейчас нужно только доказать, что

$$\|W(H+b)^{-1}|\psi|\|\leqslant a\|\psi\|$$

для всех ψ. Если показать, что (поточечно)

$$0\leqslant (H+b)^{-1}\varphi\leqslant (H_0+b)^{-1}\varphi \tag{X.41a}$$

для всех $\varphi\geqslant 0$, то отсюда будет следовать, что (поточечно)

$$0\leqslant |W|(H+b)^{-1}\varphi\leqslant |W|(H_0+b)^{-1}\varphi \tag{X.41b}$$

и

$$\|W(H+b)^{-1}|\psi|\|\leqslant a\|\psi\|$$

для всех ψ.

Итак, предположим, что $\varphi\geqslant 0$. Тогда, поскольку $|e^{-sV}|\leqslant 1$ и $\exp[-sH_0]$ сохраняет положительность,

$$e^{-sH_0}(1-e^{-sV})\varphi\geqslant 0,$$

так что

$$0\leqslant (e^{-sH_0}e^{-sV})\varphi\leqslant e^{-sH_0}\varphi. \tag{X.42}$$

Итерируя (X.42), получаем

$$0\leqslant (e^{-tH_0/n}e^{-tV/n})^n\varphi\leqslant e^{-tH_0}\varphi,$$

и в силу формулы Троттера

$$0\leqslant e^{-tH}\varphi\leqslant e^{-tH_0}\varphi. \tag{X.43}$$

Неравенство (X.41b) выводится из (X.43), если выразить оператор $(H+b)^{-1}$ через $\exp[-tH]$ с помощью преобразования Лапласа. ∎

В качестве следствия теоремы Дэвиса—Фари получаем

Второе доказательство теоремы X.29. В силу теоремы X.28 оператор $-\Delta+V_1$ самосопряжен в существенном на $D(\Delta)\cap D(V_1)$. Более того, $\exp[t\Delta]$ сохраняет положительность, что следует из явного вида ядра (IX.31). Таким образом, используя условия теоремы X.29 и теорему X.31, получаем $(-\Delta+V_1)$-ограниченность V_2 с $(-\Delta+V_1)$-гранью, меньшей 1, и по этой причине $(-\Delta+V_1+V_2)$ самосопряжен в существенном на любой существенной области для $-\Delta+V_1$ (теорема Като—Реллиха). ∎

Неравенство Като можно также использовать для изучения $D(-\Delta+V)$, когда сумма $-\Delta+V$ определена в смысле квадратичных форм:

Теорема X.32. Пусть $V\geqslant 0$ лежит в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Пусть $H=-\Delta+V$ определено как сумма квадратичных форм. Тогда $D(H)$ равна

$$\{\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n)\,|\,V\varphi\in L^1_{\text{loc}};\ (-\Delta\varphi+V\varphi)_{\text{о. ф.}}\in L^2\}, \tag{X.44}$$

где $(-\Delta\varphi+V\varphi)_{\text{о.ф.}}$—обобщенная функция $f \to \int \varphi(-\Delta f)+\int (V\varphi) f$. Более того, $H\varphi=(-\Delta\varphi+V\varphi)_{\text{о.ф.}}$.

Доказательство. Пусть T—оператор с областью определения (X.44) и $T\varphi=-\Delta\varphi+V\varphi$. Прежде всего мы утверждаем, что T расширяет H. Действительно, пусть $\varphi\in D(H)\subset Q(H)=Q(-\Delta)\cap Q(V)$. Поскольку $\varphi\in Q(V)$, имеем $|V|^{1/2}\varphi\in L^2$, а поскольку $|V|^{1/2}\in L^2_{\text{loc}}$, мы заключаем, что $V\varphi\in L^1_{\text{loc}}$. Более того, H: $\mathscr{H}_{+1}\to\mathscr{H}_{-1}$ совпадает с $-\Delta+V$, определенным в смысле обобщенных функций, поэтому в силу построения $D(H)$, проведенного в теореме VIII.15, $H\varphi=(-\Delta\varphi+V\varphi)\in L^2$, т. е. $\varphi\in D(T)$ и $H\varphi=T\varphi$.

Предположим теперь, что $\eta\in D(T)$. Поскольку H самосопряжен и положителен, можно найти $\varphi\in D(H)$ со свойством $(T+1)\eta=(H+1)\varphi$. Пусть $\psi=\eta-\varphi$. Тогда благодаря тому, что T расширяет H, имеем $(T+1)\psi=0$. Так как $\psi\in D(T)$, то $-\Delta\psi=T\psi-V\psi=(-\psi-V\psi)\in L^1_{\text{loc}}$; поэтому применимо неравенство Като, которое дает

$$\Delta|\psi|\geqslant(\operatorname{sgn}\psi)(\psi+V\psi)=(V+1)|\psi|\geqslant 0.$$

Как и при доказательстве теоремы X.28, отсюда следует, что $\psi=0$. Таким образом, $\eta=\varphi\in D(H)$, т. е. $D(T)\subset D(H)$, и потому $T=H$. ∎

Теперь обратимся к приложениям неравенства Като к операторам Шредингера систем в магнитных полях. Прежде всего, нам нужен более общий вариант этого неравенства:

Теорема X.33. Пусть a_k $(k=1, \ldots, n)$—вещественнозначные функции из $C^1(\mathbb{R}^n)$. Пусть D_k—оператор на $\mathscr{D}'$ следующего вида:

$$D_kT=\frac{1}{i}\frac{\partial T}{\partial x_k}-a_kT$$

и $D^2=\sum D_k^2$. Тогда для любой функции $u\in L^1_{\text{loc}}$, такой, что $D^2u\in L^2_{\text{loc}}$, справедливо неравенство

$$\Delta|u|\geqslant-\operatorname{Re}[(\operatorname{sgn}u)D^2u]. \qquad (X.45)$$

Основную дополнительную идею, нужную для доказательства теоремы X.33 после того, как уже доказана теорема X.27, дает следующая

Лемма. В условиях теоремы X.33 функции Δu и ∇u лежат в L^1_{loc}.

Доказательство. Нужно только показать, что Δu, ∇u локально лежат в L^1 около $x=0$. Пусть f—функция из C_0^∞, тождественно равная 1 около нуля. Тогда с помощью явного вычисления получаем

$$(-\Delta+1)(fu)=h_1+\nabla\cdot\mathbf{h}_2, \qquad (X.46)$$

где

$$h_1 = fD^2u + (\Delta f)\,u + if\,(\nabla\cdot\mathbf{a})\,u - 2i\,(\nabla f)\cdot\mathbf{a}u + (a^2+1)\,fu,$$
$$\mathbf{h}_2 = 2if\mathbf{a}u - 2\,(\nabla f)\,u.$$

Важно то, что в силу условий теоремы $h_1 \in L^1$, $\mathbf{h}_2 \in L^2$ и $fu \in L^2$. В итоге все функции в (X.46) лежат в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Поскольку $(-\Delta+1)$ обратим на $\mathscr{S}$, он обратим и на $\mathscr{S}'$, так что

$$fu = (-\Delta+1)^{-1}h_1 + (-\Delta+1)^{-1}\nabla\cdot\mathbf{h}_2$$

и

$$\nabla(fu) = \nabla(-\Delta+1)^{-1}h_1 + \nabla(-\Delta+1)^{-1}\nabla\cdot\mathbf{h}_2.$$

Далее, преобразование Фурье функции $\mathbf{h}_2 \in L^2$ само лежит в L^2, так что

$$\nabla_i(-\Delta+1)^{-1}\,\nabla\cdot\mathbf{h}_2 = \mathscr{F}^{-1}\Big(p_i(p^2+1)^{-1}\sum_j p_j\cdot\hat{h}_j\Big)$$

принадлежит L^2, ибо $p_ip_j(p^2+1)^{-1} \in L^\infty$. Пусть $G_i(x)$ — обобщенная функция, у которой $\hat{G}_i(p) = (2\pi)^{-n/2}p_i(p^2+1)^{-1}$. Следуя методам задачи 50 гл. IX, можно доказать, что $G_i(x)$ непрерывна вне $x=0$, экспоненциально убывает на бесконечности и $|G_i(x)| \leqslant C|x|^{-n+1}$ ($\ln|x|$, если $n=1$). Таким образом, $G_i \in L^p$ при некотором $p>1$ и потому в силу неравенства Юнга $G_i * h_1 \in L^p$. Мы видим, что $\nabla(fu)$ лежит в L^1_{loc} и, следовательно, $\nabla u \in L^1_{\text{loc}}$ около нуля, откуда $\nabla\cdot\mathbf{h}_2 \in L^1_{\text{loc}}$, так что в силу (X.46) $-\Delta u \in L^1_{\text{loc}}$. ∎

Доказательство теоремы X.33. Предположим сначала, что $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, и пусть u_ε задано с помощью (X.31). Тогда (X.32) с учетом равенства $\operatorname{Im}(\overline{u(x)}\,a_j(x)\,u(x)) = 0$ дает

$$u_\varepsilon \operatorname{grad}_k u_\varepsilon = \operatorname{Re}[\overline{u(x)}\,(iD_ku)(x)], \tag{X.47}$$

так что

$$|\operatorname{grad} u_\varepsilon| \leqslant |Du|. \tag{X.48}$$

Беря дивергенцию от (X.47) и пользуясь соотношением

$$\begin{aligned}\partial_k[\bar{u}\,(iD_ku)] &= (\partial_k\bar{u})\,(iD_ku) + \bar{u}\,(\partial_k(iD_ku)) = \\ &= \overline{[(\partial_k - ia_k)\,u]}\,(iD_ku) + \bar{u}\,(\partial_k - ia_k)\,(iD_ku) = \\ &= |D_ku|^2 - \bar{u}D_k^2u,\end{aligned}$$

получаем

$$\Delta u_\varepsilon \geqslant -\operatorname{Re}[\operatorname{sgn}_\varepsilon(u)\,D^2u]. \tag{X.49}$$

Мы применяли (X.48) так же, как в доказательстве теоремы X.27. Как и в этом доказательстве, приблизим заданную $u \in L^2_{\text{loc}}$ с $D^2u \in L^1_{\text{loc}}$ функцией u^δ. Поскольку в силу леммы из $u \in L^2_{\text{loc}}$

и $D^2u \in L^1_{\mathrm{loc}}$ следует, что Δu и ∇u лежат в L^1_{loc}, мы заключаем, что $D^2u^\delta \longrightarrow D^2u$ в L^1_{loc}. Таким образом, (X.49) выполняется для любой функции u, удовлетворяющей условиям теоремы, а (X.45) следует из (X.49) при $\varepsilon \longrightarrow 0$. ∎

Теорема X.34. Пусть $a_k \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Пусть $V = V_1 + V_2$, где V_1, V_2 удовлетворяют условиям теоремы X.29. Тогда оператор

$$H = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2m_j} (\partial_j - ia_j)^2 + V$$

самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Следуя доказательству теоремы X.29, применим (X.45) вместо (X.30) и заметим, что u, к которой мы применяем (X.45), лежит в L^2_{loc}, а не только в L^1_{loc}. ∎

Пример 4 (эффект Зеемана). Пусть $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x} \times \mathbf{B}_0$, где $\mathbf{B}_0$ — константа. Гамильтониан N-электронного атома в постоянном внешнем магнитном поле имеет вид

$$H = -\frac{1}{2M} (\partial_0 - iNe\mathbf{a}(\mathbf{x}_0)/c)^2 - \frac{1}{2m} \sum_{n=1}^{N} (\partial_n + ie\mathbf{a}(\mathbf{x}_n)/c)^2 - \\ - \sum_{n=1}^{N} \frac{Ne^2}{|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0|} + \frac{1}{2} \sum_{n \neq m} \frac{e^2}{|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m|}.$$

В силу теоремы X.34 H самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^{3N+3})$.

Можно значительно ослабить условия гладкости, налагаемые на $\mathbf{a}$, если выбрать **кулонову калибровку**, т. е. потребовать, чтобы $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ (в смысле обобщенных функций). Заметим, что в этом случае

$$D^2u = -\Delta u - 2i\mathbf{a} \cdot \nabla u + \mathbf{a}^2 u,$$

так что D^2 можно определить на C_0^∞ без всяких предположений о гладкости $\mathbf{a}$; нужна только локальная принадлежность $\mathbf{a}$ пространству L^4_{loc}. Дополнительное условие $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ весьма обычно для физической литературы. Чтобы понять почему, давайте действовать формально. Возьмем $\lambda(x)$ и положим $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \operatorname{grad} \lambda$. Заметим, что это не изменяет магнитного поля $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{a}$, т. е. $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{a}}$. Если $\tilde{\mathbf{D}} = (i\partial - \tilde{\mathbf{a}})$, то

$$\tilde{\mathbf{D}} = e^{-i\lambda} \mathbf{D} e^{i\lambda},$$

так что

$$e^{-i\lambda}(-D^2 + V) e^{i\lambda} = -\tilde{D}^2 + V.$$

Таким образом, $-D^2+V$ и $-\tilde{D}^2+V$ формально унитарно эквивалентны и калибровочное преобразование $\mathbf{a}\mapsto\tilde{\mathbf{a}}$ не изменяет магнитного поля. Если λ не принадлежит C^∞, то $-\tilde{D}^2+V$ может иметь в качестве своей существенной области $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, тогда как для $-D^2+V$ это множество не является существенной областью (скорее уж таковым будет множество $e^{i\lambda}(C_0^\infty)$). Таким образом, интересуясь самосопряженностью в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, нужно быть готовым к переходу к удобной калибровке. Решая уравнение в частных производных $-\Delta\lambda = \operatorname{div}\mathbf{a}$, всегда можно найти $\tilde{\mathbf{a}}$ с $\operatorname{div}\tilde{\mathbf{a}}=0$, так что $\mathbf{a}$ и $\tilde{\mathbf{a}}$ связаны калибровочным преобразованием.

Следующая теорема доказывается в одной работе, указанной в Замечаниях.

Теорема X.35. Пусть V удовлетворяет условиям теоремы X.29. Предположим, что $\tilde{\mathbf{a}}\in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $q\geqslant 4$, $q>n$ и $\operatorname{div}\tilde{\mathbf{a}}=0$ (в смысле обобщенных функций). Тогда оператор

$$-\sum_{j=1}^{n}(\partial_j - ia_j)^2+V$$

самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

X.5. Коммутаторная теорема

Многие факты о самосопряженности, обсуждавшиеся до сих пор, относились только к полуограниченным операторам и формам. Кроме того, и в теореме Като—Реллиха и КЛМН-теореме существенно, что возмущения положительных операторов, о которых в них идет речь, полуограничены. В этом разделе доказывается несколько теорем, полезных при доказательстве самосопряженности неполуограниченных операторов. В конце раздела с помощью этих теорем изучается гамильтониан, описывающий эффект Штарка, т. е. гамильтониан атома в постоянном электрическом поле.

Хотя оператор A, самосопряженность которого мы хотим установить, не будет полуограниченным, мы будем предполагать, что его можно различными способами оценить с помощью вспомогательного самосопряженного оператора N, который полуограничен. На протяжении всего этого раздела мы считаем, что $N\geqslant I$, и обозначаем через $\mathcal{H}_n$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, пополнение $D(N^{n/2})$ по норме

$$\|\psi\|_n=\|N^{n/2}\psi\|. \tag{X.50}$$

Таким образом, у нас возникает шкала пространств $\ldots\supset\mathcal{H}_n\supset\supset\mathcal{H}_{n+1}\ldots$, обсуждавшаяся в дополнении к § IX.4 и впервые введенная для $n=0, \pm 1$ в § VIII.6. Напомним, что если $n>0$, то $\mathcal{H}_n = D(N^{n/2})$, и что $\mathcal{H}_{-n}$ можно отождествить с $\mathcal{H}_n^*$.

Предположим, что $a(\cdot, \cdot)$ — квадратичная форма на $Q(a) = D(N^{n/2})$, удовлетворяющая неравенству

$$|a(\varphi, \psi)| \leqslant c \|\varphi\|_n \|\psi\|_n. \tag{X.51}$$

Тогда для каждого $\varphi \in \mathcal{H}_n$ существует такой $\tilde{\varphi} \in \mathcal{H}_{-n}$, что $a(\varphi, \psi) = \tilde{\varphi}(\psi)$ при всех $\psi \in \mathcal{H}_n$. Отображение $\varphi \overset{A}{\longmapsto} \tilde{\varphi}$ линейно и ограничено, так что $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_{-n})$. Обратно, любой оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_{-n})$ порождает квадратичную форму $a(\cdot, \cdot)$ на $Q(a) = D(N^{n/2})$, удовлетворяющую (X.51). Сопряженный с A оператор A^* ограничен и действует из $\mathcal{H}_{-n}^*$ в $\mathcal{H}_n^*$. Но, поскольку $\mathcal{H}_{-n}^*$ и $\mathcal{H}_n^*$ естественно изоморфны $\mathcal{H}_n$ и $\mathcal{H}_{-n}$, A^* можно естественным образом рассматривать как ограниченный оператор из $\mathcal{H}_n$ в $\mathcal{H}_{-n}$. Если $A = A^*$, мы говорим, что оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_{-n})$ **симметричен.** Ясно, что это эквивалентно симметричности соответствующей формы $a(\cdot, \cdot)$.

Имея $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_{-n})$, можно определить $[N, A]$ как оператор из $\mathcal{H}_{n+2}$ в $\mathcal{H}_{-n-2}$, действующий по формуле

$$[N, A]\psi = N(A\psi) - A(N\psi), \quad \psi \in \mathcal{H}_{n+2}. \tag{X.52}$$

Коммутатор $[N, A]$ представляет собой ограниченный оператор из $\mathcal{H}_{n+2}$ в $\mathcal{H}_{-n-2}$, поскольку N — ограниченный оператор из $\mathcal{H}_{n+2}$ в $\mathcal{H}_n$ и из $\mathcal{H}_{-n}$ в $\mathcal{H}_{-n-2}$. Если $[N, A]\psi \in \mathcal{H}_{-n}$ для каждого $\psi \in \mathcal{H}_{n+2}$ и

$$\|[N, A]\psi\|_{-n} \leqslant c \|\psi\|_n, \tag{X.53}$$

то, согласно теореме I.7, $[N, A]$ продолжается до ограниченного оператора из $\mathcal{H}_n$ в $\mathcal{H}_{-n}$. В таком случае это продолжение мы по-прежнему обозначаем через $[N, A]$.

Наконец, имея на $D(N^{n/2})$ квадратичную форму $a(\cdot, \cdot)$ или, что то же самое, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_{-n})$, определим на $\mathcal{H}$ ассоциированный оператор $\hat{A}$ соотношениями

$$D(\hat{A}) = \{\psi \in \mathcal{H} \cap \mathcal{H}_n \mid A\psi \in \mathcal{H}\},$$
$$\hat{A}\psi = A\psi, \quad \psi \in D(\hat{A}).$$

В общем случае область $D(\hat{A})$ не обязана быть плотной в $\mathcal{H}$, и в задаче 34 описан оператор $\hat{A}$, у которого $D(\hat{A})$ состоит только из нулевого вектора.

Теперь мы можем сформулировать главную теорему этого раздела. Далее (теорема X.37) мы докажем чисто «операторный» аналог этой теоремы.

Теорема X.36 (коммутаторная теорема). Пусть N — самосопряженный оператор и $N \geqslant I$. Предположим, что A — симметрический оператор, лежащий в $\mathscr{L}(\mathscr{H}_{+1}, \mathscr{H}_{-1})$, где $\mathscr{H}_n$ — пространство из шкалы, связанной с N. Предположим еще, что $[N, A] \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_{+1}, \mathscr{H}_{-1})$. Тогда

(a) Ассоциированный оператор $\hat{A}$ плотно определен.

(b) $D(N) \subset D(\hat{A})$ и для всех $\psi \in D(N)$

$$\|\hat{A}\psi\| \leqslant c\|N\psi\|. \tag{X.54}$$

(c) Оператор $\hat{A}$ самосопряжен в существенном на любой существенной области оператора N.

Для ясности сформулируем теорему X.36 без ссылок на шкалу $\mathscr{H}_n$.

Теорема X.36′. Пусть N — самосопряженный оператор и $N \geqslant I$. Предположим, что $a(\cdot, \cdot)$ — квадратичная форма с областью определения $Q(a) = Q(N)$, так что

(i) $|a(\psi, \varphi)| \leqslant c_1 \|N^{1/2}\varphi\| \|N^{1/2}\psi\|$ для всех $\varphi, \psi \in D(N^{1/2})$.

(ii) $|a(N\psi, \varphi) - a(\psi, N\varphi)| \leqslant c_2 \|N^{1/2}\varphi\| \|N^{1/2}\psi\|$ для всех $\varphi, \psi \in \in D(N^{3/2})$.

Тогда

(a, b′) Для всех $\psi \in D(N)$ и всех $\varphi \in D(N^{1/2})$

$$|a(\varphi, \psi)| \leqslant c\|\varphi\| \|N\psi\|,$$

так что $\psi \in D(\hat{A})$, $a(\varphi, \psi) = (\varphi, \hat{A}\psi)$ при всех $\varphi \in D(N^{1/2})$ и $\hat{A}\psi$ удовлетворяет (X.54).

(c) Оператор $\hat{A}$ самосопряжен в существенном на любой существенной области оператора N.

Начнем доказательство с двух общих лемм о шкалах пространств. Обозначим норму в $\mathscr{L}(\mathscr{H}_n, \mathscr{H}_m)$ через $\|\cdot\|_{n,m}$.

Лемма 1. Если $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_n, \mathscr{H}_m)$ и $[N, A] \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_n, \mathscr{H}_m)$, то

$$A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_{n+2}, \mathscr{H}_{m+2}).$$

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathscr{H}_{n+2}$. Вообще говоря, $NA\psi \in \mathscr{H}_{m-2}$, но, поскольку $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_n, \mathscr{H}_m)$ и $[N, A] \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_n, \mathscr{H}_m)$, имеем $AN\psi \in \mathscr{H}_m$ и $(NA\psi - AN\psi) \in \mathscr{H}_m$. В итоге $NA\psi \in \mathscr{H}_m$ и

$$\begin{aligned}\|A\psi\|_{m+2} = \|NA\psi\|_m &\leqslant \|[N, A]\psi\|_m + \|AN\psi\|_m \leqslant \\ &\leqslant \|[N, A]\|_{n,m} \|\psi\|_n + \|A\|_{n,m} \|N\psi\|_n \leqslant \\ &\leqslant (\|[N, A]\|_{n,m} + \|A\|_{n,m}) \|\psi\|_{n+2},\end{aligned}$$

так что $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_{n+2}, \mathscr{H}_{m+2})$ и

$$\|A\|_{n+2,\, m+2} \leqslant \|[N, A]\|_{n,\, m} + \|A\|_{n,m}. \ \blacksquare$$

Лемма 2. Если $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_{+1}, \mathscr{H}_{-1})$ и $[N, A] \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_{+1}, \mathscr{H}_{-1})$, то $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_{+2}, \mathscr{H})$, т. е. $D(\hat{A}) \supset D(N)$ и справедливо (X.54).

Доказательство. В силу леммы 1, $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_{+3}, \mathscr{H}_{+1})$. Интерполируя $\mathscr{L}(\mathscr{H}_{+3}, \mathscr{H}_{+1})$ и $\mathscr{L}(\mathscr{H}_{+1}, \mathscr{H}_{-1})$ (см. дополнение к § IX.4), заключаем, что $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_{+2}, \mathscr{H})$. ∎

Доказательство теоремы X.36. В силу леммы 2 выполняются (a) и (b). Предположим, что доказана самосопряженность в существенном оператора $\hat{A}$ на $D(N)$. Пусть C—существенная область оператора N. В силу (X.54), $\hat{A} \restriction C \supset \hat{A} \restriction D(N)$, так что $\hat{A}$ самосопряжен в существенном на C и пункт (c) тоже выполнен. Таким образом, нужно только доказать самосопряженность в существенном $\hat{A} \restriction D(N)$. Обозначим $\hat{A} \restriction D(N)$ через B и предположим, что $\psi \in D(B^*)$. Тогда $\varphi \equiv N^{-1}\psi \in D(N) \subset D(B)$. Вычисляем:

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im}(\varphi, B^*\psi)| &= \frac{1}{2}|i(\varphi, B^*\psi) - i(B^*\psi, \varphi)| = \\ &= \frac{1}{2}|i(A\varphi, N\varphi) - i(N\varphi, A\varphi)| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|[N, A]\|_{+1,\,-1}\|\varphi\|_{+1}^2 \leqslant \\ &\leqslant \frac{c}{2}\|\varphi\|_{+1}^2 = \frac{c}{2}(\varphi, \psi), \end{aligned}$$

где $c \geqslant \|[N, A]\|_{+1,\,-1}$. Таким образом,

$$\operatorname{Im}(\varphi, (\pm B^* + ic)\psi) \geqslant \frac{c}{2}(\varphi, \psi),$$

поскольку (φ, ψ) вещественно и неотрицательно. Следовательно, если $(B^* \mp ic)\psi = 0$, то $(\varphi, \psi) = (\psi, N^{-1}\psi) \leqslant 0$. Поскольку N^{-1} положителен и его ядро тривиально, $\psi = 0$, т. е. $\operatorname{Ker}(B^* \pm ic) = \{0\}$, так что в силу основного критерия самосопряженности B самосопряжен в существенном. ∎

Важное приложение теоремы X.36 будет описано в конце этого раздела, а здесь мы рассмотрим несколько примеров, показывающих, что некоторые из условий теоремы нельзя ослабить.

Пример 1. Пусть $N = p^2 + q^2$ на $L^2(\mathbb{R}, dx)$, где $p = i^{-1}d/dx$, и пусть $A = p^2 + q^2 - q^4$. Применяя методы дополнения к § X.1, можно убедиться, что A не самосопряжен в существенном на множестве $C_0^\infty(\mathbb{R})$, представляющем собой существенную область оператора N. Но A и $[N, A]$ принадлежат $\mathscr{L}(\mathscr{H}_{+2}, \mathscr{H}_{-2})$. Таким образом, индекс 1 в $\mathscr{L}(\mathscr{H}_{+1}, \mathscr{H}_{-1})$ существен для теоремы X.36.

Действительно, если взять $N=(p^2+q^2)^k$, то $A\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_{+1},\mathscr{H}_{-1})$ при $k\geqslant 2$, тогда как $[N, A]\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_\alpha,\mathscr{H}_{-\alpha})$ с $\alpha=1+k^{-1}$ (при нецелых α надо обратиться к естественному обобщению $\mathscr{H}_\alpha$). Таким образом, ± 1 в условиях, налагаемых на $[N, A]$, нельзя изменить даже чуть-чуть.

Пример 2. Пусть $H=p^2+q^2+q^4$. Определим $q(t)=\exp[itH]q\exp[-itH]$. Поскольку q самосопряжен в существенном на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ и $q^2\leqslant cH^2$, имеем $D(q)\supset D(H)\supset\mathscr{S}(\mathbb{R})$ и q самосопряжен в существенном на $D(H)$. Далее, $\exp[itH]: D(H)\longrightarrow D(H)$, и потому $q(t)$ также самосопряжен в существенном на $D(H)$. Но что можно сказать о $q(t_1)+q(t_2)$? С помощью методов, изложенных до теоремы X.36, на этот вопрос ответить нелегко. Но $\pm q\leqslant H+1$, так что q и $q(t_1)+q(t_2)$ лежат в $\mathscr{L}(\mathscr{H}_{+1},\mathscr{H}_{-1})$, если выбрать $N=H$. Более того, $\pm i[H, q]=\pm 2p\leqslant 2H+2$, так что и $[H, q(t_1)+q(t_2)]$ лежит там же. В итоге теорема X.36 гарантирует самосопряженность в существенном $q(t_1)+q(t_2)$ на любой существенной области оператора H.

Пример 3. Пусть $h(\varphi,\psi)=(\varphi,(p^2+q^2+\delta(q))\psi)$ на $\mathscr{S}(\mathbb{R})\times\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Поскольку $\delta(q)$ в смысле форм p^2-ограничена, КЛМН-теорема гарантирует самосопряженность оператора H, отвечающего форме h. Пусть $p(t)=\exp[itH]p\exp[-itH]$. Так как $[p, H]$ ведет себя неважно, мы не можем исследовать $p(t_1)+p(t_2)$ методом примера 2. Однако определим для каждой вещественнозначной функции $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ форму

$$a_f(\varphi,\psi)=\int f(t)(\varphi, p(t)\psi)\,dt,\qquad \varphi,\psi\in Q(H).$$

Форма a_f симметрическая и

$$\begin{aligned}|a_f(\varphi,\varphi)|&\leqslant\int|f(t)|\,|(e^{-itH}\varphi,\ pe^{-itH}\varphi)|\,dt\leqslant\\&\leqslant\int|f(t)|\,|(e^{-itH}\varphi,\ cHe^{-itH}\varphi)|\,dt\leqslant\\&\leqslant ch(\varphi,\varphi)\int|f(t)|\,dt=c\|H^{1/2}\varphi\|^2\|f\|_1\end{aligned}$$

для всех $\varphi\in Q(H)$. Далее, для $\varphi\in D(H^2)$

$$\begin{aligned}a_f(H\varphi,\varphi)-a_f(\varphi,H\varphi)&=\int f(t)\{(H\varphi, p(t)\varphi)-(\varphi, p(t)H\varphi)\}\,dt=\\&=\int f(t)\frac{d}{dt}(\varphi, p(t)\varphi)\,dt=\\&=-\int f'(t)(\varphi, p(t)\varphi)\,dt.\end{aligned}$$

В итоге

$$\begin{aligned}|a_f(H\varphi,\varphi)-a_f(\varphi,H\varphi)|&\leqslant ch(\varphi,\varphi)\|f'\|_1\leqslant\\&\leqslant c\|H^{1/2}\varphi\|^2\|f'\|_1.\end{aligned}$$

По теореме X.36′ существует оператор A_f, отвечающий форме a_f, который самосопряжен на любой существенной области для H. *Формально* $A_f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,p(t)\,dt$. Конечно, сам по себе рассмотренный оператор не очень важен. Главное, что мы проиллюстрировали,— это возможность доказательства для вещественных $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ самосопряженности в существенном оператора

$$B_f = \int f(t)\, e^{itH} B e^{-itH}\, dt$$

при условии, что $\pm B \leqslant cH$. Именно такое положение возникает в квантовой теории поля (литературные ссылки см. в Замечаниях).

Пример 4. Существует связь между теоремой X.36 и одним методом решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Проиллюстрируем этот метод на примере, который легко поддается и другим подходам. Предположим, что мы хотим решить уравнение

$$\ddot{q}(t) = F(q(t)) \tag{X.55}$$

для вещественнозначной функции $q(t)$, где F удовлетворяет условию Липшица и неравенству

$$|F(x)| \leqslant |x|. \tag{X.56}$$

При заданных начальных условиях легко доказать локальную разрешимость (X.55) (см. § V.6). Для доказательства глобальной разрешимости положим $p = \dot{q}$, так что (X.55) перепишется в виде

$$\dot{q}(t) = p(t), \tag{X.57a}$$

$$\dot{p}(t) = F(q(t)). \tag{X.57b}$$

Пусть $N(p, q) = p^2 + q^2$ и $N(t) = N(p(t),\ q(t))$. Предположим, что для любого решения на $[0, t_0)$ мы умеем доказывать ограниченность $N(t)$ при $t \to t_0$. Тогда с помощью рассуждения о максимальном интервале, подобного применявшемуся при доказательстве предложения 1 в дополнении к § X.1, можно продолжить решение до момента $t_0 + \varepsilon$ и таким образом доказать существование глобального решения. Для доказательства ограниченности $N(t)$ покажем, что

$$\dot{N}(t) \leqslant 2N(t). \tag{X.58}$$

Действительно, в силу (X.57) и (X.56) имеем

$$\dot{N}(t) = 2pF(q) + 2pq \leqslant 4\,|pq| \leqslant 2N(t).$$

Интегрируя (X.58), получаем

$$N(t) \leqslant N(0)\, e^{ct}.$$

Дадим теперь формальное доказательство той части теоремы X.36, которая основана на этих классических идеях. Предположим, что A, N удовлетворяют условиям теоремы, и пусть $\tilde{A}$ — самосопряженное расширение A, если такое существует. Пусть $\psi \in Q(N)$ и

$$N(t) = (\psi,\ e^{it\tilde{A}} N e^{-it\tilde{A}}\psi).$$

Тогда *формально*

$$\dot{N}(t) = (e^{-it\tilde{A}}\psi,\ i[A, N]e^{-it\tilde{A}}\psi) \leqslant cN(t)$$

в силу ограниченности $i[A, N]$. Это означает, что $\exp[-it\tilde{A}]$ оставляет область $Q(N)$ инвариантной, а этот факт является отправной точкой доказательства самосопряженности в теореме VIII.10. Изложенные формальные соображения можно превратить в доказательство несколько ослабленной формы теоремы X.36 (см. ссылки в Замечаниях).

При обсуждении эффекта Штарка нам понадобится новый вариант теоремы X.36. В старом варианте нам нужны были сведения о $D(N^{3/2})$ или $D(N^k)$ при $k \geqslant 3/2$. Если N — непростой оператор, то даже задача нахождения какой-нибудь существенной области оператора N^k при $k > 1$ может оказаться очень трудной. В таком случае полезна следующая теорема, условия которой выражены на операторном языке.

Теорема X.37. Пусть N — самосопряженный оператор и $N \geqslant I$. Пусть A — симметрический *оператор* с областью определения D, служащей существенной областью оператора N. Предположим, что

(i) Для некоторой постоянной c и всех $\varphi \in D$

$$\|A\varphi\| \leqslant c\|N\varphi\|. \tag{X.59}$$

(ii) Для некоторой постоянной d и всех $\varphi \in D$

$$|(A\varphi, N\varphi) - (N\varphi, A\varphi)| \leqslant d\|N^{1/2}\varphi\|^2. \tag{X.60}$$

Тогда A самосопряжен в существенном на D и его замыкание самосопряжено в существенном на любой другой существенной области N.

Доказательство. В силу (i) область определения замыкания A содержит $D(N)$ и условие (ii) распространяется на все $\varphi \in D(N)$. Повторяя доказательство теоремы X.36, легко показать, что $\operatorname{Ker}(A^* \pm id) = \{0\}$, и таким образом доказать самосопряженность в существенном оператора A. ∎

Укажем на один досадный недостаток теоремы X.37. Дело в том, что нам пришлось предположить операторную N-ограниченность A, а не его N-ограниченность в смысле форм, как это было в теореме X.36. На первый взгляд это замечание удивляет, так как кажется, что в силу леммы 2 из условия (ii) теоремы X.37 и более слабого условия

(i′) Для некоторой постоянной c и всех $\varphi \in D$

$$|(\varphi, A\varphi)| \leqslant c(\varphi, N\varphi)$$

должно следовать (i). Ошибка здесь в том, что (ii) несколько отличается от условия (ii) теоремы X.36′. Для того чтобы выполнялось последнее условие, нужно было бы требовать справедливости (X.60) на множестве φ, включающем существенную область для $N^{3/2}$. Но a priori пересечение D и $D(N^{3/2})$ может быть нулевым. Обидно еще то, что (i) позволяет распространить (ii) на все φ из $D(N)$ и, следовательно, из $D(N^{3/2})$, но (i′) такой возможности не дает, так что использовать одновременно (i′) и (ii) нельзя. В любом случае при доказательстве следующей теоремы нам потребуются специальные соображения в пользу справедливости (X.59).

Теорема X.38 (Фари—Лавин). Пусть V и W—вещественнозначные измеримые функции на $\mathbb{R}^n$, причем

$$V(x) \geqslant -cx^2 - d,$$

$V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что

(i) Существует плотная область $D \subset D(-\Delta) \cap D(V) \cap D(W)$, левоинвариантная относительно действия x_j и $-i\,\partial/\partial x_j$, так что $-\Delta + V + W + 2cx^2$ самосопряжен в существенном на D.

(ii) Оператор $-a\Delta + W$ при некотором $a < 1$ ограничен снизу на D.

Тогда $-\Delta + V + W$ самосопряжен в существенном на D.

Доказательство. В силу (ii) и условий, наложенных на V, можно выбрать такое b, что

$$N = -\Delta + V + W + 2cx^2 + b \geqslant 1.$$

Пусть $A = -\Delta + V + W$. Проверим (X.59) и (X.60) на D. В смысле квадратичных форм имеем на D

$$N^2 = (A + b + 2cx^2)^2 = (A + b)^2 + 4c^2x^4 + 2c(Ax^2 + x^2A) + 4bcx^2 =$$
$$= (A + b)^2 + 4c^2x^4 + 4c\sum_{j=1}^{n} x_j(A + b)x_j + 2c\sum_j [x_j, [x_j, A]] =$$
$$= (A + b)^2 + 4c\sum_{j=1}^{n} x_j(A + b + cx^2)x_j - 4cn.$$

Меняя, если нужно, b, можно добиться, чтобы $A+b+cx^2$ было $\geqslant 0$, так чтобы

$$\|(A+b)\psi\|^2 \leqslant \|N\psi\|^2 + 4cn\|\psi\|^2,$$

откуда следует (X.59).

Аналогично, в смысле (X.60), имеем

$$\pm i[A, N] = \pm i[A-N, N] = \pm i[-2cx^2, \Delta] = \\ = \mp i4c(\mathbf{x}\cdot\nabla + \nabla\cdot\mathbf{x}) \leqslant 4c(-\Delta + x^2) \leqslant dN,$$

где мы воспользовались неравенствами

$$-\Delta + x^2 \mp i(\mathbf{x}\cdot\nabla + \nabla\cdot\mathbf{x}) = (i\nabla \mp \mathbf{x})^2 \geqslant 0$$

и

$$N = (-a\Delta + W) + (V + cx^2) + (1-a)(-\Delta) + cx^2 \geqslant \\ \geqslant e(-\Delta + x^2) - f.$$

Итак, в силу теоремы X.37, A самосопряжен в существенном на D. ∎

Следствие. Пусть заданы вещественнозначные измеримые функции V_1 и V_2, удовлетворяющие условиям

(i) $V_2 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, где $p \geqslant 2$ при $n \leqslant 3$, $p > 2$ при $n = 4$ и $p \geqslant n/2$ при $n \geqslant 5$.

(ii) $V_1 \geqslant -cx^2 - d$ для некоторых c и d; $V_1 \in L^2_{loc}$.

Тогда $-\Delta + V_1 + V_2$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пусть $V = -cx^2 - d$. и $W = V_1 + V_2 + cx^2 + d$. Тогда в силу теоремы X.29 оператор $-\Delta + W + V + 2cx^2$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, ибо V_2 ограничен относительно $-\Delta$, а $V_1 + 2cx^2 + d$ положителен. Далее, $-a\Delta + W$ ограничен снизу для любого $a > 0$. Следовательно, по теореме X.38, $-\Delta + W + V$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. ∎

Аналогично, объединяя теоремы X.30 и X.38 с леммой о принципе неопределенности, получаем такое

Следствие. Если $V(\mathbf{r}) \geqslant n(4-n)r^{-2}/4 - cr^2 - d$, то $-\Delta + V$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Пример 5 (эффект Штарка). Гамильтониан атома в постоянном электрическом поле $\mathbb{E}_0$ имеет вид

$$H = -\sum_{n=1}^{N} (2m)^{-1}\Delta_n - (2M)^{-1}\Delta_0 - \sum_{n=1}^{N} \frac{Ne^2}{|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0|} + \\ + \frac{1}{2}\sum_{n \neq m} \frac{e^2}{|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m|} + e\mathbb{E}_0 \cdot \left(\mathbf{x}_0 - \sum_{n=1}^{N} \mathbf{x}_n\right).$$

В силу первого следствия H самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^{3N+3})$.

С помощью развитых выше методов можно рассматривать электрическое и магнитное поля одновременно (см. задачу 38).

X.6. Аналитические векторы

Как утверждает теорема Стоуна, между самосопряженными операторами и непрерывными однопараметрическими группами существует взаимно однозначное соответствие. Это наводит на мысль, что в случае, когда симметрический оператор A однозначно «определяет» группу, он должен быть самосопряжен в существенном. Действительно, теорема VIII.10 показывает, что если $U(t)$ — непрерывная однопараметрическая унитарная группа, $U(t)\colon D(A)\to D(A)$ и $U'(t)\varphi = iAU(t)\varphi$ для $\varphi\in D(A)$, то A самосопряжен в существенном и порождает $U(t)$. Найдем условия на симметрический оператор, позволяющие построить такую группу. Наиболее естественный подход к построению $U(t)$ — попытаться придать смысл степенному ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(itA)^n/n!$ на плотном множестве векторов. Отметим, что это наверняка можно сделать, если A самосопряжен. Действительно, пусть $\{E_\Omega\}$ — семейство спектральных проекторов оператора A. Тогда на каждом подпространстве $E_{[-M,M]}$ оператор A ограничен и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(itA)^n/n!$ сходится по норме к $\exp[itA]$. В частности, для любого $\varphi\in\bigcup\limits_{M\geqslant 0}E_{[-M,M]}$

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(itA)^n}{n!}\varphi\longrightarrow\exp[itA]\varphi.$$

Поскольку $\bigcup\limits_{M\geqslant 0}E_{[-M,M]}$ плотно в $\mathcal{H}$, мы видим, что группа, порождаемая самосопряженным оператором A, полностью определяется действием ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(itA)^n/n!$ на плотном множестве. Мы докажем обратное, а именно: если A — симметрический оператор, обладающий плотным множеством векторов, к которым можно применить ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(itA)^n/n!$, то A самосопряжен в существенном. Сначала несколько определений.

Определение. Пусть A — оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Множество $C^\infty(A)\equiv\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}D(A^n)$ называется **множеством**

C^∞**-векторов оператора** A. Вектор $\varphi \in C^\infty(A)$ называется **аналитическим вектором оператора** A, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n\varphi\|}{n!} t^n < \infty$$

для некоторого $t > 0$.

Если A самосопряжен, то $C^\infty(A)$ плотно в $D(A)$. Однако в общем случае симметрический оператор может совсем не иметь C^∞-векторов, даже если A самосопряжен в существенном. Призываем читателя помнить, что аналитические векторы и векторы однозначности (вводимые ниже) должны быть C^∞-векторами оператора A. Вектор $\psi \in D(A)$ может быть аналитическим вектором расширения A, но не быть таковым для самого A, поскольку он может не лежать в $C^\infty(A)$.

Определение. Предположим, что A — симметрический оператор. Для каждого $\varphi \in C^\infty(A)$ определим множество

$$D_\varphi = \left\{ \sum_{n=0}^{N} \alpha_n A^n \varphi \mid N = 1, 2, \ldots, \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_N \rangle \text{ произвольны} \right\}.$$

Пусть $\mathcal{H}_\varphi = \bar{D}_\varphi$; введем $A_\varphi : D_\varphi \to D_\varphi$ формулой $A_\varphi\left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n A^n \varphi\right) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n A^{n+1} \varphi$. Вектор φ называется **вектором однозначности**, если A_φ самосопряжен в существенном на D_φ (как оператор в $\mathcal{H}_\varphi$).

Наконец, подмножество S пространства $\mathcal{H}$ называется **тотальным**, если множество конечных линейных комбинаций его элементов плотно в $\mathcal{H}$.

Лемма (Нуссбаум). Пусть A — симметрический оператор и $D(A)$ содержит тотальное множество векторов однозначности. Тогда A самосопряжен в существенном.

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{Ran}(A \pm i)$ плотно в $\mathcal{H}$. В силу основного критерия самосопряженности отсюда будет следовать самосопряженность в существенном оператора A. Пусть заданы $\psi \in \mathcal{H}$ и $\varepsilon > 0$, и пусть S — множество векторов однозначности. Поскольку S тотально, можно найти такие $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_N \rangle$ и $\langle \psi_1, \ldots, \psi_N \rangle$ с $\psi_n \in S$, что $\left\| \psi - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \psi_n \right\| \leqslant \varepsilon/2$. Так как ψ_n — вектор однозначности, в D_{ψ_n} существует φ_n, для которого

$$\|\psi_n - (A+i)\varphi_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_{n=1}^{N} |\alpha_n| \right)^{-1}.$$

Полагая $\varphi = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \varphi_n$, получим $\varphi \in D(A)$ и $\|\psi - (A+i)\varphi\| \leqslant \varepsilon$. В итоге $\operatorname{Ran}(A+i)$ плотно. Доказательство для $(A-i)$ аналогично. ∎

Теорема X.39 (теорема Нельсона об аналитических векторах). Пусть A — симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Если $D(A)$ содержит тотальное множество аналитических векторов, то A самосопряжен в существенном.

Доказательство. В силу леммы Нуссбаума, достаточно доказать, что каждый аналитический вектор ψ — это вектор однозначности. Сначала заметим, что, в силу теоремы X.3, A_ψ всегда допускает самосопряженные расширения, так как оператор

$$C\colon \sum_{n=0}^{N} \alpha_n A^n \psi \mapsto \sum_{n=0}^{N} \bar{\alpha}_n A^n \psi$$

продолжается до сопряжения на $\mathscr{H}_\psi$, коммутирующего с A_ψ. Пусть B — некоторое самосопряженное расширение A_ψ в $\mathscr{H}_\psi$ и μ — спектральная мера для B, ассоциированная с вектором ψ. Поскольку ψ — аналитический вектор для A, имеем $\sum_{n=0}^{\infty} (\|A^n\psi\|/n!)\, t^n < \infty$ для некоторого $t > 0$. Пусть $0 < s < t$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^n \, d\mu \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \, d\mu \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\mu \right)^{1/2} =$$

$$= \|\psi\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \|A^n \psi\| < \infty.$$

По теореме Фубини

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} |x|^n \, d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s|x|} \, d\mu < \infty.$$

Следовательно, функция $(\psi, \exp[itB]\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx)\, d\mu$ имеет аналитическое продолжение $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(izx)\, d\mu$ в область $|\operatorname{Im} z| < t$. Благодаря равенству

$$\left[\left(\frac{d}{dz} \right)^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} \, d\mu \right]_{z=0} = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k \, d\mu = (\psi,\ (iA)^k \psi)$$

получаем

$$(\psi, e^{isB}\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(is)^n}{n!} (\psi, A^n\psi)$$

при $|s| < t$. Следовательно, при $|s| < t$ (и потому при всех s) функция $(\psi, \exp[isB]\psi)$ полностью определяется числами $(\psi, A^n\psi)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Такое же доказательство показывает, что $(\psi_1, \exp[isB]\psi_2)$ определяется числами $(\psi_1, A^n\psi_2)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, при любых $\psi_1, \psi_2 \in D_\psi$. Поскольку D_ψ плотна в $\mathscr{H}_\psi$, а группа $\exp[isB]$ унитарна, $\exp[isB]$ полностью определяется числами $(\psi_1, A^n\psi_2)$ при $\psi_1, \psi_2 \in D_\psi$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$. Таким образом, все самосопряженные расширения оператора A_ψ порождают одну и ту же унитарную группу, и, следовательно, по теореме Стоуна A_ψ обладает не более чем одним самосопряженным расширением. Но, как уже было отмечено, A_ψ обладает по крайней мере одним самосопряженным расширением. Значит, A_ψ самосопряжен в существенном и ψ — вектор однозначности. ∎

Следствие 1. Замкнутый симметрический оператор A самосопряжен тогда и только тогда, когда $D(A)$ содержит плотное множество аналитических векторов.

Утверждение следствия 1 становится неверным, если «самосопряженность» заменить «самосопряженностью в существенном». Самосопряженный оператор A может быть самосопряжен в существенном на области $D \subset D(A)$, а D может даже не содержать ни одного C^∞-вектора. В задаче 39 от читателя требуется построить соответствующий пример.

Следствие 2. Пусть A — симметрический оператор и D — плотное линейное множество, содержащееся в $D(A)$. Тогда если D содержит плотное множество аналитических векторов и *инвариантно относительно действия* A, то A самосопряжен в существенном на D.

Доказательство. Поскольку D инвариантно относительно A, каждый аналитический вектор оператора A, лежащий в D, является аналитическим вектором сужения $A \restriction D$. Таким образом, по теореме X.39, $A \restriction D$ самосопряжен в существенном. ∎

Причина, по которой в следствии 2 требуется инвариантность, состоит в том, что вектор $\psi \in D$, чтобы быть аналитическим для $A \restriction D$, должен прежде всего быть C^∞-вектором для $A \restriction D$. Для этого требуется, чтобы $A^n\psi \in D$ при всех n. Ниже дан простой пример, показывающий, почему нужно быть очень внимательным к этому условию инвариантности.

Пример 1. Пусть $\mathcal{H}=l_2$ и A — самосопряженный оператор, для которого векторы $\delta_n=\langle 0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\rangle$ суть собственные векторы, удовлетворяющие уравнению $A\delta_n=n\delta_n$. В силу предложения 1 § VIII.3, $D(A)=\{\{a_n\}\mid\{na_n\}\in l_2\}$. Пусть теперь $D=\left\{\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\delta_n \,\middle|\, \sum_n \alpha_n=0,\ N \text{ произвольно, но конечно}\right\}$. Прежде всего ясно, что каждый вектор из D аналитический для A, ибо $\left\|A^k\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\delta_n\right\|^2\leqslant N^{2k}\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2$. Далее, D плотно в l_2. Действительно, предположим, что $\{a_n\}$ — последовательность из l_2, в которой все члены после M-го равны нулю. Тогда вектор

$$\varphi=\Bigl\langle a_1, \ldots, a_M, \underbrace{\Bigl(-\sum_{i=1}^{M}a_i\Bigr)\Big/k, \ldots, \Bigl(-\sum_{i=1}^{M}a_i\Bigr)\Big/k}_{k \text{ раз}}, 0, \ldots\Bigr\rangle$$

лежит в D и

$$\|\{a_n\}-\varphi\|_{l_2}\leqslant\left|\sum_{i=1}^{M}a_i\right|k^{-1/2}.$$

Таким образом, $\{a_n\}$ можно приблизить элементами из D, а поскольку множество выбранных $\{a_n\}$ плотно в l_2, таково же и D.

Итак, D — плотное множество аналитических векторов оператора A, но $A\restriction D$ *не* самосопряжен в существенном. Действительно, пусть $\psi=\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда $(A\varphi, \psi)=0$ для всех $\varphi\in D$. Поэтому $\psi\in D((A\restriction D)^*)$ и $(A\restriction D)^*\psi=0$. Это показывает, что $D((A\restriction D)^*)$ *строго* содержит $D(A)$, так что A не самосопряжен в существенном на D. Отметим, что A не переводит D в себя.

Следующие примеры иллюстрируют простые способы применения аналитических векторов. Некоторые применения аналитических векторов в квантовой теории поля описываются в следующем разделе.

Пример 2. Пусть A и $A^\dagger$ — отображения $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ в себя:

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{d}{dx}\right), \qquad A^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{d}{dx}\right).$$

Положим $N=A^\dagger A$. Пусть $\phi_0=\pi^{-1/4}\exp(-x^2/2)$ и $\phi_n=(n!)^{-1/2}(A^\dagger)^n\phi_0$. Функции ϕ_n — это функции Эрмита, образующие ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R})$ (см. задачи 6 и 7 гл. IX). Оператор N обладает свойством $N\phi_n=n\phi_n$, а A и $A^\dagger$ удовлетворяют коммутационному соотношению (на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$)

$$AA^\dagger-A^\dagger A=I.$$

Легко вывести, что $A^{\dagger}\phi_n = \sqrt{n+1}\,\phi_{n+1}$ и $A\phi_n = \sqrt{n}\,\phi_{n-1}$, если $n \geqslant 1$, и $A\phi_0 = 0$. Поэтому

$$\|\underbrace{A^{\#}\ldots A^{\#}}_{k\ \text{раз}}\phi_n\| \leqslant (n+1)^{1/2}\ldots(n+k)^{1/2} \leqslant [(n+k)!]^{1/2}, \qquad \text{(X.61)}$$

где $A^{\#}$ обозначает либо A, либо $A^{\dagger}$. Поскольку $x^k = 2^{-k/2}(A+A^{\dagger})^k$, из (X.61) видно, что

$$\|x^k\phi_n\| \leqslant 2^{k/2}[(n+k)!]^{1/2}$$

и, следовательно, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|x^k\phi_n\|}{k!}t^k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k/2}[(n+k)!]^{1/2}}{k!}t^k < \infty$$

для всех t, так что каждая функция ϕ_n — это аналитический вектор оператора x. Поскольку конечные линейные комбинации функций Эрмита образуют плотное множество, инвариантное относительно x, заключаем, что x самосопряжен в существенном на любом линейном подпространстве в $L^2(\mathbb{R})$, содержащемся в $\{\varphi \mid \|x\varphi\|_2 < \infty\}$ и содержащем функции Эрмита. Аналогичное утверждение справедливо и для $i\,d/dx$.

Пример 3. Пусть A_n — самосопряженный оператор на $\mathscr{H}_n$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Предположим, что $P(x_1, \ldots, x_N)$ — полином с вещественными коэффициентами максимальной степени n_k по каждой переменной x_k. Пусть D_k^{e} — область самосопряженности в существенном оператора A_k. При таких условиях в теореме VIII.33 было доказано, что оператор $P(A_1, \ldots, A_N)$ в $\mathscr{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_N$ самосопряжен в существенном на

$$D^{\mathrm{e}} = \bigotimes_{n=1}^{N} D_n^{\mathrm{e}}.$$

Доказательство, данное в теореме VIII.33, основывалось на спектральной теореме. Дадим здесь другое доказательство, использующее аналитические векторы. Ясно, что $P(A_1, \ldots, A_N)$ симметричен на $D^{\mathrm{e}} = \bigotimes_{n=1}^{N} D_n^{\mathrm{e}}$. Далее, так как $\overline{A_n \restriction D_n^{\mathrm{e}}} = A_n$, замыкание $P(A_1, \ldots, A_N)$ на D^{e} совпадает с замыканием $P(A_1, \ldots, A_N)$ на $D = \bigotimes_{n=1}^{N} D(A_n)$. Следовательно, достаточно доказать, что $P(A_1, \ldots, A_N)$ самосопряжен в существенном на D. Пусть E_{Ω}^{n} — проекторнозначная мера для A_n, и пусть M_n (при $n = 1, \ldots, N$) — неотрицательные числа. Пусть $\varphi_n \in E^n_{[-M_n, M_n]}\mathscr{H}_n$; тогда $\|A_n\varphi_n\| \leqslant M_n\|\varphi_n\|$, и если $\varphi = \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_N$, то после короткого вычисления получим

$$\|[P(A_1, \ldots, A_N)]^k \varphi\| \leqslant (\tilde{P}(M_1, \ldots, M_N))^k \|\varphi\|,$$

где $\tilde{P}$ — тот же полином, что и P, но с коэффициентами, замененными их абсолютными значениями. Это дает

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|P(A_1, \ldots, A_N)^k \varphi\|}{k!} t^k < \infty$$

для всех t, так что φ — аналитический вектор для $P(A_1, \ldots, A_N)$. Множество конечных линейных комбинаций таких векторов инвариантно относительно $P(A_1, \ldots, A_N)$ и плотно в D. По теореме Нельсона $P(A_1, \ldots, A_N)$ самосопряжен в существенном на D, а потому и на D^e (как уже отмечалось выше).

Пример 4 (проблема моментов Гамбургера — единственность). В примере 3 из § X.1 была доказана теорема, дающая необходимое и достаточное условие, при котором последовательность вещественных чисел a_n является набором моментов (т. е. $a_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\rho(x)$) некоторой положительной меры ρ. Предположим, в обозначениях этого примера, что существуют такие постоянные C и D, что $|a_n| \leqslant CD^n n!$ для всех n. Поскольку $\hat{A}: P/Q \to P/Q$, каждый вектор в P/Q — это C^∞-вектор для $\hat{A}$. Оценки на $\{a_n\}$ позволяют немедленно заключить, что P/Q — плотное множество аналитических векторов для $\hat{A}$. В силу теоремы X.39, $\hat{A}$ самосопряжен в существенном на P/Q, и потому $\hat{A} = \tilde{A}$.

Следовательно, $\hat{A}$, а значит, и мера ρ однозначно определяются последовательностью $\{a_n\}$. Итак, мы доказали, что в случае, когда $|a_n| \leqslant CD^n n!$, проблема моментов Гамбургера имеет единственное решение.

Различные обобщения теоремы Нельсона обсуждаются в Замечаниях. В случае полуограниченных операторов читатель, применяя аналогичные методы, может получить (задача 42) следующее обобщение.

Определение. Пусть A — оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Вектор $\varphi \in C^\infty(A)$ называется **полуаналитическим вектором** оператора A, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n \varphi\|}{(2n)!} t^n < \infty$$

для некоторого $t > 0$.

Теорема X.40. Пусть A — *полуограниченный* симметрический оператор. Если $D(A)$ содержит тотальное множество полуаналитических векторов, то A самосопряжен в существенном.

Теорема X.40 имеет два следствия, подобных следствиям теоремы X.39.

Пример 5 (самосопряженность в существенном оператора $H=(-d^2/dx^2+x^2)/2+x^4/4$; третье доказательство). В обозначениях примера 2, $H=A^\dagger A+(A^\dagger+A)^4$. Пусть ϕ_n есть n-я функция Эрмита. Выражение для H^k содержит 17^k членов, каждый из которых есть произведение не более чем $4k$ операторов $A^\dagger$ или A. Поэтому с помощью (X.61) получаем

$$\|H^k\phi_n\|\leqslant 17^k(n+1)^{1/2}\ldots(n+4k)^{1/2}\leqslant 17^k 2^{2k}(2k)^{2k}c_n.$$

Таким образом, функции Эрмита образуют тотальное множество полуаналитических векторов оператора H, рассматриваемого на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Следовательно, в силу теоремы X.40, H самосопряжен в существенном на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, ибо ясно, что он неотрицателен.

Пример 6. С помощью теоремы X.40, подобно тому как это сделано в примере 4, можно доказать, что проблема моментов Стильтьеса имеет единственное решение, когда $|a_n|\leqslant CD^n(2n)!$ при некоторых постоянных C и D (см. задачу 25).

X.7. Свободные квантованные поля

Квантование — это мистика, но вторичное квантование — это функтор.

Э. НЕЛЬСОН

В § IX.8 были описаны аксиомы Вайтмана для одного скалярного квантованного поля. В этом разделе мы продолжим обсуждение квантовой теории поля. Сначала мы введем абстрактное свободное поле и используем его для явного построения семейства примеров, в которых будут выполняться аксиомы Вайтмана; точнее говоря, для каждого $m>0$ мы построим свободное скалярное поле массы m. При разных m эти теории неэквивалентны в том смысле, что не существует унитарного отображения из гильбертова пространства одной теории в гильбертово пространство другой, полностью сохраняющего структуры полевой теории, т. е. вакуум, поля и т. д. Эти теории неэквивалентны и в более сильном смысле: поля при разных m, взятые в нулевой момент времени, реализуют различные представления канонических коммутационных соотношений (см. дополнение к этому разделу). Помимо доказательства того, что выполнены аксиомы, мы докажем еще и самосопряженность этих полей. Главным инструментом последнего доказательства будет теорема об аналитических векторах.

Как ясно уже из самого названия, теории свободных полей описывают невзаимодействующие частицы. Тем не менее они важны, поскольку демонстрируют непротиворечивость аксиом Вайтмана и поскольку они служат основой наиболее естественного способа построения теорий с взаимодействием — теории возмущений. Во второй части этого раздела мы начнем обсуждение простейшей теории с взаимодействием, а именно φ^4-самодействия в двумерном пространстве-времени. Мы введем пространственно обрезанный гамильтониан $H(g)$ и докажем его симметричность. Наконец, мы введем Q-пространство — новую реализацию пространства Фока, которое используем в § X.9, где докажем самосопряженность $H(g)$. Мы *не* доведем дело построения теорий взаимодействующих полей до того уровня, когда надо снимать пространственное обрезание и проверять аксиомы Вайтмана, хотя это уже сделано для целого ряда моделей; см. ссылки в Замечаниях.

Пусть $\mathscr{H}$ — комплексное гильбертово пространство и $\mathscr{F}(\mathscr{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}^{(n)}$ (где $\mathscr{H}^{(n)} = \bigotimes^{n} \mathscr{H}$) — пространство Фока над $\mathscr{H}$, определенное в § II.4. Наша цель — определить абстрактное свободное поле на $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$ — бозонном подпространстве $\mathscr{F}(\mathscr{H})$. Для этого нам нужно ввести ряд новых семейств операторов и договориться о новой терминологии. Пусть $f \in \mathscr{H}$ задан. Для векторов из $\mathscr{H}^{(n)}$ вида $\eta = \psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n$ определим отображение $b^-(f): \mathscr{H}^{(n)} \to \mathscr{H}^{(n-1)}$ формулой

$$b^-(f)\,\eta = (f, \psi_1)\,(\psi_2 \otimes \ldots \otimes \psi_n).$$

По линейности $b^-(f)$ распространяется на конечные линейные комбинации таких η. Это расширение корректно определено и $\|b^-(f)\,\eta\| \leqslant \|f\|\,\|\eta\|$. Следовательно, $b^-(f)$ расширяется до ограниченного (с нормой, равной $\|f\|$) отображения из $\mathscr{H}^{(n)}$ в $\mathscr{H}^{(n-1)}$. Поскольку это справедливо для всех n (кроме $n = 0$, для которого мы определяем $b^-(f)$ как отображение $\mathscr{H}^{(0)}$ в 0), $b^-(f)$ представляет собой ограниченный оператор из $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ в $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ с нормой, равной $\|f\|$. Легко проверить, что $b^+(f) \equiv (b^-(f))^*$ переводит каждое $\mathscr{H}^{(n)}$ в $\mathscr{H}^{(n+1)}$, действуя на векторы-произведения по правилу

$$b^+(f)\,(\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n) = f \otimes \psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n.$$

Отметим, что отображение $f \mapsto b^+(f)$ линейно, а $f \mapsto b^-(f)$ сопряженно-линейно.

Пусть S_n — операторы симметризации, введенные в § II.4. Тогда $S = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n$ — проектор на симметричное пространство Фока $\mathscr{F}_s(\mathscr{H}) \equiv \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n \mathscr{H}^{(n)}$. Введем обозначение $S_n \mathscr{H}^{(n)} \equiv \mathscr{H}_s^{(n)}$ и будем называть $\mathscr{H}_s^{(n)}$ **n-частичным подпространством** пространства $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$.

Отметим, что $b^-(f)$ переводит $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ в себя, а $b^+(f)$ — нет. Вектор $\psi=\{\psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}\in\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$, у которого $\psi^{(n)}=0$ для всех, кроме конечного числа n, называется **конечночастичным вектором.** Множество всех таких векторов обозначим через F_0. Вектор $\Omega_0=\langle 1, 0, 0, \ldots\rangle$ играет специальную роль и называется **вакуумным вектором** (или просто **вакуумом**).

Пусть A — самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$ и D — область, где этот оператор самосопряжен в существенном. Пусть $D_A=\{\psi\in F_0 \mid \psi^{(n)}\in\bigotimes^n D$ для каждого $n\}$. Определим $d\Gamma(A)$ на $D_A\cap\mathcal{H}_s^{(n)}$ выражением

$$A\otimes I\otimes\ldots\otimes I+I\otimes A\otimes\ldots\otimes I+\ldots+I\otimes\ldots\otimes I\otimes A.$$

В § VIII.10 было доказано, что $d\Gamma(A)$ самосопряжен в существенном на D_A; оператор $d\Gamma(A)$ называется **вторичным квантованием** оператора A. Например, пусть $A=I$. Тогда его вторичное квантование $N=d\Gamma(I)$ самосопряжено в существенном на F_0 и $N\psi=n\psi$ для любого $\psi\in\mathcal{H}_s^{(n)}$. Оператор N называется **оператором числа частиц**. Если U — унитарный оператор на $\mathcal{H}$, определим $\Gamma(U)$ как унитарный оператор на $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$, равный $\bigotimes^n U$ при сужении на $\mathcal{H}_s^{(n)}$ для $n>0$ и единице на $\mathcal{H}_s^{(0)}$. Если $\exp(itA)$ — непрерывная унитарная группа на $\mathcal{H}$, то $\Gamma(\exp(itA))$ — группа, порождаемая оператором $d\Gamma(A)$, т. е. $\Gamma(\exp(itA))=\exp(it\,d\Gamma(A))$.

Теперь определим на F_0 **оператор уничтожения**

$$a^-(f)=\sqrt{N+1}\,b^-(f). \qquad \text{(X.62)}$$

Этот оператор называется так по той причине, что он переводит каждое $(n+1)$-частичное подпространство в n-частичное подпространство. Для любых ψ и η из F_0

$$\left(\sqrt{N+1}\,b^-(f)\,\psi,\ \eta\right)=\left(\psi,\ Sb^+(f)\sqrt{N+1}\,\eta\right).$$

Отсюда следует, что

$$(a^-(f))^*\restriction F_0=Sb^+(f)\sqrt{N+1}. \qquad \text{(X.63)}$$

Оператор $(a^-(f))^*$ называется **оператором рождения**. Оба оператора, и $a^-(f)$, и $(a^-(f))^*\restriction F_0$, замыкаемы; мы будем обозначать их замыкания по-прежнему через $a^-(f)$ и $a^-(f)^*$.

Пример 1. Если $\mathcal{H}=L^2(M, d\mu)$, то, как мы уже видели в § II.4,

$$\bigotimes^n L^2(M, d\mu)=L^2(M\times M\times\ldots\times M,\ d\mu\otimes\ldots\otimes d\mu)$$

и

$$S\left(\bigotimes^n L^2(M, d\mu)\right)=L_s^2(M\times\ldots\times M,\ d\mu\otimes\ldots\otimes d\mu),$$

где L_s^2 — множество функций из L^2, инвариантных относительно перестановок аргументов. Операторы $a^-(f)$ и $a^-(f)^*$ действуют следующим образом:

$$(a^-(f)\psi)^{(n)}(m_1, \ldots, m_n) = \\ = \sqrt{n+1}\int_M \bar{f}(m)\psi^{(n+1)}(m, m_1, \ldots, m_n)\,d\mu(m),$$

$$(a^-(f)^*\psi)^{(n)}(m_1, \ldots, m_n) = \\ = (\sqrt{n})^{-1}\sum_{i=1}^{n} f(m_i)\psi^{(n-1)}(m_1, \ldots, \hat{m}_i, \ldots, m_n),$$

где $\hat{m}_i$ означает, что m_i не содержится среди аргументов функции. Если A действует в $L^2(M, d\mu)$ как оператор умножения на вещественнозначную функцию $\omega(m)$, то

$$(d\Gamma(A)\psi)^{(n)}(m_1, \ldots, m_n) = \left(\sum_{i=1}^{n}\omega(m_i)\right)\psi^{(n)}(m_1, \ldots, m_n).$$

Из (X.63) следует, что **полевой оператор Сигала** $\Phi_S(f)$, определенный на F_0 равенством

$$\Phi_S(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^-(f) + a^-(f)^*),$$

симметрический. На самом деле, как мы вскоре увидим, $\Phi_S(f)$ самосопряжен в существенном. Отображение из $\mathcal{H}$ во множество самосопряженных операторов в $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$, задаваемое правилом

$$f \mapsto \Phi_S(f),$$

называется **сигаловым квантованием** над $\mathcal{H}$. Подчеркнем, что сигалово квантование есть вещественно (*но не комплексно*) линейное отображение, так как $f \mapsto a^-(f)$ сопряженно-линейно, а $f \mapsto a^-(f)^*$ линейно. В следующей теореме формулируются основные свойства сигалова квантования.

Теорема X.41. Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство и $\Phi_S(\cdot)$ — соответствующее сигалово квантование. Тогда

(a) (самосопряженность). Для каждого $f \in \mathcal{H}$ оператор $\Phi_S(f)$ самосопряжен в существенном на множестве F_0 конечночастичных векторов.

(b) (цикличность вакуума). Вектор Ω_0 входит в область определения всех конечных произведений $\Phi_S(f_1)\ldots\Phi_S(f_n)$, и множество $\{\Phi_S(f_1)\ldots\Phi_S(f_n)\Omega_0 \mid f_i$ и n произвольны$\}$ тотально в $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$.

