

Aufgaben aus der Theoretischen Physik

Herausgegeben von
Prof. R. Seeliger



Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
1921

ISBN 978-3-663-03021-8 ISBN 978-3-663-04209-9 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-663-04209-9

Alle Rechte,

namentlich das Recht der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Copyright, 1921, by Springer Fachmedien Wiesbaden
Ursprünglich erschienen bei Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Germany
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1921

Vorwort.

Als der Verlag mit dem Plan an mich herantrat, eine nicht zu umfangreiche Sammlung von Aufgaben aus dem Gebiet der Theoretischen Physik herauszugeben, glaubte ich schon nach kurzer Überlegung und ermuntert durch die Meinung einer Reihe von Fachkollegen zuzusagen, insbesondere, als es gelungen war, die für einen einzelnen wohl zu umfangreiche Arbeit auf drei Mitarbeiter zu verteilen, von denen jeder nun die ihm besonders zusagenden und vertrauten Abschnitte übernehmen konnte. Bestimmend war, daß in der Tat eine Sammlung wie die vorliegende bisher fehlte und, soweit meine Erfahrung reicht, namentlich an den kleineren Universitäten Übungen und der selbständigen Lösung von Aufgaben im Anschluß an die Vorlesungen entschieden noch zu wenig Bedeutung beigemessen wird.

Die Einteilung des Stoffes war durch den Zweck, nämlich eine Ergänzung und Erläuterung zu den üblichen Vorlesungen über Theoretische Physik zu geben, von selbst vorgeschrieben; deshalb wurde auch von der Einbeziehung von Gebieten, die gewöhnlich wohl nur in Spezialvorlesungen behandelt werden (z. B. Radioaktivität und Ionisation der Gase, kinetische Theorie der Materie, Strahlungstheorie u. dgl.), abgesehen. Sehr viel schwieriger war es dagegen zu entscheiden, ob und wie Lösungen zu den Aufgaben gegeben werden sollten; eine eindeutige und alle befriedigende Beantwortung dieser Frage läßt sich — wie dies übrigens bereits die ganz verschiedenen Vorschläge einer Reihe von mir befragter erfahrener Kollegen zeigten — wohl überhaupt nicht geben. Nur darin, daß die Lösungen zu den gestellten Aufgaben überhaupt mitgeteilt werden müßten, stimmte die überwiegende Mehrzahl überein bzw. darin, daß die Vorteile der Mitteilung von Lösungen deren Nachteile überwiegen. So ist es gekommen, daß bezüglich der Form der Lösungen die vorliegende Sammlung etwas heterogen ausgefallen ist. Herr v. Mises hielt eine ausführliche Darstellung auch des Lösungsganges für das richtige, mir schien eine möglichst knappe Mitteilung nur der Endresultate das zweckmäßigste zu sein, während Herr Henning einen Mittelweg eingeschlagen hat. Ich glaube, daß hier erst die Praxis entscheiden kann, welche Form die geeignetste ist.

Im einzelnen habe ich zu den von mir bearbeiteten Abschnitten nur noch zu bemerken, daß ich das Ziel verfolgte, alle Teilgebiete zu behandeln, die physikalische Fragestellung gegenüber einer mehr mathematischen und formalen tunlichst in den Vordergrund zu stellen, zugleich aber für die verschiedenen theoretischen Methoden Beispiele zu geben. Nur Originalaufgaben zu geben, schien mir nicht angebracht, da viele Beispiele, zu deren Durchrechnung in der Vorlesung häufig keine Zeit ist, heute bereits zum festen Bestand einer vollständigen Darstellung der theoretischen Physik zu zählen sind und auch wohl kaum an Anschaulichkeit und instruktiver Wirkung von selbstgemachten übertroffen werden könnten. Die Anordnung innerhalb der einzelnen Unterabschnitte endlich dürfte wohl ohne Mühe zu erkennen sein und das Auffinden eines gewünschten spezielleren Teilgebietes ohne weiteres ermöglichen; so z. B. ist in Abschnitt I (Elektrostatik) die Reihenfolge gegeben durch die Schlagworte Kraftlinienbilder, Potential, Gleichgewichtsverteilungen, Energetik des Feldes, Feldkräfte, Kapazität.

Zum Schluß möchte ich Herrn Dr. G. Mierdel für die Hilfe beim Lesen der Korrekturen und dem Verlag für seine geduldige Mühe danken. Ich bitte alle Kollegen, mir durch die Mitteilung von Druckfehlern und Versehen und durch Vorschläge ihrerseits bei einer Vervollkommnung dieses Buches behilflich zu sein.

Greifswald, Dezember 1920.

R. Seeliger.

Vorwort

zu „Vektorrechnung und Wärmelehre“.

Die Aufgaben aus dem Gebiet der Vektorrechnung behandeln zunächst die elementaren Operationen der Addition und Multiplikation, sodann die differentialen Vektorfunktionen. Sie sind durchgehend auf den dreidimensionalen Raum beschränkt. Zu ihrer Lösung wird die Kenntnis der Vektorrechnung in dem Umfange vorausgesetzt, wie sie in der gewöhnlichen Mechanik und Elektrizitätslehre Anwendung findet. Auf die Probleme der Affinorrechnung wurde nicht eingegangen. Näheres findet man hierüber z. B. in dem Lehrbuch der Vektorrechnung von J. Spielrein, Stuttgart 1916, Verlag Konrad Wittwer, das auch für die Auswahl der einfacheren Aufgaben vorliegender Sammlung wertvolle Dienste leistete. — Mit wenigen Ausnahmen ist überall nur das rein Mathematische der Vektorrechnung betont, ohne auf physikalische Anwendungen einzugehen, die den späteren Kapiteln der Sammlung vorbehalten bleiben.

Auch für die Aufgaben aus der Thermodynamik war der Gesichtspunkt maßgebend, daß es für den Studierenden besonders darauf ankommt, die grundlegenden Kapitel dieser Lehre eingehend zu behandeln. So wurde ein großer Teil der Aufgaben aus den Gebieten gewählt, die Herr M. Planck in seinen „Vorlesungen über Thermodynamik“ in den ersten drei Abschnitten bespricht. Darüber hinaus sind die Anwendungen der beiden Hauptsätze auf Systeme von zwei Aggregatzuständen behandelt und schließlich kurz der Nernstsche Wärmesatz. Die Theorie der Lösungen und der Systeme beliebig vieler Komponenten ist zugunsten der übrigen Gebiete unberücksichtigt geblieben.

Die Lösungen der Aufgaben sind so ausführlich gegeben, daß die Herleitung des Resultates ohne Schwierigkeiten verfolgt werden kann, wenn die Aufgaben der Reihe nach durchgenommen werden.

Berlin, August 1920.

Henning.

Vorwort zu „Mechanik“.

Bei der Auswahl der Aufgaben war ich bemüht, die verschiedenen Stoffkreise, die zur allgemeinen Mechanik gezählt werden, möglichst gleichmäßig zu berücksichtigen. Weiter abliegende Gebiete, wie die technische Mechanik im engeren Sinn oder die astronomische Mechanik, sind darin nicht eingeschlossen. Innerhalb der sieben einzelnen Abschnitte wächst im allgemeinen die Schwierigkeit der Aufgaben von Anfang gegen Ende, doch wird das Urteil in diesem Punkte natürlich individuell sehr verschieden ausfallen müssen. Zwischen ganz einfachen Beispielen, wie sie leicht in der Vorlesung behandelt werden können, und größeren Problemen, die etwa als Examensarbeiten in Betracht kämen, habe ich die Mitte einzuhalten gesucht, die der Verwendung bei Seminarübungen oder bei selbständigem Studium an Hand eines Vorlesungsheftes entspricht. Durchwegs ist darauf geachtet, daß jeder Aufgabe eine wirkliche mechanische Fragestellung zugrunde liegt, bloße Einkleidungen von mathematischen Übungsbeispielen, etwa zur Einübung mathematischer Formeln oder Lehrsätze, sind sorgfältig vermieden. Ein großer Teil der Aufgaben erfordert überhaupt keine, oder nur sehr geringe mathematische Hilfsmittel zur Bearbeitung.

Die „Lösungen“ sind wesentlich ausführlicher mitgeteilt worden, als es in den anderen Abschnitten dieses Buches geschehen ist, weil mir das der Natur der mechanischen Probleme angepaßt erschien. Ich habe überall den Gedankengang der Bearbeitung, von der Aufstellung des mechanischen Ansatzes bis zur Ausrechnung, so knapp als möglich, aber, wie ich denke, auch genügend deutlich dargestellt. Manchem Leser wird vielleicht hier der Hinweis auf ein Lehrbuch willkommen sein, mit dessen Hilfe er etwaige Lücken seiner Kenntnisse ausfüllen kann; ich nenne da G. Hamel, Elementare Mechanik, Teubner 1912, die ich für die beste, ja vielleicht einzige, moderne Darstellung dieses Gebietes halte. Für die Durchsicht eines Teiles der Lösungen bin ich Herrn Dr. F. Zerner in Berlin zu Dank verpflichtet.

Berlin, August 1920.

Mises.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorwort	III
Inhaltsverzeichnis	VII

I. Teil: Aufgaben.

Vektorrechnung. (F. Henning)	1
Mechanik. (R. v. Mises.)	
I. Punktmechanik	7
II. Starrer Körper	11
III. Systeme starrer Körper	14
IV. Lebende Körper	18
V. Elastische Körper	20
VI. Hydro- und Aeromechanik	22
VII. Verschiedene Aufgaben	25
Elektrizität und Magnetismus. (R. Seeliger.)	
I. Elektrostatik	28
II. Magnetostatik	35
III. Stationäre Ströme	39
IV. Quasistationäre Vorgänge	44
Wärmelehre. (F. Henning)	50
Optik. (R. Seeliger.)	
I. Elektromagnetische Wellen	61
II. Brechung, Reflexion, Interferenz und Beugung	66
III. Geometrische Optik	69

II. Teil: Lösungen.

Vektorrechnung (F. Henning)	75
Mechanik (R. v. Mises)	83
Elektrizität und Magnetismus (R. Seeliger)	115
Wärmelehre (F. Henning)	127
Optik (R. Seeliger)	146

Erster Teil

Aufgaben



Vektorrechnung.

Alle gerichteten Größen werden durch deutsche Buchstaben ($\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, r \dots$), ihre absoluten Beträge durch entsprechende lateinische Buchstaben ($A, B, r \dots$) bezeichnet. Ein Vektor vom absoluten Betrage 1, Einheitsvektor, ist durch den Exponenten 0 charakterisiert ($\mathfrak{A}^0, \mathfrak{B}^0, r^0 \dots$). Die Einheitsvektoren in den drei Achsenrichtungen des rechtwinkligen Koordinatensystems heißen i^0, j^0, k^0 . Die skalaren Komponenten eines Vektors \mathfrak{A} nach den drei Koordinatenrichtungen sind A_x, A_y, A_z . — n sei ein von Ort zu Ort unveränderlicher Vektor; r ein Radiusvektor, der von einem festen Punkt nach allen Richtungen des Raumes gezogen wird. Ein skalares bzw. vektorielles Produkt wird durch runde bzw. eckige Klammern bezeichnet.

\oint bedeutet ein Integral über eine geschlossene Kurve oder eine geschlossene Fläche.

1. Welcher Vektor bildet mit den beiden Vektoren $3\mathfrak{A} - 2\mathfrak{B} - \mathfrak{C}$ und $3\mathfrak{B} - 2\mathfrak{C} - \mathfrak{A}$ ein Dreieck?
2. Gegeben sind die Vektoren $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$. Es sollen die Vektoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} konstruiert werden.
3. Subtrahiert man von einem Vektor \mathfrak{A} einen vertikal gerichteten Vektor $\mathfrak{B} = 3a\mathfrak{B}^0$, so erhält man einen horizontal gelegenen Vektor $\mathfrak{C} = 4a\mathfrak{C}^0$. Welche Größe und Richtung besitzt der Vektor \mathfrak{A} ?
4. Welches ist Richtung und Größe eines Vektors \mathfrak{A} , für dessen rechtwinklige Komponenten die Beziehungen $A_x = 3$; $A_y = 4$; $A_z = 5$ gelten.
5. Welchen Winkel bilden die Vektoren $\mathfrak{A} = i^0 S \cos \varphi + j^0 S \sin \varphi$ und $\mathfrak{B} = i^0 P \cos \varphi + j^0 P \sin \varphi$ mit einander?
6. Welches ist der zu $\mathfrak{A} = i^0 M \cos \varphi + j^0 M \sin \varphi$ gehörige Einheitsvektor und welches ist der absolute Betrag von \mathfrak{A} ?
7. Die Seiten eines Dreiecks werden dargestellt durch die drei Vektoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$. Durch welche Vektoren lassen sich die drei Mittellinien des Dreiecks darstellen?
8. Welche Richtung und Größe hat der Vektor \mathfrak{D} , wenn die Gleichung $a\mathfrak{A} + b\mathfrak{B} + c\mathfrak{C} + d\mathfrak{D} = 0$ besteht und die Vektoren $a\mathfrak{A}, b\mathfrak{B}, c\mathfrak{C}$ a) in einer Ebene liegen, b) sich zu einem Dreieck zusammensetzen lassen?

9. Ein Tetraeder wird durch drei Vektoren \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} bestimmt. Die Spitze des Tetraeders sei ihr gemeinsamer Anfangspunkt. Durch welchen Vektor ist die Verbindungslinie der Spitze des Tetraeders mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Grundfläche gegeben?
10. Welches ist das skalare Produkt zweier Vektoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} , die einen Winkel von 30° einschließen?
11. Man bilde das skalare Produkt von $A_x i^0 + B_x j^0$ mit $A_x j^0 + B_x k^0$.
12. Welche drei Möglichkeiten für die Größe und Lage der Vektoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} bestehen, wenn $(\mathfrak{A} \mathfrak{B}) = 0$?
13. Unter welchen Bedingungen ist die Gleichung $(\mathfrak{A} \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A} \mathfrak{C})$ erfüllt?
14. Welchen Winkel müssen die Vektoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} einschließen, damit gleichzeitig $2\mathfrak{A} - \mathfrak{B} \perp \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} - 2\mathfrak{B} \perp 2\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ sein kann?
15. Gegeben sind zwei Vektoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} . Wie dürfen sich die beiden Vektoren bewegen, damit ihr skalares Produkt konstant bleibt?
16. Vom Bezugspunkt O gehen die Radienvektoren r_1 bzw. r bzw. \mathfrak{R} zu dem Mittelpunkt einer Kugel vom Radius ϱ bzw. zu einem Punkt \bar{P} ihrer Oberfläche bzw. zu einem Punkt der Tangentialebene im Punkt P . Welche Beziehung gilt zwischen r_1 , r und \mathfrak{R} ?
17. Welchen Wert besitzt die Summe $S = (\mathfrak{A} \mathfrak{F}) + (\mathfrak{B} \mathfrak{F}) + (\mathfrak{C} \mathfrak{F})$, wenn \mathfrak{C} nur dadurch bestimmt ist, daß es sich mit \mathfrak{A} und \mathfrak{B} zu einem Dreieck zusammensetzen läßt.
18. Zwei Vektoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} der absoluten Beträge $A = a$ und $B = 2a$ schließen den Winkel $\varphi = 150^\circ$ ein. Wie groß ist ihr skalares, wie groß ihr vektorielles Produkt?
19. Es ist das skalare und vektorielle Produkt von $\mathfrak{A} + c\mathfrak{B}$ mit sich selbst zu bilden unter der Bedingung, daß $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}$ und $B = 2A$.
20. Wie liegt der Vektor \mathfrak{A} zu der durch \mathfrak{B} und \mathfrak{C} bestimmten Ebene, wenn $\mathfrak{A} \perp [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]$?
21. Welchen Wert hat $\mathfrak{B} = [A i^0 + C k^0, D i^0 + E k^0]$?
22. Wie ist die Summe $\mathfrak{D} = [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] + [\mathfrak{B} \mathfrak{C}] + [\mathfrak{C} \mathfrak{A}]$ zu einem Vektorprodukt zusammenzufassen?
23. Es sei $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{C} + \mathfrak{D}$ und $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{C} - \mathfrak{D}$ parallel. Welche Beziehungen bestehen zwischen den vektoriellen Produkten $[\mathfrak{A} \mathfrak{C}]$ und $[\mathfrak{B} \mathfrak{D}]$ bzw. $[\mathfrak{A} \mathfrak{D}]$ und $[\mathfrak{B} \mathfrak{C}]$?
24. Von einem Bezugspunkt O gehen zwei Radienvektoren r_1 und r_2 aus, deren Endpunkte durch eine Gerade verbunden seien, die parallel einem Vektor \mathfrak{A} verläuft. Welche vektorielle Beziehung besteht zwischen r_1 , r_2 und \mathfrak{A} ?

25. Von einem Punkt O gehen drei Vektoren \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} aus, deren Summe Null ist. Wie verhalten sich die Flächeninhalte und die Normalen der drei Dreiecke, die durch je zwei dieser Vektoren bestimmt sind, zueinander?
26. In der Spitze einer vierseitigen Pyramide stoßen mit ihren Anfangspunkten die vier Vektoren \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} zusammen. Welches ist der Flächenvektor \mathfrak{F} der Pyramidengrundfläche?
27. Welches ist der Rauminhalt I einer schiefen Pyramide, deren Grundfläche durch den Vektor \mathfrak{F} (positiv nach außen) gegeben ist und von deren Spitze zum Schwerpunkt der Grundfläche der Vektor \mathfrak{G} gerichtet ist?
28. Welchen Rauminhalt I besitzt ein schiefwinkliges Parallelepipeton, das durch drei Vektoren \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} bestimmt wird, die alle die gleiche Länge a besitzen? \mathfrak{A} und \mathfrak{B} sollen einen Winkel von 60° einschließen, desgleichen der Vektor \mathfrak{C} mit der auf der Fläche $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ errichteten Normalen.
29. Ein Volumen V ist von einer beliebigen Fläche \mathfrak{F} eingeschlossen. r sei der Radiusvektor von einem Punkt O innerhalb des Volumens an einen Punkt der Fläche; es ist $\int r d\mathfrak{F}$ zu V in Beziehung zu setzen.
30. Welchen Wert hat $S = \mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] + \mathfrak{B}[\mathfrak{A}\mathfrak{C}]$?
31. Welchen Wert hat $S = ([\mathfrak{A}\mathfrak{B}][\mathfrak{C}\mathfrak{D}]) + \mathfrak{C}[[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{D}]$?
32. Es ist $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ als Determinante aus den rechtwinkligen Komponenten von \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} darzustellen.
33. Die Kraft $d\mathfrak{k}$, mit welcher das Längenelement ds eines vom Strom \mathfrak{J} durchflossenen Leiters auf einen magnetischen Nordpol $+\mu$, von dem man den Vektor r zum Element ds zieht, wirkt, ist gemäß dem Gesetz von Biot-Savart der Größe und Richtung nach anzugeben.
34. Welchen Wert hat $\mathfrak{B} = i^0(i^0\mathfrak{A}) + j^0(j^0\mathfrak{A}) + k^0(k^0\mathfrak{A})$?
35. Welchen Wert hat $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_2(\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1) - \mathfrak{A}_1(\mathfrak{B}\mathfrak{A}_2)$, wenn $\mathfrak{A} = [\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2]$?
36. Welchen Wert hat $\mathfrak{A} = [[i^0, -j^0][-i^0, k^0]]$ und $B = ([-j^0, i^0][k^0, -i^0])$?
37. Welchen Wert hat $\mathfrak{D} = [\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]]$, falls a) $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{C}$, b) $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}$, c) $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{C}$?
38. Welchen Wert hat $\mathfrak{E} = [[\mathfrak{A}\mathfrak{B}][\mathfrak{C}\mathfrak{D}]] - \mathfrak{C}[[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{D}]$?
39. Welches ist die gegenseitige Lage und die Summe \mathfrak{S} der beiden Vektoren $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ und $\mathfrak{B}_2 = [[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{A}]$, falls $A = 1$?
40. Wie ist $B = [n^0[\mathfrak{A}n^0]]^2$ durch das Quadrat eines einfachen Vektorproduktes darstellbar?
41. $[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]]\mathfrak{D}$ ist a) durch das Produkt zweier Vektorprodukte, b) durch skalare Produkte darzustellen.

42. Wie läßt sich $\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] + [\mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}]]$ durch einen geschlossenen Ausdruck von der Form jedes einzelnen der Summanden darstellen?
43. Von einem festen Punkt O werde ein Vektor r_1 zu einem Punkt P_1 einer Ebene E , welche durch \mathfrak{A} und \mathfrak{B} bestimmt ist, gezogen. Welcher Bedingung muß ein Vektor r gehorchen, der von O zu einem beliebigen Punkt P von E gezogen wird?
44. Ein Punkt P beschreibt eine Spiralbahn, indem er um eine Achse w^0 mit der Winkelgeschwindigkeit w im Sinne einer Rechtsschraube rotiert und gleichzeitig mit der gleichförmigen Geschwindigkeit g in Richtung $-w^0$ fortschreitet. Wie läßt sich seine Bahngeschwindigkeit v darstellen, wenn sein vektorieller Abstand von einem festen Punkt der Achse durch den Vektor r (positive Richtung nach P hin) gegeben ist.
45. Wie ändert sich die Richtung von \mathfrak{A} mit dem Vektor \mathfrak{B} , wenn zwischen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} die Beziehung $[\mathfrak{A} \frac{d\mathfrak{A}}{d\mathfrak{B}}] = 0$ gilt?
46. Welchen Winkel bildet der Vektor $\mathfrak{A} = f(\varphi) = i^0 M \cos \varphi + j^0 M \sin \varphi$ mit $d\mathfrak{A}$, falls M konstant ist?
47. Wie ändert sich die Geschwindigkeit v mit der Zeit t , wenn die Bedingung $(v \frac{dv}{dt}) = 0$ erfüllt ist?
48. Die Bogenlänge s einer Kurve sei gegeben als $s = f(\alpha) = A \cdot \alpha$, wenn A eine Konstante bedeutet. Wie läßt sich ein Radiusvektor r , der von einem festen Punkt an irgend einen Punkt der Kurve gezogen wird, durch die Richtung der Tangente t^0 ausdrücken?
49. Der Krümmungsradius einer ebenen Punktbahn hat an einer bestimmten Stelle den Wert $r = i^0 r \cos \varphi + j^0 r \sin \varphi$. Welches ist die Beschleunigung \mathfrak{B} in der Bahn?
50. Die Geschwindigkeit v eines Massenpunktes m mit dem zugehörigen Radiusvektor r läßt sich darstellen durch $v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr_1}{dt} + [w r']$, wenn $r = r_1 + r'$ und w eine Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Wie läßt sich in kürzester Form die Beschleunigung \mathfrak{B} des Punktes m darstellen, wenn w unabhängig von der Zeit ist?
51. Wie ändert sich das Moment der Bewegungsgröße $u = [r, m v]$ mit der Zeit, wenn die auf m wirkende Kraft \mathfrak{K} parallel zu r wirkt.
52. Der zeitliche Mittelwert \bar{L} der lebendigen Kraft ist für ein System von Massenteilchen m zu berechnen, auf deren jedes eine Kraft \mathfrak{K} wirkt. Gegeben sei der vektorielle Abstand r jedes Massenteilchens vom Anfangspunkt und die Bedingungsgleichung $\sum m r^2 = \text{konst.}$

53. Relativ zu einem ruhenden Koordinatensystem rotiert ein zweites, dessen senkrecht aufeinanderstehende Achsen durch die zeitlich veränderlichen Vektoren a, b, c gekennzeichnet sind. Welchen Wert hat $A = \left(a \frac{db}{dt} \right) + \left(b \frac{da}{dt} \right)$; $B = \left(a \frac{dc}{dt} \right) + \left(c \frac{da}{dt} \right)$; $C = \left(b \frac{dc}{dt} \right) + \left(c \frac{db}{dt} \right)$?
54. Es ist zu beweisen, daß $P = \frac{di^0}{dt} \left[\frac{dj^0}{dt}, \frac{dk^0}{dt} \right]$ stets 0 ist.
55. Gegeben sind die drei Gleichungen $\frac{di^0}{dt} = [w_1 i^0]$; $\frac{dj^0}{dt} = [w_2 j^0]$; $\frac{dk^0}{dt} = [w_3 k^0]$. Welche Beziehung besteht zwischen den drei Vektoren w_1, w_2, w_3 ?
56. Gegeben sind die vier Beziehungen $U = \sum m \left[r, \frac{dr}{dt} \right]$; $U' = \sum m \left[r', \frac{dr'}{dt} \right]$; $r = r' + \mathfrak{R}$; $\sum m r' = 0$. Um welchen Betrag unterscheiden sich $\frac{dU}{dt}$ und $\frac{dU'}{dt}$, wenn \mathfrak{R} für alle Summenglieder denselben Wert hat?
57. Die in Richtung r wirkende Kraft \mathfrak{R} besitzt ein Potential V derart, daß $\mathfrak{R} = -r^0 \frac{\partial V}{\partial r}$. In welcher Beziehung steht $\text{grad } V$ zu \mathfrak{R} ?
58. In einer Flüssigkeit sind die Schichten gleicher Temperatur t durch parallele Ebenen mit der Normalen \mathfrak{N} gekennzeichnet, und zwar herrscht in der Schicht der Höhe h die Temperatur $t = a + bh + ch^2$. Welchen Wert besitzt $\text{grad } t$?
59. Welchen Wert hat $\text{grad} (x^n y^m)$, wenn $\text{grad } y = \frac{n}{m} \text{grad } x$?
60. Wie läßt sich $\text{grad} [\mathfrak{U} n^0]^2$ durch den grad des variablen Winkels φ zwischen \mathfrak{U} und n^0 ausdrücken, wenn \mathfrak{U} die konstante Länge A besitzt?
61. Welche absolute Größe und Richtung hat a) $\text{grad} (n^0 \mathfrak{U})$, wenn $d\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 dA$? b) $\text{grad} (n^0 r)$?
62. Von einem festen Punkt O aus sind Radienvektoren $r = r^0 r$ zu allen Punkten des Raumes gezogen. Welchen Wert hat a) $\text{grad } r$; b) $\text{grad} \frac{1}{r}$; c) $\text{grad} \frac{r^2}{2}$; d) $\text{grad } r^n$; e) $\text{grad} \frac{1}{r^m}$?
63. $\text{grad} [n_0 \mathfrak{U}]^2$ ist durch $\text{grad} [n_0 \mathfrak{U}]^2$ auszudrücken.
64. $\text{grad } f(x)$ ist durch $\text{grad } x$ auszudrücken.
65. Es sind die Integrale a) $J_1 = \int_{r_1}^{r_2} \text{grad } A dr$ und b) $J_2 = \oint \text{grad } A dr$ zu berechnen.
66. Welchen Wert hat das über die Fläche \mathfrak{F} des Volumens V erstreckte Integral $\int (n^0 r) d\mathfrak{F}$?

67. Zu berechnen ist das Integral $\oint r (n^0 d\mathfrak{F})$ für die Fläche eines geraden Kreiszyinders, dessen Achse parallel zu n^0 ist.
68. Welchen Wert besitzt $\operatorname{div}(\mathfrak{A} + n\mathfrak{B})$, wenn $\operatorname{div}\mathfrak{A} = m \operatorname{div}\mathfrak{B}$ ist?
69. Welchen Wert hat die Divergenz des Vektors $\mathfrak{A} = i^0 a + n^0 b$, wenn a veränderlich und b konstant ist?
70. Welchen Wert besitzt $\operatorname{div}(n^0 \mathfrak{A})$?
71. Wie ist $\operatorname{div}\mathfrak{B}^5$ durch die erste Potenz von \mathfrak{B} darstellbar?
72. Wie ist $\operatorname{div}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}^5)$ zu zerlegen, wenn $\operatorname{grad}\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ist?
73. Welchen Wert besitzt $\operatorname{div}\{n^0(n^0 r)\}$?
74. Zerlege $\operatorname{div}(r\mathfrak{A})$ für den Fall, daß $\mathfrak{A} \perp r$.
75. Welchen Wert hat die Divergenz des Radiusvektors r ?
76. Welchen Wert hat $\operatorname{div}r^0$?
77. Welchen Wert hat a) $\operatorname{div}\frac{r}{r^3}$; b) $\operatorname{div}(r^n r)$?
78. Zerlege $\operatorname{div}\{r \cdot f(r)\}$.
79. Zerlege $\operatorname{div}[n^0[r n^0]]$.
80. In einem zylindrischen Rohr der Länge l verdampft Wasser, und zwar strömt der Dampf an den beiden Enden des Rohres mit der Geschwindigkeit v aus. Welches ist innerhalb des Rohres der Mittelwert von $\operatorname{div}v$?
81. Welchen Wert besitzt $\int \operatorname{div}\mathfrak{E} dV$, wenn $\mathfrak{E} = r^0 \frac{e}{r^2}$ die elektrische Feldstärke im Vakuum bedeutet?
82. Welchen Wert hat $\operatorname{rot}(\mathfrak{A} + i^0 B)$, wenn $\operatorname{grad}B = i^0 x$ ist?
83. Welchen Wert hat $\operatorname{rot}(\mathfrak{A} n^0)$, wenn $\operatorname{grad}\mathfrak{A}$ parallel zu n^0 ist?
84. Wie läßt sich $[n^0 \operatorname{grad}p]$ als Rotation eines Vektors darstellen?
85. Welchen Wert findet man für $\operatorname{rot}r$ bei Anwendung der Gleichung $\operatorname{rot}\operatorname{grad}p = 0$?
86. Welchen Wert hat das über eine geschlossene Kurve erstreckte Integral $\int \mathfrak{A} d\mathfrak{l}$, wenn $\operatorname{rot}\mathfrak{A} = 0$ ist?
87. Es ist $(\nabla\mathfrak{A})\mathfrak{B}$ für den Fall zu berechnen, daß sich \mathfrak{B} in Richtung \mathfrak{A} nicht ändert.
88. Welchen Wert hat a) $(n\nabla)r$ und b) $(r^0\nabla)\mathfrak{A}$?
89. Wie ist $[\nabla\mathfrak{A}]\mathfrak{B}$ aufzulösen?
90. Welchen Wert hat $[\mathfrak{A}\nabla]r$?
91. Es sind die Integrale $J_1 = \int_{n_1}^{n_2} (dn\nabla)\mathfrak{A}$ und $J_2 = \oint (dn\nabla)\mathfrak{A}$ zu berechnen.
92. Es ist zu berechnen, um wieviel kleiner $\operatorname{grad}[nr]^2$ ist als $2r$.

93. Wie läßt sich im Anschluß an Aufgabe 92 $\text{grad} [nr]^x$ zerlegen, wenn x eine gerade Zahl ist?
94. Wie läßt sich $[[\nabla \mathfrak{A}] \mathfrak{B}]$ als Funktion von $\text{div} \mathfrak{B}$ darstellen, wenn $\text{grad} \mathfrak{A} \mathfrak{B} = 0$ ist?
95. a) Es ist $[[\mathfrak{A} \nabla] \mathfrak{B}]$ aufzulösen. b) Welchen Wert erhält man für diesen Ausdruck, wenn $\mathfrak{B} = r$?
96. Es ist $\text{div} [\mathfrak{A} \mathfrak{B}]$ aufzulösen.
97. Welchen Wert hat $\text{div} [nr]$?
98. Welchen Wert hat $\text{div} [n^0 [rn^0]]$?
99. Zerlege $\text{rot} (A \mathfrak{B})$.
100. Welchen Wert hat $\text{rot} (r^n r)$?
101. Welchen Wert hat $\text{rot} (n (r n))$?
102. a) Wie ist $\text{rot} [n [\mathfrak{A} n]]$ aufzulösen; b) welchen Wert erhält man für den Fall, daß $\mathfrak{A} = r$?
103. Wie verhält sich $\text{rot} [nr]$ zu n ?
104. Welchen Wert besitzt $\mathfrak{A} \text{rot} \mathfrak{A}$, wenn \mathfrak{A} auf einer Fläche \perp zu \mathfrak{A} liegt?
105. Welchen Wert hat $\text{rot} v$ und $v \text{rot} v$, wenn $v = v' + [nr]$ und v' sowohl wie w räumlich konstant sind.
106. Die Temperatur t eines Raumes nehme vertikal nach aufwärts (Richtung n^0) ab; die Niveauflächen der Temperatur seien parallele Ebenen senkrecht zu n . Welchen Wert besitzt $\text{div} (\text{grad} t)$?
107. Welchen Wert hat $\text{div} \text{grad} \frac{1}{r}$?
108. Wie ist $\text{grad} \text{div} (A \mathfrak{B}) = \nabla^2 (A \mathfrak{B})$ aufzulösen?
109. Es ist $\text{grad} \text{grad} (\mathfrak{A} \mathfrak{B}) = \nabla^2 (\mathfrak{A} \mathfrak{B})$ aufzulösen.
110. Es ist $\text{rot} \text{rot} \mathfrak{A}$ aufzulösen.

Mechanik.

I. Punktmechanik.

1. **Bremung bei gegebenem Auslauf.** Ein Körper von der Masse m befindet sich in geradliniger Bewegung mit der Geschwindigkeit v_0 und soll durch eine der Bewegung entgegengerichtete Bremskraft K auf der Strecke s_0 zur Ruhe gebracht werden. Mit welchem Betrage muß die Kraft K einsetzen, a) wenn sie konstant während

des ganzen Bremsvorganges wirkt; b) wenn sie linear mit der Geschwindigkeit v abnimmt und dabei am Schlusse auf den halben Anfangswert gesunken ist?

2. **Freier Fall aus großer Höhe.** Ein Körper von der Masse m fällt aus der Höhe h , die groß ist gegenüber dem Erdradius r , unter dem alleinigen Einfluß der Schwerkraft (die dem Quadrat der Entfernung vom Erdmittelpunkt umgekehrt proportional ist); wie groß ist die Endgeschwindigkeit beim Auftreffen auf die Erdoberfläche, wie groß die Falldauer? Man diskutiere im Resultat den Übergang zu den gewöhnlichen Formeln des freien Falles, indem man $h:r$ kleiner und kleiner werden läßt.
3. **Radiale Bewegung auf einer rotierenden Scheibe.** Eine Scheibe, die in ihrer eigenen Ebene mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, enthält eine geradlinige Rille, die durch den festen Drehpunkt hindurchgeht; in der Rille bewegt sich ein Punkt von der Masse m , und zwar a) sich selbst überlassen (ohne jede eingeprägte Kraft), b) unter dem Einfluß einer dem Führungsdruck proportionalen Reibungskraft. Zu Anfang befand sich der Punkt im Achsabstand r_0 in Ruhe; wo befindet er sich zur Zeit t , und welche Geschwindigkeit hat er dann?
4. **Cykloidenpendel.** Ein der Schwere unterworfenen Punkt ist längs einer „gemeinen Cykloide“ geführt, die in einer Vertikalebene mit vertikaler Achse liegt; man beweise, daß die Dauer einer Schwingung, d. i. der Bewegung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ruhepunkten, von der Anfangslage des Punktes und seiner Anfangsgeschwindigkeit unabhängig ist. Die Gleichung der Cykloide in Parameterform lautet:

$$x = 2a \sin \tau \cos \tau + 2a \tau, \quad y = 2a \sin^2 \tau,$$

wobei y vertikal nach aufwärts gerechnet ist und τ zugleich den Winkel der Tangente mit der x -Achse bedeutet.

Man setze die Gleichung der lebendigen Kraft an und drücke mit Hilfe der Cykloidengleichung die y -Komponente der Geschwindigkeit durch y aus.

5. **Gerade als schnellste Verbindung.** Die Größe v der Geschwindigkeit eines in der Ebene bewegten punktförmigen Körpers sei eine bekannte Funktion des Winkels ϑ , den die Geschwindigkeitsrichtung mit einer festen Geraden in der Ebene einschließt; wie muß der Ort der Punkte mit den Polarkoordinaten v, ϑ (der sog. Hodograph der Bewegung) beschaffen sein, damit bei der Bewegung des Körpers die schnellste Verbindung zwischen zwei Punkten immer die geradlinige sei? Als Beispiel betrachte die Bewegung eines Flugzeuges im Winde, wobei v sich aus der nach Größe und

Richtung festen Windgeschwindigkeit w und der nur der Größe nach konstanten, aber beliebig gerichteten, Eigengeschwindigkeit c zusammensetzt.

6. **Fallbewegung längs einer Schraubenlinie mit Reibung.** Ein materieller Punkt gleitet, dem Einfluß der Schwere überlassen, auf einer zylindrischen Schraubenlinie von vertikaler Achse, wobei die Reibungskraft dem jeweiligen Normaldruck proportional ist. In welcher Zeit legt der Punkt, vom Ruhezustand ausgehend, eine volle Windung zurück; wie groß und wie gerichtet ist der Normaldruck auf die Bahn? Gegeben sind Radius r und Ganghöhe h der Schraube, sowie der Reibungskoeffizient f und die Masse m .
7. **Kräftefreie Bewegung eines Hantels** (Atommodell). Zwei Punktmassen m_1 und m_2 sind durch einen starren, masselosen Stab miteinander verbunden; man stelle die Bewegungsgleichungen dieses Systems auf und diskutiere insbesondere seine kräftefreie Bewegung.
8. **Anziehung umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung.** Ein Massenpunkt m bewegt sich unter dem Einfluß einer Kraft, die nach einem festen Zentrum im umgekehrten Verhältnis der dritten Potenz des Abstandes wirkt, zunächst in einem Kreise vom Radius r_0 mit konstanter Geschwindigkeit. Plötzlich wird seine Geschwindigkeit durch äußere Einwirkung im Verhältnis $2:\sqrt{3}$ vergrößert, ohne daß ihre Richtung dabei geändert würde. Welche Bahn beschreibt er dann?
9. **Schiefer Wurf bei quadratischem Widerstandsgesetz.** Beim schiefen Wurf eines kleinen (punktförmig gedachten) Körpers mache sich ein Luftwiderstand geltend, der dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist. Die rechtwinkligen Koordinaten der Bahnlinie sowie die Zeit des Durchlaufens dieser Bahn lassen sich als Funktionen eines Parameters p darstellen, der gleich der trigonometrischen Tangente des Neigungswinkels der Bahn gegen den Horizont ist. Dies soll durchgeführt werden.
10. **Schwingungen des (mathematischen) Doppelpendels.** Ein unausdehnbarer und masseloser Faden von der Länge l_1 , der an dem oberen Ende fest aufgehängt ist, trägt am unteren eine Punktmasse m_1 ; an dieser Masse hängt mittels eines zweiten ebensolchen Fadens von der Länge l_2 eine zweite Masse m_2 . Man bestimme die Bewegung dieses sog. „Doppelpendels“ unter der Annahme kleiner ebener Ausschläge aus der vertikalen Gleichgewichtslage und diskutiere insbesondere den Fall, daß l_2 sehr wenig von l_1 verschieden, m_2 aber sehr klein gegen m_1 ist (Schwebungen).

11. **Schwingungen des n -fachen (mathematischen) Pendels.** Analog dem „Doppelpendel“ der Aufgabe 10 besteht ein „ n -faches Pendel“ aus n Punktmassen $m_1, m_2 \dots m_n$, die durch Fäden von den Längen $l_1, l_2 \dots l_n$ miteinander, bzw. mit dem Aufhängepunkt verbunden sind. Man stelle für dieses System von n Freiheitsgraden die Bewegungsgleichungen unter der Annahme kleiner ebener Ausschläge aus der Gleichgewichtslage auf und zeige, wie sie beim Übergang zu unendlich kleinen (untereinander gleichen) l in den Ansatz für die Schwingungen eines unausdehnbaren, stetig mit Masse belegten Fadens übergehen. (Vgl. a. Aufg. 99.)
12. **Konisches Pendel.** An einem unausdehnbaren, masselosen Faden von der Länge l hängt eine Punktmasse m unter dem Einfluß ihres Gewichtes. Der Faden wird um den Winkel ϑ_0 aus der Gleichgewichtslage entfernt; hierauf wird der Punktmasse eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 erteilt, deren Richtung horizontal ist, aber mit der Projektion des Fadens auf die Horizontalebene den Winkel $\alpha_0 \neq 0$ einschließt. Man bestimme die Bewegung dieses „konischen Pendels“ unter der Annahme, daß α_0 wenig von 90° abweicht und $v_0^2 = gl \sin^2 \vartheta_0 : \cos \vartheta_0$ ist.
13. **Freier Fall unter Einfluß der Erddrehung.** Welche Ablenkung erfährt ein aus 100 m über der Erdoberfläche unter 45° nördl. Breite frei herabfallender schwerer Körper infolge der von der Erddrehung herrührenden Corioliskraft? Wie wird die Ablenkung durch den Luftwiderstand beeinflusst?
- Man nehme zunächst an, die Geschwindigkeit des Körpers sei vertikal und gleich gt , rechne dazu die Größe der Corioliskraft und superponiere die durch sie bestimmte Bewegung.
14. **Foucaultsches Pendel.** Für ein Fadenpendel von der Länge l und der Masse m gelten bei Berücksichtigung der von der Erdrotation ω herrührenden Coriolisbeschleunigung die Bewegungsgleichungen:
- $$\ddot{x} - 2\omega \dot{y} \sin \varphi = -\frac{S}{m} \frac{x}{l}, \quad \ddot{y} + 2\omega (\dot{z} \cos \varphi + \dot{x} \sin \varphi) = -\frac{S}{m} \frac{y}{l}.$$
- Hierbei bedeutet φ die geographische Breite, S die Fadenspannung, x, y, z die Koordinaten von m in der Südrichtung, Ostrichtung und der Vertikalen. Man erkläre diese Gleichungen und zeige, daß für kleines ω und unter der Annahme sehr kleiner Ausschläge, bei denen \dot{z} vernachlässigt und $S = mg$ gesetzt werden darf, die Bewegung in der x - y -Ebene so verläuft, wie eine harmonische Schwingung, deren Bahn sich mit der Drehgeschwindigkeit $\omega \sin \varphi$ um die Vertikale dreht.
15. **Tautochronie einer speziellen Bewegungsform.** Ein Punkt bewegt sich auf einer festen, beliebig im Raum gekrümmten Bahn, unter

dem Einfluß einer Triebkraft in der Bewegungsrichtung, deren Größe proportional dem bis zu einer bestimmten Stelle zurückzulegenden Weg ist (wie beim einfachen Fadenpendel), und einer entgegengerichteten Widerstandskraft proportional der Geschwindigkeit. Man zeige, daß die Zeit, die der Punkt braucht, um aus einer beliebigen Anfangslage vom Ruhezustand aus nach der Stelle, wo die Triebkraft Null ist, zu gelangen, von der Anfangslage unabhängig ist.

II. Starrer Körper.

16. **Schwerpunktsbestimmung für einen Stab oder eine Scheibe.** Den Schwerpunkt eines geraden Stabes kann man in der Weise bestimmen, daß man ihn in horizontaler Lage mit seinen Enden auf zwei Schneiden auflegt, die gegeneinander beweglich sind (oder etwa auf die vorgestreckten Zeigefinger der beiden Hände); sucht man nämlich die Schneiden einander langsam zu nähern, so verschiebt sich der Stab derart, daß sein Schwerpunkt über den Schneiden liegt, sobald diese einander treffen. Dieser Vorgang und der analoge für eine Ebene auf drei verschiebbaren Unterstützungspunkten ist zu erklären.
17. **Aufwärtsrollen unter dem Einfluß der Schwere.** Unter welchen Verhältnissen ist es möglich, daß ein Kreiszyylinder, der auf eine raue geneigte Ebene, mit der Zylinderachse senkrecht zur Fallinie, ohne Anfangsgeschwindigkeit aufgesetzt wird, ein Stück nach aufwärts rollt und dann erst wieder zur Ruhe kommt?
18. **Beschleunigungsfreie Punkte bei der ebenen Bewegung.** Man beweise, daß bei der allgemeinsten ebenen Bewegung einer starren Scheibe der Ort der Punkte, die augenblicklich keine Tangential- oder keine Zentripetalbeschleunigung haben, je einen Kreis durch das Momentanzentrum bildet. Der einzige Punkt ohne Beschleunigung überhaupt ist dann der zweite Schnittpunkt dieser Kreise.
19. **Mohrs Trägheitskreise.** Eine ebene Scheibe besitzt im allgemeinen zwei und nur zwei Punkte von der Eigenschaft, daß die Trägheitsmomente für alle durch sie gehenden (in der Ebene liegenden) Achsen gleich, also die zugehörigen Trägheitsellipsen Kreise sind. Man suche diese Punkte zu bestimmen und die Größe J des zugehörigen Trägheitsmomentes zu finden, wenn die Trägheitsmomente J_x, J_y und das Deviationsmoment D für ein durch den Schwerpunkt gelegtes rechtwinkliges Achsenkreuz gegeben sind.
20. **Regulierung eines Uhrpendels.** Ein Uhrpendel soll durch Zusatzgewichte, die an einer bestimmten Stelle anzubringen sind, reguliert werden; wie muß man diese Stelle wählen, um mit den kleinsten

Gewichten die größte Beeinflussung der Schwingungszeit zu bewirken? Man zeige, daß bei dieser Wahl der Anbringungsstelle auch eine völlige Unempfindlichkeit gegen kleine Verschiebungen der Zusatzmasse erzielt wird.

21. **Fallen eines teilweise gestützten Stabes.** Ein homogener, gerader, dünner Stab von der Länge l , Masse m , berührt mit seinem unteren Ende den horizontalen, rauhen Boden und schließt mit ihm den Winkel α ein. In dieser Lage wird er der Wirkung der Schwerkraft überlassen. Man ermittle unter der Annahme, daß der Reibungskoeffizient f des Bodens gegeben ist, den Normaldruck, die Reibung und die Beschleunigung für den Beginn der Fallbewegung, ferner unter der Annahme $f = 0$ die Fallgeschwindigkeit in einer beliebigen Lage während der Bewegung.
22. **Rad mit exzentrischem Schwerpunkt; Versagen der Reibungstheorie.** Ein kreiszylindrisches Rad von der Masse m , dem Halbmesser a und dem Schwerpunkt-Trägheitsradius s , das unter dem Einfluß der Schwere auf horizontalem, rauhem Boden (Koeffizient der Gleit- und Haftreibung f) rollen oder gleiten kann, habe seinen Schwerpunkt S in einer Entfernung c vom Mittelpunkt M . Man bestimme den Anfangswert des Auflagerdruckes N für einen beliebigen Anfangszustand, der durch den Winkel φ_0 zwischen MS und der Vertikalen, durch die (horizontale) Anfangsgeschwindigkeit v_0 des Berührungspunktes und die anfängliche Drehgeschwindigkeit ω_0 gegeben sei. Zeige insbesondere, daß für gewisse Wertverbindungen von f , a , s , c und φ_0 auch bei $\omega_0 = 0$ ein positiver Anfangswert N_0 nicht existiert.

Stelle die drei Bewegungsgleichungen der ebenen Bewegung auf und eliminiere aus ihnen die beiden Beschleunigungsgrößen unter Nullsetzen von ω_0 .

23. **Ballistisches Pendel.** Ein Pendel von der Masse m , dem Trägheitsradius r und der Entfernung s zwischen Aufhängepunkt und Schwerpunkt wird, während er sich in Ruhe befindet, horizontal und senkrecht zur Drehachse, im Abstände h von ihr, durch ein Geschöß von der Masse m' getroffen, das im Pendel stecken bleibt und einen Ausschlag ϑ bewirkt. Wie groß war die Geschwindigkeit v des Geschosses beim Auftreffen?
24. **Rollbewegung einer Kugel.** Eine homogene Kugel vom Halbmesser a rollt auf einer hinreichend rauhen Ebene unter dem Einfluß von Kräften, die im Kugelmittelpunkt angreifen. Wie bewegt sich der Schwerpunkt der Kugel?
25. **Reflexion der Billardkugel an der Bande.** Eine Billardkugel vom Halbmesser a trifft mit der Mittelpunktsgeschwindigkeit c unter

dem Einfallwinkel ϑ auf die Bande (den Rand) des Tisches und hat hierbei eine Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale Mittelpunktsachse; man bestimme die Bewegung, mit der die Kugel die Bande verläßt, wenn angenommen wird, daß der Stoß vollkommen elastisch (oder allgemein mit einer Restitutionszahl $\varepsilon < 1$) erfolgt und daß die Bande vollkommen rauh ist (so daß die Gleitgeschwindigkeit des Berührungspunktes momentan vernichtet wird).

26. **Projektion konjugierter Kräfte in Richtung der Zentralachse.** Für ein bestimmtes Kräftesystem seien A und B ein Paar konjugierter Kräfte, d. h. ein Paar, das dem Kräftesystem äquivalent ist. Man beweise, a) daß die Projektionen A' und B' von A bzw. B auf eine zur Zentralachse senkrechte Ebene entgegengesetzt gleich sind, und b) daß das Moment der Projektion A' in bezug auf den Durchstoßpunkt der Zentralachse als Momentenpol bei Veränderung von B sich proportional der zur Zentralachse parallelen Komponente von B ändert; Proportionalitätsfaktor ist der Parameter p der Kraftschraube (Quotient des resultierenden Moments durch die resultierende Kraft).

27. **Ersatz eines Massensystems durch vier Massenpunkte.** Ein Körper von der Masse m , Schwerpunkt O , Trägheits-Hauptachsen $O \rightarrow x$, $O \rightarrow y$, $O \rightarrow z$ und den Haupt-Trägheitsradien a , b , c soll durch vier Punkte gleicher Masse ersetzt werden, die in Gesamtmasse, Schwerpunktslage und Momenten zweiten Grades mit ihm übereinstimmen, wobei noch vorgeschrieben wird, daß einer der Punkte auf der z -Achse und noch ein zweiter in der z - y -Ebene liegen soll. Man bestimme die Koordinaten der vier Punkte.

Überlege zuerst, daß im Fall $a = b = c$ die Eckpunkte eines regelmäßigen Tetraeders der Bedingung genügen, und daß daraus der allgemeine durch affine Transformation gewonnen werden kann.

28. **Schwingungen einer Tür in ihren Angeln.** Die Angeln einer schweren rechteckigen Tür von der Höhe h , der Breite b und dem Gewicht G sind fehlerhaft angebracht, und zwar so, daß die Drehachse mit der Vertikalen im Raum einen Winkel α bildet. Man bestimme die Gleichgewichtslage, die Dauer der kleinen Schwingungen und die Größe der dabei auftretenden Reaktionen, wenn angenommen wird, daß die Angeln in Abständen von je $\frac{1}{3}h$ vom oberen bzw. unteren Rande der Tür entfernt sind.

29. **Stab längs Wand und Boden gleitend.** Ein homogener gerader Stab von der Länge l gleitet unter dem Einfluß der Schwere mit dem einen Ende längs einer glatten vertikalen Wand, mit dem anderen auf dem glatten horizontalen Boden. Zu Anfang sei er in Ruhe, unter dem Winkel ϑ_0 gegen die Vertikale, während seine Horizontalprojektion den Winkel ψ_0 mit der Durchschnittslinie der beiden

Ebenen einschließt; man bestimme aus dem Ansatz der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen die Anfangsbeschleunigungen für den allgemeinen Fall und den ganzen Bewegungsverlauf für $\psi_0 = 90^\circ$.

30. **Deviationswiderstand eines rotierenden Kreisels.** Ein Rotationskörper vom Gewicht $G = 0,25$ kg dreht sich um seine geometrische Achse, für die er den Trägheitsradius $r = 8$ cm besitzt, mit $n = 1000$ Umdrehungen pro Minute. Welche Kräfte müssen auf ihn einwirken, um ihm nebenbei eine langsame Drehung von $n' = 10/\text{Min.}$ um eine im Raum feste, durch den Schwerpunkt senkrecht zur geometrischen Achse gelegte Gerade zu erteilen?

III. Systeme starrer Körper.

31. **Robervalsche Wage.** Die Robervalsche Wage besteht aus einem Gelenkparallelogramm, das sich in einer Vertikalebene derart bewegt, daß zwei Seiten stets vertikal bleiben, während die anderen beiden um feste, senkrecht zur Bewegungsebene durch ihre Mittelpunkte gehende Achsen schwingen. Mit den Vertikalstäben sind die Wagschalen starr verbunden. Man beweise, daß das Gleichgewicht unabhängig bleibt von der Lage der Gewichte auf den Schalen.
32. **Gleichgewicht an einer Zugbrücke.** Eine Zugbrücke (ein der Schwere unterworfenener, stabförmiger Körper von der Länge l und dem Gewicht Q) ist an ihrem einen Ende um eine horizontale Achse drehbar, am anderen an einer Kette aufgehängt, die über eine kleine, horizontal gelagerte Rolle führt und ein Gegengewicht G trägt. Dieses Gewicht gleitet reibungslos längs einer Führungslinie, die so gestaltet werden soll, daß in jeder Lage Gleichgewicht herrscht. Man bestimme die Polargleichung der Gleitbahn unter der Annahme, daß die Kette gewichtslos und unausdehnbar sei, insbesondere für den Fall, daß die Kettenrolle vertikal über der Drehachse der Brücke liegt.
33. **Gleichgewicht an einer Doppelleiter.** Eine Doppelleiter bestehe aus zwei in einem horizontalen Gelenk aneinandergeschlossenen Schenkeln von den Längen l_1 und l_2 . Wie groß sind die im Gelenk übertragenen Kräfte, wenn der erste Schenkel im Horizontalabstand q von der Achse durch ein Gewicht Q belastet wird, unter der Annahme, daß das Gelenk reibungsfrei ist. Welche Bedingungen müssen überhaupt erfüllt sein, damit Gleichgewicht ohne Inanspruchnahme der Reibung im Gelenk besteht?
34. **Kinematik eines Kurbelgetriebes.** Die Kurbel einer Dampfmaschine rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse. Am äußeren Ende des Kurbelarmes von der Länge r hängt die „Schubstange“, die die Länge l besitzt und mit ihrem zweiten

- Endpunkt längs einer die Kurbelachse schneidenden Geraden gleitet. Man bestimme Geschwindigkeit und Beschleunigung für einen beliebigen Punkt der Schubstange und suche insbesondere für den hin und her gehenden Endpunkt Näherungsausdrücke unter der Annahme, daß l groß gegen r ist.
35. **Schwingendes Parallelogramm.** Zwei gleiche homogene Stäbe von der Länge l und der Masse m sind so an einem Ende aufgehängt, daß sie um parallele horizontale Achsen in einer und derselben Vertikalebene schwingen können. An ihrem unteren Ende sind sie durch einen ebenfalls homogenen Querstab von der Länge l' und der Masse m' gelenkig verbunden. Man bestimme die Periode der kleinen Schwingungen dieses reibungsfrei gedachten Systems.
36. **Physisches Pendel mit beweglichem Massenpunkt.** Eine ebene Scheibe von der Masse m ist um eine horizontale Achse pendelnd aufgehängt; der Abstand ihres Schwerpunktes S vom Aufhängepunkt O sei s , das Trägheitsmoment bezüglich O gleich J . Im Abstand a von O und unter dem Winkel α gegen OS verläuft auf der Scheibe eine gerade Rille, in der ein Massenpunkt m' sich reibungsfrei bewegen kann. Man stelle die Bewegungsgleichungen dieses der Schwere unterworfenen Systems von zwei Freiheitsgraden auf und diskutiere die kleinen Pendelschwingungen, die eintreten, wenn m' als klein gegen m vorausgesetzt wird, insbesondere unter den Annahmen $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^\circ$.
37. **Physisches Doppelpendel.** Ein Körper von der Masse m kann kleine Schwingungen unter dem Einfluß der Schwere um eine horizontale, in der Entfernung s über seinem Schwerpunkt liegende Achse ausführen; sein Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse sei T . Im Abstand a von der festen Achse trägt der Körper das Lager für eine zweite, zur ersten parallele Drehachse, um die ein zweiter Körper von der Masse m' , Trägheitsmoment T' , Schwerpunktsabstand s' schwingen kann. Man ermittle die Perioden für dieses „physische Doppelpendel“ und diskutiere insbesondere die Möglichkeit, daß beide Körper sich wie ein starrer bewegen (Fall der Unbrauchbarkeit als Glocke und Klöppel).
38. **Stabverbindung auf dem Boden gleitend.** Zwei gleiche homogene Stäbe von der Länge l und der Masse m sind am einen Ende gelenkig miteinander verbunden und stehen mit den anderen Enden derart auf rauhem, horizontalem Boden auf, daß sie in einer Vertikalebene ein gleichschenkliges Dreieck vom Basiswinkel φ bilden. Man stelle die Differentialgleichung für φ auf und berechne insbesondere die Anfangsbeschleunigung für eine gegebene Ruhelage φ_0 .

