

С. П. ТИМОШЕНКО

# КУРС ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Под редакцией *Э. И. Григolyка*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКОВА ДУМКА»  
КИЕВ — 1972

В книге С. П. Тимошенко, выдающегося ученого, известного многим поколениям инженеров и специалистов в различных областях механики и являющегося мировым авторитетом в своей области, содержится систематизированное изложение основ теории упругости. Приведен расчет стержней, пластин и оболочек. Отражены важнейшие результаты, полученные автором в области расчета сооружений.

Книга является первым переизданием двухтомного «Курса теории упругости», изданного в 1914—1916 годах в Петербурге, и представляет собой материал лекций, прочитанных автором в 1907—1916 гг. в высших учебных заведениях России. Этот курс долгое время оставался основным руководством для изучения теории упругости и ее приложения к инженерному делу.

Книга и в настоящее время представляет значительный интерес для аспирантов и студентов вузов, а также для инженеров и научных работников, занимающихся проблемами прочности конструкций.

*Посвящается памяти дорогого учителя  
Виктора Львовича Кирпичева*



## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Степан Прокофьевич Тимошенко широко известен многим поколениям студентов, инженеров, научных работников своими многочисленными книгами по сопротивлению материалов, теории устойчивости деформируемых систем, теории колебаний, теории сооружений, теории пластин и оболочек и, наконец, по теории упругости. Ему принадлежит исключительно большая роль в развитии современной теории упругости и ее приложений к разнообразным инженерным задачам. Введенные С. П. Тимошенко расчетные модели инженерных сооружений и методы их исследования широко применяются и в настоящее время в судо-, авиа-, мостостроении и других областях промышленного и гражданского строительства.

Книга С. П. Тимошенко «Курс теории упругости», изданная в двух томах в 1914—1916 гг. в Петербурге, сразу же после выхода в свет была высоко оценена широким кругом специалистов, и эта оценка остается неизменной до настоящего времени. В этой книге нашли отражение многие важные результаты, полученные автором в начале нашего столетия в области расчета сооружений. По ней можно судить о той роли, которую играли отечественные инженеры и ученые, в том числе и автор книги, в создании новых научных направлений.

В первой части курса излагается общая теория напряженного и деформированного состояния. Выводятся дифференциальные уравнения равновесия в напряжениях и перемещениях для трехмерной изотропной среды. Принцип возможных перемещений применяется для изотропного упругого тела. При помощи методов, применяемых в курсе сопротивления материалов, исследуются растяжение, кручение и изгиб стержней. Как частный случай общей теории приводятся общие соотношения для плоской деформации и плоского напряженного состояния. Дано решение дифференциальных уравнений плоской задачи в целых полиномах, а также в гиперболотригонометрических функциях применительно к изгибу тонкой полосы. Разбирается случай полярных координат. Описано применение энергетического метода к плоской задаче.

Изложена теория кручения призматических стержней Сен-Венана. Дана аналогия между задачей кручения стержня и задачей о прогибах от равномерного нормального давления нерастяжимой натянутой на жесткий контур мембраны и рассматривается ее применение к расчету тонкостенных замкнутых контуров на кручение. Излагается принадлежащее автору решение этой задачи энергетическим методом: исследован случай

прямоугольного поперечного сечения. Рассматривается поперечный изгиб прямого упругого стержня кругового, эллиптического и прямоугольного поперечных сечений.

Далее описывается осесимметричная деформация тел вращения. Наибольший интерес представляет вторая часть, в которой рассматриваются стержни, пластины и оболочки.

При исследовании малых прогибов упругих стержней показано, как можно ввести поперечный сдвиг в дифференциальное уравнение равновесия этой теории. Излагается расчет балок на упругом основании и важная для судостроения задача, поставленная И. Г. Бубновым, о расчете перекрестных балок. Рассмотрен продольно-поперечный изгиб балок, приводится точное, а также приближенное, развитое автором, решение в тригонометрических рядах. Дается систематизированное изложение теории выпучивания прямых сплошных стержней, полос, круговых колец, двутавровых балок, устойчивости вала при кручении. Уточняется известная задача Ф. С. Ясинского о расчете на устойчивость пояса открытых мостов. Приводятся точные и приближенные решения этой задачи энергетическим методом, данные самим автором. Особенно ценны результаты, относящиеся к устойчивости плоской формы изгиба полос и двутавровых балок. Теория изгиба, кручения и устойчивости двутавровых балок была разработана автором в 1905—1906 годах и оказалась основополагающим исследованием для последующих разработок в области расчета и общей теории тонкостенных стержней. Автор приводит компактные формулы для расчета критических сил.

Излагается теория малых продольных, крутильных и поперечных колебаний. Выводится дифференциальное уравнение поперечных колебаний с учетом поперечного сдвига и инерции вращения, которое более известно по публикации 1921 года на английском языке. Это уравнение сыграло огромную роль в теории колебаний упругих систем и известно в литературе как уравнение Тимошенко, а уравнения этого вида для пластин и оболочек как уравнения типа Тимошенко. Приводится решение этого уравнения для случая собственных колебаний. Затем дается изложение результатов автора в области применения тригонометрических рядов и энергетического метода для решения задачи о поперечных вынужденных колебаниях опертого по концам стержня, а также о колебаниях стержня на упругом сплошном основании. Приводится приближенное решение задачи о колебаниях стержней переменного сечения и его сравнение с точным решением. Особенно интересен приведенный здесь результат решенной ранее автором задачи о расчете балки на поперечный удар. При этом в отличие от классической известной схемы учитывались местные деформации балки в зоне удара грузом, в связи с чем появилась возможность определить закон изменения давления в месте удара, а также время соударения.

Большое внимание уделено исследованию изгиба тонких упругих пластин в рамках известного уравнения Жермен — Лагранжа (или Сен-Венана для задач устойчивости). Здесь подробно рассмотрен изгиб прямой и первоначально искривленной пластин по цилиндрической поверхности, а также конечные прогибы круговой пластины при поперечном равномерном давлении (результат автора). Изложено решение об изгибе прямоугольных пластин с четырьмя опертыми и четырьмя защемленными краями при равномерном поперечном давлении. Оценено влияние на изгиб прямоугольной пластины сил, действующих в срединной поверхности, и влияние

пачального прогиба ее. Особенно важными в этом разделе являются результаты, относящиеся к устойчивости неподкрепленных и подкрепленных упругими ребрами прямоугольных пластин. Основные результаты автора по этому вопросу были опубликованы в «Известиях Киевского политехнического института» в 1907 году (неподкрепленные пластины) и в «Сборнике Института инженеров путей сообщения» за 1915 год (подкрепленные пластины). Эти материалы в свое время были использованы в проектировочных расчетах судового набора русского военного флота.

В заключении второй части книги рассматриваются малые прогибы тонких упругих оболочек, излагается линеаризованная теория устойчивости оболочек. Приведенные здесь общие уравнения устойчивости цилиндрических оболочек в перемещениях, вызванных потерей устойчивости, известны как уравнения Тимошенко. Дается решение этих уравнений для случая внешнего поперечного давления и равномерного продольного сжатия. Последний случай особенно интересен. Автором впервые изучена теоретически несесимметричная форма потери устойчивости и показано, что в этом случае при выпучивании по коротким продольным волнам выражение для продольной критической нагрузки совпадает с формулой для критической нагрузки при симметричном волнообразовании. Здесь описан также метод расчета на устойчивость оболочек за пределом упругости. Наконец, излагается общее решение уравнений малых осесимметричных деформаций сферической оболочки и их применение к различным случаям нагружения.

Таким образом, в «Курсе теории упругости» ряд новых результатов, полученных самим автором, представлен в совокупности с данными других исследований и именно поэтому изложение носит законченный и систематизированный характер.

«Курс теории упругости», как и остальные книги С. П. Тимошенко, отличается ясностью изложения, четкостью постановок задач и методов их решения, а также глубоким и всесторонним анализом возможности практического применения результатов исследований.

Нет сомнения, что «Курс теории упругости» С. П. Тимошенко будет с интересом встречен студентами и преподавателями высших учебных заведений, инженерами различных специальностей, сотрудниками конструкторских бюро и научными работниками, занимающимися проблемами механики сплошных сред.

*Э. И. Григолюк*

Май 1971 года  
Москва

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К О ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга представляет собою переиздание моего «Курса теории упругости», изданного в двух томах Петербургским институтом инженеров путей сообщения более пятидесяти лет назад и составляющего материал лекций, прочитанных мною с 1907 по 1916 год в высших технических учебных заведениях России: в Киевском политехническом институте, в Институте инженеров путей сообщения, а также в Петроградском политехническом институте.

В мою задачу входило тогда создание курса теории упругости для инженеров. В этой связи построен практически направленный курс. В него включены новые для того времени задачи, имевшие важное значение для проектирования. В нем широко и в различных аспектах были использованы приближенные методы. Именно поэтому в монографии уделено также большое внимание устойчивости и колебаниям упругих стержней и пластин. Я включил в книгу и ряд полученных мной результатов.

Мне кажутся излишними какие-либо добавления или авторские комментарии к курсу с учетом огромных достижений, полученных за прошедшие пятьдесят лет в различных областях теории упругости. Эти результаты учтены в ряде специализированных и общих монографий, известных читателю.

Мой курс теории упругости иллюстрирует некоторые главные проблемы, которые волновали в то время инженерную мысль России в области строительной механики. Он дорог мне и потому, что в нем нашли отражение мои исследования в молодую пору моей жизни, жизни на Родине.

*С. П. Тимошенко*

Март 1971 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Стремление получить возможно большую экономию в весе при обеспечении надлежащей прочности в связи с улучшением качества строительных материалов и с непрерывным увеличением размеров современных сооружений и машин обуславливает большое практическое значение теоретического расчета прочности сооружения. Это обстоятельство в значительной степени способствует пробуждению интереса к теории упругости среди инженеров, занимающихся исследованием различного рода вопросов прочности в области машиностроения, кораблестроения и статика сооружений.

Теория упругости, до недавнего времени служившая предметом изучения лишь в университетах, где ею интересовались лица, занимающиеся математикой и теоретической физикой, постепенно приобретает техническое значение. Ею пользуются теперь не только для критической оценки элементарных решений, излагаемых в курсах сопротивления материалов, но также и для разыскания новых решений, где элементарные приемы не могут быть надежными при определении напряжений. К такого рода задачам относятся, например, все вопросы о жестких напряжениях, обусловленных или резкими изменениями формы тела, или действием сосредоточенных сил.

Желая хотя бы отчасти удовлетворить назревшую потребность в курсе теории упругости для инженеров, мы решили опубликовать наши лекции по этому предмету, читанные в Киевском политехникуме (1907—1910 гг.) и в Институте инженеров путей сообщения (1912—1914 гг.). Первая часть этих лекций заключает вопросы, относящиеся к исследованию деформаций и напряжений в телах, все размеры которых являются величинами одного порядка. Во вторую часть вошли исследования деформаций в тонких стержнях и пластинках.

Имея в виду главным образом технические приложения теории упругости и считаясь с той математической подготовкой, которая дается в нашей высшей технической школе, мы нашли нужным в нашем изложении предмета пропустить целый ряд разделов, имеющих чисто теоретический характер. По вопросам этого рода интересующиеся найдут достаточно материала в имеющихся прекрасных курсах теории упругости А. Лява<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Love A. E. H. Lehrbuch der Elastizität. Deutsche Ausgabe von A. Timpe. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1907, 668 SS. (В дальнейшем А. Лява — А. Тимпе). Перевод с англ.: Love A. E. H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. 2 edition. Cambridge, University Press, 1906, 551 pp.

и А. Клебша <sup>1</sup>, а также в отдельных монографиях, перечисленных в Энциклопедии математических наук <sup>2</sup>.

Из этих соображений мы также пропустили исследования вопроса о существовании общего решения уравнений теории упругости и об однозначности этого решения. Оставили без рассмотрения также общие методы интегрирования уравнений теории упругости и ограничились лишь подробным изложением ряда частных решений, могущих иметь непосредственное практическое приложение. По тем же соображениям нами пропущены исследования вопросов о строении упругих тел, о зависимости между упругими деформациями и сопровождающими их тепловыми и электрическими явлениями, а также о распространении колебаний в упругой среде.

Чтобы сделать изложение предмета доступным для лиц, не получивших специальной математической подготовки, мы при выводах пользовались по возможности самыми элементарными приемами и в отдельных случаях сохранили все промежуточные выкладки, облегчающие чтение книги.

В тех случаях, где теория упругости не дает точного ответа на поставленную задачу, мы считали необходимым указывать на приближенные методы решения вопроса. Приближенным способам интегрирования дифференциальных уравнений, встречающихся в теории упругости, мы придаем большое значение и полагаем, что решение целого ряда весьма важных технических задач зависит от развития этих методов. В нашем курсе мы считали необходимым хотя бы вкратце коснуться известного приема решения уравнений математической физики, предложенного Вальтером Ритцем <sup>3</sup>, и применили этот прием при решении плоской задачи и при исследовании изгиба и кручения призматических стержней. Отметим вычислительный метод решения уравнений в частных производных, разработанный Л. Ричардсоном <sup>4</sup>, а также вычислительный и графический методы, предложенные К. Рунге <sup>5</sup> и разработанные его учениками

<sup>1</sup> C l e b s c h A. Théorie de l'élasticité des corps solides. Traduite par Barre de Saint-Venant et A. Flamant. Paris, Dunod, 1883, 900 pp. (В дальнейшем А. Clebsch — Saint-Venant). Перевод с немецкого: Clebsch A. Theorie der Elastizität fester Körper. Leipzig, B. G. Teubner, 1862, 424 SS.

<sup>2</sup> M ü l l e r C. H., T i m p e A. Die Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Leipzig, B. G. Teubner, 1907, Bd 4, Mechanik, T. 4, H. 1, SS. 1—54.

<sup>3</sup> R i t z W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik.— J. für die reine und angewandte Mathematik, 1909, Bd 135, N 1, SS. 1—61. [Перепечатка: R i t z W. Gesammelte Werke. Oeuvres publ. par la Société suisse de physique. Paris, Gauthier-Villars, 1911, pp. 192—250].

<sup>4</sup> R i c h a r d s o n L. F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations with an application to the stresses in a masonry dam. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 1910, vol. 210, N 467, pp. 307—357.

<sup>5</sup> R u n g e C. Über eine Methode die partielle Differentialgleichung  $\Delta u = \text{constans}$  numerisch zu integrieren. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1908, Bd 56, H. 3, SS. 225—232; R u n g e C. Graphische Lösung von Randwertaufgabe der Gleichung  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ . Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse, 1911, 18 SS.

А. Виллерсом<sup>1</sup> и Г. Занденом<sup>2</sup>. В некоторых случаях отсутствие аналитического решения задачи может быть восполнено экспериментальными исследованиями распределения напряжений в деформированных телах, и мы считали уместным в техническом курсе упругости остановиться на некоторых приемах экспериментального решения задач. Так, например, мы изложили оптический метод исследования напряжений в прозрачных пластинках с использованием поляризованного света. С помощью этого метода в последнее время был успешно решен целый ряд задач. Далее мы привели аналогию Прандтля, дающую возможность находить экспериментальным путем распределение напряжений при скручивании призматических стержней, а также указали экспериментальный способ решения плоской задачи, основанный на полном совпадении соответствующего уравнения с уравнением для изогнутой поверхности пластинки.

Так как при технических расчетах наибольший интерес представляет определение напряжений, то мы при рассмотрении отдельных задач стремились определять напряжения непосредственно, не переходя к уравнениям, выраженным через перемещение точек деформированного тела. Для этого мы пользовались функциями напряжений. Функцию напряжений мы ввели не только при рассмотрении плоской задачи, но также при изложении задачи Сен-Венана и задачи о деформации, симметричной относительно оси. Таким путем, как нам кажется, удалось достигнуть значительного упрощения в изложении задач о кручении и изгибе призматических стержней и задачи Герца.

Ссылки на литературу, встречающиеся в различных местах нашей книги, не могут претендовать на полноту, да мы и не стремились дать исчерпывающий перечень литературы в такой обширной области, как теория упругости. Наша цель заключалась лишь в том, чтобы указать читателю те сочинения, где он может найти более подробное изложение того или иного вопроса. Особенно мы отмечали новую литературу и новые задачи, которые характеризуют современное состояние науки. Такие указания на современную литературу, нам кажется, могут быть полезны для лиц, желающих посвятить себя изучению излагаемого предмета и самостоятельной работе в этой области.

Считаем своим приятным долгом принести здесь глубокую благодарность преподавателю Института инженеров путей сообщения Константину Андреевичу Чалышеву, прочитавшему рукопись и корректуры и сделавшему немало исправлений и полезных замечаний.

*С. Тимошенко*

Гапсаль  
26 июня 1914 г.

<sup>1</sup> Willers A. Die Torsion eines Rotationskörpers um seine Achse. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1907, Bd 55, H. 3, SS. 225—263.

<sup>2</sup> Sanden H. Über den Auftrieb im natürlichen Winde. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1913, Bd 61, H. 3, SS. 225—245.



## ВВЕДЕНИЕ

Основная задача теории упругости заключается в том, чтобы по заданным действующим на твердое тело внешним силам находить те изменения формы, которые тело претерпевает, и те внутренние силы упругости, которые при этих изменениях формы возникают между частями тела. В таком общем виде задача теории упругости еще далеко не разрешена, но имеется целый ряд достаточно полно исследованных частных случаев. Этими результатами можно пользоваться при решении весьма важных технических задач, когда приходится иметь дело с выбором прочных размеров частей инженерных сооружений и машинных конструкций. Вопросы эти в курсах сопротивления материалов решаются на основании различных допущений, более или менее оправдываемых на практике. В теории упругости те же задачи решаются аналитическим путем. Мы находим здесь выражения для перемещений и внутренних сил упругости деформируемого тела, применяя начала механики и математический анализ к исследованию равновесия и движения твердого тела, способного несколько изменять свою форму под действием внешних сил.

Прежде всего нужно установить понятие об упругом твердом теле. В статике и динамике под твердым телом подразумевают систему неизменно связанных между собой материальных точек. Поскольку при действии на такое тело внешних сил расстояния между отдельными его точками не изменяются, то внутренние силы не входят в уравнения задачи и внутреннее строение твердого тела в этом случае не имеет никакого значения. Переходя к определению внутренних сил, мы должны принять во внимание способность твердых тел несколько изменять свою форму под действием внешних сил: при этом необходимо выяснить внутреннее строение упругого твердого тела.

Основатели теории упругости<sup>1</sup> при установлении основных уравнений этой теории исходили обыкновенно из представления молекулярного строения вещества. Твердые тела они себе представляли состоящими из отдельных материальных частиц, молекул, между которыми действуют силы взаимодействия.

---

<sup>1</sup> История установления основных уравнений теории упругости и относящаяся к этому вопросу литература приведены в статье С. Н. Мюллер и А. Тимпе, указанной в списке на стр. 10. Todhunter I., Pearson K. A history of the theory of elasticity and of the strength of materials. From Galilei to the present time. Cambridge, University Press, vol. I. Galilei to Saint-Venant, 1886, 924 pp.; vol. II. Saint-Venant to lord Kelvin. Pt I, 1893, 762 pp.; pt II, 1893, 546 pp. Navier C. L. M. N. Resume des lecons données a l'Ecole des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique a l'établissement des constructions et des machines. Troisième édition avec des Notes et des appendices par M. Barre Saint-Venant. Paris, Dunod, 1864, t. I, fascicule I, pp. 1—272; fascicule II, pp. 273—500.

Силы взаимодействия между двумя молекулами считали обыкновенно направленными по линии, соединяющей центры молекул, и предполагали, что величина этих сил зависит лишь от расстояния между частицами. При действии на твердое тело внешних сил расстояние между частицами изменяется, вместе с тем изменяются и силы взаимодействия.

Эти изменения продолжают до тех пор, пока не наступит равновесие между внешними и внутренними силами. При дальнейшем развитии теории молекулярного строения вещества пришлось принять во внимание также и тепловые явления, которые сопровождают изменения формы тел. Пришлось допустить, что молекулы, из которых состоит твердое тело, находятся в постоянном колебательном движении и что этими колебаниями определяется температура тела.

С современной точки зрения эти представления о строении твердых тел весьма несовершенны. Приходится признать, что наши знания недостаточны для построения теории упругости, в которой было бы принято во внимание действительное строение твердых тел. Поэтому в дальнейшем мы будем оперировать с некоторым гипотетическим *идеальным упругим телом*, и этому телу припишем такие свойства, чтобы те заключения, которые будут получены аналитическим путем, по возможности точнее согласовались с данными опыта.

Предположим следующее:

1. Вещество идеального упругого тела непрерывно распределено по его объему. В случаях, когда нам придется выделять из этого тела бесконечно малые элементы, будем допускать, что и для этих элементов имеют место все те физические свойства, которыми обладает идеальное упругое тело.

2. Будем считать идеальное упругое тело однородным. Если в таком теле выделить два одинаковых и *одинаково* ориентированных элемента, то они будут тождественны по своим физическим свойствам.

3. При отсутствии внешних сил и при определенной температуре упругому телу свойственно иметь определенную форму и определенный объем. Это состояние тела будем называть *естественным состоянием*.

4. Чтобы при постоянной температуре изменить форму тела, необходимо приложить внешние силы. Причем определенному изменению формы тела соответствует вполне определенная система внешних сил. Мы в дальнейшем ограничимся изучением весьма малых изменений формы и объема тел, и потому относительные перемещения точек тела при деформации будем считать малыми величинами.

5. При удалении внешних сил деформированное упругое тело возвращается к своему естественному состоянию, соответствующему данной температуре. Таким образом, естественное состояние идеального упругого тела при данной температуре является устойчивой формой равновесия при этой температуре. Упругое тело обладает свойством накапливать в себе энергию в обратимой форме. Для того чтобы вызвать деформацию тела, нужно затратить известное количество работы и наоборот, такое же количество работы получаем при удалении внешних сил, когда тело возвращается к своему естественному состоянию (при деформации температура тела предполагается все время постоянной).

Перечисленными свойствами идеального упругого тела в большей или меньшей степени обладают и те естественные тела, с которыми нам приходится иметь дело при различных технических расчетах. Такие материалы, как железо и сталь, к которым особенно часто приходится применять выводы теории упругости, обладают весьма однородным строением и если деформации не выходят за известные пределы, то материалы эти можно считать идеально упругими; они возвращаются к своему естественному состоянию, если удалить силы, вызываю-

щие деформации. Вследствие этого выводы теории упругости, относящиеся к идеальному упругому телу, можно с большой точностью применять к железу и стали. Конечно, при этом не будут учтены такие обстоятельства, как явление *гистерезиса* и *влияние времени* на деформацию<sup>1</sup>. Но для таких материалов, как железо и сталь, они не имеют существенного практического значения. Чугун, камни и дерево по своим свойствам больше отличаются от однородного идеального упругого тела и выводы теории упругости с гораздо меньшей точностью применимы к этим материалам. На практике при расчете конструкций, изготовленных из этих материалов, можно ограничиваться значительно меньшей точностью. В таком случае результаты теории упругости в применении к этим материалам можно рассматривать как первое приближение.

---

<sup>1</sup> В последнее время появились попытки оценить влияние времени: *Volterra V.* Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità. Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti. Roma. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali Serie quinta. 1909, vol. 18, 2° Semestre, pp. 295—301. Equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia. Там же, 1909, vol. 18, 2° Semestre, pp. 577—586. Soluzione della equazioni integro-differenziali dell'elasticità nel caso di una sfera isotropa. Там же, 1910, vol. 19, 1° Semestre, pp. 107—115. Deformazione di una sfera elastica, soggetta a date tensioni, nel caso ereditario. Там же, 1910, vol. 19, 1° Semestre, pp. 239—243. Vibrazioni elastiche nel caso della eredità. Там же, 1912, vol. 21, 2° Semestre, pp. 3—12. Sui fenomeni ereditarii. Там же, 1913, vol. 22, 1° Semestre, pp. 529—539.



*ЧАСТЬ ПЕРВАЯ*

**ОБЩАЯ ТЕОРИЯ.  
ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ  
СТЕРЖНЕЙ.  
ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА.  
ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ**



### § 1. Внешние силы

Мы будем различать два рода сил: силы, приложенные по поверхности деформируемого тела, — *поверхностные силы* и силы, распределенные по объему тела, — *объемные силы*.

Поверхностные силы (нагрузки) возникают в результате давления на данное тело каких-либо других тел. Они могут распределяться по поверхности тела непрерывно, как, например, в случае гидростатического давления, давления ветра и т. д., или могут представляться отдельными сосредоточенными силами. Сосредоточенные силы всегда можно рассматривать как предельный случай распределенной нагрузки, нужно только предположить, что часть поверхности, по которой силы распределены, весьма мала по сравнению с поверхностью тела.

Объемные силы непрерывно распределяются по объему тела. Как пример объемной силы, с которой особенно часто приходится иметь дело на практике, можно привести силу тяжести. Ее величина, приходящаяся на какой-либо элемент тела, пропорциональна массе этого элемента. Если через  $\rho$  обозначим плотность тела, то проекции на координатные оси объемной силы, действующей на элементарный прямоугольный параллелепипед  $dx, dy, dz$ , будут следующие:  $\rho X dx dy dz, \rho Y dx dy dz, \rho Z dx dy dz$ . Здесь через  $X, Y$  и  $Z$  обозначены проекции на координатные оси объемной силы, приходящейся на единицу массы тела.

### § 2. Компоненты напряжения

Предположим, что на данное тело  $AB$  (рис. 1) действует система взаимно уравновешивающихся поверхностных и объемных сил. Под влиянием этих сил тело деформируется. Положим, что деформация прекратилась и все частицы тела пришли в равновесие. Такое состояние тела под действием приложенных к нему внешних сил назовем *напряженным состоянием*. Рассечем мысленно тело  $AB$  поверхностью  $mn$  на две части  $A$  и  $B$  и рассмотрим условия равновесия одной из этих частей, например части  $A$ . Те внешние силы  $P_1, P_2, P_3, \dots$ , которые непосредственно приложены к части  $A$ , в общем случае не представляют собой системы сил взаимно уравновешивающихся. Между тем рассматриваемая часть  $A$  как часть тела, находящегося в равновесии, также будет в равновесии. Для обеспечения этого равновесия необходимо допустить, что по сечению  $mn$  действуют некоторые силы, уравновешивающие силы  $P_1, P_2, P_3, \dots$ , приложенные к части  $A$ . Эти силы представляют не что иное, как действие части тела  $B$  на часть  $A$ . Назовем их *внутренними силами упругости* и будем считать, что они

непрерывно распределены по сечению  $mn$ . В простейшем случае растяжения призматического стержня силами, действующими по его оси, внутренние силы упругости распределяются, как мы знаем из элементарного курса сопротивления материалов, равномерно по поверхности плоского поперечного сечения, и, пользуясь уравнениями статики, можно легко определить равнодействующую внутренних сил упругости, приходящихся на единицу поверхности поперечного сечения. Эту равнодействующую, характеризующую интенсивность внутренних сил упругости, называют *напряжением*.

В общем случае внутренние силы упругости распределяются по сечению  $mn$  неравномерно, и для установления их интенсивности в какой-либо точке  $O$  поступим следующим образом. Выделим у точки  $O$  из поверхности  $mn$  малую площадку  $S$ . Внутренние силы упругости, приходящиеся на эту площадку, можно привести к одной равнодействующей  $R$ , приложенной в точке  $O$ , и к паре сил  $M$ . Будем стягивать контур, ограничивающий площадку  $S$ , таким образом, чтобы точка  $O$  все время оставалась внутри контура. Площадка  $S$  будет при этом беспредельно уменьшаться, а вместе с тем будет стремиться к нулю величины  $R$  и  $M$ . Предел отношения  $R/S$ , характеризующий интенсивность внутренних сил упругости, представляет величину *напряжения* в точке  $O$  по площадке  $S$ . Кроме величины напряжению приписывают также определенное направление. Именно за направление напряжения в точке  $O$  по площадке  $S$  принимают направление равнодействующей  $R$ . Что касается отношения  $M/S$ , то мы предположим, что при беспредельном уменьшении площадки  $S$  оно стремится к нулю.

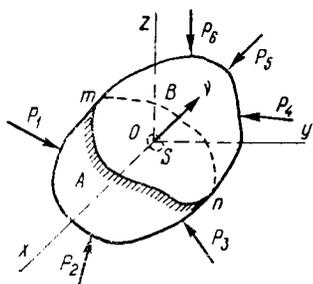


Рис. 1.

Если исходить из молекулярной теории строения упругого твердого тела, то принятое допущение относительно равенства нулю предела отношения  $M/S$  можно получить путем следующих рассуждений. Силы упругости по поверхности являются результатом действия молекул части тела  $B$  на молекулы рассматриваемой части  $A$ . На выделенную площадку  $S$  будут приходиться силы, линии действия которых пересекают эту площадку. Если предположить, что силы взаимодействия между двумя молекулами направлены по линии, соединяющей эти молекулы, то приведя все силы, пронизывающие площадку  $S$ , к силе и паре сил, найдем, что величина пары будет величиной высшего порядка малости по сравнению с величиной силы, так как при составлении момента придется силу умножить на бесконечно малое плечо.

В предыдущих рассуждениях мы взяли секущую поверхность  $mn$  совершенно произвольно, поэтому произвольным является и направление элементарной площадки  $S$ , для которой определили напряжение в точке  $O$ . Через точку  $O$  можно провести в различных направлениях бесчисленное множество площадок; для каждой из них напряжение будет иметь свои определенные величину и направление. Поэтому, говоря о напряжении в точке  $O$ , необходимо всегда указывать, к какой именно площадке это напряжение относится. Направление площадки будем определять направлением ее нормали  $\nu$ , причем условимся эту нормаль направлять наружу из той части тела, равновесие которой мы изучаем (внешняя нормаль). В рассматриваемом случае (см. рис. 1) нормаль будет направлена из заштрихованной части  $A$  в незаштрихованную часть  $B$ .

Направление напряжения вообще не совпадает с направлением нормали, и в дальнейшем мы его часто будем разлагать на две составляющие. Одну составляющую будем направлять по нормали к площадке  $S$ , а другую — в плоскости площадки. Таким образом мы получим *нормальное* и *касательное* напряжения по площадке  $S$ . Если нормальное напряжение имеет направление внеш-

ней нормали, оно стремится вызвать *растяжение* материала, в противном случае оно вызывает *сжатие*. Растягивающее напряжение условимся в дальнейшем считать положительным, а сжимающее — отрицательным. Касательное напряжение стремится произвести сдвиг или срез по площадке  $S$ , поэтому его иногда называют *сдвигающим* или *срезающим* напряжением.

Иногда напряжение по площадке с нормалью  $\nu$  задают величинами трех его проекций на прямоугольные координатные оси  $x, y, z$ . В таком случае условимся эти проекции обозначать так:  $X_\nu, Y_\nu, Z_\nu$ , где  $\nu$  обозначает направление нормали той площадки  $S$ , по которой действует напряжение. Тогда проекция напряжения по какой-либо площадке на направление внешней нормали  $\nu$  к этой площадке представится выражением

$$X_\nu \cos(\nu x) + Y_\nu \cos(\nu y) + Z_\nu \cos(\nu z).$$

Составляющие напряжения по площадке, параллельной одной из координатных плоскостей, например плоскости  $xz$ , запишутся на основании принятых обозначений так:  $X_y, Y_y, Z_y$ . Индекс  $y$  показывает, что направление нормали к выбранной площадке совпадает с направлением оси  $y$ . Составляющая  $X_y$  представляет собой нормальное напряжение по взятой площадке;  $X_y, Z_y$  — две составляющие касательного напряжения по той же площадке. Мы выше условились относительно знака нормальных напряжений. Что касается знака касательных напряжений, то для площадок, параллельных координатным осям, будем придерживаться такого правила: если внешняя нормаль к взятой площадке совпадает с положительным направлением одной из координатных осей, то положительные направления составляющих касательного напряжения считаются совпадающими с положительными направлениями двух других осей. При обратном направлении внешней нормали приходится изменить также и положительные направления касательных напряжений.

Обозначения, принятые для напряжений, можно использовать также и для внешних сил, распределенных по поверхности тела. Если элементарная площадка  $S$  совпадает с поверхностью тела, то поверхностные силы, приложенные к этой площадке, будут играть такую же роль, как внутренние силы упругости в наших прежних рассуждениях. Составляющие  $X_\nu, Y_\nu$  и  $Z_\nu$  будут характеризовать интенсивность распределенных поверхностных сил, приложенных к выделенной на поверхности тела площадке.

### § 3. Уравнения равновесия

Приняв указанные выше обозначения, мы можем записать шесть уравнений равновесия для упругого тела, находящегося в напряженном состоянии. Три уравнения статики, получающиеся путем проектирования всех приложенных к телу сил на координатные оси, напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \iint X_\nu ds + \iiint \rho X dx dy dz &= 0; \\ \iint Y_\nu ds + \iiint \rho Y dx dy dz &= 0; \\ \iint Z_\nu ds + \iiint \rho Z dx dy dz &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Первые члены в левых частях этих уравнений представляют собой проекции на координатные оси поверхностных сил. Вторые члены дают проекции объемных сил на те же оси.

Уравнения, представляющие условия равенства нулю моментов всех приложенных к телу сил относительно координатных осей, при принятом

расположении осей (см. рис. 1) представляется в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \iint (Y_{\nu z} - Z_{\nu y}) ds + \iiint \rho (Yz - Zy) dx dy dz &= 0; \\ \iint (Z_{\nu x} - X_{\nu z}) ds + \iiint \rho (Zx - Xz) dx dy dz &= 0; \\ \iint (X_{\nu y} - Y_{\nu x}) ds + \iiint \rho (Xy - Yx) dx dy dz &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь двойные интегралы относятся к силам, распределенным по поверхности, тройные — к объемным силам. От уравнений равновесия (1) и (2) легко перейти к уравнениям движения, нужно только к объемным силам присоединить силы инерции движущихся элементов тела.

На основании уравнений (1) и (2) можно сделать важное заключение относительно условий равновесия тела, имеющего весьма малый объем.

Если уменьшать линейные размеры тела, то первые члены уравнений (1) и (2), соответствующие поверхностным силам, будут убывать как квадраты линейных размеров, а вторые члены — как кубы тех же размеров, т. е. значительно быстрее первых членов, и при достаточно малых размерах тела они сделаются настолько малыми, что ими можно будет пренебречь по сравнению с членами, соответствующими поверхностным силам. Уравнения (1) и (2) обратятся в таком случае в уравнения равновесия только между силами, распределенными по поверхности. Этим обстоятельством мы воспользуемся при общем исследовании напряженного состояния в какой-либо точке упругого тела.

#### § 4. Исследование напряженного состояния в какой-либо точке тела

Через любую точку  $O$  тела, находящегося в напряженном состоянии, можно провести бесчисленное множество различно направленных площадок. Каждой такой площадке соответствует свое напряжение, определенное по величине и направлению. Наша дальнейшая задача заключается в том, чтобы выразить напряжение по любой площадке через не

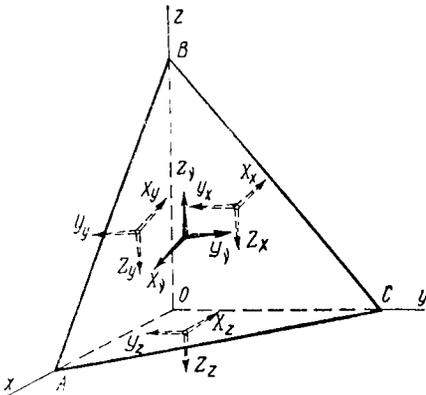


Рис. 2.

сколько определенных величин, вполне характеризующих напряженное состояние в данной точке. Покажем, что напряжение на любой площадке, проходящей через  $O$ , может быть найдено, если известны напряжения по трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через ту же точку. Примем эти площадки за координатные плоскости. Пусть  $\nu$  — направление нормали к той площадке, для которой нужно найти напряжение. Проводим плоскость  $ABC$  (рис. 2), перпендикулярную к  $\nu$ , так, чтобы она с координатными плоскостями вырезала из тела бесконечно малый тетраэдр  $OABC$ , и рассмотрим условия равновесия этого тетраэдра. Принимая во внима-

ние малый объем выделенного элемента, при составлении уравнений можно ограничиться лишь поверхностными силами и допустить, что эти силы по каждой из граней тетраэдра распределены равномерно. (Напряжения считаем непрерывными функциями координат  $x, y, z$ ). Положительные направления напряжений по каждой из граней, соответствующие ранее принятым обозначениям, ука-

заны на рисунке стрелками. Если через  $S$  обозначим площадь грани  $ABC$ , то площади граней, перпендикулярных к осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ , соответственно будут

$$S \cos (xv), S \cos (yv), S \cos (zv).$$

Проектируя все поверхностные силы, приложенные к элементу  $OABC$ , на направление оси  $x$ , получим уравнение равновесия

$$X_v S - X_x S \cos (xv) - X_y S \cos (yv) - X_z S \cos (zv) = 0.$$

Подобным образом получатся и два других уравнения. Сокращая все на  $S$ , представим уравнения равновесия в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x \cos (xv) + X_y \cos (yv) + X_z \cos (zv); \\ Y_v &= Y_x \cos (xv) + Y_y \cos (yv) + Y_z \cos (zv); \\ Z_v &= Z_x \cos (xv) + Z_y \cos (yv) + Z_z \cos (zv). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Эти уравнения дают возможность вычислить проекции напряжения по площадке  $ABC$ , если известны напряжения по площадкам, совпадающим с координатными плоскостями, и, так как площадка  $ABC$  может быть проведена как угодно близко от точки  $O$ , то полученные из уравнений (3) проекции  $X_v, Y_v, Z_v$  определяют искомое напряжение по площадке с нормалью  $v$ , проходящей через точку  $O$ . Таким образом, напряжение по любой площадке, проходящей через заданную точку тела, может быть выражено посредством девяти величин:  $X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y, Z_z$ .

Пользуясь уравнениями статики, легко установить между этими величинами три зависимости, которые позволят в дальнейшем определять напряженное состояние в любой точке тела при помощи шести элементов — составляющих напряжения. Вырежем для этого из тела у заданной точки  $O$  бесконечно малый прямоугольный параллелепипед (рис. 3) и напишем соответствующие уравнения равновесия, причем будем отбрасывать малые высших порядков. В таком случае нам придется принять в расчет лишь поверхностные силы и допустить, что напряжения для каждой пары параллельных граней выделенного элемента равны и прямо противоположны. Из шести уравнений равновесия запишем лишь три уравнения, представляющие условия равенства нулю моментов относительно координатных осей. На чертеже стрелками указаны напряжения, которые должны быть приняты в расчет при составлении момента всех поверхностных сил относительно оси  $x$ . Соответствующее уравнение будет иметь вид  $Z_y dx dy dz - Y_z dx dy dz = 0$ .

Подобные уравнения получим и для двух других координатных осей. На основании этих уравнений заключаем:

$$Y_z = Z_y; Z_x = X_z; X_y = Y_x, \quad (4)$$

т. е. составляющие касательных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам, перпендикулярные к линии пересечения этих площадок, равны между собой. Следовательно, напряженное состояние в любой точке тела определяется тремя нормальными составляющими  $X_x, Y_y, Z_z$  и тремя различными касательными составляющими  $X_y, Y_z, Z_x$ .

Уравнения (4) можно обобщить следующим образом. Возьмем две как угодно наклоненные друг к другу площадки, одну из них направим перпендикулярно к оси  $x$ , нормаль к другой обозначим через  $v$ . Пусть  $F_x$  и  $F_v$  представляют полные напряжения по первой и по

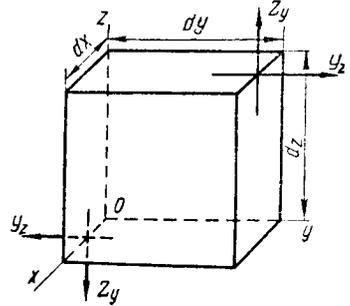


Рис. 3.

второй площадке. Тогда первое из уравнений (3), на основании уравнений (4), может быть представлено в таком виде:

$$F_v \cos(\alpha F_v) = F_x [\cos(F_x x) \cos(\alpha v) + \cos(F_x y) \cos(\alpha v) + \cos(F_x z) \cos(\alpha v)] = F_x \cos(F_x v).$$

Следовательно, если мы имеем две пересекающиеся площадки, то проекция напряжения по первой площадке на нормаль ко второй равна проекции напряжения по второй площадке на нормаль к первой. Легко видеть, что уравнения (4) представляют лишь частный случай этого общего заключения.

Уравнения (3), полученные для точки  $O$ , лежащей внутри тела, остаются в силе и тогда, когда грань  $ABC$  элементарного тетраэдра совпадает с наружной поверхностью тела. В таком случае величины  $X_v$ ,  $Y_v$  и  $Z_v$  характеризуют интенсивность сплошной нагрузки, распределенной по поверхности тела. Мы положили ранее, что составляющие напряжения представляются непрерывными функциями координат. Это налагает соответствующие ограничения и на *поверхностные* силы<sup>1</sup>. Величины  $X_v$ ,  $Y_v$  и  $Z_v$ , характеризующие их интенсивность, должны представляться непрерывными функциями координат. Разрыв непрерывности может иметь место лишь по линиям, где нарушается непрерывность изменения косинусов углов, составляемых внешней нормалью к поверхности тела с координатными осями.

### § 5. Преобразование составляющих напряжения к новым осям

Напряженное состояние в какой-либо точке тела, как видим, может быть определено посредством шести составляющих напряжения  $X_y$ ,  $X_z$ ,  $Y_y$ , отнесенных к осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Эту систему прямоугольных осей мы направляли совершенно произвольно.

Вместо прежней системы  $x$ ,  $y$ ,  $z$  можем взять новую систему  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  и для нее получим, конечно, иные значения составляющих напряжения  $X_{x'}$ , ...,  $Y_{z'}$ . Покажем, как эти новые значения составляющих выражаются через старые. Для этого воспользуемся системой уравнений (3). Если для краткости обозначим косинусы углов, составляемых нормалью  $v$  с координатными осями  $x$ ,  $y$ ,  $z$  через  $l$ ,  $m$  и  $n$ , то уравнения (3) переписываются так:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x l + X_y m + X_z n; \\ Y_v &= Y_x l + Y_y m + Y_z n; \\ Z_v &= Z_x l + Z_y m + Z_z n. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Положим, что новые оси  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  составляют со старыми углы, косинусы которых даны в следующей таблице:

	$x$	$y$	$z$
$x'$	$l_1$	$m_1$	$n_1$
$y'$	$l_2$	$m_2$	$n_2$
$z'$	$l_3$	$m_3$	$n_3$

<sup>1</sup> Ibbetson W. J. An elementary treatise on the mathematical theory of perfectly elastic solids. With a short account of viscous fluids. Ld.—N. Y., Macmillan and Co., 1887, 515 pp. см. p. 152.

Возьмем площадку, нормальную к новой оси  $x'$ . Проекция полного напряжения по этой площадке на старые координатные оси при помощи уравнения (5) выразятся так:

$$\begin{aligned} X_{x'} &= X_x l_1 + X_y m_1 + X_z n_1; \\ Y_{x'} &= Y_x l_1 + Y_y m_1 + Y_z n_1; \\ Z_{x'} &= Z_x l_1 + Z_y m_1 + Z_z n_1. \end{aligned}$$

Имея эти проекции, легко найти проекции полного напряжения по взятой площадке на новые оси  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ . Эти проекции представляют собой не что иное, как составляющие напряжения  $X_{x'}$ ,  $Y_{x'}$ ,  $Z_{x'}$ , отнесенные к новым осям. Проектируя, например,  $X_{x'}$ ,  $Y_{x'}$  и  $Z_{x'}$  на ось  $x'$ , мы, очевидно, получим нормальное напряжение по взятой площадке. Согласно принятым обозначениям его нужно выразить через  $X_{x'}$ , и тогда будем иметь  $X'_{x'} = X_{x'} l_1 + Y_{x'} m_1 + Z_{x'} n_1$  или, подставив вместо  $X_{x'}$ ,  $Y_{x'}$  и  $Z_{x'}$  их приведенные выше значения, получим

$$X'_{x'} = l_1^2 X_x + m_1^2 Y_y + n_1^2 Z_z + 2m_1 n_1 Y_z + 2n_1 l_1 Z_x + 2l_1 m_1 X_y. \quad (6)$$

Проектируя  $X_{x'}$ ,  $Y_{x'}$  и  $Z_{x'}$  на ось  $y'$ , получаем касательную составляющую напряжения

$$\begin{aligned} Y'_{x'} &= X_{x'} l_2 + Y_{x'} m_2 + Z_{x'} n_2 = l_1 l_2 X_x + m_1 m_2 Y_y + n_1 n_2 Z_z + \\ &+ X_y (l_1 m_2 + l_2 m_1) + Z_x (n_1 l_2 + n_2 l_1) + Y_z (m_1 n_2 + m_2 n_1). \end{aligned} \quad (7)$$

Подобным образом могут быть получены выражения и для других составляющих напряжения, отнесенных к новым осям.

## § 6. Поверхность напряжения

Пользуясь выражением (6) для нормального напряжения по площадке с нормалью  $x'$ , легко дать геометрическое представление изменения этого напряжения при поворачивании площадки. Будем по направлению нормали к каждой площадке откладывать от начала координат отрезок  $r$ , длина которого обратно пропорциональна корню квадратному из абсолютного значения соответствующего нормального напряжения. Если для переменного направления нормали сохранить обозначение  $x'$ , то будем иметь такую зависимость:

$$r = \frac{k}{\sqrt{|X'_{x'}|}}, \quad (a)$$

где  $k$  — постоянный коэффициент пропорциональности.

Координаты концов откладываемых таким образом отрезков определяются формулами

$$x = r l_1; \quad y = r m_1; \quad z = r n_1. \quad (b)$$

Вставляя значение  $X'_{x'}$ , определяемое из условия (a), в формулу (6), на основании равенств (b) получим

$$X_x x^2 + Y_y y^2 + Z_z z^2 + 2Y_z yz + 2Z_x zx + 2X_y xy = \pm k^2. \quad (8)$$

Таким образом, концы всех отложенных нами отрезков  $r$  располагаются на поверхности, описываемой уравнением второго порядка (8). Поверхность эта является вполне определенной для заданной точки тела и при изменении координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  будут изменяться лишь коэффициенты  $X_x$ ,  $X_y$ ,  $X_z$ ,  $Y_y$ ,  $Y_z$ ,  $Z_z$

в уравнении (8). Всегда можно так выбрать направление осей, чтобы в уравнении поверхности второго порядка (8) члены, заключающие произведение координат, пропадали. При таком направлении осей будут пропадать касательные составляющие напряжения, и по площадкам, совпадающим с координатными плоскостями, будем иметь только нормальные напряжения.

Условимся выбранные таким образом оси называть *главными осями*, а соответствующие нормальные напряжения — *главными напряжениями*. Очевидно, что можно вполне определить напряженное состояние в данной точке, если заданы направления главных осей и величины главных напряжений.

Заметим, что в силу уравнения (8) сумма нормальных напряжений  $X_x + Y_y + Z_z$  остается неизменной при поворачивании осей.

### § 7. Эллипсоид напряжений

Предположим, что координатные оси  $x, y, z$  совпадают с главными осями для данной точки. Тогда формулы для определения напряжения по любой площадке, проходящей через взятую точку, становятся особенно простыми. Проекция напряжения по площадке с нормалью  $\nu$  на координатные оси на основании уравнений (5) выразим формулами

$$X_\nu = X_x l; \quad Y_\nu = Y_y m; \quad Z_\nu = Z_z n. \quad (9)$$

Составляющие  $X_{x'}$  и  $Y_{x'}$  напряжения по площадке с нормалью  $x'$  на основании (6) и (7) будут:

$$X_{x'} = l_1^2 X_x + m_1^2 Y_y + n_1^2 Z_z; \quad (10)$$

$$Y_{x'} = l_1 l_2 X_x + m_1 m_2 Y_y + n_1 n_2 Z_z. \quad (11)$$

Формулы (9) дают возможность получить геометрическое представление для изменения полного напряжения при поворачивании площадки, к которой это напряжение относится. Будем откладывать от начала координат отрезки, равные и параллельные полным напряжениям по различно направленным площадкам. Обозначив через  $l, m, n$  переменные косинусы углов, составляемых нормалью  $\nu$  к этим площадкам с координатными осями, на основании (9) найдем координаты концов отложенных таким образом отрезков:

$$x = X_\nu = X_x l; \quad y = Y_\nu = Y_y m; \quad z = Z_\nu = Z_z n.$$

Принимая во внимание равенство  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , найдем, что концы отложенных нами отрезков лежат на поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{X_x^2} + \frac{y^2}{Y_y^2} + \frac{z^2}{Z_z^2} = 1, \quad (12)$$

который в дальнейшем условимся называть *эллипсоидом напряжений*.

Полуосями эллипсоида напряжений будут служить главные напряжения в данной точке. Так как одна из главных осей представляет наибольший радиус-вектор, а другая — наименьший, то, следовательно, одно из главных напряжений представляет наибольшее напряжение в данной точке, а другое — наименьшее.

Если два главных напряжения равны между собой, то эллипсоид напряжений получает форму эллипсоида вращения. Если равные по величине главные напряжения имеют одинаковые знаки, то напряжения по всем площадкам, проходящим через ось вращения, будут одинаковы и нормальны к площадкам. Если все три главных напряжения равны между собой, то эллипсоид напряже-

ний превращается в шар и всякие три взаимно перпендикулярные направления могут быть приняты за главные оси.

Когда одно из главных напряжений равно нулю, то одна из осей эллипсоида напряжений также равна нулю; при этом поверхность эллипсоида обращается в площадь эллипса. В этом случае напряжения по всем площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, лежат в одной плоскости. Такое напряженное состояние называется *плоским напряженным состоянием*.

Если два главных напряжения обращаются в нуль, то эллипсоид напряжений превращается в отрезок прямой линии, и мы имеем *линейное напряженное состояние*. С этим видом напряженного состояния мы встречаемся при рассмотрении растяжения и сжатия призматических брусков силами, действующими по оси брусков.

Каждый радиус-вектор эллипсоида напряжений представляет собой по величине и направлению напряжение по одной из площадок, проходящих через рассматриваемую точку. Чтобы найти ту площадку, к которой выбранное напряжение относится, построим поверхность второго порядка, определяемую уравнением

$$\frac{x^2}{X_x} + \frac{y^2}{Y_y} + \frac{z^2}{Z_z} = 1.$$

Эту поверхность называют *направляющей поверхностью*. Легко показать, что площадка, к которой относится какой-либо радиус-вектор эллипсоида напряжений, параллельна плоскости, касательной к направляющей поверхности в точке пересечения ее с выбранным радиусом-вектором. В самом деле, уравнение плоскости, касательной к направляющей поверхности в какой-либо точке  $x_0, y_0, z_0$ , напишется так:

$$\frac{xx_0}{X_x} + \frac{yy_0}{Y_y} + \frac{zz_0}{Z_z} = 1. \quad (a)$$

С другой стороны, обозначив через  $p$  длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость, и через  $l, m, n$  — косинусы углов, составляемых  $p$  с координатными осями, запишем уравнение той же плоскости в таком виде:

$$lx + my + nz = p. \quad (b)$$

Сравнивая (a) и (b), получаем

$$X_x = \frac{x_0 p}{l}; \quad Y_y = \frac{y_0 p}{l}; \quad Z_z = \frac{z_0 p}{l}.$$

Подставив эти значения в формулы (9), найдем выражения для проекций напряжения по площадке, параллельной плоскости (a):

$$X_v = x_0 p; \quad Y_v = y_0 p; \quad Z_v = z_0 p.$$

Следовательно, напряжение по этой площадке действительно направлено в точку касания плоскости  $x_0, y_0, z_0$ .

## § 8. Вычисление главных напряжений и наибольших касательных напряжений

Мы видели, как упрощаются формулы для напряжений в том случае, когда координатные оси совпадают с главными. Для определения направления главных осей и величины главных напряжений воспользуемся тем обстоятельством, что главные напряжения перпендикулярны к площадкам, по которым они действуют. Пусть площадка с нормалью  $v(l, m, n)$  соответствует одному из главных напряжений. Тогда проекции полного напряжения  $F_v$ , действующего по этой площадке (направление  $F_v$  совпадает с  $v$ , так как напряжение предполагается главным), на координатные оси  $x, y, z$  будут

$$X_v = F_v \cos(xv) = F_v l; \quad Y_v = F_v \cos(yv) = F_v m; \quad Z_v = F_v \cos(zv) = F_v n.$$

Подставив эти выражения в уравнения (5) и перенеся все члены в одну сторону, получим

$$\left. \begin{aligned} (F_v - X_x)l - X_y m - X_z n &= 0; \\ -Y_x l + (F_v - Y_y)m - Y_z n &= 0; \\ -Z_x l - Z_y m + (F_v - Z_z)n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Эти уравнения для косинусов  $l$ ,  $m$  и  $n$ , определяющих направление главного напряжения, дают решение, отличное от нуля, лишь в том случае, если соответствующий определитель обращается в нуль. Составляя этот определитель и приравнявая его нулю, получаем уравнение третьей степени относительно  $F_v$ :

$$F_v^3 - (X_x + Y_y + Z_z)F_v^2 + (X_x Y_y + Y_y Z_z + Z_z X_x - X_y^2 - Y_z^2 - Z_x^2)F_v - (X_x Y_y Z_z + 2X_y Y_z Z_x - X_x Y_z^2 - Y_y Z_x^2 - Z_z Y_x^2) = 0. \quad (13)$$

Три его корня определяют значения трех главных напряжений. Подставляя каждый из этих корней в уравнение (а), находим соответствующие направления этих напряжений. Заметим, что уравнение (13) не должно зависеть от направления координатных осей и потому коэффициенты, заключенные в скобки, должны сохранять постоянное значение при преобразовании координат.

Перейдем теперь к определению наибольших касательных напряжений. Если для какой-либо площадки с нормалью  $\nu$  ( $l$ ,  $m$ ,  $n$ ) известны полное напряжение  $F_\nu$  и его нормальная составляющая  $F \cos(F_\nu \nu)$ , то легко найти касательную составляющую для той же площадки. Квадрат касательного напряжения определяется из уравнения  $[F_\nu \sin(F_\nu \nu)]^2 = F_\nu^2 - [F_\nu \cos(F_\nu \nu)]^2$ . Для определения составляющих напряжения мы на основании (9) и (10) перепишем это уравнение в таком виде:

$$[F_\nu \sin(F_\nu \nu)]^2 = X_x^2 l^2 + Y_y^2 m^2 + Z_z^2 n^2 - [X_x l^2 + Y_y m^2 + Z_z n^2]^2, \quad (b)$$

где  $X_x$ ,  $Y_y$ ,  $Z_z$  — главные напряжения в рассматриваемой точке.

Дальнейшая задача заключается в том, чтобы найти значения  $l$ ,  $m$  и  $n$ , которым соответствуют наибольшие значения касательных напряжений. Для этого выразим один из косинусов, например  $n$ , через  $l$  и  $m$  при помощи условия

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (c)$$

и полученный результат введем в выражение (b) для квадрата касательного напряжения. Составляя производные от полученного выражения по  $l$  и  $m$  и приравнявая их нулю, после простых преобразований получаем уравнения для определения  $l$  и  $m$ :

$$\begin{aligned} l[(X_x - Z_z)l^2 + (Y_y - Z_z)m^2 - \frac{1}{2}(X_x - Z_z)] &= 0; \\ m[(X_x - Z_z)l^2 + (Y_y - Z_z)m^2 - \frac{1}{2}(Y_y - Z_z)] &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, мы удовлетворим этим уравнениям, положив  $l = m = 0$ . Так же легко могут быть найдены и другие корни. Положив  $l = 0$ , найдем из второго уравнения  $m = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ . При  $m = 0$  получим  $l = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ . Для получения всех направлений, соответствующих максимуму или минимуму касательного напряжения, нужно из выражения (b) с помощью условия (c) исключить  $m$  и  $l$  и повторить те выкладки, которые были проделаны для случая исключения косину-

са  $n$ . Таким путем мы получим таблицу косинусов, которым соответствуют площадки с максимальными или минимальными касательными напряжениями:

$l$	$m$	$n$
0	0	$\pm 1$
0	$\pm 1$	0
$\pm 1$	0	0
0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0

Первые три строки этой таблицы, где два направляющих косинуса обращаются в нуль, определяют площадки, соответствующие главным напряжениям. По этим площадкам касательные напряжения обращаются, как мы видели, в нуль. Три последние строки определяют площадки, проходящие через одну из главных осей и делящие пополам угол между двумя другими осями. Подставив соответствующие значения  $l$ ,  $m$  и  $n$  в выражение (б), найдем значение  $\pm \frac{1}{2} (Y_y - Z_z)$  для максимальных касательных напряжений в случае  $l = 0$ , т. е. для площадки, проходящей через ось  $x$  и делящей пополам угол между  $y$  и  $z$ . Подобным образом для двух других площадок получим соответственно значения  $\pm \frac{1}{2} (X_x - Z_z)$ ,  $\pm \frac{1}{2} (X_x - Y_y)$ . На основании этих результатов заключаем, что наибольшее касательное напряжение равно полуразности между наибольшим и наименьшим главными напряжениями (при этом принимается во внимание знак напряжения) и действует по площадке, проходящей через среднее по величине главное напряжение и делящей пополам угол между наибольшим и наименьшим напряжениями.

## § 9. Дифференциальные уравнения равновесия

Для исследования вопроса об изменении напряжений при переходе от одной точки к другой, бесконечно близкой ей точке, рассмотрим условия равновесия бесконечно малого прямоугольного параллелепипеда  $OABCDEFG$  (рис. 4).

Когда мы исследовали напряженное состояние в определенной точке тела, можно было пренебречь малыми разностями между напряжением по двум параллельным, близким друг к другу площадкам (см. § 4), а также отбросить объемные силы, приложенные к элементу, как малые величины высшего порядка. Теперь эти малые величины должны быть приняты во внимание. На чертеже обозначены величины напряжений, действующих по граням выделенного элемента, и их положительные направления. При составлении проекций сил, приложенных к элементу, на координатные оси нужно составляющие напряжения множить на площади соответствующих граней элемента и объемную силу — на

объем элемента. Проектируя, например, все приложенные к элементу силы на направление оси  $x$ , получаем уравнение

$$\left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx\right) dydz - X_x dydz + \left(X_y + \frac{\partial X_y}{\partial y} dy\right) dx dz - X_y dx dz + \\ + \left(X_z + \frac{\partial X_z}{\partial z} dz\right) dx dy - X_z dx dy + \rho X dx dy dz = 0.$$

Таким же образом могут быть найдены и два других уравнения. После сокращений эта система уравнений представится в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= 0; \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= 0; \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= 0. \end{aligned} \right\} (14)$$

Рис. 4.

Уравнения равновесия, получаемые путем приравнивания нулю моментов всех приложенных к элементу сил относительно координатных осей, будут удовлетворены в силу условий (4).

В тех случаях, когда части упругого тела находятся в движении, например, когда тело при приложении внешних сил начало совершать колебания, нужно к объемным силам присоединить силы инерции. Если через  $u$ ,  $v$  и  $w$  обозначим проекции перемещения какой-либо точки на направления координатных осей, то проекции сил инерции, отнесенных к единице объема, будут

$$-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Для случая движения уравнения (14) переписутся в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} (15)$$

Уравнения (14) и (15) являются основными дифференциальными уравнениями теории упругости. Всякая задача теории упругости сводится к разысканию таких функций  $X_x, \dots, Y_z$ , которые удовлетворяли бы уравнениям (14) или (15) в каждой точке рассматриваемого тела и условиям (5) на поверхности. В таком виде задача теории упругости остается пока не определенной. В самом деле, три уравнения (14) или (15) заключают по шести различных величин ( $X_x, \dots, Y_z$ ) и, следовательно, можно подобрать сколько угодно различных распределений напряжений, удовлетворяющих как дифференциальным уравнениям, так и условиям на поверхности. Чтобы из всех возможных (с точки зрения статики) распределений напряжений выбрать то, которое соответствует

действительному состоянию упругого тела, необходимо поступить так, как это всегда делается при исследовании статически неопределимых систем. К уравнениям статики нужно присоединить дополнительные условия, устанавливаемые на основании рассмотрения деформации системы. В том, что не всякая система напряжений, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям равновесия и условиям на поверхности, возможна в упругом теле, можно убедиться на основании таких соображений. Предположим, что мы данное тело разрезали на бесконечно малые прямоугольные параллелепипеды и к граням каждого такого элемента приложили напряжения, удовлетворяющие уравнениям (14). Под действием этих напряжений и объемных сил все элементы тела будут находиться в равновесии, и мы получим распределение напряжений, возможное с точки зрения статики абсолютно твердого тела. В упругом теле условия иные. Под действием напряжений каждый элемент деформируется, и напряжения должны удовлетворять не только условиям статики, но и некоторым дополнительным условиям. Деформации, вызываемые в отдельных элементах, на которые мы представили себе тело разрезанным, должны быть таковы, чтобы все деформированные элементы можно было сложить вместе и образовать одно непрерывное упругое тело. Можно представить себе такую систему напряжений, при которой уравнения (14) удовлетворены, но соответствующие этим напряжениям деформации таковы, что из отдельных деформированных элементов нельзя составить непрерывное упругое тело; элементы эти после деформации не будут соответствовать друг другу.

Составляющие напряжения  $X_x, \dots, Y_z$ , входящие в уравнения (14), не представляют собой независимые величины, и задача теории упругости сводится к разысканию трех функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям равновесия. В этом убеждаемся на основании следующего.

Напряжения, возникающие в упругом теле при действии внешних сил, вполне определяются теми изменениями формы, которые тело при этом претерпевает. Деформацию же тела можно определить, если для каждой его точки известны проекции  $u, v, w$  ее перемещения на координатные оси. Таким образом, шесть составляющих напряжения, входящие в уравнения (14) и (15), являются функциями трех перемещений  $u, v, w$ .

Наша дальнейшая задача заключается в исследовании деформаций упругого тела и в установлении необходимой для решения задач теории упругости зависимости между напряжениями и деформациями.

## § 10. Перемещения

Деформация упругого тела вполне определяется *относительным* перемещением его точек. Если упругое тело совершает поступательное движение или вращается, как абсолютно твердое тело, то при этом не изменяется относительное расположение частиц тела, тело не деформируется. Такие перемещения не вызывают внутренних напряжений. В дальнейшем, чтобы исключить перемещения, не вызывающие деформаций, условимся закреплять одну из точек упругого тела, и в этой закрепленной точке введем добавочные закрепления, препятствующие вращению упругого тела как целого относительно неподвижной точки. Устранив таким образом перемещения, свойственные абсолютно твердому телу, мы, конечно, нисколько не нарушаем общности исследования деформаций упругого тела.

Расположим начало прямоугольной системы координат  $x, y, z$  в закрепленной точке и к этим осям будем относить составляющие перемещения  $u, v, w$ . При переходе от одной точки к другой эти перемещения будут изменяться. Так как предполагается, что упругое тело при деформации не получает разрывов, то  $u, v$  и  $w$  являются непрерывными функциями координат  $x, y, z$ . Далее мы будем предполагать также непрерывность последовательных производных этих функций.

Вследствие принятых условий закрепления  $u, v$  и  $w$  обращаются в нуль в начале координат. Чтобы устранить возможность вращения тела вокруг неподвижной точки, закрепляют еще какой-либо линейный элемент, проходящий через эту точку, и какую-нибудь элементарную площадку, проходящую через этот линейный элемент. Закрепим, например, линейный элемент, совпадающий с осью  $z$ , и площадку, совпадающую с координатной плоскостью  $zx$ . Первое закрепление исключает возможность вращения тела относительно осей  $x$  и  $y$ , закрепление площадки устраняет вращение относительно оси  $z$ . В результате этих закреплений получаем следующие условия для перемещений в начале координат:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

В курсе сопротивления материалов рассматриваются элементарные случаи деформации тел. Пользуясь принятыми обозначениями, можно без затруднений написать соответствующие выражения для перемещений. Возьмем, например, случай растяжения призматического бруска. Направляя ось  $x$  по оси стержня и обозначая через  $\epsilon$  относительное удлинение и через  $\sigma\epsilon$  — поперечное сжатие при растяжении, для перемещений какой-либо точки  $A(x, y, z)$  при растяжении

бруска получим:  $u = ex$ ;  $v = -\sigma ey$ ;  $w = -\sigma ez$ . Следовательно, перемещения в этом случае представляются линейными функциями координат.