(c) (коммутационные соотношения). Для каждого $\psi \in F_0$ и $f, g \in \mathcal{H}$

$$\Phi_S(f)\Phi_S(g)\psi - \Phi_S(g)\Phi_S(f)\psi = i\,\mathrm{Im}(f, g)_{\mathcal{H}}\,\psi. \qquad \text{(X.64)}$$

Далее, если через $W(f)$ обозначить унитарный оператор $\exp(i\Phi_S(f))$, то

$$W(f+g) = e^{-i\,\mathrm{Im}(f,g)/2}\,W(f)\,W(g). \qquad \text{(X.65)}$$

(d) (непрерывность). Если $f_n \to f$ в $\mathscr{H}$, то
$W(f_n)\psi \to W(f)\psi$ для всех $\psi \in \mathscr{F}_s(\mathscr{H})$,
$\Phi_S(f_n)\psi \to \Phi_S(f)\psi$ для всех $\psi \in F_0$.

(e) $\Gamma(U)$: $D(\overline{\Phi_S(f)}) \to D(\overline{\Phi_S(Uf)})$ для любого унитарного оператора U на $\mathscr{H}$, и для $\psi \in D(\overline{\Phi_S(Uf)})$

$$\Gamma(U)\overline{\Phi_S(f)}\Gamma(U)^{-1}\psi = \overline{\Phi_S(Uf)}\psi$$

при всех $f \in \mathscr{H}$.

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathscr{H}_s^{(n)}$. Поскольку $\Phi_S(f)$: $F_0 \to F_0$, то $\psi \in C^\infty(\Phi_S(f))$. Далее, из (X.62), (X.63) и того факта, что $\|b^-(f)\| = \|f\|$, следует неравенство

$$\|\underbrace{a^\#(f)\ \dots\ a^\#(f)}_{k\ \text{раз}}\psi\| \leqslant \sqrt{n+1}\ \dots\ \sqrt{n+k}\,\|f\|^k\|\psi\|,$$

где $a^\#(f)$ обозначает либо $a^-(f)$, либо $(a^-(f))^*$. Следовательно,

$$\|(\Phi_S(f))^k\psi\| \leqslant 2^{k/2}((n+k)!)^{1/2}\|f\|^k\|\psi\|.$$

В силу того, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} t^k 2^{k/2}((n+k)!)^{1/2}\|f\|^k/k! < \infty$ для всех t, вектор ψ аналитический для $\Phi_S(f)$, а поскольку F_0 плотно в $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$ и инвариантно относительно действия $\Phi_S(f)$, то $\Phi_S(f)$ самосопряжен в существенном на F_0 (теорема X.39).

Доказательство пункта (b) оставляем в качестве задачи 43.

Для доказательства (c) прежде всего проверяем, что если $\psi \in F_0$, то

$$a^-(f)a^-(g)^*\psi - a^-(g)^*a^-(f)\psi = (f, g)\psi. \qquad \text{(X.66)}$$

Отсюда сразу следует (X.64). Хотя (X.64) и (X.65) формально эквивалентны, но само по себе (X.64) не дает соотношения (X.65) (по поводу того, сколь ошибочными могут быть заключения, основанные на формальной эквивалентности, см. § VIII.5). Приведем краткий вывод равенства (X.65) с использованием специальных свойств векторов из F_0.

Пусть $\psi \in \mathscr{H}_s^{(p)}$. Тогда

$$\|\Phi_S(f)^n\Phi_S(g)^m\psi\| \leqslant 2^{(n+m)/2}\sqrt{p+1}\ \dots\ \sqrt{p+n+m}\,\|f\|^n\|g\|^m\|\psi\|,$$

откуда следует сходимость ряда $\sum\limits_{n,m}(\|\Phi_S(f)^n\Phi_S(g)^m\psi\|/n!m!)\,t^nt^m$ при всех t. Поскольку ψ — аналитический вектор для $\Phi_S(g)$, то $\sum\limits_m((i\Phi_S(g))^m/m!)\psi = \exp(i\Phi_S(g))\psi$. Далее, при каждом n вектор $\exp(i\Phi_S(g))\psi$ входит в область определения $(\overline{\Phi_S(f)})^n$, так как в нее входит

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{(i\Phi_S(g))^m}{m!} \psi$$

и $\Phi_S(f)^n \sum_{m=0}^{M} ((i\Phi_S(g))^m/m!)\psi$ сходится при $M \to \infty$. В итоге оценка

$$\sum_{n,\, m} \frac{\|(\Phi_S(f)^n \Phi_S(g)^m)\psi\|}{n!m!} t^n t^m < \infty$$

показывает, что $\exp(i\Phi_S(g))\psi$ — аналитический вектор для $\Phi_S(f)$, и потому $\exp(i\Phi_S(f))$ можно вычислять с помощью степенных рядов. Таким образом,

$$e^{i\Phi_S(f)} e^{i\Phi_S(g)} \psi = \sum_{n,\, m} \frac{(i\Phi_S(f))^n (i\Phi_S(g))^m}{n!m!} \psi.$$

Аналогично, ряд

$$e^{-it^2 \operatorname{Im}(f,\, g)/2} e^{it\Phi_S(f+g)} \psi =$$
$$= \sum_{n,\, m=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} \left[\left(-\frac{it^2}{2} \operatorname{Im}(f, g)\right)^m (it\Phi_S(f+g))^n\right] \psi$$

абсолютно сходится. Теперь прямое вычисление с учетом (X.64) позволяет доказать (X.65) путем почленного сравнения сходящихся степенных рядов.

Для доказательства (d) возьмем $\psi \in \mathcal{H}_s^{(k)}$ и предположим, что $f_n \xrightarrow{\mathcal{H}} f$. Тогда

$$\|\Phi_S(f_n)\psi - \Phi_S(f)\psi\| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{k+1}\, \|f_n - f\| \|\psi\|,$$

так что $\Phi_S(f_n)\psi \to \Phi_S(f)\psi$. Таким образом, $\Phi_S(f_n)$ сильно сходится к $\Phi_S(f)$ на F_0. Поскольку F_0 является существенной областью для всех $\Phi_S(f_n)$ и $\Phi_S(f)$, теоремы VIII.21 и VIII.25 гарантируют сходимость $\exp(it\Phi_S(f_n))\psi$ к $\exp(it\Phi_S(f))\psi$ для всех $\psi \in \mathcal{F}_s(\mathcal{H})$.

Для доказательства (e) возьмем $\eta \in \mathcal{H}^{(n)}$ в виде $\eta = \psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n$. Тогда

$$\begin{aligned} \Gamma(U)\, b^-(f)\, \Gamma(U)^{-1}\eta &= \Gamma(U)\, b^-(f)\, (U^{-1}\psi_1 \otimes \ldots \otimes U^{-1}\psi_n) = \\ &= \Gamma(U)\, (f, U^{-1}\psi_1)\, (U^{-1}\psi_2 \otimes \ldots \otimes U^{-1}\psi_n) = \\ &= (Uf, \psi_1)\, (\psi_2 \otimes \ldots \otimes \psi_n) = b^-(Uf)\, \eta. \end{aligned}$$

Поскольку множество конечных линейных комбинаций таких η плотно в $\mathcal{H}^{(n)}$ и норма $b^-(g)$ равна $\|g\|$, получаем, что $\Gamma(U)\, b^-(f)\, \Gamma(U)^{-1} = b^-(Uf)$. Но N и S коммутируют с $\Gamma(U)$, поэтому отсюда сразу следует, что $\Gamma(U)\, a^-(f)\, \Gamma(U)^{-1} = a^-(Uf)$ на F_0. Взяв сопряженные операторы и сузив их на F_0, получим еще одно равенство: $\Gamma(U)a^-(f)^*\Gamma(U)^{-1}=(a^-(Uf))^*$. В итоге $\Gamma(U)\Phi_S(f)\Gamma(U)^{-1}\psi=\Phi_S(Uf)\psi$ для $\psi\in F_0$. Учитывая самосопряженность в существенном на F_0 операторов в левой и правой частях этого равенства, заключаем, что

$$\Gamma(U)\overline{\Phi_S(f)}\Gamma(U)^{-1}=\overline{\Phi_S(Uf)}. \blacksquare$$

Будем далее использовать старый символ $\Phi_S(f)$ для обозначения замыкания оператора $\Phi_S(f)$.

Теперь можно воспользоваться сигаловым квантованием для определения свободного скалярного эрмитова поля массы m. Возьмем $\mathscr{H}=L^2(H_m, d\Omega_m)$, где H_m, $m\geqslant 0$,—массовый гиперболоид в $\mathbb{R}^4$, состоящий из тех точек $p\in\mathbb{R}^4$, для которых $p\cdot\tilde{p}-m^2=0$, $p_0>0$ и Ω_m—лоренц-инвариантная мера (определенная в § IX.8). Для каждого $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ определим Ef в $\mathscr{H}$ формулой $Ef=\sqrt{2\pi}\hat{f}\restriction H_m$, где (только на протяжении этого раздела) преобразование Фурье

$$\hat{f}(p)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{ip\cdot\tilde{x}}f(x)\,dx$$

определено в терминах лоренц-инвариантного внутреннего произведения $p\cdot\tilde{x}$. Причина появления дополнительного множителя $\sqrt{2\pi}$ в определении E и знака плюс в определении преобразования Фурье состоит в том, что при таких определениях величина $\sqrt{2\pi}\hat{f}$ для обобщенных функций f вида $f(x)=g(\mathbf{x})\,\delta(t)$ является обычным трехмерным преобразованием Фурье функции g. Если $\Phi_S(\cdot)$—сигалово квантование над $L^2(H_m, d\Omega_m)$, мы полагаем

$$\Phi_m(f)=\Phi_S(Ef) \tag{X.67a}$$

для каждой *вещественнозначной* $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$. Для произвольной функции $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ мы полагаем

$$\Phi_m(f)=\Phi_m(\operatorname{Re}f)+i\Phi_m(\operatorname{Im}f). \tag{X.67b}$$

Отображение $f\longmapsto\Phi_m(f)$ называется **свободным эрмитовым скалярным полем массы** m.

На $L^2(H_m, d\Omega_m)$ зададим еще следующее унитарное представление собственной группы Пуанкаре:

$$(U_m(a,\Lambda)\psi)(p)=e^{ip\cdot\tilde{a}}\psi(\Lambda^{-1}p), \tag{X.68}$$

где Λ обозначает как элемент абстрактной собственной группы Лоренца, так и соответствующий элемент в ее стандартном представлении на $\mathbb{R}^4$. Как и прежде, F_0 будет обозначать множество конечночастичных векторов.

Теорема X.42. Четверка

$$\langle\mathscr{F}_s(L^2(H_m, d\Omega_m)),\ \Gamma(U_m(\cdot,\cdot)),\ \Phi_m(\cdot),\ F_0\rangle$$

удовлетворяет аксиомам Вайтмана. Далее, для каждой функции $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$

$$\Phi_m((\Box^2 + m^2) f) = 0,$$

где $\Box^2 = \partial^2/\partial t^2 - \Delta$.

Доказательство. Поскольку мера $\Omega_m(\cdot)$ инвариантна относительно $\mathscr{L}_+^\uparrow$, представление $U_m(\cdot, \cdot)$ группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$ на $L^2(H_m, d\Omega_m)$ непрерывно и унитарно. По определению, $\Gamma(U_m)$ есть сильно непрерывная унитарная группа вида $\bigotimes^n U_m(\cdot, \cdot)$ на $\mathscr{H}_s^{(n)}$ при любом n. Таким образом, $\Gamma(U_m)$ — унитарная группа на $\mathscr{F}_s(L^2(H_m, d\Omega_m))$, а поскольку $\Gamma(U_m)$ сильно непрерывна на F_0, она сильно непрерывна на $\mathscr{F}_s$. Это доказывает свойство 1.

Для проверки свойства 2 нужно показать, что носитель спектра четырехпараметрической унитарной группы $\Gamma(U_m(a, I))$ лежит в переднем световом конусе. Сначала заметим, что $L^2(H_m, d\Omega_m)$ уже является пространством спектрального представления для $U_m(a, I)$, ибо $(\eta, U_m(a, I)\eta) = \int\limits_{H_m} \exp(ip\cdot\tilde{a})|\eta(p)|^2 d\Omega_m(p)$.

Так как $\Gamma(U_m(a, I)) \restriction \mathscr{H}_s^{(n)} = \bigotimes^n U_m(a, I)$ при $\eta \in \mathscr{H}_s^{(n)}$ и $n > 0$, то

$$(\eta, \Gamma(U_m(a, I))\eta) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^4} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^4} \exp\left(i\left(\sum_{i=1}^n p_i\right)\cdot\tilde{a}\right)|\eta(p_1, \ldots, p_n)|^2 \prod_{i=1}^n d\Omega_m(p_i) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^4} e^{i\lambda\cdot\tilde{a}}\, d\mu_\eta(\lambda),$$

где $\mu_\eta(S) = \int\limits_{\Sigma p_i \in S} \cdots \int |\eta(p_1, \ldots, p_n)|^2 \prod\limits_{i=1}^n d\Omega_m(p_i)$. Поскольку носитель Ω_m лежит в $\overline{V}_+$ и $\overline{V}_+$ — конус, носитель μ_η также лежит в $\overline{V}_+$. Далее, если $\psi = \{\psi^{(n)}\}_{n=0}^\infty$ — произвольный вектор в $\mathscr{F}_s(L^2(H_m, d\Omega_m))$ и μ_ψ — спектральная мера, такая, что

$$(\psi, \Gamma(U_m(a, I))\psi) = \int e^{ip\cdot\tilde{a}} d\mu_\psi(p),$$

то $\mu_\psi = \sum\limits_{n=0}^\infty \mu_{\psi^{(n)}}$, так как $\Gamma(U_m)\colon \mathscr{H}_s^{(n)} \to \mathscr{H}_s^{(n)}$.

Вектор $\Omega_0 = \{1, 0, 0, \ldots\}$ инвариантен относительно $\Gamma(U_m(\cdot, \cdot))$, ибо $\Gamma(U_m)$, по определению, действует тождественно на $\mathscr{H}_s^{(0)} = \mathbb{C}$. В $L^2(H_m, d\Omega_m)$ нет ненулевых векторов, инвариантных относительно $U_m(a, I)$ при всех $a \in \mathbb{R}^4$, поэтому в $\mathscr{H}_s^{(n)}$ нет ненулевых векторов, инвариантных относительно $\bigotimes^n U_m(\cdot, I)$. Поскольку $\Gamma(U_m)\colon \mathscr{H}_s^{(n)} \to \mathscr{H}_s^{(n)}$, единственным ненулевым инвариантным вектором в $\mathscr{F}_s(L^2(H_m, d\Omega_m))$ является Ω_0 (и все векторы, отличающиеся от него числовым множителем). Это доказывает свойство 3.

Свойство 4 немедленно следует из определения Φ_m: $\Phi_m(f) = \Phi_S(Ef)$ для вещественных f и $\Phi_m(f) = \Phi_m(\operatorname{Re} f) + i\Phi_m(\operatorname{Im} f)$ для комплекснозначных f, и из того, что $\Phi_S(f)$: $F_0 \to F_0$.

Предположим, что ψ_1, $\psi_2 \in F_0$ и $f_n \to f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, причем f_n вещественнозначны. Тогда

$$Ef_n = \sqrt{2\pi}\,\hat{f}_n \restriction H_m \xrightarrow{L^2(H_m,\, d\Omega_m)} \sqrt{2\pi}\,\hat{f} \restriction H_m = Ef.$$

Из теоремы X.41 (d) следует, что

$$(\psi_1,\ \Phi_m(f_n)\psi_2) \to (\psi_1,\ \Phi_m(f)\psi_2).$$

Отсюда, рассматривая по отдельности вещественную и мнимую части f, мы докажем принадлежность $(\psi_1, \Phi_m(\cdot)\psi_2)$ пространству $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, что даст свойство 5.

Для доказательства пуанкаре-инвариантности поля заметим, что $\Gamma(U_m)$: $F_0 \to F_0$ и потому, в силу теоремы X.41 (e),

$$\Gamma(U_m(a, \Lambda))\,\Phi_m(f)\,\Gamma(U_m(a, \Lambda))^{-1}\psi =$$
$$= \Gamma(U_m)\,\Phi_S(Ef)\,\Gamma(U_m)^{-1}\psi = \Phi_S(U_m Ef)\psi,$$

если $\psi \in F_0$ и f — вещественнозначная функция из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$. Замена переменных показывает, что $U_m(a, \Lambda)Ef = E(\langle a, \Lambda\rangle f)$, так что $\Gamma(U_m(a, \Lambda))\,\Phi_m(f)\,\Gamma(U_m(a, \Lambda))^{-1} = \Phi_m(\langle a, \Lambda\rangle f)$. Поскольку обе части этого равенства линейны по f, а $\Gamma(U_m)$ — линейный оператор, оно справедливо и для комплекснозначных f.

Для доказательства микропричинности (локальности) нужно показать, что для всех f, $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, носители которых пространственно-подобны, и всех $\psi \in F_0$

$$\Phi_m(f)\,\Phi_m(g)\psi - \Phi_m(g)\,\Phi_m(f)\psi = 0. \tag{X.69}$$

Поскольку $\Phi_m(\cdot)$ линейно, (X.69) достаточно доказать для вещественнозначных f и g. Но тогда, в силу (X.64),

$$[\Phi_m(f),\ \Phi_m(g)]\psi = [\Phi_S(Ef),\ \Phi_S(Eg)]\psi =$$
$$= (i \operatorname{Im}(Ef, Eg)_{L^2(H_m,\, d\Omega_m)})\psi =$$
$$= \left(\frac{2\pi}{2} \int_{H_m} (\overline{\hat{f}(p)}\,\hat{g}(p) - \hat{f}(p)\,\overline{\hat{g}(p)})\,d\Omega_m(p)\right)\psi =$$
$$= \left(\int_{\mathbb{R}^4}\int_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{2i}\,\Delta_m(x-y)\,f(x)\,g(y)\,dx\,dy\right)\psi,$$

где

$$\Delta_m(x) = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int (e^{-i\tilde{p}\cdot x} - e^{ip\cdot\tilde{x}})\,d\Omega_m(p).$$

Далее, $\Delta_m(x) = \Delta_+(x; m^2) - \Delta_+(-x; m^2)$, и так как $\Delta_+(x; m^2) = f_S(x^2)$ для всех пространственно-подобных x (теорема IX.48), то $\operatorname{supp}\Delta_m \subset \overline{V}_+ \cup (-\overline{V}_+)$. В итоге

$$\iint \Delta_m(x-y) f(x) g(y)\,dx\,dy = 0,$$

откуда следует (X.69).

Цикличность вакуума относительно $\Phi_m(\cdot)$ немедленно следует из теоремы X.41 ((b) и (d)) и того факта, что образ области $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ при отображении E плотен в $L^2(H_m, d\Omega_m)$ (задача 44).

Наконец, если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, то $\widehat{(\Box^2+m^2) f}(p) = -(p\cdot\tilde{p}-m^2)\hat{f}(p)$, так что

$$E((\Box^2+m^2) f) = 0.$$

Следовательно, $\Phi_m((\Box^2+m^2) f) = 0$ для всех $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. ∎

Отметим, что, согласно проведенному выше вычислению, спектральная функция ρ в представлении Челлена—Лемана для Φ_m сосредоточена в точке m.

Классическая механика всегда служила столь плодотворной основой различных физических теорий, что описание физической системы на языке определенных «отнесенных к фиксированному моменту времени степеней свободы», эволюционирующих с течением времени, естественно и желательно. Сейчас мы сделаем это для свободного поля, вводя поле, отнесенное к нулевому моменту времени, и канонически сопряженный ему импульс. Подчеркнем, что выбор фиксированного момента времени релятивистски не инвариантен. По этой причине проверка релятивистской инвариантности теории взаимодействующего поля, построенного с помощью возмущения свободного поля, описанного в терминах полей, взятых в нулевой момент времени,—дело весьма непростое. Отметим еще, что прямой связи между канонически сопряженным импульсом и физическим импульсом P нет.

Начнем с абстрактного подхода. Напомним, что **сопряжение** на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$—это сопряженно-линейная изометрия C со свойством $C^2 = I$.

Определение. Пусть $\mathcal{H}$—комплексное гильбертово пространство и $\Phi_S(\cdot)$—соответствующее сигалово квантование. Пусть C—сопряжение на $\mathcal{H}$. Определим $\mathcal{H}_C = \{f \in \mathcal{H} \mid Cf = f\}$. Для каждого $f \in \mathcal{H}_C$ введем $\varphi(f) = \Phi_S(f)$ и $\pi(f) = \Phi_S(if)$. Отображение $f \mapsto \varphi(f)$ называется **каноническим свободным полем** над $\langle\mathcal{H}, C\rangle$, а отображение $f \mapsto \pi(f)$ называется **канонически сопряженным импульсом.** Мы часто будем опускать $\langle\mathcal{H}, C\rangle$ и писать просто $\mathcal{H}$, если используемое сопряжение и так ясно. Отметим, что множество элементов из $\mathcal{H}$, для которых определены отображения $f \mapsto \varphi(f)$ и $f \mapsto \pi(f)$, зависит от сопряжения C.

Теорема X.43. Пусть $\mathcal{H}$—комплексное гильбертово пространство с сопряжением C. Пусть $\varphi(\cdot)$ и $\pi(\cdot)$—соответствующие канонические поля. Тогда

(a) (i) Для каждого $f \in \mathcal{H}_C$ оператор $\varphi(f)$ самосопряжен в существенном на F_0.

(ii) $\{\varphi(f) \mid f \in \mathcal{H}_C\}$ — коммутирующее семейство самосопряженных операторов.

(iii) Ω_0 — циклический вектор семейства $\{\varphi(f) \mid f \in \mathcal{H}_C\}$.

(iv) Если $f_n \xrightarrow{\mathcal{H}_C} f$, то

$$\varphi(f_n)\psi \to \varphi(f)\psi \qquad \text{для всех } \psi \in F_0,$$

$$e^{i\varphi(f_n)}\psi \to e^{i\varphi(f)}\psi \qquad \text{для всех } \psi \in \mathcal{F}_s(\mathcal{H}).$$

(b) Свойства (i) — (iv) остаются справедливыми при замене $\varphi(\cdot)$ на $\pi(\cdot)$.

(c) Если f, $g \in \mathcal{H}_C$, то

$$\varphi(f)\pi(g)\psi - \pi(g)\varphi(f)\psi = i(f, g)\psi \qquad \text{для всех } \psi \in F_0, \tag{X.70}$$

$$e^{i\varphi(f)}e^{i\pi(g)} = e^{-i(f,g)}e^{i\pi(g)}e^{i\varphi(f)}. \tag{X.71}$$

Доказательство. Утверждения (a) (i) и (iv) сразу следуют из соответствующих свойств $\Phi_S(\cdot)$, доказанных в теореме X.41. Доказательство утверждения (a) (iii) мы оставляем читателю (задача 43). Докажем (a) (ii). Для этого заметим, что из (X.65) следует равенство

$$e^{it\varphi(f)}e^{is\varphi(g)} = e^{-its \operatorname{Im}(f,g)}e^{is\varphi(g)}e^{it\varphi(f)},$$

где использована вещественная линейность $\varphi(\cdot)$. Если $f, g \in \mathcal{H}_C$, то из поляризационного тождества следует, что $(f, g) = (Cf, Cg) = (g, f)$, поэтому $\operatorname{Im}(f, g) = 0$. В итоге $\exp(it\varphi(f))\exp(is\varphi(g)) = \exp(is\varphi(g))\exp(it\varphi(f))$ для всех s и t. Следовательно, в силу теоремы VIII.13, $\varphi(f)$ и $\varphi(g)$ коммутируют.

Доказательство (b) похоже на доказательство (a). Формулы (X.70) и (X.71) немедленно вытекают из (X.64), (X.65) и того факта, что $\operatorname{Im}(f, ig) = \operatorname{Re}(f, g) = (f, g)$ при $f, g \in \mathcal{H}_C$. ∎

Теперь определим сопряжение, которое мы будем использовать при описании свободного скалярного поля массы m. Запишем $f \in L^2(H_m, d\Omega_m)$ как $f(p_0, \mathbf{p})$ и положим по определению $(Cf)(p_0, \mathbf{p}) = \overline{f(p_0, -\mathbf{p})}$. Отметим, что C определено корректно на $L^2(H_m, d\Omega_m)$, поскольку $\langle p_0, \mathbf{p}\rangle \in H_m$ тогда и только тогда, когда $\langle p_0, -\mathbf{p}\rangle \in H_m$. Ясно, что C — сопряжение. Обозначим канонические поля, отвечающие C, через $\varphi(\cdot)$ и $\pi(\cdot)$ и для вещественнозначных $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ положим

$$\varphi_m(f) = \varphi(Ef),$$

$$\pi_m(f) = \pi(\mu Ef), \qquad \mu = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2},$$

и продолжим эти поля на все $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ по линейности. С помощью операторов a^- эти поля можно представить в виде

$$\varphi_m(f)=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(a^-(Ef))^*+a^-(CEf)\},$$

$$\pi_m(f)=\frac{i}{\sqrt{2}}\{(a^-(\mu Ef))^*-a^-(C\mu Ef)\}.$$

Предупредим читателя, что операторы a в последних формулах отличаются от операторов, наиболее часто используемых при обсуждении свободного поля, и что правильным свободным полем в пространстве-времени является Φ_m, а не φ_m; ниже мы покажем, что φ_m и π_m полезны при обсуждении полей, отнесенных к нулевому моменту времени. Отображения $f\longmapsto\varphi_m(f)$ и $f\longmapsto\pi_m(f)$ комплексно линейны и $\varphi_m(f)$, $\pi_m(f)$ самосопряжены тогда и только тогда, когда $Ef\in\mathscr{H}_C$.

Благодаря проектору E класс функций, на котором определены $\varphi_m(\cdot)$ и $\pi_m(\cdot)$, можно расширить и включить в него обобщенные функции вида $\delta(t-t_0)\,g(x_1, x_2, x_3)$, где $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$. В частности, если $t_0=0$, g — вещественнозначная функция и $\hat{g}$ — *обычное* преобразование Фурье на $\mathbb{R}^3$, то

$$(CE\widehat{\delta g})(p_0, \mathbf{p})=\overline{E\widehat{\delta g}(p_0, -\mathbf{p})}=(2\pi)^{-1/2}\overline{\hat{g}(-\mathbf{p})}=(2\pi)^{-1/2}\hat{g}(\mathbf{p})=E\widehat{\delta g},$$

т. е. $E(\delta g)$ и $\mu E(\delta g)$ лежат в $\mathscr{H}_C$. Следовательно, $\varphi_m(\delta g)$ и $\pi_m(\delta g)$ самосопряжены, если $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ вещественнозначна. Отображения $g\longmapsto\varphi_m(\delta g)$, $g\longmapsto\pi_m(\delta g)$ по очевидным причинам называются **полями, взятыми в нулевой момент времени**. Начиная с этого места, мы далее в качестве аргументов полей $\varphi_m(\cdot)$ и $\pi_m(\cdot)$ будем брать только пробные функции вида δg и в случае, когда $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, вместо $\varphi_m(\delta g)$ и $\pi_m(\delta g)$ будем писать просто $\varphi_m(g)$ и $\pi_m(g)$. Если f и g — вещественнозначные функции из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, то из (X.70) следует, что для всех $\psi\in F_0$

$$[\varphi_m(f),\ \pi_m(g)]\,\psi=i\int_{H_m}\overline{\hat{f}(p)}\,\hat{g}(p)\,\mu(p)\,\psi\,d\Omega_m(p). \qquad (X.72)$$

Для удобства, а также с целью согласования наших обозначений с общепринятыми, перепишем поля, построенные нами в пространстве Фока, отвечающем одночастичному пространству $L^2(H_m,\ d\Omega_m)$, в терминах пространства Фока, построенного из пространства $L^2(\mathbb{R}^3)$. Для упрощения обозначений определим для каждой функции $f\in L^2(H_m,\ d\Omega_m)$ операторы

$$a^\dagger(f)=(a^-(f))^*, \qquad a(f)=a^-(Cf).$$

Прежде всего отметим, что каждая функция $f(p)\in L^2(H_m,\ d\Omega_m)$ естественным образом задает функцию $f(\mathbf{p})=f(\mu(\mathbf{p}),\ \mathbf{p})$ на $\mathbb{R}^3$.

Для каждой $f \in L^2(H_m, d\Omega_m)$ положим $(Jf)(\mathbf{p}) = f(\mu(\mathbf{p}), \mathbf{p})/\sqrt{\mu(\mathbf{p})}$. Поскольку J — унитарное отображение $L^2(H_m, d\Omega_m)$ на $L^2(\mathbb{R}^3)$, то $\Gamma(J)$ — унитарное отображение $\mathcal{F}_s(L^2(H_m, d\Omega_m))$ на $\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$. Операторы уничтожения и рождения $\tilde{a}(\cdot)$, $\tilde{a}^\dagger(\cdot)$ в $\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$ связаны с $a(\cdot)$, $a^\dagger(\cdot)$ соотношениями

$$\tilde{a}\left(\frac{f(\mathbf{p})}{\sqrt{\mu(\mathbf{p})}}\right) = \Gamma(J)\, a(f)\, \Gamma(J)^{-1},$$

$$\tilde{a}^\dagger\left(\frac{f(\mathbf{p})}{\sqrt{\mu(\mathbf{p})}}\right) = \Gamma(J)\, a^\dagger(f)\, \Gamma(J)^{-1}.$$

С помощью унитарного отображения $\Gamma(J)$ мы перенесем поля Вайтмана в $\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$, полагая

$$\tilde{\Phi}_m(f) \equiv \Gamma(J)\, \Phi_m(f)\, \Gamma(J)^{-1} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tilde{a}\left(\tilde{C} \frac{Ef}{\sqrt{\mu}}\right) + \tilde{a}^\dagger\left(\frac{Ef}{\sqrt{\mu}}\right) \right\} \quad \text{для вещественнозначных } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4),$$

$$\tilde{\varphi}_m(f) \equiv \Gamma(J)\, \varphi_m(f)\, \Gamma(J)^{-1} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tilde{a}\left(\frac{E(f\delta)}{\sqrt{\mu}}\right) + \tilde{a}^\dagger\left(\frac{E(f\delta)}{\sqrt{\mu}}\right) \right\} \quad \text{для вещественнозначных } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3),$$

где $\tilde{C} = JCJ^{-1}$ действует по правилу $(\tilde{C}g)(\mathbf{p}) = \overline{g(-\mathbf{p})}$. *Установив это соответствие, мы впредь будем опускать* $\sim$ *и не будем использовать жирный шрифт*; далее мы будем иметь дело только с полями в $\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$ и только с трехмерными импульсами. Кроме того, напомним, что сужение четырехмерного преобразования Фурье, которым мы пользовались в этом разделе, на функции вида $\delta(x_0)\, g(x_1, x_2, x_3)$ дает обычное трехмерное преобразование Фурье. Отметим еще, что

$$\bar{f} = (C\hat{f})^\smile,$$

поэтому $C\hat{f} = \hat{f}$ тогда и только тогда, когда f вещественнозначна.

Для вещественнозначных f и g равенство (X.72) превращается в соотношение

$$[\varphi_m(f), \pi_m(g)] = i \int f(x)\, g(x)\, d^3x, \tag{X.73}$$

которое является каноническим коммутационным соотношением (ККС) над пространством Шварца. В дополнении к этому разделу доказано, что для каждого $m > 0$ представление ККС, определяемое полями φ_m, π_m, неприводимо, а представления, отвечающие разным m, неэквивалентны. Таким образом, поля в нулевой момент времени в теориях свободных скалярных полей порождают различные представления ККС.

В качестве последней темы, перед тем как перейти к взаимодействующим полям, покажем, каким образом развитый выше формализм связан с «полями» и «операторами рождения и уничтожения», вводимыми в физической литературе. Сначала положим

$$D_{\mathscr{S}}=\{\psi \mid \psi \in F_0,\ \psi^{(n)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{3n}) \text{ для всех } n\}$$

и для каждого $p \in \mathbb{R}^3$ определим оператор $a(p)$ в $\mathscr{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$, задав его формулой

$$(a(p)\psi)^{(n)}(k_1, \ldots, k_n)=\sqrt{n+1}\,\psi^{(n+1)}(p, k_1, \ldots, k_n) \qquad (\text{X}.74)$$

на $D_{\mathscr{S}}$. Сопряженный к $a(p)$ оператор не является плотно определенным, поскольку формально он задается соотношением

$$(a^\dagger(p)\psi)^{(n)}(k_1, \ldots, k_n)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{l=1}^{n}\delta(p-k_l)\,\psi^{(n-1)}(k_1, \ldots, k_{l-1}, k_{l+1}, \ldots, k_n). \qquad (\text{X}.75)$$

Однако $a^\dagger(p)$ — корректно определенная квадратичная форма на $D_{\mathscr{S}} \times D_{\mathscr{S}}$. Например, если $\psi_1=\{0, \psi^{(1)}, 0, \ldots\}$ и $\psi_2=\{0, 0, \psi^{(2)}, 0, \ldots\}$, то

$$(\psi_2, a^\dagger(p)\psi_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \left(\overline{\psi^{(2)}(k_1,p)}\,\psi^{(1)}(k_1)+\overline{\psi^{(2)}(p, k_1)}\,\psi^{(1)}(k_1)\right)dk_1.$$

Читатель легко проверит, что формулы

$$a(g)=\int_{\mathbb{R}^3} a(p)\,g(-p)\,dp, \qquad (\text{X}.76\text{a})$$

$$a^\dagger(g)=\int_{\mathbb{R}^3} a^\dagger(p)\,g(p)\,dp \qquad (\text{X}.76\text{b})$$

справедливы для всех $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, если эти равенства понимать в смысле квадратичных форм. Например, (X.76a) означает, что для $\psi_1, \psi_2 \in D_{\mathscr{S}}$

$$(\psi_1, a(g)\psi_2)=\int_{\mathbb{R}^3}(\psi_1, a(p)\psi_2)\,g(-p)\,dp.$$

Смысл (X.76b) аналогичен. Поскольку $a(p)$: $D_{\mathscr{S}} \to D_{\mathscr{S}}$, степени $a(p)$ задают операторы на $D_{\mathscr{S}}$. Как и раньше, можно написать формальное выражение для $(a^\dagger(p))^n$, но оно не имеет смысла как оператор, а только как квадратичная форма на $D_{\mathscr{S}} \times D_{\mathscr{S}}$. Отметим, что

$$(\psi_1, (a^\dagger(p))^n\psi_2)=((a(p))^n\psi_1, \psi_2), \qquad (\text{X}.77)$$

поэтому в смысле квадратичных форм $(a^\dagger(p))^n$ и $(a(p))^n$ сопряжены друг другу при каждом n. Квадратичную форму $a^\dagger(p)^n$ можно, конечно, определить с помощью (X.77), а затем убедиться, что она возникает путем возведения в n-ю степень формального объекта, даваемого формулой (X.75). Поскольку $a(p_1)$: $D_{\mathscr{S}} \to D_{\mathscr{S}}$, квадратичная форма $(\psi_1, a^\dagger(p_2)a(p_1)\psi_2)$ определена для всех $\langle p_1, p_2\rangle \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$. Заметим, однако, что $(\psi_1, a(p_1)a^\dagger(p_2)\psi_2)$ не имеет смысла, так как $a^\dagger(p_2)$ — всего лишь квадратичная форма. Вообще, любое произведение вида $\prod_{i=1}^{N_1} a(p_i)$ задает оператор из $D_{\mathscr{S}}$ в $D_{\mathscr{S}}$, а $\prod_{i=N_1+1}^{N_2} a^\dagger(p_i)$ — корректно определенная квадратичная форма на $D_{\mathscr{S}}\times D_{\mathscr{S}}$. Таким образом,

$$\left(\psi_1, \left(\prod_{i=N_1+1}^{N_2} a^\dagger(p_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{N_1} a(p_i)\right)\psi_2\right)$$

также квадратичная форма на $D_{\mathscr{S}}\times D_{\mathscr{S}}$. Легко проверить, что в случае $f_i\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$

$$\left(\prod_{i=N_1+1}^{N_2} a^\dagger(f_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{N_1} a(f_i)\right)=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^{3N_2}}\left(\prod_{i=N_1+1}^{N_2} a^\dagger(p_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{N_1} a(-p_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{N_2} f(p_i)\right)dp_1\ldots dp_{N_2} \tag{X.78}$$

в смысле квадратичных форм и

$$N=\int_{\mathbb{R}^3} a^\dagger(p)\,a(p)\,dp. \tag{X.79}$$

Генератор сдвигов по времени в теории свободного скалярного поля массы m имеет вид

$$H_0=\int_{\mathbb{R}^3}\mu(p)\,a^\dagger(p)\,a(p)\,dp \tag{X.80}$$

и называется **свободным гамильтонианом массы** m. Равенства (X.78), (X.79) и (X.80) не требуют никаких формальных манипуляций, а представляют собой точные математические утверждения о квадратичных формах.

Теорема X.44. Пусть n_1 и n_2 — неотрицательные целые числа. Предположим, что $W\in L^2(\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)})$. Тогда существует единственный определенный в $\mathscr{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$ оператор T_W, такой, что $D_{\mathscr{S}}\subset D(T_W)$ — его существенная область и

(a) $$T_W=\int_{\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)}} W(k_1,\ldots,k_{n_1}, p_1,\ldots,p_{n_2})\left(\prod_{i=1}^{n_1} a^\dagger(k_i)\right)\times$$
$$\times\left(\prod_{j=1}^{n_2} a(p_j)\right)d^{3n_1}k\,d^{3n_2}p \tag{X.81}$$

в смысле квадратичных форм на $D_{\mathscr{S}}\times D_{\mathscr{S}}$.

Кроме того,

(b) Если m_1 и m_2 — такие неотрицательные целые числа, что $m_1+m_2=n_1+n_2$, то $(1+N)^{-m_1/2}\,T_W\,(1+N)^{-m_2/2}$ — ограниченный оператор с нормой

$$\|(1+N)^{-m_1/2}T_W(1+N)^{-m_2/2}\|\leqslant C(m_1,\ m_2)\,\|W\|_{L^2}.$$

В частности, при $m_1=n_1$ и $m_2=n_2$

$$\|(1+N)^{-n_1/2}\,T_W\,(1+N)^{-n_2/2}\|\leqslant\|W\|_{L^2}.$$

(c) $$T_W^*=\int\limits_{\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)}}\overline{W(k_1,\ \ldots,\ k_{n_1},\ p_1,\ \ldots,\ p_{n_2})}\times$$
$$\times\left(\prod_{i=1}^{n_2}a^\dagger(p_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{n_1}a(k_i)\right)d^{3n_1}k\,d^{3n_2}p$$

в смысле квадратичных форм на $D_{\mathscr{S}}\times D_{\mathscr{S}}$.

(d) Если $W_n\to W$ в $L^2(\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)})$, то $T_{W_n}\to T_W$ сильно на $D_{\mathscr{S}}$.

(e) Множество F_0 содержится в $D(T_W)$ и $D(T_W^*)$, и на векторах из F_0 операторы T_W и T_W^* задаются явными формулами

$$(T_W\psi)^{(l-n_2+n_1)}=K(l,\ n_1,\ n_2)\,S\left[\int W(k_1,\ \ldots,\ k_{n_1},\ p_1,\ \ldots,\ p_{n_2})\times\right.$$
$$\left.\times\varphi^{(l)}(p_1,\ \ldots,\ p_{n_2},\ k_{n_1+1},\ \ldots,\ k_{n_1+l-n_2}d^{3n_2}p\right],\tag{X.82a}$$

$$(T_W\psi)^{(n)}=0\quad\text{при } n<n_1-n_2,$$

$$(T_W^*\psi)^{(l-n_1+n_2)}=K(l,\ n_2,\ n_1)\,S\left[\int\overline{W(k_1,\ \ldots,\ k_{n_1},\ p_1,\ \ldots,\ p_{n_2})}\times\right.$$
$$\times\psi^{(l)}(k_1,\ \ldots,k_{n_1},\ p_{n_2+1},\ \ldots,\ p_{n_2+l-n_1})\,d^{3n_1}k,\tag{X.82b}$$

$$(T_W^*\psi)^{(n)}=0\quad\text{при } n<n_2-n_1,$$

где S — оператор симметризации и

$$K(l,\ n_1,\ n_2)=\left[\frac{l!\,(l+n_1-n_2)!}{((l-n_2)!)^2}\right]^{1/2}.$$

Доказательство. На векторах из $D_{\mathscr{S}}$ мы определяем $T_W\psi$ формулой (X.82a). В силу неравенства Шварца и того факта, что S — проектор,

$$\|(T_W\psi)^{(l-n_2+n_1)}\|^2\leqslant K(l,\ n_1,\ n_2)^2\,\|W\|^2\,\|\psi^{(l)}\|^2.$$

Если теперь определить оператор T_W^* на $D_{\mathscr{S}}$ с помощью формулы (X.82b), то легко проверить, что для всех φ и ψ из $D_{\mathscr{S}}$

$$(\varphi,\ T_W\ \psi)=(T_W^*\,\varphi,\ \psi).$$

Таким образом, T_W замыкаем и T_W^* — сужение на $D_{\mathscr{S}}$ оператора, сопряженного к T_W. Пусть теперь T_W обозначает $\overline{T}_W$, а T_W^* — оператор, сопряженный к T_W. По определению T_W множество $D_{\mathcal{S}}$ — существенная область для T_W, а поскольку T_W ограничен на l-частичных векторах из $D_{\mathcal{S}}$, справедливо включение $F_0 \subset D(T_W)$. Поскольку правая часть (X.82a) также ограничена на l-частичных векторах, (X.82a) представляет действие T_W на любой l-частичный вектор. Доказательство утверждения о T_W^* в пункте (е) аналогично.

Для доказательства (b) предположим, что $\psi \in D_{\mathcal{S}}$. Тогда в силу проведенных вычислений

$$\|((1+N)^{-m_1/2} T_W (1+N)^{-m_2/2}\psi)^{(l-n_2+n_1)}\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{K(l, n_1, n_2)}{(1+l-n_2+n_1)^{m_1/2}(1+l)^{m_2/2}}\right)^2 \|W\|^2 \|\psi^{(l)}\|^2,$$

так что

$$\|(1+N)^{-m_1/2} T_W (1+N)^{-m_2/2}\psi\| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sup_{l<\infty} \frac{K(l, n_1, n_2)}{(1+l-n_2+n_1)^{m_1/2}(1+l)^{m_2/2}}\right) \|W\| \|\psi\| \leqslant$$
$$\leqslant C(m_1, m_2) \|W\| \|\psi\|,$$

где

$$C(m_1, m_2) = \sup_l \frac{K(l, n_1, n_2)}{(1+l-n_2+n_1)^{m_1/2}(1+l)^{m_2/2}} < \infty,$$

так как $m_1+m_2=n_1+n_2$. Точная верхняя грань берется только по тем l, для которых $l-n_2+n_1 \geqslant 0$, ибо все другие члены уничтожаются действием T_W. Следовательно, $(1+N)^{-m_1/2} T_W \times \times (1+N)^{-m_2/2}$ расширяется до ограниченного оператора на $\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$ с нормой, меньшей или равной $C(m_1, m_2)$. Если $m_1=n_1$ и $m_2=n_2$, то $C(m_1, m_2)=1$.

Для доказательства (d) нужно только заметить, что если $\psi = \{0, \ldots, \psi^{(l)}, 0, \ldots\} \in D_{\mathcal{S}}$ и $W_n \xrightarrow{L^2} W$, то

$$\|T_{W_n}\psi - T_W\psi\| = \|T_{W_n-W}\psi\| \leqslant$$
$$\leqslant K(l, n_1, n_2)\|W_n - W\| \|\psi\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Поскольку $D_{\mathcal{S}}$ состоит из конечных линейных комбинаций таких векторов, мы доказали, что T_{W_n} сильно сходятся на $D_{\mathcal{S}}$ к T_W, если $W_n \xrightarrow{L^2} W$.

Для доказательства (а) возьмем $\psi_1, \psi_2 \in D_{\mathcal{S}}$, $\psi_1 = \{0, \ldots, \psi_1^{(l-n_2+n_1)}, 0, \ldots\}$, $\psi_2 = \{0, \ldots, \psi_2^{(l)}, 0, \ldots\}$. Тогда если $W = \left(\prod_{i=1}^{n_1} f_i(k_i)\right) \times$

$\times \left(\prod_{j=1}^{n_2} g(p_j) \right)$, то определение формы $\left(\prod_{i=1}^{n_1} a^\dagger(k_i) \right) \left(\prod_{j=1}^{n_2} a(p_j) \right)$ показывает, что

$$(\psi_1, T_W\psi_2) = \int W(k_1, \ldots, k_{n_1}, p_1, \ldots, p_{n_2}) \times$$
$$\times \left(\psi_1, \left(\prod_{i=1}^{n_1} a^\dagger(k_i) \right) \left(\prod_{j=1}^{n_2} a(p_j) \right) \psi_2 \right) d^{3n_1}k\, d^{3n_2}p. \qquad \text{(X.83)}$$

Так как обе части (X.83) линейно зависят от W, это соотношение остается справедливым и для W, представляющих собой конечные линейные комбинации произведений, с которых мы начали. Поскольку

$$\left(\psi_1, \left(\prod_{i=1}^{n_1} a^\dagger(k_i) \right) \left(\prod_{j=1}^{n_2} a(p_j) \right) \psi_2 \right) \in L^2(\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)})$$

и справедливо (d), обе части (X.83) являются непрерывными линейными функционалами на $L^2(\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)})$, а так как они совпадают на плотном множестве, они совпадают всюду. Наконец, (X.83) распространяется по линейности на всю область $D_{\mathcal{S}} \times D_{\mathcal{S}}$. Это доказывает (a); доказательство (c) аналогично. ∎

Напоследок отметим, что на $D_{\mathcal{S}}$ свободное скалярное поле и поля в нулевой момент времени как квадратичные формы можно выразить через $a^\dagger(k)$ и $a(k)$:

$$\Phi_m(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left[e^{i(\mu(p)t - p\cdot x)} a^\dagger(p) + e^{-i(\mu(p)t - p\cdot x)} a(p) \right] \frac{d^3p}{\sqrt{2\mu(p)}}, \qquad \text{(X.84)}$$

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left[e^{-ip\cdot x} a^\dagger(p) - e^{ip\cdot x} a(p) \right] \frac{d^3p}{\sqrt{2\mu(p)}}, \qquad \text{(X.85)}$$

$$\pi_m(x) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left[e^{-ip\cdot x} a^\dagger(p) - e^{ip\cdot x} a(p) \right] \sqrt{\frac{\mu(p)}{2}}\, d^3p. \qquad \text{(X.86)}$$

Перед тем как обратиться к гамильтонову методу построения самодействующего скалярного бозонного поля в двумерном пространстве-времени, разумно сделать несколько общих замечаний о квантовой теории взаимодействующих полей. В настоящее время большинство из этих теорий носит предматематический характер в следующем смысле. При современном состоянии теории можно выписать гамильтонианы и поля, но нельзя указать гильбертово пространство, где эти величины задают корректные операторы. С помощью полей и гамильтонианов путем формальных манипуляций можно вычислить матричные элементы S-оператора. Эти матричные элементы представляются степенными рядами, коэффициенты которых зависят от вакуумных средних, вычисляемых с помощью величин теории свободного поля. В типичных случаях каждый коэффициент этих рядов дается расходящимся интегралом. Обычно такие расходящиеся величины ликвидируются с помощью так называемой процедуры «перенормировок», которая дает предписания, каким образом, делая бесконечными различные параметры, входящие в теорию, извлечь из возникающих разностей расходящихся величин конечные «главные части». В квантовой электродинамике эти предписания приводят к предсказаниям, удивительно близким к экспериментальным данным. Однако прогресс в математической задаче обоснования подобных моделей до сих пор был весьма медленным. Реальные математические результаты получены только в нескольких случаях и только в пространстве-времени размерности меньше 4. Только в одной модели (теория, которую мы обсуждаем ниже, — частный случай этой модели) проверены (на 1974 г.) все аксиомы Вайтмана. Если эти случаи содержат зерно истины, то математическое решение отмеченных проблем потребует дальнейшего продвижения в различных областях функционального анализа, таких, как техника доказательств самосопряженности, теория возмущений, теория рассеяния, теория вероятностей, спектральный анализ и C^*-алгебры.

«Теория взаимодействующих полей» — это полевая теория, в которой выполняются аксиомы Вайтмана и в которой нетривиальна матрица рассеяния (см. § XII.15). Естественный способ построения таких полей состоит в попытке ввести возмущение в одну из построенных нами теорий свободных полей. В классической лагранжевой теории поля простейшие гамильтонианы имеют вид

$$H = H_0 + \int_{\mathbb{R}^3} F(\varphi(x))\, d^3x,$$

где F — некоторая функция, скажем полином (см. § X.13). Поскольку мы хотим, чтобы гамильтониан был ограничен снизу, мы ожидаем, что этот полином имеет четный порядок, а коэффициент при старшей степени в этом полиноме положителен. Выбор $F(x) = \alpha x^2$ приводит к тривиальному рассеянию, ибо результирующая теория описывает свободное поле массы $m+2\alpha$. Второй простейший выбор — это $F(x) = \lambda x^4$. В этом случае мы приходим к необходимости рассматривать формальный гамильтониан

$$H = H_0 + \lambda \int_{\mathbb{R}^3} (\varphi_m(x))^4\, d^3x, \qquad \lambda > 0, \tag{X.87}$$

где H_0 — гамильтониан свободного скалярного бозонного поля с массой m, а $\varphi_m(x)$ — свободное поле в нулевой момент времени. Первая наивная надежда связана с идеей доказать самосопряженность H и определить в пространстве Фока самодействующее поле формулой

$$\Phi(x,\ t)=e^{itH}\varphi_m(x)\,e^{-itH}. \tag{X.88}$$

Мы не сможем придать смысл формулам (X.87), (X.88), не подвергая их серьезным изменениям, однако коммутационные соотношения между φ, π, a и $a^\dagger$ позволят формально вычислить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет Φ (хотя эти формальные вычисления относятся как раз к тому типу, относительно использования которых мы предостерегали читателя в § VIII.5):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(x,\ t)=e^{itH}i^2[H,[H,\ \varphi_m(x)]]\,e^{-itH};$$

$$\begin{aligned}
&[H,\ \varphi_m(x)]=[H_0,\ \varphi_m(x)]=\\
&=\int\int\frac{d^3k\,d^3l}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\mu(l)}}\,\mu(k)\,\{e^{il\cdot x}[a^\dagger(k)\,a(k),\ a(l)]+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+e^{-il\cdot x}[a^\dagger(k)\,a(k),\ a^\dagger(l)]\}=\\
&=\int\frac{d^3k\,d^3l}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\mu(l)}}\,\mu(k)\,\{e^{il\cdot x}(-a(k)\,\delta(k-l))+e^{-il\cdot x}a^\dagger(k)\,\delta(k-l)\}=\\
&=\int\frac{\sqrt{\mu(k)}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2}}\,(-e^{ik\cdot x}a(k)+e^{-ik\cdot x}a^\dagger(k))\,d^3k=-i\pi_m(x);
\end{aligned}$$

$$[H,\ [H,\ \varphi_m(x)]]=[H_0,\ [H,\ \varphi_m(x)]]+[H_I,\ [H,\ \varphi_m(x)]];$$

$$\begin{aligned}
[H_0[H,\ \varphi_m(x)]]&=\int\frac{(\mu(k))^2}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\mu(k)}}\,[e^{ik\cdot x}a(k)+e^{-ik\cdot x}a^\dagger(k)]\,d^3k=\\
&=(-\Delta+m^2)\,\varphi_m(x);
\end{aligned}$$

$$[\varphi_m(y),\ [H,\ \varphi_m(x)]]=\int\frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{(2\pi)^{3/2}}\,d^3k=\delta(x-y);$$

$$\begin{aligned}
[H_I,\ [H,\ \varphi_m(x)]]&=\lambda\int[\varphi_m(y)^4,\ [H,\ \varphi_m(x)]]\,d^3y=\\
&=4\lambda\int\varphi_m(y)^3\,\delta(x-y)\,d^3y=4\lambda\varphi_m(x)^3.
\end{aligned}$$

В итоге

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi(x,t)}{\partial t^2}&=e^{itH}(\Delta-m^2)\,\varphi_m(x)\,e^{-itH}-4\lambda e^{itH}\varphi_m(x)^3\,e^{-itH}=\\
&=(\Delta-m^2)\,e^{itH}\varphi_m(x)\,e^{-itH}-4\lambda\,(e^{itH}\varphi_m(x)\,e^{-itH})^3=\\
&=(\Delta-m^2)\,\Phi(x,\ t)-4\lambda\Phi(x,\ t)^3.
\end{aligned}$$

Таким образом, формально поле $\Phi(x,\ t)$ удовлетворяет уравнению

$$(\Box^2+m^2)\,\Phi(x,\ t)=-4\lambda\,(\Phi(x,\ t))^3. \tag{X.89}$$

Другой подход к интересующей нас задаче состоит в том, чтобы попытаться найти операторнозначную обобщенную функцию

$\Phi(x, t)$, которая удовлетворяет (X.89) и аксиомам Вайтмана. Далее мы будем писать $\varphi(x)$ вместо $\varphi_m(x)$.

Вернемся к рассмотрению (X.87). Хотя $\varphi(x)$ — корректно определенная квадратичная форма на $D_{\mathscr{S}} \times D_{\mathscr{S}}$, это не оператор, и потому необходимо разъяснить, что понимается под $(\varphi(x))^4$. Предположим, что мы взяли в качестве $\varphi(x)$ выражение (X.85) и формально возвели его в четвертую степень так, как будто $\varphi(x)$ — оператор. Мы получим сумму 16 членов вида

$$\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{\mathbb{R}^3 \ldots \mathbb{R}^3} \exp\left(-i \sum_{j=1}^{4} k_j x\right)\left(\prod_{j=1}^{4} (2\pi)^{-3/2} (2\mu(k_j))^{-1/2}\right) \times \\ \times \left(\prod_{j=1}^{4} a^{\#}(k_j)\right) d^3k_1 \ldots d^3k_4, \qquad (X.90)$$

где $a^{\#}(k_j)$ означает либо $a(-k_j)$, либо $a^{\dagger}(k_j)$. Как мы уже знаем, выражения вида (X.90), вообще говоря, не имеют смысла даже как квадратичные формы, если только в них все $a^{\dagger}$ не стоят слева от a. Если же все $a^{\dagger}$ стоят слева от a, то (X.90) для каждого x задает квадратичную форму на $D_{\mathscr{S}} \times D_{\mathscr{S}}$. Поэтому определим n-ю **викову степень** $\varphi(x)$ как квадратичную форму на $D_{\mathscr{S}} \times D_{\mathscr{S}}$, получаемую путем формального возведения $\varphi(x)$ в n-ю степень и перестановки в полученном выражении всех $a^{\dagger}$ налево от a. Будем обозначать n-ю викову степень $\varphi(x)$ через $:\varphi(x)^n:$. Подчеркнем, что правильнее было бы называть ее n-й виковой степенью *относительно* Ω_0 (см. задачу 48). Читатель может убедиться, что *формально*

$$:\varphi(x)^4: = \varphi(x)^4 - c\varphi(x)^2 + d,$$

где c и d — выбранные подходящим образом бесконечные константы. Вводя далее обрезания, мы придадим точный математический смысл этому выражению.

Если теперь в (X.87) заменить $\varphi(x)^4$ на $:\varphi(x)^4:$, то H станет квадратичной формой на $D_{\mathscr{S}} \times D_{\mathscr{S}}$. Например, если $\psi_i = \{0, 0, 0, \psi_i^{(3)}, 0, \ldots\}$, $i = 1, 2$, то член с двумя $a^{\dagger}$ и двумя a, входящий в $(\psi_1, H\psi_2)$, равен

$$\int\left(\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\left(\frac{\exp(-ix\cdot(k_1+k_2-k_3-k_4))}{\prod_{j=1}^{4}(2\mu(k_j))^{1/2}(2\pi)^{3/2}}\right) \times \right. \\ \left. \times \left(\int\!\!\int \overline{\psi_1^{(3)}(p_1, k_1, k_2)}\, \psi_2^{(3)}(p_2, k_3, k_4)\, d^3p_1\, d^3p_2\right) d^3k_1 \ldots d^3k_4\right) d^3x. \\ (X.91)$$

Это корректно определенный конечный интеграл, ибо $\psi_i^{(3)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$. К сожалению, квадратичная форма H не порождается никаким оператором. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим формальное выражение для $H\Omega_0$. Оно равно вектору $(0, 0, 0, 0, \psi^{(4)}, 0, \ldots)$, где (формально)

$$\psi^{(4)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp\left(-ix \cdot \sum\limits_{j=1}^{4} k_j\right)}{\prod\limits_{i=1}^{4} (2\pi)^{3/2}\, 2\mu(k_i))^{1/2}}\, d^3x =$$

$$= \frac{\delta\left(\sum\limits_{j=1}^{4} k_j\right)}{(2\pi)^3 \prod\limits_{i=1}^{4} (2\mu(k_i))^{1/2}}.$$

Это выражение заведомо не принадлежит $L^2(\mathbb{R}^{3\cdot 4})$; во-первых, оно сингулярно из-за δ-функции, а во-вторых, даже если ограничить область интегрирования по x, взяв $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ и рассмотрев

$$\int \frac{g(x)\exp\left(-ix \sum\limits_{j=1}^{4} k_j\right)}{\prod\limits_{i=1}^{4} (2\pi)^{3/2} (2\mu(k_i))^{1/2}}\, d^3x = \frac{\hat{g}\left(\sum\limits_{j=1}^{4} k_j\right)}{(2\pi)^{9/2} \prod\limits_{i=1}^{4} (2\mu(k_i))^{1/2}},$$

мы все еще не получим L^2-функцию из-за слишком медленного убывания $\mu(k_i)$ на ∞. Таким образом, здесь мы столкнулись с бесконечностями двух типов: расходимостью, вызванной бесконечностью объема (x-пространства), и ультрафиолетовыми расходимостями (большие k).

Для того чтобы все-таки получить оператор, *мы ограничимся рассмотрением одномерного пространства* (т. е. теперь каждая из переменных p_i, k_i, x будет одномерной) и заменим квадратичную форму $\int\limits_{\mathbb{R}} :\varphi(x)^4:\, dx$ на $\int\limits_{\mathbb{R}} g(x) :\varphi(x)^4:\, dx$, где $g(x)$ — вещественнозначная функция из $L^2(\mathbb{R})$. Тогда каждый член в квадратичной форме

$$H_0 + \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) :\varphi(x)^4:\, dx$$

обладает ядром вида $\hat{g}\left(\sum\limits_{j=1}^{4} k_j\right) \Big/ \prod\limits_{i=1}^{4} (2\mu(k_i))^{1/2}$. Поскольку эта функция лежит в $L^2(\mathbb{R}^4)$ (задача 47), теорема X.44 гарантирует, что квадратичную форму порождает некоторый оператор на $D_{\mathscr{S}}$, который симметричен, ибо g — вещественнозначная функция.

Обозначим оператор $\int\limits_{\mathbb{R}} g(x) :\varphi(x)^4: dx$ через $H_I(g)$ и определим на $D_{\mathcal{S}}$ оператор

$$H(g) = H_0 + H_I(g) = H_0 + \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) :\varphi(x)^4: dx.$$

В качестве g мы будем часто выбирать гладкую функцию с компактным носителем, равную единице на очень большом интервале. Иногда в качестве g выбирают характеристическую функцию большого интервала. В любом случае смысл введения g в том, что она выключает взаимодействие при больших значениях x. По этой причине g называется **пространственным обрезанием,** а $H(g)$ — **пространственно обрезанным гамильтонианом полевой теории** $(\varphi^4)_2$-**взаимодействия** (индекс 2 указывает на то, что мы используем одномерное пространство, так что пространство-время двумерно). Соберем все сказанное в отдельное

Предложение. Пусть φ — свободное скалярное бозонное поле массы m при $t=0$ в двумерном пространстве-времени. Пусть g — вещественнозначная функция из $L^2(\mathbb{R})$. Тогда

$$H(g) = H_0 + H_I(g) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mu(k)\, a^\dagger(k)\, a(k)\, dk + \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) :\varphi(x)^4: dx$$

— корректно заданный на $D_{\mathcal{S}}$ симметрический оператор.

В § 9 мы докажем, что $H(g)$ самосопряжен в существенном на $C^\infty(H_0) \cap D(H_I(g))$, а в гл. XIX покажем, как с помощью алгебр фон Неймана можно снять пространственное обрезание, перейдя к новому представлению канонических коммутационных соотношений.

Считается, что указанный способ анализа объемных расходимостей, состоящий во введении и последующем убирании с помощью методов теории C^*-алгебр пространственного обрезания, остается приемлемым и при рассмотрении расходимостей того же типа в более общих теориях квантованных полей. Предполагается, что ультрафиолетовые расходимости в $(\varphi^4)_3$- и $(\varphi^4)_4$-моделях можно убрать с помощью процедуры, известной под именем процедуры перенормировок, сопровождаемой изменением представления канонических коммутационных соотношений. Для того чтобы кратко описать процедуру перенормировки, напомним, что, как мы уже видели, виково упорядочение степеней поля можно интерпретировать как вычитание полинома более низкого порядка с бесконечными коэффициентами. Для $(\varphi^4)_3$-модели известно, а для $(\varphi^4)_4$-модели ожидается, что похожий способ вычитания членов с бесконечными константами будет по-прежнему применим, с тем исключением, что константы не будут больше линейно зависеть от λ, как это было в случае викова упорядочения. Дальнейшее обсуждение и ссылки на результаты в теории $(\varphi^4)_3$-взаимодействия см. в Замечаниях.

Наша последняя тема—построение **Q-пространства** и пространства $L^2(Q, d\mu)$, где можно дать новое представление для введенных выше структур, связанных с пространством Фока. По аналогии со случаем одной степени свободы, когда $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ изоморфно $L^2(\mathbb{R}, dx)$, причем $\Phi_S(1)$ становится умножением на x, мы построим пространство с мерой $\langle Q, \mu\rangle$, $\mu(Q)=1$, и унитарное отображение $S: \mathcal{F}_s(\mathcal{H}) \to L^2(Q, d\mu)$, такие, что $S\varphi(f)S^{-1}$ для каждой функции $f \in \mathcal{H}_C$ будет действовать в $L^2(Q, d\mu)$ как оператор умножения на измеримую функцию. Затем мы сумеем показать, что в случае свободного скалярного поля массы m в двумерном пространстве-времени величина $V \equiv SH_I(g)S^{-1}$ задается оператором умножения на функцию $V(q)$, которая для каждого $p < \infty$ лежит в пространстве $L^p(Q, d\mu)$. В § X.9 мы воспользуемся этим фактом для доказательства самосопряженности в существенном на $C^\infty(H_0) \cap D(H_I(g))$ гамильтониана $H = H_0 + H_I(g)$.

Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$—такой ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, что $f_n \in \mathcal{H}_C$, и пусть $\{g_k\}_{k=1}^N$—конечный набор f_n. Пусть $\mathcal{F}_N$—замыкание множества

$$\{P(\varphi(g_1), \ldots, \varphi(g_N))\,\Omega_0 \mid P \text{—полином}\}$$

в пространстве $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ и $F_0^{(N)} = \mathcal{F}_N \cap F_0$. Из теоремы X.43 (и ее доказательства) следует, что $\varphi(g_k)$ и $\pi(g_l)$ самосопряжены в существенном на $F_0^{(N)}$ и

$$e^{it\varphi(g_k)}\, e^{is\pi(g_l)} = e^{-ist\delta_{kl}}\, e^{is\pi(g_l)}\, e^{it\varphi(g_k)}.$$

Иначе говоря, у нас есть представление соотношений Вейля, в котором вектор Ω_0 удовлетворяет равенству $(\varphi(g_k)^2 + \pi(g_k)^2 - 1)\,\Omega_0 = 0$ и цикличен относительно операторов $\{\varphi(g_k)\}_{k=1}^N$. Следовательно, с помощью построений из задачи 30 (или теоремы VIII.14) можно заключить, что существует унитарное отображение $\tilde{S}^{(N)}: \mathcal{F}_N \to L^2(\mathbb{R}^N)$ со следующими свойствами:

$$\tilde{S}^{(N)}\varphi(g_k)(\tilde{S}^{(N)})^{-1} = x_k,$$

$$\tilde{S}^{(N)}\pi(g_k)(\tilde{S}^{(N)})^{-1} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k},$$

$$\tilde{S}^{(N)}\Omega_0 = \pi^{-N/4}\exp\left(-\sum_{k=1}^{N}\frac{x_k^2}{2}\right).$$

Удобно вместо $L^2(\mathbb{R}^N)$ использовать гильбертово пространство $L^2\left(\mathbb{R}^N,\ \pi^{-N/2}\exp\left(-\sum_{k=1}^N x_k^2\right)d^Nx\right)$. Положим поэтому $d\mu_k = \pi^{-1/2}\exp(-x_k^2)\,dx_k$ и введем $(Tf)(x)=\pi^{N/4}\exp\left(\sum_{k=1}^N x_k^2/2\right)f(x)$. Тогда T будет унитарным отображением $L^2(\mathbb{R}^N)$ на $L^2\left(\mathbb{R}^N,\ \prod_{k=1}^N d\mu_k\right)$, и если положить $S^{(N)}=T\tilde{S}^{(N)}$, то

$$S^{(N)}\colon \mathcal{F}_N \to L^2\left(\mathbb{R}^N,\ \prod_{k=1}^N d\mu_k\right),$$

$$S^{(N)}\varphi(g_k)(S^{(N)})^{-1}=x_k,$$

$$S^{(N)}\pi(g_k)(S^{(N)})^{-1}=-\frac{x_k}{i}+\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k},$$

$$S^{(N)}\Omega_0=1 \text{ (функция, тождественно равная единице).}$$

Отметим, что масса каждой меры μ_k равна единице и потому

$$(\Omega_0,\ P_1(\varphi(g_1))\ldots P_N(\varphi(g_N))\,\Omega_0)=\int\limits_{\mathbb{R}^N} P_1(x_1)\ldots P_N(x_N)\prod_{k=1}^N d\mu_k =$$

$$=\prod_{k=1}^N \int\limits_{\mathbb{R}} P_k(x_k)\,d\mu_k=\prod_{k=1}^N(\Omega_0,\ P_k(\varphi(g_k))\,\Omega_0), \qquad (\text{X}.92)$$

где $P_1, \ldots, P_N$ — полиномы. Эту формулу можно доказать и с помощью прямых вычислений в $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$.

Теперь легко понять, как построить $\langle Q, d\mu\rangle$. Определим Q равенством $Q=\mathop{\times}\limits_{k=1}^{\infty}\mathbb{R}$. Возьмем σ-алгебру, порождаемую счетными произведениями измеримых множеств из $\mathbb{R}$, и положим $\mu=\bigotimes\limits_{k=1}^{\infty}\mu_k$. Обозначим точки Q через $q=\langle q_1, q_2, \ldots\rangle$. Тогда $\langle Q, \mu\rangle$ — пространство с мерой и множество функций вида $P(q_1, \ldots, q_n)$, где P — полином, а n произвольно, плотно в $L^2(Q, d\mu)$. Обсуждение деталей, относящихся к теории меры, можно найти в работах, указанных в Замечаниях. Пусть P — полином от N переменных:

$$P(x_{k_1}, \ldots, x_{k_N})=\sum_{l_1, \ldots, l_N} c_{l_1, \ldots, l_N}\, x_{k_1}^{l_1}\ldots x_{k_N}^{l_N};$$

определим отображение

$$S\colon P(\varphi(f_{k_1}), \ldots, \varphi(f_{k_N}))\,\Omega_0 \mapsto P(q_{k_1}, \ldots, q_{k_N}).$$

Тогда, в силу (X.92), поскольку каждая мера μ_k имеет массу единица,

$$\|P(\varphi(f_{k_1}), \ldots, \varphi(f_{k_N}))\Omega_0\|^2 = \sum_{\mathbf{l},\,\mathbf{m}} c_{\mathbf{l}} \bar{c}_{\mathbf{m}} (\Omega_0, \varphi(f_{k_1})^{l_1+m_1} \ldots$$
$$\ldots \varphi(f_{k_N})^{l_N+m_N}\Omega_0) =$$
$$= \sum_{\mathbf{l},\,\mathbf{m}} c_{\mathbf{l}} \bar{c}_{\mathbf{m}} \int_{\mathbb{R}_N} q_{k_1}^{l_1+m_1} \ldots q_{k_N}^{l_N+m_N} \prod_{i=1}^{N} d\mu_{k_i} =$$
$$= \int_Q |P(q_{k_1}, \ldots, q_{k_N})|^2 \, d\mu.$$

Вектор Ω_0 цикличен относительно полиномов по полям (теорема X.42), поэтому S продолжается до унитарного отображения из $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ на $L^2(Q, d\mu)$. Ясно, что $S\varphi(f_k)S^{-1} = q_k$ и $S\Omega_0 = 1$.