39. **Aufnehmen einer Kette aus starren Gliedern.** Eine Kette, die aus sehr vielen kleinen starren Gliedern von der Masse m und der Länge l besteht, liegt lose gehäuft am Boden und soll derart aufgenommen werden, daß pro Sekunde n Glieder in Bewegung kommen. Wie groß ist die dazu erforderliche Kraft, wie groß die Kraft, mit der das Ende der Kette vertikal gezogen werden muß?
40. **Stoß unter Vermittlung eines Hebels.** Ein gerader Stab ist auf einer Horizontalunterlage um sein Ende drehbar (Trägheitsmoment T) und steht auf der einen Seite im Abstand a vom Drehpunkt mit einem Körper von der Masse m_1 in Berührung. Mit welcher Geschwindigkeit v_2 muß auf der anderen Seite des Stabes im Abstand b vom Drehpunkt eine Masse m_2 senkrecht auftreffen, damit die Geschwindigkeit, die die Masse m_1 durch den Stoß erfährt, gleich v_1 wird? Alle Körper sind als unelastisch vorausgesetzt.
41. **Rückstoß beim Anschlagen von Glocke und Klöppel.** Der Klöppel einer Glocke (gegeben $m, T, s; m', T', s'; a$ wie in Aufg. 37) schlägt an den inneren Rand des Glockenkörpers derart an, daß die gemeinsame Berührungsnormale den Abstand c vom Aufhängepunkt O der Glocke und den Abstand c' vom Schwerpunkt S' des Klöppels besitzt. Man bestimme die Bedingung dafür, daß bei diesem Anschlagen kein Rückstoß auf das Lager des Klöppels in der Glocke erfolgt.
Bestimme die Anfangsgeschwindigkeiten, die der Drehpunkt des Klöppels einerseits als Punkt der Glocke, andererseits als Punkt des Klöppels durch den Stoß erfährt, und setze beide gleich.
42. **Zusammenstoß rotierender Kreisscheiben.** Zwei ebene homogene Kreisscheiben mit den Massen m_1, m_2 , den Radien r_1, r_2 bewegen sich in einer Ebene derart, daß ihre Mittelpunkte mit den Geschwindigkeiten v_1, v_2 fortschreiten, während sie um die Mittelpunkte mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 rotieren. Im Zeitpunkt $t = 0$ stoßen die Scheiben aneinander, wobei die Richtungen von v_1, v_2 mit der Zentralen die Winkel α_1, α_2 einschließen. Was für eine Bewegung setzt nach dem Stoße ein, a) wenn beide Scheiben unelastisch und ihre Ränder vollkommen rauh; b) wenn beide elastisch und die Ränder völlig glatt sind?
43. **Gleichgewicht am rollenden Motorwagen.** Ein zweiachsiger Straßenbahnwagen, dessen Vorderachse durch ein vom Motor herrührendes Drehmoment M angetrieben wird, fährt auf gerader, unter α gegen den Horizont geneigter Bahn bergan. Gegeben sind: der Luftwiderstand W , dessen Angriffslinie durch den Gesamtschwerpunkt S des Wagens einschließlich der Räder geht, die Gesamtmasse m , die Massen m_1, m_2 und Trägheitsmomente T_1, T_2 des vorderen bzw. hinteren Räderpaares, die Entfernungen s_1, s_2 der durch die Rad-

achsen gehenden Bahnnormalen von S , die Höhe h von S über dem Boden, die Halbmesser r_1, r_2 der Räder und r'_1, r'_2 der Radzapfen, die Gleitreibungskoeffizienten f'_1, f'_2 der Zapfenlager, die Hebelarme a_1, a_2 der Rollreibung, endlich die Koeffizienten f_1, f_2 der Gleit- und Haftreibung zwischen Rad und Schiene. Man stelle die Bewegungsgleichungen auf, berechne das zur gleichförmigen Fahrt erforderliche Moment M und diskutiere die Bedingungen für reines Rollen der Räder (ohne Gleiten) und für das Zustandekommen der Bewegung überhaupt (erforderliches „Adhäsionsgewicht“ auf der Triebachse).

44. **Schwungrad einer Maschine.** Die lebendige Kraft einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω umlaufenden Maschine hat die Form $\frac{1}{2}[T + F(\vartheta)]\omega^2$, wo T das Trägheitsmoment der rotierenden Teile, $(F\vartheta)$ eine durch die übrigen bewegten Massen bestimmte, periodische Funktion des Drehwinkels ϑ bedeutet. Die der Koordinate ϑ entsprechende Lagrangesche Kraftkomponente K ist eine rein periodische Funktion von ϑ . Man pflegt nun (Schwungradberechnung) T so zu bestimmen, daß bei gegebenem $F(\vartheta)$ und $K(\vartheta)$ sowohl das arithmetische Mittel als die Differenz der größten und kleinsten, während einer Periode auftretenden Winkelgeschwindigkeiten vorgeschriebene Werte annehmen: $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_0, \quad \omega_1 - \omega_2 = \omega_0 \cdot \delta$.

Dies ist unter der Annahme, daß F gegenüber T und δ gegen 1 klein sei, durchzuführen.

45. **Zentrifugalregulator.** Das Prinzip des Zentrifugalregulators wird durch folgendes Schema verwirklicht. Zwei gleiche Massen m sind auf einer horizontalen Scheibe durch gleiche Spiralfedern derart an einen Fixpunkt O angeschlossen, daß sie nur längs einer geradlinigen, durch O gehenden Führung auf der Scheibe symmetrische Ausschläge x ausführen können. Die Scheibe rotiert um eine durch O gehende vertikale Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit ω , die stets gleich ist der Winkelgeschwindigkeit der zu regulierenden Maschine; linear mit x verändert sich die beschleunigende Kraft der Maschine (Überschuß der Triebkraft über die Widerstände). Gegeben ist außer m das Trägheitsmoment T der Maschine, die Veränderlichkeit der Federkraft $= a - bx$, die der Maschinenkraft $= k - cx$ und die Dämpfungskonstante λ für den Ausschlag x der Reglermasse. Man ermittle den Zustand stationärer Bewegung mit $\dot{x} = 0, \quad \dot{\omega} = 0$ und die kleinen Schwingungen um diesen Zustand und entscheide insbesondere, unter welchen Bedingungen einmal angeregte Schwingungen mit der Zeit abklingen (Stabilitätskriterium).

IV. Lebende Körper.

46. **Abspringen von einem Kahn.** Warum kann ein auf dem Wasser schwimmender Kahn nicht in Ruhe bleiben, wenn ein Mann vom Kahn ans Ufer springt? Warum kommt dann der Kahn nach einer kurzen Strecke zur Ruhe? In welcher Weise kann der Abspringende die Länge dieser Strecke beeinflussen, wenn angenommen wird, daß der Wasserwiderstand etwas schwächer als mit der zweiten Potenz der Geschwindigkeit wächst?
47. **Ballspiel auf glattem Boden.** Zwei Personen (1, 2) vom Gewicht G_1 stehen fest auf einem Brett vom Gewicht G_2 , das völlig reibungslos auf horizontalem Boden gleiten kann, und werfen einander wechselweise einen Ball vom Gewicht G zu. Zu Anfang befinde sich der Ball bei 1 und das ganze System in Ruhe. Was müssen die beiden anfangen, wenn sie in der Richtung von 2 nach 1 um eine bestimmte Strecke s fortrücken wollen, wobei der Ball am Schluß wieder bei 1 sein soll? Es sei bekannt, daß der Luftwiderstand die jedesmal gleiche Anfangsgeschwindigkeit v' des Balles während der Wurfdauer auf v'' vermindert?
48. **Gleichgewicht am Bootsrudder.** Ein Ruderboot findet in Fahrt den Wasserwiderstand W . Mit welcher Kraft P muß ein Ruderer bei symmetrischer Anordnung die beiden Ruder bewegen, wenn der im Wasser während eines Ausschlages festliegende Punkt des Ruderblattes den Abstand a vom Ruderstützpunkt am Bootsrand und den Abstand b vom Angriffspunkt der Kraft P besitzt?
Die Lösung $P:W = a:b$ (einarmiger Hebel) kann nicht richtig sein, weil danach $a = b$ möglich wäre.
49. **Beschleunigung eines Wagens.** Welchen Einfluß hat das Anfahren und das Bremsen eines Wagens auf das Gleichgewicht einer im Wagen aufrecht stehenden Person? Warum kann man nur mit gespreizten Beinen in relativer Ruhe bleiben? Bei welcher Größe der Anfahrbeschleunigung wird einem der Boden unter den Füßen sozusagen „weggezogen“?
50. **Mechanik des Gehens.** Man erkläre den Vorgang des Gehens in Schuhen auf rauhem Boden. In welcher Weise beeinflußt die Beschaffenheit des Bodens die erforderliche Arbeitsleistung? Wodurch ist die Geschwindigkeit des Gehens begrenzt und woran liegt es, daß man mit dem Fahrrad bei gleichem Arbeitsaufwand weit größere Fortschrittsgeschwindigkeiten erzielt?

51. **Bewegung auf dem Drehschemel.** Ein Mann steht aufrecht auf einer horizontalen Platte, die sich reibungslos um eine vertikale Achse drehen kann. Welche Bewegungen muß er mit den Armen ausführen, wenn er sich aus dem Ruhezustand heraus um einen bestimmten Winkel samt der Platte herumdrehen will? Man verfolge die Bewegung rechnerisch unter der Annahme, daß die Versuchsperson einschließlich der Unterlage das Trägheitsmoment T besitzt, mit Hanteln von der Masse m arbeitet, die Masse der Arme vernachlässigt werden kann und die Entfernungen a, b der Hanteln von der Drehachse bei angezogenen bzw. ausgestreckten Armen gegeben sind.
52. **Katze, die auf die Füße fällt.** Wie bringt es eine Katze zuwege, sich während des Herabfallens aus genügender Höhe, ohne Unterstützung durch irgendwelche äußere Kräfte, so um ihre eigene Achse zu drehen, daß sie mit den Füßen am Boden auftrifft? Oder: Warum kann ein anfänglich ruhender lebender Körper bei Abwesenheit von äußeren Kräften zwar seinen Schwerpunkt nicht verschieben, sich aber wohl um seinen Schwerpunkt drehen?
53. **Klettern am Aufzugseil.** Ein Personenaufzug, dessen Gesamtgewicht einschließlich der Belastung G beträgt, hängt an einem Seil, das über eine Rolle geführt ist und am anderen Ende ein Gegengewicht G trägt. Nachdem der Aufzug zur Ruhe gekommen ist, versucht eine Person, deren Gewicht ein n tel von G ist, mit der Geschwindigkeit v längs des Seiles emporzuklettern. Was für eine Bewegung tritt ein, wenn von Seilsteifigkeit und Zapfenreibung der Rolle abgesehen wird? Wie wird die Bewegung durch die Zapfenreibung beeinflusst?
54. **Schaukel.** Eine Schaukel bestehe aus der starren Verbindung eines Brettes mit zwei parallelen Stäben, die um eine horizontale Achse pendeln kann. Welche Bewegungen muß eine auf dem Brett stehende Person ausführen, um ohne Inanspruchnahme der Reibung in der Aufhängung die Schaukelschwingungen zu verstärken? Man verfolge den Vorgang unter der Annahme, daß eine punktförmige Masse m' parallel den Aufhängestangen eine hin- und hergehende Bewegung unter dem Einfluß der Schwere vollführt.
55. **Fliege unter der Glasglocke.** Auf einer Wagschale ruht ein Insekt unter einer dicht abschließenden Glasglocke; Insekt und Glocke werden durch Gegengewichte austariert. Wird das Gleichgewicht gestört und gegebenenfalls in welchem Maße, wenn das Insekt die Schale verläßt und innerhalb der Glocke umherfliegt?

V. Elastische Körper.

56. **Verhinderte Wärmedehnung.** Ein elastischer Körper von prismatischer Gestalt wird um $t = 25^\circ\text{C}$ erwärmt und an seiner axialen Ausdehnung durch feste Gegenstützen gehindert. Wie groß ist der dadurch entstehende Druck im Innern des Körpers, wenn sein Elastizitätsmodul $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ (Eisen) und sein linearer Ausdehnungskoeffizient $c = 11 \cdot 10^{-6}/1^\circ\text{C}$ beträgt?
57. **Gewichtsausgleich durch Elastizität.** Ein Gewicht G hängt an n parallel laufenden Fäden, die im ungespannten Zustand die mittlere Länge l mit Abweichungen bis zu λ Proz. hiervon aufweisen. Wie groß sind die Abweichungen der Seilspannung vom Mittelwert $G:n$, wenn die Spannung für die Dehnung 1 (d. i. die Elastizitätszahl) E kg beträgt?
58. **Beanspruchung eines Stabes durch Rotation.** Ein homogener, zylindrischer Eisenstab von der Dichte δ und der Länge $l = 30 \text{ cm}$ rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Gerade, die durch seinen Schwerpunkt geht und senkrecht zur Stabachse steht. Wie groß darf ω höchstens werden, wenn die größte — durch die Fliehkraft bedingte — Zugspannung nicht größer als 600 at sein darf?
59. **Größtwerte der Spannung in der Ebene.** Bei einem ebenen Spannungszustand sind die drei Spannungskomponenten X_x , Y_y und $X_y = Y_x$ gegeben; man bestimme die Größe und Lage der größten und kleinsten Spannungen und drücke durch diese den Größtwert der Tangentialspannung aus.
60. **Mohrs Spannungs- und Zerrungskreis in der Ebene.** Die Spannungsvektoren für einen Punkt im Innern eines ebenen Spannungszustandes werden von einem festen Punkt O aus derart aufgetragen, daß die zur Schnittrichtung senkrechte Spannungskomponente (die Normalspannung) in die x -Richtung, die zum Schnitt parallele Komponente (die Tangentialspannung) in die y -Richtung fällt. Man beweise, daß die Endpunkte der so konstruierten Vektoren auf einem Kreise liegen, dessen Mittelpunkt sich auf der x -Achse befindet. Ganz das gleiche gilt, wenn man statt der Spannungen die Zerrungen (Deformationsgrößen) in ähnlicher Weise aufträgt, nämlich Dehnungen entsprechend den Normalspannungen, halbe Winkeländerungen entsprechend den Tangentialspannungen.
61. **Mohrs Kreise im Raum.** Wird die Konstruktion der vorangehenden Aufgabe für einen beliebigen räumlichen Spannungs- (oder Zer-

rungs-) Zustand ausgeführt, so liegen die Endpunkte der Vektoren in zwei Kreisdreiecken, die von drei, einander paarweise berührenden Kreisen mit Mittelpunkten auf der x -Achse gebildet werden (Mohrsche Kreise).

62. **Spannungsellipsoid.** Trägt man auf jeder durch einen festen Punkt gehenden Geraden die reziproke Quadratwurzel aus der Größe der dieser Richtung zugeordneten Normalspannung auf, so liegen die Endpunkte auf einer Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung. Dies ist durch Rechnung zu beweisen.
63. **Biegung des einseitig eingespannten Stabes.** Ein einseitig eingespannter Stab von der Länge l , dessen Biegungswiderstand EJ (E Elastizitätsmodul, J Flächenmoment zweiten Grades des Querschnittes) gegeben ist, wird senkrecht zu seiner Achse durch eine Last Q belastet, die am freien Ende angreift. Wie weit weicht das freie Ende aus und unter welchem Winkel stellt dieses Stabende sich ein?
64. **Torsion eines Kreisrohres.** Ein Stab von Kreisringquerschnitt, Außenradius r_a , Innenradius r_i , wird durch ein an seinen Enden wirksames Kräftepaar M tordiert. Wie groß darf M sein, wenn die größte Schubspannung nicht größer sein darf als diejenige (größte Schubspannung), die bei einseitigem Zug desselben Stabes durch die Längskraft P hervorgebracht wird?
65. **Dreimomentensatz des durchgehenden Balkens.** Ein über mehrere Stützen laufender gerader Stab vom Biegungswiderstand EJ ist an den Stellen $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$ fest unterstützt ($x_3 > x_2 > x_1$) und dazwischen frei und unbelastet. Welche Beziehung besteht zwischen den drei Werten $M(x_1)$, $M(x_2)$ und $M(x_3)$ des Biegemomentes an den Stützpunkten? Wie ändert sich diese Beziehung, wenn in jedem der beiden Felder x_1, x_2 und x_2, x_3 Querkräfte angreifen, die — falls jedes Feld als freier Balken betrachtet wird — das Moment $M'(x)$ [mit $M'(x_1) = M'(x_2) = M'(x_3) = 0$] ergeben würden?
 Stelle die Gleichung der elastischen Linie für die beiden Felder auf und setze die erste Ableitung beider Ausdrücke für $x = x_2$ einander gleich.
66. **Entlastung einer Rohrseele durch ein Mantelrohr.** Um ein Kanonenrohr vom Innenradius r_i und Außenradius r_a zur Aufnahme eines großen Innendruckes p tauglich zu machen, wird außen ein zweites Rohr mit den Abmessungen r'_i und r'_a heiß aufgezogen, das nach dem Erkalten die innere „Rohrseele“ zusammenpreßt. Man zeige, in welchem Maße sich die Maximalspannung im Innern bei gegebenem p vermindert, wenn ein bestimmter Wert des „Schrumpfmaßes“

$$\delta = \frac{r_a - r'_i}{r_a}$$
 von der Größenordnung 0,001 vorgeschrieben ist. Bei

- der Rechnung darf die Querkontraktion außer acht gelassen werden, ohne daß das Ergebnis hiervon beeinflußt wird.
67. **Kritische Umdrehungszahl einer Welle.** Ein einseitig eingespannter kreiszylindrischer Stab von der Länge l und dem Biegungswiderstand EJ , der im übrigen als masse- und gewichtslos gelten soll, trägt an seinem freien Ende eine Masse m , deren Schwerpunkt den Abstand a von der Achse besitzt und die der Schwere auch nicht unterworfen sein soll. Der Stab rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um seine eigene Achse und biegt sich dabei infolge der an m angreifenden Fliehkraft aus. Man bestimme die Ausbiegung und zeige, bei welchem Wert von ω ein Gleichgewichtszustand unter kleiner Ausbiegung überhaupt nicht mehr möglich ist.
68. **Biegungsschwingungen eines Stabes.** Ein prismatischer Stab von der Länge l und dem Biegungswiderstand EJ ist an den Enden aufgestützt und kann kleine Schwingungen quer zu seiner Achsrichtung ausführen. Man bestimme die Frequenz a) für den Fall, daß der Stab als masselos gelten kann, aber in der Mitte durch eine Masse m belastet ist; b) für den Fall, daß die Masse m gleichförmig über die Stablänge verteilt ist.
69. **Torsionsschwingungen einer Welle.** Eine Welle von Kreisquerschnitt, Halbmesser $a = 15$ cm, Länge $l = 40$ cm, ist an einem Ende fest eingespannt und am anderen Ende einem Drehmoment M unterworfen, das nach dem Gesetz $M = M_0 \sin \omega t$ veränderlich ist, $M_0 = 2000$ kg/cm, $\omega = 100$ sec⁻¹. Man bestimme die Amplitude der erzwungenen Torsionsschwingung der Welle, wenn ihre Schubelastizitätszahl (Gleitmodul) $G = 100\,000$ kg/cm², ihr spezifisches Gewicht $\gamma = 7,5$ kg/l beträgt. Wie verhält sich dieser größte Ausschlag zu der statischen Verdrehung unter der Belastung M_0 ?
70. **Elastisches Dreieck.** Drei gleiche elastische Stäbe von der Länge l , Querschnitt F , Elastizitätsmodul E sind durch reibungsfreie Scharniere zu einem gleichseitigen Dreieck zusammengeschlossen. Der Eckpunkt 1 liegt fest im Koordinatenanfang, Eckpunkt 2 kann sich längs der x -Achse verschieben, Eckpunkt 3 ist keiner Bedingung unterworfen, hier greift aber eine Kraft mit den gegebenen Komponenten X, Y an. Man bestimme die Längenänderungen der Stäbe und die Verschiebungen der Punkte 2 und 3.

VI. Hydro- und Aeromechanik.

71. **Finger im Wasserglase.** Ein Glas Wasser steht auf einer Wage und ist durch Gegengewichte austariert. Wird das Gleichgewicht

dadurch gestört, daß man in das Wasser einen Finger eintaucht, ohne den Boden zu berühren und ohne das Wasser zum Überlaufen zu bringen?

72. **Wassertrog auf der schiefen Ebene.** Ein mit Wasser gefüllter Trog gleitet längs einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel α herab. Außer der Schwerkraft wirkt auf den Trog der Normaldruck der schiefen Ebene und die Reibung, die durch den Reibungswinkel $\varphi < \alpha$ gemessen wird. Wie stellt sich während des Gleitens die Wasseroberfläche im Trog ein, wenn α und φ kleine Winkel sind?
73. **Überqueren der Strömung.** Man erkläre, in welcher Weise ein Kahn, der durch entsprechende Seilführung gezwungen ist, auf einer senkrecht zum Fluß stehenden Geraden zu verharren, (bei geeigneter Steuerung) durch die Strömung tatsächlich zum Überqueren des Flusses gebracht wird.
74. **Stabilität eines schwimmenden Zylinders.** Ein Kreiszyylinder vom Halbmesser a und der Länge l schwimmt auf dem Wasser. In welchen Grenzen muß das Verhältnis $a : l$ liegen, wenn das Gleichgewicht a) bei vertikaler, b) bei horizontaler Achse stabil sein soll? Sind auch noch andere Fälle möglich? Das Raumgewicht γ , kleiner als γ_0 des Wassers, sei gegeben.
75. **Strömung in einem Kapillarrohr.** Durch eine Kapillare von Kreisquerschnitt, Halbmesser $r = 0,05$ cm, wird Wasser von der Temperatur 10°C (kinetischer Zähigkeitskoeffizient $Z = 0,0131$ cm²/sec) gepreßt. Die Länge des Röhrchens ist $l = 90$ cm, die Druckdifferenz zwischen Anfang und Ende $\Delta p = 0,1$ kg/cm². Wie groß ist die Durchflußmenge? Wie groß die mittlere Geschwindigkeit?
76. **Offene Wasserleitung.** In einem offenen Kanal von Rechteckquerschnitt bedarf es zur Fortleitung von Wasser bei einer Geschwindigkeit v und einer Wassertiefe a eines Gefälles von $J = \xi \frac{v^2}{2ag}$, wobei die „Widerstandszahl“ ξ empirisch gleich $0,0024 + \sqrt{\frac{k}{2a}}$ gefunden werde, und die „Rauheitsgröße“ k für Bretterwände etwa $2 \cdot 10^{-6}$ m gesetzt werden darf. Welche Wassertiefe stellt sich in einem solchen Kanal ein, wenn er bei einer Breite $b = 1,20$ m und einem Gefälle $J = 0,00015$ eine Wassermenge $Q = 500$ l/sec führt?
77. **Ausfluß aus einem Behälter.** Ein kreiszylindrischer Behälter von $d = 4$ m Durchmesser sei bis zu einer Höhe $h_0 = 2,25$ m gefüllt. Wieviel Wasser fließt innerhalb einer Stunde aus, wenn sich am Boden eine Öffnung von $f = 7,5$ cm² Querschnitt befindet und der zugehörige Ausfluß- (Kontraktions-) Koeffizient $\mu = 0,667$ beträgt?

78. **Englerscher Flüssigkeitsmesser.** Aus einem kreiszylindrischen Gefäß vom Halbmesser $R = 5,3$ cm, an das ein vertikal gestelltes Kapillarröhrchen von der Länge $a = 2$ cm und dem Halbmesser $r = 0,145$ cm mit gut abgerundetem Übergang anschließt, fließt die Wassermenge $V = 200$ cm³ aus einer anfänglichen Spiegelhöhe $h_0 = 5,2$ cm (über dem Austrittsquerschnitt des Röhrchens) aus. Man bestimme den Zusammenhang zwischen Ausflußzeit und Zähigkeitszahl unter Vernachlässigung der Reibung im Gefäß und aller Beschleunigungen.
79. **Kugel in zäher Flüssigkeit.** Um das spezifische Gewicht γ sowie die Zähigkeitszahl Z einer Flüssigkeit zu ermitteln, beobachtet man die Endwerte v_1 und v_2 der Fallgeschwindigkeit zweier Kügelchen von den Halbmessern a_1 und a_2 und den Raumgewichten γ_1 und γ_2 in der Flüssigkeit. Wie rechnen sich daraus γ und Z ?
80. **Segnersches Wasserrad.** Ein zylindrisches, bis zur Höhe h mit Wasser gefülltes Gefäß rotiert um seine vertikale Achse unter Überwindung eines entgegenstehenden (von Lagerreibung usf. bedingten) Momentes M . Am unteren Rand des Gefäßes befinden sich im Mantel kleine Ausflußöffnungen vom Gesamtquerschnitt F , an die kurze horizontale, gekrümmte Röhrchen derart anschließen, daß das Wasser aus ihnen nur tangential zu einem Kreis vom Halbmesser a , mit dem Mittelpunkt in der Achse, austreten kann. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ω der stationären Bewegung, wenn der Wasserstand h im Gefäß durch langsames vertikales Nachtropfen aus einem darüber stehenden Behälter unverändert erhalten wird und von aller inneren Reibung abgesehen wird? In welchen Grenzen muß h liegen, damit die Drehbewegung zustande kommt?
81. **Schwebearbeit.** Warum ist es nicht möglich, zu gegebenen Werten des Flugzeuggewichtes G und der Fluggeschwindigkeit v die zum Horizontalflug erforderliche sogenannte Schwebearbeit zu berechnen, ohne daß man den Mechanismus kennt, durch den die Flugbewegung erzielt wird?
82. **Isobaren der ebenen wirbelfreien Bewegung.** Man beweise, daß bei der ebenen wirbelfreien Bewegung einer idealen Flüssigkeit die Isobaren (Linien konstanten Druckes) von den Linien konstanter Stromrichtung senkrecht geschnitten werden. Dabei ist vorausgesetzt, daß das Potential der äußeren Kräfte durchaus konstant ist.
83. **Beispiel einer ebenen wirbelfreien Bewegung.** Man diskutiere die ebene Bewegung, deren komplexes Potential (= Potential + i mal Stromfunktion) mit $z = x + iy$ durch $W = -u \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - C \frac{i}{2\pi} \log \text{nat } z$ gegeben ist, wo u , a , C reelle Konstante bedeuten.

84. **Zusammenhang von Zirkulation und Auftrieb.** Eine ebene wirbelfreie Bewegung sei im ganzen Außenraum um eine beliebig gestaltete, geschlossene Kontur herum stetig. In sehr großer Entfernung R bestehe die Geschwindigkeit (bis auf Glieder höherer Ordnung in $1:R$) aus einer konstanten der x -Achse entgegengerichteten Geschwindigkeitskomponente u und einem zweiten Bestandteil, entsprechend einer Kreisbewegung mit der Geschwindigkeit $C:2R\pi$ (so daß C die Zirkulation) im positiven Drehsinn. Man berechne aus diesen Daten die Größe des Auftriebes A , d. i. der senkrecht auf u gerichteten, von der Strömung auf die feste Kontur ausgeübten Kraft, und zwar unter Anwendung des „Satzes von Aktion und Reaktion“.
85. **Konstanz der Strömungsenergie.** Bei der stationären Bewegung einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit ist die Strömungsenergie

$$E = \frac{\mu c^2}{2} + p + U,$$

wo U das Potential der äußeren Kräfte, auf jeder Stromlinie konstant. Man beweise, daß sie dann und nur dann im ganzen Flüssigkeitsgebiet denselben Wert hat, wenn die Bewegung entweder wirbelfrei erfolgt oder der Wirbel stets die Richtung der Geschwindigkeit besitzt.

VII. Verschiedene Aufgaben.

86. **Trägheitsmomente einer Dreiecksfläche.** Man beweise, daß das Trägheitsmoment einer Dreiecksfläche, die homogen mit der Masse 1 belegt ist, für eine durch den Schwerpunkt gehende Achse mit den Abständen α, β, γ von den Ecken den Wert $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2):12$ und für die senkrecht zur Fläche stehende Achse durch den Schwerpunkt den Wert $(a^2 + b^2 + c^2):36$ besitzt, wo a, b, c die Seitenlängen.
87. **Potential einer inhomogenen Kugel.** Die Dichte im Innern einer Kugel vom Radius R sei der n ten Potenz des Abstandes vom Mittelpunkt proportional. Man berechne das Potential der Kugel für einen beliebigen Punkt des Raumes.
88. **Wind aus drei Geschwindigkeitsmessungen zu bestimmen.** Bei unbekannter Windstärke und Windrichtung sind die drei Zeiten, die ein Flugzeug zum Überfliegen der Seiten eines in seinen Abmessungen gegebenen Dreieckes gebraucht hat, festgestellt worden. Man ermittle aus diesen Angaben die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges, die Größe und die Richtung des Windes.
89. **Helmholtzsche Modellregel.** Wenn verschieden große ähnlich gebaute Tiere unter ähnlichen Bewegungen fliegen sollen, so müßte nach Helmholtz die spezifische Muskelleistung (sekundliche Leistung pro Kilogramm Muskelgewicht) mit der Wurzel aus der Linear-

dimension wachsen. Dies ist unter der Voraussetzung, daß die Zähigkeit und die Elastizität der Luft keine Rolle spielt, nachzuweisen. In welchem Verhältnis stehen die Fluggeschwindigkeiten?

90. **Ballastregel des Ballonaufstieges.** Ein mit leichtem Gas gefüllter Ballon von unveränderlichem Rauminhalt befindet sich in einer bestimmten Höhe im Gleichgewicht. Wieviel Ballast muß man auswerfen, um eine um 100 m höhere Luftschicht zu erreichen, wenn das Gesamtgewicht aller festen Teile einschließlich aller Belastung ursprünglich $G = 1000 \text{ kg}$ betrug und zwischen Luftdruck p in kg/m^2 und Raumgewicht γ in kg/m^3 der Luft die Beziehung $p:\gamma = \text{konst.} = 8700 \text{ m}$ besteht?
91. **Schwerpunktlage eines Flugzeuges.** Wie ändert sich die Höhenlage des Schwerpunktes eines Flugzeuges während des Fluges infolge Abnahme der Benzinmenge? Das Benzingewicht sei zu Beginn des Fluges $\frac{1}{5}$ des Gesamtgewichtes, der prismatische Behälter sei hierbei bis zu einer Höhe h_0 gefüllt und der Boden des Behälters liege um die Strecke a oberhalb des Flugzeugschwerpunktes, wenn dieser bei leerem Behälter bestimmt wird. Man erörtere insbesondere den Fall $a = -\frac{h_0}{2}$.
92. **Sanduhr.** Eine Wasseruhr (Sanduhr) wird, nachdem sie abgelaufen ist, auf einer Wage austariert. Kehrt man sie hierauf um, so daß sie wieder in Gang kommt, so wird das Gleichgewicht gestört. Um wieviel und für wie lange?
93. **Durchhängen eines Leitungsdrahtes.** Ein dünner Eisendraht von der Länge $l = 5 \text{ m}$ und dem Querschnitt $f = 0,1 \text{ cm}^2$ ist mit beiden Enden in gleicher Höhe befestigt und hängt unter dem Einfluß der Schwere $1,0 \text{ cm}$ in der Mitte durch. Nun sinkt die Temperatur um $t = 15^\circ$ und es entsteht andererseits eine Mehrbelastung durch Schnee um $p = 0,0175 \text{ kg/m}$. Wie verändert sich durch beide Umstände die Durchhängung, wenn das spezifische Gewicht des Eisens $\gamma = 7,85 \text{ kg/l}$, die Wärmedehnung $\varepsilon = 0,000011/1^\circ\text{C}$ und die Elastizitätszahl $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ beträgt?
94. **Kreis als Kettenform.** Welche Massenbelegung muß ein Seil erhalten, damit es unter dem Einfluß der Schwere in Gestalt eines Kreisbogens durchhängt?
95. **Aufstieg einer Rakete.** In dem Hohlraum V einer Rakete entsteht infolge der Verbrennung des Pulvers ein gewisser Überdruck p , unter dessen Einfluß das Gas durch eine kleine Öffnung f im Boden des Raketenkörpers auströmt. Man stelle die Bewegungsgleichungen für den stationären Zustand auf.

96. Ein **hydraulisches Analogon zu einer elektrischen Bahnanlage** kann wie folgt konstruiert werden: An Stelle der oberirdischen Stromzuführung tritt ein entsprechend hoch über dem Geleise laufender Oberwasserkanal, in dem durch genügende Wasserzufuhr konstantes Niveau erhalten wird, während der fahrende Wagen ihm dauernd Wasser entnimmt und in einen zwischen den Schienen liegenden Unterwasserkanal entläßt. Das Wasser strömt innerhalb des Wagens durch ein anfangs vertikales, am unteren Ende rückwärts gebogenes Rohr mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Welche Wassermenge muß ein mit der Geschwindigkeit $v = 2,5 \text{ m/sec}$ fahrender Wagen sekundlich verbrauchen, wenn der Bewegungswiderstand des Wagens $W = 100 \text{ kg}$ und die zur Verfügung stehende Niveaudifferenz (vom Oberwasserspiegel bis zum unteren Rohrende) $h = 5,3 \text{ m}$ beträgt?
97. **Elastische Stoßaufnahme.** Ein Körper vom Gewicht G fällt aus der Höhe h herab; der Stoß wird durch eine elastische Spiralfeder aufgenommen, deren Masse vernachlässigt werden mag und die so beschaffen ist, daß einer Druckkraft S die Längenänderung $s = k S$, in der Fallrichtung gemessen, entspricht. Bis zu welchem Betrage wächst S infolge des Stoßes gegenüber dem statischen Wert $S_0 = G$ an, wenn die Konstante k gegeben ist?
98. **Schwingungen eines gespannten Seiles.** Ein Seil von der Länge $2l$ bestehe aus zwei gleich langen Teilen, die die Massenbelegung μ_1 bzw. μ_2 besitzen, und sei an den beiden Enden festgehalten. Die Spannung des Seiles sei konstant, die Schwere ohne Einfluß. Man bestimme die Eigenschwingungen, insbesondere für wenig voneinander verschiedene μ_1 und μ_2 .
99. **Schwingungen des frei herabhängenden Seiles.** Ein Seil von gleichförmiger Massenverteilung, Länge l , hängt unter dem Einfluß der Schwere frei herab; man bestimme die Frequenzen der Eigenschwingungen (vgl. a. Aufg. 11).
100. **Biegung bei nicht-linearem Elastizitätsgesetz.** Ein Balken von rechteckigem Querschnitt, Breite b , Höhe h , wird durch Kräftepaare an seinen Enden gebogen. Es werde angenommen, daß die Querschnitte des Balkens sich nur verdrehen (um Parallele zur Achse der Kräftepaare), ohne sich zu verwölben. Die Beziehung zwischen Dehnung ε und Spannung σ sei aber nicht linear, sondern habe die Form $\varepsilon = \pm \alpha |\sigma|^m$ mit α und m als positiven Konstanten. Man ermittle zu gegebenem Moment M die Randwerte der in einem Querschnitt auftretenden Zug- und Druckspannung, wobei von Schubspannungen überhaupt abgesehen werden mag.
-

Elektrizität und Magnetismus.

I. Elektrostatik.

1. Man zeichne durch graphische Konstruktion (Coulombsches Gesetz und Parallelogramm der Kräfte) die Kraftlinien für das Feld zweier kleiner Kugeln, auf welchen a) gleich große Ladungen von gleichem Vorzeichen, b) gleich große Ladungen von verschiedenem Vorzeichen, c) Ladungen von gleichem bzw. verschiedenem Vorzeichen, deren Größe im Verhältnis 1 : 5 steht, sitzen.
2. Man zeichne qualitativ den Verlauf der Kraftlinien für den Fall, daß eine kleine geladene Kugel im leeren Raum vor einer sehr dicken Metallplatte steht.
3. Dasselbe wie in Aufg. 2, wenn die Kugel einer sehr dicken Glasplatte mit der Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 7$ gegenübersteht.
4. Man zeichne qualitativ den Verlauf der Kraftlinien für den Fall eines dünnen geraden Drahtes, der mit der Erde leitend verbunden ist und zwischen zwei ebenen, zu dem Draht parallelen Metallplatten steht, von denen die eine auf positivem, die andere auf negativem Potential gegen die Erde aufgeladen ist.
5. Man beschreibe qualitativ durch das Kraftlinienbild und quantitativ durch das Potential das Feld eines Dipols vom Moment m .
6. In einer evakuierten Röhre sei als Kathode ein dünner Metalldraht geradlinig ausgespannt, als Anode stehe ihm eine ebene Metallplatte parallel gegenüber, zwischen beiden sei ein Gitter aus Metalldrähten, die untereinander und mit dem Kathodendraht parallel ausgespannt sind. Die Kathode sei geerdet, die Anode sehr hoch positiv, das Gitter zu mäßiger Spannung negativ geladen. Man diskutiere qualitativ das Feld in der Röhre an Hand des Kraftlinienbildes.
7. Wenn der Kathodendraht der vorigen Aufgabe zum Glühen gebracht wird, so sendet er Elektronen aus. Man diskutiere mit Hilfe des Kraftlinienverlaufes, wie sich die Elektronen in der Röhre bewegen, die unter verschiedenem Azimut den Draht senkrecht zur Drahtachse verlassen.
8. In der Erdatmosphäre besteht ein elektrisches Feld, dessen Potentialgefälle am Boden 100 Volt/m, in 1500 m Höhe aber nur noch 25 Volt/m beträgt. Wie groß ist unter der Annahme eines linearen Abfalls

zwischen diesen beiden Werten a) die Raumdichte ρ der in der Atmosphäre sitzenden Ladung, b) die Flächendichte σ auf der Erdoberfläche, c) die Gesamtladung E der Erde?

9. Man beweise, daß in einem zweidimensionalen Kraftfeld eine Linie konstanten Potentials sich selbst nur orthogonal schneiden kann. Schneiden sich in einem Punkt n solche Linien desselben Potentials, so schneiden sich dort auch n Kraftlinien und bilden ebenso wie die ersteren n gleiche Winkel $2\pi/n$ miteinander, und zwar halbiert jede Kraftlinie den Winkel zwischen je zwei Potentiallinien.
10. Man gebe einen Ausdruck für das Potential im Punkte (xyz) , das herrührt von s Punktladungen e_s , die in den Punkten $x_s y_s z_s$ sitzen. Vorausgesetzt sei dabei, daß der Aufpunkt in großer Entfernung von dem System der s Punktladungen liegt.
11. In einer Kugel sei positive Raumladung so verteilt, daß die Dichte ρ nur von der Entfernung r vom Kugelmittelpunkt abhängt. Für welche Verteilung $\rho(r)$ hat die elektrische Kraft in der Kugel überall denselben konstanten Wert?
12. Wie muß im Innern einer Kugel eine positive Raumladung verteilt sein, damit ein Elektron quasielastisch an den Mittelpunkt gebunden erscheint? Wie groß ist die Schwingungsdauer des Elektrons, wenn seine Ladung und Masse e und m , die Gesamtladung der Kugel (vom Radius r_0) E ist?
13. Ein Massenpunkt m trägt die Ladung e und ist elastisch so an eine Ruhelage gebunden, daß die rücktreibende Kraft proportional der Elongation aus der Ruhelage ist ($F = -kr$); der Punkt kann um die Ruhelage harmonische Schwingungen ausführen. Wie ändern sich die Verhältnisse, insbesondere die Frequenz dieser Schwingungen, wenn das ganze System in ein homogenes elektrisches Feld von der Stärke E gebracht wird?
14. In dem üblichen elektrostatischen Maßsystem ist die Beziehung zwischen Feldkraft \mathcal{E} und Ladungsdichte ρ gegeben durch $\operatorname{div} \mathcal{E} = 4\pi\rho$, in dem sogenannten rationellen Maßsystem lautet diese Beziehung $\operatorname{div} \mathcal{E} = \rho$. Wie schreibt sich das Coulombsche Gesetz bei Benutzung dieses Maßsystems, wie verhält sich die Einheit von Ladung, Feldkraft, Potential, Kapazität im rationellen System zu den entsprechenden Einheiten im elektrostatischen System?
15. Um eine positive Punktladung $+2e$ laufen zwei Elektronen, deren jedes die Ladung $-e$ trägt, auf einem Kreis vom Radius a so herum, daß sie sich stets an den beiden Enden eines Durchmessers gegenüberstehen; die Winkelgeschwindigkeit der Elektronen ist so gewählt, daß das System im dynamischen Gleichgewicht ist. Wie groß

- ist die Arbeit, die man aufwenden muß, um dieses System vollständig zu zersprengen, d. h. um alle drei Ladungen in unendlich große Entfernungen voneinander zu bringen?
16. Zwei positive Punktladungen $+e$ stehen sich im Abstand $2b$ gegenüber; in einer Ebene, die senkrecht zu $2b$ und symmetrisch zu diesen beiden Ladungen liegt, laufen zwei Massenpunkte m , deren jeder die negative Ladung $-e$ trägt, in einem Kreis vom Radius a , dessen Mittelpunkt auf $2b$ liegt, so um, daß sie stets sich diametral gegenüberstehen. Welche Beziehung muß zwischen a und b bestehen und wie groß muß die Winkelgeschwindigkeit ω des Umlaufs sein, damit das System im Gleichgewicht ist?
 17. Es seien n Elektronen mit je der Ladung $-e$ äquidistant auf einem Kreis vom Radius a verteilt. Wie groß ist die resultierende Kraft s_n , die auf eine dieser Ladungen seitens der $(n-1)$ übrigen ausgeübt wird? Die Kraft ist zu berechnen a) durch vektorielle Addition der Einzelkräfte, b) aus der potentiellen Energie des Systems.
 18. Im Mittelpunkt des Elektronenkreises der vorigen Aufgabe sitze eine positive Ladung E , die Masse eines Elektrons sei m . Mit welcher Winkelgeschwindigkeit müssen die Elektronen auf dem Kreise rotieren, damit das System im Gleichgewicht ist?
 19. Wie lauten die Gleichgewichtsbedingungen in Aufg. 16 für den allgemeinen Fall, daß die positiven Ladungen die Größe $+ne$ haben und auf dem Kreis $2n$ negative Ladungen von der Größe $-e$ äquidistant verteilt sind?
 20. Ein System bestehe aus positiv und negativ geladenen Massenpunkten, zwischen denen Zentralkräfte nach irgend einer Potenz der gegenseitigen Entfernungen wirken und unter deren Einfluß die Punkte stationär geschlossene Bahnen beschreiben; das System sei also im dynamischen Gleichgewicht. Man zeige, daß die kinetische Energie eines solchen Systems der Größe nach gleich ist der halben potentiellen Energie.
 21. Wie erklärt sich aus dem Theorem von Thomson (daß für ein statisches System im Gleichgewicht die Energie ein Minimum ist) qualitativ der Verlauf der Kraftlinien für eine dielektrische Kugel in einem ursprünglich homogenen elektrischen Feld?
 22. Wie bewegt sich nach dem Theorem von Thomson (vgl. Aufg. 21) eine kleine dielektrische Kugel in einem inhomogenen elektrischen Feld? Wie ist die Bewegung in einem homogenen Feld? Wie ändert sich die Bewegung im inhomogenen Feld, wenn man die Feldrichtung umkehrt, ohne die Feldstärke zu ändern?

23. Wie bewegt sich die Kugel der Aufg. 22 im inhomogenen Feld, wenn die Bewegung in einem widerstehenden Medium stattfindet, welches die Geschwindigkeit stets auf kleinen Werten erhält?
24. Eine kurze, sehr dünne Nadel aus einer dielektrischen Substanz ist in einem inhomogenen elektrischen Feld drehbar um die z -Achse in ihrem Schwerpunkt aufgehängt. E_0 sei die Feldkraft in diesem Schwerpunkt $x = y = 0$, in der Umgebung sei das Feld darstellbar durch $E = E_0 + ax + by$. a) In welche Richtung wird sich die Nadel einstellen? b) Wie hängt die Schwingungsdauer der Nadel bei kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage ab von der Länge l der Nadel und vom Feld?
25. Eine kurze Metallnadel ist drehbar in einem inhomogenen elektrischen Feld aufgehängt. a) Welches ist die Gleichgewichtslage und die Art des Gleichgewichts? b) Wie hängt die Schwingungsdauer der Nadel bei kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage ab von der Feldstärke E_0 am Ort der Nadel?
26. Bringt man einen dielektrischen Körper in ein elektrisches Feld, so wird dieses innerhalb und außerhalb desselben deformiert. Man zeige, daß im Grenzfall unendlich großer Dielektrizitätskonstante des Körpers die Deformation dieselbe ist wie für einen leitenden Körper, d. h. z. B., daß die Feldkraft im Innern Null ist und die Kraftlinien normal zur Oberfläche des Körpers einmünden.
27. Wenn eine Seifenblase elektrisch geladen wird, so wirkt auf jedes Flächenelement derselben eine mechanische, radial nach außen gerichtete Kraft. Um welchen Betrag wird hierdurch der Druck im Innern der Blase vermindert? Radius der Blase r_0 , Potential V .
28. Wie groß ist die Feldkraft an der Oberfläche eines geraden zylindrischen Drahtes vom Radius r_0 , wenn der Draht auf der Längeneinheit die Ladung e trägt?
29. In dem Raum zwischen zwei horizontalen ebenen Metallplatten, die sich im Abstand d gegenüberstehen und von denen die eine mit der Erde verbunden, die andere (obere) auf das Potential $+V$ Volt geladen ist, befindet sich eine kleine Kugel vom Radius r ; das spezifische Gewicht der Kugelsubstanz sei γ . Wie groß muß der Radius des Kügelchens sein, wenn auf ihm die Ladung $-e = -4,7 \cdot 10^{-10}$ statische Einheiten eines einzigen Elektrons sitzt, damit es durch das Feld gerade in der Schwebe gehalten wird, a) wenn der Raum zwischen den Platten mit Luft ($\epsilon = 1$), b) mit Äthylalkohol ($\epsilon = 26$) gefüllt ist?
30. Ein Ion bewegt sich in Luft in einem Feld von der Stärke E Volt/cm infolge der Reibung mit der konstanten Geschwindigkeit von $1,87 \cdot E$ cm/sec in Richtung der Kraftlinien. a) Wie lange braucht es, um unter

- dem Einfluß der influenzierten Ladung aus einem Abstand von 1 mm an eine ebene Metallplatte zu wandern? b) Aus welcher Entfernung wandert es in 1 Sekunde an die Metallplatte? Ladung des Ions $4,7 \cdot 10^{-10}$ statische Einheiten.
31. Einer unendlich ausgedehnten Metallplatte, die gleichmäßig mit der Flächendichte $+\sigma$ geladen ist, steht eine Punktladung $-e$ im leeren Raume gegenüber. Mit welcher Kraft wird die Ladung angezogen?
 32. Ein kleiner geladener Körper mit der Ladung e befindet sich im Abstand l cm vor einer sehr dicken ebenen Platte aus Glas mit der Dielektrizitätskonstante ϵ . a) Man berechne nach der Methode der elektrischen Bilder die Kraft K , welche auf den Körper wirkt. b) Wie verhält sich diese Kraft zu der entsprechenden für den Fall einer Metallplatte, wenn für Glas $\epsilon = 6$ ist?
 33. Zwei unendlich ausgedehnte ebene Metallplatten stehen sich im Abstand a gegenüber, beide sind geerdet; in dem Raum zwischen beiden befindet sich ein kleiner Probekörper, der die Ladung e trägt im Abstand d von der einen Platte. Man diskutiere die Feldverhältnisse.
 34. Man invertiere das System der Aufg. 33 bezüglich des Punktes, in welchem das Probekörperchen sitzt, und diskutiere die Verhältnisse.
 35. Gegeben sind zwei gleich große Metallkugeln vom Radius a , von denen die eine ungeladen ist, die andere die Ladung E trägt. Welche Arbeit wird geleistet, wenn die beiden Kugeln aus unendlicher Entfernung bis zur gegenseitigen Berührung einander sich nähern?
 36. Zwei gleich große Metallkugeln vom Radius a tragen die Ladungen e bzw. E . Wie müssen diese beiden Ladungen gewählt sein, damit bei Annäherung der beiden Kugel aus unendlicher Entfernung bis zur Berührung keine Arbeit zu leisten ist oder vom Feld geleistet wird?
 37. Eine isolierte ungeladene Metallkugel wird in ein ursprünglich homogenes elektrisches Feld gebracht. Man bestimme durch eine Grenzbetrachtung nach der Methode der elektrischen Bilder das Feld außerhalb der Kugel und die Verteilung der auf der Kugel influenzierten Ladungen. Der Radius der Kugel sei R , das ungestörte Feld \mathcal{E}_0 liege in der Richtung x , der Anfangspunkt des Koordinatensystems liege im Mittelpunkt der Kugel.
 38. Vor einer Metallkugel vom Radius R steht im Abstand d vom Kugelzentrum ein kleines geladenes Körperchen (Ladung e). Mit welcher Kraft wird dieses Körperchen von der Kugel angezogen, a) wenn die Kugel ungeladen und isoliert ist, b) wenn sie die Ladung E trägt und isoliert ist, c) wenn sie durch einen dünnen Draht (dessen Wirkung auf das Feld zu vernachlässigen ist) mit der Erde verbunden und dadurch dauernd auf dem Potential Null gehalten ist?

39. Vor einer isolierten, mit der Elektrizitätsmenge E geladenen Metallkugel vom Radius R befindet sich ein kleines Kügelchen, welches die Ladung e trägt. Gibt es eine Lage, in welcher sich das Kügelchen im Gleichgewicht befindet und ist dies Gleichgewicht stabil oder labil?
40. Gegeben sind zwei konzentrische Kugelschalen aus Metall mit den Radien R_a und R_b ($R_a > R_b$). a) Man berechne die Potentiale V_a und V_b der Schalen, wenn auf diesen die Ladungen e_a bzw. e_b sitzen. b) Man berechne das Potential V_b der inneren Kugel am Ende der folgenden Operationen: 1. Beide Kugeln durch einen Stift leitend miteinander verbunden. 2. Die verbundenen Kugeln aufgeladen zu dem gemeinsamen Potential V . 3. Verbindung zwischen den Kugeln wird gelöst. 4. Die äußere Kugel wird geerdet.
41. Wie gestaltet sich der Ausdruck für das Potential V_b der inneren Kugel in Aufg. 40 b, wenn das elementare Kraftgesetz zwischen zwei Ladungen nicht das Coulombsche ist, sondern von diesem etwas abweicht und die Form $e_1 e_2 / r^{2+\delta}$ ($\delta \ll 1$) hat?
42. Zwei gleich große Metallkugeln berühren sich und sind beide auf das Potential 1 geladen. Wie groß ist die Ladung auf jeder Kugel?
43. Eine sehr kleine Metallkugel vom Radius r berührt eine sehr große Metallkugel vom Radius R , beide sind auf das Potential 1 geladen. Wie groß ist die mittlere Flächendichte σ_r auf der kleineren Kugel im Vergleich zur mittleren Flächendichte σ_R auf der großen? Welche Ladungen E_r bzw. E_R sitzen auf den Kugeln?
44. Eine Kugel vom Radius R besteht aus einem Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstante ϵ . Man berechne das Feld innerhalb und außerhalb, wenn die Kugel in ein ursprünglich homogenes Feld \mathfrak{G}_0 gebracht ist.
45. Eine Kugelschale mit den Radien R und r besteht aus einem Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstante ϵ . Man berechne die „Schirmwirkung“, d. h. das Verhältnis der Feldkraft \mathfrak{G}_i im Hohlraum zur Feldkraft \mathfrak{G}_0 eines ursprünglich homogenen Feldes, in welches die Schale gestellt wird.
46. Ein Metallkörper A befinde sich frei im Innern einer geschlossenen metallischen Hülle B , A sei auf das Potential V_a , B auf das Potential V_b geladen. Wie ändert sich die Potentialdifferenz $V_a - V_b$, wenn man zwischen A und B eine geschlossene, den Körper A umschließende Schale aus einem Dielektrikum einschiebt (dessen Dielektrizitätskonstante ϵ ist), wenn die beiden Oberflächen dieser Schale zusammenfallen mit zwei Äquipotentialflächen V_1 und V_2 des ursprünglichen Feldes zwischen A und B ?

47. Das absolute Elektrometer von W. Thomson besteht aus einer ebenen Metallscheibe vom Radius R mit Schutzring, der im Abstand d eine ebene Metallplatte gegenübersteht. Mit welcher Kraft wird die Scheibe angezogen, wenn die Spannungsdifferenz zwischen Scheibe und Platte V Volt ist und der Zwischenraum a) mit Luft ($\epsilon = 1$), b) mit Äthylalkohol ($\epsilon = 26$) gefüllt ist?
48. Man berechne das Feld in einem Zylinderkondensator, bestehend aus zwei koaxialen, praktisch unendlich langen Kreiszyindern vom Radius R_0 und r_0 , von denen der innere auf das Potential V geladen, der äußere geerdet ist.
49. Ein ionisiertes Gas werde durch eine Pumpe mit der (kleinen) mittleren Geschwindigkeit v cm/sec durch einen Zylinderkondensator gesaugt, dessen Belegungen (Radien R_0 und r_0) auf den Potentialen 0 und V Volt gehalten werden; die Länge des Kondensators sei l cm, Randkorrekturen seien durch geeigneten Schutz unnötig gemacht. Die Ionen in dem Gas wandern in einem Feld von der Stärke E Volt/cm mit der konstanten Geschwindigkeit $k \cdot E$ cm/sec längs der Kraftlinien. Wie groß muß die Länge des Kondensators mindestens sein, damit in ihm alle Ionen abgefangen werden?
50. Zwei Leidener Flaschen haben die Kapazitäten C_1 bzw. C_2 und tragen die Ladungen E_1 bzw. E_2 . Unter welcher Bedingung wird kein Funken entstehen, wenn man die beiden Flaschen parallel zueinander schaltet?
51. Aus einem Wassertropfkollektor, dessen Kapazität C cm ist, fällt in jeder Sekunde ein Tropfen vom Radius r cm. In welcher Zeit T hat der Kollektor, dessen Potential anfangs durch Erdung gleich null gemacht war, das Potential des Feldes am Ort der Tropföffnung bis auf 1 Proz. angenommen?
52. Als Ladezeit eines Wassertropfkollektors bezeichnet man die Zeit, innerhalb welcher der Kollektor bis auf 1 Proz. das Potential am Ort der Tropföffnung angenommen hat. Muß man, um möglichst kurze Ladezeit zu erhalten, bei vorgeschriebenem sekundlichen Wasserverbrauch wenige große oder viele kleine Tropfen pro Zeiteinheit austreten lassen?
53. Wie groß ist die Kapazität eines Systems aus zwei unendlich langen Zylindern mit den Radien r_1 und r_2 , die sich parallel mit dem Achsenabstand d gegenüberstehen? (Kapazität ist anzugeben pro Längeneinheit der Zylinder.)
54. Wie groß ist die Kapazität der Längeneinheit eines geraden Drahtes vom Radius r gegen eine der Drahtachse im Abstand h parallel gegenüberstehende leitende Ebene?

55. Es sind 14 Röhren aus dünnem Blech konzentrisch ineinandergesteckt; die Höhe der Röhren ist 18 cm, der Zwischenraum zwischen je zwei Röhren beträgt 2 mm, das innerste Rohr hat einen Durchmesser von 1 cm. Die Zwischenräume sind mit Paraffin ($\epsilon = 2$) ausgegossen. Wie groß ist angenähert die Kapazität des Kondensators, der durch Verbindung der 1., 3., 5... Röhre einerseits, der 2., 4., 6... andererseits untereinander zu je einer Belegung entsteht?
56. Wie groß ist die Kapazität einer zylindrischen Leidener Flasche (ohne Boden) pro Längeneinheit, wenn der innere Radius der Flasche 5 cm, die Wandstärke 0,2 cm und die Dielektrizitätskonstante des Glases 6 ist?
57. Wie groß ist die Kapazität eines Kugelkondensators aus zwei konzentrischen Kugeln mit den Radien R und r , deren Zwischenraum von einem Nichtleiter mit der Dielektrizitätskonstante ϵ erfüllt ist?
58. Wie groß ist die Kapazität eines luftgefüllten Kondensators aus zwei Kreisscheiben von der Fläche f , die sich in dem gegen ihre Radien sehr kleinen Abstand d gegenüberstehen?
59. Wie groß ist angenähert die Kapazität eines luftgefüllten Kondensators in Mikrofarad, der aus 71 dünnen Platten von 20 cm Durchmesser besteht, die im gegenseitigen Abstand von 2 mm hintereinandergestellt und so miteinander verbunden sind, daß die 1., 3., 5... zusammen die eine Belegung, die 2., 4., 6... die andere Belegung bilden?
60. Wie groß ist die Kapazität eines Rotationsellipsoids mit den Achsen a und b ?
61. Eine kreisförmige Platte kann aufgefaßt werden als ein stark verkürztes Rotationsellipsoid. Wie groß ist die Kapazität, wenn R der Radius und d die im Vergleich dazu sehr kleine Dicke ist?
62. Zwei unendlich lange Kreiszyylinder vom Radius R mit gemeinsamer Achse sind durch einen kleinen Zwischenraum getrennt nebeneinander aufgestellt. Ein dritter engerer Zylinder vom Radius r , dessen Länge gegen die Breite dieses Zwischenraumes groß ist, ragt axial frei beweglich symmetrisch in die beiden Zylinder hinein. Die Potentiale der äußeren Zylinder sind V_1 und V_2 , das Potential des inneren beweglichen Zylinders ist V . Um wieviel ändert sich die Energie dieses Systems, wenn man den inneren Zylinder um die Strecke δx verschiebt?

II. Magnetostatik.

63. Man berechne das skalare Potential eines Elementarmagneten (Dipols) und aus diesem Richtung und Stärke des Feldes.

64. In der gegen die Länge eines Magnetstabs vom Moment M großen Entfernung r von dessen Zentrum ist eine kleine Magnetnadel drehbar aufgehängt; r bildet mit der Achse des Stabes den Winkel ϑ . In welcher Richtung stellt sich die Magnetnadel (bei Vernachlässigung des Erdfeldes) ein?
65. Zwei kleine Magnetstäbe, deren Momente M_1 bzw. M_2 sind, liegen in derselben Ebene in dem zu ihrer Länge großen gegenseitigen Abstand r . Mit welcher Kraft wirken die Stäbe aufeinander, a) wenn $M_1 \parallel M_2$ und beide in derselben Geraden liegen, b) wenn M_1 und M_2 senkrecht r stehen? Sind die genannten Lagen stabil oder instabil?
66. Ein Magnetstab vom Moment M ist in seinem Mittelpunkt um eine vertikale Achse drehbar aufgehängt, sein Trägheitsmoment um diese Achse sei T , die Achse des Stabes liege horizontal. Wie groß ist die Schwingungsdauer des Stabes bei kleinen Schwingungen im Erdfeld (Horizontalkomponente H) um die Gleichgewichtslage?
67. Wie groß ist die potentielle Energie eines Dipols vom Moment M in einem homogenen äußeren Feld H , wenn M und H den Winkel ϑ einschließen? Welches sind die Gleichgewichtslagen des Dipols und welcher Art ist das Gleichgewicht?
68. Ein Gas bestehe aus magnetischen Molekülen, d. h. aus elementaren Dipolen vom Moment m . Wenn kein äußeres Feld auf dieses Gas wirkt, liegen die Momente m der einzelnen Moleküle regellos durcheinander, das Gesamtmoment der Volumeinheit ist null. In einem äußeren Feld H_0 orientieren sich die Dipole im Mittel so, daß die Anzahl der Moleküle mit der potentiellen Energie P gegeben ist durch

$$dn = K \cdot \frac{P}{e^{RT}} \cdot dP,$$

worin R die Gaskonstante, T die absolute Temperatur und K eine Konstante ist, welche sich aus der Gesamtzahl N der Moleküle in der Volumeinheit bestimmt. Wie groß ist in diesem Fall das Moment M der Volumeinheit des Gases und wie hängt es von der Temperatur ab?