Нетрудно показать, как благодаря деформации изменяются линии и поверхности, проведенные в бруске до приложения растягивающих сил. Координаты какой-либо точки  $A(x, y, z)$  после деформации принимают значения

$$x_1 = x(1 + e); \quad y_1 = y(1 - \sigma e); \quad z_1 = z(1 - \sigma e). \quad (a)$$

Новые значения координат выражаются через старые линейно, поэтому прямые линии после деформации остаются прямыми, плоскости — плоскостями и поверхности второго порядка — поверхностями второго порядка.

Предположим, например, что в бруске до деформации была описана шаровая поверхность:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \quad (b)$$

Определим, во что обратится эта поверхность после деформации. Для этого найдем из (a) выражения для координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  через  $x_1$ ,  $y_1$  и  $z_1$ . Подставив эти выражения в уравнение шаровой поверхности, получим

$$\frac{x_1^2}{(1 + e)^2} + \frac{y_1^2}{(1 - \sigma e)^2} + \frac{z_1^2}{(1 - \sigma e)^2} = r^2.$$

Шаровая поверхность радиуса  $r$  обращается в поверхность эллипсоида с полуосями  $r(1 + e)$ ,  $r(1 - \sigma e)$ ,  $r(1 - \sigma e)$ .

Заключения, которые мы сделали для случая простого растяжения, могут быть распространены на более общий вид деформации, когда перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  представляются любыми линейными функциями координат. Такого рода деформацию условимся называть *однородной деформацией*.

## § 11. Исследование деформации в какой-либо точке тела

При исследовании более общих случаев деформации, когда перемещения не являются линейными функциями координат, для упрощения задачи введем некоторые ограничения для перемещений. Будем рассматривать лишь те случаи, где перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и их производные по координатам являются малыми величинами, квадратами которых можно пренебречь. В большинстве технических задач приходится иметь дело с малыми деформациями, так как и в инженерных сооружениях, и в машинных конструкциях допускаются лишь весьма малые изменения формы. Поэтому принятое нами ограничение не имеет существенного практического значения<sup>1</sup>.

Возьмем внутри тела какую-нибудь точку  $A(x, y, z)$  и весьма близкую к ней точку  $B(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ . Пусть  $u$ ,  $v$ ,  $w$  будут проекции перемещения точки  $A$  при деформации тела. Тогда координаты ее после деформации определятся формулами  $x_1 = x + u$ ;  $y_1 = y + v$ ;  $z_1 = z + w$ .

Что касается перемещений  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  точки  $B$ , то для составления их выражений воспользуемся разложением функций  $u$ ,  $v$ ,  $w$  в ряды и ограничимся первыми членами этих рядов. При этом получим

$$u' = u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z;$$

<sup>1</sup> Вопросы о таких стержнях и пластинках, где перемещения могут быть значительными, будут рассмотрены особо.

$$v' = v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z;$$

$$w' = w + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z.$$

Перемещения точки  $B$  относительно  $A$  выразятся формулами

$$\left. \begin{aligned} u' - u &= \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z; \\ v' - v &= \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z; \\ w' - w &= \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Таким образом, пренебрегая малыми величинами высших порядков, мы нашли, что относительные перемещения точки  $B$  являются линейными функциями относительных координат  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ . Следовательно, в самом общем случае деформацию в пределах малого объема, заключающего рассматриваемую точку тела, можно считать *однородной*.

Деформация в рассматриваемой точке тела легко определяется, если известно удлинение (или сжатие) любого линейного элемента, проходящего через эту точку. Возьмем один из этих элементов весьма малой длины  $\rho$  и определим его первоначальное направление по отношению к неподвижным координатным осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  с помощью косинусов  $l$ ,  $m$  и  $n$ . Начальные координаты конца этого элемента по отношению к рассматриваемой точке будут  $\delta x = l\rho$ ;  $\delta y = m\rho$ ;  $\delta z = n\rho$ . После деформации эти координаты изменятся и согласно формулам (а) выражения для них примут вид

$$\delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z = \rho \left[ l \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \right];$$

$$\delta y + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z = \rho \left[ l \frac{\partial v}{\partial x} + m \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n \frac{\partial v}{\partial z} \right];$$

$$\delta z + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z = \rho \left[ l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right].$$

Длина взятого нами элемента изменится. Ее новое значение можно вычислить по формуле

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= \rho^2 \left\{ \left[ l \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 + \right. \\ &+ \left. \left[ l \frac{\partial v}{\partial x} + m \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n \frac{\partial v}{\partial z} \right]^2 + \left[ l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Это выражение может быть значительно упрощено, если принять во внимание, что  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и их производные — малые величины, и отбросить квадраты и произведения этих величин. Тогда получим

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= \rho^2 \left( 1 + 2l^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 2lm \frac{\partial u}{\partial y} + 2ln \frac{\partial u}{\partial z} + 2m^2 \frac{\partial v}{\partial y} + 2ml \frac{\partial v}{\partial x} + \right. \\ &+ \left. 2mn \frac{\partial v}{\partial z} + 2n^2 \frac{\partial w}{\partial z} + 2nl \frac{\partial w}{\partial x} + 2nm \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Извлекая корень квадратный и пренебрегая малыми высших порядков, для измененной длины выделенного нами элемента получаем следующее выра-

жение <sup>1</sup>:

$$\rho_1 = \rho \left[ 1 + l^2 \frac{\partial u}{\partial x} + m^2 \frac{\partial v}{\partial y} + n^2 \frac{\partial w}{\partial z} + lm \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + ln \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + mn \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right].$$

Относительное удлинение в направлении  $\rho$  будет

$$e_\rho = \frac{\rho_1 - \rho}{\rho} = l^2 \frac{\partial u}{\partial x} + m^2 \frac{\partial v}{\partial y} + n^2 \frac{\partial w}{\partial z} + lm \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ + ln \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + mn \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (16)$$

Таким образом, удлинение любого линейного элемента, проходящего через рассматриваемую точку, может быть определено посредством шести величин  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , ...,  $\left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$ , для которых в дальнейшем примем такие обозначения:

$$\frac{u}{r} = e_{xx}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e_{yy}; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = e_{zz}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = e_{xy}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \\ = e_{xz}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = e_{yz}. \quad (17)$$

Выясним физическое значение этих величин. Положим, что линейный элемент  $\rho$  взят в направлении оси  $x$ , тогда  $l = 1$ ;  $m = 0$ ;  $n = 0$  и на основании формулы (16) для удлинения в направлении оси  $x$  получим значение  $e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$ . Подобным образом можно показать, что величины  $e_{yy}$  и  $e_{zz}$  представляют собой относительные удлинения в направлении осей  $y$  и  $z$ .

Рассмотрим значения величин  $e_{xy}$ ,  $e_{xz}$  и  $e_{yz}$ . Пусть  $AB$  и  $AC$  — два бесконечно малых элемента, параллельных направлениям  $x$  и  $y$  (рис. 5). При деформации относительные перемещения  $BB'$  точки  $B$  в направлении оси  $y$  и  $CC'$  точки  $C$  в направлении оси  $x$  на основании формул (а) представятся так:

$$BB' = \frac{\partial v}{\partial x} \delta x; \quad CC' = \frac{\partial u}{\partial y} \delta y.$$

Благодаря этим перемещениям, прямой угол  $BAC$  обратится в острый  $B'AC'$ . Мы будем иметь сдвиг, величина которого определяется уменьшением первоначального прямого угла  $BAC$ . Принимая во внимание малость перемещений  $BB'$  и  $CC'$ , можем положить  $\angle BAB' = \frac{\partial v}{\partial x}$ ;  $\angle CAC' = \frac{\partial u}{\partial y}$ . Тогда искомый сдвиг представится в виде  $e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ .

Таким же образом покажем, что величины  $e_{xz}$  и  $e_{yz}$  представляют собой сдвиги, соответствующие осям  $xz$  и  $yz$ . Удлинение любого элемента, проведенного через рассматриваемую точку, будет

$$e_\rho = l^2 e_{xx} + m^2 e_{yy} + n^2 e_{zz} + l m e_{xy} + m n e_{yz} + l n e_{xz}. \quad (16')$$

<sup>1</sup> При извлечении корня принимаем во внимание, что для малых значений  $\alpha$  можно положить  $\sqrt{1 + 2\alpha} = 1 + \alpha$ .

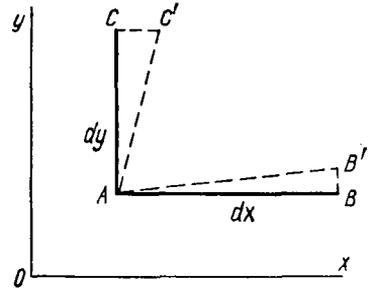


Рис. 5.

Оно определяется при посредстве шести величин  $e_{xx}, \dots, e_{xz}$ , которые условимся в дальнейшем называть *составляющими деформации в данной точке*.

В случае *однородной деформации*  $u, v$  и  $w$  — линейные функции координат, поэтому составляющие деформации  $e_{xx}, \dots, e_{xz}$  постоянны по всему объему тела.

При деформации кроме длины изменяется также и направление каждого из линейных элементов, проходящих через рассматриваемую точку. Если через  $l_1, m_1$  и  $n_1$  обозначим косинусы углов, которые линейный элемент  $\rho(l, m, n)$  составляет с координатными осями после деформации, то для определения этих косинусов получим формулы

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \frac{\rho}{\rho_1} \left[ l \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \right] = \\ &= l \left( 1 - e_\rho + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z}; \\ m_1 &= l \frac{\partial v}{\partial x} + m \left( 1 - e_\rho + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n \frac{\partial v}{\partial z}; \\ n_1 &= l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \left( 1 - e_\rho + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Если взять два элемента  $\rho(l, m, n)$  и  $\rho'(l', m', n')$ , то косинус угла между ними после деформации будет  $\cos(\rho_1, \rho'_1) = l_1 l'_1 + m_1 m'_1 + n_1 n'_1$ . Подставив вместо  $l_1, \dots, n_1$  их значения, определяемые по формулам (b), найдем

$$\begin{aligned} \cos(\rho_1, \rho'_1) &= (ll' + mm' + nn')(1 - e_\rho - e'_\rho) + 2(e_{xx}ll' + e_{yy}mm' + e_{zz}nn') + \\ &+ e_{yz}(mn' + m'n) + e_{zx}(nl' + n'l) + e_{xy}(lm' + l'm). \end{aligned} \quad (18)$$

Если возьмем два взаимно перпендикулярных направления, то  $ll' + mm' + nn' = 0$ , и из формулы (18) получим выражение для сдвига, соответствующего взятым направлениям<sup>1</sup>.

## § 12. Поверхность деформации

Пользуясь формулой (16'), легко дать геометрическое представление для изменения удлинений  $e_\rho$  в зависимости от направления. Будем откладывать от начала координат по направлению каждого линейного элемента  $\rho$  отрезок  $r$ , длина которого обратно пропорциональна корню квадратному из абсолютного значения удлинения  $e_\rho$ , тогда

$$r = \frac{k}{\sqrt{|e_\rho|}}. \quad (a)$$

Координаты концов этих отрезков будут

$$x = lr; \quad y = mr; \quad z = nr. \quad (b)$$

Подставив величину  $e_\rho$  из уравнения (a) в формулу (16'), на основании (b) получим

$$e_{xx}x^2 + e_{yy}y^2 + e_{zz}z^2 + e_{xy}xy + e_{xz}xz + e_{yz}yz = \pm k^2. \quad (19)$$

Таким образом, концы всех отложенных нами отрезков располагаются по поверхности второго порядка, определяемой уравнением (19). Поверхность эту

<sup>1</sup> Угол между  $\rho_1$  и  $\rho'_1$  мало отличается от прямого, поэтому  $\cos(\rho_1, \rho'_1)$  с точностью до малых высшего порядка дает уменьшение первоначально прямого угла.

называют *поверхностью деформации*. Вид поверхности деформации вполне определяется деформацией в рассматриваемой точке и не зависит от выбора координатных осей. Направление осей всегда можно выбрать таким образом, чтобы члены в уравнении (19), заключающие произведения координат, пропадали. При таком направлении осей  $e_{xy} = e_{xz} = e_{yz} = 0$ , т. е. углы между этими осями при деформации не изменяются. Направления, соответствующие этим осям, будем называть *главными направлениями деформации*, а соответствующие им удлинения — *главными удлинениями*.

Предположим, что координатные оси  $x, y, z$  совпадают с главными направлениями и величины  $e_1, e_2$  и  $e_3$  представляют собой главные удлинения<sup>1</sup>. Тогда поверхность деформации определяется уравнением  $e_1x^2 + e_2y^2 + e_3z^2 = \pm k^2$ . Удлинение какого-либо линейного элемента  $\rho (l, m, n)$  будет

$$e_\rho = e_1l^2 + e_2m^2 + e_3n^2. \quad (20)$$

Сдвиг, соответствующий двум взаимно перпендикулярным направлениям  $\rho$  и  $\rho'$ , на основании (18), представится так:

$$e_{\rho\rho'} = 2(e_1ll' + e_2mm' + e_3nn'). \quad (21)$$

Таким образом, деформация в рассматриваемой точке вполне определяется, если известны главные направления деформации и соответствующие им удлинения  $e_1, e_2, e_3$ . Следовательно, в самом общем случае деформация сводится к растяжениям по трем взаимно перпендикулярным направлениям.

Если у рассматриваемой точки вырезать бесконечно малый прямоугольный параллелепипед, ребра которого  $\delta x, \delta y$  и  $\delta z$  параллельны главным направлениям, то после деформации углы выделенного элемента останутся без изменения, а объем его будет  $\delta x \delta y \delta z (1 + e_1)(1 + e_2)(1 + e_3) \approx \delta x \delta y \delta z (1 + e_1 + e_2 + e_3)$ .

Относительное объемное расширение

$$\theta = e_1 + e_2 + e_3. \quad (22)$$

### § 13. Дифференциальные зависимости между составляющими деформации

Заданные проекции перемещения  $u, v, w$  для каждой точки деформируемого тела вполне определяют деформацию. Шесть составляющих деформации  $e_{xx}, \dots, e_{yz}$  являются известными функциями перемещений  $u, v, w$  [см. (17)] и не могут быть заданы произвольно. Между ними существуют зависимости, которые проще всего получить следующим образом. Пользуясь обозначениями (17), составим производные

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}; \quad \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}.$$

Отсюда заключаем, что

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (23)$$

Перестановкой букв отсюда могут быть получены еще две дифференциальные зависимости такого же вида.

<sup>1</sup> Величина главных удлинений определяется так же, как и величина главных напряжений (см. § 8).

Составим теперь такие производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}; & \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}; & \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}. \end{aligned}$$

Сравнивая их, находим

$$2 \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right). \quad (24)$$

Подобным образом можно составить еще две дифференциальные зависимости такого же вида.

Итак, шесть составляющих деформации должны удовлетворять трем уравнениям вида (23) и трем уравнениям вида (24). В эти уравнения входят лишь вторые производные от  $e_{xx}$ , ...,  $e_{yz}$ , поэтому в тех случаях, когда составляющие деформации постоянны по всему объему тела или представляются линейными функциями координат, полученные дифференциальные зависимости будут всегда удовлетворены.

## § 14. Обобщенный закон Гука

Идеально упругому телу, с которым оперирует теория упругости, свойственно при действии внешних сил несколько изменять свою форму. Определенной системе внешних сил соответствует вполне определенное изменение формы тела. В предыдущих главах мы еще не пользовались этой зависимостью между силами и вызываемыми ими деформациями. При изучении напряженного состояния в данной точке, мы выделяли бесконечно малый элемент и к нему применяли уравнения статики абсолютно твердого тела. Это дало нам возможность установить зависимость между напряжениями по различным площадкам и определить напряженное состояние в данной точке при посредстве шести составляющих напряжения  $X_x, X_y, X_z, Y_y, Y_z, Z_z$ . При рассмотрении деформаций мы исходили из допущения, что проекции перемещений  $u, v, w$  малы и представляются непрерывными функциями координат точки  $x, y, z$ .

На основании геометрических соображений мы выяснили вопрос о деформаций в данной точке и определили эту деформацию посредством шести составляющих деформации  $e_{xx}, e_{xy}, e_{xz}, e_{yy}, e_{yz}, e_{zz}$ . Для установления зависимости между составляющими напряжения  $X_x, X_y, X_z, Y_y, Y_z, Z_z$ , с одной стороны, и вызываемыми ими составляющими деформации  $e_{xx}, e_{xy}, e_{xz}, e_{yy}, e_{yz}, e_{zz}$ , с другой, необходимо точнее определить физические свойства идеально упругого тела. Чтобы наши дальнейшие выводы были по возможности ближе к действительности, при установлении упругих свойств идеального тела воспользуемся данными опытов, произведенных над действительными телами, обладающими в большей или меньшей степени свойством упругости. Опытов, которые давали бы возможность непосредственно установить зависимость между напряжениями и деформациями, не имеется. Мы не имеем средств для экспериментального определения составляющих напряжения  $X_x, \dots, Y_z$  в какой-либо точке деформируемого тела<sup>1</sup>, однако можно с большой точностью определить те внешние силы, которые вызывают деформацию тела и деформации отдельных элементов на поверхности деформируемого тела, а также перемещения отдельных точек при деформации.

Закон о зависимости между внешними силами и вызываемыми ими изменениями формы тела, был установлен еще в 1676 году английским ученым Робертом Гуком<sup>2</sup> и сформулирован им так: «*Ut tensio, sic vis*». Под «*tensio*» Гук подразумевал не только растяжение, а вообще всякого рода деформацию упру-

<sup>1</sup> В случае плоской деформации прозрачных упругих тел исследование деформации при помощи поляризованного света дает косвенный способ для определения составляющих напряжения в каждой точке тела. Этот вопрос будет рассмотрен ниже в главе, посвященной плоской задаче.

<sup>2</sup> Исторические данные относительно установления и дальнейшего развития закона Гука имеются на стр. 162 книги W. J. Ibbetson, упомянутой на стр. 24.

того тела. Словом «vis» он определял внешнюю силу или систему сил (например, пару сил), вызывающих изучаемую деформацию. Гук доказывает открытый им закон чисто экспериментальным путем, он ссылается на опыты со спиральной рессорой, опыты с растяжением длинной проволоки и с изгибом деревянной балки, закрепленной одним концом, и во всех этих случаях отмечает пропорциональность между действующими силами и вызываемыми ими деформациями. Результаты дальнейших многочисленных исследований вполне подтвердили справедливость закона Гука для многих действительных тел, были установлены те пределы, за которые не должны выходить деформации, чтобы закон Гука имел место. Пределы эти весьма различны для различных тел. В то время, например, как железо и сталь следуют закону Гука в весьма широких пределах, такие материалы, как чугун, уже при сравнительно малых напряжениях отклоняются от закона Гука<sup>1</sup>.

На основании имеющихся многочисленных опытов для идеального упругого тела, с которым мы имеем дело в теории упругости, закон Гука принимают в обобщенном виде; допускают, что в каждой точке деформированного тела составляющие напряжения  $X_x, \dots, Y_z$  являются линейными функциями составляющих деформации  $e_{xx}, \dots, e_{yz}$ . В обобщенном виде закон Гука не может быть проверен непосредственным опытом; в его справедливости убеждаемся путем проверки тех заключений, которые из обобщенного закона Гука могут быть получены аналитически.

Одно из самых существенных соображений, говорящих в пользу закона Гука и распространяющих этот закон на те случаи, когда части деформируемого тела находятся в движении, было высказано Джорджем Габриелем Стоксом. Он показал, что свойство упругих тел совершать изохронные колебания есть следствие того, что напряжения, возникающие в теле при малых деформациях, являются линейными функциями этих деформаций.

На основании этой линейной зависимости Дж. Стокс установил еще одно положение, нашедшее широкое применение при решении задач сопротивления материалов и теории упругости. Если между напряжениями и деформациями существует линейная зависимость, то при возрастании напряжений в несколько раз деформации возрастут во столько же раз. Если деформация является результатом действия на упругое тело нескольких систем внешних сил, то ее можно получить, суммируя деформации, вызываемые отдельными системами сил. При этом, конечно, предполагается, что перемещения точек тела настолько малы, что деформации, вызываемые одной системой сил, не вносят изменений в действие другой системы и что при изучении напряженного состояния можно произвольно брать или то расположение точек тела, которое соответствует его естественному состоянию, или то, которое наступает после деформации. Это положение в дальнейшем будем называть *принципом сложения действия сил*<sup>2</sup>.

Кроме экспериментального обоснования закона Гука делались неоднократные попытки математического доказательства справедливости этого закона.

Основатели теории упругости Луи Навье, Огюстен Коши, Симеон Пуассон, исходившие из представления молекулярного строения упругого тела, получали закон Гука в результате некоторых предположений относительно сил взаимодействия, возникающих между молекулами при деформации<sup>3</sup>. В насто-

<sup>1</sup> Grüneisen E. Über das Gubeisens bei kleinen elastischen Dehnungen. Berichte der deutsche physikalischen Gesellschaft, Braunschweig, 1906, Bd 8, N 20, SS. 469—477.

<sup>2</sup> Исключительные случаи, где принцип сложения действия сил не имеет места, будут рассмотрены в части второй, посвященной тонким стержням и пластинкам.

<sup>3</sup> Относящаяся к этому вопросу литература приведена на стр. 32 статьи С. Н. Müller и A. Timpe, указанной на стр. 10.



Если такой элемент мысленно выделить из деформированного тела, то напряжения, соответствующие граням элемента, явятся для элемента внешними силами. Предположим, что все составляющие напряжения, кроме  $X_x$ , обращаются в нуль, тогда на выделенный элемент будут действовать силы лишь по граням, перпендикулярным оси  $x$ . Силы эти будут нормальными к этим граням и равны  $X_x \delta u \delta v \delta z$ . Сообщим силам бесконечно малые приращения  $\delta X_x \delta u \delta v \delta z$ . Это вызовет изменение деформации выделенного элемента. Пусть  $\delta e_{xx}$  представляет соответствующее изменение относительного удлинения в направлении оси  $x$ . Тогда работа сил, приложенных к элементу и соответствующая такому изменению деформации, будет заключаться между значениями  $X_x \delta e_{xx} \delta x \delta u \delta v \delta z$  и  $(X_x + \delta X_x) \delta e_{xx} \delta x \delta u \delta v \delta z$ . Пренебрегая малыми высшего порядка, полагаем, что работа внешних сил в этом случае равна  $X_x \delta e_{xx} \delta x \delta u \delta v \delta z$ .

Если бы по граням элемента действовали лишь силы, соответствующие касательным напряжениям  $X_y$ , то рассуждая подобно предыдущему, мы бы нашли, что работа, соответствующая приращению напряжения  $\delta X_y$ , может быть представлена с точностью до малых высшего порядка формулой  $X_y \delta e_{xy} \delta x \delta u \delta v \delta z$ .

В общем случае, когда все составляющие напряжения  $X_x, \dots, Y_z$  отличны от нуля, работа приложенных к элементу сил, соответствующая бесконечно малым приращениям  $\delta X_x, \dots, \delta Y_z$ , представится формулой

$$(X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + Z_z \delta e_{zz} + X_y \delta e_{xy} + X_z \delta e_{xz} + Y_z \delta e_{yz}) \delta x \delta u \delta v \delta z.$$

Если через  $v$  обозначим отнесенную к единице объема внутреннюю энергию деформированного элемента и через  $\delta v$  изменение этой энергии, соответствующее приращениям  $\delta X_x, \dots, \delta Y_z$ , то будем иметь

$$\delta V = X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + Z_z \delta e_{zz} + X_y \delta e_{xy} + X_z \delta e_{xz} + Y_z \delta e_{yz}. \quad (a)$$

С другой стороны, внутренняя энергия в теле определяется его деформацией;  $v$  является функцией составляющих деформации  $e_{xx}, \dots, e_{xz}$ . Следовательно,

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial e_{xx}} \delta e_{xx} + \frac{\partial V}{\partial e_{yy}} \delta e_{yy} + \frac{\partial V}{\partial e_{zz}} \delta e_{zz} + \frac{\partial V}{\partial e_{xy}} \delta e_{xy} + \frac{\partial V}{\partial e_{xz}} \delta e_{xz} + \frac{\partial V}{\partial e_{yz}} \delta e_{yz}. \quad (b)$$

Сравнивая (a) и (b) заключаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial e_{xx}} &= X_x; & \frac{\partial V}{\partial e_{yy}} &= Y_y; & \frac{\partial V}{\partial e_{zz}} &= Z_z; \\ \frac{\partial V}{\partial e_{xy}} &= X_y; & \frac{\partial V}{\partial e_{xz}} &= X_z; & \frac{\partial V}{\partial e_{yz}} &= Y_z, \end{aligned} \quad (26)$$

и так как на основании обобщенного закона Гука (25) составляющие напряжения являются однородными линейными функциями составляющих деформации, то потенциальная энергия  $V$  представится однородной функцией второй степени от  $e_{xx}, \dots, e_{yz}$ . В самом общем случае такая функция включает 21 член (шесть членов вида  $c_{11} e_{xx}^2, \dots, c_{66} e_{xy}^2$  и пятнадцать — вида  $c_{12} e_{xx} e_{yy}, \dots, c_{56} e_{zx} e_{xy}$ ) и представляется на основании (25) в таком виде:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} c_{11} e_{xx}^2 + c_{12} e_{xx} e_{yy} + c_{13} e_{xx} e_{zz} + c_{14} e_{xx} e_{yz} + c_{15} e_{xx} e_{zx} + c_{16} e_{xx} e_{xy} + \\ &+ \frac{1}{2} c_{22} e_{yy}^2 + c_{23} e_{yy} e_{zz} + c_{24} e_{yy} e_{yz} + c_{25} e_{yy} e_{zx} + c_{26} e_{yy} e_{xy} + \\ &+ \frac{1}{2} c_{33} e_{zz}^2 + c_{34} e_{zz} e_{yz} + c_{35} e_{zz} e_{zx} + c_{36} e_{zz} e_{xy} + \\ &+ \frac{1}{2} c_{44} e_{yz}^2 + c_{45} e_{yz} e_{zx} + c_{46} e_{yz} e_{xy} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} c_{55} e_{zx}^2 + c_{56} e_{zx} e_{xy} + \\
& + \frac{1}{2} c_{66} e_{xy}^2 \dots \dots \dots
\end{aligned} \tag{27}$$

Таким образом, то обстоятельство, что составляющие напряжения являются частными производными от энергии деформации  $V$  по соответствующим составляющим деформации, дает возможность установить между коэффициентами в общих выражениях (25) пятнадцать зависимостей вида  $c_{rs} = c_{sr}$  и сокращает число упругих постоянных в общем случае до 21.

В предыдущих рассуждениях мы совершенно не упоминали о тепловых явлениях, которыми сопровождается деформация тела. При изменении деформации изменяется температура отдельных элементов тела и в результате происходит или выделение, или поглощение тепла. Если через  $\delta Q$  обозначим механический эквивалент подводимого тепла, отнесенный к единице объема элемента тела, деформацию которого мы слегка изменяем, то закон сохранения энергии приведет нас к такому уравнению:

$$\delta V = X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + Z_z \delta e_{zz} + X_y \delta e_{xy} + X_z \delta e_{xz} + Y_z \delta e_{yz} + \delta Q. \tag{a'}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (a), которым мы пользовались в предыдущих рассуждениях, лишь в том случае, когда  $\delta Q = 0$ , т. е. когда процесс происходит *адиабатически*. Примерно в таких условиях протекает процесс, когда деформации происходят с большой быстротой, например при вибрации упругого тела. В этом случае наши предыдущие рассуждения вполне точны и составляющие напряжения  $X_x, \dots, Y_z$  действительно являются частными производными функции  $V$ , представляющей энергию деформации.

Составляющие напряжения могут быть получены как частные производные функции составляющих деформации  $e_{xx}, \dots, e_{yz}$  и в другом крайнем случае, когда деформации происходят весьма медленно. При этом условии можно считать, что температура деформированного тела остается все время постоянной, равной температуре окружающей среды, процесс происходит *изотермически*. В этом случае последний член в уравнении (a') не будет равен нулю, но если при деформации тело совершит полный цикл, то можно утверждать, что сумма всех  $\delta Q$ , соответствующих этому круговому процессу, будет равна нулю<sup>1</sup>. Точно так же сумма всех элементов  $\delta V$ , стоящих в левой части уравнения (a'), равна нулю, поскольку тело вернулось в свое первоначальное состояние, следовательно, запас его внутренней энергии остался без изменения. Но если сумма всех  $\delta Q$  и  $\delta V$  равна нулю, то из (a') заключаем, что и сумма элементов вида

$$X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + Z_z \delta e_{zz} + Y_z \delta e_{yz} + X_z \delta e_{xz} + X_y \delta e_{xy} \tag{c}$$

также должна обращаться в нуль при всяком круговом процессе.

Следовательно, выражение (c) должно представлять собой полный дифференциал и составляющие напряжения могут быть получены как частные производные функции, представляющей энергию деформации при изотермическом процессе. Заметим, что при адиабатическом и изотермическом процессах функции, из которых дифференцированием получают составляющие напряжений, будут различны, а потому будут различны и упругие постоянные, при помощи которых устанавливается связь между напряжениями и деформациями. Для таких материалов, как железо и сталь, разница между упругими постоянными при адиабатическом и изотермическом процессах столь невелика, что в технических вопросах ею всегда можно пренебречь.

## § 16. Дальнейшее сокращение числа упругих постоянных

Выше уже отмечалось, что число упругих постоянных, равное в общем случае 21, сокращается, если в строении тела имеется какая-либо симметрия. Возьмем, например, случай, когда строение тела таково, что оно обладает в отношении упругих свойств плоскостью симметрии, и примем эту плоскость за плоскость  $xy$ . Тогда выражение (27) для потенциальной энергии должно остаться без изменения, если мы направление оси  $z$  заменим направлением прямо

<sup>1</sup> Если бы это было не так, то мы могли бы, повторяя такой процесс, получать тепло, не затрачивая никакой работы.

противоположным. При такой замене придется переменить знаки у координаты  $z$  и у составляющей перемещения  $w$ . Следовательно, как видно из (17), изменятся знаки у составляющих деформации  $e_{xz}$ ,  $e_{yz}$ . Чтобы выражение для  $V$  осталось неизменным, необходимо положить в нем равными нулю коэффициенты тех членов, куда  $e_{xz}$ ,  $e_{yz}$  входят в первой степени, за исключением члена, содержащего произведение  $e_{xz}e_{yz}$ . Таким образом, получаем

$$c_{14} = c_{15} = c_{24} = c_{25} = c_{34} = c_{35} = c_{48} = c_{58} = 0. \quad (a)$$

Число упругих постоянных сокращается до 13.

Если тело имеет три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, то принимая эти плоскости за плоскости координат, заключаем, что выражение для потенциальной энергии не должно изменяться, если мы любой из трех осей дадим прямо противоположное направление. При этом, как видно из (17), будут изменяться знаки  $e_{xy}$ ;  $e_{xz}$ ;  $e_{yz}$ .

Чтобы перемена знаков не отражалась на значении  $V$ , необходимо к равенствам (a) присоединить следующие:

$$c_{16} = c_{26} = c_{36} = c_{45} = 0. \quad (b)$$

Таким образом, число упругих постоянных сокращается до девяти и выражение для потенциальной энергии принимает вид

$$V = \frac{1}{2} (c_{11}e_{xx}^2 + c_{22}e_{yy}^2 + c_{33}e_{zz}^2 + c_{44}e_{yz}^2 + c_{55}e_{zx}^2 + c_{66}e_{xy}^2) + c_{23}e_{yy}e_{zz} + c_{12}e_{xx}e_{yy} + c_{13}e_{xx}e_{zz}. \quad (c)$$

Этот случай симметрии соответствует кристаллам, для которых форма кристаллизации — прямоугольный параллелепипед.

Мы можем получить дальнейшее упрощение, если допустим, что по отношению к каждой из плоскостей симметрии упругие свойства тела одинаковы. В таком случае выражение (c) для потенциальной энергии не должно изменяться при перемене оси  $x$  на  $y$ ,  $y$  на  $z$ , или  $x$  на  $z$ . Этому условию мы удовлетворим, если положим  $c_{11} = c_{22} = c_{33}$ ;  $c_{44} = c_{55} = c_{66}$ ;  $c_{23} = c_{12} = c_{13}$ . Тогда

$$V = \frac{1}{2} c_{11} (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + \frac{1}{2} c_{44} (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2) + c_{12} (e_{yy}e_{zz} + e_{xx}e_{yy} + e_{xx}e_{zz}) \quad (d)$$

и составляющие напряжения выразятся через составляющие деформации:

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{\partial V}{\partial e_{xx}} = c_{11}e_{xx} + c_{12} (e_{yy} + e_{zz}); \\ Y_y &= \frac{\partial V}{\partial e_{yy}} = c_{11}e_{yy} + c_{12} (e_{zz} + e_{xx}); \\ Z_z &= \frac{\partial V}{\partial e_{zz}} = c_{11}e_{zz} + c_{12} (e_{xx} + e_{yy}); \\ X_y &= \frac{\partial V}{\partial e_{xy}} = c_{44}e_{xy}; \quad X_z = \frac{\partial V}{\partial e_{xz}} = c_{44}e_{xz}; \quad Y_z = \frac{\partial V}{\partial e_{yz}} = c_{44}e_{yz} \end{aligned}$$

Здесь мы имеем только три упругие постоянные. Примером такой симметрии могут служить кристаллы кубической формы, в частности кристаллы каменной соли.

В случае изотропного материала выражение для потенциальной энергии должно быть одно и то же при любом повороте координатных осей. Если мы повернем нашу систему относительно оси  $z$  на бесконечно малый угол  $\omega$ , то составляющие деформации для этих новых осей на основании формул (16') и (18) представятся так:

$$\begin{aligned} e_{x'x'} &= e_{xx} + \omega e_{xy}; \quad e_{y'y'} = e_{yy} - \omega e_{xy}; \quad e_{z'z'} = e_{zz}; \\ e_{x'y'} &= e_{xy} + 2\omega (e_{yy} - e_{xx}); \quad e_{x'z'} = e_{xz} + \omega e_{yz}; \quad e_{y'z'} = e_{yz} - \omega e_{xz} \end{aligned}$$

Выражение (d) для потенциальной энергии не должно изменяться, если вместо  $e_{xx}$ , ...,  $e_{yz}$  подставим  $e_{x'x'}$ , ...,  $e_{y'z'}$ . Выполняя эту подстановку и отбрасывая малые величины высших порядков, приходим к следующему выражению:

$$V + \omega (e_{yy} - e_{xx}) (2c_{44} + c_{12} - c_{11}).$$

Чтобы выражение потенциальной энергии не изменялось с поворотом осей, нужно положить  $2c_{44} + c_{12} - c_{11} = 0$ . Тогда выражения для составляющих напряжения запишутся так:

$$\begin{aligned}
 X_x &= (2c_{44} + c_{12}) e_{xx} + c_{12} (e_{yy} + e_{zz}); \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 X_y &= c_{44} e_{xy}; \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

§ 17. Изотропное тело

В дальнейшем ограничимся при решении задач лишь случаем изотропного тела. Этот случай имеет большое практическое значение. Такие материалы, как литое железо и сталь, по их свойствам в пределах упругости можно без значительных погрешностей принимать за изотропные. Зависимость между напряжениями и деформациями в этом случае выражается посредством двух упругих постоянных, и мы ее без затруднения установим, если сделаем следующее вполне естественное допущение. Положим, что в случае изотропного материала направления главных напряжений совпадают в каждой точке с направлениями главных деформаций<sup>1</sup> и, следовательно, угол между двумя взаимно перпендикулярными площадками искажается лишь в том случае, если есть соответствующие касательные напряжения. Выделим из тела плоскостями, нормальными к главным напряжениям, бесконечно малый прямоугольный параллелепипед. В силу сделанного допущения углы этого параллелепипеда при деформации не искажаются и полное изменение формы выделенного элемента определяется тремя главными деформациями  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$  и  $e_{zz}$  (координатные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  направим параллельно главным напряжениям в рассматриваемой точке). Соответствующие им напряжения будут  $X_x$ ,  $Y_y$  и  $Z_z$ . Согласно обобщенному закону Гука каждая из составляющих напряжения представляется линейной функцией составляющих деформации. Например,  $X_x$  можно представить в таком виде:

$$X_x = ae_{xx} + be_{yy} + ce_{zz}. \tag{a}$$

Поскольку в рассматриваемом случае материал обладает одинаковыми упругими свойствами по всем направлениям, то в выражении (а) составляющие деформации  $e_{yy}$ ,  $e_{zz}$ , представляющие удлинения в направлениях, перпендикулярных к  $X_x$ , должны, очевидно, войти одинаковым образом; коэффициенты  $b$  и  $c$  должны быть равны между собой. В дальнейшем условимся обозначать их буквой  $\lambda$ . Коэффициент  $a$  отличен от  $\lambda$ , для него примем обозначение  $a = \lambda + 2\mu$ . Тогда

$$X_x = (\lambda + 2\mu) e_{xx} + \lambda (e_{yy} + e_{zz}). \tag{b}$$

Подобные формулы можем получить и для составляющих напряжения  $Y_y$ ,  $Z_z$ . Таким образом, главные напряжения выражаются через главные деформации при посредстве двух упругих постоянных  $\lambda$ ,  $\mu$ , которые обыкновенно называют коэффициентами Ламе.

Найдем теперь зависимость между составляющими напряжения и составляющими деформации при любом направлении координатных осей. Возьмем

<sup>1</sup> Это допущение впервые было высказано Огюстэном Коши. Cauchy A. L. Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois de mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique. Exercices de mathématiques. Vol. 3. Paris, Cher de Bure Frères, 1828, pp. 160—187.

новую систему координатных осей  $x_1, y_1, z_1$ . Косинусы углов, составляемых этими осями с главными  $x, y, z$ , приводим в следующей таблице:

	$x$	$y$	$z$
$x_1$	$l_1$	$m_1$	$n_1$
$y_1$	$l_2$	$m_2$	$n_2$
$z_1$	$l_3$	$m_3$	$n_3$

Составляющие напряжения [см. ф-лы (10), (11)], отнесенные к новым осям, будут

$$\begin{aligned}
 X'_{x'} &= l_1^2 X_x + m_1^2 Y_y + n_1^2 Z_z; \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 Y'_{y'} &= l_1 l_2 X_x + m_1 m_2 Y_y + n_1 n_2 Z_z; \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Подставляя вместо главных напряжений их выражения (b) через деформации и полагая  $e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \theta$ , на основании формул (20) — (22) получаем

$$\left. \begin{aligned}
 X'_{x'} &= \lambda \theta + 2\mu e_{x'x'}; & X'_{y'} &= \mu e_{x'y'}; \\
 Y'_{y'} &= \lambda \theta + 2\mu e_{y'y'}; & X'_{z'} &= \mu e_{x'z'}; \\
 Z'_{z'} &= \lambda \theta + 2\mu e_{z'z'}; & Y'_{z'} &= \mu e_{y'z'}.
 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Это и будут нужные нам зависимости между составляющими напряжения и деформации в случае изотропного тела.

Выражение для потенциальной энергии, из которого зависимости (28) получаются дифференцированием, в случае изотропного тела запишется так:

$$V = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \theta^2 + \frac{1}{2} \mu (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2 - 4e_{yy}e_{zz} - 4e_{zz}e_{xx} - 4e_{xx}e_{yy}). \quad (29)$$

§ 18. Модули упругости

В технической литературе вместо коэффициентов Ламе часто пользуются другими упругими постоянными для установления связи между напряжениями и деформациями. Упругие постоянные выбирают на основе опыта. Обыкновенно на опыте осуществляют простейшие виды напряженного состояния, и те коэффициенты пропорциональности, которые связывают взятый тип напряженного состояния с соответствующим типом деформации, принимают за упругую постоянную. Такие постоянные называют *модулями упругости*. Соответственно выбранному типу напряженного состояния различают: 1) *модуль упругости при растяжении*, 2) *модуль упругости при сдвиге* и 3) *модуль упругости при всестороннем сжатии*. Без всяких затруднений может быть установлена зависимость между различно выбранными упругими постоянными. Модули упругости просто выражаются через коэффициенты Ламе и наоборот.

Начнем со случая линейного напряженного состояния, соответствующего растяжению или сжатию призматических стержней. Опыты могут быть осуществлены особенно просто, поэтому соответствующий модуль упругости, называемый модулем Юнга <sup>1</sup>, дают обыкновенно в технической литературе как величину, характеризующую упругие свойства материала. Предположим, что линейное напряженное состояние состоит в растяжении по оси  $x$ . Тогда зависимости (28) между напряжениями и деформациями примут вид

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda\theta + 2\mu e_{xx}; \\ 0 &= \lambda\theta + 2\mu e_{yy}; \\ 0 &= \lambda\theta + 2\mu e_{zz}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Модуль упругости при растяжении — это коэффициент пропорциональности, связывающий взятое нами напряжение  $X_x$  с соответствующей деформацией  $e_{xx}$ . Для получения этой зависимости из уравнений (a) сложим эти уравнения и найдем таким путем выражение для объемного расширения:  $\theta = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} X_x$ .

Подставив найденное значение  $\theta$  в первое из уравнений (a), получим

$$X_x = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} e_{xx} = E e_{xx}. \quad (30)$$

Множитель при  $e_{xx}$ , обозначенный буквой  $E$ , представляет искомое выражение для модуля Юнга.

Из уравнений (a) легко может быть найдена и другая постоянная, которой часто пользуются для характеристики упругих свойств изотропного материала, именно отношение поперечного сжатия к продольному удлинению при простом растяжении. Эта постоянная носит название коэффициента Пуассона <sup>2</sup>. В дальнейшем мы будем обозначать ее буквой  $\sigma$ . Второе из уравнений (a) дает

$$e_{yy} = -\frac{\lambda}{2\mu} \theta = -\frac{\lambda X_x}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}.$$

Сравнивая полученное значение поперечного сжатия с найденным выше продольным удлинением  $e_{xx}$ , получаем

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (31)$$

Модулем упругости при сдвиге называют коэффициент пропорциональности, связывающий одну из составляющих касательного напряжения с соответствующим сдвигом. Величину этого модуля будем обозначать буквой  $G$ . Из уравнений (28) следует

$$G = \mu. \quad (32)$$

В случае всестороннего сжатия модулем упругости будет коэффициент пропорциональности, связывающий величину сжимающего напряжения с

<sup>1</sup> Томас Юнг первый установил определение модуля упругости при растяжении. Young Th. A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts. Vol. 1. Ld., Printed by J. Johnson St. Paul's Charchyard, by William Savage, 1807, Lecture 13. Более позднее издание под тем же названием: A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts. A new edition, with references and notes, by the Rev. P. Kelland. Ld., Printed by Taylor and Walton, 1845, vol. 1, 608 pp.; vol. 2, 43 pp., 93 plates. 60 lectures. См. vol. 1, pp. 104—120. Lecture 13. On passive strength and friction.

<sup>2</sup> С. Пуассон определял эту величину аналитическим путем, исходя из предположения, что упругое тело состоит из молекул, между которыми при деформации возникают центральные силы взаимодействия. Он нашел, что в случае изотропного тела отношение между продольным удлинением и поперечным сжатием должно равняться 0,25.

относительным изменением объема  $\theta$ . При таком напряженном состоянии  $X_x = Y_y = Z_z = -p$ , следовательно,  $e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = \frac{1}{3}\theta$ .

Из уравнений (28) получаем

$$p = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \theta = k\theta, \tag{33}$$

где  $k$  — величина модуля упругости при всестороннем сжатии.

Пользуясь формулами (30) — (33), легко получить такие соотношения:

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}; \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}; k = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)}. \tag{34}$$

Зависимости между напряжениями и деформациями (28) при использовании модулей упругости представятся в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= 2G \left( e_{xx} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} \theta \right); \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ X_y &= Ge_{xy}. \end{aligned} \right\} \tag{35}$$

Деформации выражаются через напряжения следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} [X_x - \sigma(Y_y + Z_z)]; \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} [Y_y - \sigma(X_x + Z_z)]; \\ e_{zz} &= \frac{1}{E} [Z_z - \sigma(X_x + Y_y)]. \end{aligned} \right\} \tag{36}$$

При использовании модулей упругости выражение для потенциальной энергии (29) можно представить так:

$$V = G \left[ e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} \theta^2 + \frac{1}{2} (e_{xy}^2 + e_{xz}^2 + e_{yz}^2) \right]. \tag{37}$$



могут быть выполнены при помощи установленной выше связи (36) между напряжениями и деформациями.

Вводя обозначение  $X_x + Y_y + Z_z = \Theta$  из (36), получаем  $e_{yy} = \frac{1}{E} [(1 + \sigma) Y_y - \sigma \Theta]$ ;  $e_{zz} = \frac{1}{E} [(1 + \sigma) Z_z - \sigma \Theta]$ . Кроме того,  $e_{yz} = \frac{2(1 + \sigma)}{E} Y_z$ . Вставляя это значение в уравнение (с), получаем

$$(1 + \sigma) \left( \frac{\partial^2 Y_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Z_z}{\partial y^2} \right) - \sigma \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right) = 2(1 + \sigma) \frac{\partial^2 Y_z}{\partial y \partial z}. \quad (e)$$

Правую часть этого уравнения преобразуем при помощи получаемых из уравнений равновесия (а) равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_z}{\partial y} &= -\frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_z}{\partial z} - \rho Z; \\ \frac{\partial Y_z}{\partial z} &= -\frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \rho Y. \end{aligned}$$

Дифференцируя первое из этих равенств по  $z$ , второе по  $y$  и складывая их, находим

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 Y_z}{\partial y \partial z} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial Z_x}{\partial z} + \frac{\partial Y_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial Z}{\partial z} - \rho \frac{\partial Y}{\partial y} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial X_x}{\partial x} - \rho X \right) - \frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial Z}{\partial z} - \rho \frac{\partial Y}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2} - \rho \left( -\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Подставляя этот результат в равенство (e) и пользуясь для сокращения символом  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , получаем

$$\begin{aligned} (1 + \sigma) \left[ \nabla^2 \Theta - \nabla^2 X_x - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right] - \sigma \left( \nabla^2 \Theta - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right) &= \\ = -\rho (1 + \sigma) \left( -\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (f)$$

Подобные выражения получим и для двух других уравнений вида (с). Сложив эти три выражения, найдем

$$(1 - \sigma) \nabla^2 \Theta = -\rho (1 + \sigma) \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right).$$

Определив отсюда  $\nabla^2 \Theta$  и подставив его в (f), получим

$$\nabla^2 X_x + \frac{1}{1 + \sigma} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = -\frac{\sigma}{1 - \sigma} \rho \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2\rho \frac{\partial X}{\partial x}. \quad (38)$$

Таким же образом преобразуются и два других уравнения вида (с). Уравнения вида (d) после подобных преобразований могут быть представлены в следующем виде<sup>1</sup>:

$$\nabla^2 Y_z + \frac{1}{1 + \sigma} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = -\rho \left( \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} \right). \quad (39)$$

<sup>1</sup> Зависимости эти установлены Дж. Мичеллом. См. Mitchell J. H. On the direct determination of stress in an elastic solid, with application to the theory of plates. Proceedings of the London Mathematical Society, [1899] 1900, vol. 31, N 685, pp. 100—124.

При отсутствии объемных сил или при постоянных силах дифференциальные зависимости (38) и (39) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} (1 + \sigma) \nabla^2 X_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 Y_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 Z_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 Y_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 X_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 X_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} (40)$$

Присоединив эти зависимости к уравнениям (а) и условиям на поверхности (б), будем иметь достаточное число уравнений для определения напряжений<sup>1</sup>.

## § 20. Определение перемещений

Определив составляющие напряжения, при помощи установленных раньше зависимостей (36) между напряжениями и деформациями найдем составляющие деформации. Дальнейшая задача будет заключаться в определении по найденным деформациям соответствующих перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , и она приводится к интегрированию системы линейных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = e_{xx}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e_{yy}; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = e_{zz}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = e_{xy}; \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = e_{xz}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = e_{yz}. \end{aligned}$$

Эти шесть уравнений заключают девять различных производных. Если трем из этих производных дать произвольные значения, то остальные шесть производных определятся из приведенных уравнений. Найдя таким образом значения всех производных, путем интегрирования получим величины перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . При этом интегрировании, очевидно, появятся три новые произвольные постоянные, следовательно, в окончательные выражения  $u$ ,  $v$  и  $w$  войдут шесть произвольных постоянных. Механический смысл этих произвольных постоянных ясен; они указывают на то, что, не меняя деформаций, можем сообщить телу перемещение, возможное для абсолютно твердого тела.

Перемещение это в общем случае определяется шестью величинами: тремя составляющими перемещения по направлениям координатных осей и тремя вращениями относительно тех же осей. Аналитически это может быть показано следующим образом. Пусть  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  — решения уравнения (а), тогда  $u_0 + u_1$ ,  $v_0 + v_1$ ,  $w_0 + w_1$  также будут решениями этих уравнений, если только  $u_1$ ,  $v_1$

<sup>1</sup> Некоторые дополнительные условия, которым должны удовлетворять напряжения в случае тел, ограниченных сложным (не односвязным) контуром, мы рассмотрим ниже, при решении плоской задачи.

$w_1$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (b)$$

Если эти уравнения продифференцировать по  $x$ ,  $y$  и  $z$ , то получим 18 уравнений, заключающих 18 различных вторых производных от  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$ . Все эти производные оказываются равными нулю, следовательно, перемещения  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$  представляют собой линейные функции координат. Легко проверить, что самый общий вид этих перемещений, при наличии уравнений (b), будет такой:

$$u_1 = a - ty + nz; \quad v_1 = b + tx - rz; \quad w = c - px + ry. \quad (41)$$

Очевидно,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  представляют перемещения, соответствующие поступательному движению. Величины  $m$ ,  $n$ ,  $r$  суть элементарные вращения относительно координатных осей. Если мы к дифференциальным уравнениям равновесия и к условиям на поверхности присоединим еще условия закрепления (см. § 10), то сможем определить постоянные  $a$ , ...,  $r$  и, следовательно, найдем перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , обусловленные деформацией тела.

## § 21. Непосредственное определение перемещений

В § 19, 20 был показан путь решения задачи теории упругости, который распадался на два этапа. Сначала по заданным внешним силам определялись напряжения и потом по найденным напряжениям — соответствующие перемещения. В некоторых случаях удобнее непосредственно приступать к определению перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Для этого необходимо дифференциальные уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= 0; \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= 0; \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

выразить через перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

На основании зависимостей (28) между составляющими напряжения и деформации имеем

$$\begin{aligned} X_x &= \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}; \\ X_y &= \mu e_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \\ X_z &= \mu e_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Вставляя эти значения в первое из уравнений (a), получаем

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho X = 0.$$

Подобным образом могут быть преобразованы и два другие уравнения системы (a). Пользуясь для упрощения символом  $\nabla^2$ , представим уравнения рав-

равновесия, выраженные через перемещения, в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \rho X &= 0; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Если тело совершает движение, то к объемным силам придется присоединить силы инерции, и мы получим такую систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \rho \left( X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) &= 0; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Выразив через перемещения дифференциальные уравнения равновесия или движения упругого тела, необходимо соответствующим образом преобразовать и условия на поверхности:

$$\begin{aligned} X_n &= X_x \cos(x\nu) + X_y \cos(y\nu) + X_z \cos(z\nu); \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Подставляя вместо  $X_x, \dots$  их выражения через перемещения, получаем

$$\begin{aligned} X_n &= \lambda \theta \cos(x\nu) + \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cos(x\nu) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(y\nu) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(z\nu) \right] + \\ &+ \mu \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \cos(x\nu) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(y\nu) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(z\nu) \right]; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Или, принимая во внимание, что производная по нормали

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \nu} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \nu} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(x\nu) + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial y} \cos(y\nu) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(z\nu), \end{aligned}$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} X_n &= \lambda \theta \cos(x\nu) + \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\partial u}{\partial x} \cos(x\nu) + \frac{\partial v}{\partial x} \cos(y\nu) + \frac{\partial v}{\partial x} \cos(z\nu) \right]; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Уравнения (43) и условия на поверхности (44) вполне определяют перемещения  $u, v$  и  $w$ , которые совершают точки закрепленного упругого тела при деформации.

В случае, когда нет объемных сил, уравнения (43) переписутся так:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Дифференцируя первое из этих уравнений по  $x$ , второе по  $y$ , третье по  $z$  и складывая результаты, находим:

$$(\lambda + \mu) \nabla^2 \theta + \mu \nabla^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0.$$

Следовательно, объемное расширение  $\theta$  представляется в этом случае функцией, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0. \tag{46}$$

§ 22. Однозначность решения

Когда дифференциальные уравнения теории упругости установлены, приходится решать для них два основных вопроса: вопрос о существовании решения для составленной системы уравнений и вопрос об однозначности решения. Что касается первого вопроса, то он имеет чисто математический характер. Задача о существовании интеграла для дифференциальных уравнений теории упругости до сих пор не вполне разрешена и мы этого вопроса в дальнейшем касаться не будем <sup>1</sup>.

Однозначность решения уравнений теории упругости для случая тел с *односвязным* контуром была впервые доказана Кирхгофом <sup>2</sup>. Будем исходить при доказательстве из представления о *естественном состоянии* упругого тела. Если на элементы тела не действуют никакие объемные силы, а также не приложено никаких усилий к поверхности тела, то тело не испытывает никаких деформаций и все внутренние напряжения равны нулю. Предположим, что при заданных объемных силах  $\rho X, \rho Y, \rho Z$  и данных усилиях на поверхности  $X_n, Y_n, Z_n$  дифференциальные уравнения равновесия (3) имеют два решения. Пусть  $X'_x, \dots, Y'_z$  представляет систему напряжений, соответствующих первому решению, и  $X''_x, \dots, Y''_z$  — второму. Составим разности  $X_x = X'_x - X''_x, \dots, Y_z = Y'_z - Y''_z$ . Они представляют собой систему напряжений  $X_x, \dots, Y_z$ , удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0;$$

.....  
 .....

и условиям на поверхности

$$0 = X_x \cos(xv) + X_y \cos(yv) + X_z \cos(zv);$$

.....  
 .....

Напряжения эти, как следует из понятия о естественном состоянии упругого тела, равны нулю. Следовательно, системы напряжений  $X'_x, \dots, Y'_z$  и  $X''_x, \dots, Y''_z$

<sup>1</sup> Литература, относящаяся к этому вопросу, указана в статье T e d o n e O. Allgemeine Theoreme der mathematischen Elastizitätslehre. (Integrations Theorie). Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Leipzig, B. G. Teubner, 1907, Bd 4, Mechanik, Teil 4, H. 1, SS. 55—124.

<sup>2</sup> K i r c h h o f f G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1859, Bd 56, H. 4, SS. 285—313. См. S. 291.

...,  $Y_z'$  тождественны, и уравнения (3) при заданных внешних силах допускают лишь одно решение.

Этот вывод основан на принципе сложения действия сил и предположении, что перемещения, обусловленные деформацией тела, не оказывают влияния на действие внешних сил. В тех случаях, когда принцип сложения действия сил не применим, одной и той же системе сил может соответствовать несколько различных форм равновесия. Эти вопросы будут рассмотрены ниже в связи с задачами об устойчивости различных форм равновесия упругого тела.

В случаях, когда тело ограничено многосвязным контуром, доказательство однозначности решения уравнений теории упругости, основанное на представлении о естественном состоянии упругого тела теряет силу, и мы будем, вообще говоря, получать многозначные решения. Физический смысл этого заключения выясним на простейшем примере. Возьмем случай кольца. Одним плоским разрезом мы можем обратить кольцо в тело с односвязным контуром. В таком теле при определенных внешних силах возникают вполне определенные напряжения и деформации. Если мы удалим внешние силы, напряжения и деформации пропадут, тело вернется к своему естественному состоянию. Удалим посредством плоского сечения тонкий слой материала кольца у места разреза. Тогда концы разрезанного кольца не будут совпадать друг с другом при отсутствии внешних сил; мы сможем привести их к соприкосанию, лишь приложив внешние силы. Предположим, что мы достигли таким путем соприкосания и скрепили (склеили, спаяли) между собой поверхности, соответствующие месту разреза, тогда по удалении внешних сил в кольце останутся напряжения, величина которых будет зависеть от того, какая часть материала кольца была удалена у места разреза. Напряжения эти, возникающие, как мы видим, в телах с многосвязным контуром, при изготовлении называют *самонапряжениями* или *начальными напряжениями*. Они именно и обуславливают многозначность решений уравнений теории упругости в случае многосвязных контуров<sup>1</sup>.

На практике начальные напряжения играют весьма существенную роль, но их редко удается учесть аналитически, так как обыкновенно нет точных данных относительно тех условий, благодаря которым начальные напряжения возникли<sup>2</sup>.

## § 23. Применение начала возможных перемещений к упругим телам

Начало возможных перемещений, которым так часто пользуются при исследовании условий равновесия систем, составленных из абсолютно твердых тел, может быть иногда с большим эффектом применено и к упругим телам. Рассмотрим условия равновесия одной материальной точки, принадлежащей какой-либо системе.

Пусть  $P$  обозначает равнодействующую всех внешних приложенных к точке сил и  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  — проекции этой равнодействующей на координатные оси.

<sup>1</sup> Теоретически вопрос о начальных напряжениях в телах с многосвязным контуром рассмотрен в работе Volterra V. Un theorema sulla teoria della elasticita. Atti della reale accademia dei Lincei. Rendiconti. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, 1905, t. 14, Fascio 1, 1° Semestre, pp. 127—137. Sulla distorsioni dei solidi elastici piu volte connessi. (Nota del Socio Vito Volterra). Там же, pp. 351—356.

<sup>2</sup> Начальные напряжения могут возникнуть и в телах с односвязным контуром. Например, остающиеся деформации или неравномерное остывание отливки могут служить причиной возникновения естественных начальных напряжений. См. Föppel A. Vorlesungen über technische Mechanik. Bd 5. Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie. Leipzig, B. G. Teubner, 1907, 391 SS. См. S. 293.

Через  $P_i$  обозначим равнодействующую всех внутренних сил, представляющих действие, оказываемое на рассматриваемую точку остальными частями данной системы, через  $X_i$ ,  $Y_i$  и  $Z_i$  — проекции  $P_i$ . Начало возможных перемещений дает уравнение

$$X\delta u + Y\delta v + Z\delta w + X_i\delta u_i + Y_i\delta v_i + Z_i\delta w_i = 0, \quad (a)$$

имеющее место при всех возможных перемещениях  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ . Уравнения вида (a) могут быть получены для всех точек системы. Просуммировав, получим уравнение

$$\sum (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) + \sum (X_i\delta u_i + Y_i\delta v_i + Z_i\delta w_i) = 0. \quad (b)$$

Если мы имеем дело с абсолютно твердым телом, то расстояния между точками системы не изменяются и работа внутренних сил обращается в нуль. Следовательно, при всяком перемещении, возможном для твердого тела, будем иметь

$$\sum (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) = 0. \quad (c)$$

Упругое тело может совершать перемещения, не претерпевая деформации, поэтому для него уравнение (c) остается в силе: внешние силы, приложенные к упругому телу должны удовлетворять уравнениям равновесия, соответствующим твердому телу. Но кроме перемещений, свойственных абсолютно твердому телу, упругое тело может совершать бесчисленное множество других перемещений, сопровождающихся изменением формы тела. Перемещения эти ( $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ ) должны удовлетворять лишь условиям, установленным для перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$  в упругом теле (см. § 10, 11). Для таких перемещений второй член в уравнении (b) в нуль не обращается и начало возможных перемещений в применении к упругим телам получает такое выражение: форма, которую принимает упругое тело под действием внешних, приложенных к нему сил, характеризуется тем, что на всяком возможном для упругого тела отклонении от этой формы сумма работ всех внешних и внутренних сил равна нулю.

Представим теперь уравнение (b), выражающее начало возможных перемещений в применении к упругому телу, в ином виде, для чего воспользуемся прежними обозначениями. При составлении работы внешних сил будем различать силы, приложенные по поверхности тела, и объемные силы. Тогда работа внешних сил, соответствующая возможным перемещениям  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ , представится в виде

$$\iint (X_v\delta u + Y_v\delta v + Z_v\delta w) ds + \iiint (\rho X\delta u + \rho Y\delta v + \rho Z\delta w) dx dy dz.$$

Здесь двойной интеграл, распространенный по поверхности тела, представляет работу поверхностных сил, тройной интеграл — работу объемных сил.

При составлении работы внутренних сил воспользуемся выражением для потенциальной энергии

$$V = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \theta^2 + \frac{1}{2} \mu (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2 - 4e_{yy}e_{zz} - 4e_{zz}e_{xx} - 4e_{xx}e_{yy}).$$

Потенциальная энергия представляет собой отнесенную к единице объема работу внешних сил, затраченную на деформацию. Внутренние силы упругости при деформации все время уравновешивают внешние силы, поэтому соответствующая им работа, отнесенная к единице объема, будет равна по величине и противоположна по знаку  $V$ .

Если точкам упругого тела дадим возможные перемещения  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ , то составляющие деформации получат приращения

$$\delta e_{xx} = \frac{\partial \delta u}{\partial x}, \dots, \delta e_{yz} = \frac{\partial \delta v}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial y}$$

и потенциальная энергия  $V$  возрастет на величину

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial e_{xx}} \delta e_{xx} + \frac{\partial V}{\partial e_{yy}} \delta e_{yy} + \frac{\partial V}{\partial e_{zz}} \delta e_{zz} + \\ + \frac{\partial V}{\partial e_{xy}} \delta e_{xy} + \frac{\partial V}{\partial e_{xz}} \delta e_{xz} + \frac{\partial V}{\partial e_{yz}} \delta e_{yz}.$$

Следовательно, соответствующая принятым возможным перемещениям работа внутренних сил упругости, отнесенная к единице объема, будет

$$-\delta V = -\delta \left[ \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \theta^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \mu (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2 - 4e_{yy}e_{zz} - 4e_{zz}e_{xx} - 4e_{xx}e_{yy}) \right].$$

Работа всех внутренних сил упругости представится формулой

$$-\delta \int \int \int \left[ \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \theta^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \mu (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2 - 4e_{yy}e_{zz} - 4e_{zz}e_{xx} - 4e_{xx}e_{yy}) \right] dx dy dz,$$

и уравнение (b) запишется так:

$$\int \int (X_\nu \delta u + Y_\nu \delta v + Z_\nu \delta w) ds + \\ + \int \int \int \rho (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dx dy dz - \delta \int \int \int \left[ \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \theta^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \mu (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2 - 4e_{yy}e_{zz} - 4e_{zz}e_{xx} - 4e_{xx}e_{yy}) \right] dx dy dz = 0. \quad (47)$$

Если через  $W$  обозначим работу всех внешних сил, совершенную при деформации тела, и примем во внимание, что на основании теоремы Клапейрона

$$2W = \int \int (X_\nu u + Y_\nu v + Z_\nu w) ds + \int \int \int \rho (Xu + Yv + Zw) dx dy dz,$$

то уравнение (47) примет вид

$$\delta (2W - \int \int \int V dx dy dz) = 0. \quad (48)$$

При составлении вариации нужно помнить, что внешние силы остаются постоянными и мы даем приращения только перемещениям  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

Следовательно, форма равновесия, которую получает тело под действием заданных сил, характеризуется тем, что функция перемещений  $u$ ,  $v$  и  $w$ , представленная выражением  $J = 2W - \int \int \int V dx dy dz$ , приобретает значение максимума или минимума, так как первая вариация этой функции обращается в нуль для всех возможных перемещений  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ . В дальнейшем мы будем пользоваться этим обстоятельством и иногда будем интегрирование дифференциальных уравнений заменять разысканием максимума или минимума функции  $J$ . Таким путем можно находить приближенные решения при исследовании изгиба стержней и пластинок.

До сих пор мы выбирали возможные перемещения совершенно произвольно. Величины  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  должны были удовлетворять лишь общим условиям, принятым для перемещений точек упругого тела. Подчиним теперь те отклонения, которые мы сообщаем упругому телу, находящемуся в равновесии под действием заданных сил, дополнительному условию, а именно будем брать лишь такие значения  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ , при которых внешние силы не совершают никакой

работы. Другими словами, будем сравнивать между собой лишь такие формы, для которых

$$\iint (X_v u + Y_v v + Z_v w) ds = \text{const};$$

$$\iiint \rho (Xu + Yv + Zw) dx dy dz = \text{const}.$$

Тогда уравнение (48) запишется так:

$$\delta \iiint V dx dy dz = 0. \tag{49}$$

Следовательно, из всех форм, которым соответствует одна и та же работа заданных внешних сил, форма равновесия выделяется тем, что для нее удовлетворено условие (49) и, следовательно, потенциальная энергия получает максимальные или минимальные значения<sup>1</sup>.