Теорема X.45. Пусть φ_m — свободное скалярное поле массы m (в двумерном пространстве-времени), взятое в нулевой момент времени. Пусть $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Определим $H_I(g)$ формулой

$$H_I(g) = \int_{\mathbb{R}} g(x) :\varphi_m(x)^4: dx.$$

Пусть S — построенное выше унитарное отображение $\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}))$ на $L^2(Q, d\mu)$. Тогда $V \equiv SH_I(g)S^{-1}$ есть оператор умножения на функцию $V(q)$, обладающую следующими свойствами:

(a) $V \in L^p(Q, d\mu)$ для всех $p < \infty$;

(b) $e^{-tV} \in L^1(Q, d\mu)$ для всех $t \in [0, \infty)$.

Доказательство. Докажем (a). По поводу доказательства (b) мы отсылаем читателя к работам, указанным в Замечаниях. Пусть $\chi_n(k)$ — характеристическая функция интервала $(-n, n)$. Положим

$$\varphi_m(x;\, n) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int [e^{-ik\cdot x} a(k) + e^{ik\cdot x} a^\dagger(k)] \frac{\chi_n(k)}{\sqrt{\mu(k)}} dk.$$

В таком случае $\varphi_m(x;\, n)$ — корректно определенная операторнозначная *функция* x. Определим $:\varphi_m(x;\, n)^4:$, переставляя налево все $a^\dagger$, входящие в формальное выражение для $\varphi_m(x;\, n)^4$. Полученная таким образом величина $:\varphi_m(x;\, n)^4:$ тоже представляет собой корректно определенный оператор для каждого значения x, который переводит F_0 в себя. Определим теперь

$$H_I(g;\, n) = \int_{\mathbb{R}} g(x) :\varphi_m(x;\, n)^4: dx$$

и положим $V_n = SH_I(g;\, n)S^{-1}$. Для каждого значения x

$$:\varphi_m(x;\, n)^4: = \varphi_m(x;\, n)^4 + d_2(n)\,\varphi_m(x;\, n)^2 + d_0(n),$$

где коэффициенты d_2 и d_0 не зависят от x, но зависят от n (задача 48). При каждом значении x величина $S\varphi_m(x; n)S^{-1}$ — это оператор на $L^2(Q, d\mu)$, действующий как умножение на $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x; n)q_k$, где $c_k(x; n) = (2\pi)^{-1/2}(f_k, \chi_n\mu^{-1/2}\exp(ikx))$. Более того, $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(x; n)|^2 = (2\pi)^{-1}\|\chi_n\mu^{-1/2}\|_2^2$, так что $S\varphi_m(x; n)^4 S^{-1}$ и $S\varphi_m(x; n)^2 S^{-1}$ лежат в $L^2(Q, d\mu)$ и их $L^2(Q, d\mu)$-нормы равномерно ограничены по x. Следовательно, в силу того что $g \in L^1(\mathbb{R})$, оператор $SH_I(g; n)S^{-1}$ действует в $L^2(Q, d\mu)$ как умножение на $L^2(Q, d\mu)$-функцию, которую мы обозначим через $V_n(q)$.

Гамильтониан $H_I(g; n)$ для каждого n отличается от $H_I(g)$ только тем, что ядро каждого члена, входящего в $H_I(g; n)$, равно $g\left(\sum_{j=1}^{4} k_j\right)\prod_{i=1}^{4}\mu(k_i)^{-1/2}\chi_n(k_i)$. При $n\to\infty$ эти ядра сходятся в $L^2(\mathbb{R}^4)$ к $g\left(\sum_{j=1}^{4} k_j\right)\prod_{i=1}^{4}\mu(k_i)^{-1/2}$. Следовательно, по теореме X.44, $H_I(g; n)\psi \to H_I(g)\psi$ при $\psi \in F_0$. В частности, $H_I(g; n)\Omega_0 \to H_I(g)\Omega_0$. Но $S\Omega_0 = 1$ и, значит, $\|H_I(g; n)\Omega_0\| = \|SH_I(g; n)S^{-1}\|_{L^2(Q, d\mu)} = \|V_n\|_{L^2(Q, d\mu)}$. В итоге функции V_n образуют последовательность Коши в $L^2(Q, d\mu)$ и потому сходятся к некоторой функции $V \in L^2(Q, d\mu)$. Читатель теперь сможет легко завершить доказательство, показав, что каждый $P(q_1, \ldots, q_n)$ входит в область определения V и что $SH_I(g)S^{-1} = V$ на этой области. Поскольку Ω_0 лежит в области определения $H_I(g)^n$ для любого n, в область определения V^n при любом n входит 1. Таким образом, $V \in L^{2n}(Q, d\mu)$ для всех n и, поскольку $\mu(Q) < \infty$, $V \in L^p(Q, d\mu)$ для всех $p < \infty$. ∎

Дополнение к § X.7. Соотношения Вейля для свободного поля

В этом дополнении мы изучаем естественное обобщение соотношений Вейля (VIII.8) на случай бесконечного числа степеней свободы. Пусть $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$ — пространство Шварца вещественнозначных функций на $\mathbb{R}^l$. Предположим, что $f \mapsto U(f)$ и $f \mapsto V(f)$ — отображения из $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$ во множество ограниченных операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, удовлетворяющие условиям

(i) $V(f)$ и $U(f)$ унитарны для каждой $f \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$;

(ii) для $V(f)$ и $U(f)$ при всех f, $g \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$ справедливы соотношения

$$V(f)V(g) = V(f+g), \qquad U(f)U(g) = U(f+g), \qquad (X.93)$$

$$V(f)\,U(g)=U(g)\,V(f)\exp\left(-i\int\limits_{\mathbb{R}^l} f(x)\,g(x)\,dx\right); \qquad (X.94)$$

(iii) если $f_n \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R}^l)} f$, то $U(f_n)\to U(f)$ и $V(f_n)\to V(f)$ сильно на $\mathscr{H}$.

Пара отображений $\{U(\cdot),\ V(\cdot)\}$ называется **представлением соотношений Вейля** над $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$. Два таких представления $\{U_1(\cdot),\ V_1(\cdot)\}$ на $\mathscr{H}_1$ и $\{U_2(\cdot),\ V_2(\cdot)\}$ на $\mathscr{H}_2$ называются **эквивалентными**, если существует унитарный оператор T: $\mathscr{H}_1\to\mathscr{H}_2$, такой, что $U_2(f)=TU_1(f)\,T^{-1}$ и $V_2(f)=TV_1(f)\,T^{-1}$ для всех $f\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$. Соотношение (X.71) показывает, что для каждого m пара $\{\exp(i\pi_m(\cdot)),\ \exp(i\varphi_m(\cdot))\}$, где π_m, φ_m — взятые в нулевой момент времени скалярное поле массы m и его сопряженный импульс, реализует представление соотношений Вейля на $\mathscr{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$. Как мы увидим дальше, эти представления для различных m не эквивалентны.

Пусть $\{U(\cdot),\ V(\cdot)\}$ — представление соотношений Вейля над $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$, и пусть $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R}^l)$, построенный из произведений функций Эрмита. Если положить $U_n(t)=U(th_n)$ и $V_n(t)=V(th_n)$, то из (X.93), (X.94) и (iii) будет следовать, что $U_n(t)$, $V_n(t)$ при каждом n — сильно непрерывные унитарные группы на $\mathscr{H}$, обладающие свойством

$$\begin{aligned} &V_n(t)\,U_m(s)=U_m(s)\,V_n(t), \qquad m\neq n,\\ &V_n(t)\,U_n(s)=e^{-ist}\,U_n(s)\,V_n(t)\end{aligned} \qquad (X.95)$$

для всех $s,\ t\in\mathbb{R}$. Таким образом, $\{U_n(t),\ V_n(s)\}$ при всех n удовлетворяет соотношениям Вейля (VIII.8) и для различных n соответствующие унитарные операторы коммутируют. Теорема фон Неймана (теорема VIII.14; см. задачу 30 и гл. XIV) утверждает, что с точностью до кратности существует единственное представление (представление Шредингера) соотношений (X.95), если n принимает конечное множество целочисленных значений. Долгое время полагали, что теорема фон Неймана остается справедливой и в случае, когда n принимает бесконечное число значений, однако в работе Фридрихса в конце сороковых годов были указаны примеры неэквивалентных представлений, значение которых было подчеркнуто в более поздних работах Сигала и Гординга — Вайтмана. Как мы уже упоминали, приводимая ниже теорема X.46 показывает, что свободные скалярные поля различной массы приводят к неэквивалентным представлениям.

В силу (X.93) и (iii), унитарные группы $V(tf)$, $U(tf)$ непрерывны на $\mathscr{H}$; обозначим их генераторы через $\varphi(f)$ и $\pi(f)$ соответственно. Можно показать, что в $\mathscr{H}$ существует область D, инвариантная относительно действия всех операторов $\varphi(f)$, $\pi(f)$, $f\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$, на которой $\varphi(f)$ и $\pi(f)$ самосопряжены в существенном. Для $\psi \in D$ соотношение (X.94) дает

$$[\varphi(f),\ \pi(g)]\psi = i\int f(x)\,g(x)\,dx\,\psi \tag{X.96}$$

при всех $f,\ g\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$. Пара операторнозначных обобщенных функций над $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^l)$, удовлетворяющих (X.96), называется **представлением канонических коммутационных соотношений.** Мы уже видели, что в случае свободного скалярного поля массы m, взятого в нулевой момент времени, в качестве D можно взять D_0 и что (X.96) можно проверить прямым вычислением. Так же, как и в случае конечного числа p_l и q_l, обсуждавшемся в § VIII.5, равенство (X.96) не обязательно влечет за собой (X.94), хотя формально они эквивалентны.

Докажем теперь, что представления канонических коммутационных соотношений, порождаемые свободными скалярными полями различной масccы $m>0$, неэквивалентны. Будем называть семейство ограниченных операторов на гильбертовом пространстве **неприводимым**, если любой оператор, коммутирующий со всеми членами семейства, кратен единичному оператору.

Лемма 1. Пусть $\Phi_S(\cdot)$—сигалово квантование над сепарабельным гильбертовым пространством $\mathcal{H}$. Тогда семейство операторов $\{\exp(i\Phi_S(f))\,|\,f\in\mathcal{H}\}$ неприводимо.

Доказательство. Пусть $\{\exp(i\Phi_S(f))\,|\,f\in\mathcal{H}\}'$—множество операторов, коммутирующих со всеми $\exp(i\Phi_S(f))$, $f\in\mathcal{H}$. Поскольку $\{\exp(i\Phi_S(f))\,|\,f\in\mathcal{H}\}'$—равномерно замкнутая алгебра операторов, замкнутая, кроме того, и относительно операции сопряжения, можно провести рассмотрение, подобное проведенному при доказательстве леммы после теоремы VI.19; оно показывает, что каждый оператор в $\{\exp(i\Phi_S(f))\,|\,f\in\mathcal{H}\}'$ может быть записан как линейная комбинация четырех унитарных операторов из $\{\exp(i\Phi_S(f))\,|\,f\in\mathcal{H}\}'$. Поэтому достаточно доказать, что каждый унитарный оператор $T\in\{\exp(i\Phi_S(f))\,|\,f\in\mathcal{H}\}'$ кратен единичному оператору.

Для каждого $f\in\mathcal{H}$ и всех t такой T коммутирует с $\exp(it\Phi_S(f))$, и потому, в силу теоремы VIII.13, он коммутирует со всеми спектральными проекторами оператора $\Phi_S(f)$. Таким образом, $T\colon\ D(\Phi_S(f))\to D(\Phi_S(f))$ и $T\Phi_S(f)\psi=\Phi_S(f)T\psi$ для всех $\psi\in D(\Phi_S(f))$. Пусть теперь C—сопряжение на $\mathcal{H}$. Положим $N(f)=(\Phi_S(f)^2+\Phi_S(if)^2-1)/2$ для $f\in\mathcal{H}_C$. Тогда $N(f)\geqslant 0$, ибо $N(f)=d\Gamma((f,\ \cdot)f)$ и $T\colon\ D(N(f))\to D(N(f))$, $TN(f)\psi=N(f)T\psi$ для $\psi\in D(N(f))$. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$—ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, состоящий из $f_i\in\mathcal{H}_C$ при каждом i. Читатель легко проверит, что для каждого $\psi\in D(N)$

$$N\psi=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}N(f_i)\,\psi.$$

Следовательно, ψ тогда и только тогда лежит в области определения $Q(N)$ формы, отвечающей N, когда $\psi \in \bigcap_{i=1}^{\infty} Q(N(f_i))$ и $\sum_{i=1}^{\infty} (\psi, N(f_i)\psi) < \infty$, а если эта сумма конечна, то

$$(\psi, N\psi) = \sum_{i=1}^{\infty} (\psi, N(f_i)\psi).$$

Поскольку $\Omega_0 \in D(N(f_i))$, то $T\Omega_0 \in D(N(f_i))$. Значит,

$$\sum_{i=1}^{\infty} (T\Omega_0, N(f_i)T\Omega_0) = \sum_{i=1}^{\infty} (T^*T\Omega_0, N(f_i)\Omega_0) = 0,$$

так как $N(f_i)\Omega_0 = 0$ для всех i. Отсюда $T\Omega_0 \in Q(N)$ и $(T\Omega_0, NT\Omega_0) = 0$. Поскольку N строго положителен на $\{\Omega_0\}^{\perp}$, существует такая константа c, что $T\Omega_0 = c\Omega_0$. Пусть $\mathcal{P}$ — полином от $\Phi_S(g_1), \ldots, \Phi_S(g_n)$ с некоторыми $g_i \in \mathcal{H}$. Тогда $T(\mathcal{P}\Omega_0) = \mathcal{P}(T\Omega_0) = c\mathcal{P}\Omega_0$. Множество векторов вида $\mathcal{P}\Omega_0$ плотно в $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ (теорема X.41). Следовательно, $T = cI$. ∎

Лемма 2. Пусть $\varphi_m(\cdot)$, $\pi_m(\cdot)$ — взятые в нулевой момент поле и его сопряженный импульс, отвечающие свободному скалярному полю массы m. Тогда семейство

$$\{e^{i\varphi_m(f)}, e^{i\pi_m(f)} \mid f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)\}$$

неприводимо.

Доказательство. Читатель легко выведет лемму 2 из леммы 1, используя плотность $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ в $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ и свойство непрерывности полей (теорема X.41 (d)). ∎

Теорема X.46. Пусть $\varphi_m(\cdot)$, $\pi_m(\cdot)$ — взятые в нулевой момент поле и его сопряженный импульс, отвечающие свободному скалярному полю массы m. Тогда представления $\{\exp(i\pi_{m_1}(\cdot)), \exp(i\varphi_{m_1}(\cdot))\}$ и $\{\exp(i\pi_{m_2}(\cdot)), \exp(i\varphi_{m_2}(\cdot))\}$ соотношений Вейля при $m_1 \neq m_2$ не эквивалентны.

Доказательство. Предположим, что существует унитарное отображение T на $\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$, удовлетворяющее условиям

$$T\exp(i\pi_{m_1}(f))T^{-1} = \exp(i\pi_{m_2}(f)), \quad T\exp(i\varphi_{m_1}(f))T^{-1} = \exp(i\varphi_{m_2}(f))$$

при всех $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$. Пусть $G_{m_1}(\cdot, \cdot)$ и $G_{m_2}(\cdot, \cdot)$ обозначают сужения представлений $\Gamma(U_{m_1}(\cdot, \cdot))$ и $\Gamma(U_{m_2}(\cdot, \cdot))$ на евклидову группу, являющуюся подгруппой в $\mathcal{P}_+^{\uparrow}$, оставляющей неизменной фиксированную плоскость, отвечающую нулевому моменту времени (полупрямое произведение группы вращений и группы сдвигов на $\mathbb{R}^3$). Для любого элемента $\langle R, a\rangle$ евклидовой группы пуанкаре-инвариантность полей дает

$$G_{m_1}(R, a)\,\varphi_{m_1}(f)\,G_{m_1}(R, a)^{-1} = \varphi_{m_1}(\langle R, a\rangle f),$$
$$G_{m_2}(R, a)\,\varphi_{m_2}(f)\,G_{m_2}(R, a)^{-1} = \varphi_{m_2}(\langle R, a\rangle f)$$

и аналогичные соотношения для π_{m_1} и π_{m_2}. В такой ситуации функциональное исчисление позволяет получить равенства

$$G_{m_1}(R, a)\exp(i\varphi_{m_1}(f))\,G_{m_1}(R, a)^{-1} = \exp(i\varphi_{m_1}(\langle R, a\rangle f)),$$
$$G_{m_2}(R, a)\exp(i\varphi_{m_2}(f))\,G_{m_2}(R, a)^{-1} = \exp(i\varphi_{m_2}(\langle R, a\rangle f))$$

и аналогичные равенства для π_{m_1} и π_{m_2}. Читатель может быстро проверить, что из этих соотношений и свойств T вытекает перестановочность $TG_{m_1}(R, a)\,T^{-1}G_{m_2}(\langle R, a\rangle^{-1})$ и с $\exp(i\pi_{m_2}(f))$, и с $\exp(i\varphi_{m_2}(f))$ для каждого $\langle R, a\rangle$ и каждой функции $f \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$. В таком случае лемма 2 приводит к равенству

$$TG_{m_1}(R, a)\,T^{-1}G_{m_2}(\langle R, a\rangle^{-1}) = C(R, a),$$

или

$$TG_{m_1}(R, a)\,T^{-1} = C(R, a)\,G_{m_2}(R, a),$$

где $C(R, a)$ — постоянная, которая a priori может зависеть от R и a. Из приведенных выше соотношений следует, что $C(\cdot, \cdot)$ — одномерное представление евклидовой группы. Нетрудно показать (задача 41), что единственным таким представлением будет тождественное представление. Таким образом,

$$TG_{m_1}(R, a)\,T^{-1} = G_{m_2}(R, a)$$

для всех $\langle R, a\rangle$ из евклидовой группы. А отсюда следует, что $T\Omega_0 = \alpha\Omega_0$, поскольку Ω_0 — единственный вектор, инвариантный относительно G_{m_1} и G_{m_2} одновременно. В итоге

$$(\Omega_0, \varphi_{m_1}(f)\,\varphi_{m_1}(g)\,\Omega_0) = (\Omega_0, T\varphi_{m_1}(f)\,T^{-1}T\varphi_{m_1}(g)\,T^{-1}\Omega_0) =$$
$$= (\Omega_0, \varphi_{m_2}(f)\,\varphi_{m_2}(g)\,\Omega_0).$$

Это означает, что $(\Omega_0, \varphi_{m_1}(x)\,\varphi_{m_1}(y)\,\Omega_0)$ и $(\Omega_0, \varphi_{m_2}(x)\,\varphi_{m_2}(y)\,\Omega_0)$ равны как обобщенные функции умеренного роста на $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)\times \times\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$. Но

$$(\Omega_0, \varphi_{m_1}(x)\,\varphi_{m_1}(y)\,\Omega_0) = \Delta_+(x-y;\ m_1^2),$$

а

$$(\Omega_0, \varphi_{m_2}(x)\,\varphi_{m_2}(y)\,\Omega_0) = \Delta_+(x-y;\ m_2^2),$$

и эти обобщенные функции *не равны*, если $m_1 \neq m_2$. Следовательно, отображения T с указанными выше свойствами не существует, и потому представления соотношений Вейля не эквивалентны. ∎

X.8. Полугруппы и их генераторы

Семейство ограниченных операторов $\{T(t) \mid 0 \leqslant t < \infty\}$ на банаховом пространстве X называется **сильно непрерывной полугруппой**, если

(a) $T(0) = I$.

(b) $T(s)T(t) = T(s+t)$ при всех s, $t \in \mathbb{R}^+$.

(c) Для всякого $\varphi \in X$ отображение $t \mapsto T(t)\varphi$ непрерывно.

Такие полугруппы естественно возникают в теории дифференциальных уравнений в частных производных и в квантовой теории, и мы посвятим этот раздел изучению их основных свойств. Мы увидим, что сильно непрерывные полугруппы оказываются «экспонентами» $T(t) = e^{-tA}$ операторов некоторого класса. Они, таким образом, обобщают связь между унитарными группами и самосопряженными операторами. В частности, теорема Стоуна, основной критерий, теорема о существенной области (теорема VIII.11) и теорема Като—Реллиха—все имеют соответствующие обобщения на сильно непрерывные полугруппы и их генераторы. Единственное важное свойство самосопряженных операторов, которое не обобщается,—это спектральная теорема. Существует другой класс—так называемые «спектральные операторы»,—для которых аналог спектральной теоремы имеет место. Ссылки на литературу даны в Замечаниях. Теория полугрупп применяется к изучению параболических и гиперболических уравнений в частных производных. В этом разделе мы иллюстрируем все применения на уравнении теплопроводности. Более общие дифференциальные уравнения обсуждаются в Замечаниях.

Начнем с изучения одного специального класса полугрупп.

Определение. Семейство $\{T(t) \mid 0 \leqslant t < \infty\}$ ограниченных операторов на банаховом пространстве X называется **сжимающей полугруппой**, если это сильно непрерывная полугруппа и, сверх того, $\|T(t)\| \leqslant 1$ при всех $t \in [0, \infty)$.

Как увидит читатель, теоремы для общих сильно непрерывных полугрупп будут простым обобщением соответствующих теорем для сжимающих полугрупп. Поэтому изучим сначала этот специальный случай. Затем мы кратко обсудим общую теорию и заключим этот раздел рассмотрением другого специального класса—голоморфных полугрупп.

Пусть $T(t)$ —сжимающая полугруппа на банаховом пространстве X. Как и в случае унитарных групп на гильбертовых пространствах, генератор полугруппы $T(t)$ получается дифференцированием. Положим $A_t = t^{-1}(I - T(t))$ и определим

$$D(A) = \{\varphi \mid \text{ существует } \lim_{t \downarrow 0} A_t\varphi\}.$$

Для $\varphi \in D(A)$ положим $A\varphi = \lim\limits_{t \downarrow 0} A_t \varphi$. Первая наша цель — показать, что область $D(A)$ плотна. Мы прибегнем к приему, напоминающему технику, применявшуюся при доказательстве теоремы Стоуна. Для $\varphi \in X$ положим

$$\varphi_s = \int_0^s T(t)\,\varphi\,dt.$$

Поскольку $\{T(t)\}$ сильно непрерывна, нам требуется только интеграл Римана.

Для любого $r > 0$ имеем $T(r)\,\varphi_s = \int_0^s T(t+r)\,\varphi\,dt$; поэтому

$$\begin{aligned} A_r\varphi_s &= -\frac{1}{r}\int_0^s (T(t+r)\,\varphi - T(t)\,\varphi)\,dt = \\ &= -\frac{1}{r}\int_s^{s+r} T(t)\,\varphi\,dt + \frac{1}{r}\int_0^r T(t)\,\varphi\,dt \longrightarrow \\ &\underset{r\downarrow 0}{\longrightarrow} -T(s)\,\varphi + \varphi. \end{aligned}$$

Следовательно, $\varphi_s \in D(A)$ при каждом $\varphi \in X$ и $s > 0$. Так как $s^{-1}\varphi_s \longrightarrow \varphi$ при $s \longrightarrow 0$, то A плотно определен. Далее, если $\varphi \in D(A)$, то $A_r T(t)\,\varphi = T(t)\,A_r\varphi$, следовательно, $T(t)\colon D(A) \longrightarrow D(A)$ и

$$\frac{d}{dt}T(t)\,\varphi = -AT(t)\,\varphi = -T(t)\,A\varphi. \tag{X.97}$$

Кроме того, A замкнут. Действительно, если $\varphi_n \in D(A)$, $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ и $A\varphi_n \longrightarrow \psi$, то

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} A_r\varphi &= \lim_{r\to 0}\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{r}(T(r)\,\varphi_n - \varphi_n)\right\} = \\ &= \lim_{r\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r}\int_0^r T(t)\,A\varphi_n\,dt = \quad (\text{в силу (X.97)}) \\ &= \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\int_0^r T(t)\,\psi\,dt = \psi, \end{aligned}$$

так что $\varphi \in D(A)$ и $A\varphi = \psi$. Итак, мы доказали следующее

Предложение. Пусть $T(t)$ — сильно непрерывная полугруппа на банаховом пространстве X. Положим $A\varphi = \lim\limits_{r\to 0} A_r\varphi$, причем $D(A) = \{\varphi \mid \text{существует } \lim\limits_{r\downarrow 0} A_r\varphi\}$. Тогда A замкнут и плотно определен. Оператор A называется **инфинитезимальным генератором** полугруппы $T(t)$. Будем также говорить, что A порождает $T(t)$, и писать $T(t) \equiv e^{-tA}$.

Естественно задаться вопросом, какими дополнительными свойствами обладает генератор сжимающей полугруппы. Формальное преобразование Лапласа

$$\frac{1}{\lambda+A} = -\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-tA}\,dt$$

позволяет предположить, что все λ с отрицательной вещественной частью принадлежат $\rho(A)$. Это действительно так, и приведенная формула выполняется в строгом смысле. Предположим, в самом деле, что $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Тогда из-за того, что $\|e^{-tA}\| \leqslant 1$, интеграл

$$R\varphi = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(e^{-tA}\varphi)\,dt$$

определяет ограниченный линейный оператор с нормой, меньшей или равной $(\operatorname{Re}\lambda)^{-1}$. Более того, при $r > 0$

$$A_r R\varphi = -\frac{1}{r}\int_0^\infty e^{-\lambda t}(e^{-(t+r)A} - e^{-tA})\,\varphi\,dt =$$

$$= \frac{1-e^{\lambda r}}{r}\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-tA}\varphi\,dt + \frac{e^{r\lambda}}{r}\int_0^r e^{-\lambda t}e^{-tA}\varphi\,dt,$$

так что $A_r R\varphi \to \varphi - \lambda R\varphi$, когда $r \to 0$. Значит, $R\varphi \in D(A)$ и $AR\varphi = \varphi - \lambda R\varphi$, откуда следует, что $(\lambda + A)R\varphi = \varphi$. Кроме того, для $\varphi \in D(A)$ имеем $AR\varphi = RA\varphi$, поскольку

$$A\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-tA}\varphi\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}Ae^{-tA}\varphi\,dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-tA}A\varphi\,dt.$$

Первое равенство есть результат приближения римановыми суммами, вытекающий из того, что $e^{-\lambda t}e^{-tA}\varphi$ и $Ae^{-\lambda t}e^{-tA}\varphi$ интегрируемы и A замкнут. Таким образом, для $\varphi \in D(A)$ выполняется $R(\lambda + A)\varphi = \varphi = (\lambda + A)R\varphi$, откуда следует, что

$$R = (\lambda + A)^{-1}.$$

Полученные свойства A на самом деле и достаточны для того, чтобы A порождал сжимающую полугруппу. Причем по существу нам нужны сведения только при вещественных положительных λ. Соответствующая теорема (которую мы позже обобщим) есть прямой аналог теоремы Стоуна для самосопряженных операторов.

Теорема X.47а (Хилле—Иосида). Необходимое и достаточное условие того, что замкнутый линейный оператор A на банаховом пространстве X порождает сжимающую полугруппу, состоит в следующем:

(i) $\quad (-\infty,\ 0)\subset\rho(A)$,

(ii) $\quad \|(\lambda+A)^{-1}\|\leqslant\lambda^{-1}$ при всех $\lambda>0$.

Кроме того, если A удовлетворяет (i) и (ii), то вся открытая левая полуплоскость содержится в $\rho(A)$ и

$$(\lambda+A)^{-1}\varphi=-\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-tA}\varphi\,dt \qquad (X.98)$$

при всех $\varphi\in X$ и таких λ, что $\operatorname{Re}\lambda>0$. Наконец, если $T_1(t)$ и $T_2(t)$—сжимающие полугруппы, порождаемые соответственно операторами A_1 и A_2, то из $T_2(t)\neq T_1(t)$ при каком-либо t следует, что $A_1\neq A_2$.

Доказательство. Выше мы показали, что условия (i) и (ii) являются необходимыми и что выполняется (X.98); поэтому остается только доказать достаточность. Итак, предположим, что A—замкнутый оператор на X, удовлетворяющий условиям (i) и (ii). При $\lambda>0$ положим $A^{(\lambda)}=\lambda-\lambda^2(\lambda+A)^{-1}$. Мы покажем, что $A^{(\lambda)}\longrightarrow A$ сильно на $D(A)$, когда $\lambda\longrightarrow\infty$, а потом построим e^{-At} как сильный предел полугрупп $e^{-tA^{(\lambda)}}$.

При $\varphi\in D(A)$ имеем $A^{(\lambda)}\varphi=\lambda(\lambda+A)^{-1}A\varphi$. Более того, согласно (ii),

$$\lambda(\lambda+A)^{-1}\varphi-\varphi=-(\lambda+A)^{-1}A\varphi\xrightarrow[\lambda\to\infty]{}0.$$

По условию (ii) семейство $\{\lambda(\lambda+A)^{-1}\,|\,\lambda>0\}$ равномерно ограничено по норме, так что с учетом плотности $D(A)$ получается $\lambda(\lambda+A)^{-1}\psi\longrightarrow\psi$ для всех $\psi\in X$. Поэтому $A^{(\lambda)}\varphi\longrightarrow A\varphi$ для всех $\varphi\in D(A)$.

Так как $A^{(\lambda)}$ ограничен, полугруппы $e^{-tA^{(\lambda)}}$ могут быть определены посредством степенных рядов. Поскольку

$$\|e^{-tA^{(\lambda)}}\|=\|e^{-\lambda t}e^{+t\lambda^2(\lambda+A)^{-1}}\|\leqslant$$
$$\leqslant e^{-\lambda t}\sum\frac{t^n\lambda^{2n}}{n!}\|(\lambda+A)^{-1}\|^n\leqslant 1,$$

они являются сжимающими полугруппами. Для всех $\mu,\ \lambda,\ t>0$ и всех $\varphi\in D(A)$ имеем

$$e^{-tA^{(\lambda)}}\varphi-e^{-tA^{(\mu)}}\varphi=\int\limits_0^t\frac{d}{ds}\left(e^{-sA^{(\lambda)}}e^{-(t-s)A^{(\mu)}}\varphi\right)ds,$$

так что

$$\|e^{-tA^{(\lambda)}}\varphi - e^{-tA^{(\mu)}}\varphi\| \leqslant \int_0^t \|e^{-sA^{(\lambda)}}e^{-(t-s)A^{(\mu)}}\| \|A^{(\mu)}\varphi - A^{(\lambda)}\varphi\| ds \leqslant$$

$$\leqslant t \|A^{(\mu)}\varphi - A^{(\lambda)}\varphi\|.$$

Мы воспользовались тем, что $e^{-(t-s)A^{(\mu)}}$ и $e^{-tA^{(\lambda)}}$ коммутируют, так как $\{A^{(\lambda)}\}_{\lambda>0}$ — коммутирующее семейство. Так как выше было доказано, что $A^{(\lambda)}\varphi \to A\varphi$, то $\{e^{-tA^{(\lambda)}}\varphi\}$ есть последовательность Коши при $\lambda \to \infty$ для всякого $t > 0$ и $\varphi \in D(A)$. Так как $D(A)$ плотно и семейство $\{e^{-tA^{(\lambda)}}\}$ равномерно ограничено, это утверждение справедливо для всех $\varphi \in X$. Определим теперь $T(t)\varphi = \lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{-tA^{(\lambda)}}\varphi$. Тогда $T(t)$ есть полугруппа сжимающих операторов, поскольку эти свойства сохраняются в сильном пределе. Приведенное выше неравенство показывает, что сходимость $e^{-tA^{(\lambda)}}\varphi \to T(t)\varphi$ равномерна, когда t меняется в конечном интервале, так что $T(t)$ сильно непрерывна, поскольку сильно непрерывна $e^{-tA^{(\lambda)}}$. Значит, $T(t)$ есть сжимающая полугруппа.

Остается показать, что инфинитезимальный генератор $T(t)$, обозначим его $\tilde{A}$, совпадает с A. Для всех t и $\varphi \in D(A)$

$$e^{-tA^{(\lambda)}}\varphi - \varphi = -\int_0^t e^{-sA^{(\lambda)}} A^{(\lambda)}\varphi\, ds,$$

так что, вследствие $A^{(\lambda)}\varphi \to A\varphi$, имеем

$$T(t)\varphi - \varphi = -\int_0^t T(s)\, A\varphi\, ds.$$

Следовательно, $\tilde{A}_t\varphi \to A\varphi$, когда $t \to 0$. Поэтому $D(\tilde{A}) \supset D(A)$ и $\tilde{A} \restriction D(A) = A$. Если $\lambda > 0$, то $(\lambda + A)^{-1}$ существует по предположению, а $(\lambda + \tilde{A})^{-1}$ существует в силу утверждения о необходимости в доказываемой теореме. Следовательно, $(\lambda + \tilde{A})D(\tilde{A}) = X = (\lambda + A)D(A)$, откуда вытекает, что $D(\tilde{A}) = D(A)$.

Наконец, предположим, что $T_1(t)$ и $T_2(t)$ — такие сжимающие полугруппы, что $T_1(t_0) \neq T_2(t_0)$ при некотором $t_0 > 0$. Тогда существуют такие $l \in X^*$ и $\varphi \in X$, что $l(T_1(t_0)\varphi) \neq l(T_2(t_0)\varphi)$. Поскольку (X.98) выполняется как для $T_1(t)$, так и для $T_2(t)$, заключаем, что $l((\lambda + A_1)^{-1}\varphi) \neq l((\lambda + A_2)^{-1}\varphi)$ при некотором λ с $\operatorname{Re}\lambda > 0$, ибо обычное преобразование Лапласа инъективно на ограниченных функциях. Итак, резольвенты A_1 и A_2 отличаются, так что $A_1 \neq A_2$. ∎

Построить e^{-tA} при доказательстве достаточности в теореме X.47а можно применением формулы $e^{-tA} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + (t/n) A)^{-n}$

(см. задачу 49). Трудность в прямом применении теоремы X.47а состоит в необходимости строить резольвенту замкнутого оператора A для проверки условий (i) и (ii). Поэтому хотелось бы иметь условия непосредственно на оператор A, т. е. найти аналоги условия симметрии и основного критерия для самосопряженных операторов. Чтобы понять, какие это должны быть условия, рассмотрим случай гильбертова пространства. Если $\varphi \in D(A)$, то из $\|e^{-tA}\varphi\|^2 \leqslant \|\varphi\|^2$ для всех $t > 0$ следует, что $\frac{d}{dt}\|e^{-tA}\varphi\|^2\Big|_{t=0} \leqslant 0$. С другой стороны,

$$\frac{d}{dt}\|e^{-tA}\varphi\|^2\Big|_{t=0} = -(A\varphi, \varphi) - (\varphi, A\varphi),$$

откуда мы заключаем, что $\operatorname{Re}(A\varphi, \varphi) \geqslant 0$. Таким образом, условие $\operatorname{Re}(A\varphi, \varphi) \geqslant 0$ нужно обобщить на банахово пространство.

Определение. Пусть X — банахово пространство и $\varphi \in X$. Элемент $l \in X^*$, удовлетворяющий условиям $\|l\| = \|\varphi\|$ и $l(\varphi) = \|\varphi\|^2$, называется **нормированным касательным функционалом** к φ. По теореме Хана — Банаха всякий $\varphi \in X$ обладает по крайней мере одним нормированным касательным функционалом.

Определение. Плотно определенный оператор A на банаховом пространстве X называется **аккретивным**, если при каждом $\varphi \in D(A)$ для какого-либо нормированного касательного функционала от φ выполнено $\operatorname{Re}(l(A\varphi)) \geqslant 0$. Оператор A называется **максимальным аккретивным** (или **m-аккретивным**), если A аккретивен и не имеет собственных аккретивных расширений.

Заметим, что аккретивный оператор замыкаем (задача 52). Замыкание аккретивного оператора опять аккретивно, так что каждый аккретивный оператор имеет наименьшее замкнутое аккретивное расширение. Теперь мы можем сформулировать основной критерий.

Теорема X.48. Замкнутый оператор A на банаховом пространстве X порождает сжимающую полугруппу тогда и только тогда, когда он аккретивен и $\operatorname{Ran}(\lambda_0 + A) = X$ для некоторого $\lambda_0 > 0$.

Доказательство. Пусть e^{-tA} — сжимающая полугруппа, и предположим, что l — некоторый нормированный касательный функционал к $\varphi \in D(A)$. Тогда функция $t \mapsto l(e^{-tA}\varphi)$ дифференцируема и

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Re}(l(e^{-tA}\varphi))\Big|_{t=0} = -\operatorname{Re}\, l(A\varphi).$$

С другой стороны,

$$|l(e^{-tA}\varphi)| \leqslant \|l\|\,\|e^{-tA}\varphi\| \leqslant \|\varphi\|^2 = l(\varphi)$$

для всех $t>0$, так что $\operatorname{Re} t^{-1}(l(e^{-tA}\varphi)-l(\varphi))\leqslant 0$ при всех $t>0$. Итак,

$$-\operatorname{Re}(l(A\varphi))\leqslant 0$$

для всех нормированных касательных функционалов к φ, так что A аккретивен. Равенство $\operatorname{Ran}(I+A)=X$ есть следствие условия (i) из теоремы X.47а. Итак, необходимость доказана.

Для доказательства достаточности предположим, что A — замкнутый аккретивный оператор, удовлетворяющий условию $\operatorname{Ran}(\lambda_0+A)=X$ при некотором $\lambda_0>0$. Пусть l — нормированный касательный функционал к $\varphi\in D(A)$, так что $\operatorname{Re}(l(A\varphi))\geqslant 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\lambda\|\varphi\|^2 &\leqslant \lambda l(\varphi)+\operatorname{Re} l(A\varphi)=\\ &=\operatorname{Re} l((\lambda+A)\varphi)\leqslant\|\varphi\|\,\|(\lambda+A)\varphi\|.\end{aligned}$$

Итак, $\operatorname{Ran}(\lambda+A)$ замкнут и $\lambda+A$ имеет ограниченный обратный из $\operatorname{Ran}(\lambda+A)$ в $D(A)$ с нормой, меньшей или равной λ^{-1}. Для завершения доказательства осталось только показать, что область $\operatorname{Ran}(\lambda+A)$ плотна в X. Но $\operatorname{Ran}(\lambda+A)$ плотна при $\lambda=\lambda_0$, так что с помощью обычной аргументации теории возмущений (см. доказательство теоремы X.1) можно показать, что $\operatorname{Ran}(\lambda+A)$ плотна при всех $\lambda>0$. ∎

Следствие. Пусть A — замкнутый оператор на банаховом пространстве X. Тогда если оба оператора, A и его сопряженный A', аккретивны, то A порождает сжимающую полугруппу.

Доказательство. Допустим, что $\operatorname{Ran}(I+A)$ не плотна. Тогда по теореме Хана — Банаха в X^* существует такой l, что $l((I+A)\varphi)=0$ для всех $\varphi\in D(A)$. Следовательно, $l\in D(A')$ и $(I+A')l=0$. Поэтому если μ — некоторый нормированный касательный функционал к l в X^{**}, то $\mu(A'l)=-\|l\|^2$, что противоречит допущению о том, что A' аккретивен при $l\neq 0$. Итак, $\operatorname{Ran}(I+A)$ плотна в X. ∎

Прежде чем рассмотреть некоторые примеры, сделаем ряд замечаний. Во-первых, при доказательстве достаточности в теореме X.48 мы воспользовались лишь тем допущением, что для каждого $\varphi\in D(A)$ существует по крайней мере один нормированный касательный функционал l, такой, что $\operatorname{Re} l(A\varphi)\geqslant 0$. Отсюда следовало, что $(\lambda+A)^{-1}$ ограничено при всяком $\lambda>0$. Опираясь затем на допущение $\operatorname{Ran}(\lambda_0+A)=X$, мы завершили доказательство достаточности. Однако при доказательстве необходимости было показано, что если A порождает сжимающую полугруппу, то $\operatorname{Re} l(A\varphi)\geqslant 0$ для *всех* касательных функционалов. Итак, при наличии допущения $\operatorname{Ran}(I+A)=X$ из условия

$\operatorname{Re} l(A\varphi) \geqslant 0$ для одного касательного функционала (к каждому $\varphi \in D(A)$) следует, что $\operatorname{Re} l(A\varphi) \geqslant 0$ для всех касательных функционалов. Во-вторых, генераторы сжимающих полугрупп, очевидно, m-аккретивны, так как из условия $\operatorname{Ran}(I+A) = X$ вытекает, что A не имеет собственных аккретивных расширений. Обратное утверждение: если A максимально аккретивен, то A порождает сжимающую полугруппу — справедливо для гильбертова пространства, но не для банахова (см. Замечания и задачу 50). Наконец, как и в случае самосопряженных операторов, для генераторов сжимающих полугрупп выполняется теорема о существенной области.

Теорема X.49. Пусть A — генератор сжимающей полугруппы на банаховом пространстве X. Пусть D — плотное множество, $D \subset D(A)$, такое, что $e^{-tA}\colon D \to D$. Тогда D есть существенная область оператора A (т. е. $\overline{A \upharpoonright D} = A$).

Доказательство. Пусть $\lambda > 0$. Нужно только показать, что область $\operatorname{Ran}(\lambda + A \upharpoonright D)$ плотна в X. Допустим, что это не так. Тогда найдется такой $l \in X^*$, $l \neq 0$, что $l((\lambda + A)\varphi) = 0$ для всех $\varphi \in D$. Но если $\varphi \in D$, то

$$\frac{d}{dt} l(e^{-tA}\varphi) = l(-Ae^{-tA}\varphi) = \lambda l(e^{-tA}\varphi),$$

так как $e^{-tA}\varphi \in D$. Значит, $l(e^{-tA}\varphi) = l(\varphi)e^{\lambda t}$, а это при достаточно больших t противоречит допущению, что e^{-tA} — сжимающие, за исключением случая $l(\varphi) = 0$. Но так как D плотна, $l(\varphi)$ не может обращаться в нуль для всех $\varphi \in D$, и мы заключаем, что $\operatorname{Ran}(\lambda + A \upharpoonright D)$ плотна. ∎

Пример 1. Пусть B — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда $\|(\mu - B)^{-1}\| \leqslant |\operatorname{Im}\mu|^{-1}$, так что оба оператора $A_1 = iB$ и $A_2 = -iB$ удовлетворяют условиям теоремы Хилле — Иосиды. Сжимающие полугруппы e^{-tA_1} и e^{-tA_2} совпадают с унитарными группами e^{itB} при $t < 0$ и при $t > 0$ соответственно.

Если $B \geqslant 0$, то сам B удовлетворяет условиям теоремы Хилле — Иосиды, так как $\|(\mu + B)^{-1}\| \leqslant \mu^{-1}$ при $\mu > 0$ согласно функциональному исчислению. Значит, B порождает сжимающую полугруппу e^{-Bt}. Разумеется, такие полугруппы могут быть построены и прямо с помощью функционального исчисления.

Пример 2 (уравнение теплопроводности на $L^2(\mathbb{R}^n)$). Оператор $-\Delta$ самосопряжен в существенном на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и положителен, поэтому его замыкание (которое мы также обозначим $-\Delta$) порождает полугруппу $e^{\Delta t}$ на $L^2(\mathbb{R}^n)$. Для $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ определим $u(x, t) = e^{\Delta t}f$. Тогда для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \overline{\left(\left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\varphi(x, t)\right)} u(x, t)\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\left(\left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\varphi(x, t)\right)} e^{\Delta t} f(x)\,dx \right) dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\left(e^{\Delta t}\left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\varphi(x, t)\right)} f(x)\,dx \right) dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} -\frac{\partial}{\partial t} [\overline{(e^{\Delta t}\varphi)(x, t)} f(x)]\,dx\,dt = 0,$$

так что $u(x, t)$ есть слабое решение уравнения теплопроводности $\partial u(x, t)/\partial t = \Delta u(x, t)$. Если $f \in D(\Delta)$, то $u(x, t) \in D(\Delta)$ как функция x при всяком $t > 0$, так что в этом случае $u(x, t)$ есть классическое решение в том смысле, что $u(\cdot, t)$ есть $L^2(\mathbb{R}^n)$-значная дифференцируемая функция t и $\partial u(x, t)/\partial t = \Delta u(x, t)$. В любом случае $u(x, t)$ удовлетворяет начальному условию $u(x, 0) = f(x)$ в том смысле, что $\|u(x, t) - f(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0$ при $t \to 0$. Позже мы увидим, что на самом деле $u(x, t)$ при $t > 0$ бесконечно дифференцируема по x и t для всех $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Заметим, что, поскольку $e^{\Delta t}$ — сжимающая полугруппа, $\|u(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ есть невозрастающая функция t.

Пример 3 (уравнение теплопроводности на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$). Обозначим через $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ множество непрерывных функций на $\mathbb{R}^n$, таких, что $f(x) \to 0$, когда $|x| \to \infty$. Это есть банахово пространство относительно sup-нормы. Определим $-\Delta$ как замыкание оператора $\varphi \mapsto -\Delta\varphi$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Мы покажем, что $-\Delta$ удовлетворяет условиям теоремы X.48. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда найдется такая точка x_0, что $|\varphi(x_0)| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)|$. Пусть $l_\varphi = \overline{\varphi(x_0)}\,\delta_{x_0}$. Тогда $l_\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)^*$, $\|l_\varphi\| = |\varphi(x_0)| = \|\varphi\|$ и $l_\varphi(\varphi) = |\varphi(x_0)|^2 = \|\varphi\|^2$, так что l_φ — нормированный касательный функционал к φ. Далее,

$$\operatorname{Re}(l_\varphi(-\Delta\varphi)) = \operatorname{Re}\overline{\varphi(x_0)}\,(-\Delta\varphi(x_0)) =$$
$$= |\nabla\varphi(x_0)|^2 - \frac{1}{2}\Delta|\varphi(x_0)|^2 \geqslant 0,$$

так как $\Delta|\varphi(x_0)|^2 \leqslant 0$ вследствие того, что $|\varphi(x)|^2$ имеет максимум в точке x_0. Это показывает, что $-\Delta \restriction \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ аккретивен и, значит, его замыкание также аккретивно. Более того, если $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то $(1+k^2)^{-1}\hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset D(-\Delta)$ и $(I-\Delta)\widecheck{(1+k^2)^{-1}\hat{g}} = g$, так что $\operatorname{Ran}(I-\Delta)$ содержит $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, которое плотно в $C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Так как $\operatorname{Ran}(I-\Delta)$ замкнуто, заключаем, что $\operatorname{Ran}(I-\Delta)=C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Итак, $-\Delta$ аккретивен и удовлетворяет условию $\operatorname{Ran}(I-\Delta)= = C_\infty(\mathbb{R}^n)$, значит, по теореме X.48, $-\Delta$ порождает сжимающую полугруппу $e^{\Delta t}$ на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Как и в примере 2, можно показать, что $u(x, t)=e^{\Delta t}f$ — слабое решение уравнения теплопроводности для $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Ниже мы увидим, что на самом деле $u(x, t)$ есть классическое решение. Функция $u(x, t)$ удовлетворяет начальному условию $u(x, 0)=f(x)$ в том смысле, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x, t)-f(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad t\to 0.$$

Так как $e^{\Delta t}$ — сжимающая полугруппа, то $\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x, t)|$ есть невозрастающая функция t. Это отражает интуитивное представление о том, что максимальная температура должна понижаться в процессе теплопередачи.

Поскольку нам известно выражение для ядра $e^{t\Delta}$, мы могли применить при анализе примеров 2 и 3 «прямые» методы. Преимущество абстрактной теории проявляется там, где нельзя получить явные решения; см. хотя бы пример 4 далее.

Существует теорема теории возмущений для генераторов сжимающих полугрупп — аналог теоремы Като — Реллиха. Докажем сначала одну лемму, которую мы позже усилим.

Лемма. Пусть A — генератор сжимающей полугруппы на банаховом пространстве X. Предположим, что B — аккретивный оператор, причем $D(B)\supset D(A)$ и для всех $\varphi \in D(A)$

$$\|B\varphi\| \leqslant a\|A\varphi\| + b\|\varphi\|$$

с некоторым b и некоторым $a<1/2$. Тогда сумма $A+B$ (определенная на $D(A)$) есть замкнутый аккретивный оператор, порождающий сжимающую полугруппу.

Доказательство. Это доказательство основано на той же идее, что и доказательство теоремы X.12. Пусть $\lambda>0$. Тогда $\|A(\lambda+A)^{-1}\| = \|\lambda(\lambda+A)^{-1}-1\| \leqslant 2$. Поэтому для $\varphi \in D(A)$

$$\|B(\lambda+A)^{-1}\varphi\| \leqslant a\|A(\lambda+A)^{-1}\varphi\| + b\|(\lambda+A)^{-1}\varphi\| \leqslant$$
$$\leqslant \left(2a+\frac{b}{\lambda}\right)\|\varphi\|.$$

Значит, $\|B(\lambda+A)^{-1}\|<1$ для достаточно больших λ. Следовательно, поскольку

$$\operatorname{Ran}(\lambda+A)=X$$

и

$$(\lambda+A+B)=(I+B(\lambda+A)^{-1})(\lambda+A),$$

мы приходим к заключению, что $\mathrm{Ran}(\lambda+A+B)=X$. Так как A порождает сжимающую полугруппу, то мы знаем, что $\mathrm{Re}\,(l\,(A\varphi))\geqslant 0$ для *всякого* нормированного касательного функционала к φ. Поэтому $A+B$ аккретивен и порождает сжимающую полугруппу. ∎

Теорема X.50. Пусть A и C — аккретивные операторы на банаховом пространстве X. Предположим, что существует плотное множество D, $D\subset D(A)$, $D\subset D(C)$, и такое $a\in[0,\ 1)$, что

$$\|(A-C)\varphi\|\leqslant a\,(\|A\varphi\|+\|C\varphi\|)+b\,\|\varphi\|$$

для некоторого b и всех $\varphi\in D$. Тогда

(a) $\bar{A}$ порождает сжимающую полугруппу в том и только в том случае, когда такую полугруппу порождает $\bar{C}$.

(b) $D(\overline{A\restriction D})=D(\overline{C\restriction D})$.

Доказательство. Чтобы доказать (a), нужно показать только, что $\mathrm{Ran}(\lambda_0+A)$ тогда и только тогда плотно для некоторого $\lambda_0>0$, когда $\mathrm{Ran}(\mu_0+C)$ плотно для некоторого $\mu_0>0$. Доказательство это в точности такое же, как в теореме X.13, с тем единственным отличием, что α' выбирается так, чтобы было $2a\alpha'/(1-a)<1/2$, т. е. чтобы можно было применить лемму. Как и прежде, доказательство утверждения (b) мы предоставим читателю. ∎

Следствие. Пусть A и B удовлетворяют всем условиям леммы, только условие $a<1/2$ заменяется на $a<1$. Тогда утверждение леммы остается в силе.

Как и для самосопряженных операторов, имеет место формула произведения.

Теорема X.51 (формула Троттера для произведения). Пусть A и B — генераторы сжимающих полугрупп на банаховом пространстве X. Допустим, что замыкание $(A+B)\restriction D(A)\cap D(B)$ порождает сжимающую полугруппу на X. Тогда для всех $\varphi\in X$

$$e^{-t\,\overline{(A+B)}}\varphi=\lim_{n\to\infty}(e^{-tA/n}\,e^{-tB/n})^n\,\varphi.$$

Если $D=D(A)\cap D(B)$ и $(A+B)\restriction D$ замкнуто, то доказательство теоремы X.51 в точности такое же, как и теоремы VIII.30. Относительно общего случая см. ссылки в Замечаниях.

Пример 4 (уравнение теплопроводности с источниками и стоками, пропорциональными температуре). Пусть $q(x)$ — ограниченная ($|q(x)|<M$) вещественнозначная непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$. Дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,\ t)-\Delta u(x,\ t)=-q(x)\,u(x,\ t) \qquad \text{(X.99)}$$

отвечает такому физическому положению, когда источники или добавляют (если $q(x)\leqslant 0$), или поглощают (если $q(x)\geqslant 0$) тепло в точке x пропорционально локальной температуре в точке x в момент времени t. Предыдущее обсуждение подсказывает, что мы должны рассмотреть оператор

$$A=-\Delta+q(x)$$

на $L^2(\mathbb{R}^n)$ и $C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Так как функция $q(x)$ ограничена константой M как оператор на $L^2(\mathbb{R}^n)$, из теоремы Като—Реллиха немедленно следует, что A самосопряжен на $D(-\Delta)$ и ограничен снизу константой $-M$. Поэтому e^{-tA} может быть определен с помощью функционального исчисления, и если $f\in D(-\Delta)$, то $u(x, t)=e^{-tA}f$ удовлетворяет уравнению (X.99) с начальными условиями $u(x, 0)=f(x)$.

В случае $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ можно применить следствие теоремы X.50 — аналог теоремы Като—Реллиха для пространства Банаха. Допустим вначале, что $q(x)\geqslant 0$. Тогда умножение на $q(x)$ есть ограниченный аккретивный оператор на $D(-\Delta)\subset C_\infty(\mathbb{R}^n)$, поскольку можно воспользоваться теми же нормированными касательными функционалами l_φ, что и в примере 3, и обнаружить, что $l_\varphi(q\varphi)=q(x_0)\,|\varphi(x_0)|^2\geqslant 0$. Поэтому, согласно следствию теоремы X.50, A — замкнутый аккретивный оператор на $D(-\Delta)$. Как и прежде, $u(x, t)=e^{-At}f$ удовлетворяет (X.99) в слабом смысле и $\|u(x, t)-f(x)\|_\infty\to 0$ при $t\to 0$.

Если q отрицательна в какой-либо точке, то умножение на q *не* аккретивно на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Это естественно, так как только в случае $q(x)\geqslant 0$ (т.е. когда тепло только поглощается, но не выделяется) мы можем ожидать, что e^{-tA} будет сжимающей полугруппой. Но эту трудность легко преодолеть, положив $A_M=-\Delta+$ $+q(x)+M$ на $D(-\Delta)$. Так как $q(x)+M\geqslant 0$, то $q(x)+M$ — ограниченный аккретивный оператор и для построения сжимающей полугруппы e^{-tA_M} можно применить следствие теоремы X.50. Положим теперь $T(t)=e^{tM}e^{-tA_M}$. Тогда $T(t)$ — сильно непрерывная полугруппа и для всякого $f\in D(-\Delta)$ функция $u(x, t)=T(t)f$ слабо удовлетворяет (X.99).

Интуитивно ясно, что решение уравнения теплопроводности должно сохранять положительность, т. е. если $u(x, 0)\geqslant 0$ почти всюду, то $u(x, t)\geqslant 0$ почти всюду по x для всех $t>0$. В задаче 53 от читателя требуется показать, что $e^{\Delta t}$ сохраняет положительность на $L^2(\mathbb{R}^n)$. Так как $e^{-tq(x)}\geqslant 0$ при всех x, то $(e^{\Delta t/n}e^{-tq(x)/n})^n f\geqslant 0$, если $f\geqslant 0$. По формуле Троттера

$$(e^{\Delta t/n}e^{-tq(x)/n})^n f\xrightarrow[n\to\infty]{L^2} e^{-t(-\Delta+q)}f,$$

так что мы должны получить $e^{-t(-\Delta+q)}f \geqslant 0$ почти всюду. Сходное применение формулы Троттера показывает, что $T(t) = e^{tM}e^{-t(-\Delta+q+M)}$ сохраняет положительность на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ (задача 54).

Построение $e^{-(-\Delta+q)t}$ в примере 4 для случая $q \leqslant 0$ показывает, насколько естественно возникают сильно непрерывные полугруппы, не являющиеся сжимающими. Поэтому мы сейчас продемонстрируем, как легко обобщаются результаты для сжимающих полугрупп. Пусть $T(t)$ — сильно непрерывная полугруппа, и пусть $\alpha > 0$. Так как $t \mapsto T(t)\varphi$ непрерывно и отрезок $[0, \alpha]$ компактен, множество $\{\|T(t)\varphi\| \mid 0 \leqslant t \leqslant \alpha\}$ ограничено. Поэтому из принципа равномерной ограниченности (теорема III.9) следует, что существует такое M, что $\|T(t)\| \leqslant M$ для всех $t \in [0, \alpha]$. Пусть теперь $t \in (0, \infty)$. Тогда $t = n\alpha + \tau$, где $\tau \in [0, \alpha]$. По свойству полугрупп

$$\|T(t)\| = \|T(\alpha)^n T(\tau)\| \leqslant M^{n+1} \leqslant Me^{\omega t},$$

где $\omega = \alpha^{-1}\log M$. Следовательно, все сильно непрерывные полугруппы экспоненциально ограничены. Точная нижняя грань чисел ω, для которых существует такое M, что $\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$, обозначается через ω_0 и называется **типом** полугруппы (см. задачу 51). **Генератор** A полугруппы $T(t)$ определяется точно так же, как для сжимающей полугруппы. Как и раньше, A замкнут, и рассуждение, совпадающее с тем, которое предваряет теорему X.47a, показывает, что если $\lambda > \omega_0$, то $-\lambda \in \rho(A)$ и

$$(\lambda + A)^{-1}\varphi = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\varphi\, dt$$

для всех $\varphi \in X$. Значит, если $\omega > \omega_0$ и $\lambda > \omega$, то

$$\|(\lambda + A)^{-n}\varphi\| = \left\|\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^n(\lambda + A)^{-1}\varphi\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n!}\left(\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}Me^{\omega t}\, dt\right)\|\varphi\| = \frac{M\|\varphi\|}{(\lambda-\omega)^n}.$$

Обратно, небольшие изменения в доказательстве теоремы X.47a показывают, что эти условия являются также и достаточными для того, чтобы A порождал сильно непрерывную полугруппу (задача 55). Итак, имеет место следующая

Теорема X.47b (теорема Хилле—Иосиды—Филлипса). Необходимое и достаточное условие того, что замкнутый оператор A на банаховом пространстве X порождает сильно непрерывную полугруппу, состоит в следующем:

(i) Существует такое $\omega > 0$, что каждое $\lambda > \omega$ лежит в $\rho(A)$.

(ii) Существует такое M, что

$$\|(\lambda + A)^{-n}\| \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}$$

для всех $\lambda > \omega$ и всех положительных целых n.

В этом случае $\|e^{-tA}\| \leqslant Me^{\omega t}$ при всех $t > 0$ и

$$\|(\lambda + A)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{\operatorname{Re}(\lambda - \omega)}$$

при всех λ, так что $\operatorname{Re}(\lambda - \omega) > 0$.

Последний предмет, которым мы займемся в этом разделе,— это теория ограниченных голоморфных полугрупп. Чтобы понять, что мы хотим, рассмотрим сначала случай положительного самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Векторнозначная функция $e^{-tA}\varphi$ может быть аналитически продолжена в правую полуплоскость с помощью функционального исчисления. Это подсказывает следующее

Определение. Пусть $\theta \in (0, \pi/2]$. Сильно непрерывная ограниченная полугруппа $T(t)$, $t > 0$, на банаховом пространстве X называется **ограниченной голоморфной полугруппой с углом** θ, если

(i) $T(t)$ есть сужение на положительную вещественную ось аналитического семейства операторов $T(z)$ в открытом секторе $S_\theta = \{z \mid |\arg z| < \theta\}$, удовлетворяющего условию $T(z+z') = T(z)T(z')$ для всех $z, z' \in S_\theta$.

(ii) При каждом $\theta_1 < \theta$ семейство $\{T(z)\}$ равномерно ограничено в секторе S_{θ_1} и $T(z)\varphi \to \varphi$, если $z \to 0$ в S_{θ_1}, для всех $\varphi \in X$.

Если A — инфинитезимальный генератор $T(t)$, то мы пишем $T(z) = e^{-zA}$.

Легко вывести некоторые свойства генератора A ограниченной голоморфной полугруппы с углом θ. При всяком $0 < \eta < \theta$ полугруппа $e^{-(re^{i\eta})A}$ будет ограниченной и сильно непрерывной (как функция r). Очевидно, ее генератор есть $e^{i\eta}A$, так что спектр $e^{i\eta}A$ должен лежать в правой полуплоскости. Так как это справедливо для всех η, удовлетворяющих $0 \leqslant |\eta| < \theta$, мы заключаем, что

$$\sigma(A) \subset \overline{S}_{\pi/2-\theta} \equiv \left\{z \,\middle|\, |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \theta\right\}. \qquad \text{(X.100)}$$

Далее, для каждого $\theta_1 < \theta$ семейство $\{e^{-(re^{i\eta})A}\}$ равномерно ограничено (скажем, числом M_1) при всех $r > 0$ и всех η, таких, что $|\eta|\leqslant\theta_1$. Следовательно, по теореме X.47b

$$\|(\lambda+e^{i\eta}A)^{-1}\|\leqslant\frac{M_1}{\operatorname{Re}\lambda}$$

при всех λ с $\operatorname{Re}\lambda>0$. Значит, если задано $\theta_1<\theta$, то

$$\|(z+A)^{-1}\|\leqslant\frac{M_1}{\operatorname{dist}\left(z,\ \overline{S}_{\pi/2-\theta_1}\right)} \qquad (X.101)$$

при всех $z\in\mathbb{C}\setminus\overline{S}_{\pi/2-\theta_1}$, где M_1 зависит от θ_1.

На самом деле эти условия также и достаточны:

Теорема X.52. Замкнутый оператор A на банаховом пространстве X служит генератором ограниченной голоморфной полугруппы с углом $\theta\leqslant\pi/2$ тогда и только тогда, когда A удовлетворяет условиям (X.100) и X.101).

Доказательство. Необходимость уже доказана. Заметим, что достаточность можно было бы доказать тем же методом, что и в теореме Хилле—Иосиды, если бы мы располагали условием

$$\|(z+A)^{-n}\|\leqslant\frac{M_1}{\left(\operatorname{dist}\left(z,\ \overline{S}_{\pi/2-\theta_1}\right)\right)^n},\qquad n=1,\ 2,\ \ldots, \qquad (X.101a)$$

более сильным, чем условие (X.101). В большей части приложений можно убедиться в справедливости (X.101a), но поучительно само доказательство общего случая. Идея доказательства состоит в применении обобщения функционального исчисления Данфорда (см. задачу 1 и Замечания к гл. VII) для построения полугруппы, которая, как затем показывается, обладает всеми нужными свойствами. Пусть $0<\theta_2<\theta_1<\theta$ и Γ—путь, указанный на рис. X.5. Положим

$$T(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}e^{-\lambda z}(\lambda-A)^{-1}\,d\lambda \qquad (X.102)$$

для всех $z\in S_{\theta_2}=\{z\,|\,|\arg z|<\theta_2\}$. Так как $\sigma(A)\subset\overline{S}_{\pi/2-\theta}$, то на Γ определено $(\lambda-A)^{-1}$. Более того, для $\lambda\in\Gamma_1\cup\Gamma_3$ имеем $\operatorname{Re}(z\lambda)=c(z)\,|\lambda|$, где $c(z)=|z|\cdot\cos(\arg z+\pi/2-\theta_2)$, так что для $z\in S_{\theta_2}$ интеграл сходится и совокупность $\{\|T(z)\|\}$ равномерно ограничена в области

$$R_{\varepsilon,\,\delta}=\{z\,|\,|z|\geqslant\delta,\ |\arg z|\leqslant\theta_2-\varepsilon\}$$

при всяких $\varepsilon,\delta>0$. С другой стороны, если $0<|z|\leqslant\delta$ и $|\arg z|\leqslant\theta_2-\varepsilon$, то, производя замену переменных $\zeta=|z|\,\lambda$, найдем

$$T(z)=\int\limits_{\Gamma'}e^{-\zeta z/|z|}\left(\frac{\zeta}{|z|}-A\right)^{-1}\frac{d\zeta}{|z|}=$$

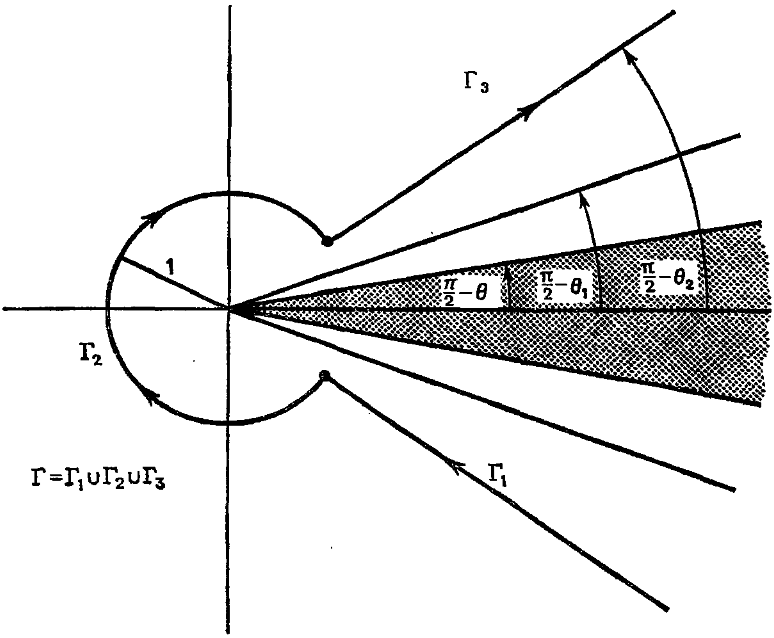

Рис. X.5. Кривая Г.

(см. рис. X.6)

$$= \int\limits_{\Gamma} e^{-\zeta z/|z|} \left(\frac{\zeta}{|z|} - A\right)^{-1} \frac{d\zeta}{|z|}$$

(по интегральной формуле Коши и (X.101)).

Так как для $\zeta \in \Gamma$ имеем $\operatorname{dist}(\zeta/|z|, \bar{S}_{\pi/2-\theta_1}) = |z|^{-1} \operatorname{dist}(\zeta, \bar{S}_{\pi/2-\theta_1})$, то

$$\|e^{-zA}\| \leqslant \int\limits_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} e^{-|\zeta|(1-\cos(\pi/2-\varepsilon))} M_1\, d\zeta + C \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \text{ (независимо от } z)$$

и функция $T(z)$ равномерно ограничена в секторе $R_{\varepsilon,0} = \bar{S}_{\theta_2-\varepsilon}$. Далее, $T(z)$ — аналитическая операторнозначная функция в S_{θ_2}, так как мы можем дифференцировать под знаком интеграла.