69. Eine kleine Kugel aus einem Material mit der Permeabilität μ befindet sich in einem äußeren inhomogenen Feld, dessen Struktur durch die Kugel nicht gestört werden soll. Welche Arbeit δA ist nötig, um die Kugel zu verschieben, und was folgt daraus über die Richtung, in welcher die Kugel sich von selbst in dem Feld bewegt?
70. Eine gleichmäßig gewickelte lange biegsame Spule von konstantem kleinen Querschnitt ist durch ein ballistisches Galvanometer geschlossen, um eine in der Spule induzierte elektromotorische Kraft

messen zu können. a) Proportional welcher physikalisch wichtigen Größe ist diese Kraft, wenn die Spule in Luft ($\mu = 1$) zwischen zwei Punkten A und B irgendwie ausgelegt wird und wenn ein Feld $H(x, y, z)$ plötzlich erzeugt wird? b) Was mißt man, wenn A und B zusammenfallen, die Spulenachse also eine geschlossene Kurve bildet? c) wenn die Spulenachse in geschlossener Kurve eine Drahtspule von n Windungen umschlingt, durch welche der Strom I geschickt wird?

71. Man gebe einen Ausdruck für das Vektorpotential eines elementaren Magnetstäbchens vom Moment M .
72. Ein Eisendraht ist longitudinal so magnetisiert, daß das Moment m des Linienelementes ds von Ort zu Ort verschieden, d. h. Funktion der Bogenlänge s auf dem Draht ist. Welches ist das Potential des von diesem Draht herrührenden Feldes?
73. Ein sogenannter solenoidaler Magnet kann aus einfachen magnetischen Fäden, ein sogenannter lamellarer Magnet aus einfachen magnetischen Blättern aufgebaut werden. Man zeige, daß für die Magnetisierung J eines solenoidalen Magneten überall $\operatorname{div} J = 0$, für die Magnetisierung eines lamellaren Magneten überall $\operatorname{rot} J = 0$ ist.
74. An der Oberfläche einer ebenen Panzerplatte sitzt eine Schicht von d cm Dicke, innerhalb welcher die Permeabilität linear von dem Wert μ_1 an der Oberfläche abnimmt auf den konstanten Wert μ_2 im Innern der Platte, beide Werte gerechnet für schwache Felder. Welche Menge von freiem Magnetismus sitzt an der Oberfläche und in der genannten Übergangsschicht, wenn die Platte normal von dem Induktionsfluß I durchsetzt wird?
75. Ein dünner Eisenring ist gleichmäßig mit Draht umwickelt, durch welchen ein Magnetisierungsstrom geschickt werden kann. Wenn man nun den Quotient aus dem Linienintegral der magnetischen Feldkraft, erstreckt längs des ganzen Ringes, durch den Induktionsfluß durch einen Querschnitt des Ringes den magnetischen Widerstand W nennt, um wieviel nimmt dann W zu, wenn man den Ring durch einen engen Schlitz von der Breite d unterbricht?
76. Wie groß ist die Arbeit, die man zur Verbiegung eines magnetischen Blattes vom Moment M leisten muß, wenn sich das Blatt in einem äußeren Feld befindet und bei der Verbiegung die Magnetisierung des Blattes nicht geändert wird?
77. Ein dünner, praktisch unendlich langer ebener Blechstreifen von der Breite b , dessen Kanten parallele Gerade sind, ist normal zu seiner Oberfläche gleichmäßig magnetisiert. (Magnetisierung I .) Man berechne das Feld des Streifens.

78. Man berechne das skalare Feldpotential im Außenraum eines unendlich langen geraden Kreiszylinders, der transversal homogen magnetisiert ist. Die Stärke der Magnetisierung sei I , der Radius des Zylinders r_0 , der Abstand des Aufpunktes von der Zylinderachse r , der Winkel zwischen r und I sei ϑ .
79. Wie groß ist das Feld in der Mitte zwischen den Polflächen zweier zylindrischer gleichförmiger Magnetstäbe von der Magnetisierung J , die sich im Abstand d mit gemeinsamer Achse gegenüberstehen und den Radius r_0 haben?
80. Man berechne das Feld im Außenraum einer gleichförmig magnetisierten Kugel. Magnetisierung sei I , Kugelradius R , die Lage des Aufpunktes sei bestimmt durch den Abstand r vom Kugelmittelpunkt und den Winkel ϑ zwischen r und I .
81. Das magnetische Moment der Erde ist $8,33 \cdot 10^{25}$ st. Einh. Wie groß müßte der Radius einer eisernen Kugel zu wählen sein, damit diese, bis zur Sättigung magnetisiert, dasselbe Feld wie die Erde erzeugt?
82. Gauß hatte aus einer Bearbeitung magnetischer Messungen gefunden, daß das Linienintegral der magnetischen Horizontalintensität, erstreckt über die Seiten des Dreiecks Göttingen—Mailand—Paris, den Wert Null hat. Was kann man daraus schließen?
83. Es sei für alle Punkte der Erde die Nord-Südkomponente H_s der Horizontalintensität bekannt. Wie kann man daraus für einen beliebigen Punkt auf der Erde unter der Breite δ und der Länge λ die Ost-Westkomponente der Horizontalintensität finden?
84. Man kann in erster Näherung die Erde auffassen als eine gleichmäßig magnetisierte Kugel. Wie hängt unter dieser Annahme die Inklination i ab von der magnetischen Breite β des Beobachtungsortes?
85. Wie kann man unter der vereinfachenden Annahme, die Erde sei eine gleichmäßig magnetisierte Kugel, das magnetische Moment M der Erde berechnen aus dem Wert H der Horizontalintensität an einem Ort unter der magnetischen Breite β ?
86. Man zeichne qualitativ den Verlauf der Kraft- und Induktionslinien des Feldes innerhalb und außerhalb einer diamagnetischen bzw. paramagnetischen Kugel, die in ein ursprünglich homogenes Feld gestellt ist. Welche Analogien bestehen mit den Verhältnissen einer dielektrischen bzw. einer leitenden Kugel in einem elektrischen Feld?
87. Man berechne das Feld innerhalb und außerhalb einer homogenen Kugel aus einem Material mit der Permeabilität μ , die in ein ursprünglich homogenes Magnetfeld \mathfrak{H}_0 gestellt ist.

88. Wie groß ist die Energiedichte im Innern der Kugel von Aufg. 87 und die Magnetisierung I , und wie ist die Dichteverteilung w des freien Magnetismus auf der Oberfläche der Kugel?
89. Eine Hohlkugel mit den Radien R und r besteht aus einer Substanz von der Permeabilität μ . Wenn diese Hohlkugel in ein ursprünglich homogenes Feld H_0 gebracht wird, wie groß ist dann die Feldstärke H_i im Hohlraum, verglichen mit H_0 ?

III. Stationäre Ströme.

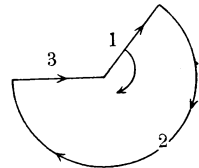
90. Man leite aus dem Ohmschen Gesetz den Widerstand R eines Leitersystems ab, das a) aus n hintereinander geschalteten, b) aus n parallel geschalteten Widerständen R , besteht.
91. Zwölf gleiche Drähte, von denen jeder den Widerstand 1 Ohm besitzt, bilden die Kanten eines Würfels. Wie groß ist der Widerstand dieses Systems zwischen den Enden einer Würfeldiagonale?
92. Es stehen n gleich große Akkumulatoren zur Verfügung, von denen jeder die elektromotorische Kraft e und den inneren Widerstand w_i hat. Wie muß man die Akkumulatoren schalten, um in der Leitung vom (äußeren) Widerstand w_a einen möglichst starken Strom zu erzielen, und wie groß ist dieser?
93. Ein Element habe den inneren Widerstand 0,1 Ohm und die elektromotorische Kraft 2 Volt. Wie groß ist der Strom, den man durch Hintereinanderschalten beliebig vieler solcher Elemente höchstens erreichen kann?
94. Eine Stromquelle von der elektromotorischen Kraft e und dem inneren Widerstand w_i wird durch eine Leitung vom Widerstand w_a kurzgeschlossen; das Verhältnis der Stromleistung im äußeren Kreis zur gesamten Stromleistung heiße der Wirkungsgrad γ der Schaltung. Wie groß ist der Wirkungsgrad γ einer Batterie von n Elementen, wenn dieselben a) hintereinander, b) parallel, c) in Gruppen zu je K parallel und diese n/K Gruppen in Serie geschaltet werden? Für welche Schaltung ist der Wirkungsgrad am größten bei gegebener Gesamtzahl der zur Verfügung stehenden Elemente?
95. Für Nadelgalvanometer gilt mit großer Annäherung, daß die „Stromempfindlichkeit“ proportional der Wurzel aus dem Widerstand der Galvanometerspule ist. Man zeige, daß deshalb die größte Empfindlichkeit von Meßanordnungen meist erreicht wird, wenn man den äußeren Widerstand des Stromkreises gleich dem Spulenwiderstand macht.

96. Man leite die allgemeine Form der Bedingung für Stromlosigkeit des Galvanometers in der Thomsonbrücke ab und gebe eine spezielle Beziehung zwischen den eingehenden Widerständen, welche diese Bedingung erfüllt. Die zu vergleichenden Widerstände seien A und B , die Verzweigungswiderstände a und b , die Überbrückungswiderstände α und β , der Verbindungswiderstand d .
97. Eine Telegraphenleitung führe über schlecht isolierende Stangen, von denen jede zwischen dem Draht der Leitung und der als vollkommen leitend angenommenen Erde den Widerstand ρ besitzt; der Widerstand des Drahtes zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Stangen ist r . Wie groß ist der Widerstand R der ganzen Leitung zwischen der ersten Stange und dem Erdpol am Ende?
98. In einem linearen Leiter fällt nach dem Ohmschen Gesetz das Potential linear ab. Wie ändern sich prinzipiell die Verhältnisse, wenn der Leiter nicht von einem absolut isolierenden Medium umgeben ist, sondern wenn durch die Oberfläche ein seitlicher Stromverlust stattfindet in dies umgebende, nicht vollkommen isolierende Medium?
99. Warum strömt aus einem Metalldraht, der durch eine schlecht leitende Flüssigkeit geführt ist, praktisch keine Ladung in die Flüssigkeit über?
100. Aus einer Tafel aus Material mit der Leitfähigkeit σ , deren Dicke d sehr klein sei, wird ein ebener Kreisring (innerer Radius r_i , äußerer Radius r_a) geschnitten. Wie groß ist der Widerstand, wenn a) die beiden begrenzenden Kreise als Elektroden dienen, b) wenn der Ring radial aufgeschnitten ist und die beiden Schnitt-ränder als Elektroden dienen?
101. Zwei kleine Kugeln vom Radius r_0 sind eingebettet in ein allseitig unendlich ausgedehntes Medium, dessen Leitfähigkeit σ klein ist gegen die Leitfähigkeit der Kugeln. Man bestimme den Widerstand zwischen den Kugeln, wenn diese zur Zu- bzw. Abführung des Stromes dienen.
102. Man bestimme den Widerstand, wenn die Kugeln der Aufg. 101 nicht allseitig bis in unendliche Entfernung von dem Medium umgeben sind, sondern wenn das Medium nur den einen Halbraum erfüllt und die Kugeln gerade zur Hälfte in diesen eintauchen.
103. Auf einer dünnen kreisförmigen Metallplatte sitzen an zwei Punkten der Peripherie zwei dünne Drähte als Elektroden. Man zeige, daß die Potentiallinien $\varphi = \text{const}$ darzustellen sind durch $\varphi = \frac{i}{\pi \sigma} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}$,

worin i der durch die Elektroden ein- bzw. austretende Gesamtstrom, σ die Leitfähigkeit der Platte und $r_{1,2}$ die Abstände des Aufpunktes von den Elektroden sind. Ferner zeichne man die Stromlinien.

104. Man berechne das magnetische Feld eines unendlich langen geraden linearen Stromleiters, in welchem der Strom i fließt, aus dem Biot-Savartschen Gesetz, aus dem skalaren Potential φ und aus dem Vektorpotential \mathfrak{A} .
105. Man berechne die magnetische Feldstärke für die Punkte der Achse eines Kreisstromes i vom Radius R . Der Abstand des Aufpunktes von der Kreisebene sei z .
106. Man zeige, daß ein Kreisstrom in einer gegen seinen Radius großen Entfernung magnetisch äquivalent ist mit einem Elementarmagneten, der im Zentrum senkrecht auf der Kreisebene steht und bestimme dessen Moment.
107. Wie groß ist das äquivalente Moment eines Elektrons, das auf einem Kreis von 10^{-8} cm Radius mit der Frequenz $n \text{ sec}^{-1}$ umläuft?
108. Man gebe für das Vektorpotential eines Kreisstromes i vom Radius a einen Integralausdruck. Für Entfernungen des Aufpunktes vom Kreismittelpunkt, die groß sind gegen dessen Radius, gebe man dafür eine Näherungsformel und zeige, daß die daraus sich ergebende Feldkraft $|\mathfrak{H}|$ übereinstimmt mit der Feldkraft in großer Entfernung von einem magnetischen Dipol vom Moment $M = i \cdot a^2 \pi$.
109. Man berechne das Feld auf der Achse einer Kreisscheibe vom Radius a , die mit einer Oberflächenladung von der konstanten Dichte σ belegt ist und n mal in der Sekunde um ihre Achse rotiert (die durch den Kreismittelpunkt geht und senkrecht auf der Kreisebene steht).
110. Ein Zylinder trägt eine gleichmäßige Oberflächenladung von der Dichte σ , seine Länge ist $2l$, sein Radius R , er rotiert n mal in der Sekunde um seine Achse. Man berechne das Feld in einem Punkt der Achse, in der Entfernung z von der Mitte des Zylinders.
111. In eine kreisförmige Quecksilberrinne taucht ein beweglicher radialer Draht (1). Ein feststehender radialer Draht (3) und der jeweils zwischen beiden liegende Teil (2) der Rinne bilden zusammen mit dem Draht (1) einen Stromkreis. Eine Stromquelle von der elektromotorischen Kraft E speist diesen Stromkreis. Der Widerstand

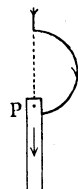
Fig. 1.



- der äußeren Zuleitungen einschließlich der beiden radialen Drähte ist w , der Widerstand der ganzen kreisförmigen Rinne w_s . Wie ändert sich zeitlich das magnetische Feld in einem Punkt der Achse, wenn der bewegliche Draht 1 n mal in einer Sekunde rotiert?
112. Wie groß ist das äquivalente Moment einer gleichförmig um einen Durchmesser mit der Winkelgeschwindigkeit w rotierenden Kugel vom Radius a , welche mit der Raumdichte $\rho(r)$ geladen ist?
113. Eine Stromspule, deren innerer Radius r_0 , deren äußerer R_0 , deren Länge $2l$ ist und die n Windungen enthält, kann in erster Näherung so aufgefaßt werden, als ob der Strom den Wickelungsraum gleichmäßig erfüllt. Man berechne unter dieser Annahme für den Fall, daß $R_0 - r_0$ klein ist gegen r_0 , einen Ausdruck für das Potential des magnetischen Feldes auf der Spulenchse und gebe eine einfache physikalische Deutung desselben.
114. Wie groß ist die Feldstärke in der Achse einer sehr langen Spirale, die pro Zentimeter n Windungen enthält und vom Strom I durchflossen wird?
115. In einer Stromspule von 28 Windungen pro Zentimeter ihrer Länge, durch welche ein Strom von 20 Amp. fließt, steckt ein lumenfüllender Eisenkern mit der Permeabilität $\mu = 1200$. Wie groß ist in diesem die Dichte der Induktionslinien?
116. Man bestimme das Feld zweier unendlich langer gerader linearer Drähte, die im Abstand d parallel zueinander geführt sind und von demselben Strom i in entgegengesetzter Richtung durchflossen werden, a) aus dem Vektorpotential, b) aus dem skalaren Potential.
117. Man berechne das Feld im Innen- und Außenraum zweier unendlich langer paralleler Kreiszyylinder vom Radius a , welche in entgegengesetzter Richtung von demselben Strom I durchflossen werden.
118. Zwei ebene, unendlich ausgedehnte dünne Blechtafeln stehen sich parallel gegenüber; sie werden in entgegengesetzter Richtung vom Strom I so durchflossen, daß die Stromdichte i konstant und die Stromlinien alle einander parallel sind. Man bestimme das magnetische Feld zwischen den Platten.
-
119. Man zeige, daß die Richtung der Kraft, welche ein magnetischer Pol auf einen ebenen kreisförmigen Stromleiter ausübt, stets durch den Pol geht.
120. Wie läßt sich allgemein die Arbeit ausdrücken, welche geleistet werden muß, um einen beliebigen linearen geschlossenen Stromleiter in einem beliebigen magnetischen Feld zu deformieren?

121. Ein halbkreisförmiger Drahtbügel ist um seinen Durchmesser, der in der Achse eines Magnetstabes liegt, so aufgehängt, daß er sich frei um diese drehen kann (Fig. 2), und zwar möge der eine Pol P des Stabes entweder innerhalb (wie in der Figur) oder außerhalb des Halbkreises liegen. Welche Bewegung führt der Drahtbügel aus, wenn durch ihn ein Strom geschickt wird, und wie ist das Zustandekommen der Bewegung zu verstehen, wenn man in bekannter Weise den Stromkreis ersetzt durch ein über den Draht gespanntes magnetisches Blatt?

Fig. 2.



122. Ein Erdinduktor bestehe aus 100 kreisförmigen Drahtwindungen vom Radius 10 cm; durch denselben fließe ein Strom von 10 Ampere, die Intensität des erdmagnetischen Feldes am Beobachtungsort sei 0,3 Gauß. Welche Arbeit ist zu leisten, um den Erdinduktor aus einer Lage, in welcher die Achse der Windungen in Richtung des Erdfeldes steht, in eine zweite Lage um 90° zur ersten umzuklappen?
123. Auf zwei im Abstand d parallel zueinander geführten geraden Metallschienen ist senkrecht dazu ein metallisches Gleitstück verschiebbar angebracht, welches zwischen den beiden Schienen eine leitende Verbindung herstellt. In welcher Richtung verschiebt sich das Gleitstück, wenn an zwei auf derselben Seite des Gleitstückes sich gegenüberliegenden Punkten der Schienen ein Strom zu- bzw. abgeführt wird und das ganze System außerdem in einem homogenen magnetischen Feld steht?
124. Zwei quadratische Drahtrahmen mit der Seitenlänge a stehen sich in parallelen Ebenen im Abstand h so gegenüber, daß entsprechende Ecken sich jeweils senkrecht zu den Rahmenebenen gegenüberstehen. Welche Kraft wirkt zwischen den Rahmen, wenn in denselben die Ströme i_1 bzw. i_2 fließen?
125. Ein rechteckiger Drahtrahmen von der Länge l und der Breite b stehe gegen einen langen geraden, in seiner Ebene verlaufenden Draht so, daß die Seiten (l) parallel dem Draht stehen und den Abstand d bzw. $d + b$ vom Draht haben; in dem Draht fließe der Strom i , in dem Rahmen der Strom I . Welche Arbeit ist zu leisten, um den Rahmen aus der genannten Lage um seinen Mittelpunkt so zu drehen, daß seine Ebene senkrecht zum Draht steht?
126. Man untersuche die Bewegung eines Elektrons in dem magnetischen Feld eines stromdurchflossenen geraden Drahtes.
127. Ein elektrisches Feld von der Stärke V Volt/cm und ein magnetisches Feld von der Stärke H Gauß sind so übereinandergelagert,

- daß die elektrischen und magnetischen Kraftlinien senkrecht aufeinanderstehen. Welche Beziehung muß zwischen V und H bestehen, damit ein Elektron, das senkrecht zu den elektrischen und magnetischen Kraftlinien in dieses kombinierte Feld mit der Geschwindigkeit v cm/sec hineinfliegt, in gerader Linie weiterfliegt?
128. Ein Elektron schwinde quasielastisch gebunden um seine Ruhelage mit der Schwingungszahl n_0 . Wie ändern sich die Verhältnisse, wenn die Bewegung in einem Magnetfeld von der Stärke H stattfindet?
129. Ein Elektron ist „anisotrop quasielastisch“ derartig gebunden, daß es in den drei Richtungen xyz (den Hauptschwingungsrichtungen) mit den Frequenzen n_1, n_2, n_3 schwingt. Man bestimme die Frequenzen in einem Magnetfeld H in Richtung z näherungsweise für schwache Felder und für starke Felder. Ist die größte der Differenzen $n_1 - n_2, n_1 - n_3, \text{ oder } n_2 - n_3$ mit Δn bezeichnet, so ist für ein „schwaches“ Feld $e/m \cdot H \ll \Delta n$, für ein „starkes Feld“ $e/m \cdot H \gg \Delta n$.
130. Ein Elektron bewege sich senkrecht zu den Kraftlinien eines homogenen magnetischen Feldes von der Stärke H mit der Anfangsgeschwindigkeit v ; die Bewegung finde in einem widerstehenden Mittel statt, welches auf das Elektron eine Reibungskraft ausübt, die proportional der Geschwindigkeit angesetzt werde. Man diskutiere die Bewegung des Elektrons.

IV. Quasistationäre Vorgänge.

131. Man zeige aus der zweiten Maxwell'schen Gleichung, daß die in einem geschlossenen Kreis durch ein harmonisches magnetisches Wechselfeld induzierte elektromotorische Kraft gegen die magnetische Induktion um 90° phasenverschoben ist.
132. Eine kurzgeschlossene zylindrische Spule von der Länge l bestehe aus n Windungen pro Längeneinheit; in diese Spule wird in Richtung der Achse ein gegen die Spulenlänge kurzer Magnetstab vom Moment M aus unendlicher Entfernung hineingeschoben, bis die Mitte des Stabes gerade in der Mitte der Spule liegt. Wie groß ist die gesamte dabei infolge der Induktion durch die Spule fließende Elektrizitätsmenge, wenn der Radius der Spule klein ist sowohl gegen die Differenz zwischen der Spulenlänge und dem Polabstand des Magnetstabes wie gegen l ?
133. Im Erdfeld rotiert ein ebener Drahtkreis von r cm Radius, dessen Widerstand w Ohm sei, n mal in der Sekunde gleichmäßig um seinen senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien liegenden Durch-

- messer. Um welchen Winkel wird eine im Kreismittelpunkt stehende Magnetsnadel abgelenkt?
134. Eine Drahtschleife, deren Fläche F , deren Widerstand W , deren Selbstinduktionskoeffizient L sei, rotiere in einem homogenen Magnetfeld von der Stärke H mit der Winkelgeschwindigkeit ω gleichförmig um eine Achse, die zu den magnetischen Kraftlinien senkrecht steht. Man berechne den in der Schleife induzierten Strom i und das Moment M des an der Schleife angreifenden (der Bewegung entgegenwirkenden) Kräftepaars.
135. Um eine gleichmäßig magnetisierte Eisenkugel vom Radius R ist ein Drahtbogen so gelegt, daß er mit dem einen Ende am Pol, mit dem anderen am Äquator der Kugel aufrucht; die magnetische Feldstärke am Pol sei H_0 . Zu welcher Spannungsdifferenz laden sich die (isolierten) Enden des Bogens auf, wenn derselbe um die Achse der Kugel gleichförmig rotiert, wobei die Lineargeschwindigkeit der Rotation am Äquator v ist?
136. Auf einen homogenen Eisenring von zylindrischem gleichförmigen Querschnitt q und der Umfangslänge (Achsenlänge) l sind zwei Spulen gewickelt, deren Windungszahlen n_1 und n_2 sind; das Material des Ringes habe die konstante Permeabilität μ . Wie groß ist der gegenseitige Induktionskoeffizient der beiden Spulen? Zahlenbeispiel: $n_1 = n_2 = 100$, Querschnittsradius 2 cm, Achsenradius 10 cm. $\mu = 2000$. Induktionskoeffizient anzugeben in Henry.
137. Man zeige, daß ein starrer Stromkreis von endlichem Querschnitt sich infolge der induzierten Wirbelströme in einem magnetischen Wechselfeld konstanter Richtung stets so einzustellen sucht, daß möglichst wenig Induktionslinien durch ihn hindurchgehen.
138. In einer unendlich ausgedehnten Metallmasse (Leitfähigkeit σ , Permeabilität μ) mit ebener Begrenzungsfläche sollen durch ein äußeres magnetisches Wechselfeld Ströme so induziert werden, daß 1. die Stromlinien überall geradlinig und parallel der Begrenzungsfläche, sowie parallel zueinander verlaufen, 2. daß die Stromdichte in der Begrenzungsebene die Form $a \cos nt$ hat, 3. daß die Stromdichte nur abhängt von der Entfernung von der Begrenzungsfläche. Man berechne die auf die Metallmasse pro Flächeneinheit der Begrenzungsebene wirkende Kraft.
139. Ein Magnetpol von der Stärke 1 bewege sich mit der Geschwindigkeit v senkrecht auf eine ebene Metallplatte zu, deren spezifischer Widerstand w sei. Welche Kraft wird auf den Pol seitens der in derselben induzierten Ströme ausgeübt?

140. Wie groß ist der mittlere geometrische Abstand a) einer Kreisfläche vom Radius a von sich selbst, b) näherungsweise einer Quadratfläche mit der Seitenlänge a von sich selbst?
141. Wie groß ist der mittlere geometrische Abstand zweier in derselben Ebene liegenden Kreisflächen voneinander, deren Mittelpunkte den Abstand d voneinander haben? (Die beiden Kreise sollen sich ausschließen.)
142. Wie groß ist der mittlere geometrische Abstand einer aus den Flächen $Q_1, Q_2 \dots$ gebildeten Figur von einer Fläche Q , wenn die mittleren geometrischen Abstände der einzelnen Flächen $Q_1, Q_2 \dots$ von Q die Größe $R_1, R_2 \dots$ haben?
143. Wie groß ist der mittlere geometrische Abstand von sich selbst für eine Figur, die aus zwei sich ausschließenden Kreisen mit den Radien r_1 und r_2 besteht, deren Mittelpunkte die Entfernung d voneinander haben?
144. Aus dem Näherungswert $R = 0,2235 (a + b)$ für den mittleren geometrischen Abstand einer Rechtecksfläche mit den Seiten a und b von sich selbst berechne man den mittleren geometrischen Abstand zweier gleich großer Rechtecke voneinander, welche die Seiten a und b haben und parallel in derselben Ebene so nebeneinander stehen, daß die Seiten b derselben auf denselben beiden parallelen Geraden liegen und ihre Schwerpunkte den Abstand $d + b$ voneinander haben.
145. Man berechne den Selbstinduktionskoeffizienten der Länge l eines geraden Drahtes, dessen Querschnitt a) ein Kreis vom Radius a , b) ein Quadrat von der Seitenlänge a ist.
146. Wie groß ist der Selbstinduktionskoeffizient einer Doppelleitung aus zwei geraden Drähten von kreisförmigem Querschnitt mit dem Radius a und dem Achsenabstand d ?
147. Wie groß ist der Selbstinduktionskoeffizient eines geraden Drahtes von kreisförmigem Querschnitt mit dem Radius a für so rasche elektrische Schwingungen, daß die Stromlinien alle in einer Oberflächenschicht von praktisch verschwindender Dicke zusammengedrängt sind?
148. Man berechne den gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier koaxial in parallelen Ebenen liegenden Drahtkreise unter der Annahme, daß die Differenz ihrer Radien R und $R + d$, sowie der Abstand a ihrer Ebenen klein sei gegen den Radius R des kleineren Kreises.
149. Man zeige, daß bei gegebenem Wicklungsraum der Selbstinduktionskoeffizient einer zylindrischen Spule angenähert, d. h. unter

Vernachlässigung des von der Isolation beanspruchten Raumes, proportional dem Quadrat der Windungszahl ist.

150. Ein Kabel besteht aus einem geraden Mitteldraht von kreisförmigem Querschnitt mit dem Radius r und aus einer konzentrischen zylindrischen Metallhülle vom Radius R und von zu vernachlässigender Dicke; es sei $r = 2$ mm, $R = 15$ mm. Welche Länge dieses Kabels hat eine Selbstinduktion von 1 Henry?
 151. Zwei gerade Drähte von kreisförmigem Querschnitt mit den Radien r_1 und r_2 liegen im Achsenabstand d parallel zueinander und dienen zur Hin- bzw. Rückleitung desselben Stromes. Unter welchen Bedingungen ist der Selbstinduktionskoeffizient des Systems am kleinsten?
 152. Wie groß ist der Koeffizient der gegenseitigen Induktion zweier koaxialer Rollen aus dünnem Draht, bezogen auf die Längeneinheit und unter Vernachlässigung der Wirkungen ihrer Enden, wenn r_i und r_a der innere und äußere Radius der inneren, R_i und R_a der innere und äußere Radius der äußeren Rolle ist und in jeder n^2 Windungen durch die Flächeneinheit des Wicklungsraumes gehen?
 153. Wie ändern sich die Verhältnisse, wenn in der inneren Rolle der vorhergehenden Aufgabe ein zylindrischer Kern aus weichem Eisen steckt, dessen Suszeptibilität k und dessen Radius gleich r_i ist?
 154. Zwei Drahtkreise aus Draht von unendlich kleinem Querschnitt haben die Radien 10 und 10,1 cm und liegen konzentrisch in derselben Ebene. Welche Arbeit ist zu leisten, um den inneren Drahtkreis ins Unendliche zu entfernen, wenn in jedem Kreis der Strom von 1 Amp. fließt?
 155. Welche Energie sitzt in dem magnetischen Feld einer kreisförmigen Stromschleife vom Radius 20 cm aus Kupferdraht (Leitfähigkeit $57,5 \cdot 10^{-5}$ CGS) mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius 0,5 mm, wenn durch dieselbe unter Vorschaltung eines induktionsfreien Widerstandes von 0,1 Ohm mit Hilfe eines Akkumulators von 2 Volt Spannung ein Strom geschickt wird?
-
156. Ein Stromkreis bestehe aus einer Gleichstromquelle von der elektromotorischen Kraft E , aus dem Gesamtwiderstand W und aus einer Selbstinduktion L . Welche Elektrizitätsmenge fließt im ganzen außer der konstanten, im Ohmschen Strom fließenden, durch den Kreis, wenn man plötzlich einen Widerstand r in denselben einschaltet?
 157. Ein Stromkreis sei gebaut wie der in Aufg. 156; er bestehe also aus E , W und L , und zwar sei $E = 110$ Volt, $W = 500$ Ohm und $L = 0,1$ Henry. Wie lange nach plötzlicher Schließung des Kreises

- dauert es, bis die Stromstärke bis auf 1 Proz. den stationären Endwert E/W erreicht?
158. Aus einem Drahtkreis von 50 cm Durchmesser aus Draht von 2,5 mm Radius und aus einem Kondensator soll ein Schwingungskreis gebaut werden, dessen Eigenschwingungszahl $3 \cdot 10^6/\text{sec}$ ist. Wie groß ist die Kapazität des Kondensators zu wählen?
159. Wie groß darf der Widerstand in einem Schwingungskreis aus einer Kapazität C und einer Selbstinduktion L höchstens sein, damit die Eigenfrequenz des Kreises sich von der aus der Thomsonschen Formel folgenden nicht um mehr als 1 Proz. (1 Prom.) dieses Wertes unterscheidet?
160. Welcher Widerstand muß in einem Schwingungskreis aus einer Leidener Flasche von 1000 cm Kapazität und aus einer Spule von 0,1 Henry Selbstinduktion liegen, damit die Entladung aperiodisch wird?
161. Ein Kondensator von der Kapazität C werde durch einen Wechselstrom geladen, dessen EMK nicht rein harmonisch verläuft, sondern eine Reihe von Oberschwingungen hat. Welches ist der zeitliche Verlauf des Ladestromes?
162. Wenn in einem Kondensator bei Beschickung mit Wechselstrom Energieverluste stattfinden, kann man den Kondensator ersetzen durch einen idealen (verlustlosen) Kondensator von derselben Kapazität C , dem parallel oder in Serie ein reiner Ohmscher Widerstand r_p bzw. r_s zugeschaltet ist. Man drücke diese Widerstände aus durch den (von 90° abweichenden) Phasenwinkel α zwischen Strom und Spannung im Kondensatorkreis ohne die Zusatzwiderstände.
163. Es seien K Kondensatoren mit den Kapazitäten $C_1 \dots C_K$ und den Phasenwinkeln $\alpha_1 \dots \alpha_K$ (vgl. Aufg. 162) parallel geschaltet; die Winkel α seien nur wenig von 90° verschieden. Wie groß ist der Phasenwinkel α_0 des Systems?
164. Wie groß ist bei einer Stromamplitude von 1000 Amp. die Spannungsamplitude zwischen den Enden einer Rolle von 1472 cm Selbstinduktion, wenn durch dieselbe ein Wechselstrom von der Wechselzahl $3 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1}$ geschickt wird?
165. Eine Leitung von 10 km Länge bestehe aus Kupferdraht von 2 mm Radius, der frei durch die Luft geleitet sei. Wie groß ist die effektive Stromstärke eines Wechselstromes von 50 Perioden pro Sekunde, welcher durch eine effektive EMK von 440 Volt durch die Leitung getrieben wird? (Leitfähigkeit des Kupfers $\sigma = 57,5 \cdot 10^{-5} \text{ CSS.}$)

166. In einem Wechselstromkreis seien eine Kapazität und eine Selbstinduktion parallel geschaltet. Welche Beziehung muß zwischen beiden und der Frequenz des Wechselstromes bestehen, damit der effektive Gesamtstrom durch die Parallelverzweigung am kleinsten ist?
167. Eine Leitung teile sich in zwei Zweige, deren jeder einen Ohmschen Widerstand und eine Selbstinduktion enthält, und die sich außerdem durch eine gegenseitige Induktion beeinflussen; in beiden wirke dieselbe EMK, deren Frequenz so hoch sei, daß die Ohmschen Widerstände gegen die Wirkung der Induktionen zu vernachlässigen sind. Wie verteilt sich der Strom auf beide Zweige?
168. Die primäre und die sekundäre Wickelung eines Transformators haben die Selbstinduktionen L_p und L_s , ihre gegenseitige Induktion sei L_{ps} , ihre Widerstände w_p und w_s . An der primären Seite wirke eine EMK der Form $E \cos nt$, und es sei ferner, wie dies in der Praxis üblich ist, $L_p - \frac{L_{ps}^2}{L_s}$ sehr klein gegen L_p und w_s klein gegen $n \cdot L_s$. Für welchen Widerstand w_s im sekundären Kreis ist die im primären geleistete Arbeit am größten?
169. Ein Wechselstrom von der Frequenz n werde durch eine Spule geschickt, deren Widerstand w , deren Selbstinduktion L ist. Welche effektive Spannungsdifferenz mißt man bei einer effektiven Stromstärke J an den Enden der Spule, wenn man ein Voltmeter vom inneren Widerstand w_i benutzt?
170. In den vier Zweigen einer Wheatstoneschen Brücke seien der Reihe nach enthalten: In 1. und 2. die Selbstinduktionen L_1 und L_2 mit den kleinen Widerständen w_1 und w_2 ; in 3. und 4. die Widerstände w_3 und w_4 . Welche Korrektur ist an der üblichen Nullbedingung $L_1/L_2 = w_3/w_4$ anzubringen, wenn die Vergleichswiderstände w_3 und w_4 nicht vollkommen induktionsfrei sind, sondern die kleinen Selbstinduktionen L_3 und L_4 haben?
171. In den vier Zweigen einer Wheatstoneschen Brücke sitzen die Kapazitäten C_1 und C_2 und die Ohmschen Widerstände w_3 und w_4 ; die Nullbedingung lautet dann bekanntlich $C_1/C_2 = w_4/w_3$. Wie lautet die Bedingung, wenn die Kapazitäten nicht verlustfrei sind, sondern die Abweichungen δ_1 und δ_2 vom Phasenwinkel 90° hervorrufen?
172. Die Primärspulen zweier Induktorien mit den gegenseitigen Induktionen M_1 und M_2 liegen hintereinander in einem Wechselstromkreis. Ihre Sekundärspulen, deren Selbstinduktionen L_1 und L_2 sind, bilden die Zweige einer Brücke, in deren beiden anderen Zweigen die Widerstände w_1 und w_2 liegen. Außerdem sollen die beiden

Sekundärspulen induzierend aufeinander wirken mit der gegenseitigen Induktion L_{12} . Wie lautet die Nullbedingung für den Brückenstrom?

173. Zwei gleiche Schwingungskreise, je aus einer Kapazität C und einer Selbstinduktion L aufgebaut, seien miteinander induktiv gekoppelt; gegeben sind die Kapazitäten, nämlich 1000 cm. Wie groß sind die Selbstinduktionen zu wählen, damit bei einem Koppelungskoeffizient $K = 0,1$ Schwebungen von der Frequenz 435/sec entstehen?
174. Zwei einander vollkommen gleiche Schwingungskreise seien induktiv gekoppelt durch ihre Selbstinduktionen, und die Koppelung sei derart, daß gerade 20 Proz. der Induktionslinien des Feldes der einen Selbstinduktion durch die gesamte Windungsfläche der anderen hindurchführen. Um welchen Bruchteil der Eigenschwingungsdauer der isolierten Kreise weichen die beiden Eigenschwingungsdauern des gekoppelten Systems von jener ab?

Wärmelehre.

Es wird genannt:

s Entropie, u Energie, v Volumen für die Masse 1.

S, U, V Entropie, Energie, Volumen für die Masse M .

m Molekulargewicht.

Für den Fall des Gleichgewichts zwischen der flüssigen und dampfförmigen Phase erhalten alle Größen der flüssigen Phase den Index 1, alle Größen der dampfförmigen Phase den Index 2.

Die van der Waals'sche Zustandsgleichung lautet $(p + \frac{a}{v^2})(v - b) = RT$.

Für die Lösung der Aufgaben sind folgende Zahlengrößen zu benutzen:

Molekulare Gaskonstante $R = 1,987$ cal Grad⁻¹.

1 cal = 4,1842 Wattsek.

Molvolumen bei 0° und 1 Atm. Druck $\Phi = 22410$ ccm.

Absolute Temperatur $T = t + 273,1^0$; $T_0 = 273,1$.

Schwerebeschleunigung $g = 980,62$ cm/sec⁻².

Atomgewichte: H = 1,008; C = 12; N = 14; O = 16; Pb = 207,1.

Dichte des Wasserstoffs bei 0° und 1 Atm. $\rho_0 = 0,00008985$.

Dichte des Quecksilbers bei 0° $\rho_0 = 13,596$.

1. Die kubische Ausdehnung des Quecksilbers zwischen 0 und 100° ist gegeben durch die Beziehung $v = v_0 [1 + 0,00018182t + 0,78 \cdot 10^{-8} t^2]$, wenn t die Temperatur in der thermodynamischen Skala bedeutet. Welche Temperatur t' erhält man bei $t = 50^\circ$, wenn man Quecksilber als thermometrische Substanz ansieht?

2. Aus der molekularen Gaskonstante R ist die Gaskonstante R' für die Masseneinheit Sauerstoff zu berechnen, wenn das Volumen in Kubikzentimetern, der Druck in Millimetern Quecksilber ausgedrückt ist.
3. An einer Mikrowage befindet sich eine Hohlkugel mit einem Gegengewicht im Gleichgewicht, wenn der Auftrieb und folglich die Dichte des umgebenden Gases einen ganz bestimmten Wert hat. Das Gleichgewicht tritt ein, wenn die Mikrowage sich bei $t = 20^\circ$ in Sauerstoff vom Druck $p = 125,15$ mm Hg oder in Helium vom Druck $p' = 1002,20$ mm Hg befindet. Welcher Wert folgt aus diesen Zahlen für das Molekulargewicht m' des Heliums? Für Sauerstoff gelte der Spannungskoeffizient $\beta = 0,0036634$, für Helium $\beta' = 0,0036618$; ferner sei der Kompressibilitätskoeffizient pro Atmosphäre $\left(\kappa = -\frac{dpv}{dp}\right)$ für Sauerstoff $\kappa = -0,00070$, für Helium $\kappa' = +0,00070$.
4. V_1 ccm He befinden sich bei $p_1 = 10$ Atm. auf der konstant gehaltenen absoluten Temperatur $T_1 = 10^\circ$. Das Gas soll auf 1 Atm. entspannt werden, indem ihm der Zutritt zu einem Volumen V_2 , das sich auf $T_2 = 290^\circ$ befindet, ermöglicht wird. Wie groß ist V_2 und in welchem Massenverhältnis stehen die Gasmassen in den Volumina V_1 und V_2 unter Annahme idealer Gasgesetze?
5. Unter der Annahme einer isothermen Atmosphäre von $t = -23^\circ$ ist zu berechnen, welcher Druck p bei normalem Barometerstand in $h = 11$ km Höhe herrscht. Die Luft werde als ideales Gas vom Molekulargewicht 28,95 betrachtet und die Schwerebeschleunigung g als unabhängig von der Höhe angesehen.
6. Bei $t = 50^\circ$ und einem Druck von $p = 1$ m Hg besitzt Stickstoff den Ausdehnungskoeffizienten $\alpha = 0,0036731$ und den Spannungskoeffizienten $\beta = 0,0036744$. Wie groß ist der Kompressibilitätskoeffizient ϵ des Stickstoffs unter denselben Bedingungen?
7. Für zwei ideale gegeneinander indifferente Gase G_1 und G_2 gelten die Zustandsgleichungen $pv = R_1T$ und $pv = R_2T$, wenn das Volumen v sich auf die Masseneinheit bezieht. Welche Zustandsgleichung besitzt die Masseneinheit der Gasmischung, die m_1 Gramm des Gases G_1 und m_2 Gramm des Gases G_2 enthält, und welches sind die Partialdrucke p_1 und p_2 der beiden Gase, wenn der Druck der Mischung p' ist?
8. n ideale gegeneinander indifferente Gase der Molekulargewichte $m_1, m_2, m_3 \dots$ sind miteinander gemischt derart, daß in der Mischung von den einzelnen Gasen die Gewichtsmengen $M_1, M_2, M_3 \dots$ vorhanden sind. a) Welches ist das Verhältnis der Partialdrucke $p_1, p_2, p_3 \dots$ zueinander? b) Welches ist das Verhältnis der von jedem Gas

- vorhandenen Molekülzahlen $N_1, N_2, N_3 \dots$ zueinander. c) Welcher Ausdruck kann als das Molekulargewicht m der Mischung gelten?
9. Wie lauten bei Gültigkeit des Daltonschen Gesetzes die Konstanten a, b und R der van der Waalsschen Gleichung für ein Gemisch zweier Gase, wenn für beide Komponenten, deren Massenverhältnis durch den Quotienten $M_1 : M_2$ gegeben ist, die Konstanten a_1, b_1 bzw. a_2, b_2 der Zustandsgleichung gegeben sind und wenn man die Glieder, welche diese Konstanten in höherer als der ersten Ordnung enthalten, vernachlässigt?
 10. Die Luft enthält 21 Proz. Sauerstoff und 79 Proz. Stickstoff dem Volumen nach. In welchem Verhältnis stehen unter Annahme der idealen Gasgesetze beide Gase der Masse nach?
 11. Bei 100° sind $100 \gamma = 3,46$ Gewichtsprozent des Wassers als Doppelmoleküle vorhanden. Um welchen Faktor unterscheidet sich bei Annahme der idealen Gasgesetze das spezifische Volumen v des Wasserdampfes bei 100° von dem spezifischen Volumen eines idealen Dampfes, der nur aus einfachen Wassermolekülen bestehend gedacht wird?
 12. Eine gasförmige Verbindung von Stickstoff und Sauerstoff besitzt, bezogen auf Sauerstoff gleicher Temperatur und gleichen Druckes, die Dichte a) 2,3750 und b) 1,4375. Welche chemischen Formeln gelten für die Verbindungen?
 13. Leitet man über flüssiges Blei von 1177°C bei Atmosphärendruck 834 ccm Wasserstoff (gemessen bei 0° und 1 Atm.) in so langsamem Strom, daß sich das Gas mit Bleidampf sättigt, so verdampfen 160,4 mg Blei. Welches ist der Dampfdruck des Bleies bei jener Temperatur?
 14. Ein Grammmolekül Stickstoff und zwei Grammmoleküle Sauerstoff werden in einer kalorimetrischen Bombe vollständig zu NO_2 verbrannt. Dabei entsteht, wenn sich die Bombe vor und nach dem Prozeß auf derselben Temperatur $t = 15^\circ$ befindet, die Wärmemenge Q . Welche Wärmemenge wird frei, wenn sich der Prozeß unter dem konstanten Druck einer Atmosphäre abspielt und die Gesetze idealer Gase angenommen werden?
 15. Bei der Verbrennung von 5 g Kohlenstoff zu CO_2 in einer kalorimetrischen Bombe werden 40 500 cal frei; bei der Verbrennung von 1,4 g CO zu CO_2 entstehen entsprechend 3400 cal. Wie groß ist die Verbrennungswärme von 1 Grammmolekül Kohlenstoff zu CO ?
 16. Verbrennt man H_2 und O_2 bei 0° in einer kalorimetrischen Bombe so entsteht pro Mol sich bildenden Wasserdampfes eine Wärmemenge von $Q_0 = 68\,900$ cal. Wie groß ist die Wärmemenge Q_1 wenn die Verbrennung in einer auf 1000° gehaltenen Bombe erfolgt?

und die Molekularwärme konstanten Volumens für H_2 und O_2 zu 5, für Wasserdampf zu 6,5 angesetzt wird?

17. Um wieviel Kalorien steigt die Verbrennungswärme von 1 Mol H_2 zu flüssigem Wasser, wenn die Temperatur der bei konstantem Druck auszuführender Reaktion um 10° steigt und die Molekularwärmen bei konstantem Druck von H_2 und O_2 zu 7 cal angenommen werden?
18. Bei $95,5^\circ$ wandelt sich Schwefel vom rhombischen System in das monokline unter einer Wärmeaufnahme von 3,19 cal pro Gramm Schwefel um. Die Differenz der spezifischen Wärmen konstanten Volumens von monoklinem und rhombischem Schwefel läßt sich darstellen als $c_{mon} - c_{rh} = 2,30 \cdot 10^{-5} T$. Wie groß ist die Wärmetönung bei $t = 0^\circ$?
19. Wie groß ist, in Kalorien ausgedrückt, die maximale Arbeit A , wenn sich 1 Mol unterkühlten Wassers bei -10° in Eis verwandelt? Für den Dampf seien die idealen Gasgesetze gültig; bei -10° beträgt sein Sättigungsdruck über Wasser $p_1 = 2,143$, über Eis $p_2 = 1,946$ mm Hg, das spezifische Volumen von Wasser $v_1 = 1,00$, dasjenige von Eis $v_2 = 1,09$ ccm/g.
20. Unter der Voraussetzung, daß die Isothermen im $p \cdot v - p$ -Diagramm geradlinig verlaufen und gemäß der vereinfachten Clausiusschen Zustandsgleichung die Neigung

$$\mathcal{A}_T = \left(\frac{\partial p v}{\partial p} \right)_T = \frac{T_k}{p_k} \left(0,000257 - 0,00154 \frac{T_k^2}{T^2} \right)$$

[p in Atm., $v = 1$ für $p = 1$ Atm. und $t = 0^\circ$] besitzen, soll berechnet werden:

a) welche Differenz zwischen den Angaben t eines idealen Gasthermometers mit Gasfüllung vom Druck 0 einerseits und einem Gasthermometer konstanten Volumens (t_v) vom Eispunktsdruck p_0 bzw. einem Gasthermometer konstanten Druckes (t_p) vom Druck p_0 andererseits besteht;

b) welche Unterschiede zwischen dem Spannungskoeffizienten γ eines idealen Gases und dem mittleren Spannungs- bzw. Ausdehnungskoeffizienten (β_0^{100} bzw. α_0^{100}) eines Gases von endlichem Druck bestehen.

21. Für eine Substanz sei $(p + a)(v - b) = RT$; $\left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_v = A$; $\left(\frac{\partial c_v}{\partial v} \right)_p = B$.

Welchen Wert besitzt nach dem 1. Hauptsatz $c_p - c_v$?

22. Ein ideales Gas der Molekularwärme $C_v = 5$ wird adiabatisch auf das 10fache seines anfänglichen Volumens langsam entspannt. Die Anfangstemperatur ist $t = 20^\circ$, welches ist die Endtemperatur?

23. Die Schallgeschwindigkeit in einem Gase läßt sich darstellen als $c = \sqrt{\frac{d p}{d \rho}}$, wenn p den Druck und ρ die Dichte bedeutet. Welchen Wert hat c für He und N_2 bei $0^\circ C$ und den Drucken $p = 1$ Atm. und $p = 0,001$ Atm.? Es werde die Gültigkeit der idealen Gasgesetze angenommen und das Verhältnis der spezifischen Wärmen für He zu $\kappa = 5/3$, für N_2 zu $\kappa = 7/5$ angesetzt.
24. Welchen Wert besitzt für ein vollkommenes Gas der Ausdehnungskoeffizient $\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial t}$ bei $t = 20^\circ$, wenn
- a) der Druck konstant bleibt?
 - b) die Ausdehnung adiabatisch erfolgt und das Verhältnis der spezifischen Wärmen $\kappa = 1,40$ ist?
25. Welchen Wert erhält man für die Höhe der Atmosphäre, wenn man unter Annahme konstanter Schwerebeschleunigung $g = 980,6$ cm sec⁻² die Luft als ein ideales Gas mit dem Verhältnis der spezifischen Wärmen $\kappa = 1,40$ betrachtet, und wenn
- a) die Temperatur der Luftsäule konstant ist,
 - b) sich die Temperatur mit dem Luftdruck p ebenso ändert wie bei einer adiabatischen Zustandsänderung ($\mathcal{A}Q = 0$),
 - c) sich die Temperatur mit dem Luftdruck p ebenso ändert wie bei einer Zustandsänderung, bei der die zugeführte Wärmemenge $dQ = (C_v - 3R) dT$ pro Mol gesetzt werden kann und C_v die Molekularwärme bei konstantem Volumen bedeutet.
26. Wie ändert sich bei adiabatischer Atmosphäre (vgl. Aufg. 25 b) die Temperatur mit der Höhe, wenn die Schwerebeschleunigung als konstant und die Bodentemperatur zu $t = 10^\circ C$ angenommen wird?
27. Unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die kritische Isotherme im kritischen Punkt einen Wendepunkt besitzt, sollen die Gaskonstante R und die Größen α und β der Clausiusschen Zustandsgleichung $p = \frac{RT}{v - \alpha} - \frac{K}{T^n} \cdot \frac{1}{(v + \beta)^2}$ durch die Konstante K und die kritischen Größen p_c, v_c, T_c ausgedrückt werden.
28. Unter Berücksichtigung des Umstandes, daß im kritischen Punkt das spezifische Volumen v_c für die flüssige, gasförmige und labile Phase gleiche Werte hat, sollen die Gaskonstante R sowie die Größen a und b der van der Waalsschen Zustandsgleichung durch die kritischen Größen ausgedrückt und die so gewonnenen Werte in die Zustandsgleichung eingesetzt werden.
29. Mittels der van der Waalsschen Zustandsgleichung ist zu berechnen, durch welche isotherme Drucksteigerung $P - p$ bei $t = 0^\circ$

das spezifische Volumen des Sauerstoffs von $v = 700$ ccm bei $p = 1$ Atm. auf das spezifische Volumen $V = 0,90$ ccm gebracht wird, wenn zur Bestimmung der van der Waalsschen Konstanten a und b die kritischen Größen des Sauerstoffs zu $p_c = 50$ Atm. und $v_c = 2,31$ ccm angesetzt werden.

30. Welches ist der theoretisch günstigste Wirkungsgrad einer Dampfmaschine, die mit Dampf von 190°C arbeitet und deren Kühler eine Temperatur von 40°C besitzt?
31. Wieviel Watt muß eine Maschine mindestens leisten, wenn sie einer großen Wassermasse der konstanten Temperatur $t_1 = 17^\circ$ pro Sekunde $Q_1 = 10$ kg cal entziehen und einem Wärmebehälter der Temperatur $t_2 = 46^\circ$ zuführen soll? Welche Wärmemenge Q_2 wird dem wärmeren Behälter im ganzen zugeführt?
32. Eine mechanische Arbeitsenergie von $A = 10^{12}$ Erg soll zur Heizung eines Raumes verwendet werden.
 - a) Wieviel Kalorien kann diese Arbeitsenergie liefern, wenn sie isotherm in Wärme verwandelt wird?
 - b) Wieviel Wärme kann mittels der Arbeitsgröße A einem auf $t_2 = 100^\circ$ befindlichen Röhrensystem zugeführt werden, wenn zwischen diesem Wärmebehälter und einem zweiten auf $t_1 = 0^\circ$ befindlichen ein umgekehrter Carnotscher Prozeß durchgeführt wird?
33. Welche Entropieänderung erleidet ein Mol eines idealen Gases, wenn es sich ohne Arbeitsleistung und Wärmezufuhr vom spezifischen Volumen v_0 bis zum spezifischen Volumen v ausdehnt?
34. Die Massen M_1 und M_2 zweier idealer Gase von den Molekulargewichten m_1 und m_2 befinden sich bei 0° unter dem Druck 1 Atm. Ohne Änderung von Druck und Temperatur läßt man sie ineinander diffundieren. Um welchen Betrag ändert sich ihre Entropie?
35. Bei Prozessen, die gleichzeitig bei konstanter Temperatur T und bei konstantem Druck p ablaufen, läßt sich die Entropie S durch eine Größe Φ ersetzen, die um ein additives Glied von S verschieden ist und ebenfalls die Eigenschaft besitzt, für alle reversiblen Prozesse konstant zu bleiben und für irreversible Prozesse zu wachsen. a) Wie ist Φ durch S , p , T und u darstellbar? b) Wie ist Φ allein durch T und die spezifische Wärme c_p ausdrückbar?
36. Welchen Wert erhält man für die freie Energie F eines idealen Gases vom Molekulargewicht m und der Masse M , wenn sein spezifisches Volumen v , seine Temperatur T und seine spezifische Wärme c_v bekannt sind?

37. Ein im Gleichgewicht befindliches System hat die freie Energie $F = A + BV + CT$. Welchen Wert besitzt der Druck p , die innere Energie U und die Entropie S des Systems?
38. Bei einem isotherm und isobar verlaufenden Prozeß, der bei verschiedenen Temperaturen T und Drucken p durchgeführt wird, ergibt sich, daß die auftretende Volumenänderung ΔV darstellbar ist als $\Delta V = A + BT + Cp$. Wie ändert sich bei diesem Prozeß die Wärmetönung H mit dem Druck?
39. Wie lassen sich die spezifischen Wärmen c_p und c_v sowie der Ausdehnungs- bzw. Spannungskoeffizient $\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$ bzw. $\frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$ durch die Entropie s des betreffenden Körpers zum Ausdruck bringen?
40. Welcher Zustandsgleichung gehorcht eine Substanz, deren Energie U unabhängig vom spezifischen Volumen v ist, und deren Entropie S durch $s = c_v \ln T + R \ln v + \text{const}$ gegeben ist?
41. Welches ist die innere Energie u eines Gases bei Annahme der van der Waalsschen Zustandsgleichung, falls T und v die unabhängigen Variablen sind?
42. Welche maximale Arbeit kann ein Gas leisten, das der van der Waalsschen Zustandsgleichung gehorcht und dessen spezifische Wärme bei konstantem Volumen c_v unabhängig von der Temperatur ist, wenn es sich adiabatisch von der Temperatur T_a und dem spezifischen Volumen v_a auf das spezifische Volumen v_e ausdehnt? Welches ist dabei seine Endtemperatur?
43. Um welchen Betrag ändert sich die Temperatur eines beliebigen realen Gases bei der adiabatischen Druckänderung dp ? Unter welcher Bedingung ist diese Temperaturänderung für ein Gas, das der van der Waalsschen Gleichung gehorcht, ebenso groß wie für ein ideales Gas?
44. Welche Wärmemenge wird erfordert, wenn sich 1 g flüssiges Wasser bei 0° unendlich langsam von 101 auf 1 Atm. entspannt. Für die Rechnung werde die van der Waalssche Gleichung als richtig angenommen, das kritische Volumen des Wassers zu $v_c = 2,5 \text{ ccm}$, seine Kompressibilität bei der Druckeinheit 1 Atm. zu $\beta = -\frac{1}{v_1} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = 5 \cdot 10^{-5}$ angesetzt.
45. Helium (Molekularwärme bei konstantem Volumen $C_v = 3$) von $p_1 = 10 \text{ Atm.}$ ist auf $T_1 = 14^\circ$ abgekühlt. Auf welchen Druck p_2 muß man das Gas adiabatisch entspannen, damit die kritische Temperatur $T_2 = 5,27^\circ$ erreicht wird? Für die Rechnung werde

die van der Waalssche Gleichung zugrunde gelegt und der kritische Druck des Heliums zu 2,25 Atm. angesetzt.

46. Erwärmt man einen Körper bei konstantem Druck p um Δt , so läßt sich die dafür nötige Energie ΔU in drei Teile zerlegen. Der erste Teil ΔU_1 hängt nur ab von der Temperaturerhöhung, der zweite Teil ΔU_2 ist bedingt durch die Abhängigkeit des Energieinhaltes U des Körpers vom Volumen v , der dritte Teil ΔU_3 durch die äußere Arbeit.
- Wie verhält sich bei Wasser von $0^\circ \Delta U_2 : \Delta U_3$, wenn $p = 1$ Atm., $\Delta t = 1^\circ$, $\frac{1}{v} \left(\frac{dv}{dt} \right)_p = -0,000\,060$ und $\frac{1}{v} \left(\frac{dv}{dp} \right)_T = -0,000\,052$ (Druckeinheit 1 Atm.)?
 - Um wieviel cal erhöht sich die innere Energie von 1 g Wasser von 0° , wenn sich sein Volumen um 1 mm^3 verringert?
 - Welchen Wert hat $c_p - c_v$ für Wasser von 0° ?
47. Welche Werte erhält man für die Koeffizienten α und β der Gleichungen $c_p = c_0 + \alpha p$ und $c_v = c'_0 + \beta v$, falls die Zustandsgleichung von van der Waals zugrunde gelegt wird und wenn unter Annahme geringer Dichten kleine Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden?
48. Ein Körper, der der Zustandsgleichung $(p + a)(v - b) = RT$ gehorcht, ist vom Zustand p_1, T_1 in den Zustand p_2, T_2 auf reversiblen Wege überzuführen, und zwar:
- durch isotherme Druckänderung von p_1 bis p_2 (Prozeß 1) und darauffolgende Erwärmung von T_1 auf T_2 beim konstanten Druck p_2 (Prozeß 2);
 - durch Erwärmung von T_1 auf T_2 beim konstanten Druck p_1 (Prozeß 3) und darauffolgende isotherme Druckänderung von p_1 bis p_2 (Prozeß 4);
- Welche Energie U und welche Wärmemenge Q bei reversiblen Verlauf gewinnt der Körper in jedem der vier Prozesse?
 - Welchen Wert hat $(U_1 + U_2) : (U_3 + U_4)$?
 - Welche der beiden Summen $Q_1 + Q_2$ und $Q_3 + Q_4$ ist die größere, wenn $T_2 > T_1$ und $p_1 > p_2$?
49. Unter Annahme der in Aufgabe 28 geforderten reduzierten van der Waalsschen Zustandsgleichung (θ, π, ν reduzierte Temperatur, reduzierter Druck und reduziertes Volumen) ist zu berechnen, auf welcher Kurve im $\pi \nu - \pi$ -Diagramm a) der differentiale Joule-Thomson-Effekt (bei Druckänderung dp) verschwindet, b) der isotherm verlaufende Drosselversuch, der zwischen den Drucken p und 0 abläuft, ohne Wärmeaustausch stattfindet (Inversionskurve).