Начало возможных перемещений является самым общим началом статики, поэтому из соответствующего ему уравнения (47) могут быть получены и дифференциальные уравнения равновесия (14) и условия на поверхности (3), которые были ранее нами найдены из рассмотрения условий равновесия бесконечно малых элементов деформированного тела. Для этого нужно произвести лишь некоторые преобразования с членом

$$-\delta \iiint \left[ \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \theta^2 + \frac{1}{2} \mu (e_{yz}^2 + e_{xz}^2 + e_{xy}^2 - 4e_{yz}e_{xz} - 4e_{xz}e_{xy} - 4e_{xy}e_{yz}) \right] dx dy dz, \tag{d}$$

соответствующим работе внутренних сил упругости на принятых нами возможных перемещениях  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ . Составляя указанную вариацию и принимая во внимание зависимости (28) между напряжениями и деформациями, для работы внутренних сил (d) получим такое выражение:

$$-\iiint (X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + Z_z \delta e_{zz} + X_y \delta e_{xy} + X_z \delta e_{xz} + Y_z \delta e_{yz}) dx dy dz. \tag{e}$$

Если принять во внимание, что

$$\delta e_{xx} = \delta \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \delta u}{\partial x}; \dots \delta e_{xy} = \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y},$$

то выражение (e) можно преобразовать, выполняя интегрирование по частям следующим образом:

$$\begin{aligned} -\iiint X_x \delta e_{xx} dx dy dz &= -\iiint X_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx dy dz = \\ &= -\iiint [X_x \delta u] dy dz + \iiint \frac{\partial X_x}{\partial x} \delta u dx dy dz; \\ &\dots \dots \dots \\ -\iiint X_y \delta e_{xy} dx dy dz &= -\iiint X_y \left( \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) dx dy dz = \\ &= -\iiint [X_y \delta u] dx dz - \iiint (Y_x \delta v) dy dz + \iiint \left( \frac{\partial X_y}{\partial y} \delta u + \frac{\partial Y_x}{\partial x} \delta v \right) dx dy dz; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Обозначая через  $ds$  элемент поверхности тела и принимая во внимание, что  $dy dz = ds \cos(xv)$ ,  $dx dz = ds \cos(yv)$ ,  $dx dy = ds \cos(zv)$ , преобразованное выражение (e) можно представить так:

$$-\iint [(X_x \cos(xv) + X_y \cos(yv) + X_z \cos(zv)) \delta u + (Y_x \cos(xv) + Y_y \cos(yv) + Y_z \cos(zv)) \delta v +$$

<sup>1</sup> Без особых затруднений можно доказать, что здесь речь идет о минимуме. См. стр. 202 книги А. Love — А. Тимпе, указанной на стр. 9 (либо стр. 163 английского издания книги А. Love, упомянутой там же). Заключением (49) и условиями (с) иногда пользуются для доказательства существования решения уравнений теории упругости. Можно утверждать, что решение существует, если доказано, что имеются три функции  $u$ ,  $v$  и  $w$ , которым соответствует минимум интеграла  $\iiint V dx dy dz$  при наличии условий (с).

$$\begin{aligned}
& + (Z_x \cos(xv) + Z_y \cos(yv) + Z_z \cos(zv)) \delta w \Big| ds + \int \int \int \left[ \left( \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) \delta u + \right. \\
& \left. + \left( \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right) \delta v + \left( \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) \delta w \right] dx dy dz.
\end{aligned}$$

Здесь двойное интегрирование распространено по поверхности и тройное — по объему тела. Подставляя полученное выражение для работы внутренних сил в уравнение (47) и собирая вместе все члены с множителем  $\delta u$  и соответственно  $\delta v$  и  $\delta w$  находим, что уравнение (47) при произвольных значениях  $\delta u, \delta v, \delta w$  будет удовлетворено лишь в том случае, если на поверхности тела выполнены условия

$$\begin{aligned}
X_v &= X_x \cos(xv) + X_y \cos(yv) + X_z \cos(zv); \\
Y_v &= Y_x \cos(xv) + Y_y \cos(yv) + Y_z \cos(zv); \\
Z_v &= Z_x \cos(xv) + Z_y \cos(yv) + Z_z \cos(zv)
\end{aligned}$$

и в каждой точке внутри тела имеют место уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= 0; \\
\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= 0; \\
\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, из начала возможных перемещений можно получать ранее установленные дифференциальные уравнения равновесия и условия на поверхности тела. Уравнение (47) может быть положено в основу всей теории упругости.

В предыдущих рассуждениях мы сравнивали действительную форму равновесия, которую упругое тело получает при действии заданных сил с другими близкими ей, геометрически возможными формами, получаемыми путем перемещений  $\delta u, \delta v, \delta w$ . Действительная форма характеризуется тем, что для нее удовлетворено уравнение (47). Будем теперь сравнивать действительное распределение напряжений, возникающих в теле под действием заданных сил с другими, возможными с точки зрения статики, распределениями напряжений. Шесть составляющих напряжения  $X_x, \dots, Y_z$  связаны между собой тремя дифференциальными уравнениями равновесия (14) и если не принимать во внимание связи между напряжениями и деформациями, то можно найти сколько угодно различных распределений напряжений, удовлетворяющих условиям статики. Чем же выделяется из всех этих статически возможных распределений напряжений действительное напряженное состояние? Для решения этого вопроса воспользуемся началом возможных перемещений. Пусть  $X_x, \dots, Y_z$  — составляющие напряжений, соответствующих действительному напряженному состоянию.

Рассмотрим другое распределение напряжений, для чего дадим действительным составляющим напряжения  $X_x, \dots, Y_z$  приращения  $\delta X_x, \dots, \delta Y_z$  и выберем соответствующие приращения внешних сил так, чтобы были удовлетворены уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta X_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta X_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta X_z}{\partial z} + \rho \delta X &= 0; \\
. . . . . \\
. . . . .
\end{aligned}$$

и условия на поверхности

$$\delta X_x \cos(xv) + \delta X_y \cos(yv) + \delta X_z \cos(zv) = \delta X_v;$$

$$\dots$$

Так как система напряжений  $\delta X_x, \dots, \delta Y_z$  и соответствующих им внешних сил  $\delta X_v, \dots, \delta Z_v$  удовлетворяет условиям статики, то работа этой системы внутренних и внешних сил на всяком возможном для упругого тела перемещении будет равна нулю. Возьмем в качестве возможных перемещений действительные перемещения  $u, v, w$ , которые совершают точки тела при действии заданных сил, и соответствующие им составляющие деформации  $e_{xx}, \dots, e_{yz}$ . Тогда начало возможных перемещений дает уравнение

$$\iint (\delta X_v u + \delta Y_v v + \delta Z_v w) ds + \iiint \rho (\delta X u + \delta Y v + \delta Z w) dx dy dz - \iint (\delta X_x e_{xx} + \delta Y_y e_{yy} + \delta Z_z e_{zz} + \delta X_y e_{xy} + \delta X_z e_{xz} + \delta Y_z e_{yz}) dx dy dz = 0. \quad (f)$$

Последний член в этом уравнении может быть представлен в ином виде, если воспользоваться выражением (37) для потенциальной энергии. Преобразуем выражение (f), подставив вместо составляющих деформации их выражения (36) через составляющие напряжения. Тогда получим

$$V = \frac{1}{2E} [X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2 - 2\sigma (X_x Y_y + X_x Z_z + Y_y Z_z)] + 2(1 + \sigma) (X_z^2 + X_y^2 + Y_z^2). \quad (37')$$

Приращение  $V$ , соответствующее приращениям  $\delta X_x, \dots, \delta Y_z$  составляющих напряжений, будет

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial X_x} \delta X_x + \dots + \frac{\partial V}{\partial Y_z} \delta Y_z = \frac{1}{E} [X_x - \sigma (Y_y + Z_z)] \delta X_x + \dots + \frac{2(1 + \sigma)}{E} Y_z \delta Y_z.$$

На основании этого результата и зависимостей (36) можем переписать уравнение (f) так:

$$\delta \iiint V dx dy dz = \iint (\delta X_v u + \delta Y_v v + \delta Z_v w) ds + \iiint \rho (\delta X u + \delta Y v + \delta Z w) dx dy dz. \quad (50)$$

В этом уравнении потенциальная энергия выражена через составляющие напряжения, и при составлении вариации  $\delta \iiint V dx dy dz$  даем этим составляющим приращения, удовлетворяющие уравнениям равновесия. При выводе уравнения (50) мы воспользовались началом возможных перемещений и выражением (37) для потенциальной энергии, поэтому полученный нами результат применим лишь к упругим телам, следующим закону Гука, в то время как начало возможных перемещений применимо к упругим телам с любой зависимостью между напряжениями и деформациями.

Если при сравнении различных напряженных состояний будем давать составляющим напряжений лишь такие приращения  $\delta X_v, \dots, \delta Y_z$ , при которых правая часть уравнения (50) обращается в нуль, то получим

$$\delta \iiint V dx dy dz = 0, \quad (51)$$

т. е. из всех удовлетворяющих указанному выше условию распределений напряжений действительное напряженное состояние выделяется тем, что для него потенциальная энергия приобретает максимальное или минимальное значение.

Заметим, что уравнение (51) по форме совершенно совпадает с уравнением (49). Но в уравнении (49) мы сравнивали значения потенциальной энергии для различных геометрически возможных форм равновесия, которым соответствует одно и то же значение работы внешних сил, а в уравнении (51) мы сравниваем различные возможные с точки зрения статики распределения напряжений, при которых правая часть уравнения (50) равна нулю. В первом случае потенциальная энергия выражена в виде функции составляющих деформации, во втором случае мы пользуемся выражением (37'), т. е. представляем потенциальную энергию в виде функции составляющих напряжения.

Уравнение (51) является самым общим выражением для известного из курса сопротивления материалов начала наименьшей работы, которым мы обыкновенно пользуемся при разыскании *лишних неизвестных* в статически неопределимых системах. Чтобы применить начало наименьшей работы, мы должны прежде всего представить потенциальную энергию системы в виде функции лишних неизвестных и затем для этих неизвестных нужно подобрать такие значения, при которых составленное нами выражение для потенциальной энергии приобретает значение минимума, т. е. нужно удовлетворить уравнению (51). Выражение, соответствующее правой части уравнения (50), равно нулю, так как в случае применения начала наименьшей работы предполагается, что перемещения, соответствующие искомому лишним неизвестным, равны нулю.

## § 24. Постановка задачи

При решении дифференциальных уравнений равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= 0; \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= 0; \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

для составляющих напряжения  $X_x, \dots, Y_z$  приходится подыскивать такие выражения, чтобы были удовлетворены условия на поверхности (3) и, кроме того, — найденные выше (§ 19) дифференциальные зависимости (38) и (39). Зависимости эти, как видно из их вывода (уравнение (е), § 19), связывают между собой вторые производные составляющих напряжения. Поэтому в случаях, когда удастся удовлетворить уравнениям равновесия (а) и условиям на поверхности, выбрав для составляющих напряжения постоянные величины или линейные функции координат, дифференциальные зависимости будут, наверное, удовлетворены, а решения системы уравнений (а) будут решениями соответствующей задачи теории упругости.

Эти *простейшие* задачи на основании различных произвольных допущений относительно деформации тел были разрешены значительно ранее установления общих уравнений теории упругости. Сюда относятся случаи растяжения и сжатия призматических стержней, задача о всестороннем равномерном сжатии, чистый изгиб призматических стержней и пластинок и кручение круглых стержней. Все эти вопросы излагаются в элементарном курсе сопротивления материалов. Здесь мы еще раз возвращаемся к ним, чтобы на самых простых примерах показать общий ход решения задач теории упругости и выяснить общий метод определения перемещений точек упругого тела, если известно распределение напряжений.

## § 25. Напряжения постоянны по объему тела

Если составляющие напряжения постоянны по объему тела, то дифференциальные уравнения равновесия могут быть удовлетворены лишь при условии отсутствия объемных сил. Только поверхностными силами можно вызвать в теле однородное напряженное состояние и, следовательно, однородную деформацию.

Рассмотрим случай, когда нормальные напряжения по любой площадке, проведенной в теле, имеют одну и ту же величину —  $p$ . Тогда

$$X_x = Y_y = Z_z = -p. \quad (a)$$

Эллипсоид напряжений обращается в шар и касательные напряжения по любой площадке обращаются в нуль. Переходя к условиям на поверхности (3), заключаем, что по любой площадке, совпадающей с поверхностью тела, нормальное напряжение должно быть  $-p$ , а касательное — равно нулю. Следовательно, напряженное состояние (a), которым мы задались, может быть создано в упругом теле равномерным всесторонним сжатием интенсивности  $p$ . Деформации, возникающие при этом, были рассмотрены в связи с определением объемного модуля упругости (§ 18).

## § 26. Напряжения линейно зависят от координат

В качестве примера рассмотрим напряженное состояние, определяемое следующими значениями составляющих напряжения:

$$X_x = Y_y = X_y = X_z = Y_z = 0; \quad Z_z = g\sigma z, \quad (a)$$

где  $g$  — ускорение, соответствующее силе тяжести.

Чтобы дифференциальные уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= 0; \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= 0; \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

были удовлетворены, нужно положить  $X = Y = 0$ ;  $Z = -g$ . Следовательно, взятое нами напряженное состояние (a) может возникнуть в упругом теле при действии силы тяжести (ось  $z$  предполагается направленной вертикально вверх).

Рассмотрим теперь, каковы должны быть усилия, приложенные по поверхности тела, чтобы напряженное состояние (a) имело место. Искомые усилия мы найдем из условий на поверхности:

$$X_v = X_x \cos(xv) + X_y \cos(yv) + X_z \cos(zv);$$

$$Y_v = Y_x \cos(xv) + Y_y \cos(yv) + Y_z \cos(zv);$$

$$Z_v = Z_x \cos(xv) + Z_y \cos(yv) + Z_z \cos(zv).$$

При принятом распределении напряжений (a) найдем:  $X_v = Y_v = 0$ ;  $Z_v = -g\sigma z \cos(zv)$ , т. е. по поверхности тела должны быть распределены усилия, имеющие направление оси  $z$ , причем интенсивность этих усилий пропорциональна косинусу угла, составляемого нормалью  $v$  к поверхности тела в рассматриваемой точке с осью  $z$ .

Если тело представляет собой цилиндр, высота которого равна  $l$  (рис. 6) и образующие параллельны оси  $z$ , то для боковой поверхности  $\cos(zv)$  обращается в нуль, следовательно, равны нулю и соответствующие поверхностные усилия. Для верхнего основания  $\cos(zv) = 1$ , поверхностные усилия равномерно распределяются по этому основанию и интенсивность их равна  $g\sigma l$ . По нижнему основанию, где  $z = 0$ , поверхностные силы равны нулю.

Таким образом, взятое нами напряженное состояние (а) представляет собой распределение напряжений, возникающих в цилиндре под действием силы тяжести, когда верхнее сечение цилиндра закреплено. Если бы мы закрепили нижнее основание цилиндра, то вместо растягивающих напряжений  $Z_z$  получили бы сжимающие напряжения.

Более общее распределение напряжений получим, если предположим, что цилиндр погружен в жидкость и на него кроме собственного веса действует гидростатическое давление <sup>1</sup>.

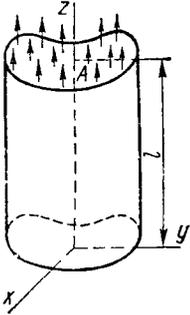


Рис. 6.

Перейдем к определению перемещений, соответствующих принятому распределению напряжений. Составляющие деформации выразятся через составляющие напряжения следующим образом:

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{Z_z}{E} = \frac{g\rho z}{E}; \quad (c)$$

$$e_{xx} = e_{yy} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\sigma \frac{g\rho z}{E}; \quad (d)$$

$$e_{xy} = e_{xz} = e_{yz} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (e)$$

На основании (c) можем написать выражение для  $w$ :

$$w = \frac{g\rho z^2}{2E} + w_0, \quad (f)$$

где  $w_0$  — неизвестная пока функция от  $x$  и  $y$ . Второе и третье из уравнений (e) перепишем в виде

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

и получим для перемещений  $u$  и  $v$  выражения

$$u = -z \frac{\partial w_0}{\partial x} + u_0; \quad v = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} + v_0,$$

где  $u_0$  и  $v_0$  — функции только  $x$  и  $y$ .

Подставляя полученные для  $u$  и  $v$  выражения в уравнения (d), находим

$$-z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\sigma \frac{g\rho z}{E}; \quad -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\sigma \frac{g\rho z}{E}, \quad (g)$$

и так как  $u_0$  и  $v_0$  от  $z$  не зависят, то, следовательно,

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \sigma \frac{g\rho}{E}. \quad (h)$$

Подставляя выражения для  $u$  и  $v$  в первое из уравнений (e), находим

$$-2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0.$$

Так как  $u_0$  и  $v_0$  от  $z$  не зависят, то должны быть выполнены условия

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0. \quad (i)$$

<sup>1</sup> Chree C. Application of elastic solids to metrology. Philosophical Magazine and Journal of Sciences, Series 6, 1901, vol. 2, N 11, pp. 532—558; N 12, pp. 594—616.

На основании (h) и (l) можем написать выражения для функций  $u_0$ ,  $v_0$  и  $w_0$ . Нетрудно видеть, что мы удовлетворим всем условиям, положив

$$w_0 = \sigma \frac{g\rho}{2E} (x^2 + y^2) + \alpha x + \beta y + \gamma;$$

$$u_0 = \delta y + \delta'; \quad v_0 = -\delta x + \gamma'.$$

Искомые перемещения представляются такими формулами:

$$u = -\frac{\sigma g\rho}{E} xz - \alpha z + \delta y + \delta';$$

$$v = -\frac{\sigma g\rho}{E} yz - \beta z - \delta x + \gamma';$$

$$w = \frac{g\rho}{2E} z^2 + \frac{\sigma g\rho}{2E} (x^2 + y^2) + \alpha x + \beta y + \gamma.$$

Шесть произвольных постоянных, которые вошли в выражения для перемещений, соответствуют перемещениям цилиндра как твердого тела. Чтобы устранить возможность поступательного движения, закрепим верхнюю точку  $A$  ( $x = y = 0, z = l$ ) оси цилиндра. Возможность вращений будет исключена, если мы закрепим линейный элемент, проходящий через  $A$  и совпадающий с осью  $z$ , и элементарную площадку, совпадающую с плоскостью  $zOx$  (см. формулу (16) § 10). Для определения произвольных постоянных в точке  $A$  получим следующие шесть условий:

$$u = v = w = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Подставляя вместо  $u$ ,  $v$  и  $w$  найденные выше значения и полагая в них  $x = y = 0, z = l$ , получаем

$$-\alpha l + \delta' = 0; \quad -\beta l + \gamma' = 0; \quad \frac{g\rho l^2}{2E} + \gamma = 0;$$

$$\alpha = 0; \quad \beta = 0; \quad \delta = 0.$$

Следовательно,

$$\delta' = \gamma' = 0, \quad \gamma = -\frac{g\rho l^2}{2E}.$$

Окончательно для перемещений получим выражения

$$u = -\sigma \frac{g\rho}{E} xz; \quad v = -\sigma \frac{g\rho}{E} yz; \quad w = \frac{g\rho z^2}{2E} + \frac{\sigma g\rho}{2E} (x^2 + y^2) - \frac{g\rho l^2}{2E}.$$

Точки, лежащие на оси цилиндра ( $x = y = 0$ ), совершают при деформации лишь вертикальные перемещения:

$$w = -\frac{g\rho}{2E} (l^2 - z^2).$$

Другие точки, благодаря поперечному сжатию, сопровождающему продольное растяжение цилиндра, будут совершать не только вертикальные, но также и горизонтальные перемещения. Линии, параллельные оси цилиндра до деформации, становятся после деформации наклонными к этой оси. Вид

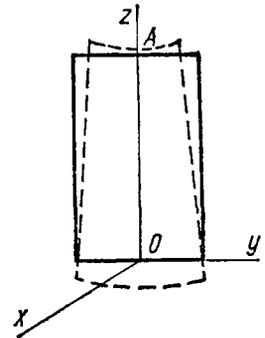


Рис. 7.

деформированного цилиндра в искаженном масштабе представлен на рис. 7. Какое-либо плоское поперечное сечение цилиндра, определяемое уравнением  $z = c$ , обращается после деформации в поверхность параболоида вращения:

$$z = c + w = c + \frac{g\rho c^2}{2E} - \frac{g\rho l^2}{2E} + \frac{\sigma g\rho}{2E} (x^2 + y^2).$$

### § 27. Кручение призматических стержней кругового поперечного сечения

При элементарном исследовании напряжений, возникающих в случае кручения круглых стержней, исходят из предположения, что плоские поперечные сечения скручиваемого стержня остаются и после деформации плоскими, а радиусы, проведенные в плоскости сечения, остаются прямыми.

Как следствие этих допущений получаем, что по плоскостям поперечных сечений скручиваемого стержня действуют лишь касательные напряжения. Величина этих напряжений в какой-либо точке  $A$  (рис. 8) поперечного сечения пропорциональна расстоянию этой точки от центра сечения  $O$ , а направление перпендикулярно к направлению  $OA$  соответствующего радиуса. Если ось  $z$  совпадает с направлением оси цилиндра, то согласно элементарной теории кручения для составляющих напряжений получаем следующие значения:

$$X_x = Y_y = Z_z = X_y = 0;$$

$$X_z = -\tau y; \quad Y_z = \tau x.$$

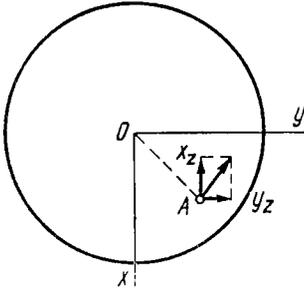


Рис. 8.

Здесь через  $\tau$  обозначен угол закручивания, приходящийся на единицу длины стержня.

Легко видеть, что дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X = 0;$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y = 0;$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z = 0$$

при взятом распределении напряжений будут удовлетворены только в том случае, если отсутствуют объемные силы<sup>1</sup> и, следовательно,  $X = Y = Z = 0$ . Что касается условий на поверхности

$$X_v = X_x \cos(xv) + X_y \cos(yv) + X_z \cos(zv);$$

$$Y_v = Y_x \cos(xv) + Y_y \cos(yv) + Y_z \cos(zv);$$

$$Z_v = Z_x \cos(xv) + Z_y \cos(yv) + Z_z \cos(zv),$$

то в данном случае они переписутся так:

$$X_v = X_z \cos(zv); \quad Y_v = Y_z \cos(zv); \quad Z_v = Z_x \cos(xv) + Z_y \cos(yv).$$

<sup>1</sup> Комбинируя взятые здесь напряжения с напряжениями (а), рассмотренными в предыдущем параграфе, легко найти напряжения при одновременном действии кручения и растяжения собственным весом.

На боковой поверхности цилиндра  $\cos(z\nu) = 0$ , следовательно,

$$X_\nu = Y_\nu = 0; \quad Z_\nu = \tau\mu[-y \cos(x\nu) + x \cos(y\nu)]. \quad (a)$$

В случае кругового сечения для всякой точки контура сечения будем иметь  $\frac{x}{y} = \frac{\cos(x\nu)}{\cos(y\nu)}$ , следовательно, усилия  $Z_\nu$  также обращаются в нуль. Боковая поверхность цилиндра при взятом нами распределении напряжений будет свободна от всяких усилий.

Если бы сечение стержня было не круглое, то для осуществления принятого распределения напряжений пришлось бы кроме усилий по концам приложить еще усилия  $Z_\nu$  по боковой поверхности стержня. Распределение этих усилий определится условием (a).

Для оснований цилиндра  $\cos(x\nu) = \cos(y\nu) = 0$ ;  $\cos(z\nu) = \pm 1$ , поэтому здесь  $X_\nu = X_z$ ;  $Y_\nu = Y_z$ , т. е. усилия по концам стержня должны быть распределены по тому же закону, что и для любого поперечного сечения.

Таким образом, принятое в элементарной теории распределение напряжений при кручении удовлетворяет дифференциальным уравнениям равновесия и условиям на поверхности. Что касается дифференциальных зависимостей (38) и (39), то они, очевидно, будут удовлетворены, так как напряжения представляются линейными функциями координат.

Перемещения точек стержня при кручении могут быть найдены таким же способом, как и в только что рассмотренном случае растяжения стержня под действием собственного веса. Перемещения эти представляются формулами

$$u = -\tau yz; \quad v = \tau xz; \quad w = 0.$$

### § 28. Чистый изгиб призматических стержней

Предположим, что стержень, ось которого совпадает с осью  $z$ , изгибается парами сил, приложенными по концам и действующими в одной из главных плоскостей стержня (рис. 9). Эту плоскость примем за плоскость  $xz$ , тогда составляющие напряжения, получаемые на основании гипотезы плоских сечений, будут следующие:

$$X_x = Y_y = X_y = X_z = Y_z = 0;$$

$$Z_z = -\frac{E_x}{R}. \quad (a)$$

Здесь  $\frac{1}{R}$  — кривизна изогнутой оси стержня (мы считаем ее положительной, когда стержень гнется выпуклостью вверх).

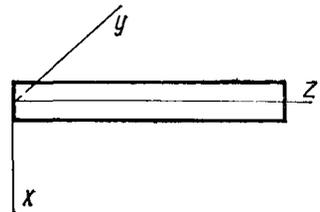


Рис. 9.

Покажем, что получаемое элементарным путем распределение напряжений (a) представляет точное решение задачи в том случае, если напряжения по концам стержня распределить так же, как они распределяются по любому поперечному сечению стержня. Легко видеть, что в данном случае, как и в предыдущем, дифференциальные уравнения будут удовлетворены, если нет объемных сил. Условия на поверхности приводятся к следующему:

$$Z_\nu = Z_z \cos(z\nu) = -\frac{E_x}{R} \cos(z\nu).$$

Для призматического бруска  $\cos(z\nu)$  на боковой поверхности равен нулю, следовательно, эта поверхность свободна от усилий и принятое распределение

напряжений возникает под действием усилий, распределенных по концам. Для концов стержня  $\cos(zv) = \pm 1$ . Следовательно, по конечным сечениям стержня действуют лишь нормальные напряжения, меняющиеся по линейному закону. Легко показать, что эти усилия приводятся к паре сил. Действительно,

$\int_F \frac{Ez}{R} dF = 0$ , так как ось  $z$  совпадает с осью стержня и, следовательно, проходит через центры тяжести поперечных сечений. Момент этой пары относительно оси  $y$  будет

$$M = \frac{E}{R} \int_F x^2 dF = \frac{EJ}{R},$$

где  $J$  — момент инерции поперечного сечения относительно оси  $y$ .

Рассмотрим теперь перемещения, возникающие при чистом изгибе стержня. Пользуясь выражениями (а) для напряжений, получаем следующие значения составляющих деформации:

$$e_{zz} = \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{x}{R}; \quad (b)$$

$$e_{xx} = e_{yy} = -\sigma e_{zz} = \frac{\sigma x}{R}; \quad (c)$$

$$e_{xy} = e_{xz} = e_{yz} = 0. \quad (d)$$

На основании (b) заключаем, что  $w = -\frac{xz}{R} + w_0$ , где  $w_0$  — функция только  $x$  и  $y$ .

Из уравнений (d) находим

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{R} - \frac{\partial w_0}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w_0}{\partial y},$$

откуда

$$u = \frac{z^2}{2R} - \frac{\partial w_0}{\partial x} z + u_0; \quad v = -\frac{\partial w_0}{\partial y} z + v_0.$$

Здесь  $u_0$  и  $v_0$  — неизвестные пока функции  $x$  и  $y$ .

На основании уравнений (c) получаем

$$-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z + \frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\sigma x}{R}; \quad -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z + \frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{\sigma x}{R},$$

и так как эти уравнения должны быть удовлетворены при всех значениях  $z$ , то, следовательно,

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0;$$

$$u_0 = \frac{\sigma x^2}{2R} + F_1(y); \quad v_0 = \frac{\sigma xy}{R} + F_2(x).$$

Воспользуемся первым из уравнений (d). Подставляя в него вместо  $u$  и  $v$  найденные выше выражения, получаем

$$2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z - \frac{\partial F_1(y)}{\partial y} - \frac{\sigma y}{R} - \frac{\partial F_2(x)}{\partial x} = 0,$$

откуда заключаем, что

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial F_1(y)}{\partial y} + \frac{\partial F_2(x)}{\partial x} + \frac{\sigma y}{R} = 0.$$

Все условия будут удовлетворены, если положим

$$F_1(y) = -\frac{\sigma y^2}{2R} + \alpha y + \gamma; \quad F_2(x) = -\alpha x + \beta;$$

$$w_0 = mx + ny + p.$$

В таком случае для перемещений получим следующие выражения:

$$u = \frac{z^2}{2R} + \frac{\sigma x^2}{2R} - \frac{\sigma y^2}{2R} + \alpha y - mx + \gamma;$$

$$v = \frac{\sigma xy}{R} - \alpha x - nz + \beta;$$

$$w = -\frac{xz}{R} + mx + ny + p.$$

Шесть произвольных постоянных, которые вошли в полученные выражения для перемещений, могут быть найдены из условий закрепления. Закрепим левый конец оси стержня, тогда в точке  $O$  ( $x = y = z = 0$ ) имеем  $u = v = w = 0$ ;  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ . Выражения для перемещений примут такой вид:

$$u = \frac{1}{2R} [z^2 + \sigma(x^2 - y^2)]; \quad v = \frac{\sigma xy}{R}; \quad w = -\frac{xz}{R}.$$

Если возьмем какое-либо поперечное сечение стержня  $z = \text{const}$ , то после изгиба точки этого сечения будут лежать в плоскости  $z = \text{const} \left(1 - \frac{x}{R}\right)$ . Сечения при деформации остаются плоскими.

Чтобы получить искривление оси стержня, положим в выражениях для перемещений  $x = y = 0$ . Тогда получим  $u = \frac{z^2}{2R}$ ;  $v = w = 0$ . Следовательно, кривую изгиба при малых прогибах можно принять за дугу круга.

Рассмотрим искажение поперечного сечения стержня. Для упрощения предположим, что сечение представляет собой прямоугольник (рис. 10), уравнения сторон которого имеют вид  $x = \pm a$ ;  $y = \pm b$ . Если через  $c$  обозначим расстояние взятого сечения от закрепленного конца стержня, то уравнения сторон сечения после деформации напишутся так:

$$x = \pm a + u = \pm a + \frac{c^2}{2R} + \frac{\sigma}{2R} (a^2 - y^2); \quad y = \pm b + v = \pm b \pm \frac{\sigma xb}{R}.$$

Вертикальные стороны прямоугольника останутся прямыми и только наклонятся к оси  $x$ , горизонтальные же стороны искривятся (см. рис. 10). Уравнения этих кривых имеют вид

$$x = -\frac{\sigma y^2}{2R} + \text{const}.$$

При малых деформациях можно считать, что верхнее и нижнее основания прямоугольника искривляются по дуге круга радиуса  $\frac{R}{\sigma}$ . Заметим, что такое искривление имеет место лишь в том случае, если перемещения малы по сравнению с поперечными размерами стержня.

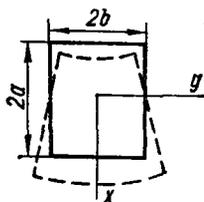


Рис. 10.

## § 29. Плоская деформация

Деформацию тела называют плоской, если перемещения всех его точек параллельны одной и той же плоскости (плоскости деформации) и зависят лишь от координат точки в этой плоскости.

Примем плоскость  $xu$  за плоскость деформации. Тогда перемещения  $u$  и  $v$  будут функциями  $x$  и  $y$ , а перемещение  $w$  равно нулю. Не усложняя дальнейших выводов, можно на плоскую деформацию наложить равномерное растяжение в направлении оси  $z$ . В таком случае перемещение  $w$  представится линейной функцией  $z$ .

Многие весьма важные технические задачи с большей или меньшей точностью могут быть приведены к случаю плоской деформации. Всякий раз, когда мы имеем дело с длинным цилиндрическим или призматическим телом, подвергающимся действию сил, не меняющихся в направлении длины тела и нормальных к этому направлению, можно считать, что в местах, удаленных от концов цилиндра, все элементы, на которые мы можем подразделить тело системой поперечных сечений, перпендикулярных к длине цилиндра, испытывают одну и ту же деформацию. Перемещение какой-либо точки определяется ее координатами в плоскости соответствующего поперечного сечения и не зависит от положения этого сечения по длине цилиндра. Заключение это, приводящее задачу к случаю плоской деформации, очевидно, будет тем точнее, чем дальше рассматриваемое сечение от концов цилиндра.

К такого рода задачам можно отнести, например, расчет цилиндрических трубок, подвергающихся действию равномерного внутреннего или наружного давления. Для всякого удаленного от концов трубки элементарного кольца, выделенного двумя плоскостями, перпендикулярными к оси трубки, деформации будут приблизительно одни и те же, и можно ограничиться рассмотрением одного элементарного кольца. То же можно сказать относительно деформации цилиндрического катка, сжатого между двумя плоскостями силами, равномерно распределенными по длине образующей цилиндра (рис. 11). Примерно в таких условиях находятся катки мостовых опор.

При расчете подпорной стенки (рис. 12), имеющей большую длину в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа, также можно ограничиться рассмотрением одного элемента, выделенного из стенки двумя сечениями, перпендикулярными к направлению длины стенки. Точно так же можно привести к плоской задаче расчет цилиндрического свода, если длина его в направлении образующей велика по сравнению с пролетом и нагрузка в направлении образующей не изменяется.

Выясним те упрощения, которые получаются в общей задаче теории упругости в случае плоской деформации. При сделанных предположениях относительно перемещений заключаем:

$$\left. \begin{aligned} e_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \\ e_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Если на плоскую деформацию наложить равномерное растяжение в направлении оси  $z$ , то для  $e_{zz}$  получим постоянную величину. Для составляющих напряжения на основании (a) заключаем, что  $X_z = Y_z = 0$ .

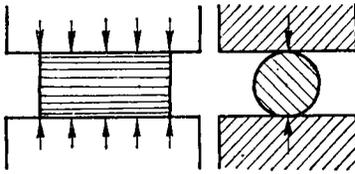


Рис. 11.

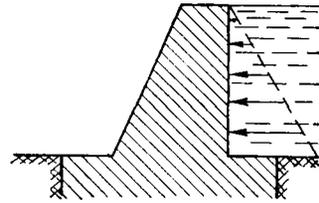


Рис. 12.

Следовательно, ось  $z$  будет одной из главных осей. Соответствующее ей главное напряжение  $Z_z$  не равно нулю и может быть выражено через составляющие  $X_x$  и  $Y_y$ . Действительно, на основании зависимостей (28) между напряжениями и деформациями имеем

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}; \\ Y_y &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}; \\ Z_z &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right); \\ X_y &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Складывая первое и второе уравнения, находим выражение для объемного расширения:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} (X_x + Y_y).$$

Следовательно,

$$Z_z = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (X_x + Y_y) = \sigma (X_x + Y_y).$$

Таким образом, задача теории упругости в случае плоской деформации сводится к разысканию трех составляющих:  $X_x$ ,  $Y_y$ ,  $X_y$ .

Дифференциальные уравнения равновесия (14) в случае плоской деформации получают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \rho X &= 0; \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \rho Y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Третье уравнение равновесия отпадает, так как по предположению составляющая  $Z$  объемных сил равна нулю, а составляющая напряжений  $Z_x$  зависит только от  $x$  и  $y$ .

На практике обыкновенно приходится иметь дело с силой тяжести, поэтому в дальнейшем ограничимся лишь этим случаем<sup>1</sup>, и, направляя ось  $y$  вертикально вниз, перепишем уравнения (52) в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \rho g &= 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Очевидно, эти уравнения будут удовлетворены, если положим<sup>2</sup>

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \\ Y_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ X_y &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - g\rho x. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Здесь  $\varphi$  — произвольная пока функция  $x$  и  $y$ .

Задаваясь различными выражениями для  $\varphi$ , будем получать на основании (54) значения напряжений, удовлетворяющие уравнениям (53). Чтобы из всех этих возможных с точки зрения статики распределений напряжений выбрать систему напряжений, возможную в упругом теле, нужно для функции  $\varphi$  подыскать такое выражение, при котором были бы удовлетворены дифференциальные зависимости (40). Подставляя в эти зависимости вместо составляющих напряжения их выражения через  $\varphi$  (54) и принимая во внимание, что  $\Theta = X_x + Y_y + Z_z = (1 + \sigma)(X_x + Y_y)$ , находим, что функция  $\varphi$  должна удовлетворять дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (55)$$

К такому же результату мы пришли бы, если бы вместо дифференциальных зависимостей (40) между составляющими напряжения взяли зависимости (23) и (24) между составляющими деформации. В случае плоской деформации нужно удовлетворить только уравнению

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y},$$

поскольку остальные уравнения тождественно удовлетворены. Подставляя вместо составляющих деформации их выражения через напряжения и пользуясь формулами (54), приходим к уравнению (55).

<sup>1</sup> Без всяких затруднений выводы могут быть обобщены и распространены на все случаи, когда объемные силы имеют потенциал. См. работу J. H. Michell, указанную в списке на стр. 50.

<sup>2</sup> Выражение составляющих напряжения через производные от одной и той же функции  $\varphi(x, y)$  было впервые введено Дж. Эри. Airy G. B. On the strains in the interior of beams. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1863/64, vol. 153, pt 1, pp. 49—80. Поэтому  $\varphi(x, y)$  иногда называют функцией Эри.

Таким образом, в случае плоской деформации задача теории упругости сводится к нахождению одной функции  $\varphi$ , которую условимся в дальнейшем называть *функцией напряжений*.

Эта функция должна быть выбрана таким образом, чтобы в каждой точке тела было удовлетворено уравнение (55) и, кроме того, были выполнены условия на поверхности тела. Если заданы действующие по поверхности силы, то условия эти представляются в таком виде:

$$\begin{aligned} X_\nu &= X_x \cos(x\nu) + X_y \cos(y\nu); \\ Y_\nu &= Y_x \cos(x\nu) + Y_y \cos(y\nu). \end{aligned} \quad (56)$$

Если на плоскую деформацию налагается равномерное растяжение в направлении оси  $z$ , причем  $e_{zz} = e$ , то выражения для составляющих напряжения  $X_x$ ,  $Y_y$ ,  $X_y$  не изменяются, а выражение для составляющей  $Z_z$  представляется в таком виде:

$$Z_z = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (X_x + Y_y) + \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} e = \sigma (X_x + Y_y) + Ee.$$

### § 30. Обобщенное плоское напряженное состояние

Выше были выяснены те упрощения, которые получаются в общей задаче теории упругости в случае, когда тело имеет форму весьма длинного цилиндра. Оказывается, что такие же упрощения при некоторых допущениях<sup>1</sup> могут быть получены и в другом крайнем случае, когда тело цилиндрической формы имеет весьма малую длину, т. е. представляет собой тонкую пластинку (диск), ограниченную заданным контуром.

Толщину пластинки, соответствующую весьма малой длине цилиндра, обозначим через  $2h$ . Плоскость  $xy$  расположим перпендикулярно к образующим цилиндра таким образом, чтобы она делила длину цилиндра (толщину пластинки) пополам, тогда основания цилиндра, соответствующие поверхностям пластинки, определяются уравнением  $z = \pm h$ . Расположенную таким образом плоскость  $xy$  будем называть *срединной плоскостью пластинки*.

Рассмотрим случай, когда объемные силы постоянны и нормальны к образующим цилиндра ( $Z = 0$ ), поверхности пластинки свободны от усилий  $Z_z = X_x = Y_y = 0$  при  $z = \pm h$  и поверхностные усилия, приложенные по контуру пластинки, действуют в срединной плоскости  $xy$ . При этих условиях срединная плоскость не искривляется, пластинка не претерпевает изгиба и при малой толщине  $2h$  составляющие напряжения  $X_x$ , ...,  $Y_z$ , наверное, весьма мало изменяются при изменении координаты  $z$ . В таком случае средние по толщине значения составляющих напряжения в достаточной степени характеризуют напряженное состояние и определение этих средних значений имеет большое практическое значение.

Сохраняя для средних значений составляющих напряжения прежние обозначения и отмечая их лишь чертой вверху, будем иметь

$$\bar{X}_x = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} X_x dz;$$

<sup>1</sup> Filon L. N. G. On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load, with special reference to points of concentrated or discontinuous loading. Philosophical Transaction of the Royal Society of London, Series A, 1903, vol. 201, N 334, pp. 65—154. См. p. 67.

$$\bar{Y}_y = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} Y_y dz;$$

$$\bar{X}_y = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} X_y dz.$$

Связь между этими средними значениями напряжений получим из дифференциальных уравнений равновесия

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X = 0;$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y = 0.$$

Умножая эти уравнения на  $dz$  и интегрируя их в пределах от  $-h$  до  $+h$ , получаем

$$\frac{\partial \bar{X}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{X}_y}{\partial y} + \rho \bar{X} = 0;$$

$$\frac{\partial \bar{Y}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Y}_y}{\partial y} + \rho \bar{Y} = 0.$$
(57)

В случае действия силы тяжести, имеющей направление оси  $y$ , уравнения эти примут вид

$$\frac{\partial \bar{X}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{X}_y}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial \bar{Y}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Y}_y}{\partial y} + \rho g = 0.$$
(58)

Уравнения, связывающие средние значения напряжений, полностью совпадают с уравнениями (52) и (53), полученными в случае плоской деформации. Средние значения составляющих напряжения можно выразить через производные функции напряжений  $\varphi$  при помощи формул (54). Легко показать, что и в этом случае функция  $\varphi$  должна удовлетворять уравнению (55), если предположить, что составляющая напряжения  $Z_z$ , обращающаяся в нуль на поверхностях  $z = \pm h$ , равна нулю по всей толщине пластинки. При малых толщинах пластинки такое допущение, очевидно, будет весьма близко к действительности, так как при сделанных предположениях относительно внешних сил не будет никаких причин, которые могли бы вызвать значительные напряжения  $Z_z$ .

Полагая  $Z_z = 0$ , получаем для средних значений составляющих деформации выражения

$$\bar{e}_{xx} = \frac{1}{E} (\bar{X}_x - \sigma \bar{Y}_y);$$

$$\bar{e}_{yy} = \frac{1}{E} (\bar{Y}_y - \sigma \bar{X}_x);$$

$$\bar{e}_{xy} = \frac{2(1 + \sigma)}{E} \bar{X}_y.$$

Выражая составляющие напряжений  $\bar{X}_x, \dots, \bar{X}_y$  при помощи формул (54) через  $\varphi$  и подставляя полученные таким образом средние значения составляю-

щих деформации в уравнение

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (\text{а})$$

приходим к уравнению (55).

Тот же результат мы, конечно, получили бы и в том случае, если бы вместо уравнения (а) взяли соответствующее ему уравнение

$$(1 + \sigma) \nabla^2 Z_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0,$$

связывающее составляющие напряжений [см. (40)], и подставили в него средние значения этих составляющих.

Принимая во внимание, что  $Z_z = 0$ , и показывая на основании (46), что

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} = - \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right),$$

приходим к уравнению (55).

Таким образом, определение напряжений в случае плоской деформации и в только что рассмотренном случае, который мы назовем *обобщенным плоским напряженным состоянием*, сводится к решению одного и того же дифференциального уравнения (55). Что же касается деформаций, то они в этих двух случаях будут различны. В самом деле, в случае обобщенного плоского напряженного состояния мы положили  $Z_z = 0$ , следовательно,

$$\lambda \theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Для объемного расширения получаем формулу

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Составляющие напряжений выразятся через перемещения при помощи формул

$$X_x = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x};$$

$$Y_y = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$X_y = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Сравнивая этот результат с формулами (b) § 29, заключаем, что перемещения в случае обобщенного плоского напряженного состояния могут быть получены по тем же формулам, что и в случае плоской деформации, нужно только коэффициент  $\lambda$  заменить величиной

$$\lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Вопросу об интегрировании уравнения (55), к которому сводится решение плоской задачи теории упругости, посвящен целый ряд работ<sup>1</sup>. Выяснено, что

<sup>1</sup> Соответствующая литература приведена в диссертации Timpe A. Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen, einfach gelöst mit Hilfe der Airy'schen Funktion. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1905, Bd 52, H. 4, SS. 348—383.

уравнение это вполне определяет функцию  $\varphi$ , если на контуре заданы значения  $\varphi$  и ее производной по нормали  $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ . В задачах теории упругости обыкновенно задаются силы, приложенные по контуру, а в таком случае граничные значения  $\bar{\varphi}$  и  $\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\nu}$  могут быть найдены из условий на поверхности

$$\begin{aligned} X_\nu &= X_x \cos(x\nu) + X_y \cos(y\nu); \\ Y_\nu &= Y_x \cos(x\nu) + Y_y \cos(y\nu). \end{aligned} \quad (b)$$

Подставляя вместо составляющих напряжения их выражения через  $\varphi$  и принимая во внимание, что при принятом расположении координат (рис. 13) и указанном стрелкой направлении отсчета дуги  $s$

$$\cos(x\nu) = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \cos(y\nu) = -\frac{\partial x}{\partial s},$$

при отсутствии объемных сил из условий (b) получаем

$$X_\nu = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right);$$

$$Y_\nu = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\int_0^s Y_\nu ds + \alpha; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \int_0^s X_\nu ds + \beta, \quad (c)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные постоянные.

Значение производной по нормали  $\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\nu}$  на контуре пластинки получим из формулы

$$\begin{aligned} \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\nu} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial\nu} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial\nu} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cos(x\nu) + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cos(y\nu) = \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial s}. \end{aligned}$$

Для этого нужно вместо  $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$  и  $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$  подставить найденные выше выражения (c). Значение функции  $\bar{\varphi}$  на контуре на основании выражений (c) представится в таком виде:

$$\bar{\varphi} = \int_0^s \left[ -\frac{\partial x}{\partial s} \int_0^s Y_\nu ds + \frac{\partial y}{\partial s} \int_0^s X_\nu ds \right] ds + \alpha x + \beta y + \gamma. \quad (d)$$

В это выражение входят постоянные  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ .

В случае простого (односвязного) контура можно, не нарушая общности результата, положить эти постоянные равными нулю, так как прибавление к функции напряжений линейной функции  $x$  и  $y$  не оказывает никакого влияния на величину напряжений, выражающихся через вторые производные от  $\varphi$ . При сложных (многосвязных) контурах, например в случае плоского кольца, постоянные  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  на каждом контуре имеют свое значение, и их приходится

определять из условий однозначности перемещений<sup>1</sup>. В первом случае распределение напряжений вполне определяется уравнением (55) и усилиями, приложенными по контуру. Выражения для составляющих напряжения не будут заключать в себе упругих постоянных и распределение напряжений не будет зависеть (в случае изотропного тела) от упругих свойств материала. Во втором случае приходится принимать во внимание выражения для перемещений, и напряжения представляются формулами, содержащими упругие постоянные материала<sup>2</sup>. Распределение напряжений будет изменяться в зависимости от упругих свойств материала.

### § 31. Решение плоской задачи при помощи целых полиномов

Определение напряжений в случае плоской задачи сводится, как было показано, к нахождению решений уравнения

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0, \quad (a)$$

удовлетворяющих заданным условиям на поверхности. Если контур пластинки представляет собой вытянутый прямоугольник и усилия, распределенные по длинным сторонам этого прямоугольника, могут быть представлены целыми алгебраическими функциями координат, то выгодно брать решения уравнения (a) в виде целых полиномов<sup>3</sup>. Так как напряжения выражаются вторыми производными от  $\varphi$ , то выбирая решение уравнения (a) в виде полинома второй степени, приходим к однородному напряженному состоянию. В случае полинома третьей степени напряжения представляются линейными функциями координат и т. д.

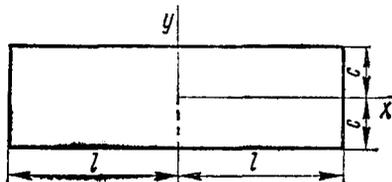


Рис. 14.

Рассмотрим подробнее несколько простейших решений, которыми воспользуемся в дальнейшем при определении напряжений в изгибаемых балках.

Направим ось  $x$  параллельно длинным сторонам прямоугольника (рис. 14).

Если для функции напряжений взять выражение

$$\varphi = \frac{a_0}{2} x^2 + b_0 xy + \frac{c_0}{2} y^2,$$

то составляющие напряжения будут<sup>4</sup>:

$$X_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = c_0; \quad Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a_0; \quad X_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -b_0 \quad (b)$$

<sup>1</sup> См. работу J. H. Michell, упомянутую на стр. 50.

<sup>2</sup> В упомянутой на стр. 50 работе J. H. Michell показал, что и в случае многосвязных контуров распределение напряжений не зависит от упругих свойств материала, если только внешние силы, приложенные к каждому отдельному контуру, представляют систему сил, взаимно уравновешивающихся, или систему, приводящуюся к паре сил.

<sup>3</sup> Chree C. On aeolotropic elastic solids. Proceedings of the Royal Society of London, 1888, vol. 44, N 268, pp. 214—218; Chree C. A new solution of the equations of an isotropic elastic solid, and its application to the theory of beams. The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, 1887, vol. 22, pp. 89—118; Mesnager A. Sur l'application de la théorie de l'élasticité en calcul des pièces rectangulaires flechies. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 1901, t. 132, N 24, pp. 1475—1478; см. стр. 145 статья L. N. G., Filon, упомянутой на стр. 73, а также статью A. Timpe, указанную на стр. 75.

<sup>4</sup> Объемные силы полагаем равными нулю.

Так как коэффициенты  $a_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$  совершенно произвольны, то их можно подобрать так, чтобы получить простое растяжение или сжатие в направлении оси  $x$  или оси  $y$ , а также чистый сдвиг в плоскости  $xy$  и различные комбинации этих простейших деформаций.

Возьмем функцию напряжений в виде полинома третьей степени:

$$\varphi = \frac{a_1}{3.2.1} x^3 + \frac{b_1}{2.1} x^2 y + \frac{c_1}{2.1} x y^2 + \frac{d_1}{3.2.1} y^3. \quad (c)$$

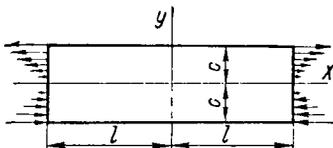


Рис. 15.

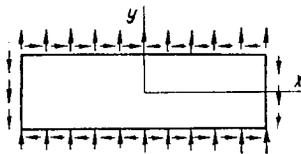


Рис. 16.

Составляющие напряжения представляются формулами

$$X_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = c_1 x + d_1 y; \quad Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a_1 x + b_1 y;$$

$$X_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -b_1 x - c_1 y.$$

Если все коэффициенты, кроме  $d_1$ , в выражении (с) положим равными нулю, то получим случай чистого изгиба полосы (рис. 15) силами, распределенными по сторонам  $x = \pm l$ . Точно так же коэффициенту  $a_1$  соответствует чистый изгиб усилиями, распределенными по сторонам  $y = \pm c$ .

Если коэффициент  $b_1$  или  $c_1$  отличен от нуля, то кроме нормальных будем иметь также и касательные напряжения. На рис. 16 представлено распределение усилий по контуру пластинки в случае, когда  $b_1$  отлично от нуля.

Когда мы выбирали функцию напряжений в виде полиномов второй или третьей степени, коэффициенты в этих полиномах могли быть совершенно произвольными, так как при всяких значениях коэффициентов уравнение (а) будет удовлетворено. В случае полиномов высших степеней уравнение (а) будет удовлетворено лишь при определенных соотношениях между коэффициентами. Возьмем, например, для функции напряжений выражение в виде полинома четвертой степени

$$\varphi = \frac{a_2}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_2}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_2}{2 \cdot 1} x^2 y^2 + \frac{d_2}{3 \cdot 2} x y^3 + \frac{e_2}{4 \cdot 3} y^4.$$

Подставляя это выражение в уравнение (а), находим, что оно будет удовлетворено лишь в том случае, если  $e_2 = -(2c_2 + a_2)$ .

Для составляющих напряжения найдем выражения

$$X_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = c_2 x^2 + d_2 x y - (2c_2 + a_2) y^2;$$

$$Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a_2 x^2 + b_2 x y + c_2 y^2;$$

$$X_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{b_2}{2} x^2 - 2c_2 x y - \frac{d_2}{2} y^2.$$

Коэффициенты  $a_2, \dots, d_2$  в этих выражениях совершенно произвольны. Если все их, кроме  $d_2$ , положить равными нулю, то получим

$$X_x = d_2 x y; \quad Y_y = 0; \quad X_y = -\frac{d_2}{2} y^2. \quad (d)$$

Соответствующее распределение усилий представлено на рис. 17.

Возьмем теперь функцию напряжений в виде полинома пятой степени:

$$\varphi = \frac{a_3}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{b_3}{4 \cdot 3} x^4 y + \frac{c_3}{3 \cdot 2} x^3 y^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2} x^2 y^3 + \frac{e_3}{4 \cdot 3} x y^4 + \frac{f_3}{5 \cdot 4} y^5.$$

Вставляя это выражение в уравнение (а), найдем между коэффициентами такие зависимости:

$$e_3 = -(2c_3 + 3a_3); \quad f_3 = -\frac{1}{3}(b_3 + 2d_3).$$

Составляющие напряжения представляются так:

$$X_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{c_3}{3} x^3 + d_3 x^2 y - (2c_3 + 3a_3) x y^2 - \frac{1}{3} (b_3 + 2d_3) y^3;$$

$$Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a_3 x^3 + b_3 x^2 y + c_3 x y^2 + \frac{d_3}{3} y^3;$$

$$X_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{b_3}{3} x^3 - c_3 x^2 y - d_3 x y^2 + \frac{1}{3} (2c_3 + 3a_3) y^3.$$

В этих выражениях мы можем коэффициенты  $a_3, \dots, d_3$  выбирать совершенно произвольно. В дальнейшем нам понадобится случай, когда все эти коэффициенты, кроме  $d_3$ , равны нулю. При этом условии составляющие напряжения представляются формулами

$$X_x = d_3 x^2 y - \frac{2}{3} d_3 y^3; \quad Y_y = \frac{d_3}{3} y^3; \quad X_y = -d_3 x y^2. \quad (e)$$

Мы получаем, таким образом, распределение напряжений для прямоугольной полосы, по продольным сторонам которой приложены равномерно распределенные нормальные напряжения  $Y_y = \pm \frac{d_3}{3} c^3$  и касательные напряжения  $X_y = -d_3 c^2 x$ , представляющиеся, как и в ранее рассмотренном решении (с), линейной функцией от  $x$  (см. рис. 16).

Ограничимся пока этими простейшими решениями и применим их к исследованию изгиба балки силой, приложенной на конце, и нагрузкой, равномерно распределенной по длине.

### § 32. Изгиб балки с заделанным концом силой, приложенной к свободному концу

Предположим, что балка, представленная на рис. 18, изгибается силой  $Q$ . Размер балки в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка (ширина балки), может быть или очень большим, тогда будем иметь дело с плоской деформацией, или наоборот, весьма малым, когда напряжения можно заменить их средними значениями по ширине и привести таким образом определение напряжений к решению обобщенной плоской задачи. Как в первом, так и во втором случае ширина балки не будет играть никакой роли и мы в дальнейшем будем полагать эту ширину равной единице. В таком случае  $Q$  будет представлять изгибающую силу, отнесенную к единице ширины балки.

Для определения напряжений в рассматриваемом случае воспользуемся решением (d) предыдущего параграфа (см. рис. 17). Чтобы освободиться от

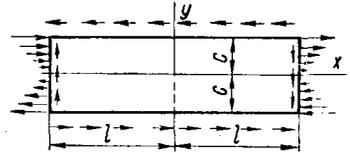


Рис. 17.

касательных напряжений по верхней и нижней граням балки, наложим на решение (d) напряжения  $X_y = -b_0$ , соответствующие чистому сдвигу, и подберем значение коэффициента  $b_0$  так, чтобы было удовлетворено условие

$$-\frac{d_2}{2} c^2 - b_0 = 0. \quad (a)$$

Нам нужно теперь освободиться от нормальных напряжений на конце балки  $x = +l$ , так как предполагается, что изгиб балки производится касательной силой  $Q$ . Достигнуть этого мы можем, присоединяя к решению (d) чистый изгиб  $X_x = d_1 y$  (см. рис. 15) и подбирая неопределенный пока коэффициент  $d_1$  так, чтобы было выполнено условие

$$d_2 l y + d_1 y = 0. \quad (b)$$

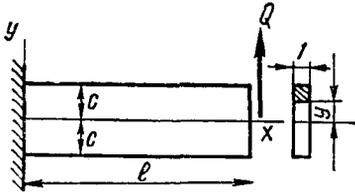


Рис. 18.

Окончательно на основании решения (d) и условий (a) и (b) получаем для нашей задачи такое распределение напряжений:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -d_2(l-x)y; \\ Y_y &= 0; \\ X_y &= \frac{d_2}{2}(c^2 - y^2). \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Легко видеть, что при этом верхняя и нижняя грани балки будут свободны от всяких усилий. На конце балки  $x = +l$  действуют лишь касательные напряжения, которые могут быть приведены к одной поперечной силе. Остается подобрать неопределенный пока коэффициент  $d_2$  так, чтобы эта сила была равна заданной силе  $Q$ . Суммируя касательные напряжения по концевому сечению балки, получаем

$$Q = \int_{-c}^{+c} \frac{d_2}{2} (c^2 - y^2) dy = \frac{2}{3} d_2 c^3,$$

откуда

$$d_2 = \frac{3Q}{2c^3} = \frac{Q}{J},$$

где  $J = \frac{2c^3}{3}$  обозначает момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной линии.

Вставляя найденное значение  $d_2$  в решение (59), получаем

$$X_x = -\frac{Q(l-x)y}{J}; \quad Y_y = 0; \quad X_y = \frac{Q}{J} \frac{(c^2 - y^2)}{2} = \frac{QS}{J}.$$

Здесь через  $S$  обозначен статический момент относительно нейтральной линии части поперечного сечения, заштрихованной на рис. 18.

Полученное распределение напряжений совершенно совпадает с тем, которое дает элементарная теория изгиба. Следовательно, для балок, поперечное сечение которых представляет вытянутый прямоугольник, для распределения напряжений по высоте поперечного сечения балки можно принять линейный закон для нормальных напряжений и параболический закон для касательных напряжений.

Выяснив вопрос о распределении напряжений, перейдем к разысканию перемещений точек балки при изгибе. Мы видели, что перемещения будут полу-

чатся различными в зависимости от того, имеем ли мы дело со случаем плоской деформации или с обобщенной плоской задачей. Предположим в дальнейшем этот последний случай и определим прогиб балки, имеющей весьма малую ширину. При этом условии напряжение  $Z_z$  равно нулю, и для составляющих деформации мы получим такие значения:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{X_x}{E} = -\frac{Q(l-x)y}{EJ}; \quad (c)$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\sigma X_x}{E} = \frac{\sigma Q(l-x)y}{EJ}; \quad (d)$$

$$e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{X_y}{\mu} = \frac{Q}{2J} \frac{c^2 - y^2}{\mu}. \quad (e)$$

Путем интегрирования уравнений (c) и (d) находим для перемещений такие общие выражения:

$$u = -\frac{Qy}{EJ} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + f(y);$$

$$v = \frac{\sigma Qy^2}{2EJ} (l-x) + \psi(x).$$

Здесь через  $f(y)$  и  $\psi(x)$  обозначены неопределенные пока функции  $y$  и  $x$ . Вставляя найденные выражения для перемещений в уравнение (e), получаем:

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} = \frac{Q}{EJ} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + d;$$

$$\frac{\partial f(y)}{\partial y} = \frac{\sigma Qy^2}{2EJ} - \frac{Qy^2}{2\mu J} + e.$$

Здесь  $d$  и  $e$  — постоянные величины, связанные условием

$$d + e = \frac{Qc^2}{2\mu J}.$$

Функции  $\psi(x)$  и  $f(y)$  представляются в таком виде:

$$\psi = \frac{Q}{EJ} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + dx + h;$$

$$f = \frac{\sigma Qy^3}{6EJ} - \frac{Qy^3}{6\mu J} + ey + g,$$

где  $h$  и  $g$  — произвольные постоянные величины. Для перемещений  $u$  и  $v$  получим следующие формулы:

$$u = -\frac{Q}{EJ} y \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{\sigma Q}{6EJ} y^3 - \frac{Q}{6\mu J} y^3 + ey + g;$$

$$v = \frac{\sigma Q}{2EJ} y^2 (l-x) + \frac{Q}{EJ} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + dx + h.$$

Произвольные постоянные в этих выражениях должны быть определены из условий закрепления балки.

Закрепим точку балки, соответствующую началу координат. Тогда произвольные постоянные  $g$  и  $h$  равны нулю. Полагая  $y$  равным нулю, для прогибов оси балки находим выражение

$$(v)_{y=0} = \frac{Q}{EJ} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + dx. \quad (f)$$

Кривизна изогнутой оси будет

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{Q(l-x)}{EJ} = \frac{M}{EJ},$$

что совершенно совпадает с результатом элементарной теории изгиба, построенной на гипотезе плоских сечений. Последний член в выражении для прогиба (f) определяет влияние касательных напряжений на прогиб балки. Значение

произвольной постоянной  $d$  определится из третьего условия закрепления. Чтобы устранить возможность вращения балки как твердого тела относительно оси  $z$ , мы кроме точки должны закрепить еще какой-либо линейный элемент балки (§ 10).

Рассмотрим два случая: случай закрепления элемента балки, проходящего через начало координат и совпадающего с направлением оси  $x$ , и случай закрепления элемента, проходящего через начало координат и направленного по оси  $y$ .

В первом случае будем иметь условие

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=0, y=0} = 0.$$

Произвольная постоянная  $d$  равна нулю. Искривленное поперечное сечение, соответствующее закрепленному концу балки, займет положение, представленное на рис. 19, а, и прогиб балки на свободном конце представится формулой

$$(v)_{x=l} = \frac{Ql^3}{3EJ}.$$

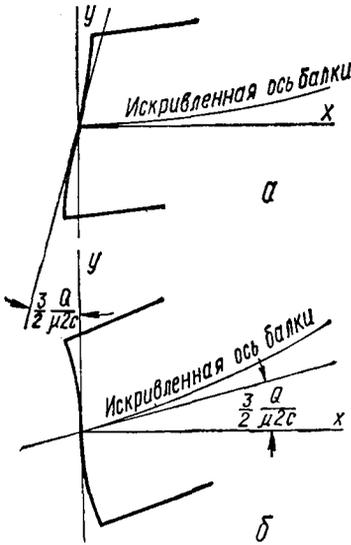


Рис. 19.

Во втором случае третье условие закрепления будет

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=0, y=0} = 0.$$

Расположение закрепленного конца балки после деформаций представлено на рис. 19, б. Для произвольной постоянной  $d$  получим значение  $d = \frac{3}{2} \frac{Q}{\mu 2c}$ , что соответствует сдвигу по нейтральному слою изгибаемой балки. Прогиб на свободном конце балки в этом случае будет

$$(v)_{x=l, y=0} = \frac{Ql^3}{3EJ} + \frac{3}{2} \frac{Ql}{\mu 2c}.$$

Этот результат совпадает с тем, что дает элементарная теория изгиба, если при вычислении прогибов принято во внимание влияние касательных напряжений и взято при этих подсчетах максимальное значение сдвига, соответствующее нейтральному слою изгибаемой балки.

На практике приходится иметь дело со способами закрепления, отличающимися от только что рассмотренных случаев, представленных на рис. 19. Обык-

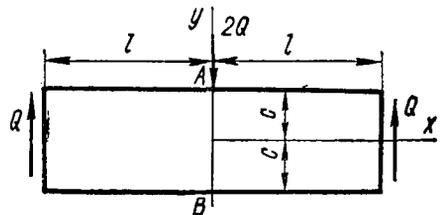


Рис. 20.

новенно закрепляют несколько точек поперечного сечения, при этом, конечно, распределение напряжений и деформаций у закрепленного конца может значительно отличаться от того, что мы получили в рассмотренных выше случаях.