Доказательство того, что $T(z)$ — полугруппа, проведем следующим образом. Пусть Γ'' — контур Γ, сдвинутый влево на две единицы. Тогда, по теореме Коши и по (X.101), определение $T(z)$ не зависит от того, какой из двух контуров Γ или Γ'' мы выберем. Пусть $z, z' \in S_{\theta_2}$. Тогда, пользуясь теоремой Фубини,

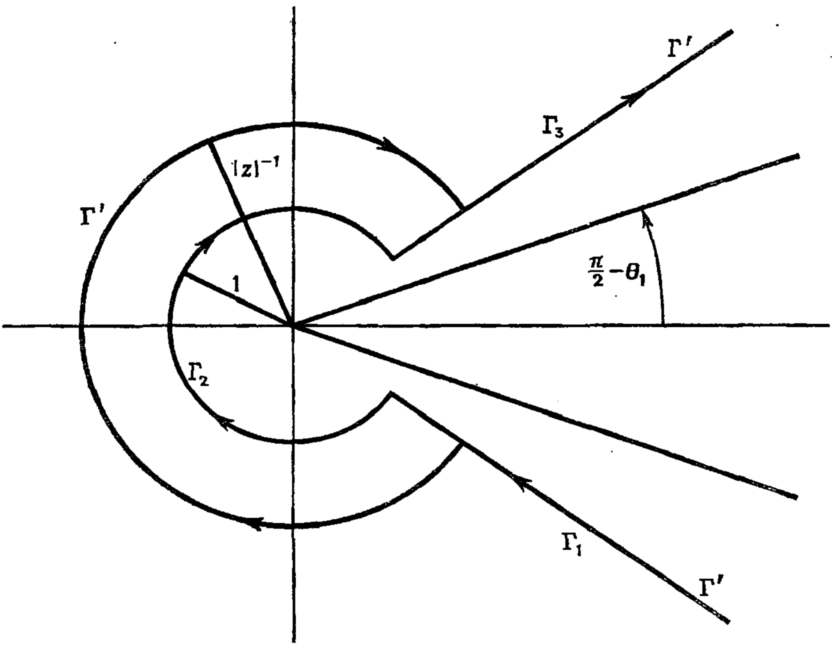

Рис. X.6. Кривая Γ″.

первой резольвентной формулой и интегральной формулой Коши, найдем

$$T(z)\,T(z') = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma''} e^{-\lambda z-\mu z'}(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}\,d\mu\,d\lambda =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma''} e^{-\lambda z-\mu z'}(\mu-\lambda)^{-1}\left((\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}\right)d\mu\,d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{-\lambda(z+z')}(\lambda - A)^{-1}\,d\lambda = T(z+z').$$

Допустим теперь, что $z \to 0$ в секторе $\overline{S}_{\theta_2-\varepsilon}$ и $\varphi \in D(A)$. Тогда

$$T(z)\,\varphi - \varphi = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left(e^{-\lambda z}(\lambda - A)^{-1} - e^{-\lambda z}\lambda^{-1}\right)\varphi\,d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{-\lambda z}\lambda^{-1}(\lambda - A)^{-1}A\varphi\,d\lambda \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[z\to 0]{} -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\lambda^{-1}(\lambda - A)^{-1}A\varphi\,d\lambda =$$

(по теореме о мажорированной сходимости и (X.101))

$= 0$ (по теореме Коши, (X.100) и (X.101)).

Поскольку все $T(z)$ равномерно ограничены, $T(z)\varphi \to \varphi$ для всех $\varphi \in X$. Следовательно, $T(z)$ — сильно непрерывная полугруппа в $\overline{S}_{\theta_2-\varepsilon}$ и, в частности, $T(t)$ сильно непрерывна для $t > 0$.

Пусть $\varphi \in X$. Тогда, как отмечалось выше, можно дифференцировать под знаком интеграла; получаем

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} T(z)\varphi &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda z}(-\lambda)(\lambda - A)^{-1}\varphi\, d\lambda = \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda z}(-\varphi - A(\lambda - A)^{-1}\varphi)\, d\lambda = \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda z}(-A(\lambda - A)^{-1}\varphi)\, d\lambda = \quad \text{(теорема Коши)} \\
&= -A\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda z}(\lambda - A)^{-1}\varphi\, d\lambda\right] = \text{(так как } A \text{ замкнут)} \\
&= -AT(z)\varphi.
\end{aligned}$$

Итак, $T(z)\colon X \to D(A)$ и $-AT(z)\varphi = T'(z)\varphi$. Далее, если $\varphi \in D(A)$, то такое же вычисление показывает, что $T'(z)\varphi = -T(z)A\varphi$. Следовательно, векторнозначная функция $T(t)\varphi$ имеет равномерно ограниченную производную при $t > 0$, так что

$$\begin{aligned}
\frac{T(t)\varphi - \varphi}{t} &= \frac{1}{t}\int_0^t T'(s)\varphi\, ds = \\
&= \frac{1}{t}\int_0^t -AT(s)\varphi\, ds \xrightarrow[t \to 0]{} -A\varphi.
\end{aligned}$$

Значит, генератор $T(t)$ расширяет A, но так как $T(t)\colon D(A) \to D(A)$, то из теоремы X.49 следует, что сам A порождает $T(t)$.

Поскольку θ_2 может быть выбрано сколь угодно близким к θ_1 и $\varepsilon > 0$ произвольно, мы доказали теорему. ∎

Следствие 1. Пусть q — строго m-аккретивная форма в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, такая, что из $\varphi \in Q(q)$ следует $|\arg[q(\varphi, \varphi)]| \le \theta$, причем $\theta < \pi/2$. Тогда ассоциированный (по теореме VIII.16) с этой формой строго m-аккретивный оператор порождает ограниченную голоморфную полугруппу с углом $\pi/2 - \theta$.

Доказательство. Это следствие прямо вытекает из теоремы VIII.17 и только что доказанной теоремы. ∎

Следствие 2. Пусть A — генератор ограниченной голоморфной полугруппы с углом θ, $\theta > 0$. Тогда для всякого целого $m > 0$ и всякого $\varphi \in X$

$$e^{-tA}\varphi \in D(A^m) \qquad \text{и} \qquad \|A^m e^{-tA}\varphi\| \leqslant C\frac{\|\varphi\|}{|t|^m}$$

при всех $t > 0$ (C зависит от A и от m, но не зависит от φ).

Доказательство этого следствия основано на представлении (X.102), формуле $T'(z) = -AT(z)$ и построениях, сходных с доказательством самой теоремы. Воспроизведение деталей вынесено в задачу 58.

Понятие ограниченной голоморфной полугруппы можно обобщить так же, как мы обобщили понятие сжимающей полугруппы. Сильно непрерывная полугруппа $T(t)$ на банаховом пространстве X называется **голоморфной полугруппой с углом** θ, если $T(t)$ обладает всеми свойствами ограниченной голоморфной полугруппы с углом θ, за исключением равномерной ограниченности в секторах $\bar{S}_{\theta_1}$, $\theta_1 < \theta$. Если $T(t)$ — голоморфная полугруппа с углом θ, то для всякого $\theta_1 < \theta$ и $\varphi \in X$ совокупность $\|T(z)\varphi\|$ ограничена в

$$\tilde{R}_{1,\,\theta_1} = \{z \,|\, |\arg z| \leqslant \theta_1,\ |z| \leqslant 1\},$$

так что по принципу равномерной ограниченности функция $\|T(z)\|$ ограничена в $\tilde{R}_{1,\,\theta_1}$. Пользуясь полугрупповым свойством, как выше, заключаем из этого, что существуют такие постоянные M, $\omega > 0$, что

$$\|T(z)\| \leqslant Me^{\omega |z|}$$

для всех $z \in \bar{S}_{\theta_1}$. Следовательно, $e^{-\omega z}T(z)$ — ограниченная голоморфная полугруппа с углом θ_1. Отметим, что это справедливо для всех $\theta_1 < \theta$, однако ω, вообще говоря, зависит от θ_1. Из этого описания, теоремы X.52 и следствия 2 немедленно вытекает

Теорема X.53. Замкнутый оператор A в банаховом пространстве X порождает голоморфную полугруппу с углом θ тогда и только тогда, когда для всякого $\theta_1 < \theta$ существуют такие константы M, $\omega > 0$, что из $\lambda \notin \bar{S}_{\pi/2-\theta_1}$ следует, что $\lambda - \omega \in \rho(A)$ и

$$\|(A - (\lambda - \omega))^{-1}\| \leqslant \frac{M}{\operatorname{dist}(\lambda, \bar{S}_{\pi/2-\theta_1})}.$$

Кроме того, существуют такие константы M_0, $\omega_0 > 0$, что для всех $\varphi \in X$

$$e^{-tA}\varphi \in \bigcap_{m=1}^{\infty} D(A^m) \qquad \text{и} \qquad \|A^m e^{-tA}\varphi\| \leqslant \frac{M_0 e^{\omega_0 t}\|\varphi\|}{t^m}$$

при всех $t > 0$,

Доказательство следующей теоремы близко следует доказательствам теорем X.12 и X.50 и предоставляется читателю (задача 56).

Теорема X.54. Предположим, что A — генератор голоморфной полугруппы с углом θ в банаховом пространстве X. Пусть B — такой линейный оператор в X, что

(i) $D(B) \supset D(A)$.

(ii) Для всех $a > 0$ существует такое $b > 0$, что для всех $\varphi \in D(A)$

$$\|B\varphi\| \leqslant a\|A\varphi\| + b\|\varphi\|.$$

Тогда $A+B$ порождает голоморфную полугруппу с углом θ на $D(A)$.

Чтобы проиллюстрировать введенные нами понятия и продемонстрировать применение голоморфных полугрупп, обсудим один пример.

Пример 5 (гладкость решений уравнения теплопроводности). Раньше было уже показано (в § IX.7), что полугруппа $e^{t\Delta}$ на $L^2(\mathbb{R}^n)$ может быть представлена формулой

$$(e^{t\Delta}f)(x) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} f(y)\, dy.$$

С помощью прямого вычисления можно убедиться, что эта формула определяет также сильно непрерывную полугруппу на $C_\infty(\mathbb{R})$ с $-\Delta$ в качестве инфинитезимального генератора этой полугруппы на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Значит, это то представление для полугруппы $e^{t\Delta}$ на $C_\infty(\mathbb{R})$, которое мы строили в примере 3.

Для любого $z \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} z > 0$ определим $e^{z\Delta}$ на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ формулой

$$(e^{z\Delta}f)(x) = (4\pi z)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4z} f(y)\, dy,$$

где выбран квадратный корень с наименьшим аргументом. Читатель может убедиться посредством прямых вычислений (задача 57), что $z \mapsto e^{z\Delta}$ — аналитическая операторнозначная функция при $\operatorname{Re} z > 0$, что полугрупповое свойство выполняется и что если $z \to 0$ в $\overline{S}_\theta$, $|\theta| < \pi/2$, то $e^{z\Delta}f \to f$. Далее,

$$\|e^{z\Delta}\| = \|(4\pi z)^{-n/2} e^{-|x|^2/4z}\|_1 = \frac{|z|}{\operatorname{Re} z},$$

так что $e^{z\Delta}$ — ограниченная голоморфная полугруппа с углом $\pi/2$. Заметим, что если $z = te^{i\theta}$, $0 < |\theta| < \pi/2$, то $e^{te^{i\theta}\Delta}$ дает пример ограниченной полугруппы, которая не является сжимающей.

Предположим, что $q(x)$ — ограниченная непрерывная функция. Тогда, по теореме X.54, оператор $-\Delta+q$ с областью определения $D(-\Delta)$ порождает голоморфную полугруппу с углом $\pi/2$ на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Далее, $e^{t(\Delta-q)}f \in \bigcap_{m=1}^{\infty} D((-\Delta+q)^m)$ для каждого $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Если мы вдобавок предположим, что q бесконечно дифференцируема и ее производные ограничены, то можно показать, что $e^{t(\Delta-q)}f$ есть C^∞-функция x для каждого $t>0$. В самом деле, положим $\varphi \equiv e^{t(\Delta-q)}f$. Тогда $\varphi \in D(-\Delta+q)=D(\Delta)$. Далее, $\varphi \in D((-\Delta+q)^2)$, так что $-\Delta\varphi+q\varphi \in D(\Delta)$. Поскольку $\varphi \in D(\Delta)$, то, согласно задаче 57(b), $\nabla\varphi$ принадлежит $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ и, значит, $q\varphi \in D(\Delta)$. Следовательно, $\Delta\varphi \in D(\Delta)$. Продолжая так же, докажем, что $\Delta^m\varphi \in D(\Delta)$ для всех m. В частности, $\Delta^m\varphi$ непрерывна при всех m, так что по лемме Соболева (теорема IX.24) φ есть C^∞-функция x.

Сходное доказательство позволяет убедиться, что $e^{t(\Delta-q)}f$ есть C^∞-функция по x при всех $t>0$, если $f \in L^2$. В этом случае непосредственно из спектральной теоремы мы можем заключить, что $e^{t(\Delta-q)}f \in \bigcap_{m=1}^{\infty} D((-\Delta+q)^m)$, так что не возникает нужды в теореме X.53.

Простое рассуждение, основанное на лемме Соболева и теореме X.53, показывает, что в тех же предположениях решения

$$u(x,\ t)=(e^{t(\Delta-q)}f)(x)$$

бесконечно дифференцируемы *совместно* по x и t при $t>0$.

Как последний пример в теории голоморфных полугрупп мы исследуем один класс операторов, с которым встретимся в следующем разделе и еще раз дальше. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с мерой, причем $\mu(M)=1$, и пусть A — положительный самосопряженный оператор в $L^2(M, d\mu)$. Так как $L^2 \subset L^p$ при всех $1 \leqslant p \leqslant 2$, сжимающая полугруппа e^{-tA} — плотно определенное отображение L^p в L^p, $1 \leqslant p \leqslant 2$. Возникает естественный вопрос: при каких условиях можно расширить e^{-tA} до сжимающей полугруппы на L^p?

Определение. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ есть σ-конечное пространство с мерой и A — положительный самосопряженный оператор в $L^2(M, d\mu)$. Будем называть e^{-tA} **L^p-сжимающей полугруппой**, если $\|e^{-tA}\varphi\|_p \leqslant \|\varphi\|_p$ при всех $\varphi \in L^2 \cap L^p$, *всех* $p \in [1, \infty]$ и всех $t>0$. Если отображение $t \longmapsto e^{-tA}$ сильно непрерывно при всех $p<\infty$, то будем называть e^{-tA} **непрерывной** L^p-сжимающей полугруппой.

Теорема X.55. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с мерой, причем $\mu(M)=1$, и пусть A — положительный самосопряженный оператор в $L^2(M, d\mu)$. Тогда

(a) Если e^{-tA} сохраняет положительность и $e^{-tA}1=1$, то e^{-tA} есть L^p-сжимающая полугруппа.

(b) Каждая L^p-сжимающая полугруппа автоматически непрерывна. Более того, $\operatorname{Ker}(e^{-tA}\restriction L^p)=\{0\}$ при всех $p>1$ и $\operatorname{Ran}(e^{-tA}\restriction L^q)$ плотна в L^q при всех $q<\infty$.

(c) В предположениях (a), если $1<p<\infty$, то e^{-tA}—ограниченная голоморфная полугруппа в секторе

$$S^{(p)}=\left\{z\,\middle|\,|\arg z|<\frac{\pi}{2}\left(1-\left|\frac{2}{p}-1\right|\right)\right\}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что полугруппа e^{-tA}—сжимающая на всех пространствах L^p. Допустим, что $f\in L^2$ и $f\geqslant 0$. Тогда

$$\|e^{-tA}f\|_1=(1,\ e^{-tA}f)=(e^{-tA}1,\ f)=(1,\ f)=\|f\|_1.$$

Если $f\in L^2$ вещественнозначна, то представим ее в виде $f=f_+-f_-$, где $f_+=\max\{0,\ f(x)\}$ и $f_-=\max\{0,\ -f(x)\}$. Тогда

$$\|e^{-tA}f\|_1\leqslant\|e^{-tA}f_+\|_1+\|e^{-tA}f_-\|_1=\|f_+\|_1+\|f_-\|_1=\|f\|_1.$$

Предположим теперь, что $f(x)\in L^2$ комплекснозначна. Тогда

$$\begin{aligned}|(e^{-tA}f)(x)|&=\sup_{\eta\ \text{рациональны}}\{\operatorname{Re}[e^{-i\eta}(e^{-tA}f)(x)]\}=\\&=\sup_{\eta\ \text{рациональны}}\{\operatorname{Re}[(e^{-tA}(e^{-i\eta}f))(x)]\}=\\&=\sup_{\eta\ \text{рациональны}}\{(e^{-tA}(\operatorname{Re}e^{-i\eta}f))(x)\}\end{aligned}$$

при почти всех x. Мы воспользовались здесь тем, что e^{-tA} переводит вещественные функции в вещественные, так как e^{-tA} сохраняет положительность. Для всякой вещественной $g\in L^2$ также почти всюду

$$\begin{aligned}|(e^{-tA}g)(x)|&=|e^{-tA}g_+-e^{-tA}g_-|\leqslant\\&\leqslant e^{-tA}g_++e^{-tA}g_-=e^{-tA}|g(x)|.\end{aligned}$$

Поэтому

$$|(e^{-tA}f)(x)|\leqslant e^{-tA}|f(x)|\ \text{почти всюду},\qquad\text{(X.103)}$$

откуда следует, что $\|e^{-tA}f\|_1\leqslant\|e^{-tA}|f(x)|\|_1=\|f\|_1$. Итак, $\|e^{-tA}f\|_1\leqslant\|f\|_1$ для всех $f\in L^2$.

Если $f\in L^\infty\subset L^2$, то

$$\begin{aligned}\|e^{-tA}f\|_\infty&=\sup_{\substack{\|g\|_1=1\\ g\in L^2}}(e^{-tA}f,\ g)=\sup_{\substack{\|g\|_1=1\\ g\in L^2}}(f,\ e^{-tA}g)\leqslant\\&\leqslant\|f\|_\infty\Big(\sup_{\|g\|_1=1}\|e^{-tA}g\|_1\Big)=\|f\|_\infty,\end{aligned}$$

так что e^{-tA}—сжатие и на L^∞. Значит, по теореме Рисса—Торина e^{-tA} есть сжатие на всех пространствах L^p. Для доказательства утверждения об аналитичности требуется интерполяционная теорема Стейна (теорема IX.21). Так как A положителен и самосопряжен, то $e^{-\zeta A}$ аналитична при $\operatorname{Re}\zeta > 0$ и, как оператор на L^2, непрерывна и ограничена единицей в замкнутой правой полуплоскости. Интерполируем сначала между $p=1$ и $p=2$. Пусть $\eta > 0$ и $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ фиксировано. Тогда для всех z, удовлетворяющих $0 < \operatorname{Re} z < 1$, $\exp(-\eta e^{i\theta z} A)$—аналитическая операторнозначная функция на $L^1 \cap L^2 = L^2$. Далее, $\exp(-\eta e^{i\theta z} A)$ ограничена и непрерывна в замкнутой полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$. При $\operatorname{Re} z = 1$ имеем $\|e^{-\eta e^{i\theta z} A} f\|_2 \leqslant \|f\|_2$, а при $\operatorname{Re} z = 0$ имеем $\|e^{-\eta e^{i\theta z} A} f\|_1 \leqslant \|f\|_1$. Значит, по интерполяционной теореме Стейна, $\|e^{-\eta e^{i\theta t} A} f\|_p \leqslant \|f\|_p$ при $t \in (0, 1)$, где $t = 2 - 2/p$. Так как $\eta > 0$ и $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ были произвольны, заключаем, что

$$\|e^{-\zeta A} f\|_p \leqslant \|f\|_p \text{ всегда, когда } |\arg\zeta| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(2 - \frac{2}{p}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \left|\frac{2}{p} - 1\right|\right).$$

Доказательство для $2 \leqslant p < \infty$ аналогично. Теперь если f_k и g_k—простые функции, то интеграл $\int\limits_M (e^{-\zeta A} f_k)\, g_k\, d\mu$ аналитичен в правой полуплоскости. Если $f_k \xrightarrow{L^p} f$ и $g_k \xrightarrow{L^q} g$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$, то

$$\int\limits_M (e^{-\zeta A} f_k)\, g_k\, d\mu \longrightarrow \int\limits_M (e^{-\zeta A} f)\, g\, d\mu$$

равномерно в $S^{(p)} = \left\{\zeta \,\middle|\, |\arg\zeta| < \frac{\pi}{2}\left(1 - \left|\frac{2}{p} - 1\right|\right)\right\}$, так что $\int\limits_M (e^{-\zeta A} f)\, g\, d\mu$ аналитичен в этом секторе. Так как слабо аналитические функции сильно аналитичны (теорема VI.4), то $\zeta \longmapsto e^{-\zeta A}$ аналитична в $S^{(p)}$ как функция, значения которой суть операторы в L^p.

Остается показать, что $e^{-zA} f \xrightarrow{L^p} f$, когда $z \to 0$ в $S^{(p)}$, для всех $f \in L^p$, $1 \leqslant p < \infty$. Если $z \in S^{(p)}$ и $1 \leqslant p \leqslant 2$, то $\|e^{-zA} f - f\|_p \leqslant \leqslant \|e^{-zA} f - f\|_2$ для $f \in L^2$. Поскольку L^2 плотно в L^p, сильная непрерывность следует из того, что совокупность $\{e^{-zA}\}$ равномерно ограничена на L^p, а отображение e^{-zA} сильно непрерывно на L^2. Предположим теперь, что $2 < p < \infty$, и пусть q удовлетворяет условию $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Допустим, что $e^{-t_0 A}\psi = 0$ для какого-либо $\psi \in L^q$. Тогда $e^{-sA}\psi = 0$ для всех $s \geqslant t_0$ и, следовательно, по аналитичности, $e^{-tA}\psi = 0$ для всех $t > 0$. Так как e^{-tA} сильно непрерывна на L^q, то $\psi = 0$. Значит, $\operatorname{Ker}(e^{-tA}) = \{0\}$ на L^q для всякого $t > 0$. Читатель легко удостоверится, что сопряженный к e^{-tA} на L^q есть e^{-tA} на L^p. Отсюда мы заключаем, что множество $\operatorname{Ran}(e^{-tA})$ плотно в L^p. Пусть $\psi = e^{-t_0 A}\varphi$, $\varphi \in L^p$. Тогда

$$\|e^{-zA}\psi - \psi\|_p \leqslant \|e^{-(z+t_0)A}\varphi - e^{-t_0 A}\varphi\|_p \to 0$$

при $z \to 0$, вследствие аналитичности внутри $S^{(p)}$, доказанной выше. Так как $\operatorname{Ran}(e^{-t_0 A})$ плотна и $\{e^{-zA}\}$ равномерно ограничены на $S^{(p)}$, заключаем, что e^{-zA} сильно непрерывна на L^p. ∎

Есть примеры, когда все предположения теоремы X.55 выполняются, но e^{-tA} не сильно непрерывна на L^∞. Действительно, таким примером может служить одномерный оператор Эрмита (пример 1 из § X.7). Так как в этом случае $e^{-tA}\psi(x)$ — непрерывная функция x для всякого $t > 0$, если $\psi \in L^\infty$, то $e^{-tA}\psi$ не может сходиться по норме L^∞ к ψ, если ψ не непрерывна.

X.9. Гиперсжимающие полугруппы

В предыдущем разделе мы рассмотрели L^p-сжимающие полугруппы. Здесь мы докажем теорему о самосопряженности операторов вида $A+V$, где V — оператор умножения и A порождает L^p-сжимающую полугруппу, удовлетворяющую сильному дополнительному требованию.

Определение. Пусть $\langle M, \mu \rangle$ — пространство с мерой и $\mu(M) = 1$. Предположим, что A — положительный самосопряженный оператор в $L^2(M, d\mu)$. Будем говорить, что e^{-tA} — **гиперсжимающая полугруппа**, если

(i) она L^p-сжимающая,

(ii) при некотором $b > 2$ и некоторой постоянной C_b существует такое $T > 0$, что $\|e^{-TA}\varphi\|_b \leqslant C_b \|\varphi\|_2$ при всех $\varphi \in L^2(M, d\mu)$.

По теореме X.55 из условия (i) следует, что e^{-tA} — сильно непрерывная сжимающая полугруппа при всех $p < \infty$. Неравенство Гёльдера показывает, что

$$\|\cdot\|_q \leqslant \|\cdot\|_p, \qquad \text{если } p \geqslant q. \tag{X.104}$$

Значит, L^p-пространства образуют семейство вложенных пространств, уменьшающихся по мере увеличения p; отсюда видно, что (ii) — очень сильное условие. Следующее предположение показывает, что b не играет никакой специальной роли.

Предложение. Пусть e^{-tA} — гиперсжимающая полугруппа на $L^2(M, d\mu)$; тогда для всех p, $q \in (1, \infty)$ существуют такие постоянные C_{pq} и $t_{pq} > 0$, что если $t \geqslant t_{pq}$, то

$$\|e^{-tA}\varphi\|_p \leqslant C_{pq} \|\varphi\|_q$$

при всех $\varphi \in L^q$.

Доказательство. Случай $p \leqslant q$ следует немедленно из (i) и (X.104). Поэтому предположим, что $p > q$. Поскольку e^{-TA}: $L^2 \to L^b$ и e^{-TA}: $L^\infty \to L^\infty$, то по теореме Рисса—Торина существует такая постоянная C, что для всех $r \geqslant 2$ выполнено неравенство $\|e^{-TA}\varphi\|_r \leqslant C\|\varphi\|_{br/2}$. Рассмотрим теперь два случая. В первом, когда $q \geqslant 2$, выберем достаточно большое n так, чтобы было $2(b/2)^n > p$. Тогда $\|e^{-nTA}\varphi\|_{(b/2)^n 2} \leqslant C^n\|\varphi\|_2$, так что если $2 \leqslant q$, $p > 2(b/2)^n$, то, пользуясь (X.104) и допущением (i), мы приходим к нужному заключению. При $1 < q \leqslant 2$ опять выбираем достаточно большое n так, что $2(b/2)^n > p$ и $q > c$, где $c^{-1} + (2(b/2)^n)^{-1} = 1$. Так как A самосопряжен и $e^{-nTA}\varphi$—ограниченное отображение из L^2 в $L^{2(b/2)^n}$, то $(e^{-nTA})^* = e^{-nTA}$—ограниченное отображение из L^c в L^2. Следовательно, e^{-2nTA}—ограниченное отображение из L^c в $L^{2(b/2)^n}$. Поскольку $c < q < p < 2(b/2)^n$, из (X.104) следует предложение. ∎

Прежде чем доказывать самосопряженность, рассмотрим пример гиперсжимающей полугруппы.

Пример 1. Мы будем пользоваться терминологией примера 2 из § X.6. Пусть U: $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx)$—унитарное отображение вида U: $f(x) \mapsto \pi^{1/4}e^{x^2/2}f(x)$. Введем оператор $B = UNU^{-1}$. Тогда

$$B = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx}.$$

Так как B унитарно эквивалентен N, то B в существенном самосопряжен на множестве конечных линейных комбинаций полиномов Эрмита $p_n(x) = U\phi_n$, положителен и $Bp_n = np_n$. Следовательно, B порождает сжимающую полугруппу e^{-tB} на $L^2(\mathbb{R}, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx)$. Покажем, что e^{-tB} есть гиперсжимающая полугруппа.

Так как $-d^2/dx^2$, x^2-1 и $-d^2/dx^2 + (x^2-1)$ все в существенном самосопряжены на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, то из формулы Троттера (теорема X.51) следует, что

$$e^{-tN}f = \lim_{n\to\infty}\left[\exp\left(\frac{t}{2n}\frac{d^2}{dx^2}\right)\exp\left(-\frac{t}{n}\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)\right)\right]^n f$$

для всех $f \in L^2(\mathbb{R}, dx)$. Поскольку $\exp(-(t/n)(^1/_2 x^2-1))$ и $\exp((t/2n)\,d^2/dx^2)$ сохраняют положительность (задача 53), заключаем, что e^{-tN} сохраняет положительность. Так как U также сохраняет положительность, то ее сохраняет и e^{-tB}. Далее, $p_0(x) \equiv 1$ и $e^{-tB}p_0 = p_0$. Значит, согласно теореме X.55, e^{-tB}—сжимающая полугруппа на $L^p(\mathbb{R}, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx)$ при всех $p \in [1, \infty]$.

Для доказательства свойства гиперсжимаемости мы покажем, что $\|e^{-tB}\varphi\|_4 \leqslant C\|\varphi\|_2$ при достаточно больших t. Прежде всего заметим, что

$$\|p_n\|_{L^4(\mathbb{R},\, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx)} = \left(\pi^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(p_n(x))^4 e^{-x^2}dx\right)^{1/4} = \\ = \|p_n(x)\phi_n\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R},\, dx)}.$$

Далее, так как $A\phi_0 = 0$, то

$$\phi_n(x) = (n!)^{-1/2}(A^\dagger)^n\phi_0 = (n!)^{-1/2}2^{n/2} : \left(\frac{A+A^\dagger}{\sqrt{2}}\right)^n : \phi_0.$$

Викова степень $:((A+A^\dagger)/\sqrt{2})^n:$ определится путем проведения операции возведения в степень и перестановки всех $A^\dagger$ влево от всех A в каждом члене получаемой суммы. Так как $(A+A^\dagger)/\sqrt{2} = x$, то рассуждение, намеченное в задаче 48, показывает, что оператор $:((A+A^\dagger)/\sqrt{2})^n:$ сводится к умножению на полином. Но $\phi_n(x) = p_n(x)\,\phi_0$, так что для всякого $\psi \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ имеем

$$p_n(x)\,\psi = 2^{n/2}(n!)^{-1/2} : \left(\frac{A+A^\dagger}{\sqrt{2}}\right)^n : \psi.$$

Следовательно, пользуясь оценкой (X.61), находим, что

$$\|p_n(x)\,\phi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 2^{n/2}(n!)^{-1/2}\left\| : \left(\frac{A+A^\dagger}{\sqrt{2}}\right)^n : \phi_n\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \\ \leqslant \frac{2^n}{(n!)^{1/2}}((n+1)^{1/2}\ldots(n+n)^{1/2}) = \\ = 2^n\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^{1/2} \leqslant 4^n.$$

Итак, если $\varphi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x) \in L^2(\mathbb{R}, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx)$, то

$$\left\|e^{-tB}\sum_{n=0}^{\infty}a_n p_n(x)\right\|_{L^4(\mathbb{R},\, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx)} \leqslant \\ \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\,e^{-tn}\,\|p_n(x)\|_{L^4(\mathbb{R},\, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx)} \leqslant \\ \leqslant \left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2tn}4^n\right)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant C\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R},\, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx)}$$

при $t > {}^1/_2\log 4$. Следовательно, e^{-tB} — гиперсжимающая полугруппа. Сформулируем этот результат в виде теоремы.

Теорема X.56. Оператор $-{}^1/_2 d^2/dx^2 + x\,d/dx$ на пространстве $L^2(\mathbb{R}, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx)$ положителен, самосопряжен в существенном на множестве конечных линейных комбинаций полиномов Эрмита и порождает гиперсжимающую полугруппу.

В порядке подготовки к нашей главной теореме докажем следующий результат. Его обобщения указаны в Замечаниях.

Теорема X.57 (лемма Сигала). Пусть A и B — полуограниченные самосопряженные операторы, так что $A+B$ в существенном самосопряжен на $D(A)\cap D(B)$. Тогда

$$\|e^{-(A+B)}\|\leqslant\|e^{-A/2}e^{-B}e^{-A/2}\|.$$

Доказательство. Пусть $C=\|e^{-A/2}e^{-B}e^{-A/2}\|$. Пусть $\varphi\in Q(e^A)$. Тогда, разумеется, $\varphi\in Q(e^{-B})=\mathscr{H}$ и

$$(\varphi,\ e^{-B}\varphi)=(e^{A/2}\varphi,\ e^{-A/2}e^{-B}e^{-A/2}e^{A/2}\varphi)\leqslant C(\varphi,\ e^A\varphi),$$

откуда заключаем, что $\|e^{-B/2}\varphi\|^2\leqslant C\|e^{A/2}\varphi\|^2$. Из теоремы X.18 следует, что $(\varphi,\ e^{-B/2}\varphi)\leqslant(\varphi,\ C^{1/2}e^{-A/2}\varphi)$ или $\|e^{-B/4}\varphi\|^2\leqslant\leqslant C^{1/2}\|e^{A/4}\varphi\|^2$. По индукции получим $\|e^{-2^{-n}B}\varphi\|^2\leqslant C^{2^{1-n}}\|e^{2^{-n}A}\varphi\|^2$. Поэтому

$$(\varphi,\ e^{-2^{-(n+1)}A}e^{-2^{-n}B}e^{-2^{-(n+1)}A}\varphi)\leqslant C^{2^{-n}}(\varphi,\ \varphi)$$

для всех $\varphi\in Q(e^A)$. Так как $e^{-2^{-(n+1)}A}e^{-2^{-n}B}e^{-2^{-(n+1)}A}$ — ограниченный самосопряженный оператор, то

$$\|e^{-2^{-(n+1)}A}e^{-2^{-n}B}e^{-2^{-(n+1)}A}\|\leqslant C^{2^{-n}}$$

и, значит,

$$\|(e^{-2^{-(n+1)}A}e^{-2^{-n}B}e^{-2^{-(n+1)}A})^{2^n}\|\leqslant C.$$

Но по формуле Троттера

$$(e^{-2^{-(n+1)}A}e^{-2^{-n}B}e^{-2^{-(n+1)}A})^{2^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{-(A+B)}$$

в сильном смысле, так что и $\|e^{-(A+B)}\|\leqslant C$. ∎

Теперь мы готовы сформулировать нашу главную теорему.

Теорема X.58. Пусть $\langle M,\ \mu\rangle$ — пространство с мерой и $\mu(M)=1$, и пусть H_0 — генератор гиперсжимающей полугруппы на $L^2(M,\ d\mu)$. Пусть V — вещественнозначная измеримая функция на $\langle M,\ \mu\rangle$, такая, что $V\in L^p(M,\ d\mu)$ при всех $p\in[1,\ \infty)$ и $e^{-tV}\in L^1(M,\ d\mu)$ при всех $t>0$. Тогда H_0+V в существенном самосопряжен на $C^\infty(H_0)\cap D(V)$ и ограничен снизу.

Доказательство. Доказательство этой теоремы довольно длинное, поэтому мы разобьем его на несколько шагов. Идея состоит в следующем. Определим прежде всего

$$V_n(x)=\begin{cases}V(x), & \text{если } |V(x)|\leqslant n,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда $H_n = H_0 + V_n$ самосопряжен на $D(H_0)$ по теореме Като — Реллиха. Сначала мы выведем некоторые равномерные оценки экспоненты e^{-tH_n}, рассматриваемой как отображение из L^p в L^q. Затем мы воспользуемся этими оценками, чтобы доказать, что e^{-tH_n} сильно сходится к однопараметрической самосопряженной полугруппе $T(t)$ на $L^2(M, d\mu)$, так что $T(t)$ порождается некоторым полуограниченным самосопряженным оператором H. Наконец, мы покажем, что H в существенном самосопряжен на $C^\infty(H) \cap D(V)$ и равен там $H_0 + V$.

Первый шаг. При любом $t > 0$: $\sup\limits_n \|e^{-tV_n}\|_1 < \infty$ *и равномерно ограничен по* t *на любом компактном интервале из* $[0, \infty)$.

Чтобы доказать это утверждение, заметим, что если $V(x) < 0$, то $V_n(x) \geqslant V(x)$, так что $e^{-tV_n(x)} \leqslant e^{-tV(x)}$. С другой стороны, если $V(x) \geqslant 0$, то $V_n(x) \geqslant 0$, так что $e^{-tV_n(x)} \leqslant 1$. Значит, $e^{-tV_n(x)} \leqslant e^{-tV(x)} + 1$ при всех x, так что $\|e^{-tV_n(x)}\|_1 \leqslant \|e^{-tV}\|_1 + 1$. Если

$$V_+(x) = \begin{cases} V(x) & \text{при } V(x) > 0, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и $V_- = V - V_+$, то $\|e^{-tV_+}\|_1 \leqslant 1$, а $\|e^{-tV_-}\|_1$ монотонно возрастает; отсюда легко получается утверждение о равномерности.

Второй шаг. Пусть задано $p < q$. *Тогда для каждого* t *существует такая постоянная* C_t *(зависящая от* p, q *и* t, *но не зависящая от* n*), что для всех* $\varphi \in L^q$

$$\|e^{-tH_n}\varphi\|_p \leqslant C_t \|\varphi\|_q.$$

При фиксированных p *и* q *она равномерно ограничена по* t *в любом компактном интервале из* $[0, \infty)$.

Отметим, что это довольно слабый результат, поскольку $p < q$, однако требования на V настолько сильны, что нам его будет достаточно там, где он потребуется на четвертом шаге. Пусть $A_m = (e^{-tV_n/m} e^{-tH_0/m})^m$. Сначала покажем, что $\|A_m\varphi\|_p \leqslant C_t \|\varphi\|_q$, а потом воспользуемся формулой Троттера для произведения. Пусть r удовлетворяет равенству $r^{-1} + q^{-1} = p^{-1}$. Тогда отображение A_m можно записать в виде

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
L^q \arrow[r, "e^{-(t/m)H_0}"] & L^q \arrow[dr, "e^{-(t/m)V_n}"] & & & & \\
& & L^{(q^{-1}+m^{-1}r^{-1})^{-1}} \arrow[r, "e^{-(t/m)H_0}"] & L^{(q^{-1}+m^{-1}r^{-1})^{-1}} \arrow[dr, "e^{-(t/m)V_n}"] & & \\
& & & & L^{(q^{-1}+2m^{-1}r^{-1})^{-1}} \arrow[r] & {} \\
& & & & & \vdots \arrow[dr, "e^{-(t/m)V_n}"] & \\
& & & & & & L^p
\end{tikzcd}$$

Каждое из отображений $e^{-(t/m)H_0}$ есть сжатие, так как e^{-tH_0} — гиперсжимающая полугруппа. Согласно неравенству Гёльдера, норма каждого из отображений $e^{-(t/m)V_n}$ не превосходит $\|e^{-(t/m)V_n}\|_{mr}$. Поэтому

$$\|A_m\varphi\|_p \leqslant \|e^{-(t/m)V_n}\|_{mr}^m \|\varphi\|_q.$$

Далее,

$$\|e^{-(t/m)V_n}\|_{mr}^m = \left[\left(\int_M e^{-tV_n r}\,d\mu\right)^{1/mr}\right]^m = \|e^{-tV_n}\|_r,$$

и мы заключаем, что

$$\|A_m\varphi\|_p \leqslant \|e^{-tV_n}\|_r \|\varphi\|_q.$$

По формуле Троттера $A_m\varphi \to e^{-tH_n}\varphi$ при всех φ из L^2. Но, в силу $*$-слабой компактности единичного шара в L^p, $A_m\varphi$ также имеет $*$-слабую предельную точку ψ в L^p, такую, что $\|\psi\|_p \leqslant \|e^{-tV}\|_r \|\varphi\|_q$. Немного теории меры — и мы увидим, что $\psi = e^{-tH_n}\varphi$. Это дает нужную оценку. Равномерность доказывается так же, как на первом шаге.

Третий шаг. Существует такая постоянная E, не зависящая от n, что

$$\|e^{-tH_n}\varphi\|_2 \leqslant e^{Et}\|\varphi\|_2.$$

Сначала покажем, что $e^{-TH_0}e^{-2TV_n}e^{-TH_0}$ — ограниченное отображение из L^2 в L^2 с гранью D, не зависящей от n. Так как H_0 — гиперсжимающий, e^{-TH_0} — ограниченное отображение (с гранью D_1) из L^2 в L^4. По неравенству Гёльдера e^{-2TV_n} — ограниченное отображение из L^4 в L^2 с гранью $\|e^{-2TV_n}\|_4 = \|e^{-8TV_n}\|_1^{1/4} \leqslant (\|e^{-8TV}\|_1 + 1)^{1/4}$ согласно первому шагу. Наконец, e^{-TH_0} есть сжатие на L^2, так что $\|e^{-TH_0}e^{-2TV_n}e^{-TH_0}\| \leqslant D$. Следовательно, по лемме Сигала $\|e^{-2T(H_0+V_n)}\| \leqslant D$ или

$$-E \equiv \frac{-\log D}{2T} \leqslant H_0 + V_n.$$

Четвертый шаг. Пусть $\varphi \in L^2(M, d\mu)$. Тогда существует $T(t)\varphi \equiv \equiv \lim\limits_{n\to\infty} e^{-tH_n}\varphi$ и $T(t)$ есть сильно непрерывная полугруппа самосопряженных операторов, удовлетворяющих условию $\|T(t)\| \leqslant e^{Et}$. Далее, существует единственный самосопряженный оператор H, удовлетворяющий условию $H \geqslant -E$, такой, что $T(t) = e^{-tH}$.

Начнем с того, что запишем $e^{-tH_n}\varphi$, $\varphi \in L^2$, с помощью формулы Дюамеля в виде

$$e^{-tH_n}\varphi = e^{-tH_m}\varphi + \int_0^t e^{-(t-u)H_n}(V_m - V_n)e^{-uH_m}\varphi\, du.$$

Эта формула выполняется, так как обе ее части в применении к вектору из $D(H_0)$ оказываются решениями одного и того же дифференциального уравнения первого порядка. Так как H_n самосопряжен на $D(H_0)$, соответствующие полугруппы совпадают. Допустим теперь, что $\varphi \in L^\infty$ и t фиксировано. Тогда, согласно второму шагу, мы можем найти такую постоянную K_1, что $\|e^{-uH_m}\varphi\|_8 \leqslant K_1\|\varphi\|_\infty$ при всех m и всех $u \in [0, t]$. Можно найти также такую K_2, что

$$\|e^{-(t-u)H_n}\psi\|_2 \leqslant K_2\|\psi\|_4$$

при всех n и всех $u \in [0, t]$. Наконец, по неравенству Гёльдера $V_m - V_n$ имеет норму $\|V_m - V_n\|_8$ как отображение из L^8 в L^4. Следовательно, по формуле Дюамеля

$$\|e^{-tH_n}\varphi - e^{-tH_m}\varphi\|_2 \leqslant K_1K_2t\|V_m - V_n\|_8\|\psi\|_\infty.$$

Так как $V_n \xrightarrow{L^8} V$, то $e^{-tH_m}\varphi$ есть последовательность Коши в L^2; значит, можно определить $T(t)\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-tH_n}\varphi$. Согласно третьему шагу, $\{e^{-tH_m}\}$ равномерно ограничены, когда t меняется в компактных интервалах из $[0, \infty)$, так что $\varepsilon/3$-прием позволяет убедиться, что $e^{-tH_n}\varphi$ сходится при всех $\varphi \in L^2$. Аналогично доказывается, что, поскольку сходимость для $\varphi \in L^\infty$ равномерна на компактных t-интервалах, $T(t)$ — сильно непрерывная полугруппа. Определим теперь H как инфинитезимальный генератор $T(t)$. Так как каждый e^{-tH} самосопряжен, то H симметричен. Но e^{-tH} — полугруппа, ограниченная величиной e^{Et}, так что $-E-1 \in \rho(H)$. В силу основного критерия H самосопряжен. Оценки прямо вытекают из третьего шага.

Пятый шаг. Пусть $\mathscr{D}=\{\varphi \mid \varphi=e^{-tH}\psi$ *с некоторым* $\psi \in L^\infty\}$. *Тогда* $\mathscr{D} \subset L^4 \cap D(H_0)$, H *в существенном самосопряжен на* $\mathscr{D}$, *и если* $\varphi \in \mathscr{D}$, *то* $H\varphi=H_0\varphi+V\varphi$.

Пространство L^∞ плотно в L^2, поэтому, согласно спектральной теореме, $\mathscr{D}$ плотно в L^2. Также с помощью спектральной теоремы довольно легко убедиться, что множество $(H+i)[\mathscr{D}]$ L^2-плотно и, значит, H в существенном самосопряжен на $\mathscr{D}$. Теперь допустим, что $\varphi=e^{-tH}\psi \in \mathscr{D}$. Согласно второму шагу, $e^{-tH_n}\psi \in L^4$; применяя формулу Дюамеля подобно тому, как это делалось выше, можно показать, что $\{e^{-tH_n}\psi\}_{n=1}^\infty$ — последовательность Коши в L^4. Поскольку $\varphi_n \equiv e^{-tH_n}\psi \xrightarrow{L^2} \varphi$, заключаем, что $\varphi \in L^4 \subset D(V)$. Далее, так как $V_n \xrightarrow{L^4} V$, имеем $V_n\varphi_n \xrightarrow{L^2} V\varphi$.

Пусть теперь $f_n(t)=e^{-tH_n}$ и $f(t)=e^{-tH}$. Тогда $f_n(t)$ и $f(t)$ аналитичны в открытой правой полуплоскости и, согласно третьему шагу, $\|f_n(t)\| \leqslant e^{E(\operatorname{Re} t)}$ равномерно по n. Поскольку $f_n(t) \to f(t)$ на вещественной оси, заключаем по теореме Витали о сходимости (задача 33 из гл. I), что $f_n(t) \to f(t)$ сильно, равномерно на компактных подмножествах открытой правой полуплоскости. Тогда из интегральной теоремы Коши вытекает, что $f_n'(t) \to f'(t)$ сильно, т. е.

$$H_n\varphi_n \to H\varphi.$$

Следовательно,

$$H_0\varphi_n=(H_n-V_n)\varphi_n \to (H-V)\varphi.$$

Значит, $\varphi \in D(H_0)$ и $H\varphi=H_0\varphi+V\varphi$.

Шестой шаг. Оператор H_0+V *в существенном самосопряжен на* $C^\infty(H_0) \cap D(V)$.

Согласно пятому шагу, H_0+V в существенном самосопряжен на $D(H_0) \cap L^4$. Пусть $\psi \in D(H_0) \cap L^4$; положим $\psi_n=e^{-H_0/n}\psi$. Тогда, в силу спектральной теоремы, $\psi_n \in C^\infty(H_0)$ и $H_0\psi_n \to H_0\psi$. Но так как e^{-tH_0} — гиперсжимающая полугруппа, то $\psi_n \in L^4$ и $\psi_n \xrightarrow{L^4} \psi$. Значит, $V\psi_n \xrightarrow{L^2} V\psi$. Следовательно,

$$D(H_0) \cap L^4 \subset D\left(\overline{(H_0+V) \restriction C^\infty(H_0) \cap L^4}\right).$$

Так как $L^4 \subset D(V)$, то H_0+V в существенном самосопряжен на $C^\infty(H_0) \cap D(V)$.

Это завершает доказательство теоремы X.58. ∎

Отметим, что если $V \geqslant 0$, то первый и третий шаги (опирающиеся на теорему X.57) тривиальны. Мы доказали более трудную теорему, так как в том главном приложении, которое мы имеем в виду (пример 4), V не положителен. Теорема X.58 имеет следующее расширение:

Теорема X.59. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с конечной мерой и $\mu(M)=1$, пусть H_0 — самосопряженный генератор некоторой гиперсжимающей полугруппы на $L^2(M, d\mu)$. Предположим, что V — вещественнозначная измеримая функция на M, удовлетворяющая условию

(i) $V \in L^p$ при некотором $p > 2$ и $\|e^{-tV}\|_1 < \infty$ для всех $t \geqslant 0$

или условию

(ii) $V \in L^2$ и $V \geqslant 0$.

Тогда $H_0 + V$ в существенном самосопряжен на $C^\infty(H_0) \cap D(V)$ и ограничен снизу.

Наконец, сформулируем теорему непрерывности, которая может быть доказана с помощью тех же методов, что и теорема X.58.

Теорема X.60. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с конечной мерой, причем $\mu(M)=1$. Предположим, что самосопряженный оператор H_0 порождает гиперсжимающую полугруппу на $L^2(M, d\mu)$. Пусть $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ и V — вещественнозначные функции на M, удовлетворяющие условиям

(i) $V_n,\ V \in \bigcap\limits_{p<\infty} L^p(M, d\mu)$;

(ii) $e^{-V_n},\ e^{-V} \in \bigcap\limits_{p<\infty} L^p(M, d\mu)$;

(iii) существует такое $q \in (2, \infty]$, что

$$V_n \xrightarrow{L^q} V \quad \text{и} \quad \sup_n \|e^{-V_n}\|_q < \infty.$$

Тогда $H_0 + V_n \to H_0 + V$ в смысле резольвентной нормы.

Пример 2 (ангармонический осциллятор, четвертое доказательство). Пусть $V(x)$ — неотрицательная измеримая функция на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |V(x)|^p e^{-x^2}\, dx < \infty$ при всех $p \in [1, \infty)$. Рассмотрим оператор $-d^2/dx^2 + 2x\, d/dx + (V(x) - 1)$ на множестве $U[\mathscr{S}]$, где U: $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}, \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx)$ — отображение, определенное в примере 1. В примере 1 мы показали, что $-d^2/dx^2 + 2x\, d/dx$ порождает гиперсжимающую полугруппу. Значит, поскольку $V(x) - 1$ удовлетворяет условиям теоремы X.58, $-d^2/dx^2 + 2x\, d/dx + V(x) - 1$ в существенном самосопряжен на $U[\mathscr{S}]$. Следовательно, $-d^2/dx^2 + x^2 + V(x)$ в существенном самосопряжен на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. В частности, если мы выберем $V(x) = x^4$, мы получим новое доказательство самосопряженности в существенном оператора ангармонического осциллятора на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Пример 3. Пусть $V \in L^2(\mathbb{R}^n, \pi^{-n/2}e^{-|x|^2}d^nx)$ и $V \geqslant 0$. Из теоремы X.59 следует самосопряженность в существенном оператора $-\Delta+V$ на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. В самом деле, обобщая пример 1, можно показать, что $-\Delta+2x\cdot\nabla$ порождает гиперсжимающую полугруппу на $L^2(\mathbb{R}^n, \pi^{-n/2}e^{-|x|^2}d^nx)$, а затем с помощью теоремы X.59 и методов примера 2 убедиться в том, что $-\Delta+x^2+V$ в существенном самосопряжен на $C^\infty(-\Delta+x^2)\cap D(V)=\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\cap D(V)$. Простое рассуждение показывает, что он самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Наконец, как в примере 6 из § X.2, воспользуемся равенством $[x_i, [x_j, -\Delta]]=\delta_{ij}$ и докажем оценку

$$\|x^2\psi\|^2 \leqslant \|(-\Delta+V+x^2)\psi\|^2+2n\|\psi\|^2.$$

Отсюда с помощью приема Конради получаем, что $-\Delta+V$ в существенном самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Этот результат мы уже получили в § X.4 с помощью неравенства Като.

Пример 4 (применения в квантовой теории поля). Мы будем пользоваться обозначениями, введенными в § X.7.

Теорема X.61. Пусть $\mathscr{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство с комплексным сопряжением C. Пусть A — самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$, коммутирующий с C. Тогда

(a) Если $A \geqslant 0$, то $\Gamma(e^{-tA})$ есть L^p-сжимающая полугруппа на Q-пространстве.

(b) Если $A \geqslant cI > 0$, то $\Gamma(e^{-tA})$ — гиперсжимающая полугруппа.

Доказательство. Докажем (a). Доказательство (b) представляет собой бесконечномерный вариант соответствующего доказательства в примере 1 (ссылки на литературу см. в Замечаниях). Пусть $\{A_n\}$ — последовательность ограниченных самосопряженных операторов, спектры которых состоят из конечного числа собственных значений конечной кратности, так что $e^{-tA_n} \to e^{-tA}$ в сильном смысле при $n \to \infty$. Фиксируем n, и пусть $\{a_l\}_{l=1}^N$ обозначает ненулевые собственные значения A_n с соответствующими собственными функциями $\{\psi_l\}_{l=1}^N$. Пусть $\{\psi_l\}_{l=N+1}^\infty$ — ортонормированный базис ядра оператора A_n. Пусть S — унитарное отображение $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$ на Q-пространство $L^2(Q, d\mu)$, построенное с помощью базиса $\{\psi_l\}_{l=1}^\infty$ в $\mathscr{H}$. Мы покажем, что SA_nS^{-1} сохраняет положительность. Если $\varphi(\cdot)$ и $\pi(\cdot)$ — канонические поле и сопряженный импульс, отвечающие C, то на подпространстве $\{P(\varphi(\psi_l))\Omega_0 \mid P$ — полином$\}$ пространства $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$ оператор $d\Gamma(A_n)$ равен $^1/_2(\varphi(\psi_l)^2+\pi(\psi_l)^2-1)$. Значит,

$$S d\Gamma(A_n) S^{-1} = \sum_{l=1}^N {}^1/_2 a_l \left(-\frac{d^2}{dq_l^2}+2q_l\frac{d}{dq_l}\right).$$

Следовательно,

$$S\Gamma(e^{-tA_n})S^{-1}=\prod_{l=1}^{N}\exp\left(-\frac{ta_l}{2}\left(-\frac{d^2}{dq_l^2}+2q_l\frac{d}{dq_l}\right)\right).$$

Согласно примеру 1, все $\exp(-(ta_l/2)(-d^2/dq_l^2+2q_l d/dq_l))$ сохраняют положительность и

$$\exp\left(-\frac{ta_l}{2}\left(-\frac{d^2}{dq_l^2}+2q_l\frac{d}{dq_l}\right)\right)1=1.$$

Значит, $S\Gamma(e^{-tA_n})S^{-1}$ сохраняет положительность и $S\Gamma(e^{-tA_n})S^{-1}1=$ $=1$. Так как e^{-tA_n} сильно сходится к e^{-tA} на $\mathscr{H}$, то $\Gamma(e^{-tA_n})$ сильно сходится к $\Gamma(e^{-tA})$ на $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$. Итак, мы заключаем, что $S\Gamma(e^{-tA})S^{-1}$ сохраняет положительность и удовлетворяет условию $S\Gamma(e^{-tA})S^{-1}1=1$. Следовательно, по теореме X.55, полугруппа $S\Gamma(e^{-tA})S^{-1}$ L^p-сжимающая. ∎

Следствие. Свободный гамильтониан $d\Gamma(\mu)$ теории свободного скалярного поля с массой $m>0$ порождает гиперсжимающую полугруппу $\Gamma(e^{-t\mu})$ на $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$.

Теорема X.62. Гамильтониан $H_0+H_I(g)$ (определенный в § X.7) теории скалярного поля с $(\varphi^4)_2$-самодействием самосопряжен в существенном на $C^\infty(H_0)\cap D(H_I(g))$.

Доказательство. Из теоремы X.45 и приведенного выше следствия вытекает, что SH_0S^{-1} и $SH_I(g)S^{-1}$ удовлетворяют условиям теоремы X.58. ∎

X.10. Граф-пределы

В этом разделе мы продолжим рассмотрение граф-пределов, начатое в § VIII.7, причем будем пользоваться без пояснений введенными там обозначениями. В теореме VIII.26 было показано, что если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и A — самосопряженные операторы, то $A_n\to A$ в строгом резольвентном смысле тогда и только тогда, когда A есть строгий граф-предел последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Хотя теорема VIII.26 и интересна, она не очень полезна, так как доказательство существенно опирается на сделанное заранее предположение о существовании самосопряженного предела A. Однако в приложениях часто желательно установить именно самосопряженность этого предела. Если же предположить лишь сильную сходимость $(A_n+i)^{-1}$ и $(A_n-i)^{-1}$ к операторам R_+ и R_-, то сильный резольвентный предел A существует тогда и только тогда, когда R_+ или R_- имеет плотную область значений (теорема VIII.22), а это такое свойство, которое, вообще говоря, трудно доказать. С другой стороны, сильный граф-предел последовательности самосопряженных операторов $\{A_n\}$ может существовать, но не быть самосопряженным, хотя он автоматически оказывается замкнутым и симметрическим (теорема VIII.27). Смысл следующей теоремы в том, что если оба типа пределов существуют, то предельный оператор самосопряжен. По существу, надо просто воспользоваться слабым граф-пределом.

Теорема X.63 (теорема о граф-пределе). Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Допустим, что

(i) $(A_n \pm i)^{-1} \longrightarrow R_\pm$ сильно

и

(ii) слабый граф-предел A последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ плотно определен.

Тогда A самосопряжен, $(A \pm i)^{-1} = R_\pm$ и A_n сходится к A в сильном резольвентном смысле.

Доказательство. Покажем сначала, что $\operatorname{Ker}(R_+) = \{0\}$. Пусть $\chi \in \operatorname{Ker}(R_+)$ и $\varphi \in D(A)$. Тогда существует такая последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $\varphi_n \in D(A_n)$, $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ и $A_n\varphi_n \xrightarrow{w} A\varphi$. Следовательно,

$$(\chi, \varphi) = \lim_{n\to\infty} (\chi, \varphi_n) = \lim_{n\to\infty} ((A_n + i)^{-1}\chi, (A_n - i)\varphi_n) = $$
$$= (R_+\chi, A\varphi - i\varphi) = 0.$$

Так как $D(A)$ плотна, $\chi = 0$. Значит, $\operatorname{Ker}(R_+) = \{0\}$. Поскольку $R_- = R_+^*$, имеем $\operatorname{Ran} R_- = (\operatorname{Ker} R_+)^\perp = \mathscr{H}$. Следовательно, по теореме VIII.22 существует такой самосопряженный оператор A', что $A_n \longrightarrow A'$ в сильном резольвентном смысле. Наконец, из теоремы VIII.26 вытекает, что A' есть сильный граф-предел $\{A_n\}$, поэтому $A' \subset A$. Но, по теореме VIII.28, A симметричен, так что $A' = A$. ∎

Важность этой теоремы в том, что она сводит вопрос о самосопряженности к вопросу о сходимости, а такие вопросы иногда удается решать при помощи прямых оценок операторов A_n. Мы сейчас докажем это для условия (i). Позже мы выведем достаточное условие и для (ii). Как можно доказать (i)? Если $\varphi \in \mathscr{H}$, то *формально*

$$(A_n + i)^{-1}\varphi - (A_m + i)^{-1}\varphi = (A_n + i)^{-1}(A_n - A_m)(A_m + i)^{-1}\varphi. \tag{X.105}$$

Это выражение имеет смысл, если $(A_m + i)^{-1}\varphi$ принадлежит и $D(A_n)$, и $D(A_m)$. Значит, если m и n фиксированы и мы хотим, чтобы (X.105) выполнялось на плотном множестве, мы должны потребовать, чтобы $D_{n,m} = (A_m + i)[D(A_n) \cap D(A_m)]$ было плотно.

Далее, если мы хотим перейти к пределу (X.105) при фиксированном φ, мы должны потребовать, чтобы $\varphi \in \bigcap D_{n, m}$. Значит, равенством (X.105) нельзя воспользоваться, если $\bigcap D_{n, m}$ не плотно. Если же такое условие регулярности выполнено, то сходимость резольвенты можно доказать, когда $A_n - A_m$ и $(A_m \pm i)^{-1}$ оцениваются равномерно, например в терминах вспомогательного самосопряженного оператора:

Теорема X.64. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность самосопряженных операторов с общей существенной областью определения D_0. Пусть N — строго положительный самосопряженный оператор, такой, что при некоторых $\alpha > 0$, $\beta > 0$

(i) $\mathscr{D}^{\pm} = \bigcap\limits_n (\operatorname{Ran}(A_n \pm i) \upharpoonright D_0)$ плотны и $\mathscr{D}^{\pm} \subset D(N^{\alpha})$;

(ii) $\|N^{\beta}(A_n \pm i)^{-1} N^{-\alpha}\| \leqslant M$ при всех n;

(iii) N^{β} в существенном самосопряжен на D_0 и

$$\|N^{-\beta}(A_n - A_m) N^{-\beta}\| \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

Тогда $\{(A_n \pm i)^{-1}\varphi\}$ при всяком $\varphi \in \mathscr{H}$ есть последовательность Коши в $\mathscr{H}$.

Доказательство. Пусть $\chi \in \mathscr{D}^{+}$. Положим $\varphi_n = (A_n + i)^{-1}\chi$. Тогда

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n - \varphi_m\|^2 = (\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) = \\
&= \operatorname{Im}(\varphi_n - \varphi_m, (A_n + i)(\varphi_n - \varphi_m)) \leqslant \\
&\leqslant |(\varphi_n - \varphi_m, (A_n + i)(\varphi_n - \varphi_m))| = \\
&= |(\varphi_n - \varphi_m, (A_m - A_n)\varphi_m)| = \\
&= |(N^{\beta}(\varphi_n - \varphi_m), N^{-\beta}(A_m - A_n) N^{-\beta} N^{\beta}\varphi_m)| \leqslant \\
&\leqslant (2 \sup_k \|N^{\beta}(A_k + i)^{-1} N^{-\alpha} N^{\alpha}\chi\|^2) \|N^{-\beta}(A_m - A_n) N^{-\beta}\| \leqslant \\
&\leqslant 2M^2 \|N^{\alpha}\chi\|^2 \|N^{-\beta}(A_m - A_n) N^{-\beta}\| \to \\
&\to 0 \text{ при } n, m \to \infty.
\end{aligned}$$

Следовательно, $(A_n + i)^{-1}$ — последовательность Коши в сильном смысле на $\mathscr{D}^{+}$. Поскольку $\mathscr{D}^{+}$ плотно и $\{(A_n + i)^{-1}\}$ равномерно ограничена, $(A_n + i)^{-1}\varphi$ сходится при всех $\varphi \in \mathscr{H}$. Доказательство для $(A_n - i)^{-1}$ такое же. ∎

Пример (ангармонический осциллятор, пятое доказательство). Пусть

$$H_0 = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)$$

в $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$ и $V = x^4$. В обозначениях примера 2 из § X.6 $H_0 = A^{\dagger}A + 1/2$ и $V = {}^1/_4 (A + A^{\dagger})^4$. Пусть E_n — спектральный проектор H_0, отвечающий интервалу $[0, n]$. Область значений E_n

конечномерна и порождается n первыми функциями Эрмита. Выберем в качестве D_0 множество конечных линейных комбинаций функций Эрмита и положим $A_n = N + V_n$, где $V_n = E_n V E_n$ и $N = H_0$. Мы покажем, что A_n, N и D_0 удовлетворяют условиям теоремы X.64 с $\beta = 2$ и $\alpha = 1$. Множество D_0 есть существенная область для H_0 и, поскольку каждый $E_n V E_n$ ограничен, D_0 — общая существенная область для $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Чтобы доказать (i), заметим, что $\operatorname{Ran}[(A_n \pm i) \restriction (E_n \mathscr{H})] = E_n \mathscr{H}$, так как A_n оставляет $E_n \mathscr{H}$ инвариантным, $A_n \restriction E_n \mathscr{H}$ самосопряжен и $E_n \mathscr{H}$ конечномерно. С другой стороны, спектральная теорема показывает, что $\operatorname{Ran}[(A_n \pm i) \restriction (D_0 \cap (I - E_n) \mathscr{H})] = D_0 \cap (I - E_n) \mathscr{H}$, так как $A_n = H_0$ на $(I - E_n) \mathscr{H}$. Итак, $\operatorname{Ran}(A_n \pm i) \restriction D_0 \supset D_0$. Обратное включение выполняется тривиально, так что $\mathscr{D}^{\pm} = \bigcap_n \operatorname{Ran}(A_n \pm i) \restriction D_0 = D_0$. Далее, в силу спектральной теоремы, все степени $N = H_0$ самосопряжены в существенном на D_0. Оценка в (iii) немедленно следует из того, что $V = {}^1/_4 (A^\dagger + A)^4$, и из оценок (X.61). Остается доказать оценку в (ii), т. е. что для $\varphi \in D_0$

$$\|N^2 (A_n \pm i)^{-1} N^{-1} \varphi\| \leqslant M \|\varphi\|, \tag{X.106}$$

или, иначе говоря, что

$$N^4 \leqslant M_1 (A_n \mp i) N^2 (A_n \pm i) + M_2 \tag{X.107}$$

в смысле квадратичных форм на D_0. Чтобы доказать (X.107), проделаем следующее разложение:

$$\begin{aligned}
(A_n \mp i) N^2 (A_n \pm i) &= (N + V_n \mp i) N^2 (N + V_n \pm i) = \\
&= N^4 + V_n N^3 + N^3 V_n + (V_n \mp i) N^2 (V_n \pm i) = \\
&= N^4 + N^{3/2} V_n N^{3/2} + [N^{3/2}, [N^{3/2}, V_n]] + \\
&\quad + (V_n \mp i) N^2 (V_n \pm i) \geqslant \\
&\geqslant N^4 + [N^{3/2}, [N^{3/2}, V_n]],
\end{aligned} \tag{X.108}$$

где учтена положительность V_n и N. Пользуясь оценкой (X.61) и свойствами коммутации $A^\dagger$ и A, можно доказать (см. задачу 62), что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое b, что

$$\|[N^{3/2}, [N^{3/2}, V_n]] \varphi\| \leqslant \varepsilon \|N^4 \varphi\| + b \|\varphi\|$$

при всех $\varphi \in D_0$ и всех n. Выбирая ε столь малым, чтобы $2\varepsilon < 1$, можем заключить по теореме X.18, что

$$[N^{3/2}, [N^{3/2}, V_n]] \leqslant 2\varepsilon N^4 + M_2 \tag{X.109}$$

в смысле квадратичных форм на D_0. Из (X.108) и (X.109) следует (X.107), что и доказывает оценку в (ii).

Тем самым мы убедились, что для последовательности $H_0 + V_n$

выполнены условия теоремы X.64. Значит, $(H+V_n\pm i)^{-1}$ сильно сходится на $\mathscr{H}$. Далее, чтобы применить теорему X.63, следует только показать, что область $D^s_\infty=\{\psi\,|\,\langle\psi, \varphi\rangle\in\Gamma^s_\infty$ при каком-либо $\varphi\}$ плотна. В нашем случае это тривиально, так как для всех $\psi\in D_0$ имеем $(H_0+V_n)E_n\psi\longrightarrow H_0\psi+x^4\psi$. Следовательно, по теореме X.63, H_0+V_n сходится в сильном резольвентном смысле к самосопряженному оператору C, область определения которого содержит D_0, и $C\restriction D_0={}^1/_2(-d^2/dx^2+x^2)+x^4$.

Этот результат, носящий характер теоремы существования, сам по себе не слишком интересен, потому что из теоремы X.3 можно было немедленно заключить, что ${}^1/_2(-d^2/dx^2+x^2+2x^4)\restriction D_0$ имеет самосопряженное расширение. Однако следующее построение, опирающееся на резольвентную сходимость, позволяет доказать самосопряженность на $D(H_0)\cap D(x^4)$. Сначала, разлагая $(H_0+V_n)^2$, найдем, что

$$\begin{aligned}(H_0+V_n)^2&=H_0^2+V_n^2+H_0V_n+V_nH_0=\\&=H_0^2+V_n^2+2H_0^{1/2}V_nH_0^{1/2}+[H_0^{1/2}, [H_0^{1/2}, V_n]]\geqslant\\&\geqslant H_0^2+V_n^2+[H_0^{1/2}, [H_0^{1/2}, V_n]]\end{aligned}$$

в смысле квадратичных форм на D_0, ибо $V_n\geqslant 0$. Прием, подобный указанному в задаче 62 в связи с доказательством (X.109), может быть применен и для доказательства существования такой константы b (не зависящей от n), что при любом $\varepsilon>0$

$$0\leqslant\varepsilon H_0^2+[H_0^{1/2}, [H_0^{1/2}, V_n]]+b. \tag{X.110}$$

Значит, существуют такие постоянные c_1 и c_2, что для $\varphi\in D_0$ и для всех n

$$\|H_0\varphi\|^2+\|V_n\varphi\|^2\leqslant c_1\|(H_0+V_n)\varphi\|^2+c_2\|\varphi\|^2. \tag{X.111}$$

Пусть теперь $\psi\in D(C)$. Тогда $\psi=(C+i)^{-1}\chi$ для некоторого χ из $\mathscr{H}$. Положим $\psi_n=(H_0+V_n+i)^{-1}\chi$; тогда $\psi_n\longrightarrow\psi$. Значит, при всяком $\theta\in D_0$

$$|(V\theta, \psi)|\leqslant\|V\theta\|\|\psi-\psi_n\|+\|(V-V_n)\theta\|\|\psi_n\|+|(\theta, V_n\psi_n)|. \tag{X.112}$$

Но из (X.111) следует, что

$$\begin{aligned}\|V_n\psi_n\|&\leqslant d_1\|(H_0+V_n)\psi_n\|+d_2\|\psi_n\|\leqslant\\&\leqslant(d_1+d_2)\|(H_0+V_n+i)\psi_n\|=(d_1+d_2)\|\chi\|.\end{aligned}$$

Так как первые два члена в (X.112) стремятся к нулю при $n\longrightarrow\infty$, мы заключаем, что $|(V\theta, \psi)|\leqslant(d_1+d_2)\|\theta\|\|\chi\|$ при всех $\theta\in D_0$. Значит, $\psi\in D((V\restriction D_0)^*)=D(V)$, так что $D(C)\subset D(V)$. Аналогичное построение доказывает, что $D(C)\subset D(H_0)$. Следовательно, $C={}^1/_2(-d^2/dx^2+x^2)+x^4$ самосопряжен на $D(-d^2/dx^2+x^2)\cap D(x^4)$.