50. Mittels der für kleine Drucke gültigen vereinfachten Clausiusschen Zustandsgleichung, die in reduzierter Form $\left(\pi + \frac{16}{3} \frac{1}{\theta v^2}\right) \left(v - \frac{1}{4}\right) = \frac{32}{9} \theta$ lautet, ist der Joule-Thomson-Effekt der Kohlensäure bei 0° und einer Druckänderung von 1 Atm. zu berechnen und anzugeben, welcher Betrag der Kühlwirkung auf die innere Arbeit in Ansatz zu bringen ist. Wie verhält sich die Inversionstemperatur T_i zur kritischen Temperatur T_c ? $T_c = 304^\circ$; $v_c = 2,15$ ccm; $c_v = 0,152$; $c_p = 0,197$.
51. Für Luft ist der Joule-Thomson-Effekt $\mu = -0,2599 + \frac{181,96}{T} - \frac{552,4p}{T^2}$, wenn die Druckeinheit 1 m Hg ist. Ferner hat die spezifische Wärme der Luft bei dem konstanten Druck von 1 Atm. den Wert $c_p = 0,240 + 0,000016t$. Welchen Wert besitzt $\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T$ für $p = 1$ Atm. und $t = 60^\circ$?
52. Die für den Joule-Thomson-Effekt angegebene Gleichung der vorstehenden Aufgabe enthält Temperaturangaben, von denen angenommen werde, daß sie sich auf ein Luftthermometer vom konstanten Druck $p = 1$ Atm. (Ausdehnungskoeffizient $\alpha = 0,0036728$) beziehen. Sie mögen jetzt mit T' bezeichnet werden. Welche absolute Temperatur T_0 berechnet sich aus jener Gleichung für die Temperatur des schmelzenden Eises, wenn man die spezifische Wärme c_p der Luft als unabhängig von Druck und Temperatur zu 0,241 und die Dichte der Luft bei 0° und 1 Atm. zu $\rho_0 = 0,001293$ ansetzt?
53. Beim Joule-Effekt bleibt die Energie u des Gases konstant. Diese ist für den Zustand T, v darzustellen als die Summe eines reinen Temperatur- und eines reinen Volumenintegrals. Die beim Joule-Thomson-Effekt konstant bleibende Größe $J = u + pv$ heißt Entalpie; sie ist für den Zustand T, p entsprechend als Summe eines Temperatur- und eines Druckintegrals darzustellen. Wie unterscheiden sich die in den Ausdrücken für u und J auftretenden Konstanten K_1 und K_2 ?
54. Wird ein Gas aus dem Zustand p, v, T lediglich durch Leistung innerer Arbeit (Joule-Effekt) bis zur unendlichen Verdünnung adiabatisch ausgedehnt, so nimmt es die Temperatur T_u an; wird es im Drosselversuch, also unter gleichzeitiger Leistung von innerer und äußerer Arbeit (Joule-Thomson-Effekt) adiabatisch bis zur unendlichen Verdünnung ausgedehnt, so nimmt es die Temperatur T_J an. Aus den Werten T_u und T_J sowie den beiden spezifischen Wärmen

- c_{p0} und c_{v0} des unendlich verdünnten Gases ist unter Benutzung der Resultate von Aufg. 53 die Differenz $p v - R T$ für den Anfangszustand p, v, T zu berechnen.
55. Es sind aus der van der Waalsschen Gleichung die drei Beziehungen abzuleiten, welche implizite die Abhängigkeit des Druckes p_s und der beiden spezifischen Volumina v_1 und v_2 der flüssigen und dampfförmigen Phase von der Temperatur im Sättigungszustand darstellen. Welchen Wert besitzen v_1 und v_2 bei der Temperatur $T = 0$? Welche Gleichung gilt für den Sättigungsdruck in tiefer Temperatur?
56. Wie groß ist das spezifische Volumen v_2 des Wasserdampfes bei $t = 150^\circ$, wenn bei dieser Temperatur die Verdampfungswärme $L = 503,8$ cal, die Änderung des Sättigungsdruckes $\frac{dp_s}{dt} = 95,66$ mm Hg/Grad beträgt und das spezifische Volumen des Wassers zu $v_1 = 1,1$ angenommen wird?
57. Wieviel cal sind von der Verdampfungswärme des Wassers bei 100° auf die äußere Arbeit in Ansatz zu bringen? Das spezifische Volumen v_2 des gesättigten Dampfes bei 100° beträgt 1671 cm³.
58. Bei welcher Temperatur t erstarrt Wasser, das sich unter dem Druck von $4,6$ mm Hg befindet? Es sei zur Berechnung angenommen, daß Wasser das spezifische Volumen $v_2 = 1,00$ ccm, Eis das spezifische Volumen $v_1 = 1,09$ ccm besitzt und die Schmelzwärme 80 cal beträgt.
59. Beim Tripelpunkt ($+ 0,007^\circ$) beträgt die Verdampfungswärme des Wassers 595 cal, die Schmelzwärme des Eises $79,6$ cal, der Temperaturkoeffizient des Sättigungsdruckes von Dampf über Wasser $\frac{dp}{dt} = 0,3335$ mm Hg/Grad. Wie groß ist der Temperaturkoeffizient $\frac{dP}{dt}$ des Sättigungsdruckes P von Dampf über Eis, wenn für den Dampf die Gesetze des idealen Zustandes angenommen werden?
60. Welche Formel mit den empirischen Konstanten a und b ergibt sich für den Sättigungsdruck eines Dampfes geringer Dichte, wenn man, ausgehend einerseits von der Energieänderung bei der Verdampfung, andererseits von der Clausius-Clapeyronschen Gleichung, den Dampf der spezifischen Wärme c_v als ideales Gas betrachtet und die spezifische Wärme c der Flüssigkeit (dessen spezifisches Volumen v_1 gegen dasjenige des Dampfes v_2 vernachlässigt werden möge) als konstant ansieht.
61. Die Verdampfungswärme des Wassers ist bei $t = 30^\circ$ zu $L = 579,8$ cal beobachtet worden. Welchen Wert erhält man bei $t = 0^\circ$, wenn man für den Dampf die Gesetze des idealen Gaszustandes anwendet und

- die Differenz der spezifischen Wärmen konstanten Druckes von Wasser und Dampf zu $c_1 - c_2 = 1,00 - 0,46 = 0,54$ unabhängig von Druck und Temperatur ansetzt?
62. Welchen Ausdruck erhält man für die Verdampfungswärme L als Funktion der Temperatur T , wenn bis zur kritischen Temperatur T_c die Differenz zwischen der spezifischen Wärme h des ständig gesättigten Dampfes und der spezifischen Wärme c der Flüssigkeit als lineare Funktion von T darstellbar ist?
63. Unter der Annahme, daß die van der Waalssche Formel für den Sättigungsdruck p_s , nämlich $\ln \frac{p_s}{p_c} = f \cdot \left(1 - \frac{T_c}{T}\right)$, wobei f eine Konstante ist, streng gilt, ist der Nutzeffekt η (geleistete äußere Arbeit zu ganzer aufgewendeter Energie) beim Verdampfungsprozeß zu berechnen.
64. Bei $t = 100^\circ$ hat die Verdampfungswärme des Wassers den Wert $L = 539,1$ cal und ihr Temperaturkoeffizient beträgt $\frac{dL}{dt} = -0,64$ cal/Grad. Welche Wärmemenge ist nötig, um 1 g Wasserdampf, der bei $99,5^\circ$ gesättigt ist, in gesättigten Dampf von $100,5^\circ$ überzuführen. Die spezifische Wärme des Wassers werde zu 1,01 angesetzt.
65. Beim Westonschen Cadmium-Element beträgt bei 18° die elektromotorische Kraft $E = 1,01837$ Volt und die auf das Äquivalent bezogene Energieänderung des chemischen Prozesses $U_{18} = 47453$ cal. Wie groß ist der Temperaturkoeffizient der elektromotorischen Kraft?
66. Die innere Energie eines Systems, das bei dem konstanten Volumen V und der konstanten Temperatur T eine Veränderung durchmacht, erhöht sich um $U = U_0 + aT^n - bVT^2$, wobei $n > 1$ sei. Welches ist unter Benutzung des Nernstschen Theorems die maximale Arbeit A , die das System bei der Temperatur T zu leisten vermag?
67. In der Nähe seines Umwandlungspunktes kann die maximale Arbeit A pro Gramm Schwefel (beim Übergang von der monoklinen in die rhombische Modifikation) durch $A = 1,57 - 1,15 \cdot 10^{-5} T^2$ dargestellt werden. Wie berechnet sich hiernach die Gleichgewichtstemperatur zwischen beiden Modifikationen? Welches ist die Wärmetönung U am Umwandlungspunkt?
68. Einer unendlich ausgedehnten Platte der Dicke D wird auf elektrischem Wege pro Volumeneinheit und Sekunde die Wärmemenge q zugeführt. Welches ist im stationären Zustand die Temperaturverteilung in der Platte, wenn die Begrenzungsflächen $x = 0$ und $x = D$ auf der Temperatur t_1 und t_2 gehalten werden und das

Wärmeleitvermögen k der Platte unabhängig von der Temperatur ist? Welches ist die maximale Temperatur innerhalb der Platte und zu welchem Wert von x gehört diese?

69. Wie ist im Vergleich zu Aufgabe 68 die Differentialgleichung der Wärmeleitung abzuändern, wenn statt der unendlich ausgedehnten Platte der Dicke D a) ein unendlich langer Vollzylinder vom Radius r , b) eine Kugel vom Radius R elektrisch geheizt werden?
70. Ein unendlich langer Hohlzylinder vom inneren und äußeren Durchmesser r_i und r_a werde durch elektrischen Strom zum Glühen gebracht. Welche Temperaturdifferenz besteht im Gleichgewichtszustand zwischen der Innen- und Außenfläche des Rohres, wenn angenommen wird, daß die Stromdichte i und die Wärmeleitung k über den ganzen Rohrquerschnitt die gleiche ist, und wenn die Strahlungsintensität an der Außenfläche den Wert E besitzt?

Optik.

I. Elektromagnetische Wellen.

1. Zwei in derselben Richtung linear polarisierte Wellen von gleicher Frequenz, deren Amplituden a und b sind und die eine Phasendifferenz δ gegeneinander haben, interferieren. Wie groß ist die mittlere Intensität der resultierenden Welle?
2. Man bestimme die Amplitude A und die Phase φ der Welle, welche durch Superposition sehr vieler in derselben Richtung linear polarisierter Wellen entsteht, wenn diese alle dieselbe Amplitude und Frequenz haben, die Phasen je zweier sich aber jeweils um denselben und in derselben Richtung liegenden kleinen Betrag ε unterscheiden, so daß die Phase der ersten Welle φ_0 , die der $(i + 1)$ ten $\varphi_0 + i\varepsilon$ und die der letzten $\varphi_0 + \delta$ ist.
3. Es sollen sehr viele (n) in derselben Richtung linear polarisierte Wellen von gleicher Amplitude und Frequenz zur Interferenz kommen, deren Phasen voneinander verschieden sind, und zwar so, daß sie gänzlich unregelmäßig über alle möglichen Werte verteilt sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Intensität der resultierenden Welle zwischen J und $J + dJ$ liegt? Wie groß ist der Mittelwert der Intensität für viele derartige Superpositionen?
4. Ein von spiegelnden Wänden allseitig begrenzter Hohlraum werde in allen Richtungen gleichmäßig durchsetzt von elektromagnetischen

Wellen, derart, daß die Komponente \mathcal{E}_s der elektrischen Kraft in einer Richtung s eine beliebige (von der Richtung s unabhängige) Funktion der Zeit ist, die in der üblichen Weise dargestellt werden kann durch

$$\mathcal{E}_s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos \left(\frac{2\pi n t}{T} - \vartheta_n \right).$$

Dabei soll T sehr groß sein gegen alle in Betracht kommenden Zeiten. Wie groß ist die mittlere Energiedichte u dieser in dem Hohlraum eingeschlossenen Strahlung?

5. Zwei senkrecht zueinander linear polarisierte Wellen von gleicher Frequenz, deren Amplituden a_1 und a_2 sind, pflanzen sich in derselben Richtung mit einer Phasendifferenz δ fort. Man bestimme die Bahn des Endpunktes des Wellenvektors in der resultierenden Wellenbewegung. Wann ist diese zirkular, wann linear polarisiert?
6. Läuft der Endpunkt des Vektors einer elliptisch polarisierten Welle (wie sie allgemein durch Superposition zweier linear und senkrecht zueinander polarisierter Wellen mit den Phasen δ_1 und δ_2 entsteht) auf der Ellipse (vgl. Aufg. 5) mit konstanter Geschwindigkeit um bzw. wann ist dies der Fall?
7. Die Wellenvektoren zweier elliptisch polarisierter, in derselben Richtung sich fortpflanzender Wellen von gleicher Frequenz seien gegeben durch

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= a_{1,2} \cdot \sin n(vt - z_{1,2}), \\ y_{1,2} &= b_{1,2} \cdot \sin n(vt - z_{1,2} - \delta_{1,2}). \end{aligned}$$

Was für eine Welle entsteht durch Superposition der beiden nach Form, Amplitude und Phase?

8. Der Brechungsexponent n von Schwefelkohlenstoff für Natriumlicht ($\lambda = 589 \mu\mu$) ist 1,629; die Dispersion an dieser Stelle des Spektrums sei angenähert (d. h. durch lineare Interpolation) gegeben durch die Werte des Brechungsexponenten $n = 1,642$ für $\lambda = 527 \mu\mu$ und $n = 1,620$ für $\lambda = 656 \mu\mu$. Wie groß ist für Natriumlicht die Gruppengeschwindigkeit im Vergleich zur Wellengeschwindigkeit?
9. Welcher Bedingung müssen die (komplexen) Konstanten a und b in dem Ausdruck $A \cdot e^{-int+ax+bz}$ genügen, damit der reelle Teil derselben eine Lösung der Wellengleichung darstellt, und welche Form müssen sie insbesondere haben, damit man homogene ebene Wellen erhält?
10. Setzt man in den Ausdruck der vorhergehenden Aufgabe $a = ik \mathcal{O} \beta$ und $b = k \cdot \text{Sin} \beta$, so erhält man die sogenannten inhomogenen Voigtschen Wellen, wenn man den reellen Teil mit der

y -Komponente der elektrischen Kraft gleichsetzt und $\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_z = 0$ annimmt. Man zeige, daß diese Wellen nicht mehr transversal sind.

11. Wieviel Bestimmungsstücke sind zur vollständigen physikalischen Beschreibung einer monochromatischen Kugelwelle erforderlich?
12. Eine partikuläre Lösung der Wellengleichung ist bei Kugelsymmetrie $u = (1/r) \sin(nt - kr)$. Wie kann man daraus am einfachsten einen Ansatz für die Komponenten des Wellenvektors \mathfrak{v} einer transversalen Kugelwelle finden?
13. Man zeige, daß man aus einer Lösung \mathfrak{Z} der Wellengleichung $\Delta \mathfrak{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} = 0$ eine elektromagnetische Welle erhält durch den Ansatz für die beiden Feldvektoren $\mathfrak{E} = \text{rot rot } \mathfrak{Z}$; $\mathfrak{H} = 1/c \cdot \text{rot } \mathfrak{Z}$.
14. Man zeige, daß alle Ableitungen des partikulären Integrals $\varphi = 1/r f(r \pm vt)$ der Wellengleichung nach den Koordinaten wieder Lösungen der Wellengleichung sind, und zeige an den speziellen Beispielen $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$, daß für diese der Wellenvektor nicht mehr nur von r , sondern auch von der Richtung von r gegen die Koordinatenachsen (x, y, z) abhängt.
15. Man zeige, daß eine elektromagnetische Kugelwelle dargestellt ist durch

$$\mathfrak{E}_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \mathfrak{E}_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \mathfrak{E}_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

und

$$u = -\frac{2}{\partial y \partial z} \varphi; \quad v = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}; \quad w = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},$$

wenn φ eine partikuläre nur von r abhängende Lösung der Wellengleichung ist. Wie lauten, wenn also $\varphi = (1/r) f(r \pm ct)$ ist, die Komponenten von \mathfrak{E} und von \mathfrak{H} angenähert, wenn man die nächste Umgebung von $r = 0$ ausschließt, so daß man Glieder von der Ordnung $1/r^3$ und $1/r^4$ vernachlässigen darf gegen solche von der Ordnung $1/r$ und $1/r^2$?

16. Die durch die Lösung der Aufgabe 15 dargestellte Welle kann man auffassen als zusammengesetzt aus zwei Teilwellen mit den elektrischen Vektoren \mathfrak{E}_1 und \mathfrak{E}_2 , wobei die Komponenten von \mathfrak{E}_1 in jeder Richtung proportional $\frac{1}{r} \frac{d^3 f}{dr^3}$, die Komponenten von \mathfrak{E}_2 proportional $\frac{1}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2}$ sind, die Größe des Proportionalitätsfaktors jedoch von der Richtung des Radiusvektors zum Aufpunkt abhängt. Man zeige, daß die Teilwelle \mathfrak{E}_2 nicht transversal ist, und gebe die Richtungen an, in denen sie sogar rein longitudinal ist.

17. Man erhält allgemeine Formen „elliptisch polarisierter“ Kugelwellen, wenn man in den drei Ausdrücken für die Komponenten von \mathfrak{E} der Aufgaben 15 und 16 die Phase und Amplitude der Wellenfunktion f verschieden annimmt, also etwa in \mathfrak{E}_x setzt $f_1 = a_1 \sin(r + vt + \delta_1) \dots$, in $\mathfrak{E}_z f_3 = a_3 \sin(r + vt + \delta_3)$. Man bestimme für den Teil f_1 der so konstruierten Wellen die Lage von \mathfrak{E} gegen den Radiusvektor und die Bahn, welche sein Endpunkt beschreibt.
18. Die Hefnerlampe strahlt einem cm^2 in 1 cm Entfernung in einer Sekunde 0,2 g-Cal. zu, von denen etwa 1 Proz. auf das sichtbare Spektrum entfallen. Wie groß wären unter der Annahme einer monochromatischen Emission der sichtbaren Strahlung in 1 m Entfernung von der Lampe die Maximalwerte der elektrischen und magnetischen Feldstärke in der Welle, erstere in Volt/cm, letztere in Gauß ausgedrückt?
19. Die Sonne strahlt 1 cm^2 der Erde im Mittel etwa 3 g-Cal./min zu. Wie groß ist die Energiedichte der Sonnenstrahlung im Vakuum und in Wasser?
20. Als Maß der Intensität einer Lichtwelle kann man den Mittelwert des Energieflusses, des Quadrates der magnetischen Feldstärke, des Quadrates der elektrischen Feldstärke oder endlich der Energiedichte benutzen. Wie verhalten sich diese verschiedenen Größen zueinander für eine rein harmonische, in einem nicht dispergierenden durchsichtigen Medium verlaufende Welle?
21. Für die Amplituden A_1 , A_2 und A_3 der einfallenden, der reflektierten und der gebrochenen Welle liefern für die Grenze zwischen zwei Nichtleitern die Grenzbedingungen der Maxwell'schen Theorie die Beziehung $A_1 + A_2 = A_3$, während der Energiesatz für die Intensitäten der drei genannten Wellen die Beziehung $J_1 = J_2 + J_3$ liefert; setzt man in der üblichen Weise die Intensität proportional dem Quadrat der Amplitude, so liefert also der Energiesatz die Beziehung $A_1^2 = A_2^2 + A_3^2$. Man zeige, wie sich dieser scheinbare Widerspruch löst.
22. Man zeige, daß eine Kupferfolie von 0,01 mm Dicke, welche für optische (sichtbare) Wellen bereits vollkommen undurchsichtig ist, für lange elektrische Wellen, z. B. von 10 m Wellenlänge, noch merklich durchlässig ist, und berechne, welcher Betrag der eindringenden Intensität (also ausschließlich aller Reflexionsverluste) von dieser Folie absorbiert wird.
23. In einem Metall von der Leitfähigkeit σ pflanze sich ein kontinuierliches Spektrum ebener elektromagnetischer Wellen in der

- Richtung der x -Achse fort. Wie muß die Intensitätsverteilung $f(\lambda)d\lambda$ an der Stelle $x = 0$ in diesem Spektrum sein, damit die Intensität an der Stelle $x = x_0$ gleichmäßig über alle Wellenlängen verteilt ist?
24. Wie groß ist für Wellen von der Länge 25μ in Kupfer das Verhältnis der Amplituden der elektrischen und magnetischen Kraft und die Phasenverschiebung zwischen den beiden, wenn die Leitfähigkeit des Kupfers gegeben ist durch den Widerstand $1,76 \cdot 10^{-6}$ Ohm eines Würfels von 1 cm Kantenlänge?
 25. Wie groß ist für Wasser, dessen Dielektrizitätskonstante 80, dessen Leitfähigkeit $8 \cdot 10^{-15}$ elektromagnetische C G S-Einheiten ist, die Phasendifferenz und das Amplitudenverhältnis der elektrischen und magnetischen Kraft einer Welle a) von 10 cm und b) von 1000 m Länge?
 26. Ein Halbleiter sei charakterisiert durch die Dielektrizitätskonstante ϵ und die Leitfähigkeit σ . Oberhalb bzw. unterhalb welcher Größe muß die Länge elektromagnetischer Wellen liegen, damit sich der Halbleiter für dieselben um nicht mehr als δ Proz. von einem reinen Leiter bzw. reinen Isolator unterscheidet, d. h. damit man bis zu dieser Genauigkeit mit den Ansätzen für ein Metall von derselben Leitfähigkeit bzw. für einen Isolator von derselben Dielektrizitätskonstante wie der betrachtete Halbleiter rechnen darf?
 27. Für eine ebene, in einem durchsichtigen Medium (Isolator) verlaufende elektromagnetische Welle kann man als den „Wellenvektor“ die elektrische Kraft, die magnetische Kraft oder die elektrische Verschiebung betrachten. Man zeige, daß für einen anisotropen Isolator (Kristall) die Wellen nicht mehr in allen diesen drei Fällen als transversale Wellen zu bezeichnen sind.
 28. Die drei Hauptdielektrizitätskonstanten in Schwefel seien $\epsilon_1 = 3,59$, $\epsilon_2 = 3,89$, $\epsilon_3 = 4,60$. Wie groß ist der Winkel zwischen der Richtung des Poyntingschen Energieflusses und der Richtung der Wellennormalen für eine ebene Welle, deren Wellennormale mit den drei elektrischen Symmetrieachsen gleiche Winkel bildet?
 29. Unter welchen Winkeln gegen die drei elektrischen Symmetrieachsen muß in Schwefel (Konstanten siehe Aufg. 28) die Wellennormale einer ebenen Welle liegen, damit nur eine Wellengeschwindigkeit auftritt, und wie groß ist diese im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume?
 30. Im Aragonit sind die drei Hauptdielektrizitätskonstanten $\epsilon_1 = 10$, $\epsilon_2 = 7,80$, $\epsilon_3 = 6,60$, die drei Hauptbrechungsindizes für optische Wellen $n_1 = 1,685$, $n_2 = 1,680$ und $n_3 = 1,530$. Wie groß ist für

lange elektrische Wellen und für optische Wellen der Winkel zwischen der Richtung einfacher Strahlgeschwindigkeit und einfacher Wellengeschwindigkeit?

31. Wie groß ist für eine rhombische Kristallplatte, deren drei Hauptbrechungsindizes $n_1 = 1,533$, $n_2 = 1,686$, $n_3 = 1,691$ sind, der Durchmesser des durch innere konische Refraktion entstehenden Lichtbündels, verglichen mit der Dicke der Platte?

II. Brechung, Reflexion, Interferenz und Beugung.

32. Sind a_i , a_g und a_r die Amplituden des elektrischen Vektors einer an der Grenzfläche zweier isotroper Nichtleiter einfallenden, gebrochenen und reflektierten ebenen linear polarisierten Welle, so liefern die Maxwell'schen Grenzbedingungen die Beziehung $a_i + a_r = a_g$, während der Energiesatz unmittelbar für die entsprechenden Intensitäten die Beziehung $J_i = J_g + J_r$ liefert. Man zeige für den speziellen Fall senkrechter Inzidenz, daß beide Beziehungen identisch sind. (Vgl. auch Aufg. 21.)
33. Eine ebene, unter dem Winkel ϑ gegen die Einfallsebene linear polarisierte Welle falle in den Raum zwischen zwei ebenen parallelen Glasplatten und werde von diesen abwechselnd unter dem (stets gleichen) Winkel α reflektiert. Welchen Winkel bildet die Polarisationsrichtung mit der Einfallsebene nach p derartigen Reflexionen?
34. Unter welchem Einfallswinkel muß eine parallel zur Einfallsebene linear polarisierte ebene Welle auf eine planparallele Glasplatte vom Brechungsindex n fallen, damit — vollkommene Durchsichtigkeit vorausgesetzt — die reflektierte Intensität ebenso groß ist wie die durchgehende?
35. Welche Form muß man einem Spiegel aus einem nichtleitenden isotropen Medium vom Brechungsexponenten n geben, damit bei Beleuchtung mit unpolarisiertem Licht von allen Seiten alles von dem Spiegel in das Auge eines Beobachters reflektierte Licht vollständig polarisiert ist?
36. Durch wieviel planparallele Platten aus Kronglas ($n = 1,6$) muß eine unpolarisierte ebene Welle unter 45° hindurchgehen, damit sie nach dem Austritt aus dem Plattensatz zu rund 99 Proz. polarisiert ist, d. h. damit das Verhältnis der Amplituden des parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden elektrischen Vektors höchstens $100:1$ ist?
37. Man formuliere allgemein die Bedingung für den Einfallswinkel α einer unpolarisierten Welle gegen die ebene Grenzfläche eines

- Nichtleiters vom Brechungsindex n dafür, daß die Amplitude der reflektierten Welle ein Minimum ist.
38. Unter welchem Winkel müssen unpolarisierte ebene Wellen von großer Länge auf eine Wasseroberfläche auffallen, damit 1. die reflektierte Welle die kleinste Intensität hat, 2. vollständig linear polarisiert ist?
39. Man zeige, daß man mit einem Fresnelschen Glas-Parallelepiped zur Herstellung zirkular polarisierten Lichtes für keine Form des Parallelepipeds zirkular polarisiertes Licht erhalten kann, wenn dasselbe an Stelle von Luft von Wasser ($n = 1,33$) umgeben ist.
40. In der Lösung von Aufgabe 22 wurde gezeigt, daß 0,01 mm Kupfer rund 83 Proz. der Intensität einer Welle von 10 m Wellenlänge absorbiert; erfahrungsgemäß wirkt nun aber eine Kupferfolie von dieser Dicke als vollkommener Schirm gegen solche Wellen. Wie erklärt sich dieser Widerspruch?
41. Man leite die Beziehung $ab\ n = \sin \alpha_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 \cdot \cos 2 \varphi_0$ zwischen dem Brechungsindex n eines Metalles, dem Haupteinfallswinkel α_0 und dem Hauptazimut φ_0 .
42. Für Gold hat n den Wert 0,37 und nk den Wert 2,82. Es falle eine unter 45° gegen die Einfallsebene polarisierte Welle mit 30° Einfallswinkel auf eine ebene Goldplatte und es werde die reflektierte Welle durch einen Babinetischen Kompensator linear polarisiert. Unter welchem Winkel steht die Polarisationsrichtung gegen die Einfallsebene?
-
43. Zwei leuchtende Punkte liegen auf der x -Achse im Abstande $\pm a/2$ vom Anfangspunkte und senden kohärente Kugelwellen aus. Man untersuche die Interferenzerscheinung in einer zur y -Achse senkrechten Ebene $y = y_0$ ($y_0 \gg a$) in der Nähe der zy -Ebene.
44. Eine ebene Welle falle auf ein System von regelmäßig in den Eckpunkten eines Rauggitters angeordneten Atomen, so daß jedes dieser Atome der Ausgangspunkt einer Kugelwelle wird. Man gebe den allgemeinen Gang der Berechnung des Interferenzbildes in großer Entfernung von dem Atomgitter.
45. Im Fresnelschen Spiegelversuch sei die Entfernung der Lichtquelle von der Mitte des Spiegels 1 m, die Entfernung des Interferenzbildes 5 m; beobachtet werde mit dem Licht der roten Cadmiumlinie ($\lambda = 644 \mu\mu$). Wie groß darf der Winkel zwischen den beiden Spiegelhälften höchstens sein, damit die Breite der Interferenzstreifen nicht kleiner als 0,1 mm wird?

46. Auf eine planparallele Glasplatte ($n = 1,53$) fällt unter $49^\circ 54' 24''$ eine ebene Welle weißen Lichtes; die im reflektierten Licht entstehenden Interferenzstreifen werden in einem Spektroskop beobachtet. Wie dick darf die Platte höchstens sein, damit in dem Spektralgebiet zwischen H_α ($656 \mu\mu$) und H_γ ($434 \mu\mu$) nicht mehr als zehn dunkle Streifen liegen? Zur Vereinfachung werde dabei angenommen, daß die Dispersion des Glases in dem genannten Bereiche zu vernachlässigen sei, d. h. der Brechungsexponent konstant gleich $1,53$ gesetzt werden dürfe.
47. Man diskutiere mit Benutzung der Fresnelschen Formeln qualitativ das Aussehen der Newtonschen Interferenzringe zwischen einer flach gekrümmten Linse aus Glas vom Brechungsexponenten $1,53$ und einer Diamantplatte vom Brechungsexponenten $2,45$ für verschiedene Einfallswinkel i einer senkrecht zur Einfallsebene linear polarisierten Welle.
48. Wie groß ist in Winkelmaß das Beugungsscheibchen eines Sternes in einem Fernrohre von 30 cm Objektivdurchmesser für eine Wellenlänge von $590 \mu\mu$, wenn das Fernrohr a) wie gewöhnlich mit Luft gefüllt ist, b) wenn man es mit Wasser füllen würde ($n = 1,33$)?
49. Der Abstand der beiden D -Linien beträgt 6 \AA -E. Welchen Abstand voneinander müssen die Striche eines Gitters von 3 cm Länge haben, damit man in der zweiten Ordnung diese Linien noch trennt wahrnehmen kann?
50. Für mehrere gleichgestaltete und gleichorientierte beugende Öffnungen läßt sich die Intensität im Fraunhoferschen Beugungsbilde in der Form $J = (c^2 + s^2) (c'^2 + s'^2)$ schreiben, worin c und s die über eine beugende Öffnung erstreckten Beugungsintegrale und c' sowie s' die Summen über \cos bzw. \sin des Argumentes $(\mu x_i + \nu y_i)$, summiert über die einzelnen beugenden Öffnungen sind. Man gebe den Wert von $c'^2 + s'^2$ für den Fall von vier Öffnungen, die in den Ecken eines Quadrates von der Seitenlänge d liegen.
51. Man benutze die Eigenschaft der Fraunhoferschen Beugungsintegrale, unverändert zu bleiben, wenn man die Koordinaten x und y in der beugenden Öffnung mit zwei konstanten Faktoren multipliziert und zugleich die Koordinaten x' und y' in der Beugungsfigur durch diese Faktoren dividiert, um aus der Beugungsfigur einer kreisförmigen Öffnung die einer elliptischen Öffnung abzuleiten.
52. Eine linear polarisierte Welle weißen Lichtes falle senkrecht auf die Oberfläche einer Kristallplatte, werde in dieser in zwei in der x - und y -Richtung polarisierte Wellen gespalten und nach dem Austritt mit einem Nicol untersucht. Der Winkel zwischen der Polarisations-

tionsrichtung der einfallenden Welle und der x -Richtung sei α , der Winkel zwischen der Polarisationsrichtung des Analysators und der x -Richtung β . Für welche Beziehung zwischen α und β werden die beobachteten Interferenzfarben am meisten gesättigt sein?

53. Welche Form haben die isochromatischen Linien, die man beim Durchsehen durch zwei aus einem einachsigen Kristall unter demselben Winkel gegen die optische Achse geschnittene und unter einer gegenseitigen Verdrehung von 90° aufeinandergelegte Platten sieht?

III. Geometrische Optik.

54. Die Lichtstrahlen der geometrischen Optik kann man auffassen als die Stromlinien des Feldes eines Vektors \mathfrak{S} . Man zeige, daß dieser Vektor \mathfrak{S} , wenn man es nur mit Lichtausbreitung in homogenen Medien zu tun hat, den beiden Bedingungen $[\text{rot } \mathfrak{S}, \mathfrak{S}] = 0$ und $(\text{rot } \mathfrak{S}, \mathfrak{S}) = 0$ genügen muß, die sich zusammenfassen lassen in die eine Bedingung $\text{rot } \mathfrak{S} = 0$, d. h. in die, daß der Vektor \mathfrak{S} wirbelfrei ist.
55. Man zeige, daß bei der Reflexion eines Lichtstrahles an einer ebenen Fläche auch die Projektionen des einfallenden und des reflektierten Strahles auf jede durch das Einfallslot gelegte Ebene dem Reflexionsgesetz gehorchen.
56. In einer Ebene (xy) seien vom Nullpunkte aus sehr viele blanke Drähte (wie die Speichen eines Rades) radial gespannt. Auf dieses Drahtsystem fallen die Sonnenstrahlen unter den Winkeln α und β gegen die Achsen x und y , ein Beobachter befinde sich in einem Punkt (x_0, y_0, z_0) . Dieser Beobachter sieht dann auf jedem Draht einen glänzenden Punkt, nämlich das direkte Reflexionsbild der Sonne, und als Verbindung aller dieser Punkte eine glänzende Kurve. Man bestimme die Gestalt der Kurve.
57. Man zeige, daß die durch Brechung eines Lichtstrahles an der Grenze zweier Medien bewirkte Ablenkung mit zunehmendem Einfallswinkel immer schneller wächst, daß hingegen die durch Reflexion bewirkte Ablenkung proportional mit dem zunehmenden Einfallswinkel abnimmt.
58. Für welchen Einfallswinkel ist bei einem Prisma vom brechenden Winkel α und dem Brechungsexponenten n die Dispersion ein Minimum? Zahlenbeispiel $\alpha = 90^\circ$, $n = 1,75$ (schweres Flintglas).
59. Ein gleichseitiges Prisma aus leichtem Flintglas von 10 cm Kantenlänge werde von einer ebenen Welle, welche die erste Prismenfläche vollständig erfüllt, so durchsetzt, daß die Ablenkung ein

Minimum ist; der Brechungsindex für diese Welle sei 1,600. Ebenso durchsetzt eine zweite Welle von etwas kleinerer Wellenlänge das Prisma, für welche der Brechungsindex 1,601 ist. Welchen Winkel bilden die Wellenfronten der beiden (vor dem Einfall gleichgerichteten) Wellen nach dem Durchgang durch das Prisma?

60. Zwei gleiche Prismen mit den brechenden Winkeln $\gamma = 30^\circ$ und dem Brechungsindex 1,6 sind bei paralleler Richtung der brechenden Kanten so gegeneinander geneigt, daß ihre beiden benachbarten (inneren) Flächen den Winkel α miteinander bilden.
1. Wie groß ist der Winkel α zu wählen, damit ein senkrecht in das erste Prisma einfallender Strahl die Prismen symmetrisch durchsetzt und also auch wieder senkrecht aus dem zweiten Prisma austritt?
 2. Wie groß ist in diesem Falle die Dispersion und wie hängt sie von der Wellenlänge des Strahles ab?
61. Über einer Ebene breite sich ein brechendes Medium in horizontalen Schichten so aus, daß der Brechungsindex $n(h)$ nur von der Höhe h über der Ebene abhängt. Man diskutiere die Bahn eines Lichtstrahles, welcher die Ebene unter dem Winkel α trifft.
62. Eine Kugel sei aus lichtbrechendem durchsichtigen Material so aufgebaut, daß der Brechungsindex nur von der Entfernung vom Kugelmittelpunkt abhängt, und zwar in der Form $n = \frac{b}{a^2 + r^2}$, wo a und b Konstante sind. Man diskutiere den Strahlengang in der Kugel.
63. Eine glühende Kugel vom Radius r_0 sei umgeben von einer lichtbrechenden Gashülle, in welcher der Brechungsindex $n(r)$ nach außen hin abnimmt von dem Wert n_0 an der Kugeloberfläche und nur von r (= Abstand vom Mittelpunkte) abhängt. Wie groß erscheint die Kugel einem in großer Entfernung R befindlichen Beobachter, wo der Brechungsindex $n(R)$ nicht mehr merklich von 1 verschieden ist?
-
64. Die beiden Komponenten des Doppelsternes ϵ Lyrae haben einen Abstand von $2''$. Wie groß müßte der Radius eines Konkavspiegels sein, damit die Bilder der beiden Komponenten 1 mm voneinander entfernt sind?
65. Eine Sammellinse grenze auf einer Seite an Luft, auf der anderen Seite tauche sie in ein mit Schwefelkohlenstoff ($n = 1,63$) gefülltes Gefäß; eine kleine Kugel von 2 mm Radius liege mit ihrem Mittelpunkt auf der Achse in Luft, ihr Bild habe im Schwefelkohlenstoff einen Radius von 0,5 mm. Wie groß ist die Angularvergrößerung der Abbildung?

66. Eine Linse aus Kronglas ($n = 1,596$) werde gebildet von zwei Kugelflächen mit den Radien 10 und 5 cm, deren Mittelpunkte den Abstand 13 cm voneinander haben; die Linse liege in Wasser, dessen Brechungsexponent für die benutzte Wellenlänge 1,330 sei. Wie groß ist der Abstand der beiden Hauptpunkte der Linse voneinander?
67. In einem innen spiegelnd versilberten Gefäß mit halbkugeligem Boden vom 10 cm Krümmungsradius sei bis zu einer Höhe von 41,8 mm über dem tiefsten Punkt Schwefelkohlenstoff ($n = 1,63$) eingefüllt. Wie groß ist die Brennweite dieses Systems, wo liegt die Hauptebene und wo schneiden sich achsenparallel einfallende paraxiale Strahlen?
68. An einem zylindrischen Stab aus Glas vom Brechungsindex 1,6 werden beiderseits zwei nach außen konvexe Kugelflächen von je 5 cm Radius angeschliffen, deren Mittelpunkte auf der Achse des Stabes liegen. Wie groß muß man den Abstand der beiden Kugelscheitel wählen, damit die entstehende Linse als Zerstreuungslinse wirkt?
69. Welche Vergrößerung besitzt eine gewöhnliche Lupe, bestehend aus einer einfachen gleichseitigen Bikonvexlinse aus Kronglas ($n = 1,52$) von 5 cm Krümmungsradius der Kugelflächen und 5 mm Dicke, wenn das Objekt von der Augenpupille 9 cm entfernt ist und in einem Abstand gleich $\frac{2}{3}$ der Brennweite der Linse von der Linsenmitte auf der Achse liegt? Auf welche Entfernung muß das Auge akkommodieren, um das Bild deutlich zu sehen?
70. Von einem leuchtenden Punkt, der im Abstand 86,6 mm vom Mittelpunkt einer Kugelfläche von 50 mm Radius liegt, fällt ein Elementarbüschel unter einem Winkel von 30° gegen die Zentrale auf die Kugel; der Raum hinter der Kugelfläche ist erfüllt von einem Medium mit dem Brechungsindex 1,322. Wie groß ist die astigmatische Differenz δ der Abbildung?
71. Eine dünne plankonvexe Zylinderlinse bestehe aus Glas vom Brechungsindex n . Von einem leuchtenden Punkt auf der Achse im Abstand a vor der Linse falle ein homozentrisches paraxiales Elementarbüschel auf die Linse. Man zeige, daß die Linse auch für dieses astigmatisch ist und gebe einen Ausdruck für den (astigmatischen) Abstand der beiden Brennlinien.
72. Man berechne die Longitudinal- und die Lateralaberration einer planparallelen Platte von der Dicke d aus Glas vom Brechungsexponenten n , wenn der Öffnungswinkel des benutzten Büschels gegen die Plattennormale α ist.

73. Welchen Abstand ξ voneinander haben die Vereinigungspunkte der achsenparallelen paraxialen Strahlen einerseits, der Randstrahlen andererseits und wie groß ist der Durchmesser 2ε des Bildscheibchens in der Brennebene der ersteren für eine dünne Linse von 2 cm Öffnungsradius und gleichem Krümmungsradius $r = 10$ cm der beiden Flächen, wenn die Linse aus Glas mit dem Brechungsindex $n = 1,58$ geschliffen ist?
74. Eine Quarzlinse von praktisch verschwindender Dicke hat für sichtbares Licht ($n = 1,55$) die Brennweite 27,3 cm. Es sei in 26 cm Entfernung von der Linse auf der Achse ein leuchtender Punkt aus glühendem Metall angebracht, der zentrale Teil der Linse sei bedeckt von einem Scheibchen aus schwarzem Papier. Wo muß man hinter der Linse einen Schirm mit einer kleinen Öffnung anbringen, damit durch dieselbe kein sichtbares Licht, sondern nur sehr lange ultrarote Wellen gehen, für welche der Brechungsindex der Linsensubstanz gleich der Wurzel aus der Dielektrizitätskonstante ($\varepsilon = 4,6$) ist?
75. In Mikroskopobjektiven werden achromatische Linsenpaare benutzt, in welchen eine dünne plankonkave Linse mit der konkaven Seite an eine dünne bikonvexe Linse gekittet ist; die Glassorten der beiden Linsen seien charakterisiert durch die Brechungsindizes n_1^C , n_1^F , n_2^C , n_2^F für rotes und blaues Licht (Fraunhofersche Linien C und F). Wie groß ist bei gegebener Brennweite f des Linsenpaares der hintere Krümmungsradius der Bikonvexlinse zu wählen, damit derselbe für das Gebiet $C - F$ achromatisiert ist?
76. Das Okular von Ramsden besteht aus zwei gleichen plankonvexen Linsen, welche sich die konvexen Seiten zuwenden; der Krümmungsradius dieser sei r , die Dicke der Linsen sei sehr klein, der Brechungsindex des Glases sei n . Wie groß ist der Abstand der Linsen voneinander zu wählen, damit das System achromatisch ist?
77. Es sollen zwei gleiche gleichseitige Bikonkavlinen aus Kronglas ($n = 1,6$) von der Dicke 1 cm und dem Krümmungsradius 10 cm zu einem teleskopischen System zusammengesetzt werden. In welchem Abstand müssen die geometrischen Mittelpunkte der Linsen voneinander stehen?
78. Ein Fernrohrsystem bestehe aus drei Linsen, nämlich aus einer bikonvexen Objektivlinse und aus einem aus zwei plankonvexen Linsen zusammengesetzten Ramsdenschen Okular; die Brennweite der ersteren sei f , die jeder der Komponenten des Okulars f_1 . Wann sieht man das Objekt aufrechtstehend?
-

Zweiter Teil

Lösungen



Vektorrechnung.

1. $\pm(3\mathbb{C} - 2\mathbb{A} - \mathbb{B})$ oder $\pm(4\mathbb{A} - 5\mathbb{B} + \mathbb{C})$, denn die algebraische Addition der mit dem $+$ - oder $-$ -Zeichen versehenen Vektoren liefert 0.
2. \mathfrak{D}_1 und \mathfrak{D}_2 sind die Diagonalen des Parallelogramms mit den Seiten \mathbb{A} und \mathbb{B} . Man verschiebt \mathfrak{D}_1 und \mathfrak{D}_2 so, daß ihre Mittelpunkte zusammenfallen, und verbindet die Endpunkte von \mathfrak{D}_1 und \mathfrak{D}_2 miteinander.
3. $A = 5\alpha$; \mathbb{A} ist gegen die Horizontale unter dem Winkel $\varphi = 36^\circ 52,2'$ geneigt.
4. $A = \sqrt{50} = 7,07$. Die Richtungskosinus von \mathbb{A} sind $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{50}}$; $\cos \beta = \frac{4}{\sqrt{50}}$; $\cos \gamma = \frac{5}{\sqrt{50}}$; $\alpha = 64^\circ 54'$; $\beta = 55^\circ 33'$; $\gamma = 45^\circ$.
5. Da $A_x : A_y = B_x : B_y = \cotg \varphi$, so sind beide Vektoren parallel.
6. $\mathbb{A}^0 = i^0 \cos \varphi + j^0 \sin \varphi$; $A = \pm M$.
7. Das Dreieck läßt sich auf drei verschiedene Arten zu einem Parallelogramm vervollständigen. In einem derselben ist die Diagonale $\mathbb{A} + \mathbb{B}$. Die zugehörige Mittellinie ist halb so lang. Die drei gesuchten Vektoren sind $\frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{B})$; $\frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{C})$; $\frac{1}{2}(\mathbb{B} + \mathbb{C})$.
8. Sind \mathbb{A} , \mathbb{B} , \mathbb{C} komplanar, so liegt auch \mathfrak{D} in derselben Ebene.
 - a) Es ist nach Richtung und Größe $-\mathfrak{D} = \frac{a}{d}\mathbb{A} + \frac{b}{d}\mathbb{B} + \frac{c}{d}\mathbb{C}$.
 Es kann durch \mathfrak{D} und die drei mit den angegebenen Faktoren multiplizierten Vektoren ein geschlossener Kurvenzug gebildet werden.
 - b) $\mathfrak{D} = 0$, falls $a\mathbb{A} + b\mathbb{B} + c\mathbb{C} = 0$.
9. Die Mittellinie einer Seitenfläche ist $\mathfrak{D} = \frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{B})$. Die Mittellinie der Grundfläche ist $\mathbb{C} = \mathfrak{D} - \mathbb{C}$. Der gesuchte Vektor \mathfrak{F} bildet mit $\frac{2}{3}\mathbb{C}$ und \mathbb{C} ein Dreieck. Also $\mathfrak{F} = \mathbb{C} + \frac{2}{3}\mathbb{C} = \frac{5}{3}(\mathbb{A} + \mathbb{B} + \mathbb{C})$.
10. $(\mathbb{A}\mathbb{B}) = AB\frac{1}{2}\sqrt{3}$.
11. $A_x \cdot B_x$.
12. 1. $\mathbb{A} = 0$; 2. $\mathbb{B} = 0$; 3. $\mathbb{A} \perp \mathbb{B}$.
13. $(\mathbb{A}, \mathbb{B} - \mathbb{C}) = 0$, d. h. 1. $\mathbb{A} = 0$; 2. $\mathbb{B} = \mathbb{C}$; 3. $\mathbb{A} \perp \mathbb{B} - \mathbb{C}$.

14. Ausmultiplikation und Subtraktion der skalaren Produkte

$$(2\mathfrak{A} - \mathfrak{B}, \mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = 0 \text{ und } (\mathfrak{A} - 2\mathfrak{B}, 2\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = 0 \text{ liefert } 4\mathfrak{A}\mathfrak{B} = -B^2$$

oder $\sphericalangle \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \arccos \left[-\frac{B}{4A} \right]$.

15. Der eine darf um den anderen als Achse eine Schraubenbewegung von wechselnder Ganghöhe und wechselndem Radius ausführen.

16. Die Zeichnung ergibt $(\mathfrak{R} - r) \perp (r - r_1)$, also $(\mathfrak{R} - r, r - r_1) = 0$. Da nun $\varrho^2 = (r - r_1, r - r_1)$, so folgt durch Addition der beiden Gleichungen $(\mathfrak{R} - r_1, r - r_1) = \varrho^2$.

17. $S = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}, \mathfrak{F})$; $\pm \mathfrak{C} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$. Also entweder $S = 0$ oder $S = (2\mathfrak{C}, \mathfrak{F})$.

18. $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = 2a^2 \cos \varphi = -a^2 \sqrt{3}$; $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = 2a^2 \sin \varphi = a^2$.

19. $(\mathfrak{A} + c\mathfrak{B}, \mathfrak{A} + c\mathfrak{B}) = A^2(1 + 4c^2)$; $[\mathfrak{A} + c\mathfrak{B}, \mathfrak{A} + c\mathfrak{B}] = 4cA^2$.

20. \mathfrak{A} liegt mit \mathfrak{B} und \mathfrak{C} in derselben Ebene.

21. $\mathfrak{B} = \text{j}^\circ \cdot (CD - AE)$.

$$\begin{aligned} 22. \mathfrak{D} &= [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{A}\mathfrak{C}] + [\mathfrak{B}\mathfrak{C}] - [\mathfrak{B}\mathfrak{D}] = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B} - \mathfrak{C}] - [\mathfrak{B}, \mathfrak{B} - \mathfrak{C}] \\ &= [\mathfrak{A} - \mathfrak{B}, \mathfrak{B} - \mathfrak{C}]. \end{aligned}$$

23. Aus $[\mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \mathfrak{C} + \mathfrak{D}] = 0$ und $[\mathfrak{A} - \mathfrak{B}, \mathfrak{C} - \mathfrak{D}] = 0$ folgt $[\mathfrak{A}\mathfrak{C}] = -[\mathfrak{B}\mathfrak{D}]$; $[\mathfrak{A}\mathfrak{D}] = -[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$.

24. Da $(r_2 - r_1) \parallel \mathfrak{A}$, so ist $[r_2 - r_1, \mathfrak{A}] = 0$.

25. Die drei Dreiecke sind in ihrer Größe und Normale dargestellt durch $\mathfrak{N}_1 = \frac{1}{2}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$; $\mathfrak{N}_2 = \frac{1}{2}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}]$; $\mathfrak{N}_3 = \frac{1}{2}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$. Hieraus folgt $2(\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2) = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B} + \mathfrak{C}]$. Nach Voraussetzung $\mathfrak{B} + \mathfrak{C} = -\mathfrak{A}$ also $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2$. Man erhält $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_3$. Die drei Dreiecke liegen in derselben Ebene und sind mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ komplanar.

26. Für jeden Körper ist die Summe der Flächenvektoren null, wenn alle Flächennormalen nach außen gerichtet sind. Also $\mathfrak{F} + \frac{1}{2}\{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] + [\mathfrak{B}\mathfrak{C}] + [\mathfrak{C}\mathfrak{D}] + [\mathfrak{D}\mathfrak{A}]\} = 0$ oder $\mathfrak{F} = \frac{1}{2}\{[\mathfrak{B}\mathfrak{A}] + [\mathfrak{C}\mathfrak{B}] + [\mathfrak{D}\mathfrak{C}] + [\mathfrak{A}\mathfrak{D}]\}$.

27. $I = \frac{1}{3} \text{Grundfläche} \times \text{Höhe} = \frac{1}{3}(\mathfrak{F}\mathfrak{G})$.

$$28. I = ([\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{C}) = a^3 \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^3.$$

29. Eine Pyramide mit O als Spitze und $d\mathfrak{F}$ als Grundfläche hat das Volumen $dV = \frac{1}{3}(r d\mathfrak{F})$, also $V = \frac{1}{3} \int (r d\mathfrak{F})$, wenn das Integral über die ganze Fläche \mathfrak{F} erstreckt ist.

$$30. S = \mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}] + \mathfrak{B}[\mathfrak{A}\mathfrak{C}] = 0.$$

$$31. S = \mathfrak{C}[\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{B}] + \mathfrak{C}[[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{D}] = 0.$$

$$32. \mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$

33. $d\mathfrak{k} = \frac{\mu ds}{r^2} [r^0, \mathfrak{S}].$

34. Aus $\mathfrak{A} = i^0 A_x + j^0 A_y + k^0 A_z$ folgt $(i^0 \mathfrak{A}) = A_x; (j^0 \mathfrak{A}) = A_y; (k^0 \mathfrak{A}) = A_z; \text{ also } \mathfrak{B} = \mathfrak{A}.$

35. $\mathfrak{C} = [\mathfrak{B}[\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1]] = [\mathfrak{A} \mathfrak{B}].$

36. $\mathfrak{A} = + i^0; B = 0.$

37. a) $\mathfrak{D} = -\mathfrak{C}(\mathfrak{A} \mathfrak{B});$ b) $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}(\mathfrak{A} \mathfrak{C});$ c) $\mathfrak{D} = 0.$

38. Setzt man $[\mathfrak{A} \mathfrak{B}] = \mathfrak{P},$ so ist $[[\mathfrak{A} \mathfrak{B}][\mathfrak{C} \mathfrak{D}]] = [\mathfrak{P}[\mathfrak{C} \mathfrak{D}]] = \mathfrak{C}(\mathfrak{P} \mathfrak{D}) - \mathfrak{D}(\mathfrak{P} \mathfrak{C});$ $[\mathfrak{C}[[\mathfrak{A} \mathfrak{B}]\mathfrak{D}]] = \mathfrak{P}(\mathfrak{C} \mathfrak{D}) - \mathfrak{D}(\mathfrak{C} \mathfrak{P}),$ also $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\mathfrak{P} \mathfrak{D}) - \mathfrak{P}(\mathfrak{C} \mathfrak{D}) = [\mathfrak{D}[\mathfrak{C} \mathfrak{P}]] = [\mathfrak{D}[\mathfrak{C}[\mathfrak{A} \mathfrak{B}]]].$

39. $\mathfrak{B}_1 \perp \mathfrak{B}_2; \mathfrak{B}_2 = [\mathfrak{A}[\mathfrak{B} \mathfrak{A}]] = \mathfrak{B}(\mathfrak{A} \mathfrak{A}) - \mathfrak{A}(\mathfrak{A} \mathfrak{B}) = \mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1; \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}.$

40. Bezeichnet man den Winkel zwischen \mathfrak{A} und n^0 mit $\alpha,$ so ist der absolute Betrag von $[n^0[\mathfrak{A} n^0]]$ gegeben durch $A \sin \alpha,$ da $[\mathfrak{A} n^0] \perp n^0.$ Also $B = (A \sin \alpha)^2 = [\mathfrak{A} n^0]^2 = [n^0 \mathfrak{A}]^2.$

41. a) $\mathfrak{D}[\mathfrak{A}[\mathfrak{B} \mathfrak{C}]] = \mathfrak{D}[\mathfrak{A} \mathfrak{B}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{D} \mathfrak{A}] = [\mathfrak{B} \mathfrak{C}][\mathfrak{D} \mathfrak{A}].$

b) $\mathfrak{D}[\mathfrak{A}[\mathfrak{B} \mathfrak{C}]] = \mathfrak{D}\{\mathfrak{B}(\mathfrak{A} \mathfrak{C}) - \mathfrak{C}(\mathfrak{A} \mathfrak{B})\} = (\mathfrak{D} \mathfrak{B})(\mathfrak{A} \mathfrak{C}) - (\mathfrak{D} \mathfrak{C})(\mathfrak{A} \mathfrak{B}).$

42. Es ist $[\mathfrak{A}[\mathfrak{B} \mathfrak{C}]] + [\mathfrak{B}[\mathfrak{C} \mathfrak{A}]] + [\mathfrak{C}[\mathfrak{A} \mathfrak{B}]] = 0$ also $\mathfrak{S} = [\mathfrak{C}[\mathfrak{B} \mathfrak{A}]].$

43. Der Vektor $r - r_1$ liegt in der Ebene $E,$ der Vektor $[\mathfrak{A} \mathfrak{B}]$ steht senkrecht auf $E,$ also $(r - r_1, [\mathfrak{A} \mathfrak{B}]) = 0.$

44. $v = v_1 - g w^0 = [w r] - g w^0 = w[w^0 r] - g w^0.$

45. Die Richtung von \mathfrak{A} ist $\mathfrak{A}^0. \mathfrak{A} = A \mathfrak{A}^0; \frac{d\mathfrak{A}}{d\mathfrak{B}} = A \frac{d\mathfrak{A}^0}{d\mathfrak{B}} + \mathfrak{A}^0 \frac{dA}{d\mathfrak{B}}.$ Die Bedingungsgleichung liefert $\mathfrak{A} \parallel \frac{d\mathfrak{A}}{d\mathfrak{B}}$ oder $\mathfrak{A}^0 \parallel \frac{d\mathfrak{A}}{d\mathfrak{B}}$ oder $\frac{d\mathfrak{A}}{d\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}^0 \frac{dA}{d\mathfrak{B}}.$

Der Vergleich mit obiger Gleichung liefert $A \frac{d\mathfrak{A}^0}{d\mathfrak{B}} = 0.$ Also \mathfrak{A}^0 unveränderlich mit $\mathfrak{B}.$

46. $d\mathfrak{A} = -i^0 M \sin \varphi d\varphi + j^0 M \cos \varphi d\varphi. (\mathfrak{A}, d\mathfrak{A}) = 0; \text{ also } \mathfrak{A} \perp d\mathfrak{A}.$

47. $\frac{d(v v)}{dt} = 2(v \frac{dv}{dt}) = 0.$ Also v^2 unabhängig von $t.$ v kann sich nur der Richtung, aber nicht der Größe nach mit t ändern.

48. $dr = t^0 \cdot ds = t^0 \frac{ds}{d\alpha} \cdot d\alpha = t^0 \cdot A \cdot d\alpha. r = r_1 + A \int_{\alpha_1}^{\alpha} t^0 \cdot d\alpha.$

49. Die Bahngeschwindigkeit ist $v = \frac{dr}{dt} = -i^0 r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} + j^0 r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt},$ denn $\frac{dr}{dt} = 0,$ da es sich um den Krümmungsradius handelt.