В частном случае, когда балка изгибается силой  $2Q$ , приложенной посередине пролета (рис. 20), сечение  $AB$  вследствие симметрии остается плоским. Распределение напряжений отличается от того, что мы получили выше, так как к напряжениям изгиба у места приложения силы  $2Q$  присоединяются местные напряжения от сосредоточенной силы. Вычисления показывают<sup>1</sup>, что в этом случае при малой высоте балки прогиб посередине пролета может быть вычислен по формуле

$$(v)_{x=0, y=0} = \frac{Ql^3}{3EJ} + 0,74 \frac{3}{2} \frac{Ql}{\mu 2\sigma}.$$

### § 33. Принцип Сен-Венана

Мы получили ряд решений плоской задачи для случая пластинки, ограниченной прямоугольным контуром. Каждому найденному решению соответствуют вполне определенные условия закрепления и вполне определенное распределение усилий по контуру. Например, в случае изгиба балки силой, приложенной на конце, мы предполагали закрепление одной точки и одного линейного элемента, проходящего через эту точку на левом конце балки, и нашли распределение напряжений в том предположении, что касательные усилия, приложенные к правому концу балки, изменяются по высоте балки по параболическому закону. Если способ закрепления балки будет отличаться от принятого нами или изгибающая сила  $Q$  будет распределена по какому-либо иному закону, то полученное нами решение не будет точным решением соответствующей задачи теории упругости. Однако во многих технически важных задачах им можно будет пользоваться для приближенного определения напряжений. Например, его можно применить к тому случаю, когда все точки опорного сечения балки закреплены и сила  $Q$  распределена любым образом по плоскости нагруженного концевого сечения балки. При этом погрешности будут тем меньше, чем меньше высота балки по сравнению с ее пролетом.

Такое применение точного решения задачи, полученного при определенных условиях на контуре для приблизительной оценки напряжений при нескольких измененных условиях, производится на основании принципа, впервые ясно сформулированного Сен-Венаном. Согласно этому принципу система взаимно уравновешивающих сил, распределенных на малой части поверхности деформируемого тела, вызывает напряжения, быстро убывающие по мере удаления от места приложения сил. В точках, удаленных от места приложения указанной выше системы сил на большие расстояния (подразумеваются расстояния, большие по сравнению с линейными размерами той части поверхности, по которой распределены силы), соответствующие напряжения можно считать малыми.

В применении к изгибу балки с одним заделанным концом принцип Сен-Венана дает возможность заключить, что изменение распределения изгибающей силы  $Q$  или изменения в условиях закрепления могут вызвать значительные изменения в распределении напряжений лишь у концов балки. Эти изменения будут иметь характер *местных* напряжений, быстро убывающих по мере удаления от концов балки. Для балки, у которой высота мала по сравнению

<sup>1</sup> См. стр. 84, статья L. N. G. Filon, указанной в списке на стр. 73.

с пролетом, распределение напряжений в большей части пролета будет мало зависеть от способа приложения изгибающей силы  $Q$  и способа закрепления конца.

В дальнейшем на нескольких частных примерах мы сможем подтвердить верность высказанного выше принципа и показать, насколько быстро убывают напряжения по мере удаления от места приложения системы взаимно уравновешивающих сил.

### § 34. Изгиб балки с опертными концами под действием равномерно распределенной нагрузки

Балка  $AB$  (рис. 21) прямоугольного поперечного сечения изгибается сплошной вертикальной нагрузкой, равномерно распределенной по верхней грани ( $y = +c$ ). Обозначим через  $2l$  пролет балки и через  $2c$  ее высоту. Ширину балки будем считать равной единице. Пусть  $q$  — нагрузка, приходящаяся на единицу длины балки. Тогда касательные усилия, действующие по концам балки, должны в сумме давать реакции, равные  $ql$ . Наша задача сводится к разысканию такого решения уравнения

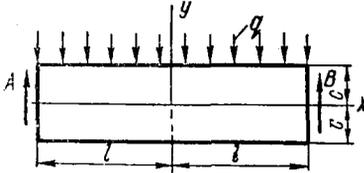


Рис. 21.

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0,$$

при котором будут выполнены следующие условия на продольных сторонах полосы:

$$(Y_y)_{y=c} = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{y=c} = -q; \quad (Y_y)_{y=-c} = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{y=-c} = 0; \quad (a)$$

$$(X_y)_{y=\pm c} = \left( -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_{y=\pm c} = 0. \quad (b)$$

Что касается усилий на поперечных сторонах ( $x = \pm l$ ), то они должны на каждом конце балки давать вертикальную силу, равную  $ql$ . Следовательно, при  $x = \pm l$  имеем

$$\int_{-c}^{+c} X_x dy = 0; \quad \int_{-c}^{+c} X_x y dy = 0; \quad \int_{-c}^{+c} X_y dy = \pm ql. \quad (c)$$

Воспользуемся решениями плоской задачи при помощи целых полиномов (§ 31). Возьмем решение (e) (стр. 79) и, чтобы освободиться от касательных напряжений по сторонам  $y = \pm c$  и от нормальных напряжений по стороне  $y = -c$ , наложим на это решение напряжения  $Y_y = b_1 y$ ,  $X_y = -b_1 x$ ,  $Y_x = a_0$ , соответствующие функциям напряжений

$$\varphi_1 = \frac{b_1}{2} x^2 y, \quad \varphi_2 = \frac{a_0 x^2}{2}.$$

Общие выражения для напряжений напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\frac{2}{3} d_3 y^3 + d_3 x^2 y; \\ Y_y &= \frac{d_3}{3} y^3 + b_1 y + a_0; \\ X_y &= -d_3 x y^2 - b_1 x. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Чтобы касательные напряжения по верхней и нижней граням балки обращались в нуль, необходимо положить  $b_1 = -d_3 c^2$ .

Условие равенства нулю нормальных напряжений по нижней грани балки дает уравнение  $-\frac{d_3}{3} c^3 - b_1 c + a_0 = 0$ , откуда

$$a_0 = -\frac{2}{3} d_3 c^3.$$

Для определения постоянной  $d_3$  воспользуемся условием для нормальных напряжений по верхней грани балки. Чтобы напряжения  $Y_y$  равнялись  $-q$  при  $y = +c$ , необходимо положить

$$d_3 = \frac{3q}{4c^3}.$$

Вставляя найденные значения постоянных в общие выражения для напряжений (d), получаем

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{3q}{4c^3} \left( x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right); \\ Y_y &= \frac{3q}{4c^3} \left( \frac{1}{3} y^3 - c^2 y - \frac{2}{3} c^3 \right); \\ X_y &= \frac{3q}{4c^3} (c^2 - y^2) x. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Легко проверить, что найденное распределение напряжений удовлетворяет всем условиям на продольных сторонах полосы, а также первому и третьему из условий (с) на поперечных сторонах  $x = \pm l$ .

Чтобы удовлетворить второму из условий (с) и получить такое распределение напряжений, при котором моменты нормальных усилий, распределенных по концам балки, равны нулю, нужно к найденным решениям (e) присоединить напряжения

$$X_x = -\frac{3}{4} \frac{q}{c^3} \left( l^2 - \frac{2}{5} c^2 \right) y,$$

соответствующие чистому изгибу балки.

Окончательно будем иметь

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\frac{3q}{4c^3} (l^2 - x^2) y + \frac{3}{4} \frac{q}{c^3} \left( \frac{2}{5} c^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right); \\ Y_y &= \frac{3q}{4c^3} \left( \frac{1}{3} y^3 - c^2 y - \frac{2}{3} c^3 \right); \\ X_y &= \frac{3q}{4c^3} (c^2 - y^2) x. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Принимая во внимание, что  $qx$  есть перерезывающая сила в сечении балки, отстоящем на  $x$  от середины пролета, заключаем, что найденное выше распределение касательных напряжений совпадает с тем распределением, которое дает элементарная теория изгиба. Что касается нормальных напряжений  $X_x$ , то в случае низких балок ( $c$  мало по сравнению с  $l$ ) для сечений, удаленных от концов, напряжения эти мало отличаются от тех, которые нам дает элементарная теория изгиба. У концов балки преобладающее значение приобретает второй член в выражении для  $X_x$  и распределение нормальных напряжений будет значительно отклоняться от линейного закона. Заметим, что распределение напряжений, полученное нами у концов балки, соответствует определенному

распределению внешних сил по концевым поперечным сечениям балки. Заменяя эту систему сил другой системой, эквивалентной ей, мы получим иное распределение напряжений у концов, но в местах, удаленных от концов, такая замена, согласно принципу Сен-Венана, не вызовет значительных изменений в напряжениях.

Что касается напряжений  $Y_y$ , то их обыкновенно пропускают в элементарной теории изгиба, хотя в случае малой ширины балки эти напряжения могут иметь существенное значение <sup>1</sup>.

Уравнение изогнутой оси балки может быть получено таким же путем, как это мы сделали в случае изгиба балки силой, приложенной на конце. Оказывается <sup>2</sup>, что выражение для кривизны получается в этом случае несколько отличным от того, которое дает элементарная теория. Этого, конечно, и нужно было ожидать, так как при элементарном выводе пропускается влияние напряжений  $Y_y$ .

### § 35. Общее решение плоской задачи для полосы, любым образом нагруженной по продольным сторонам

На нескольких примерах было показано, как, выбирая решения плоской задачи в виде целых полиномов, можно получать распределение напряжений для изгибаемой полосы. Функция напряжений в виде полинома третьей степени дала нам распределение напряжений в случае чистого изгиба полосы. Полином четвертой степени послужил для решения задачи об изгибе полосы силой, приложенной на конце. Из полинома пятой степени получено решение для полосы, несущей равномерно распределенную нагрузку.

Повышая степень полинома, мы будем получать все новые решения. Так, например, полином шестой степени дает возможность найти распределение напряжений для случая нагрузки, распределенной по закону треугольника.

Легко проверить, что напряжения

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\gamma_1 y \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \left(1 + 2 \frac{x}{a}\right); \\ Y_y &= -\gamma y - \frac{\gamma_1 y^3}{a^2} \left(\frac{2x}{a} - 1\right) + \gamma_1 y \left(\frac{4x^3}{a^3} - 6 \frac{x^2}{a^2} + \frac{12}{5} \frac{x}{a} - \frac{1}{5}\right); \\ X_y &= -\frac{\gamma_1 x}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left[\frac{3y^2}{a} - \frac{a}{5} + x \left(1 - \frac{x}{a}\right)\right] \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

представляют собой решение задачи <sup>3</sup>, представленной на рис. 22.

Здесь  $\gamma$  — вес единицы объема материала пластинки;  $\gamma_1 y$  — давление, приходящееся на единицу поверхности по грани  $x = 0$ .

<sup>1</sup> М и т и н с к и й Н. О расчете напряжений и проверке прочности двутавровых балок (с таблицей чертежей). Изв. Собрания инженеров путей сообщения. С.-Петербург, тип. Ю. Н. Эрлих, 1905, год 22, № 8, стр. 182—188; № 11, стр. 246—254. Отд. оттиск: Собрание инженеров путей сообщения, С.-Петербург, 1905, 50 стр. [Перепечатка: М и т и н с к и й Н. Н. Собрание избранных сочинений по строительной механике. (Посмертное издание). С.-Петербург, тип. Ю. Н. Эрлих, 1913, стр. 1—50].

<sup>2</sup> См. стр. 362 статьи А. Timpe, указанной на стр. 75.

<sup>3</sup> Это решение принадлежит Морису Леви. L é v y M. Sur la legitimité de la règle dite du trapeze dans l'étude de la resistance des barrages en maçonnerie. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 1898, t. 126, N 18, pp. 1235—1240.

Полагая  $x = 0$ , находим  $X_x = -\gamma_1 y$ ;  $X_y = 0$ . При  $x = a$  будем иметь  $X_x = X_y = 0$ . Для верхней грани пластинки ( $y = 0$ ) получим

$$Y_y = 0; \quad X_y = -\frac{\gamma_1 x}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left[-\frac{a}{5} + x \left(1 - \frac{x}{a}\right)\right].$$

Хотя касательные напряжения по верхней грани и не обращаются в нуль, величина их незначительна  $\left[ +\frac{a\gamma_1}{80} > (X_y)_{y=0} > -\frac{a\gamma_1}{60} \right]$  и равнодействующая равна нулю. Поэтому приведенным решением можно пользоваться для определения напряжений в случае, представленном на рис. 22.

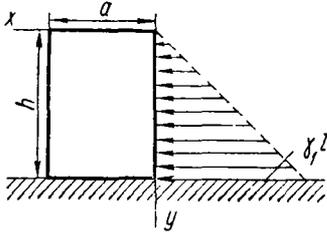


Рис. 22.

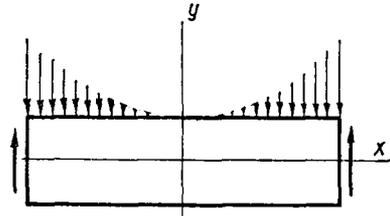


Рис. 23.

Полином седьмой степени дает решение задачи для случая, представленного на рис. 23. При этом сплошная нагрузка изменяется по параболическому закону.

Во всех тех случаях, когда закон изменения интенсивности сплошной нагрузки, распределенной по продольным сторонам полосы, представлен целой алгебраической функцией, мы можем воспользоваться решениями плоской задачи в виде целых полиномов<sup>1</sup>.

Что касается условий на концевых поперечных сечениях полосы, то наложением равномерного растяжения или сжатия вдоль оси  $x$  и чистого изгиба в плоскости  $xy$  мы всегда сможем привести усилия, распределенные по концам, к системе сил, эквивалентной соответствующим опорным реакциям балки. При таком способе решения задачи мы удовлетворяем полностью всем условиям на продольных сторонах полосы.

Закон распределения усилий по концевым сечениям в этом случае может отличаться от того, который имеет место в действительности, но при невысоких балках изменение распределения усилий по концам влечет за собой значительное изменение напряжений лишь у концов балки. В местах, удаленных от концов, полученное решение будет давать достаточно точные значения напряжений при различных способах приложения опорных реакций.

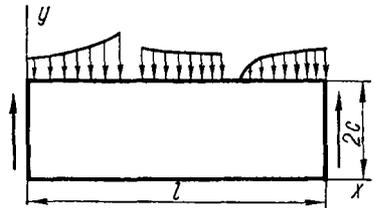


Рис. 24.

Если нагрузка, действующая на балку, такова, что закон ее распределения не может быть представлен целой алгебраической функцией (рис. 24), то для получения решения соответствующей плоской задачи можно разложить функцию, представляющую изменение интенсивности сплошной нагрузки вдоль балки, в тригонометрический ряд и вычислить напряжения, соответствующие первым членам этого ряда. Чтобы выяснить напряжения, соответствующие одному какому-либо члену тригонометрического ряда, рассмотрим

<sup>1</sup> Несколько решений дано в упомянутой на стр. 75 работе А. Тимре. См. также указанную на стр. 86. статью М. Лёву.

предварительно функцию напряжений вида

$$\varphi = a \sin \frac{m\pi x}{l} f(y), \quad (b)$$

где  $f(y)$  представляет собой неопределенную пока функцию от одного  $y$ .

Вставляя взятую функцию напряжений в основное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0,$$

находим, что функция  $f(y)$  должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению  $f^{IV}(y) - 2\alpha^2 f''(y) + \alpha^4 f(y) = 0$ , где  $\alpha = \frac{m\pi}{l}$ .

Общий интеграл этого уравнения напишется так:

$$f(y) = a_1 e^{\alpha y} + a_2 e^{-\alpha y} + a_3 y e^{\alpha y} + a_4 y e^{-\alpha y};$$

выбранная нами функция напряжений представится в следующем виде:

$$\varphi = a \sin \frac{m\pi x}{l} (a_1 e^{\alpha y} + a_2 e^{-\alpha y} + a_3 y e^{\alpha y} + a_4 y e^{-\alpha y}).$$

Соответствующие ей напряжения будут иметь такие значения:

$$X_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = a \sin \frac{m\pi x}{l} (a_1 \alpha^2 e^{\alpha y} + a_2 \alpha^2 e^{-\alpha y} + 2a_3 \alpha e^{\alpha y} - 2a_4 \alpha e^{-\alpha y} + a_3 \alpha^2 y e^{\alpha y} + a_4 \alpha^2 y e^{-\alpha y});$$

$$Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\alpha^2 a \sin \frac{m\pi x}{l} (a_1 e^{\alpha y} + a_2 e^{-\alpha y} + a_3 y e^{\alpha y} + a_4 y e^{-\alpha y});$$

$$X_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\alpha a \cos \frac{m\pi x}{l} (a_1 \alpha e^{\alpha y} - a_2 \alpha e^{-\alpha y} + a_3 e^{\alpha y} + a_3 \alpha y e^{\alpha y} + a_4 e^{-\alpha y} - a_4 \alpha y e^{-\alpha y}).$$

Положив  $y = 0$ ;  $y = 2c$ , мы найдем те усилия, которые должны быть приложены по продольным сторонам полосы, чтобы создать напряженное состояние, соответствующее выбранной функции  $\varphi$ . Меняя значение произвольных постоянных  $a_1, \dots, a_4$ , мы будем получать различные решения. Можно выбрать эти постоянные так, чтобы  $(Y_y)_{y=0} = 0$ ;  $(X_y)_{y=0, y=2c} = 0$ . В таком случае получим изгиб полосы вертикальной сплошной нагрузкой, приложенной к верхней грани балки и изменяющейся по закону

$$Y_y = A \sin \frac{m\pi x}{l}. \quad (c)$$

При этом произвольные постоянные  $a_1, \dots, a_4$  определяются из уравнений

$$-\alpha \alpha^2 (a_1 e^{2\alpha c} + a_2 e^{-2\alpha c} + 2a_3 c e^{2\alpha c} + 2a_4 c e^{-2\alpha c}) = A;$$

$$a_1 + a_2 = 0;$$

$$a_1 \alpha - a_2 \alpha + a_3 + a_4 = 0;$$

$$a_1 \alpha e^{2\alpha c} - a_2 \alpha e^{-2\alpha c} + a_3 e^{2\alpha c} + 2a_3 c \alpha e^{2\alpha c} + a_4 e^{-2\alpha c} - 2a_4 c \alpha e^{-2\alpha c} = 0.$$

В общем случае изменение интенсивности  $q$  сплошной нагрузки, приложенной к верхней грани балки, может быть представлено тригонометрическим рядом

$$q = \sum_1^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (d)$$

и мы получим соответствующую функцию напряжений путем наложения решений вида (b).

Количество вычислений, связанных с таким решением, конечно, будет зависеть от того, каким числом членов ряда (d) можно ограничиться при условии получения надлежащей степени точности<sup>1</sup>.

При таком способе решения задачи может случиться, что на поперечных сторонах полосы ( $x = 0, x = l$ ) кроме усилий, необходимых для уравновешивания заданных нагрузок, появятся еще некоторые добавочные усилия. В самом общем случае усилия эти на каждом конце приведутся к силе и паре сил. Влияние их на напряжения в местах, удаленных от концов балки, мы сможем устранить, налагая на найденное для напряжений решение напряжения, соответствующие простому растяжению или сжатию, напряжения чистого изгиба и напряжения при изгибе силой, приложенной на конце.

### § 36. Решение плоской задачи для случая клина

Предположим, что пластинка, ограниченная двумя пересекающимися прямыми  $OA$  и  $OB$  (рис. 25), подвергается действию сплошной нагрузки, распределенной по грани<sup>2</sup>  $OA$ , и действию собственного веса. Если интенсивность сплошной нагрузки пропорциональна  $y$ , то решение задачи представляется в особенно простом виде. Напряжения являются в этом случае линейными функциями от координат и функция напряжений  $\varphi$  будет однородной функцией третьей степени.

Положим

$$\varphi = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \tag{a}$$

и определим постоянные  $a, \dots, d$  так, чтобы были удовлетворены условия на гранях  $OA$  и  $OB$  пластинки. Если через  $\gamma$  обозначим вес единицы объема пластинки и через  $\gamma_1 y$  интенсивность сплошной нагрузки по грани  $OA$ , то эти условия напишутся так:

1) при  $x = 0$

$$(X_x)_{x=0} = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_{x=0} = -\gamma_1 y;$$

$$(X_y)_{x=0} = \left( -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \gamma x \right)_{x=0} = 0;$$

2) при  $x = y \operatorname{tg} \beta$ , принимая во внимание, что по грани  $OB \cos(xv) = \cos \beta, \cos(yv) = -\sin \beta$ , условия (56) напишутся так:

$$X_x \cos \beta - X_y \sin \beta = 0;$$

$$X_y \cos \beta - Y_y \sin \beta = 0.$$

Подставляя вместо  $\varphi$  выражение (a), из условий 1 найдем  $c = 0; 6d = -\gamma_1$ . Что касается условий 2, то они дают нам следующие два уравнения:

$$-\gamma_1 = -(\gamma + 2b) \operatorname{tg}^2 \beta;$$

$$-2b - \gamma = 6a \operatorname{tg} \beta + 2b,$$

откуда

$$2b = -\gamma + \gamma_1 \operatorname{ctg}^2 \beta; \quad 6a = \gamma \operatorname{ctg} \beta - 2\gamma_1 \operatorname{ctg}^3 \beta.$$

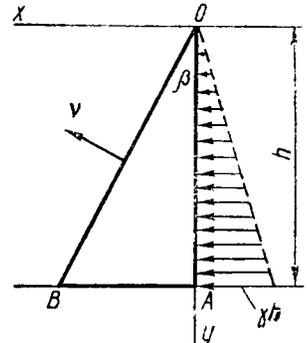


Рис. 25

<sup>1</sup> При разложении функции в тригонометрический ряд проще всего воспользоваться приближенными приемами. См. Runge C. Theorie und Praxis der Reihen. Leipzig, G. J. Göschen, 1904, 266 SS. См. S 147., Runge C., Emde F. Rechnungsformular zur Zerlegung einer empirisch gegebenen periodischen Funktion in Sinuswellen. Nest einer Erläuterung von C. Runge. Braunschweig, 1913, 13 SS.

<sup>2</sup> Случай действия сосредоточенных сил будет рассмотрен ниже.

Для напряжений получаем формулы

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\gamma_1 y; \\ Y_y &= (\gamma \operatorname{ctg} \beta - 2\gamma_1 \operatorname{ctg}^2 \beta) x - (\gamma - \gamma_1 \operatorname{ctg}^2 \beta) y; \\ X_y &= -\gamma_1 \operatorname{ctg}^2 \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

По сечению пластинки плоскостью  $AB$ , перпендикулярной к  $y$ , нормальные напряжения  $Y_y$  распределяются по закону трапеции. Здесь решение плоской задачи совпадает с элементарным решением, получаемым на основании гипотезы плоских сечений.

Касательные напряжения  $X_y$ , как видно из общего решения (b), распределяются по сечению  $AB$  по закону треугольника и достигают максимального значения у точки  $B$ . Результат этот отличается от того, который дает элементарная теория изгиба в применении к клину  $BOA$ .

Функция напряжений  $\varphi$  представится в виде однородного полинома третьей степени также и в том случае, когда грань пластинки  $OA$ , подвергающаяся действию давлений, не вертикальна, а составляет с осью  $oy$  любой угол. Постоянные коэффициенты  $a, \dots, d$ , входящие в выражение (a), определяются из четырех условий, относящихся к граням  $OA$  и  $OB$ .

Если грань пластинки  $OA$  подвергается действию равномерно распределенной нагрузки интенсивности  $q$  (рис. 26), то напряжения в какой-либо точке  $M$  зависят лишь от угла  $\theta$ , составляемого радиусом  $OM$  с осью  $y$ . Величина составляющих напряжения определится из следующих формул<sup>1</sup>:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{q}{\operatorname{tg} \beta - \beta} (\beta - \theta + \sin \theta \cos \theta - \operatorname{tg} \beta); \\ Y_y &= \frac{q}{\operatorname{tg} \beta - \beta} (\beta - \theta - \sin \theta \cos \theta); \\ X_y &= -\frac{q \sin^2 \theta}{\operatorname{tg} \beta - \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

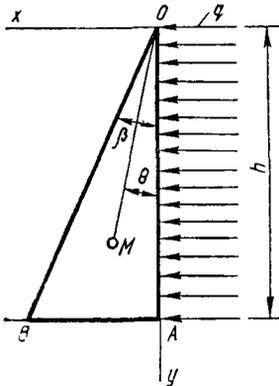


Рис. 26.

Легко проверить, что это решение удовлетворяет условиям на гранях  $OA$  и  $OB$  пластинки.

Решениями (b) и (c) иногда пользуются при расчете подпорных стенок треугольного поперечного сечения, подвергающихся действию давления воды или сыпучих грунтов. Применяя эти решения, нужно иметь в виду, что они получены для пластинки, стороны которой  $OA$  и  $OB$  имеют неограниченную длину. Если мы эту пластинку закрепим, например, по плоскости  $AB$ , как это имеет место в случае подпорной стенки высоты  $h$ , то в плоскости закрепления может получиться распределение напряжений, значительно отличающееся от того, которое дают формулы (b)<sup>2</sup>. Полное решение задачи можно было бы получить лишь при одновременном рассмотрении деформаций, клина  $AOB$  и той пластинки (элемент фундамента плотины), с которой этот клин скреплен.

<sup>1</sup> См. упомянутую на стр. 86 работу М. Lévy, а также работу Fillunger P. Drei wichtige ebene Spannungszustände des Keilförmigen Körpers. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1912, Bd 60, N 3, SS. 275—285.

<sup>2</sup> Вопрос о распределении напряжений в подпорных стенках и каменных плотинах представляет огромный практический интерес. Ему посвящен целый ряд исследований главным образом английских авторов. См. Atcherley L. W., Pearson K. On some disregarded points in the stability of masonry dams. Ld., Dulau and Co, 1904, 27 pp. (Drapers' company research memoirs. Technical series, II. At head of title: Department of applied mathematics, University college, University of London). Pearson K., Poilard C. An experimental study of the stresses in masonry dams. Ld., Dulau and Co, 1907, 44 pp. (Drapers' company research memoirs. Technical series, IV. At head of title: Department of applied mathematics, University college, University of London). См. работу L. F. Richardson, указанную на стр. 10. См. также Carothers S. D. Plane strain in a wedge, with applications to masonry dams. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1912—1913, vol. 33, N 3, pp. 292—306.

§ 37. Плоская задача в полярных координатах

При изучении распределения напряжений в пластинках, ограниченных прямоугольным контуром, мы пользовались системой прямоугольных координат. В целом ряде дальнейших задач при определении напряжений в пластинках, ограниченных круговым контуром, и в круговых кольцах прямоугольного поперечного сечения является более выгодным применение полярных координат. Рассмотрим, как напишутся уравнения равновесия плоской задачи и уравнение для определения функции напряжений в этих координатах. Положение какого-либо бесконечно малого элемента  $ABCD$  (рис. 27), выделенного из пластинки двумя плоскостями  $OA$  и  $OC$ , проходящими через ось  $z$ , и двумя цилиндрическими поверхностями  $AC$  и  $BD$ , нормальными к плоскости  $xy$ , определится углом  $\theta$  и радиусом  $r$  кругового цилиндра  $AC$ .

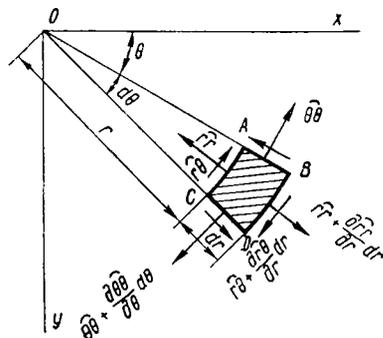


Рис. 27.

Нормальные напряжения по краям элемента  $AB$  и  $CD$  обозначим через  $\bar{\theta}\theta$ , те же напряжения по краям  $AC$  и  $BD$  — через  $\bar{r}r$ . Для касательных напряжений, вызывающих искажение первоначально прямых углов элемента  $ABCD$ , примем обозначение  $r\theta$ . По краям элемента, параллельным плоскости  $xy$ , в случае плоской деформации могут действовать лишь нормальные напряжения  $zz$ . Размер элемента в направлении оси  $z$ , равный толщине пластинки, в дальнейшем не будет играть никакой роли, и мы его будем принимать равным единице длины.

Составим уравнение равновесия элемента  $ABCD$ . Считая объемные силы равными нулю и проектируя приложенные по поверхности элемента силы на направление  $\bar{r}r$  и на перпендикуляр к нему, получим уравнения

$$\left(\bar{r}r + \frac{\partial \bar{r}r}{\partial r} dr\right)(r + dr) d\theta - \bar{r}r r d\theta + \frac{\partial \bar{r}\theta}{\partial \theta} dr d\theta - \bar{\theta}\theta dr d\theta = 0;$$

$$-\frac{\partial r\theta}{\partial r} r d\theta dr + \frac{\partial \bar{\theta}\theta}{\partial \theta} d\theta dr + 2r\bar{\theta} dr d\theta = 0.$$

Отбросив малые величины высших порядков и сократив все на общий множитель  $dr d\theta$ , представим уравнения равновесия в таком виде:

$$\frac{\partial \bar{r}r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{r}\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{r}r - \bar{\theta}\theta}{r} = 0;$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\theta}\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial r\theta}{\partial r} + \frac{2r\bar{\theta}}{r} = 0. \tag{61}$$

Уравнения эти соответствуют уравнениям (53) и (57), полученным раньше для прямоугольной системы координат.

Распределение напряжений в случае плоской задачи вполне определяется функцией напряжений  $\varphi$ , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \tag{a}$$

и заданным условиям на контуре пластинки. При пользовании полярными координатами придется независимые переменные  $x$  и  $y$  заменить новыми перемен-

ными  $r$  и  $\theta$ , связанными со старыми посредством уравнений  $r^2 = x^2 + y^2$ ;  $\theta = \arctg \frac{y}{x}$ . В таком случае

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \sin \theta; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cos \theta.\end{aligned}$$

Для вторых производных функции  $\varphi$  получим выражения

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \\ &+ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \\ &+ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2}; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r} - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} - \\ &- \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2}.\end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}.$$

Левая часть уравнения (a) преобразуется так:

$$\begin{aligned}&\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \\ &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right).\end{aligned}$$

Таким образом, решение плоской задачи в полярных координатах сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (62)$$

Чтобы получить выражения для напряжений  $\bar{r}r$ ,  $\bar{\theta}\theta$ ,  $r\theta$  через функцию  $\varphi$ , расположим оси  $x$  и  $y$  так, чтобы ось  $x$  совпала с направлением  $r$ . В таком случае  $\theta = 0$ , и на основании (b) будем иметь

$$\left. \begin{aligned}\bar{r}r &= X_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \\ \bar{\theta}\theta &= Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ r\theta &= X_y = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right).\end{aligned}\right\} \quad (63)$$

Легко проверить дифференцированием, что полученные выражения для напряжений удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия (61).

Выражения для деформаций получим на основании формул (36).

Обозначив через  $e_{rr}$  и  $e_{\theta\theta}$  относительные удлинения в направлении радиуса  $r$  и перпендикулярна к нему, а через  $e_{r\theta}$  — соответствующий сдвиг, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} e_{rr} &= \frac{1}{E} [\bar{r}\bar{r} - \sigma(\bar{\theta}\bar{\theta} + \bar{z}\bar{z})]; \\ e_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} [\bar{\theta}\bar{\theta} - \sigma(\bar{r}\bar{r} + \bar{z}\bar{z})]; \\ e_{zz} &= \frac{1}{E} [\bar{z}\bar{z} - \sigma(\bar{r}\bar{r} + \bar{\theta}\bar{\theta})]; \\ e_{r\theta} &= \frac{1}{G} \bar{r}\bar{\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

В случае плоской деформации относительное удлинение  $e_{zz}$  равно нулю. При плоском напряженном состоянии напряжение  $\bar{z}\bar{z}$  обращается в нуль.

Обозначим через  $u$  и  $v$  составляющие перемещения точки в направлении радиуса и перпендикулярна к нему. Перемещение в направлении оси  $z$  обозначим через  $w$ . Тогда удлинения  $e_{rr}$  и  $e_{zz}$  выразятся такими же формулами, как и в случае прямоугольной системы координат. Что касается удлинения  $e_{\theta\theta}$ , то оно будет обусловлено не только перемещениями  $v$ , но также и перемещениями  $u$ . Если бы все точки, лежащие на круге радиуса  $r$ , совершили только радиальное перемещение  $u$ , одинаковое для всех точек, то относительное удлинение  $e_{\theta\theta}$  было бы равно  $\frac{u}{r}$ . Если бы те же точки совершали лишь перемещения  $v$ , то соответствующее этим перемещениям удлинение  $e_{\theta\theta}$  выразилось бы отношением  $\partial v / r \partial \theta$ .

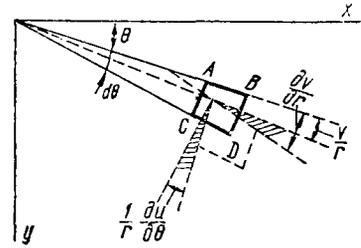


Рис. 28.

Окончательно выражение удлинений через перемещения представится так:

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad e_{\theta\theta} = \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r}; \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (65)$$

При составлении выражения для сдвига  $e_{r\theta}$  необходимо принять во внимание изменение угла  $\theta$ , обусловленное перемещением  $v$ .

На рис. 28 пунктиром представлен элемент  $ABCD$  после деформации. Сумма заштрихованных на рисунке углов дает величину сдвига  $e_{r\theta}$ . Окончательно для сдвига будем иметь формулу

$$e_{r\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (66)$$

### § 38. Чистый изгиб части кругового кольца

Особенно просто решается плоская задача в полярных координатах в том случае<sup>1</sup>, когда распределение напряжений не зависит от угла  $\theta$ . Функция напряжений  $\varphi$  будет при этом условии зависеть только от  $r$  и основное

<sup>1</sup> Простейшим примером такого распределения является задача Ламе, излагаемая обыкновенно в курсах сопротивления материалов.

дифференциальное уравнение (62) переписывается так:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0.$$

Подстановкой  $r = e^t$  полученное уравнение приводится к уравнению с постоянными коэффициентами и потому функция  $\varphi$  может быть найдена без всяких затруднений. Она будет заключать четыре произвольных постоянных и представится в таком виде:

$$\varphi = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D.$$

Соответствующие напряжения определяются на основании формул (63):

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}\bar{r} &= \frac{A}{r^2} + 2B \ln r + B + 2C; \\ \bar{\theta}\bar{\theta} &= -\frac{A}{r^2} + 2B \ln r + 2C + 3B; \\ \bar{r}\bar{\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Пользуясь этим решением, легко получить напряжения в случае чистого изгиба части кругового кольца парами сил, приложенными по концам<sup>1</sup> (рис. 29). Поперечное сечение кольца предполагаем прямоугольным. Если размер  $c$  этого прямоугольника в направлении, перпендикулярном к плоскости кольца, мал, то мы будем иметь дело со случаем обобщенного плоского напряженного состояния. При больших значениях размера  $c$  кольцо обращается в цилиндрическую трубку, и мы будем иметь случай плоской деформации. Распределение напряжений как в том, так и в другом случае будет одно и то же. Чтобы получить распределение напряжений при изгибе парами сил, приложенными по концам, подберем произвольные постоянные в общем решении (a) таким образом, чтобы нормальные напряжения  $\bar{r}\bar{r}$  по наружному и внутреннему круговым очертаниям пластинки обратались в нуль. Обозначая через  $a$  и  $b$  внутренний и наружный радиусы кольца, получаем для определения произвольных постоянных уравнения

$$\left. \begin{aligned} 2C + B + \frac{A}{a^2} + 2B \ln a &= 0; \\ 2C + B + \frac{A}{b^2} + 2B \ln b &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Что касается напряжений  $\bar{\theta}\bar{\theta}$ , то в случае чистого изгиба они должны в каждом поперечном сечении кольца приводиться к паре сил с моментом  $M$ . Следовательно<sup>2</sup>,

$$\int_a^b \bar{\theta}\bar{\theta} dr = 0; \quad \int_a^b \bar{\theta}\bar{r} dr = M.$$

<sup>1</sup> Задача эта впервые была решена русским ученым Х. С. Головиним. В своей замечательной работе «Одна из задач статики упругого тела», Изв. С.-Петербургского практического технологического института, 1880—1881, стр. 373—410, Х. С. Головин дал решение ряда задач, относящихся к изгибу кривых брусев. К сожалению, работа Х. С. Головина осталась совершенно неизвестной на Западе и полученные им решения были значительно позже вновь найдены М. Рибьером (См. Ribière M. Sur l'équilibre d'élasticité des voutes en arc de cercle. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 1889, t. 108, N 11, pp. 561—563) и Л. Прандтлем. [Эту работу Л. Прандтль не опубликовал; сообщение о ней дается в статье А. Тимме, указанной на стр. 75].

<sup>2</sup> Толщина кольца  $c$  принята равной единице длины.

Вставив вместо  $\overline{\theta\theta}$  его выражение и выполняя интегрирование, получим такие уравнения:

$$\left[ r \left( 2C + B + \frac{A}{r^2} + 2B \ln r \right) \right]_a^b = 0; \tag{c}$$

$$(C + B)(b^2 - a^2) - A \ln \frac{b}{a} + B(b^2 \ln b - a^2 \ln a) = M.$$

Первое из этих уравнений является следствием уравнений (b), а второе вместе с уравнениями (b) дает возможность найти произвольные постоянные  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Введя для сокращения обозначение  $(b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \left( \ln \frac{b}{a} \right)^2 = N$ , представим эти постоянные в таком виде:

$$A = \frac{4M}{N} a^2 b^2 \ln \frac{b}{a}; \quad B = \frac{2M}{N} (b^2 - a^2);$$

$$C = -\frac{M}{N} [b^2 - a^2 + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a)].$$

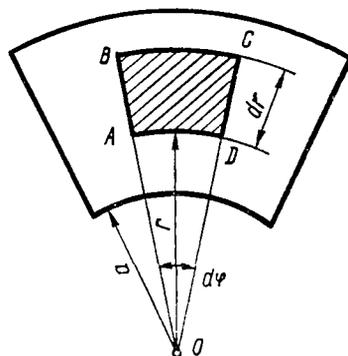


Рис. 30.

Выражения для напряжений переписутся так:

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= \frac{4M}{N} \left( -a^2 \lg \frac{r}{a} - b^2 \ln \frac{b}{r} + \frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} \right); \\ \overline{\theta\theta} &= \frac{4M}{N} \left( b^2 - a^2 - a^2 \ln \frac{r}{a} - b^2 \ln \frac{b}{r} - \frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} \right); \\ \overline{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{67}$$

Таким образом, исходя из предположения, что функция напряжений не зависит от  $\theta$ , мы смогли найти распределение напряжений, удовлетворяющее всем условиям задачи: по наружному и внутреннему круговым очертаниям пластинки не действуют никакие усилия. По концевым поперечным сечениям имеются лишь нормальные усилия, приводящиеся к парам сил  $M$ . Распределение этих усилий по сечению вполне определяется выражением, полученным выше для напряжений  $\overline{\theta\theta}$ . Если в действительности распределение нормальных усилий по концевым поперечным сечениям отличается от того, что дает решение (67), то найденное нами распределение напряжений будет отличаться от действительного, но на основании принципа Сен-Венана можно утверждать, что это различие будет значительным лишь у концов. В точках, удаленных от концов, распределение напряжений мало изменяется при изменении закона распределения изгибающих усилий.

Пользуясь общими формулами (64) и (65), мы без затруднений можем разыскать деформации и перемещения точек кольца в случае чистого изгиба. Интересно отметить, что при этом плоские поперечные сечения остаются и после деформации плоскими. Для доказательства этого положения рассмотрим деформацию элемента  $ABCD$ , выделенного из изгибаемой части кольца двумя радиусами  $OB$  и  $OC$  и двумя концентрическими дугами  $BC$  и  $AD$  (рис. 30). Если при изгибе поперечные сечения бруска остаются плоскими, то изменение угла между гранями  $AB$  и  $DC$  выделенного элемента не должно зависеть от  $r$ . Пусть  $d\psi$  — угол между гранями  $AB$  и  $CD$  после деформации элемента, тогда

из простых геометрических соображений следует, что

$$d\psi = d\varphi \left( 1 + e_{\theta\theta} - e_{rr} + r \frac{de_{\theta\theta}}{dr} \right).$$

Относительное изменение угла

$$\frac{d\psi - d\varphi}{d\varphi} = e_{\theta\theta} - e_{rr} + r \frac{de_{\theta\theta}}{dr}.$$

Вставляя вместо  $e_{\theta\theta}$  и  $e_{rr}$  их выражения через напряжения, легко докажем, что изменение угла от  $r$  не зависит и, следовательно, поперечные сечения в нашем случае изгиба остаются плоскими.

Интересно сравнить полученное выше решение (67) с теми результатами, которые дает элементарная теория изгиба кривых брусков<sup>1</sup>. При элементарном исследовании распределения напряжений в изогнутом кривом бруске исходят или из гипотезы линейного закона распределения нормальных напряжений по плоскости поперечного сечения бруска, или из гипотезы плоских сечений. В последнем случае мы приходим к распределению нормальных напряжений по гиперболическому закону. Как в первом, так и во втором случае ограничиваются рассмотрением напряжений  $\bar{\theta}\bar{\theta}$  и пренебрегают напряжениями  $\bar{r}\bar{r}$ . Чем меньше поперечные размеры бруска по сравнению с его радиусом кривизны, тем меньше разность между результатами, получаемыми на основании двух различных гипотез и тем ближе эти результаты к точному решению (67).

Когда ширина кольца  $h$  значительна, гипотеза линейного распределения нормальных напряжений приводит к большим погрешностям. Разница между результатами, получаемыми на основании гипотезы плоских сечений, и решением (67) вообще невелика. Для сравнения приведем следующие два численных примера.

**Пример I.** Предположим,  $b = 1,3a$ . Тогда гипотеза линейного распределения напряжений дает для наибольшего растягивающего и сжимающего напряжений значения  $(\bar{\theta}\bar{\theta})_{r=b} = +66,7\alpha$ ;  $(\bar{\theta}\bar{\theta})_{r=a} = -66,7\alpha$ , где  $\alpha$  — постоянная величина, зависящая от величины изгибающего момента и от поперечных размеров бруска.

Таблица 1

Нормальное напряжение	Гипотеза линейного распределения	Гипотеза плоских сечений	Точное решение
$\frac{1}{\beta} (\bar{\theta}\bar{\theta})_{r=b}$	+0,302	+0,224	+0,219
$\frac{1}{\beta} (\bar{\theta}\bar{\theta})_{r=a}$	-0,302	-0,463	-0,435

Гипотеза плоских сечений дает для тех же напряжений значения  $(\bar{\theta}\bar{\theta})_{r=b} = +61,28\alpha$ ;  $(\bar{\theta}\bar{\theta})_{r=a} = -73,00\alpha$ . На основании решения (67) получаем такие результаты:  $(\bar{\theta}\bar{\theta})_{r=b} = +61,36\alpha$ ;  $(\bar{\theta}\bar{\theta})_{r=a} = -73,07\alpha$ .

Результаты, полученные на основании гипотезы плоских сечений, весьма близки к точному решению. Погрешность обусловлена тем, что в элементарном выводе мы пренебрегаем нормальными напряжениями  $\bar{r}\bar{r}$ .

<sup>1</sup> Соответствующая литература приведена на стр. 322 нашего Курса сопротивления материалов. Изд. 2-е. Киев, издание книжного магазина Л. Издиковского, 1913, 479 стр.

**Пример II.** Положим  $b = 3a$ . Ширина кольца вдвое больше внутреннего радиуса. Значения наибольших растягивающих и сжимающих напряжений, вычисленные на основании уломянутых выше гипотез и на основании решения (67), приведены в табл. 1<sup>1</sup>.

Таким образом, даже в случае брусьев большой кривизны гипотеза плоских сечений дает вполне удовлетворительные результаты. Заметим, что с возрастанием ширины бруска  $h$  все большее значение будет играть закон распределения внешних сил по концевым поперечным сечениям, так как поперечные размеры перестают быть малыми по сравнению с длиной бруска и принцип Сен-Венана уже более несправедлив.

Что касается напряжений  $\overline{rr}$ , которыми при элементарном рассмотрении изгиба кривых брусьев обыкновенно пренебрегают, то их величины обращаются в нуль при  $r = a$ ,  $r = b$ . Наибольшего значения эти напряжения достигают примерно по середине ширины кольца, т. е. при  $r = \frac{1}{2}(a + b)$ . Эти напряжения вообще невелики. Например, для случая  $b = 1,3 a$  при  $r = 1,15 a$  величина их равна  $4,31 \alpha$ , что составляет примерно 6% наибольшего значения напряжений  $\overline{\theta\theta}$ .

**§ 39. Изгиб кривого бруса силой, приложенной на конце**

В этом случае напряжения будут зависеть не только от  $r$ , но и от  $\theta$ , поэтому для разыскания соответствующей функции напряжений нам нужно обратиться к основному уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}\right) = 0. \tag{a}$$

Возьмем частное решение этого уравнения в такой форме:

$$\varphi = f(r) \sin \theta, \tag{b}$$

где  $f(r)$  — неизвестная пока функция одного  $r$ . Вставляя это решение в уравнение (a), получаем для определения  $f(r)$  обыкновенное линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{f}{r^2}\right) = 0, \tag{c}$$

легко приводящееся к уравнению с постоянными коэффициентами.

Общий интеграл уравнения (c) напишется так:

$$f(r) = \alpha r^3 + \frac{\beta}{r} + \gamma r + \delta r \ln r.$$

Определив таким образом  $f(r)$ , из выражения (b) для функции напряжений находим путем дифференцирования составляющие напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \left(2\alpha r - \frac{2\beta}{r^3} + \frac{\delta}{r}\right) \sin \theta; \\ \overline{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \left(6\alpha r + 2 \frac{\beta}{r^3} + \frac{\delta}{r}\right) \sin \theta; \\ \overline{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) = -\left(2\alpha r - \frac{2\beta}{r^3} + \frac{\delta}{r}\right) \cos \theta. \end{aligned} \right\} \tag{68}$$

<sup>1</sup> Числа заимствованы из работы A u e J. Zur Berechnung der Spannungen in gekrümmtten Stäben (unter Anwendung der optischen Methode). Dissertation Philosophische Fakultät Grossherzogl. und Herzogl. Sächsischen Gesamt — Universität zu Jena. Dresden, Adolf, 1910, 70 SS.

Чтобы получить случай изгиба части кругового кольца силами, приложенными по концам, нужно подобрать произвольные постоянные  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  общего решения (68) так, чтобы напряжения  $\bar{r}\bar{r}$  и  $\bar{r}\bar{\theta}$  как на внутреннем, так и на наружном круговом очертании бруска обращались в нуль. Для этого нужно удовлетворить уравнениям  $2\alpha a - \frac{2\beta}{a^3} + \frac{\delta}{a} = 0$ ;  $2\alpha b - \frac{2\beta}{b^3} + \frac{\delta}{b} = 0$ , из которых находим  $\beta = -\alpha a^2 b^2$ ;  $\delta = -2\alpha (a^2 + b^2)$ . Вставляя это в выражение (68), получаем для напряжений формулы

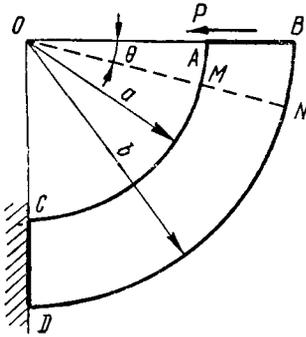


Рис. 31.

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}\bar{r} &= 2\alpha \left( r + \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right) \sin \theta; \\ \bar{\theta}\bar{\theta} &= 2\alpha \left( 3r - \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right) \sin \theta; \\ \bar{r}\bar{\theta} &= 2\alpha \left( -r - \frac{a^2 b^2}{r^3} + \frac{a^2 + b^2}{r} \right) \cos \theta. \end{aligned} \right\} (68')$$

Рассмотрим частный случай, когда изгибающая сила  $P$  имеет радиальное направление (рис. 31). Отсчитывая  $\theta$  от радиуса, совпадающего с линией действия силы, будем иметь в сечении  $AB$   $\sin \theta = 0$ ;  $\cos \theta = 1$ . Следовательно,

$$(\bar{\theta}\bar{\theta})_{\theta=0} = 0; \quad (\bar{r}\bar{\theta})_{\theta=0} = 2\alpha \left( -r - \frac{a^2 b^2}{r^3} + \frac{a^2 + b^2}{r} \right).$$

Касательные усилия, распределенные по сечению  $AB$ , должны приводиться<sup>1</sup> к силе  $P$ . Таким образом, для определения постоянной  $\alpha$  мы получаем уравнение

$$P = \int_a^b \bar{r}\bar{\theta} dr = 2\alpha \left[ a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \ln \frac{b}{a} \right],$$

откуда

$$\alpha = \frac{P}{2 \left[ a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \ln \frac{b}{a} \right]}.$$

Вставляя значение  $\alpha$  в выражения (68'), получаем формулы для вычисления напряжений в рассматриваемом случае. Если взять часть кольца, соответствующую углу в  $90^\circ$ , и закрепить ее, как указано на рис. 31, то наибольшие нормальные напряжения будут иметь место в плоскости закрепления при  $\theta = 90^\circ$ . Для соответствующего сечения  $CD$  будем иметь

$$\bar{r}\bar{\theta} = 0; \quad \bar{\theta}\bar{\theta} = \frac{P}{\left[ a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \ln \frac{b}{a} \right]} \left( 3r - \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right).$$

Распределение нормальных напряжений  $\bar{\theta}\bar{\theta}$  по высоте сечения  $CD$ , как видно из полученной формулы, не следует ни линейному, ни гиперболическому законам, получаемым в элементарной теории изгиба на основании известных гипотез. Для сравнительной оценки результатов двух общепринятых способов расчета с результатами, получаемыми на основании решения (68'), приводим

<sup>1</sup> Размер бруска в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка, принят за единицу.

значения наибольших растягивающих и сжимающих напряжений  $\bar{\theta}\bar{\theta}$ , действующих по сечению  $CD$ , вычисленные тремя различными способами (табл. 2). Вычисления выполнены для случая  $b = 1,3 a$ . Как и в случае чистого изгиба, гипотеза плоских сечений дает здесь результаты, весьма близкие к точному решению.

Мы рассмотрели случай, когда изгибающая сила  $P$  имеет радиальное направление. Легко обобщить наше решение на случай любого направления силы  $P$

По поперечному сечению  $MN$ , составляющему с линией действия силы угол  $\theta$ , будут действовать как касательные, так и нормальные напряжения. Суммируя касательные усилия, получим значение поперечной силы в рассматриваемом сечении. Нормальные усилия по тому же сечению могут быть приведены к одной силе, приложенной в центре тяжести

рассматриваемого сечения, и к паре сил. Отбрасывая часть бруска  $MNAB$  и заменяя ее действие на остающуюся часть  $MNCD$  упомянутыми выше силами и парой сил, мы получаем распределение напряжений для случая изгиба бруска силой и парой сил, приложенными на конце. Мы знаем напряжения, вызываемые изгибающей парой сил (§ 38). Отбрасывая их, получаем распределение напряжений при действии силы, приложенной на конце бруска, причем угол, составляемый этой силой с концевым поперечным сечением  $MN$ , определяется<sup>1</sup> величиной  $\theta$ .

### § 40. Общий случай изгиба кривого бруска

Определяя напряжения в бруске, изгибаемом силой, приложенной на конце, мы подобрали произвольные постоянные в решении (68) так, чтобы напряжения  $\bar{r}\bar{r}$  и  $\bar{r}\bar{\theta}$  на внутреннем и наружном круговых очертаниях бруска обращались в нуль. Полагая

$$2\alpha a - \frac{2\beta}{a^3} + \frac{\delta}{a} = 0; \quad 2\alpha b - \frac{2\beta}{b^3} + \frac{\delta}{b} = -p,$$

получаем распределение напряжений для случая, когда кроме силы, приложенной на конце, на брусок действует по наружному круговому очертанию сплошная нагрузка. Нормальная составляющая этой нагрузки изменяется пропорционально  $\sin \theta$ , касательная — пропорционально  $\cos \theta$ .

Выбрав функцию напряжений в виде  $\varphi = f_1(r) \cos \theta$ , мы получили бы решение, подобное предыдущему, пришлось бы только поменять местами  $\sin \theta$  и  $\cos \theta$ .

Комбинируя полученное таким образом решение с решением Ламе, Х. С. Головин получил распределение напряжений в своде (рис. 32) для случая, когда по наружному очертанию свода действуют нормальные и касательные

<sup>1</sup> Несколько примеров этого рода рассмотрены в упомянутой на стр. 94 работе Х. С. Головина. Там же даны общие формулы для перемещений в этом случае и отмечено, что поперечные сечения при изгибе силой искривляются.

Таблица 2

$\theta = 90^\circ$	Гипотеза линейного распределения	Гипотеза плоских сечений	Точное решение
$\frac{a^2}{Pa} (\bar{\theta}\bar{\theta})_{r=a}$	-80,00	-87,28	-87,55
$\frac{a^2}{Pa} (\bar{\theta}\bar{\theta})_{r=b}$	+73,34	+67,14	+67,35

напряжения, определяемые формулами  $\bar{r}r = -2p + p \cos \theta$ ;  $r\bar{\theta} = p \sin \theta$ .

Произвольные постоянные он определил из условия, что элемент поперечного сечения  $CD$ , совпадающий с точкой  $C$ , не совершает никаких перемещений, следовательно,  $u = v = \frac{\partial v}{\partial r} = 0$  при  $r = a$ ,  $\theta = \alpha$ .

Распределение нормальных напряжений по сечениям  $AB$  и  $CD$ , полученное Х. С. Головиным для случая  $\alpha = 45^\circ$  и  $b = 1,15 a$ , приведено в табл. 3.

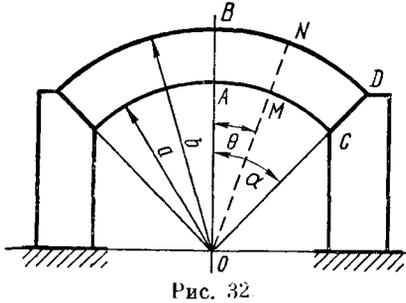


Рис. 32

Таблица 3

$\frac{r-a}{a}$	$\frac{\bar{\theta}\theta}{p}$ при $\theta = 0$	$\frac{\bar{\theta}\theta}{p}$ при $\theta = 45^\circ$
0	-0,653	-20,713
0,025	-2,539	-16,407
0,050	-4,301	-12,289
0,075	-5,946	-8,344
0,100	-7,513	-4,577
0,125	-9,028	-0,989
0,150	-10,508	+2,424

Вследствие сравнительно малой ширины кольца ( $h = 0,15 a$ ) распределение нормальных напряжений в приведенном численном примере мало отклоняется от линейного закона, но все же и здесь гипотеза плоских сечений дает результаты, более близкие к точному решению.

Выбирая функцию напряжений в виде  $\varphi = f_n(r) \sin n\theta$  или  $\varphi = f_n(r) \cos n\theta$ , получаем решение для того случая, когда нормальные и касательные напряжения по круговым очертаниям бруска изменяются пропорционально  $\sin(n\theta)$  или  $\cos(n\theta)$ . Наложением такого рода решений мы можем получить распределение напряжений в бруске при любых нагрузках<sup>1</sup>. Для этого нужно только интенсивность внешних и нормальных усилий представить в виде тригонометрических рядов.

Этим приемом мы воспользуемся дальше при исследовании напряжений вблизи круглых отверстий и при определении напряжений в круглом кольце, здесь же приведем общее решение дифференциального уравнения плоской задачи в полярных координатах<sup>2</sup>. Выражение для функции напряжений представится так:

$$\begin{aligned} \varphi = & a_0 \ln r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \ln r + d_0 r^2 \theta + \alpha_0 \theta + \frac{a_1}{2} r \theta \sin \theta + \\ & + \left( b_1 r^3 + \frac{\alpha_1}{r} + \beta_1 r \ln r \right) \cos \theta - \frac{c_1}{2} r \theta \cos \theta + \left( d_1 r^3 + \frac{\gamma_1}{r} + \delta_1 r \ln r \right) \sin \theta + \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} (a_m r^m + b_m r^{m+2} + \alpha_m r^{-m} + \beta_m r^{-m+2}) \cos m\theta + \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} (c_m r^m + d_m r^{m+2} + \gamma_m r^{-m} + \delta_m r^{-m+2}) \sin m\theta. \end{aligned} \quad (69)$$

Путем дифференцирования мы по известным формулам найдем отсюда общие выражения для составляющих напряжений. Входящие в эти выражения

<sup>1</sup> См. работу М. Ribière, упомянутую на стр. 94. См. также Ribière М. Sur les voûtes en arc de cercle encastrees dux naissances. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 1901, t. 132, N 6, pp. 315—317.

<sup>2</sup> См. указанную на стр. 50 работу J. H. Michell, а также статью А. Timpe, упомянутую на стр. 75.

произвольные найдутся из условий на контуре, к которым в случае многосвязных контуров должны быть присоединены еще условия однозначности перемещений (§ 30).

При помощи этих общих формул особенно просто решается задача о распределении напряжений в клине (рис. 33), подвергающемся действию нормальных и касательных усилий, приложенных по граням  $OA$  и  $OB$ , если только интенсивности этих усилий могут быть представлены целыми алгебраическими функциями  $r$ . Составляя при помощи функции напряжений (69) формулы для напряжений  $\bar{\theta}\bar{\theta}$  и  $r\bar{\theta}$  и располагая их по возрастающим степеням  $r$ , будем иметь

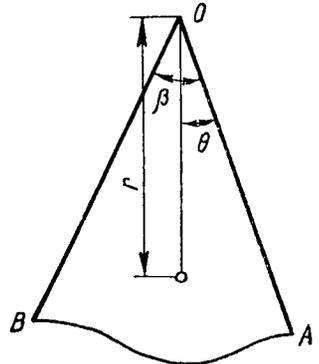


Рис. 33.

$$\begin{aligned} \bar{\theta}\bar{\theta} &= 2b_0 + 2d_0\theta + 2a_2 \cos 2\theta + 2c_2 \sin 2\theta + \\ &+ 6r(b_1 \cos \theta + d_1 \sin \theta + a_3 \cos 3\theta + c_3 \sin 3\theta + 12r)^2 \times \\ &\times (b_2 \cos 2\theta + d_2 \sin 2\theta + a_4 \cos 4\theta + c_4 \sin 4\theta) + \dots; \\ \bar{r}\bar{\theta} &= -d_0 + 2a_2 \sin 2\theta - 2c_2 \cos 2\theta + \quad (a) \\ &+ 2r(b_1 \sin \theta - d_1 \cos \theta + 3a_3 \sin 3\theta - 3c_3 \cos 3\theta) + \\ &+ 6r^2(b_2 \sin 2\theta + d_2 \cos 2\theta + 2a_4 \sin 4\theta - \\ &- 2c_4 \cos 4\theta) + \dots \end{aligned}$$

Множитель при каждой степени  $r$  в этих выражениях включает четыре произвольные постоянные. Для их определения мы будем иметь всего четыре условия, так как напряжения  $\bar{\theta}\bar{\theta}$  и  $r\bar{\theta}$  заданы на обеих гранях клина. Например, в случае равномерного нормального давления  $p$  по грани  $OA$  берем из общего решения (а) члены, не заключающие  $r$ . Условия на поверхности дадут нам для определения произвольных  $b_0, d_0, a_2, c_2$  уравнения

$$\begin{aligned} 1) (\bar{\theta}\bar{\theta})_{\theta=0} &= -p; & 3) (\bar{\theta}\bar{\theta})_{\theta=\beta} &= 0; \\ 2) (r\bar{\theta})_{\theta=0} &= 0; & 4) (r\bar{\theta})_{\theta=\beta} &= 0. \end{aligned}$$

Так же легко решается вопрос о распределении напряжений при изменении давлений вдоль грани  $OA$  по линейному закону, по закону параболы и т. д.

Как частные случаи общего решения (а) могут быть получены также результаты, приведенные нами в § 36. При этом, конечно, нужно будет принять во внимание собственный вес клина.

### § 41. Влияние круглых отверстий на распределение напряжений в пластинках

Предположим, что пластинка больших размеров находится в состоянии однородного напряженного состояния под действием сил, приложенных по контуру и лежащих в срединной плоскости пластинки. Пусть оси  $x$  и  $y$  соответствуют направлениям главных напряжений (рис. 34). Тогда по какой-либо площадке  $mn$ , перпендикулярной к плоскости  $xy$  и наклоненной к оси  $x$  на угол  $\theta$ , нормальные и касательные напряжения будут иметь значения

$$\bar{r}\bar{r} = X_x \sin^2 \theta + Y_y \cos^2 \theta; \quad r\bar{\theta} = -\frac{X_x - Y_y}{2} \sin 2\theta. \quad (a)$$

Если мы в начале координат вырежем в пластинке круглое отверстие малого радиуса  $\rho$ , то распределение напряжений в пластинке должно измениться, так как по площадкам, совпадающим с контуром отверстия, напряжения должны равняться нулю. Однако значительного изменения напряжений можно ожидать лишь вблизи отверстия, так как вырезывание отверстия равносильно присоединению системы взаимно уравновешивающих усилий, равных и прямо противоположных тем усилиям, которые действуют в цельной пластинке по площадкам, совпадающим с контуром отверстия. В точках, расстояние которых от отверстия велико по сравнению с  $\rho$ , такая система сил согласно принципу Сен-Венана может вызвать лишь малые изменения напряжений.

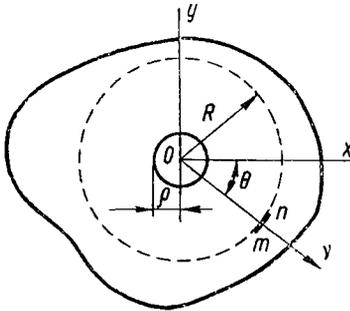


Рис. 34.

Представим себе вырезанный из пластинки диск большого радиуса  $R$ . Если по контуру этого диска приложим напряжения, определяемые формулами (а), то распределение напряжений у контура отверстия будет, на основании вышесказанного, приблизительно такое же, как и в случае пластинки неограниченных размеров. Таким образом, вопрос о влиянии круглых отверстий на распределение напряжений в неограниченной пластинке сводится к отысканию напряжений в круговом кольце, наружный радиус которого равен  $R$ , а внутренний — радиусу отверстия  $\rho$ . Причем  $\frac{\rho}{R}$  — малая величина.

Для упрощения в дальнейшем введем обозначения  $\frac{X_x + Y_y}{2} = p; -\frac{X_x - Y_y}{2} = q$ . Тогда формулы (а), представляющие распределение усилий по наружному контуру кольца, напишутся так:

$$\bar{r}r = p - q \cos 2\theta; \quad \bar{r}\theta = q \sin 2\theta. \tag{b}$$

На внутреннем контуре будем иметь  $\bar{r}r = \bar{r}\theta = 0$ .

Следовательно, вырезанное из пластинки кольцо подвергается действию равномерно распределенного по наружному контуру растягивающего усилия  $p$  и, кроме того, сжимающему и касательному усилиям, изменяющимся по закону

$$\bar{r}r = -q \cos 2\theta; \quad \bar{r}\theta = q \sin 2\theta. \tag{c}$$

Напряжения, соответствующие равномерному растяжению  $p$ , определяются по известной формуле Ламе <sup>1</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}r &= p - \frac{\rho^2}{r^2} p; \\ \bar{\theta}\theta &= p + \frac{\rho^2}{r^2} p; \\ \bar{r}\theta &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{d}$$

Что касается напряжений, обусловленных усилиями (с), то соответствующая им функция напряжений на основании общего решения (69) представится в таком виде:  $\varphi = (ar^2 + br^4 + cr^{-2} + \beta) \cos 2\theta$ . Определяемые этой функ-

<sup>1</sup> См. стр. 330 нашего Курса сопротивления материалов, указанного на стр. 96.

ций напряжения получат следующее выражение:

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= -(2a + 6\alpha r^{-4} + 4\beta r^{-2}) \cos 2\theta; \\ \overline{\theta\theta} &= (2a + 12br^2 + 6\alpha r^{-4}) \cos 2\theta; \\ \overline{r\theta} &= (2a + 6br^2 - 6\alpha r^{-4} - 2\beta r^{-2}) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Произвольные постоянные в этих выражениях должны быть выбраны так, чтобы на наружном контуре были удовлетворены условия (с); на внутреннем контуре напряжения должны обращаться в нуль. Для определения  $a, \dots, \beta$  получаем четыре уравнения:

$$\begin{aligned} 2a + 6\alpha R^{-4} + 4\beta R^{-2} &= q; \\ 2a + 6\alpha \rho^{-4} + 4\beta \rho^{-2} &= 0; \\ 2a + 6bR^2 - 6\alpha R^{-4} - 2\beta R^{-2} &= q; \\ 2a + 6b\rho^2 - 6\alpha \rho^{-4} - 2\beta \rho^{-2} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда, полагая  $\frac{\rho}{R} = 0$ , находим  $a = \frac{q}{2}$ ;  $b = 0$ ;  $\alpha = q \frac{\rho^4}{2}$ ;  $\beta = -q\rho^2$ .