Этот пример отражает основные идеи доказательства самосопряженности гамильтониана $(\varphi^4)_2$-модели с пространственным обрезанием в квантовой теории поля. В случае теории поля доказательства оценок (X.109) и (X.110) труднее, но часто опираются на те же самые идеи (задача 62).

Обратимся теперь к задаче доказательства условия (ii) теоремы X.63. Поскольку часто бывает трудно прямо убедиться в его справедливости, полезно запастись одним следствием теоремы X.63. Но прежде дадим такое

Определение. Последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ положительных самосопряженных операторов называется **плотно ограниченной**, если существует такое плотное множество $D_b \subset \mathscr{H}$, что при каждом $\psi \in D_b$ существует последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям

(i) $\psi_n \xrightarrow{\mathscr{H}} \psi$,

(ii) $\psi_n \in Q(A_n)$,

(iii) $\sup\limits_n (\psi_n, A_n\psi_n) < \infty$.

Теорема X.65. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность положительных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть

(i) $(A_n+1)^{-1}$ сильно сходится к R,

(ii) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ плотно ограничена.

Тогда существует такой самосопряженный оператор A, что $R=(A+1)^{-1}$ и $A_n \to A$ в сильном резольвентном смысле.

Доказательство. Пусть $B_n=(A_n+1)^{1/2}$. Тогда $B_n^{-2} \to R$ сильно, и так как B_n^{-2} — равномерно ограниченные положительные операторы, то из непрерывности, в смысле функционального исчисления, квадратного корня (теорема VIII.20 и задача VI.14) следует, что $B_n^{-1} \to R^{1/2}$ сильно. Если нам удастся показать, что существует подпоследовательность $\{B_{n_k}\}$ последовательности $\{B_n\}$, для которой граф-предел $\{B_{n_k}\}$ плотно определен, то мы сможем заключить, при помощи небольшой модификации теоремы X.63, что $R^{1/2}=B^{-1}$ с некоторым положительным самосопряженным B. Если мы затем положим $A=B^2-1$, мы получим равенство $R=(A+1)^{-1}$, доказывающее теорему.

Построим подпоследовательность $\{B_{n_k}\}$ следующим образом. Пусть $\{\psi^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — тотальное множество векторов в D_b. Поскольку $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ плотно ограничена, для каждого k найдется такая последовательность $\{\psi_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$, что $\psi_n^{(k)} \in Q(A_n)=D(B_n)$, $\psi_n^{(k)} \to \psi^{(k)}$ и $\sup\limits_n \|B_n\psi_n^{(k)}\| < \infty$. Рассмотрим теперь последовательность $B_n\psi_n^{(1)}$.

Поскольку все $B_n\psi_n^{(1)}$ содержатся в фиксированном шаре в $\mathcal{H}$, можно найти слабо сходящуюся подпоследовательность $B_{n(1,j)}\psi_{n(1,j)}^{(1)}$ (так как все шары слабо секвенциально компактны). Выберем далее последовательность $\psi_{n(1,j)}^{(2)} \to \psi^{(2)}$ и извлечем из $B_{n(1,j)}$ такую подпоследовательность $B_{n(2,j)}$, что $B_{n(2,j)}\psi_{n(2,j)}^{(2)}$ слабо сходится. Действуя дальше таким способом и пользуясь приемом диагонализации, мы составим подпоследовательность $\{B_{n(j,j)}\}_{j=1}^{\infty}$, которая обладает тем свойством, что для каждого k существует такая последовательность $\psi_{n(j,j)}^{(k)}$, что $\psi_{n(j,j)}^{(k)} \in D(B_{n(j,j)})$, $\psi_{n(j,j)}^{(k)} \to \psi^{(k)}$ и $B_{n(j,j)}\psi_{n(j,j)}^{(k)}$ слабо сходится. Значит, каждый $\psi^{(k)}$ принадлежит D_∞^w для последовательности $B_{n(j,j)}$. Так как D_b плотно и $\{\psi^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ тотально в D_b, то D_∞^w плотно, что и доказывает (по теореме XIII.28) существование слабого граф-предела последовательности $\{B_{n(j,j)}\}_{j=1}^{\infty}$. ∎

Эта теорема была применена к доказательству существования гамильтониана с пространственным обрезанием в двумерной полевой теории со взаимодействием Юкавы. Детальное доказательство потребовало бы привлечения теории свободных фермионных полей и целого ряда довольно сложных оценок. Если же эти оценки уже получены, то идея состоит в следующем. Прежде всего рассматривается гамильтониан со взаимодействием $H(g, \varkappa) = H_0 + H_I(g, \varkappa)$, содержащий пространственное и ультрафиолетовое обрезания. Пространственное обрезание вводится так же, как и в теории поля с $(\varphi^4)_2$-взаимодействием, рассмотренной в § X.7. Ультрафиолетовое обрезание означает, что интегралы в пространстве импульсов, выражающие H_I через операторы рождения и уничтожения, берутся только по области $|k| \leqslant \varkappa$. Хотя $H(g, \varkappa)$ имеет смысл в пространстве Фока, $H(g, \varkappa)$ «расходится» при $\varkappa \to \infty$. Соображения формальной теории возмущений подсказывают, что $H(g, \varkappa)$ *должен* расходиться (!), так как мы ввели массу в свободной теории как некий свободный начальный параметр, а не как физически измеримую массу m в теории со взаимодействием, а также потому, что основное состояние системы без взаимодействия должно отличаться от основного состояния системы со взаимодействием на бесконечную энергию. Таким образом, теория возмущений предлагает рассматривать «правильный» гамильтониан в виде

$$H = H_0 + H_I - M - E, \qquad (X.113)$$

где E задается расходящимся интегралом, а M есть корректно определенный оператор, домноженный на другой расходящийся интеграл. И хотя H_I, M и E бесконечны в пространстве Фока, H в результате сокращения расходимостей оказывается корректно определенным. Если мы вводим пространственное и импульсное обрезание, как это описано выше, то H_0, $H_I(g, \varkappa)$, $M(g, \varkappa)$ и

$E(\varkappa)$ все конечны и определены в пространстве Фока и

$$H_{\text{ren}}(g, \varkappa) \equiv H_0 + H_I(g, \varkappa) - M(g, \varkappa) - E(\varkappa)$$

самосопряжен при всех $\varkappa$. Более того, можно показать, что $H_{\text{ren}}(g, \varkappa)$ равномерно по $\varkappa$ ограничен снизу некоторым C, что $(H_{\text{ren}}(g, \varkappa) - C + 1)^{-1}$ сильно сходится и что $\{H_{\text{ren}}(g, \varkappa_n)\}_{n=1}^{\infty}$ плотно ограничена. Следовательно, по теореме X.65, $H_{\text{ren}}(g, \varkappa)$ сходится в смысле равномерной резольвентной сходимости к самосопряженному оператору $H(g)$. Этот $H(g)$ и есть «правильный» гамильтониан с пространственным обрезанием. Пространственное обрезание может быть снято другими методами (см. гл. XIX).

X.11. Формула Фейнмана — Каца

Пусть H_0 — свободный квантовомеханический гамильтониан $-\Delta$, и пусть V — такой потенциал, что $-\Delta + V$ самосопряжен в существенном на $D(-\Delta) \cap D(V)$. Тогда формула Троттера говорит нам, как выразить $e^{-it(H_0+V)}$ в виде предела произведений $e^{-(it/n)H_0}$ и $e^{-(it/n)V}$ при $n \to \infty$. Так как мы имеем явное выражение для e^{itH_0} в виде интегрального оператора (см. (IX.31)):

$$(e^{-itH_0}f)(x) = \text{l.i.m.}\,(4\pi it)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(\frac{i|x-y|^2}{4t}\right) f(y)\,dy, \quad \text{(X.114)}$$

то мы можем выразить $e^{-it(H_0+V)}$ в виде предела интегральных операторов.

Теорема X.66. Пусть $V \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Тогда

$$(e^{-it(H_0+V)}f)(x_0) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4\pi it}{n}\right)^{-3n/2} \int_{\mathbb{R}^3} \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \exp(iS_n(x_0, \ldots, x_n, t)) \times$$
$$\times f(x_n)\,dx_n \ldots dx_1, \quad \text{(X.115)}$$

где

$$S_n(x_0, x_1, \ldots, x_n, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{t}{n}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{|x_i - x_{i-1}|}{t/n}\right)^2 - V(x_i)\right].$$

(Все интегралы берутся в смысле $\int\limits_{\mathbb{R}^3} = \lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{|x|\leqslant m}$, а все пределы берутся в смысле L^2.)

Доказательство. Так как $V \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$, то $H_0 + V$ самосопряжен на $D(H_0)$ (теорема X.15), и поэтому применима формула Троттера (теорема VIII.30):

$$e^{-it(H_0+V)}f = \lim_{n\to\infty} (e^{-(it/n)H_0} e^{-(it/n)V})^n f.$$

Подстановка явных выражений для $e^{-i(t/n)H_0}$ и $e^{-i(t/n)V}$ завершает доказательство. ∎

Формула (X.115) была установлена Фейнманом в 1948 г. на основе физической интерпретации. Если классическая частица с массой m движется в потенциале V, то говорят, что гладкому пути $\omega(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, отвечает **действие**, равное

$$S(\omega)=\int_0^t \left(\frac{m}{2}|\dot{\omega}(s)|^2-V(\omega(s))\right)ds. \tag{X.116}$$

Принцип наименьшего действия Лагранжа утверждает, что классическая частица двигается по пути, отвечающему наименьшему значению действия, т. е. классический путь удовлетворяет уравнению Эйлера—Лагранжа

$$m\ddot{\omega}(t)=-\nabla V(\omega(t)),$$

соответствующему (X.116).

Чтобы понять, как интерпретировать (X.115) в терминах действия, возьмем $m=1/2$, чтобы было $H_0=-(2m)^{-1}\Delta=-\Delta$. Для данных $x_0, x_1, \ldots, x_n$ рассмотрим классическую частицу с массой 1/2, двигающуюся по ломаной (рис. X.7) с постоянной скоростью на каждом сегменте. Классическое действие для этого пути есть

$$S(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t}{n}\right)\frac{1}{4}\left(\frac{|x_i-x_{i-1}|}{t/n}\right)^2-\int_0^t V(\omega(t))\,dt,$$

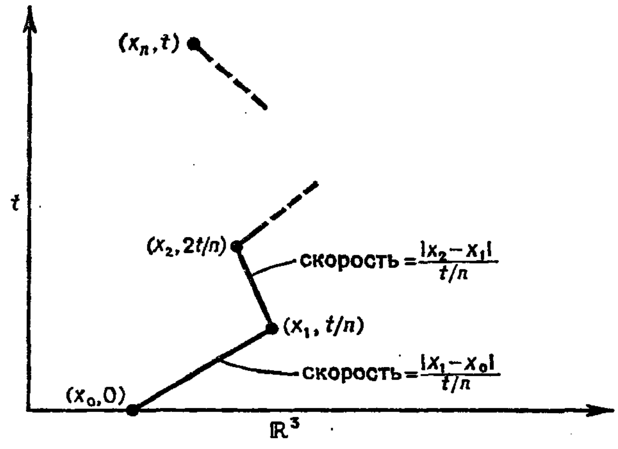

Рис. X.7. Кусочно-линейный путь между x_0 и x_n.

что приближенно равно

$$S_n(x_0, x_1, \ldots, x_n, t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{t}{n}\right) \left[\frac{1}{4}\left(\frac{|x_i - x_{i-1}|}{t/n}\right)^2 - V(x_i)\right],$$

если V непрерывна, а точки $x_0, \ldots, x_n$ выбраны достаточно близко друг к другу. Значит,

$$(4\pi i t/n)^{-3n/2} \int \ldots \int e^{iS_n(x_0, \ldots, x_n, t)} f(x_n)\, dx_n\, dx_{n-1} \ldots dx_1$$

можно понимать как интеграл по всем ломаным, где S_n аппроксимирует действие классической частицы, двигающейся по пути, изображенному на рис. X.7. Интуитивно ясно, что при $n \to \infty$ множество ломаных становится множеством всех путей, и для данного пути ω действие $S_n(x_0, \ldots, x_n, t)$ приближается к $S(\omega)$, если $\omega(0) = x_0$, $\omega(t) = x_n$ и все x_i лежат на ω. Итак, интуитивно кажется, что для $(e^{-it(H_0+V)}f)(x_0)$ можно найти формулу типа

$$(e^{-it(H_0+V)}f)(x_0) = \int_{\Omega_{x_0}} e^{iS(\omega)} f(\omega(t))\, d\omega, \qquad \text{(X.117)}$$

где Ω_{x_0} есть множество всех путей с $\omega(0) = x_0$, $S(\omega)$ — классическое действие на пути ω и $d\omega$ — мера на Ω_{x_0}. Пользуясь этой формулой, можно очень естественно перейти к классическому пределу. Если мы восстановим в гамильтониане постоянную Планка, то формула станет такой:

$$(e^{(-it/\hbar)(H_0+V)}f)(x_0) = \int_{\Omega_{x_0}} e^{iS(\omega)/\hbar} f(\omega(t))\, d\omega. \qquad \text{(X.118)}$$

Если мы теперь перейдем к классическому пределу, устремив $\hbar$ к нулю, то осциллирующие фазы в $e^{iS(\omega)/\hbar}$ будут взаимно сокращаться всюду, кроме как вокруг тех путей, на которых действие $S(\omega)$ стационарно. Это означает, что наибольший вклад в динамику при $\hbar \to 0$ вносят пути, ближайшие к классическим.

Это рассуждение поясняет, в чем прелесть эвристической формулы (X.117). Существует математическое понятие интегрирования по путям, введенное Винером, однако, к сожалению, это понятие *нельзя* применить для придания смысла правой части (X.118). Но им можно воспользоваться, чтобы вывести аналогичную формулу для $(e^{-t(H_0+V)}f)(x_0)$, называемую формулой Фейнмана — Каца. Прежде чем вывести ее, мы должны обсудить меру Винера. Наше построение меры Винера (которое мы выполним, так сказать, «голыми руками») является наиболее прямым. Подчеркнем, что существует и другой подход, основанный на гауссовых случайных переменных и теории марковских процессов. Такой более естественный подход позволяет накопить интуицию, бесценную для дальнейшего развития теории, однако необходимость вводить вероятностный аппарат увела бы нас сейчас слишком далеко от цели. В то же время мы чувствуем, что обсуждение существования динамики было бы неполно без формулы Фейнмана—Каца.

Чтобы пояснить нашу конструкцию винеровой меры на $\mathbb{R}^n$, заметим сначала, что, как это видно из формулы Троттера, для подходящего V

$$e^{-t(H_0+V)}f = \lim_{m\to\infty}(e^{-(t/m)H_0}e^{-(t/m)V})^m f,$$

причем

$$(e^{-(t/m)H_0}e^{-(t/m)V})^m f = \int \dots \int p\left(x_0, x_1; \frac{t}{m}\right)e^{-(t/m)V(x_1)}\dots$$
$$\dots p\left(x_{m-1}, x_m; \frac{t}{m}\right)e^{-(t/m)V(x_m)}f(x_m)\,dx_1\dots dx_m, \tag{X.119}$$

где

$$p(x, y; t) = (4\pi t)^{-n/2}e^{-|x-y|^2/4t}.$$

Есть две проблемы, связанные с переходом к бесконечному m в правой части (X.119). Первая состоит в том, что бесконечное произведение мер Лебега не дает никакой разумной меры. Вторая—та, что произведение ядер p в интуитивном смысле стремится к

$$\exp\left(-\int \dot{\omega}(t)^2\,dt\right), \tag{X.120}$$

а для произвольных путей $\dot{\omega}(t)$ весьма сингулярна. По счастью, эти две трудности при их совместном рассмотрении взаимно уничтожаются. Поэтому наш план состоит в том, чтобы построить меру μ_{x_0} в пространстве путей, начинающихся в x_0, так, чтобы правая часть (X.119) равнялась бы именно

$$\int_\Omega \prod_{j=1}^m e^{-(t/m)V(\omega(jt/m))}\,d\mu_{x_0}(\omega). \tag{X.121}$$

Поскольку величина (X.120), равная «нулю», служит делу сокращения «бесконечности» в бесконечном произведении лебеговых мер, то не удивительно, что процедура определения (X.121) не проходит, если (X.120) заменяется на $\exp\left(-i\int \dot{\omega}(t)^2 dt\right)$. В этом можно убедиться непосредственно (задача 64). После этих пояснений перейдем к построению меры Винера.

Пусть $\dot{\mathbb{R}}^n$ есть одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$, и пусть $\Omega = \mathop{\times}\limits_{0\leqslant t} \dot{\mathbb{R}}^n$—произведение несчетного множества экземпляров $\dot{\mathbb{R}}^n$. Тогда Ω есть в точности множество всех путей в $\dot{\mathbb{R}}^n$ при $t\geqslant 0$; это такие же пути, что и в $\mathbb{R}^n$, с той лишь разницей, что они могут проходить через бесконечность. Мы всегда будем рассматривать Ω с топологией произведения; при этом оно будет компактным хаусдорфовым пространством в силу теоремы Тихонова. Это пространство столь обширно, что борелевы и бэровы множества в нем различаются. Мы будем рассматривать только регулярные борелевы меры. Пусть теперь $F(x_1, \ldots, x_m)$ — непрерывная функция на $\mathop{\times}\limits_{j=1}^{m} \mathbb{R}^n$. Фиксируем $t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_m$. Тогда $\varphi(\omega) = F(\omega(t_1), \ldots, \omega(t_m))$ есть непрерывная функция на Ω. Обозначим множество таких непрерывных функций на Ω для произвольного m через $C_{\text{fin}}(\Omega)$ и для таких φ *определим* функционал

$$L_{x_0}(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \ldots \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(x_1, \ldots, x_m)\, p(x_0, x_1; t_1)\, p(x_1, x_2; t_2 - t_1) \ldots$$
$$\ldots p(x_{m-1}, x_m; t_m - t_{m-1})\, dx_1 \ldots dx_m. \qquad (X.122)$$

Это корректно определенный линейный функционал на $C_{\text{fin}}(\Omega)$, так как если F не зависит от x_k, то можно воспользоваться полугрупповым свойством уравнения теплопроводности

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} p(x_{k-1}, x_k; t_k - t_{k-1})\, p(x_k, x_{k+1}; t_{k+1} - t_k)\, dx_k =$$
$$= p(x_{k-1}, x_{k+1}; t_{k+1} - t_{k-1})$$

и проинтегрировать по переменной x_k. Итак, $L_{x_0}(\varphi)$ не зависит от представления для φ. Далее, $L_{x_0}(1) = 1$ и $L_{x_0}(\varphi) \geqslant 0$, если $\varphi \geqslant 0$, так как p положительно. Следовательно, в силу предложения перед теоремой IV.14,

$$|L_{x_0}(\varphi)| \leqslant \sup_{\omega \in \Omega} |\varphi(\omega)|.$$

Значит, L_{x_0} — положительный линейный функционал с единичной нормой на $C_{\text{fin}}(\Omega)$. Но по теореме Стоуна — Вейерштрасса $C_{\text{fin}}(\Omega)$ плотно в $C(\Omega)$, так что L_{x_0} имеет единственное продолжение, которое мы тоже будем обозначать L_{x_0}, до положительного линейного функционала с единичной нормой на $C(\Omega)$. Наконец, по теореме Рисса — Маркова существует единственная регулярная мера Бореля μ_{x_0} на Ω, такая, что $\mu_{x_0}(\Omega) = 1$ и

$$L_{x_0}(\varphi) = \int\limits_{\Omega} \varphi\, d\mu_{x_0} \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C(\Omega).$$

При каждом x_0 мера μ_{x_0} называется **мерой Винера** на Ω. Иногда так называется все семейство мер $\{\mu'_x \mid x \in \mathbb{R}^n\}$.

Мера, которую мы построили, борелева. Многие интересные множества путей оказываются борелевыми подмножествами Ω. Так, например, имеет место следующая

Лемма. При $0<\alpha\leqslant 1$ множество Ω_α путей, непрерывных по Гёльдеру порядка α, есть борелево подмножество в Ω.

Доказательство. Путь ω принадлежит Ω_α тогда и только тогда, когда для всех $m<\infty$ существует такое M, что

$$|\omega(s)-\omega(t)|\leqslant M|s-t|^\alpha, \qquad 0\leqslant s,\ t\leqslant m.$$

Следовательно,

$$\Omega_\alpha=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{0\leqslant s,\, t\leqslant m}\left\{\omega\,\Big|\,|\omega(s)-\omega(t)|\leqslant n|s-t|^\alpha\right\}.$$

Поскольку $\left\{\omega\,\Big|\,|\omega(s)-\omega(t)|\leqslant n|s-t|^\alpha\right\}$ замкнуто, а произвольные пересечения замкнутых множеств замкнуты, то Ω_α борелево, ибо две последние операции счетны. ∎

Следующая теорема показывает, что мера μ_{x_0}, построенная на слишком обширном пространстве Ω, имеет носитель на непрерывных путях, но не на непрерывно дифференцируемых путях. Ссылки на литературу см. в Замечаниях.

Теорема X.67. Если $0<\alpha<1/2$, то $\mu_{x_0}(\Omega_\alpha)=1$ при всех $x_0\in\mathbb{R}^n$. Если $1/2\leqslant\alpha\leqslant 1$, то $\mu_{x_0}(\Omega_\alpha)=0$ при всех $x_0\in\mathbb{R}^n$.

Мы сформулировали теорему X.67 потому, что она нужна для доказательства (намеченного в задаче 65) следующей леммы:

Лемма. Пусть S—борелево множество нулевой лебеговой меры в $\mathbb{R}^n$, и пусть Ω_S—множество таких путей в Ω_α, что $\{t\,|\,\omega(t)\in S\}$ имеет меру Лебега нуль. Тогда $\mu_x\{\Omega_S\}=1$ для всякого $x\in\mathbb{R}^n$.

Вернемся теперь к обсуждению полугрупп e^{-tH_0} и $e^{-t(H_0+V)}$. По построению μ_x мы знаем, что для всякой непрерывной функции f на $\mathbb{R}^n$ при фиксированном $\alpha\in(0,1/2)$ выполняется равенство

$$\int_{\Omega_\alpha} f(\omega(t))\,d\mu_x(\omega)=\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,p(x,y;t)\,dy. \tag{X.123}$$

Если f—любая измеримая функция на $\mathbb{R}^n$, такая, что интегрируема $f(\cdot)\,p(x,\cdot;t)$, можно аппроксимировать f непрерывными функциями. Тогда, применяя теорему о мажорированной сходимости, убедимся, что (X.123) выполняется и для таких f. В частности, (X.123) выполняется для всех $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$. Но по (IX.31) правая часть (X.123) есть в точности $(e^{-tH_0}f)(x)$, поэтому мы получаем

$$(e^{-tH_0}f)(x)=\int_\Omega f(\omega(t))\,d\mu_x(\omega) \quad \text{при всех} \quad f\in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Это интеграл по путям, который задает свободную полугруппу. Установим теперь формулы интегрирования по путям в $\mathbb{R}^3$ при наличии взаимодействия. Заменяя L^2 на L^p, $p > n/2$, легко получить формулу Фейнмана—Каца на $\mathbb{R}^n$.

Теорема X.68 (формула Фейнмана—Каца). Пусть V—вещественнозначная функция в $L^2(\mathbb{R}^3)+L^\infty(\mathbb{R}^3)$, и пусть $H=H_0+V$, где $H_0=-\Delta$. Тогда для всех $f\in L^2(\mathbb{R}^3)$

$$(e^{-tH}f)(x)=\int_{\Omega_\alpha} f(\omega(t))\exp\left(-\int_0^t V(\omega(s))\,ds\right)d\mu_x(\omega). \quad (\text{X}.124)$$

Доказательство. Разобьем доказательство на четыре этапа. Сначала докажем эту формулу для непрерывных V с компактным носителем, затем для V из $L^\infty(\mathbb{R}^3)$, далее для $V\in L^2(\mathbb{R}^3)+L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $V\leqslant 0$, и, наконец, для V общего вида. Итак, допустим, что V непрерывна и имеет компактный носитель. Пользуясь (X.119) и (X.122), получим

$$\begin{aligned}
&\left[(e^{-(t/m)H_0}e^{-(t/m)V})^m f\right](x)=\\
&\quad=\int_{\mathbb{R}^3}\cdots\int_{\mathbb{R}^3} p(x,\ x_m;\ t/m)\ldots p(x_2,\ x_1;\ t/m)\cdot\\
&\quad\quad\cdot f(x_1)\exp\left(-\sum_{j=1}^m \frac{t}{m}V(x_j)\right)dx_1\ldots dx_m=\\
&\quad=\int_{\Omega_\alpha}\exp\left(-\frac{t}{m}\sum_{j=1}^m V\left(\omega\left(\frac{jt}{m}\right)\right)\right)f(\omega(t))\,d\mu_x(\omega). \quad (\text{X}.125)
\end{aligned}$$

В силу допущения о V оператор H_0+V самосопряжен на $D(H)=D(H_0)\cap D(V)$, так что по формуле Троттера для произведения $(e^{-(t/m)H_0}e^{-(t/m)V})^m f$ сходится к $e^{-tH}f$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$. Значит, существует такая подпоследовательность $\{m_j\}$, что $(e^{-(t/m_j)H_0}e^{-(t/m_j)V})^{m_j}f$ сходится к $e^{-tH}f$ почти всюду. С другой стороны, если ω—непрерывный путь, то $V(\omega(t))$ непрерывно по t и

$$\frac{t}{m}\sum_{j=1}^m V\left(\omega\left(\frac{jt}{m}\right)\right)\longrightarrow\int_0^t V(\omega(s))\,ds$$

при $m\longrightarrow\infty$. Так как для всякого x почти все (относительно μ_x) пути непрерывны, то

$$f(\omega(t))\exp\left(-\frac{t}{m}\sum_{j=1}^m V\left(\omega\left(\frac{jt}{m}\right)\right)\right)\longrightarrow f(\omega(t))\exp\left(-\int_0^t V(\omega(s))\,ds\right)$$

поточечно почти всюду на Ω_α при $m \to \infty$. Далее,

$$\int_{\Omega_\alpha} \left| f(\omega(t)) \exp\left(-\frac{t}{m} \sum_{j=1}^{m} V\left(\omega\left(\frac{jt}{m}\right)\right)\right)\right| d\mu_x(\omega) \leqslant$$

$$\leqslant e^{t \max |V|} \int_{\Omega_\alpha} |f(\omega(t))|\, d\mu_x(\omega) = e^{t\max|V|} (e^{-tH_0}|f|)(x) < \infty$$

при почти всех x. Следовательно, по теореме о мажорированной сходимости правая часть (X.125) сходится к

$$\int_{\Omega} f(\omega(t)) \exp\left(-\int_0^t V(\omega(s))\, ds\right) d\mu_x(\omega)$$

при почти всех x. Это доказывает (X.124) в предположении, что V непрерывна и имеет компактный носитель.

Допустим теперь, что $V \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, и пусть V_n — последовательность непрерывных функций с компактным носителем, таких, что $|V_n(x)| \leqslant \|V\|_\infty$ для всех x и $V_n(x) \to V(x)$ поточечно почти всюду. Тогда (H_0+V_n) сходится к H_0+V в сильном резольвентном смысле, так что, по теореме VIII.20, $e^{-t(H_0+V_n)}$ сильно сходится к $e^{-t(H_0+V)}$ при каждом $t \geqslant 0$. По первому шагу доказательства

$$(e^{-t(H_0+V_n)} f)(x) = \int_{\Omega_\alpha} f(\omega(t)) \exp\left(-\int_0^t V_n(\omega(s))\, ds\right) d\mu_x(\omega) \qquad (X.126)$$

при почти всех x и всех n. Так как $V_n \to V$ поточечно почти всюду, то из леммы следует, что для почти всех $\omega \in \Omega_\alpha$

$$V_n(\omega(t)) \to V(\omega(t)) \text{ поточечно при почти всех } t.$$

Следовательно, так как V_n и V равномерно ограничены, $\int_0^t V_n(\omega(s))\, ds \to \int_0^t V(\omega(s))\, ds$ поточечно почти всюду в Ω_α. Итак,

$$f(\omega(t)) \exp\left(-\int_0^t V_n(\omega(s))\, ds\right) \to f(\omega(t)) \exp\left(-\int_0^t V(\omega(s))\, ds\right)$$

поточечно почти всюду в Ω_α, и теперь теорема о мажорированной сходимости, так же как на первом шаге, позволяет заключить, что правая часть (X.126) сходится к правой части (X.124). С другой стороны, как и прежде, подпоследовательность из левой части (X.126) сходится поточечно почти всюду к $e^{-t(H_0+V)} f$ вследствие сильной сходимости. Значит, (X.124) выполнено и во втором случае.

Допустим теперь, что $V \in L^2(\mathbb{R}^3)+L^\infty(\mathbb{R}^3)$ и $V \leqslant 0$. Пусть $V_n(x)=\max\{V(x), -n\}$. Тогда V_n есть последовательность убывающих функций из L^∞, такая, что $V_n \xrightarrow{L^2+L^\infty} V$ и $V_n \to V$ поточечно почти всюду. Для каждого n формула (X.124) выполнена, и при $n \to \infty$ последовательность $\int\limits_0^t V_n(\omega(s))\,ds \to \int\limits_0^t V(\omega(s))\,ds$ почти всюду в Ω_α согласно лемме и теореме о монотонной сходимости. Доказательство завершается при помощи тех же рассуждений, что и на втором шаге, и теоремы о монотонной сходимости.

С очевидными изменениями третий шаг может быть сделан и для функций, ограниченных сверху, поэтому, обращаясь еще раз к теореме о монотонной сходимости, завершаем доказательство в общем случае. ∎

Если $V \in L^2+L^\infty$, то из формулы Фейнмана—Каца следует, что

$$\int\limits_\Omega \exp\left(-\int\limits_0^t V(\omega(s))\,ds\right) f(\omega(t))\,d\mu_x(\omega) < \infty$$

при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Следовательно,

$$-\int\limits_0^t V(\omega(s))\,ds < \infty$$

для почти всех ω при почти всех x. Так как произвольную функцию $V \in L^2+L^\infty$ можно записать в виде линейной комбинации ее положительных и отрицательных частей, заключаем, что если $V \in L^2+L^\infty$, то

$$\int\limits_0^t |V(\omega(s))|\,ds < \infty$$

для почти всех ω при почти всех x.

X.12. Гамильтонианы, зависящие от времени

В этом разделе мы докажем две теоремы существования для уравнения Шредингера с зависящим от времени гамильтонианом

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH(t)\varphi(t). \tag{X.127}$$

Исследование зависящих от времени задач важно потому, что в ряде случаев приходится рассчитывать изменение квантовой системы в таких ситуациях, когда внешний потенциал включается, а затем выключается через короткое время, или когда включается периодический потенциал. Мы начнем с введения аналога унитарной однопараметрической группы.

Определение. Двухпараметрическое семейство унитарных операторов $U(s, t)$, $s, t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям

(a) $U(r, s)U(s, t) = U(r, t)$,

(b) $U(t, t) = I$,

(c) $U(s, t)$ сильно непрерывен по совокупности переменных s и t,

называется **унитарным пропагатором.**

Теорема X.69 (разложение Дайсона). Пусть $t \mapsto H(t)$ — сильно непрерывное отображение $\mathbb{R}$ во множество *ограниченных* самосопряженных операторов на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда на $\mathscr{H}$ существует такой унитарный пропагатор, что для всех $\psi \in \mathscr{H}$

$$\varphi_s(t) = U(t, s)\psi$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\varphi_s(t) = -iH(t)\varphi_s(t), \qquad \varphi_s(s) = \psi. \tag{X.128}$$

Доказательство. Положим

$$U(t, s)\varphi = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n \int_s^t \int_s^{t_1} \cdots \int_s^{t_{n-1}} H(t_1) \ldots H(t_n)\varphi\, dt_n \ldots dt_1. \tag{X.129}$$

В силу принципа равномерной ограниченности $H(\tau)$ равномерно ограничен на $[s, t]$, так что n-й член в правой части ограничен величиной

$$\frac{|t-s|^n}{n!}\left(\sup_{\tau \in [s, t]} \|H(\tau)\|\right)^n \|\varphi\|,$$

в силу чего ряд в правой части (X.129) сходится в равномерной операторной топологии к $U(t, s)$. Значит, $U(t, s)$ сильно непрерывен по совокупности переменных s и t, ибо это верно для каждого члена правой части. Убедиться в том, что $U(t, t) = I$ и $U(t, s)^* = U(s, t)$, совсем легко; формула $U(r, s)U(s, t) = U(r, t)$ доказывается перемножением рядов, как в случае унитарных групп, порождаемых ограниченными операторами. Следовательно,

$$U(s, t)U(s, t)^* = I = U(s, t)^* U(s, t),$$

так что $U(t, s)$ унитарен. Первое утверждение (X.128) получается почленным дифференцированием ряда для $U(t, s)$, если заметить, что результирующие ряды сходятся равномерно. ∎

Отметим, что самосопряженность $H(t)$ потребовалась только для доказательства унитарности $U(t, s)$; даже и без самосопряженности мы можем определить $U(t, s)$, как прежде, и применить его для построения сильных решений $\varphi_s(t)$.

Хотя для разложения Дайсона требуется, чтобы $H(t)$ был ограниченным, мы можем перейти к «представлению взаимодействия» и рассмотреть некоторые случаи, когда

$$H(t)=H_0+V(t),$$

где H_0—(возможно, неограниченный) самосопряженный оператор и $t\mapsto V(t)$ удовлетворяет условиям теоремы X.69. Определим

$$\tilde{V}(t)=e^{iH_0t}V(t)e^{-iH_0t}.$$

В этом случае $t\mapsto\tilde{V}(t)$ также удовлетворяет условиям теоремы X.69. Обозначим соответствующий пропагатор через $\tilde{U}(t, s)$. Если теперь положить

$$U(t, s)=e^{-itH_0}\tilde{U}(t, s)e^{isH_0},$$

то, по крайней мере *формально*, $U(t, s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}U(t, s)=-iH_0e^{-itH_0}\tilde{U}(t, s)e^{isH_0}+e^{-itH_0}(-i\tilde{V}(t))\tilde{U}(t,s)e^{isH_0}=$$
$$=(-iH_0-iV(t))U(t, s),$$

так что $\varphi_s(t)=U(t, s)\psi$ должно быть сильным решением уравнения

$$\frac{d}{dt}\varphi_s(t)=-i(H_0+V(t))\varphi_s(t), \qquad \varphi_s(s)=\psi.$$

Трудность состоит в том, что $H_0U(t, s)\psi=H_0e^{-itH_0}\tilde{U}(t, s)e^{isH_0}\psi$ может не иметь смысла, так как $\tilde{U}(t, s)\psi$ может не лежать в области определения H_0, даже когда ψ лежит в ней. Можно показать (задача 66), что если $t\mapsto[H_0, V(t)]$ сильно непрерывно, то $\varphi_s(t)$ есть на самом деле сильное решение. Это допущение есть частный случай более общих условий теоремы X.70 (ниже); последние приводят к сильным решениям, поэтому мы больше не будем обсуждать здесь эту проблему. Однако заметим, что $\psi_s(t)=e^{-iH_0t}\tilde{U}(t, s)e^{isH_0}\psi$ для любого $\psi\in\mathcal{H}$ всегда есть «слабое» решение в том смысле, что при любом $\eta\in D(H_0)$ функция $(\eta, \psi_s(t))$ дифференцируема и

$$\frac{d}{dt}(\eta, \psi_s(t))=-i(H_0\eta, \psi_s(t))-i(V(t)\eta, \psi_s(t)).$$

Пример 1. Разложение Дайсона важно также и для практических вычислений. Пусть H_0—гамильтониан некоторой квантовой системы и ψ_k, ψ_l—собственные функции H_0 с соответствующими собственными значениями λ_k и λ_l. Если система находится вначале в состоянии ψ_k, то в отсутствие какого-либо внешнего потенциала она останется в этом состоянии, так как $e^{itH_0}\psi_k=e^{i\lambda_kt}\psi_k$. Однако если на какое-то время включается внешний потенциал $V(t)$, то динамика задается законом $e^{-itH_0}\tilde{U}(t, 0)\psi_k$, и если нас интересует система в момент времени t, то вероятность того, что система будет наблюдена в состоянии ψ_l, равна $|(\psi_l, e^{-itH_0}\tilde{U}(t, 0)\psi_k)|^2$ — вероятности перехода из ψ_k в ψ_l. Применяя разложение Дайсона, находим

$$(\psi_l, e^{-itH_0}\tilde{U}(t,0)\psi_k) = (\psi_l, e^{-itH_0}\psi_k) - i\int_0^t (\psi_l, e^{-itH_0 t}\tilde{V}(t_1)\psi_k)\,dt_1 + \ldots =$$

$$= -i\int_0^t e^{-i\lambda_l t}e^{-i(\lambda_k-\lambda_l)t_1}(\psi_l, V(t_1)\psi_k)\,dt_1 + O(t^2).$$

Для константы в члене порядка t^2 легко найти верхнюю границу путем оценки хвоста разложения Дайсона, так что для малых t полученное выражение позволяет сосчитать верхнюю и нижнюю границу вероятности перехода. Читателю предлагается рассчитать один специальный пример в задаче 67.

Мы пришли теперь к главной теореме этого раздела. Так как доказательство для случая, когда $A(t)$ порождает сжимающую полугруппу на банаховом пространстве X, такое же, мы и проведем его в этой более общей постановке. Идея доказательства очень проста и непосредственна. Для каждого целого положительного k определим приближенный пропагатор $U_k(t, s)$ на $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$ равенством

$$U_k(t, s) = \exp\left(-(t-s)A\left(\frac{i-1}{k}\right)\right), \quad \text{если } \frac{i-1}{k} \leqslant s \leqslant t \leqslant \frac{i}{k}$$
$$(\text{где } 1 \leqslant i \leqslant k), \tag{X.130a}$$

и

$$U_k(t, r) = U_k(t, s)\,U_k(s, r), \qquad \text{если } 0 \leqslant r \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \tag{X.130b}$$

Таким образом, $U_k(t, s)$ определен постоянным генератором $A((i-1)/k)$ при s и t в малых интервалах $[(i-1)/k, i/k]$ и формулой произведения, если обе переменные s и t не попадают в один малый интервал вместе. Мы покажем, что при соответствующих предположениях $U_k(t, s)$ сходится к такому пропагатору $U(t, s)$, что $\varphi_s(t) = U(t, s)\psi$ оказывается решением уравнения $d\varphi_s(t)/dt = -A(t)\varphi_s(t)$. Чтобы понять, какими должны быть эти дополнительные предположения, проведем формальное вычисление:

$$(U_k(t, 0) - U_n(t, 0))A(0)^{-1}\varphi = [U_n(t, s)U_k(s, 0)A(0)^{-1}\varphi]_{s=0}^{s=t} =$$

$$= \int_0^t \frac{d}{ds}(U_n(t, s)U_k(s, 0)A(0)^{-1}\varphi)\,ds =$$

$$= \int_0^t U_n(t, s)\left\{A\left(\frac{[ns]}{n}\right) - A\left(\frac{[ks]}{k}\right)\right\}A\left(\frac{[ks]}{s}\right)^{-1}A\left(\frac{[ks]}{k}\right)\times$$
$$\times U_k(s, 0)A(0)^{-1}\varphi\,ds, \tag{X.131}$$

где $[r]$ означает наибольшее целое, меньшее или равное r. То, что $A([ns]/n)$ может быть написано справа от $U_n(t, s)$, следует из записи $U_n(t, s)$ в виде произведения, когда t и s не попадают в один малый интервал. Следовательно, для того чтобы показать, что левая часть (X.131) мала, достаточно убедиться, что разность $A(t)A(s)^{-1}-I$ мала, когда мала $|t-s|$, и что $A(t)U_k(t, 0)A(s)^{-1}$ ограничено. Итак, определим

$$C(t, s)=A(t)A(s)^{-1}-I$$

и сформулируем такую теорему:

Теорема X.70. Пусть X — банахово пространство, и пусть J — открытый интервал в $\mathbb{R}$. При каждом $t\in J$ пусть $A(t)$ — генератор сжимающей полугруппы на X, такой, что $0\in\rho(A(t))$ и

(a) Все $A(t)$ имеют общую область определения D (откуда в силу теоремы о замкнутом графике следует, что $A(t)A(s)^{-1}$ ограничено).

(b) При всяком $\varphi\in X$ величина $(t-s)^{-1}C(t, s)\varphi$ равномерно сильно непрерывна и равномерно ограничена по s и t, если $t\neq s$ и s и t лежат в любом фиксированном компактном подынтервале из J.

(c) При всяком $\varphi\in X$ существует $C(t)\varphi\equiv\lim\limits_{s\uparrow t}(t-s)^{-1}C(t, s)\varphi$ равномерно по t в каждом компактном подынтервале, и $C(t)$ ограничена и сильно непрерывна по t.

Тогда для всех $s\leqslant t$ в любом компактном подынтервале интервала J и любого $\varphi\in X$ существует

$$U(t, s)\varphi=\lim_{k\to\infty}U_k(t, s)\varphi$$

равномерно по s и t. Далее, если $\psi\in D$, то $\varphi_s(t)\equiv U(t, s)\psi$ лежит в D при всех t и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\varphi_s(t)=-A(t)\varphi_s(t), \qquad \varphi_s(s)=\psi,$$

причем $\|\varphi_s(t)\|\leqslant\|\psi\|$ при всех $t\geqslant s$.

Сделаем два замечания. Во-первых, допущение $0\in\rho(A(t))$ обычно не является сильным ограничением. Если можно найти $z_0\in\rho(A(t))$ при всех t и если операторы $B(t)=A(t)-z_0$ удовлетворяют этому допущению, то $\tilde{U}(t, s)=U(t, s)e^{(s-t)z_0}$ будет пропагатором для $A(t)$ всякий раз, когда $U(t, s)$ — пропагатор для $B(t)$. В частности, мы можем применить этот прием, когда $A(t)$ есть самосопряженный оператор, умноженный на i. Во-вторых, достаточно доказать существование пропагатора для $s, t\in [0, 1]$, поскольку тогда можно воспользоваться этим приемом, чтобы расширить его на $[1, 2]$, и т. д. Покажем сначала, что из сделанных допущений вытекает ограниченность оператора $A(t)U(t, s)A(s)^{-1}$.

Лемма. При $s, t \in [0, 1]$ положим $W_k(t, s) = A(t)U_k(t, s)A(s)^{-1}$. Тогда $\|W_k(t, s)\| \leqslant M_1$, где M_1 не зависит от s, t и k.

Доказательство. Фиксируем s, t и k. Поскольку $U_k(t, s)\colon D \to D$, оператор $W_k(t, s)$ корректно определен на X. Пусть $\psi \in X$; запишем $W_k(t, s)$ в виде

$$W_k(t, s)\psi =$$
$$= A(t)U_k\left(t, \frac{[kt]}{k}\right)U_k\left(\frac{[kt]}{k}, \frac{[kt]-1}{k}\right)\dots U_k\left(\frac{[ks]+1}{k}, s\right)A(s)^{-1}\psi =$$
$$= A(t)A\left(\frac{[kt]}{k}\right)^{-1}U_k\left(t, \frac{[kt]}{k}\right)A\left(\frac{[kt]}{k}\right)A\left(\frac{[kt]-1}{k}\right)^{-1}\dots$$
$$\dots A\left(\frac{[ks]}{k}\right)^{-1}U_k\left(\frac{[ks]+1}{k}, s\right)A\left(\frac{[ks]}{k}\right)A(s)^{-1}\psi =$$
$$= \left(I + C\left(t, \frac{[kt]}{k}\right)\right)\left\{U_k(t, s) + \sum_{ku=[ks]+1}^{[kt]} U_k(t, u)C\left(u, u-\frac{1}{k}\right)U_k(u, s) + \right.$$
$$+ \sum_{kv=[ks]+1}^{[kt]} U_k(t, v)C\left(v, v-\frac{1}{k}\right)\sum_{ku=[ks]+1}^{[kt]} U_k(v, u)\times$$
$$\left.\times C\left(u, u-\frac{1}{k}\right)U_k(u, s) + \dots\right\}\left(I + C\left(\frac{[ks]}{k}, s\right)\right)\psi =$$
$$= \left(I + C\left(t, \frac{[tk]}{k}\right)\right)\{U_k(t, s) + W_k^1(t, s) + W_k^2(t, s) + \dots\}\times$$
$$\times\left(I + C\left(\frac{[ks]}{k}, s\right)\right)\psi,$$

где

$$W_k^1(t, s) = \sum_{ku=[ks]+1}^{[kt]} U_k(t, s)C\left(u, u-\frac{1}{k}\right)U_k(u, s)$$

и

$$W_k^{m+1}(t, s) = \sum_{ku=[ks]+1}^{[kt]} U_k(t, s)C\left(u, u-\frac{1}{k}\right)W_k^m(u, s). \qquad (X.132)$$

Пусть

$$M_2 = \sup_{t \neq s}\|(t-s)^{-1}C(t, s)\|.$$

Тогда

$$\left\|C\left(u, u-\frac{1}{k}\right)\psi\right\| \leqslant \frac{M_2}{k}\|\psi\|,$$

так что из (X.132) получаем

$$\|W_k^1(t, s)\psi\| \leqslant (t-s)M_2\|\psi\| \quad \text{и} \quad \|W_k^m(t, s)\psi\| \leqslant \frac{(t-s)^m}{m!}M_2^m\|\psi\|.$$

Следовательно,

$$\|W_k(t, s)\psi\| \leqslant \left(1+\frac{M_2}{k}\right)^2\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(t-s)^m}{m!}M_2^m\right)\|\psi\|.$$

Мы всякий раз пользовались тем, что $\|U_k(r_1, r_2)\psi\| \leqslant \|\psi\|$, поскольку каждый $A(t)$ порождает сжимающую полугруппу. ∎

Доказательство теоремы X.70. Пусть $\varphi \in D$. Так как $U_k(r, s)\varphi \in D$ при $r \geqslant s$ и

$$U_k(t, s)\varphi = e^{-(t-[kt]/k)\,A([kt]/k)}U_k\left(\frac{[kt]}{k}, s\right)\varphi,$$

то $U_k(t, s)$ сильно дифференцируем по t везде, кроме точек $t=j/k$, поэтому, положив $A(0)\varphi=\psi$, получим

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U_k(t, s)\varphi &= -A\left(\frac{[kt]}{k}\right)U_k(t, s)\varphi = \\ &= -A\left(\frac{[kt]}{k}\right)A(t)^{-1}A(t)U_k(t, s)A(s)^{-1}A(s)A(0)^{-1}\psi = \\ &= -A\left(\frac{[kt]}{k}\right)A(t)^{-1}W_k(t, s)A(s)A(0)^{-1}\psi.\end{aligned}$$

Следовательно, так как семейство $\|W_k(t, s)\|$ равномерно ограничено и $C(t, s)$ сильно непрерывна, мы видим, что $dU_k(t, s)\varphi/dt$ ограничена и сильно непрерывна везде, кроме точек $t=j/k$. Аналогичное доказательство показывает, что те же заключения имеют место для

$$\frac{d}{ds}U_k(t, s)\varphi = -U_k(t, s)A\left(\frac{[ks]}{k}\right)\varphi,$$

когда $s \neq j/k$. Значит, если $k > n$, то

$$\begin{aligned}(U_k(t, s)-U_n(t, s))A(0)^{-1}\psi &= [U_n(t, r)U_k(r, s)]_{r=s}^{r=t}A(0)^{-1}\psi = \\ &= \int_s^t \frac{d}{dr}\{U_n(t, r)U_k(r, s)A(0)^{-1}\psi\}\,dr = \\ &= \int_s^t U_n(t, r)\left\{A\left(\frac{[rn]}{n}\right)-A\left(\frac{[rk]}{k}\right)\right\}\times \\ &\qquad \times A\left(\frac{[rn]}{n}\right)^{-1}A\left(\frac{[rn]}{n}\right)U_k(r, s)A(0)^{-1}\psi\,dr = \\ &= \int_s^t U_n(t, r)C\left(\frac{[rn]}{n}, \frac{[rk]}{k}\right)\left\{1+C\left(\frac{[rn]}{n}, r\right)\right\}\times \\ &\qquad \times W_k(r, s)\{1+C(s, 0)\}\psi\,dr. \qquad \text{(X.133)}\end{aligned}$$

Так как

$$\left\|C\left(\frac{[rk]}{k}, \frac{[rn]}{n}\right)\right\| \leqslant 2\left|\frac{[rk]}{k}-\frac{[rn]}{n}\right|\sup_{s\neq t}|t-s|^{-1}\|C(t, s)\|$$

и $U_n(t, r)$, $C([rn]/n, r)$, $C(s, 0)$ и $W_k(r, s)$ (по лемме) все равномерно ограничены независимо от r, s, t, n и k, то мы видим, что сильный предел $U_k(t, s)$ существует равномерно по t и s. Так как $U_k(t, s)$ равномерно ограничен, то

$$U(t, s)\varphi \equiv \lim_{k\to\infty} U_k(t, s)\varphi$$

существует при всех $\varphi \in X$ и $U(t, s)$—ограниченная операторнозначная функция, равномерно сильно непрерывная по совокупности переменных. Заметим, что интеграл (X.133) есть на самом деле сумма интегралов по тем интервалам, где существует производная.

Аналогичное доказательство показывает, что предел

$$W(t, s)\varphi \equiv \lim_{k\to\infty} W_k(t, s)\varphi$$

существует равномерно по t и s и что $W(t, s)$ есть ограниченная операторнозначная функция, сильно непрерывная по совокупности переменных. Следовательно, если $\varphi \in D$, то $U_k(t, s)\varphi \to U(t, s)\varphi$ и

$$A(t)U_k(t, s)\varphi = W_k(t, s)A(s)\varphi \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} W(t, s)A(s)\varphi.$$

Так как $A(t)$ замкнут, то отсюда следует, что $U(t, s)\varphi \in D$ и $A(t)U(t, s)\varphi = W(t, s)A(s)\varphi$. Кроме того,

$$\begin{aligned}
U(t, s)\varphi - \varphi &= \lim_{k\to\infty}(U_k(t, s)\varphi - \varphi) = \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_s^t \frac{d}{dr}U_k(r, s)\varphi\, dr = \\
&= \lim_{k\to\infty}\left\{-\int_s^t A\left(\frac{[rk]}{k}\right)U_k(r, s)\varphi\, dr\right\} = \\
&= -\lim_{k\to\infty}\int_s^t A\left(\frac{[rk]}{k}\right)A(r)^{-1}A(r)U_k(r, s)A(s)^{-1}A(s)\varphi\, dr = \\
&= -\int_s^t W(r, s)A(s)\varphi\, dr.
\end{aligned}$$

Так как $W(r, s)$ сильно непрерывен, то

$$\frac{d}{dt}U(t, s)\varphi = -W(t, s)A(s)\varphi = -A(t)U(t, s)\varphi,$$

что и завершает доказательство теоремы X.70. ∎

Пример 2. Легко применить этот результат к уравнению теплопроводности с источниками, зависящими от времени, и стоками, пропорциональными температуре. Пусть $q(x, t)$ — ограниченная вещественнозначная непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^{n+1}$, такая, что $\partial q(x, t)/\partial t$ ограничена. Пусть M — грань q. Положим

$$A(t) = -\Delta + q(x, t) + (M+1)$$

на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Из примеров 3 и 4 в § X.8 мы знаем, что $A(t)$ есть генератор сжимающей полугруппы на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ и что $D(A(t)) = D(-\Delta)$ при всех t. Читатель может легко проверить (задача 68), что вследствие допущений о $q+M+1$ выполнены условия теоремы X.70. Значит, для каждой $\psi \in D(-\Delta)$ существует такая функция $\tilde{\varphi}(x, t)$, что $\tilde{\varphi}(x, t) \in D(-\Delta)$ при всяком t и

$$\frac{d}{dt}\tilde{\varphi}(x, t) = \Delta\tilde{\varphi}(x, t) - q(x, t)\tilde{\varphi}(x, t) - (M+1)\tilde{\varphi}(x, t),$$
$$\tilde{\varphi}(x, 0) = \psi(x).$$

Положим теперь $\varphi(x, t) = e^{(M+1)t}\tilde{\varphi}(x, t)$; тогда $\varphi(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\varphi(x, t) = \Delta\varphi(x, t) - q(x, t)\varphi(x, t),$$
$$\varphi(x, 0) = \psi(x).$$

Заметим, что $U_k(t, s)$ сохраняет положительность при всяком k, так как является произведением сохраняющих положительность преобразований (см. пример 4 в § X.8). Значит, и $U(t, s)$, будучи сильным пределом $U_k(t, s)$, сохраняет положительность. Следовательно, если заданы любые неотрицательные начальные данные $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R})$, то решение $\varphi(x, t) = e^{(M+1)t}U(t, s)\psi$ будет оставаться неотрицательным в соответствии с нашими интуитивными представлениями о распространении тепла.

Применим теперь теорему X.70 в квантовомеханическом случае.

Теорема X.71. Пусть $H_0 = -\Delta$ на $L^2(\mathbb{R}^3)$. Предположим, что $t \mapsto V_1(t)$ и $t \mapsto V_2(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции со значениями в $L^2(\mathbb{R}^3)$ и $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ соответственно. Пусть $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$. Положим $H(t) = H_0 + V(t)$. Тогда существует такой унитарный пропагатор $U(t, s)$ на $L^2(\mathbb{R}^3)$, что $\varphi_s(t) = U(t, s)\psi$ сильно дифференцируема при всех $\psi \in D(H_0)$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\varphi_s(t) = -iH(t)\varphi_s(t), \qquad \varphi_s(s) = \psi. \qquad (X.134)$$

Доказательство. Мы построим унитарный пропагатор для каждого конечного интервала $[-T, T]$. По теореме X.15 оператор $H_0+V(t)$ при всех t самосопряжен на $D(-\Delta)$. Далее, поскольку $V_1(t)$ и $V_2(t)$ равномерно ограничены по норме в L^2 и в L^∞ соответственно, можно найти такую постоянную $D\geqslant 0$, что $H_0+ +V(t)+D\geqslant 1/2$ при всех $t\in[-T, T]$. Поэтому $i(H_0+V(t)+D)$ и $-i(H_0+V(t)+D)$ порождают сжимающие полугруппы при каждом t и $[\pm i(H_0+V(t)+D)]^{-1}$ существует при $t\in[-T, T]$. Далее из предположений о $t\mapsto V_1(t)$ и о $t\mapsto V_2(t)$ следует, что $i(H_0+V(t)+D)$ и $-i(H_0+V(t)+D)$ удовлетворяют условиям (b) и (c) теоремы X.70. Пусть $U^+(t, s)$ и $U^-(t, s)$ — соответствующие пропагаторы. Поскольку U_k^+ и U_k^- унитарны при каждом k, U^+ и U^- тоже унитарны. Положим теперь

$$\tilde{U}(t, s)=\begin{cases} U^+(t, s), & s\leqslant t, \\ U^-(t, s), & t\leqslant s, \end{cases}$$

и

$$U(t, s)=e^{iD(t-s)}\tilde{U}(t, s). \blacksquare$$

В заключение опишем кратко метод Д. Хауленда превращения зависящей от времени задачи в задачу, не зависящую от времени. В классической механике уравнения Гамильтона для системы с гамильтоновой функцией $H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t)$ имеют вид

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad -\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i=1, \ldots, n. \tag{X.135}$$

Если H зависит от времени, то в такой системе энергия не сохраняется, но мы можем построить соответствующую систему, в которой энергия сохраняется, вводя t в качестве новой координаты, а энергию E внешнего источника — в качестве сопряженного ей импульса. Новый гамильтониан таков:

$$h(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t, E)=E+H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t),$$

так что если мы обозначим новую временну́ю переменную через σ, то гамильтоновы уравнения запишутся в виде

$$\begin{gathered}\frac{dq_i}{d\sigma}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad -\frac{dp_i}{d\sigma}=\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i=1, \ldots, n, \\ \frac{dt}{d\sigma}=\frac{\partial h}{\partial E}=1, \qquad -\frac{dE}{d\sigma}=\frac{\partial H}{\partial t}.\end{gathered} \tag{X.136}$$

Эта система уравнений эквивалентна (X.135).

Так же можно переформулировать и квантовомеханическую задачу. Пусть $H(t)$ — семейство самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть $\mathscr{H}_1=L^2(\mathbb{R}; \mathscr{H})$ — гильбертово пространство сильно измеримых функций $f(\cdot)$ на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathcal{H}$, таких, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|f(t)\|_{\mathcal{H}}^2\, dt < \infty$. Если мы теперь определим h в $\mathcal{H}$ формулой

$$(hf)(t) = -i\frac{d}{dt}f(t) + H(t)f(t),$$

то (согласно классической аналогии) должно иметь место соответствие между решениями уравнения

$$\frac{d}{d\sigma}\varphi(\sigma) = -ih\varphi(\sigma)$$

в $\mathcal{H}_1$ и решениями зависящей от времени задачи (X.134) в $\mathcal{H}$. Допустим, что $U(t, s)$ — унитарный пропагатор на $\mathcal{H}$. Тогда

$$(\hat{U}(\sigma)f)(t) \equiv U(t, t-\sigma)f(t-\sigma) \qquad \text{(X.137)}$$

является сильно непрерывной унитарной группой на $\mathcal{H}_1$ (задача 69). Это означает, что если T_σ — группа на $\mathcal{H}_1$, действующая как $(T_\sigma f)(t) = f(t+\sigma)$, то $\hat{U}(\sigma)T_\sigma$ действует на $\mathcal{H}_1$ как умножение на операторнозначную функцию. Обратно, можно показать, что всякой сильно непрерывной унитарной группе $\hat{U}(\sigma)$ на $\mathcal{H}$, такой, что $\hat{U}(\sigma)T_\sigma$ есть умножение на операторнозначную функцию, отвечает единственный унитарный пропагатор $U(t, s)$ на $\mathcal{H}$, такой, что выполняется (X.137). Итак, имеется соответствие между унитарными пропагаторами на $\mathcal{H}$ и некоторыми сильно непрерывными однопараметрическими унитарными группами на $\mathcal{H}_1$. Заметим, что $\hat{U}(\sigma)$ в силу теоремы Стоуна всегда окажется сильно дифференцируемой на плотном множестве в $\mathcal{H}_1$, но что $U(t, s)$ не обязательно сильно дифференцируема на $\mathcal{H}$. Значит, у нас есть метод доказательства существования пропагаторов в тех случаях, когда мы не можем ожидать сильной дифференцируемости, т. е. в случаях, когда неприменима теорема X.70. Этот пропагатор формально разрешает уравнение

$$\frac{d}{dt}U(t, s)\psi = -iH(t)U(t, s)\psi.$$

Пример 3. Рассмотрим еще раз случай $H(t) = H_0 + V(t)$, где H_0 — самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$, а $t \mapsto V(t)$ — сильно непрерывное отображение из $\mathbb{R}$ во множество ограниченных операторов на $\mathcal{H}$. Для простоты предположим, что семейство $\{\|V(t)\|\}$ равномерно ограничено на всем $\mathbb{R}$. Как и прежде, положим $\tilde{V}(t) = e^{itH_0}V(t)e^{-itH_0}$. Пусть $\hat{\tilde{V}}$ — оператор на $L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$, действующий как $(\hat{\tilde{V}}f)(t) = \tilde{V}(t)f(t)$, и пусть $C_0^1(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем и со значениями в $\mathcal{H}$. Тогда нетрудно убедиться, что $i^{-1}d/dt$ самосопряжен в существенном на $C_0^1(\mathbb{R};\ \mathcal{H})$. Так как $\hat{\hat{V}}$ — ограниченный оператор, то $i^{-1}d/dt+\hat{\hat{V}}$ также самосопряжен в существенном на $C_0^1(\mathbb{R};\ \mathcal{H})$ и можно показать, что $\exp(-i\sigma(i^{-1}d/dt+\hat{\hat{V}}))T_\sigma$ действует как умножение на операторнозначную функцию. Следовательно, по упомянутой выше теореме о соответствии, существует сильно непрерывный пропагатор $\tilde{U}(t, s)$ на $\mathcal{H}$, такой, что

$$\left(\exp\left(-i\sigma\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dt}+\hat{\hat{V}}\right)\right)f\right)(t)=\tilde{U}(t,\ t-\sigma)f(t-\sigma).$$

Легко убедиться в том, что это именно тот пропагатор, который появляется в результате применения разложения Дайсона к $t\longmapsto\tilde{V}(t)$. Пусть теперь $\hat{W}$ действует на $L^2(\mathbb{R};\ \mathcal{H})$ как $(\hat{W}f)(t)=$ $=e^{-iH_0t}f(t)$. Тогда $\hat{W}$ унитарен, так что

$$\hat{W}\exp\left(-i\sigma\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dt}+\hat{\hat{V}}\right)\right)\hat{W}^{-1}$$

есть опять сильно непрерывная унитарная группа на $L^2(\mathbb{R};\ \mathcal{H})$ и очевидно, что

$$\left(\hat{W}\exp\left(-i\sigma\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dt}+\hat{\hat{V}}\right)\right)\hat{W}^{-1}f\right)(t)=$$
$$=e^{-itH_0}\tilde{U}(t,\ t-\sigma)e^{i(t-\sigma)H_0}f(t-\sigma).$$

Таким образом, $U(t,s)=e^{-itH_0}\tilde{U}(t,\ s)e^{isH_0}$ есть пропагатор на $\mathcal{H}$, являющийся формальным решением уравнения

$$\frac{d}{dt}U(t,\ s)=-i(H_0+V(t))U(t,s),$$

так как генератором $\hat{W}\exp(-i\sigma(i^{-1}d/dt+\hat{\hat{V}}))\hat{W}^{-1}$ будет $i^{-1}d/dt+$ $+H_0+\hat{\hat{V}}$.

X.13. Классические нелинейные волновые уравнения

Серьезное обсуждение нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных выходит за рамки этой книги. Однако мы хотим описать некоторые методы функционального анализа, полезные при изучении этой классической задачи. В качестве поясняющего примера мы рассмотрим нелинейное уравнение Клейна—Гордона. Предположим, что $m,\ \lambda>0$, и пусть заданы две функции f и g на $\mathbb{R}^3$. Задача состоит в том, чтобы доказать существование и изучить поведение функции

$u(x, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u = -\lambda |u|^2 u, \\ u(x, 0) = f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x).\end{gathered} \tag{X.138}$$

В этом разделе мы рассматриваем существование, единственность и гладкость решений (X.138). В § XII.13 будет построена теория рассеяния для (X.138). Мы рассматриваем задачу Клейна—Гордона для комплекснозначных функций u. Если начальные данные f и g вещественнозначны, то и u будет вещественнозначной при всех t (задача 71) и будет удовлетворять уравнению

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = -\lambda u^3. \tag{X.139}$$

Это уравнение есть классический аналог φ^4-уравнения квантовой теории поля, рассмотренного в § X.7.

Теории классических полей, описываемой уравнением (X.139), формально можно придать вид гамильтоновой теории. Если мы положим

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \int \left(v(x)^2 + (\nabla u(x))^2 + m^2 u(x)^2 + \frac{\lambda}{2} u(x)^4 \right) d^3x,$$

то (X.139) формально эквивалентно системе

$$\begin{aligned} u_t(x) &= \frac{\delta H}{\delta v(x)} = v(x), \\ v_t(x) &= -\frac{\delta H}{\delta u(x)} = (\Delta - m^2) u(x) - \lambda (u(x))^3, \end{aligned}$$

где мы проинтегрировали по частям, чтобы получить

$$\int (\nabla u(x))^2 d^3x = -\int u(x) \Delta u(x) d^3x.$$

Это наводит на мысль, что, как и в классических гамильтоновых системах с конечным числом степеней свободы, полная энергия должна здесь сохраняться. Иначе говоря, если u—достаточно гладкое решение уравнения (X.139), достаточно быстро убывающее на бесконечности, так что можно интегрировать по частям и дифференцировать под знаком интеграла, то $H(u, u_t)$ не должно зависеть от времени. Этот закон сохранения играет центральную роль в вопросе о существовании *глобальных* решений (X.138) и (X.139) и в различии между случаями $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$. Если $\lambda > 0$, то с течением времени ни u, ни ∇u не могут становиться большими, так как увеличение любой из них приводит к увеличению $H(u, u_t)$. Однако если $\lambda < 0$, то u и ∇u могут одновременно расти при взаимной компенсации их вклада в $H(u, u_t)$. Таким образом, при $\lambda > 0$ можно ожидать существования глобальных решений, и мы действительно докажем это, опираясь на сохранение энергии. Напротив, если $\lambda < 0$, то можно ожидать, что для некоторых начальных данных глобального решения не существует. Это положение подобно ситуации для обыкновенного дифференциального уравнения

$$m\ddot{q}(t) = \lambda q^3(t).$$

Так как энергия $^1/_2 m\dot{q}^2 + {}^1/_4 \lambda q^4$ сохраняется, решение не может выйти на бесконечность за конечное время, если $\lambda > 0$, так что глобальное решение существует; но если $\lambda < 0$, то решение обращается в бесконечность за конечное время.

Поскольку техника, развитая в этой главе, применяется к дифференциальным уравнениям первого порядка по t, перепишем (X.138) в виде системы уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta u + m^2 u = -\lambda |u|^2 u,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = v,$$
$$u(x, 0) = f(x),$$
$$v(x, 0) = g(x),$$

или

$$\dot{\varphi}(t) - \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta - m^2 & 0 \end{pmatrix} \varphi(t) = J(\varphi(t)), \qquad \varphi(x, 0) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}, \tag{X.140}$$

где

$$\varphi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad J(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda |u|^2 u \end{pmatrix}.$$

Впредь мы будем писать векторы-столбцы в виде векторов-строк. Мы хотим сформулировать (X.140) как задачу в гильбертовом пространстве и доказать в рамках гильбертова пространства общую теорему, гарантирующую существование и единственность решения. Пусть $B \geqslant mI$ — положительный квадратный корень из строго положительного самосопряженного оператора B^2 в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. (В нашем случае $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ и $B^2 = -\Delta + m^2$.) Так как B^2 замкнут, то область определения $D(B)$ оператора B есть гильбертово пространство с внутренним произведением (Bu, Bu). Обозначим через $\mathscr{H}_B$ прямую сумму $\mathscr{H}_B \equiv D(B) \oplus \mathscr{H}$ с внутренним произведением

$$(\langle u, v\rangle, \langle u, v\rangle)_B \equiv (Bu, Bu) + (v, v).$$

Пусть

$$A=i\begin{pmatrix}0 & I\\ -B^2 & 0\end{pmatrix}. \tag{X.141}$$

Тогда легко проверить, что A — симметрический оператор на $\mathcal{H}_B$ с областью определения $D\equiv D(B^2)\oplus D(B)$ и что A замкнут, так как B и B^2 замкнуты. Определяя теперь с помощью функционального исчисления $\cos(tB)$ и $\sin(tB)$, положим

$$W(t)=\begin{pmatrix}\cos(tB) & B^{-1}\sin(tB)\\ -B\sin(tB) & \cos(tB)\end{pmatrix}.$$

Тогда $W(t)$ — сильно непрерывная унитарная группа на $\mathcal{H}_B$. Далее, если $u\in D$, то сильная производная $W(t)u$ существует в нуле и равна $-iA$ и $W(t)$ переводит D в себя. Следовательно, по теореме VIII.11 генератор группы $W(t)$ самосопряжен в существенном на D. Так как A замкнут, то он самосопряжен на D и является инфинитезимальным генератором $W(t)$. Соберем все сказанное в следующее

Предложение. Пусть B — строго положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда $W(t)$ — сильно непрерывная однопараметрическая группа на $\mathcal{H}_B$, инфинитезимальный генератор которой

$$A=i\begin{pmatrix}0 & I\\ -B^2 & 0\end{pmatrix}$$

самосопряжен на $D=D(B^2)\oplus D(B)$.