$\mathfrak{B} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - i^0 \sin \varphi \frac{dv_B}{dt} + j^0 \cos \varphi \cdot \frac{dv_B}{dt}$, wenn v_B die Tangentialgeschwindigkeit bedeutet. Die Summe der beiden letzten Glieder ist ein Vektor \mathfrak{B} , der skalar mit r multipliziert den Wert 0 liefert. Also $\mathfrak{B} \perp r$. Also ist \mathfrak{B} ein Vektor in Richtung der Tangente t^0 . Sein absoluter Betrag ist $\frac{dv_B}{dt}$. Also $\mathfrak{B} = -r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + t^0 \frac{dv_B}{dt}$.

50. Aus $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$ und der gegebenen Gleichung folgt

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = [w\mathbf{r}']. \text{ Unter Benutzung dieser Beziehung folgt}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + [w[w\mathbf{r}']].$$

51. $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, m\mathbf{v} \right] + \left[\mathbf{r}, m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right] = m[\mathbf{v}, \mathbf{v}] + [\mathbf{r}, \mathfrak{R}] = 0$. $\mathbf{u} = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}]$ unabhängig von der Zeit.

52. Aus $L = \frac{1}{2} \Sigma m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2$ und $\bar{L} = \frac{1}{t} \int_0^t L dt$ folgt durch partielle Inte-

$$\text{gration } \bar{L} = \frac{1}{4t} \frac{d(\Sigma m r^2)}{dt} - \frac{1}{2t} \int_0^t \Sigma m r \frac{d^2 r}{dt^2} dt = -\frac{1}{2t} \int_0^t \Sigma (r\mathfrak{R}) dt.$$

53. Da $(a\ b) = 0$, so auch $\left(a \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right) + \left(\mathbf{b} \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right) = A = 0$. Ebenso $B = 0$; $C = 0$.

54. Da $(i^0 i^0) = 1$, so folgt $2 \left(i^0 \frac{d i^0}{dt} \right) = 0$ oder $\frac{d i^0}{dt} \perp i^0$, also in der

yz -Ebene. Man kann setzen $\frac{d i^0}{dt} = b_1 j^0 + c_1 k^0$ entsprechend

$$\frac{d j^0}{dt} = a_1 i^0 + c_2 k^0; \quad \frac{d k^0}{dt} = a_2 i^0 + b_2 j^0. \text{ Hiermit erhält man}$$

$P = a_1 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_2$. Nach der Zeit dt sind die Richtungen i^0, j^0, k^0 umgewandelt in $i_1^0 = i^0 + (b_1 j^0 + c_1 k^0) dt$; $j_1^0 = j^0 + (a_1 i^0 + c_2 k^0) dt$; $k_1^0 = k^0 + (a_2 i^0 + b_2 j^0) dt$. Da diese neuen Vektoren auch aufeinander \perp stehen, so folgt $a_1 = -b_1$; $b_2 = -c_2$; $c_1 = -a_2$ und also $P = 0$.

55. Da $(i^0 j^0) = 0$, so ist $0 = \frac{d(i^0 j^0)}{dt} = i^0 \frac{d j^0}{dt} + j^0 \frac{d i^0}{dt} = i^0 [w_2 j^0]$

+ $j^0 [w_1 i^0] = w_2 [j^0 i^0] + w_1 [i^0 j^0] = k^0 (w_1 - w_2)$. So erhält man $k^0 (w_1 - w_2) = 0$; $i^0 (w_2 - w_3) = 0$; $j^0 (w_3 - w_1) = 0$. Nach 54 folgt,

daß $\frac{d i^0}{dt}, \frac{d j^0}{dt}, \frac{d k^0}{dt}$ in einer Ebene liegen. Das ist nur möglich, wenn

$w_1 \parallel w_2 \parallel w_3$ oder $w_1 = a w_0$; $w_2 = b w_0$; $w_3 = c w_0$. Damit folgt aus den obigen Gleichungen $a = b = c$ und somit $w_1 = w_2 = w_3$.

$$56. \frac{dW}{dt} = \sum m \left[r' \frac{d^2 r'}{dt^2} \right] = \sum m \left[r' \frac{d^2 r}{dt^2} \right] - \sum m \left[r' \frac{d^2 \mathfrak{R}}{dt^2} \right] = \sum m \left[r' \frac{d^2 r}{dt^2} \right] \\ = \frac{dW}{dt} - \sum m \left[\mathfrak{R} \frac{d^2 r}{dt^2} \right].$$

$$57. \text{grad } V = r^0 \frac{dV}{dr}, \text{ also } \mathfrak{R} = -\text{grad } V.$$

$$58. \text{grad } t = \mathfrak{N}_0 \frac{dt}{dh} = \mathfrak{N}_0 (b + 2ch).$$

$$59. \text{grad } (x^n y^m) = x^n \cdot m y^{m-1} \cdot \text{grad } y + y^m \cdot n x^{n-1} \cdot \text{grad } x \\ = n(x+y) x^{n-1} \cdot y^{m-1} \cdot \text{grad } x.$$

$$60. \text{grad } [\mathfrak{N} n^0]^2 = \text{grad } (A^2 \sin^2 \varphi) = A^2 \cos 2\varphi \cdot \text{grad } \varphi.$$

$$61. \text{a) grad } (n^0 \mathfrak{N}) = \mathfrak{N}_0 \frac{d(n^0 \mathfrak{N})}{dA}. \text{ Also } d(n^0 \mathfrak{N}) = \mathfrak{N}_0 \text{grad } (n^0 \mathfrak{N}) dA \\ = \text{grad } (n^0 \mathfrak{N}) \cdot d\mathfrak{N}. \text{ Andererseits } d(n^0 \mathfrak{N}) = (n^0 d\mathfrak{N}). \text{ Da } n^0 \text{ ein Einheitsvektor ist, so mu\ss dasselbe von grad } (n^0 \mathfrak{N}) \text{ gelten. Also grad } (n^0 \mathfrak{N}) \\ = n^0. \text{ b) } \frac{dr}{dr} = r^0 \frac{dr}{dr} + r \frac{dr^0}{dr} = r^0 \text{ oder } dr = r^0 dr, \text{ also grad } (n^0 r) = n^0.$$

$$62. \text{a) grad } r = r^0 \frac{dr}{dr} = r^0; \quad \text{b) grad } \frac{1}{r} = r_0 \frac{d}{dr} \frac{1}{r} = -\frac{r^0}{r^2}; \quad \text{c) grad } \frac{r^2}{2} \\ = r^0 \frac{d}{dr} \frac{r^2}{2} = r \cdot r^0 = r; \quad \text{d) grad } r^n = r^0 \frac{d}{dr} r^n = n r^{n-1} r^0; \quad \text{e) grad } \frac{1}{r^m} \\ = \text{grad } r^{-m} = -m \cdot \frac{r^0}{r^{m+1}}.$$

$$63. \text{grad } [n_0 \mathfrak{N}]^{2p} = \alpha_0 \frac{d[n_0 \mathfrak{N}]^{2p}}{d\alpha} = \alpha_0 p [n_0 \mathfrak{N}]^{2p-2} \cdot \frac{d[n_0 \mathfrak{N}]^2}{d\alpha} \\ = p \cdot [n_0 \mathfrak{N}]^{2p-2} \cdot \text{grad } [n_0 \mathfrak{N}]^2.$$

$$64. \text{grad } f(x) = \alpha_0 \frac{df(x)}{d\alpha} = \alpha_0 \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{d\alpha} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \text{grad } x.$$

$$65. \text{grad } A = r_0 \frac{dA}{dr} \text{ oder } r_0 dr \text{grad } A = dA. \text{ Nach 61 b) ist } r^0 dr = dr.$$

Folglich $\text{grad } A \cdot dr = dA$. Somit a) $\mathfrak{S}_1 = A_2 - A_1$; b) $\mathfrak{S}_2 = 0$.

$$66. \text{Da grad } p = \frac{\sum p d\mathfrak{F}}{dV}, \text{ so ist } \int p d\mathfrak{F} = \int \text{grad } p dV \text{ oder } \int (n^0 r) d\mathfrak{F} \\ = \int \text{grad } (n^0 r) dV, \text{ oder nach (61 b) } \int (n^0 r) d\mathfrak{F} = n^0 V.$$

67. Setze $r = r_1 + r_2$, wobei r_1 den Radiusvektor vom Mittelpunkt des Zylinders aus bedeutet und r_2 ein fester Vektor ist. Dann ist $\mathfrak{S} = \oint r_1 (n^0 d\mathfrak{F})$. Für alle Elemente des Mantels ist $(n^0 d\mathfrak{F}) = 0$. Für die beiden Endflächen des Zylinders sind die beiden Teilintegrale wegen der

symmetrischen Lage aller r_1 parallel der Zylinderachse. Also $\mathfrak{S} = n^0 \cdot I$. Nun ist $(n^0 \mathfrak{S}) = n^0 \int d\mathfrak{F} \cdot (n^0 r)$, oder nach (66) $(n^0 \mathfrak{S}) = V$; setzt man hierein $\mathfrak{S} = n^0 I$, so findet man $I = V$ und somit $\mathfrak{S} = n^0 V$.

$$68. (n+m) \operatorname{div} \mathfrak{B}.$$

$$69. \quad = \operatorname{div} (i^0 a) = \frac{da}{dx}.$$

$$70. \operatorname{div} (n^0 A) = n^0 \operatorname{grad} A.$$

$$71. \operatorname{div} \mathfrak{B}^5 = \operatorname{div} (B^4 \cdot \mathfrak{B}) = \mathfrak{B} \operatorname{grad} B^4 + B^4 \operatorname{div} \mathfrak{B} = 4\mathfrak{B} B^3 \operatorname{grad} B + B^4 \operatorname{div} \mathfrak{B}.$$

$$72. \operatorname{div} (A \cdot \mathfrak{B}^5) = A \cdot \operatorname{div} \mathfrak{B}^5 + B^6 = B^6 + A B^4 \operatorname{div} \mathfrak{B} + 4 A \mathfrak{B} B^3 \operatorname{grad} B.$$

73. Da $\operatorname{div} (n^0 B) = n^0 \operatorname{grad} B$ und da $\operatorname{grad} B = \operatorname{grad} (n^0 r) = n^0$ nach Aufg. 61 b ist, so folgt $\operatorname{div} \{n^0 (n^0 r)\} = 1$.

$$74. \operatorname{div} (r \mathfrak{A}) = r \operatorname{div} \mathfrak{A} + \mathfrak{A} \operatorname{grad} r = r \operatorname{div} \mathfrak{A} + (\mathfrak{A} r^0) = r \operatorname{div} \mathfrak{A}.$$

75. Für einen Kegelstumpf der Länge dr und vom Öffnungswinkel dw , dessen Mantelfläche $\parallel r$ verläuft, ist $\operatorname{div} r = \frac{\Sigma (r d\mathfrak{F})}{dV} = \frac{(r+dr)^3 - r^3}{r^2 dr} = 3$.

$$2. \text{ Lösung: } r = i^0 x + j^0 y + k^0 z; \operatorname{div} r = \frac{dr_x}{dx} + \frac{dr_y}{dy} + \frac{dr_z}{dz} = 3.$$

$$76. \operatorname{div} r = \operatorname{div} (r^0 r) = r^0 \operatorname{grad} r + r \operatorname{div} r^0. \quad \operatorname{div} r^0 = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}.$$

$$77. a) \operatorname{div} \left(\frac{r}{r^3} \right) = r \operatorname{grad} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \operatorname{div} r \quad \text{oder nach 62 e) und 75 ist} \\ = -\frac{3r}{r^4} + \frac{3}{r^3} = 0; \quad b) \operatorname{div} (r^n r) = r^n \operatorname{div} r + r \cdot \operatorname{grad} r^n \quad \text{oder nach 75} \\ \text{und 62 d) } = 3r^n + n r^{n-1} r = r^n (3+n).$$

$$78. \operatorname{div} \{r f(r)\} = r \operatorname{grad} f(r) + f(r) \operatorname{div} r \quad \text{oder nach 64 und 75} \\ = r \cdot \frac{df(r)}{dr} + 3f(r).$$

$$79. \operatorname{div} [n^0 [r n^0]] = \operatorname{div} \{r - n^0 (n^0 r)\} = \operatorname{div} r - n^0 \operatorname{grad} (n^0 r) \quad (\text{oder mit 75} \\ \text{und 61 b) } = 3 - 1 = 2.$$

$$80. \int \operatorname{div} v dV = \int (d\mathfrak{F} v) = 2R^2 \pi v, \quad \text{wenn } R \text{ der Radius des Zylinders} \\ \text{ist.} \quad \overline{\operatorname{div} v} = \frac{2R^2 \pi v}{R^2 \pi l} = \frac{2v}{l}.$$

$$81. \int \operatorname{div} \mathfrak{E} dV = \oint (\mathfrak{E} d\mathfrak{F}). \quad \text{Für eine Kugel vom Radius } r \text{ ist } (\mathfrak{E} d\mathfrak{F}) \\ = \frac{e}{r^2} r^2 dw = e dw. \quad \text{Also } \int \operatorname{div} \mathfrak{E} dV = 4\pi e.$$

$$82. \operatorname{rot} (\mathfrak{A} + i^0 B) = [\nabla (\mathfrak{A} + i^0 B)] = [\nabla \mathfrak{A}] - [i^0 \nabla B] = \operatorname{rot} \mathfrak{A}.$$

$$83. \operatorname{rot} (A n^0) = [\nabla (A n^0)] = A [\nabla n^0] - [n^0 \nabla A] = [\operatorname{grad} A, n^0] = 0.$$

$$84. \operatorname{rot} (n^0 p) = [\nabla n^0 p] = -[n^0 \nabla p]. \quad \text{Also } [n^0 \operatorname{grad} p] = -\operatorname{rot} (n^0 p).$$

85. Da $\text{grad } r = r^0$, so ist $\text{grad } \frac{1}{2} r^2 = r$. Bildet man von beiden Seiten die Rotation, so ist $\text{rot } r = \text{rot grad } \frac{1}{2} r^2 = 0$.

86. Nach dem Stokesschen Satz ist $\int (\text{rot } \mathfrak{A} d\mathfrak{F}) = \int (\mathfrak{A} dI)$, also $\int (\mathfrak{A} dI) = 0$.

$$87. (\nabla \mathfrak{A}) \mathfrak{B} = (\mathfrak{A} \nabla) \mathfrak{B} + \mathfrak{B} (\nabla \mathfrak{A}) = A \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \mathfrak{A}} + \mathfrak{B} \text{div } \mathfrak{A} = \mathfrak{B} \text{div } \mathfrak{A}.$$

$$88. (\mathfrak{A} \nabla) \mathfrak{B} = A \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \mathfrak{A}}, \text{ also a) } (n \nabla) r = n \cdot \frac{\partial r}{\partial n} = n, \text{ da } \frac{\partial r}{\partial n} = n^0;$$

$$\text{b) } (r^0 \nabla) \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial r}.$$

$$89. [\nabla \mathfrak{A}] \mathfrak{B} = \mathfrak{B} [\nabla \mathfrak{A}] - [\mathfrak{A} \nabla] \mathfrak{B} = \mathfrak{B} [\nabla \mathfrak{A}] - \mathfrak{A} [\nabla \mathfrak{B}] \\ = \mathfrak{B} \text{rot } \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \text{rot } \mathfrak{B}.$$

$$90. [\mathfrak{A} \nabla] r = \mathfrak{A} [\nabla r] = \mathfrak{A} \text{rot } r = 0, \text{ vgl. 85.}$$

$$91. (dn \nabla) \mathfrak{A} = dn \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial n} = \partial \mathfrak{A}. \text{ Also } J_1 = \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1; J_2 = 0.$$

$$92. \text{ Setze } P = [n \mathfrak{A}]^2 \text{ und bilde } dP = 2 [n \mathfrak{A}] [n d\mathfrak{A}] = 2 d\mathfrak{A} [[n \mathfrak{A}] n] \\ = 2 d\mathfrak{A} \{ \mathfrak{A} (n \cdot n) - n (n \mathfrak{A}) \} = 2 d\mathfrak{A} \{ \mathfrak{A} - n (n \mathfrak{A}) \}. \text{ Nun ist } \text{grad } P \\ = r^0 \frac{dP}{dr} \text{ oder mit Lösung 61 b) } dP = (\text{grad } P, dr). \text{ Also } (\text{grad } [n r]^2, dr) \\ = 2 (r - n (n r), dr) \text{ oder, da } dr \text{ beliebig, } \text{grad } [n r]^2 = 2r - 2n (n r).$$

$$93. \text{grad } [n r]^2 = x [n r]^{x-2} \{ r - n (n r) \}.$$

$$94. [[\nabla \mathfrak{A}] \mathfrak{B}] = (\nabla \mathfrak{B}) \mathfrak{A} - \nabla (\mathfrak{A} \mathfrak{B}) = \mathfrak{A} (\nabla \mathfrak{B}) + (\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{A} - \text{grad } \mathfrak{A} \mathfrak{B} \\ = \mathfrak{A} \text{div } \mathfrak{B} + (\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{A}.$$

$$95. \text{ a) } [[\mathfrak{A} \nabla] \mathfrak{B}] = \nabla (\mathfrak{A} \mathfrak{B}) - \mathfrak{A} (\nabla \mathfrak{B}) \text{ in } \nabla (\mathfrak{A} \mathfrak{B}) \text{ ist } \mathfrak{A} \text{ als konstant} \\ \text{anzusehen. Nun ist allgemein } \nabla (\mathfrak{A} \mathfrak{B}) = [\mathfrak{A} \text{rot } \mathfrak{B}] + [\mathfrak{B} \text{rot } \mathfrak{A}] \\ + (\mathfrak{A} \nabla) \mathfrak{B} + (\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{A}. \text{ Also } [[\mathfrak{A} \nabla] \mathfrak{B}] = [\mathfrak{A} \text{rot } \mathfrak{B}] + (\mathfrak{A} \nabla) \mathfrak{B} - \mathfrak{A} \text{div } \mathfrak{B}.$$

$$\text{b) Mittels (75) (85) (88) } [[\mathfrak{A} \nabla] r] = -2\mathfrak{A}.$$

$$96. \text{div } [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] = \nabla [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] = [\nabla \mathfrak{A}] \mathfrak{B} = \mathfrak{B} [\nabla \mathfrak{A}] - [\mathfrak{A} \nabla] \mathfrak{B} \\ = \mathfrak{B} [\nabla \mathfrak{A}] - \mathfrak{A} [\nabla \mathfrak{B}] = \mathfrak{B} \text{rot } \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \text{rot } \mathfrak{B}.$$

$$97. \text{div } [n r] = \nabla [n r] = -n [\nabla r] = -n \text{rot } r = (\text{nach 85}) 0.$$

$$98. \text{div } [n^0 [r n^0]] = \text{div } \{ r - n^0 (n^0 r) \} = \text{div } r - \text{div } n^0 (n^0 r) \text{ oder nach} \\ (73) \text{ und (75)} = 3 - 1 = 2.$$

$$99. \text{rot } (A \mathfrak{B}) = [\nabla A \mathfrak{B}] = [A \nabla \mathfrak{B}] - [\mathfrak{B} \nabla A] = A [\nabla \mathfrak{B}] - [\mathfrak{B} \nabla A] \\ = A \text{rot } \mathfrak{B} - [\mathfrak{B} \text{grad } A].$$

$$100. \text{rot } (r^n r) = r^n \text{rot } r - [r \text{grad } r^n] \text{ oder nach (62 d) und (85)} \\ = -n r^{n-1} [r r^0] = 0.$$

101. Nach (99) ist $\text{rot}(\mathfrak{n}(\mathfrak{r}\mathfrak{n})) = (\mathfrak{r}\mathfrak{n})\text{rot}\mathfrak{n} - [\mathfrak{n}, \text{grad}(\mathfrak{r}\mathfrak{n})]$, es ist $\text{rot}\mathfrak{n} = 0$ und nach der allgemein gültigen Zerlegung von $\text{grad}(\mathfrak{r}\mathfrak{n})$ (vgl. Lösung 95) und nach (85) (88) ist $\text{rot}(\mathfrak{n}(\mathfrak{r}\mathfrak{n})) = 0$.
102. a) Da $[\mathfrak{n}[\mathfrak{A}\mathfrak{n}]] = \mathfrak{A} - \mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{n})$ und nach (99) $\text{rot}(\mathfrak{A}\mathfrak{n})\mathfrak{n} = (\mathfrak{A}\mathfrak{n})\text{rot}\mathfrak{n} - [\mathfrak{n}, \text{grad}(\mathfrak{A}\mathfrak{n})] = [\text{grad}(\mathfrak{A}\mathfrak{n}), \mathfrak{n}]$ und endlich $\text{grad}(\mathfrak{A}\mathfrak{n}) = [\mathfrak{A}\text{rot}\mathfrak{n}] + [\mathfrak{n}\text{rot}\mathfrak{A}] + (\mathfrak{A}\Delta)\mathfrak{n} + (\mathfrak{n}\nabla)\mathfrak{A} = [\mathfrak{n}\text{rot}\mathfrak{A}] + (\mathfrak{n}\nabla)\mathfrak{A}$, so ist $\text{rot}[\mathfrak{n}[\mathfrak{A}\mathfrak{n}]] = \text{rot}\mathfrak{A} + [\mathfrak{n}, [\mathfrak{n}\text{rot}\mathfrak{A}] + (\mathfrak{n}\nabla)\mathfrak{A}]$; b) für $\mathfrak{A} = \mathfrak{r}$ findet man mit (85) und (88) $\text{rot}[\mathfrak{n}[\mathfrak{r}\mathfrak{n}]] = 0$.
103. $\text{rot}[\mathfrak{n}\mathfrak{r}] = [\nabla[\mathfrak{n}\mathfrak{r}]] = \mathfrak{n}(\nabla\mathfrak{r}) - (\mathfrak{n}\nabla)\mathfrak{r}$ oder mit (75) und (88) $= 3\mathfrak{n} - \mathfrak{n} = 2\mathfrak{n}$.
104. Nach Voraussetzung $\mathfrak{A} = [d\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$, wenn \mathfrak{B} ein räumlich konstanter Vektor ist. $\text{rot}\mathfrak{A} = [\nabla[d\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]] = -\mathfrak{B}(\nabla d\mathfrak{A})$
 $\mathfrak{A}\text{rot}\mathfrak{A} = [\mathfrak{B}d\mathfrak{A}]\mathfrak{B}(\nabla d\mathfrak{A}) = (\nabla d\mathfrak{A}) \cdot d\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{B}] = 0$.
105. $\text{rot}\mathfrak{v} = \text{rot}[\mathfrak{w}\mathfrak{r}] = [\nabla[\mathfrak{w}\mathfrak{r}]] = \mathfrak{w}(\nabla\mathfrak{r}) - (\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{r}$ oder nach (75) und (88) $\text{rot}\mathfrak{v} = 3\mathfrak{w} - \mathfrak{w} = 2\mathfrak{w}$. $\mathfrak{v}\text{rot}\mathfrak{v} = 2\mathfrak{w}\mathfrak{v}' + 2\mathfrak{w}[\mathfrak{w}\mathfrak{r}] = 2\mathfrak{w}\mathfrak{v}' + 2\mathfrak{r}[\mathfrak{w}\mathfrak{w}] = 2\mathfrak{w}\mathfrak{v}'$.
106. $\text{grad}t = \mathfrak{n}^0 \frac{dt}{dn} = \mathfrak{A}$; $\mathfrak{n}^0 \text{grad}t = A_n = \frac{dt}{dn}$; $\text{div}\mathfrak{A} = \frac{dA_n}{dn} = \frac{d^2t}{dn^2}$.
107. $\text{div grad} \frac{1}{r} = \nabla \nabla \frac{1}{r} = \Delta \frac{1}{r} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} = 0$.
- Da $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$ und $\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$ usw.
108. $\text{div}(A\mathfrak{B}) = A(\nabla\mathfrak{B}) + \mathfrak{B}(\nabla A)$; $\nabla^2(A\mathfrak{B}) = (\nabla A)(\nabla\mathfrak{B}) + A(\nabla^2\mathfrak{B}) + (\nabla\mathfrak{B})(\nabla A) + \mathfrak{B}(\nabla^2 A) = A(\nabla^2\mathfrak{B}) + \mathfrak{B}(\nabla^2 A) + 2(\nabla A) \cdot (\nabla\mathfrak{B})$.
109. $\nabla^2(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \frac{\partial^2(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{\partial z^2}$. Nun ist $\frac{\partial(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{\partial \omega} = \mathfrak{A} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \omega} + \mathfrak{B} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \omega}$; $\frac{\partial^2(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{\partial \omega^2} = \mathfrak{A} \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial \omega^2} + \mathfrak{B} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial \omega^2} + 2 \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \omega} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \omega}$.
 Da ferner $(\nabla\mathfrak{A}) \cdot (\nabla\mathfrak{B}) = (i^0 \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} + j^0 \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial y} + k^0 \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z}) \cdot (i^0 \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} + j^0 \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} + k^0 \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}) = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial y} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}$,
 so ist $\nabla^2(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}(\nabla^2\mathfrak{B}) + \mathfrak{B}(\nabla^2\mathfrak{A}) + 2(\nabla\mathfrak{A})(\nabla\mathfrak{B})$.
110. $\text{rot rot}\mathfrak{A} = [\nabla[\nabla\mathfrak{A}]] = \nabla(\nabla\mathfrak{A}) - (\nabla\nabla)\mathfrak{A} = \text{grad div}\mathfrak{A} - \Delta A$

Mechanik.

I. Punktmechanik.

1. **Bremung bei gegebenem Auslauf.** a) Mit $K = \text{konst.}$ folgt aus

$$m \frac{dv}{dt} = -K, \quad ds = v dt$$

durch Integration von 0 bis s_0 bzw. von v bis v_0 :

$$s_0 = \frac{m v_0^2}{2K}, \quad \text{daraus} \quad \underline{K = \frac{m v_0^2}{2s_0}}.$$

- b) Mit $K = \frac{1}{2} K_1 \left(1 + \frac{v}{v_0}\right)$ folgt ebenso

$$s_0 = \frac{2 m v_0^2}{K_1} (1 - \log \text{nat } 2), \quad \text{also} \quad \underline{K_1 = 1,23 \frac{m v_0^2}{2s_0}}.$$

2. **Freier Fall aus großer Höhe.** Gleichung der lebendigen Kraft:

$$\frac{m v^2}{2} = \int_x^h m g \frac{r^2 dx}{(x+r)^2} = \frac{m g r^2}{r+h} \frac{h-x}{r+x};$$

woraus für $x = 0$ die Endgeschwindigkeit v_0 und mit $dx = v dt$ die Fallzeit t_0 :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{h}{r}}}, \quad t_0 = \int_0^h \frac{\sqrt{h+r}}{r\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{r+x}{h-x}} dx$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \frac{h}{r}}{2g}} \left[\sqrt{h} + \frac{\sqrt{r}}{2} \left(1 + \frac{h}{r}\right) \arccos \frac{1 - \frac{h}{r}}{1 + \frac{h}{r}} \right].$$

Der zweite Summand in der eckigen Klammer geht mit $\lim h:r = 0$ gegen \sqrt{h} .

3. **Radiale Bewegung auf einer rotierenden Scheibe.** Polarkoordinaten r, ϑ , Geschwindigkeiten $\dot{r}, \dot{\vartheta} = \omega$, Beschleunigungen $\ddot{r} - r\omega^2, 2\dot{r}\omega$.

- a) Aus den Bewegungsgleichungen $\ddot{r} - r\omega^2 = 0, m2\dot{r}\omega = N$ folgt

$$\underline{r = \frac{r_0}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}), \quad \dot{r} = \frac{r_0 \omega}{2} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}).}$$

¹⁾ Mit über einen Buchstaben gesetzten Punkten bezeichnen wir die Differentiation nach der Zeit.

b) Mit φ als Reibungswinkel folgt aus $m(\dot{r} - r\omega^2) = -\operatorname{tg} \varphi \cdot N$, $m2\dot{r}\omega = N$ durch Elimination des Normaldruckes $\dot{r} + 2\operatorname{tg} \varphi \cdot \omega \dot{r} - r\omega^2 = 0$, woraus

$$r = \frac{r_0}{2} \left[(1 + \sin \varphi) e^{\omega t \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi}} + (1 - \sin \varphi) e^{-\omega t \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi}} \right],$$

$$\dot{r} = \frac{r_0 \omega}{2} \cos \varphi \left[e^{\omega t \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi}} - e^{-\omega t \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi}} \right]$$

4. **Cykloidenpendel.** Gleichung der lebendigen Kraft $v^2 = 2g(y_0 - y)$ gibt wegen $y = 2a \sin^2 \tau$ für die Vertikalkomponente von v :

$$v \sin \tau = \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{y(y_0 - y)},$$

woraus durch Integration mit $y = y_0$ für $t = 0$:

$$y = \frac{y_0}{2} \left[1 + \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t \right],$$

d. h. y ist exakt periodisch in t mit von y_0 unabhängiger Periode $2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$.

5. **Gerade als schnellste Verbindung.** Wenn im Hodographen $oa \parallel AB$, $ob \parallel AC$, $oc \parallel CB$, so sind die Zeiten für das Zurücklegen der Wege

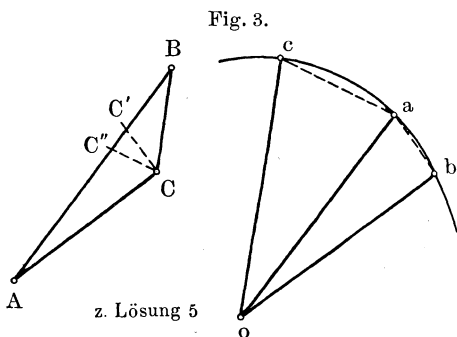


Fig. 3.

AB , AC , CB beziehentlich $AB:oa$, $AC:ob$, $CB:oc$. Zieht man $CC' \parallel ba$, $CC'' \parallel ac$, so werden die beiden letzteren Zeiten auch durch $AC':oa$ bzw. $C''B:oa$ dargestellt. Die Zeit für den gebrochenen Weg ACB verhält sich also zu der für den direkten AB wie $AC' + C''B$ zu AB , ist somit dann größer als die letztere,

wenn C'' vor C' auf AB liegt. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn der Hodograph gegen seinen Anfangspunkt v zu gekrümmt ist. — Beim Flugzeug ist der Hodograph ein Kreis vom Radius c , dessen Zentrum um w gegen v verschoben ist. Ist $c > w$ oder läßt man im anderen Falle allein die größere der beiden in einer Richtung möglichen Geschwindigkeiten gelten, so ist die Bedingung immer erfüllt.

6. **Fallbewegung längs einer Schraubenlinie.** Wie auf der schiefen Ebene von der Neigung $\operatorname{tg} \alpha = h:2r\pi$ und dem Reibungswinkel φ ist die kon-

stante Fallbeschleunigung $g \sin \alpha - \operatorname{tg} \varphi \cdot g \cos \alpha = g \sin (\alpha - \varphi) : \cos \varphi$,
daher Fallzeit für den Weg $\sqrt{h^2 + 4 r^2 \pi^2}$:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cos \varphi}{g \sin (\alpha - \varphi)} \sqrt{h^2 + 4 r^2 \pi^2}}.$$

Der Normaldruck $mg \cos \alpha$ liegt in der Hauptnormalen, also in dem Lot vom bewegten Punkt auf die Achse der Schraube.

7. **Kräftefrei Bewegung eines Hantels.** Der Schwerpunkt bewegt sich, wie wenn er die Masse $m_1 + m_2$ besäße und alle Kräfte in ihm angriffen, also bei Kräftefreiheit geradlinig gleichförmig. Die Komponenten der Bewegungsgröße relativ gegen den Schwerpunkt, bezogen auf zwei durch ihn gehende, zueinander und zu $m_1 m_2$ senkrechte Achsen x, y sind $(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \omega_x$ bzw. $(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \omega_y$, wenn r_1, r_2 die Abstände der Massen vom Schwerpunkt und ω_x, ω_y die Komponenten der Drehgeschwindigkeit. Der Impulsvektor liegt daher in der Drehachse und ändert seine Richtung im Raum durch die Drehung nicht, woraus die Bewegungsgleichungen

$$\underline{M_x = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \dot{\omega}_x}, \quad \underline{M_y = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \dot{\omega}_y}.$$

Mit $M_x = M_y = 0$ bleiben ω_x, ω_y konstant, d. h. die Massen beschreiben relativ gegen den Schwerpunkt Kreise mit den Radien r_1, r_2 um eine der Richtung nach konstante, durch den Schwerpunkt senkrecht zu $m_1 m_2$ gehende Achse.

8. **Anziehung umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung.**

Aus den Bewegungsgleichungen $r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi} = 0$, $\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 = -\frac{k^2}{r^3}$ folgt durch Integration

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}, \quad \dot{r}^2 = C - \frac{c^2 - k^2}{r^2}.$$

Kreisbewegung verlangt $c = k$. Bei Erhöhung von c auf $2k : \sqrt{3}$ wird, weil $\dot{r} = 0$ bleibt, $C = k^2 : 3 r_0^2$ und man gewinnt aus

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{c}{r \sqrt{C r^2 - (c^2 - k^2)}} = \frac{2 r_0}{r \sqrt{r^2 - r_0^2}}$$

durch Integration die Polargleichung $r \cos \frac{\varphi}{2} = r_0$ der Bahnkurve.

9. **Schiefer Wurf bei quadratischem Luftwiderstandsgesetz.** Ist u die Horizontalgeschwindigkeit, ϑ der Bahnwinkel gegen die Horizontale, so ist $u d\vartheta : \cos \vartheta dt$ die Zentripetalbeschleunigung, und aus den Bewegungsgleichungen

$$\frac{du}{dt} = -\frac{k}{m} \frac{u^2}{\cos \vartheta}, \quad \frac{u d\vartheta}{\cos \vartheta dt} = g \cos \vartheta$$

folgt durch Division

$$\frac{du}{u^3} = -\frac{k}{mg} \sqrt{1+p^2} dp,$$

woraus durch Integration $u \sqrt{1+P} = u_0$ mit

$$P = \frac{k u_0^2}{mg} [p \sqrt{1+p^2} - \log \text{nat} |\sqrt{1+p^2} - p|],$$

und schließlich die gesuchte Parameterdarstellung:

$$\underline{x = \frac{u_0^2}{g} \int_0^p \frac{dp}{1+P}, \quad y = \frac{u_0^2}{g} \int_0^p \frac{p dp}{1+P}, \quad t = \frac{u_0^2}{g} \int_0^p \frac{dp}{\sqrt{1+P}}}.$$

10. **Schwingungen des (mathematischen) Doppelpendels.** Die Spannungen im ersten bzw. zweiten Fadenstück sind (bei kleinen Ausschlägen y_1, y_2) $g(m_1 + m_2)$ bzw. $g m_2$, daher die Bewegungsgleichungen

$$m_1 \ddot{y}_1 = -g(m_1 + m_2) \frac{y_1}{l_1} + g m_2 \frac{y_2 - y_1}{l_2}, \quad m_2 \ddot{y}_2 = -g m_2 \frac{y_2 - y_1}{l_2}.$$

Die Integrale haben die Form (mit A, B, φ, ψ als Konstanten):

$$\underline{y_1 = A_1 \sin(\alpha' t + \varphi) + B_1 \sin(\alpha'' t + \psi),}$$

$$\underline{y_2 = A_2 \sin(\alpha' t + \varphi) + B_2 \sin(\alpha'' t + \psi),}$$

wo α'^2 und α''^2 die beiden Wurzeln von

$$\alpha^4 - g \alpha^2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) + \frac{g^2}{l_1 l_2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = 0.$$

Wird $m_2 = \mu m_1$, $l_2 = l_1(1 + \lambda)$ bei kleinem μ und λ , so gibt diese Gleichung in erster Näherung, wenn λ und μ gegen $\sqrt{\mu}$ vernachlässigt werden,

$$\alpha = \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\mu}\right),$$

woraus durch Einsetzen und Umformen:

$$\underline{y_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + 2 A_1 B_1 \cos\left(\varphi - \psi + \sqrt{\frac{\mu g}{l}} t\right)} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \vartheta\right)}$$

und analog y_2 ; das sind Schwingungen von periodisch veränderlicher Amplitude (Schwebungen) mit der Schwingungszeit $2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ und der Schwebungsperiode $2\pi \sqrt{\frac{l}{\mu g}}$.

11. **Schwingungen des n-fachen (mathematischen) Pendels.** Die Spannungen im k -ten bzw. $(k+1)$ -ten Fadenstück sind $g(m_k + m_{k+1} + \dots + m_n)$ bzw. $g(m_{k+1} + m_{k+2} + \dots + m_n)$, daher die Bewegungsgleichungen:

$$m_k \ddot{y}_k = g(m_{k+1} + m_{k+2} \cdots + m_n) \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{l_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{l_{k-1}} \right) - g m_k \frac{y_k - y_{k-1}}{l_{k-1}}.$$

Geht $m_k: l_k$ gegen $\mu(x)$, und schreibt man $\int_x^L \mu(x) dx = M(x)$, so geht dies über mit $l_k = \text{konst.}$ in

$$\underline{\underline{\mu(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g M(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - g \mu(x) \frac{\partial y}{\partial x}}}$$

12. **Konisches Pendel.** Seien z, r die Projektionen des Fadens auf die Vertikale bzw. die Horizontalebene, ϑ Winkel zwischen Faden und Vertikalen, φ zwischen Horizontalprojektion und einer festen Richtung der Ebene, $r = l \sin \vartheta$, $z = l \cos \vartheta$, endlich S die Fadenspannung, so folgt aus den Bewegungsgleichungen

$$m(r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) = 0, \quad m(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) = -S \sin \vartheta, \quad m \ddot{z} = mg - S \cos \vartheta,$$

durch Integration der ersten und Elimination von S aus den beiden anderen:

$$r^2 \dot{\varphi} = c, \quad l \ddot{\vartheta} - \frac{c^2 \cos \vartheta}{l^3 \sin^3 \vartheta} + g \sin \vartheta = 0.$$

Mithin Kreisbewegung mit $\dot{\vartheta} = 0, \dot{\varphi} = \text{konst.}$, bei $v_0^2 = \frac{c^2}{r^2} = lg \frac{\sin^2 \vartheta_0}{\cos \vartheta_0}$.

Setzt man $\vartheta = \vartheta_0 + \delta$, wo δ klein, so entsteht aus der zweiten Differentialgleichung

$$\ddot{\delta} + \frac{g(1 + 3 \cos^2 \vartheta_0)}{l \cos \vartheta_0} \delta = 0,$$

d. h. das Pendel schwingt um die Kreisbahn mit der

$$\underline{\underline{\text{Periode } 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sqrt{\frac{\cos \vartheta_0}{1 + 3 \cos^2 \vartheta_0}}}}$$

wobei die Amplitude der Schwingung durch die Anfangsbedingung

$$\alpha_0 - \frac{\pi}{2} = \frac{\dot{r}}{v_0} = \frac{l \cos \vartheta_0 \cdot \dot{\delta}_0}{v_0}$$

gegeben ist.

13. **Freier Fall unter Einfluß der Erddrehung.** Unter der geogr. Breite φ hat die Coriolisbeschleunigung, wenn ω die Drehgeschwindigkeit der Erde, die Größe $2v\omega \cos \varphi = 2gt\omega \cos \varphi$ und die Ost-West-Richtung, wenn zunächst gt als Größe und die Vertikale als Richtung der Fallgeschwindigkeit gilt. Für die Koordinate x nach Westen gilt also

$$\underline{\underline{\ddot{x} + 2gt\omega \cos \varphi = 0, \quad x = -\frac{gt^3}{3} \omega \cos \varphi = -0,0232 t^3 \cos \varphi = -1,5 \text{ cm.}}}$$

Bei Luftwiderstand ist die Ostabweichung allgemeiner

$$x = 2 \omega \cos \varphi \int_0^t dt \int_0^t v dt = 2 \omega \cos \varphi \int_0^t s dt,$$

also für gleiche Falldauer t kleiner, da s kleiner ist.

14. **Foucaultsches Pendel.** Die Rotationsgeschwindigkeit hat die x - y - z -Komponenten $-\omega \cos \varphi$, 0 , $\omega \sin \varphi$, woraus die Komponenten der Coriolisbeschleunigung $-2\omega \dot{y} \sin \varphi$ und $2\omega (\dot{z} \cos \varphi + \dot{x} \sin \varphi)$. Integration unter den angenommenen Bedingungen gibt

$$x = A (\cos \alpha' t + \cos \alpha'' t), \quad y = -A (\sin \alpha' t - \sin \alpha'' t),$$

wobei α' , α'' die Wurzeln von

$$\left(\frac{g}{l} - \alpha^2\right)^2 = (2\omega \sin \varphi)^2 \alpha^2, \quad \alpha', \alpha'' = \sqrt{\frac{g}{l}} \pm \omega \sin \varphi.$$

In einem Koordinatensystem, das mit der Drehgeschwindigkeit $\varepsilon = \omega \sin \varphi$ umläuft, ist

$$\xi = x \cos \varepsilon t - y \sin \varepsilon t = A \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t, \quad \eta = -x \sin \varepsilon t + y \cos \varepsilon t = 0,$$

das ist eine harmonische Schwingung in der ξ -Richtung.

15. **Tautochronie einer speziellen Bewegungsform.** Sei etwa beim Pendel x der Ausschlag, λ die Dämpfungskonstante, x_0 der Anfangswert von x , dann ist

$$\ddot{x} = -g \frac{x}{l} - \lambda \dot{x}, \quad x = \frac{x_0}{\alpha'' - \alpha'} [\alpha'' e^{\alpha' t} - \alpha' e^{\alpha'' t}],$$

wo α' , α'' Wurzeln von $\alpha^2 + \lambda \alpha + \frac{g}{l} = 0$, und die Zeit t bis zur Erreichung von $x = 0$ ist

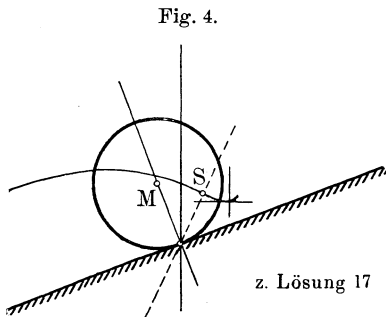
$$t = \frac{1}{\alpha' - \alpha''} \log \text{nat} \frac{\alpha'}{\alpha''}$$

unabhängig von x_0 .

II. Starrer Körper.

16. **Schwerpunktsbestimmung für einen Stab oder eine Scheibe.** Der Stab haftet am Auflager 1, während 2 unter ihm hinweggleitet, solange das Produkt Reibungszahl \times Auflagerdruck für 2 kleiner ist als für 1. Wenn sich aber 2 dem Schwerpunkt nähert, sinkt der Normaldruck in 1 bis null, also muß vorher Gleiten bei 1 eintreten usw. Im Falle der Scheibe kann die Verbindungsgerade zweier Auflagerpunkte nicht unter dem Schwerpunkt hinweggleiten, da der Haftdruck am dritten Auflager dabei bis 0 sinken würde. Die Auflagerpunkte können daher nirgends anders zusammentreffen als unter dem Schwerpunkt.

17. **Aufwärtsrollen unter dem Einfluß der Schwere.** Sobald der Schwerpunkt, im Querschnitt gesehen, in dem Kreissegment bergseitig der durch den Berührungspunkt gezogenen Vertikalen liegt. Denn da der Berührungspunkt beim Rollen Momentanzentrum, seine Verbindung mit dem Schwerpunkt Bewegungsnormale für diesen ist, so senkt sich bei der angegebenen Lage der Schwerpunkt beim Aufwärtsrollen. Die (verkürzte) Cykloide, die der Schwerpunkt beim Abrollen des Zylinders längs der geneigten Führung beschreibt, hat eben periodisch wiederkehrende Minima.



18. **Beschleunigungsfreie Punkte bei ebener Bewegung.** Sind x, y die Koordinaten eines Punktes im bewegten System, ξ_0, η_0, φ die Koordinaten des Anfangspunktes und die Neigung der x -Achse von einem festen System ξ, η aus gemessen, so hat man die Gleichungen

$$\xi = \xi_0 + x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad \eta = \eta_0 + x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

zweimal zu differenzieren und erhält a) für das Verschwinden der Tangentialbeschleunigung

$$\underline{0 = \dot{\xi} \ddot{\xi} + \dot{\eta} \ddot{\eta} = \dot{\varphi} \dot{\varphi} (x^2 + y^2) + \text{lineare Glieder in } x, y;$$

b) für das Verschwinden der Zentripetalbeschleunigung

$$\underline{0 = \dot{\xi} \ddot{\eta} - \ddot{\xi} \dot{\eta} = \dot{\varphi}^3 (x^2 + y^2) + \text{lineare Glieder in } x, y.$$

Beide Kreisgleichungen sind erfüllt für $\dot{\xi} = \dot{\eta} = 0$.

19. **Mohrs Trägheitskreise.** Für einen der gesuchten Punkte x, y muß

$$J = J_x + m y^2 = J_y + m x^2 \quad \text{und} \quad D + m x y = 0$$

sein (das letztere deshalb, weil jede durch ihn gehende Achse Hauptachse ist). Mit $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ folgt daraus

$$\underline{r^2 = \frac{1}{m} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 D^2}, \quad \underline{\text{tg}^2 \varphi = -\frac{2 D}{(J_x - J_y)},}$$

$$\underline{J = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 D^2}.}$$

20. **Regulierung eines Uhrpendels.** Sind m, r, s Masse, Trägheitsradius und Schwerpunktsabstand des Pendels, so wird die reduzierte Pendellänge nach Hinzufügung der Masse $m' = \mu m$ im Abstand x :

$$l \sim \frac{r^2 + \mu(x-s)^2}{s + \mu x} + \frac{s + \mu x}{1 + \mu} \sim \frac{r^2}{s} \left(1 + \mu \frac{(x-s)^2}{r^2} - \mu \frac{x}{s} \right) + s \left(1 + \mu \frac{x}{s} - \mu \right).$$

Bildet man $dl : d\mu$ und sucht dessen Extremum durch Differentiation nach x , so erhält man $x = \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{s} + s \right)$, also gleich der halben ursprünglichen Pendellänge. Dabei ist gleichzeitig auch $dl : dx = 0$.

21. **Fallen eines teilweise gestützten Stabes.** Sind x, y Horizontal- bzw. Vertikalkoordinate des Schwerpunktes, φ Neigung gegen den Boden, also $y = \frac{l}{2} \sin \varphi$, N der Normaldruck und $f = \operatorname{tg} \varrho$, so folgt aus

$$m\ddot{x} = fN, \quad m\ddot{y} = N - mg, \quad \frac{ml^2}{12} \ddot{\varphi} = N \frac{l}{2} (f \sin \varphi - \cos \varphi),$$

$$\dot{y} - \frac{l}{2} \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} = 0$$

durch Nullsetzen von \dot{y} mit $\varphi_0 = \alpha$, weil dann $\dot{y} = \frac{l}{2} \cos \alpha \cdot \dot{\varphi}$,

$$\ddot{y}_0 = - \frac{3g \cos \alpha \cos(\alpha + \varrho)}{\cos \varrho + 3 \cos \alpha \cos(\alpha + \varrho)}, \quad N_0 = \frac{m \dot{y}_0 \cos \varrho}{\cos \varrho + 3 \cos \alpha \cos(\alpha + \varrho)},$$

$$R_0 = f N_0.$$

Mit $\varrho = 0$ hat man wegen $\dot{x} = 0$ die Gleichung der lebendigen Kraft

$$\frac{1}{2} m \left(\dot{y}^2 + \frac{l^2}{12} \dot{\varphi}^2 \right) = mg \frac{l}{2} (\sin \alpha - \sin \varphi) \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\dot{y}^2 = \frac{3gl^2 - 4y^2}{2(l^2 - y^2)} (y_0 - y)}}.$$

22. **Rad mit exzentrischem Schwerpunkt. Versagen der Reibungstheorie.** Sind x, y Horizontal- bzw. Vertikalkoordinate des Schwerpunktes, so hat man aus

$$m\ddot{x} = -fN, \quad m\ddot{y} = N - mg, \quad m(s^2 + c^2) = -N[c \sin \varphi + f(a - c \cos \varphi)]$$

unter Hinzuziehung der zweiten Ableitung von $y = a - c \cos \varphi$, also von $\dot{y} = c \dot{\varphi} \sin \varphi + c \dot{\varphi}^2 \cos \varphi$ die Größen \ddot{x} , \ddot{y} und $\ddot{\varphi}$ zu eliminieren. So erhält man mit $\dot{\varphi} = \omega_0$, $\varphi = \varphi_0$ (wobei v_0 nur der Richtung nach in Betracht kommt):

$$N_0 = \frac{m(g + c \omega_0^2 \cos \varphi_0)(s^2 + c^2)}{s^2 + c^2(1 + \sin^2 \varphi_0) + f c \sin \varphi_0 (a - c \cos \varphi_0)}.$$

Dies gibt keinen positiven Wert für $v_0 > 0$, $\omega_0 = 0$, $\sin \varphi_0 < 0$, sobald

$$f > \frac{s^2 + c^2(1 + \sin^2 \varphi_0)}{c |\sin \varphi_0| (a - c \cos \varphi_0)}.$$

23. **Ballistisches Pendel.** Die Erhaltung des Moments der Bewegungsgröße beim Auftreffen und die Erhaltung der Energie während des Ausschlages fordern

$$m' v h = (m r^2 + m' h^2) \omega, \quad \frac{1}{2} (m r^2 + m' h^2) \omega^2 = (m s + m' h) g (1 - \cos \vartheta),$$

woraus

$$\underline{\underline{v = \frac{m}{m'} \frac{r}{h} 2 \sqrt{g} \sin \frac{\vartheta}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{m' h}{m s}\right) \left(1 + \frac{m' h^2}{m r^2}\right)} \sim \frac{m}{m'} \frac{r}{h} \sqrt{g} \vartheta.}}$$

24. **Rollbewegung einer Kugel.** Sind x, y die Koordinaten des Schwerpunktes, X, Y die Komponenten der äußeren eingepprägten Kräfte. R_x, R_y die der Haftreibung, ω_x, ω_y die der Drehgeschwindigkeit, so folgt aus den Bewegungsgleichungen, da $T = \frac{2}{5} a^2 m$ das Trägheitsmoment:

$$m \ddot{x} = X + R_x, \quad m \ddot{y} = Y + R_y, \quad T \dot{\omega}_x = R_y a, \quad T \dot{\omega}_y = -R_x a$$

unter Zuhilfenahme der Rollbedingungen $\dot{x} = a \omega_y, \dot{y} = -a \omega_x$

$$\underline{m \ddot{x} (1 + \frac{2}{5}) = X}, \quad \underline{m \ddot{y} (1 + \frac{2}{5}) = Y},$$

d. h. der Schwerpunkt bewegt sich wie ein frei auf der Ebene beweglicher Massenpunkt mit einer um $\frac{2}{5}$ vergrößerten Masse.

25. **Reflexion der Billardkugel an der Bande.** Von den Geschwindigkeiten $u = c \cos \vartheta, v = c \sin \vartheta, \omega$ geht u in $u_1 = -\varepsilon u$ über, während v_1 und ω_1 sich aus dem Reibungsstoß R nach

$$R = m(v_1 - v), \quad R a = T(\omega_1 - \omega) = \frac{2}{5} m a^2 (\omega_1 - \omega),$$

unter Hinzunahme der Bedingung $v_1 + a \omega_1$ (d. i. Gleitgeschwindigkeit) = 0 zu

$$\underline{v_1 = \frac{5}{7} v - \frac{2}{7} a \omega}, \quad \underline{\omega_1 = \frac{2}{7} \omega - \frac{5}{7} \frac{v}{a}}$$

ergeben.

26. **Projektion konjugierter Kräfte in Richtung der Zentralachse.** a) $A' = -B'$, weil die Resultierende von A und B senkrecht auf der Projektionsebene steht; b) Seien a, b, o Durchstoßpunkte der Kräfte A, B bzw. der Zentralachse mit der Projektionsebene, A'', B'' die zur Zentralachse parallelen Komponenten von A, B , also so, daß $A'' + B''$ die Resultierende und $p(A'' + B'')$ das resultierende Moment des Kräftesystems, endlich φ der Winkel von A' oder B' mit der Geraden aob . Dann folgt aus den Momentengleichungen für die Richtung senkrecht zu aob bzw. für die Richtung der Zentralachse:

$$oa \cdot A'' - ob \cdot B'' = 0, \quad oa \cdot \sin \varphi |A'| + ob \cdot \sin \varphi |B'| = p(A'' + B'')$$

durch Elimination von A'' bei Beachtung von $|A'| = |B'|$:

$$\underline{|A'| oa \cdot \sin \varphi = p B''}.$$

27. **Ersatz eines Massenpunktes durch vier Massenpunkte.** Die Koordinaten x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) müssen den neun Bedingungen genügen

$$\frac{1}{4} \sum x_i^2 = a^2, \quad \frac{1}{4} \sum y_i^2 = b^2, \quad \frac{1}{4} \sum z_i^2 = c^2;$$

$$\sum x_i y_i = \sum y_i z_i \dots = \sum x_i = \sum y_i \dots = 0.$$

Die Eckpunkte eines gleichseitigen Tetraeders mit den Koordinaten

$$0, 0, 1; \quad 0, -\frac{2}{3} \sqrt{2}, -\frac{1}{3}; \quad \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}; \quad -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}$$

genügen

diesen Bedingungen, falls $a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{3}$. Daher multipliziert man die x mit $a\sqrt{3}$, die y mit $b\sqrt{3}$ usf. und erhält:

$$\underline{x_i = 0, 0, \sqrt{2}a, -\sqrt{2}a; \quad y_i = 0, -2\sqrt{\frac{2}{3}}b, \sqrt{\frac{2}{3}}b, \sqrt{\frac{2}{3}}b;}$$

$$\underline{z_i = c\sqrt{3}, -\frac{c}{\sqrt{3}}, -\frac{c}{\sqrt{3}}, -\frac{c}{\sqrt{3}}.}$$

28. **Schwingungen einer Tür in ihren Angeln.** Macht man die Drehachse zur z -Achse, legt die x -Achse durch den Schwerpunkt und bezeichnet mit φ den Winkel der Tür mit der Vertikalebene durch die Drehachse (d. i. ihre Gleichgewichtslage), so lauten die sechs Bewegungsgleichungen

$$-m \frac{b}{2} \ddot{\varphi}^2 = G \sin \alpha \cos \varphi - A_x - B_x, \quad m \frac{b}{2} \ddot{\varphi} = G \sin \alpha \sin \varphi - A_y - B_y,$$

$$0 = G \cos \alpha - A_z - B_z; \quad 0 = A_y - B_y, \quad 0 = G \frac{b}{2} \cos \alpha - A_x \frac{h}{3} + B_x \frac{h}{3},$$

$$m \frac{b^2}{3} \ddot{\varphi} = -G \frac{b}{2} \sin \alpha \sin \varphi.$$

Aus der letzten Gleichung folgt die Schwingungsperiode (für kleine φ) zu

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{2b}{3g \sin \alpha}},$$

während die übrigen bis auf Glieder erster Ordnung in φ geben:

$$\underline{A_x, B_x = \frac{G}{2} \left[\sin \alpha \pm \frac{3b}{2h} \cos \alpha \right], \quad \underline{A_y = B_y = \frac{7}{8} G \sin \alpha \cdot \varphi,}}$$

$$\underline{A_z + B_z = G \cos \alpha.}$$

29. **Stab längs Wand und Boden gleitend.** Macht man die Bodenkante zur y -Achse und legt die xz -Ebene durch den Schwerpunkt, so hat ein Stabpunkt im Abstand a vom unteren Ende die Koordinaten

$$x = (l - a) \sin \vartheta \sin \psi, \quad y = \left(\frac{l}{2} - a \right) \sin \vartheta \cos \psi, \quad z = a \cos \vartheta,$$

woraus durch Differentiation nach t und Integration über a von 0

$$\text{bis } l \text{ die lebendige Kraft } L = \frac{m l^2}{6} (A \dot{\vartheta}^2 + 2B \dot{\vartheta} \dot{\psi} + C \dot{\psi}^2) \text{ mit}$$

$$A = \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta (\sin^2 \psi + \frac{1}{4} \cos^2 \psi), \quad B = \frac{3}{4} \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \psi \cos \psi,$$

$$C = \sin^2 \vartheta (\cos^2 \psi + \frac{1}{4} \sin^2 \psi),$$

während die Kraftkomponenten $\Theta = -mg \frac{l}{2} \sin \vartheta$, $\Psi = 0$. Die Anfangsbeschleunigungen sind:

$$\underline{\ddot{\vartheta}_0 = \frac{3g}{2l} \sin \vartheta_0 \frac{C_0}{A_0 C_0 - B_0^2}, \quad \underline{\ddot{\psi}_0 = -\frac{3g}{2l} \sin \vartheta_0 \frac{B_0}{A_0 C_0 - B_0^2}.}}$$

Mit $\psi = 90^\circ$, $\psi_0 = 0$ wird $L = \frac{m l^2}{6} \dot{\vartheta}^2$, woraus die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vartheta} = \frac{3g}{2l} \sin \vartheta.$$

30. **Deviationswiderstand eines rotierenden Kreisels.** Sind $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ bzw. T, T', T'' Drehgeschwindigkeiten und Trägheitsmomente für die Figurenachse, bzw. zwei zu ihr und untereinander senkrechte, im Körper feste Achsen, also

$$\omega_1 = \frac{\pi n}{30}, \quad \omega_2 = \frac{\pi n'}{30} \cos \omega_1 t, \quad \omega_3 = -\frac{\pi n'}{30} \sin \omega_1 t,$$

so lauten die Eulerschen Gleichungen

$$\dot{\omega}_1 = 0, \quad T' \dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1 (T - T') = M_2, \quad T'' \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (T' - T) = M_3,$$

woraus durch Einsetzen:

$$\underline{M = \sqrt{M_2^2 + M_3^2} = T \omega_1 \sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2} = \frac{G}{g} r^2 \left(\frac{\pi}{30}\right)^2 n n' = 0,018 \text{ kgm},}$$

wobei die Richtung von M senkrecht auf der Figurenachse und auf der im Raum festen Drehachse.

III. Systeme starrer Körper.

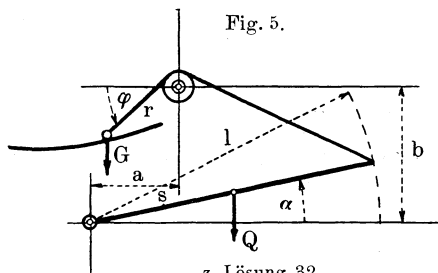
31. **Robervalsche Wage.** Nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten kommt es nur auf das Verhältnis der von den Gewichten in der Kraftrichtung, also hier in der vertikalen, zurückgelegten Wege an. Diese sind durch die Bewegung der vertikalen Parallelogrammstäbe vollkommen bestimmt, und zwar als entgegengesetzt gleich.