Вставляя это в выражения (e) и присоединяя к ним напряжения (d), получаем для напряжений у круглого отверстия такие формулы<sup>1</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= p - \frac{\rho^2}{r^2} p - q \left( 1 - 4 \frac{\rho^2}{r^2} + 3 \frac{\rho^4}{r^4} \right) \cos 2\theta; \\ \overline{\theta\theta} &= p + \frac{\rho^2}{r^2} p + q \left( 1 + 3 \frac{\rho^4}{r^4} \right) \cos 2\theta; \\ r\theta &= q \left( 1 - 3 \frac{\rho^4}{r^4} + 2 \frac{\rho^2}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

В случае простого растяжения в направлении оси  $y$  имеем  $p = q = \frac{1}{2} Y_y$ , и формулы (70) переписутся таким образом<sup>2</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= \frac{1}{2} Y_y \left[ 1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \left( 1 - 4 \frac{\rho^2}{r^2} + 3 \frac{\rho^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]; \\ \overline{\theta\theta} &= \frac{1}{2} Y_y \left[ 1 + \frac{\rho^2}{r^2} + \left( 1 + 3 \frac{\rho^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]; \\ \overline{r\theta} &= \frac{1}{2} Y_y \left[ 1 + 2 \frac{\rho^2}{r^2} - 3 \frac{\rho^4}{r^4} \right] \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Пользуясь этими формулами, можно получить распределение напряжений в растянутой полосе, ослабленной круглым отверстием (рис. 35), если только радиус отверстия мал по сравнению с шириной полосы. При ширине полосы, равной четырем диаметрам отверстия, погрешность формул (71) не превосходит 6%. Наибольшие растягивающие напряжения в такой полосе получаются у краев отверстия в точках  $a-a$ , соответствующих концам горизонтального диаметра отверстия. Здесь  $\theta = 0$  и  $\theta = 180^\circ$  и формулы (71) дадут  $(\theta\theta)_{\max} = 3Y_y$ .

<sup>1</sup> Тимошенко С. П. О влиянии круглых отверстий на распределение напряжений в пластинках. Изв. Киевского политехнического института, 1907, год 7, кв. 3, стр. 95—113. Отд. оттиск, Киев, 1907, 21 стр.

<sup>2</sup> K i r s c h G. Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1898, Bd 42, N 29, SS. 797—807.

Местные напряжения в три раза превосходят среднее значение растягивающих напряжений в полосе. Распределение растягивающих напряжений по плоскости поперечного сечения  $mn$  представлено на рисунке заштрихованной площадью. Легко убедиться на основании формул (71), что в точках  $b-b$ , соответствующих концам вертикального диаметра отверстия, имеют место сжимающие напряжения  $\bar{\theta}\bar{\theta}$ , численно равные растягивающим напряжениям  $Y_y$ . Полученные результаты с достаточной точностью подтверждаются опытами<sup>1</sup>.

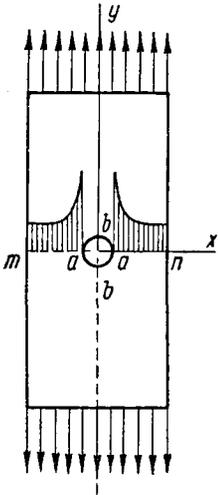


Рис. 35.

Если положить  $X_x = -Y_y$ , то мы получим в пластинке напряжение, соответствующее *чистому сдвигу*. Наибольшие растягивающие и наибольшие сжимающие напряжения получаются у краев отверстия. Их величины, как легко видеть из формул (70), соответственно равны  $\pm 4X_x$ .

Места наибольших напряжений совпадают с концами диаметров отверстия, наклоненных под углом  $45^\circ$  к направлению сдвига. Еще большие местные напряжения получают в растягиваемой полосе, если она ослаблена не круглым, а продолговатым отверстием, вытянутым в направлении, перпендикулярном к растяжению. Например, в случае эллиптического отверстия с большой полуосью  $a$  и малой полуосью  $b$  у краев отверстия в точках, соответствующих концам большой оси, перпендикулярной к растяжению, получают такие напряжения<sup>2</sup>:  $p = p_0 \left(1 + \frac{2a}{b}\right)$ , где  $p_0$  —

среднее значение растягивающих напряжений по ослабленному сечению полосы. Увеличивая отношение  $a/b$ , мы

можем получить сколь угодно большие местные напряжения.

Теоретически разобран еще случай Лемнискатного отверстия<sup>3</sup>. Случай отверстия, форма которого подходит к форме поперечного сечения железнодорожного туннеля, экспериментально изучен А. Леоном<sup>4</sup>.

Сделанные выше заключения относительно распределения напряжений у краев отверстия будут справедливы лишь до тех пор, пока материал следует закону Гука. Как только в перенапряженных местах материал выходит за предел упругости и появляются остаточные деформации, распределение напряжений перестает следовать найденному выше закону. Если растягивать полосу, изготовленную из материала, способного получать значительные пластические удлинения, например из мягкого железа, то в этом случае с переходом растяжения за предел упругости распределение напряжений по сечению, проходящему через центр отверстия, приближается постепенно к равномерному и разрыв ослабленной полосы обыкновенно происходит при большем среднем напряжении, чем в случае полосы цельной. Результат этот объясняется тем

<sup>1</sup> P r e u s s E. Versuche über die Spannungsverminderung durch die Ausrundung scharfer Ecken; Versuche über die Spannungsverteilung in Kranhaken; Versuche über die Spannungsverteilung in gleichen Zugstäben. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1912, H. 126, SS. 1—24; SS. 25—46; SS. 47—57.

<sup>2</sup> I n g l i s C. E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. Engineering, 1913, vol. 95, N 2465, March 28, p. 415.

<sup>3</sup> К о л о с о в Г. В. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости. Юрьев, тип. К. Маттисена, 1909, 187 стр., см. стр. 37.

<sup>4</sup> L e o n A., W i l l h e i m F. Über die Zerstörung in tunnelartig gelochten Gesteinen Teil 2. Österreichische Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst, 1912, Bd 18, N 16, SS. 281—285.

обстоятельством, что резкое уменьшение площади поперечного сечения полосы у отверстия затрудняет образование шейки. В случае хрупких материалов, не способных выдерживать значительные деформации, момент перехода за предел упругости близок к моменту разрушения, и потому влияние местных перенапряжений должно сильно понизить временное сопротивление ослабленной полосы. Это хорошо подтверждается на опытах со стеклянными образцами.

Еще большее влияние на прочность полосы оказывает ослабление ее отверстием в том случае, когда приходится иметь дело с переменными усилиями. Благодаря усталости материала в перенапряженных местах могут возникнуть при этих условиях трещинки, которые при дальнейшем развитии приведут к разрушению образца при напряжениях, среднее значение которых меньше предела упругости материала <sup>1</sup>.

## § 42. Распределение напряжений при действии на пластинку сосредоточенной силы

Пусть на пластинку, ограниченную прямолинейным краем  $AB$  рис. 36), действуют нормальные усилия, равномерно распределенные по линии  $OO$  (нормальной к срединной плоскости пластинки) и приводящиеся к силе  $P$ . Толщину пластинки будем считать очень малой по сравнению с другими размерами и в дальнейшем примем ее равной единице. Так как по линии  $OO$  распределяются усилия, приводящиеся к конечной силе  $P$ , то здесь мы, очевидно, получим теоретически бесконечно большие напряжения.

Материал пластинки под действием сосредоточенной силы должен претерпеть по линии  $OO$  остающуюся деформацию. Чтобы иметь право применять в дальнейшем вывод уравнения теории упругости, надо представить себе, что место приложения сил выделено из пластинки цилиндрической поверхностью малого радиуса  $\rho$ , причем этот радиус подобран так, что вне указанного цилиндра материал пластинки нигде не выходит за предел упругости. Задача наша будет заключаться в разыскании такого распределения напряжений, при котором по краю  $AB$  пластинки как нормальные, так и касательные напряжения обращаются в нуль во всех точках, кроме точек линии  $OO$ . По цилиндрической поверхности, выделяющей линию  $OO$ , напряжения должны представлять собою систему сил, эквивалентную силе  $P$ . Это последнее условие показывает, что напряжения по мере удаления от линии  $OO$  убывают обратно пропорционально радиусу  $r$ . Очевидно также, что напряжения будут зависеть от угла  $\theta$  и для одного и того же расстояния  $r$  эти напряжения должны быть тем больше, чем ближе  $\theta$  к нулю.

Попробуем удовлетворить дифференциальным уравнениям равновесия и основному уравнению плоской задачи

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0, \quad (a)$$

<sup>1</sup> Некоторые опыты, сделанные в этом направлении, указаны в нашем Курсе сопротивления материалов, упомянутом на стр. 96.

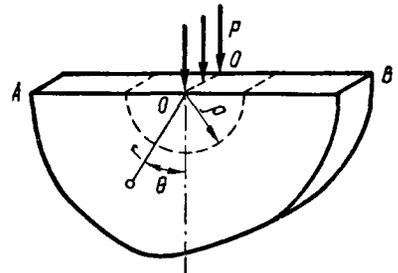


Рис. 36

допустив, что в каждой точке пластинки имеет место простое сжатие по направлению радиуса  $r$ , соединяющего данную точку с точкой  $O$ , и что величина этого сжимающего напряжения пропорциональна  $\cos \theta^1$ . В таком случае при выбранных нами полярных координатах будем иметь

$$\overline{\theta\theta} = \overline{r\theta} = 0; \quad \overline{rr} = -\frac{k \cos \theta}{r}, \quad (b)$$

где  $k$  — коэффициент, величину которого определим из условий равновесия.

После дифференцирования легко убедиться, что выбранное нами распределение напряжений соответствует такой функции напряжений:  $\varphi = -\frac{kr\theta \sin \theta}{2}$ .

Функция эта удовлетворяет уравнению (a). В таком случае решение (b) удовлетворяет уравнениям теории упругости; оно удовлетворяет также условию на крае  $AB$  пластинки и, следовательно, представляет собой решение поставленной выше задачи.

Остается теперь подобрать произвольную постоянную величину  $k$  так, чтобы усилия по цилиндрической поверхности радиуса  $\rho$ , выделяющей линию приложения сил, были эквивалентны силе  $P$ .

На элемент поверхности, соответствующий углу  $d\theta$ , приходится усилие

$\overline{rr} \rho d\theta = -k \cos \theta d\theta$ . Проектируя все эти усилия на направление силы  $P$ , для определения  $k$  получаем уравнение:

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} k \cos^2 \theta d\theta = P,$$

откуда  $k = \frac{2P}{\pi}$ .

Для радиального напряжения  $\overline{rr}$  окончательно получим формулу

$$\overline{rr} = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}. \quad (72)$$

Если из какой-либо точки по линии действия силы  $P$  описать окружность, касательную к краю пластинки  $AB$  (рис. 37), то для всех точек этой окружности величина  $\frac{\cos \theta}{r}$  будет постоянна и равна  $\frac{1}{d}$ , где  $d$  — диаметр описанной окружности. Следовательно, точки равных напряжений в пластинке располагаются на окружностях, касательных к линии  $AB$  в точке приложения силы  $O$ .

Рассмотрим напряжения в пластинке по какому-либо сечению  $mn$ , перпендикулярному к направлению силы  $P$ . По этому сечению будут действовать как нормальные напряжения  $Y_y$ , так и касательные  $X_y$ . Так как в каждой точке пластинки имеется простое сжатие в направлении  $r$ , то для какого-либо

<sup>1</sup> Это решение впервые получено А. Фламаном. F l a m a n t A. Sur la repartition des pressions dans in solide rectangulaire charge transversalement. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 1892, t. 114, N 25, pp. 1465—1468. См. также F l a m a n t A. De l'influence sur la flexion des poutres de la position superficielle de la charge. Annales des ponts et chaussées, Serie 7, 1893, t. 6, 2 semestre, N 27, pp. 228—260.

элемента  $dF$ , составляющего с радиусом  $r$  угол  $\frac{\pi}{2} - \theta$ , будем иметь

$$Y_y = \bar{r}r \cos^2 \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos^2 \theta}{r}; \tag{c}$$

$$X_y = -\bar{r}r \sin \theta \cos \theta = \frac{2P}{\pi} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{r},$$

или, принимая во внимание, что  $\cos \theta = y/r$ ,  $\sin \theta = -x/r$ , получим

$$Y_y = -\frac{2P}{\pi} \frac{y^3}{r^4};$$

$$X_y = -\frac{2P}{\pi} \frac{xy^2}{r^4}.$$

Подобным же образом найдем  $X_x = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2y}{r^4}$ .

При выбранном чисто радиальном распределении напряжений (72) по сечениям, перпендикулярным к пластинке и проходящим через точку приложения силы, нет никаких напряжений. Следовательно, мы можем воспользоваться нашим решением для напряжений в клине, подвергающемся действию силы  $P$ , сосредоточенной в вершине <sup>1</sup>. При этом нужно будет только соответствующим образом выбрать коэффициент  $k$  в общем решении (b). Возьмем, например, случай симметричного клина (рис. 38). Если предположить, что в каждой точке действует простое радиальное сжатие  $\bar{r}r = -\frac{k' \cos \theta}{r}$ , то для определения коэффициента  $k'$  полу-

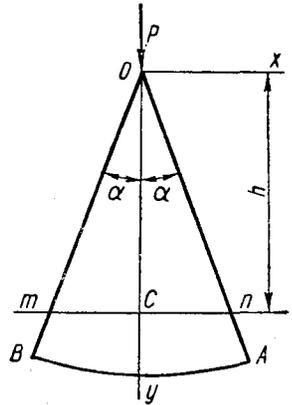


Рис. 38.

чим уравнение  $2 \int_0^\alpha \bar{r}r \cos \theta d\theta = -P$ . Интересно проследить изменение нормальных напряжений  $Y_y$  по сечению клина  $mn$  при различных значениях  $\alpha$ .

Обозначив через  $h$  расстояние поперечного сечения клина  $mn$  от вершины, получим для напряжений  $Y_y$  формулу  $Y_y = -\frac{k'h^3}{(x^2 + h^2)^2}$ . Для точки  $C$  эти напряжения равны  $-\frac{k'}{h}$ . Что касается крайних точек поперечного сечения  $mn$ , то для них напряжение зависит от угла  $\alpha$  и определяется выражением  $-\frac{k'}{h(1 + \tan^2 \alpha)^2}$ . Для углов  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\alpha = 30^\circ$  и  $\alpha = 15^\circ$  имеем  $Y_y = -\frac{k'}{4h}$ ,  $Y_y = -\frac{k'}{2,48h}$ ,  $Y_y = -\frac{k'}{1,61h}$ .

По этим результатам можно составить представление о том, насколько неравномерно распределяются напряжения при сжатии клина в зависимости от угла при вершине.

<sup>1</sup> Mesnager A. Contribution a l'étude de la déformation élastique des solides. Annales des ponts et chaussées, pt. 1, 1901, 8 série, 71 année, 4<sup>e</sup> trimestre, pp. 129—190; Mitchell J. H. The inversion of plane stress. Proceedings of the London Mathematical Society, Series A, 1902, vol. 34, N 772, pp. 134—142. Случай, когда точка приложения силы совпадает с вершиной клина, рассмотрен К. Вихартом. Wiegand K. Über das Spalten und Zerrüben elastischer Körper. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1907, Bd 55, H. 1, SS. 60—103.

В случае изгиба клина (рис. 39) мы можем воспользоваться прежним решением (b). Угол  $\theta$  отсчитываем от направления силы  $P$ . Находим, что по линии  $Ox$  напряжения обращаются в нуль — здесь пройдет нейтральный слой. Для точек лежащих выше нейтрального слоя, будем иметь радиальное растяжение, в точках, расположенных ниже нейтрального слоя, — сжатие. Коэффициент  $k$  в общем решении (b) определится из уравнения

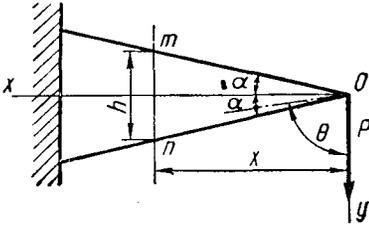


Рис. 39.

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \bar{r} r \cos \theta r d\theta = -P.$$

Вставляя вместо  $\bar{r}r$  его значение (b), найдем для  $k$  выражение  $k = \frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha}$ .

Нормальные и касательные напряжения по поперечному сечению представляются так:

$$X_x = -\frac{2My}{x^3} \frac{\sin^4 \theta}{2\alpha - \sin 2\alpha}; \quad X_y = -\frac{2Py^2}{x^3} \frac{\sin^4 \theta}{2\alpha - \sin 2\alpha}.$$

Здесь через  $M$  обозначена величина  $Px$  изгибающего момента в сечении  $mn$ . В случае малых значений угла  $\alpha$  можно положить  $2\alpha - \sin 2\alpha = \frac{(2\alpha)^3}{6}$  и представить формулы для напряжений по сечению  $mn$  в таком виде:

$$X_x = -\frac{My}{J} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}\right)^3 \sin^4 \theta;$$

$$X_y = -\frac{12Py^2}{h^3} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}\right)^3 \sin^4 \theta.$$

При малых значениях  $\alpha$  величина  $\sin \theta$  близка к единице, распределение нормальных напряжений  $X_x$  мало отклоняется от линейного закона, принимаемого

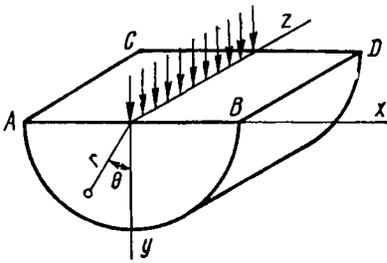


Рис. 40.

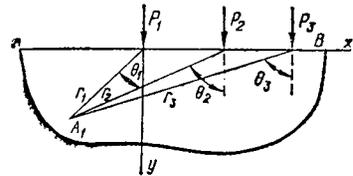


Рис. 41.

в элементарной теории при рассмотрении изгиба брусьев переменного сечения. Касательные напряжения достигают наибольшего значения у верхнего и нижнего краев поперечного сечения  $mn$ . Полагая  $y = \pm h/2$ , получаем для максимальных касательных напряжений формулу

$$(X_y)_{\max} = -\frac{3P}{h} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}\right)^3 \cos^4 \alpha.$$

При малых значениях  $\alpha$  эта формула дает для  $(X_y)_{\max}$  величину, близкую к  $3P/h$ , т. е. вдвое больше той, что получается в элементарной теории изгиба

балок постоянного прямоугольного сечения для точек, лежащих по нейтральной линии.

Решение (72), полученное нами для тонкой пластинки, может быть применено и к случаю длинного цилиндра с плоской гранью  $ABCD$  (рис. 40), если давления равномерно распределены по образующей цилиндра, совпадающей с осью  $z$ . В этом случае в местах, удаленных от концов цилиндра, деформация будет приблизительно плоской, и при изучении напряжений можно ограничиться рассмотрением вырезанной из цилиндра пластинки, размер которой в направлении оси  $z$  равен единице.

Без всяких затруднений решение (72) может быть применено и в случае дей-

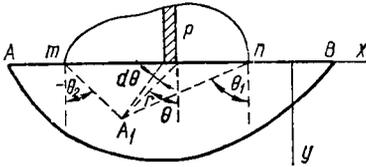


Рис. 42

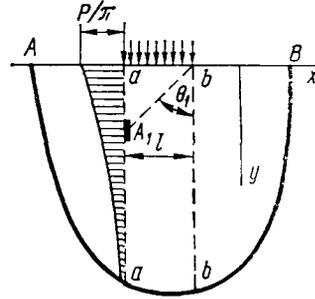


Рис. 43.

ствия нескольких сосредоточенных сил (рис. 41). Складывая действия отдельных сил, мы для какой-либо точки  $A_1$  пластинки получим такие значения напряжений:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\frac{2}{\pi} \left( \frac{P_1 \sin^2 \theta_1 \cos \theta_1}{r_1} + \frac{P_2 \sin^2 \theta_2 \cos \theta_2}{r_2} + \dots \right); \\ Y_y &= -\frac{2}{\pi} \left( \frac{P_1 \cos^3 \theta_1}{r_1} + \frac{P_2 \cos^3 \theta_2}{r_2} + \dots \right); \\ X_y &= -\frac{2}{\pi} \left( \frac{P_1 \sin \theta_1 \cos^2 \theta_1}{r_1} + \frac{P_2 \sin \theta_2 \cos^2 \theta_2}{r_2} + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Здесь  $P_1, P_2$  представляют собой значения сжимающих сил, отнесенные к единице толщины пластинки.

От сосредоточенных сил легко перейти к любой сплошной нагрузке (рис. 42), распределенной на участке  $mn$ . Если через  $p$  обозначим интенсивность сплошной нагрузки, то давление, соответствующее бесконечно малому элементу, заштрихованному на рисунке, будет равно  $\frac{pr d\theta}{\cos \theta}$ .

Формулы для напряжений в точке  $A_1$  напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\frac{2}{\pi} \int_{-\theta_2}^{\theta_1} p \sin^2 \theta d\theta; \\ Y_y &= -\frac{2}{\pi} \int_{-\theta_2}^{\theta_1} p \cos^2 \theta d\theta; \\ X_y &= -\frac{2}{\pi} \int_{-\theta_2}^{\theta_1} p \sin \theta \cos \theta d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

На рис. 43 представлено распределение касательных напряжений по  $aa'$  в случае действия равномерной нагрузки интенсивности  $p$  на участке  $ab$ . Для какой-либо точки  $A_1$  прямой  $aa'$  напряжение, на основании приведенной выше

формулы, напишется так:

$$X_y = \frac{p}{\pi} \sin^2 \theta_1 = \frac{p}{\pi} \cdot \frac{l^2}{l^2 + y^2}.$$

Наибольшее напряжение<sup>1</sup> равно  $p/\pi$ . С возрастанием  $y$  напряжение быстро падает. Легко проверить, что сумма всех касательных усилий по сечению  $aa$  равна  $\frac{pl}{2}$ . В самом деле

$$\int_0^\infty X_y dy = \frac{pl^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dy}{l^2 + y^2} = -\frac{pl}{\pi} \left[ \arcsin \frac{l}{\sqrt{l^2 + y^2}} \right]_0^\infty = \frac{pl}{2}.$$

Мы до сих пор предполагали, что силы направлены нормально к прямолинейному краю пластинки. Нетрудно распространить решение и на случай на-

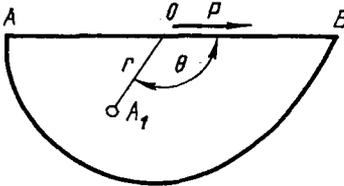


Рис. 44.

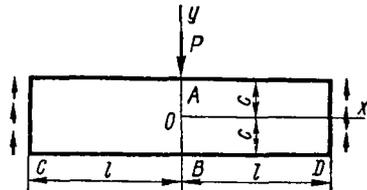


Рис. 45.

клонных сил, так как при действии силы  $P$ , направленной по  $AB$  (рис. 44), имеет место прежнее решение (72), нужно только  $\theta$  отсчитывать от нового направления силы  $P$ .

При разыскании решения (72) мы предполагали, что пластинка имеет бесконечно большие размеры и потому пренебрегали весьма малыми усилиями по контуру. Полученное решение может быть применено также к пластинке конечных размеров, если нужно разыскать напряжения вблизи точки приложения сосредоточенной силы  $P$ . Для определения напряжений в точках, удаленных от силы  $P$ , необходимо принять во внимание распределение усилий по контуру пластинки, благодаря чему задача становится гораздо сложнее. Мы приводим здесь несколько решений для частных случаев, могущих иметь практическое значение<sup>2</sup>. При исследовании изгиба прямоугольной пластинки сосредоточенной силой (рис. 45) мы можем для точек, удаленных от концов и от места приложения силы  $P$ , вычислять напряжения, пользуясь решением для изгиба балки силой, приложенной на конце (§ 32). У точки приложения силы  $P$  на вычисленные таким образом напряжения наложатся местные напряжения от сосредоточенной силы. В начале координат эти напряжения имеют такие значения<sup>3</sup>:  $X_x = 0,249 \frac{P}{2c}$ ;  $Y_y = -0,920 \frac{P}{2c}$ ;  $X_y = 0$ . Для нижней точки  $B$  те же напряжения будут  $X_x = -0,250 \frac{P}{2c}$ ;  $Y_y = X_y = 0$ . Сравнивая эти результаты с наибольшими напряжениями  $X_x$  от изгиба  $\frac{P}{2c} \cdot \frac{3}{2c}$ , заключаем, что дополнительные напряжения в точках  $O$  и  $B$  могут иметь практическое значение лишь в случае сравнительно коротких балок.

Появление дополнительных сжимающих напряжений  $X_x$  в точке  $B$  можно объяснить таким образом. Радиальные давления у точки  $A$  (рис. 46, а) стати-

<sup>1</sup> Мы исключаем из рассмотрения точку  $a$ , соответствующую разрыву непрерывности выражений для напряжений и для внешних давлений.

<sup>2</sup> См. работу L. N. G. Filon, указанную на стр. 73.

<sup>3</sup> См. стр. 100 и 103 работы L. N. G. Filon, указанной на стр. 73.

чески эквивалентны вертикальной силе  $P$  и двум горизонтальным взаимно противоположным силам  $\frac{P}{\pi}$  (рис. 46, б). Эти эксцентрично приложенные продольные силы вызовут по поперечному сечению как растягивающие напряжения, так и напряжения изгиба. Последние напряжения для нижнего края пластинки, очевидно, будут сжимающими.

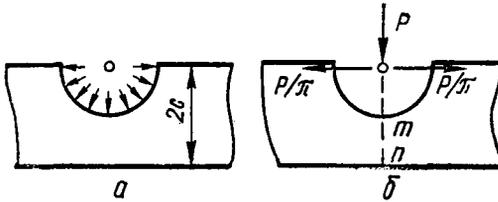


Рис. 46.

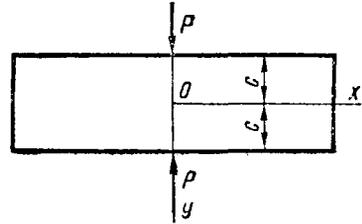


Рис. 47.

Заметим, что распределение напряжений для рассматриваемого случая изгиба прямоугольной пластинки сосредоточенной силой можно получить при помощи общего решения плоской задачи для полосы (§ 35) следующим образом. Исходим из решения (72), полученного для пластинки бесконечно больших размеров. Этому решению соответствует вполне определенное распределение касательных и нормальных напряжений по  $CD$  (рис. 45) и по концевым поперечным сечениям пластинки. Приложим теперь по  $CD$  усилия, равные и прямо противоположные только что найденным, и рассмотрим изгиб пластинки под действием этих усилий. Распределение напряжений в этом случае может быть приближенно представлено тригонометрическим рядом (§ 35). Налагая два

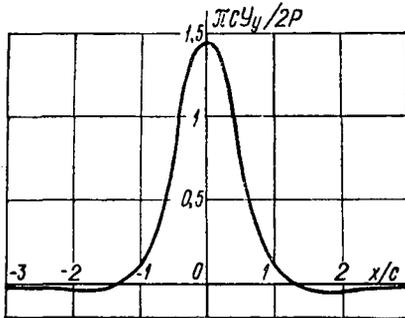


Рис. 48.

приложенных таким путем решения, придем к изгибу полосы, нижняя грань которой свободна от всяких усилий. Остается только наложением простого растяжения по оси  $x$  и чистого изгиба парами сил, приложенными по концам, привести усилия по концевым сечениям к вертикальным опорным реакциям, равным  $\frac{P}{2}$ .

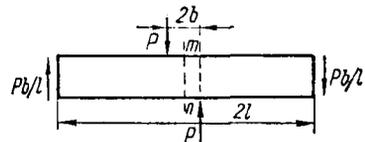


Рис. 49.

полученных таким путем решения, придем к изгибу полосы, нижняя грань которой свободна от всяких усилий. Остается только наложением простого растяжения по оси  $x$  и чистого изгиба парами сил, приложенными по концам, привести усилия по концевым сечениям к вертикальным опорным реакциям, равным  $\frac{P}{2}$ .

В том случае, когда пластинка с прямоугольным контуром подвергается действию двух взаимно противоположных сил  $P$  (рис. 47), распределение напряжений у точек приложения сил с достаточной точностью может быть представлено решением (72). В удаленных точках величины напряжений могут быть получены таким же путем, как и в рассмотренном выше случае изгиба пластинки <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Timpe A. Bemerkungen zu den Sommerfeldschen Ausführungen «Über die Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen». Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1907, Bd 55, N 2, SS. 149—224.

На рис. 48 представлено распределение напряжений  $Y_y$  по нормальному сечению пластинки, проходящему через ось  $x$ . Мы видим, что сжатие распространяется лишь на ширину, несколько бóльшую ширины полосы, и распределяется по сечению весьма неравномерно. Наибольшее напряжение соответствует началу координат:  $Y_y = -1,44 \frac{2P}{\pi c}$ .

Исследован также случай, когда силы  $P$  сдвинуты одна относительно другой (рис. 49). Здесь интересно отметить распределение касательных напряжений по поперечному сечению  $mn$ , делящему пополам расстояние между линиями действия сил  $P$ .

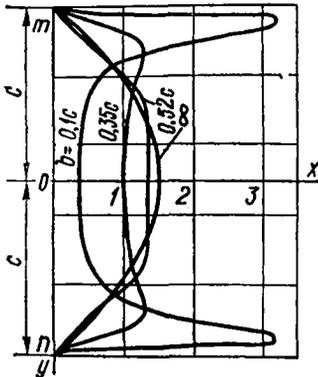


Рис. 50.

При малых величинах расстояния  $2b$  распределение касательных напряжений может сильно отклоняться от параболического закона, принимаемого обычно при расчетах. На рис. 50 показано<sup>1</sup> распределение этих напряжений для нескольких частных значений

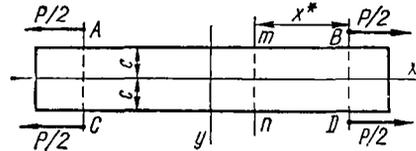


Рис. 51.

ний отношения  $b/c$ . В качестве примера рассмотрим растяжение прямоугольной полосы силами, сосредоточенными на продольных гранях (рис. 51). Примерно в таких условиях при некоторых способах закрепления может оказаться металлический брусок при испытании на разрыв. Для определения модуля упругости  $E$  измеряют обыкновенно удлинения бруска по краям  $AC$  и  $BD$ . Предполагая распределение растягивающих напряжений по сечению бруска равномерным, определяют модуль упругости из соотношения

$$e_{xx} = \alpha \frac{P}{2Ec} \tag{d}$$

Толщина пластинки принята равной единице длины.

Более подробные исследования показывают, что в местах, близких к точкам приложения сил, растягивающие напряжения распределяются неравномерно и в формулу (d) необходимо ввести некоторый множитель  $\alpha$ , зависящий от расстояния  $x^*$  рассматриваемого сечения до места приложения сил.

Удлинение придется вычислять по формуле  $e_{xx} = \alpha \frac{P}{2Ec}$ , причем значения  $\alpha$  приведены ниже:

$\frac{x^*}{c}$	$\pi$	$\frac{2}{3} \pi$	$\frac{1}{2} \pi$	$\frac{1}{3} \pi$	$\frac{1}{6} \pi$
$\alpha$	0,997	0,982	0,985	1,084	1,652

Мы видим, что лишь у места приложения сил получается значительное перенапряжение материала. Отступая от места приложения сил на расстояние, равное ширине полосы, можно с достаточной точностью считать распределение напряжений равномерным и применять формулу (d).

<sup>1</sup> См. стр. 126 работы L. N. G. Filon, упомянутой на стр. 73.

§ 43. Сжатие кругового диска и кругового кольца двумя взаимно противоположными силами

Рассмотрим предварительно распределение напряжений в неограниченной пластинке при действии сосредоточенной силы. К решению этой задачи мы придем, складывая две пластинки, ограниченные прямолинейными краями  $AB$  и  $A_1B_1$  и нагруженные силами  $P$  (рис. 52). Используя решение (72), найдем, что по краям пластинок  $AB$  и  $A'B'$  нет никаких напряжений. Каждая пара соответствующих точек  $m$  и  $n$  будет совершать только вертикальное перемещение, одинаковое для обеих точек, поэтому обе пластинки после деформации можно сложить. Получим одну неограниченную пластинку, к которой приложена сила  $2P$ .

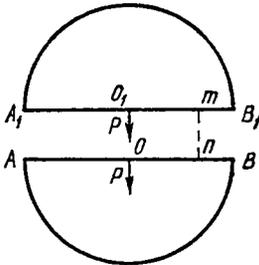


Рис. 52.

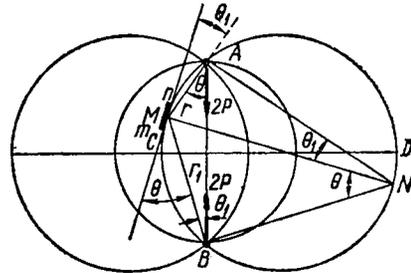


Рис. 53.

Теперь рассмотрим случай, когда к пластинке неограниченных размеров в точках  $A$  и  $B$  приложены две прямо противоположные силы, равные  $2P$  (рис. 53). Выше мы показали, что при определении напряжений, вызываемых каждой силой в отдельности, можно пользоваться решением (72). При определении напряжений в какой-либо точке  $M$  нужно будет суммировать действия радиального сжатия  $-\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}$ , соответствующего силе, сосредоточенной в  $A$ , и радиального сжатия  $-\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta_1}{r_1}$  от силы  $2P$ , приложенной в точке  $B$ .

Особенно просто это суммирование выполняется для точек, лежащих на окружности, описанной на  $AB$  как на диаметре. Для этих точек направления  $r$  и  $r_1$  будут взаимно перпендикулярны и соответствующие им напряжения будут, следовательно, главными напряжениями. Кроме того, для тех же точек будем иметь  $\frac{\cos \theta}{r} = \frac{\cos \theta_1}{r_1} = \frac{1}{d}$ , где  $d$  — расстояние между точками  $A$  и  $B$ .

Следовательно, при действии на неограниченную пластинку двух взаимно противоположных сжимающих сил  $2P$ , приложенных в  $A$  и  $B$ , во всех точках окружности<sup>1</sup>, построенной на  $AB$  как на диаметре, возникает равномерное сжатие, и соответствующее сжимающее напряжение равно  $-\frac{2P}{\pi d}$ . Если по этому кругу произвести разрез, то получим распределение напряжений в круговом диске; сжатом двумя взаимно противоположными сосредоточенными силами  $P$  и нормальными давлениями  $-\frac{2P}{\pi d}$ , равномерно распределенными по контуру. Присоединив к радиальным распределениям напряжений равномерное растягивающее напряжение величины  $\frac{2P}{\pi d}$ , получим решение задачи,

<sup>1</sup> Точки  $A$  и  $B$  при этом, конечно, исключаются.

представленной на рис. 54<sup>1</sup>. Примерно в таких условиях находится элемент цилиндрического катка мостовой опоры, вырезанный двумя плоскостями, перпендикулярными к оси цилиндра. Давления, передаваемые на каток, предполагаются равномерно распределенными вдоль образующих цилиндра. При этом условии деформацию вдали от концов катка можно считать плоской.

Вычислим величину напряжений по какой-либо площадке  $mn$ , лежащей в плоскости диаметрального сечения на расстоянии  $x$  от оси катка. По симметрии заключаем, что касательные напряжения по этой площадке отсутствуют. Нормальные напряжения получим, суммируя действия двух радиальных сжимающих напряжений с равномерным растяжением. Принимая во внимание, что в точках диаметрального сечения  $r = r_1$  и  $\theta = \theta_1$ , для площадки  $mn$  окончательно получим

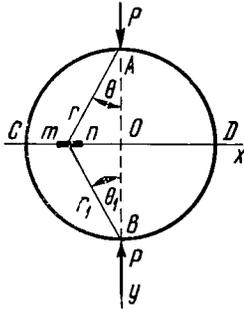


Рис. 54.

$$Y_y = -\frac{4P}{\pi} \cdot \frac{\cos^3 \theta}{r} + \frac{2P}{\pi d} = \frac{2P}{\pi d} \left[ 1 - \frac{4d^3}{(d^2 + 4x^2)^2} \right].$$

У концов диаметра  $CD$  напряжения эти обращаются в нуль. В центре они достигают своего наибольшего значения  $-6P/\pi d$ , т. е. равны примерно двойному среднему значению, получаемому делением силы  $P$  на площадь диаметрального сечения  $CD$ .

Вопрос о распределении напряжений у точек  $A$  и  $B$  в случае, когда силы  $P$  являются результатом надавливания одного тела на другое, мы рассмотрим ниже в связи с задачей о сжатии упругих тел. Возвратимся теперь к распределению напряжений в неограниченной пластинке, представленной на рис. 53, и рассмотрим напряжения в точке  $M$ , лежащей на круге  $ADBC$ . Возьмем в этой точке площадку  $mn$ , нормальную к плоскости пластинки и касательную к кругу  $ADBC$ . Углы, составляемые этой площадкой с направлениями радиусов  $r$  и  $r_1$ , определяются как углы между касательной и хордами круга  $ADBC$  и будут равны, как легко видеть из рисунка, углам  $\theta_1$  и  $\theta$ . Следовательно, нормаль к площадке  $mn$  (диаметр круга  $MN$ ) будет составлять с радиусами  $r$  и  $r_1$  углы  $\theta_1 = 90^\circ$  и  $\theta = 90^\circ$ . Нормальные и касательные напряжения по  $mn$ , обусловленные радиальными сжатиями по  $r$  и  $r_1$ , представляются такими формулами:

$$\begin{aligned} n &= -\frac{2P}{\pi} \left( \frac{\cos \theta}{r} \sin^2 \theta_1 + \frac{\cos \theta_1}{r_1} \sin^2 \theta \right); \\ t &= -\frac{2P}{\pi} \left( \frac{\cos \theta}{r} \sin \theta_1 \cos \theta_1 - \frac{\cos \theta_1}{r_1} \sin \theta \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (a)$$

Эти формулы сразу упрощаются, если принять во внимание, что из прямоугольных треугольников  $AMN$  и  $MNB$  имеем  $r = d_1 \sin \theta_1$ ;  $r_1 = d_1 \sin \theta$ . Здесь через  $d_1$  обозначен диаметр круга  $ADBC$ . Вставляя это в формулы (a), находим

$$n = -\frac{2P}{\pi d_1} \sin(\theta + \theta_1); \quad t = 0, \quad (b)$$

т. е. по площадкам, касательным к кругу  $ADBC$ , будут действовать лишь нормальные напряжения (b), постоянные по всей окружности. Если на принятое

<sup>1</sup> Решения этой и следующей задач получены Г. Герцем. Hertz H. R. Über die Verteilung der Druckkräfte in einem elastischen Kreiszyylinder. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1883, Bd 28, H. 2, SS. 125—128. [Перепечатка: Hertz H. Gessammelte Werke. Bd 1. Schriften vermischten Inhalts. Herausgegeben von P. H. Lenard. Leipzig. Johann Ambrosius Barth, 1895, SS. 283—287].

нами радиальное распределение напряжений наложим равномерное растягивающее напряжение  $\frac{2P}{\pi d_1} \sin(\theta + \theta_1)$ , то мы освободим окружность круга  $ADBC$  от нормальных давлений и получим распределение напряжений в диске диаметра  $d_1$ , сжатом двумя равными и прямо противоположными силами  $P$ , приложенными по концам хорды  $AB$ .

Легко получается также распределение напряжений при действии на окружность диска целого ряда взаимно уравнивающих сосредоточенных сил. Рассмотрим одну из этих сил, действующую в направлении хорды  $AB$  (рис. 55). Исходим из радиального распределения напряжений у точки  $A$ , тогда в точке  $C$  по площадке  $mn$  на окружности диска получим радиальное сжимающее напряжение. Относя все к координатам  $r_1$  и  $\theta_1$ , будем иметь для этой точки  $\bar{r}r = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta_1}{r_1}$ ;  $\bar{\theta}\theta = \bar{r}\theta = 0$ .

Перейдем к координатам  $r$  и  $\theta$ , имеющим свое начало в центре диска. Тогда для той же точки  $C$  окружности диска будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{r}r &= -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta_1}{r_1} \sin^2 \theta_2; \\ \bar{r}\theta &= -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta_1}{r_1} \sin \theta_2 \cos \theta_2. \end{aligned} \tag{c}$$

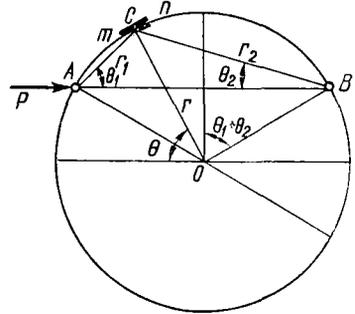


Рис. 55.

Здесь принято во внимание, что радиус  $OC$  составляет с направлением  $r_1$  угол, равный  $90^\circ - \theta_2$ . Вводя обозначение  $d$  для диаметра диска и принимая во внимание, что  $r_1 = d \sin \theta_2$ , можем представить формулы (c) в таком виде:

$$\begin{aligned} \bar{r}r &= -\frac{P}{\pi d} \sin(\theta_1 + \theta_2) - \frac{P}{\pi d} \sin(\theta_2 - \theta_1); \\ \bar{r}\theta &= -\frac{P}{\pi d} \cos(\theta_1 + \theta_2) - \frac{P}{\pi d} \cos(\theta_2 - \theta_1). \end{aligned}$$

Таким образом, при принятом радиальном распределении по поверхности диска появляются следующие три рода напряжений:

1. Сжимающие напряжения, равномерно распределенные по окружности диска

$$-\frac{P}{\pi d} \sin(\theta_1 + \theta_2).$$

2. Равномерно распределенные по окружности диска касательные напряжения

$$-\frac{P}{\pi d} \cos(\theta_1 + \theta_2).$$

3. Напряжение  $P/\pi d$ , действующее на каждую площадку  $mn$  на окружности диска и имеющее направление, противоположное направлению силы  $P$ .

Принимая во внимание, что угол между направлением силы  $P$  и площадки  $mn$  равен  $\theta_1 - \theta_2$ , легко убедиться, что это последнее напряжение даст нам составляющие

$$\bar{r}r = -\frac{P}{\pi d} \sin(\theta_2 - \theta_1); \quad \bar{r}\theta = -\frac{P}{\pi d} \cos(\theta_2 - \theta_1).$$

Теперь представим себе, что на диск действует система взаимно уравнивающих сил. Принимая для каждой силы соответствующее радиальное

распределение, получим для площадки  $mn$  напряжение, состоящее из таких частей:

- 1) нормального сжатия —  $\sum \frac{P}{\pi d} \sin(\theta_1 + \theta_2)$ ;
- 2) касательного напряжения —  $\sum \frac{P}{\pi d} \cos(\theta_1 + \theta_2)$ ;
- 3) напряжения, представленного геометрической суммой напряжений вида (3).

Заметим, что напряжения 1 и 2 в случае системы взаимно уравновешивающихся сил равны нулю. В самом деле, напряжение 2 пропорцио-

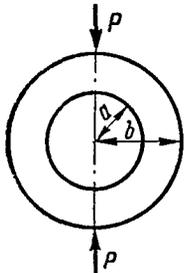


Рис. 56.

нально  $\sum \frac{P \cos(\theta_1 + \theta_2) d}{2}$ , а эта сумма представляет собой не что иное как момент всех сил относительно точки  $O$  и обращается в нуль. Точно так же напряжение 3 пропорционально геометрической сумме всех приложенных к диску сил и тоже обращается в нуль, так как эти силы находятся в равновесии.

Мы видим, таким образом, что, наложив на напряжения вида (с) (см. стр. 115) равномерное растягивающее напряжение  $\sum \frac{P}{\pi d} \sin(\theta_1 + \theta_2)$ , получим решение задачи для случая диска, подвергающегося действию системы взаимно уравновешивающихся сосредоточенных сил<sup>1</sup>.

Пользуясь решением для сплошного диска, можно найти распределение напряжений в круговом кольце, подвергающемся действию сосредоточенных сил, приложенных по наружному контуру. Возьмем, например, случай кругового кольца, сжимаемого двумя взаимно противоположными силами<sup>2</sup>  $P$  (рис. 56).

Исходя из решения для сплошного диска радиуса  $b$ , легко находим нормальные и касательные напряжения по площадкам, нормальным к плоскости диска и касательным к кругу радиуса  $a$ . Теперь представим себе, что по этому кругу произведен разрез. Распределим по контуру полученного таким образом отверстия нормальные и касательные усилия, равные и прямо противоположные только что найденным, и определим при помощи общего решения (69) соответствующие напряжения в кольце. Суммируя эти напряжения с напряжениями для сплошного диска, получаем решение поставленной задачи.

На рис. 57 заштрихованной площадью представлено распределение нормальных напряжений по поперечному сечению кольца, перпендикулярному

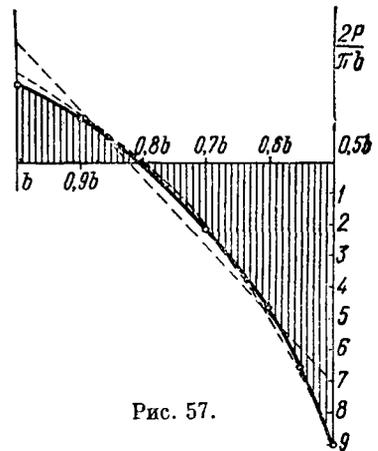


Рис. 57.

<sup>1</sup> Дж. Мичелли распространил это решение на случай действия сосредоточенных сил на края круглого отверстия, вырезанного в пластинке неограниченных размеров. Им дано решение также для случая тяжелого диска. *Mitchell J. H. Elementary distributions of plane stress. Proceedings of the London Mathematical Society, 1901, vol. 32, N 713, pp. 35—61.*

<sup>2</sup> Тимошенко С. П. О распределении напряжений в круговом кольце, сжатом двумя взаимно противоположными силами. *Изв. Киевского политехнического института, 1909, год 9, кн. 1, стр. 21—37.*

к линии действия сил  $P$ . Вычисление напряжений произведено для того случая, когда  $b = 2a$ . Для сравнения на рисунке прямой линией и пунктирной гиперболической кривой представлены распределения тех же напряжений, получаемые элементарным путем на основании общепринятых двух гипотез. Опять мы имеем возможность убедиться, что гипотеза плоских сечений дает результаты, весьма близкие к точному решению задачи.

### § 44. Приближенные способы решения плоской задачи

В тех случаях, когда не удается найти точное решение плоской задачи, можно получить приближенное решение, воспользовавшись началом возможных перемещений и общими рассуждениями, приведенными в § 23. Будем пренебрегать объемными силами и определим плоское напряженное состояние при помощи функции напряжений  $\varphi(x, y)$ . Соответствующие этой функции напряжения и перемещения должны удовлетворять уравнению (50):

$$\delta \iiint V dx dy dz = \iint (\delta X_v u + \delta Y_v v + \delta Z_v w) ds. \quad (a)$$

Допустим, что приближенное выражение функции напряжений может быть представлено в виде ряда

$$\varphi_n(x, y) = a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y) + \dots + a_n f_n(x, y) \dots \quad (b)$$

Причем функции  $f_1(x, y), \dots, f_n(x, y)$  подобраны таким образом, чтобы были удовлетворены условия на тех частях поверхности тела, где заданы поверхностные усилия.

Меняя в выражении (b) значения коэффициентов  $a_1, \dots, a_n$ , будем получать различные распределения напряжений, удовлетворяющие указанным выше условиям на поверхности. Приближенное решение задачи мы найдем, выбрав коэффициенты  $a_1, \dots, a_n$  так, чтобы было удовлетворено условие (a), т. е. чтобы  $a_1, \dots, a_n$  удовлетворяли уравнениям вида

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \iiint V dx dy dz = \iint \left( \frac{\partial X_v}{\partial a_n} + \frac{\partial Y_v}{\partial a_n} v + \frac{\partial Z_v}{\partial a_n} w \right) ds. \quad (c)$$

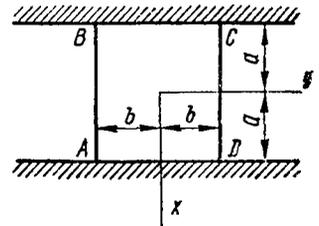


Рис. 58.

В этих уравнениях  $V, X_v, Y_v$  и  $Z_v$  выражены посредством функции напряжений  $\varphi_n(x, y)$ . Интегрирование в правых частях этих уравнений распространяется лишь на те части поверхности, где заданными являются перемещения  $u, v$  и  $w$ , так как на остальных частях поверхности производные  $\frac{\partial X_v}{\partial a_n}, \dots$  обращаются в нуль. Если заданные перемещения  $u, v$  и  $w$  равны

нулю или же для всей поверхности тела заданными являются поверхностные усилия, то правая часть уравнений (c) обращается в нуль и коэффициенты  $a_1, \dots, a_n$  придется определять из условия  $\delta \iiint V dx dy dz = 0$ .

Применим эти общие соображения к такому частному случаю. Предположим, что прямоугольная пластинка ABCD (рис. 58) сжимается между досками прессы, причем грани пластинки BC и AD остаются плоскими и точки этих граней могут перемещаться лишь параллельно оси  $x^1$ .

Мы удовлетворим условиям на боковых гранях пластинки, если положим  $\varphi(x, y) = a_1 y^2 + a_2 (y^2 - b^2)^2 x^2 + a_3 (y^2 - b^2)^3 x^4 + a_4 y^4 + a_5 (y^2 - b^2)^4 x^6$ . В самом деле, соответствующие выражения для напряжений представляются так:

$$Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2a_2 (y^2 - b^2)^2 + 12a_3 (y^2 - b^2)^3 x^2 + 30a_5 (y^2 - b^2)^4 x^4;$$

$$X_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -8a_2 (y^2 - b^2) xy - 24a_3 (y^2 - b^2)^2 x^3 y - 48a_5 (y^2 - b^2)^3 x^5 y.$$

<sup>1</sup> Примерно такие условия мы будем иметь в том случае, если модуль упругости материала пластинки мал по сравнению с модулем упругости материала досок прессы и возникающие при сжатии силы трения по граням BC и AD достаточные, чтобы воспрепятствовать перемещениям точек соприкосновения в направлении оси  $y$ .

Напряжения эти, очевидно, обращаются в нуль при  $y = \pm b$ . Уравнения (с) в данном случае будут иметь такой вид:

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \iint V dx dy = h \int_{-b}^{+b} \frac{\partial X_x}{\partial a_n} dy. \quad (d)$$

Здесь через  $h$  обозначена величина сжатия пластинки. Толщина пластинки в направлении, перпендикулярном к плоскости  $xy$ , принята равной единице. Вставляя в эти уравнения выражения для напряжений, выразим все коэффициенты  $a_1, \dots, a_5$  через величину сжатия  $h$ .

Нетрудно получить выражение тех же коэффициентов через величину сжимающей силы  $P$ , если воспользоваться уравнением статики

$$\int_{-b}^{+b} X_x dy = P.$$

Все указанные вычисления были произведены для случая квадратной пластинки, у которой  $a = b = 1$ . Полученное распределение нормальных и касательных напряжений по плоскостям соприкосновения пластинки с досками пресса представлено на рис. 59. Благодаря трению, препятствующему поперечному расширению пластинки, нормальные напряжения расширения с досками пресса неравномерно. Наименьшее напряжение имеет место посредине ширины пластинки (при  $y = 0$ ). Величина наибольшего напряжения отличается от среднего напряжения  $0,5P \text{ кг/см}^2$  примерно на 12%.

Касательные напряжения по плоскостям соприкосновения обращаются в нуль при  $y = 0$  и при  $y = \pm b$ . Наибольшего значения, равного  $0,092P \text{ кг/см}^2$ , эти напряжения достигают при  $y = 0,5b$ .

Чтобы выяснить степень точности полученного результата, были произведены повторные вычисления при меньшем числе членов в функции напряжений. Результаты вычислений для случая, когда были взяты лишь первые три члена в функции напряжений с соответствующими коэффициентами  $a_1, a_2$  и  $a_3$ , представлены на рисунке пунктиром. Мы видим, что результаты вычислений при пяти и при трех членах мало отличаются друг от друга. Это дает некоторое основание заключить, что намеченный приближенный способ дает в рассматриваемом случае удовлетворительные результаты. Что касается деформаций пластинки, то, как и следовало ожидать, касательные напряжения по плоскостям соприкосновения увеличивают жесткость пластинки и получаемое общее сжатие  $h$  меньше, чем при простом сжатии той же пластинки.

Другой приближенный способ решения плоской задачи дан Л. Ф. Ричардсоном<sup>1</sup>. Ричардсон заменяет основное дифференциальное уравнение плоской задачи соответствующим уравнением в конечных разностях и дает вычислительный способ приближенного определения значений функции напряжений внутри заданного контура, если значения этой функции на контуре определены из условий на поверхности. Свой метод Л. Ф. Ричардсон применяет к решению весьма важной задачи: определению напряжений, возникающих в подпорных стенках.

Приближенное решение плоской задачи может быть получено также и экспериментальным путем. Можно воспользоваться тем обстоятельством, что основное дифференциальное уравнение плоской задачи совершенно совпадает с дифференциальным уравнением изогнутой поверхности пластинки, изгибаемой силами и парами сил, приложенными по контуру. Задача о разыскании распределения напряжений в случае плоской деформации эквивалентна задаче об искривлении пластинки, определенным способом закрепленной по контуру. Исследуя экспериментальным путем искривление пластинки с определенным контуром и определенным способом закрепления по этому контуру, можно получить распределение напряжений для соответствующей плоской задачи<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> См. статью L. F. Richardson, указанную на стр. 10.

<sup>2</sup> Wieghardt K. Über ein neues Verfahren, verwickelte Spannungsverteilungen in elastischen Körpern auf experimentellem Wege zu finden. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1908, H. 49, SS. 15—30.

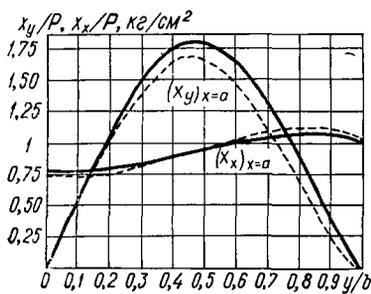


Рис. 59.

## § 45. Экспериментальная проверка распределения напряжений в случае плоской задачи

В случае односвязных контуров распределение напряжений в пластинке, находящейся в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния, не зависит, как мы видели (§ 30), от упругих постоянных материала. Если нам удастся найти распределение напряжений для пластинки из какого-либо изотропного материала, то эти результаты могут быть приняты для пластинки из всякого другого изотропного материала, нужно только, чтобы в обоих случаях величина и расположение внешних сил и размеры пластинок были одинаковы.

Оказывается, что без особых затруднений можно исследовать распределение напряжений в пластинках из таких прозрачных материалов, как стекло и ксилонит. Материалы эти без значительных погрешностей можно считать изотропными, кроме того, они в довольно широких пределах следуют закону Гука<sup>1</sup>. Поэтому результаты опытов со стеклом и ксилонитом могут быть перенесены на случай пластинок, изготовленных из таких важных строительных материалов, как железо и сталь.

При изучении распределения напряжений в стекле применяют оптический метод, пользуясь свойством стекла становиться двояколучепреломляющим под влиянием напряжений<sup>2</sup>.

Предположим, что на прямоугольную стеклянную пластинку, находящуюся в однородном напряженном состоянии (рис. 60) [по горизонтальным граням пластинки действуют равномерно распределенные растягивающие усилия  $X_x$ , к вертикальным граням приложены напряжения  $Y_y$ ], падает плоско поляризованный луч света. Направление луча перпендикулярно к плоскости пластинки;  $OA$  — направление, по которому совершаются колебания. Так как пластинка под действием напряжений стала двояколучепреломляющей, то  $OA$  разложится на два колебания  $OB = OA \cos \alpha$  и  $OC = OA \sin \alpha$ .

Эти составляющие колебания будут распространяться с различными скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , отличными от той скорости  $v$ , которую мы имеем в случае недеформированного стекла.

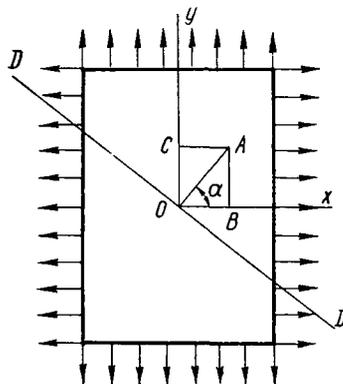


Рис. 60.

<sup>1</sup> С о к е р E. G. The determination by photo-elastic methods, of variable section, with some application to ships' plating. Engineering, 1911, vol. 91, April 21, pp. 531—533; April 28, pp. 566—568.

<sup>2</sup> Изложение основ оптического метода исследования напряженного состояния имеется в статье В. Л. Кирричева «Оптическое изучение упругих деформаций». Вестник общества технологов, 1913, том 20, № 1, стр. 1—9; № 2, стр. 37—47. [Перепечатка: К и р р и ч е в В. Л. Собрание сочинений. Том 1. Изд. Совета Петроградского политехнического института, Петроград, 1917, стр. 205—268]. В этой статье приведен также перечень наиболее важных работ по этому вопросу. Особенное практическое значение имеют работы: М е с n a g e r A. Contribution a l'étude de la déformation élastique des solides. Annales des ponts et chaussées, 1 Partie, 8 série, 1901, 71 année, 4<sup>e</sup> trimestre, pp. 129—190; М е s n a g e r A. Changements de dimensions avec le temps du beton arme ou non. Annales des ponts et chaussées, 1 Partie, Serie 9, 1913, t. 18, N. 6, pp. 710—714; С о к е р E. G. An optical determination of the variation of stress in a thin rectangular plate subjected to shear. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 1912, vol. 86, N 587, pp. 291—319. См. также его статьи: Photo-elasticity, Engineering, 1911, vol. 91, January 6, pp. 1—4, pp. 515—516; The distribution of shearing stress. Engineering, 1912, vol. 94, October 11, p. 509; Optical determination of stress. Engineering, 1912, vol. 93, March 8, pp. 325—327; The design and construction of large polariscopes. Engineering, 1912, vol. 94, July 12, p. 66; С о к е р E. G., Т h o m s o n S. P. The design and construction of large polariscopes. Engineering, 1912, vol. 94, July 26, pp. 134—135; С о к е р E. G. The experimental determination of the stresses in springs and other bodies by optical and electrical methods. Engineering, 1912, vol. 94, September 20, pp. 404—405, September 27, p. 413; The distribution of stresses at the minimum section of a cement briquette. Engineering, 1912, vol. 94, December 13, pp. 824—825; F i l o n L. N. G. The investigation of stresses in a rectangular bar by means of polarized light. Philosophical magazine and Journal of Sciences, Series 6, 1912, vol. 23, N 133, pp. 1—25.

С достаточной точностью можно считать, что  $v_1$  и  $v_2$  — линейные функции напряжений  $X_x$  и  $Y_y$ , и положить

$$\begin{aligned} v_1 &= v + \alpha X_x + \beta Y_y; \\ v_2 &= v + \beta X_x + \alpha Y_y. \end{aligned} \quad (a)$$

Запаздывание одного луча относительно другого при прохождении сквозь пластинку толщины  $\delta$  будет пропорционально этой толщине и разности скоростей  $v_1 - v_2$  или на основании (a) пропорционально разности главных напряжений  $X_x - Y_y$ . Так как разность главных напряжений равна удвоенному наибольшему касательному напряжению, то мы можем сказать, что для пластинки определенной толщины запаздывание одного луча относительно другого дает в известном масштабе величину наибольших касательных напряжений. Если мы сможем это запаздывание измерить, то тем самым получим возможность определять величину наибольших касательных напряжений, играющих столь важную роль при оценке прочности материала.

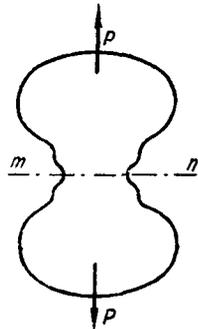


Рис. 61.

Чтобы сделать запаздывание одного луча относительно другого ощутимым для глаза, поставим на пути раздвоившегося при прохождении через пластинку луча света призму Николя и повернем ее таким образом, чтобы она пропускала лишь колебания, совершающиеся в направлении  $OD$ , перпендикулярном к  $OA$ . Если для луча, падающего на пластинку, примем простое колебание по закону синуса и положим  $OA = a \sin \omega t$ , то получим  $OB = a \cos \alpha \sin \omega t$ ;  $OC = a \sin \alpha \sin \omega t$ . После прохождения через пластинку один луч запаздает относительно другого и мы будем иметь  $OB = a \cos \alpha \sin \omega t_1$ ;  $OC = a \sin \alpha \sin (\omega t_1 - \gamma)$ , где  $\gamma$  — разность фаз двух колебаний, пропорциональная относительно запаздыванию, а следовательно, и разности главных напряжений. Через призму Николя пройдут лишь составляющие этих колебаний, имеющие направления  $OD$ , и в результате получим в плоскости  $DD$  колебание, выражаемое формулой

$$\begin{aligned} &a \sin \alpha \cos \alpha \sin \omega t_1 - a \sin \alpha \cos \alpha \sin (\omega t_1 - \gamma) = \\ &= \frac{a \sin 2\alpha}{2} [\sin \omega t_1 - \sin (\omega t_1 - \gamma)] = a \sin 2\alpha \sin \frac{\gamma}{2} \sin (\omega t_1 + m), \end{aligned}$$

$$\text{где } m = \arctg \frac{\sin \gamma}{1 - \cos \gamma}.$$

Следовательно, призма Николя даст явление интерференции, аналогичное явлению Ньютоновых колец, где интерферируют два луча, пути которых отличаются на двойную толщину тонкого слоя воздуха.

Те цветные картины, которые мы получаем в Ньютоновых кольцах, будут получаться также и при прохождении поляризованного света через напряженную пластинку. Цвет, зависящий от относительного запаздывания лучей, будет определять собой разность главных напряжений, а следовательно, и величину наибольшего касательного напряжения.

В случае неоднородной плоской деформации окрашивание в различных местах пластинки будет различное. Одним цветом будут окрашены места, соответствующие какому-либо одному определенному значению максимального касательного напряжения. Таким способом мы не только сможем проверить известные решения плоской задачи, но также без затруднения найдем картину распределения напряжений для случаев, еще не имеющих теоретического решения. Например, Е. Кокер нашел этим способом распределение растягивающих напряжений по поперечному сечению  $mn$  (рис. 61) образца, имеющего форму восьмерки. Образцы такой формы берут при испытании на разрыв цемента.

Оказалось, что наибольшие значения напряжений получают у краев суженного сечения, здесь напряжения в 1,75 раза больше среднего значения растягивающего напряжения, получаемого делением растягивающей силы на площадь суженного сечения.

## 46. Кручение призматических стержней

Призматический невесомый стержень, закрепленный неподвижно в точке  $A$  (рис. 62), скручивается касательными усилиями, распределенными по нижнему концевому сечению и приводящимися к паре сил  $M$ . В главе V (§ 27) мы рассмотрели случай кручения, когда поперечное сечение скручиваемого стержня — круг, и показали, что для этого случая справедлива гипотеза плоских сечений, принимаемая обыкновенно при элементарном решении вопроса о кручении. В общем случае задача о кручении сводится к разысканию решения дифференциальных уравнений равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

удовлетворяющего на боковой поверхности стержня условиям (3), имеющим в рассматриваемом случае вид

$$\left. \begin{aligned} X_x \cos(x\nu) + X_y \cos(y\nu) &= 0; \\ Y_x \cos(x\nu) + Y_y \cos(y\nu) &= 0; \\ Z_x \cos(x\nu) + Z_y \cos(y\nu) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

и шести дифференциальным зависимостям (40):

$$\left. \begin{aligned} (1 + \sigma) \nabla^2 X_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 Y_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 Z_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 Y_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 X_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 X_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Мы упростим решение поставленной задачи, если воспользуемся полуобратным методом Сен-Венана<sup>1</sup>. Сущность этого метода заключается в том, что значения некоторых напряжений задаются наперед, а остальные напряжения подбираются так, чтобы были удовлетворены дифференциальные уравнения равновесия и условия (b) и (c). В тех случаях, когда этого удастся достигнуть, получаем точное решение поставленной задачи теории упругости.