Теперь мы можем сформулировать абстрактную версию (X.140). Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (уже не обязательно вида (X.141)), и пусть J — нелинейное отображение из $D(A)$ в $\mathcal{H}$. Задача состоит в том, чтобы найти условия на J, обеспечивающие существование при каждом $\varphi_0\in D(A)$ единственной функции $\varphi(t)$ на $[0,\infty)$, принимающей значения в $\mathcal{H}$ и удовлетворяющей уравнению

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt}&=-iA\varphi+J(\varphi),\\ \varphi(0)&=\varphi_0.\end{aligned} \tag{X.142}$$

Техника доказательства состоит в переформулировке (X.142) в виде интегрального уравнения

$$\varphi(t)=e^{-iAt}\varphi_0+\int_0^t e^{-i(t-s)A}J(\varphi(s))\,ds \tag{X.143}$$

и последующем доказательстве существования единственного локального решения уравнения (X.143) посредством принципа сжимающих отображений. Наши условия на J окажутся достаточно сильными и обеспечат, что любое решение (X.143) есть автоматически также решение (X.142). Можно ослабить условие на J и получать решения (X.143), которые не будут решениями (X.142), ибо такие решения не обязательно сильно дифференцируемы.

Теорема X.72 (локальное существование). Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и J — отображение из $D(A)$ в $D(A)$, удовлетворяющее требованиям

(H_0) $\quad \|J(\varphi)\| \leqslant C(\|\varphi\|)\|\varphi\|,$

(H_1) $\quad \|AJ(\varphi)\| \leqslant C(\|\varphi\|, \|A\varphi\|)\|A\varphi\|,$

(H_0^L) $\quad \|J(\varphi)-J(\psi)\| \leqslant C(\|\varphi\|, \|\psi\|)\|\varphi-\psi\|,$

(H_1^L) $\quad \|A(J(\varphi)-J(\psi))\| \leqslant C(\|\varphi\|, \|A\varphi\|, \|\psi\|, \|A\psi\|)\|A\varphi-A\psi\|$

при всех $\varphi, \psi \in D(A)$, где каждая константа C есть монотонно возрастающая (всюду конечная) функция указанных норм. Тогда для каждого $\varphi_0 \in D(A)$ существует такое $T>0$, что (X.142) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение при $t \in [0, T)$. Для каждого множества вида $\{\varphi \mid \|\varphi\| \leqslant a, \|A\varphi\| \leqslant b\}$ можно выбрать T равномерно для всех φ_0 из этого множества.

Доказательство. Пусть X_T — множество функций на $[0, T)$ со значениями в $D(A)$, для которых $\varphi(t)$ и $A\varphi(t)$ непрерывны и

$$\|\varphi(\cdot)\|_T \equiv \sup_{t \in [0, T)} \|\varphi(t)\| + \sup_{t \in [0, T)} \|A\varphi(t)\| < \infty.$$

Поскольку A — замкнутый оператор, X_T с нормой $\|\varphi(\cdot)\|_T$ — банахово пространство. Выберем некоторое фиксированное $\varepsilon > 0$. Пусть $\varphi_0 \in D(A)$ задано, и пусть $X_{T, \varepsilon, \varphi_0}$ состоит из тех $\varphi(\cdot)$ из X_T, для которых $\varphi(0) = \varphi_0$ и $\|\varphi(\cdot) - e^{-iAt}\varphi_0\|_T \leqslant \varepsilon$. Покажем, что отображение

$$(S\varphi)(t) = e^{-iAt}\varphi_0 + \int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\varphi(s))\, ds \tag{X.144}$$

является сжимающим на $X_{T, \varepsilon, \varphi_0}$, если T достаточно мало. Обозначим через C_ε любую из констант в условиях теоремы с аргументами $\|\varphi_0\| + \varepsilon$ и $\|A\varphi_0\| + \varepsilon$. Допустим, что $\varphi(\cdot) \in X_{T, \varepsilon, \varphi_0}$; тогда

$$\begin{aligned} \| e^{-iA(t-(s+h))} J(\varphi(s+h)) - e^{-iA(t-s)} J(\varphi(s))\| &\leqslant \\ \leqslant \|J(\varphi(s+h)) - J(\varphi(s))\| + \|(e^{-iAh} - I) J(\varphi(s))\| &\leqslant \\ \leqslant C_\varepsilon \|\varphi(s+h) - \varphi(s)\| + \|(e^{-iAh} - I) J(\varphi(s))\|&, \end{aligned}$$

так что $e^{-iA(t-s)} J(\varphi(s))$ — непрерывная функция s со значениями в $\mathscr{H}$. Аналогичное рассуждение показывает, что

$Ae^{-iA(t-s)}J(\varphi(s))$ также непрерывна. Значит, правую часть (X.144) можно определить с помощью риманова интеграла, и если

$$\eta_n(t) \equiv \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{n} e^{-i(t-(m/n)t)A} J\left(\varphi\left(\frac{m}{n}t\right)\right)$$

и

$$\eta(t) \equiv \int_0^t e^{-i(t-s)A} J(\varphi(s))\,ds,$$

то $\eta_n(t) \to \eta(t)$ при $n \to \infty$. Далее, по предположениям о J всякое $\eta_n(t) \in D(A)$, так что

$$A\eta_n(t) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{n} e^{-i(t-(m/n)t)A} AJ\left(\varphi\left(\frac{m}{n}t\right)\right) \to$$
$$\to \int_0^t e^{-i(t-s)A} AJ(\varphi(s))\,ds.$$

Следовательно, $\eta(t) \in D(A)$ и

$$A\int_0^t e^{-i(t-s)A} J(\varphi(s))\,ds = \int_0^t e^{-i(t-s)A} AJ(\varphi(s))\,ds. \qquad (X.145)$$

Далее,

$$\|A\eta(t+h) - A\eta(t)\| \leqslant \left\| \int_t^{t+h} e^{-iA(t-s)} e^{-iAh} AJ(\varphi(s))\,ds \right\| +$$
$$+ \left\| \int_0^t (e^{-ihA} - I) e^{-iA(t-s)} AJ(\varphi(s))\,ds \right\| \leqslant$$
$$\leqslant hC_\varepsilon \|\varphi\|_T + \int_0^t \|(e^{-ihA} - I) AJ(\varphi(s))\|\,ds.$$

Подынтегральное выражение во втором члене сходится к нулю при $h \to 0$ при каждом s и, по предположениям о J, равномерно ограничено. Значит, по теореме о мажорированной сходимости, правая часть сходится к нулю при $h \to 0$, так что $A\eta(t)$ непрерывно и аналогично $\eta(t)$ непрерывно. Далее, в точности такие же оценки показывают, что для любых $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot) \in X_{T,\varepsilon,\varphi_0}$ выполняются неравенства

$$\|(S\varphi)(t) - e^{-iAt}\varphi_0\| \leqslant C_\varepsilon T \sup_{t\in[0,T)} \|\varphi(t)\|,$$
$$\|A(S\varphi)(t) - Ae^{-iAt}\varphi_0\| \leqslant C_\varepsilon T \sup_{t\in[0,T)} \|A\varphi(t)\|,$$
$$\|(S\varphi)(t) - (S\psi)(t)\| \leqslant C_\varepsilon T \sup_{t\in[0,T)} \|\varphi(t) - \psi(t)\|,$$
$$\|A[(S\varphi)(t) - (S\psi)(t)]\| \leqslant C_\varepsilon T \sup_{t\in[0,T)} \|A\varphi(t) - A\psi(t)\|.$$

Следовательно при достаточно малых T отображение S есть сжатие на $X_{T,\varepsilon,\varphi_0}$, так что, по теореме V.18, S имеет единственную неподвижную точку $\varphi(\cdot)$ в $X_{T,\varepsilon,\varphi_0}$, которая удовлетворяет уравнению (X.143).

Допустим теперь, что $\tilde\varphi$ — непрерывно дифференцируемое $D(A)$-значное решение уравнения (X.142) на интервале $[0,\tilde T)$, причем $\tilde\varphi(0)=\varphi_0$. В силу дифференциального уравнения $A\tilde\varphi(t)$ непрерывна, так что $\tilde\varphi(t)\in X_{T,\varepsilon,\varphi_0}$ при t в некотором интервале $[0,T_0)$. Так как $\tilde\varphi$ удовлетворяет (X.143), то $\varphi(t)=\tilde\varphi(t)$ при $t<T_0$. Пусть T_1 — точная верхняя грань таких T_0. Тогда, поскольку $X_{T,\varepsilon,\varphi_0}$ замкнуто, $\tilde\varphi(T_1)\in X_{T,\varepsilon,\varphi_0}$. Далее, если $T_1<T$, то, так как $\tilde\varphi(T_1)=\varphi(T_1)$, те же рассуждения показывают, что $\tilde\varphi(t)=\varphi(t)$ в некотором малом интервале $T_1\leqslant t<T_2<T$, что противоречит максимальности T_1. Значит, $T_1\geqslant T$ и $\tilde\varphi(t)=\varphi(t)$ при $t\in[0,T)$, т. е. всякое сильное решение (X.142) на $[0,T)$ равно $\varphi(t)$.

Для доказательства сильной дифференцируемости $\varphi(t)$ напишем

$$\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}=\left(\frac{e^{-iAh}-I}{h}\right)e^{-iAt}\varphi_0+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}e^{-iA(t-s)}e^{-iAh}J(\varphi(s))\,ds+$$
$$+\int_0^t e^{-iA(t-s)}\left(\frac{e^{-ihA}-I}{h}\right)J(\varphi(s))\,ds. \qquad \text{(X.146)}$$

Так как $\varphi_0\in D(A)$, то первый член сходится к $-iAe^{-iAt}\varphi_0$ при $h\to 0$, а так как подынтегральное выражение во втором члене непрерывно, то второй член сходится к $J(\varphi(t))$. Подынтегральное выражение в третьем члене сходится к $e^{-iA(t-s)}(-iAJ(\varphi(s)))$ при всяком s и

$$\left\|\frac{e^{-ihA}-I}{h}J(\varphi(s))\right\|\leqslant\|AJ(\varphi(s))\|\leqslant C\|A\varphi_0\|+\varepsilon,$$

так что подынтегральное выражение равномерно ограничено. Значит, в силу теоремы о мажорированной сходимости третий член сходится при $h\to 0$ к $\int_0^t e^{-iA(t-s)}(-iAJ(\varphi(s)))\,ds$, что по (X.145) равно $-iA\int_0^t e^{-iA(t-s)}J(\varphi(s))\,ds$. Следовательно, $\varphi(t)$ сильно дифференцируема при $t\in[0,T)$ и удовлетворяет (X.142). ∎

Единственность, доказанная в этой теореме, на деле имеет место в гораздо более сильном смысле (задача 72). Заметим, что условия H_j в предыдущей и следующей теоремах следуют из условий $H_j^{\frac{1}{j}}$. Мы их формулируем по отдельности для того, чтобы легче было сравнить с условиями теоремы X.74.

Теорема X.73 (локальная гладкость).

(a) Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, а J — отображение, переводящее $D(A^j)$ в $D(A^j)$ при всех j и удовлетворяющее (при $j=0, 1, \ldots, n$) условиям

(H_j) $\|A^j J(\varphi)\| \leqslant C(\|\varphi\|, \ldots, \|A^j(\varphi)\|)\|A^j(\varphi)\|$,

$(H_j^{\frac{1}{j}})$ $\|A^j(J(\varphi)-J(\psi))\| \leqslant C(\|\varphi\|, \|\psi\|, \ldots$

$\ldots, \|A^j\varphi\|, \|A^j\psi\|)\|A^j\varphi - A^j\psi\|$

для всех $\varphi, \psi \in D(A^j)$, причем каждая константа C есть монотонно возрастающая (всюду конечная) функция всех своих переменных. Тогда для каждой $\varphi_0 \in D(A^n)$, $n \geqslant 1$, существует такое T_n, что (X.142) имеет единственное решение $\varphi(t)$ для $t \in [0, T_n)$ и $\varphi(t) \in D(A^n)$ при всех $t \in [0, T_n)$. Для каждого множества $\{\varphi \mid \|A^j\varphi\| \leqslant a_j,\ j=0, \ldots, n\}$ можно выбрать T равномерно для φ_0 из этого множества.

(b) В дополнение к условиям в (a) предположим, что для каждого $j < n$ отображение J обладает таким свойством: если решение φ сильно дифференцируемо j раз и $\varphi^{(k)}(t) \in D(A^{n-k})$ и $A^{n-k}\varphi^{(k)}(t)$ непрерывна при всех $k \leqslant j$, то $J(\varphi(t))$ дифференцируема j раз, $d^jJ(\varphi(t))/dt^j \in D(A^{n-j-1})$ и $A^{n-j-1}d^jJ(\varphi(t))/dt^j$ непрерывна. Тогда решение, определяемое в части (a), n раз сильно дифференцируемо по t и $d^j\varphi(t)/dt^j \in D(A^{n-j})$.

Доказательство. Доказательство части (a) в основном совпадает с доказательством теоремы X.72, за исключением того, что теперь мы вводим $X^{(n)}_{T_n, \varepsilon, \varphi_0}$ как множество таких функций $\varphi(\cdot)$ на $[0, T_n)$, что $\varphi(t), \ldots, A^n\varphi(t)$ сильно непрерывны и

$$\sum_{j=0}^{n} \sup_{t \in [0, T)} \|A^j\varphi(t) - e^{-iAt}A^j\varphi_0\| \leqslant \varepsilon.$$

Тогда так же, как прежде, устанавливается, что S — сжатие.

Часть (b) доказывается по индукции. Мы знаем из части (a), что $\varphi(t)$ сильно непрерывно дифференцируема и $\varphi'(t) = -iA\varphi(t) + J(\varphi(t))$. В силу тех же доводов, что в теореме X.72,

$$A\varphi(t) = Ae^{-iAt}\varphi_0 + A\int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\varphi(s))\,ds =$$

$$= e^{-iAt}A\varphi_0 + \int_0^t e^{-iA(t-s)} AJ(\varphi(s))\,ds,$$

а отсюда следует (в силу других рассуждений из теоремы X.72, см. (X.146)), что $A\varphi(t)$ сильно непрерывно дифференцируема. Следовательно, в силу допущений о J, $J(\varphi(t))$ сильно непрерывно дифференцируема, $dJ(\varphi(t))/dt \in D(A^{n-2})$ и $A^{n-2}\,dJ(\varphi(t))/dt$ непрерывна. Значит, $\varphi'(t)$ сильно дифференцируема,

$$\varphi''(t) = -A\varphi'(t) + \frac{d}{dt}J(\varphi(t)) =$$

$$= (-iA)^2\varphi(t) - iAJ(\varphi(t)) + \frac{d}{dt}J(\varphi(t)),$$

$\varphi''(t) \in D(A^{n-2})$ и $A^{n-2}\varphi''(t)$ непрерывна. Далее мы повторяем еще раз те же рассуждения ($dJ(\varphi(t))/dt$ дифференцируема по условию, так как теперь нам известно, что $\varphi(t)$ дважды непрерывно дифференцируема) и заключаем, что $\varphi(t)$ трижды сильно дифференцируема, и т. д. ∎

Заметим, что решение $\varphi(t)$, которое обеспечивается теоремой X.73, существует, вообще говоря, на меньших интервалах, чем решение из теоремы X.72, так как $T_n \leqslant T$. Однако в силу единственности эти решения обязаны совпадать на $[0, T_n)$. Теперь мы подходим к вопросу, существует ли это решение при всех $t \geqslant 0$. В общем случае это зависит от конкретных свойств нелинейных членов, а не просто от оценок; в конце этого раздела мы приведем пример, когда глобального решения не существует. Ниже мы покажем, что если $\|\varphi(t)\|$ a priori ограничена и в нашем распоряжении имеются несколько более сильные оценки, то глобальное решение существует. Позже мы увидим, что сохраняющаяся энергия для нелинейного уравнения Клейна—Гордона равна $^1/_2\|\varphi(t)\|^2 + {^1/_4}\lambda\int |u(t,x)|^4\,d^3x$, т. е. $\|\varphi(t)\|$ a priori ограничена.

Лемма 1. Пусть A и J удовлетворяют условиям части (а) теоремы X.73, за исключением того, что условие (H_j) заменяется несколько более сильным условием

(H'_j) $\|A^jJ(\varphi)\| \leqslant C(\|\varphi\|, \ldots, \|A^{j-1}\varphi\|)\,\|A^j\varphi\|$

при $1 \leqslant j \leqslant n$ (т. е. константа не зависит от $\|A^j\varphi\|$). Пусть $[0, T_n)$ — конечный интервал, на котором существует решение φ уравнения (X.142), причем $A^j\varphi(t)$ сильно непрерывна на $[0, T_n)$ при всяком $0 \leqslant j \leqslant n$. Тогда если $\|\varphi(t)\|$ ограничена на $[0, T_n)$, то и $\|A^j\varphi(t)\|$ ограничена при всех $0 < j \leqslant n$.

Доказательство. Так как $\varphi(t)$ удовлетворяет указанному дифференциальному уравнению на $[0, T_n)$, для $t \in [0, T_n)$

$$\varphi(t) = e^{-iAt}\varphi_0 + \int_0^t e^{-iA(t-s)}J(\varphi(s))\,ds.$$

Как и прежде, можно ввести A под знак интеграла и получить

$$A\varphi(t)=e^{-iAt}A\varphi_0+\int_0^t e^{-iA(t-s)}AJ(\varphi(s))\,ds,$$

откуда

$$\|A\varphi(t)\|\leqslant\|A\varphi_0\|+\int_0^t C(\|\varphi(s)\|)\|A\varphi(s)\|\,ds.$$

Согласно допущению, $\|\varphi(s)\|$ ограничена на $[0, T_n)$, поэтому существует такая константа K_1, что

$$\|A\varphi(t)\|\leqslant\|A\varphi_0\|+K_1\int_0^t\|A\varphi(s)\|\,ds$$

при всех $t\in[0, T_n)$. Отсюда с помощью итераций заключаем, что

$$\|A\varphi(t)\|\leqslant\|A\varphi_0\|e^{K_1t}$$

при всех $t\in[0, T_n)$, так что $\|A\varphi(t)\|$ ограничена на $[0, T_n)$. Теперь, когда мы знаем, что $\|\varphi(t)\|$ и $\|A\varphi(t)\|$ ограничены, мы можем применить (H_2') и, воспользовавшись прежней аргументацией, заключить, что $\|A^2\varphi(t)\|$ ограничена, и т. д. ∎

Пусть $\bar{T}_n$ — точная верхняя грань чисел T_n, для которых решение $\varphi(t)$ уравнения (X.142) существует на $[0, T_n)$ и $A^j\psi(t)$ непрерывны при всех $j=0, 1, \ldots, n$. В силу локальной единственности, каждые два таких решения совпадают, если пересекаются соответствующие интервалы существования, так что решение, задаваемое частью (a) теоремы X.73, может быть продолжено на полуинтервал $[0, \bar{T}_n)$, который называется A^n-**максимальным интервалом** существования этого решения.

Теорема X.74 (глобальное существование и гладкость). Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и n — положительное целое число. Пусть J — отображение, которое переводит $D(A^j)$ в $D(A^j)$ при всех $1\leqslant j\leqslant n$ и удовлетворяет (при всех $0\leqslant j\leqslant n$) условиям

(H_0) $\|J(\varphi)\|\leqslant C(\|\varphi\|)\|\varphi\|$,

(H_j') $\|A^jJ(\varphi)\|\leqslant C(\|\varphi\|, \ldots, \|A^{j-1}\varphi\|)\|A^j\varphi\|$, $j=1, \ldots, n$,

(H_j'') $\|A^j(J(\varphi)-J(\psi))\|\leqslant C(\|\varphi\|, \|\psi\|, \ldots$

$\ldots, \|A^j\varphi\|, \|A^j\psi\|)\|A^j\varphi-A^j\psi\|$, $j=0, \ldots, n$,

при всех $\varphi, \psi\in D(A^j)$, где каждая константа C есть монотонно возрастающая (всюду конечная) функция всех своих аргументов. Пусть $\varphi_0\in D(A^n)$, и допустим, что на каждом конечном интервале существования решение $\varphi(t)$, даваемое частью (a) теоремы

X.73, таково, что $\|\varphi(t)\|$ ограничена сверху. Тогда существует сильно дифференцируемая $D(A^n)$-значная функция $\varphi(t)$ на $[0, \infty)$, удовлетворяющая уравнению

$$\begin{aligned} &\varphi'(t) = -iA\varphi(t) + J(\varphi(t)), \\ &\varphi(0) = \varphi_0. \end{aligned} \tag{X.142}$$

Если при этом J удовлетворяет условиям части (b) теоремы X.73, то $\varphi(t)$ сильно дифференцируема n раз и $d^j\varphi(t)/dt^j \in D(A^{n-j})$.

Доказательство. Пусть $[0, \overline{T}_n)$ есть A^n-максимальный интервал существования решения $\varphi(t)$, и пусть $\overline{T}_n < \infty$. По условию $\|\varphi(t)\|$ ограничена на $[0, \overline{T}_n)$. По лемме 1 отсюда следует, что $\|A^j\varphi(t)\|$ ограничена на $[0, \overline{T}_n)$ при всех $0 \leqslant j \leqslant n$. Далее, длина интервала T_n, на котором применим принцип сжимающих отображений, зависит лишь от констант $C(\|\varphi_0\|+\varepsilon, \ldots, \|A^n\varphi_0\|+\varepsilon)$. Поскольку эти константы ограничены на $[0, \overline{T}_n)$, мы можем продолжить решение $\varphi(t)$ через $\overline{T}_n$, если выберем начальную точку t_0 достаточно близко к $\overline{T}_n$. Но это находится в противоречии с максимальностью $\overline{T}_n$, поэтому $\overline{T}_n = \infty$. Остальные утверждения теоремы немедленно вытекают из теоремы X.73. ∎

Следствие. Пусть A и J удовлетворяют условиям предыдущей теоремы при каждом $n = 0, 1, \ldots$, и пусть J удовлетворяет еще условиям части (b) теоремы X.73. Тогда при всяком $\varphi_0 \in \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} D(A^j)$ уравнение (X.142) имеет единственное решение $\varphi(t)$, такое, что $\varphi(t)$ бесконечно дифференцируема в сильном смысле и каждая производная лежит в $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} D(A^j)$.

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, так как e^{itA} — группа и все наши оценки не зависят от знака t, теорема X.74 показывает, что решение существует и для отрицательных t, коль скоро $\|\varphi(t)\|$ a priori ограничена также и на конечных отрицательных интервалах. Допустим, что выполнено условие

$$(\mathscr{H}_0^1)\ \|J(\varphi) - J(\psi)\| \leqslant C(\|\varphi\|, \|\psi\|)\|\varphi - \psi\|, \quad \varphi, \psi \in \mathscr{H},$$

и условие априорной ограниченности из теоремы X.74. Тогда, по предыдущему, можно построить глобальные решения интегрального уравнения (X.143). Пусть M_t — отображение

$$M_t\colon\ \varphi(0) \mapsto \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — решение (X.143). Тогда $\{M_t\}_{t \in (-\infty, \infty)}$ — однопараметрическая группа всюду определенных нелинейных отображений пространства $\mathscr{H}$. Она сильно непрерывна, так как $\|\varphi(t) - \varphi(0)\| \to 0$

при $t \to 0$. Бывает важно знать, что M_t при каждом t есть непрерывный оператор в $\mathcal{H}$, так как в приложениях это означает, что решения дифференциальных уравнений непрерывно зависят от своих начальных данных. Заметим, что, поскольку M_t, вообще говоря, нелинейно, недостаточно доказать, что M_t ограничено на ограниченных множествах.

Теорема X.75. Пусть A—самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и J—нелинейное отображение пространства $\mathcal{H}$, удовлетворяющее условию ($\mathcal{H}_0^{\mathrm{L}}$). Предположим, что для всех k и T решения (X.143) a priori ограничены равномерно для всех $\|\varphi(0)\| \leqslant k$, $0 < t < T$. Тогда каждое M_t равномерно непрерывно на шарах в $\mathcal{H}$.

Доказательство. Пусть k, T заданы, и пусть $b_T(k)$—соответствующая равномерная граница. Предположим, что $\|\varphi_1(0)\| \leqslant k$, $\|\varphi_2(0)\| \leqslant k$, и пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$—соответствующие решения (X.143). Тогда для $t < T$

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leqslant \|\varphi_1(0) - \varphi_2(0)\| + \int_0^t \|J(\varphi_1(s)) - J(\varphi_2(s))\| \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi_1(0) - \varphi_2(0)\| + C(b(k), b(k)) \int_0^t \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\| \, ds,$$

откуда

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leqslant \|\varphi_1(0) - \varphi_2(0)\| \exp(C(b(k), b(k))\, t). \quad \blacksquare$$

При более сильных условиях на J можно получить более сильные заключения; см. задачу 80.

Вернемся теперь к нашему руководящему примеру—нелинейному уравнению Клейна—Гордона на $\mathbb{R}^3$. В этом случае $B = (-\Delta + m^2)^{1/2}$ на $L^2(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{H} = D(B) \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$ и

$$A = i\begin{pmatrix} 0 & I \\ -B^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем символ $\|\cdot\|$ будет всюду обозначать норму

$$\|\langle u, v\rangle\|^2 = \|Bu\|_2^2 + \|v\|_2^2$$

на $\mathcal{H}$, а $\|\cdot\|_p$—обычную L^p-норму на $\mathbb{R}^3$. Мы переписали уравнение Клейна—Гордона (X.138) в виде

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -iA\varphi(t) + J(\varphi(t)), \\ \varphi(0) &= \varphi_0, \end{aligned} \qquad \text{(X.147)}$$

где $\varphi(t) = \langle u(t), v(t)\rangle$, $\varphi_0 = \langle f(x), g(x)\rangle$, $J(\varphi(t)) = \langle 0, -\lambda |u(t)|^2 u(t)\rangle$, и показали в предложении, что A самосопряжен на $D(B^2) \oplus D(B)$.

Чтобы применить к этому случаю абстрактную теорию, следует удостовериться, что J обладает необходимыми свойствами. Никакая новая техника здесь не потребуется; достаточно будет применять в нужных случаях неравенство Гёльдера, теорему Планшереля и соболевские оценки. Мы изложим все это в ряде лемм. В последующих вычислениях различные общие константы будут обозначаться через K.

Лемма 2. Пусть $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Тогда $\|u\|_6 \leqslant K\|Bu\|_2$.

Доказательство. Обозначим $\partial u(x)/\partial x_i$ через u_{x_i}. Тогда, по основной теореме анализа,

$$|u(x)|^4 \leqslant 4\int |u_{x_i}u^3|\,dx_i,$$

где интеграл берется по прямой, вдоль которой x_j постоянны, если $j \neq i$. Поэтому

$$|u(x)|^6 \leqslant K\left(\int |u_{x_1}u^3|\,dx_1\right)^{1/2}\left(\int |u_{x_2}u^3|\,dx_2\right)^{1/2}\left(\int |u_{x_3}u^3|\,dx_3\right)^{1/2},$$

откуда, проинтегрировав обе части (итерацией интегралов) и воспользовавшись неравенством Шварца, находим

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^6\,dx &\leqslant K\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_{x_1}u^3|\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_{x_2}u^3|\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_{x_3}u^3|\,dx\right)^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant K\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^6\,dx\right)^{3/4}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_{x_1}|^2 dx\right)^{1/4}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_{x_2}|^2 dx\right)^{1/4}\times \\ &\qquad\times\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_{x_3}|^2 dx\right)^{1/4}.\end{aligned}$$

Отсюда легко получаем

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^6\,dx\right)^{1/6} &\leqslant K(\|u_{x_1}\|_2 + \|u_{x_2}\|_2 + \|u_{x_3}\|_2) = \\ &= K(\|k_1\hat{u}\|_2 + \|k_2\hat{u}\|_2 + \|k_3\hat{u}\|_2) \leqslant \\ &\leqslant K\left\|\left(\sum k_i^2 + m^2\right)^{1/2}\hat{u}\right\|_2 = K\|Bu\|_2. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Лемма 3. Предположим, что u_1, u_2, $u_3 \in D(B)$. Тогда

$$\|u_1u_2u_3\|_2 \leqslant K\|Bu_1\|_2\|Bu_2\|_2\|Bu_3\|_2. \tag{X.148}$$

Доказательство. Пусть $u \in D(B)$. Так как B самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, мы можем найти последовательность $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$-функций u_n, таких, что $u_n \xrightarrow{L^2} u$ и $Bu_n \xrightarrow{L^2} Bu$; переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно предположить, что

u_n также поточечно сходится к u. Но

$$\|u_n^3-u_m^3\|_2=\|(u_n-u_m)(u_n^2+u_nu_m+u_m^2)\|_2\leqslant$$
$$\leqslant K\|u_n-u_m\|_6\|u_n^2+u_nu_m+u_m^2\|_3\leqslant$$
$$\leqslant K\|u_n-u_m\|_6(\|u_n\|_6^2+\|u_n\|_6\|u_m\|_6+\|u_m\|_6^2)\leqslant$$
$$\leqslant K\|Bu_n-Bu_m\|_2(\|Bu_n\|_2^2+\|Bu_n\|_2\|Bu_m\|_2+\|Bu_m\|_2^2),$$

так что $\{u_n^3\}$ — последовательность Коши в L^2, и так как она сходится поточечно к u^3, то $u^3\in L^2$. Переходя к пределу в неравенстве, находим

$$\|u\|_6^3=\|u^3\|_2\leqslant K\|Bu\|_2^3.$$

Утверждение леммы получается отсюда двукратным применением неравенства Гёльдера. ∎

Лемма 4. При всех $\varphi_1, \varphi_2\in\mathcal{H}$ выполняются неравенства

$$\|J(\varphi_1)\|\leqslant K\|\varphi_1\|^3,$$
$$\|J(\varphi_1)-J(\varphi_2)\|\leqslant C(\|\varphi_1\|, \|\varphi_2\|)\|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

Доказательство. Пусть $\varphi_i=\langle u_i, v_i\rangle$. Тогда по лемме 3

$$\|J(\varphi_1)\|=\|\lambda u_1^2\bar{u}_1\|_2\leqslant K\|Bu_1\|_2^3\leqslant K\|\varphi_1\|^3$$

и (в соответствии с вычислениями в лемме 3)

$$\|J(\varphi_1)-J(\varphi_2)\|=\|\lambda(u_1^2\bar{u}_1-\bar{u}_2^2u_2)\|_2\leqslant$$
$$\leqslant K\|B(u_1-u_2)\|_2(\|Bu_1\|_2^2+\|Bu_1\|_2\|Bu_2\|_2+\|Bu_2\|_2^2)\leqslant$$
$$\leqslant K\|\varphi_1-\varphi_2\|(\|\varphi_1\|^2+\|\varphi_1\|\|\varphi_2\|+\|\varphi_2\|^2),$$

что и требовалось доказать. ∎

Лемма 5. Пусть $\varphi_1, \varphi_2\in D(A)$; тогда

$$\|AJ(\varphi_1)\|\leqslant K\|\varphi_1\|^2\|A\varphi_1\|,$$
$$\|A(J(\varphi_1)-J(\varphi_2))\|\leqslant C(\|\varphi_1\|, \|\varphi_2\|, \|A\varphi_1\|, \|A\varphi_2\|)\|A\varphi_1-A\varphi_2\|.$$

Доказательство. Пусть $\varphi_i=\langle u_i, v_i\rangle$, где $u_i\in D(B^2)$, $v_i\in D(B)$. Проведем вычисление:

$$\|Bu_{x_i}\|_2^2=\|(\sum k_i^2+m^2)^{1/2}k_i\hat{u}\|_2^2\leqslant\|(\sum k_i^2+m^2)\hat{u}\|_2^2=\|B^2u\|_2^2;$$

отсюда по лемме 3

$$\|(u^2\bar{u})_{x_i}\|_2=\|2uu_{x_i}\bar{u}+u^2\bar{u}_{x_i}\|_2\leqslant K\|Bu\|_2^2\|Bu_{x_i}\|_2\leqslant K\|Bu\|_2^2\|B^2u\|_2.$$

Следовательно,

$$\|AJ(\varphi_1)\|^2=\lambda^2\|Bu_1^2\bar{u}_1\|_2^2=\lambda^2\sum_{i=1}^{3}\|(u_1^2\bar{u}_1)_{x_i}\|_2^2+\lambda^2m^2\|u_1^2\bar{u}_1\|_2^2\leqslant$$
$$\leqslant K(\|Bu_1\|_2^4\|B^2u_1\|_2^2+m^2\|Bu_1\|_2^6)\leqslant$$
$$\leqslant K\|Bu_1\|_2^4\|B^2u_1\|_2^2\leqslant K\|\varphi_1\|^4\|A\varphi_1\|^2,$$

что доказывает первое неравенство. Чтобы доказать второе, проведем вычисление при помощи леммы 3 и сделанного выше:

$$\frac{1}{4}\|(u_1^2\bar{u}_1-u_2^2\bar{u}_2)_{x_i}\|_2^2\leqslant\|u_1^2(\bar{u}_1-\bar{u}_2)_{x_i}\|_2^2+\|(u_1^2-u_2^2)(\bar{u}_2)_{x_i}\|_2^2+$$
$$+\|2(u_1)_{x_i}(|u_1|^2-|u_2|^2)\|_2^2+\|2(u_1-u_2)_{x_i}|u_2|^2\|_2^2\leqslant$$
$$\leqslant K(\|Bu_1\|_2^4\|B^2(u_1-u_2)\|_2^2+\|B^2u_2\|_2^2\|B(u_1+u_2)\|_2^2\|B^2(u_1-u_2)\|_2^2)\leqslant$$
$$\leqslant K(\|\varphi_1\|^4\|A(\varphi_1-\varphi_2)\|^2+\|A\varphi_2\|^2(\|\varphi_1\|+\|\varphi_2\|)\|A(\varphi_1-\varphi_2)\|^2).$$

Следовательно,

$$\|A(J(\varphi_1)-J(\varphi_2))\|^2=\lambda^2\|B(u_1^2\bar{u}_1-u_2^2\bar{u}_2)\|_2^2=$$
$$=\lambda^2\sum_{i=1}^{3}\|(u_1^2\bar{u}_1-\bar{u}_2u_2^2)_{x_i}\|_2^2+m^2\lambda^2\|u_1^2\bar{u}_1-u_2^2\bar{u}_2\|_2^2\leqslant$$
$$\leqslant C(\|\varphi_1\|,\ \|\varphi_2\|,\ \|A\varphi_2\|)\|A(\varphi_1-\varphi_2)\|^2+C(\|\varphi_1\|,\ \|\varphi_2\|)\|A(\varphi_1-\varphi_2)\|^2,$$

что и доказывает лемму. Мы здесь несколько раз пользовались неравенством $\|Bu\|_2\leqslant K\|B^2u\|_2$. ∎

Последние две леммы и теорема X.72 обеспечивают локальное существование решения уравнения (X.138). Для доказательства глобального существования потребуется

Лемма 6. Пусть $u(x, t)$ есть решение уравнения (X.138) на интервале $[0, T)$, причем $u(x, 0)=f(x)\in D(B^2)$ и $u_t(x, 0)=g(x)\in D(B)$. Тогда

$$E(t)\equiv\frac{1}{2}\int\left\{|Bu(x, t)|^2+|u_t(x, t)|^2+\frac{\lambda}{2}|u(x, t)|^4\right\}d^3x$$

не зависит от t.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)=\langle u(x, t), u_t(x, t)\rangle$. Так как $\varphi(t)\in D(A)$ при каждом $t\in[0, T)$, то $u(\cdot, t)\in D(B^2)$ и $u_t(\cdot, t)\in D(B)$ при каждом $t\in[0, T)$. Далее, так как $\varphi(t)$ сильно дифференцируема, u и u_t сильно дифференцируемы как функции со значениями в $L^2(\mathbb{R}^3)$ и

$$\left\|B\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-u_t(t)\right)\right\|_2\to 0,$$
$$\left\|\frac{u_t(t+h)-u_t(t)}{h}-u_{tt}(t)\right\|_2\to 0 \tag{X.149}$$

при $h\to 0$. Отсюда следует, что первые два члена в $E(t)$ дифференцируемы. Чтобы убедиться в дифференцируемости третьего члена, применим лемму 2 и неравенство Гёльдера; получим

$$\left\|u\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-u_t(t)'\right)\right\|_2\leqslant$$
$$\leqslant\|u\|_2^{1/2}\|Bu\|_2^{1/2}\left\|B\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-u_t(t)\right)\right\|_2.$$

Отсюда и из (X.149) следует, что $u(t, x)^2$ сильно дифференцируема. Следовательно, внутреннее произведение

$$\int |u(t, x)|^4 dx = (u^2(t), u^2(t))_2$$

дифференцируемо. Таким образом, $E(t)$ дифференцируема и

$$E'(t) = \frac{1}{2}(Bu_t, Bu) + \frac{1}{2}(u_{tt}, u_t) + \frac{\lambda}{2}(uu_t, u^2) + \\ + \frac{1}{2}(Bu, Bu_t) + \frac{1}{2}(u_t, u_{tt}) + \frac{\lambda}{2}(u^2, uu_t) = \\ = \frac{1}{2}(u_t, B^2u + u_{tt} + \lambda |u|^2 u) + \frac{1}{2}(B^2u + u_{tt} + \lambda |u|^2 u, u_t) = 0$$

на основании дифференциального уравнения для u. ∎

Теорема X.76а. Пусть $\lambda > 0$, $m > 0$ и

$$f \in D(-\Delta + m^2), \qquad g \in D((-\Delta + m^2)^{1/2}).$$

Тогда существует единственная функция $u(x, t)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$, такая, что $t \mapsto u(\cdot, t)$ есть дважды сильно дифференцируемая функция t со значениями из $L^2(\mathbb{R}^3)$, $u(\cdot, t) \in D(-\Delta + m^2)$ при всех t, $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$ и

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = -\lambda |u|^2 u. \qquad (X.138)$$

Кроме того, при всяком t отображение $\langle f, g\rangle \mapsto \langle u(\cdot, t), u_t(\cdot, t)\rangle$ непрерывно.

Доказательство. Леммы 4 и 5 показывают, что J удовлетворяет условиям (H_0'), (H_1'), (H_0^L) и (H_1^L) теоремы X.72. Значит, единственное локальное решение $\varphi(t) = \langle u(x, t), u_t(x, t)\rangle$ существует на некотором интервале $[0, T)$. По лемме 6, $E(t)$ постоянна, так что для всех $t \in [0, T)$

$$\frac{1}{2}\|\varphi(t)\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi(t)\|^2 + \frac{\lambda}{4}\int_{R^3} |u(x, t)|^4 d^3x = E(t) = E(0).$$

Значит, $\|\varphi(t)\|$ ограничена на $[0, T)$ и, следовательно, по теореме X.74 решение существует при всех $t \geqslant 0$. Решая уравнение с начальными данными $\langle f, -g\rangle$, получим решение при $t \leqslant 0$. Другие утверждения тоже немедленно следуют из части (а) теоремы X.73 и из теоремы X.75. В связи с проверкой допущений теоремы X.75 необходимо отметить, что нелинейный член в энергии ограничен квадратом свободной энергии. ∎

С классической точки зрения теорема X.75 еще не вполне удовлетворительна. Хотелось бы, чтобы в случае, когда начальные данные обладают определенной степенью гладкости, эта гладкость сохранялась в решениях. Вот для чего нужна теорема X.73. Здесь мы наметим доказательство такого результата для C^∞.

Теорема X.76b. Допустим, что в теореме X.76a начальные данные f и g принадлежат $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Тогда решение $u(x, t)$ уравнения (X.138) принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^4)$.

Доказательство. Сначала доказываются высшие оценки (H'_n) и (H_n^{L}) для всех $n>1$. Доказательство прямое и основано на тех же приемах, которые применялись для случаев $n=0$ и $n=1$ в леммах 5 и 6. Затем для каждого n проверяются условия на J из части (b) теоремы X.73. Чтобы понять, в чем здесь сложность, рассмотрим случай $n=2$. Допустим, что $\varphi(t)$ есть решение (X.147), $\varphi(t)\in D(A^2)$, $\varphi'(t)\in D(A)$ и $A\varphi'(t)$ непрерывна по t. Нам надо доказать, что $J(\varphi(t))$ сильно дифференцируема. Поскольку $\varphi(t)=\langle u(t), u'(t)\rangle$, то, согласно предположениям о φ, $u(t)\in D(B^3)$ и $u'(t)\in D(B^2)$. Величину

$$\frac{1}{h}(J(\varphi(t+h))-J(\varphi(t)))=-\lambda\left\langle 0, \frac{|u(t+h)|^2u(t+h)-|u(t)|^2u(t)}{h}\right\rangle$$

можно записать в виде суммы трех членов, один из которых

$$-\lambda\left\langle 0, |u(t)|^2\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h}\right)\right\rangle,$$

а два других аналогичны. По лемме 4

$$\left\| |u(t)|^2\left[\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h}\right)-u'(t)\right]\right\|_2\leqslant$$
$$\leqslant K\|Bu(t)\|_2^2\left\|B\left[\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-u'(t)\right]\right\|_2.$$

Но, так как $\varphi(t)$ сильно дифференцируема, правая часть сходится к нулю. Та же аргументация применима и к остальным двум членам, и мы заключаем, что $J(\varphi(t))$ сильно дифференцируема,

$$(J(\varphi(t)))'=-\lambda\langle 0, 2u\bar{u}u'+u^2\bar{u}'\rangle,$$

$(J(\varphi(t)))'\in D(A^{2-1-1})=\mathscr{H}$ (опять по лемме 4) и $(J(\varphi(t)))'$ непрерывна. С помощью точно таких же построений удостоверяемся в том, что выполнены условия части (b) теоремы X.73.

Далее, так как $f, g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\varphi_0=\langle f, g\rangle$ лежит в $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$. Отсюда, согласно следствию теоремы X.73, $\varphi(t)$ бесконечно дифференцируема в сильном смысле и j-я производная $\varphi^{(j)}(t)$ при всяком j лежит в $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ при всех t. Все, что осталось доказать,— это существование функции u, лежащей в C^∞ в классическом смысле и такой, что $\varphi(t)=\langle u(x, t), u_t(x, t)\rangle$, где $u(\cdot, t)$ рассматривается как векторнозначная функция t. Но $u(t)$, первая компонента $\varphi(t)$, локально есть элемент $L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))=L^2(\mathbb{R}^4)$ (см. § II.4). L^2-производные u по времени суть производные в смысле обобщенных функций (так как $C_0^\infty \subset L^2$) и, поскольку в силу предыдущего рассуждения $\partial^k u/\partial t^k \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(B^n)$, производные u всех порядков в смысле обобщенных функций лежат в L^2. В силу леммы Соболева (теорема IX.24), u бесконечно дифференцируема в классическом смысле. ∎

Наконец, чтобы завершить наш анализ нелинейного уравнения Клейна — Гордона, покажем, что решение распространяется с единичной скоростью. В частности, решение u из последней теоремы обладает тем свойством, что $u(\cdot, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ при всех t.

Теорема X.77. Пусть $f \in D(-\Delta + m^2)$ и $g \in D((-\Delta + m^2)^{1/2})$. Предположим, что носители f и g лежат в компактном множестве $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ (т. е. f и g обращаются в нуль почти всюду вне Σ). Тогда решение (X.138), даваемое теоремой X.76а, обладает тем свойством, что носитель $u(\cdot, t)$ лежит в

$$\mathscr{C}(\Sigma, t) = \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{dist}(x, \Sigma) \leqslant t\}.$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение теоремы для *линейного* уравнения

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0, \\ &u(x, 0) = f(x), \\ &u_t(x, 0) = g(x). \end{aligned} \tag{X.150}$$

Предположим, что f и g имеют носители в шаре S_R^0 радиуса R с центром в нуле. Тогда решение (X.150) задается формулой

$$u(t) = \cos(tB) f + B^{-1} \sin(tB) g,$$

или, после выполнения преобразования Фурье,

$$\hat{u}(k, t) = \cos\left(t\sqrt{k^2 + m^2}\right) \hat{f}(k) + (k^2 + m^2)^{-1/2} \sin\left(t\sqrt{k^2 + m^2}\right) \hat{g}(k).$$

По теореме Пэли — Винера (для распределений), $\hat{f}$ и $\hat{g}$ — целые аналитические функции и существуют такие постоянные C_i и целые числа N_i, что

$$|\hat{f}(k)| \leqslant C_1 (1 + |k|^2)^{N_1} e^{|\operatorname{Im} k| R},$$
$$|\hat{g}(k)| \leqslant C_2 (1 + |k|^2)^{N_2} e^{|\operatorname{Im} k| R}.$$

Далее, поскольку корни разложимы в степенные ряды, функции $\cos\left(t\sqrt{k^2 + m^2}\right)$ и $(k^2 + m^2)^{-1/2} \sin\left(t\sqrt{k^2 + m^2}\right)$ тоже целые и удовлетворяют неравенствам

$$\left|\cos\left(t\sqrt{k^2 + m^2}\right)\right| \leqslant C_3 e^{|\operatorname{Im} k| t},$$
$$\left|(k^2 + m^2)^{-1/2} \sin\left(t\sqrt{k^2 + m^2}\right)\right| \leqslant C_4 e^{|\operatorname{Im} k| t}.$$

Значит, $\hat{u}(k, t)$ — целая функция k, и существуют такие константа C и целое число N, что

$$|\hat{u}(k, t)| \leqslant C(1+|k|^2)^N e^{|\operatorname{Im} k|(R+t)}.$$

Тогда вследствие обратной теоремы Пэли — Винера $u(x, t)$ имеет носитель в $S^0_{R+t} = \mathscr{C}(S^0_R, t)$. Из трансляционной инвариантности уравнения немедленно следует, что если f и q имеют носители в произвольной сфере S, то $u(x, t)$ имеет носитель в $\mathscr{C}(S, t)$. Наконец, если f и q имеют носители в Σ, то можно для любого данного $\varepsilon > 0$ найти конечное число таких сфер $S_1, \ldots, S_M$, что $\Sigma \subset \bigcup_{i=1}^{M} S_i$ и $\bigcup_{i=1}^{M} S_i \subset \mathscr{C}(\Sigma, \varepsilon)$. Опять опираясь на то, что решение линейно зависит от начальных данных, легко заключаем, что носитель $u(x, t)$ лежит в множестве $\bigcup_{i=1}^{M} \mathscr{C}(S_i, t)$, которое содержится в $\mathscr{C}(\Sigma, t+\varepsilon)$. Так как ε было выбрано произвольным, то $u(x, t)$ имеет носитель в $\mathscr{C}(\Sigma, t)$.

Обратимся теперь к нелинейной задаче. Допустим, что при доказательстве теоремы X.72 мы выбрали $\tilde{X}_{T, \varepsilon, \varphi_0} = \{\varphi(\cdot) \in X_{T, \varepsilon, \varphi_0} \mid \operatorname{supp} \varphi(t) \subset \mathscr{C}(\Sigma, t)\}$ вместо $X_{T, \varepsilon, \varphi_0}$. Тогда все оценки по-прежнему останутся в силе, и мы должны убедиться только в том, что

$$(S\varphi)(t) = e^{-itA}\varphi_0 + \int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\varphi(s))\, ds$$

отображает $\tilde{X}_{T, \varepsilon, \varphi_0}$ в себя (в смысле свойств носителя). Из доказанного выше для линейного уравнения видно, что $e^{-iAt}\varphi_0$ имеет носитель в $\mathscr{C}(\Sigma, t)$. Далее, если $\operatorname{supp} \varphi(s) \subset \mathscr{C}(\Sigma, s)$, то

$$\operatorname{supp} J(\varphi(s)) = \operatorname{supp} \langle 0, -\lambda |u(s)|^2 u(s)\rangle \subset \operatorname{supp} \varphi(s) \subset \mathscr{C}(\Sigma, s),$$

так что в силу результата, относящегося к линейному случаю,

$$\operatorname{supp} \{e^{-iA(t-s)} J(\varphi(s))\} \subset \mathscr{C}(\Sigma, s+(t-s)) = \mathscr{C}(\Sigma, t).$$

Итак, $\int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\varphi(s))\, ds$ есть интеграл от функции со значениями в $L^2(\mathscr{C}(\Sigma, t))$, и потому он сам имеет носитель в $\mathscr{C}(\Sigma, t)$. Значит, S отображает $\tilde{X}_{T, \varepsilon, \varphi_0}$ в себя, так что единственная неподвижная точка $\varphi(t) = \langle u(x, t), u_t(x, t)\rangle$, являющаяся нашим решением, имеет носитель в $\mathscr{C}(\Sigma, t)$ при всяком t. ▮

В заключение этого раздела мы покажем, что в целом ряде случаев глобального решения не существует.

Пример. Применяя теоремы этого раздела, легко доказать локальное существование, единственность и гладкость решений такого уравнения на $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} &u_{tt}-u_{xx}=u^n, \\ &u(x,\ 0)=u_0(x), \\ &u_t(x,\ 0)=v_0(x), \end{aligned} \tag{X.151}$$

где $x\in\mathbb{R}$ и $n>1$. Далее, если u_0 и v_0 вещественнозначны, то и u вещественнозначно и, в силу прежних рассуждений, если u_0 и v_0 имеют компактный носитель, то и u при всех t имеет компактный носитель. Итак, пусть u — локальное решение (X.151), где u_0 и $v_0\in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Мы покажем, что если u_0 и v_0 правильно выбраны, то

$$F(t)\equiv\int_{\mathbb{R}} u(x,\ t)^2\,dx$$

уходит на бесконечность за конечное время. Допустим, что $\alpha>0$ и начальные данные u_0 и v_0 таковы, что

(A) $\qquad (F(t)^{-\alpha})''\leqslant 0$ при всех $t\geqslant 0$,

(B) $\qquad (F(t)^{-\alpha})'<0$ при $t=0$.

Тогда $F(t)^{-\alpha}$ обратится в нуль за конечное время; см. рис. X.8. Условие (B) автоматически будет выполнено, если мы выберем u_0 и v_0 одного знака на $(-\infty,\ \infty)$, ибо

$$(F(0)^{-\alpha})'=-\alpha F(0)^{-1-\alpha}F'(0)=-2\alpha F(0)^{-1-\alpha}\int u_0v_0\,dx,$$

так что остается позаботиться о том, чтобы выполнялось (A).

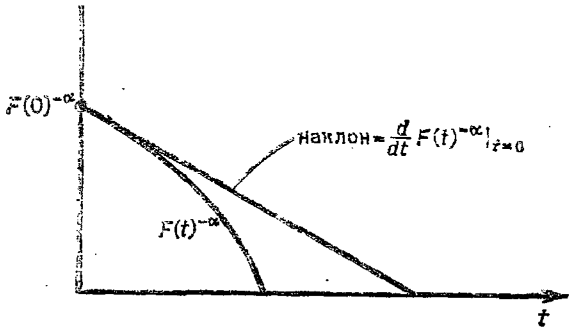

Рис. X.8. График $F(t)^{-\alpha}$.

Так как $F(t) \geqslant 0$, это равносильно тому, чтобы доказать неравенство $Q(t) \geqslant 0$, где

$$Q(t) \equiv (-\alpha)^{-1} F^{\alpha+2} (F^{-\alpha})'' = F''F - (\alpha+1)(F')^2.$$

Но

$$F'(t) = 2\int u u_t \, dx,$$

$$F''(t) = 2\int (u u_{tt} + u_t^2) dx =$$

$$= 4(\alpha+1)\int u_t^2 dx + 2\int (u u_{tt} - (2\alpha+1) u_t^2)\, dx,$$

так что

$$Q(t) = 4(\alpha+1)\left\{\left(\int u^2\, dx\right)\left(\int u_t^2\, dx\right) - \left(\int u u_t\, dx\right)^2\right\} +$$

$$+ 2F(t)\left\{\int u u_{tt}\, dx - \int (2\alpha+1) u_t^2\, dx\right\}.$$

Первый член в правой части положителен в силу неравенства Шварца, так что надо позаботиться лишь о том, чтобы было $H(t) \geqslant 0$, где

$$H(t) \equiv \int u u_{tt}\, dx - (2\alpha+1)\int u_t^2\, dx =$$

$$= \int u^{n+1}\, dx + \int u u_{xx}\, dx - (2\alpha+1)\int u_t^2\, dx =$$

$$= \int u^{n+1}\, dx - \int u_x^2\, dx - (2\alpha+1)\int u_t^2\, dx.$$

Сохраняющаяся энергия для (X.151) есть

$$E(t) = \frac{1}{2}\int (u_x^2 + u_t^2)\, dx - \frac{1}{n+1}\int u^{n+1}\, dx.$$

Значит, $E(t)$ не зависит от t. Поэтому, выбрав α таким, что $2(2\alpha+1) = n+1$, получим

$$H(t) = -(n+1)\, E(t) + 2\alpha\int u_x^2\, dx =$$

$$= -(n+1)\, E(0) + 2\alpha\int u_x^2\, dx. \qquad \text{(X.152)}$$

Значит, если $E(0) < 0$, то H всегда строго положительно, так как $\alpha = (n-1)/4 \geqslant 0$. Выбирая теперь $u_0 \geqslant 0$, $v_0 \geqslant 0$ так, чтобы выполнялось (B), мы затем изменим шкалу u_0, умножая ее на положительную константу, чтобы стало $E(0) < 0$ (это должно произойти, так как $n+1 > 2$). Для всех таких начальных данных $F(t)$ обращается в бесконечность за конечное время.

Если мы теперь рассмотрим другое уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = -u^n,$$

то $H(t)$ снова удовлетворяет (X.152), но теперь сохраняющаяся энергия есть

$$E(t) = \frac{1}{2}\int (u_x^2 + u_t^2)\, dx + \frac{1}{n+1}\int u^{n+1}\, dx.$$

Если n четно, то, выбирая $u_0(x) \leqslant 0$, $v_0(x) \leqslant 0$ (т. е. обеспечивая выполнение (B)) и считая u_0 достаточно большим по абсолютной величине, мы можем получить $E(0) \leqslant 0$, и тогда решение уйдет на бесконечность за конечное время. Если, с другой стороны, n нечетно, то $E(t)$ всегда больше или равно нулю, так что предыдущее рассуждение не проходит. Но это и не удивительно, так как случай $-u^3$ есть как раз одномерный аналог с нулевой массой уравнения (X.138), для которого мы доказали существование глобального решения.

X.14. Методы гильбертова пространства в классической механике

В этом последнем разделе, посвященном вопросу о существовании динамики, мы хотим кратко описать подход к классической механике, основанный на методах пространства L^2, сравнить его с квантовой механикой и рассмотреть его недостатки. Здесь мы будем иметь дело с системами, фазовое пространство которых есть $\mathbb{R}^{6N}$ (или $\mathbb{R}^{6N}$ с некоторыми исключенными сингулярными множествами); обсуждение более общих симплектических многообразий отложим до Замечаний.

Начнем с формальных элементов этой теории. В $\mathbb{R}^{6N}$ имеется избранная система координат p_i, q_i $(i=1, \ldots, 3N)$, и точка в этом **фазовом пространстве** движется в соответствии с уравнениями движения

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{X.153}$$

где H — энергия. В частности, консервативная ньютонова система

$$m_i \ddot{q}_i(t) = F_i(q_1, \ldots, q_{3N})$$

с

$$F_i(q) = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

имеет форму (X.153), если $H = \sum_{i=1}^{3N} (2m_i)^{-1} p_i^2 + V$.

В общем случае (X.153) есть нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение в конечномерном векторном пространстве. Существует стандартный метод представления такой системы в виде *линейного* уравнения в бесконечномерном пространстве. Суть в том, что действие переносится с точек на функции. Пусть $\omega(q_0, p_0, t) = \langle q(t), p(t) \rangle$, где $\langle q(t), p(t) \rangle$ есть решение уравнения (X.153) с начальными данными $q(0)=q_0$, $p(0)=p_0$. Тогда ω отображает $\mathbb{R}^{6N+1}$ в $\mathbb{R}^{6N}$. Положим

$$(U_t f)(q, p) = f(\omega(q, p; t)), \tag{X.154}$$

где f — комплекснозначная функция на $\mathbb{R}^{6N}$. Имеем $U_t U_s = U_{t+s}$. Мы можем формально вычислить инфинитезимальный генератор $i\, dU_t/dt$:

$$\left.\frac{d(U_t f)}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \{f, H\} \tag{X.155}$$

согласно (X.153), где

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

есть скобка Пуассона. Очевидно, что

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \tag{X.156}$$

а интегрирование по частям показывает, что

$$\int h \{f, g\}\, d^{3N} p\, d^{3N} q = \int \{h, f\}\, g d^{3N} p\, d^{3N} q, \tag{X.157}$$

если $f, g, h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{6N})$.

Эти предварительные формальные манипуляции подсказывают следующее

Определение. Для данной произвольной локально интегрируемой функции $H(p, q)$ на $\mathbb{R}^{6N}$ назовем **формой Лиувилля** квадратичную форму на $L^2(\mathbb{R}^{6N}, d^{3N} p\, d^{3N} q)$ с областью определения $Q(l) = C_0^\infty(\mathbb{R}^{6N})$, заданную формулой

$$l(f, g) = \int \{\bar{f}, g\}\, H d^{3N} p\, d^{3N} q. \tag{X.158}$$

Если H есть C^1-функция, определим **оператор Лиувилля** на $C_0^\infty(\mathbb{R}^{6N})$, полагая

$$Lf = \{f, H\}. \tag{X.159}$$

Пользуясь (X.156) и (X.157), легко доказать (задача 78) следующее

Предложение.

(a) Форма Лиувилля кососимметрична, т. е.

$$l(f, g) = -\overline{l(g, f)}. \tag{X.160}$$

(b) Если $H \in C^1$ и $f, g \in D(L)$, то

$$(f, Lg) = l(f, g).$$

(c) $-iL$ есть симметрический оператор.

Если нам известен факт *глобального* существования и единственности решений классического обыкновенного дифференциального уравнения (X.153), то можно сказать больше:

Теорема X.78. Пусть H есть C^1-функция. Допустим, что для любых q_0, p_0 существует единственная C^1-функция $\omega(q_0, p_0; t)$ из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^{6N}$, удовлетворяющая (X.153) с начальным условием $\omega(q_0, p_0; 0) = \langle q_0, p_0 \rangle$. Допустим, что ω: $\mathbb{R}^{6N+1} \to \mathbb{R}^{6N}$ есть C^1-функция. Тогда U_t — унитарная однопараметрическая группа с инфинитезимальным генератором $-i\bar{L}$. Более того, $-iL$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^{6N})$.

Утверждение об унитарности U_t называется **теоремой Лиувилля.**

Доказательство. Пусть $D = C_0^1(\mathbb{R}^{6N})$. При помощи рассуждений, основанных на использовании аппроксимативной единицы (см. обсуждение в § VIII.1), легко показать, что $D \subset D(\bar{L})$ и что $\bar{L}f = \{f, H\}$ для любого $f \in D$. Поэтому $\bar{L}$ кососимметричен на D. Далее, так как ω по условию лежит в C^1, то $U_t f$ лежит в C^1 при каждом фиксированном t. Так как $\omega(\cdot, \cdot; t)$ — однопараметрическая группа отображений $\mathbb{R}^6$ в $\mathbb{R}^6$, то

$$\{\langle p, q \rangle \mid \omega(p, q; t) \in \operatorname{supp} f\} = \{\omega(p, q; -t) \mid \langle p, q \rangle \in \operatorname{supp} f\}$$

компактно для $f \in D$ как непрерывный образ компактного множества. Значит, семейство отображений U_t, определенных на D, есть однопараметрическая группа операторов из D в D. Более того, для любой f из D

$$\frac{d}{dt} U_t f \Big|_{t=0} = \{f, H\} = \bar{L}f. \tag{X.161}$$

Чтобы в этом убедиться, заметим, что

$$t^{-1}[U_t f(q, p) - f(q, p)] - \{f, H\}(q, p) = \\ = \frac{f(\omega(p, q; t)) - f(\omega(p, q; 0))}{t} - \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

сходится к нулю поточечно в силу правила дифференцирования сложных функций. Более того, так как f имеет компактный носитель и обе функции f и ω равномерно удовлетворяют условию Липшица на компактных множествах, можно мажорировать $t^{-1}(U_t f - f)$ функцией из L^2. Тогда по теореме о мажорированной сходимости

$$\| t^{-1}(U_t f - f) - \{f, H\} \|_2 \to 0,$$

откуда получаем (X.161).

Из кососимметричности L следует, что $\frac{d}{dt} \| U_t f \|^2 = 0$, поэтому U_t ограничен на D и $\| U_t f \| = \| f \|$. Значит, U_t продолжается до унитарного оператора на $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R}^{6N})$. Далее, U_t задается посредством (X.154) на D и каждая $f\in\mathcal{H}$ может быть аппроксимирована функциями $f_n\in D$ так, что $f_n\to f$ поточечно почти всюду; поэтому U_t задается с помощью (X.154) на всем $\mathcal{H}$. Так как функция $t\to U_tf$ непрерывна для $f\in C_0^1$, она непрерывна на $\mathcal{H}$. Наконец, в силу инвариантности D относительно U_t, равенства (X.161) и теоремы VIII.11, $-i\overline{L}$ самосопряжен в существенном на D и является инфинитезимальным генератором группы U_t. ∎

К сожалению, обычно нелегко доказать, что классические уравнения движения имеют глобальные решения, хотя если потенциал V гладкий и уходит на $+\infty$ при $|x|\to\infty$, то ясно, что кривые, изображающие решение, должны оставаться ограниченными, так что глобальные решения существуют. Мы сейчас увидим, как доказать глобальное существование для гладких V, которые не слишком плохо ведут себя на бесконечности. Однако многие представляющие интерес потенциалы V обладают сингулярностями при конечных q, и уравнения движения нарушаются из-за «столкновений». В таких случаях естественно требовать глобального существования для почти всех начальных условий, но такая задача не решена даже для чисто кулоновых сил при $N\geqslant 4$. Потерпев здесь неудачу, можно было бы попробовать доказать самосопряженность в существенном оператора $-iL$ на каком-нибудь подходящем множестве, скажем $C_0^\infty(M)$, где M — плотное множество, полученное выкидыванием из $\mathbb{R}^n$ сингулярных точек. Но и эта задача не решена!

Интересно выяснить, почему задачи самосопряженности настолько легче решаются в квантовой механике. К тому есть несколько оснований; мы начнем с самого главного.

(1) В обычном случае, когда $H=p^2+V(q)$, $-iL$ *никогда* не ограничен снизу (или сверху). В самом деле, положим

$$(\theta f)(p,\ q)=f(-p,\ q).$$

Тогда

$$\theta L\theta^{-1}=-L.$$

Это в точности отражает тот факт, что $\omega(-p,\ q;\ t)=\omega(p,\ q;\ -t)$ («инвариантность относительно обращения времени»), или $\theta(iL)\theta^{-1}=-iL$. Но раз $-iL$ не ограничен, он не может быть и полуограниченным. Если мы определим C формулой

$$Cf=\overline{\theta f},$$

то C есть комплексное сопряжение и $C(-iL)C^{-1}=-iL$, так что $-iL$ имеет самосопряженные расширения в силу теоремы фон Неймана (теорема X.3).

Сравним это положение с квантовой механикой, где $Cf=\bar{f}$ и $CHC^{-1}=H$, но где не существует вещественной линейной θ со свойством $\theta H\theta^{-1}=-H$, вынуждающим H быть неограниченным одновременно и сверху и снизу.

Заметим, что в обоих случаях $CqC^{-1}=q$, $CpC^{-1}=-p$.

(2) Между p и q нет никакой зависимости. Поэтому если V не ограничен снизу, то этим свойством обладает и $H(p, q)$, тогда как в квантовой теории оператор энергии может быть ограниченным снизу вследствие принципа неопределенности.

(3) В оператор энергии $-\Delta+V$ входит только V, тогда как в L входят производные V. Поэтому сингулярности в L становятся только хуже, так что, например, в кулоновом случае $C_0^\infty\subset D(H_{\text{quantum}})$, но $C_0^\infty\not\subset D(L)$.

В заключение приведем одну элементарную теорему существования для системы (X.153), из которой следует кососопряженность L в некоторых случаях; ее основная идея уже применялась нами не раз (см. дополнение к § X.1 и § X.13) и является классическим аналогом коммутаторной теоремы Нельсона (см. пример 4 в § X.5).

Теорема X.79. Пусть V есть C^2-функция на $\mathbb{R}^{3N}$ и $|\operatorname{grad} V(q)|\leqslant C(q^2+1)^{1/2}$ с подходящей константой C. Пусть $H(p, q)=\sum_{i,j=1}^{3N} a_{ij}p_ip_j+V(q)$, где a — строго положительно определенная матрица. Тогда для любого $\langle p_0, q_0\rangle\in\mathbb{R}^{6N}$ существует единственная C^1-функция $\omega(p_0, q_0; t)$ из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^{6N}$, удовлетворяющая (X.153) с начальным условием $\langle p_0, q_0\rangle$. Более того, $\omega(p_0, q_0; t)$ есть C^1-отображение $\mathbb{R}^{6N+1}$ в $\mathbb{R}^{6N}$.

Доказательство. Поскольку $V\in C^2$, функции в левой части (X.153) равномерно удовлетворяют условию Липшица и равномерно ограничены на компактных подмножествах $\mathbb{R}^{6N}$. Значит, для каждого A существует такое $t(A)>0$, что если $p_0^2+q_0^2+1\leqslant A$, то (X.153) можно решить для $|t|<t(A)$; см. § V.6. Фиксируем теперь начальные условия $\langle p_0, q_0\rangle$. Пусть $(-T_0, T_1)$ — максимальный интервал, на котором можно решить (X.153) с начальным условием $\langle p_0, q_0\rangle$. Мы покажем, что T_1 есть ∞. В самом деле, допустим, что это не так. Для $0\leqslant t<T_1$ положим

$$N(t)=p(t)^2+q(t)^2+1.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\dot N(t)&=2p\dot p+2q\dot q\leqslant\\&\leqslant 2|p(t)||\operatorname{grad} V(q(t))|+2\|a\||p(t)||q(t)|\leqslant\\&\leqslant 2(C+\|a\|)(q(t)^2+1)^{1/2}|p(t)|\leqslant(C+\|a\|)N(t).\end{aligned}$$

Отсюда $N(t) \leqslant N(0)\exp[(C+\|a\|)t]$ при всех $t>0$. Пусть t_0 — это $t(A)$ для $A=N(0)\exp[(C+\|a\|)T_1]$. Выберем $t \in (T_1-t_0, T_1)$. Тогда можно решить (X.153) с начальным условием $\langle p(t), q(t)\rangle$. Сшивая это решение с уже построенным решением, мы получим решение в интервале $(-T_0, t+t_0)$, что противоречит максимальности. Значит, $T_1=\infty$ и аналогично $T_0=\infty$.