32. **Gleichgewicht an einer Zugbrücke.** Mit den Bezeichnungen der nebenstehenden Figur lautet die Arbeitsgleichung $G r \sin \varphi - Q s \sin \alpha = C$ und dazu kommt, wenn k die Länge der Kette bedeutet,

$$r + \sqrt{(a - l \cos \alpha)^2 + (b - l \sin \alpha)^2} = k.$$

Mit $a = 0$ gibt Elimination von α die Gleichung der Kardioide:

$$(r - k)^2 = l^2 + b^2 + \frac{2bl}{Qs} (C - G r \sin \varphi).$$



33. **Gleichgewicht an einer Doppelleiter.** Seien V (vertikal), H (horizontal), M (Moment) die im Gelenk übertragenen Reaktionen, A_1, R_1, A_2, R_2 Normaldruck und Reibung am Boden, h Höhe des Gelenks

über dem Boden, a_1, a_2 Horizontalabstände der Auflager von der Projektion des Gelenkes auf den Boden, dann lauten die sechs Gleichgewichtsbedingungen für die beiden Teile:

$$\begin{aligned} Q + V - A_1 &= 0, & R_1 - H &= 0, & A_1 a_1 - R_1 h - Q q + M &= 0; \\ V + A_2 &= 0, & R_2 + H &= 0, & A_2 a_2 + R_2 h + M &= 0, \end{aligned}$$

woraus

$$\underline{V = -Q \frac{a_1 - q}{a_1 + a_2}}, \quad \underline{H h - M = a_2 Q \frac{a_1 - q}{a_1 + a_2}}.$$

Soll $M = 0$ sein, so muß $H = -V \frac{a_2}{h}$ werden, und wenn f_1, f_2 die Reibungskoeffizienten am Boden sind,

$$\underline{\frac{a_2}{h} \leq f_2} \quad \text{und} \quad \underline{\frac{a_2}{h} \frac{a_1 - q}{a_2 + q} \leq f_1}.$$

34. **Kinematik eines Kurbelgetriebes.** Sind φ, η die Winkel des Kurbelarmes bzw. der Schubstange mit der Gleitrichtung, so daß $r \sin \varphi = l \sin \eta$, so hat ein Stangenpunkt im Abstand a vom Kurbelgelenk die Koordinaten $x = r \cos \varphi + a \cos \eta$, $y = (l - a) \sin \eta$, daher die Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten

$$\underline{\dot{x} = -r \omega \left(\sin \varphi + \frac{a r \sin 2 \varphi}{2 l^2 \cos \eta} \right)}, \quad \underline{\dot{y} = r \omega \frac{l - a}{l} \cos \varphi},$$

$$\underline{\ddot{x} = -r \omega^2 \left(\cos \varphi + \frac{a r \cos 2 \varphi}{l^2 \cos \eta} + \frac{a r^3 \sin^2 2 \varphi}{4 l^3 \cos^3 \eta} \right)}, \quad \underline{\ddot{y} = -r \omega^2 \frac{l - a}{l} \sin \varphi}.$$

Mit $a = l$ und kleinem Wert für $r:l$ wird

$$\underline{\dot{x} = -r \omega \left(\sin \varphi + \frac{r}{2 l} \sin 2 \varphi \right)}, \quad \underline{\ddot{x} = -r \omega^2 \left(\cos \varphi + \frac{r}{l} \cos 2 \varphi \right)}.$$

35. **Schwingendes Parallelogramm.** Die lebendige Kraft beim Ausschlag φ gleichgesetzt der von der Ruhelage φ_0 an geleisteten Arbeit gibt, da die Vertikalstäbe sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ drehen, während der Querstab eine Translation mit $l \dot{\varphi}$ ausführt,

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} \left(2 \frac{m l^2}{3} + m' l^2 \right) = g (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \left(2 m \frac{l}{2} + m' l \right).$$

Daher die Schwingungszeit bei kleinem φ :

$$\underline{2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sqrt{\frac{\frac{2}{3} m + m'}{m + m'}}}.$$

36. **Physisches Pendel mit beweglichem Massenpunkt.** Wenn φ den Pendelausschlag, x die Entfernung von m' vom Fußpunkt des Lotes aus 0

bedeutet, so sind lebendige Kraft L und Lagrangesche Kraftkomponenten K_φ, K_x :

$$\begin{aligned} 2L &= J\dot{\varphi}^2 + m'[\dot{x}^2 + (a^2 + x^2)\dot{\varphi}^2 + 2a\dot{\varphi}\dot{x}], \\ K_\varphi &= -mgs \sin \varphi - m'g[a \cos(\alpha - \varphi) + x \sin(\alpha - \varphi)], \\ K_x &= -mg \cos(\alpha - \varphi). \end{aligned}$$

Daher die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} [J + m'(a^2 + x^2)]\ddot{\varphi} + m'a\ddot{x} + 2mx\dot{x}\dot{\varphi} &= -mgs \sin \varphi \dots, \\ \ddot{x} + a\ddot{\varphi} - x\dot{\varphi}^2 &= -g \cos(\alpha - \varphi). \end{aligned}$$

Sind m' und φ klein, nicht aber x , so gibt die Integration, wenn $x = \dot{x} = 0$ für $t = 0$:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{g}{2} \cos \alpha \cdot t^2, \\ \varphi &= A \sin \left(\sqrt{\frac{mgs}{J}} t + \psi \right) + \frac{m'g \sin \alpha \cos \alpha}{m \cdot 2s} \left(t^2 - \frac{2J}{mgs} \right). \end{aligned}$$

Bei $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^\circ$ bleiben die Pendelschwingungen durch m' unbeeinflusst, im ersteren Fall ist $x = -\frac{g}{2}t^2$, im zweiten folgt aus

den Bewegungsgleichungen $x = \left(\frac{J}{ms} - a \right) \varphi$.

37. **Physisches Doppelpendel.** Sind l und l' die reduzierten Pendellängen, d. h. $T = ms l$, $T' = m' s' l'$, so gewinnt man aus dem Ausdruck der lebendigen Kraft oder aus dem Flächensatz die für kleine Ausschläge φ, φ' gültigen Bewegungsgleichungen

$$(msl + m'a^2)\ddot{\varphi} + m'as'\ddot{\varphi}' = -g(ms + m'a)\varphi, \quad a\ddot{\varphi} + l'\ddot{\varphi}' = -g\varphi',$$

so daß die Perioden sich aus den Wurzeln von

$$\begin{aligned} \alpha^4 (msl l' + m'l'a^2 - m's'a^2) - \alpha^2 g [ms(l + l') + m'a(a + l')] \\ + g^2 (ms + m'a) = 0 \end{aligned}$$

ergeben. Soll $\varphi = \varphi'$ sein, so verlangen die Bewegungsgleichungen

$$msl + m'a^2 + m'as' = (a + l)(ms + m'a), \quad a = \frac{l - l'}{1 + \frac{m'l' - s'}{m \cdot s}},$$

d. h. bei kleinem $m':m$ muß $a \sim l - l'$, der zweite Schwingungsmittelpunkt mit dem ersten zusammenfallen.

38. **Stabverbindung auf dem Boden gleitend.** Ist f der Reibungskoeffizient, H die horizontale Reaktion im Gelenk, N der Normaldruck am

Boden, x, y die horizontale bzw. vertikale Schwerpunktskoordinate des linken Stabes, so folgt aus den Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x} = H + fN, \quad m\ddot{y} = N - mg, \quad m \frac{l^2}{12} \ddot{\varphi} = (fN - H) \frac{l}{2} \sin \varphi - N \frac{l}{2} \cos \varphi$$

unter Beachtung von $y = \frac{l}{2} \sin \varphi, \quad x = -\frac{l}{2} \cos \varphi$:

$$\ddot{\varphi} \left[1 - \frac{3}{2} f \sin \varphi \cos \varphi \right] + \frac{3}{2} f \sin^2 \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = -\frac{3g}{2l} (\cos \varphi - 2f \sin \varphi)$$

und daraus mit $\dot{\varphi}_0 = 0$,

$$\ddot{\varphi}_0 = -\frac{3g \cos \varphi_0 - 2f \sin \varphi_0}{2l \left(1 - \frac{3}{2} f \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \right)}$$

gültig für $\operatorname{tg} \varphi_0 \leq 2f$. (Vgl. auch Aufg. 29 und 33.)

39. **Aufnehmen einer Kette aus starren Gliedern.** Geschwindigkeit $= nl$; sekundliche Änderung der Bewegungsgröße $= m n \cdot nl = n^2 ml$ = beschleunigende Kraft; Zugkraft am Ende nach der Zeit t gleich $n^2 ml + n t mg$.

40. **Stoß unter Vermittlung eines Hebels.** Der Impulssatz besagt, da $v_1 : \alpha$ die Drehgeschwindigkeit des Hebels ist,

$$(m_1 a^2 + T + m_2 b^2) \frac{v_1}{a} = m_2 b v_2, \quad \text{woraus } v_2 = v_1 \frac{m_1 a^2 + T + m_2 b^2}{m_2 b}.$$

41. **Rückstoß beim Anschlagen von Glocke und Klöppel.** Ist K die Größe der Stoßkraft, so verleiht sie dem Glockenkörper die Drehgeschwindigkeit $Kc : T$ um O ; dem Klöppel erteilt sie — unter der Voraussetzung, daß kein Rückstoß in O' erfolgt — eine Drehung um den Stoßmittelpunkt M , der auf dem Lot von S' auf K über S' hinaus im Abstand $S'M = \frac{T' - m' s'^2}{m' c'}$ liegt, und zwar mit der Drehgeschwindigkeit $Kc' : (T' - m' s'^2)$. Soll keine Stoßreaktion im Aufhängepunkt O' des Klöppels erfolgen, so muß M auf der Verlängerung von OO' so liegen, daß

$$OM = a \frac{c}{c'} \frac{T' - m' s'^2}{T},$$

da dann O' als Punkt des Klöppels und als Punkt der Glocke gleiche Geschwindigkeit durch K empfängt.

42. **Zusammenstoß rotierender Kreisscheiben.** a) Die gemeinsame Schwerpunktgeschwindigkeit in Richtung der Zentrale nach dem Stoß ist

$$\frac{m_1 v_1 \cos \alpha_1 + m_2 v_2 \cos \alpha_2}{m_1 + m_2}.$$

Nennt man $x_1, x_2; y_1, y_2$ die Änderungen, die $v \sin \alpha$ bzw. $r \omega$ für 1 und 2 erfahren, so gibt die Erhaltung der Bewegungsgröße und ihres Momentes um den Berührungspunkt (das Moment der Stoßkraft ist null!) die Gleichungen

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0, \quad \frac{1}{2} y_1 - x_1 = 0, \quad \frac{1}{2} y_2 + x_2 = 0,$$

da das Trägheitsmoment gleich Masse mal halbem Quadrat des Radius, während die Vernichtung der Gleitgeschwindigkeit im Berührungspunkt verlangt:

$$x_1 + y_1 - (x_2 - y_2) = -v_1 \sin \alpha_1 + v_2 \sin \alpha_2 - r_1 \omega_1 - r_2 \omega_2 = A,$$

woraus

$$x_1 = \frac{m_2 A}{3(m_1 + m_2)}, \quad x_2 = \frac{-m_1 A}{3(m_1 + m_2)}, \quad y_1 = \frac{2m_2 A}{3(m_1 + m_2)}, \quad y_2 = \frac{2m_1 A}{3(m_1 + m_2)}.$$

b) Die Drehgeschwindigkeiten bleiben unverändert, die Schwerpunktbewegung regelt sich wie beim gewöhnlichen Stoß ohne Rotation.

43. **Gleichgewicht am rollenden Motorwagen.** Sind $R_1, N_1, -R_2, N_2$ die Reaktionen der Schiene auf die Räder, $H_1, V_1, -H_2, V_2$ die der Räder auf den Wagen, so hat man für das ganze System (1—3), für das erste (4—6) und zweite (7—9) Räderpaar je drei Bewegungsgleichungen:

$$1) - 3) \quad m \dot{v} = -mg \sin \alpha - W + R_1 - R_2, \quad O = -mg \cos \alpha + N_1 + N_2,$$

$$T_1 \dot{\omega}_1 + T_2 \dot{\omega}_2 = -(R_1 - R_2)h - N_2(s_1 + a_1) + N_2(s_2 + a_2);$$

$$4) - 6) \quad m_1 \dot{v} = -H_1 + R_1 - m_1 g \sin \alpha, \quad O = -V_1 + N_1 - m_1 g \cos \alpha,$$

$$T_1 \dot{\omega}_1 = M - R_1 r_1 - N_1 a_1 - \sqrt{H_1^2 + V_1^2} f'_1 r'_1;$$

$$7) - 9) \quad m_2 \dot{v} = H_2 - R_2 - m_2 g \sin \alpha, \quad O = -V_2 + N_2 - m_2 g \cos \alpha,$$

$$T_2 \dot{\omega}_2 = R_2 r_2 - N_2 a_2 - \sqrt{H_2^2 + V_2^2} f'_2 r'_2.$$

Hierzu kommen bei reinem Rollen die Bedingungen $r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2 = v$ oder beim Gleiten die Bedingungen $R_1 = f_1 N_1, R_2 = f_2 N_2$. Für den stationären Zustand mit $\dot{v} = 0, \dot{\omega} = 0$ rechnet sich M , wenn unter der Wurzel H vernachlässigt und $a + f' r' = b$ gesetzt wird, für reines Rollen:

$$M = (W + mg \sin \alpha) \left[r_1 - \frac{h}{r_2} \frac{r_2 b_1 - r_1 b_2}{s_1 + s_2 + a_1 + a_2} \right] + g \cos \alpha \left[\frac{m}{r_2} \frac{r_2 b_1 (s_2 + a_2) + r_1 b_2 (s_1 + a_1)}{s_1 + s_2 + a_1 + a_2} - m_1 f'_1 r'_1 - m_2 \frac{r_1}{r_2} f'_2 r'_2 \right].$$

Bedingung ist $|R_1| \leq f_1 |N_1|$ bei $N_1 > 0$.

44. **Schwungrad einer Maschine.** Die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$\frac{1}{2} [T + F(\vartheta_2)] \omega_2^2 - \frac{1}{2} [T + F(\vartheta_1)] \omega_1^2 = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} K(\vartheta) d\vartheta = U(\vartheta_2) - U(\vartheta_1)$$

ergibt, wenn $(\omega_1^2 - \omega_0^2)F$ und $(\omega_2^2 - \omega_0^2)F$ vernachlässigt wird:

$$\frac{1}{2} T (\omega_2^2 - \omega_1^2) = T \delta \omega_0^2 = \left[U(\vartheta_1) - \frac{1}{2} F(\vartheta_1) \right] - \left[U(\vartheta_2) - \frac{1}{2} F(\vartheta_2) \right],$$

woraus

$$T = \frac{\left[U(\vartheta) - \frac{1}{2} F(\vartheta) \right]_{\max} - \left[U(\vartheta) - \frac{1}{2} F(\vartheta) \right]_{\min}}{\delta \omega_0^2}$$

45. **Zentrifugalregulator.** Aus den Ausdrücken für die lebendige Kraft L und die beiden Kraftkomponenten $L = \frac{1}{2} T \omega^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + x^2 \omega^2)$, $X = a - b x - \lambda \dot{x}$, $M = c - k x$ folgen die Bewegungsgleichungen

$$T \dot{\omega} = c - k x, \quad m \ddot{x} - m \omega^2 x = a - b x - \lambda \dot{x},$$

daraus mit $\dot{\omega} = \dot{x} = 0$ die Bedingungen stationären Laufes $c = k x_0 - m \omega_0^2 x_0 = a - b x_0$. Setzt man $x = x_0 + \xi$, $\omega = \omega_0 + \eta$ und vernachlässigt höhere Potenzen von ξ , η , so wird aus den Bewegungsgleichungen

$$m \ddot{\xi} + \lambda \dot{\xi} + \frac{a}{x_0} \dot{\xi} + \frac{2 m c \omega_0}{T} \xi = 0,$$

und die Integrale dieser Gleichung, die die Form konst. $e^{\alpha t}$ haben, stellen dann abklingende Schwingungen dar, wenn die α , also die Wurzeln von

$$m \alpha^3 + \lambda \alpha^2 + \frac{a}{x_0} \alpha + \frac{2 m c \omega_0}{T} = 0,$$

negativ reelle Bestandteile haben, was erfordert:

$$\lambda \frac{a}{x_0} > \frac{2 m^2 c \omega_0}{T}.$$

IV. Lebende Körper.

46. **Abspringen von einem Kahn.** Solange der Kahn in Ruhe ist, wirkt kein Wasserwiderstand auf ihn, nach dem Schwerpunktsatz müßte also der Gesamtschwerpunkt von Mann und Kahn fest bleiben, was bei einseitiger Bewegung des Abspringenden nicht der Fall ist. Sobald die Bewegung des Kahnes beginnt, setzt der Wasserwiderstand ein, der ihn wieder zur Ruhe bringt. Je rascher der Absprung, um so größer die Anfangsgeschwindigkeit des Kahns, um so größer der Widerstand W , um so größer der Auslaufweg, da mit $W = -\text{konst. } v^\kappa$ und κ etwas kleiner als 2, aus $\dot{v} = -k v^\kappa$ folgt:

$$\frac{dv}{ds} = -k v^{\kappa-1}, \quad s = \frac{v_0^{2-\kappa}}{k(2-\kappa)}.$$

47. **Ballspiel auf glattem Boden.** Setzt man $\kappa = G : (G_1 + G_2)$, $\kappa' = G : (G_1 + G_2 + G)$, so ist die Geschwindigkeit des Brettes während des Wurfes von 1 nach 2 gleich $-\kappa v'$, nach dem Auffangen

durch 2' gleich $[v'' G - \kappa v' (G_1 + G_2)] : (G_1 + G_2 + G) = \kappa' (v'' - v')$, während des Wurfes von 2 nach 1 gleich $[v' G + \kappa' (v'' - v') (G_1 + G_2 + G)] : (G_1 + G_2) = \kappa v''$, endlich nach dem Auffangen durch 1 gleich $[-v'' G + \kappa v'' (G_1 + G_2)] : (G_1 + G_2 + G) = 0$. Somit muß der Ball eine Zeit x_0 bei 2 bleiben, wobei

$$\kappa v' t_1 - \kappa v'' t_2 + \kappa' (v' - v'') x_0 = s, \quad x_0 = \frac{s - \kappa v' t_1 + \kappa v'' t_2}{\kappa' (v' - v'')}.$$

48. **Gleichgewicht am Bootsruder.** Der Momentensatz für den Stützpunkt am Boot gibt $P = W \frac{a}{b-a}$. Die Gleichung $Pb = Wa$ ist unrichtig, weil der Druck im Ruderstützpunkt sich von W um die Reaktion zwischen Ruderer und Boot unterscheidet.

49. **Beschleunigung eines Wagens.** Beim Anfahren mit der Beschleunigung w wird die Kraft $m \cdot w$, wo m die Masse der Person ist, an den Fußflächen wirksam; sie ruft ein Moment um die horizontale Schwerpunktsachse hervor, das nur von zwei Stützpunkten, die in der Fahrtrichtung auseinanderliegen, aufgenommen werden kann. Wenn $w > fg$, wo f der Reibungskoeffizient, so hört das Haften am Boden auf.

50. **Mechanik des Gehens.** Durch Vorneigen oder langsames Vorschieben des Körpers wird sein Gewicht auf den vorangestellten Fuß verlegt, dann unter Ausnutzung der Haftreibung unter diesem Fuß das zurückgebliebene Bein vorgezogen. Die Sohle macht hierbei eine Rollbewegung wie ein Rad, das um einen kleinen Winkel gedreht wird. Das Maß der Rollreibung, das von der Bodenbeschaffenheit abhängt, beeinflusst die Arbeitsleistung. Die Geschwindigkeit wird dadurch begrenzt, daß die zeitliche Häufung der einzelnen Gliederbewegungen Ermüdung hervorruft. Beim Fahrrad wird durch geeignete Übersetzung bei gleicher Gliederbewegung rascherer Fortschritt erzielt, wobei dann die Grenzē in dem Arbeitsverbrauch durch Luftwiderstand liegt.

51. **Drehschemel.** Man dreht die Hanteln bei gestreckten Armen um einen Winkel ϑ_1 links herum (relativ gegen den Körper), dabei dreht sich die Platte um $\kappa \vartheta_1$ nach rechts, wo $\kappa = m b^2 : (T + m b^2)$. Hierauf mit eingezogenen Armen um ϑ_1 rechts gedreht, gibt ein Zurückgehen der Platte um $\kappa' \vartheta_1$ mit $\kappa' = m a^2 : (T + m a^2)$. Das Resultat ist also Rechtsdrehung der Platte um $(\kappa - \kappa') \vartheta_1$, wobei die Hanteln in die ursprüngliche Lage relativ zum Körper zurückgekehrt sind.

52. **Katze, die auf die Füße fällt.** Wirkung des veränderlichen Trägheitsmomentes (durch Einziehen und Ausstrecken der Beine) wie im Falle der Aufg. 51. Die Schwere ist ohne Einfluß, weil sie kein Moment um den Schwerpunkt ergibt.
53. **Klettern am Aufzugseil.** Sei v die Relativgeschwindigkeit des Kletterns und u die dabei eintretende Fallgeschwindigkeit des Aufzugs. Dann erfordert der Flächensatz bei Abwesenheit von Reibung

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)u + u - \frac{1}{n}(v - u) = 0,$$

woraus die Geschwindigkeit der Aufwärtsbewegung des Kletternden $v - u = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)v$. Bei Reibung (Reibungskoeffizient f , Rollenradius r , Zapfenradius r') ist:

$$r \frac{G}{g} \left(2\dot{u} - \frac{1}{n}\dot{v}\right) = -2Gfr',$$

woraus mit $v = \text{konst.}$ folgt: $\dot{u} = -fg \frac{r'}{r}$, u wird also verkleinert, $v - u$ vergrößert.

54. **Schaukel.** Sei φ der Schaukelausschlag aus der Vertikalen, x die veränderliche Entfernung des Massenpunktes m' vom Aufhängepunkt (bzw. des Schwerpunktes der in der Schaukel ruhenden Person). Wird m' in der Mittellage $\varphi = 0$ von x_0 nach x gehoben, dann beim äußersten Ausschlag φ_0 wieder nach x_0 gebracht, so ist dem Pendel die Arbeit $m'g(x_0 - x)(1 - \cos \varphi_0)$ zugeführt, die seine lebendige Kraft vermehrt.
55. **Fliege unter der Glasglocke.** Nein. Denn die Flügelschläge, die den Auftrieb erzeugen, rufen eine Abwärtsbewegung der Luft hervor, die ihrerseits wieder eine Druckerhöhung auf der Wagschale gleich dem „von der Luft getragenen“ Gewicht bewirkt. Jeder Flieger in der Luft ist Ursache einer Luftdruckerhöhung am Boden, die nur deshalb unmerklich bleibt, weil sich das Gewicht über eine sehr große Fläche verbreitet.

V. Elastische Körper.

56. **Verhinderte Wärmedehnung.** Unter Einfluß einer (Zug-)Spannung σ und einer Temperaturerhöhung t dehnt sich das Prisma um

$$\frac{\sigma}{E} + ct,$$

also ist der gesuchte Druck $-\sigma = \underline{Ect = 550 \text{ kg. cm}^2}$.

57. **Gewichtsausgleich durch Elastizität.** Der i -te Faden habe die ursprüngliche Länge $l(1 + \lambda_i)$, wobei $\sum \lambda_i = 0$. Die Länge aller Fäden nach Belastung sei $l(1 + \lambda_0)$, so daß unter dem Einfluß der Spannung S_i die Dehnung $\lambda_0 - \lambda_i$ zustande kommt, wobei $\sum S_i = G$. Daraus und aus $E(\lambda_0 - \lambda_i) = S_i$ folgt $\lambda_0 = G : n E$ und $S_i = \frac{G}{n} - \lambda_i E$, also die gesuchte Abweichung $E \lambda$ Proz.

58. **Beanspruchung eines Stabes durch Rotation.** Ist F der Querschnitt des Stabes, μ die Masse der Volumeinheit, so folgt aus

$$600 F \cong \int_0^{\frac{l}{2}} \mu F x \omega^2 dx = \mu \omega^2 F \frac{l^2}{8}$$

mit $l = 30$ cm, $\mu = 0,008 : 981$ die zulässige Winkelgeschwindigkeit zu $\omega \leq 808,7 \text{ sec}^{-1}$.

59. **Größtwerte der Spannung in der Ebene.** Aus der Betrachtung eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten der x - und y -Achse parallel laufen, während die Hypotenuse unter dem Winkel φ gegen die erstere liegt, folgen für die Normalspannung N und Tangentialspannung T der φ -Richtung:

$$N = X_x \sin^2 \varphi + Y_y \cos^2 \varphi + 2 X_y \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$T = (X_x - Y_y) \sin \varphi \cos \varphi + X_y (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi).$$

Hieraus wird, wenn man den doppelten Winkel einführt,

$$N^2 + T^2 = \text{konst.} + \text{konst.} [(Y_y - X_x) \cos 2\varphi + 2 X_y \sin 2\varphi],$$

also extremum für $\text{ctg } 2\varphi = \frac{Y_y - X_x}{2 X_y}$. Dabei ist $T = 0$ und

$$N = \frac{1}{2} (X_x + Y_y) \pm \sqrt{X_y^2 + \frac{1}{4} (X_x - Y_y)^2}.$$

Dagegen wird T ein Maximum für $\text{tg } 2\varphi = \frac{X_x - Y_y}{2 X_y}$ und erhält dabei den Wert

$$T_{\max} = \pm \frac{1}{2} (N_{\max} - N_{\min}).$$

60. **Mohrs Spannungs- und Zerrungskreis in der Ebene.** Führt man in die unter 59 gegebenen Ausdrücke für N und T den Doppelwinkel 2φ ein, so sieht man sofort, daß

$$\left(N - \frac{X_x + Y_y}{2} \right)^2 + T^2 = \frac{1}{4} (X_x - Y_y)^2 + X_y^2,$$

d. h. also N, T als laufende Koordinaten eines Punktes geben einen Kreis mit dem Mittelpunkt in $y = 0, x = \frac{1}{2} (X_x + Y_y)$. Für die Zerrungskomponenten besteht die gleiche Abhängigkeit von φ wie für N und T .

61. **Mohrs Kreise im Raum.** Bezeichnen \mathfrak{X} , \mathfrak{Y} , \mathfrak{Z} die Spannungsvektoren für die Parallelen zu den Koordinatenebenen, α , β , γ die Richtungskosinus einer vierten Ebene, so verlangt das Gleichgewicht eines von diesen vier Ebenen gebildeten Tetraeders, daß der Spannungsvektor \mathfrak{S} für die vierte Ebene

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{X}\alpha + \mathfrak{Y}\beta + \mathfrak{Z}\gamma.$$

Sind die Koordinatenrichtungen die Hauptspannungsrichtungen, so daß \mathfrak{X} , \mathfrak{Y} , \mathfrak{Z} parallel den Achsen sind, so hat die Normalkomponente von \mathfrak{S} den Wert $N = X\alpha^2 + Y\beta^2 + Z\gamma^2$, die Länge von \mathfrak{S} ist bestimmt durch $S^2 = X^2\alpha^2 + Y^2\beta^2 + Z^2\gamma^2$ und die Tangentialkomponente durch $T^2 = S^2 - N^2$, woraus

$$\left(N - \frac{X+Y}{2}\right)^2 + T^2 = \frac{1}{4}(X-Y)^2 + \gamma^2 \left[\left(Z - \frac{X+Y}{2}\right)^2 - \left(\frac{X-Y}{2}\right)^2 \right].$$

Der Punkt N , T liegt daher innerhalb oder außerhalb des Kreises, den man für $\gamma = 0$ erhält, je nachdem Z zwischen X und Y oder außerhalb liegt. Der Ort der Punkte N , T wird so durch drei Kreise mit den Mittelpunkten auf der x -Achse in $\frac{X+Y}{2}$, $\frac{Y+Z}{2}$, $\frac{Z+X}{2}$ mit den Durchmessern $X-Y$, $Y-Z$, $Z-X$, begrenzt.

62. **Spannungsellipsoid.** Aus dem unter 61 gegebenen Ausdruck für \mathfrak{S} folgt für die Normalspannung N allgemein:

$$N = X_x \alpha^2 + Y_y \beta^2 + Z_z \gamma^2 + 2 X_y \alpha \beta + 2 Y_z \beta \gamma + 2 Z_x \gamma \alpha,$$

daher mit $r = \frac{1}{\sqrt{N}}$, $r\alpha = x$, $r\beta = y$, $r\gamma = z$,

$$\underline{X_x x^2 + Y_y y^2 + Z_z z^2 + 2 X_y x y + 2 Y_z y z + 2 Z_x z x = 1,}$$

d. h. der Ort der Punkte x , y , z ist eine Mittelpunktsfläche 2. Ordnung.

63. **Biegung des einseitig eingespannten Stabes.** Die elastische Linie folgt der Differentialgleichung $y'' = M: EJ$, wo M das in bezug auf den Punkt x genommene Moment von Q , also $Q(l-x)$ ist. Durch Integration erhält man mit $y(0) = y'(0) = 0$:

$$y' = \frac{Q}{EJ} x \left(l - \frac{x}{2}\right), \quad y = \frac{Q}{EJ} \frac{x^2}{2} \left(l - \frac{x}{3}\right),$$

woraus für $x = l$ die Ausweichung $\frac{Q l^3}{3 EJ}$ und die Neigung $\frac{Q l^2}{2 EJ}$.

64. **Torsion eines Kreisrohres.** Da bei der Torsion des Kreisringes die Tangentialspannung τ dem Abstand r vom Mittelpunkt proportional

ist und $M = \int_{r_i}^{r_a} 2\pi r^2 \tau dr$ sein muß, so folgt hier $\tau_{\max} = \frac{2Mr_a}{\pi(r_a^4 - r_i^4)}$.

Andererseits sind bei Zug durch die Längskraft P die Extremwerte der Normalspannungen O und P : $\pi(r_a^2 - r_i^2)$, also $\tau_{\max} = \frac{P}{2\pi(r_a^2 - r_i^2)}$,

woraus
$$M \leq \frac{r_a^2 + r_i^2}{4r_a} P.$$

65. **Dreimomentensatz des durchgehenden Balkens.** Soweit der Balken keine Querlast trägt, kann das Moment und damit auch y'' sich nur linear verändern, also muß die Durchbiegung y von drittem Grad sein, wobei sich die vier Koeffizienten des Polynoms dritten Grades im Feld x_1, x_2 aus $y(x_1) = y(x_2) = 0$ und $y''(x_1) = M_1 : EJ$, $y''(x_2) = M_2 : EJ$ bestimmen, und analog im zweiten Feld:

$$y = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{6EJ(x_2 - x_1)} [M_2(x + x_2 - 2x_1) - M_1(x + x_1 - 2x_2)]$$

$$\text{bzw. } \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{6EJ(x_3 - x_2)} [M_3(x + x_3 - 2x_2) - M_2(x + x_2 - 2x_3)].$$

Rechnet man aus beiden Ausdrücken den Wert von y' für $x = x_2$ und setzt die Werte gleich, so erhält man die gesuchte Beziehung $M_1(x_2 - x_1) + 2M_2(x_3 - x_1) + M_3(x_3 - x_2) = 0$. Sind die Felder belastet, so tritt zu jedem der beiden Ausdrücke für y' eine Funktion hinzu, deren Ableitung $M' : EJ$ ist und deren von x_1 bis x_2 bzw. von x_2 bis x_3 erstrecktes Integral verschwindet. In der Schlußgleichung wird daher die rechte Seite statt null gleich

$$\frac{6}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} (\xi - x_1) M'(\xi) d\xi + \frac{6}{x_3 - x_2} \int_{x_2}^{x_3} (\xi - x_3) M'(\xi) d\xi.$$

66. **Entlastung einer Rohrseele durch ein Mantelrohr.** Ist q die radiale

Verschiebung der Punkte vom Achsabstand x , also $q' = \frac{dq}{dx}$ und $\frac{q}{x}$

die Dehnungen in radialer bzw. tangentialer Richtung, so sind die zugehörigen Normalspannungen σ_r, σ_t — unter Weglassung der Querkontraktion — $E q'$ bzw. $E q : x$ und das Gleichgewicht fordert mit $\sigma'_r = (\sigma_t - \sigma_r) : x$, daß

$$q'' + \frac{1}{x} q' - \frac{q}{x^2} = 0, \text{ also } q = c_1 x + \frac{c_2}{x} \text{ innen und } = c'_1 x + \frac{c'_2}{x} \text{ außen.}$$

Setzt man $r_a \sim r'_i = r$, so hat man zur Bestimmung der vier Konstanten die Bedingungen $\sigma_r = -p$ für $x = r_i$, $\sigma_2 = 0$ für $x = r'_a$, ferner σ_r für $x = r$ in beiden Ausdrücken gleich und ebenda die Differenz der ϱ gleich δr , also

$$\begin{aligned} \frac{-p}{E} &= c_1 - \frac{c_2}{r_i^2}, & 0 &= c'_1 - \frac{c'_2}{r_a'^2}; & c'_1 - c_1 - \frac{c'_2 - c_2}{r^2} &= 0, \\ & & c'_1 - c_1 + \frac{c'_2 - c_2}{r^2} &= \delta, \end{aligned}$$

woraus der Wert von σ_i im Innern der Rohrseele:

$$\sigma_i = E \left(c_1 + \frac{c_2}{r_i^2} \right) = \underline{\underline{p \frac{r_a'^2 + r_i^2}{r_a'^2 - r_i^2} - \delta E \frac{r_a'^2 - r^2}{r_a'^2 - r_i^2}}}.$$

Der zweite Teil des Ausdruckes liefert unmittelbar die Entlastung durch die Aufschumpfung.

67. **Kritische Umdrehungszahl einer Welle.** Sei y die Endausbiegung, so ist die Fliehkraft $Q = m \omega^2 (a + y)$. Unter der Last Q biegt sich aber der Stab um $Q l^3 : 3 E J$ (vgl. Aufg. 63), also muß

$$y = \frac{m \omega^2 (a + y) l^3}{3 E J}, \quad \text{woraus} \quad y = \underline{\underline{\frac{a}{\frac{3 E J}{m \omega^2 l^3} - 1}}}.$$

Die Ausbiegung wächst also jedenfalls über das Maß hinaus, für das der Ansatz der elastischen Linie gilt, sobald sich ω^2 dem Wert $\underline{\underline{3 E J : m l^3}}$ nähert.

68. **Biegungsschwingungen eines Stabes.** a) Sei $y = C \sin \kappa t$ die momentane Ausbauchung in der Stabmitte, also $Q = -m \ddot{y} = \kappa^2 m y$ die Belastung durch die Trägheitskraft. Unter dieser Belastung folgt die elastische Linie der Differentialgleichung $y'' = M : E J = -\frac{Q}{2} x : E J$, woraus mit Rücksicht auf den Stützpunkt bei $x = 0$ und die Symmetriebedingung ($y' = 0$ in der Mitte) $y = \frac{-Q x}{48 E J} (4x^2 - 3l^2)$ folgt und für den Wert in der Mitte $y = \frac{Q l^3}{48 E J}$. Setzt man beide Werte für Q einander gleich, so wird

$$\kappa^2 m = \frac{48 E J}{l^3}, \quad \underline{\underline{\kappa = \sqrt{\frac{48 E J}{m l^3}}}}.$$

- b) Ist die Ausbiegung an der Stelle x gleich $y = z(x) \sin \kappa t$, also die Trägheitsbelastung pro Längeneinheit $\kappa^2 m y : l$, so folgt die elastische Linie der Differentialgleichung $y'''' = M'' : E J = \kappa^2 m y : l E J$

woraus mit dem Ansatz $z = \sin \frac{n\pi x}{l}$ folgt $y'''' = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 y$, daher

$$\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 = \frac{\kappa^2 m}{l EJ}, \quad \kappa = \pi^2 n^2 \sqrt{\frac{EJ}{m l^3}}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

69. **Torsionsschwingungen einer Welle.** Ist φ die Verdrehung im Abstand x von der Einspannung, so ist die Massenbeschleunigung einer Scheibe von der Stärke 1 durch $\frac{\gamma}{g} \frac{\pi}{2} a^4 \ddot{\varphi}$ gegeben, während das im

Querschnitt übertragene Moment gleich $\frac{\pi}{2} a^4 G \varphi'$ wird. Man hat somit

$$\frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \text{ mit } \varphi = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2 M_0}{\pi G a^4} \sin \omega t \text{ für } x = l.$$

Der Ansatz $\varphi = C \sin \omega t \sin \kappa x$ erfordert daher

$$\kappa^2 = \frac{\gamma}{g} \frac{1}{G} \omega^2 = 0,765 \cdot 10^{-6} \quad \text{und} \quad C = \frac{2 M_0}{\pi G a^4 \kappa \cos \kappa l}.$$

Die Amplitude für $x = l$ ist $\varphi_0 = C \sin \kappa l \sim C \kappa l$, während der statische Ausschlag unter dem Moment M_0 nur $2 M_0 l : \pi G a^4$ wäre.

Also $\varphi_0 : \varphi_{\text{stat}} = \frac{1}{\cos \kappa l} = \underline{1,0006}, \quad \varphi_0 = \underline{10^{-5}}.$

70. **Elastisches Dreieck.** Zerlegung der Kräfte im Punkt 3 und hierauf in 2 (wo als äußere Kraft eine vertikale anzunehmen ist) liefert die Zugkräfte

$$\text{in } 1-3: X + \frac{1}{\sqrt{3}} Y; \quad \text{in } 2-3: -X + \frac{1}{\sqrt{3}} Y; \quad \text{in } 1-2: \frac{1}{2} X - \frac{1}{2\sqrt{3}} Y.$$

Die Längenänderungen $\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{12}$ sind $l : FE$ mal den Kräften. Die Verschiebung u_2 des Punktes 2 in der x -Richtung ist gleich der Dehnung von 1-2, die Verschiebungen u_3, v_3 des Punktes 3 sind bestimmt durch

$$u_3 \cos 60^\circ + v_3 \sin 60^\circ = \varepsilon_{13}, \quad (u_2 - u_3) \cos 60^\circ + v_3 \sin 60^\circ = \varepsilon_{23},$$

$$\text{also } u_2 = \frac{l}{2FE} \left(X - \frac{1}{\sqrt{3}} Y \right), \quad u_3 = \frac{l}{4FE} \left(9X - \frac{1}{\sqrt{3}} Y \right),$$

$$v_3 = \frac{l}{4FE} \left(3Y - \frac{1}{\sqrt{3}} X \right).$$

VI. Hydro- und Aeromechanik.

71. **Finger im Wasserglase.** Da durch das Eintauchen der Wasserspiegel steigt, erhöht sich der Bodendruck um das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit. Diese Gewichtszunahme ist die Gegenkraft des Auftriebes, den der Finger erfährt.

72. **Wassertrog auf der schiefen Ebene.** Der Wasserspiegel steht senkrecht auf der Richtung der resultierenden Massenkraft, die sich hier aus der Schwere und der Trägheitskraft zusammensetzt. Erstere ist vertikal abwärts gerichtet und proportional g , letztere parallel der schiefen Ebene aufwärts und proportional $g \sin(\alpha - \varphi) \sim g(\alpha - \varphi)$. Sind α und φ kleine Winkel, so schließt die Resultierende mit der Normalen zur schiefen Ebene, also auch der Wasserspiegel mit der Gleitrichtung, den Winkel φ ein.
73. **Überqueren der Strömung.** Weicht die Richtung der relativen Bewegung zwischen Kahn und Wasser stark von der Längsrichtung des Kahnes ab, so steht der resultierende Wasserdruck annähernd senkrecht auf der letzteren. Durch das an der Führung gleitende Seil wird die Druckkomponente, die der Strömung parallel läuft, aufgehoben und es bleibt eine quergerichtete Komponente übrig, die den Kahn — die Reibung in der Führung überwindend — quer zur Strömung treibt. Durch das Steuer muß die Richtung des Kahnes dauernd eingestellt werden.
74. **Stabilität eines schwimmenden Zylinders.** Ist der Zylinder in aufrechter Stellung bis zur Höhe $l' = l\gamma:\gamma_0$ eingetaucht, so liegt das Metazentrum um $\frac{\pi a^4}{4}:\pi a^2 l'$ über dem Schwerpunkt des eingetauchten Teils, also muß

$$\frac{a^2}{4l'} \geq \frac{l-l'}{2} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{a}{l}\right)^2 \geq 2 \frac{\gamma}{\gamma_0} \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_0}\right)$$

sein, damit die aufrechte Lage stabil bleibt. — Taucht der Zylinder liegend mit dem Kreissegment von der Sehne b , dem Zentriwinkel α und der Fläche $F = \frac{a^2}{2}(\alpha - \sin \alpha) = \pi a^2 \gamma:\gamma_0$ ein, so hat das Metazentrum die Höhe $\frac{bl^2}{12}:F$ über dem Segmentschwerpunkt, der um $b^3:12F$ unter dem Kreismittelpunkt liegt. Demnach erfordert hier die Stabilität mit $b = 2a \sin \alpha$:

$$\frac{bl^2}{12F} \geq \frac{b^3}{12F} \quad \text{oder} \quad \frac{l}{a} \geq 2 \sin \alpha,$$

wobei α aus $\alpha - \sin \alpha = 2\pi\gamma:\gamma_0$ zu rechnen ist. Für $l:a \geq 2$ ist immer die zweite, für $l:a \leq \sqrt{2}$ immer die erste Bedingung erfüllt, für dazwischen liegende Werte von $l:a$ ist z. B. bei $\gamma:\gamma_0 = \frac{1}{2}$ (oder einem von $l:a$ abhängigen Bereich in der Umgebung von $\frac{1}{2}$) keine der beiden Stellungen stabil, wie man am besten durch Aufzeichnen der beiden Grenzkurven in einem Koordinatensystem $\frac{l}{a} / \frac{\gamma}{\gamma_0}$ erkennt.

75. **Strömung in einem Kapillarrohr.** Nach dem Poiseuilleschen Gesetz ist die Durchflußgeschwindigkeit bei einem Gefälle J :

$$v = \frac{Jgr^2}{8Z} = \frac{1000 \Delta pgr^2}{8Zl} = \underline{26,0 \text{ cm/sec}}$$

und die Durchflußmenge

$$Q = r^2 \pi v = \underline{0,204 \text{ cm}^3/\text{sec.}}$$

76. **Offene Wasserleitung.** Bezeichnet a die Wassertiefe, so ist $Q = vab$ und der Ansatz für das erforderliche Gefälle

$$J = \left(0,0024 + \sqrt{\frac{k}{2a}} \right) \frac{Q^2}{2a^3 b^2 g}$$

führt nach Einsetzen der gegebenen Zahlwerte zu der Gleichung

$$\sqrt{a} (a^3 - 0,142) = 0,059.$$

Die linke Seite wächst bei positivem a monoton von 0 bis ∞ , gibt also nur einen reellen Schnittpunkt in der Höhe 0,059, der sich leicht als zwischen 0,60 und 0,61 liegend erweist.

77. **Ausfluß aus einem Behälter.** Ist h die augenblickliche Spiegelhöhe, also $\sqrt{2gh}$ die Ausflußgeschwindigkeit, so gilt für die in der Zeit dt austretende Wassermenge $dQ = \mu f \sqrt{2gh} dt = -\frac{d^2\pi}{4} dh$ und integriert:

$$\frac{2\mu f}{\pi d^2} \sqrt{2gt} = \sqrt{h_0} - \sqrt{h_1},$$

woraus sich mit $t = 3600$ usw. die Endhöhe $h_1 = 1,40$ m und daraus $Q = (h_0 - h_1) d^2\pi : 4 = \underline{10,7 \text{ m}^3}$ rechnet.

78. **Englerscher Flüssigkeitsmesser.** Nach dem Poiseuilleschen Gesetz ist die im Röhrchen erforderliche Druckhöhe bei der mittleren Geschwindigkeit c gleich $8Zca:gr^2$ und die Geschwindigkeit v im Abstand x von der Achse gleich $v = 2c(1 - x^2:r^2)$, woraus sich die

lebendige Kraft des austretenden Strahles zu $\frac{1}{2g} \int_0^r 2\pi x v^3 dx = \frac{c^2}{g} c r^2 \pi$

findet. Ist h die augenblickliche Spiegelhöhe über dem Austritt, so hat man danach

$$h - \frac{c^2}{g} = \frac{8Zc}{g r^2} a, \quad -R^2 \frac{dh}{dt} = r^2 c, \quad \frac{dh}{dt} = C(1 - \sqrt{1 + kh})$$

mit $C = 4aZ:R^2$, $k = gr^4:16a^2Z^2$ und integriert:

$$t = \frac{2}{kC} \left[\log \text{nat} \frac{H_0 - 1}{H_1 - 1} + H_0 - H_1 \right], \quad H_0 = \sqrt{1 + kh_0}, \quad H_1 = \sqrt{1 + kh_1},$$

wobei h_1 die aus h_0 und V zu berechnende Endhöhe $h_1 = 2,93$ cm ist. Mit den Zahlenwerten wird

$$t = 1037 \left[2,3026 \log \frac{H_0 - 1}{H_1 - 1} + H_0 - H_1 \right] Z,$$

$$H_0 = \sqrt{1 + \frac{0,03522}{Z^2}}, \quad H_1 = \sqrt{1 + \frac{0,01985}{Z^2}}.$$

79. **Kugel in zäher Flüssigkeit.** Nach der Stokesschen Regel ist, wenn Z den kinetischen Reibungskoeffizienten (Dimension: Länge² · Zeit⁻¹) bezeichnet, der Flüssigkeitswiderstand der Kugel gleich $6\pi\gamma Z a v$ g,

$$\text{also } 6\pi\frac{\gamma}{g} Z a_1 v_1 = \frac{4}{3}\pi a_1^3 (\gamma_1 - \gamma), \quad 6\pi\frac{\gamma}{g} Z a_2 v_2 = \frac{4}{3}\pi a_2^3 (\gamma_2 - \gamma),$$

$$\text{woraus } \gamma = \frac{\gamma_1 v_2 a_1^2 - \gamma_2 v_1 a_2^2}{v_2 a_1^2 - v_1 a_2^2}, \quad Z = \frac{2g}{9} \frac{a_1^2 a_2^2 (\gamma_2 - \gamma_1)}{\gamma_1 v_2 a_1^2 - \gamma_2 v_1 a_2^2}.$$

80. **Segnersches Wasserrad.** Ist v die Wassergeschwindigkeit in den Ausflußröhrchen, also die sekundliche Ausflußmenge $Q = Fv$, dann $c = v - a\omega$ die absolute Geschwindigkeit des Wassers nach dem Verlassen der Röhrchen, so hat man einerseits M gleich dem Reaktionsmoment, andererseits $M\omega$ gleich der vom Wasser abgegebenen Energie, also

$$M = \frac{\gamma}{g} Fv \cdot a c, \quad M\omega = \gamma Fv \left(h - \frac{c^2}{2g} \right), \quad c = v - a\omega,$$

woraus durch Elimination von v und c :

$$\omega = \frac{\sqrt{2g}}{a} \frac{h - \frac{M}{2\gamma Fa}}{\sqrt{\frac{M}{\gamma Fa} - h}}, \quad \frac{M}{2\gamma Fa} < h < \frac{M}{\gamma Fa}.$$

81. **Schwebearbeit.** Weil nach dem Energiegesetz das Minimum dieser Arbeit null, das Maximum aber beliebig groß sein kann. Die gesamte Schwebearbeit wird durch Reibung verzehrt. Berechnungen auf Grund des Reaktionsprinzips (aus der durch die Flügelbewegung abwärts geworfenen Luftmasse) haben immer nur für den besonderen, der Rechnung zugrunde gelegten Vorgang Geltung.

82. **Isobaren der ebenen wirbelfreien Bewegung.** Nach dem Energiegesetz sind die Linien gleichen Druckes zugleich Linien gleicher Geschwindigkeitsgröße. Ordnet man jedem Punkt x, y der Strömung den Punkt mit den Koordinaten $u, -v$ zu, wobei u, v die Geschwindigkeitskomponenten, so ist diese Abbildung bei Wirbelfreiheit eine winkeltreue (konforme). In dem Abbild werden aber die Kreise $u^2 + v^2 = \text{konst.}$ von den Geraden $u:v = \text{konst.}$ senkrecht geschnitten.

83. **Beispiel einer ebenen wirbelfreien Bewegung.** Der erste Teil von W (mit $C = 0$) stellt eine zu beiden Achsen symmetrische Strömung um den Kreis $|z| = a$ mit der zur x -Achse parallelen Zuflußgeschwindigkeit $-u$ im Unendlichen dar. Der zweite Teil bedeutet eine Bewegung in konzentrischen Kreisen mit nach außen abnehmender Geschwindigkeit und der konstanten Zirkulation (= Linienintegral der Geschwindigkeit) C .

84. **Zusammenhang zwischen Zirkulation und Auftrieb.** Im Punkt mit den Polarkoordinaten R, φ sind die Geschwindigkeitskomponenten $-u - \frac{C}{2R\pi} \sin \varphi$ und $\frac{C}{2R\pi} \cos \varphi$, die in den Kreis vom Radius R eintretende Menge ist $u \cos \varphi R d\varphi$, daher der Transport an Bewegungsgröße der y -Richtung

$$T = \int_0^{2\pi} \mu u \cos \varphi \cdot \frac{C}{2R\pi} \cos \varphi R d\varphi = \frac{\mu u C}{2}.$$

Der Druck p hat den Wert konst. $-\frac{\mu v^2}{2} = \text{konst.} - \frac{\mu u C}{2R\pi} \sin \varphi$, daher die Druckresultante der y -Richtung

$$P = \int_0^{2\pi} \frac{\mu u C}{2R\pi} \sin^2 \varphi R d\varphi = \frac{\mu u C}{2}.$$

Auf die zwischen der festen Kontur und dem Kreis R eingeschlossene Masse wirken in der y -Richtung die Kräfte $-A$ und P , also muß $A = P + T = \mu u C$ sein.

85. **Konstanz der Strömungsenergie.** Sind u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten, so lautet die Bewegungsgleichung der x -Richtung

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p + U) = 0.$$

Subtrahiert man hiervon den durch Differentiation von $u^2 + v^2 + w^2 = c^2$ entstehenden Ausdruck

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} (\mu c^2) = 0,$$

so erhält man zufolge der Definition von E

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial E}{\partial x} = -v \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -v \omega_x + w \omega_y,$$

und die analogen Gleichungen für die y - und z -Richtung, wenn $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ die Rotorkomponenten bezeichnen. Es ist also der Gradient von E bis auf einen konstanten Faktor das Vektorprodukt von c und ω , und dies verschwindet nur, wenn $\omega = 0$ oder ω parallel c .

VII. Verschiedene Aufgaben.

86. **Trägheitsmomente einer Dreiecksfläche.** Verschiebt man die Achse um α , so daß sie durch den Eckpunkt 1 geht, so zerfällt das Dreieck in zwei Teile, die sich wie $(\beta - \alpha) : (\alpha - \gamma)$ verhalten, also die Massen $\frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma}$ bzw. $\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}$ besitzen und deren Trägheitsmomente in bezug auf die gemeinsame Seite gleich den Massen mal $(\beta - \alpha)^2 : 6$ bzw. $(\gamma - \alpha)^2 : 6$ sind, so daß das gesuchte

$$J = \frac{1}{6} \frac{(\beta - \alpha)^3 + (\alpha - \gamma)^3}{\beta - \gamma} - \alpha^2 = \frac{1}{6} [(\beta - \alpha)^2 - (\beta - \alpha)(\alpha - \gamma) + (\alpha - \gamma)^2 - 6\alpha^2],$$

woraus wegen $\alpha + \beta + \gamma = 0$ der angegebene Wert. — Das polare Trägheitsmoment erhält man, indem man J für eine Parallele zur Seite a und die Senkrechte hierzu bildet, dann beide Werte addiert; im ersteren Falle sind $\beta = \gamma = -\frac{h}{3}$, $\alpha = \frac{2h}{3}$, im zweiten hat man die Abstände α , $\frac{a - \alpha}{2}$, $\frac{a + \alpha}{2}$, wobei noch

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a}{2} + \frac{3\alpha}{2}\right)^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2} - \frac{3\alpha}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} - \frac{\varphi \alpha^2}{4}.$$

Damit erhält man

$$J_p = \frac{1}{12} \left[\frac{2}{3} h^2 + \alpha^2 + \frac{a^2 + \alpha^2}{2} \right] = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{36}.$$

87. **Potential einer inhomogenen Kugel.** Das Potential einer Kugelschale vom Radius x und der Dicke dx ist in einem Punkt vom Abstand ϱ

$$\text{für } x < \varrho: \frac{4x^2 \pi \mu(x) dx}{\varrho} \text{ und für } x > \varrho: 0.$$

Also ist

$$\text{für } \varrho \geq R: P = \frac{4\pi C R^{n+3}}{(n+3)\varrho} \text{ und für } \varrho \leq R: P = \frac{4\pi C \varrho^{n+2}}{(n+3)}.$$

88. **Wind aus drei Geschwindigkeitsmessungen zu bestimmen.** Eine beobachtete Geschwindigkeit ist stets die Vektorsumme aus der nach Größe und Richtung konstanten Windstärke und der nur der Größe nach konstanten Eigengeschwindigkeit. Demnach liegen die Endpunkte der von einem Fixpunkt aus aufgetragenen scheinbaren Geschwindigkeiten auf einem Kreis, dessen Radius die Eigengeschwindigkeit und dessen Zentrum die vom Fixpunkt aus aufgetragene Windstärke begrenzt. Man hat demnach die drei beobachteten Geschwindigkeitsvektoren von einem festen Punkt aus aufzutragen und durch die drei Endpunkte den Kreis zu legen: der Vektor vom Fixpunkt

nach dem Kreismittelpunkt gibt die Windstärke nach Größe und Richtung, der Kreishalbmesser die Eigengeschwindigkeit (vgl. a. Aufg. 5).

89. **Helmholtzsche Modellregel.** Ist die Luft eine ideale, inkompressible Flüssigkeit, so ist längs eines Stromfadens

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{konst.}, \quad g = \text{konst.}, \quad \gamma = \text{konst.},$$

wo v die Geschwindigkeit, p der Druck, z die Höhenkoordinate. Bei ähnlicher Bewegung muß also v wie \sqrt{z} , p wie z wachsen, die Kraft wie $p z^2$, also wie z^3 , die Leistung wie $z^{7/2}$, also die Leistung pro Volumen wie \sqrt{z} .

90. **Ballastregel des Ballonaufstieges.** Ist V das Gasvolumen, γ' , γ das Raumgewicht des Gases bzw. der Außenluft, G das Gewicht der festen Teile und bezeichnet der Index 1 die analogen Größen in der neuen Höhenlage, so folgt aus $V(\gamma' - \gamma) + G = 0$, $V(\gamma'_1 - \gamma_1) + G_1 = 0$, weil

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{\gamma'_1}{\gamma'} = e^{-\frac{\Delta z}{RT}}$$

(dies wegen $dp:dz = -\gamma = -p:RT$), durch Subtraktion

$$\Delta G = G \left(1 - e^{-\frac{\Delta z}{RT}}\right) \sim G \frac{\Delta z}{RT} = \frac{1000 \cdot 100}{8700} = 11,5 \text{ kg.}$$

91. **Schwerpunktlage eines Flugzeuges.** Ist y die gesuchte Ordinate des Gesamtschwerpunktes (über dem Schwerpunkt des benzinleeren Flugzeuges), und h die Spiegelhöhe zur Zeit t , also $h_0 - h = kt$, so wird

$$y = \frac{1}{5} \left(a + \frac{h_0 - kt}{2} \right) \left(1 - \frac{kt}{h_0} \right), \quad 0 \leq t \leq \frac{h_0}{k}.$$

Mit $a = -h_0:2$ wird $y = 0$ zu Anfang und zu Ende und dazwischen ein Minimum gleich $-h_0:80$.

92. **Sanduhr.** Sobald sich ein stationärer Fließzustand eingestellt hat, ist das Gewicht unverändert: die „Aktion“ des auftreffenden Strahles ist um das Gewicht des freien Strahles größer als die „Reaktion“ beim Austritt. Nur bei Beginn des Ausfließens, bevor der Strahl den Boden des Gefäßes erreicht, vermindert sich das Gesamtgewicht um das Gewicht des „freien“ Strahles.

93. **Durchhängen eines Leitungsdrahtes.** Ist S die Seilspannung, p die Belastung der Längeneinheit, so gilt für flache Seilkurven die Differentialgleichung $y'' = -p:S$, woraus die Durchhängung in der Mitte

$$y_0 = \frac{p l^2}{8 S}.$$

Setzt man hier $p = \gamma f = 7,85 \cdot 10^{-4} \text{ kg/cm}$ und $y_0 = 1,0 \text{ cm}$, so erhält man $S_0 = 24,53 \text{ kg}$. Einer Abkühlung um $t = 15^\circ$ entspricht eine Erhöhung der Spannung (vgl. Aufg. 56) um $E \epsilon t f = 2 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 0,1 = 33 \text{ kg}$. Wächst gleichzeitig p auf $9,6 \cdot 10^{-4} \text{ kg/cm}$ an, so ist die neue Durchhängung

$$\underline{y_1 = \frac{9,6 \cdot 25}{8 \cdot 57,3} = 0,524 \text{ cm.}}$$

94. **Kreis als Kettenform.** Ist S die Spannung, τ der Neigungswinkel einer Seiltangente gegen die Horizontale, μ die Masse der Längeneinheit und ds das Längenelement, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$S d\tau = \mu g \cos \tau ds, \quad dS = \mu g \sin \tau ds.$$

Soll hier $ds = r d\tau$ mit $r = \text{konst.}$ sein, also $S = \mu g r \cos \tau$, so muß

$$\underline{\mu = \frac{\text{konst.}}{\cos^2 \tau}}.$$

Die konst. bestimmt sich aus der Länge des Seiles und der Lage der Aufhängepunkte.