Мы видели, что при кручении круговых стержней только составляющие напряжения  $X_z$  и  $Y_z$  отличны от нуля. Попробуем и в рассматриваемом более общем случае удовлетворить всем уравнениям теории упругости, исходя из допущения  $X_x = Y_y = Z_z = X_y = 0$ . Что касается напряжений  $X_z$  и  $Y_z$ , то допустим, что их распределение одинаково для всех поперечных сечений скручиваемого стержня. В таком случае  $X_z$  и  $Y_z$  будут функциями только  $x$  и  $y$  и вместо систем уравнений (a), (b) и (c) нам придется иметь дело лишь с уравнениями

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} = 0; \quad (a')$$

$$Z_x \cos(x\nu) + Z_y \cos(y\nu) = 0; \quad (b')$$

$$\nabla^2 Y_z = 0; \quad \nabla^2 X_z = 0. \quad (c')$$

При решении плоской задачи мы видели, насколько упрощается иногда исследование вопроса путем введения функции напряжений. Воспользуемся этим методом и в настоящем случае. Сразу видно, что мы удовлетворим уравнению равновесия (a'), если положим

$$Z_x = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad Z_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (d)$$

Рис. 62. где  $\varphi$  — функция от  $x$  и  $y$ . Эта функция должна быть так выбрана, чтобы удовлетворялись уравнения (c'). Вставляя в эти уравнения вместо  $X_z$  и  $Y_z$  их выражения (d), находим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Следовательно, функция напряжений должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \text{const.} \quad (e)$$

<sup>1</sup> Теория кручения призм впервые была разработана Сен-Венаном. Saint-Venant B. Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences, 1855, t. 14, pp. 233—360. [Перевод на русский язык: Сен-Венан Б. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М., Физматгиз, 1961, стр. 15—378]. Появление его замечательного сочинения является одним из крупнейших событий в деле развития теории упругости. Содержание работ Сен-Венана изложено в указанной на стр. 13 монографии J. Todhunter, K. Pearson. См. также указанную в списке на стр. 13 книгу С. Л. М. Н. Navier с примечаниями и дополнениями Сен-Венана.

Остается теперь рассмотреть условие (b') на контуре. Из рис. 62 видим<sup>1</sup>, что  $\cos(xv) = \frac{dy}{ds}$ ;  $\cos(yv) = -\frac{dx}{ds}$ . Следовательно, условие (b') может быть представлено так:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial s} = 0, \quad (f)$$

т. е. функция  $\varphi$  должна иметь на контуре постоянное значение. И так как величина этой постоянной в случае односвязного контура не влияет на напряжения, мы можем выбрать ее равной нулю. Задача о кручении призматических стержней сводится, таким образом, к разысканию одной функции  $\varphi$ , удовлетворяющей уравнению (e) и обращающейся в нуль на заданном контуре поперечного сечения.

Легко проверить, что получаемое таким путем распределение касательных напряжений действительно приводится к скручивающей паре сил. В самом деле, проектируя все касательные усилия, действующие по плоскости поперечного сечения стержня, на координатные оси и принимая во внимание, что  $\varphi$  на контуре постоянно, получаем

$$X = \iint X_z dx dy = \int dx \int \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy = 0;$$

$$Y = \iint Y_z dx dy = - \iint dy \int \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx = 0.$$

Момент тех же усилий будет

$$M' = \iint Y_z x dx dy - \iint X_z y dx dy =$$

$$= - \iint \frac{\partial\varphi}{\partial x} x dx dy - \iint \frac{\partial\varphi}{\partial y} y dx dy.$$

Выполняя интегрирование по частям и принимая во внимание постоянство значения  $\varphi$  на контуре, получаем

$$M' = 2 \iint \varphi dx dy. \quad (75)$$

Постоянная в основном уравнении (e) должна быть выбрана таким образом, чтобы найденный нами момент касательных усилий  $M'$  равнялся моменту  $M$  внешней скручивающей пары. Физическое значение этой постоянной найдем, если от напряжений перейдем к деформациям. В рассматриваемом случае касательное напряжение  $X_y$  равно нулю, следовательно, угол между двумя линейными элементами, лежащими в плоскости поперечного сечения стержня, при кручении не искажается. Возьмем в какой-либо точке сечения элементы  $\delta x$  и  $\delta y$ , параллельные координатным осям. При кручении первый из этих элементов повернется на угол  $\frac{\partial v}{\partial x}$  и второй — на угол  $-\frac{\partial v}{\partial x}$ <sup>2</sup>.

На основании сказанного будем иметь

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha, \quad (h)$$

где  $\alpha$  — угол поворота при кручении для всех линейных элементов, проходящих через выбранную точку и лежащих в плоскости сечения. Этот угол одинаков для всех точек рассматриваемого сечения и представляет собой угол

<sup>1</sup> Дуга  $S$  отсчитывается в направлении, отмеченном стрелкой.

<sup>2</sup>  $u$  и  $v$ , как и прежде (§ 11), обозначают составляющие перемещения по направлению  $x$  и  $y$ .

поворота сечения при скручивании стержня. При переходе от одного поперечного сечения к другому угол  $\alpha$  будет изменяться, причем интенсивность этого изменения характеризуется величиной

$$\tau = \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (k)$$

где  $\tau$  представляет собой угол закручивания стержня, отнесенный к единице его длины.

При помощи выражения (k) преобразуем левую часть основного уравнения

(e). Принимая во внимание, что  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Z_x = \mu e_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ ;  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -Z_y = -\mu e_{zy} = -\mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$ , можем переписать левую часть уравнения (e) в таком виде:

$$\mu \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] = \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -2\mu\tau.$$

Окончательно уравнение, определяющее функцию  $\varphi$ , напишется так:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2\mu\tau. \quad (76)$$

Если для какой-либо формы поперечного сечения стержня нам удастся найти такое решение уравнения (76), при котором  $\varphi$  остается постоянным на контуре, то этим самым решается задача о распределении напряжений при кручении этого стержня. При этом боковая поверхность стержня будет свободна от всяких усилий; что касается концевых поперечных сечений, то на них касательные напряжения должны быть распределены таким же образом, как и на всяком другом поперечном сечении стержня. Если усилия, распределенные по концам и вызывающие скручивание стержня, распределены по какому-либо иному закону, то это обстоятельство вызовет изменения в распределении напряжений, определяемых на основании уравнения (76), но на основании принципа Сен-Венана<sup>1</sup> мы можем утверждать, что эти изменения будут значительны лишь у концов стержня. Вдали от места приложения сил мы с уверенностью можем пользоваться решением, получаемым на основании уравнения (76).

## § 47. Эллиптическое поперечное сечение

Пусть контур поперечного сечения скручиваемого стержня задан уравнением  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ . Очевидно, мы удовлетворим условию на контуре, если возьмем для функции напряжений выражение

$$\varphi = m \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (a)$$

Коэффициент  $m$  должен быть выбран таким образом, чтобы было удовлетворено основное уравнение (76). Вставляя в него выражение (a), находим  $m = -\mu\tau \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$ , и функция напряжений в случае эллиптического сечения

<sup>1</sup> Принцип Сен-Венана в приложении к кручению круглых стержней подтверждается решением А. Гимпе. T i m p e A. Die Torsion von Umdrehungskörpern. Mathematische Annalen, 1912, Bd 71, SS. 480—509.

представится в таком виде:

$$\varphi = -\mu\tau \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (77)$$

Дифференцированием находим для напряжений выражения

$$X_z = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -2\mu\tau \frac{a^2y}{a^2 + b^2}; \quad Y_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2\mu\tau \frac{b^2x}{a^2 + b^2}. \quad (78)$$

При  $a = b$  мы придем к известным формулам для случая кручения круглых стержней.

Наибольшего значения касательные напряжения достигают у концов малой полуоси эллипса. Положив  $a > b$ , найдем из формул (78) для наибольшего напряжения значение

$$(X_z)_{\max} = 2\mu\tau \frac{a^2b}{a^2 + b^2}. \quad (79)$$

При практических приложениях обыкновенно приходится определять напряжения, соответствующие заданному моменту  $M$  скручивающей пары. Чтобы установить связь между  $(X_z)_{\max}$ ,  $\tau$  и  $M$ , воспользуемся формулой (75). Вставляя вместо  $\varphi$  найденное значение (77) и принимая во внимание, что

$$\iint x^2 dx dy = J_y = \frac{\pi a^3 b}{4}; \quad \iint y^2 dx dy = J_x = \frac{\pi a b^3}{4},$$

получаем

$$M = \mu\tau \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \quad (80)$$

Коэффициент, на который приходится множить величину  $\tau$ , чтобы получить скручивающий момент, обыкновенно называют *жесткостью при кручении*. Мы будем ее обозначать буквой  $C$ . Для эллипса значение  $C$  может быть представлено в такой форме:

$$C = \frac{\mu\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} \frac{F^4}{J_p}. \quad (81)$$

Здесь  $F$  обозначает площадь поперечного сечения,  $J_p$  — его полярный момент инерции.

Функция напряжений (77), взятая нами для сплошного стержня эллиптического сечения, будет годиться также для трубки, поперечное сечение которой образовано двумя подобными эллипсами (рис. 63). В самом деле, наше решение удовлетворяет основному дифференциальному уравнению (76) и условию на наружном контуре.

Остается показать, что и на внутреннем контуре будет соблюдено условие  $\frac{\partial\varphi}{\partial s} = 0$ . Координаты любой точки внутреннего контура удовлетворяют уравнению  $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$ . Так как эллипсы подобны, то  $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{1}{n}$ . Следовательно, на внутреннем контуре  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{n^2}$ , функция напряжений (77) имеет постоянное значение и удовлетворяет, таким образом, всем условиям задачи.

Для определения жесткости при кручении придется в этом случае из величины (81) отнять величину жесткости, соответствующую внутреннему эллипсу.

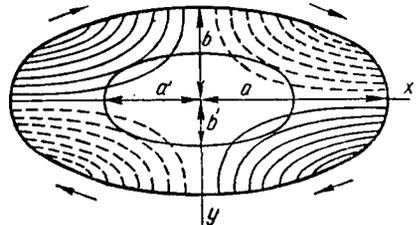


Рис. 63.

Имея распределение напряжений, легко получить перемещения отдельных точек скручиваемого стержня. Перемещения  $u$  и  $v$ , соответствующие поворачиванию отдельных поперечных сечений, выразятся такими же формулами, как и в случае круглого стержня:  $u = -\tau zy$ ;  $v = \tau zx$ . Вставляя это

в формулы для деформаций  $e_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$ ;  $e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$ , получаем

$$\frac{\partial w}{\partial x} = e_{xz} + \tau y = \frac{X_z}{\mu} + \tau y; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{Y_z}{\mu} - \tau x.$$

Подставляя вместо  $X_z$  и  $Y_z$  найденные выше значения (78) и выполняя интегрирование, находим  $w = \tau xy \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$ .

Вид искривленной поверхности первоначально плоского поперечного сечения представлен в горизонталях на рис. 63.

## § 48. Другие формы поперечных сечений

Общее решение уравнения (76) в виде целого полинома может быть представлено в такой форме<sup>1</sup>:

$$\varphi = -\mu\tau \left\{ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c_0 + c_1x + c_2(x^2 - y^2) + c_3(x^3 - 3xy^2) + \right. \\ \left. + c_4(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \dots - c'_1y - c'_22xy - c'_3(3x^2y - y^3) - c'_4(4x^3y - 4xy^3) \right\}. \quad (a)$$

Ограничившись полиномом второй степени, выше мы получили решение для случая эллиптического сечения. Повышая степень полинома и увеличивая число постоянных  $c_0, c_1, \dots, c'_1, \dots$ , мы будем получать все новые решения. Сен-Венан рассмотрел несколько таких решений и для некоторых из них произвел целый ряд вычислений, чтобы разыскать наиболее напряженные места и определить жесткость  $S$ . Мы приведем здесь лишь некоторые результаты<sup>2</sup>.

Остановившись на полиноме третьей степени и выбирая функцию, четную относительно  $y$ , Сен-Венан получил решение

$$\varphi = -\mu\tau \left[ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2a}(x^3 - 3y^2x) + C_0 \right].$$

Оно удовлетворяет условию  $\varphi = \text{const}$  на контуре в том случае, если контур задан уравнением

$$\frac{1}{2a}(x^3 - 3y^2x) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - C_0 = 0. \quad (b)$$

Рис. 64.

Изменяя  $C_0$ , получаем различные возможные очертания. При  $C_0 = -\frac{2}{27}a^2$  уравнение (b) дает совокупность трех прямых, образующих стороны равностороннего треугольника, высота которого равна  $a$ . Расположение треугольника и изображение в горизонталях искривленной поверхности поперечного сечения представлены на рис. 64.

<sup>1</sup> После подстановки убеждаемся, что написанное выражение удовлетворяет уравнению (76). Составление полиномов, на которые множатся постоянные  $c_3, c_4, \dots, c'_3, \dots$ , не представит никаких затруднений, если принять во внимание, что при сложении множителей при  $c_n$  и  $c'_n$  (не принимая во внимание знаков отдельных членов) мы получаем полином, соответствующий  $(x + y)^n$ .

<sup>2</sup> Прекрасное изложение своей теории кручения Сен-Венан дал в примечании к § 156 (стр. 237—500) изданного им курса С. L. M. N. Navier, указанного в сноске на стр. 13.

Жесткость при кручении трехгранной призмы будет

$$C = 0,6\mu J_p. \tag{82}$$

Наибольшие касательные напряжения равны  $0,5\mu\tau$  и имеют место в серединах сторон контура, т. е. в точках контура, наиболее близких к оси стержня. В вершинах треугольника касательные напряжения равны нулю.

Выбирая решение в виде полинома четвертой степени, четного относительно  $x$  и  $y$ , получаем такую функцию напряжений:

$$\varphi = -\mu\tau \left[ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{a}{2}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \frac{1}{2}(a-1) \right]. \tag{с}$$

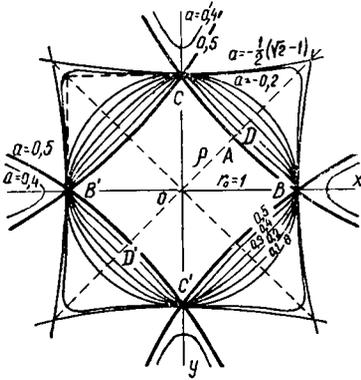


Рис. 65.

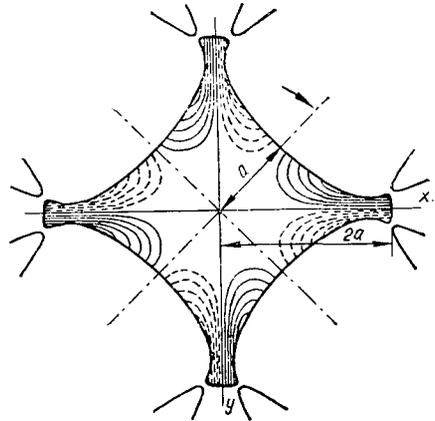


Рис. 66.

Она удовлетворяет условию на поверхности  $\varphi = \text{const}$ , если контур поперечного сечения определяется уравнением  $x^2 + y^2 - a(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + a - 1 = 0$ . Изменяя  $a$ , получаем семейство криволинейных четырехугольников с закругленными вершинами. Вид этих очертаний представлен на рис. 65. Наибольшие напряжения и в этом случае имеют место в точках контура, ближайших к оси скручиваемого стержня.

Комбинируя решения, соответствующие полиномам четвертой и восьмой степени, Сен-Венан получил распределение напряжений для сечения, имеющего форму мальтийского креста (рис. 66). Максимальные напряжения и в этом случае получаются в точках контура, ближайших к оси стержня. Величина их равна  $1,475\mu\tau$ .

Жесткость при кручении определяется в этом случае по формуле

$$C = 0,537\mu J_p. \tag{83}$$

На основании вычислений, произведенных над различными формами поперечных сечений с односвязным контуром, Сен-Венан сделал несколько важных для практических приложений заключений. Он показал, что при одной и той же площади поперечного сечения стержня жесткость его при кручении будет тем большая, чем меньше полярный момент инерции сечения. Поэтому круговое сечение при затрате определенного количества материала обеспечивает наибольшую жесткость.

Такого же рода заключение можно сделать относительно значения наибольших касательных напряжений. При заданном скручивающем моменте  $M$  и заданной площади поперечного сечения наименьшее значение максимальных напряжений будем иметь для сечения с наименьшим полярным моментом инерции. Сен-Венан показал также, что для различных рассмотренных им сечений жесткость при кручении может быть представлена формулой  $C =$

$$= \frac{\mu F^4}{k J_p}, \text{ где коэффициент } k \text{ для различных сечений мало изменяется.}$$

Полагая  $k = 40$ , что соответствует приблизительно эллиптическому сечению (81), получаем приближенную формулу

$$C = \frac{\mu F^4}{40J_p}, \quad (84)$$

с достаточной для практических приложений точностью определяющую жесткость при кручении для различных *односвязных* контуров.

Рассматривая места наибольших напряжений, Сен-Венан нашел, что в рассмотренных им случаях в наиболее невыгодных условиях находятся точки контура, ближайшие к оси стержня<sup>1</sup>. В точках, соответствующих вершинам выступающих углов, напряжения обращаются в нуль. В случае входящих углов в вершинах получаются бесконечно большие напряжения. Здесь при приложении скручивающей пары должны получаться местные остаточные деформации. Вопрос о распределении напряжений в этих местах подробно разобран для случая сечений, представляющих собою круговой сектор<sup>2</sup>. Распределение напряжений в круглом валу, ослабленном вырезом для шпонки, рассмотрено Л. Файлоном<sup>3</sup>. Вопрос о влиянии продольных цилиндрических полостей на распределение напряжений в скрученном круглом валу изучен Ламором<sup>4</sup>. Оказывается, что в случае малого кругового поперечного сечения такой полости напряжения у контура полости вдвое больше, чем в соответствующей точке сплошного стержня.

#### § 49. Аналогия Прандтля

Вопрос о распределении касательных напряжений при кручении может быть представлен особенно наглядно, если воспользоваться полной аналогией между основным уравнением (76) для кручения и дифференциальным уравнением для поверхности провисания нерастяжимой мембраны, равномерно натянутой на контур, соответствующий контуру поперечного сечения стержня, и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой<sup>5</sup>. Обозначим через  $p$  растягивающее усилие, приходящееся на единицу длины контура мембраны, и через  $q$  — нагрузку на единицу поверхности. Пусть  $A$  (рис. 67) представляет элемент мембраны, вырезанный плоскостями, параллельными плоскостям  $zx$  и  $zy$ .

<sup>1</sup> Л. Файлон показал, что это заключение справедливо не для всяких форм поперечных сечений. Filon L. N. G. On the resistance to torsion of certain forms of shafting, with special reference to the effect of keyways. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 1900, vol. 193, n 10, pp. 309—352.

<sup>2</sup> Динник А. Н. Приложение функций Бесселя к задачам теории упругости. Изв. Донского политехнического института. Том 2. Новочеркасск, 1913, стр. 219—366. [Перепечатка: Динник А. Н. Избранные труды. Том 2. Киев, Изд-во АН УССР, 1955, стр. 7—122]. См. также: Greenhill A. G. Graphical representation of the elliptic functions by means of the elastic curve. The Messenger of Mathematics, 1877, vol. 6, pp. 182—188. The intrinsic equation of the elastic curve. Там же, 1879, vol. 8, pp. 82—88.

<sup>3</sup> См. упомянутую в сноске на данной странице работу Л. Филон.

<sup>4</sup> Lagrange J. The influence of flows and air-cavities on the strength of materials. Philosophical Magazine and Journal of Science, Series 5, 1892, vol. 33, N 200, pp. 70—78.

<sup>5</sup> Эта аналогия была установлена Л. Прандтлем. Prandtl L. Zur Torsion von prismatischen Stäben. Physikalische Zeitschrift, 1903, Bd 4, N 268, SS. 758—765. [Перепечатка: Prandtl L. Gesammelte Abhandlungen zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik, Erster Teil. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1961, SS. 79—80.] Л. Прандтль воспользовался этой аналогией для экспериментального решения вопроса о распределении касательных напряжений при кручении. См. Anthes H. Versuchsmethode zur Ermittlung der Spannungsverteilung bei Torsion. Dingler's polytechnisches Journal. 1906, Bd 324, N. 22, SS. 342—345; N. 23, SS. 356—359; N. 25, SS. 388—392; N. 28, SS. 441—444; N. 29, SS. 455—459; N. 30, SS. 471—475.

Кривизну соответствующих сечений мембраны мы можем положить равной  $-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ;  $-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

Проектируя все силы, приложенные к элементу  $A$ , на направление  $z$ , получаем уравнение  $q dx dy + p \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy + p \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy = 0$ , откуда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{p}. \tag{85}$$

Положив  $\frac{q}{p} = 2\mu$ , приведем уравнение для поверхности провисания мембраны к полному совпадению с уравнением (76). Величины провисания  $z$  будут давать соответствующие значения функции напряжений  $\phi$ .

Представим себе поверхность мембраны, изображенной в горизонталях. Тогда нетрудно будет доказать, что направление напряжения в каждой точке сечения стержня совпадает с направлением касательной к соответствующей горизонтали и величина напряжения пропорциональна уклону поверхности мембраны, т. е. густоте горизонталей в рассматриваемой точке. Пусть  $mn$  — горизонталь, проходящая через точку  $A$ , и  $\nu$  — нормаль к этой горизонтали, проведенная в  $A$  (рис. 68). Проекция напряжения на направление нормали будет  $n = X_z \cos \alpha + Y_z \cos \beta$ .

Принимая во внимание, что  $\cos \alpha = \frac{dy}{ds}$ ,  $\cos \beta = -\frac{dx}{ds}$ , и вставляя вместо  $X_z$  и  $Y_z$  их выражения через  $\phi$ , находим

$$n = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0.$$

Составляющая напряжения  $n$  равна нулю, так как  $\phi$  остается постоянной вдоль каждой горизонтали.

Уклон поверхности мембраны в точке  $A$  представится так:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \nu} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \nu}.$$

Рис. 68

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial x}{\partial \nu} = \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{Y_z}{\sqrt{Y_z^2 + X_z^2}}; \quad \frac{\partial y}{\partial \nu} = -\frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{X_z}{\sqrt{Y_z^2 + X_z^2}},$$

получаем

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = -\sqrt{X_z^2 + Y_z^2},$$

т. е. величина напряжения определяется величиной наибольшего уклона мембраны в рассматриваемой точке или густотой горизонталей. Заметим еще, что удвоенный объем холмика, образованного выпучившейся мембраной, дает, как видно из формулы (75), величину скручивающего момента.

В случае стержня, поперечное сечение которого представляет собой вытянутый прямоугольник (рис. 69), аналогия Прандтля позволяет сразу уста-

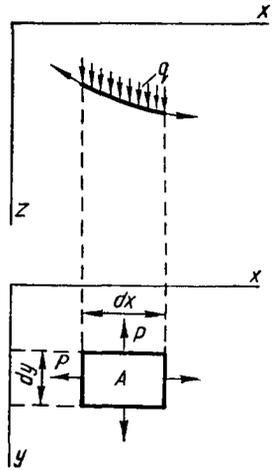


Рис. 67.

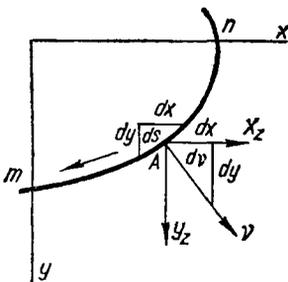


Рис. 68

новить приближенную формулу для напряжений и для жесткости при кручении. Предположим, что контур сечения затают равномерно нагруженной мембраной. Двумя сечениями, перпендикулярными к длинным сторонам прямоугольника, выделяем из мембраны элемент  $mm_1n_1$ , размер которого в направлении длины прямоугольника равен единице. Мы с достаточной точностью можем считать, что вдали от концов прямоугольника мембрана провисает по цилиндрической поверхности. В таком случае линии пересечения мембраны с нормальными плоскостями  $mn$  и  $m_1n_1$  будут близки к линии провисания гибкой нити, натянутой силой  $p$  и равномерно нагруженной нагрузкой  $q$ . Линию провисания тяжелой гибкой нити мы можем принять за параболу. Тогда наибольшее провисание будет  $f = qb^2/8p$  и тангенс угла наклона касательных к параболе у точек закрепления нити равен  $qb/2p$ . Чтобы от мембраны перейти к напряжениям при кручении, нужно, как мы видели, положить  $q/p = 2\mu\tau$ . В таком случае касательное напряжение в точках  $mm_1nn_1$  на длинных сторонах прямоугольного контура, определяемое соответствующим уклоном, будет равно  $\mu b$ .

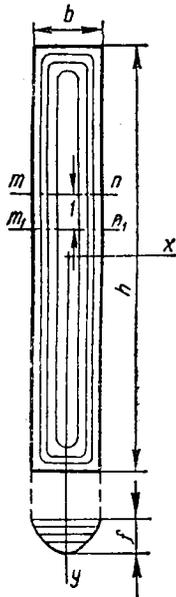


Рис. 69.

Пренебрегая влиянием поперечных сторон прямоугольника и принимая всю поверхность мембраны за параболический цилиндр, для жесткости при кручении, равной двойному объему цилиндра, деленному на  $\tau$ , получаем формулу

$$C = \frac{2V}{\tau} = \frac{2}{\tau} \frac{2}{3} \frac{qb^3}{8p} h = \frac{1}{3} \mu b^3 h. \tag{86}$$

Приняв провисание мембраны по параболическому цилиндру, получим линейный закон изменения касательных напряжений по ширине прямоугольного сечения (рис. 70). Момент всех усилий, соответствующих этим касательным напряжениям,  $\mu\tau b \frac{b}{4} h \frac{2}{3} b = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \mu\tau b^3 h$ , т. е. равен половине скручивающего момента, получаемого из формулы (86) умножением  $C$  на величину  $\tau$ . Вторую половину скручивающего момента дают касательные напряжения у поперечных сторон прямоугольного контура<sup>1</sup>, где принятая нами форма провисания мембраны не дает надлежащего представления о распределении напряжений.

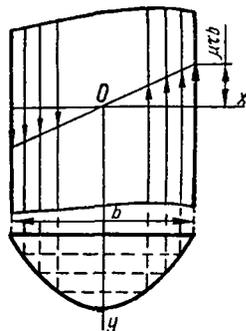


Рис. 70.

Формула (86), полученная для  $C$  в случае узкого прямоугольного сечения, может быть применена также к сечениям, представленным на рис. 71. Для получения  $h$  нужно себе представить эти сечения выправленными в прямоугольник. В случае трубчатого сечения (рис. 72) придется иметь дело со сложным контуром. На каждом из контуров функция напряжений  $\phi$  должна оставаться постоянной, но эта постоянная будет для каждого контура иметь свое значение. Чтобы распространить и на этот случай аналогию с мембраной, представим себе плоскость внутреннего контура смещенной относительно плоскости наружного

<sup>1</sup> Аналитически этот вопрос подробно выяснили Кельвин и Тэт. Kelvin [William Thomson], Tait [Peter Guthrie] Treatise on natural philosophy. Cambridge, University press, pt 2, 1903, XXV, 527 pp., см.р. 267.

контура. Внутренний контур представит собой очертание жесткого недеформирующегося дна, соединенного с наружным контуром посредством гибкой мембраны. Поверхность мембраны, испытывающей равномерное давление, представит закон распределения касательных напряжений. Формула (75) и в этом случае сохранит свое значение. Для определения скручивающего момента нам нужно будет взять удвоенный объем, заключенный между плоскостями контуров и поверхностью мембраны.

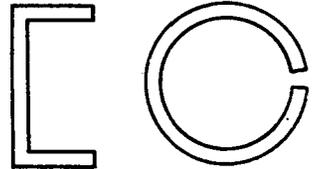


Рис. 71.

Особенно просто решается вопрос о напряжениях и угле закручивания в том случае, когда толщина стенок сечения весьма мала. При этом условии можно пренебречь провисанием мембраны. Уклон поверхности, образованной мембраной, по ширине кольца будет постоянным и ему будет соответствовать равномерное распределение касательных напряжений. Направление напряжений, очевидно, будет совпадать с направлением касательной к контуру. Если через  $t$  обозначим величину касательного напряжения, измеряемую уклоном мембраны, и через  $h$  — ширину кольцевого сечения ( $h$  может быть переменной), то постоянная разность уровней внутреннего и наружного контуров (рис. 73) будет равна  $th$ . Следовательно, напряжения изменяются вдоль кольца обратно пропорционально  $h$ . Объем, заключенный между плоскостями контуров и мембраной, можно принять равным  $thF$ , где  $F$  — площадь, ограниченная средней линией кольца. Момент определится из уравнения (75):

$$M = 2thF. \tag{87}$$

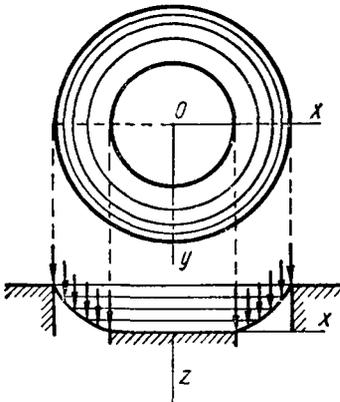


Рис. 72.

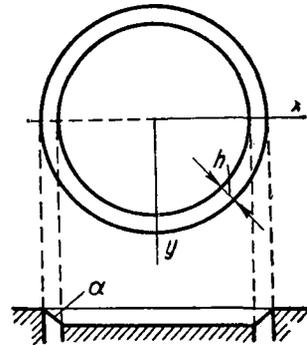


Рис. 73.

Формулу для угла закручивания получаем, приравнявая работу крутящего момента потенциальной энергии деформации. Выделяя единицу длины стержня, будем иметь

$$\frac{\tau M}{2} = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{t^2 h ds}{\mu}$$

откуда при помощи уравнения (87) получаем

$$\tau = \frac{M}{4\mu F^2} \int_0^s \frac{ds}{h}. \tag{88}$$

Найденные формулы (87) и (88) с достаточной для практики точностью решают вопрос о кручении различного рода трубчатых стержней<sup>1</sup>. Например, для сечения, представленного на рис. 74, будем иметь

$$t_1 = \frac{M}{2a_1a_2h_1}; t_2 = \frac{M}{2a_1a_2h_2}.$$

Для угла кручения  $\tau$  получим

$$\tau = \frac{M}{2\mu a_1^2 a_2^2} \left( \frac{a_1}{h_1} + \frac{a_2}{h_2} \right).$$

Когда трубчатый стержень имеет промежуточные стенки<sup>2</sup> (рис. 75), мы также можем воспользоваться аналогией Прандтля. Каждый из простых контуров располагается при этом на определенном уровне и соединяется с другими контурами посредством мембраны. Если прене-

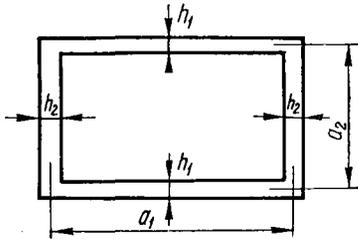


Рис. 74.

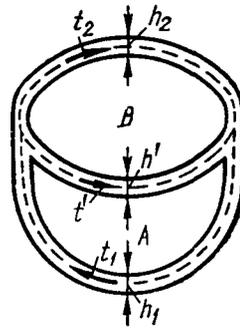


Рис. 75.

бречь провисанием мембраны в случае тонкостенных трубок, то получим, как и в предыдущем случае, равномерное распределение касательных напряжений по толщине стенки. Обозначая эти напряжения для различных стенок через  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t'$  (для каждой стенки эти величины будут в общем случае переменными) и соответствующие толщины стенок через  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h'$ , находим, что возвышение контура  $A$  над наружным контуром трубки равно  $t_1 h_1$ . Для контура  $B$  та же величина равна  $t_2 h_2$ . Как следствие получаем

$$t' h' = t_1 h_1 - t_2 h_2. \quad (a)$$

Скручивающий момент будет измеряться удвоенным объемом, заключенным между плоскостями контуров и мембраной. Обозначая через  $F_1$  и  $F_2$  площади, очерченные пунктирными средними линиями и заключающие контуры  $A$  и  $B$ , мы для этого момента получаем такую формулу:

$$M = 2(t_1 h_1 F_1 + t_2 h_2 F_2). \quad (b)$$

Сюда входят две неизвестные величины  $t_1$  и  $t_2$ . Чтобы их определить, обратимся к углу закручивания стержня. Приравнявая работу скручивающего момента потенциальной энергии деформации, получаем:

$$\mu M \tau = (t_1 h_1)^2 \int \frac{ds_1}{h_1} + (t_2 h_2)^2 \int \frac{ds_2}{h_2} + (t' h')^2 \int \frac{ds'}{h'}. \quad (c)$$

Таким образом, мы получили три уравнения (a), (b) и (c), в которые входят четыре неизвестные величины  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t'$  и  $\tau$ . Для составления недостающего чет-

<sup>1</sup> Этот прием расчета принадлежит Р. Бредту. Bredt R. Kritische Bemerkungen zur Drehelastizität. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1896, Bd 40, N 29, SS. 813—817. Дальнейшее развитие см. Lorenz H. Lehrbuch der technischen Physik. Bd 4. Technische Elastizitätslehre. München und Berlin, R. Oldenbourg, 1913, 692 SS, см. S. 98.

<sup>2</sup> Подобная задача встречается при исследовании кручения корпуса судна.

вертого уравнения примем во внимание, что при кручении углы в плоскости поперечного сечения не искажаются и угол закручивания имеет одно и то же значение для каждой части сечения. Разобьем скручивающий момент  $M$  на два слагаемых  $M_1$  и  $M_2$  соответственно двум внутренним контурам  $A$  и  $B$  и положим

$$M = M_1 + M_2; \quad M_1 = 2t_1h_1F_1; \quad M_2 = 2t_2h_2F_2. \quad (d)$$

Тогда потенциальная энергия деформации, приходящаяся на единицу длины стержня, может быть представлена в таком виде:

$$V = \frac{1}{2\mu} \left[ \frac{M_1^2}{4F_1^2} \int \frac{ds_1}{h_1} + \frac{M_2^2}{4F_2^2} \int \frac{ds_2}{h_2} + \frac{1}{4} \left( \frac{M_1}{F_1} - \frac{M_2}{F_2} \right)^2 \int \frac{ds'}{h'} \right].$$

Составляя производную от этого выражения по  $M_1$  и  $M_2$ , мы должны получить одну и ту же величину, именно величину угла  $\tau$ . На основании этого получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{M_1}{F_1^2} \int \frac{ds_1}{h_1} + \frac{1}{F_1} \left( \frac{M_1}{F_1} - \frac{M_2}{F_2} \right) \int \frac{ds'}{h'} = \\ = \frac{M_2}{F_2^2} \int \frac{ds_2}{h_2} - \frac{1}{F_2} \left( \frac{M_1}{F_1} - \frac{M_2}{F_2} \right) \int \frac{ds'}{h'}. \end{aligned} \quad (e)$$

При помощи уравнений (d) и (e) решаем вопрос о распределении напряжений. Уравнение (e) дает возможность найти соответствующий угол закручивания. Указанный прием расчета трубчатых стержней на кручение может быть распространен на случай любого числа промежуточных стенок.

## § 50. Применение метода Ритца к определению напряжений при кручении

Вопрос о кручении призматических стержней сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2\mu\tau. \quad (a)$$

Иногда выгодно разыскание решения этого уравнения заменить разысканием минимума некоторого интеграла<sup>1</sup>. Эту замену легко произвести при помощи общего уравнения (50). Предположим, что напряжения представлены при помощи функции  $\varphi$ , тогда потенциальная энергия скрученного стержня, отнесенная к единице длины, будет

$$\frac{1}{2\mu} \iint \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Если мы во всех точках поперечного сечения, кроме точек контура, дадим совершенно произвольные малые приращения  $\delta\varphi$ , то этому будут соответствовать приращения напряжений

$$\delta X_z = \frac{\partial \delta\varphi}{\partial y}; \quad \delta Y_z = -\frac{\partial \delta\varphi}{\partial x}.$$

Такие же приращения получают напряжения, распределенные по концевым поперечным сечениям стержня, являющиеся внешними скручивающими силами.

<sup>1</sup> Тимошенко С. П. Применение функции напряжений к исследованию изгиба и кручения призматических стержней. Сб. Института инженеров путей сообщения, С.-Петербург, 1913, вып. 82, стр. 1—21. Отд. оттиск, С.-Петербург, 1913, 22 стр.

Предположим, что сечение стержня, соответствующее началу координат, закреплено, и обозначим через  $l$  длину стержня. Тогда перемещения  $u$  и  $v$  для какой-либо точки свободного конца стержня представятся в виде  $u = -\tau y l$ ;  $v = +\tau x l$  и уравнение (50) можно будет написать так:

$$\frac{1}{2\mu} \delta \iint \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \tau \iint \left( -y \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} - x \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} \right) dx dy. \quad (b)$$

Выполняя в правой части интегрирование по частям и принимая во внимание, что на контуре  $\delta \varphi = 0$ , перепишем уравнение (b) в таком виде:

$$\frac{1}{2} \delta \iint \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - 2\tau \mu \iint \delta \varphi dx dy = 0,$$

или

$$\delta \iint \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2\mu \tau \varphi \right\} dx dy = 0.$$

Так как приращение полученного нами интеграла для всякого малого изменения функции  $\varphi$  должно равняться нулю, то, следовательно, разыскание функции  $\varphi$ , удовлетворяющей уравнению (a), равносильно разысканию максимума или минимума интеграла:

$$S = \iint \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2\mu \tau \varphi \right\} dx dy. \quad (89)$$

К такому же результату мы придем, исходя из аналогии Прандтля. Определение функции  $\varphi$  приводится, как мы видели, к разысканию провисания мембраны, равномерно нагруженной и удерживаемой на контуре равномерно распределенными растягивающими усилиями. При определении формы равновесия мембраны воспользуемся началом возможных перемещений. Искомая форма равновесия характеризуется тем, что на всяком возможном отклонении от этой формы работа всех приложенных к мембране сил равна нулю. Если считать мембрану нерастяжимой, то при провисании ее необходимо допустить некоторое смещение краев. При таком смещении растягивающие мембрану усилия совершат отрицательную работу, величину которой получим, умножая усилие, приходящееся на единицу длины контура мембраны, на разность между площадью мембраны до провисания и проекцией мембраны на плоскость контура после провисания. При малых провисаниях величина этой работы представится так:

$$-\frac{p}{2} \iint \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

При всяком отклонении мембраны от положения равновесия изменение найденной сейчас работы растягивающих сил должно быть равно по величине и противоположно по знаку приращению работы сплошной нагрузки, лежащей на мембране. Следовательно,

$$\frac{p}{2} \delta \iint \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \iint q \delta \varphi dx dy. \quad (c)$$

Это уравнение справедливо при всяком распределении нагрузки  $q$ . Положив  $q/p = 2\mu\tau$ , мы приведем задачу о разыскании провисания мембраны к нахождению максимума или минимума интеграла (89).

В тех случаях, когда удается найти функцию  $\varphi$ , удовлетворяющую этому условию, мы получаем точное решение соответствующей задачи о кручении. Если же получение точного решения сопряжено с большими трудностями или такого решения получить не удастся, мы можем при помощи (89) полу-

читать приближенное решение задачи, заменяя задачу вариационного исчисления о разыскании максимума или минимума интеграла  $S$  задачей об определении максимума или минимума некоторой функции<sup>1</sup>. Для этого мы берем приближенное выражение функции напряжений в виде ряда

$$\varphi_n = \psi_0 + a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \dots + a_n\psi_n. \quad (d)$$

При этом функции  $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$  выбираем так, чтобы каждая из них удовлетворяла заданным для  $\varphi$  условиям на контуре (в нашем случае каждая из них на контуре обращается в нуль) и чтобы выражение (d) при надлежащем выборе коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  по возможности ближе подходило к точному выражению  $\varphi$ .

В каждом частном случае такие функции можно подобрать, потому что приблизительный вид  $\varphi$ , или, что все равно, вид той поверхности, по которой провисает равномерно нагруженная мембрана, нам известен. Для определения коэффициентов  $a_0, \dots, a_n$  мы ставим выражение  $\varphi_n$  вместо  $\varphi$  под знак интеграла (89) и находим соответствующее значение интеграла. Обозначим его через  $S_n$ . Далее подбираем коэффициенты так, чтобы  $S_n$  имело максимальное или минимальное значение, т. е. чтобы были удовлетворены условия

$$\frac{\partial S_n}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial S_n}{\partial a_n} = 0. \quad (90)$$

Эти уравнения — линейные относительно коэффициентов  $a_1, \dots, a_n$ . Решая их, мы находим для этих коэффициентов значения, при которых функция  $\varphi_n$  дает наилучшее приближение к точному решению задачи.

Особенно просто разыскание функций  $\psi_0, \dots, \psi_n$  в тех случаях, когда контур поперечного сечения задан уравнением  $F(x, y) = 0$  и  $F$  внутри контура в нуль не обращается. Тогда выражение (d) может быть взято в таком виде:

$$\varphi_{mn} = F(xy) \sum_{m=0, n=0}^{m,n} a_{mn} x^m y^n. \quad (e)$$

Очевидно, каждый член этой суммы удовлетворяет условию на контуре. Остается лишь определить коэффициенты  $a_{mn}$  при помощи уравнений (90).

Этим приемом легко решаются задачи, рассмотренные Сен-Венаном, а также задачи о кручении стержней, поперечное сечение которых представляет собой или сектор или четырехугольник, ограниченный двумя радиусами или двумя концентрическими кругами. Ниже мы применим этот метод к случаю прямоугольного поперечного сечения.

## § 51. Случай прямоугольного поперечного сечения

Для прямоугольного поперечного сечения (рис. 76) мы можем составить сколько угодно функций, обращающихся на контуре в нуль. Например, всякая

функция вида  $\varphi_{mn} = a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$  будет удовлетворять этому условию,

и мы можем представить функцию напряжений в виде ряда  $\varphi = \sum \sum a_{mn} \times$

<sup>1</sup> Этот прием был предложен Вальтером Ритцем и применен им к исследованию изгиба и колебаний квадратной пластинки. См. его статью, указанную на стр. 10. В настоящее время метод Ритца нашел широкое применение при решении целого ряда задач строительной механики.

$\times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ . В таком случае<sup>1</sup> будем иметь

$$\frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \frac{1}{2} \sum \sum a_{mn}^2 \frac{\pi^2 ab}{4} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right);$$

$$\int_0^a \int_0^b 2\mu\tau \psi_{mn} dx dy = a_{mn} \int_0^a \int_0^b 2\mu\tau \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = a_{mn} 2\mu\tau \frac{4ab}{m\pi n^2}$$

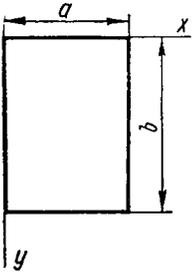


Рис. 76.

при нечетных  $m$  и  $n$ . Если  $m$  или  $n$  — четное число, то этот интеграл обращается в нуль.

Уравнения (90) при нечетных  $m$  и  $n$  получают такую форму:

$$a_{mn} \frac{\pi^2 ab}{4} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) - 2\mu\tau \frac{4ab}{m\pi n^2} = 0;$$

если  $m$  или  $n$  четное число, то

$$a_{mn} \frac{\pi^2 ab}{4} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) = 0.$$

Определяя таким образом коэффициенты  $a_{mn}$ , получаем для функции  $\varphi$  выражение в виде такого бесконечного ряда:

$$\varphi = \frac{32\mu\tau b^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn(m^2\alpha^2 + n^2)}. \quad (91)$$

Здесь для краткости обозначено через  $\alpha$  отношение  $b/a$ .

Зависимость между скручивающим моментом и величиной  $\tau$  на основании уравнения (75) напишется так:

$$M = 2 \int \int \varphi dx dy = \frac{32\mu\tau}{\pi^4} \frac{8ab^3}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{m^2 n^2 (m^2 \alpha^2 + n^2)}.$$

Результат этот можно представить в более удобной для вычислений форме, если принять во внимание<sup>2</sup>, что

$$\frac{1}{m^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 (m^2 \alpha^2 + n^2)} = \frac{\pi^4}{96m^2} \frac{\operatorname{th} \frac{m\alpha\pi}{2} - \frac{m\alpha\pi}{2}}{-\frac{1}{3} \left( \frac{m\alpha\pi}{2} \right)^3}.$$

<sup>1</sup> При этом интегрировании принимаем во внимание, что

$$\int_0^a \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{k_1\pi x}{a} dx$$

обращается в нуль, если целое число  $k$  не равняется  $k_1$ . При  $k = k_1$  этот интеграл равен  $\frac{a}{2}$ .

Такого же рода замечание относится к интегралам вида

$$\int_0^a \cos \frac{k\pi x}{a} \cos \frac{k_1\pi x}{a} dx.$$

<sup>2</sup> Тимошенко С. П. Применение нормальных координат к исследованию изгиба стержней и пластинок. Изв. Киевского политехнического института, отдел инженерной механики, 1910, год 10, кв. 1, стр. 1—49. Отд. оттиск, Киев, 1910, 49 стр.

В таком случае

$$M = \frac{32\mu\tau}{\pi^4} \frac{8ab^3}{\pi^2} \frac{\pi^4}{96} \frac{3 \cdot 8}{\alpha^2 \pi^3} \left\{ \frac{\alpha\pi}{2} \sum_{m=1,3,5\dots} \frac{1}{m^4} - \sum_{m=1,3,5\dots} \frac{\text{th} \frac{m\alpha\pi}{2}}{m^5} \right\}.$$

Дальнейшее упрощение получим, если примем во внимание, что

$$\sum_{m=1,3,5\dots}^{m=\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{96},$$

тогда

$$M = \mu\tau \left( \frac{1}{3} \frac{ab^3}{\alpha^2} - \frac{64ab^3}{\pi^6 \alpha^3} \sum_{m=1,3,5\dots} \frac{\text{th} \frac{m\alpha\pi}{2}}{m^5} \right). \tag{92}$$

Выбирая обозначения так, чтобы  $b$  было больше  $a$ , мы без особых затруднений можем вычислить сумму бесконечного ряда, входящего в полученную формулу (92), так как  $\text{th} \frac{m\alpha\pi}{2}$  весьма близок к единице и ряд вообще быстро сходится. В случае весьма узкого прямоугольника можем положить  $\text{th} \frac{m\alpha\pi}{2} = 1$  и представить (92) так:

$$M = \mu\tau b a^3 \left( \frac{1}{3} - 0,2101 \frac{a}{b} \right) = \frac{1}{3} \mu\tau b a^3 \left( 1 - 0,6302 \frac{a}{b} \right). \tag{93}$$

Для квадратного сечения формула (92) дает

$$M = 0,1406\mu\tau a^4 = 0,8435\mu\tau J_p. \tag{94}$$

Вообще формула (92) может быть представлена в таком виде:  $M = k \cdot \mu\tau b a^3$ . Значения коэффициента  $k$  для различных значений  $\alpha = b/a$  вычислены Сен-Венаном. Несколько таких значений мы приводим в табл. 4.

Таблица 4

$\frac{b}{a} = \alpha$	$k$	$k_1$	$\frac{b}{a} = \alpha$	$k$	$k_1$
1	0,1406	0,6753	2,5	0,2494	0,9681
1,2	0,1661	0,7587	3	0,2633	0,9855
1,4	0,1869	0,8222	4	0,2808	0,9970
1,6	0,2037	0,8695	5	0,2914	0,9994
1,8	0,2174	0,9044	10	0,3123	1,0000
2,0	0,2287	0,9301	$\infty$	0,3333	1,0000

Наибольшие касательные напряжения имеют место в серединах длинных сторон прямоугольного контура. Формула для касательных напряжений в различных точках линии  $y = b/a$  напишется так:

$$(Y_z)_{y=\frac{b}{2}} = \left( - \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)_{y=\frac{b}{2}} = \frac{32\mu\tau b^2}{\pi^3 a} \sum_{m=1,3,5\dots} \sum_{n=1,3,5\dots} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{m\pi x}{a}}{n(m^2\alpha^2 + n^2)}.$$

Полагая  $x = 0$  или  $x = a$ , получаем значение наибольших напряжений:

$$(Y_z)_{\max} = \frac{32\mu\tau b^2}{\pi^3 a} \sum \sum \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n(m^2\alpha^2 + n^2)} = k_1 \mu\tau a. \tag{95}$$

Значения коэффициента  $k_1$  для различных  $\alpha$  приведены в табл. 4.

Метод Ритца дает возможность представить функцию напряжений в различных формах. Вместо тригонометрического ряда мы для представления  $\varphi$  можем воспользоваться целым полиномом [формула (f) § 50]. Направив координатные оси по осям симметрии прямоугольника, положим

$$\varphi = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \sum a_{mn} x^m y^n.$$

Здесь в силу симметрии нужно сохранить лишь четные значения  $m$  и  $n$ .

В качестве примера произведем расчет для квадратного сечения. Ограничимся первым членом ряда и положим  $\varphi_0 = a_{00}(x^2 - a^2)(y^2 - a^2)$ . Вставляя это в интеграл (89), находим для  $a_{00}$  значение  $a_{00} = -5\mu\tau/8a^2$ . Величина скручивающего момента получается

$$M = 2 \iint \varphi_0 dx dy = \frac{20}{9} \mu\tau a^4 = 0,1388 (2a)^4.$$

Сравнение с формулой (94) показывает, что взятое нами первое приближение дает величину  $M$  с точностью до  $1\frac{1}{3}\%$ . В качестве второго приближения положим

$$\varphi_2 = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2)[a_{00} + a_{02}(x^2 + y^2)].$$

Уравнения (90) дадут для неопределенных пока коэффициентов значения  $a_{00} = -\frac{5}{8} \cdot \frac{259}{277} \cdot \frac{\mu\tau}{a^2}$ ;  $a_{02} = -\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{35}{277} \cdot \frac{\mu\tau}{a^4}$ .

В таком случае

$$M = \frac{20}{9} \mu\tau a^4 \left( \frac{259}{277} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{35}{277} \right) = 0,1404 \mu\tau (2a)^4.$$

Второе приближение дает погрешность, равную 0,15%.

Для напряжений приближенное решение обладает значительно меньшей точностью. Например, погрешность в величине максимума напряжений для второго приближения достигает 4%.

Способ, примененный выше к прямоугольнику, легко может быть распространен на случай любого выпуклого многоугольника. Представив функцию напряжений в виде полинома

$$\varphi = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) \dots (a_nx + b_ny + c_n) \sum \sum a_{mn} x^m y^n,$$

где  $a_1x + b_1y + c_1 = 0, \dots$  — уравнения отдельных сторон многоугольника, вычислим коэффициенты  $d_{mn}$  с помощью уравнений (90).

В случае контуров, имеющих входящий угол, например для уголка<sup>1</sup>, тавра и др., применение наменного метода встречает затруднения. В таком случае следует воспользоваться или вычислительным<sup>2</sup>, или графическим способом решения уравнения (76).

<sup>1</sup> Эта задача разрешена Ф. Кёттером. Kötter F. Über die Torsion des Winkeleisens. Sitzungsberichte der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften. Berlin, 1908, II Halbband, N 39, SS. 935—955.

<sup>2</sup> Вычислительный метод дан К. Рунге. См. статью С. Runge, упомянутую на стр. 10. Графические методы интегрирования соответствующего дифференциального уравнения даны в статьях С. Runge, H. Sanden, указанных на стр. 10. и 11. Следует ожидать, что развитие приближенных и графических способов интегрирования уравнений математической физики сыграет весьма большую роль в деле развития теории упругости и послужит дальнейшему расширению области применений этой науки в технике.

## § 52. Постановка задачи

Предположим, что невесомый призматический стержень, закрепленный в точке  $O$ , изгибается силами, распределенными на конце  $B$ . Силы эти статически эквивалентны силе  $Q$ , приложенной в центре тяжести поперечного сечения и направленной по одной из главных осей инерции.

Разыскание напряжений в общем случае сводится к интегрированию дифференциальных уравнений равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

При этом должны быть выполнены на поверхности условия

$$\left. \begin{aligned} X_\nu &= X_x \cos(x\nu) + X_y \cos(y\nu) + X_z \cos(z\nu); \\ Y_\nu &= Y_x \cos(x\nu) + Y_y \cos(y\nu) + Y_z \cos(z\nu); \\ Z_\nu &= Z_x \cos(x\nu) + Z_y \cos(y\nu) + Z_z \cos(z\nu). \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Кроме того, в каждой точке должны быть удовлетворены дифференциальные зависимости

$$\left. \begin{aligned} (1 + \sigma) \nabla^2 X_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 Y_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 Z_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 Y_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 X_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 X_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

При решении задачи воспользуемся *полуобратным методом Сен-Венана*<sup>1</sup>. Заранее зададимся некоторыми из напряжений на основании уже известных нам простейших решений и остальные напряжения постараемся подобрать так, чтобы были удовлетворены уравнения (а) и условия (b) и (с). Если бы наш стержень испытывал чистый изгиб в плоскости  $xz$ , то отличными от нуля были бы лишь напряжения  $Z_z$ . Обозначив через  $M$  величину изгибающего момента, получим в этом случае для напряжений  $Z_z$  значение

$$Z_z = -\frac{Mx}{J}. \quad (d)$$

При исследовании изгиба полосы силой, приложенной на конце, мы нашли для нормальных напряжений  $Z_z$  то же выражение (d). Но кроме нормальных напряжений в этом случае получаются еще и касательные напряжения, распределенные по плоскости поперечного сечения.

Предположим, что и в рассматриваемом более общем случае изгиба нормальные напряжения  $Z_z$  определяются прежней формулой (d). Кроме этих нормальных напряжений будут, конечно, отличными от нуля касательные напряжения, распределенные по плоскости поперечного сечения стержня, т. е. напряжения  $X_z$  и  $Y_z$ .

Что касается остальных напряжений  $X_x$ ,  $Y_y$ ,  $X_y$ , то будем их считать равными нулю. Если, исходя из этих допущений, мы сможем удовлетворить уравнениям (а) и условиями (b) и (с), то полученное таким путем решение будет точным решением поставленной выше задачи.

После сделанных предположений относительно напряжений, система уравнений (а) и условия (b) и (с) значительно упростятся.

Из первого и второго уравнений (а) заключаем, что

$$\frac{\partial X_z}{\partial z} = \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0,$$

т. е. распределение касательных напряжений одинаково в рассматриваемом случае для всех поперечных сечений стержня,  $X_z$  и  $Y_z$  являются функциями только  $x$  и  $y$ .

На основании сделанного выше допущения относительно напряжений  $Z_z$  имеем

$$Z_z = -\frac{Q(l-z)x}{J}. \quad (d)$$

Следовательно, оставшееся третье уравнение системы (а) переписется так,

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} = -\frac{Qx}{J}. \quad (e)$$

Так как боковая поверхность стержня предполагается свободной от всяких усилий и для нее  $\cos(zv) = 0$ , то из уравнений (b) нам придется считаться лишь с третьим уравнением, которое представится в таком виде:

$$Z_x \cos(xv) + Z_y \cos(yv) = 0. \quad (f)$$

Что касается уравнений (с), то при сделанных предположениях первые три из них и последнее будут тождественно удовлетворены, а уравнения четвер-

<sup>1</sup> Вопрос об изгибе призматических стержней был разрешен Сен-Венаном. Saint-Venant B. Mémoire sur la flexion des prismes, sur les glissements transversaux et longitudinaux qui l'accompagnent lorsqu'elle ne s'opère pas uniformément ou en arc de cercle, et sur la forme courbe affectée alors par leurs sections transversales primitivement planes. Journal de mathématiques pures et appliquées (Liouville), Deuxième série, 1856, t. 14, pp. 89—189. [Перевод на русский язык: Сен-Венан Б. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М., Физматгиз, 1961, стр. 379—494].

тое и пятое переписутся так:

$$\nabla^2 Y_z = 0; \nabla^2 X_z = -\frac{Q}{J(1+\sigma)}. \quad (g)$$

Таким образом, мы привели задачу об изгибе призматического стержня к решению уравнений (e), (f) и (g). Дальнейшее решение упростится, если мы представим неизвестные пока напряжения  $X_z$  и  $Y_z$  посредством функции напряжений  $\varphi$ . Легко видеть, что дифференциальное уравнение (e) будет удовлетворено, если положим

$$X_z = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{Qx^2}{2J} + f(y); \quad Y_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (h)$$

Здесь кроме функции напряжений  $\varphi(x, y)$  мы ввели еще одну произвольную пока функцию  $f(y)$  для того, чтобы в дальнейшем упростить выполнение условия на поверхности (f). Вставляя выражения для напряжений (h) в уравнения (g), получаем для функции напряжений  $\varphi$  уравнения

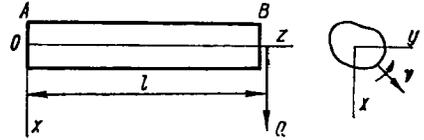


Рис. 77.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) - \frac{Q}{J} + f''(y) = -\frac{Q}{J(1+\sigma)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\sigma}{1+\sigma} \cdot \frac{Qy}{J} - f'(y) + c, \quad (96)$$

где  $c$  — произвольная постоянная величина.

Преобразуем теперь условие на поверхности (f). При выбранном расположении координат (рис. 77) имеем  $\cos(\alpha v) = \frac{\partial y}{\partial s}$ ,  $\cos(\beta v) = -\frac{\partial x}{\partial s}$ . Следовательно, условие (f) может быть представлено в таком виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \left[ \frac{Qx^2}{2J} - f(y) \right] \frac{\partial y}{\partial s}. \quad (97)$$

Задача о распределении напряжений при изгибе сводится, таким образом, к разысканию решения дифференциального уравнения (96), удовлетворяющего условию (97) на контуре. В каждом частном случае, когда нам удастся найти такое решение, мы тем самым разрешим задачу о распределении напряжений при изгибе. При этом боковая поверхность стержня будет свободна от всяких усилий. Усилия на конечных поперечных сечениях распределятся так же, как и во всяком промежуточном сечении. На практике приходится встречаться с самыми разнообразными способами приложения изгибающей силы, но согласно принципу Сен-Венана изменение в распределении усилий по плоскости конечного сечения может вызвать значительные изменения напряжений лишь в точках, близких к концам; в удаленных точках мы всегда можем пользоваться решением, получаемым из уравнений (96) и (97).

Особенно просто решается вопрос в том случае, когда удастся так выбрать  $f(y)$ , чтобы функция  $\frac{Qx^2}{2J} - f(y)$  обращалась на контуре поперечного сечения в нуль. При этом условии будем иметь  $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$ , т. е. функция  $\varphi$  будет иметь на контуре постоянное значение. Уравнение (96) будет совпадать с дифференциальным уравнением для поверхности провисания мембраны, равномерно

натянутой на контуре сечения, но нагрузка будет теперь не равномерной, как в случае кручения, а переменной. Ее интенсивность в каждой точке будет определяться правой частью уравнения (96).

Легко показать, что получаемое при этом решение соответствует условию задачи и определяемые таким путем касательные напряжения по плоскости поперечного сечения приводятся к одной вертикальной силе  $Q$ . В самом деле, если  $\varphi$  на контуре постоянно, то

$$\begin{aligned} \iint Y_z dx dy &= - \iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy = 0; \\ \iint X_z dx dy &= \iint \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{Qx^2}{2J} + f(y) \right] dx dy = \\ &= - \frac{Q}{2J} \iint x^2 dx dy + \iint f(y) dx dy. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае  $f(y)$  на контуре равна  $\frac{Qx^2}{2J}$ , имеем

$$\iint f(y) dx dy = \frac{Q}{2J} \int dy [x^2] = \frac{3}{2} Q.$$

Кроме того,  $\iint x^2 dx dy = J$ . Следовательно,  $\iint X_z dx dy = -\frac{Q}{2} + \frac{3Q}{2} = Q$ .

Нам нужно еще позаботиться о том, чтобы равнодействующая  $Q$  всех касательных усилий проходила через центр тяжести поперечного сечения. В противном случае мы будем иметь одновременное действие изгиба и кручения. Момент касательных напряжений относительно оси  $z$  представляется формулой  $M_z = \iint (-X_z y + Y_z x) dx dy$ . Соответствующим выбором произвольной постоянной  $c$  в уравнении (96) мы всегда можем достигнуть того, чтобы  $M_z$  обращалось в нуль. В самом деле, постоянная в правой части уравнения (96) соответствует распределению напряжений, определяемому уравнением  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = c$ , а это как раз те напряжения, с которыми мы имели дело при исследовании кручения призмы. Меняя  $c$ , мы будем изменять и величину скручивающего момента, следовательно, надлежащим выбором  $c$  можем обратить в нуль момент  $M_z$ .

В случае симметричных сечений напряжений, определяемых постоянной  $c$ , не будет, и мы можем положить в этих случаях  $c = 0$ .

Теперь рассмотрим частные случаи.

### § 53. Круговое и эллиптическое поперечные сечения

Пусть контур поперечного сечения изгибаемого стержня задан уравнением  $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ . Чтобы правая часть условия на поверхности (97) обратилась в нуль, положим  $f(y) = \frac{Q}{2J} (r^2 - y^2)$ . Тогда задача об определении касательных напряжений при изгибе сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} \frac{Q}{J} y. \quad (a)$$

Причем на контуре значение  $\varphi$  постоянно, и мы его можем положить равным нулю.

Значение функции напряжений  $\varphi$  в каждой точке поперечного сечения совпадает со значением провисания равномерно натянутой мембраны, закрепленной на круговом контуре и нагруженной сплошной нагрузкой, изменяющейся по закону плоскости  $\frac{1+2\sigma}{1+\sigma} \frac{Q}{J} y$ .

Для определения этого провисания можно воспользоваться приближенным способом Ритца [формула (f) § 50] и положить

$$\varphi = (x^2 + y^2 - r^2) \sum \sum a_{mn} x^m y^n. \quad (b)$$

При данном распределении сплошной нагрузки, очевидно, провисание мембраны с круговым контуром должно быть четной функцией относительно  $x$  и нечетной относительно  $y$ . Легко убедиться, что ограничиваясь одним членом общего выражения (b) и полагая

$$\varphi = a_{01} (x^2 + y^2 - r^2) y, \quad (c)$$

мы при надлежащем выборе коэффициента  $a_{01}$  удовлетворим уравнению (a).

Вставляя выражение (c) в уравнение (a), находим  $a_{01} = \frac{1}{8} \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} \frac{Q}{J}$ . Функция напряжений окончательно представится в таком виде:

$$\varphi = \frac{1}{8} \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} \frac{Q}{J} (x^2 + y^2 - r^2) y.$$

Дифференцированием получаем соответствующее распределение касательных напряжений:

$$\begin{aligned} X_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{Qx^2}{2J} + f(y) = \frac{Q}{2J} \frac{3+2\sigma}{4(1+\sigma)} \left( r^2 - x^2 + \frac{2\sigma-1}{3+2\sigma} y^2 \right); \\ Y_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{4} \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} \frac{Q}{J} xy. \end{aligned} \quad (98)$$

Рассмотрим распределение касательных напряжений по горизонтальному диаметру поперечного сечения. Для этих точек при  $x = 0$  по формулам (98) находим

$$Y_z = 0; \quad X_z = \frac{Q}{2J} \frac{3+2\sigma}{4(1+\sigma)} \left( r^2 + \frac{2\sigma-1}{3+2\sigma} y^2 \right).$$

Распределение напряжений зависит, как мы видим, от величины пуассонова отношения. Наибольшее напряжение получается в центре сечения при  $y = 0$ , где  $(X_z)_{y=0, x=0} = \frac{Q}{2J} \frac{3+2\sigma}{4(1+\sigma)} r^2$ . У концов того же диаметра напряжения будут

$$(X_z)_{x=0, y=\pm r} = \frac{Q}{2J} \frac{1+2\sigma}{2(1+\sigma)} r^2.$$

Элементарная теория изгиба дает для касательных напряжений во всех точках горизонтального диаметра одну и ту же величину  $\frac{4}{3} \frac{Q}{F} = 1,33 \frac{Q}{F}$ , где  $F$  — площадь поперечного сечения.

Для сравнения с точным решением произведем вычисления, приняв  $\sigma = 0,3$ . В таком случае

$$(X_z)_{x=0, y=0} = 1,38 \frac{Q}{F}; \quad (X_z)_{x=0, y=\pm r} = 1,23 \frac{Q}{F}.$$

Следовательно, погрешность при определении максимума касательных напряжений элементарным способом составляет меньше 4%. Таким же способом

легко решается задача о распределении напряжений при изгибе в случае эллиптического поперечного сечения. Пусть  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$  — уравнение контура поперечного сечения. Чтобы обратить в нуль правую часть уравнения (97), положим

$$f(y) = \frac{Q}{2J} \left( a^2 - \frac{a^2 y^2}{b^2} \right).$$

Задача сводится, таким образом, к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{Qy}{J} \left( \frac{\sigma}{1+\sigma} + \frac{a^2}{b^2} \right).$$

При этом на контуре значение  $\varphi$  постоянно. Как и в случае круга, мы сразу можем получить точное решение задачи, полагая  $\varphi = a_{01} \left( x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 - a^2 \right) y$ . Подстановкой в уравнение (96) находим

$$a_{01} = \frac{a^2 + \frac{\sigma}{1+\sigma} b^2}{2(3a^2 + b^2)} \cdot \frac{Q}{J}.$$

Окончательно для функции напряжений получаем выражение

$$\varphi = \frac{a^2 + \frac{\sigma}{1+\sigma} b^2}{2(3a^2 + b^2)} \left( x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 - a^2 \right) y.$$

При  $a = b$  результат этот совпадает с тем, что было найдено выше для кругового поперечного сечения.