Согласно методам § X.13, ω принадлежит C^1 в области, полученной с помощью однократного применения принципа сжимающих отображений. При помощи тех же рассуждений, что и выше, любое t может быть достигнуто посредством конечнократного применения принципа сжимающих отображений (со все бóльшими начальными временами). ∎

Следствие. При условиях теоремы X.79 оператор Лиувилля L кососопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$, т. е. $L^{**}=-L^*$.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ X.1. Центральная теорема этого раздела (теорема X.2) была доказана Дж. фон Нейманом в работе: J. von Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Math. Ann.*, **102** (1929—1930), 49—131. Приведенное нами доказательство заимствовано из книги Н. Данфорда и Дж. Шварца, Линейные операторы, т. II, «Мир», М., 1966, которые отмечают, что их доказательство во многом совпадает с подходом, развитым Калкином в статье: J. Calkin, Abstract symmetric boundary conditions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 45 (1939), 369—442. В первоначальном подходе фон Неймана важную роль играло преобразование Кэли симметрического оператора A; оно формально определяется как $V=(A-i)(A+i)^{-1}$. Некоторые аспекты доказательства становятся более ясными на языке преобразований Кэли, однако связь с граничной задачей затемняется. Доказательство с использованием преобразования Кэли состоит из следующих главных элементов: (i) V определяется как отображение из $\overline{\operatorname{Ran}(A+i)}$ в $\overline{\operatorname{Ran}(A-i)}$, и можно показать, что V есть частичная изометрия; (ii) индексы дефекта A суть в точности коразмерности начального и конечного подпространства отображения V; (iii) замкнутые симметрические расширения A находятся во взаимно однозначном соответствии с расширениями V, являющимися частичными изометриями. Самосопряженные расширения находятся во взаимно однозначном соответствии с унитарными расширениями V. Унитарные расширения V, очевидно, характеризуются произвольным унитарным отображением из $D(V)^\perp$ в $\operatorname{Ran}(V)^\perp$. Таким образом, мы приходим к выводу, что самосопряженные расширения A существуют только тогда, когда $D(V)=\overline{\operatorname{Ran}(A+i)}$ и $\operatorname{Ran} V=\overline{\operatorname{Ran}(A-i)}$ имеют одинаковые коразмерности n, и что эти расширения естественным способом параметризуются унитарными отображениями из одного n-мерного пространства в другое. Дополнительный материал о теории расширений с точки зрения преобразования Кэли см. в книге Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», М., 1966. Обсуждение «физической важности» самосопряженности содержится в статье: A. S. Wightman, Introduction to some aspects of the relativistic dynamics of quantized fields, in High Energy Electromagnetic Interactions and Field Theory (M. Levy, ed.), Gordon and Breach, New York, 1967. Литературу о проблеме моментов см. в Замечаниях к § X.6.

Имеется другое доказательство теоремы X.3, принадлежащее, по существу, Галиндо (A. Galindo, On the existence of J-self-adjoint extensions of J-symmetric operators with adjoint, *Comm. Pure Appl. Math.*, **15** (1962), 423—425). Мы наметим это доказательство, которое обходится без теории самосопряженных расширений (ценой применения леммы Цорна). Пусть A удовлетворяет условиям теоремы X.3. Тогда по лемме Цорна A имеет расширение B, обладающее такими тремя свойствами:

(i) $CB=BC$,

(ii) $B\subset B^*$,

(iii) B максимален по отношению к условиям (i) и (ii).

Допустим, что $B\neq B^*$. Тогда можно найти такую ненулевую пару $\langle\varphi, \psi\rangle\in\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$, что

(iv) $\langle\varphi, \psi\rangle\in\Gamma(B^*)\cap\Gamma(B)^{\perp}$.

Так как $C\oplus C$ оставляет и $\Gamma(B)$, и $\Gamma(B^*)$ инвариантными (вследствие (i)), то $\langle(I+C)\varphi, (I+C)\psi\rangle$ и $\langle i(I-C)\varphi, i(I-C)\psi\rangle$ лежат в $\Gamma(B^*)\cap\Gamma(B)^{\perp}$ и по крайней мере одна из этих пар ненулевая. Поэтому можно предположить, что

(v) $\langle C\varphi, C\psi\rangle=\langle\varphi, \psi\rangle$.

Пусть $\tilde\Gamma=\Gamma(B)\oplus\{\alpha\langle\varphi, \psi\rangle\mid\alpha\in\mathbb{C}\}$. Так как $\tilde\Gamma\subset\Gamma(B^*)$, то $\tilde\Gamma$ — график оператора $\tilde B$. Поскольку $C\oplus C$ оставляет $\tilde\Gamma$ поточечно инвариантным, $\tilde B$ удовлетворяет (i). Более того, так как $\langle\varphi, \psi\rangle\in\Gamma(B)^{\perp}$, то получаем, что для любого $\eta\in D(B)$

$$(\varphi+\eta, \tilde B(\varphi+\eta))=(\varphi, \psi)+(\eta, B\eta).$$

В силу (v), (φ, ψ) вещественно, а в силу (ii), $(\eta, B\eta)$ вещественно, поэтому $\tilde B$ симметричен. А так как это находится в противоречии с (iii), то заключаем, что $B=B^*$ и A имеет самосопряженные расширения.

Кстати, из приведенного доказательства видно, что в предположениях теоремы X.3 A имеет самосопряженные расширения, коммутирующие с C; это следует также из более детального изучения расширений A. Существование таких расширений важно потому, что отсюда следует, что *в вещественном гильбертовом пространстве каждый симметрический оператор имеет самосопряженные расширения*. Действительно, $\mathcal{H}=\mathcal{H}_{\mathbb{R}}\oplus\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ можно рассматривать как комплексное гильбертово пространство с $i\langle\varphi, \psi\rangle=\langle-\psi, \varphi\rangle$. Положив $C\langle\varphi, \psi\rangle=\langle\varphi, -\psi\rangle$, мы видим, что каждый комплексный линейный оператор в $\mathcal{H}$, коммутирующий с C, имеет вид $A\oplus A$, где $A\colon \mathcal{H}_{\mathbb{R}}\to\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$. Это обстоятельство вместе с теоремой X.3 в сильной форме приводит к указанному результату о симметрических операторах в вещественных гильбертовых пространствах. Дальнейшие рассуждения см. в задаче 81.

Изложение в дополнении к этому разделу следует в общих чертах неопубликованным лекциям Нельсона. Дальнейшее рассмотрение самосопряженности обыкновенных дифференциальных операторов можно найти в книге: Э. Коддингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958, и в гл. XIII указанной выше книги Данфорда и Шварца.

Обширные заметки об истории развития теории самосопряженности можно найти во втором томе книги Данфорда и Шварца; мы ограничимся только упоминанием, что теория предельных точек — предельных окружностей (теоремы X.6 и X.7) принадлежит Г. Вейлю, который высказал множество идей, важных для теории расширения неограниченных операторов, за много лет до построения фон Нейманом общей теории. См. H. Weyl, Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* (1909), 37—63; (1910), 442—467; Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, *Math. Ann.*, **68** (1910), 220—269. Эти статьи можно найти также в Gesammelte Abhandlungen, B. I, Springer-Verlag, Berlin, 1968. Терминология предельных точек—предельных окружностей происходит из идеи рассматривать задачу самосопряженности для оператора $-d^2/dx^2+V(x)$ на (a, ∞) как предел соответствующих задач на интервалах (a, b) при $b \to \infty$. Пусть φ и ψ—решения уравнения $-\varphi''(x)+V(x)\varphi(x)=i\varphi(x)$ на (a, ∞), удовлетворяющие условиям $\varphi(a)=\psi'(a)=0$, $-\varphi'(a)=\psi(a)=1$. При фиксированном b множество тех $z \in \mathbb{C}$, для которых $\eta=\varphi+z\psi$ удовлетворяет условию $(\cos\alpha)\eta(b)+(\sin\alpha)\eta'(b)=0$ с некоторым $\alpha \in [0, 2\pi)$, образует окружность C_b. При $b \to \infty$ эта окружность либо сходится к некоторой предельной окружности, либо стягивается в некоторую предельную точку. В первом случае оба решения уравнения $-\varphi''(x)+V(x)\varphi(x)=i\varphi(x)$ принадлежат L^2 вблизи ∞; в последнем случае—только одно. Этот подход подробно рассматривается в книге Коддингтона и Левинсона.

Теорема X.8 появилась в статье: N. Levinson, Criteria for the limit-point case for second order linear differential operators, *Časopis Pěst. Math. Fys.*, 74 (1949), 17—20. Заметим, что теорема X.7 имеет аналог для более общих интервалов, чем $[0, \infty)$; именно, если $V(x)$ непрерывен на (a, b), причем $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, то $-d^2/dx^2+V(x)$ отвечает случаю предельной точки и в a, и в b тогда и только тогда, когда $-d^2/dx^2+V(x)$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(a, b)$. В частности, можно воспользоваться теоремой X.8 и получить другое доказательство в задаче 24 для одномерного случая. Теорема X.9 доказана А. Винтнером в статьях: A. Wintner, On the Normalization of Characteristic Differentials in Continuous Spectra, *Phys. Rev.*, **72** (1947), 516—517, и The Schwartzian derivative and the approximation method of Brillouin, *Quart. Appl. Math.*, **16** (1958), 82—86. Доказательство критерия Винтнера и многие другие критерии можно найти во втором томе Данфорда и Шварца. Случай предельной точки в теореме X.10 принадлежит Фридрихсу (K. Friedrichs, Über die ausgezeichnete Randbedingung in der Spektraltheorie der halbbeschränkten gewöhnlichen Differentialoperatoren zweiter Ordnung, *Math. Ann.*, **112** (1935/36), 1—23), а случай предельной окружности—Сирсу (D. Sears, On the solutions of a linear second order differential equation which are of integrable square, *J. London Math. Soc.*, **24** (1949), 207—215). Наше доказательство родственно одному общему методу Курса (H. Kurss, A limit-point criterion for non-oscillatory Sturm—Liouville differential operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18** (1967), 445—449 (см. задачу 8)).

Первые примеры потенциалов, которые классически не полны, но квантовомеханически полны, были даны в цитированной выше статье Сирса 1949 г. Приведенные здесь примеры взяты из статьи: J. Rauch and M. Reed, Two examples illustrating the differences between classical and quantum mechanics, *Comm. Math. Phys.*, **29** (1973), 105—111, и основаны на советах Нельсона. X. Кальф любезно предоставил авторам свой детальный анализ примера Сирса. Пусть V_{ab}—потенциал на $(0, \infty)$, заданный в виде

$$V_{ab}(x)=\frac{2}{x^2}-9x^4(a-2b\cos(2x^3)),$$

где a и b лежат в интервале $(0, \infty)$. Тогда $-\varphi''+V_{ab}\varphi=0$ есть уравнение Матье, общее решение которого имеет вид

$$\frac{1}{x}\left(c_1e^{\mu x^3}\varphi_{ab}(x^3)+c_2e^{-\mu x^3}\varphi_{ab}(-x^3)\right),$$

где показатель μ зависит от a и b, а $\varphi_{ab}(x)$ есть C^∞-функция с периодом π, кроме тех случаев, когда $\langle a, b\rangle$ отвечает точке на одной из кривых на рис. X.9.

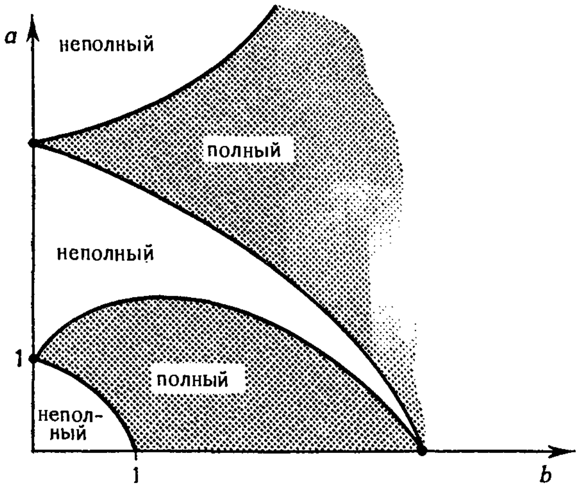

Рис. X.9. Полнота V_{ab} в квантовомеханическом случае.

Показатель μ чисто мнимый, если $\langle a, b\rangle$ принадлежит светлым областям на рисунке, и вещественный, если $\langle a, b\rangle$ лежит в темных областях. Ясно, что V_{ab} в нуле полон и в классическом, и в квантовомеханическом смысле. На бесконечности V_{ab} полон в квантовомеханическом смысле, если $\langle a, b\rangle$ попадает в темную область, так как в этом случае μ вещественно и, следовательно, одно из решений не лежит в L^2 вблизи бесконечности. Однако если $\langle a, b\rangle$ попадает в светлую область, то V_{ab} квантовомеханически не полон, так как оба решения принадлежат L^2 вблизи бесконечности. В классическом случае если $2b < a$, то $V_{ab}(x) \leqslant -bx^4$ вблизи бесконечности, так что классическая частица может уходить на бесконечность за конечное время, т. е. V_{ab} классически не полон. Но, с другой стороны, если $2b > a$, то пики потенциала становятся все выше и выше, так что V классически полон. С функциями Матье можно познакомиться по книгам: N. McLachlan, Theory and Applications of Mathieu functions, Oxford Univ. Press, London and New York, 1947, pp. 40, 98, или J. Meixner, F. Schäfke, Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Springer-Verlag, Berlin, 1954, S. 132.

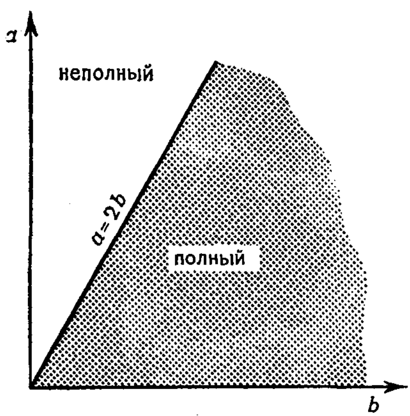

Рис. X.10. Полнота V_{ab} в классическом случае.

Многие критерии самосопряженности в существенном обыкновенных дифференциальных операторов, которые можно вывести из теории Вейля, допускают обобщения на дифференциальные операторы в частных производных. Существует аналог предложения 2, играющий важную роль в этих обобщениях; таким аналогом служит одна теорема Вейнгольца и Нильсона (E. Weinholtz, Bemerkungen über elliptische Differentialoperatoren, *Arch. der Math.*, 10 (1959), 126—133;

N. Nilsson, Essential self-adjointness and the spectral resolution of Hamiltonian operators, *Kungl. Fys. Sällsk. i Lund Förh*, **29** (1959)). Эта техника сыграла свою роль в различных многомерных обобщениях теоремы X.8 (см. Замечания к § X.5).

Во многих случаях результаты, получаемые методами Вейля, можно вывести проще и в большей общности при помощи методов § X.4 и X.5.

Рассмотренные нами примеры, когда классические и квантовомеханические условия полноты совпадают, требовали глобальных условий, т. е. условий, заданных всюду. Однако естественно ожидать, что частица может быть квантовомеханически захвачена набором достаточно широких барьеров, независимо от того, что делается между ними. Характерный пример такого положения в одномерном случае дает следующая теорема Р. С. Исмагилова (Об условиях самосопряженности дифференциальных операторов высшего порядка, *ДАН СССР*, **142** (1962), 1239—1242).

Теорема. Пусть $V(x)$ — непрерывная функция на $[0, \infty)$, и пусть существует последовательность интервалов (a_n, b_n), $b_n < a_{n+1}$, таких, что
(a) $V(x) \geqslant -(b_n - a_n)^{-2}$ при $x \in (a_n, b_n)$,
(b) $\sum (b_n - a_n)^2 = \infty$.

Тогда $-d^2/dx^2 + V(x)$ относится к случаю предельной точки на бесконечности, независимо от поведения $V(x)$ вне интервалов (a_n, b_n).

Отметим, что из условий (a) и (b) следует, что время классического прохождения через объединение интервалов (a_n, b_n) бесконечно.

Первые результаты этого общего типа, требующие ограничений только на интервалы, принадлежат Ф. Хартману (P. Hartman, The number of L^2-solutions of $x'' + q(t)x = 0$, *Amer. J. Math.*, **43** (1951), 635—645). Другие результаты, относящиеся к одномерному случаю, можно найти в статьях: M.S.P.Eastham, On a limit-point method of Hartman, *Bull. London Math. Soc.*, **4** (1972), 340—344, и Н. П. Купцов, Об условиях несамосопряженности линейного дифференциального оператора второго порядка, *ДАН СССР*, **138** (1961), 767—770. Теоремы такого рода, применимые к нецентральным потенциалам в многомерном случае, можно найти в статье: M.S.P. Eastham, W.D. Evans and J. B. McLeod, The Essential Self-Adjointness of Schrödinger-Type Operators, *Arch. Rational Mech. Anal.* Эти авторы приводят также примеры таких условий на V в трубе $\Omega \times [0, \infty) \subset \mathbb{R}^n$ (Ω ограничено и открыто в $\mathbb{R}^{n-1}$), что если V удовлетворяет этим условиям, то $-\Delta + V$ не будет самосопряжен в существенном на C_0^∞, независимо от поведения V вне трубы. Интуитивно это означает, что частица в этой трубе уходит на бесконечность за конечное время.

Оператор Лапласа — Бельтрами, введенный в примере 6, рассматривается в книге Мюллера: C. Müller, Spherical Harmonics, Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics, 17 (1966). В двумерном случае $B = d^2/d\theta^2$, $k_l = -l^2$ и каждому $l > 0$ отвечают две собственные функции, а именно $e^{\pm il\theta}$, а собственному значению $l = 0$ — постоянная функция. Утверждение о самосопряженности следует из того, что $\{e^{il\theta}\}_{l=-\infty}^{\infty}$ образуют базис в $L^2(0, 2\pi)$. В трехмерном случае

$$(Bg)(\theta, \phi) = (\sin\theta)^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta) \frac{\partial g}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\phi} (\sin\theta)^{-1} \frac{\partial g}{\partial\phi} \right\},$$

где θ и ϕ — обычные угловые переменные в сферических координатах. В этом случае $k_l = -l(l+1)$ и соответствующее собственное подпространство имеет размерность $2l+1$. В s-мерном случае $k_l = -l(l+s-2)$. Оператор B тесно связан с теорией представлений группы $SO(s)$. В частности, полнота собственных функций B связана с теоремой Петера — Вейля (см. гл. XIV).

§ X.2. Теорема X.12 принадлежит Ф. Реллиху (F. Rellich, Störungstheorie der Spektralzerlegung, II, *Math. Ann.*, **116** (1939), 555—570). Многочисленные приложения и обобщения теоремы Като—Реллиха можно найти в книге: Т. Като, Теория возмущений линейных операторов, «Мир», М., 1972. В частности, теорема X.13 и специальный случай теоремы X.14, где условие (X.21a) заменено более сильным (X.21b) (или (X.21c), что эквивалентно), появились именно в этой книге. Теорема X.14 доказана Вюстом: R. Wüst, Generalizations of Rellich's theorem on perturbations cf (essentially) self-adjoint operators, *Math. Z.*, **119** (1971), 276—280; дальнейшее обсуждение см. в работе R. Wüst, Holomorphic operator families and stability of self-adjointness, *Math. Z.*, **125** (1972), 349—358.

Приложение теоремы Реллиха к гамильтонианам атомов принадлежит Като: T. Kato, Fundamental properties of Hamiltonian operators of Schrödinger type, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70** (1951), 195—211. Эта статья оказалась поворотным моментом в математической физике по двум причинам. Во-первых, доказательство самосопряженности было необходимым предварительным условием для того, чтобы приступить к задачам спектрального анализа и теории рассеяния, которые всегда занимали математическую физику. Во-вторых, эта статья привлекла внимание к конкретным системам, а не к вопросам оснований.

Теорема КЛМН в различных формах была доказана в работах: T. Kato, Quadratic forms in Hilbert space and asymptotic perturbation series, Technical report No.7, Univ. of California, 1955; J. Lions, Équations Différentielles operationelles et Problèmes aux Limites, Springer-Verlag, Berlin, 1961, Ch. II, Sec. 1, и P. Lax and A. Milgram, Parabolic Equations, in Contributions to the theory of partial differential equations, Ann. Math. Study, **33**, Princeton, N. J., 1954. Интерпретация этой теоремы в терминах шкалы пространств впервые подчеркнута Нельсоном: E. Nelson, Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.*, **5** (1964), 1190—1197.

Записанная в виде операторных неравенств теорема X.18 несколько слабее, чем утверждение: «Если $0 \leqslant A^2 \leqslant B^2$, то $0 \leqslant A \leqslant B$», которое известно под названием монотонности квадратного корня. Это частный случай следующей теоремы Лёвнера (K. Löwner, Über monotone Matrixfunktionen, *Math. Z.*, **38** (1934), 177—216):

Теорема. Необходимое и достаточное условие того, что непрерывная вещественнозначная функция f на $(0, \infty)$ обладает свойством $f(A) \leqslant f(B)$ для всех пар самосопряженных операторов A, B, таких, что $0 < A \leqslant B$, состоит в том, что f есть сужение на $(0, \infty)$ некоторой функции f, аналитической в $\mathbb{C}\diagdown(-\infty, 0]$ со свойством $\operatorname{Im} f(z) \geqslant 0$ при всех z с $\operatorname{Im} z > 0$.

«Физическая» аргументация, позволяющая думать, что корректное квантовомеханическое описание для потенциалов с сингулярностью $r^{-\alpha}$ можно развить только при $0 < \alpha < 2$, основана на следующих эвристических соображениях: во-первых, основное свойство, которое требуется для не патологической физики, состоит в полуограниченности $H_0 + V$; во-вторых, если волновая функция сосредоточена в области размера Δr возле отрицательной сингулярности $r^{-\alpha}$, то по соотношению неопределенностей математическое ожидание H_0 будет величиной порядка $(\text{const})(\Delta p)^2 \approx (\text{const})(\Delta r)^{-2}$, в то время как математическое ожидание V будет величиной порядка $(\text{const})(\Delta r)^{-\alpha}$. Так как $cx^{-2} - dx^{-\alpha}$ $(c, d > 0)$ полуограничено лишь тогда, когда $0 < \alpha \leqslant 2$, то мы ожидаем, что разумная физика кончается при $\alpha = 2$.

Неравенство, которое мы назвали леммой принципа неопределенности, хорошо известно; см., например, H. Kalf and J. Walter, Strongly singular potentials and essential self-adjointness of singular elliptic operators in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \diagdown \{0\})$, *J. Functional Analysis*, **10** (1972), 114—130, где приводятся исторические заметки. То, что $r^{-2} < c\Delta$ с некоторой константой c, есть частный случай одной теоремы того же типа, что и теорема X.21: если $s > 3$ и

$V\in L_w^{s/2}$, то V есть Δ-форма, ограниченная величиной, не превосходящей $c\|V\|_{s/2,\,w}$.

Изложение большей части операторной теории, необходимой для квантовой механики гамильтонианов с потенциалами Рольника, и, в частности, доказательство теоремы X.19 можно найти в работе: B. Simon, Quantum Mechanics for Hamiltonians Defined as Quadratic Forms, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1971. Читатель найдет там также историю открытия и переоткрытия условий Рольника различными авторами.

Распространение теоремы Като на n измерений обсуждалось многими авторами. Теорема X.20 появилась в статье: F. Brownell, A note on Kato's uniqueness criterion for Schrödinger operator selfadjoint extensions, *Pacific J. Math.*, 9 (1959), 953—973; наше доказательство заимствовано из приложения к работе: E. Nelson, Feynman integrals and the Schrödinger equation, *J. Math. Phys.*, 5 (1964), 332—343. Очень близкое обсуждение n-мерных потенциалов уже было раньше у Штуммеля: F. Stummel, Singuläre elliptische Differentialoperatoren in Hilbertschenräumen, *Math. Ann.*, 132 (1956), 150—176. Результаты Штуммеля были сформулированы не на языке L^p-пространств, а с помощью условий вида

$$\int\limits_{|x-y|\leqslant 1} |x-y|^{-s+4-\alpha}\,|V(y)|^2\,dy\leqslant C \text{ при всех } x$$

для некоторого $\alpha>0$. В большей части литературы об операторах Шредингера пользуются этими «условиями Штуммеля» и соответствующими «пространствами Штуммеля» Q_α.

Прямое доказательство расширения теоремы X.20 на граничный случай $p=s/2$ ($s\geqslant 5$) дано в статье: W. Faris, The product formula for semi-groups defined by Friedrichs extensions, *Pacific J. Math.*, 22 (1967), 47—70. Это доказательство основано на теореме Соболева о вложении, которая в свою очередь опирается на классическое неравенство Соболева, обсуждавшееся в § IX.4. Теорема Стрихарца в слегка другой форме появилась в его статье: R. Strichartz, Multipliers on Fractional Sobolev Spaces, *J. Math. Mech.*, 16 (1967), 1031—1060. Применимость этой теоремы к операторам Шредингера доказана Нельсоном (не опубликовано).

То что r^{-2} есть Δ-ограниченное возмущение в $\mathbb{R}^s$, если $s\geqslant 5$, следует из прямой операторной оценки классического типа: если $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^s\setminus\{0\})$ и если $a\geqslant -\frac{1}{2}s(s-4)$, то

$$\int |\Delta u|^2\,d^sx\geqslant -a\int \frac{|\nabla u|^2}{|x|^2}\,d^sx+\frac{(s-4)^2}{16}(s^2+4a)\int\frac{|u|^2}{|x|^4}\,d^sx.$$

Это неравенство Реллиха доказано в его книге: F. Rellich, Perturbation theory of eigenvalue problems, Gordon and Breach, New York, 1969; см. также статью Шминке, цитируемую ниже.

Прием Конради и его применение к полевому обобщению ангармонического осциллятора опубликованы в статье: J. Konrady, Almost positive perturbations of positive self-adjoint operators, *Comm. Math. Phys.*, 22 (1971), 295—299. Приблизительно тогда же этот метод был независимо открыт Шминке (U.-W. Schmincke, Essential self-adjointness of a Schrödinger operator with strongly singular potential, *Math. Z.*, 124 (1972), 47—50).

§ X.3. В своей исходной статье о самосопряженных расширениях (см. Замечания к § X.1) фон Нейман доказал, что полуограниченный оператор имеет полуограниченные расширения, нижняя грань которых сколь угодно близка к нижней грани исходного оператора. Он высказал предположение, что существуют расширения с той же нижней гранью. Этот факт (теорема X.23) был доказан К. Фридрихсом (K. Friedrichs, Spektraltheorie halbbeschränkter

Operatoren, *Math. Ann.*, **109** (1934), 465—487) и М. Стоуном (M. Stone, in Linear Transformations in Hilbert Spaces and their Applications in Analysis, Amer. Math. Soc. Colloquim Publication **15**, Providence, R.I., 1932). Обсуждение вопроса о том, когда расширение Фридрихса есть единственное расширение с той же нижней гранью (пример 1), см. в работе: E. T. Poulsen, The minimax principle and uniqueness of the Friedrichs extension, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **21** (1969), 508—509. Теорема X.24 и предшествующее предложение принадлежат М. Г. Крейну, Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения, I, *Матем. сб.*, **20** (62) (1947), 431—498. Дальнейшие рассмотрения имеются в статье: B. Simon, The theory of semi-analytic vectors: a new proof of a theorem of Masson and McClary, *Indiana Univ. Math. J.*, **20** (1971), 145—151.

Теорема X.25 доказана впервые в работе: J. von Neumann, Über adjungierte Funktionaloperatoren, *Ann. Math.*, **33** (1932), 249—310.

§ X.4. Неравенство Като получено в работе: T. Kato, Schrödinger Operators with Singular Potentials, *Israel J. Math.*, **13** (1973), 135—148. Теоремы X.28 и X.29 появились там же. Работа Като была отчасти мотивирована статьей: B. Simon, Essential self-adjointness of Schrödinger operators with positive potentials, *Math. Ann.*, **201** (1973), 211—220. Саймон доказал теорему X.28 в более сильных предположениях $V \geqslant 0$, $V \in L^2(\mathbb{R}^n, \exp(-ax^2)\,d^nx)$ с некоторым a. До работы Саймона считалось, что для того, чтобы $-\Delta + V$ был в существенном самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, V должен принадлежать локальному пространству Штуммеля (важно, чтобы V принадлежал L^p_{loc} с некоторым $p > n/2$, если $n \geqslant 4$).

Более слабые варианты теоремы X.28 известны очень давно. В частности, результат о самосопряженности в существенном оператора $-\Delta + V$, если $V \geqslant 0$ и $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, принадлежит Карлеману: T. Carleman, Sur la théorie mathématique de l'équation de Schrödinger, *Ark. Math.*, *Ast.*, *Fys.*, **24B**, No 11 (1934). Этот результат был независимо переоткрыт Джаффе: A. Jaffe, A $\lambda\varphi^4$ Cutoff Field Theory, Princeton Univ. Thesis, Princeton, N. J., 1965. Расширение на некоторые классы сингулярных положительных V было впервые получено Ф. Штуммелем (см. Замечания к § X.2). Пожалуй, наиболее сильные результаты, предшествовавшие статье Като, были получены в работах: H. Stetkaer-Hansen, A generalization of a theorem of Wienholtz concerning essential self-adjointness of singular elliptic operators, *Math. Scand.*, **19** (1966), 108—112, и J. Walter, Note on a paper by Stetkaer-Hansen concerning essential self-adjointness of Schrödinger operators, *Math. Scand.*, **25** (1969), 94—96, где доказаны более сильный результат при $n \leqslant 3$ и более слабая теорема при $n \geqslant 4$.

Теорема X.30 доказана в работе: B. Simon, Essential Self-Adjointness of Schrödinger-Operators with Singular Potentials: A Generalized Kalf—Walter—Schmincke Theorem, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **52** (1973), 44—48. Несколько иное доказательство содержится в статье: H. Kalf, J. Walter, Note on a paper of Simon on the essential self-adjointness of Schrödinger operators with singular potentials, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **52** (1973), 258—260. Саймон обобщил результаты Кальфа и Вальтера (H. Kalf, J. Walter, Strongly singular potentials and essential self-adjointness of singular elliptic operators on $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, *J. Functional Analysis*, **10** (1972), 114—130) и Шминке (U.-W. Schmincke, Essential self-adjointness of a Schrödinger operator with strongly singular potential, *Math. Z.*, **124** (1972), 47—50). Наиболее ранние результаты этого рода принадлежат Йоргенсу (K. Jörgens, Wesentliche Selbstadjungiertheit singulärer elliptischer Differentialoperatoren zweiter Ordnung in $C_0^\infty(G)$, *Math. Scand.*, **15** (1964), 5—17).

Теорема X.31 принадлежит Фари (W. Faris, Essential self-adjointness of operators in ordered Hilbert space, *Comm. Math. Phys.*, **30** (1973), 23—34). Несколько более слабая теорема была ранее доказана Дэвисом (E. B. Davies, Properties of the Green's functions of some Schrödinger operators, *J. London Math. Soc.*, 7 (2) (1973), 473—491).

Первое исчерпывающее исследование операторов Шредингера с магнитным полем содержится в статье Икэбе и Като: T. Ikebe, T. Kato, Uniqueness of the self-adjoint extension of singular elliptic differential operators, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **9** (1962), 77—92. Они доказали теорему типа теоремы X.34, но с более сильными требованиями на V. Сама теорема X.34 заимствована из статьи Като в *Israel Journal*. Като доказал теорему X.33 при более слабом условии $u \in L^1_{\text{loc}}$. Мы упростили доказательство, заметив, что условие $u \in L^2_{\text{loc}}$ достаточно для приложений. Это замечание играет критическую роль в доказательстве теоремы X.35, которое можно найти в статье: B. Simon, Schrödinger operators with singular magnetic vector potentials, *Math. Z.*, **131** (1973), 361—370. В основе этой статьи Саймона лежит усиленный вариант технической леммы, относящейся к теореме X.33. Сходные с теоремой X.35 результаты можно найти в книге Шехтера: M. Schechter, Spectra of Partial Differential Operators, North-Holland, Amsterdam, 1971. До работы Саймона за употребление кулоновой калибровки высказывался Йоргенс, см. K. Jörgens, Über das wesentliche Spektrum elliptischer Differentialoperatoren vom Schrödinger-Typ, Tech. report, Univ. Heidelberg, 1965, и Zur Spektraltheorie der Schrödingeroperatoren, *Math. Z.*, **96** (1967), 355—372.

Теорема X.32 доказана Като (T. Kato, A second look at the essential self-adjointness of the Schrödinger operators).

Более ранние результаты, описывающие область определения расширения Фридрихса, можно найти в работах: K. Friedrichs, Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, II, *Math. Ann.*, **109** (1933/34), 685—713 (исправления в *Math. Ann.*, **110** (1934/35), 777—779), и Über die ausgezeichnete Randbedingung in der Spektraltheorie der halbbeschränkter gewöhnlichen Differentialoperatoren zweiter Ordnung, *Math. Ann.*, **112** (1935/36), 1—23; H. Freudenthal, Über die Friedrichssche Fortsetzung halbbeschränkter Hermitescher Operatoren, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser.*, **39** (1936), 832—833; F. Rellich, Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung, *Math. Ann.*, **122** (1950/51), 343—368; H. Kalf, On the characterization of the Friedrichs extension of ordinary or elliptic differential operators with a strongly singular potential, *J. Functional Analysis*, **10** (1972), 230—250.

§ *X.5*. Коммутаторная теорема появилась в работе Нельсона: E. Nelson, Time-ordered operator products of sharp-time quadratic forms, *J. Funct. Anal.*, **11** (1972), 211—219. До этого сходная теорема была опубликована Глиммом и Джаффе: J. Glimm and A. Jaffe, The $\lambda(\varphi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs, IV: Perturbation of the Hamiltonian, *J. Math. Phys.*, **13** (1972), 1568—1584. Теорема Глимма—Джаффе была слабее, так как требовала ограничений на коммутатор и на двойной коммутатор. И Нельсон, и Глимм — Джаффе были намерены применять эту теорему к задаче о самосопряженности сглаженного оператора поля по схеме примера 3. Статья Нельсона содержит также леммы 1 и 2.

В обеих статьях, и у Нельсона, и у Глимма—Джаффе, доказательства несколько сложнее нашего, и авторы пользуются не совсем стандартной техникой сглаживателей и граф-пределов соответственно. Простое доказательство, которое мы привели, указано в статье: W. Faris and R. Lavine, Commutator and self-adjointness of Hamiltonian operators, *Comm. Math. Phys.*, **35** (1974), 39—48. Авторы дали также доказательство, основанное на интуитивных представлениях примера 4, и применили эту теорию к операторам Шредингера (теорема X.38 и ее следствия) и к операторам Дирака.

Другое доказательство и несколько более общий результат содержатся в статье: O. McBryan, Local generators for the Lorentz group in the $P(\varphi)_2$ model, *Nuovo Cimento*, **18A** (1973), 654—662.

В статье Штуммеля 1956 г. (см. Замечания к § X.2) было доказано, что гамильтониан атома водорода в асимптотически постоянном электрическом поле в существенном самосопряжен.

Более сложные атомы в постоянных полях были впервые рассмотрены в статье Икэбе — Като (см. Замечания к § X.4). Ранее Нильсоном было доказано, что операторы вида $-\Delta+V$ с V *непрерывным* и $V(x)\geqslant -cx^2-d$ в существенном самосопряжены на C_0^∞ (см. Замечания к § X.2). Эти результаты были затем обобщены Хельвигом (B. Hellwig, Ein Kriterium für die Selbstadjungiertheit elliptischer Differentialoperatoren in $\mathbb{R}^n$, *Math. Z.*, **86** (1964), 255—262; A criterion for self-adjointness of singular elliptic differential operators, *J. Math. Anal. Appl.*, **26** (1969), 279—291). В частности, в этих статьях содержится многомерный вариант теоремы X.8.

Второе следствие теоремы X.38 доказано другим методом у Кальфа (H. Kalf, Self-adjointness for strongly singular potentials with a $-|x|^2$ fall-off at infinity, *Math. Z.*, **133** (1973), 249—255.

Для операторов Дирака нет ограничений на скорость роста V на бесконечности. Чернов в статье: P. Chernoff, Essential Self-Adjointness of Powers of Generators of Hyperbolic Equations, *J. Func. Anal.*, **12** (1973), 401—414, заметил, что интуитивно это так и должно быть, ибо релятивистское ограничение $|v|<c$ запрещает уход на бесконечность за конечное время. Сильные результаты, относящиеся к оператору Дирака, читатель может найти в статьях: W. D. Evans, On the Unique Self-Adjoint Extension of the Dirac Operator and the Existence of the Green Matrix, *Proc. London Math. Soc.*, **20** (3) (1970), 537—557; U.-W. Schmincke, Essential Self-Adjointness of Dirac Operators with Strongly Singular Potentials, *Math. Z.*, **126** (1972), 71—81.

§ X.6. Аналитические векторы были введены впервые в контексте представлений групп в работах Хариш-Чандры (Harish-Chandra, Representations of a semi-simple Lie group on a Banach space, I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 185—243) и Картье и Диксмье (P. Cartier et J. Dixmier, Vecteurs analytiques dans les représentations de groupes de Lie, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 131—145). Их применение для исследования отдельных операторов подчеркивал и развивал Нельсон (E. Nelson, Analytic Vectors, *Ann. Math.*, **70** (1959), 572—615). Для заданного непрерывного унитарного представления $U(\cdot)$ группы Ли G на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ Гординг еще раньше построил общую плотную инвариантную область самосопряженности в существенном для всех генераторов, найдя область, которая содержит плотное множество аналитических векторов для всех генераторов. Нельсон доказал также, что если алгебра Ли представляется симметрическими операторами на плотной инвариантной области определения и если эта область содержит плотное множество аналитических векторов, то представление алгебры Ли получается дифференцированием единственного представления соответствующей группы Ли. Эти результаты были далее расширены: см., например, J. Simon, On the integrability of representations of finite-dimensional real Lie algebras, *Comm. Math. Phys.*, **28** (1972), 39—46.

Обобщение результата Нельсона, содержащееся в теореме X.40, принадлежит Нуссбауму (A. Nussbaum, A note on quasi-analytic vectors, *Studia Math.*, **33** (1969), 305—310). Простое доказательство, намеченное в задаче 42, было впервые дано в работе: B. Simon, The theory of semi-analytic vectors: a new proof of a theorem of Masson and McClary, *Indiana Univ. Math. J.*, **20** (1971), 1145—1151.

Лемма Нуссбаума опубликована в его статье Quasi-analytic vectors, *Ark. Mat.*, **6** (1965), 179—191. Нуссбаум ввел обобщение понятия аналитического вектора. Вектор $\varphi \in C^\infty(A)$ называется **квазианалитическим**, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| A^n\varphi \|^{-1/n} = \infty.$$

Аналитический вектор будет квазианалитическим, но обратное не всегда справедливо. Нуссбаум доказал, что замкнутый симметрический оператор, область определения которого содержит плотное множество квазианалитических векторов, самосопряжен. Нуссбаум показал также (в своей статье в *Studia Math.*), что полуограниченный замкнутый симметрический оператор с плотным множеством векторов, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| A^n\varphi \|^{-1/2n} = \infty,$$

самосопряжен. Такие векторы называются **векторами Стильтьеса**. Этот результат был независимо получен в статье: D. Masson and W. McClary, Classes of C^∞-vectors and essential self-adjointness, *J. Functional Analysis*, **10** (1972), 19—32. Обе статьи, Нуссбаума и Массона—Маклари, используют технику проблемы моментов. По-существу, они обращают аргументацию примеров 4 и 6 и при помощи классических результатов о проблеме моментов доказывают, что некоторые из векторов суть векторы единственности. Критический результат, связывающий два эти понятия, содержится в статье Нуссбаума в *Arkiv*: $\varphi \in C^\infty(A)$ есть вектор единственности тогда и только тогда, когда проблема моментов Гамбургера для $a_n = (\varphi, A^n\varphi)$ имеет единственное решение. Связь между самосопряженностью и проблемой моментов восходит к классической монографии Стоуна: M. Stone, Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis, Amer. Math. Soc. Colloquium Publication **XV**, New York (1932). Два общих руководства по проблеме моментов—это: J. Shohat and J. D. Tamarkin, The Problem of Moments, Amer. Math. Soc., New York, 1943, и Ю. В. Воробьев, Метод моментов в прикладной математике, Физматгиз, М., 1958.

§ X.7. Пространство Фока введено В. А. Фоком в статье: V. Fock, Konfigurationsraum und zweite Quantelung, *Z. Phys.*, **75** (1932), 622—647 (перепечатано в сборнике: В. А. Фок, Работы по квантовой теории поля, Изд-во ЛГУ, 1957). Первое доказательство самосопряженности полей в пространстве Фока было опубликовано Куком: J. Cook, The mathematics of second quantization, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), 222—245. Кук доказал непосредственно, что $\varphi(f) \pm i$ и $\pi(f) \pm i$ имеют плотные области значений в F_0.

Абстрактная структура свободных полей подробно рассматривалась в пятидесятые годы Фридрихсом (K. Friedrichs, Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields, Wiley (Interscience), 1953) и Сигалом в ряде работ (см. в особенности I. Segal, Tensor Algebras over Hilbert Spaces, I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **81** (1956), 106—134, где введено Q-пространство). Это привело Сигала к исследованию связи между свободным полем и понятиями теории вероятностей, благодаря чему он, в частности, открыл связь между абстрактными пространствами Фока и винеровыми интегралами по путям.

Обсуждение аксиом Вайтмана см. в § IX.8 и в Замечаниях к этому разделу. Виково упорядочение ввел Вик: G.-C. Wick, The evaluation of the Collision Matrix, *Phys. Rev.*, **80** (1950), 267—272 (русский перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, М., 1954). Общие результаты, относящиеся к свободным полям с виковым упорядочением, можно найти в статье Гординга и Вайтмана: L. Gårding and A. Wightman, Fields as operator-valued distributions in relativistic quantum field theory, *Ann. Phys.*, **16** (1961), 158—176.

Вик также обратил внимание на комбинаторную структуру вакуумных ожиданий свободных полей. В частности, имеют место такие формулы:

$$(\Omega_0, \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)\Omega_0) = 0, \quad \text{если } n \text{ нечетно,}$$

$$(\Omega_0, \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2n})\Omega_0) = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_n \\ i_k < j_k \\ i_1, \dots, j_n \text{ различны}}} (\Omega_0, \varphi(x_{i_1})\varphi(x_{j_1})\Omega_0) \dots (\Omega_0, \varphi(x_{i_n})\varphi(x_{j_n})\Omega_0). \qquad (X.162)$$

Это сложное выражение есть сумма по всем разным способам записи $\{1, \dots, 2N\}$ в виде N пар. Формула (X.162) — одна из целого ряда формул, которые обычно называют «теоремами Вика». Многие формулы такого рода приведены в книге: E. Caianiello, Combinatorics and Renormalization in Quantum Field Theory, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1973. Формула (X.162) показывает, что *для свободного поля* можно подсчитать вайтмановы обобщенные функции, зная только двухточечные функции. Существует широкий класс моделей, в которых выполняется это же свойство. Пусть ρ — произвольная полиномиально ограниченная мера на $[0, \infty)$. Определим

$$(\Omega_0, \varphi(x)\varphi(y)\Omega_0) = \int \Delta_+(x-y, m^2)\, d\rho(m^2),$$

и пусть n-точечная обобщенная функция задается формулой (X.162). Можно показать, что эти обобщенные функции суть функции Вайтмана некоторой определенной квантовой теории поля, удовлетворяющей аксиомам Вайтмана. Такая теория называется теорией «обобщенного свободного поля со спектральной плотностью ρ». Как и теория свободного поля, эти теории тривиальны в том смысле, что матрица рассеяния в них единична (если она существует). Впервые обобщенное свободное поле ввел Гринберг (W. Greenberg, Generalized free fields and models of local field theory, *Ann. Phys.*, **16** (1961), 158—176).

Оценки с помощью оператора числа частиц такого типа, как в теореме X.44, впервые систематически применялись Глиммом (J. Glimm, Yukawa coupling of quantum fields in two dimensions, *Comm. Math. Phys.*, **5** (1967), 343—386). Подробное рассмотрение этих оценок можно найти в лекциях: J. Glimm, A. Jaffe, Some quantum field theory models, in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory (Les Houches, 1970), ed. by C. deWitt and R. Stora, Gordon and Breach, New York, 1971.

Мы продолжаем рассмотрение $(\varphi^4)_2$-модели в § X.9 и в гл. XIX, где подробнее расскажем об истории. L^p-свойства взаимодействия с пространственным обрезанием были впервые отмечены Нельсоном (E. Nelson, A quartic interaction in two dimensions, in Mathematical Theory of Elementary Particles, ed. by R. Goodman and I. Segal, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1966), когда он открыл, что $e^{-tV} \in L^1$. Подробное доказательство можно найти в лекциях Глимма и Джаффе, цитированных выше. О свойствах взаимодействия $(\varphi^4)_3$ см. J. Glimm, A. Jaffe, Positivity of the $(\varphi^4)_3$-Hamiltonian, *Fortschr. Physik*, **21** (1973), 327—376; там же — подробная библиография.

Идея о том, что евклидова инвариантность глубоко связана с вопросами о неэквивалентных представлениях КПС, — а эта идея лежит в основе нашего доказательства теоремы X.46 — принадлежит кругу идей, именуемых «теоремы Хаага», после открытий, сделанных Р. Хаагом в его известной работе: R. Haag, On Quantum Field Theories, *Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd.*, **29**, 12 (1955). Способ применения здесь трансляционной инвариантности подсказывает, что неэквивалентность представлений с разными массами проявляется «вследствие бесконечности пространства». Это правильно в следующем смысле. Для любой ограниченной области B в $\mathbb{R}^3$ и свободных полей $\{\varphi_{m_1}, \pi_{m_1}\}$, $\{\varphi_{m_2}, \pi_{m_2}\}$ на $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ существует унитарное отображение U_B: $\mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$, такое, что $U_B\varphi_{m_1}(f) U_B^{-1} = \varphi_{m_2}(f)$ и $U_B\pi_{m_1}(f) U_B^{-1} = \pi_{m_2}(f)$, если $\operatorname{supp} f \subset B$. Эта «локальная эквивалентность» встретится нам снова в гл. XIX при рассмотрении алгебр свободного поля и при обсуждении «свойства локальной фоковости» модели $(\varphi^4)_2$.

Наша конструкция пространства Q зависит от базиса в том смысле, что она зависит от выбора $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Что не зависит от выбора базиса—так это алгебра измеримых множеств (по модулю множеств меры нуль) и мера этих множеств. Есть много других «реализаций» пространства Q, в которых «точки» отличаются, однако алгебра измеримых множеств и их мера—те же.

Л. Гординг и А. С. Вайтман классифицировали все представления соотношений (X.95) в статье: L. Gårding, A. S. Wightman, Representations of the canonical commutation relations, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **40** (1954), 622—626. Возможно, что фон Нейман знал о существовании неэквивалентных представлений уже с 1938 г., так как, опираясь на его теорию бесконечных тензорных произведений (J. von Neumann, On Infinite Tensor Products, *Compositio Math.*, **6** (1939), 1—77), легко построить несчетное число неэквивалентных представлений (см. L. Streit, Test function spaces for direct product representations, *Comm. Math. Phys.*, **4** (1967), 22—31). Самосопряженность канонических полей из соотношений (X.95) в произвольных представлениях доказана Ридом (M. Reed, A Gårding domain for quantum fields, *Comm. Math. Phys.*, **14** (1969), 336—346). Рид показал, что для любого представления в классификации Гординга—Вайтмана существует банахово пространство B основных функций (B зависит от представления), такое, что $\varphi(f)$ и $\pi(f)$ самосопряжены при $f \in B$.

Классификация представлений КПС в непрерывной форме (X.94) может быть найдена в разных местах. См., например, И. М. Гельфанд и Н. Виленкин, Обобщенные функции, IV, Физматгиз, М., 1961. Теорема Рида распространена на КПС в форме (X.94) в статье: G. Hergerfeldt, Gårding domains and analytic vectors for quantum fields, *J. Math. Phys.*, **13** (1972), 821—827.

§ X.8. Изучение полугрупп линейных преобразований берет свое начало в статье Стоуна об унитарных группах в гильбертовом пространстве: M. Stone, Linear transformations in Hilbert space, III, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **16** (1930), 172—175. Теорема Хилле—Иосиды для сжимающих полугрупп (теорема X.47 a) была независимо доказана Хилле в его книге «Функциональный анализ и полугруппы», ИЛ, М., 1951 (см. также E. Hille, On the generation of semi-groups and the theory of conjugate functions, *Kungl. Fys. Sälls. I Lund. Förhand.*, **21** (1952), 1—13) и Иосидой (K. Yosida, On the differentiability and representation of one-parameter semi-groups of linear operators, *J. Math. Soc. Japan*, **1** (1948), 15—21). Ее обобщение (теорема X.47b) несколько позже дано Феллером (W. Feller, On the generation of unbounded semi-groups of bounded linear operators, *Ann. Math.*, **58** (1953), 166—174), Миядерой (I. Miyadera, Generation of a strongly continuous semi-group of operators, *Tôhoku Math. J.*, **4** (1952), 109—114) и Филлипсом (R. S. Phillips, Perturbation theory for semi-groups of linear operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), 343—369). Теорему X.47b обычно называют теоремой Хилле—Иосиды—Филлипса.

Существуют разнообразные другие условия, кроме сильной непрерывности на $[0, \infty)$, которые могут быть наложены на $T(t)$. Например, можно потребовать выполнения таких условий:

(i) $T(t)$ сильно измерима,

(ii) $T(t)$ сильно сходится к I при $t \downarrow 0$,

(iiia) $\int\limits_0^1 \|T(t)\|\, dt < \infty$,

(iiib) $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\, T(t)\varphi = \varphi$ для всех $\varphi \in X$.

Можно показать, что из (i) и (ii) следует сильная непрерывность на $[0, \infty)$. Другой возможный набор условий — это (i) и (iii). В этом случае $\|T(t)\|$ может быть неограниченной при $t \to 0$. Как и в случае сильной непрерывности, существует теорема, классифицирующая генераторы таких полугрупп. Подробное рассмотрение различных условий непрерывности при $t \to 0$ и соответствующая классификация генераторов имеется в книге: Э. Хилле, Р. С. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1962.

Термин «аккретивный» впервые появился у Фридрихса (K. Friedrichs, Symmetric positive linear differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **11** (1958), 333—418). Изучение этих операторов было, в сущности, начато Филлипсом в цитированной выше статье. Филлипс называет $-A$ (а не A) генератором полугруппы e^{-tA}. Следовательно, в гильбертовом пространстве его генераторы удовлетворяют условию $\operatorname{Re}(\varphi, A\varphi) \leqslant 0$ (а не $\operatorname{Re}(\varphi, A\varphi) \geqslant 0$). Такие операторы он называет «диссипативными». Теория диссипативных операторов на банаховых пространствах развита Люмером и Филлипсом (G. Lumer, R. S. Phillips, Dissipative operators in a Banach space, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 679—698). Статья Люмера и Филлипса содержит контрпример, показывающий, что в случае банахова пространства максимальный аккретивный оператор не обязан порождать полугруппу. То, что максимальный аккретивный оператор порождает полугруппу в гильбертовом пространстве, было доказано Филлипсом (R. S. Phillips, Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **90** (1959), 193—254).

Пример ограниченной полугруппы, не являющейся сжимающей полугруппой, дает совокупность матриц

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 2\sin\theta \\ -{}^1/_2\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

на $\mathbb{R}^2$. Бесконечномерные ограниченные полугруппы, не являющиеся сжимающими, появляются в теории рассеяния, связанной с линеаризованным уравнением Больцмана; см. гл. XII.

В конечномерном случае всякая полугруппа удовлетворяет условию $\lim\limits_{t \downarrow 0} \|T(t)\| = 1$. Однако в бесконечномерном случае это не обязательно справедливо (см. пример 5). Когда это условие на норму нарушается, отсутствует простая характеристика генераторов непосредственно через $l(A\varphi)$.

Теорема X.50 принадлежит Густафсону (Gustafson, A perturbation lemma, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 334—338). Мы привели (для $a < 1/2$) доказательство Нельсона (E. Nelson, Feynman integrals and the Schrödinger equation, *J. Math. Phys.*, **5** (1964), 332—343); некоторые идеи этого доказательства появились еще раньше у Троттера (H. Trotter, On the product of semigroups of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 545—551). Статьи Нельсона и Троттера содержат также доказательства общей формулы Троттера для произведения. Упрощение и обобщение теоремы Троттера содержится в работе Чернова (P. R. Chernoff, Semigroup product formulas and addition of unbounded operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 395). Следствие теоремы X.50 было расширено на случай $a = 1$, если X — рефлексивное банахово пространство. Это обобщает теорему Вюста; доказано это сходными методами Черновым (P. R. Chernoff, Perturbations of dissipative operators of relative bound one, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **33** (1972), 72—74).

Теорема X.52 принадлежит Хилле и Филлипсу (см. их книгу, цитированную выше) и Иосиде (K. Yosida, On the differentiability of semi-groups of linear operators, *Proc. Japan Acad.*, **34** (1958), 337—340). При доказательстве голоморфности в теореме X.55 мы следуем Стейну (E. Stein, Topics in Harmonic Analysis, Ann. Math. Studies, Princeton University Press., Princeton, N. J.). Формулы типа Данфорда—Тейлора для голоморфных полугрупп весьма полезны, так как позволяют вычислять различные величины с помощью интегральной формулы Коши.

Теорема о спектральных отображениях для полугрупп рассматривается в § XIII.8.

Установление связи между дифференциальными уравнениями в частных производных и теорией полугрупп восходит к Адамару, который заметил, что решения задачи Коши обладают полугрупповыми свойствами по отношению к t: J. Hadamard, Sur un problème mixte aux dérivées partielles, *Bull. Soc. Math. France*, **31** (1903), 208—224, и Principe de Huygens et prolongement analytique, *Bull. Soc. Math. France*, **52** (1924), 241—278. Но теория полугрупп не применялась систематически к изучению дифференциальных уравнений в частных производных, пока Хилле и Иосида в конце сороковых годов не развили соответствующий аналитический аппарат. Примеры, приведенные в тексте, подсказывают, что можно применить теорию полугрупп к общим параболическим дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка, т. е. к дифференциальным уравнениям вида $\partial u(x, t)/\partial t = Au(x, t)$, где оператор

$$A\varphi = \sum_{i, j} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x) + \sum_{i} \frac{\partial}{\partial x_i} b_i(x) \varphi(x) + c(x) \varphi(x)$$

эллиптичен в соответствующем смысле. Это верно, однако такое применение по ряду причин затруднительно. Во-первых, в случае непостоянных коэффициентов или ограниченной области больше неприменимо преобразование Фурье, так что приходится доказывать, что A удовлетворяет условиям теорем X.47, X.52, с помощью априорных оценок (типа неравенства Гординга) и теоремы Хана—Банаха (надо показать, что $\mathrm{Ran}(A+\lambda)$ плотна). Положение далее осложняется тем, что A (суженный на область определения, состоящую из «хороших» функций) будет иметь много замкнутых расширений, и следует выбрать «правильное» в качестве генератора. Наконец, нужно воспользоваться обобщенной леммой Вейля (см. § IX.6), чтобы доказать регулярность. Из фундаментальных работ, в которых техника полугрупп применяется к параболическим уравнениям, назовем следующие: W. Feller, The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations, *Ann. Math.*, **55** (1952), 468—519; P. Lax, A. Milgram, Parabolic Equations, in Contributions to the theory of Partial Differential Equations, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954; P. Lax, R. S. Phillips, Local boundary conditions of dissipative systems of linear partial differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **13** (1960), 427—455; R. S. Phillips, On the integration of the diffusion equation with boundaries, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **98** (1961), 62—84; K. Yosida, An abstract analyticity in time for solutions of a diffusion equation, *Proc. Japan Acad.*, **35** (1959), 109—113. Параболические уравнения определенных видов, которые нелинейны или в которых A зависит от t (называемые эволюционными уравнениями), тоже могут быть рассмотрены методами теории полугрупп; см. A. Friedman, Partial Differential Equations, Holt, New York, 1969. Существует обширная литература, посвященная полугруппам нелинейных операторов; см. § 13 и Замечания к нему.

Хилле в своей книге «Функциональный анализ и полугруппы» отметил, что теория полугрупп применима также и к гиперболическим уравнениям.

Для волнового уравнения с постоянными коэффициентами этот метод обрисован в задаче 60. В контексте нелинейных уравнений эта идея работает в § 13. О полугрупповом подходе к широкому классу гиперболических задач см. R. S. Phillips, Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **90** (1959), 193—254.

Вторая главная область применения техники полугрупп — это теория вероятностей. Связь между уравнением теплопроводности и теорией вероятностей была открыта Эйнштейном (A. Einstein, Über die von der molecularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Ann. Physik*, **17** (1905), 549—560). Но только в 1952 г. Феллер начал систематическое исследование полугрупп в теории вероятностей в той статье, которую мы выше цитировали. Дальнейшее развитие этого направления связано с именем Ханта (G. Hunt, Markov processes and potentials, I, *Illinois J. Math.*, **1** (1957), 44—93; II, **1** (1957), 316—369; III, **2** (1958), 151—213 [русский перевод: Дж. Хант, Марковские процессы и потенциалы, ИЛ, М., 1962] и Semigroups of measures on Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **81** (1956), 264—293. Эти приложения описаны в книгах по теории вероятностей, упоминаемых в Замечаниях к § X.11.

Мы отмечали в начале этого раздела, что на аккретивные операторы в банаховом пространстве могут быть распространены многие важные свойства самосопряженных операторов. Важнейшее свойство, которое не распространяется на все аккретивные операторы,— это спектральное разложение. Класс «спектральных операторов», допускающих некоторое спектральное разложение, был введен Данфордом: N. Dunford, Spectral operators, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 321—354. Исчерпывающее рассмотрение этих операторов см. в книге Н. Данфорда и Дж. Шварца, Линейные операторы, т. III: Спектральные операторы, «Мир», М., 1974.

§ X.9. Теория гиперсжимающих полугрупп появилась как результат некоторых исследований в конструктивной квантовой теории поля. Зерно этой теории содержится в работе Нельсона (E. Nelson, A quartic interaction in two dimensions, in Mathematical Theory of Elementary Particles, pp. 69—73, ed. by R. Goodman and I. Segal, M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1966). Нельсон выделил те свойства эрмитовых операторов, которые мы называем теперь гиперсжимающими, и, воспользовавшись ими и теорией фейнмановых интегралов по путям, доказал, что некоторые гамильтонианы теории поля ограничены снизу. Эта работа была далее прояснена и расширена Глиммом: J. Glimm, Boson fields with nonlinear self-interaction in two dimensions, *Comm. Math. Phys.*, **8** (1968), 12—25. Глимм, в частности, ввел в употребление теорему Рисса—Торина. Идеи Нельсона сыграли свою роль в первом доказательстве Глимма и Джаффе самосопряженности гамильтониана $H_0+H_I(g)$ с пространственным обрезанием для взаимодействия $(\varphi^4)_2$: J. Glimm, A. Jaffe, A $\lambda\varphi^4$ quantum field theory without cutoffs, *Phys. Rev.*, **176** (1968), 1945—1951. Глимм и Джаффе в своем доказательстве опирались также на граф-пределы (см. § X.10) и фейнмановы интегралы по путям. Основные идеи гиперсжимающих полугрупп появились независимо в работах Розена и Сигала. Розен (L. Rosen, A $\lambda\varphi^{2n}$ theory without cutoffs, *Comm. Math. Phys.*, **16** (1970), 157—183) дал доказательство самосопряженности в существенном гамильтонианов для взаимодействия $P(\varphi)_2$, основанное на гиперсжимаемости и фейнмановых интегралах по путям. Хотя это не было сразу хорошо понято, доказательство Розена опиралось почти на одну L^p-технику и содержало все главные идеи абстрактной теории для H_0+V. Сигал в своей работе: I. Segal, Notes towards the construction of nonlinear relativistic quantum fields, III: Properties of the C^*-dynamics for a certain class of interactions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 1390—1395, показал, что обращение к фейнмановым интегралам по путям можно везде заменить формулой Троттера для произведения и что для получения самосопряженного оператора H, который фор-

мально записывался бы в виде H_0+V, можно воспользоваться гиперсжимаемостью. Кроме того, там была сформулирована лемма, которую мы назвали леммой Сигала, и с ее помощью удалось упростить более ранние доказательства Глимма и Джаффе факта ограниченности снизу. Сигал выяснил также один момент в более ранних доказательствах, касающийся вопроса о том, будет ли непременно сжимающим отображением тензорное произведение сжимающих отображений L^2 в L^4. Другое обсуждение этого факта можно найти в лекциях Глимма и Джаффе (Les Houches, 1970), которые упоминались в Замечаниях к § X.7. В более полной публикации (I. Segal, Construction of nonlinear quantum processes, I, *Ann. Math.*, **92** (1970), 462—481) Сигал, кроме того, доказал самосопряженность в существенном H_0+V на $D(H_0)\cap$ $\cap D(V)$. Самосопряженность в существенном на $C^\infty(H_0)\cap D(V)$ была доказана в Приложении к работе: B. Simon, Essential Self-Adjointness of Schrödinger Operators with Positive Potentials, *Math. Ann.*, **201** (1973), 211—220. Для гамильтониана $(\varphi^4)_2$-модели это было раньше доказано совершенно другими средствами в вышеупомянутой статье Глимма и Джаффе. Для гамильтонианов $(\varphi^{2n})_2$ это было доказано Розеном (L. Rosen, The $(\varphi^{2n})_2$ quantum field theory: Higher order estimates, *Comm. Pure Appl. Math.*, **24** (1971), 417—457).

Множество авторов приняло участие в выяснении и развитии теории гиперсжимающих полугрупп. Саймон и Хег-Крон в обзорной статье: B. Simon, R. Höegh-Krohn, Hypercontractive semi-groups and two-dimensional self-coupled Bose fields, *J. Functional Analysis*, **9** (1972), 121—180, рассмотрели основы этой теории и ее применения к $P(\varphi_2)$-модели, развили ее в некоторых направлениях и ввели в употребление самый термин «гиперсжимающая полугруппа». Этот специальный класс сжимающих полугрупп был впервые отмечен как таковой и применен в статье: R. Höegh-Krohn, A general class of quantum field theories without cutoff in two space-time dimensions, *Comm. Math. Phys.*, **21** (1971), 244—255. Переход к еще более абстрактной формулировке можно найти в статьях: I. Segal, Construction of nonlinear local quantum processes, II, *Invent. Math.*, **14** (1971), 211—241; W. Faris, Quadratic forms and essential self-adjointness, *Helv. Phys. Acta*, **45** (1972), 1074—1088; W. Faris, Essential self-adjointness of operators in ordered Hilbert space, *Comm. Math. Phys.*, **30** (1973), 23—24. В статье в *Helv. Phys. Acta* Фари дает интересное «объяснение» в терминах квадратичных форм, почему из гиперсжимаемости следует самосопряженность. Дальнейшие применения гиперсжимающих полугрупп в конструктивной теории поля появились в цитированной выше статье Хег-Крона и в статьях Клейна: A. Klein, Self-adjointness of the locally correct generator of Lorentz transformations for $P(\varphi)_2$, in Mathematics of Contemporary Physics (R. Streater, ed.), Academic Press, New York, 1973; Quadratic expressions in a free Boson field, *Trans. Amer Math. Soc.*, **181** (1973), 439—456. Распространение некоторых свойств на теорию фермионов появилось в статье: L. Gross, Existence and uniqueness of physical ground states, *J. Functional Analysis*, **10** (1972), 52—109.

Простое доказательство гиперсжимающего свойства эрмитовых операторов, которое мы приводим (пример 1), взято из статьи: E. Nelson, The free Markov field, *J. Functional Analysis*, **12** (1973), 211—227. В более ранних доказательствах гиперсжимаемости теорема X.61 в бесконечномерном случае получалась в два этапа путем анализа в одномерном одночастичном пространстве. Сначала показывается, что если известно, что e^{-tH_0} ограничено как отображение из L^2 в L^4 для некоторого t и что в спектре H_0 есть щель выше нуля, то можно убедиться, что e^{-TH_0} есть в действительности сжатие из L^2 в L^4 при достаточно большом T. Тогда бесконечномерный случай определяется поведением тензорного произведения сжимающих отображений из L^2 в L^4. Нельсоново доказательство для одномерного случая, которое мы приводим, обобщается на произвольное число измерений, и тем самым мы избегаем этого процесса из двух этапов. На самом деле один из этих этапов можно обойти и дать прямое доказательство того, что e^{-TH_0} есть сжимающее отображение из L^2 в L^4 при соответствующем T. Дальнейшее обсуждение этих вопросов читатель может посмотреть в § I.5 лекций Саймона, ссылка на которые дается в Замечаниях к § X.11.

В обсуждаемой статье Нельсон доказал также следующие оценки, которые являются наилучшими возможными. Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство с избранным комплексным сопряжением. Пусть A — ограниченный оператор на $\mathcal{H}$, коммутирующий с этим комплексным сопряжением. Пусть Q есть Q-пространство, построенное над фоковым пространством на $\mathcal{H}$ в соответствии с конструкцией § 7. $\Gamma(A)$ есть ограниченный оператор из $L^p(Q)$ в $L^q(Q)$ $(p \leqslant q)$ тогда и только тогда, когда $\|A\| \leqslant \sqrt{(p-1)/(q-1)}$, и в этом случае A есть сжатие. Другое доказательство этой теоремы принадлежит Гроссу (L. Gross, Logarithmic Sobolev inequalities, *Amer. J. Math.*, 97(1975), 1061—1083).

Лемму Сигала можно рассматривать как частный случай более общего результата. Пусть $\|\cdot\|_\infty$ есть операторная норма в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$; тогда лемма Сигала утверждает, что

$$\|e^{(A+B)}\|_\infty \leqslant \|e^{A/2}e^{B}e^{A/2}\|_\infty.$$

Но есть неравенство Голдена и Томпсона (S. Golden, Lower bounds for the Helmholtz function, *Phys. Rev.*, **137B** (1965), 1127—1128; C. Thompson, Inequality with applications in statistical mechanics, *J. Math. Phys.*, **6** (1965), 1812—1813), которое утверждает, что для самосопряженных A и B

$$\operatorname{Tr}(e^{A+B}) \leqslant \operatorname{Tr}(e^{A}e^{B}),$$

или, что эквивалентно,

$$\|e^{A+B}\|_1 \leqslant \|e^{A/2}e^{B}e^{A/2}\|_1.$$

Можно доказать также, что

$$\|e^{A+B}\|_p \leqslant \|e^{A/2}e^{B}e^{A/2}\|_p$$

при любом p. Неравенство Голдена — Томпсона обсуждается далее в статьях: A. Lenard, Generalization of the Golden—Thompson inequality, *Indiana Univ. J. Math.*, **21** (1971), 457—468; M. B. Ruskai, Inequalities for Traces on von Neumann Algebras, *Comm. Math. Phys.*, **26** (1972), 280—289; C. Thompson, Inequalities and partial orders on matrix spaces, *Indiana Univ. J. Math.*, **21** (1971), 469—480.

§ X.10. Основные идеи и теоремы в этом разделе принадлежат Глимму и Джаффе (J. Glimm, A. Jaffe, Singular perturbations of self-adjoint operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **22** (1969), 401—414). Глимм и Джаффе на основании своих результатов дали первое доказательство самосопряженности гамильтонианов $(\varphi^4)_2$ с пространственным обрезанием (см. Замечания к § X.7). Существование гамильтониана с пространственным обрезанием для взаимодействия Юкавы было доказано в двух статьях: резольвентная сходимость была установлена в J. Glimm, A. Jaffe, Self-adjointness for the Yukawa$_2$ Hamiltonian, *Ann. Physics*, **60** (1970), 321—383; то, что последовательность $\{H(g, n)\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу и плотно ограничена, было уже раньше доказано Глиммом (J. Glimm, Yukawa coupling of quantum fields in two dimensions, I, *Comm. Math. Phys.*, **5** (1967), 343—386). Общее обсуждение см. в лекциях (Les Houches, 1970), цитированных в Замечаниях к § X.7.

Технику, употребленную в примере, можно распространить на случай x^{2n}-осциллятора, если воспользоваться идеями работы: L. Rosen, The $(\varphi^{2n})_2$ quantum field theory: Higher order estimates, *Comm. Pure Appl. Math.*, **24** (1971), 417—457.