95. **Aufstieg einer Rakete.** Sobald man den Ausströmvorgang relativ zur Rakete als stationär ansehen darf, gilt für die Ausströmgeschwindigkeit u , isotherme Ausdehnung des Gases vorausgesetzt,

$$\underline{u = \sqrt{2 R T \log \frac{p}{p_1}}},$$

wo R die Gaskonstante, T die absolute Temperatur, p_1 der Außendruck. Mit der Zustandsgleichung $\underline{\mu = p : R T}$ hat man weiter für die in der Zeiteinheit austretende Masse Q :

$$\underline{Q = \mu u f = -V \frac{d\mu}{dt}},$$

während die dem Bewegungswiderstand W gleichzusetzende Impulsänderung Qu beträgt. Aus der Gleichung für u , der Zustandsgleichung und den beiden Beziehungen für Q kann man u und Q als Funktionen der Zeit bestimmen und wenn W als Funktion der Aufstiegsgeschwindigkeit v gegeben ist, diese aus $\underline{W = Qu}$ rechnen.

96. **Hydraulisches Analogon einer elektrischen Bahn.** Ist u die Relativgeschwindigkeit, mit der das Wasser den fahrenden Wagen, rückwärts strömend, verläßt, und nimmt man an, daß das Wasser im Spiegel des Oberwasserkanals ruht, so ist die sekundlich geleistete Arbeit

$$\underline{Wv = \gamma Q \left[h - \frac{(u-v)^2}{2g} \right]}.$$

Andererseits hat die „Reaktion“ des ausströmenden Wassers (die Impulsänderung) die Größe

$$\underline{\frac{\gamma}{g} Q u = W.}$$

Aus diesen beiden Gleichungen läßt sich Q bei gegebenen W, h, v durch Elimination von u berechnen, z. B. für $W = 100 \text{ kg}, v = 2,5 \text{ m/sec}, h = 5,3 \text{ m}$ wird $\underline{\gamma Q = 100 \text{ kg/sec} = 360 \text{ m}^3/\text{St.}}$

97. **Elastische Stoßaufnahme.** Ist s_1 die stärkste Zusammendrückung der Feder, so ist die in diesem Zustand aufgespeicherte Federenergie gleich $s_1^2 : 2k$; also lautet die Arbeitsgleichung

$$G(h + s_1) = \frac{s_1^2}{2k},$$

woraus durch Auflösung

$$\underline{S_1 = \frac{s_1}{k} = G \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{kG}} \right]}$$

gleich $2G$ für $h = 0$ (plötzliche Aufbringung der Last G ohne Anfangsgeschwindigkeit).

98. **Schwingungen eines gespannten Seiles.** Für jede Seilhälfte besteht die Differentialgleichung

$$y'' = -\frac{\mu}{S} x^2 y,$$

wo S die Seilspannung, κ die Frequenz, y die Amplitude der Schwingung an der Stelle x . Integration bei Beachtung der äußeren Randbedingungen gibt für den ersten bzw. zweiten Teil des Seiles

$$y = A \sin \kappa \sqrt{\frac{\mu_1}{S}} x, \quad \text{bzw.} \quad y = B \sin \kappa \sqrt{\frac{\mu_2}{S}} (2l - x).$$

Für $x = l$ müssen diese Ausdrücke und ihre ersten Ableitungen übereinstimmen, woraus

$$\underline{\frac{\text{tg} \sqrt{\frac{\mu_1}{S}} \kappa l}{\text{tg} \sqrt{\frac{\mu_2}{S}} \kappa l} = -\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}}$$

als Gleichung zur Berechnung von κ . Sind μ_1 und μ_2 nur wenig voneinander verschieden, $\mu_2 = \mu_1 (1 + \varepsilon)$, so wird die Gleichung annähernd erfüllt durch

$$\underline{x = n \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{S}{\mu_1}} \frac{1}{l} \left(1 - \frac{\varepsilon}{4} \right), \quad n = 1, 3, 5 \dots}$$

99. **Schwingungen des frei herabhängenden Seiles.** Wenn man in der Differentialgleichung, zu der die Lösung der Aufg. 11 geführt hat, x für $L - x$ setzt, $\mu = \text{konst.}$ und $y = z e^{\kappa i t}$ einführt, so entsteht daraus der Ansatz

$$z'' + \frac{z'}{x} + \frac{\kappa^2 z}{g x} = 0.$$

Diese Gleichung ist unter den Bedingungen $z(l) = 0$ und $z(0) = \text{endlich}$ zu integrieren. Die Lösung wird durch die Besselsche Funktion nullter Ordnung J_0 geliefert

$$J_0(2u) = 1 - \frac{u^2}{(1!)^2} + \frac{u^4}{(2!)^2} - \frac{u^6}{(3!)^2} + \dots,$$

und zwar ist $z = c J_0\left(2\kappa \sqrt{\frac{x}{g}}\right)$, wovon man sich durch Einsetzen und Differenzieren unmittelbar überzeugen kann. Die gesuchten Frequenzen erhält man aus der angeführten ersten Nebenbedingung, $J_0\left(2\kappa \sqrt{\frac{l}{g}}\right) = 0$; sind $x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots$ die Nullstellen der Besselschen Funktion $J_0(x_\nu) = 0$, so sind die Frequenzen der Eigenschwingungen die Zahlen

$$\kappa_1 = \frac{x_1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \kappa_2 = \frac{x_2}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \dots, \quad \kappa_\nu = \frac{x_\nu}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \dots$$

Die ersten 40 Wurzeln sind z. B. in Jahnke-Emde, Funktionen- tafeln, Leipzig 1909, S. 122 angegeben. Die kleinste $x_1 = 2,4048$

gibt $\kappa_1 = 1,2024 \sqrt{\frac{l}{g}}$.

100. **Biegung bei nicht linearem Elastizitätsgesetz.** Zwei Querschnitte, die anfänglich parallel zueinander im Abstand ds lagen, bilden zufolge der Verbiegung einen Winkel $d\tau$ und schneiden sich in der Entfernung r_1 bzw. $r_1 + h$, gerechnet von der inneren bzw. äußeren Kante. Ein dazwischen liegendes Element, das den Abstand r von der Achse hat, erfährt die Dehnung $\varepsilon = \frac{r d\tau - ds}{ds} = \frac{r}{\varrho} - 1$, wo ϱ der Krümmungsradius des gebogenen Balkens, und eine Spannung σ , für die $\pm \alpha |\sigma|^m = \frac{r}{\varrho} - 1$. Das Gleichgewicht verlangt

$$b \int_{r_1}^{r_1+h} \sigma dr = 0, \quad b \int_{r_1}^{r_1+h} r \sigma dr = M.$$

Beachtet man, daß $r = \varrho \pm \alpha \varrho |\sigma|^m$, $dr = \pm m \alpha \varrho |\sigma|^{m-1} d\sigma$, so besagt die erste dieser Gleichungen, daß die Randwerte von σ für

$r = r_1$ und $r = r_1 + h$ entgegengesetzt gleich sein müssen, woraus dann $(r_1 + h) - r_1 = 2\alpha\varrho\sigma_1^m$, die zweite gibt

$$M = m\alpha^2\varrho^2b \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \sigma^{2m} d\sigma = m \frac{bh^2}{4} \frac{1}{\sigma_1^{2m}} \frac{2\sigma_1^{2m+1}}{2m+1},$$

also die gesuchte Beziehung zwischen M und σ_1 :

$$\sigma_1 = 2 \left(2 + \frac{1}{m} \right) \frac{M}{bh^2}.$$

Für die Annahme $m = 1$ der klassischen Elastizitätstheorie folgt daraus das bekannte Resultat $\sigma_1 = \frac{6M}{bh^2}$.

Elektrizität und Magnetismus.

I. Elektrostatik.

1. Das Feldbild entsteht durch Superposition zweier unipolarer Bilder. Diese erhält man am einfachsten, wenn man den Raum um die Kugel durch Kegelmäntel einteilt, so, daß zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Kegeln derselbe Kraftfluß fließt.
2. Im Innern des Metalls Feld null; Kraftlinien münden senkrecht auf der Platte.
3. Brechung der Kraftlinien nach dem Tangensgesetz.
4. Die Äquipotentiallinien haben einen Sattelpunkt.
5. Legt man in den Dipol ein Polarkoordinatensystem r, ϑ und zählt ϑ von der Achsenrichtung des Dipols aus, so ist das Potential
$$\varphi = \frac{m \cos \vartheta}{r^2},$$
 woraus das Kraftfeld sich in bekannter Weise ergibt.
6. Das Wesentliche ist, daß das positive Feld der Anode durch das Gitter „durchgreift“. Anstieg des Potentials von der Kathode aus nach allen Seiten bis zu einer Entfernung vom Gitter, die von der Größenordnung der Gitteröffnungen ist, dann weiterer Anstieg in die Gitteröffnungen hinein, von diesen aber Abfall zur Oberfläche der Gitterdrähte hin.
7. Nur ein sehr kleiner Teil der Elektronen kommt zur Kathode zurück. Die Mehrzahl wird durch das Gitter zur Anode gelangen.

8. $\varrho = +1,33 \cdot 10^{-9}$ CGS.

$\sigma = -2,65 \cdot 10^{-4}$ CGS.

$E = -1,35 \cdot 10^{15}$ CGS $= -4,5 \cdot 10^5$ Coulomb.

9. Folgt, wenn man die Laplacesche Gleichung in Polarkoordinaten schreibt, dann integriert durch eine Reihe, die nach Potenzen des Abstandes von dem betreffenden Schnittpunkt fortschreitet.

10. Die Lösung ergibt sich durch Entwicklung der Abstände R_s des Aufpunktes von den Ladungen e_s nach negativen Potenzen von $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. (\mathbf{r} = Einheitsvektor in Richtung r .)

$$\Phi = \frac{\sum e_s}{r} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \sum e_s r_s \right) - \frac{1}{2r^3} \left\{ \sum e_s x_s^2 \left(1 - \frac{3x^2}{r^2} \right) \right. \\ \left. + \dots \sum e_s z_s^2 \left(1 - \frac{3z^2}{r^2} \right) - \frac{6 \cdot \sum e_s x_s y_s \cdot x \cdot y}{r^2} - \dots - \frac{6 \cdot \sum e_s z_s x_s \cdot z \cdot x}{r^2} \right\}.$$

11. ϱ proportional $1/r$.

12. $\varrho = \text{konst.}; T = 2\pi r_0^{3/2} \sqrt{m/\sqrt{e \cdot E}}$.

13. Die Frequenz bleibt ungeändert, es wird nur der Schwingungsmittelpunkt gegen die alte Ruhelage in Richtung des Feldes verschoben um die Strecke $\delta = e \cdot E/k$.

14. Das Coulombsche Gesetz lautet $K = \frac{e_1 e_2}{r^2} \cdot \frac{1}{4\pi}$, woraus die Beantwortung der übrigen Fragen der Reihe nach folgt.

15. $A = \frac{7}{4} \frac{e^2}{a}$.

16. $a = b \cdot \sqrt{3}; \omega^2 = \frac{3\sqrt{3}-1}{4} \frac{e^2}{m a^3}$.

17. $s_n = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi k}{n}}$.

18. $\omega = \frac{1}{m a} \left(\frac{e \cdot E}{a^2} - s_n \right)$. (Bedeutung von s_n s. Aufg. 17.)

19. $a = b \cdot \sqrt{3}; \omega^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - s_n \right) \frac{e^2}{m a^3}$. (Bedeutung von s_n s. Aufg. 17.)

20. Man bestimmt das System durch die generellen Koordinaten q_i und die zugehörigen Impulse p_i und stellt nach den Hamiltonschen Gleichungen die kinetische Energie als Funktion der Produkte $\dot{q}_i p_i$, die potentielle Energie als homogene Funktion der q_i dar.

21. Aus dem Ausdruck $\frac{1}{2}(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ für die Feldenergie.

22. Im inhomogenen Feld wandert die Kugel nach Orten maximaler Feldstärke (dem absoluten Betrag nach, also unabhängig von der Feldrichtung). Im homogenen Feld bleibt die Kugel in Ruhe.

23. In Richtung der größten Kraftänderung, also nicht längs der Kraftlinien.

24. a) Ist ϑ der Winkel zwischen Nadelachse und E_0 , so ist $\operatorname{tg} \vartheta = b/a$, die Nadel steht in Richtung größten Kraftgefälles. b) $T \sim l/\sqrt{a^2 + b^2}$.

25. a) Nadelachse \perp Feld (labil) und Nadelachse \parallel Feld (stabil). b) $T \sim 1/E_0$.

26. Folgt durch Zerlegung des Feldes in zwei Teilfelder, von denen das eine das ungestörte Feld ist, das andere vom dielektrischen Körper infolge der Polarisierung desselben auszugehen scheint.

$$27. \delta p = V^2/8\pi r_0^2.$$

$$28. \mathcal{E} = 4\pi r_0/e.$$

$$29. \text{a) und b) } r = 7,15 \cdot 10^{-4} \sqrt[3]{V/d} \text{ cm.}$$

$$30. \text{a) } 8,7 \cdot 10^3 \text{ sec} = 2 \text{ Stunden } 25 \text{ Min.}, \text{ b) } 0,05 \text{ mm.}$$

$$31. K = 2\pi\sigma \cdot e.$$

$$32. K = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{e^2}{4l^2}; \quad K_g : K_m = 0,714.$$

33. Das Feld wird dargestellt durch das Feld unendlich vieler elektrischer Bildpunkte rechts und links außerhalb des Kondensators, die auf derselben Normalen zu den Platten wie das geladene Körperchen liegen. Es wechseln positive und negative Ladungen ab, die jeweils untereinander den Abstand $2d$ haben und in den Bildern des Körperchens bzw. im Abstand $2d$ von den Platten beginnen.

34. Man erhält zwei sich in dem Punkte berührende Kugeln, die auf konstantem Potential stehen. In jeder Kugel sind unendlich viele Bildpunkte, außerhalb der Kugeln ist das Feld identisch mit dem von diesen Bildpunkten herrührenden Feld.

$$35. 0,14 \cdot E^2/a.$$

$$36. E/e = 5 \text{ oder } = 0,2.$$

$$37. \mathcal{E}_x = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_0 R^3 \frac{y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}},$$

$$\mathcal{E}_y = 3\mathcal{E}_0 \cdot R^3 \cdot \frac{x \cdot y}{(x^2 + y^2)^{5/2}},$$

$$\text{Oberflächendichte } \sigma = \frac{3\mathcal{E}_0}{4\pi R} x.$$

$$38. \text{a) Anziehende Kraft } K = \frac{e^2 R^3}{d^3} \cdot \frac{2d^2 - R^2}{(d^2 - R^2)^2},$$

$$\text{b) Anziehende Kraft } K = \frac{e^2 R^3}{d^3} \frac{2d^2 - R^2}{(d^2 - R^2)^2} - \frac{E \cdot e}{R^2},$$

$$\text{c) Anziehende Kraft } K = \frac{e^2 \cdot R \cdot d}{(d^2 - R^2)^2}.$$

39. Aus der Lösung 38 b) folgt eine Entfernung $d = d_0$, für welche $K = 0$. Gleichgewicht labil, da für $d < d_0$ die Kraft anziehend, für $d > d_0$ abstoßend ist. Labilität folgt auch unmittelbar aus dem Theorem von Gauß (Earnshaw).

$$40. a) V_a = \frac{e_a + e_b}{R_a},$$

$$V_b = \frac{e_a}{R_a} + \frac{e_b}{R_b}.$$

$$b) V_b = 0.$$

41. Man entwickelt zur Lösung das Potential $\varphi(r)$ des Kraftgesetzes nach Potenzen von $\delta \cdot \ln r$; $V_b = \frac{1}{2} V \delta \left\{ \ln \frac{4 R_a^2}{R_a^2 - R_b^2} - \frac{R_a}{R_b} \cdot \ln \frac{R_a + R_b}{R_a - R_b} \right\}$.

42. Folgt durch Benutzung der elektrischen Bilder und der Inversion. $E = R \cdot \ln 2$. $R =$ Kugelradius.

43. Folgt ebenso durch eine Näherungsbetrachtung.

$$E_R = R; \quad E_r = \pi^2/6 \cdot r^2/R.$$

$$\sigma_r/\sigma_R = \pi^2/6.$$

44. Kraft im Innern konstant $\mathfrak{G} = \frac{3 \mathfrak{G}_0}{2 + \varepsilon}$. Die Kraft im Außenraum setzt sich zusammen aus \mathfrak{G}_0 und dem Kraftfeld eines Dipols vom Moment $\mathfrak{G}_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot R^3$, der achsenparallel mit \mathfrak{G}_0 im Kugelmittelpunkt sitzt.

45. Im inneren Hohlraum ist \mathfrak{G} konstant

$$\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{2(\varepsilon - 1)^2}{9\varepsilon} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^3 \right]}.$$

46. Die Potentialdifferenz wird verkleinert um $\Delta V = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot (V_a - V_b)$.

$$47. a) K = \frac{300}{8} V^2 \frac{R^2}{d^2} \text{ Dyn.}$$

b) K ist 26 mal so groß wie in Fall a).

$$48. \mathfrak{G} = \frac{1}{r} \cdot \frac{V}{\ln(R_0/r_0)}.$$

$$49. l > \frac{v}{2V \cdot k} \cdot (R_0^2 - r_0^2) \ln(R_0/r_0).$$

50. Wenn $E_1/C_1 = E_2/C_2$ ist. Dann ist nämlich die Summe der Energien der beiden getrennten Flaschen gleich der Energie der zusammengeschalteten.

$$51. T = 4,605 \cdot C/r.$$

52. Ladezeit um so kürzer, je kleiner die Tropfen sind.

$$53. C = \frac{1}{2 \ln \frac{r_1 \cdot r_2}{f}}, \text{ wo } f = \left(\sqrt{\frac{x^2}{4} + r_1^2} - \frac{x}{2} \right) \left(\sqrt{\frac{x^2}{4} + r_2^2} - \frac{x}{2} \right),$$

$$x \text{ bestimmt aus: } d = \sqrt{\frac{x^2}{4} + r_1^2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} + r_2^2}.$$

Zur Lösung bildet man die Zylinder ab durch zwei Gerade.

54. Ergibt sich aus der vorigen Aufgabe durch den Grenzübergang $r_2 = \infty$.

$$C = \frac{1}{2} \frac{1}{\ln \left(\frac{h + \sqrt{h^2 - r^2}}{r} \right)}.$$

55. $C = 2700 \text{ cm.}$

56. $C = 76,5 \text{ cm.}$

57. $C = \varepsilon \cdot \frac{R \cdot r}{R - r}.$

58. $C = f/4\pi d$. Die Scheiben sind aufzufassen als Teile von sehr großen konzentrischen Kugeln.

59. $C = 0,01 \text{ MF.}$

60. Verlängertes Ellipsoid $1/C = \frac{1}{2ae} \ln \frac{1+e}{1-e},$

verkürztes Ellipsoid $1/C = \frac{\arcsin e}{a \cdot e},$

wobei e die Exzentrizität ist.

61. $C = 2R/\pi$, bis auf Glieder zweiter Ordnung in d/R .

62. $\delta E = \delta x \cdot \frac{V_1 - V_2}{2 \ln \cdot R/r} \left\{ V - \frac{1}{2} (V_1 + V_2) \right\}.$

II. Magnetostatik.

63. $\varphi = \frac{M \cdot \cos \vartheta}{r^2}$. $M =$ Moment, ϑ Winkel zwischen Dipolachse und r .

Daraus das Feld $\mathfrak{H}_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$; $\mathfrak{H}_t = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}$.

64. Für den Winkel α zwischen Nadelachse und r gilt $\text{tg } \alpha = \frac{1}{2} \text{tg}$

65. a) Anziehende Kraft $K = 6 \frac{M_1 M_2}{r^4}$; stabil,

b) abstoßende Kraft $K = 3 \frac{M_1 M_2}{r^4}$; instabil.

66. $t = 2\pi \sqrt{\frac{T}{M \cdot H}}.$

67. $E = -M \cdot H \cdot \cos \vartheta$. Gleichgewicht für $E = \text{max.}, \text{ min.},$ d. h. $\vartheta = 0$ bzw. 180° . Stabil, wenn M und H gleichgerichtet, labil, wenn sie entgegengesetzt gerichtet sind.

68. $M = N \cdot m \{ \text{Cotg. hyp. } a - 1/a \}$, wobei

$$a = \frac{N \cdot m \cdot H_0}{R T}.$$

69. $\delta A = -\frac{3}{4\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \delta (\xi_0^2)$. Paramagnetische Kügelchen werden nach den Orten größter, diamagnetische nach den Orten kleinster (absoluter) Feldstärke gezogen.

70. a) Man mißt das Linienintegral $\int_A^B \xi \, d\bar{s}$. b) Keine Wirkung. c) Proportional $n \cdot I$.

71. $\mathfrak{A} = [\text{grad } 1/r, \mathfrak{M}]$.

72. Sind m_1 und m_2 die Momente der beiden Endelemente des Drahtes, r_1 und r_2 die Abstände derselben vom Aufpunkt, so ist das skalare Potential des Feldes $\varphi = m_1/r_1 - m_2/r_2 - \int \frac{\varrho \, d\sigma}{r}$. Das Integral erstreckt sich über den Draht, $\varrho = \frac{dm}{ds}$.

73. Für den solenoidalen Magnet ist die Raumdichte des freien Magnetismus null, für den lamellaren Magnet hat die Magnetisierung ein Potential.

74. An der Oberfläche $\frac{1}{4\pi} \frac{\mu_1 - 1}{\mu_1}$, in der Schicht $\frac{1}{4\pi} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 \cdot \mu_1}$ (unabhängig von d).

75. Der Widerstand wächst so, als ob die Länge des Eisenweges sich um $d(\mu - 1)$ vergrößert hätte.

76. Arbeit = $M \times$ Änderung der Zahl der durch das Blatt gehenden Kraftlinien.

77. Der Aufpunkt sei festgelegt durch den Abstand h von der Ebene des Streifens und durch den Abstand x des Fußpunktes von h von der Mittellinie des Streifens. Dann ist das Potential des Feldes

$$\varphi = 4I \left\{ \text{arctg } \frac{h}{x-b} - \text{arctg } \frac{h}{x+b} \right\}.$$

78. $\varphi = 2\pi r_0^2 I \frac{\cos \vartheta}{r}$.

79. $H = 4\pi I \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4r_0^2}} \right)$.

80. Das Potential der Feldkraft ist $\varphi = \frac{4}{3} R^3 \pi \cdot I \frac{\cos \vartheta}{r^2}$ im Außenraum; im Innern ist die Kraft konstant $\frac{4}{3} \pi I$.

81. $r = 250 \text{ km}$.

82. Es ist zu folgern, daß \mathfrak{H} ein eindeutiges Potential hat und daß kein Strom die Dreiecksschleife durchsetzt. Man kann dann z. B. aus der Deklination in den drei Punkten und der Horizontalintensität H in zwei Punkten dieselbe im dritten Punkt berechnen.

83. Ist $90^\circ - \delta = \gamma$, so ist die Ost-Westkomponente $H_{ow} = \frac{1}{\cos \delta} \int_0^\gamma \frac{\delta H_s}{\delta \lambda} d\gamma$.

84. $\operatorname{tg} i = 2 \operatorname{tg} \beta$.

85. $M = H \cdot R^3 / \sin \beta$; $R =$ Erdradius.

86. Es sind die Verhältnisse für eine dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld formal unmittelbar zu übertragen. Innen ist das Feld konstant, außen ist das Feld darzustellen durch Superposition des homogenen Feldes H_0 mit dem eines gleichgerichteten Dipols im Zentrum der Kugel. Die Verhältnisse werden denen bei einer Metallkugel im elektrischen Feld analog (Kraftlinien \perp Oberfläche, Feld innen null), wenn μ unendlich groß ist.

87. $\mathfrak{H}_i = \text{konst.} = \frac{3}{2 + \mu} \cdot \mathfrak{H}_0$; \mathfrak{H}_a ist gegeben wie \mathfrak{C}_a der Aufgabe 44 aus der Elektrostatik, wenn man ε durch μ ersetzt.

88. Energiedichte $= 9\mu / (\mu + 2)^2$. Energiedichte im gestörten Feld.

$$I = H_0 \cdot \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 2}; \quad w = \frac{3}{4\pi} H_0 \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \cos \vartheta.$$

89. $H_i = H_0 \cdot \frac{9\mu}{9\mu + 2(\mu - 1)^2 (1 - r^3/R^3)}$.

III. Stationäre Ströme.

90. a) $R = \Sigma R_\nu$; b) $1/R = \Sigma 1/R_\nu$.

91. $W = 5/6$ Ohm.

92. In Gruppen zu K jeweils parallel und die n/K -Gruppen in Serie,

$$\text{wobei } K = \sqrt{n \cdot \frac{w_i}{w_a}}; \quad i_{\max} = e/2 \cdot \sqrt{\frac{n}{w_i w_a}}.$$

93. 20 Amp.

94. a) $\gamma = w_a / (w_a + n w_i)$;

b) $\gamma = w_a / (w_a + w_i/n)$;

c) $\gamma = w_a / \left(w_a + \frac{n w_i}{K^2} \right)$.

γ ist am größten für Parallelschaltung aller Elemente.

95. Folgt daraus, daß die Stromstärke im Galvanometer proportional $1/(w_i + w_a)$ und der Ausschlag proportional i und $\sqrt{w_i}$ ist.

$$96. Ab - aB + \frac{d}{\alpha + \beta} \{b(A + \alpha) - a(B + \beta)\} = 0.$$

Spezielle Lösung $A/B = a/b = \alpha/\beta$.

97. Es ergibt sich für R ein Kettenbruch der Form:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{r + \frac{1}{\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{r + \frac{1}{\frac{1}{\varrho} + \dots}}}}$$

98. Folgt aus der Diskussion der Differentialgleichung für das Potential V , welche die Form hat $d^2V/dx^2 = k \cdot V$, also mit der Wärmeleitungsgleichung formal übereinstimmt.

99. Folgt aus dem Brechungsgesetz der Kraftlinien.

$$100. a) w = \frac{1}{2\pi d \sigma} \ln(r_a/r_i),$$

$$b) w = \frac{2\pi}{d \sigma} \cdot 1/\ln(r_a/r_i).$$

101. $w = \frac{1}{2\pi \sigma r_0}$. Zur Lösung stellt man das Potential in unmittelbarer Umgebung der Kugeln dar durch a/r , wobei $a/r_0 = V_1$ bzw. V_2 ist, wenn V_1 und V_2 die Potentiale der Kugeln sind.

$$102. w = \frac{1}{\pi \sigma \cdot r_0}.$$

103. Der Ausdruck genügt, wie man durch Ausrechnen zeigt, der Differentialgleichung für das Potential und den Grenzbedingungen; man erhält ferner aus $\sigma \text{ grad } \varphi = \text{Stromdichte}$ den Gesamtstrom i durch die Elektroden. — Die Stromlinien bilden mit der Peripherie ein durch die Elektroden gehendes Bündel von Kreisen.

104. Ist z die Richtung des Drahtes, r und ϑ Polarkoordinaten einer Ebene senkrecht zum Draht, so ist $\mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}_r = 0$; $\mathfrak{H}_\vartheta = \frac{2i}{r}$; $\mathfrak{A} = 2i \vartheta$, $\mathfrak{A}_z = 2i \ln r$, $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_\vartheta = 0$.

$$105. |\mathfrak{H}| = 2\pi i \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

106. Am einfachsten durch das skalare Feldpotential φ , das in großer Entfernung die Form wie in Aufg. 63 annimmt.

$$107. 5 \cdot 10^{-36} \cdot n.$$

108. Der Aufpunkt ist gegeben durch Zylinderkoordinaten (z, r, φ) , deren Achse im Mittelpunkt des Kreises senkrecht auf der Kreisebene steht

$$\mathfrak{A}_z = \mathfrak{A}_r = 0; \quad \mathfrak{A}_\varphi = 2i a \int_0^\pi \frac{\cos \varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{r^2 + z^2 + a^2 - 2ra \cos \varphi}}. \quad \text{Darzu-}$$

stellen durch elliptische Integrale, die für große Entfernung zu entwickeln sind nach $k = \frac{4ar}{z^2 + (a+r)^2}$. Man erhält für $k \ll 1$

$$\mathfrak{A}_\varphi = a^2 \pi i \frac{r}{\{z^2 + (r+a)^2\}^{3/2}}, \quad \text{und daraus das Feld.}$$

109. Gegeben durch das Potential $\varphi = 4\pi^2 \sigma n \int_0^a r \left(1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right) dr$.

110. Potential $\varphi = 4\pi^2 \sigma n r \{2l - \sqrt{R^2 + (z-l)^2} + \sqrt{R^2 + (z+l)^2}\} R$.

111. Wie $\frac{n \cdot E \cdot t}{w + w_s n t}$ zwischen $t = 0$ und $t = 1/n$.

112. $M = \frac{4\pi}{3} \int_0^a \rho(r) r^4 dr$.

113. Potential $\varphi = \frac{4\pi n i}{l} (\{\sqrt{r_0^2 + (z-l)^2} - \sqrt{(z-l)^2}\} - \{\sqrt{r_0^2 + (z+l)^2} - \sqrt{(z+l)^2}\})$; zwei magnetische Belegungen an den Spulenden.

114. $H = 4\pi n I$.

115. Durch 1 cm^2 gehen $8,4 \cdot 10^5$ \mathfrak{B} -Linien.

116. Hat der Aufpunkt von den Drähten die Entfernungen r_1 bzw. r_2 und laufen die Drähte in der z -Richtung, so ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_z = 2i \ln r_1/r_2$. Das skalare Potential ist das eines magnetischen Blattes zwischen den Drähten vom Moment i (vgl. Aufg. 77).

117. Die Lage des Aufpunktes ist bestimmt wie in Aufg. 116. Dann ist

$$\mathfrak{A}_z^a = 2i \ln r_1/r_2,$$

$$\mathfrak{A}_z^i = 2i \left(\frac{1}{2} \frac{r_1^2 - a^2}{a^2} - \ln r_2/a \right),$$

$$\text{bzw. } -2i \left(\frac{1}{2} \frac{r_2^2 - a^2}{a^2} - \ln r_1/a \right),$$

wobei Konstante zugefügt sind, damit das Vektorpotential an der Oberfläche der Drähte stetig ist.

118. Kraftfeld homogen, $\mathfrak{H} \parallel$ Tafelene und $\perp i$. $|\mathfrak{H}| = 4\pi I$.

119. Legt man ein Koordinatensystem durch den Magnetpol, so folgt der Satz daraus, daß die Momente der Kraft, berechnet nach dem Gesetz von Biot-Savart, um die drei Achsen gleich null sind.

120. Folgt aus der Lösung von Aufg. 76, wenn man den Stromkreis durch ein magnetisches Blatt ersetzt.

121. Der Drahtbügel dreht sich nur, wenn ein Pol innerhalb, der andere Pol außerhalb des Halbkreises liegt. Das Blatt besitzt hinter dem Pol eine konkave Ausbauchung und wickelt sich wie eine unendlich dehnbare Membran bei der Bewegung in sich selbst ein, wobei es dauernd Kraftlinien aufsaugt.

122. $A = 9400 \text{ Erg.}$

123. Das Gleitstück sucht sich von den Stromzuführungsstellen zu entfernen; Wirkung des Magnetfeldes addiert oder subtrahiert sich je nach der Stromrichtung.

$$124. K = 8i_1 i_2 \left\{ \frac{a^2}{h\sqrt{a^2 + h^2}} - \frac{a^2 h}{(a^2 + h^2)\sqrt{2a^2 + h^2}} + \frac{2h}{\sqrt{a^2 + h^2}} - \frac{h}{\sqrt{2a^2 + h^2}} - 1 \right\}.$$

$$125. a = 2i \cdot I \cdot l \cdot \ln \frac{d}{d+b}.$$

126. Die Diskussion der Bewegungsgleichungen gibt $v = \text{const}$ und für die Entfernung r des Elektrons vom Draht, daß diese stets zwischen der größten und kleinsten Wurzel der Gleichung liegt

$$\frac{2e}{m} i \ln x = \left(v^2 - \frac{h^2}{x^2} \right)^{1/2} - C,$$

worin C eine Konstante ist, die bestimmt ist durch

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2e}{m} i \ln r + C$$

und h die Konstante des Flächensatzes für die Bewegung in einer Ebene senkrecht zur Drahtachse (z -Richtung) ist.

127. $V/H = v/c \cdot 300 (= v \cdot 10^{-8})$.

128. Die Schwingungszahl in Richtung des Feldes bleibt ungeändert. Senkrecht zum Feld gibt es zwei Schwingungszahlen

$$n_{1,2} = +\frac{1}{2} e/m \cdot H + \sqrt{n_0 + \left(\frac{1}{2} e/m \cdot H\right)^2}.$$

129. Die Frequenzen sind $n'_3 = n_3$ und mit $h = e/m \cdot H$ für schwache Felder

$$n'_1 = n_1^2 \left(1 + \frac{h^2}{n_1^2 - n_2^2} \right),$$

$$n'_2 = n_2^2 \left(1 + \frac{h^2}{n_1^2 - n_2^2} \right),$$

während für starke Felder gilt

$$n'_1 = \sqrt{\frac{n_1^2 + n_2^2}{2}} + \frac{h}{2},$$

$$n'_2 = \sqrt{\frac{n_1^2 + n_2^2}{2}} - \frac{h}{2}.$$

130. Die Bahn ist eine ebene Spirale, welche gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \lambda x - y &= -r \cdot e^{-(e/m \cdot t H)\lambda} \sin(e/m \cdot t H), \\ \lambda y + x &= r \cdot (1 - e^{-(e/m \cdot t H)\lambda}) \cos(e/m \cdot t H). \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit des Elektrons in dieser Spirale ist gegeben durch

$$v = v_0 e^{-k e/m \cdot t}.$$

Die Reibungskraft ist dabei gesetzt $R = k \cdot e \cdot v$ und

$$k = \lambda \cdot H, \quad r = \frac{m v_0}{e H}.$$

IV. Quasistationäre Vorgänge.

131. Folgt aus dem Stokesschen Satz, wonach

$$d/dt \left(\int \mathfrak{B}_n d\sigma \right) = \int \mathfrak{C} d\mathfrak{s} = \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = E.$$

132. $Q = \frac{4\pi M \cdot n}{w}$; $w =$ Widerstand der Spule.

133. Winkel $= \text{arc ctg } w/2\pi^3 n r$.

134. $i = \frac{H \cdot F \cdot W \cdot \cos wt}{\sqrt{L^2 w^2 + R^2}}$; $M = i \cdot H \cdot F \cdot \cos wt$.

135. $V = \frac{1}{2} H_0 \cdot v \cdot R$.

136. $L_{12} = n_1 n_2 \cdot q/l \cdot \mu \cdot (4\pi)^2$; Zahlenbeispiel: 0,6 Henry.

137. Folgt daraus, daß die induzierte EMK um 90° gegen das magnetische Feld, der induzierte Strom wegen der stets vorhandenen Selbstinduktion gegen die EMK um einen Winkel zwischen 0 und 90° , der induzierte Strom also gegen das Feld um einen Winkel zwischen 90° und 180° verschoben ist.

138. Die Kraft steht senkrecht zur Begrenzungsfläche und ist nach dem Innern der Metallmasse gerichtet. Die Größe der Kraft ist

$$K = \frac{\sigma}{2n} a^2 \cdot \cos^2 \left(nt - \frac{\pi}{4} \right).$$

139. Abstoßende Kraft normal zur Platte vom Betrag $K = \frac{1}{4c^2} \frac{v}{w/2\pi + v}$, wenn der Pol den Abstand r von der Platte hat.

140. a) $\ln R = \ln a - 0,25$; b) $\ln R = \ln a - 0,805$.

141. $R = d$.

142. $\ln R = \frac{\sum Q_n \ln R_n}{\sum Q_n}$.

143. $(r_1^2 + r_2^2)^2 \ln R = (r_1^4 \ln r_1 + r_2^4 \ln r_2 + 2r_1^2 r_2^2 \ln d) - 1/4 (r_1^4 + r_2^4)$.

$$144. \ln R = \ln 0,2235 + \frac{1}{2} \left(\frac{d+2b}{b} \right)^2 \ln (a+2b+d) \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{d+b}{b} \right)^2 \ln (a+b+d) + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{b} \right)^2 \ln (a+d).$$

$$145. \text{a) } L = 2l \left(\ln \frac{2l}{a} - 0,75 \right); \quad \text{b) } L = 2l \left(\ln \frac{2l}{a} - 0,195 \right).$$

$$146. L = 2l \left(\ln \frac{d^2}{a^2} + 1 \right).$$

$$147. L = 2l \left(\ln \frac{2l}{a} - 1 \right).$$

$$148. L_{12} = 4\pi R \left\{ \ln \frac{8R}{\sqrt{a^2+d^2}} - 2 \right\}.$$

149. Folgt, da die Energie proportional $\frac{1}{2} L i^2$, und daraus, daß der Strom, welcher dasselbe Magnetfeld erregt, umgekehrt proportional n ist.

$$150. l = 1170 \text{ km.}$$

$$151. r_1 + r_2 = d; \quad r_1 = r_2.$$

$$152. L_{12} = \frac{4}{3} \pi^2 n^4 (R_a - R_i) (r_a^3 - r_i^3).$$

153. Die Induktion auf die äußere Rolle wird verstärkt durch die Induktionslinien des Eisenkernes, dessen Wirkung der eines Solenoids gleichgesetzt werden darf. Man erhält

$$L_{12} = 4\pi^2 n^4 (R_a - R_i) \left\{ \frac{r_a^3 - r_i^3}{3} + 4\pi k r_i^2 (r_a - r_i) \right\}.$$

$$154. A = L_{12} i^2 / 2 = 3 \text{ erg.}$$

$$155. 1885 \text{ erg.}$$

$$156. Q = \frac{E \cdot L}{(W+r)^2} \cdot r.$$

$$157. t = 0,0009_2 \text{ sec.}$$

$$158. C = 7,65 \cdot 10^{-3} \text{ Mikrofarad.}$$

$$159. w < 0,28 \sqrt{\frac{L}{C}} \left(0,089 \sqrt{\frac{L}{C}} \right).$$

$$160. w = 19000 \text{ Ohm.}$$

$$161. \text{Ist } E = \Sigma a_v \cdot \sin vnt, \text{ so ist } i = C \cdot n \cdot \Sigma v \cdot \cos vnt.$$

$$162. \text{ctg } \alpha = \frac{1}{n \cdot C \cdot r_p}; \quad \text{ctg } \alpha = n \cdot C \cdot r_s.$$

$$163. \text{Ist } 90 - \alpha_i = \delta_i, \text{ so ist } \delta_0 = \frac{\Sigma C_i \delta_i}{\Sigma C_i}.$$

$$164. E = 14000 \text{ Volt.}$$

$$165. J = 31,2 \text{ Amp.}$$

$$166. \pi^2 n^2 \cdot L \cdot C = 1.$$

167. Es ist $L_1 i_1 + L_{12} i_2 = L_2 i_2 + L_{12} i_1$. Die magnetische Energie wird dabei ein Minimum.

168. Wenn $w_p + \frac{L_{ps}^2}{L_s^2} w_s = \left(L_p - \frac{L_{ps}^2}{L_s} \right) n$.

169. $V = J \cdot \sqrt{\frac{w_i^2 (w^2 + n^2 L^2)}{(w + w_i)^2 + n^2 L^2}}$.

170. $L_1 / L_2 = w_3 / w_4 - \left(\frac{w_1 L_4 - w_2 L_3}{w_4 L_2} \right)$.

171. $C_1 / C_2 = w_4 / w_3$ und $\delta_1 / C_1 : \delta_2 / C_2 = w_3 : w_4$.

172. $M_1 / M_2 = w_1 / w_2 = \frac{L_1 + L_{12}}{L_2 + L_{12}}$.

173. 11,8 Henry.

174. $\frac{T - T_0}{T_0} = 0,1$. Die Abweichung beträgt also 10 Proz.

Wärmelehre.

1. Aus $v = v_0 [1 + \lambda t']$ folgt $\lambda = \frac{v_{100} - v_0}{100 v_0} = \frac{v_t - v_0}{t' \cdot v_0}$, also

$$t' = 100 \cdot \frac{v_t - v_0}{v_{100} - v_0} = 49,89^\circ.$$

2. $R' = \frac{1,987}{32} \text{ cal grad}^{-1} = \frac{1,987}{32} \cdot 4,1842 \cdot 10^7 \text{ Erg grad}^{-1} = 1948,7$

cem. mm Hg. grad⁻¹, da 1 mm Hg \times 1 cem = 0,1 · 13,596 · 980,62 Erg.

3. Für Sauerstoff gilt bei konstantem Volumen

$$(pv)_{p,t} = (pv)_{p,0} [1 + \beta t] = (pv)_{0,0} [1 + \beta t] [1 + \kappa p] = \frac{RT}{m} [1 + \beta t] [1 + \kappa p].$$

Eine entsprechende Gleichung gilt für Helium. Bei beiden ist die Dichte oder v das nämliche. Also

$$m' = m \frac{p}{p'} \frac{(1 + \beta' t)(1 + \kappa' p')}{(1 + \beta t)(1 + \kappa p)} = 4,000.$$

4. Da die Gasmasse vor und nach der Entspannung dieselbe ist, so gilt

$$p_1 \frac{V_1}{T_1} = p_2 \left[\frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2} \right]; \text{ hieraus folgt } V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} \frac{p_1 - p_2}{p_2} = 261 V_1.$$

Das gesuchte Massenverhältnis ist $\frac{V_1}{T_1} : \frac{V_2}{T_2} = 0,111 : 1$.

5. Ist D die Dichte der Luft, so $dh = -\frac{1}{D \cdot g} dp = -\frac{p_0}{D_0 g} \cdot \frac{T}{T_0} \frac{dp}{p}$

oder integriert $h - h_0 = \frac{p_0}{D_0 g} \cdot \frac{T}{T_0} \cdot \ln \frac{p_0}{p}$; $h_0 = 0$ also

$$\ln \frac{p_0}{p} = h \cdot g \cdot \frac{D_0}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T}; \quad D_0 = \frac{28,95}{22\,410} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}; \quad p = 169 \text{ mm Hg.}$$

6. $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$ oder $\frac{v \cdot \alpha}{-v \cdot \varepsilon} = -p\beta$; $\varepsilon = \frac{\alpha}{p\beta} = 0,999\,65$ pro m Hg.

7. $m_1 g$ von G_1 und $m_2 g$ von G_2 besitzen das Gesamtvolumen

$$V = \left(m_1 R_1 + m_2 R_2\right) \frac{T}{p'},$$

also die gesuchte Zustandsgleichung $p'v = \frac{m_1 R_1 + m_2 R_2}{m_1 + m_2} T$.

Die Partialdrucke sind $p_1 = \frac{m_1 R_1 T}{V}$ und $p_2 = \frac{m_2 R_2 T}{V}$ oder

$$p_1 = \frac{m_1 R_1}{m_1 R_1 + m_2 R_2} p'; \quad p_2 = \frac{m_2 R_2}{m_1 R_1 + m_2 R_2} \cdot p'.$$

8. a) Das Gesamtvolumen aller n Gase ist $V = R \frac{T}{p} \sum \frac{M_n}{m_n}$, also nach

Aufg. 7, da $R_n = \frac{M_n}{m_n} R$, $p_1 : p_2 : p_3 \dots = \frac{M_1}{m_1} : \frac{M_2}{m_2} : \frac{M_3}{m_3} \dots$ b) Ein Mol

enthält N Moleküle; vom n . Gas sind $\frac{M_n}{m_n}$ Mole vorhanden. Also

$N_1 : N_2 : N_3 : \dots = \frac{M_1}{m_1} : \frac{M_2}{m_2} : \frac{M_3}{m_3} \dots$ c) Allgemein ist $pV = \frac{M}{m} RT$,

also, da $M = \sum M_n$, nach 8a $m = \frac{\sum M_n}{\sum m_n}$.

9. Nach der van der Waalsschen Gleichung ist das Volumen der Masseneinheit

$v = \frac{RT}{p} + b - \frac{a}{pv} = \frac{RT}{p} + b - \frac{a}{RT}$. Das erste Gas nimmt

das Volumen $V_1 = M_1 \cdot R_1 \frac{T}{p} + M_1 b_1 - \frac{a_1 M_1}{R_1 T}$ ein. Das spezifische

Volumen der Mischung ist also

$$v = \frac{V_1 + V_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 R_1 + M_2 R_2}{M_1 + M_2} \frac{T}{p} + \frac{M_1 b_1 + M_2 b_2}{M_1 + M_2} - \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{M_1 + M_2} \cdot \left(\frac{a_1 M_1}{R_1} + \frac{a_2 M_2}{R_2}\right).$$

Also

$$R = \frac{M_1 R_1 + M_2 R_2}{M_1 + M_2}; \quad a = \frac{M_1 R_1 + M_2 R_2}{(M_1 + M_2)^2} \cdot \left(\frac{a_1 M_1}{R_1} + \frac{a_2 M_2}{R_2}\right); \quad b = \frac{M_1 b_1 + M_2 b_2}{M_1 + M_2}.$$

10. In $M_1 + M_2 g$ Luft seien $M_1 g$ O_2 und $M_2 g$ N_2 vorhanden. In der Bezeichnungsweise von Aufg. 8 ist dann

$$V_1 = M_1 \frac{R}{m_1} \frac{T}{p}; \quad V_2 = M_2 \frac{R}{m_2} \frac{T}{p};$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{m_1}{m_2} = \frac{21 \cdot 32}{79 \cdot 28} = \frac{23,3}{76,7}.$$

11. m sei das Molekulargewicht von H_2O . In der Masseneinheit befinden sich n_1 einfache und n_2 Doppelmoleküle: $m(n_1 + 2n_2) = 1$;

$$\gamma = \frac{2n_2}{n_1 + 2n_2}; \quad v = \frac{RT}{p}(n_1 + n_2); \quad n_1 + n_2 = \frac{1}{m} \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right); \quad v = \frac{RT}{pm} \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right).$$

Der gesuchte Faktor ist $1 - \frac{\gamma}{2} = 0,9827$.

12. Enthält die Verbindung x Atome O und y Atome N, so ist ihr Molekulargewicht $m_1 = x \cdot 16 + y \cdot 14$ und nach der Gasgleichung ihre Dichte $d_1 = \frac{1}{v_1} = \frac{p \cdot m_1}{RT}$. Für Sauerstoff gilt entsprechend

$$d_0 = \frac{1}{v_0} = \frac{p m_0}{RT}, \quad \text{also } \sigma = \frac{d_1}{d_0} = \frac{m_1}{m_0} = \frac{x}{2} + y \frac{14}{32} = 0,5x + 0,4375y.$$

a) $2,3750 = 0,5 \cdot 3 + 0,4375 \cdot 2$; also N_2O_3 .

b) $1,4375 = 0,5 \cdot 2 + 0,4375 \cdot 1$; also NO_2 .

13. Sind M_1 Mole Bleidampf und M_2 Mole Wasserstoff vorhanden, so ist der Partialdruck des Bleis, der gleich dem gesuchten Sättigungsdruck ist,

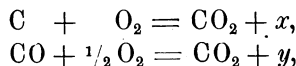
$$p = \frac{M_1}{M_1 + M_2}.$$

$$M_2 = \frac{834 \cdot 0,00008985}{2,016} = 0,0372; \quad M_1 = \frac{0,01604}{207,1} = 0,0000773;$$

$$p = \frac{0,0000773}{0,0373} = 0,00207 \text{ Atm.} = 1,6 \text{ mm Hg.}$$

14. Da 1 Mol N_2 und 2 Mole O_2 zu 2 Molen NO_2 verbrennen, ist nach dem Prozeß 1 Mol weniger vorhanden als vorher. Bei konstantem Druck vermindert sich das Volumen also um RT/p . Durch die Arbeit des Luftdrucks wird dem Gas die Energie $RT = 1,987 \cdot 288 = 572 \text{ cal}$ zugeführt. Die gesuchte Wärmemenge ist $Q + 572 \text{ cal}$.

15. Es gelten für die chemischen Prozesse pro Mol folgende Formeln:



wenn x und y die entstehenden Wärmemengen sind. Durch Subtraktion folgt $C + \frac{1}{2}O_2 = CO + x - y$; $x = \frac{12}{5} \cdot 40500$; $y = \frac{28}{1,4} \cdot 3400$.

Die gesuchte Verbrennungswärme ist $x - y = 29200 \text{ cal}$.

16. Der Prozeß folgt der Formel $H_2 + \frac{1}{2} O_2 = H_2O$.

$$Q_1 = Q_0 + [C_{H_2} + \frac{1}{2}C_{O_2} - C_{H_2O}](T - T_0),$$

wenn C die Molekularwärme bedeutet.

$$Q_1 = Q_0 + 1000 (7,5 - 6,5) = Q_0 + 1000 = 69\,900 \text{ cal.}$$

17. Entsprechend wie Aufg. 16. $Q_1 - Q_0 = 10 (10,5 - 18) = -75 \text{ cal.}$

18. $S_{rh} = S_{mon} - 3,19 \text{ cal; } S_{mon} = S_{rh} + 3,19 \text{ cal}$

$$U = U_0 + \int_{T_0}^T (c_{mon} - c_{rh}) dT = U_0 + 1,15 \cdot 10^{-5} T^2.$$

$$3,19 = U_0 + 1,15 \cdot 10^{-5} \cdot 368,6^2 = U_0 + 1,62; U_0 = 1,57.$$

$$U = 1,57 + 1,15 \cdot 10^{-5} T^2, \text{ also für } T = 273,1^{\circ}. U = 2,43 \text{ cal.}$$

19. Man verwandelt alles Wasser bei -10° in Dampf vom Druck p_1 (spez. Volumen V_1), entspannt diesen unendlich langsam bis p_2 (spez. Volumen V_2) und sublimiert ihn dann zu Eis. Bei diesem Prozeß, in dem die Verdampfungs- und Sublimationswärme nicht interessiert, ist die äußere Arbeit

$$A = p_1 (V_1 - v_1) + \int_{p_1 V_1}^{p_2 V_2} p dV - p_2 (V_2 - v_2) = p_2 v_2 - p_1 v_1 - RT \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$\text{da } V = \frac{RT}{p}; 1 \text{ ccm. mm Hg} = 3,188 \cdot 10^{-5} \text{ cal. Also } A = 94 \text{ cal.}$$

20. Aus rein geometrischen Betrachtungen folgt unter Vernachlässigung kleiner Größen höherer Ordnung

$$\frac{1 + \alpha_0^t t}{1 + \gamma t} = \frac{1 - p_0 \mathcal{A}_0}{1 - p_0 \frac{273}{T} \mathcal{A}_t}; \quad \frac{1 + \beta_0^t t}{1 + \gamma t} = \frac{1 - p_0 \mathcal{A}_0}{1 - p_0 \mathcal{A}_t}.$$

In erster Näherung ist $\gamma = \frac{1}{273}$ gesetzt. Mit diesen Gleichungen läßt sich α_0^{100} und β_0^{100} durch γ ausdrücken. Insbesondere ist

$$\alpha_0^{100} - \gamma = p_0 \left[\frac{273}{373} \mathcal{A}_{100} - \mathcal{A}_0 \right] \frac{1,367}{100}; \quad \beta_0^{100} - \gamma = p_0 [\mathcal{A}_{100} - \mathcal{A}_0] \frac{1,367}{100}.$$

Aus $v = v_0 (1 + \alpha_0^{100} t_p) = v_0 (1 + \alpha_0^t t)$ folgt $\alpha_0^{100} t_p = \alpha_0^t t$ oder $t_p - t = t \frac{\alpha_0^t - \alpha_0^{100}}{\alpha_0^{100}}$; entsprechend $t_v - t = t \frac{\beta_0^t - \beta_0^{100}}{\beta_0^{100}}$. Drückt man die α und β durch \mathcal{A} aus, so ist

$$t_p - t = 2,73 p_0 [(t - 100) \mathcal{A}_0 - t \cdot \mathcal{A}_{100} + 100 \cdot \mathcal{A}_t];$$

$$t_v - t = p_0 [2,73 (t - 100) \mathcal{A}_0 - 3,73 t \mathcal{A}_{100} + (273 + t) \mathcal{A}_t].$$

Die Auswertung ergibt

$$\begin{aligned} \text{a) } t - t_v &= p_0 \frac{T_k^3}{p_k} 1,517 \cdot 10^{-8} \frac{t(t-100)}{t+273}; \\ t - t_p &= 2,628 \cdot 10^{-8} \cdot p_0 \frac{T_k^3}{p_k} \frac{t(t-100)}{t+273} \left[1 + \frac{157,6}{t+273} \right]. \\ \text{b) } (\beta_0^{100} - \gamma) \cdot 10^7 &= 131,5 \cdot 10^{-5} p_0 \frac{T_k^3}{p_k}; \\ (\alpha_0^{100} - \gamma) \cdot 10^7 &= 172,2 \cdot 10^{-5} \cdot p_0 \frac{T_k^3}{p_k} \left[1 - \frac{5500}{T_k^2} \right]. \end{aligned}$$

21. Aus der Gleichung des ersten Hauptsatzes folgt

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v; \quad c_p = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_p + p \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

Betrachtet man p und v als unabhängige Variable, so ist

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_v \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v; \quad c_p = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_p \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p + p \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

Berechnet man $\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_v$ und $\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_p$ und differenziert man den ersten Ausdruck partiell nach v , den zweiten nach p , so findet man

$$\begin{aligned} (c_p - c_v) \frac{\partial^2 T}{\partial p \partial v} + \left(\frac{\partial c_v}{\partial p} \right)_v \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_p - \left(\frac{\partial c_v}{\partial v} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v &= 1; \\ c_p - c_v &= R - A(p+a) + B(v-b). \end{aligned}$$

22. Für adiabatische Zustandsänderung eines idealen Gases ist

$$\begin{aligned} T^{\frac{c_v}{R}} \cdot v &= \text{const oder } T v^{\frac{R}{c_v}} = \text{const}; \quad \frac{R}{C_v} = \frac{1,985}{5} = \text{rund } 0,4; \text{ also} \\ T_1 v_1^{0,4} &= T_2 v_2^{0,4}. \quad T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{0,4} = 293 \cdot 0,1^{0,4} = 117; \quad t_2 = -156^\circ. \end{aligned}$$

23. Für adiabatische Zustandsänderung eines idealen Gases ist

$$v^{\kappa} \cdot p = C; \quad p = C \varrho^{\kappa}; \quad \frac{dp}{d\varrho} = \kappa C \varrho^{\kappa-1} = \kappa \frac{p}{\varrho}.$$

Bei $p_0 = 1 \text{ Atm.} = 1,0133 \cdot 10^6 \text{ dyn/cm}^2$ ist

$$\varrho = \varrho_0 = \frac{m}{\Phi} = \frac{\text{Molekulargewicht}}{\text{Molvolumen}} = \frac{m}{22410}.$$

Also $\varrho = \frac{m}{\Phi} \cdot \frac{p}{p_0}$ und somit $\frac{dp}{d\varrho} = \frac{\kappa p_0 \Phi}{m}$ und $c = 1506,9 \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$ Meter.

Für He ist $c = 972,8 \text{ m}$. Für N_2 ist $c = 337,0 \text{ m}$. Beide Werte sind unabhängig vom Druck.

24. a) Für konstanten Druck ist $v = \frac{RT}{p}; \quad \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T} = +0,003412.$

b) Für adiabatische Änderung ist $v = \text{const. } T^{1-\kappa}$ (vgl. Aufg. 22), also

$$\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{ad} = \frac{1}{1-\kappa} \frac{1}{T} = -2,5 \frac{1}{T} = -0,008530.$$

25. a) Nach Lösung 5 ist $h = \frac{p_0}{D_0 g} \cdot \frac{T}{T_0} \ln \frac{p_0}{p}$. An der Grenze der Atmosphäre ist $p = 0$, also $h = \infty$.

b) Betrachtet man p und T als unabhängige Variable, so folgt aus der Grundgleichung $dq = du + p dv$ die Beziehung

$$dq = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_p + p \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dT + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_T + p \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \right] dp.$$

Nach Lösung 21 ist der Faktor von dT durch c_p zu ersetzen. Der Faktor von dp ist $-(c_p - c_v) \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v$, wie sich folgendermaßen beweisen läßt: Da $c_p = \left(\frac{dq}{dT} \right)_p$ und $c_v = \left(\frac{dq}{dT} \right)_v$, so folgt aus obiger Gleichung

$$c_p = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_p + p \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad \text{und} \quad c_v = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_p + p \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_T + p \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \right] \frac{\partial p}{\partial T}_v = c_p + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_T + p \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \right] \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v.$$

Es ist also $dq = c_p dT - (c_p - c_v) \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v dp$. Bezieht man diese Gleichung auf das Mol (Große Buchstaben), wendet sie auf ein ideales Gas an $\left[\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v = \frac{v}{R} = \frac{T}{p} \right]$, und setzt man $dQ = \gamma dT$, so ist $(C_p - C_v) \frac{dT}{p} = (C_p - \gamma) \frac{dT}{T}$ oder, wenn man $k = \frac{C_p - \gamma}{C_v - \gamma}$ setzt und integriert, $p^{\frac{1}{k}-1} \cdot T = \text{const.}$

Nach Lösung 5 ist $dh = -\frac{p_0}{D_0 g} \cdot \frac{T}{T_0} \frac{dp}{p}$ und nach der oben abgeleiteten Gleichung $dh = -\frac{1}{D_0 g} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{k}} dp$. Die Integration liefert, falls $p = p_0$ für $h = 0$ ist, $h = \frac{p_0}{D_0 g} \frac{k}{k-1} \left\{ 1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{k}-1} \right\}$. Die Höhe der Atmosphäre findet man für $p = 0$ zu $H = \frac{p_0}{D_0 g} \frac{k}{k-1}$, da $\frac{1}{k} - 1$ negativ ist. $H = 8,00 \cdot \frac{k}{k-1}$ km.

Für adiabatische Atmosphäre ist $\gamma = 0$ und $k = \frac{C_p}{C_v} = \kappa = 1,40$.

Also $H = 3,5 \cdot 8 = 28$ km.

c) Für $\gamma = C_v - 3R$ ist $k = \frac{C_p - C_v + 3R}{C_v - C_v + 3R} = \frac{4}{3}$ und also

$H = 4 \cdot 8 = 32$ km.