Получив функцию напряжений, мы без затруднения можем составить формулы для касательных напряжений  $X_z$  и  $Y_z$  и вычислить эти напряжения для любой точки сечения.

Имея распределение касательных напряжений для круглого стержня, легко перейти к стержню, поперечное сечение которого имеет форму полукруга. В самом деле, из общего решения (98) следует, что в точках вертикального диаметра кругового поперечного сечения напряжения  $Y_z$  равны нулю, следовательно, по плоскости  $xz$ , разделяющей круглый стержень пополам, никаких напряжений нет, каждая половина стержня работает самостоятельно. Касательные усилия, приходящиеся на одну половину сечения, приведутся к вертикальной силе  $\frac{Q}{2}$  и к скручивающей паре сил. Напряжения, соответствующие этой паре, мы можем исключить при помощи известного решения для кручения стержня полукруглого сечения и таким путем получим распределение касательных напряжений при изгибе стержня полукруглого сечения.

#### § 54. Прямоугольное поперечное сечение

Уравнение контура (рис. 78) в этом случае представится так:  $(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0$ . Чтобы обратить в нуль правую часть уравнения (97), нужно положить  $f(y) = \frac{Qa^2}{2J}$ . При этом на сторонах  $x = \pm a$  обратится в нуль выражение  $\frac{Qx^2}{2J} - f(y)$ . На сторонах же  $y = \pm b$ , очевидно, производная  $\frac{\partial y}{\partial s}$  равна нулю.

Мы получим для точек контура  $\frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0$  и можем принять на контуре  $\Phi = 0$ .

Дифференциальное уравнение (96) перепишется так:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\sigma}{1 + \sigma} \frac{Qy}{J}.$$

Задача сводится, таким образом, к разысканию провисания мембраны, равномерно натянутой на прямоугольный контур и нагруженной сплошной нагрузкой, изменяющейся по закону  $\frac{\sigma}{1 + \sigma} \frac{Qy}{J}$ .

Для определения  $\Phi$  воспользуемся методом Ритца, который мы применяли при исследовании кручения. При заданном способе распределения нагрузки  $\Phi$  будет, очевидно, четной функцией относительно  $x$  и нечетной относительно  $y$ . Мы удовлетворим условиям на контуре, если положим

$$\Phi = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_{2m+1,n} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

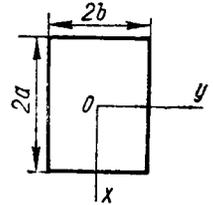


Рис. 78.

В таком случае

$$\frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\pi^2 ab}{2} \left[ \frac{(2m+1)^2}{4a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right] a^2_{2m+1,n}.$$

Уравнения (90) представятся в таком виде:

$$\begin{aligned} a_{2m+1,n} \pi^2 ab \left[ \frac{(2m+1)^2}{4a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right] &= \\ &= \frac{\sigma}{1 + \sigma} \frac{Q}{J} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{b} y dx dy, \end{aligned}$$

откуда

$$a_{2m+1,n} = \frac{\sigma}{1 + \sigma} \frac{Q}{J} - \frac{8b(-1)^{m+n-1}}{\pi^4 (2m+1)n \left[ \frac{(2m+1)^2}{4a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]}.$$

Обозначая через  $\alpha$  отношение  $b/a$ , находим

$$\Phi = \frac{\sigma}{1 + \sigma} \frac{Q}{J} \frac{8b^3}{\pi^4} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{m+n-1}}{(2m+1)n \left[ \frac{(2m+1)^2}{4} \alpha^2 + n^2 \right]} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Касательные напряжения определяются из формул

$$X_z = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{Q}{2J} (a^2 - x^2); \quad Y_z = - \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Заметим, что второй член в выражении для  $X_z$  дает как раз ту величину касательных напряжений, которую мы, на основании некоторых допущений, получаем в элементарной теории изгиба. Функцией  $\Phi$  определяются лишь поправки к касательным напряжениям, вычисляемым элементарным путем.

Вычислим напряжения для точек поперечного сечения, лежащих на оси  $y$ . Именно в этих точках, согласно элементарной теории, касательные напряжения

достигают своей наибольшей величины. Составляя производную  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$  и принимая во внимание равенства<sup>1</sup>

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12};$$

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)[(2m+1)^2+k^2]} = \frac{\pi^3}{32} \frac{\operatorname{sch} \frac{k\pi}{2} - 1}{\frac{1}{2} \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2},$$

получаем

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{x=y=0} = -\frac{\sigma}{1+\sigma} \frac{3Q}{8ab} \frac{b^2}{a^2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \right];$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{x=0; y=b} = \frac{\sigma}{1+\sigma} \frac{3Q}{8ab} \frac{b^2}{a^2} \left[ \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \right].$$

Что касается производной  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ , то она для рассматриваемых точек обращается в нуль. Для напряжений в этих точках получаем такие формулы:

$$\left. \begin{aligned} (X_z)_{x=0; y=0} &= \frac{3}{8} \frac{Q}{ab} \left\{ 1 - \frac{\sigma}{1+\sigma} \frac{b^2}{a^2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \right] \right\}; \\ (X_z)_{x=0; y=b} &= \frac{3}{8} \frac{Q}{ab} \left\{ 1 + \frac{\sigma}{1+\sigma} \frac{b^2}{a^2} \left[ \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \right] \right\}; \\ (Y_z)_{x=0} &= 0. \end{aligned} \right\} (99)$$

Множители в фигурных скобках представляют собой те коэффициенты, на которые нужно умножить результат элементарной теории, чтобы получить точное значение напряжения. Входящие в полученные формулы ряды весьма быстро сходятся и их суммирование не представляет никаких затруднений. Соответствующие вычисления для различных значений отношения  $b/a$  были произведены Сен-Венаном. Оказалось, что для высоких прямоугольников результаты элементарной теории весьма близки к точному решению. В случае квадратного сечения коэффициенты, на которые приходится умножить величину  $\frac{3}{8} \frac{Q}{ab}$ , равны соответственно 0,94 и 1,13. Для прямоугольников, у которых  $b > a$ , разность между точным и приближенным решениями получается большей, чем для квадрата, и она будет тем больше, чем большее значение имеет отношение  $b/a$ . Таким образом, большие погрешности элементарная теория может дать лишь в случае балок прямоугольного сечения, имеющих малую высоту и большую ширину. Но как раз именно в этих случаях касательные напряжения невелики и влияние их на изгиб ничтожно.

<sup>1</sup> См. стр. 22 нашей работы, указанной на стр. 136.

§ 55. Другие формы поперечных сечений

Особенно просто решается задача о распределении касательных напряжений при изгибе в случае сечения, рассмотренного Ф. Грасгофом<sup>1</sup> (рис. 79). Сечение это образовано двумя дугами гиперболы  $x^2(1 + \sigma) - \sigma y^2 = a^2$  и двумя прямыми  $y = \pm a$ .

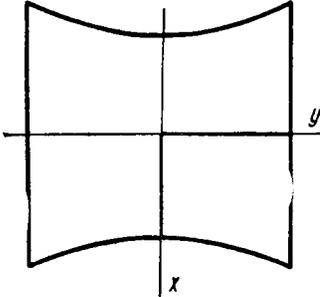


Рис. 79.

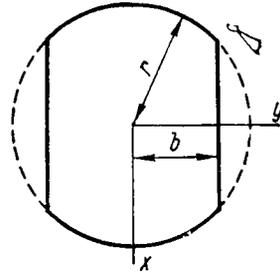


Рис. 80.

Мы обратим в нуль правую часть уравнения (97), если положим

$$f(y) = \frac{Q}{2J} \left( \frac{\sigma}{1 + \sigma} y^2 + \frac{a^2}{1 + \sigma} \right).$$

Уравнение (96) перепишется таким образом<sup>2</sup>:  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ . Мы удовлетворим этому уравнению и условию на контуре, если положим  $\varphi = 0$ . В таком случае напряжения определятся из формул

$$X_z = -\frac{Qx^2}{2J} + \frac{Q}{2J} \left( \frac{\sigma}{1 + \sigma} y^2 + \frac{a^2}{1 + \sigma} \right); \quad Y_z = 0.$$

Так же легко решаются задачи в том случае, когда уравнение контура имеет вид  $y = \pm b \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^\sigma$ .

Если сечение имеет вид, представленный на рис. 80, то правая часть уравнения (97) обратится в нуль, если положим  $f(y) = \frac{Q}{2J} (r^2 - y^2)$ .

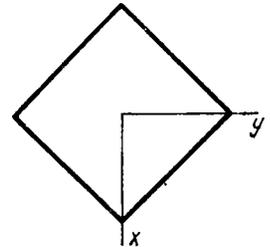


Рис. 81.

Приближенное выражение для функции напряжений  $\varphi$  мы сможем получить, пользуясь методом Ритца. Тем же способом может быть решена задача для сечения, имеющего форму равнобедренного треугольника, если сила параллельна основанию треугольника.

До сих пор мы предполагали, что направление силы совпадает с направлением одной из главных осей инерции поперечного сечения. Пользуясь принципом сложения действия сил можно перейти к любому направлению изгибающей силы, нужно лишь разложить силу на составляющие, направленные по главным осям инерции и найти напряжения от каждой такой составляющей. Тем же приемом мы без затруднений найдем распределение напряжений в случае квадратного сечения, когда изгибающая сила направлена по диагонали квадрата (рис. 81).

<sup>1</sup> G r a s h o f F. Theorie der Elastizität und Festigkeit mit Bezug auf ihre Anwendungen in der Technik. Zweite Auflage, Berlin, Verlag von Rudolf Gärtner, 1878, 408 SS. См. S 246. [Первое издание: G r a s h o f F. Festigkeitslehre mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse des Maschinenbaues. Berlin, G ä r t n e r, 1866, XIV, 294 SS].

<sup>2</sup> Постоянную  $c$  для симметричного сечения принимаем равной нулю.

Из условий симметрии заключаем, что на плоскости  $xz$  нет никаких напряжений. Следовательно, каждая половина балки изгибается и скручивается независимо под действием силы  $Q/2$ . Таким путем мы можем перейти к балке, поперечное сечение которой — равнобедренный прямоугольный треугольник с вертикально расположенной гипотенузой.

Мы привели здесь решения нескольких простейших задач. Дальнейшее развитие теории изгиба стержней и исследование распределения касательных напряжений в более сложных случаях, например в случае двутавровых, тавровых и коробчатых балок, в большой степени будет зависеть от развития графических и вычислительных способов интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных.

### § 56. Перемещения при изгибе

Кривизна изогнутой оси балки в плоскостях  $xz$  и  $yz$  с достаточной точностью определяется величиной вторых производных  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  и  $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ . Эти величины найдутся из формул

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial e_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial e_{zz}}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial e_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial e_{zz}}{\partial y}.$$

Принимая во внимание, что  $e_{zx}$  и  $e_{yz}$  от  $z$  не зависят, и выражая  $e_{zz}$  через соответствующее напряжение  $Z_z$ , получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{Q(l-z)}{EJ}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

Первоначально прямая ось балки после изгиба становится плоской кривой. Плоскость изгиба совпадает с плоскостью действия силы и кривизна в каждом сечении пропорциональна величине изгибающего момента. Пользуясь выражением для кривизны, находим

$$u = \frac{Q}{EJ} \left( \frac{1}{2} z^2 l - \frac{1}{6} z^3 \right) + \beta z.$$

Одна из произвольных постоянных интегрирования выбрана так, чтобы перемещение  $u$  в закрепленном конце обращалось в нуль. Что касается постоянной  $\beta$ , то для ее определения необходимо иметь дополнительные данные относительно способа закрепления конца стержня. Если стержень закреплен так, что элемент его оси в месте закрепления остается горизонтальным, то нужно положить  $\beta = 0$ .

Если закрепление таково, что не поворачивается вертикальный линейный элемент опорного сечения, проходящий через точку закрепления, по постоянная  $\beta$  равна сдвигу, соответствующему центру тяжести поперечного сечения (§ 32). На практике величина  $\beta$  в большой степени будет зависеть от тех *местных* напряжений, которые возникают в плоскости заделки и распределение которых может весьма значительно отличаться от того, которое мы нашли выше для различных форм поперечных сечений. Поэтому нельзя дать достаточно надежных формул для вычисления дополнительного прогиба, зависящего от величины  $\beta$ , т. е. прогиба, обусловленного касательными напряжениями.

Имея выражения для напряжений, мы можем без затруднения (§ 28) составить формулы для перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Как и в случае чистого изгиба, контур поперечного сечения благодаря перемещениям  $u$  и  $v$  искажается. Кроме того, благодаря касательным напряжениям происходит искривление первоначально плоских поперечных сечений.

## § 57. Уравнения теории упругости в цилиндрических координатах

Если деформируемое тело имеет форму тела вращения, то можно воспользоваться условиями симметрии и несколько упростить общие уравнения теории упругости. Для такой упрощенной задачи имеется ряд решений, могущих иметь практическое значение.

С телами вращения часто приходится иметь дело в технических расчетах, но при определении напряжений и деформаций обыкновенно в таких случаях ограничиваются самыми грубыми приближенными решениями, для чего приводят задачу, при помощи различных допущений, к простейшему типу. Так, например, при расчете круглых цилиндрических брусков на растяжение и сжатие предполагают, что растягивающие или сжимающие напряжения

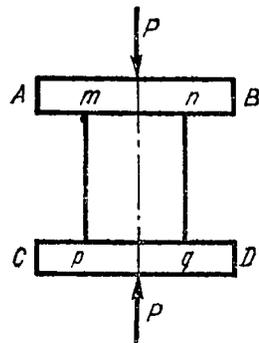


Рис. 83.

равномерно распределены по конечным поперечным сечениям стержня, и приводят задачу к случаю однородного напряженного состояния. В случае конических стержней, подвергающихся действию растяжения или сжатия, предполагают во всяком поперечном сечении равномерное распределение нормальных напряжений. При расчете валов переменного поперечного сечения, работающих на кручение, обыкновенно исходят из распределения напряжений, найденного для круглого цилиндрического стержня и т. д. В действительности перечисленные задачи значительно сложнее. Например, при растяжении стержня растягивающие силы  $P$

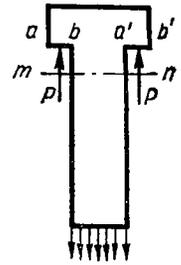


Рис. 82.

(рис. 82) распределяются по закраинам  $ab$  и  $a'b'$  и в поперечном сечении  $mn$ , близком к головке растягиваемого бруска, распределение растягивающих напряжений будет далеко не равномерным.

При сжатии цилиндра между досками пресса  $AB$  и  $CD$  (рис. 83) по плоскостям соприкосновения  $mn$  и  $pq$  сжимающие напряжения также распределяются неравномерно. Кроме того, вследствие трения здесь получаются касательные напряжения, препятствующие цилиндру свободно расширяться в поперечном направлении.

При скручивании вала переменного сечения (рис. 84) в переходном сечении  $mn$  распределение напряжений может значительно отличаться от линейного закона, найденного для круглых цилиндров, и перенапряжения

получаются тем большими, чем меньше радиус кривой, сопрягающей два участка вала различных диаметров.

При решении такого рода задач выгодно использовать условия симметрии. Мы выберем ось симметрии за одну из координатных осей, тогда соответствующей координатой будут определяться положения

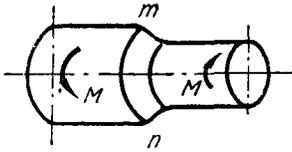


Рис. 84.

поперечных сечений тела, нормальных к оси вращения. Для определения положения точки в каком-либо определенном поперечном сечении удобнее всего в случае тел вращения воспользоваться полярными координатами. Если ось вращения назовем осью  $z$ , то величинами  $r$  и  $\theta$  вполне будет определяться положение точки тела.

При составлении дифференциальных уравнений равновесия мы воспользуемся результатами, полученными при решении плоской задачи в полярных координатах (§ 37). Напишем уравнения равновесия для бесконечно малого элемента (рис. 85), выделенного из тела двумя меридиональными плоскостями, двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами  $r$  и  $r + dr$  и двумя поперечными сечениями, проведенными на расстоянии  $dz$  друг от друга. Кроме сил, которые мы принимали во внимание при решении плоской задачи, сюда войдут еще усилия по верхней и нижней граням выделенного элемента, перпендикулярным к оси  $z$ . Нормальные напряжения по этим граням обозначим через  $\bar{z}z$ , а касательные напряжения — через  $\bar{r}z$  и  $\bar{\theta}z$ . Проектируя все приложенные к элементу силы на направление радиуса, направление оси  $z$  и направление перпендикуляра к плоскости  $rz$ , получаем таким же образом, как и в случае плоской задачи, следующие уравнения равновесия <sup>1</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial r\bar{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial r\bar{z}}{\partial z} + \frac{\bar{r}r - \bar{\theta}\theta}{r} &= 0; \\ \frac{\partial r\bar{z}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\theta}z}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{z}z}{\partial z} + \frac{\bar{r}z}{r} &= 0; \\ \frac{\partial r\bar{\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\theta}\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\theta}z}{\partial z} + \frac{2r\bar{\theta}}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} (100)$$

Объемными силами мы при этом пренебрегаем.

Условия на поверхности (3) могут быть несколько упрощены, так как нормаль  $\nu$  к поверхности тела вращения будет перпендикулярна к направлению напряжения  $\bar{\theta}\theta$ . Отличными от нуля будут лишь  $\cos(z\nu)$  и  $\cos(r\nu)$ . Обозначая через  $p_r$ ,  $p_z$  и  $p_\theta$  проекции интенсивности поверхностного давления на направления  $r$ ,  $z$  и  $\bar{\theta}\theta$ , перепишем условия (3) в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \bar{r}r \cos(r\nu) + \bar{r}z \cos(z\nu); \\ p_z &= \bar{r}z \cos(r\nu) + \bar{z}z \cos(z\nu); \\ p_\theta &= \bar{r}\theta \cos(r\nu) + \bar{\theta}z \cos(z\nu). \end{aligned} \right\} (101)$$

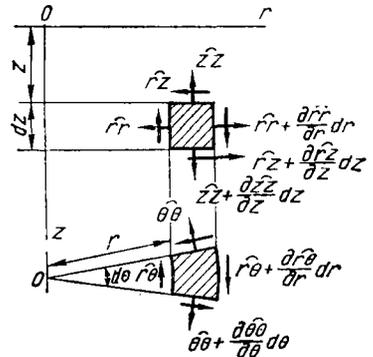


Рис. 85.

<sup>1</sup> Впервые уравнения теории упругости в цилиндрических координатах были получены Ламе и Клапейроном. Lamé G., Clapeyron B. P. E. Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes. J. für die reine und angewandte Mathematik, 1831, Bd 7, H. 2, N 19, SS. 145—169; H. 3, N 27, SS. 237—252; H. 4, N 32, SS. 381—413. См. также Mémoires présentés par divers Savans, 1833, t. 4, pp. 465—562.

В дальнейшем мы ограничимся таким видом деформации тел вращения, при котором распределение напряжений не зависит от угла  $\theta$ . В таком случае в уравнениях равновесия (100) пропадут все члены, в которые множителем входит производная по  $\theta$ , и мы получим такую систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}\bar{r}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{r}z}{\partial z} + \frac{\bar{r}\bar{r} - \bar{\theta}\bar{\theta}}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \bar{r}z}{\partial r} + \frac{\partial \bar{z}z}{\partial z} + \frac{\bar{r}z}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \bar{r}\bar{\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{\theta}z}{\partial z} + \frac{2\bar{r}\bar{\theta}}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

Первые два уравнения этой системы и первые два из условий (101) не включают касательных напряжений  $\bar{r}\bar{\theta}$  и  $\bar{\theta}r$ . Соответствующее им распределение напряжений будет симметричным относительно оси вращения. По меридиональным сечениям будут действовать лишь нормальные напряжения  $\bar{\theta}\bar{\theta}$ . Перемещения отдельных точек тела при такой деформации будут происходить в меридиональных сечениях.

В третье уравнение системы (102) и в третье из условий (101) входят лишь касательные напряжения  $\bar{r}\bar{\theta}$  и  $\bar{\theta}z$ . Эти напряжения, как мы увидим далее, возникают при скручивании тела вращения.

Рассмотрим сначала случай симметричной деформации. При решении этой задачи можно идти двумя различными путями в зависимости от условий на поверхности. Если нам заданы перемещения точек поверхности, то удобнее выразить составляющие напряжения  $\bar{r}\bar{r}$ , ...,  $\bar{r}z$  через перемещения. При заданных на поверхности напряжениях можно непосредственно приступить к определению напряжений из уравнений (102), но при этом нужно иметь в виду, что определяемое таким путем напряженное состояние должно удовлетворять дифференциальным зависимостям (40). Наметим общий ход решения задачи в обоих случаях.

Пусть  $u$ ,  $v$  и  $w$  обозначают перемещения какой-либо точки в направлении радиуса  $r$ , в направлении перпендикуляра к меридиональному сечению и в направлении оси  $z$ .

Тогда составляющие деформации представятся такими формулами (§ 37):

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}; & e_{\theta\theta} &= \frac{u}{r}; & e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}; \\ e_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; & e_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}; & e_{\theta z} &= \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned} \quad (103)$$

Пользуясь для объемного расширения обозначением  $\vartheta$ , получаем выражения для составляющих напряжения в таком виде (§ 17):

$$\begin{aligned} \bar{r}\bar{r} &= \lambda\vartheta + 2\mu e_{rr}; & \bar{\theta}\bar{\theta} &= \lambda\vartheta + 2\mu e_{\theta\theta}; & \bar{z}z &= \lambda\vartheta + 2\mu e_{zz}; \\ \bar{\theta}z &= \mu e_{\theta z}; & \bar{r}\bar{\theta} &= \mu e_{r\theta}; & \bar{r}z &= \mu e_{rz}. \end{aligned} \quad (104)$$

Вставляя эти значения напряжений в уравнения (102), получаем для симметричной деформации такие уравнения:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \quad (105)$$

В эти уравнения входят два неизвестных перемещения  $u$  и  $w$ . Исключая одно из них, можно привести задачу к решению одного дифференциального уравнения четвертого порядка <sup>1</sup>.

Для непосредственного определения напряжений выгодно в данном случае воспользоваться функцией напряжений. Оказывается, что первым двум уравнениям системы (102) можно удовлетворить, выражая все составляющие напряжения через одну функцию  $\varphi$  таким образом <sup>2</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \sigma \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right); & \overline{\theta\theta} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \sigma \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right); \\ \overline{zz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( (2 - \sigma) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right); \\ \overline{rz} &= \frac{1}{r} \left( -r\sigma \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \varphi + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

Здесь через  $\nabla^2$  обозначена операция  $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , соответствующая, в случае симметричной деформации, операции  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  для прямоугольной системы координат (§ 37).

Остается подобрать функцию  $\varphi$  так, чтобы были удовлетворены дифференциальные зависимости (40). Представим эти зависимости в цилиндрических координатах. Вместо составляющих напряжения  $X_x$  и  $Y_y$  придется воспользоваться их выражениями через  $\overline{rr}$  и  $\overline{\theta\theta}$ :  $X_x = \overline{rr} \cos^2 \theta + \overline{\theta\theta} \sin^2 \theta$ ;  $Y_y = \overline{rr} \sin^2 \theta + \overline{\theta\theta} \cos^2 \theta$ . В таком случае

$$\begin{aligned} \nabla^2 X_x &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\overline{rr} \cos^2 \theta + \overline{\theta\theta} \sin^2 \theta) = \\ &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\overline{rr} \cos^2 \theta + \overline{\theta\theta} \sin^2 \theta) - \frac{2}{r^2} \cos 2\theta (\overline{rr} - \overline{\theta\theta}). \end{aligned}$$

Кроме того, для симметричной деформации [формула (b) § 37] имеем

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} \cos^2 \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} \sin^2 \theta.$$

Вставляя это в первое из условий (40) и принимая во внимание, что уравнение должно быть удовлетворено при всяком угле  $\theta$ , находим:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \overline{rr} - \frac{2}{r^2} (\overline{rr} - \overline{\theta\theta}) + \frac{1}{1 + \sigma} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} &= 0; \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \overline{\theta\theta} + \frac{2}{r^2} (\overline{rr} - \overline{\theta\theta}) + \frac{1}{1 + \sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \quad (a)$$

Эти два уравнения заменят нам первые два уравнения системы (40). Третье уравнение той же системы останется при переходе к цилиндрическим координатам без изменения.

Вместо трех последних уравнений системы (40), заключающих касательные напряжения, будем иметь в случае деформации, симметричной относительно оси, одно уравнение, которое легко может быть получено из уравнения четвертого или пятого системы (40).

<sup>1</sup> Filon L. N. G. On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 1902, vol. 198, N 4, pp. 147—233.

<sup>2</sup> Этот способ введения функции напряжений принадлежит А. Ляву. См. стр. 317 книги А. Love — А. Timpe, указанной на стр. 9 (стр. 263 английского издания).

Принимая во внимание, что

$$X_z = \bar{r}z \cos \theta; \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r \partial z} \cos \theta;$$

$$\nabla^2 X_z = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \bar{r}z \cos \theta =$$

$$= \left( \nabla^2 \bar{r}z - \frac{\bar{r}z}{r^2} \right) \cos \theta,$$

из уравнения пятого получаем

$$\nabla^2 \bar{r}z - \frac{\bar{r}z}{r^2} + \frac{1}{1+\sigma} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial r} = 0.$$

Такой же результат мы бы получили и из уравнения четвертого системы (40). Что касается уравнения шестого той же системы, то оно в рассматриваемом случае всегда будет удовлетворено.

Таким образом, дифференциальные зависимости (40) в случае деформации, симметричной относительно оси, могут быть представлены в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \bar{r}r - \frac{2}{r^2} (\bar{r}r - \bar{\theta}\theta) + \frac{1}{1+\sigma} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} &= 0; \\ \nabla^2 \bar{\theta}\theta + \frac{2}{r^2} (\bar{r}r - \bar{\theta}\theta) + \frac{1}{1+\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} &= 0; \\ \nabla^2 \bar{z}z + \frac{1}{1+\sigma} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= 0; \\ \nabla^2 \bar{r}z - \frac{\bar{r}z}{r^2} + \frac{1}{1+\sigma} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

Вставляя в эти уравнения выражения для напряжений (106), легко убедиться, что все они будут удовлетворены, если только функция напряжений  $\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = \nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0. \quad (108)$$

Таким образом, решение задач теории упругости в случае симметричной деформации может быть приведено к интегрированию одного дифференциального уравнения (108) в частных производных четвертого порядка. При этом на поверхности должны быть удовлетворены уравнения (101).

## § 58. Деформация кругового цилиндра

В качестве простейшего примера деформации, симметричной относительно оси, рассмотрим задачу о распределении напряжений в круговом цилиндре, на который действуют поверхностные давления, распределенные симметрично относительно оси цилиндра.<sup>1</sup> В таком случае функция напряжений должна

<sup>1</sup> Впервые вопрос о деформации кругового цилиндра поверхностными силами был рассмотрен Л. Похгаммером. P o s c h h a m m e r L. Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszyylinder.— J. für die reine und angewandte Mathematik (J. von A. Crelle), 1876, Bd 81, H. 4, SS. 324—336. Л. Похгаммер применил свое решение к исследованию изгиба круглых стержней, а также к изучению продольных, поперечных и крутильных колебаний цилиндров. Ряд задач, связанных с симметричной деформацией круглых цилиндров, рассмотрен Чарльзом Чри. C h r i e e C. The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 1889, vol. 14, pt 3, pp. 250—369.

удовлетворяют уравнению (108), заданным условиям на боковой поверхности и условиям на концах цилиндра.

В случае длинных цилиндров особенно существенно удовлетворить условиям на боковой поверхности. Для этой цели выгодно воспользоваться решением уравнения (108) в виде тригонометрического ряда. Решение это, аналогичное решению для длинной прямоугольной полосы (§ 35), даст возможность разыскать напряжения при любом симметричном распределении нормальных и касательных напряжений по боковой поверхности цилиндра. Очевидно, что всякое решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (a)$$

будет в то же время и решением уравнения (108). Будем искать эти решения в такой форме:

$$\varphi = R \sin \frac{n\pi z}{l} = R \sin kz, \quad (b)$$

где  $R$  — функция только  $r$ , а  $l$  — длина цилиндра. Вставляя (b) в уравнение (a), получаем для определения  $R$  такое обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - k^2 R = 0. \quad (c)$$

Интеграл этого уравнения будем искать в виде бесконечного ряда

$$R = a_0 + a_1 r^2 + a_2 r^4 + a_3 r^6 + \dots \quad (d)$$

Вставляя этот ряд в уравнение (c) и приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях  $r$ , находим следующую зависимость между последовательными коэффициентами ряда (d):  $(2n)^2 a_n - k^2 a_{n-1} = 0$ . Следовательно, интеграл уравнения (c) представится в виде такого бесконечного ряда<sup>1</sup>:

$$R = a_0 \left[ 1 + \frac{k^2 r^2}{(2 \cdot 2)^2} + \frac{k^4 r^4}{(2 \cdot 4)^2} + \frac{k^6 r^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots \right].$$

Заключенная в скобки сумма бесконечного ряда представляет собой известную функцию Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента  $ikr$ . Мы в дальнейшем будем обозначать ее через  $J_0(ikr)$ . Для этой функции имеются таблицы<sup>2</sup>, при помощи которых легко определяется значение функции для данного значения  $kr$ . Найдя интеграл уравнения (c), мы получим решения уравнения (a), а следовательно, и уравнения (108) в таком виде:  $\varphi_1 = a_0 \sin kz J_0(ikr)$ .

Кроме решений, общих с уравнением (a), уравнение (108) имеет еще и другие решения. Одно из этих решений мы можем выразить через функцию Бесселя первого порядка, связанную с  $J_0(ikr)$  таким соотношением:

$$J_1(ikr) = - \frac{\partial J_0(ikr)}{\partial(ikr)} = \frac{ikr}{2} \left( 1 + \frac{k^2 r^2}{2 \cdot 4} + \frac{k^4 r^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \frac{k^6 r^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots \right).$$

<sup>1</sup> Мы ограничимся здесь лишь этим интегралом уравнения (c). Второй интеграл того же уравнения обращается в бесконечность при  $r = 0$ , его приходится отбросить, когда имеем дело со сплошным цилиндром. Исследование решений уравнений типа (c) можно найти в книгах: Forsyth A. R. A treatise on differential equations. Ld.— N. Y., Macmillan and Co, limited, 1903, 511 pp. Имеется также немецкий перевод книги: Forsyth A. R. Lehrbuch der Differentialgleichungen, mit den Auflosungen der Aufgaben von Herrmann Mater. Braunschweig, F. Vieweg, 1912. Gray A., Matthews G. B. A treatise on Bessel functions and their application to physics. Ld.— N. Y., Macmillan and Co., 1895, 291 pp. Приложение решения уравнения вида (c) к ряду задач теории упругости имеется в статье А. Н. Динника, указанной в списке на стр. 128.

<sup>2</sup> Jahnke E., Emde F. Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Leipzig und Berlin, V. G. Teubner, 1909, 176 SS., см. S. 130. [Янке Я., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми, 1934, 194 стр.].

Произведя над функцией

$$R_1 = r \frac{\partial}{\partial r} J_0(ikr) = -ikr J_1(ikr) = \frac{k^2 r^2}{2} \left( 1 + \frac{k^2 r^2}{2 \cdot 4} + \frac{k^4 r^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \dots \right)$$

операцию  $\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - k^2 \right) R_1$ , получим, как легко убедиться, выражение  $2k^2 J_0(ikr)$ . Так как  $J_0(ikr)$  представляет собой интеграл уравнения (с), то, следовательно,  $R_1$  будет удовлетворять уравнению

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - k^2 \right) \left( \frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_1}{\partial r} - k^2 R_1 \right) = 0$$

и мы можем второй интеграл уравнения (108) представить в таком виде:  $\varphi_2 = a_1 \sin kz (ikr) J_1(ikr)$ . Окончательно примем для функции напряжений выражение

$$\varphi = \sin kz [a_0 J_0(ikr) + a_1 (ikr) J_1(ikr)]. \quad (e)$$

Вставляя это в выражения для напряжений (106), получаем  $\overline{rr} = \cos kt [a_0 f_1(r) + a_1 f_2(r)]$ ;  $\overline{rz} = \sin kt [a_0 f_3(r) + a_1 f_4(r)]$ . Здесь для краткости обозначены через  $f_1(r), \dots, f_4(r)$  функции, выражающиеся через  $J_0(ikr)$  и  $J_1(ikr)$ . При помощи таблиц для функций Бесселя легко вычислить  $f_1(r), \dots, f_4(r)$  для всякого значения  $r$  и определить соответствующие значения  $\overline{rr}$  и  $\overline{rz}$ . Положив наружный радиус цилиндра равным  $a$  и вычислив значения  $f_1(a), \dots, f_4(a)$ , получим для боковой поверхности цилиндра

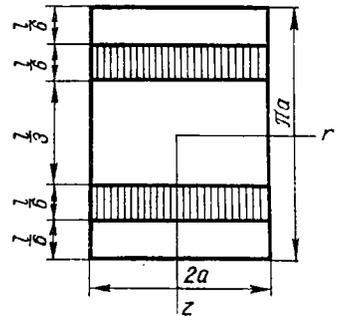


Рис. 86.

$$(\overline{rr})_{r=a} = \cos \frac{n\pi z}{l} [a_0 f_1(a) + a_1 f_2(a)]; \quad (\overline{rz}) = \sin \frac{n\pi z}{l} [a_0 f_3(a) + a_1 f_4(a)],$$

т. е. выбранная нами функция напряжений (е) соответствует тому случаю, когда нормальные напряжения вдоль образующей цилиндра изменяются по закону  $\cos \frac{n\pi z}{l}$ , а касательные — по закону  $\sin \frac{n\pi z}{l}$ . Интенсивности как тех, так и других напряжений можно придать любое значение надлежащим выбором постоянных  $a_0$  и  $a_1$ . Полагая, например,  $a_0 f_1(a) + a_1 f_2(a) = A$ ;  $a_0 f_3(a) + a_1 f_4(a) = 0$ , получаем распределение напряжений для случая, когда по боковой поверхности цилиндра распределены лишь нормальные напряжения интенсивности  $p_r = A \cos \frac{n\pi z}{l}$ .

Так же точно можем изучить действие на цилиндр касательных усилий интенсивности  $p_z = B \sin \frac{n\pi z}{l}$ . Меняя  $\sin \frac{n\pi z}{l}$  на  $\cos \frac{n\pi z}{l}$ , мы получим для уравнения (108) решение

$$\varphi = \cos kz [b_0 J_0(ikr) + b_1 (ikr) J_1(ikr)], \quad (f)$$

которому будет соответствовать распределение по боковой поверхности нормальных напряжений, изменяющихся по закону  $\sin \frac{n\pi z}{l}$ , и касательных напряжений, изменяющихся по закону  $\cos \frac{n\pi z}{l}$ . Наложением решений вида (е) и (f) мы можем удовлетворить условиям на поверхности цилиндра при любом симметричном распределении поверхностных усилий.

В заключение приводим результаты вычислений, произведенных Л. Файлоном<sup>1</sup> для цилиндра, представленного на рис. 86. Цилиндр растягивается касательными усилиями, равномерно распределенными по заштрихованной части боковой поверхности. Особый интерес представляет распределение нормальных напряжений  $zz$  по различным поперечным сечениям цилиндра. Отношения

Таблица 5

$z/l$	$r/a = 0$	$r/a = 0,2$	$r/a = 0,4$	$r/a = 0,6$	$r/a = 1$
0	0,689	0,719	0,810	0,962	1,117
0,05	0,673	0,700	0,786	0,937	1,163
0,10	0,631	0,652	0,720	0,859	1,344
0,15	0,582	0,594	0,637	0,737	2,022
0,20	0,539	0,545	0,565	0,617	1,368

этих напряжений к тому среднему растягивающему напряжению, которое получается от деления полной растягивающей силы на площадь поперечного сечения, приведены в табл. 5.

Мы видим, что растягивающие напряжения у поверхности цилиндра быстро падают по мере удаления от места приложения сил и приближаются к среднему значению растягивающих напряжений.

### § 59. Решение задачи при помощи целых полиномов

В тех случаях, когда высота цилиндра мала по сравнению с его диаметром и цилиндр имеет, следовательно, форму круглого диска или пластинки<sup>2</sup>, наиболее существенным является удовлетворение условий на основаниях цилиндра.

При определении напряжений в таких случаях выгодно пользоваться решением уравнения (108) в виде целых полиномов.

Преобразуем предварительно это уравнение, переходя от цилиндрических координат к полярным. При симметричной деформации нам приходилось определять положение точки в какой-либо меридиональной плоскости координатами  $r$  и  $z$ . Введем теперь новые координаты, радиус  $R$  и угол  $\delta$  (рис. 87). В таком случае, на основании формул (b) § 37, будем иметь

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \delta^2};$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R \sin \delta} \left( \frac{\partial}{\partial R} \sin \delta + \frac{\cos \delta}{R} \frac{\partial}{\partial \delta} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\operatorname{ctg} \delta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \delta}.$$

Рис. 87.

<sup>1</sup> См. статью Л. N. G. Filon, указанную в сноске на стр. 152.

<sup>2</sup> Дисксом мы называем невысокий цилиндр в том случае, если при деформации срединная плоскость, перпендикулярная к оси цилиндра и делящая его длину пополам, остается не искривленной. В тех случаях, когда срединная плоскость невысокого цилиндра искривляется, мы называем этот цилиндр пластинкой.

Следовательно, левая часть уравнения (108) может быть представлена в таком виде:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \delta^2} + \operatorname{ctg} \delta \frac{\partial}{\partial \delta} \right) \right] \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \delta^2} + \operatorname{ctg} \delta \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} \right) \right] = 0. \quad (108')$$

Рассмотрим предварительно те решения уравнения (108'), которые в то же время будут и решениями уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \delta^2} + \operatorname{ctg} \delta \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} \right) = 0. \quad (109)$$

Частные решения этого последнего уравнения будем искать в форме

$$R^n \psi_n, \quad (a)$$

где  $\psi_n$  обозначает неизвестную пока функцию от угла  $\delta$ .

Вставляя выражение (a) в уравнение (109), получаем для  $\psi_n$  следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{\sin \delta} \frac{\partial}{\partial \delta} \left( \sin \delta \frac{\partial \psi_n}{\partial \delta} \right) + n(n+1) \psi_n = 0. \quad (b)$$

Уравнение это преобразуем, введя новую переменную  $\mu = \cos \delta$ . В таком случае

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial \delta} = - \frac{\partial \psi_n}{\partial \mu} \sin \delta; \quad \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \delta^2} = \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \mu^2} \sin^2 \delta - \frac{\partial \psi_n}{\partial \mu} \mu$$

и уравнение (b) может быть представлено так:

$$(1 - \mu^2) \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \mu^2} - 2\mu \frac{\partial \psi_n}{\partial \mu} + n(n+1) \psi_n = 0. \quad (110)$$

Полученное дифференциальное уравнение будем интегрировать при помощи бесконечных рядов<sup>1</sup>. Положим

$$\psi_n = a_1 \mu^{m_1} + a_2 \mu^{m_2} + a_3 \mu^{m_3} + \dots \quad (c)$$

Вставляя этот ряд в уравнение (110), получаем

$$n(n+1)(a_1 \mu^{m_1} + a_2 \mu^{m_2} + \dots) = m_1(m_1+1)a_1 \mu^{m_1} - m_1(m_1-1)a_1 \mu^{m_1-2} + \\ + m_2(m_2+1)a_2 \mu^{m_2} - m_2(m_2-1)a_2 \mu^{m_2-2} + \dots \quad (d)$$

Чтобы это равенство имело место при любом значении  $\mu$ , нужно допустить следующую зависимость между показателями  $m_1, m_2, m_3, \dots$ :  $m_2 = m_1 - 2$ ;  $m_3 = m_2 - 2, \dots$ , т. е. ряд (c) располагается по нисходящим степеням буквы  $\mu$ .

Перенеся все члены равенства (d) в одну сторону и приравняв нулю коэффициент при  $\mu^{m_1}$ , определим показатель  $m_1$  из уравнения

$$n(n+1) - m_1(m_1+1) = (n - m_1)(m_1 + n + 1) = 0. \quad (111)$$

Получим два решения:  $m_1 = n$ ,  $m_1 = -(n+1)$ .

Рассмотрим случай, соответствующий первому решению, когда

$$m_1 = n, m_2 = n - 2, m_3 = n - 4, \dots$$

<sup>1</sup> Подробное исследование этого уравнения, носящего название уравнения Лежандра, можно найти на стр. 155 курса А. R. Forsyth, указанного в сноске на стр. 154.

Значения коэффициентов  $a_2, a_3, \dots$  в ряде (с) получаем из (d), сравнивая коэффициенты при различных степенях  $\mu$ . В таком случае для  $\mu^{n-2r+2}$  получим

$$n(n+1)a_r = (m_1 - 2r + 2)(m_1 - 2r + 3)a_r - (m_1 - 2r + 4)(m_1 - 2r + 3)a_{r-1}.$$

При  $m_1 = n$  зависимость между двумя последовательными коэффициентами ряда (с) определится формулой

$$a_r = - \frac{(n-2r+4)(n-2r+3)}{2(r-1)(2n-2r+3)} a_{r-1}$$

и решение (а) представится в таком виде:

$$\Phi_n = a_1 R^n \left( \mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} - \dots \right).$$

Принимая во внимание, что  $\mu = \cos \delta$ ,  $R\mu = z$ ,  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ , и полагая  $n$  равным 0, 1, 2, 3, ..., получаем ряд решений уравнения (109) в виде таких целых полиномов:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= A_0; & \Phi_1 &= A_1 z, & \Phi_2 &= A_2 \left[ z^2 - \frac{1}{3} (r^2 + z^2) \right]; \\ \Phi_3 &= A_3 \left[ z^3 - \frac{3}{5} (r^2 + z^2) z \right]; & \Phi_4 &= A_4 \left[ z^4 - \frac{6}{7} z^2 (r^2 + z^2) + \frac{3}{35} (r^2 + z^2)^2 \right]; \\ \Phi_5 &= A_5 \left[ z^5 - \frac{10}{9} z^3 (r^2 + z^2) + \frac{15}{63} (r^2 + z^2)^2 z \right]. \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

Кроме таких решений, общих для уравнений (108') и (109), мы можем получить сколько угодно решений уравнения (108'), не удовлетворяющих уравнению (109). Если  $R^n \psi_n$  представляет собой решение уравнения (109), то легко показать, что выражение  $R^{n+2} \psi_n$  будет решением уравнения (108'). В самом деле, произведя над этим выражением операцию, указанную в левой части уравнения (109), найдем

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \delta^2} + \operatorname{ctg} \delta \frac{\partial}{\partial \delta} \right) \right] R^{n+2} \psi_n = 2(2n+3) R^n \psi_n.$$

Произведя ту же операцию еще один раз, как это предусматривается уравнением (108), мы в результате получим, очевидно, нуль. Следовательно,  $R^{n+2} \psi_n$  представляет собой решение уравнения (108'), и из полиномов (112) можно получить ряд новых решений путем умножения на  $(r^2 + z^2)$ .

Таким образом, находим решения:

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= B_2 (r^2 + z^2); & \Phi_3 &= B_3 z (r^2 + z^2); & \Phi_4 &= B_4 (2z^2 - r^2) (r^2 + z^2); \\ & & \Phi_5 &= B_5 (2z^3 - 3r^2 z) (r^2 + z^2). \end{aligned} \quad (113)$$

Комбинируя решения (112) и (113), можно разрешить ряд задач, имеющих техническое значение.

## § 60. Изгиб круглой пластинки

Изгиб круглой пластинки нагрузкой, распределенной симметрично относительно центра, исследуют обыкновенно в элементарных курсах сопротивления материалов<sup>1</sup>. При этом для упрощения решения предполагают, что каждый ли-

<sup>1</sup> См. стр. 368 нашего Курса сопротивления материалов, указанного в сноске на стр. 96.

нейный элемент пластинки, перпендикулярный к срединной плоскости, остается при деформации прямым и устанавливается нормально к искривленной срединной поверхности пластинки. Нормальными напряжениями  $Z_z$ , действующими по площадкам, параллельным срединной плоскости, в элементарной теории изгиба пластинок пренебрегают.

При помощи решений (112) и (113) мы можем проверить результаты, получаемые элементарным путем. Если мы для функции напряжений воспользуемся полиномами третьей степени и положим  $\varphi = a_3(2z^3 - 3r^2z) + b_3(r^2z + z^3)$ , то формулы (106) дадут для напряжений следующие выражения:

$$\begin{aligned} \overline{rr} &= 6a_3 + (10\sigma - 2)b_3; & \overline{\theta\theta} &= 6a_3 + (10\sigma - 2)b_3; \\ \overline{zz} &= -12a_3 + (14 - 10\sigma)b_3; & \overline{rz} &= 0. \end{aligned} \quad (114)$$

Таким образом, получим случай однородного напряженного состояния. Подбирая надлежащим образом значения произвольных постоянных  $a_3$  и  $b_3$ , можно найти распределение напряжений в круглом диске, для которого заданы постоянные значения  $\overline{zz}$  и  $\overline{rr}$  на поверхности.

Возьмем теперь функцию напряжений в виде полинома четвертой степени и положим  $\varphi = a_4(8z^4 - 24r^2z^2 + 3r^4) + b_4(2z^4 + r^2z^2 - r^4)$ . Вставляя это в формулы (106), найдем для напряжений такие выражения:

$$\begin{aligned} \overline{rr} &= 96a_4z + 4b_4(14\sigma - 1)z; & \overline{zz} &= -192a_4z + 4b_4(16 - 14\sigma)z; \\ \overline{rz} &= 96a_4r + b_4(28\sigma - 32)r. \end{aligned} \quad (115)$$

Подберем произвольные постоянные так, чтобы было удовлетворено условие  $96a_4 + b_4(28\sigma - 32) = 0$ . В таком случае напряжения  $\overline{rz}$  и  $\overline{zz}$  обратятся в нуль для всех точек пластинки. Напряжения  $\overline{rr}$  являются линейной функцией от  $z$  и представляются такой формулой:  $\overline{rr} = 28b_4(1 + \sigma)z$ . Отсчитывая  $z$  от срединной плоскости пластинки, приходим к распределению напряжений в случае чистого изгиба пластинки моментами, равномерно распределенными по контуру. Результат этот совершенно совпадает с элементарным решением.

Рассмотрим изгиб круглой пластинки равномерно распределенной нагрузкой. Для этого воспользуемся функцией напряжений в виде полинома шестой степени. Составляя эту функцию указанным выше способом (§ 59), получаем

$$\varphi = \frac{a_6}{3}(16z^6 - 120z^4r^2 + 90z^2r^4 - 5r^6) + b_6(8z^6 - 16z^4r^2 - 21z^2r^4 + 3r^6).$$

Вставляя это значение функции напряжений в формулы (106), находим для напряжений такие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= a_6(320z^3 - 720r^2z) + b_6\{32(4 + 22\sigma)z^3 + \\ &\quad + (504 - 48 \cdot 22\sigma)r^2z\}; \\ \overline{zz} &= a_6(-640z^3 + 960r^2z) + b_6\{-960 + \\ &\quad + 32 \cdot 22(2 - \sigma)z^3 + [384 - 48 \cdot 22(2 - \sigma)]r^2z\}; \\ \overline{rz} &= a_6(960rz^2 - 240r^3) + b_6\{(-672 + 48 \cdot 22\sigma)z^2r + \\ &\quad + (432 - 12 \cdot 22\sigma)r^3\}. \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Предположим, что  $z$  отсчитывается от срединной плоскости пластинки, толщина пластинки равна  $2c$  (рис. 88) и наружный радиус равен  $a$ . В таком

случае на верхней и нижней поверхностях должны быть удовлетворены такие условия:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}z &= 0 & \text{при } z = \pm c; \\ \bar{z}z &= 0 & \text{при } z = -c; \\ \bar{z}z &= -p & \text{при } z = +c. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Чтобы удовлетворить всем этим условиям, присоединим к решениям (116) следующие значения напряжений, получаемые из (114) и (115):

$$\bar{r}r = 96a_4z; \quad \bar{z}z = -192a_4z + a; \quad \bar{r}z = 96a_4r.$$

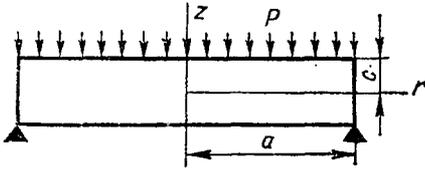


Рис. 88.

Вставляя выражения для напряжений в условия (а), получаем для определения четырех произвольных постоянных следующие четыре уравнения:

$$-240a_6 + (432 - 12 \cdot 22\sigma) b_6 = 0;$$

$$[960a_6 - b_6(672 -$$

$$-48 \cdot 22 \cdot \sigma)] c^3 + 96a_4 = 0;$$

$$\{-640a_6 + b_6[-960 + 32 \cdot 22(2 - \sigma)]\} c^3 - 192a_4c + a = -p;$$

$$\{-640a_6 + b_6[-960 + 32 \cdot 22(2 - \sigma)]\} c^3 - 192a_4c - a = 0.$$

Отсюда получим такие значения произвольных постоянных:

$$a = -\frac{p}{2}; \quad a_4 = \frac{p}{4 \cdot 64 \cdot c}; \quad b_6 = -\frac{p}{4 \cdot 11 \cdot 64 \cdot c^3};$$

$$a_6 = -\frac{p(18 - 11\sigma)}{4 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 64 \cdot c^3}.$$

Напряжения представляются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}r &= p \left[ -\frac{2 + \sigma}{8} \frac{z^3}{c^3} + \frac{3(3 + \sigma)}{32} \frac{r^2z}{c^3} + \frac{3}{8} \frac{z}{c} \right]; \\ \bar{z}z &= p \left( \frac{z^3}{4c^3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{z}{c} - \frac{1}{2} \right); \\ \bar{r}z &= \frac{3pr}{8c^3} (c^2 - z^2). \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

Заметим, что распределение напряжений  $\bar{z}z$  и  $\bar{r}z$  по толщине пластинки такое же, как и для прямоугольной полосы, изгибаемой равномерной нагрузкой [формулы (60) § 34]. Что касается радиальных напряжений  $\bar{r}r$ , то они представляются нечетной функцией от  $z$ . Соответствующие им усилия приводятся к изгибающим моментам, равномерно распределенным по контуру пластинки.

Чтобы получить изгиб пластинки с опертм краем, нужно к напряжениям (117) присоединить напряжения чистого изгиба

$$\bar{r}r = 28(1 + \sigma) b_4z = bz \quad (b)$$

и определить произвольную постоянную  $b$  так, чтобы было удовлетворено

условие  $\int_{-c}^{+c} \bar{r}r z dz = 0$  при  $r = a$ .

Вставляя вместо  $\bar{r}r$  его значение и выполняя интегрирование, получаем

$$b = \frac{3p}{8c} \left( \frac{2+\sigma}{5} - \frac{3+\sigma}{4} \frac{a^2}{c^2} - 1 \right).$$

Окончательно радиальные напряжения для пластинки с опертыми краями<sup>1</sup> представляется такой формулой:

$$\bar{r}r = p \left\{ -\frac{2+\sigma}{8} \frac{z^3}{c^3} + \frac{3(3+\sigma)}{32} \frac{r^2 z}{c^3} + \frac{z}{c} \left[ \frac{3}{8} \frac{2+\sigma}{5} - \frac{3(3+\sigma)}{32} \frac{a^2}{c^2} \right] \right\}. \quad (118)$$

Для центра пластинки радиальные напряжения будут

$$(\bar{r}r)_{r=0} = p \left\{ -\frac{2+\sigma}{8} \frac{z^3}{c^3} + \frac{z}{c} \left[ \frac{3}{8} \frac{2+\sigma}{5} - \frac{3(3+\sigma)}{32} \frac{a^2}{c^2} \right] \right\}.$$

Элементарная теория для тех же напряжений дает значение

$$(\bar{r}r)_{r=0} = -\frac{3(3+\sigma)p}{32} \frac{z}{c} \frac{a^2}{c^2}.$$

В тех случаях, когда радиус пластинки велик по сравнению с ее толщиной, разница между точным и приближенным решениями ничтожна и мы можем пользоваться приближенными формулами.

Наложением напряжений (b), соответствующих чистому изгибу, мы устранили изгибающие моменты, распределенные по контуру пластинки и соответствующие решению (117), но при этом не уничтожили радиальных напряжений  $\bar{r}r$ . Контур пластинки не свободен от нормальных напряжений, но эти напряжения таковы, что соответствующие им равнодействующая сила и равнодействующая пара сил, приходящиеся на каждый элемент дуги контура, обращаются в нуль. В таком случае на основании принципа Сен-Венана заключаем, что оставшиеся на контуре нормальные усилия могут оказывать заметное влияние на величину напряжений лишь в точках, близких к контуру.

Заметим еще, что полученные выше решения для круглой пластинки будут справедливы лишь в том случае, если перемещения (прогибы пластинки) малы по сравнению с ее толщиной.<sup>2</sup> В противном случае, даже при чистом изгибе пластинки парами сил, равномерно распределенными по контуру, срединная поверхность пластинки испытывает растяжения или сжатия, зависящие от  $r$  и от величины прогиба.

## § 61. О напряжениях в быстро вращающихся дисках

При элементарном решении этой задачи исходят из того предположения, что напряжения по толщине диска не меняются. Для получения точного решения необходимо предварительно составить дифференциальные уравнения равновесия и дифференциальные зависимости между составляющими напряжения в том предположении, что на каждую единицу объема вращаю-

<sup>1</sup> Точное решение задачи об изгибе круглой пластинки, несущей равномерную нагрузку, получено А. Лявом. См. стр. 553 книги А. Love — А. Тимпе, упомянутой на стр. 9 (стр. 460 английского издания). А. Ляв применил в этой задаче прием Мичелла. См. статью J. H. Michell, указанную на стр. 50. Ряд задач, относящихся к изгибу круглой пластинки сплошной и с отверстием в центре, имеется в работе А. П. Коробова «Деформации, имеющие ось симметрии». Изв. Киевского политехнического института, отдел инженерной механики, 1913, год 13, кн. 3, стр. 267—339. Легко видеть, что, повышая степень полиномов, можно получить целый ряд решений для симметричного изгиба круглой пластинки.

<sup>2</sup> См. стр. 171 книги W. T. Kelvin, P. G. Tait, указанной в сноске на стр. 130.

щегося диска действует в радиальном направлении объемная сила  $\rho\omega^2 r$ , где  $\rho$  — масса единицы объема и  $\omega$  — угловая скорость вращения диска.

Из уравнений равновесия (102) нам придется изменить лишь первое уравнение, полученное как результат проектирования всех действующих на элемент сил на радиальное направление.

Приняв во внимание радиальную объемную силу, представим нужные нам уравнения равновесия в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}r}{\partial r} + \frac{\partial \bar{r}z}{\partial z} + \frac{\bar{r}r - \bar{\theta}\theta}{r} + \rho\omega^2 r &= 0; \\ \frac{\partial \bar{r}z}{\partial r} + \frac{\partial \bar{z}z}{\partial z} + \frac{\bar{r}z}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

При составлении дифференциальных зависимостей придется исходить не из уравнений (40), которыми мы пользовались раньше (§ 57), а из общих уравнений (38). Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае  $X = \omega^2 x$ ;  $Y = \omega^2 y$ ;  $Z_z = 0$ , и пользуясь преобразованиями § 57, получаем следующие дифференциальные зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \bar{r}r - \frac{2}{r^2} (\bar{r}r - \bar{\theta}\theta) + \frac{1}{1+\sigma} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} &= -\frac{2\rho\omega^2}{1-\sigma}; \\ \nabla^2 \bar{\theta}\theta + \frac{2}{r^2} (\bar{r}r - \bar{\theta}\theta) + \frac{1}{1+\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} &= -\frac{2\rho\omega^2}{1-\sigma}; \\ \nabla^2 \bar{z}z + \frac{1}{1+\sigma} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= -\frac{2\sigma\rho\omega^2}{1-\sigma}; \\ \nabla^2 \bar{r}z - \frac{\bar{r}z}{r^2} + \frac{1}{1+\sigma} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

Определение напряжений в быстро вращающемся диске сводится к разысканию решения уравнений (119), удовлетворяющего дифференциальным зависимостям (120) и условиям на поверхности диска. Если к диску не приложено никаких поверхностных сил, то, следовательно, напряжения  $\bar{r}r$ ,  $\bar{z}z$  и  $\bar{r}z$  на наружной поверхности должны обращаться в нуль.

Разыскание решения разобьем на две части. Сначала найдем какое-либо частное решение уравнений (119), удовлетворяющее зависимостям (120). Напряжения, соответствующие этому решению, не будут, вообще говоря, удовлетворять условиям на поверхности. Чтобы удовлетворить этим условиям, мы можем присоединить к найденному решению сколько угодно решений вида (112) или (113). Результат такого наложения решений, очевидно, будет удовлетворять уравнениям (119) и (120), и при надлежащем выборе произвольных постоянных в решениях типа (112) и (113) могут быть выполнены и заданные условия на поверхности.

Частное решение уравнений (119) будем разыскивать следующим образом. Положим

$$\bar{r}r = Br^2 + Dz^2; \quad \bar{z}z = Ar^2; \quad \bar{\theta}\theta = Cr^2 + Dz^2; \quad \bar{r}z = 0. \quad (a)$$

В таком случае второе из уравнений (119) и третье уравнение системы (120) будут удовлетворены. Остальными четырьмя уравнениями воспользуемся для определения постоянных  $A$ , ...,  $D$ . Вставляя решения (a) в уравнения (119) и (120), получаем

$$4B + 2D - 2(B - C) + \frac{2}{1+\sigma} (A + B + C) = -\frac{2\rho\omega^2}{1-\sigma};$$

$$4C + 2D + 2(B - C) + \frac{2}{1+\sigma} (A + B + C) = -\frac{2\rho\omega^2}{1-\sigma};$$

$$4A + \frac{4D}{1+\sigma} = -\frac{2\sigma\rho\omega^2}{1-\sigma};$$

$$2Br + (B - C)r + \rho\omega^2 r = 0.$$

Этим уравнениям мы удовлетворим, положив

$$A = \frac{\rho\omega^2 (1 + 3\sigma)}{6\sigma}; \quad B = -\frac{\rho\omega^2}{3}; \quad C = 0; \quad D = -\frac{\rho\omega^2 (1 + 2\sigma)(1 + \sigma)}{6\sigma(1 - \sigma)}.$$

Частные решения (а) переписываются так:

$$\begin{aligned} \bar{r}r &= -\frac{\rho\omega^2}{3} r^2 - \frac{\rho\omega^2(1+2\sigma)(1+\sigma)}{6\sigma(1-\sigma)} z^2; & \bar{z}z &= \frac{\rho\omega^2(1+3\sigma)}{6\sigma} r^2, \\ \bar{\theta}\theta &= -\frac{\rho\omega^2(1+2\sigma)(1+\sigma)}{6\sigma(1-\sigma)} z^2; & \bar{r}z &= 0. \end{aligned} \tag{121}$$

Полученными частными решениями можно воспользоваться при определении напряжений, возникающих при вращении около неподвижной оси тела любой формы. При определении напряжений в круглом диске мы к частным решениям (121) присоединим решения типа (112) и (113). Соответствующая функция напряжений имеет форму полинома пятой степени. Положим  $\varphi = a_5(8z^5 - 40r^2z^3 + 15r^4z) + b_5(2z^2 - r^2z^3 - 3r^4z)$ . Формулы (106) дадут нам для напряжений такие выражения:

$$\begin{aligned} \bar{r}r &= -a_5(180r^2 - 240z^2) + b_5[(36 - 54\sigma)r^2 + (1 + 18\sigma)6z^2]; \\ \bar{z}z &= -a_5(-240r^2 + 480z^2) + b_5[(96 - 108\sigma)z^2 + (-102 + 54\sigma)r^2]; \\ \bar{r}z &= 480a_5rz + b_5(108\sigma - 96)rz. \end{aligned}$$

Подбирая произвольные постоянные так, чтобы было удовлетворено уравнение  $480a_5 - 96b_5 + 108\sigma b_5 = 0$ , получаем напряжения

$$\bar{r}r = 54b_5(1 + \sigma)z^2 - \frac{27\sigma}{2} b_5r^2; \quad \bar{z}z = -54b_5r^2; \quad \bar{r}z = 0.$$

Это решение наложим на решение (121) и подберем произвольную постоянную  $b_5$  так, чтобы напряжения  $\bar{z}z$  обращались в нуль. Для этого необходимо удовлетворить уравнению  $-54b_5r^2 + \frac{\rho\omega^2(1+3\sigma)}{6\sigma} r^2 = 0$ , из которого  $b_5 = \frac{\rho\omega^2(1+3\sigma)}{6 \cdot 54\sigma}$ . В результате сложения получим формулу для радиальных напряжений

$$\bar{r}r = \rho\omega^2 \left[ -\frac{\sigma(1+\sigma)}{2(1-\sigma)} z^2 - \frac{3+\sigma}{8} z^2 \right].$$

Легко видеть, что полученное распределение радиальных напряжений приводит нас к решению задачи о напряжениях в быстро вращающемся диске при действии по контуре сжимающих усилий. Мы можем устранить эти усилия путем наложения на наше решение

равномерного растяжения. Чтобы удовлетворить на контуре условию  $\int_{-c}^{+c} \bar{r}r dz \Big|_{r=a} = 0$ , нужно положить равномерное растягивающее напряжение равным  $\frac{\rho\omega^2}{8} (3 + \sigma) a^2 + \rho\omega^2 \frac{\sigma(1+\sigma)}{2(1-\sigma)} \frac{c^3}{3}$ .

Окончательно для напряжений получим формулы

$$\begin{aligned} \bar{r}r &= \rho\omega^2 \left[ \frac{3+\sigma}{8} (a^2 - r^2) + \frac{\sigma(1+\sigma)}{6(1-\sigma)} (c^2 - 3z^2) \right]; \\ \bar{\theta}\theta &= \rho\omega^2 \left[ \frac{3+\sigma}{8} a^2 - \frac{1+3\sigma}{8} r^2 + \frac{\sigma(1+\sigma)}{6(1-\sigma)} (c^2 - 3z^2) \right]. \end{aligned} \tag{122}$$

В приближенном решении этой задачи отсутствуют члены, имеющие множителем выражение  $(c^2 - 3z^2)$ . Для дисков, у которых толщина мала по сравнению с радиусом, эти добавочные члены не имеют никакого практического значения.

## § 62. О напряжениях, вызываемых в упругой среде сосредоточенной силой

При решении соответствующей плоской задачи мы видели, что напряжения в точке приложения сосредоточенной силы  $P$  обращаются в бесконечность. По мере удаления от места действия силы напряжения убывают обратно пропорционально расстоянию  $r$ . В случае неограниченной упругой среды в точке

приложения сосредоточенной силы  $P$  напряжения также обращаются в бесконечность, и, чтобы иметь право применять уравнения теории упругости, нужно представить себе точку приложения силы выделенной поверхностью сферы малого радиуса. Усилия, распределенные по этой поверхности, должны быть эквивалентны силе  $P$ , и так как поверхность сферы растет пропорционально квадрату радиуса, то напряжения должны убывать обратно пропорционально квадрату радиуса.