§ *X.11.* Понятие винеровой меры было введено Винером в работе: N. Wiener, Differential space, *J. Math Phys.*, 2 (1923). Винер ввел свою меру для того, чтобы строго получить результаты работы Эйнштейна и Смолуховского о броуновском движении. Историю изучения броуновского движения читатель может найти в книге Нельсона: E. Nelson, Dynamical Theories of Brownian Motion, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1967. Конструкция меры Винера, которую мы приводим, заимствована у Нельсона: E. Nelson, Feynman Integrals and the Schrödinger Equation, *J. Math. Phys.*, 5 (1964), 332—343. Намеченное в задаче 64 доказательство того, что невозможно построить (комплексную) меру по путям Фейнмана для мнимого времени, принадлежит Камерону (R. Cameron, The Ilstow and Feynman Integrals, *J. Anal. Math.*, **10** (1962/63), 287—361). Читателя следует предостеречь от ошибочной конструкции в статье И. Гельфанда и А. Яглома, Интегрирование в функциональных пространствах в квантовой физике, *УМН*, **11** (1956), 77—114.

Существует обширная учебная литература, посвященная мере Винера с вероятностной точки зрения: Дж. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956; Е. Б. Дынкин, Марковские процессы, Физматгиз, М., 1963; T. Hida, Stationary Stochastic Processes, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970; К. Ито, Г. Маккин, Диффузионные процессы и их траектории, «Мир», М., 1968; М. Кац, Вероятность и смежные вопросы в физике, «Мир», М., 1965. Читатель, интересующийся этим предметом, но не знакомый с его вероятностными основами, может воспользоваться лекциями Рида: M. Reed, Functional Analysis and Probability Theory, in Constructive Quantum Field Theory (G. Velo and A. S. Wightman, eds.), Springer Lecture Notes in Physics, 25, 1973, pp. 1—41 (русский перевод в сб. «Конструктивная теория поля», «Мир», М., 1977, стр. 13—47). Множество подробных сведений о свойствах регулярности меры Винера и, в частности, теорему X.67 можно почерпнуть из книги Ито и Маккина.

Иногда литература по теории вероятностей, особенно более старая, содержит технические сложности, которые в нашем рассуждении даже не появлялись. Это происходит потому, что некоторые авторы строят меру Винера таким образом, что, если это перевести на наш язык, она оказывается только бэровой мерой. Но некоторые хорошие множества Ω, например Ω_α, борелевы, но не бэровы множества. Идея обойти некоторые технические затруднения, реализуя Ω как компактное пространство-произведение и пользуясь регулярными борелевыми мерами, принадлежит Нельсону (E. Nelson, Regular Probability Measures on Function Space, *Ann. Math.*, **67** (1954), 630—643). К сожалению, метод Нельсона не снимает всех проблем измеримости, так как при дальнейшем построении важными оказываются некоторые неборелевы множества, такие, как пути, непрерывные справа.

Идея Фейнмана выразить динамику уравнения Шредингера в виде суммы по траекториям была им сформулирована в Принстонской диссертации (1942) и в статье: R. Feynman, Space—time approach to non-relativistic quantum mechanics, *Rev. Mod. Phys.*, **20** (1948), 367—387 (русский перевод в сб. «Вопросы причинности в квантовой механике», ИЛ, М., 1955). Читатель может найти детальное изложение этого предмета и его дальнейшее развитие в книге: Р. Фейнман и А. Хибс, Квантовая механика и интегралы по траекториям, «Мир», М., 1968. Идея продолжения к мнимому времени, так чтобы можно было воспользоваться мерой Винера, принадлежит Кацу (M. Kac, On some connections between probability theory and differential and integral equations, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Univ. of California Press, Berkeley, 1951, pp. 189-215). Там же получена формула Фейнмана—Каца. Наш вывод формулы Фейнмана—Каца заимствован из цитированной выше статьи Нельсона (в *J. Math. Phys.*).

Интегралы по путям сыграли принципиальную роль в конструктивной квантовой теории поля, особенно в современной теории евклидовых и марковских полей. Методы интеграла по путям в конструктивную квантовую теорию поля ввел Нельсон в первой из цитируемых в Замечаниях к § X.9 статье, и он же ввел их в евклидову квантовую теорию поля (E. Nelson, Quantum fields and Markov fields, in Partial Differential Equations (D. Spencer, ed.), Symp. Pure Math., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1973, pp. 211—219). Рассмотрение этих методов и их дальнейшего развития читатель найдет в книге «Конструктивная квантовая теория поля», цитированной выше.

§ X.12. Использование разложений типа разложения Дайсона для нахождения оператора эволюции (пропагатора) $U(t, s)$, удовлетворяющего уравнению

$$\frac{d}{dt} U(t, s) = -iH(t)\,U(t, s), \quad U(s, s) = I, \tag{X.163}$$

основано, в сущности, на методе последовательных подстановок, развитом еще в XIX веке для решения интегральных уравнений. Уравнение (X.163) формально эквивалентно интегральному уравнению

$$U(t, s) = I - i\int_s^t H(r)\,U(r, s)\,dr.$$

Мы получим разложение Дайсона, если будем последовательно подставлять это выражение для $U(t, s)$ под интеграл. Дайсон воспользовался этим разложением для построения теории возмущений в квантовой электродинамике: F. J. Dyson, The radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman, *Phys. Rev.*, **75** (1949), 486—502 (русский перевод в сб. «Сдвиг уровней атомных электронов», ИЛ, М., 1950) и The *S*-matrix in quantum electrodynamics, *Phys. Rev.*, **75** (1949), 1736—1755 (русский перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, М., 1954).

Като в своей статье: T. Kato, Integration of the equation of evolution in a Banach space, *J. Math. Soc. Japan*, **5** (1953), 208—234, первым нашел общие условия существования решения уравнения эволюции $d\varphi(t)/dt = A(t)\,\varphi(t)$, когда $A(t)$ — неограниченный оператор. Поскольку одно из главных применений этой теории — дифференциальные уравнения в частных производных, в этой области еще прежде было много результатов частного характера. При доказательстве теоремы X.70 мы близко следовали Иосиде (К. Иосида, Функциональный анализ, «Мир», М., 1967). Более общие результаты см. в работе: T. Kato, Linear evolution equations of hyperbolic type, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, A Math.*, **17** (1970), 241—258.

Обсуждение результатов, относящихся к зависящим от времени формам, и, в частности, о расширении теоремы X.71 на класс Рольника см. B. Simon, Quantum Mechanics for Hamiltonians defined as quadratic forms, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1971.

Идея воспользоваться $L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$, чтобы перейти от зависящих от времени квантовомеханических гамильтонианов к не зависящим от времени, принадлежит Хауленду (J. Howland, Stationary scattering theory for time-dependent Hamiltonians, *Math. Ann.*, **207** (1974), 315—335). Идея Хауленда, между прочим, имеет красивое применение в теории рассеяния. Пусть $U(t, s)$ и $U_0(t, s)$ — два унитарных оператора эволюции на $\mathcal{H}$, и пусть $\hat{U}(\sigma)$ и $\hat{U}_0(\sigma)$ — соответствующие сильно непрерывные однопараметрические группы на $L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$. Тогда можно показать, что волновые операторы для зависящей от времени теории на $\mathcal{H}$ существуют тогда и только тогда, когда обычные волновые операторы

$$W_{\pm} = \operatorname*{s-lim}_{\sigma \to \infty} \hat{U}_0(-\sigma)\,\hat{U}(\sigma)$$

существуют на $L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$. Следовательно, можно доказать существование волновых операторов в некоторых теориях с зависящим от времени гамильтонианом, переформулировав их, как указано выше, и пользуясь обычными методами для не зависящего от времени гамильтониана. Доказательство этих результатов и тех, что упомянуты в основном тексте, см. в указанной работе Хауленда.

Существует другой метод построения пропагаторов, *формально* удовлетворяющих уравнению (X.163). Действительно, пусть $\mathscr{B}$—банахово пространство, элементами которого служат функции на некотором фиксированном компактном интервале вещественной оси со значениями во множестве неограниченных операторов. Предположим, что в $\mathscr{B}$ содержится плотное подмножество $\mathscr{B}_0$, такое, что для любого элемента $f \in \mathscr{B}_0$ уравнение (X.163) с $H(t) = H_0 + f(t)$, где H_0—некоторый фиксированный оператор, имеет корректно определенное решение. Обозначим через $U(t, s; f)$ соответствующий пропагатор. Если отображение $U(t, s; \cdot)$ равномерно непрерывно на $\mathscr{B}_0$, то его можно продолжить на все $\mathscr{B}$ и получить формальные решения уравнения (X.163), отвечающие $f \in \mathscr{B}$. Пример такой ситуации мы увидим в дополнении к § XIII.6.

§ X.13. Первое доказательство существования глобальных решений уравнения (X.138) ($m > 0$) принадлежит Йоргенсу (K. Jörgens, Das Anfangswertproblem im Grossen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen, *Math. Z.*, 77 (1961), 295—308).

Абстрактный подход к этим нелинейным задачам развит Браудером и Сигалом (F. Browder, On non-linear wave equations, *Math. Z.*, **80** (1962), 249—264; I. Segal, Non-linear semi-groups, *Ann. Math.*, **78** (1963), 339—364). Глобальная теорема существования для случая нулевой массы доказана впервые в работе: W. Strauss, Decay and asymptotics for $\Box u = F(u)$, *J. Functional Analysis*, **2** (1968), 409—457. Случай нулевой массы можно рассматривать и прямо методами § X.13. Соответствующий способ намечен в задаче 76. Похожая техника применялась и к связанным уравнениям Максвелла—Дирака; см. L. Gross, The Cauchy problem for the coupled Maxwell and Dirac equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **19** (1966), 1—15; J. Chadam, On the Cauchy problem for the coupled Maxwell—Dirac equations, *J. Math. Phys.*, **13** (1972), 597—604; Global solutions of the Cauchy problem for the (classical) coupled Maxwell—Dirac equations in one space dimension, *J. Functional Analysis*, **13** (1973), 173—184.

Давно известно, что для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных глобальные решения не существуют; см., например, J. Keller, On solutions of non-linear wave equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **10** (1957), 523—532. Пример, который приведен в конце настоящего раздела, рассказал авторам Левин. Обобщение этого примера им опубликовано: H. Levine, Some non-existence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + \tilde{F}(u)$, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **51** (1973), 371—386.

Пусть $\varphi(t) = \langle u(x, t), u_t(x, t)\rangle$—решение нелинейной задачи Клейна—Гордона, описанное в тексте, и определим M_t как отображение $\varphi(0) \longmapsto \varphi(t)$. Тогда M_t есть сильно непрерывная полугруппа ограниченных *нелинейных* операторов. Сразу же возникает вопрос, существует ли для нелинейного случая теория, аналогичная теории сильно непрерывных полугрупп *линейных* операторов, описанной в § 8, и, в частности, имеют ли такие нелинейные полугруппы однозначные инфинитезимальные генераторы? Этим вопросам посвящена обширная литература. См., например, T. Kato, Accretive operators and nonlinear evolution equations in Banach spaces, pp. 138—161 in Proc. Symp. Pure Math., **18**, Part I, Amer. Math. Soc., 1970 (F. Browder, ed.), или M. Crandall, Semi-groups of nonlinear transformations in Banach spaces, pp. 157—171 in Contributions to Nonlinear Functional Analysis (E. Zarantonello, ed.), Academic Press, New York, 1971, а также указанную там литературу.

§ X. 14. Довольно хорошее изложение гамильтоновой механики (хотя с некоторыми математическими ошибками) можно найти в книге Г. Голдстайна,

Классическая механика, Гостехтеориздат, М., 1957. Более изощренным способом она изложена в книге: R. Abraham, Foundations of Mechanics, Benjamin, New York, 1967.

Естественной основой для формулировки классической механики служит симплектическое многообразие. Квадратичная форма q на конечномерном вещественном векторном пространстве называется **симплектической**, если: (1) $q(v, w) = -q(w, v)$, (2) q невырожденна, т. е. из $q(v, w) = 0$ для всех w вытекает, что $v = 0$. **Симплектическое многообразие** есть дифференциальное многообразие M с выделенной 2-формой $\omega \in \wedge^2(M)$, такой, что (1) $d\omega = 0$, (2) при всяком x ω_x есть симплектическая форма в касательном пространстве $T_x(M)$. Форма ω определяет биективное отображение ω_* касательного пучка $T(M)$ в кокасательный пучок $T^*(M)$: $[\omega_*(X)](Y) = \omega(X, Y)$. Для данных $f, g \in C^\infty(M)$ их скобка Пуассона определяется посредством $\{f, g\} = [\omega_*^{-1}(df)](g)$. Если задана функция H в $C^\infty(M)$, то определим ассоциированный с ней гамильтонов поток формулой $\dot{p}(t) = (Xp)(t)$, где X — векторное поле $X = -\omega_*^{-1}(dH)$. Существует естественная форма объема, определяемая через ω, именно $\wedge^n\omega \in \wedge^{2n}(M)$, если $2n = \dim M$. Теорема Лиувилля утверждает, что $\wedge^n\omega$ инвариантна относительно любого гамильтонова потока. Кокасательный пучок любого многообразия естественным путем оказывается симплектическим многообразием.

L^2-версия теоремы Лиувилля состоит в том, что L кососимметричен. Идея воспользоваться теоремой VIII.11 для доказательства кососопряженности $\bar{L}$ высказана в работе: W. Hunziker, The S-matrix in classical mechanics, *Comm. Math. Phys.*, 8 (1968), 282—299. Общая идея применения теорем существования для систем первого порядка к доказательству самосопряженности в существенном дифференциальных операторов находит свое дальнейшее развитие в работе: P. Chernoff, Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations, *J. Functional Analysis*, 12 (1973), 401—414. Чернов пользуется тем, что если $U_t = e^{-iAt}$ оставляет инвариантным некоторое плотное множество D и $D \subset C^\infty(A)$, то A^n самосопряжен в существенном на D для любого n. С помощью специального приема можно рассматривать так и операторы, которые не кажутся на первый взгляд квадратами операторов первого порядка, например $-\Delta$ на $L^2(\mathbb{R}^3)$. Действительно, положим $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$, и пусть $d(f, \mathbf{g}, \mathbf{h}, k) = (0, \operatorname{grad} f, \operatorname{rot} \mathbf{g}, \operatorname{div} \mathbf{h})$, так что $d^*d(f, \mathbf{g}, \mathbf{h}, k) = (-\Delta f, \ldots)$ и $d^2 = 0$. Положим $A = d + d^*$. Тогда A^2, суженный на первый член суммы, есть $-\Delta$. Разумеется, это не простейший способ анализа $-\Delta$ на $L^2(\mathbb{R}^3)$, однако этот метод позволяет доказать, что оператор Лапласа—Бельтрами самосопряжен в существенном на $C^\infty(M)$ для широкого класса римановых многообразий. Методы Чернова позволяют также доказать такую теорему:

Теорема. Если $V \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ и α и β — обычные матрицы Дирака, то

$$H = -\alpha \cdot i\partial + \beta m + V$$

самосопряжен в существенном на $C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

В отличие от случая оператора Шредингера здесь отсутствуют условия на рост V. Как отмечает Чернов, это не удивительно, ибо релятивистские ограничения на скорость исключают попадание на бесконечность за конечное время.

Если H обладает сингулярностями, например кулоновыми, то мы не можем требовать существования глобальных решений уравнения (X.153) при всех начальных условиях, поскольку могут иметь место столкновения. В многочастичных случаях можно вообразить и худшие ужасы. Вместо этого хотелось бы доказать существование глобальных решений для почти всех начальных условий, т. е. **почти полноту**. Почти полнота может быть доказана для проблемы двух тел применением закона сохранения углового момента, а для задачи трех тел — с помощью результатов Сундмана (K. Sundman, Le problème des trois corps, *Acta Soc. Sci. Fenn.*, **35** (1969)) и Биркгофа (G. D. Birkhoff, Dynamical Systems, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **1**, IX (1927)). Частные результаты, относящиеся к задаче N тел, см. в следующей литературе: H. Pollard, D. G. Saari, Singularities of the N-Body Problem, I, II, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **30** (1968), 263—269; Inequalities, II, ed. O. Shisha, Academic Press, New York, 1970; D. G. Saari, Improbability of collisions in Newtonian gravitational systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **162** (1971), 267—271; erratum **168** (1972), 521.

Некоторые из самых интересных проблем классической механики рассмотрены в книге Абрахама и в книгах: H. Pollard, Mathematical Introduction to Celestial Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1966; C. L. Siegel, J. K. Moser, Lectures on Celestial Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, 1971; S. Sternberg, Celestial Mechanics, Part I, II, Benjamin, New York, 1969.

Наконец, необходимо отметить красивую работу Ланфорда о существовании решений уравнений Ньютона для некоторых систем с бесконечным числом частиц: O. E. Lanford, III, The classical mechanics of one-dimensional systems of infinitely many particles, I, II, *Comm. Math. Phys.*, **9** (1968), 176—191; **11** (1969), 257—292.

ЗАДАЧИ

1. (a) Пусть A_n — симметрический оператор на $\mathscr{H}_n$ и D — множество векторов в $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathscr{H}_n$ вида $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots)$, где $\psi_n \in D(A_n)$ и все, кроме конечного числа, ψ_n равны нулю. Покажите, что $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ симметричен на D и что $n_+(A) = \sum_{n=1}^{\infty} n_+(A_n)$, $n_-(A) = \sum_{n=1}^{\infty} n_-(A_n)$.

(b) Покажите, что $i\,d/dx$ на $C_0^\infty(0, \infty)$ имеет индексы дефекта $n_+ = 0$, $n_- = 1$. Покажите, что $i\,d/dx$ на $C_0^\infty(-\infty, 0)$ имеет индексы дефекта $n_+ = 1$, $n_- = 0$.

(c) Покажите, как построить симметрический оператор с любой заданной парой индексов дефекта.

2. Пусть A — замкнутый симметрический оператор, и предположим, что A имеет самосопряженное расширение. Возможно ли, чтобы A имел замкнутое симметрическое расширение $\tilde{A}$, которое не имеет самосопряженных расширений?

3. Пусть $p(x)$ — полином с вещественными коэффициентами, и пусть $A = p(i\,d/dx)$ с областью определения $C_0^\infty(0, \infty)$ в $L^2(0, \infty)$.

(a) Докажите, что A симметричен.

(b) Как связаны значения $p(x)$ с индексами дефекта A?

(c) Докажите (не опираясь на теорему X.3), что если $p(x)$ имеет только четные степени, то индексы дефекта A совпадают.

(d) Докажите, что если p нечетной степени, то индексы дефекта A не совпадают.

†4. Пусть M и N — замкнутые подпространства сепарабельного гильбертова пространства. Докажите, что если $\dim M > \dim N$, то существует такой $u \in M$, $\|u\| = 1$, что $u \in N^\perp$.

†5. Завершите анализ примера 2 в § X.1, показав, что различные самосопряженные расширения A отвечают различным граничным условиям в нуле, сформулированным в этом примере.

6. Классифицируйте самосопряженные расширения оператора $-d^2/dx^2$ на $C_0^\infty(0, 2\pi)$ и интерпретируйте их в терминах рассеяния на окружности с выделенной точкой.

7. Докажите, что если $V(x)$ убывает при $x \downarrow 0$ в $(0, \infty)$, то $-d^2/dx^2+V(x)$ относится к случаю предельной окружности в нуле. *Указание*:

(a) Сначала покажите, что без потери общности можно считать, что $V(x) < 0$ вблизи нуля.

(b) Аппроксимируйте $V(x)$ вблизи нуля убывающей ступенчатой функцией $\tilde{V}(x)$ (с бесконечным числом ступенек) так, чтобы $|V(x)-\tilde{V}(x)|$ была ограничена вблизи нуля, и покажите, что $-d^2/dx^2+V(x)$ относится к предельной окружности тогда и только тогда, когда $-d^2/dx^2+\tilde{V}(x)$ относится к предельной окружности вблизи нуля.

(c) Покажите, что $-d^2/dx^2+\tilde{V}(x)$ относится к предельной окружности, исследовав поведение решений уравнения $\varphi''(x)=\tilde{V}(x)\varphi(x)$ и показав, что оба они принадлежат L^2 вблизи нуля.

8. Пусть V—непрерывная функция на $(0, \infty)$, и предположим, что $-d^2/dx^2+V$ ограничен снизу на $C_0^\infty(0, \infty)$.

(a) Пусть E строго меньше нижней границы $-d^2/dx^2+V$. Докажите, что ни одно решение уравнения $-u''+Vu=Eu$ не имеет более одного нуля. *Указание*: докажите сначала, что любая функция $\psi \in C_0^\infty[a, b]$, $0<a<b<\infty$, такая, что $\psi(a)=\psi(b)=0$, удовлетворяет неравенству

$$\int_a^b [|\psi'(x)|^2+V(x)|\psi(x)|^2]\,dx > E\int_a^b |\psi(x)|^2\,dx.$$

(b) Пусть теперь $W \geqslant V$ поточечно. Докажите, что если $-d^2/dx^2+V$ относится к предельной точке в нуле, то и $-d^2/dx^2+W$ тоже.

Примечания. (1) Эта задача взята из статьи Курса, цитированной в Замечаниях к § X.1. (2) К. Йоргенс высказал следующую общую гипотезу. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$—открытое множество, дополнение которого имеет меру нуль. Пусть V и W непрерывны на M и $-\Delta+V$ ограничен снизу и самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(M)$. Если $W \geqslant V$, то $-\Delta+W$ также самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(M)$.

9. Пусть $\chi(x)$ есть C^∞-функция на $[0, \infty)$, обращающаяся в нуль при $x<1$ и равная единице при $x>2$. Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, и положим $\psi_m(x)=\psi(x)\chi(m|x|)$. Докажите, что если $n \geqslant 5$, то $\psi_m \xrightarrow{L_2} \psi$, $-\Delta\psi_m \xrightarrow{L_2} -\Delta\psi$, и заключите отсюда, что $-\Delta$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ при $n \geqslant 5$. (См. последний пример в дополнении к § X.1.)

†10. Докажите оценку (X.17).

11. Постройте потенциал V на $[0, 1]$ так, чтобы было $\lim_{r\to 0} V(r) = -\infty$, но при этом $-d^2/dx^2+V$ относился к случаю предельной точки в нуле (см. задачу 7). [*Указание*. Возьмите V кусочно-постоянным с шагами размера $-a_n$, чтобы все $a_1a_2^{-1}$, $a_3a_2^{-1}$, $a_3a_4^{-1}$, ..., $a_{2n-1}a_{2n}^{-1}$, $a_{2n+1}a_{2n}^{-1}$ были очень малы.]

†*12.* Восполните детали примера, иллюстрирующего различия в поведении решений, отвечающих потенциалу

$$V_{ab}(x) = 2x^{-2} - 9x^4(a - 2b\cos(2x^3))$$

(см. Замечания к § X.1).

†*13.* Докажите часть (b) теоремы X.13.

14. Пусть V — измеримая функция на $\mathbb{R}^3$, и пусть $V(r) \to 0$ при $r \to \infty$. Докажите, что если $D(V) \supset D(-\Delta)$, то $V \in L^2 + L^\infty$ и, следовательно, $< < -\Delta$. (Значит, «потенциалы», для которых можно пользоваться теоремой Реллиха,— это как раз потенциалы класса $L^2 + L^\infty$.)

15. Покажите, что $A = -d^2/dx^2 + V$ как форма ограничен снизу на $C_0^\infty(0, \infty)$, если $V(x) \geqslant -1/4x^2$, и не ограничен снизу, если $V(x) \leqslant c/x^2$, где $c < -{}^1/_4$.

16. Пусть $E > 0$. Докажите непосредственно, пользуясь ядром оператора $(-\Delta + E)^{-1}$, что $V(-\Delta + E)^{-1}$ ограничен, если $V \in L^2(\mathbb{R}^3)$, и что $\|V(-\Delta + E)^{-1}\| \to 0$ при $E \to \infty$. Выведите отсюда (без соболевской оценки), что $V < < -\Delta$.

17. Пусть V принадлежит классу Рольника. Докажите, что

(a) $\||V|^{1/2}(-\Delta + E)^{-1}|V|^{1/2}\| \to 0$ при $E \to \infty$,

(b) $\||V|^{1/2}(-\Delta + E)^{-1/2}\| \to 0$ при $E \to \infty$,

(c) $\|(-\Delta + E)^{-1/2}|V|(-\Delta + E)^{-1/2}\| \to 0$ при $E \to \infty$.

(d) Из $V \in R$ следует, что $V \ll -\Delta$.

18. Пусть A и C самосопряжены в существенном на гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Допустим, что $B < < A$ и что D C-ограничен. Докажите, что $A \otimes C + B \otimes D$ самосопряжен в существенном на $D(A) \otimes D(C)$.

19. Пусть A самосопряжен, а B симметричен. Предположим, что B A-ограничен с относительной гранью, равной a. Докажите, что

$$a = \lim_{n\to\infty} \|B(A + in)^{-1}\|.$$

20. Пусть A самосопряжен. Оператор B, для которого $D(B) \supset D(A)$, называется A-компактным, если $B(A - z)^{-1}$ компактен при всех $z \in \rho(A)$.

(a) Докажите, что B A-компактен, если $B(A - z)^{-1}$ компактен при одном $z \in \rho(A)$.

(b) Предположим, что B симметричен и A-компактен. Докажите, что $B < < A$. [*Указание*: воспользуйтесь результатом задачи 19.]

21. Пусть $\mathcal{H}_m$, $m = \{0, \pm 1, \ldots\}$,— шкала пространств, ассоциированных с положительным оператором A.

(a) Докажите, что B A-компактен тогда и только тогда, когда B — компактный оператор из $\mathcal{H}_{+2}$ в $\mathcal{H}$.

(b) Пусть β — симметрическая квадратичная форма, ограниченная как форма относительно A. Докажите, что если β определяет компактный оператор из $\mathcal{H}_{+1}$ в $\mathcal{H}_{-1}$, то $\beta \ll A$.

*(c) Пусть самосопряженный оператор B A-компактен. Докажите, что B определяет компактный оператор из $\mathcal{H}_{+1}$ в $\mathcal{H}_{-1}$.

22. Воспользуйтесь приемом Конради и докажите, что $-d^2/dx^2+p(x)$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R})$, когда $p(x)=ax^6+\sum_{i=0}^{5} c_i x^i$ и $a>0$ достаточно мало.

23. (a) Докажите, что при любом $a>1$ существует некоторое такое b, что для всех $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$
$$\|(p^2+x^2)\psi\|^2+\|x^4\psi\|^2 \leqslant a\|(p^2+x^2+x^4)\psi\|^2+b\|\psi\|^2,$$
где $p=-i\,d/dx$.

(b) Зная, что $p^2+x^2+x^4$ самосопряжен в существенном на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, выведите, что он самосопряжен (и, в частности, замкнут) на $D(p^2+x^2)\cap D(x^4)$.

(c) Таким же способом докажите, что $D(p^2+x^2)=D(p^2)\cap D(x^2)$, и сделайте вывод, что
$$D(p^2+x^2+x^4)=D(p^2)\cap D(x^4).$$

24. Цель этой задачи — доказать (без обращения к теореме X.28) самосопряженность в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ оператора $-\Delta+V$ с бесконечно дифференцируемой вещественнозначной и ограниченной снизу на $\mathbb{R}^n$ функцией $V(x)$.

(a) Заметьте, что можно считать, что $V(x)\geqslant 1$, и докажите, что
$$D((-\Delta+V)^*)=\{\psi \mid \psi\in L^2,\ -\Delta\psi+V\psi\in L^2\},$$
где $-\Delta+V$ действует в смысле обобщенных функций.

(b) Объясните, почему всякое слабое решение уравнения $-\Delta\psi+V\psi=0$ есть C^∞-функция.

(c) Покажите, что всякое слабое решение уравнения $\Delta\psi=V\psi$ удовлетворяет условию
$$\Delta|\psi(x)|^2\geqslant|\psi(x)|^2.$$

(d) Если $\psi\in \operatorname{Ker}((-\Delta+V)^*)$, то положим $F(r)=\int\limits_{|x|^2=r}|\psi(x)|^2\,d\Omega$, где $d\Omega$ — обычная мера на сфере. Покажите с помощью интегрирования по частям, что F монотонно возрастает.

(e) Сделайте вывод, что $\psi=0$ и, следовательно, $-\Delta+V$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

25. (Условие разрешимости проблемы моментов Стильтьеса.)

(a) Докажите, что последовательность вещественных чисел $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ будет моментами некоторой меры с носителем на положительной полупрямой тогда и только тогда, когда
$$\sum_{m,\,n=0}^{N}\bar\beta_n\beta_m a_{n+m}\geqslant 0 \quad\text{и}\quad \sum_{n,\,m=0}^{N}\bar\beta_n\beta_m a_{n+m+1}\geqslant 0$$
для всех N и всех $\langle\beta_1,\ \ldots,\ \beta_N\rangle\in\mathbb{C}^N$.
[*Указание*. Следуйте выводу условия разрешимости проблемы моментов Гамбургера (§ X.1), но пользуйтесь расширением Фридрихса.]

(b) Докажите, что если в дополнение к требованиям положительности a_n удовлетворяют еще условию $|a_n|\leqslant CD^n(2n)!$, то решение из (a) единственное. [*Указание*. Воспользуйтесь теоремой X.40.]

26. Постройте полуограниченный симметрнческий оператор, имеющий неполуограниченное самосопряженное расширение.

27. Пусть A—симметрический оператор с инвариантной областью определения.
   (a) Пусть B—расширение Фридрихса оператора $A^2 \upharpoonright D(A)$. Докажите, что $B = A^* \bar{A}$.
   (b) Пусть $C = \bar{A} A^*$. Докажите, что C есть самосопряженное расширение $A^2 \upharpoonright D(A)$ и что справедливо равенство $Q(C) = D(A^*)$.

28. Пусть A—симметрический оператор. Предположим, что $D(A^2)$ плотно. Докажите, что если A^2 самосопряжен в существенном на $D(A^2)$, то A самосопряжен в существенном. [*Указание*. Сначала докажите, что $(A^*)^2 \subset \subset (A^2)^*$.]

29. Пусть A—самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Докажите, что $\psi \in \mathcal{H}$—аналитический вектор оператора A тогда и только тогда, когда $f(t) = e^{itA}\psi$ есть сужение на вещественную ось функции, аналитической в полосе $|\operatorname{Im} t| < b$ с некоторым $b > 0$.

30. Цель этой задачи—доказательство теоремы фон Неймана (теоремы VIII.14). Пусть U, V удовлетворяют соотношениям Вейля $U(t)V(s) = e^{its}V(s)U(t)$. Пусть $\alpha > 0$, и пусть f имеет вид $f(s, t) = s^n t^m \exp(-\alpha(s^2 + t^2))$. Положим для $\psi \in \mathcal{H}$

$$W_\psi(f) = \int f(s, t)\, U(t)\, V(s)\, \psi\, ds\, dt.$$

   (a) Докажите, что множество $\{W_\psi(f) \mid \psi \in \mathcal{H}\}$ тотально в $\mathcal{H}$. Пусть D—конечная линейная оболочка $\{W_\psi(f)\}$.
   (b) Докажите, что $U(t_0) W_\psi(f) = W_\psi(f(s, t - t_0))$ и что
   $$V(s_0) W_\psi(f) = W_\psi(f(s - s_0, t)\, e^{-its_0}),$$
   а затем воспользуйтесь этим, чтобы доказать, что каждый W_ψ есть аналитический вектор для P и для Q.
   (c) Докажите, что $PW_\psi(f) = W_\psi(i\partial_t f)$ и что $QW_\psi(f) = W_\psi(i\partial_s f) + W_\psi(-tf)$. Воспользуйтесь этим для доказательства того, что D есть множество аналитических векторов оператора $N = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2 - 1)$.
   (d) Пусть $A = \sqrt{2}(Q + iP)/2$. Докажите, что A и A^* определены на $C^\infty(N)$ и отображают $C^\infty(N)$ в себя. [*Указание*. Воспользуйтесь методом § X.5.] Докажите, что $N = A^*A$ на векторах из $C^\infty(N)$.
   (e) Пусть $\psi \neq 0$ принадлежит области значений спектрального проектора $E_{(n-1,\, n]}$ для N. Докажите, что $N^m A\psi = A(N - 1)^m \psi$.
   (f) В условиях (e) докажите, что
   $$(n-1)(n-2)^m \|\psi\|^2 < (A\psi, N^m A\psi) \leqslant n(n-1)^m \|\psi\|^2,$$
   и придите к выводу, что $A\psi$ принадлежит области значений спектрального проектора $E_{(n-2,\, n-1]}$ и что $A\psi \neq 0$, если $n \geqslant 1$.
   (g) Докажите, что если ψ удовлетворяет условиям из (e), то $A^n\psi = \varphi \neq 0$, однако $A\varphi = 0$. Докажите также, что $N\psi = n\psi$ и что $\psi = (1/n!)(A^*)^n \varphi$.
   (h) Посредством выбора ортонормированного базиса для $\{\varphi \mid A\varphi = 0\}$ завершите доказательство теоремы фон Неймана.

31. Воспользуйтесь идеями предыдущей задачи для того, чтобы доказать, что функции Эрмита составляют базис в $L^2(\mathbb{R}, dx)$.

†*32.* Восстановите подробности всех утверждений относительно нижних граней и индексов дефекта примера 1 в § X.3.

33. (a) Пусть $\langle A_1, \ldots, A_n\rangle$ — набор n симметрических операторов на плотном множестве $D \subset \mathcal{H}$. Назовем $\langle A_1, \ldots, A_n\rangle$ замкнутым, если D с нормой $|||\psi||| = \sum_{i=1}^{n} \|A_i\psi\| + \|\psi\|$ есть банахово пространство. Докажите, что всякий такой набор имеет наименьшее замкнутое расширение.

(b) Пусть $\langle A_1, \ldots, A_n\rangle$ — набор n симметрических операторов, замкнутый в смысле (a). Докажите, что оператор $\sum_{i=1}^{n} A_i^* A_i$, определенный на $\{\psi \mid \psi \in D,\ A_i\psi \in D(A_i^*)\}$, самосопряжен.

(c) Пусть $\mathbf{A}(x)$ есть $\mathbb{R}^3$-векторнозначная функция на $\mathbb{R}^3$, локально квадратично интегрируемая, и пусть $V(x)$ — положительная функция, локально принадлежащая L^1. Найдите «естественное» определение для

$$H = -\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + V.$$

†*34.* Пусть q_n — некоторое перечисление рациональных чисел, и пусть a — квадратичная форма на $C_0^\infty(\mathbb{R})$, заданная равенством

$$a(\psi, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \overline{\psi(q_n)}\, \varphi(q_n).$$

Пусть $N = -d^2/dx^2 + 1$ на $L^2(\mathbb{R})$.

(a) Докажите, что для всех φ, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и некоторой константы D

$$|a(\varphi, \psi)| \leqslant D \|N^{1/2}\varphi\| \cdot \|N^{1/2}\psi\|,$$

и выведите отсюда, что существует оператор A на $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{+1}, \mathcal{H}_{-1})$, ассоциированный с a.

(b) Докажите, что $\hat{A}$ имеет область определения $D(\hat{A}) = \{0\}$.

35. Пусть N — самосопряженный оператор и $N \geqslant 1$. Предположим, что a — симметрическая квадратичная форма с областью определения $Q(a) = D(N^2)$ и выполняются условия (i) $\pm a \leqslant cN^2$; (ii) $\pm i[N, a] \leqslant dN$ (как формы на $D(N^2)$, причем мы воспользовались (i), чтобы расширить a до формы на $D(N)$).

(a) Для φ, $\psi \in D(N^2)$ докажите, что

$$a(\varphi, \psi) = a(N^{-1}\varphi, N\psi) - [a, N](N^{-1}\varphi, \psi),$$

и заключите отсюда, что $|a(\varphi, \psi)| \leqslant (c+d)\|\varphi\| \cdot \|N^2\psi\|$.

(b) Докажите, что существует симметрический оператор A, определенный на $D(N^2)$ и такой, что AN^{-2} ограничен и $(\varphi, A\psi) = a(\varphi, \psi)$ для всех φ, $\psi \in D(N^2)$.

(c) Для всякого $\lambda > 0$ определите квадратичную форму $\delta(\lambda)$ на $\mathscr{H}$ формулой

$$\delta(\lambda)=\lambda^2(N+\lambda)^{-2}[N, a](N+\lambda)^{-1}+\lambda^2(N+\lambda)^{-1}[N, a](N+\lambda)^{-2}.$$

Докажите, что $\delta(\lambda)$ — антисимметрическая форма, ограниченная величиной $\|\delta(\lambda)\|\leqslant 2d$.

Пусть $\Delta(\lambda)$ обозначает кососимметрический оператор, ассоциированный с δ.

(d) Докажите, что $\|\Delta(\lambda) N^{-1}\|\longrightarrow 0$ при $\lambda\longrightarrow\infty$, и заключите отсюда, что $\Delta(\lambda)\longrightarrow 0$ сильно при $\lambda\longrightarrow\infty$.

(e) Взяв матричные элементы, докажите, что для любого $\theta\in D(A^*)$
$$A[\lambda^2(N+\lambda)^{-2}]\theta=[\lambda^2(N+\lambda)^{-2}]A^*\theta+\Delta(\lambda)\theta.$$

(f) Пусть $\theta(\lambda)=\lambda^2(N+\lambda)^{-2}\theta$. Докажите, что $\theta(\lambda)\longrightarrow\theta$, $A\theta(\lambda)\longrightarrow A^*\theta$, и выведите отсюда, что A самосопряжен в существенном.

Примечание. Приведенное выше обобщение коммутаторной теоремы Нельсона есть частный случай теоремы Джаффе, которая позволяет заменить $\pm a\leqslant cN^2$ на $\pm a\leqslant cN^m$ с некоторым фиксированным m; см. статью Макбрайена, цитированную в Замечаниях к § X.5.

36. Предположим, что каждая компонента $\mathbf{A}$ есть вещественнозначная функция в $L^3(\mathbb{R}^3)+L^\infty(\mathbb{R}^3)$ и что V лежит в $R+L^\infty(\mathbb{R}^3)$, где R обозначает класс Рольника. Для φ, $\psi\in Q(\Delta)$ определим

$$M(\varphi, \psi)=\left(\frac{1}{i}\nabla\varphi, \mathbf{A}\psi\right)+\left(\mathbf{A}\varphi, \frac{1}{i}\nabla\psi\right)+(\mathbf{A}\varphi, \mathbf{A}\psi).$$

Докажите, что M есть возмущение, ограниченное относительно формы $-\Delta$ с относительной гранью нуль, и заключите, что существует единственный самосопряженный оператор H, такой, что $Q(H)=Q(\Delta)$ и

$$(\varphi, H\psi)=(\varphi, -\Delta\psi)+M(\varphi, \psi)+(\varphi, V\psi).$$

37. Распространите теорему X.22 и задачу 36 на случай многих тел.

38. Примените методы § X.4 и § X.5, чтобы доказать, что оператор из $L^2(\mathbb{R}^{3N+3})$

$$-(2M_0)^{-1}(\partial_0-ie\mathbf{A})^2-(2m)^{-1}\sum_{n=1}^{N}(\partial_n-ie\mathbf{A})^2-Ne^2\sum_{n=1}^{N}|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_0|^{-1}+$$
$$+\frac{1}{2}e^2\sum_{n\neq m}|\mathbf{x}_n-\mathbf{x}_m|^{-1}+e\mathbf{E}_0\cdot\left(\mathbf{x}_0-\sum_{n=1}^{N}\mathbf{x}_n\right)$$

в существенном самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^{3N+3})$, если $\mathbf{A}\in C^1(\mathbb{R}^3)_{\text{loc}}$.

†*39.* Покажите на примере, что самосопряженный оператор A может иметь область самосопряженности в существенном, не пересекающуюся с $D(A^2)$.

40. Пусть $A=i\,d/dx$ с областью определения $D(A)=\{\varphi\in L^2(0, 1)\,|\,\varphi\in AC[0, 1], \varphi'\in L^2(0, 1)$ и $\varphi(0)=\varphi(1)\}$. Оператор A самосопряжен. Пусть $D=\{\varphi\in L^2[0, 1]\,|\,\varphi$ имеет периодическое аналитическое продолжение на все $\mathbb{C}$ с периодом по x, равным единице, и $\varphi(0)=0=\varphi(1)\}$.

(a) Докажите, что D есть плотное множество аналитических векторов для A.

(b) Будет ли оператор $A\restriction D$ самосопряжен в существенном?

41. Пусть $U(a, R)$ — одномерное представление трехмерной специальной евклидовой группы. Показав, что спектр импульса должен быть инвариантен относительно вращений, и пользуясь тем, что $SO(3)$ не имеет нетривиальных одномерных представлений, докажите, что $U(a, R) = 1$ при всех a, R.

†*42.* Цель этой задачи — доказательство теоремы X.40.

(a) Пусть φ — полуаналитический вектор для $A \geqslant 0$. Допустим, что $\tilde{A} \geqslant 0$ есть самосопряженное расширение A_φ на $\mathcal{H}_\varphi$ (обозначения см. в § X.6). Докажите, что $\cos(t\tilde{A}^{1/2})$ однозначно определен числами $(\psi, A_\varphi^n \psi)$, где $\psi \in D_\varphi$. Заключите, что существует не более чем одно положительное самосопряженное расширение оператора A_φ.

(b) Докажите, что существует не более чем одно полуограниченное расширение оператора A_φ.

(c) Примените теорему X.24, чтобы сделать вывод, что A_φ в существенном самосопряжен.

(d) Докажите теорему X.40, применяя лемму Нуссбаума.

†*43.* (a) Докажите часть (b) теоремы X.41. [*Указание.* Пусть $\mathcal{P}_n$ — полиномы степени n по $\Phi_S(f)$. Докажите по индукции, что $\mathcal{P}_n \Omega_0$ плотно в $\mathcal{H}_s^{(n)}$.]

(b) Докажите часть (a) (iii) теоремы X.43.

†*44.* Докажите, что отображение E: $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) \longrightarrow L^2(H_m, d\Omega_m)$, определенное формулой $Ef = \sqrt{2\pi}\hat{f} \restriction H_m$, имеет плотную область значений.

45. Докажите, что в смысле квадратичных форм на $D_{\mathcal{S}} \times D_{\mathcal{S}}$

$$N = \int_{\mathbb{R}^3} a^\dagger(p)\, a(p)\, dp,$$

$$H_0 \equiv d\Gamma(\mu) = \int_{\mathbb{R}^3} \mu(p)\, a^\dagger(p)\, a(p)\, dp.$$

†*46.* Докажите (X.76), (X.78), (X.79).

47. Докажите, что если $g \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leqslant 2$, то $\hat{g}(\sum k_i) \prod_{i=1}^{n} \mu(k_i)^{-1/2} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. [*Указание.* Примените неравенства Хаусдорфа — Юнга и Юнга.]

48. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство и $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность коммутирующих самосопряженных операторов. Пусть D — плотная область, содержащаяся в области определения каждого A_i и инвариантная относительно действия каждого A_i. Пусть $\psi_0 \in D$. Определим рекурсивно произведение $\circ A_1 \ldots A_n \circ$, положив $\circ A_1 \ldots A_n \circ = A_1 \ldots A_n + P(A_1, \ldots, A_n)$, где $P(A_1, \ldots, A_n)$ — полином полной степени $n-1$ и степени 1 по каждой отдельной переменной, так что

$$((\circ A_1 \ldots A_n \circ)\psi_0, (\circ A_{i_1} \ldots A_{i_m} \circ)\psi_0) = 0$$

для всякого $\{i_1, \ldots, i_m\} \underset{\neq}{\subset} \{1, \ldots, n\}$ и $((\circ A_1 \ldots A_n \circ)\psi_0, \psi_0) = 0$.

(a) Покажите, что $\circ A_1 \ldots A_n \circ$ однозначно определено для каждого $n \geqslant 1$.

(b) Покажите, что если φ — каноническое поле на $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$, $f_n \in \mathcal{H}_C$ и $\psi_0 = \Omega_0$, то

$$\circ\varphi(f_1)\ldots\varphi(f_n)\circ = :\varphi(f_1)\ldots\varphi(f_n):.$$

(c) Покажите, что для каждого n викова степень канонического поля есть обычная степень плюс полином низшей степени по обычным степеням, и наоборот.

(d) Покажите, что $:\varphi_m(x, n)^4:$ (введенное при доказательстве теоремы X.45) можно записать в виде

$$:\varphi_m(x, n)^4: = \varphi_m(x, n)^4 - c_1\varphi_m(x, n)^2 - c_2,$$

где c_1 и c_2 зависят от n, но не от x.

Пусть A — инфинитезимальный генератор сжимающей полугруппы на банаховом пространстве X. Покажите, что для всех $\varphi \in X$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} (1+(t/n)A)^{-n}\varphi = e^{-tA}\varphi.$$

Литература. Книга Като по теории возмущений, стр. 593—596.

Пусть A — аккретивный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

(a) Покажите, что $J = (I - A)(I + A)^{-1}$ — замкнутый сжимающий оператор (не обязательно всюду определенный).

(b) Покажите, что аккретивные расширения оператора A находятся во взаимно однозначном соответствии со сжимающими расширениями оператора J.

(c) Примените (a) и (b) и докажите, что максимальный аккретивный оператор в гильбертовом пространстве порождает сжимающую полугруппу.

Пусть $T(t)$ — сильно непрерывная полугруппа на банаховом пространстве X. Определим $\omega_0 = \inf_{t>0} t^{-1}\log\|T(t)\|$.

(a) Докажите, что $\omega_0 = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\log\|T(t)\|$.

(b) Докажите, что для любого $\omega_1 > \omega_0$ существует такая константа M, что $\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega_1 t}$ при всех $t > 0$.

Пусть A — аккретивный оператор на банаховом пространстве X. Докажите, что A замыкаем. [*Указание.* Если A не замыкаем, то существует такая последовательность $\varphi_n \in D(A)$, что $\varphi_n \to 0$ и $A\varphi_n \to \psi$, причем $\|\psi\| = 1$. Пусть $\eta \in D(A)$ и $\|\eta\| = 1$, и пусть $\|\eta - \psi\| > 1/2$. Пусть l_n — последовательность нормированных касательных функционалов векторов $\eta + c\varphi_n$. Применив теорему Алаоглу, получите противоречие для подходящего $c > 0$.]

Докажите, что $e^{\Delta t}$ — непрерывная L^p-сжимающая полугруппа, применяя неравенство Юнга и явную форму для ядра.

Пусть $q(x)$ — ограниченная вещественнозначная непрерывная функция. Докажите, что $e^{t(\Delta - q)}$ сохраняет положительность на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Восполните детали доказательства теоремы X.47b.

Докажите теорему X.53, применяя технику теорем X.12 и X.50. [*Указание.* Сначала докажите, что при данном $\theta_1 < \theta$ можно выбрать $\omega > 0$ так, что $\|B(A - (\lambda - \omega))^{-1}\| \leqslant 1/2$ при всех $\lambda \notin \overline{S}_{\pi/2-\theta_1}$.]

57. (a) Дайте прямое доказательство того, что

$$(e^{z\Delta}f)(x) = (4\pi z)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4z}\right) f(y)\, dy$$

есть ограниченная голоморфная полугруппа с углом $\pi/2$ на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$.

(b) Непосредственно докажите, что в операторном смысле на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство

$$\|\partial_i e^{t\Delta}\| \leqslant Ct^{-1/2}.$$

Заключите, что $\partial_i(-\Delta+1)^{-1}$ ограничен на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$, так что $D(\Delta) \subset D(\partial_i)$ в смысле операторов на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$.

†58. Докажите следствие 2 теоремы X.52.

59. Пусть $S(s) = e^{-sB}$ и $T(t) = e^{-tA}$ — сжимающие полугруппы на банаховом пространстве X. Допустим, что для всех $s > 0$ и $t > 0$ выполняется равенство $e^{-sB}e^{-tA} = e^{-tA}e^{-sB}$. Тогда $R(t) = e^{-tB}e^{-tA}$ — сильно непрерывная полугруппа. Докажите, что генератор C полугруппы $R(t)$ удовлетворяет условию

$$(I+C)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}+iy+A\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}-iy+B\right)^{-1} dy.$$

60. Пусть $K_1(\mathbb{R}^3)$ — замыкание $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ по норме $\|\varphi\|_1^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\varphi|^2\, dx$, и пусть $\mathscr{H} = K_1(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$ с внутренним произведением

$$(\langle f_1, f_2\rangle, \langle g_1, g_2\rangle) = \int_{\mathbb{R}^3} (\overline{\nabla f_1}\cdot\nabla g_1 + \bar{f}_2 g_2)\, dx.$$

Пусть A — оператор $\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$ с областью определения, состоящей из всех пар $\langle f_1, f_2\rangle$, таких, что $f_1, f_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$.

(a) Покажите, что iA симметричен.

(b) Покажите, что iA самосопряжен в существенном, найдя его индексы дефекта: $\langle 0, 0\rangle$.

(c) Покажите, что $D((\overline{iA})) = \{\langle f_1, f_2\rangle \mid \Delta f_1 \in L^2(\mathbb{R}^3),\ f_2 \in K_1(\mathbb{R}^3)\}$.

(d) Пусть $U(t) = e^{i(\overline{iA})t} = e^{-t\bar{A}}$, и пусть $\langle u_1(x,t), u_2(x,t)\rangle = U(t)\langle f_1, f_2\rangle$ для $\langle f_1, f_2\rangle \in D(\bar{A})$. Докажите, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) u_1(x,t) = 0, \quad \|u_1(x,t) - f_1(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \longrightarrow 0$$

и

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t} u_1(x,t) - f_2(x)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \longrightarrow 0 \text{ при } t \longrightarrow 0.$$

61. Пусть $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ — семейство операторов на рефлексивном банаховом пространстве X, таких, что

(i) $T(t+s) = T(t)\,T(s)$,

(ii) $\bigcup_{t>0} \operatorname{Ran}(T(t))$ плотно в X,

(iii) $l(T(t)\varphi)$ — измеримая функция t для каждого фиксированного $\varphi \in X$, $l \in X^*$.

(iv) $\|T(t)\| \leqslant 1$ при всех t.

Докажите, что $T(t)$ — сильно непрерывная функция t. [*Указание*. Подражайте доказательству теоремы VIII.9.]

Пусть $A^\dagger$ и A — операторы, определенные в примере 2 § 6, и пусть $H_0 = A^\dagger A + 1/2$, $V = x^4 = ((A + A^\dagger)/\sqrt{2})^4$.

(a) До жите, что

$$\left\| \left[H_0^{3/2}, \left[H_0^{3/2}, V \right] \right] \varphi \right\| \leqslant e_1 \| H_0^3 \varphi \| + e_2 \| \varphi \|$$

при некоторых постоянных e_1 и e_2.
[*Указание*. Рассмотрите каждый член в V по отдельности и для каждого члена докажите эту оценку на n-ю функцию Эрмита.]

(b) Воспользуйтесь (a) и покажите, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое M_2, что выполняется (X.109).

(c) Примените те же методы к доказательству (X.110).

(a) Докажите, что слабая топология на единичном шаре в сепарабельном гильбертовом пространстве метризуема.

(b) Сделайте вывод, что шары в сепарабельном гильбертовом пространстве слабо секвенциально полны.

Пусть

$$\tilde{p}(x, y; t) = (4\pi D t)^{-n/2} e^{-|x-y|^2/4Dt}$$

при некотором D, таком, что $\operatorname{Re} D \geqslant 0$, $D \neq 0$. Предположим, что существует такая мера μ на пространстве путей Ω из § X.11, что $\int \varphi \, d\mu$ задается правой частью (X.122), но с p, замененным на $\tilde{p}$ для $\varphi \in C_{\text{fin}}(\Omega)$. Пусть при данных $t_1, \ldots, t_n$ те функции из $C_{\text{fin}}(\Omega)$, которые имеют вид $F(\omega(t_1), \ldots, \omega(t_n))$, обозначены через $C^{t_1, \ldots, t_n}$.

(i) Докажите, что если $\operatorname{Re} D = 0$, то

$$\sup \left\{ \left| \int \varphi \, d\mu \right| \,\middle|\, \|\varphi\|_\infty = 1, \ \varphi \in C^{t_1}(\Omega) \right\} = \infty,$$

и сделайте вывод, что такой меры не существует.

(ii) Докажите, что если $\operatorname{Re} D > 0$, то

$$\sup \left\{ \left| \int \varphi \, d\mu \right| \,\middle|\, \|\varphi\|_\infty = 1, \ \varphi \in C^{t_1, \ldots, t_n}(\Omega) \right\} = (|D|/\operatorname{Re} D)^n,$$

и сделайте вывод, что такой меры со знаком не существует, за исключением случая $\operatorname{Im} D = 0$.

Пусть Ω_α — пути, непрерывные по Гёльдеру порядка α с некоторым $\alpha < 1/2$. Определим функции x и x_n из $\Omega \times [0, \infty)$ в $\mathbb{R}$, полагая

$$x(\omega, t) = \begin{cases} \omega(t), & \text{если } \omega \in \Omega_\alpha, \\ 0 & \text{во всех других случаях} \end{cases}$$

и

$$x_n(\omega, t) = \begin{cases} \omega(m/n), & \text{если } \omega \in \Omega_\alpha \text{ и } m/n \leqslant t < (m+1)/n, \\ 0 & \text{во всех других случаях.} \end{cases}$$

(a) Докажите, что каждая $x_n(\omega, t)$ измерима по Борелю.

(b) Докажите, что $x_n(\omega, t) \longrightarrow x(\omega, t)$ поточечно на $\Omega\times[0, \infty)$ при $n \longrightarrow \infty$, и заключите, что $x(\cdot, \cdot)$ измерима по Борелю.

(c) Пусть S имеет меру Лебега нуль в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\Omega_S = \{\langle\omega, t\rangle \in \Omega_\alpha \times \times [0, \infty) \mid \omega(t) \in S\}$. Докажите, что Ω_S измеримо.

(d) Для каждого $t > 0$ докажите, что $\mu_x\{\omega \mid \langle\omega, t\rangle \in \Omega_S\} = 0$, и с помощью теоремы Фубини сделайте вывод, что $(d\mu_x \otimes dt)(\Omega_S) = 0$.

(e) Завершите доказательство леммы, следующей за теоремой X.67, показав, что $\{t \mid \langle\omega, t\rangle \in \Omega_S\}$ имеет меру Лебега нуль для почти всех $\omega \in \Omega$.

66. Пусть H_0 — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть $t \longmapsto V(t)$ — сильно непрерывное отображение из $\mathbb{R}$ во множество ограниченных операторов в $\mathcal{H}$, удовлетворяющих условиям

(1) $V(t)$: $D(H_0) \longrightarrow D(H_0)$ и $[H_0, V(t)]$ — ограниченный оператор для каждого t,

(2) $\|[H_0, V(t)]\|$ локально ограничена.

(a) С помощью разложения Дайсона, переходя к представлению взаимодействия, докажите, что если $\psi \in D(H_0)$, то $\varphi_s(t) = e^{-iH_0t}\tilde{U}(t, s)\psi$ есть сильное решение уравнения

$$\frac{d}{dt}\varphi_s(t) = -i(H_0 + V(t))\varphi_s(t), \qquad \varphi_s(s) = \psi.$$

(b) Докажите утверждение (a), показав, что $H_0 + V(t)$ удовлетворяет условиям теоремы X.70.

67. Пусть H_0 — самосопряженное расширение оператора $-d^2/dx^2$ в $L^2[0, \pi]$, отвечающее граничным условиям $\varphi(0) = 0 = \varphi(\pi)$. Пусть $V(x, t) = \alpha(t)x$, где $\alpha(t)$ — положительная C^∞-функция с носителем в интервале $[0, t_0]$, удовлетворяющая условию $\int \alpha(t)\,dt = 1$.

(a) С помощью метода примера 1 в § X.12 найдите верхнюю и нижнюю грани для вероятности перехода в момент времени t_0 из первого возбужденного состояния в основнсе состояние.

(b) Почему эти оценки справедливы и для всех $t > t_0$?

†*68.* (a) Докажите, что предположения о $q(x, t)$ в примере 2 § 12 допускают применение теоремы X.70.

(b) Докажите, что предположения о $t \longmapsto V_1(t)$ и $t \longmapsto V_2(t)$ в теореме X.71 допускают применение теоремы X.70.

69. Пусть $U(t, s)$ — сильно непрерывный унитарный пропагатор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Докажите, что

$$(\hat{U}(\sigma)f)(t) = U(t, t-\sigma)f(t-\sigma)$$

есть сильно непрерывная унитарная группа в $L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$.

70. При соответствующих предположениях о $V(x, t)$ докажите формулу Фейнмана — Каца в случае зависящего от времени потенциала.

Покажите, что если f и g вещественнозначны, то компоненты $W(t)\langle f,g\rangle$ вещественнозначны при всех t. Здесь $W(t)$ — унитарная группа, определенная в § X.13. Воспользуйтесь этим, чтобы показать, что решение уравнения (X.138) вещественнозначно, если вещественнозначны начальные данные.

Пусть выполнены условия теоремы X.72. Расширьте J до отображения $\tilde{J}$ из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$, удовлетворяющего условиям (H_0) и (H_0^{L}). Предположим, что $\varphi(s)$ — непрерывная функция на $[0, t]$ со значениями в $\mathscr{H}$, удовлетворяющая интегральному уравнению (X.143), в котором J заменено на $\tilde{J}$. Докажите, что на самом деле φ принимает значения в $D(A)$, непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (X.142), если $\varphi(0)\in D(A)$.

Докажите все оценки высшего порядка, необходимые для доказательства теоремы X.76.

Покажите, что если каждое локальное решение $\varphi(t)$ уравнения (X.142) подчиняется условию $\operatorname{Re}\int_0^t (J(\varphi(s)), \varphi(s)), ds \leqslant 0$, то эти решения существуют глобально по t.

Пользуясь теоремами из § X.12, докажите глобальное существование, единственность, гладкость, непрерывную зависимость от начальных данных и конечность скорости распространения решения уравнения

$$u_{tt}-\Delta u+m^2u=-\lambda u^{2n+1},$$
$$u(0, x)=f(x),$$
$$u_t(0, x)=g(x),$$

где $\lambda > 0$, $x\in\mathbb{R}^2$ и $n=0, 1, 2, \ldots$.

Чтобы решать уравнение при нулевой массе в $\mathbb{R}^3$

$$u_{tt}-\Delta u=-\lambda |u|^2 u, \quad \lambda > 0,$$
$$u(0, x)=f(x),$$
$$u_t(0, x)=g(x),$$

перепишем его, добавив к обеим частям линейный член:

$$u_{tt}-\Delta u+m^2u=-\lambda |u|^2 u+m^2u, \qquad m > 0,$$

а затем переформулируем задачу, как в § X.13, перейдя к уравнению первого порядка по t:

$$\varphi'(t)+iA\varphi(t)=J(\varphi(t)),$$
$$\varphi(0)=\langle f, g\rangle,$$

где $J(\varphi(t))=J(\langle u(t), v(t)\rangle)=\langle 0, -\lambda |u|^2 u+m^2u\rangle$.

(a) Покажите, что оценки лемм 4 и 5 выполняются с этим новым J, так что в силу теоремы X.72 мы получаем локальное существование и единственность решения.

(b) Покажите, что на любом интервале $[0, T)$, где существует решение, энергия

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+|u_t|^2)\,dx+\frac{\lambda}{4}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^4\,dx$$

постоянна.

(c) Покажите, что на любом интервале $[0, T)$, где существует решение, $\| u(t)\|_2 \leqslant C+t\sqrt{2E}$.

(d) Воспользуйтесь (b) и (c) и покажите, что если $T<\infty$, то решение $\varphi(t)$ ограничено по норме на $[0, T)$. Значит, по теореме X.74 существует глобальное решение.

(e) Убедитесь в том, что доказательства гладкости и равенства единице скорости распространения проходят здесь так же, как и в случае положительной массы.

†77. Докажите, что

$$\int h\{f, g\}\,dx = \int \{h, f\}\,g\,dx$$

для любых $f, g, h \in C_0^1(\mathbb{R}^{6N})$.

†78. Докажите предложение, предшествующее теореме X.78.

79. Пусть $C_{0,\infty}(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных функций, исчезающих в нуле и на ∞. Пусть $D=d/dx$. Докажите, что D и $-D$ на естественной области определения аккретивны, однако лишь один из них порождает сжимающую полугруппу.

80. Пусть A, J и $\mathscr{H}$ удовлетворяют условиям теоремы X.74 (за тем исключением, что не требуется, чтобы J удовлетворяло условиям части (b) теоремы X.73). Допустим, что для всех k решения уравнения (X.143) равномерно ограничены при всех $\|\varphi(0)\|\leqslant k$. Докажите, что для каждого $j=0, 1, \ldots, n$ и каждого k существует монотонно возрастающая (всюду конечная) функция $d_{j,k}(\cdot)$ на $(0, \infty)$, такая, что

$$\| A^j\varphi_1(t) - A^j\varphi_2(t)\| \leqslant d_{j,k}(|t|)\,\|\varphi_1(0)-\varphi_2(0)\|$$

для всех решений φ_i уравнения (X.143), для которых $\|\varphi_i(0)\|\leqslant k$. [*Указание*. Воспользуйтесь идеей теоремы X.75 и приемом леммы 1.]

81. Пусть C — комплексное сопряжение в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть A — симметрический оператор, причем $C: D(A)\to D(A)$ и $AC=CA$. Расширение B оператора A называется **вещественным**, если $C: D(B)\to D(B)$ и $BC=CB$.

(a) Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ — ортонормированный базис в дефектном пространстве $\mathscr{K}_+$ оператора A. Определим $J: \mathscr{K}_+ \to \mathscr{K}_+$ формулой $J\left(\sum a_n\varphi_n\right) = \sum \overline{a}_n\varphi_n$. Докажите, что если U — унитарный оператор из $\mathscr{K}_+$ в $\mathscr{K}_-$, то соответствующее самосопряженное расширение A_U вещественно тогда и только тогда, когда $JCU: \mathscr{K}_+\to\mathscr{K}_+$ имеет в базисе $\{\varphi_n\}$ матрицу, совпадающую с транспонированной к ней.

(b) Докажите, что A всегда имеет вещественные самосопряженные расширения.

(c) Докажите, что если индексы дефекта A равны единице, то всякое его самосопряженное расширение вещественно. Убедитесь в этом на примере оператора $-d^2/dx^2$ на $C_0^\infty(0, \infty)\subset L^2(0, \infty)$.

(d) Докажите, что если A имеет индексы дефекта 2 или более, то A имеет самосопряженные расширения, которые не являются вещественными. Убедитесь в этом на примере оператора $-d^2/dx^2$ на $C_0^\infty(0, 1)\subset L^2(0, 1)$.

УКАЗАНИЯ ЧИТАТЕЛЮ

В этой главе развита техника доказательства существования решений основных динамических уравнений для широкого круга разнообразных физических задач. Мы интересуемся приложениями к квантовой механике и квантовой теории поля, а в этих случаях существование динамики «эквивалентно» самосопряженности гамильтониана. Таким образом, техника здесь сводится к методам доказательства самосопряженности заданного оператора. В следующей таблице перечислены разделы, где доказывается самосопряженность разных физических операторов.

	Разделы
Гамильтонианы атомов	2
Гамильтонианы эффекта Штарка	5, 1 (дополнение) для одномерного случая
Гамильтонианы эффекта Зеемана	4
Ангармонический осциллятор	2, 4, 6, 9, 10
Квантовополевые гамильтонианы	7, 9
Квантовополевые операторы	5, 6, 7

Читателю не обязательно знать весь материал гл. IX, прежде чем приступать к изучению гл. X. Однако он должен быть знаком с основными свойствами преобразования Фурье, изложенными в § IX.1 и IX.2, и свойствами свободного гамильтониана, которые обсуждаются в § IX.7, так как этот материал все время привлекается в гл. X без каких-либо пояснений. Остальные теоремы о преобразовании Фурье (например, теоремы Пэли—Винера и интерполяционные теоремы) тоже применяются, но читатель в случае необходимости может легко вернуться к соответствующим местам гл. IX.

Ниже мы опишем содержание гл. X раздел за разделом, а пока дадим общее резюме. Основные свойства самосопряженных операторов обсуждаются в § VIII.3 и § X.1 и X.2. Читатель, интересующийся квантовой механикой, должен знать еще содержание § VIII.11 и § 1 (дополнение), 2, 3, 4, 5, 11 и 12 гл. X. Основные понятия квантовой теории поля рассмотрены в § IX.8 и X.7. Читатель, интересующийся квантовой теорией поля, должен познакомиться также с математическими методами, изложенными в § 5, 6, 9, 10 и 11 гл. X. Приемы установления самосопряженности можно применять для доказательства существования и регулярности решений некоторых типов дифференциальных уравнений в частных производных. Эти приложения рассматриваются в § 3, 8, 12 и 13 гл. X. Дополнение к § 1 содержит приложения к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

В § 1 описаны с помощью теории индексов дефекта замкнутые симметрические расширения симметрических операторов. Доказана теорема фон Неймана о том, что симметрический оператор, коммутирующий с оператором сопряжения, имеет самосопряженные расширения. В дополнении к § 1 рассмотрены критерии Вейля (предельная окружность—предельная точка) и проведено сравнение квантового и классического движений на полупрямой.

В § 2 доказана теорема Като—Реллиха о малых возмущениях самосопряженных операторов и теорема КЛМН о малых возмущениях форм. Теорема Като—Реллиха затем применяется для доказательства самосопряженности гамильтонианов атомов.

В § 3 и 4 применяются два различных понятия положительности. В § 3 изучаются положительные квадратичные формы и обсуждаются свойства расширения по Фридрихсу. В § 4 выводится неравенство Като для обобщенных функций, а затем оно применяется для доказательства того, что оператор $-\Delta+V$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, если V локально принадлежит L^2 и ограничен снизу. Далее эта техника применяется к доказательству самосопряженности гамильтониана эффекта Зеемана.

В § 5 показано, что если A мажорируется строго положительным оператором N и коммутатор $[A, N]$ достаточно мал, то A самосопряжен в существенном на любой существенной области оператора N. Затем этот результат применяется при доказательстве самосопряженности гамильтониана эффекта Штарка.

В § 6 доказан критерий Нельсона самосопряженности оператора в терминах аналитических векторов.

В § 7 определено свободное скалярное эрмитово бозе-поле с массой $m > 0$ и доказано, что оно удовлетворяет аксиомам Гординга—Вайтмана. Этот раздел следует читать совместно с § IX.8. Здесь вводится также Q-пространство и гамильтониан с пространственным обрезанием для теории поля с $(\varphi^4)_2$-взаимодействием. В дополнении к этому разделу показано, что для разных m свободные эрмитовы поля порождают неэквивалентные представления канонических коммутационных соотношений.

В § 8 рассмотрены естественные обобщения многих методов доказательства самосопряженности операторов на банаховы пространства. Описаны генераторы сжимающих полугрупп (теоремы Хилле—Иосиды и Люмера—Филлипса) и введены голоморфные полугруппы. Эта техника применяется для доказательства различных свойств решений уравнения теплопроводности.

В § 9 рассмотрен специальный класс полугрупп—гиперсжимающие полугруппы и доказана самосопряженность в существенном гамильтониана с пространственным обрезанием для квантовой теории поля с $(\varphi^4)_2$-взаимодействием.

В § 10 продолжается рассмотрение методов доказательства самосопряженности, связанных с понятием граф-предела, которое было начато в § VIII.7.

В § 11 рассмотрены интегралы Фейнмана по путям, интегрирование в функциональном пространстве и доказана формула Фейнмана—Каца.

В § 12 доказано существование решений уравнения $U'(t) = -A(t)U(t)$, где $A(t)$—соответствующее семейство операторов в банаховом пространстве. Этот результат применяется к решению уравнения Шредингера с зависящими от времени потенциалами и уравнения теплопроводности с зависящими от времени источниками и стоками.

В § 13 доказаны существование, гладкость и конечность скорости распространения решений нелинейного уравнения $(\square^2 + m^2)\, u = \lambda u^3$.

В § 14 совсем кратко описана переформулировка классической механики как некоторой задачи в гильбертовом пространстве.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ [1]

[1]) Цифра I перед номером страницы означает ссылку на том I.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ[1]

[1]) Цифра I перед номером страницы означает ссылку на том I.