26. Nach Aufg. 25 b ist $h = G \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{\kappa} - 1} \right]$, wenn $G = \frac{p_0}{D_0 g} = 8,00$ km,

$\gamma = 0$ und also $k = \kappa$ gesetzt wird. Ferner ist an derselben Stelle

abgeleitet, daß $p^{\frac{1}{\kappa} - 1} \cdot T = \text{konst.}$ Daraus folgt $\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{\kappa} - 1} = \frac{T}{T_0}$

und also

$$h = G \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left[1 - \frac{T}{T_0} \right]; \quad \frac{dT}{dh} = -\frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T_0}{G} = -\frac{0,4}{1,4} \cdot \frac{283}{8000} = 0,0101 \text{ Grad/m.}$$

27. Im kritischen Punkt ist $\left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T = 0$ und $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_T = 0$. Hieraus folgt

$$\frac{R T_c}{(v_c - \alpha)^2} = \frac{K}{T_c^n} \frac{2}{(v_c + \beta)^3}; \quad \frac{R T_c}{(v_c - \alpha)^3} = \frac{K}{T_c^n} \frac{3}{(v_c + \beta)^4}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$v_c + \beta = \frac{8}{9} \frac{K}{R T_c^{n+1}}; \quad \alpha = \frac{1}{3} v_c - \frac{2}{3} \beta.$$

Hieraus und aus der Zustandsgleichung ist α, β, R berechenbar.

$$\alpha = v_c - \frac{2}{9} \frac{1}{T_c^{n/2}} \sqrt{\frac{3K}{p_c}}; \quad \beta = \frac{1}{3} \frac{1}{T_c^{n/2}} \sqrt{\frac{3K}{p_c}} - v_c;$$

$$R = \frac{8}{3} \frac{1}{T_c^{n/2+1}} \sqrt{\frac{1}{3} p_c K}.$$

28. Aus der van der Waalschen Gleichung folgt

$$v^3 - \left(b + \frac{RT}{p} \right) v^2 + \frac{a}{p} v - \frac{ab}{p} = 0.$$

Sind die Wurzeln dieser Gleichung v_1, v_2, v_3 , so ist allgemein

$$v_1 + v_2 + v_3 = \left(b + \frac{RT}{p} \right); \quad v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3 = \frac{a}{p}; \quad v_1 v_2 v_3 = \frac{ab}{p}.$$

Im kritischen Punkt ist $v_1 = v_2 = v_3 = v_c$; $p = p_c$; $T = T_c$; also

$$3 v_c = b + \frac{R T_c}{p_c}; \quad 3 v_c^2 = \frac{a}{p_c}; \quad v_c^3 = \frac{ab}{p_c} \text{ oder}$$

$$a = 3 p_c v_c^2; \quad b = \frac{1}{3} v_c; \quad R = \frac{8}{3} \frac{v_c p_c}{T_c}.$$

Hiermit ergibt die Zustandsgleichung nach geringer Umformung

$$\left(\frac{p}{p_c} + 3 \frac{v_c^2}{v^2}\right) \left(\frac{v}{v_c} - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} \frac{T}{T_c}.$$

29. Es ist nur auszurechnen, welchen Druck P 1 g O_2 bei $V = 0,9$ cm und $T = 273,1^\circ$ besitzt.

$$P = \frac{R' T}{V - b} - \frac{a}{V^2}; \quad R' = \frac{\text{Molvolumen}}{\text{Molekulargew.} \cdot 273,1} = \frac{22410}{32 \cdot 273,1};$$

nach Aufg. 28 ist $a = 3 p_c v_c^2 = 800,4$; $b = \frac{1}{3} v_c = 0,77$. Also

$$P = \frac{22410}{32 \cdot 0,13} - \frac{800,4}{0,81} = 4399 \text{ Atm.}$$

30. Ist T_2 die höhere, T_1 die niedrigere Temperatur, ferner Q_2 die bei T_2 aufgenommene Wärmemenge und A die maximale Arbeit, so ist $A = Q_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2}$. Der Wirkungsgrad ist $\frac{A}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{150}{463} = 0,324$.

31. Die Maschine muß nach dem Carnotschen Prozeß arbeiten. In diesem Falle ist $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$; $Q_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1} = 10 \cdot \frac{319}{290} = 11,0$ kg cal/sec. Die Maschine muß $Q_2 - Q_1 = 1$ kg cal/sek = 4,184 kWatt leisten.

32. a) 10^{12} Erg = $0,239 \cdot 10^6$ cal = 23,9 kg cal.

b) $Q_2 = A \frac{T_2}{T_2 - T_1} = 10^{12} \cdot \frac{373}{100}$ Erg = $3,73 \cdot 23,9 = 89,1$ kg cal.

33. Für die Masse 1 ist die Entropieänderung $ds = \frac{du + p dv}{T}$, für ein

Mol $dS = m \cdot \frac{du + p dv}{T}$. Da bei einem idealen Gas die innere Energie u unabhängig von v und $mp = \frac{RT}{v}$, so ist $dS = R \frac{dv}{v}$

und die gesuchte Entropieänderung ist $S - S_0 = R \ln \frac{v}{v_0}$.

34. Jedes der beiden Gase ändert sein Volumen ohne Arbeitsleistung. Die ganze Entropieänderung ist, wenn die Anfangsvolumina v_1 und v_2 , das Endvolumen $v = v_1 + v_2$ genannt wird,

$$S - S_0 = -M_1 \frac{R}{m_1} \ln \frac{v_1}{v} - M_2 \frac{R}{m_2} \ln \frac{v_2}{v}.$$

Bezeichnet ψ das Molvolumen, so ist $v_1 = M_1 \frac{\psi}{m_1}$; $v_2 = M_2 \frac{\psi}{m_2}$; also

$$S - S_0 = -R \left\{ \frac{M_1}{m_1} \ln \frac{M_1 m_2}{M_1 m_2 + M_2 m_1} + \frac{M_2}{m_2} \ln \frac{M_2 m_1}{M_1 m_2 + M_2 m_1} \right\}.$$

35. Es ist allgemein $dS = \frac{dU + p dV}{T} \geq 0$, ferner für alle Prozesse

$\int dS - \int \frac{dU + dA}{T} \geq 0$. Da in dem speziellen Fall $p = \text{konst.}$ stets $dA = p dV$, so folgt, falls auch $T = \text{const}$ ist, $\int d \left[S - \frac{U + pV}{T} \right] \geq 0$. Somit übernimmt für diesen speziellen Fall der Ausdruck $\Phi = S - \frac{U + pV}{T}$ die Funktion der Entropie.

Nach dem 2. Hauptsatz ist $\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = M \frac{c_p}{T}$, also $S = M \cdot \int \frac{c_p}{T} dT$.
 Ferner $\frac{\partial}{\partial T} (U + pV)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_p + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = M c_p$ nach dem 1. Hauptsatz. Also $U + pV = M \int c_p dT$. Somit im ganzen

$$\Phi = M \left\{ \int \frac{c_p}{T} dT - \frac{1}{T} \int c_p dT \right\}.$$

36. Allgemein ist $F = U - TS$. Bei idealem Gas ist $dU = M c_v dT$ und $U = M(c_v T + k_1)$. Bei idealem Gas ist

$$dS = \frac{dU + p dV}{T} = M \left(c_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{m} \frac{dv}{v} \right),$$

und also $S = M \left(c_v \ln T + \frac{R}{m} \ln v + k_2 \right)$.

Somit $F = M \left\{ c_v T (\text{konst.} - \ln T) - \frac{R}{m} T \ln v + \text{konst.} \right\}$.

37. $dF = dU - T dS - S dT$; $dS = \frac{dU + p dV}{T}$, also $dF = -p dV - S dT$.

Somit $p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = -B$; $S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = -C$. Mit diesem Wert von S folgt allgemein

$$F = U + T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V, \text{ also } U = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = A + B V.$$

38. Ist $p = \text{konst.}$, so ist die dem System zugeführte Wärmemenge $-H = \Delta Q = \Delta U + p \Delta V = \Delta(U + pV)$. Es ist zweckmäßig, von der Funktion Φ (vgl. Aufg. 35) auszugehen. Die Differentiation von Φ liefert, wenn man für $dS = \frac{dU + p dV}{T}$ einführt,

$$d\Phi = -\frac{V}{T} dp + \frac{U + pV}{T^2} dT, \text{ also } \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)_T = -\frac{V}{T} \text{ und } \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_p = \frac{U + pV}{T^2}.$$

Somit $-H = \Delta \left[T^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_p \right]$ und $\left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T = \Delta \left[T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{V}{T} \right)_p \right];$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T = T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\Delta V}{T} \right)_p = -A - C \cdot p.$$

39. Aus der Entropiegleichung folgt sofort $\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v$, und nach dem 1. Hauptsatz $= \frac{1}{T} c_v$, so daß $c_v = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v$. Ferner ergibt die Entropiegleichung $\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p \right]$ oder mittels der Gleichung des isothermen Joule-Effektes $= \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$, so daß $\frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T$. Wird die Entropie als Funktion der unabhängigen Variablen T und p aufgefaßt, so folgt entsprechend unter Benutzung der Folgerung des 1. Hauptsatzes, daß $c_p = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p + p \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ und der Gleichung für den isothermen Joule-Thomson-Effekt $\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_T = -T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - p \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$, daß $c_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p$ und $\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T$.

40. Da u unabhängig von v sein soll, so ist $du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT = c_v dT$, also $c_v = \frac{du}{dT}$ unabhängig von v oder $\left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = 0$. Somit ist $\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \frac{R}{v}$. Andererseits ist (vgl. Aufg. 39) $\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$. Also $\frac{R}{v} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$. Nun ist nach der Gleichung des isothermen Joule-Effektes $\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p$ oder im vorliegenden Fall $T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = p$. Somit $\frac{R}{v} = \frac{p}{T}$ oder $pv = RT$.

41. $du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv = c_v dT + \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p \right] dv$, wenn das erste Glied nach dem 1. Hauptsatz, das zweite Glied nach dem 2. Hauptsatz umgeformt wird. Nach van der Waals ist $T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{RT}{v-b} = p + \frac{a}{v^2}$. Somit $u = \int c_v dT - \frac{a}{v} + \text{konst.}$

42. Für adiabatische Zustandsänderung ist

$$0 = du + p dv = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p \right] dv = c_v dT + T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v dv$$

(vgl. Aufg. 41). Also $\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{dq=0} = -\frac{T}{c_v} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = -\frac{RT}{c_v(v-b)}$ oder $\ln T = -\frac{R}{c_v} \ln(v-b) + \text{konst.}$ Die Gleichung der Adiabate ist also

$T(v-b)^{\frac{R}{c_v}} = \text{konst.}$ Die gesuchte Arbeitsleistung ist

$$\begin{aligned} A &= \int_a^e p \, dv = R \int_a^e \frac{T \, dv}{v-b} + a \left(\frac{1}{v_e} - \frac{1}{v_a} \right) \\ &= -c_v \text{konst.} \left\{ (v_e-b)^{-\frac{R}{c_v}} - (v_a-b)^{-\frac{R}{c_v}} \right\} \\ &\quad + a \left(\frac{1}{v_e} - \frac{1}{v_a} \right) = c_v(T_a - T_e) + a \left(\frac{1}{v_e} - \frac{1}{v_a} \right). \end{aligned}$$

Aus der Adiabategleichung folgt $T_e = T_a \left(\frac{v_a-b}{v_e-b} \right)^{\frac{R}{c_v}}$, so daß

$$A = c_v T_a \left\{ 1 - \left(\frac{v_a-b}{v_e-b} \right)^{\frac{R}{c_v}} \right\} + a \frac{v_a - v_e}{v_a v_e}.$$

43. Sind die unabhängigen Variablen T und p , so gilt für den adiabatischen Prozeß

$$0 = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_p + p \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dT + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_T + p \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \right] dp.$$

Der Faktor von dp ist nach dem 2. Hauptsatz $-T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$, der Faktor von dT ist nach dem 1. Hauptsatz $+c_p$. Also

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{dq=0} = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p. \quad \text{Für ein ideales Gas } \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{dq=0} = \frac{RT}{c_p \cdot p}.$$

Nach der van der Waalsschen Gleichung

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{dq=0} = \frac{RT}{c_p} \cdot \frac{1}{p - \frac{a}{v^2} + \frac{2ab}{v^3}}.$$

Beide Ausdrücke werden gleich, wenn $v = 2b$ oder nach Aufg. 28 $v = \frac{2}{3} v_e$.

44. Bei $dT = 0$ ist $dq = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv + p \, dv$ oder nach dem 2. Hauptsatz

$$dq = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv = \frac{RT}{v-b} dv;$$

$$q = RT \ln \frac{v_e - b}{v_a - b} = -RT \ln \frac{v_e - \varepsilon - b}{v_e - b} = RT \frac{\varepsilon}{v_e - b};$$

$$\varepsilon = v_e - v_a = v_e \cdot 5 \cdot 10^{-5} \cdot 100;$$

$$q = 21 \text{ cal, wenn nach Aufg. 28 } b = \frac{1}{3} v_e.$$

45. Nach Lösung 42 ist die Gleichung der Adiabate

$$(v_2 - b) = (v_1 - b) \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{c_v/R} = (v_1 - b) \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{3/2} = (v_1 - b) \cdot 4,33.$$

Bezeichnet man die reduzierten Größen $\frac{T}{T_c} = \theta$; $\frac{p}{p_c} = \pi$; $\frac{v}{v_c} = \nu$, so ist nach Lösung 28 die Zustandsgleichung $\left(\pi + \frac{3}{\nu^2}\right)\left(\nu - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\theta$.

Für den Anfangszustand ist $\theta_1 = 2,66$; $\pi_1 = 4,45$. Mit diesen Werten folgt aus der reduzierten Zustandsgleichung $\nu_1 = 1,60$, und mit obiger Gleichung, falls $b = \frac{1}{3}v_c$ gesetzt wird, $\nu_2 = 5,838$. Jetzt ist aus der Zustandsgleichung noch zu ermitteln, welcher Wert von π zu ν_2 und $\theta_2 = 1$ gehört: Es ergibt sich $\pi_2 = 0,397$ und $p_2 = 0,894$ Atm.

46. a) $\Delta U_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$; $\Delta U_3 = p \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$; $\frac{\Delta U_2}{\Delta U_3} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T}{p}$ oder den Zähler nach dem 2. Hauptsatz umgeformt, $= \frac{T}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - 1$.
Allgemein ist $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T$, also $\frac{\Delta U_2}{\Delta U_3} = -316$.

b) Nach dem 2. Hauptsatz ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = -T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T - p = -316 \text{ ccm Atm.}$$

Für die gesuchte Volumverminderung erhöht sich die innere Energie um $+0,00765$ cal.

c) Nach dem 2. Hauptsatz ist

$$c_p - c_v = -T \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p^2 = -T \frac{\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p^2}{\frac{1}{v} \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T} = 0,0189 \text{ ccm Atm.}$$

$$= 4,58 \cdot 10^{-4} \text{ cal.}$$

47. Nach dem 2. Hauptsatz ist $\left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v$ und $\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = -T \left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_p$.

Aus der van der Waalsschen Gleichung folgt $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v = 0$, also $\beta = 0$.

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_p = -\frac{R^2 \left(\frac{2a}{v^3} - \frac{6ab}{v^4}\right)}{\left(p - \frac{a}{v^2} + \frac{2ab}{v^3}\right)^3} \text{ oder gekürzt } \left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = \frac{2a}{v^3} \cdot \frac{R^2 T}{p^3} = \frac{2a}{R T^2}$$

Hieraus $c_p = \frac{2a}{R T^2} p + c_0$, also $\alpha = \frac{2a}{R T^2}$.

48. Es ist $\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p = c_p - p \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = c_p - \frac{pR}{p+a}$;

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_T = -T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - p \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = -\frac{RTa}{(p+a)^2};$$

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = -T \left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_p = 0. \text{ Also}$$

$$U_1 = \int_{p_1}^{p_2} \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_T dp = RT_1 a \left[\frac{1}{p_2+a} - \frac{1}{p_1+a} \right];$$

$$U_2 = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p dT = \int_{T_1}^{T_2} c_{p_2} dT - \frac{p_2 R}{p_2+a} (T_2 - T_1);$$

$$U_3 = \int_{T_1}^{T_2} c_{p_1} dT - \frac{p_1 R}{p_1+a} (T_2 - T_1);$$

$$U_4 = RT_2 a \left[\frac{1}{p_2+a} - \frac{1}{p_1+a} \right].$$

Da $c_{p_1} = c_{p_2}$, so folgt $(U_1 + U_2) : (U_3 + U_4) = 1$.

Die aufgenommene Wärme Q ist gleich der Summe von Energiezuwachs U und geleisteter äußerer Arbeit A .

$$A_1 = \int_{p_1}^{p_2} p dv = RT_1 \ln \frac{v_2 - b}{v_1 - b} - a(v_2 - v_1);$$

$$A_2 = p_2 \int_{T_1}^{T_2} dv = \frac{p_2 R}{p_2+a} (T_2 - T_1),$$

entsprechend A_3 und A_4 , so daß

$$Q_1 = RT_1 \ln \frac{p_1+a}{p_2+a}; \quad Q_2 = \int_{T_1}^{T_2} c_{p_2} dT; \quad Q_3 = \int_{T_1}^{T_2} c_{p_1} dT; \quad Q_4 = RT_2 \ln \frac{p_1+a}{p_2+a}.$$

$$Q_1 + Q_2 - (Q_3 + Q_4) = R(T_1 - T_2) \ln \frac{p_1+a}{p_2+a},$$

also $Q_3 + Q_4 > Q_1 + Q_2$.

49. a) Es wird gefordert, daß $c_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{u+p v} = T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v = 0$, oder

nach Einführung der reduzierten Größen $\theta \left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)_\pi - v = 0$.

Aus der reduzierten Zustandsgleichung (vgl. Lösung 45) folgt

$$\theta \left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)_\pi - v = \frac{-\frac{\pi}{3} + \frac{6}{v} - \frac{3}{v^2}}{\pi - \frac{3}{v^2} + \frac{2}{v^3}}. \text{ Es muß also der Zähler } 0 \text{ sein,}$$

oder $(\pi \nu)^2 - 18(\pi \nu) + 9\pi = 0$. Das ist eine Parabel mit dem Scheitelpunkt $\pi = 9$; $\nu = 1$; $\theta = 3$. Für $\pi = 0$ ist entweder $\theta = 0$ oder $\theta = 6,75$.

b) Es wird gefordert $\int_0^p \left[T \left(\frac{\partial \nu}{\partial T} \right)_p - \nu \right] dp = 0$ oder

$$\int_0^\pi \left[\theta \left(\frac{\partial \nu}{\partial \theta} \right)_\nu - \nu \right] d\pi = \int_\infty^\nu \left[\theta \left(\frac{\partial \nu}{\partial \theta} \right)_\nu - \nu \right] \left(\frac{\partial \pi}{\partial \nu} \right)_\theta d\nu = 0.$$

Da $\left(\frac{\partial \pi}{\partial \nu} \right)_\theta = \frac{\pi - \frac{3}{\nu^2} + \frac{2}{\nu^3}}{\frac{1}{3} - \nu}$, so ist der Integrand $\frac{\frac{\pi}{3} - \frac{6}{\nu} + \frac{3}{\nu^2}}{\nu - \frac{1}{3}}$.

Nachdem für π der Wert aus der Zustandsgleichung eingesetzt ist, erhält man nach gliederweiser Integration $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\nu^2} - \frac{6}{\nu} = 0$ oder $(\pi \nu)^2 - 18(\pi \nu) + 3\pi = 0$.

Das ist eine Parabel mit dem Scheitelpunkte $\pi = 27$; $\nu = \frac{1}{3}$; $\theta = 0$. Für $\pi = 0$ ist entweder $\theta = 0$ oder $\theta = 6,75$.

50. Unter Vernachlässigung kleiner Größen höherer Ordnung erhält man für den adiabatischen Joule-Thomson-Effekt

$$c_p \left(\frac{\Delta T}{\Delta p} \right)_{u+pv} = \left[\frac{9}{2} \left(\frac{T_c}{T} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] v_c;$$

falls die Druckänderung ohne Arbeitsleistung stattfindet (Joule-Versuch), ist $c_v \left(\frac{\Delta T'}{\Delta p} \right)_u = 3 v_c \left(\frac{T_c}{T} \right)^2$. Um die Energieeinheiten dieser Gleichungen von ccm-Atm. auf cal umzurechnen, sind die rechten Seiten mit 0,024216 zu multiplizieren.

$$c_p \Delta T = -0,277 \text{ cal/g}; \quad c_v \Delta T' = -0,194 \text{ cal/g.}$$

$$\Delta T = -1,40^\circ; \quad \Delta T' = -1,28^\circ.$$

$$\left(\frac{T_c}{T_i} \right)^2 = \frac{1}{18}; \quad \frac{T_i}{T_c} = 4,24.$$

51. Die Thermodynamik liefert die beiden Beziehungen

$$\mu c_p = T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_T = -T \left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2} \right)_p.$$

Differentiiert man die erste Gleichung, so ergibt sich unter Benutzung der zweiten $\mu \left(\frac{\partial c_p}{\partial T} \right)_p + c_p \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_p = - \left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_T$. Die Ausrechnung ergibt $\left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_T = +0,000293$.

52. Ausgehend von der thermodynamischen Gleichung

$$\mu c_p = T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v = T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{v}{T} \right)_p$$

erhält man nach Integration von T_0 bis $T_1 = T_0 + 100$, wenn man noch $v_1 = v_0 (1 + 100 \alpha) = \frac{(1 + 100 \alpha)}{\rho_0}$ setzt,

$$T_0 = \frac{1}{\alpha} + \frac{T_0(T_0 + 100)}{76 \alpha} \rho_0 \int_{T_0}^{T_0 + 100} \frac{\mu c_p dt}{T^2}.$$

Das Glied mit dem Integral ist nur eine Korrektionsgröße. Man darf in ihm $T = T'$, d. h. die thermodynamische mit der gasthermometrischen Skala vertauschen und erhält nach Ausrechnung

$$T_0 = 272,270 + 1,093 = 273,363.$$

53. $du = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv = c_v dT + \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] dv$; u ist unabhängig vom Integrationsweg.

$$u = \int_0^T c_{v0} dT + \int_0^v \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] dv + K_1, \text{ wenn man zunächst}$$

bei $v = \infty$ von 0 bis T , dann bei konstantem T über das Volumen von ∞ bis v integriert. K_1 ist der Wert von u für $T = 0$ und $v = \infty$.

Beim Joule-Thomson-Effekt ist

$$c_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right) = T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v \text{ oder } c_p dT + \left[v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp = 0,$$

andererseits $dJ = \left(\frac{\partial J}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial J}{\partial p} \right)_T dp = 0$. Aus dem Vergleich

beider Ausdrücke folgt $dJ = c_p dT + \left[v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp$, und da auch J unabhängig vom Integrationsweg,

$$J = \int_0^T c_{p0} dT + \int_0^p \left[v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp + K_2,$$

wenn man zunächst bei $p = 0$ von 0 bis T , dann bei konstantem T über den Druck von 0 bis p integriert. K_2 ist der Wert von J für $T = 0$ und $p = 0$. Die Beziehung $J - u = pv$ lautet für $T = 0$ und ∞ kleine Dichte

$$K_2 - K_1 = 0, \text{ also } K_1 = K_2.$$

54. Da nach den Gleichungen der Lösung 53 für den endlichen Joule-Effekt bzw. den endlichen Joule-Thomson-Effekt gilt $\mathcal{A}u = 0$ bzw. $\mathcal{A}J = 0$, so ist

$$+ \int_{T_u}^{(v)T} c_{v_0} dT = \int_{\infty}^{(T)v} \left[p - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \right] dv$$

und

$$- \int_{T_J}^{(p)T} c_{p_0} dT = \int_0^p \left[v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp.$$

Da nun allgemein $J - u = pv$, so erhält man mit der Lösung 53

$$pv = \int_0^{T_J} c_{p_0} dT - \int_0^{T_u} c_{v_0} dT.$$

Für unendliche Verdünnung ist das Gas im idealen Zustand, so daß

$$R = c_{p_0} - c_{v_0} \text{ und also } RT = \int_0^T (c_{p_0} - c_{v_0}) dT. \text{ Also}$$

$$pv - RT = \int_{T'}^{T_J} c_{p_0} dT - \int_{T'}^{T_u} c_{v_0} dT.$$

55. Aus der Zustandsgleichung und der für den Sättigungszustand gültigen Beziehung $\int_1^2 p dv = p_s(v_2 - v_1)$ folgen die drei Gleichungen:

$$RT \ln \frac{v_2 - b}{v_1 - b} + a \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right) = p_s(v_2 - v_1).$$

$$\left(p_s + \frac{a}{v_1^2} \right) (v_1 - b) = RT; \quad \left(p_s + \frac{a}{v_2^2} \right) (v_2 - b) = RT.$$

Für $T = 0$ ist $p_s = 0$, also folgt aus den letzten beiden Beziehungen, daß $v_1 = \infty$ oder $v_1 = b$ und $v_2 = \infty$ oder $v_2 = b$. Da nun aber $v_2 > v_1$, so folgt eindeutig $v_1 = b$; $v_2 = \infty$. — Ist v_2 sehr groß gegen v_1 , wendet man auf v_2 das ideale Gasgesetz an und setzt man in Korrekturtermen $v_1 = b$, so folgt aus der ersten der obigen drei Gleichungen

$$\ln \frac{v_2}{v_1 - b} = 1 + \frac{a}{v_1 RT}.$$

Nun ist in Näherung für kleine T und v_1 nahe gleich b

$$\frac{v_2}{v_1 - b} = \frac{v_2}{RT} \frac{a}{b^2} = \frac{1}{p_s} \cdot \frac{a}{b^2}, \text{ so daß } \ln p_s = \ln \frac{a}{b^2} - \frac{a}{bR} \frac{1}{T} - 1, \text{ oder,}$$

$$\text{da die 1 zu vernachlässigen ist, } \ln p_s = \ln \frac{a}{b^2} - \frac{a}{bR} \frac{1}{T}.$$

56. Nach der Clausius-Clapeyronschen Gleichung ist $L = T(v_2 - v_1) \frac{dp_s}{dT}$.

Da L in cal gegeben ist, so ist zu berücksichtigen, daß 1 cal = 31 384 ccm . mm Hg beträgt. $v_2 - v_1 = \frac{31\,384 L}{T \cdot \frac{dp_s}{dT}} = 390,8$ ccm; $v_2 = 391,9$ ccm.

57. Die äußere Arbeit ist $A = p(v_1 - v_2) = 1670$ ccm Atm., oder, da 1 ccm Atm. = 0,024 23 cal, $A = 40,4$ cal.

58. Nach der Clausius-Clapeyronschen Gleichung ist

$$\frac{dT}{T} = 0,024\,23 \frac{v_2 - v_1}{L} dp_s = -0,000\,027\,27 dp_s \text{ oder integriert}$$

$$\ln T_1 - \ln T_2 = -0,000\,027\,3 \cdot (p_1 - p_2);$$

für $p_1 = 1$ Atm. ist $T_1 = 273,1^\circ$; also ist für $p_2 = 4,6$ mm Hg = 0,006 06 Atm. $T_2 = T_1 + 0,0074^\circ$. Also $t = +0,0074^\circ$.

59. Für die Verdampfungswärme ist $L = T \frac{dp}{dT} (v_3 - v_2) = RT^2 \frac{1}{p} \frac{dp}{dT}$,

für die Sublimationswärme ist $l = T \frac{dP}{dT} (v_3 - v_1) = RT^2 \frac{1}{P} \frac{dP}{dT}$,

die Schmelzwärme ist $\lambda = l - L$. Da im Tripelpunkt $p = P$, so folgt $\frac{dP}{dT} = \frac{\lambda + L}{L} \cdot \frac{dp}{dT} = 0,3781$ mm Hg/Grad.

60. $L = (u_2 - u_1) + p(v_2 - v_1) = T(v_2 - v_1) \frac{dp}{dT}$ oder vereinfacht

$$(c_v - c) T + \frac{RT}{m} + k = T^2 \frac{R}{m} \frac{1}{p} \frac{dp}{dT},$$

indem der Unterschied von $u_2 - u_1$ im absoluten Nullpunkt mit k bezeichnet wird. Nach Erweiterung der Gleichung mit $\frac{dT}{T^2}$ und der Substitution $\frac{R}{m} = c_p - c_v$ ergibt die Integration

$$\ln p = \ln a - \frac{b}{T} + \frac{m}{R} (c_p - c) \ln T \text{ oder } p = a e^{-\frac{b}{T}} T^{\frac{m}{R} (c_p - c)}.$$

61. Die Thermodynamik liefert die streng gültige Beziehung

$$c_2 - c_1 = \frac{dL}{dT} - \frac{L}{T} + \frac{L}{v_2 - v_1} \left(\frac{\partial (v_2 - v_1)}{\partial T} \right)_p, \text{ oder vereinfacht}$$

$$= \frac{dL}{dT} - \frac{L}{T} + \frac{L}{v_2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial T} \right)_p = \frac{dL}{dT}. \text{ Also}$$

$$\frac{dL}{dT} = -0,54; I_0 = 596,0 \text{ cal.}$$

62. $h - c = a + bT$. Andererseits liefert die Thermodynamik die streng gültige Formel $h - c = \frac{dL}{dT} - \frac{L}{T}$. Aus beiden Beziehungen folgt eine Differentialgleichung, die durch die Substitution $x = \frac{L}{T}$ integrierbar ist und $L = aT \ln \frac{T}{T_c} + bT(T - T_c)$ liefert.

63. Da die Arbeit $A = p_s(v_2 - v_1)$, so folgt mit der Clausius-Clapeyron'schen Gleichung $\eta = \frac{A}{L} = \frac{p_s}{T} \cdot \frac{dT}{dp_s} = \frac{1}{T} \frac{dT}{d \ln p_s} = \frac{1}{f} \frac{T}{T_c}$.

64. Die Thermodynamik liefert die Gleichung $h_2 - h_1 = \frac{dL}{dt} - \frac{L}{T}$, wenn mit h_1 und h_2 die spezifische Wärme von Flüssigkeit und Dampf im Zustande des gegenseitigen Gleichgewichtes (Sättigungszustand) bezeichnet werden; $h_2 = -1,07 \text{ cal}$. Bei Erhöhung der Sättigungstemperatur wird infolge der Verkleinerung des spezifischen Volumens und der damit verbundenen Arbeitsleistung der Atmosphäre Wärme frei.

65. Nach der Helmholtz'schen Gleichung ist $U = F \left(E - T \frac{dE}{dT} \right)$, wenn F das Produkt aus der Äquivalentladung (96 500 Coulomb), der Wertigkeit der Ionen (zweiwertig) und dem Wärmeäquivalent (0,238 99 cal/Wattsek.) bedeutet. $\frac{dE}{dT} = -3,57 \cdot 10^{-5} \text{ Volt/Grad}$.

66. Aus den beiden Hauptsätzen folgt $A - T \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_v = U$. Integriert man nach Division mit T^2 , so erhält man, wenn man noch

$$U = (U - U_0) + U_0 \text{ setzt, } -\frac{A}{T} + \frac{A_0}{T_0} = \int_0^T \frac{U - U_0}{T^2} dT - \frac{U_0}{T} + \frac{U_0}{T_0}.$$

Nach dem Nernst'schen Theorem ist $\lim_{T \rightarrow 0} \frac{U - A}{T} = 0$ oder $\frac{U_0}{T_0} = \frac{A_0}{T_0}$.

$$\text{Also } A = U_0 - T \int_0^T \frac{U - U_0}{T^2} dT = U - \frac{n}{n-1} a T^n + 2bVT^2.$$

67. Am Umwandlungspunkt sind beide Phasen im Gleichgewicht und $A = 0$. Also $T = 369,5^\circ$; $t = 96,4^\circ$. Nach der Helmholtz'schen Gleichung ist $U = A - T \left(\frac{dA}{dT} \right)_v = 3,14 \text{ cal}$.

68. In der Niveaufläche x fließt senkrecht zu dieser pro Sekunde und cm^2 die Wärmemenge $-k \frac{dt}{dx}$. Die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$q = -k \frac{d^2 t}{dx^2}. \text{ Integriert: } t = -\frac{1}{2} \frac{q}{k} x^2 + c_1 x + c_2 \text{ oder nach Ein-}$$

setzung der Grenzen $t = t_1 + \frac{1}{2} x \cdot \frac{q}{k} D \left[1 + 2 \frac{k}{q} \cdot \frac{t_2 - t_1}{D^2} \right] - \frac{1}{2} \frac{q}{k} x^2$.

Das Maximum der Temperatur ist vorhanden bei $x = \frac{1}{2} D + \frac{k}{q} \cdot \frac{t_2 - t_1}{D}$,

und zwar ist hier $t = t_1 + \frac{1}{8} \frac{q}{k} D^2 \left[1 + 2 \frac{k}{q} \frac{t_2 - t_1}{D^2} \right]^2$.

69. $x = \text{konst.}$ bezeichne in jedem der betrachteten Fälle eine Niveaufläche. $x = 0$ sei die Fläche höchster Temperatur, für die $dt/dx = 0$ und durch die also keine Wärme strömt. Besitzt die Niveaufläche x die Oberfläche F_x und liegt zwischen ihr und der Fläche $x = 0$ das Volumen V_x , so lautet die Differentialgleichung

$$q \cdot V_x = -k F_x \frac{dt}{dx} \quad \text{oder} \quad \frac{dt}{dx} = -\frac{k}{q} \frac{V_x}{F_x}.$$

Der Quotient V_x/F_x hat für die Platte den Wert x , für den Zylinder den Wert $\frac{x^2 \pi}{2\pi x} = \frac{1}{2} x$, für die Kugel $\frac{\frac{4}{3} x^3 \pi}{4\pi x^2} = \frac{1}{3} x$. Also ist allgemein

$\frac{dt}{dx} = -m \frac{k}{q} \cdot x$, wobei $m = 1$ oder $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ ist, je nachdem es sich um Platte, Zylinder oder Kugel handelt.

70. Durch die Zylinderfläche vom Radius r und der Länge 1 fließt pro Sekunde die Wärmemenge $f(r) = -k \cdot 2r\pi \frac{dt}{dr}$, durch die Fläche

vom Radius $r + dr$ entsprechend $-k \cdot 2\pi(r + dr) \cdot \left[\frac{dt}{dr} + \frac{d^2t}{dr^2} dr \right]$.

Nach Kürzung lautet die Differentialgleichung $r \frac{q}{k} + \frac{dt}{dr} + r \frac{d^2t}{dr^2} = 0$.

Mit Hilfe der Substitution $\frac{dt}{dr} = y$ findet man $t = -\frac{1}{4} \frac{q}{k} r^2 + c_1 \ln r + c_2$.

Also $t_i - t_a = \frac{1}{4} \frac{q}{k} (r_a^2 - r_i^2) + c_1 \ln \frac{r_i}{r_a}$ und $\frac{dt}{dr} = -\frac{q}{k} \cdot \frac{1}{2} r + \frac{c_1}{r}$;

c_1 ist aus der Bedingung zu bestimmen, daß $\frac{dt}{dr}$ für $r = r_i$ den Wert 0

hat. Setzt man noch $2r_a \pi E = q \cdot (r_a^2 - r_i^2) \pi$ oder $E = q \frac{r_a^2 - r_i^2}{2r_a}$,

so findet man $t_i - t_a = \frac{E}{k} r_a \left[\frac{1}{2} + \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \ln \frac{r_i}{r_a} \right]$.

Optik.

I. Elektromagnetische Wellen.

1. Die mittlere Intensität liegt je nach dem Wert von δ zwischen $(a - b)^2$ für $\delta = (2n + 1)\pi$ und $(a + b)^2$ für $\delta = 2n\pi$.
2. Ist \bar{A} die Amplitude der resultierenden Welle für den Fall, daß alle Komponenten in derselben Phase schwingen würden, so ist $A = \bar{A} \cdot \frac{\sin \delta/2}{\delta/2}$; φ ist $\varphi_0 + \delta/2$ und liegt also gerade in der Mitte zwischen der Phase der ersten und letzten Welle.
3. $W \cdot dJ = \frac{1}{n \cdot i} \cdot e^{-J/ni} dJ$, wobei i die Intensität (= Quadrat der Amplitude) jeder einzelnen der interferierenden Wellen ist; $J = ni$ = Einzelintensität \times Zahl der Komponenten.

$$4. u = \frac{3}{8\pi} \sum a_n^2.$$

5. Ist die Welle 1 in der Richtung x , die Welle 2 in der Richtung y polarisiert, so ist die gesuchte Bahn die Ellipse

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos \delta = \sin^2 \delta.$$

Die Welle ist linear polarisiert für $\delta = 0$, zirkular polarisiert für $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ oder $\delta = \pm \frac{3\pi}{2}$ und $a_1 = a_2$.

6. Die Geschwindigkeit ist nur konstant, wenn $\delta_1 - \delta_2$ gleich einem ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ und $a_1 = a_2$ ist, d. h. bei zirkularer Polarisation.

7. Die Welle ist elliptisch polarisiert; stellt man sie dar in der Form:

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \sin n(vt - z), \\ y &= b \sin n(vt - z - \delta), \end{aligned}$$

$$\text{so ist } \begin{aligned} a^2 &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos n(z_1 - z_2), \\ b^2 &= b_1^2 + b_2^2 + 2b_1 b_2 \cos n(z_1 + \delta_1 - z_2 - \delta_2), \end{aligned}$$

$$\text{und } \operatorname{tg} n(z + \delta) = \frac{b_1 \cos n(z_1 + \delta_1) + b_2 \cos n(z_2 + \delta_2)}{b_1 \sin n(z_1 + \delta_1) + b_2 \sin n(z_2 + \delta_2)}.$$

8. $U = 0,9384 v$.

9. Ist v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so muß sein $a^2 + b^2 = -n^2/v^2$; für ebene homogene Wellen insbesondere ist zu setzen $a = ik \cos \alpha$, $b = ik \sin \alpha$, wo $k = n/v$ ist.

10. Die Wellen sind nicht transversal, weil die Richtung der Fortpflanzung die x -Richtung ist und $\mathfrak{H}_x \neq 0$ ist. Man findet nämlich durch Benutzung der Maxwell'schen Gleichungen $|\mathfrak{H}_x| = |\sqrt{\epsilon} \cdot \mathfrak{E}_y \cdot \sin \beta|$.
11. Im ganzen sieben, die der Beobachtung zugänglich sind, nämlich
 1. Wellenlänge (Frequenz, Schwingungszahl). 2. Länge des Wellenzuges (Kohärenzlänge, Anzahl der aufeinanderfolgenden Wellen).
 3. bis 7. Fünf Parameter, welche die Lage der ausgezeichneten Achse der Welle und den Polarisationszustand auf derselben (und damit die Verteilung der Intensität und der Polarisation über der ganzen Kugel) bestimmen. Zwei Parameter legen die Richtung der Achse fest, zwei die Amplitude und einer die Phase auf der Achse, oder drei Parameter legen die Amplitude fest und zwei die Phase.
12. Man setzt etwa $v_x = 0$; $v_y = -\frac{\partial u}{\partial z}$; $v_z = \frac{\partial u}{\partial y}$, dann wird zugleich $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ und \mathbf{v} genügt der Wellengleichung.

13. 1. Die Wellen sind transversal, da $\operatorname{div} \mathfrak{E} = \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$ wird wegen $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$.

2. Die erste Maxwell'sche Gleichung ist erfüllt; es folgt dies sofort, wenn man in $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathfrak{H}$ die genannten Werte einsetzt.

3. Daß auch die zweite Maxwell'sche Gleichung erfüllt ist, folgt so: aus

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathfrak{E} \text{ wird } \operatorname{rot} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{Z} \right) = 0 \text{ oder}$$

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{Z} - \Delta \mathfrak{Z} \right) = 0, \text{ oder, da } \operatorname{rot} \operatorname{grad} \equiv 0,$$

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} - \Delta \mathfrak{Z} \right) = 0,$$

was erfüllt ist, da \mathfrak{Z} der Wellengleichung genügt.

14. Der erste Nachweis folgt unmittelbar aus der Linearität der Wellengleichung. Für den zweiten findet man

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(\frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{1}{r^2} \cdot f \right) \cos \alpha,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{3}{r} \frac{df}{dr} + \frac{3}{r^2} f \right) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \vartheta,$$

wenn

$$x = r \cdot \cos \alpha,$$

$$y = r \cdot \sin \alpha \cos \vartheta,$$

$$z = r \cdot \sin \alpha \sin \vartheta$$

gesetzt ist.

15. Der Nachweis durch rechnerische Verifikation der Maxwell'schen Gleichungen ist ziemlich kompliziert. Einfach ergibt sich der Nachweis im Anschluß an Aufg. 13, da man für den dort eingeführten Vektor \mathfrak{B} einfach die spezielleren Ansätze hat

$$\text{rot}_x \mathfrak{B} = u; \quad \text{rot}_y \mathfrak{B} = v; \quad \text{rot}_z \mathfrak{B} = w.$$

Daraus ergibt sich sofort

$$\mathfrak{H}_x = -\frac{du}{dt}, \quad \mathfrak{H}_y = -\frac{dv}{dt}, \quad \mathfrak{H}_z = -\frac{dw}{dt}.$$

Explizite ist:

$$\mathfrak{E}_x = \frac{\alpha(\beta^2 - \gamma^2)}{r} \frac{d^3 f}{dr^3} - \frac{6\alpha(\beta^2 - \gamma^2)}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} = \mathfrak{E}_{1x} + \mathfrak{E}_{2x},$$

$$\mathfrak{E}_y = -\frac{\beta(\alpha^2 + 2\gamma^2)}{r} \frac{d^3 f}{dr^3} + \frac{3\beta(\alpha^2 - \beta^2 + 3\gamma^2)}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} = \mathfrak{E}_{1y} + \mathfrak{E}_{2y},$$

$$\mathfrak{E}_z = \frac{\gamma(\alpha^2 + 2\beta^2)}{r} \frac{d^3 f}{dr^3} - \frac{3\gamma(\alpha^2 + 3\beta^2 - \gamma^2)}{r} \frac{d^2 f}{dr^2} = \mathfrak{E}_{1z} + \mathfrak{E}_{2z}.$$

$$\mathfrak{H}_x = \frac{2\beta\gamma}{r} \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2 f}{dt^2} - \frac{3}{r} \frac{df}{dr} + \frac{3}{2} f \right),$$

$$\mathfrak{H}_y = -\frac{\alpha\gamma}{r} \frac{d}{dt} (\dots),$$

$$\mathfrak{H}_z = \frac{\alpha\beta}{r} \frac{d}{dt} (\dots).$$

16. Es ist $\mathfrak{E}_{2x} \cdot x + \mathfrak{E}_{2y} \cdot y + \mathfrak{E}_{2z} \cdot z = 3(\gamma^2 - \beta^2) \frac{1}{r} \frac{d^2 f}{dr^2}$, und dies ist im allgemeinen verschieden von null. Die Welle ist rein longitudinal, wenn der Winkel zwischen \mathfrak{E}_2 und r gleich 0 oder π ist, nämlich auf der z -Achse und auf der y -Achse.

17. Man findet, daß $\mathfrak{E}_1 \perp r$; die Bahn des Endpunktes von \mathfrak{E}_1 liegt auf einem elliptischen Zylinder, dessen Achse die z -Achse ist.

18. $\mathfrak{E}_m = 0,018$ Volt/cm; $\mathfrak{H}_m = 5,9 \cdot 10^{-5}$ Gauß.

19. Im Vakuum $0,7 \cdot 10^{-4}$ erg/cm², in Wasser $\sqrt{81} = 9$ mal größer.

20. Ist die Amplitude des elektrischen Vektors a , so ist

$$\overline{\mathfrak{E}^2} = \frac{a^2}{2}; \quad \overline{\mathfrak{H}^2} = \varepsilon \frac{a^2}{2}; \quad \overline{W} = \frac{\varepsilon a^2}{2} \cdot \frac{1}{4\pi}; \quad |\overline{\mathfrak{E}}| = \frac{a^2}{2} \sqrt{\varepsilon} \cdot \frac{c}{4\pi}.$$

21. Es ist zwar die Intensität stets proportional dem Quadrat der Amplitude, der Proportionalitätsfaktor ist aber in verschiedenen

Medien verschieden. Die Lösung ergibt sich, wenn man die Intensität durch den Energiefluß charakterisiert und die Fresnelschen Formeln benutzt, vgl. Aufg. 32.

22. Aus dem Extinktionskoeffizient $k = \sqrt{\frac{\sigma \lambda}{c}}$ erhält man für die Schwächung der Amplitude $a = a_0 \cdot e^{-kz}$; daraus folgt für die Schwächung der Intensität $J = J_0 \cdot 0,176$, also eine Abnahme auf rund 18 Proz.

23. $f(\lambda) d\lambda \sim e^{-\frac{4\pi\sqrt{\sigma c} \cdot x_0}{V\lambda}} \cdot d\lambda$ (wo σ in elektromagnetischen Einheiten gemessen ist).

24. Phasendifferenz $\delta = 45^\circ$; $\mathfrak{H} = 290 \text{ G}$.

25. Für $\lambda = 10 \text{ cm}$ $\mathfrak{H} = 8,95 \text{ G}$, $\delta = 0$; für $\lambda = 1000 \text{ m}$ $\mathfrak{H} = 9,75 \text{ G}$, $\delta = 5^\circ$.

26. Es muß $\lambda \geq \left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{4c} \cdot \frac{100}{\delta}$ sein, damit der Halbleiter sich wie ein Metall verhält bezüglich der für den Brechungsindex und den Absorptionskoeffizienten geltenden Formeln. Andererseits muß $\lambda \leq \frac{\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{\epsilon}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{\delta}{100}}$ sein, damit bezüglich des Brechungsindex sich der Halbleiter wie ein Isolator verhält; bezüglich des Absorptionskoeffizienten ist die Stellung der Bedingung in derselben Form hier sinnlos, da für Isolatoren $k = 0$ ist. Man findet für diesen direkt $k - k_i = \sigma/\epsilon \cdot \sqrt{\epsilon \cdot c \cdot \lambda}$, woraus man den Grad der Näherung ersehen kann.

27. Die Bedingung für die Transversalität ist, wenn \mathbf{v} der Wellenvektor ist, $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Es ist nun für $\mathbf{v} = \mathfrak{D}$ oder $\mathbf{v} = \mathfrak{H}$ wie in einem isotropen Medium $\text{div } \mathbf{v} = \text{div } \mathfrak{D} = \text{div } \mathfrak{H} = 0$. Dagegen ist für $\mathbf{v} = \mathfrak{E}$ nun $\text{div } \mathbf{v} = \text{div } \mathfrak{E} \neq 0$, wegen der Verschiedenheit der Dielektrizitätskonstanten in verschiedenen Richtungen.

28. Für die beiden in der genannten Richtung möglichen Wellen ist $\alpha_1 = 2^\circ 45'$ und $\alpha_2 = 5^\circ 26'$.

29. Die Winkel mit den drei Richtungen der größten, mittleren und kleinsten Dielektrizitätskonstante haben die Richtungskosinusse $\pm 0,6$, $\pm 0,8$ und 0 . Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist $c \cdot 0,507$.

30. Für lange Wellen $\delta = 5^\circ 17'$, für optische Wellen $\delta = 1^\circ$.

31. $\frac{1}{30}$ der Plattendicke.

II. Brechung, Reflexion, Interferenz und Beugung.

32. Ist $\nu = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$ (ϵ_2 und ϵ_1 die Dielektrizitätskonstanten der beiden Medien), so folgt aus den Fresnelschen Formeln

$$-\frac{a_r}{a_i} = \frac{\nu - 1}{\nu + 1}, \quad \frac{a_g}{a_i} = \frac{2}{\nu + 1}.$$

Setzt man nun $J = c |[\mathcal{E} \mathcal{H}]|$ und in diesem Ausdruck für die elektrische und magnetische Kraft die aus den Maxwell'schen Gleichungen folgenden Werte in den beiden Medien, so folgt sofort das gewünschte Resultat.

33. Der gesuchte Winkel ϑ_p ist gegeben durch $\operatorname{tg} \vartheta_p = \operatorname{tg} \vartheta \cdot \frac{\cos^2(\alpha + \alpha_1)}{\cos^2(\alpha - \alpha_1)}$,
worin α_1 der zum Einfallswinkel α gehörende Brechungswinkel ist.

34. Der Einfallswinkel φ ist bestimmt durch

$$\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} - \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

35. Die Spiegelfläche $F(x, y, z) = 0$ ist bestimmt durch die Differentialgleichung

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = r \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + n^2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

wo r die Entfernung des Spiegelementes vom Auge ist. Eine spezielle Lösung ist $r = c \cdot e^{n\varphi}$ in Polarkoordinaten. Der Spiegel ist also die Rotationsfläche einer logarithmischen Spirale.

36. Durch 42 Platten.

37. Ist β der zum Einfallswinkel α gehörende Brechungswinkel, so muß sein: $\sin \alpha = n \cdot \sin \beta$ und $\cos^2(\alpha - \beta) = \cos^2(\alpha + \beta)$.

38. $\alpha_{\min} = 83^\circ 10'$; (dagegen $\alpha_{\text{pol}} = 83^\circ 38'$).

39. Die Bedingung für die Erzeugung zirkular polarisierten Lichtes ist $\frac{1 - n^2}{2n} \geq \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} = 0,414$, d. h. $n \leq 0,666$. Grenzt das Parallelepiped an Wasser, so müßte der Brechungsexponent des Glases gegen Luft also größer als 2 sein; solche Glassorten aber gibt es nicht, da schwerstes Silikat-Flint nur bis etwa 1,96 kommt. Dagegen wäre ein Parallelepiped aus Diamant mit $n = 2,45$ brauchbar.

40. Die Schirmwirkung erklärt sich aus dem großen Reflexionsvermögen der Metalle. Für Kupfer und $\lambda = 10 \text{ m}$ findet man

$$r = 1 - 1,4 \cdot 10^{-5} = 0,999986.$$

41. Es ist für großes $n^2(1+k^2)$ für den Haupteinfallswinkel

$$\sin \alpha_0 \operatorname{tg} \alpha_0 = n \sqrt{1+k^2},$$

und ferner folgt aus $k = \sin \mathcal{A} \cdot \operatorname{tg} 2\varphi$ (wo \mathcal{A} die Phasendifferenz der Komponenten ist), für $\mathcal{A} = \pi/2$, d. h. $\varphi = \varphi_0$, daß $k = \operatorname{tg} 2\varphi_0$ ist.

42. Unter dem Winkel $44^\circ 15'$.

43. Man erhält ein System heller und dunkler Streifen parallel der z -Richtung. Der Abstand zweier Maxima oder Minima voneinander ist $y_0/\alpha \cdot \lambda$, wenn λ die Wellenlänge der Kugelwellen ist.

44. Die Koordinaten der Atome sind gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= m_1 \alpha_{1x} + m_2 \alpha_{2x} + m_3 \alpha_{3x}, \\ &\dots \dots \dots \\ z &= m_1 \alpha_{1z} + m_2 \alpha_{2z} + m_3 \alpha_{3z}, \end{aligned}$$

wo m_1, m_2, m_3 stets ganze Zahlen sind. Fällt die Welle in der Richtung (α, β, γ) auf dieses Gitter, so ist die resultierende Amplitude

$$\sum \frac{e^{-ik(r + \alpha x + \beta y + \gamma z)}}{r},$$

wobei über die Abstände r des Aufpunktes von den einzelnen Atomen zu summieren ist.

45. $\alpha < 1^\circ 6,5'$.

46. $d < 0,49 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$.

47. $i < 33^\circ 10'$ (Polarisationswinkel des Glases gegen Luft), Ringsystem mit schwarzem Zentrum.

$i = 33^\circ 10'$ keine Ringe.

$33^\circ 10' < i \leq 67^\circ 48'$ (Polarisationswinkel des Diamants), Ringsystem mit hellem Zentrum.

$i > 67^\circ 48'$ Ringsystem mit schwarzem Zentrum.

48. a) $0,48''$; b) $0,36''$.

49. $d < 0,0061 \text{ cm}$.

50. $c'^2 + s'^2 = 16 \cos^2 \frac{\mu d}{2} \cos^2 \frac{\nu d}{2}$.

51. Das Beugungsbild einer Ellipse, bezogen auf zwei zu den konjugierten Durchmessern senkrechte Achsen, ist dasselbe wie das eines Kreises vom Radius $r^2 = \frac{b^2 + a^2}{2}$, wo a und b die Achsen der Ellipse sind.
52. Für $\alpha = \pi/2 + \beta$, da dann im Interferenzbild kein weißes Licht beigemischt ist.
53. Eine Schar gerader Linien (von denen die mittelste farblos ist).

III. Geometrische Optik.

54. Die Bedingung $[\text{rot } \mathfrak{S}, \mathfrak{S}] = 0$ folgt aus der Forderung, daß die „Lichtstrahlen“ Gerade sind; ist s die Bogenlänge des Strahles, so ist $\frac{d\mathfrak{S}}{ds} = 0$, was sich in obige Bedingung umformen läßt. Die zweite Bedingung $(\text{rot } \mathfrak{S}, \mathfrak{S}) = 0$ folgt aus der Forderung, daß die Lichtstrahlen flächennormal sein müssen, d. h. daß \mathfrak{S} der Richtung nach ein Potentialvektor ist. $\text{rot } \mathfrak{S} = 0$ folgt aus den beiden Bedingungen, da zugleich $\text{rot } \mathfrak{S} \parallel \mathfrak{S}$ und $\text{rot } \mathfrak{S} \perp \mathfrak{S}$ sein müßte.
55. Sind AO und OB der einfallende und der reflektierte Strahl, ON das Einfallslot und A' bzw. B' die Projektionen von A bzw. B auf eine durch ON gehende Ebene, so mache man $\overline{AO} = \overline{OB}$. Dann folgt der Beweis aus der Kongruenz der Dreiecke (OAA') und (OBB') .
56. Die Kurvengleichung in (x, y) ist

$$\begin{aligned} & (x \cos \alpha + y \cdot \cos \beta)^2 \cdot \{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z_0^2\} \\ & = \{(x_0 - x)x + (y_0 - y) \cdot y\}^2. \end{aligned}$$

57. Sind γ der Ablenkungswinkel, i, i' der Einfalls- und Brechungswinkel, so ist aus dem Brechungsgesetz

$$\frac{d\gamma}{di} = 1 - \frac{\text{tg } i'}{\text{tg } i} \text{ positiv; } \gamma \text{ nimmt zu mit } i,$$

$$\frac{d^2\gamma}{di^2} = -\frac{\text{tg } i'}{\text{tg}^2 i} \left(\frac{1}{\cos^2 i'} - \frac{1}{\cos^2 i} \right); \text{ ist } i' < i, \text{ so ist die Klammer}$$

negativ, also $\frac{d^2\gamma}{di^2}$ positiv.

Für Reflexion ist

$$\gamma = 180 - 2i; \quad \frac{d\gamma}{di} = -2.$$

58. Einfallswinkel i_m ist bestimmt durch

$$\sin i_m = n \cdot \sin(\alpha - i'),$$

wobei i' der Gleichung genügt:

$$(n^2 - 1) \operatorname{tg} i' = \operatorname{tg}(\alpha - 2i').$$

Zahlenbeispiel: Keine Lösung, da der Prismenwinkel $>$ Grenzwinkel der totalen Reflexion.

59. Der Winkel folgt aus dem Fresnelschen Prinzip zu $5' 44''$.

60. 1. $\alpha = 106^\circ 20'$.

2. Ist i' der Ausfallswinkel aus dem zweiten Prisma, so ist die

Dispersion $D = \frac{d i'}{d n} = 2 \operatorname{tg} \gamma$, also unabhängig von n ; für $\gamma = 30^\circ$

ist $D = 1,154$.

61. Ist die Ebene des Strahles (h, x) , der Wert von n für $h = 0$ gleich n_0 ,

so ist die Bahngleichung $\frac{d x}{d h} = + \frac{c}{\sqrt{n^2(h) - c^2}}$, wobei $c = n_0 \cos \alpha$.

Bahn symmetrisch zur Normale auf der Ebene $h = 0$, Scheitelpunkt für $n = n_0 \cos \alpha = c$.

62. Alle Lichtwege sind Kreise; zwischen dem Radius ϱ eines dieser Kreise und dem Abstand d seines Mittelpunktes von dem Mittelpunkt der Kugel besteht die Beziehung $a^2 = \varrho^2 - d^2$.

63. Ist α der Winkel zwischen dem Radiusvektor r und einem Lichtstrahl, so ist die Bahngleichung $n(r) \cdot r \cdot \sin \alpha = \text{konst.}$ Daraus folgt für den Winkel β , unter welchem die Kugel erscheint, $\beta = n_0 \cdot \beta_0$, wenn β_0 die Winkelgröße der Kugel ohne Gashülle ist.

64. $r = 206$ m.

65. $\operatorname{tg} u / \operatorname{tg} u' = 2,45$.

66. $\mathcal{A} = 29$ mm.

67. Brennweite $S = 30,7$ mm; Schnittweite $s = 5$ mm, gerechnet von der Oberfläche der Flüssigkeit; Hauptebene liegt 25,6 mm hinter der Oberfläche.

68. $d > 26,7$ cm.

69. Vergrößerung $N = 5,1$; Vergrößerung V nach Abbe = $\frac{N}{23,8}$; das Auge muß auf 14,8 cm akkommodieren.

70. $\delta = 19$ mm.

71. Der Astigmatismus folgt sofort aus der verschiedenen Krümmung der Zylinderfläche parallel und senkrecht zur Achse; $\delta = a \cdot \frac{n-1}{n-1+r}$ ($r =$ Zylinderradius).

72. Long. Ab. $= d \left(\frac{1}{n} - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right)$; Lat. Ab. $=$ Long. Ab. $\times \operatorname{tg} \alpha$.

73. $\xi = 6,84$ mm; $2\varepsilon = 1,58$ mm.

74. Die Öffnung des Schirmes muß auf der Achse in 26,4 cm Abstand von der Linse angebracht sein.

75. $\frac{1}{r} = -\frac{1}{f} \cdot \frac{(n_2^F - n_2^C) - (n_1^F - n_1^C)}{(n_2^F - n_2^C)(n_1^C - 1) - (n_1^F - n_1^C)(n_2^C - 1)}$.

76. $a = r/(n-1)$.

77. $a = 16,92$ cm.

78. Wenn $a > f + f_1$ ist.