Для разыскания напряжений обратимся к уравнениям (108') и (110). До сих пор мы пользовались лишь теми решениями уравнения (110), для которых показатель степени старшего члена равен  $n$  [см. уравнение (111)]. Другую серию решений мы получим, полагая этот показатель равным  $-(n+1)$ . Решение уравнения (110) представится при этом в следующем виде:

$$\psi_n = a \left[ \mu^{-(n+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} \mu^{-(n+3)} + \right. \\ \left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2(2n+3)(2n+5) \cdot 4} \mu^{-(n+5)} + \dots \right].$$

Полагая  $n$  равным  $-1, -2, -3, \dots$ , получаем для функции напряжений выражения

$$\varphi_1 = \frac{a_1}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad \varphi_2 = \frac{a_2 z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \varphi_3 = a_3 \left( \frac{z^2}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{3} \frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (123)$$

Умножая эти выражения на  $r^2 + z^2$ , получаем еще ряд решений уравнения (108'):

$$\varphi_1 = b_1 (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \varphi_2 = \frac{b_2 z}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (124)$$

Каждая из полученных таким путем функций напряжений определяет собой некоторое распределение напряжений, возможное в упругой среде. Рассмотрим простейшее из полученных выше решений. Положим  $\varphi = b (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ . Вставляя это значение функции напряжений в формулы (106), получаем для напряжений значения

$$\overline{rr} = b \left[ \frac{(1-2\sigma)z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3r^2 z}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right]; \quad \overline{zz} = -b \left[ \frac{(1-2\sigma)z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3z^3}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right]; \\ \overline{rz} = -b \left[ \frac{(1-2\sigma)r}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3rz^2}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right]; \quad \overline{\theta\theta} = \frac{b(1-2\sigma)z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (125)$$

Легко показать, что эти напряжения соответствуют действию сосредоточенной силы, приложенной в начале координат и направленной по оси  $z$ . Для этого выделим из неограниченной среды начало координат при помощи сферы и рассмотрим усилия, действующие по поверхности этой сферы. Составляющая этих усилий, имеющая направление оси  $z$ , представится на основании (101) так:  $p_z = \overline{rz} \cos(rv) + \overline{zz} \cos(zv)$ . Принимая во внимание равенства  $\cos(rv) =$

$$= \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}}; \quad \cos(zv) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} \text{ и пользуясь формулами (125), получаем}$$

$$p_z = -b \left[ \frac{1-2\sigma}{r^2 + z^2} + \frac{3z^2}{(r^2 + z^2)^2} \right].$$

Усилия  $p_z$ , действующие на поверхность выделенной сферы, имеют везде направление, противоположное оси  $z$ , и их можно привести к одной равнодействующей:

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} p_z \sqrt{r^2 + z^2} 2\pi r d\varphi = -8\pi b(1-\sigma) = -\frac{4\pi b(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}.$$

Что касается усилий  $p_r$ , то они, очевидно, представляют систему взаимно уравновешивающихся сил. Следовательно, найденное выше распределение напряжений (125), действительно соответствует сосредоточенной силе, направленной вдоль оси  $z$  и приложенной в начале координат. Произвольная постоянная  $b$  определится из условия

$$\frac{4\pi b(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = P. \quad (126)$$

Заметим, что по плоскости  $z = 0$  нормальные напряжения на основании (125) обращаются в нуль, что же касается напряжений  $rz$ , то они представляются формулой

$$\overline{rz} = -\frac{b(1-2\sigma)}{r^2} = -\frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{b}{r^2}. \quad (127)$$

### § 63. О напряжениях в стенках сферического сосуда при равномерном наружном и внутреннем давлении

Комбинируя решения вида (125), относящиеся к случаю действия на неограниченную упругую среду сосредоточенной силы, мы можем получить ряд новых решений, имеющих большое практическое значение. Начнем с определения напряжений, возникающих в упругой среде при действии двух равных взаимно противоположных сил  $P$ , действующих по оси  $z$  (рис. 89). Расстояние между точками приложения этих сил будем считать малым и обозначим его через  $h$ . Сила  $P$ , приложенная в начале координат, вызывает напряжения, определяемые формулами (125). При помощи тех же формул можно найти также напряжения, вызываемые второй силой  $P$ , приложенной в точке  $A$ . Так как эта вторая сила имеет противоположное направление, то в формулах (125) необходимо изменить знак напряжений. Кроме того, нужно принять во внимание перемещение точки приложения силы и изменить соответственно значение координаты  $z$ , давая ей приращение  $h$ . В таком случае при одновременном действии сил  $P$  напряжения определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= -bh \frac{\partial}{\partial z} \left[ (1-2\sigma) \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3r^2 z}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right]; \\ \overline{zz} &= bh \frac{\partial}{\partial z} \left[ (1-2\sigma) \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3z^3}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right]; \\ \overline{rz} &= bh \frac{\partial}{\partial z} \left[ (1-2\sigma) \frac{r}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3rz^2}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

Найдем, каковы будут в рассматриваемом случае нормальные напряжения  $p_n$  по поверхности сферы, имеющей своим центром начало координат. На основании формулы (6) получаем для этих напряжений значение  $p_n = \overline{rr} \cos^2 rv + \overline{zz} \cos^2 zv + 2\overline{rz} \cos zv \cos rv$ .

Вставляя вместо напряжений  $\overline{rr}$ ,  $\overline{zz}$  и  $\overline{rz}$  их значения (128) и принимая во внимание, что  $\cos rv = \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}$ ;  $\cos zv = \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$ , находим после простых преобразований

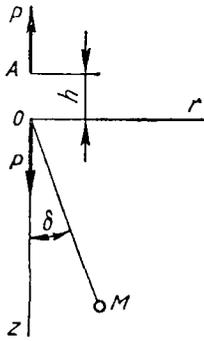


Рис. 89.

$$p_n = -bh \left[ -\frac{2(1+\sigma)\sin^2 \delta}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{4(2-\sigma)\cos^2 \delta}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (129)$$

Представим себе, что кроме сил  $P$ , действующих по оси  $z$ , имеются совершенно такие же и так же расположенные силы на оси  $z$  и на оси, перпендикулярной к плоскости  $rz$  и проходящей через начало координат.

Мы будем иметь в начале координат три пары прямо противоположных и равных сил, действующих по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Так как напряжения, вызываемые каждым двумя такими силами, распределяются симметрично относительно линии действия сил, то при наличии одинаковых сил в трех взаимно перпендикулярных направлениях мы, очевидно, получим распределение напряжений, симметричное относительно начала координат. Напряжения будут зависеть лишь от расстояний до этой точки. По поверхности сферы, имеющей своим центром начало координат, в силу симметрии будут действовать лишь равномерно распределенные нормальные напряжения. Величина этих напряжений легко может быть найдена при помощи формулы (129).

Чтобы получить нормальные напряжения, вызываемые на поверхности сферы по площадкам, перпендикулярным к плоскости  $rz$ , силами, действующими по оси  $r$ , нужно только в формуле (129) поставить вместо  $\delta$  величину  $\frac{\pi}{2} - \delta$ . Полагая в той же формуле  $\delta$  равным  $\frac{\pi}{2}$ , находим нормальные напряжения, соответствующие силам, перпендикулярным к плоскости  $rz$ . Суммируя полученные таким путем значения нормальных напряжений, получаем в результате равномерное распределение нормальных напряжений по поверхности сферы, имеющей своим центром начало координат. Значение этих напряжений будет следующее:

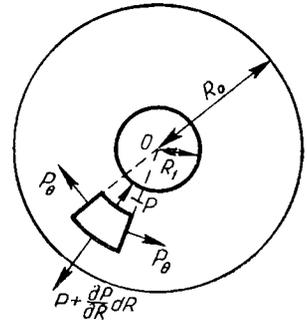


Рис. 90.

$$p_n = -bh \frac{4(1-2\sigma)}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -bh \frac{4\mu}{(\lambda+\mu)R^3}, \quad (130)$$

где  $R$  — радиус сферы.

Пользуясь этим результатом, легко решить задачу о распределении напряжений в стенке сферического сосуда, подвергающегося действию равномерного наружного и внутреннего давлений. Пусть  $R_0$  и  $R_1$  обозначают радиусы наружной и внутренней поверхностей сосуда (рис. 90), а  $p_0$  и  $p_1$  — соответствующие

нормальные давления. Наложим на решение (130) равномерное растяжение и в полученном таким путем общем решении

$$p = \frac{A}{R^3} + B \quad (\text{a})$$

подберем произвольные постоянные  $A$  и  $B$  так, чтобы были удовлетворены условия на наружной и внутренней поверхности. Получаем уравнения  $\frac{A}{R_0^3} + B = -p_0$ ;  $\frac{A}{R_1^3} + B = -p_1$ , откуда

$$A = \frac{(p_1 - p_0) R_1^3 R_0^3}{R_1^3 - R_0^3}, \quad B = \frac{p_0 R_0^3 - p_1 R_1^3}{R_1^3 - R_0^3}.$$

Решение (а) представится в таком виде:

$$p = p_0 \frac{R_0^3 R^3 - R_1^3}{R^3 R_1^3 - R_0^3} + p_1 \frac{R_1^3}{R^3} \frac{R_0^3 - R^3}{R_1^3 - R_0^3}. \quad (\text{131})$$

Кроме этих напряжений в стенке сосуда появятся нормальные напряжения  $p_\theta$  по площадкам, совпадающим с меридиональными плоскостями. Величина этих напряжений проще всего найдется из условия равновесия элемента (рис. 90), выделенного из стенки посредством сферических поверхностей радиусов  $R$  и  $R + dR$  и кругового конуса с бесконечно малым углом  $d\theta$  при вершине. Проектируя все приложенные к поверхности элементы силы на радиальное направление, получаем уравнение

$$p_\theta \frac{\pi R}{2} dR (d\theta)^2 = \frac{\partial p}{\partial R} \frac{\pi R^2}{4} dR (d\theta)^2 + p \frac{\pi R}{2} dR (d\theta)^2,$$

откуда  $p_\theta = \frac{\partial p}{\partial R} \frac{R}{2} + p$ , или, вставляя вместо  $p$  его значение (131), получаем

$$p_\theta = \frac{p_0}{2} \frac{R_0^3}{R^3} \frac{2R^3 + R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} - \frac{p_1}{2} \frac{R_1^3}{R^3} \frac{2R^3 + R_0^3}{R_1^3 - R_0^3}. \quad (\text{132})$$

Полученные формулы (131) и (132) вполне решают вопрос о напряжениях в стенке сферического сосуда, подвергающегося действию равномерного внутреннего и наружного давлений.

## § 64. Задача Буссинэ

Под этим названием известна задача о распределении напряжений, возникающих в упругой среде, ограниченной плоскостью, при действии сосредоточенной силы, приложенной в какой-либо точке ограничивающей плоскости и направленной нормально к этой плоскости<sup>1</sup>. При решении этой задачи воспользуемся результатами, полученными для случая действия сосредоточенной силы на неограниченную упругую среду.

<sup>1</sup> Задача эта была решена Жозефом Буссинэ. Boussinesq J. Application des potentiels. A l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, principalement au calcul des déformations et des pressions que produisent, dans ces solides. Mémoire suivi de notes étendues sur divers points de physique mathématique et d'analyse. Paris, Gauthiers-Villars, 1885, 721 pp.

Располагаем начало координат в точке приложения силы и направляем ось  $z$  перпендикулярно ограничивающей плоскости внутрь упругой среды (рис. 91). Распределение напряжений, определяемое формулами (125), соответствует, как мы видели, сосредоточенной силе, приложенной в начале координат, и касательным усилиям, распределенным по ограничивающей поверх-

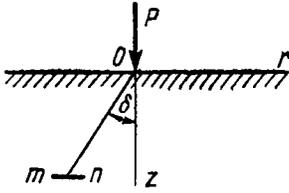


Рис. 91.

ности и изменяющимся по закону  $\bar{r}z = -\frac{b(1-2\sigma)}{r^2}$ .

Для получения решения задачи Буссинэ необходимо устранить эти касательные напряжения. Воспользуемся для этой цели решением предыдущего параграфа:

$$p = \frac{A}{R^3}; \quad p_0 = -\frac{1}{2} \frac{A}{R^3}.$$

В таком случае

$$\bar{r}r = p \sin^2 \delta + p_0 \cos^2 \delta = \frac{A}{R^3} \left( r^2 - \frac{1}{2} z^2 \right);$$

$$\bar{z}z = p \cos^2 \delta + p_0 \sin^2 \delta = \frac{A}{R^3} \left( z^2 - \frac{1}{2} r^2 \right);$$

$$\bar{r}z = \frac{1}{2} (p - p_0) \sin 2\delta = \frac{3}{2} \frac{A}{R^3} rz;$$

$$\bar{\theta}\theta = p_0 = -\frac{1}{2} \frac{A}{R^3}.$$

Эти напряжения соответствуют наличию в начале координат некоторого центра давления, в котором по каждой из трех взаимно перпендикулярных осей действуют по две равные и прямо противоположные силы. Предположим теперь, что в неограниченной упругой среде центры давления равномерно распределены вдоль отрицательного направления оси  $z$ . В таком случае напряжения представляются формулами

$$\begin{aligned} \bar{r}r &= A \int_z^\infty \frac{\left( r^2 - \frac{1}{2} z^2 \right) dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{A}{2} \left[ -\frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{z}{r^2 (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{r^2} \right]; \\ \bar{z}z &= A \int_z^\infty \frac{\left( z^2 - \frac{1}{2} r^2 \right) dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{Az}{2 (r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \bar{r}z &= \frac{3}{2} A \int_z^\infty \frac{rzdz}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{Ar}{2 (r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \bar{\theta}\theta &= -\frac{1}{2} A \int_z^\infty \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{A}{2} \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2 (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right]. \end{aligned} \quad (133)$$

По плоскости  $z = 0$  нормальные напряжения обращаются в нуль, а касательные напряжения изменяются по такому закону  $(\bar{r}z)_{z=0} = \frac{A}{2r^2}$ . Теперь видно, что суммированием решений (133) и (125) мы при надлежащем выборе

произвольных постоянных  $A$  и  $b$  можем получить решение задачи Буссинэ. Чтобы освободить ограничивающую плоскость от касательных усилий, соответствующим решению (125), нужно в решении (133) положить  $A = 2b(1 - 2\sigma)$ .

Тогда при сложении этих решений напряжения представляются такими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= b \left[ -\frac{3r^2z}{(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{(1-2\sigma)z}{r^2(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1-2\sigma}{r^2} \right]; \\ \overline{zz} &= -\frac{3bz^3}{(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}; \quad \overline{rz} = -\frac{3brz^2}{(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}; \\ \overline{\theta\theta} &= b(1-2\sigma) \left[ \frac{z}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

Произвольную постоянную  $b$  нужно выбрать таким образом, чтобы напряжения (134) соответствовали заданной силе  $P$ , приложенной в начале координат и направленной по оси  $z$ . Для этого выделим начало координат сферической поверхностью и рассмотрим усилия, приложенные по этой поверхности и действующие на выделенный элемент. Составляющая этих усилий, имеющая направление оси  $z$ , определится так:

$$p_z = \overline{rz} \cos(rv) + \overline{zz} \cos(zv) = -\frac{3bz^2}{(r^2+z^2)^2}.$$

Чтобы усилия  $p$  уравновешивали силу  $P$ , приложенную в начале координат,

$$\text{нужно положить } 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r p_z \sqrt{r^2+z^2} d\delta = -P, \text{ откуда } b = \frac{P}{2\pi}.$$

Окончательно напряжения, вызываемые силой  $P$  в упругой среде, ограниченной плоскостью, представляются так:

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= \frac{P}{2\pi} \left\{ -\frac{3r^2z}{(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - (1-2\sigma) \left[ \frac{z}{r^2(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{r^2} \right] \right\}; \\ \overline{zz} &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}; \\ \overline{\theta\theta} &= \frac{P}{2\pi} (1-2\sigma) \left[ \frac{z}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{z}{r^2(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{r^2} \right]; \\ \overline{rz} &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{rz^2}{(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (134')$$

По какой-либо площадке  $mn$  (см. рис. 91), параллельной ограничивающей плоскости, будут действовать нормальные напряжения  $\overline{zz}$  и касательные напряжения  $\overline{rz}$ . Отношение этих напряжений, как легко видеть из формул (134), равно  $z/r$ . Следовательно, полное напряжение по той же площадке имеет

направление соответствующего радиуса-вектора, проведенного из начала координат. Величина полного напряжения будет

$$\sqrt{\overline{zz^2} + \overline{rz^2}} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^2}{(r^2 + z^2)^2} = \frac{3P}{2\pi} \frac{\cos^2 \delta}{(r^2 + z^2)}.$$

Если представить себе шаровую поверхность, касательную к ограничивающей плоскости в точке  $O$  и проходящую через точку, соответствующую площадке  $mn$ , то для любой точки этой поверхности будем иметь  $r^2 + z^2 = d^2 \cos^2 \delta$ , где  $d$  — диаметр проведенной сферической поверхности.

Следовательно, полное напряжение по горизонтальной площадке, проходящей через любую точку указанной сферической поверхности, имеет постоянное значение  $\frac{3P}{2\pi} \frac{1}{d^2}$ .

Займемся теперь вопросом о перемещениях в рассматриваемом случае. На основании формул (103) имеем  $u = e_{\theta\theta} r = \frac{r}{E} [\overline{\theta\theta} - \sigma(\overline{rr} + \overline{zz})]$ . Вставляя вместо  $\overline{\theta\theta}$ ,  $\overline{rr}$  и  $\overline{zz}$  найденные выше выражения, получаем

$$u = \frac{P}{4\pi\mu} \left\{ \frac{rz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{[z + (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}]} \right\}. \quad (135)$$

Для определения перемещения  $w$  из тех же формул (103) имеем

$$\frac{\partial w}{\partial z} = e_{zz} = \frac{1}{E} [z\overline{z} - \sigma(\overline{rr} + \overline{\theta\theta})];$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = e_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\overline{rz}}{\mu} - \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Вставляя вместо напряжений и перемещения  $u$  найденные выше значения, получаем

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E} \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{3(1 + \sigma)r^2 z}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{[3 + \sigma(1 - 2\sigma)]z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right\};$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{P}{4\pi\mu} \left[ \frac{3rz^2}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{2(1 - \sigma)r}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right],$$

откуда, выполняя интегрирование, находим

$$w = \frac{P}{4\pi\mu} \left[ \frac{z^2}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right]. \quad (136)$$

В дальнейшем нам понадобятся выражения для перемещений точек ограничивающей плоскости. Полагая в формулах (135) и (136)  $z$  равным нулю, находим для этих перемещений такие выражения:

$$(u)_{z=0} = -\frac{P}{4\pi(\lambda + \mu)} \frac{1}{r};$$

$$(w)_{z=0} = \frac{P}{4\pi\mu} \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{r}. \quad (137)$$

Заметим, что произведение  $wr$  для точек ограничивающей поверхности остается постоянным, следовательно, в сечениях этой поверхности плоскостями, проходящими через ось  $z$ , будем получать гиперболы, для которых  $r$  и  $z$  являются асимптотами. В начале координат перемещения обращаются в

бесконечность. Здесь при действии сосредоточенной силы получаются остающиеся деформации, и наши выводы, полученные для идеально упругого тела, неприменимы. При вычислении перемещений нужно представить себе часть материала у точки приложения силы, выделенной посредством сферической поверхности такого радиуса, чтобы напряжения в точках этой поверхности не превосходили предела упругости.

Результаты, полученные выше для случая действия одной сосредоточенной силы, легко применить к решению более общей задачи, когда имеется ряд сосредоточенных сил или какая-либо сплошная нагрузка. При определении полных напряжений по какой-либо площадке нам придется лишь суммировать напряжения от отдельных сил, вычисляемые по формулам (134'). То же самое замечание относится и к вычислению перемещений. Вычислим, например, перемещения  $w$  для точек ограничивающей плоскости в том случае, когда имеется сплошная нагрузка. Пусть  $q$  обозначает интенсивность этой нагрузки. В таком случае  $qds$  будет нагрузка, приходящаяся на элементарную площадку  $ds$ , и искомое перемещение представится интегралом:

$$w = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \int \frac{qds}{r}, \tag{138}$$

причем интегрирование должно быть распространено на всю нагруженную часть ограничивающей плоскости. Здесь  $r$  обозначает переменное расстояние от различных точек нагруженного участка до той точки, перемещение которой мы разыскиваем.

Заметим, что формула (138) дает конечные значения перемещения  $w$  не только для удаленных точек ограничивающей плоскости, но также и для точек нагруженного участка.

### § 65. Сжатие упругих тел

Имея средства вычислять напряжения и деформации, возникающие в упругом теле, ограниченном плоскостью, мы можем подойти к решению весьма важной задачи о распределении напряжений у места соприкосновения двух прижимаемых друг к другу упругих тел.

Пусть два тела  $I$  и  $II$  (рис. 92) касаются друг друга в точке  $O$ . Плоскость  $MN$ , касательную в этой точке к обоим телам, примем за плоскость  $xy$ , а ось  $z$  направим перпендикулярно к  $MN$ . Через  $z_1$  обозначим направление внутрь тела  $I$  и через  $z_2$  — прямо противоположное направление. Если одно тело давит на другое, то у точки касания  $O$  происходит вдавливание тел друг в друга и вместо одной точки касания мы получим некоторую *поверхность соприкосновения*. Размеры этой поверхности будем считать малыми по сравнению с размерами сжимаемых тел. В таком случае при вычислении напряжений и деформаций можно будет пользоваться формулами предыдущего параграфа, введенными для тел, ограниченных плоскостью. Особый практический интерес представляет вопрос о распределении давлений по поверхности соприкосновения.

Предположим, что до деформации уравнения поверхностей соприкасающихся тел у точки касания  $O$  представлены уравнениями

$$z_1 = f_1(x, y); \quad z_2 = f_2(x, y). \tag{a}$$

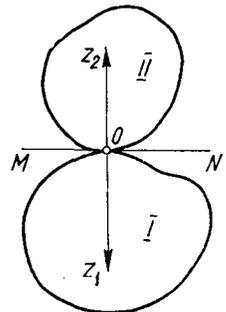


Рис. 92.

Представим себе функции  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$  разложенными в ряды по возрастающим степеням  $x$  и  $y$ . Ряды эти не будут заключать постоянного члена и членов с первыми степенями  $x$  и  $y$ , так как в начале координат  $z = 0$  и плоскость  $xy$  касательна к обеим поверхностям. Первыми членами в разложениях функций  $f_1$  и  $f_2$  будут члены второй степени относительно  $x$  и  $y$ , и потому, отбрасывая все члены высших степеней, мы будем иметь

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2; \\ z_2 &= b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2. \end{aligned} \quad (b)$$

Таким образом, вблизи точки касания поверхности сжимаемых тел могут быть заменены некоторыми поверхностями второй степени.

Если взять на плоскости  $MN$  у точки касания какую-либо точку с координатами  $x$  и  $y$ , то соответствующее расстояние между поверхностями тел  $I$  и  $II$ , считая по перпендикуляру к  $MN$ , представится на основании (b) так:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1)x^2 + (a_2 + b_2)xy + (a_3 + b_3)y^2, \dots \quad (c)$$

т. е. все точки плоскости  $MN$ , которым соответствует какое-либо постоянное значение  $z_1 + z_2$ , лежат на одном эллипсе, определяемом уравнением (c). Всегда можно координатные оси  $x$  и  $y$  повернуть так, чтобы в уравнении (c) член, заключающий произведение  $xy$ , пропал. Тогда будем иметь

$$z_1 + z_2 = \gamma_1x^2 + \gamma_2y^2, \quad (c')$$

где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — постоянные величины, зависящие от очертания и взаимного расположения соприкасающихся тел.

Возьмем у точки касания  $O$  на поверхностях тел  $I$  и  $II$  две соответствующие точки. Тогда  $z_1 + z_2$  будет представлять расстояние между этими точками до деформации. При сжатии намеченные точки сначала сближаются до совпадения, а дальше начинается в этом месте вдавливание одного тела в другое. Обозначим через  $w_1$  и  $w_2$  перемещения взятых нами точек в направлении осей  $z_1$  и  $z_2$  при указанном вдавливании. Через  $\alpha$  обозначим *сближение* тел, причем под сближением будем подразумевать уменьшение расстояния между двумя точками, лежащими на осях  $z_1$  и  $z_2$  и весьма удаленными от точки касания  $O$ . В таком случае, очевидно, что для каждой пары соответствующих точек имеет место соотношение  $w_1 + w_2 + z_1 + z_2 = \alpha$ . Следовательно,

$$w_1 + w_2 = \alpha - \gamma_1x^2 - \gamma_2y^2. \quad (139)$$

Воспользуемся для перемещений  $w_1$  и  $w_2$  формулой (138). Так как сжимаемые тела могут обладать различными упругими свойствами, то в указанной формуле упругие постоянные возьмем разными и для упрощения письма введем обозначения

$$\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{4\pi\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)} = k_1; \quad \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{4\pi\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)} = k_2.$$

Тогда уравнение (139) перепишется так:

$$(k_1 + k_2) \int \frac{q ds}{r} = \alpha - \gamma_1x^2 - \gamma_2y^2. \quad (139')$$

Здесь, очевидно,  $q$  обозначает интенсивность давлений, возникающих при сжатии по поверхности соприкосновения.

Если нам задан вид поверхностей тел  $I$  и  $II$  у точки касания, то из геометрических соображений найдем постоянные величины  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , входящие в правую часть уравнения (139'). Задача сводится к отысканию такого закона распределения давлений  $q$ , при котором будет удовлетворено уравнение (139').

Мы ограничимся здесь рассмотрением простейшей задачи, когда  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ . В этом случае поверхность соприкосновения имеет круговой контур и уравнение (139') напишется так:

$$(k_1 + k_2) \int \frac{qds}{r} = \alpha - \gamma \rho^2, \tag{139''}$$

где  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  представляет собой расстояние рассматриваемой точки от начала координат  $O$ .

Определение коэффициента  $\gamma$  в каждом частном случае может быть выполнено без всяких затруднений. Возьмем, например, случай сжатия двух шаров различных радиусов  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 93). Из геометрических соображений заключаем, что  $\rho^2 = z_2(2R_2 - z_2) = z_1(2R_1 - z_1)$ , откуда, пренебрегая малыми высшего порядка, находим  $z_1 = \frac{\rho^2}{2R_1}$ ;  $z_2 = \frac{\rho^2}{2R_2}$ .

Следовательно,  $z_1 + z_2 = \gamma(x^2 + y^2) = \gamma \rho^2 = \rho^2 \times \left( \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \right)$ ;  $\gamma = \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2}$ .

Для случая вдавливания шара в плоскость (рис. 94) нужно положить  $R_1 = \infty$ , следовательно,  $\gamma = \frac{1}{2R_2}$ .

При вдавливании шара в шаровое углубление (рис. 95) нужно считать  $R_1$  отрицательным. В таком случае

$$z_2 - z_1 = \rho^2 \gamma = \rho^2 \left( \frac{1}{2R_2} - \frac{1}{2R_1} \right),$$

следовательно,

$$\gamma = \frac{R_1 - R_2}{2R_1 R_2}.$$

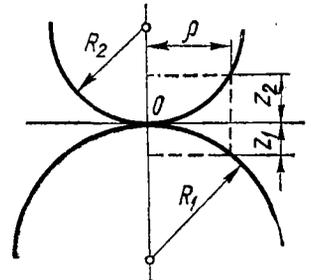


Рис. 93.

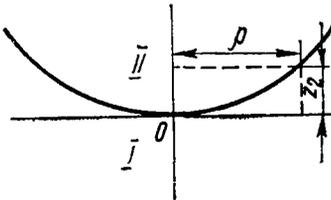


Рис. 94.

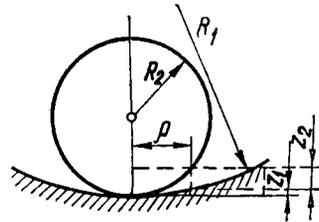


Рис. 95.

Возвратимся теперь к уравнению (139'') и покажем прием, которым мы будем пользоваться при вычислении интеграла  $\int \frac{qds}{r}$ .

Пусть  $mm$  — контур той площадки (рис. 96), по которой распределяется давление  $q$ . Возьмем точку  $A$ , для которой нужно вычислить интеграл  $\int \frac{qds}{r}$ , вне контура  $mm$ . При вычислении нагрузки, приходящуюся на каждый элемент площади  $mm$ , придется делить на расстояние  $r$  рассматриваемого элемента  $ds$  от точки  $A$  и полученные таким образом результаты суммировать. Суммирование должно быть распространено на все элементы площади  $mm$ . Для упрощения вычислений представим себе, что в каждой точке площади  $mm$  по перпендикуляру к площади отложен отрезок, пропорциональный соответствующей интенсивности нагрузки  $q$ . Концы этих отрезков расположатся на некоторой

поверхности, характеризующей закон распределения давлений  $q$ . Если через  $A$  провести плоскость, перпендикулярную к площади  $mm$ , то линия пересечения этой плоскости с построенной нами поверхностью (на рисунке линия эта представлена в совмещенном виде пунктирной линией) характеризует закон распределения давлений вдоль прямой  $AB$  ( $AB$  представляет собой сечение проведенной через  $A$  плоскости с площадью  $mm$ ). Линиями  $AB$  и  $AC$  и дугами кругов с радиусами  $r$  и  $r + dr$  выделим из площади  $mm$  элемент  $ds = r d\varphi dr$ . Приходящаяся на этот элемент нагрузка будет  $q r d\varphi dr = c r d\varphi dr$ .

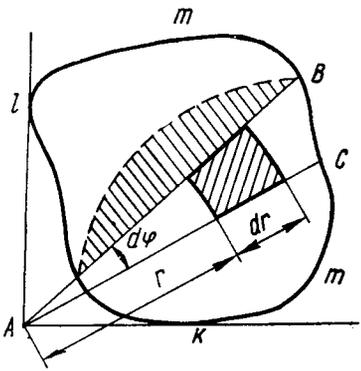


Рис. 96.

Здесь через  $t$  мы обозначили соответствующую ординату построенной нами над площадью  $mm$  поверхности, через  $c$  обозначен коэффициент пропорциональности, на который приходится множить ординаты поверхности для получения соответствующей интенсивности нагрузки  $q$ .

Соберем все элементы площади  $mm$ , лежащие между прямыми  $AB$  и  $AC$ . Для них

$$\sum \frac{q ds}{r} = \sum \frac{c r d\varphi dr}{r} = d\varphi c \sum t dr = c F d\varphi. \tag{140}$$

Здесь через  $F$  обозначена заштрихованная на рисунке площадь между пунктирной линией и прямой  $AB$ .

Для вычисления интеграла  $\int \frac{q ds}{r}$  придется суммировать элементы вида (140), давая углу  $\varphi$  все значения в пределах между крайними касательными  $Ak$

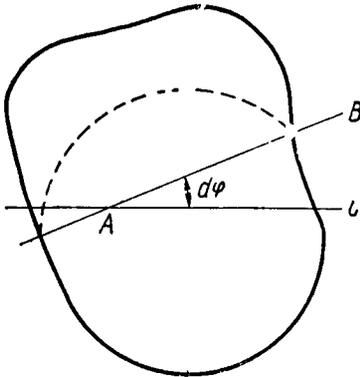


Рис. 97.

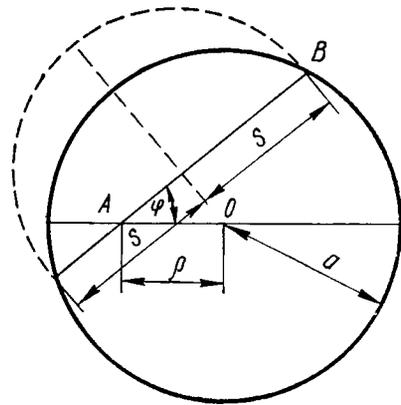


Рис. 98.

и  $Al$ . Полученное выше равенство (140) сохраняет силу и в том случае, если точка  $A$  будет взята внутри площади  $mm$  (рис. 97). Чтобы собрать все элементы площади  $mm$ , придется в данном случае изменять  $\varphi$  в пределах от 0 до  $\pi$ .

После этих предварительных замечаний перейдем к разысканию распределения давлений  $q$  в том случае, когда поверхность соприкосновения имеет круговой контур. Распределение давлений будет симметрично относительно начала координат и  $q$  представится функцией только  $\rho$ . Функция эта должна быть подобрана таким образом, чтобы было выполнено условие (139").

Покажем, что этому можно удовлетворить, допустив, что давление в любой точке поверхности соприкосновения пропорционально ординате полусферы, построенной на поверхности соприкосновения. Обозначим через  $a$  радиус контура поверхности соприкосновения (рис. 98) и через  $q_0$  — интенсивность давления в точке  $O$ . Коэффициент пропорциональности  $c$ , которым мы пользуемся при построении полусферы, определится из условия  $q_0 = ac$ , откуда  $c = \frac{q_0}{a}$ .

Вычислим  $\int \frac{qds}{r}$  для какой-либо точки  $A$  на расстоянии  $\rho$  от начала координат  $O$ . Это, как выше было показано, равносильно вычислению интеграла

$$\int_0^\pi cF d\varphi = \frac{q_0}{a} \int_0^\pi F d\varphi.$$

Здесь  $F$  — площадь полукруга, указанного на рисунке пунктиром. Она, очевидно, будет функцией угла  $\varphi$ . Радиус  $s$  полукруга определится из условия  $s^2 = a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi$ . Следовательно,  $F = \frac{\pi s^2}{2} = \frac{\pi}{2} (a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi)$ . Таким образом, мы получаем

$$\int \frac{qds}{r} = \frac{q_0}{a} \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{q_0 \pi}{a} \int_0^{\pi/2} (a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{q_0 \pi^2}{4a} (2a^2 - \rho^2).$$

Вставляя этот результат в уравнение (139'), находим

$$(k_1 + k_2) \frac{q_0 \pi^2}{4a} (2a^2 - \rho^2) = \alpha - \gamma \rho^2.$$

Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2) \frac{q_0 \pi^2 2a^2}{4a} &= \alpha; \\ (k_1 + k_2) \frac{q_0 \pi^2}{4a} &= \gamma. \end{aligned} \tag{141}$$

Величина  $q_0$  может быть определена из того условия, что сумма всех давлений по поверхности соприкосновения должна равняться той силе  $P$ , с которой тела  $I$  и  $II$  нажаты друг на друга. Принимая во внимание закон распределения давлений, получаем  $\int qds = \frac{2}{3} \frac{q_0}{a} \pi a^3 = P$ , откуда  $q_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a^2}$ , т. е. интенсивность давления в центре поверхности соприкосновения в полтора раза превосходит среднее значение давления.

Вставляя  $q_0$  и  $\gamma$  в выражения (141), получаем для  $a$  — радиуса контура поверхности соприкосновения и  $\alpha$  — сближения тел  $I$  и  $II$  при сжатии следующие значения:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{8} \frac{P(k_1 + k_2)}{\gamma}}; \quad \alpha = \frac{3\pi}{4a} (k_1 + k_2) P.$$

В случае сжатия двух шаров, имеющих радиусы  $R_1$  и  $R_2$ , получаем

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2}; \\ a &= \sqrt[3]{\frac{3P(k_1 + k_2) R_1 R_2}{4(R_1 + R_2)}}, \quad \alpha = \pi \sqrt[3]{\frac{9P^2(k_1 + k_2)^2 (R_1 + R_2)}{16R_1 R_2}}. \end{aligned} \tag{142}$$

Для шаров, изготовленных из одного материала, положив  $\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = 0,3$ , находим

$$a = 1,109 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}; \quad \alpha = 1,23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}. \quad (143)$$

Для величины наибольшего давления в центре поверхности соприкосновения получаем значение

$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a^2} = 0,388 \sqrt[3]{P E^2 \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^2}. \quad (144)$$

В случае вдавливания шара в плоскость нужно в предыдущих формулах положить один из радиусов, например  $R_1$ , равным бесконечности. Тогда будем иметь

$$a = 1,109 \sqrt[3]{\frac{P R_2}{E}}; \quad \alpha = 1,23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2 R_2}}; \quad (145)$$

$$q_0 = 0,388 \sqrt[3]{\frac{P E^2}{R_2^2}}.$$

Из последней формулы видно, что при постоянном значении максимального давления  $q_0$  сжимающие силы для различных шаров, изготовленных из одного и того же материала, относятся между собой как квадраты соответствующих радиусов и величина  $\frac{P}{\pi a^2} = k$  остается постоянной. Каждому значению  $q_0$  легко находим соответствующее значение сжимающей силы, отнесенной к единице площади диаметрального сечения.

Опыты<sup>1</sup> показывают, что для шариков из лучшей закаленной стали можно допустить  $P = 50d$  кг, где  $d$  — диаметр шарика в сантиметрах. Такому значению  $P$  соответствует давление<sup>2</sup>  $q_0 = 37\,450$  кг/см<sup>2</sup>.

Мы рассмотрели задачу о сжатии упругих тел в том предположении, что поверхность соприкосновения имеет круговой контур. Намеченный путь решения применим и в более общем случае, когда поверхность соприкосновения имеет эллиптический контур с полуосями  $a$  и  $b$ . Наибольшее давление  $q_0$  в этом случае получается в начале координат  $O$  и в 1,5 раза превосходит среднее значение давлений, следовательно,  $q_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab}$ .

Давление  $q$  в любой точке поверхности соприкосновения будет пропорционально соответствующей ординате поверхности эллипсоида, имеющего своим диаметральным сечением поверхность соприкосновения. Выражение для этого давления напишется так:

$$q = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

<sup>1</sup> Striebeck R. Kugellager für beliebige Belastungen. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1901, Bd 35, N 3, SS. 73—79; N 4, SS. 118—125. Schwinnig W. Versuche über die zulässige Belastung von Kugeln und Kugellagern. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1901, Bd 45, N 10, SS. 332—336.

<sup>2</sup> Подробное рассмотрение напряжений у места соприкосновения шаров и перечень литературы, относящейся к сжатию шаров, имеется в работе А. Н. Динника «Удар и сжатие упругих тел». Изв. Киевского политехнического института, 1909, год 9, кн. 4, стр. 253—371 [Перепечатка: Динник А. Н. Избранные труды. Том 1. Киев, Изд-во АН УССР, 1952, стр. 15—114]. См. также Нубер М. Т. Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper. Annalen der Physik, 1904, Bd 14, N 1, SS. 153—163; Фучс S. Hauptspannungstrajektorien bei der Berührung einer Kugel mit einer Platte. Physikalische Zeitschrift, 1913, Bd 14, N 25, SS. 1282—1285; Нубер М. Т., Фучс S. Spannungsverteilung bei der Berührung zweier elastischer Zylinder. Physikalische Zeitschrift, 1914, Bd 15, N 6, SS. 298—303.

Здесь  $x$  и  $y$  — координаты точки, к которой относится давление  $q$ . Увеличивая полуось  $a$  эллипса соприкосновения, Г. Герц получил в пределе случай сжатия цилиндров с параллельными образующими. Вместо эллипса в этом случае получается полоска соприкосновения шириною  $2b$ . Для  $b$  Герц нашел такое выражение:

$$b = 1,52 \sqrt{\frac{P'}{E} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}. \quad (146)$$

Здесь через  $P'$  обозначена величина сжимающей силы, приходящейся на единицу длины цилиндров;  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы сжимаемых цилиндров. Величина наибольшего давления определится такой формулой:

$$q_0 = 0,418 \sqrt{\frac{P' E (R_1 + R_2)}{R_1 R_2}}. \quad (147)$$

Полагая один из радиусов равным бесконечности, мы приходим к случаю сжатия цилиндра и плоскости. Формулы для  $b$  и  $q_0$  напишутся в этом случае так:

$$\begin{aligned} b &= 1,52 \sqrt{\frac{P'}{E} R}; \\ q_0 &= 0,418 \sqrt{\frac{P' E}{R}}. \end{aligned} \quad (148)$$

На практике с подобной задачей приходится встречаться при расчете катков мостовых опор. Размеры стальных катков намечают обыкновенно таким образом, чтобы максимальное давление  $q_0$ , определяемое по формуле (148), не превосходило  $7000 \text{ кг/см}^2$ .

## § 66. Тепловые напряжения

Если тело подвергать неравномерному нагреванию, то соответствующие такому нагреванию деформации отдельных элементов не могут совершаться свободно, — им будут препятствовать соседние элементы, и при этом возникнут напряжения, распределение которых по объему тела будет зависеть от распределения температуры. В качестве примера рассмотрим простейшую задачу, когда распределение температуры имеет ось симметрии. В таком случае соответствующие напряжения и деформации распределяются симметрично относительно той же оси и дифференциальные уравнения равновесия приобретут особенно простой вид.

Пусть  $t$  обозначает переменную температуру, отсчитываемую от некоторого начального состояния тела, и  $\alpha$  — постоянный коэффициент линейного расширения материала. В таком случае вследствие нагревания до температуры  $t$  каждый элемент тела при условии свободного расширения получил бы равномерное удлинение по всем направлениям, и мы имели бы  $e_{rr} = e_{\theta\theta} = e_{zz} = \alpha t$ ;  $e_{rz} = 0$ . Свободному расширению будут препятствовать соседние элементы тела. Появятся напряжения  $rr$ ,  $\theta\theta$ ,  $zz$  и  $rz$ , которые в свою очередь вызовут деформации  $e_{rr}$ ,  $e_{\theta\theta}$ ,  $e_{zz}$ ,  $e_{rz}$ . В таком случае полные деформации представятся так:

$$e_{rr} = \alpha t + \dot{e}_{rr}; \quad e_{\theta\theta} = \alpha t + \dot{e}_{\theta\theta}; \quad e_{zz} = \alpha t + \dot{e}_{zz}; \quad e_{rz} = \dot{e}_{rz}.$$

Вставляя вместо полных деформаций их выражения через перемещения (103), находим для деформаций  $e_{rr}$ , ..., обусловленных напряжениями, такие

выражения:

$$\begin{aligned} e_{rr}^* &= \frac{\partial u}{\partial r} - \alpha t; & e_{\theta\theta}^* &= \frac{u}{r} - \alpha t; & e_{zz}^* &= \frac{\partial w}{\partial z} - \alpha t; \\ e_{rz}^* &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \end{aligned} \quad (a)$$

Пользуясь известными зависимостями (28) между напряжениями и деформациями и сохраняя для объемного расширения прежнее обозначение  $\vartheta = \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}$ , получаем для напряжений значения

$$\begin{aligned} \bar{r}r &= \lambda\vartheta + 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \alpha t \right) - 3\lambda\alpha t; & \bar{\theta}\theta &= \lambda\vartheta + 2\mu \left( \frac{u}{r} - \alpha t \right) - 3\lambda\alpha t; \\ \bar{z}z &= \lambda\vartheta + 2\mu \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \alpha t \right) - 3\lambda\alpha t; & \bar{r}z &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (b)$$

Вставляя их в уравнения равновесия (102), приходим к таким уравнениям,

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) - (2\mu + 3\lambda) \alpha \frac{\partial t}{\partial r} &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - (2\mu + 3\lambda) \alpha \frac{\partial t}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (c)$$

Решим поставленную выше задачу в простейшем предположении. Допустим, что тело имеет форму весьма длинного кругового цилиндра и температура в любой точке этого цилиндра зависит лишь от расстояния  $r$  этой точки до оси цилиндра. В таком случае радиальные перемещения  $u$  будут одинаковы во всех поперечных сечениях цилиндра, удаленных от концов, и мы можем положить  $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ ,  $\frac{\partial w}{\partial z} = d_1$ , где  $d_1$  — неопределенная пока постоянная величина.

При сделанных допущениях второе из уравнений (c) будет удовлетворено, первое же может быть представлено в таком виде:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) = (2\mu + 3\lambda) \alpha \frac{\partial t}{\partial r}. \quad (c')$$

Если распределение температуры известно и  $t$  задано как некоторая функция от  $r$ , то мы без затруднения находим из полученного уравнения перемещения  $u$ , а дальше при посредстве зависимостей (b) определяем и соответствующие напряжения. Произвольные постоянные, входящие в выражения для  $u$  и  $w$ , конечно, должны быть определены так, чтобы были удовлетворены условия на поверхности.

Возьмем установившееся распределение температуры. В таком случае функция  $t$  должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (d)$$

При сделанных выше предположениях относительно  $t$  уравнение (d) в полярных координатах напишется таким образом:

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} = 0,$$

откуда

$$t = a_1 \ln r + a_2. \quad (e)$$

Предположим, что мы имеем дело с цилиндром, полым внутри. Пусть  $r_0$  и  $r_1$  — внутренний и наружный радиусы цилиндра,  $t_0$  и  $t_1$  — соответствующие

температуры на ограничивающих поверхностях. Чтобы решение (е) удовлетворяло условиям на поверхности, нужно положить  $t_0 = a_1 \ln r_0 + a_2$ ;  $t_1 = a_1 \ln r_1 + a_2$ , откуда

$$a_1 = -\frac{t_0 - t_1}{\ln \frac{r_1}{r_0}}; \quad a_2 = \frac{t_0 \ln r_1 - t_1 \ln r_0}{\ln \frac{r_1}{r_0}}; \quad t = \frac{t_0 \ln \frac{r_1}{r} + t_1 \ln \frac{r}{r_0}}{\ln \frac{r_1}{r_0}}.$$

Вставляя найденное выше значение  $t$  в уравнение (с'), получаем для радиальных перемещений выражение:

$$u = \frac{2\mu + 3\lambda}{\lambda + 2\mu} \alpha \left( \frac{a_1 r}{2} \ln r - \frac{a_1 r}{4} + \frac{a_2 r}{2} \right) + \frac{c_1 r}{2} + \frac{c_2}{r}.$$

Новые произвольные постоянные должны быть подобраны так, чтобы радиальные напряжения  $\bar{r}r$  обращались в нуль на наружной и внутренней поверхностях, так как мы разыскиваем напряжения, возникающие в цилиндре, при отсутствии внешних сил.

Произведя соответствующие преобразования, мы в заключение приходим к таким выражениям для напряжений<sup>1</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}r &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \alpha \left( \frac{r_1^2 t_1 - r_0^2 t_0}{r_1^2 - r_0^2} + \frac{r_0^2}{r^2} \frac{t_0 - t_1}{r_1^2 - r_0^2} - t \right); \\ \bar{\theta}\theta &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \alpha \left[ \frac{r_1^2 t_1 - r_0^2 t_0}{r_1^2 - r_0^2} - \frac{r_0^2}{r^2} \frac{t_0 - t_1}{r_1^2 - r_0^2} - (a_1 + t) \right]; \\ \bar{z}z &= \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \alpha \left[ \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{r_1^2 t_1 - r_0^2 t_0}{r_1^2 - r_0^2} - \frac{\lambda a_1}{4(\lambda + \mu)} - t + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \frac{d_1}{\alpha} \right]. \end{aligned} \right\} (f)$$

В выражение для напряжений  $\bar{z}z$  входит произвольная постоянная  $d_1$ , которая должна быть определена из условий на концах цилиндра. Если концы закреплены и не могут перемещаться при изменении температуры цилиндра, то  $d_1$  должно обращаться в нуль. При свободных концах напряжения  $\bar{z}z$  по концевым поперечным сечениям цилиндра должны равняться нулю. Из полученного выше решения (f) легко видеть, что точно выполнить условия на свободных концах цилиндра мы не можем и остается поступить так, как это мы делали при рассмотрении изгиба и кручения призматических стержней. Мы подберем произвольную постоянную  $d_1$  так, чтобы совокупность всех усилий, приложенных по концам, представляла систему взаимно уравновешивающихся сил, т. е. чтобы было выполнено условие  $\int \bar{z}z ds = 0$ . Здесь интегрирование должно быть распространено на всю площадь поперечного сечения.

При найденном таким путем значении постоянной  $d_1$ , конечно, не будут в точности удовлетворены условия на концах, но на основании принципа Сен-Венана можно утверждать, что в некотором удалении от концов, найденные решения (f) с достаточной точностью представляют распределение напряжений, соответствующих принятому распределению температуры.

<sup>1</sup> См. стр. 242 курса А. Фöppl, указанного в сноске на стр. 55. Leon A. Spannungen und Formänderungen eines Hohlzylinders und einer Hohlkugel die von innen erwärmt werden unter der Annahme eines linearen Temperaturverteilungsgesetzes. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1905, Bd 52, H. 2, SS. 174—190; Lorenz R. Temperaturspannungen in Hohlzylindern. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1907, Bd 51, N 19, SS. 743—747.

При расчетах главное значение имеет величина наибольших напряжений. Оказывается, что при свободных концах цилиндра эти наибольшие напряжения соответствуют напряжениям  $\bar{z}z$  и  $\bar{\theta}\theta$  на наружной и внутренней поверхностях цилиндра и могут быть определены из таких простых формул:

при  $r = r_0$

$$\bar{z}z = \bar{\theta}\theta = -2\mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha (t_0 - t_1) \left( \frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} - \frac{1}{2 \ln \frac{r_1}{r_0}} \right);$$

при  $r = r_1$

$$\bar{z}z = \bar{\theta}\theta = -2\mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha (t_0 - t_1) \left( \frac{r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} - \frac{1}{2 \ln \frac{r_1}{r_0}} \right).$$

(N)

Эти формулы могут быть еще упрощены, если толщину стенки цилиндра, равную  $h = r_1 - r_0$ , считать малой по сравнению со средним радиусом стенки  $\rho = \frac{r_1 + r_0}{2}$ . В таком случае, отбрасывая малые высших порядков, получаем для наибольших напряжений такие формулы:

при  $r = r_0$

$$\bar{\theta}\theta = \bar{z}z = -\frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \alpha (t_0 - t_1) \left( \frac{1}{2} + \frac{h}{6\rho} \right);$$

при  $r = r_1$

$$\bar{\theta}\theta = \bar{z}z = +\frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \alpha (t_0 - t_1) \left( \frac{1}{2} - \frac{h}{6\rho} \right).$$

(N<sub>1</sub>)

Толщина цилиндрической стенки, как видно, не оказывает большого влияния на величину наибольших напряжений, и мы можем считать эти напряжения пропорциональными разности внутренней и наружной температур. Но так как эта разность обыкновенно бывает тем большей, чем больше толщина стенки, то и тепловые напряжения в толстостенных трубках достигают больших значений, чем в трубках с тонкими стенками. В качестве примеров приводим следующие численные результаты<sup>1</sup>.

Полагая для литого железа  $\alpha = 0,000011$  1/град;  $\mu = 8 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>;  $\sigma = \frac{1}{3}$ , находим, пренебрегая влиянием толщины стенки, такую формулу для величины наибольших напряжений:

$$(\bar{\theta}\theta)_{\max} = (\bar{z}z)_{\max} = 16,3 (t_0 - t_1).$$

Если  $t_0 > t_1$ , мы будем иметь снаружи растягивающие и внутри — сжимающие напряжения. Разности температур, равной 100°, соответствует напряжение 1630 кг/см<sup>2</sup>.

Возьмем теперь цилиндр из литой стали<sup>2</sup>, для которой  $\alpha = 0,000011$  1/град;  $\mu = 8,5 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>;  $\sigma = \frac{1}{3,4}$ . Положим  $r_0 = 3,5$  см;  $r_1 = 10,5$  см, следовательно,  $r_1/r_0 = 3$ .

<sup>1</sup> См. стр. 591 курса Н. Lorenz, указанного на стр. 132.

<sup>2</sup> Полный поршневой шток газового двигателя.

Формулы (N) дают в этом случае для наибольших растягивающих и наибольших сжимающих напряжений значения (предполагаем  $t_0 < t_1$ )

$$(\bar{z}\bar{z})_{\max} = (\bar{\theta}\bar{\theta})_{\max} = -22,9(t_0 - t_1); \quad (\bar{z}\bar{z})_{\min} = (\bar{\theta}\bar{\theta})_{\min} = 11,3(t_0 - t_1).$$

При разности температур, равной 50 град, наибольшие растягивающие и наибольшие сжимающие напряжения имеют соответственно значения  $+1145 \text{ кг/см}^2$ ;  $-565 \text{ кг/см}^2$ .

Заметим, что приближенные формулы (N<sub>1</sub>) могут быть применены также к определению напряжений, возникающих в фабричных дымовых трубах. Эти напряжения приходится суммировать с напряжениями, вызываемыми внешними силами, например давлением ветра. Поэтому во время работы дымовые трубы оказываются менее прочными в отношении сопротивления боковым внешним усилиям.

## § 67. Скручивание стержней переменного сечения

Предположим, что стержень, имеющий форму тела вращения, скручивается парами сил, приложенными на концах. При определении напряжений будем пользоваться тем же *полуобратным* методом, которому мы следовали при изучении кручения призматических стержней. В случае круглых стержней мы удовлетворили всем уравнениям теории упругости, сделав допущение, что при кручении поперечные сечения стержня остаются плоскими и лишь поворачиваются одно относительно другого, причем радиусы сечения не искривляются. Для некруглых призматических стержней деформации при кручении представились в более сложном виде. Кроме поворачивания сечений нужно было принять во внимание и их искривление, соответствующее перемещениям точек сечения в направлении оси стержня.

Покажем, что в случае стержней, имеющих форму тела вращения, мы удовлетворим всем уравнениям теории упругости, предположив, что круговые поперечные сечения остаются при кручении плоскими. В отличие от того, что мы имели для круглых цилиндрических стержней, нужно лишь допустить возможность искривления радиусов поперечного сечения.

Сохраняя обозначения, которыми мы пользовались при рассмотрении деформаций, симметричных относительно оси, и направляя ось  $z$  по оси скручиваемого стержня, положим  $u = w = 0$ . Что касается перемещения  $v$ , то оно представляется неизвестной пока функцией от  $r$  и  $z$ .

Сделав такое предположение относительно перемещений, мы на основании (103) заключаем, что отличными от нуля будут лишь деформации  $e_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right)$ ;  $e_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z}$ . Для составляющих напряжения получаем значения

$$\begin{aligned} \bar{r}\bar{r} &= \bar{\theta}\bar{\theta} = \bar{z}\bar{z} = \bar{r}\bar{z} = 0; \\ \bar{r}\bar{\theta} &= \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right); \quad \bar{\theta}\bar{z} = \mu \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned} \quad (a)$$

Из уравнений системы (102) нам остается удовлетворить лишь уравнению

$$\frac{\partial \bar{r}\bar{\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{\theta}\bar{z}}{\partial z} + \frac{2\bar{r}\bar{\theta}}{r} = 0, \quad (b)$$

которое может быть представлено в таком виде:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \bar{r}\theta) + \frac{\partial}{\partial r \partial z} (r^2 \bar{\theta} z) = 0. \quad (c)$$

Очевидно, мы этому уравнению удовлетворим, положив<sup>1</sup>:

$$r^2 \bar{r}\theta = - \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad r^2 \bar{\theta} r = + \frac{\partial \Phi}{\partial r},$$

где  $\Phi$  — неизвестная пока функция напряжений от переменных  $z$  и  $r$ .

На основании условий (а) заключаем

$$\bar{r}\theta = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad \bar{\theta} z = \mu r \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Чтобы были удовлетворены оба эти условия, функция  $\Phi$  должна, очевидно, удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0,$$

которое может быть представлено в таком виде:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (d)$$

Беря для  $\Phi$  различные решения уравнения (d), будем получать различные распределения напряжений, возможные в скручиваемом стержне, имеющем форму тела вращения. Для выбора определенного решения необходимо задать условия на поверхности. Предположим, что стержень скручивается силами, приложенными по концевым поперечным сечениям, и боковая поверхность его свободна от всяких усилий. В таком случае третье из уравнений (101) даст нам на боковой поверхности такое условие:

$$\bar{r}\theta \cos(rv) + \bar{\theta} z \cos(zv) = 0. \quad (e)$$

К тому же условию мы можем прийти и иным путем. Возьмем диаметрально сечение стержня (рис. 99) и какую-либо точку  $A$  на контуре этого сечения. Пусть  $\bar{r}\theta$  и  $\bar{\theta} z$  — составляющие касательного напряжения, действующего в этой точке по площадке, совпадающей с диаметральной плоскостью. Если боковая поверхность стержня свободна от усилий, то, очевидно, касательное напряже-

<sup>1</sup> Общее решение задачи о кручении стержней, имеющих форму тела вращения, получено впервые Дж. Мичеллом. M i c h e l l J. H. The uniform torsion and flexure of incomplete torus, with application to helical springs. Proceedings of the London Mathematical Society, [1899] 1900, vol. 31, N 686, pp. 130—146. Дж. Мичелл ввел при этом функцию напряжений  $\Phi$ , которой мы и пользуемся в нашем изложении. Дальнейшая разработка этой задачи принадлежит А. Фёпплю. F ö p p l A. Über die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser. Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München, 1905, Bd 35, H. 2, SS. 249—262. См. стр. 177 курса А. Фёппл, указанного в сноске на стр. 55. См. также Д и н н и к А. Н. Аналогия Прайдтля в теории кручения. Влияние радиальной трещины на жесткость сплошного и грубого вала. Изв. Донского политехнического института, Новочеркасск, 1912, том 1, научный отдел, стр. 309—366. [Перепечатка: Д и н н и к А. Н. Избранные труды. Том 3. Киев, Изд-во АН УССР, 1956, стр. 238—254].

ние в  $A$  должно иметь направление касательной к меридиану. Заключение это совпадает с условием (е) и мы его можем записать так:

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\bar{r}\bar{\theta}}{\bar{\theta z}} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\frac{\partial \varphi}{\partial r}}. \quad (f)$$

Обозначая через  $ds$  элемент дуги меридиана, можем представить условие (f) в таком виде:  $\frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = 0$ , откуда заключаем, что на поверхности стержня

$$\varphi = \text{const.} \quad (f')$$

Если задано уравнение меридионального сечения стержня, то условие (f) или (f') совместно с уравнением (d) вполне определяют функцию  $\varphi$ , а следовательно, и распределение напряжений в скручиваемом стержне. При отыскании частных решений проще идти обратным путем, задаваясь различными решениями уравнения (d), и потом из условия (f) находить уравнение меридионального сечения соответствующего стержня.

Возьмем случай конического стержня (рис. 100). При таком очертании стержня отношение  $z/(r^2 + z^2)^{1/2}$  имеет на поверхности стержня постоянное значение и всякая функция от этого отношения удовлетворит условию (f'). Чтобы при этом было удовлетворено и уравнение (d), нужно положить

$$\varphi = A \left[ \frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{3} \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right]. \quad (g)$$

Имея функцию напряжений, дифференцированием находим соответствующие напряжения.

По плоскости поперечного сечения стержня будут действовать касательные напряжения

$$\bar{\theta}_z = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = - \frac{Arz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Постоянная  $A$  найдется из того условия, что касательные напряжения  $\bar{\theta}_z$  должны по плоскости поперечного сечения приводиться к паре сил, равной скручивающему моменту  $M$ . Следовательно,

$$M = \int_0^r 2\pi r^2 \bar{\theta}_z dr = 2\pi \int_0^r r^2 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) dr = 2\pi (\varphi_r - \varphi_0)$$

Вставляя сюда вместо  $\varphi$  его значение (g) для данного случая, найдем соответствующее значение  $A$ . Когда напряжения найдены, перемещение  $v$  может быть определено из уравнений (а). В случае конического стержня

$$\frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{1}{\mu r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = - \frac{A}{\mu r^2} \left[ - \frac{rz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{rz^3}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \right],$$

откуда интегрированием находим  $v = - \frac{Ar}{3\mu (r^2 + z^2)^{3/2}}$ .

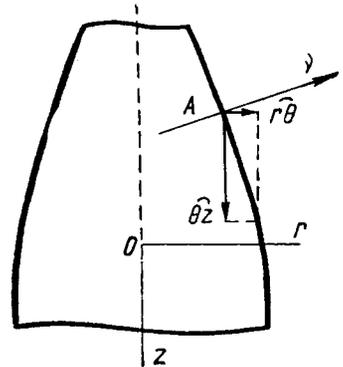


Рис. 99.

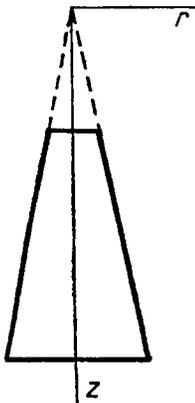


Рис. 100.

Полученное перемещение не представляется линейной функцией от  $r$ , как мы имели в случае кручения круглых цилиндрических стержней, и радиусы поперечных сечений при скручивании будут искривляться.

При расчетах валов переменного сечения приходится иметь дело с очень резкими изменениями радиуса поперечного сечения. В таком случае аналитический способ решения задачи, намеченный выше, представляет огромные затруднения и задачу приходится решать приближенными способами<sup>1</sup>. Результаты этих приближенных решений приведены в нашем «Курсе сопротивления материалов»<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Графический метод решения этой задачи разработан в интересной статье А. Виллерса. Wille rs A. Die Torsion eines Rotationskörpers um seine Achse. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1907, Bd 55, H. 3, SS. 225—263.

<sup>2</sup> См. стр. 94 работы С. П. Тимошенко, указанной в сноске на стр. 96.

*ЧАСТЬ ВТОРАЯ*

**СТЕРЖНИ  
И ПЛАСТИНКИ**



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Вторая часть нашего «Курса теории упругости», посвященная исследованию деформаций тонких стержней и пластинок, составлена из лекций, читанных в Киевском политехникуме, в Институте инженеров путей сообщения и в последнее время на кораблестроительном отделении Петроградского политехникума. При выборе материала для этих лекций приходилось останавливаться главным образом на задачах, представляющих по своим приложениям непосредственный практический интерес, и оставлять без рассмотрения вопросы, хотя и интересные, но не имеющие технического приложения. Исходя из этих соображений, мы нашли возможным опустить в нашем курсе общую теорию деформаций тонких стержней, разработанную Густавом Кирхгофом и Жозефом Буссине. Теория эта применима главным образом в тех случаях, когда перемещения точек деформированных стержней не являются малыми величинами, т. е. в случаях, не имеющих большого практического значения. По тем же соображениям мы опустили общую теорию деформаций тонких пластинок, разработанную Дж. Мичеллом и А. Лявом, и ограничились приближенным выводом основного дифференциального уравнения для изогнутой поверхности пластинки. Уравнение это, как известно, имеет вполне достаточную для практических приложений точность и дает возможность исследовать не только случаи изгиба пластинок силами, нормальными к поверхности пластинки, но также и случаи одновременного действия изгибающих и сжимающих или изгибающих и растягивающих сил. При исследовании колебаний мы ограничились колебаниями стержней и оставили без рассмотрения колебания мембран, пластинок и тонких оболочек, относящиеся к области акустики. В теории деформаций тонких оболочек мы рассмотрели частные случаи цилиндрической и сферической оболочек, так как только для этих случаев имеются некоторые числовые результаты, представляющие практический интерес.

Имея в виду практические приложения, мы по возможности доводили решения выбранных задач до конца, до численных результатов, и представляли эти результаты в виде таблиц, которыми можно пользоваться при технических расчетах.

В тех случаях, когда точное решение задачи неизвестно или разыскание этого решения связано с большими трудностями, мы для получения числовых результатов применяли приближенные методы. Так, например, при исследовании изгиба балки переменного сечения, лежащей на

упругом основании, мы пользовались методом Ритца и показали на численных примерах, что этот метод дает достаточно точные для практических приложений результаты при сравнительно небольшом количестве вычислительной работы. Приближенный метод мы применяли и при решении целого ряда вопросов устойчивости. При исследовании колебаний мы также пользовались в некоторых случаях приближенными способами для решения поставленных задач. Для получения первых приближений мы применяли способ Рэлея. Дальнейшие приближения вычисляли способом Ритца. При исследовании действия удара на балку и при изучении больших прогибов круглых пластинок мы обращались к конечным разностям и получали нужные нам результаты вычислительным путем. Тот же вычислительный прием с успехом может быть применен к расчету сферических оболочек, подвергающихся действию симметрично распределенных нагрузок.

Имея в виду разнообразные приложения, нам пришлось затронуть довольно большое число вопросов, относящихся к исследованию деформаций стержней и пластинок. Расширяя таким образом содержание книги, мы не только хотели дать руководство для наших слушателей, главным образом студентов кораблестроительного отделения Политехникума, которым приходится встречаться с весьма разнообразными вопросами прочности в строительной механике корабля, но имели в виду также студентов, которые берут из области строительной механики темы для своих дипломных работ (дипломные работы обязательны для студентов кораблестроительного отделения Петроградского политехникума; в Институте инженеров путей сообщения дипломная работа по строительной механике может быть дана вместо проекта по прикладной механике), и тех инженеров, которые интересуются вопросами строительной механики и занимаются расчетами различного рода металлических конструкций. К этим расчетам в последнее время предъявляются все более широкие требования, удовлетворить которым не всегда удается при помощи элементарных приемов, обычно излагаемых в курсах сопротивления материалов.

В заключение считаем своим приятным долгом принести здесь глубокую благодарность лицам, оказавшим нам содействие при подготовке к печати настоящей книги, — преподавателю Электротехнического института Р. Б. Куровскому, прочитавшему рукопись, преподавателю Института инженеров путей сообщения К. А. Чалышеву и преподавателю Петроградского политехнического института Н. П. Виноградову, согласившимся взять на себя труд по чтению корректур.

*С. Тимошенко*

Киев

15 апреля 1916 г.

§ 1. Дифференциальное уравнение изогнутой  
оси стержня

В первой части данной книги мы привели несколько точных решений, относящихся к изгибу призматических стержней. Из этих решений следует, что при изгибе стержней силами, приложенными по концам, имеет место допущение Бернулли — Эйлера относительно пропорциональности кривизны изогнутой оси стержня величине соответствующего изгибающего момента. Такой результат получается лишь при условии вполне определенного распределения усилий по конечным сечениям изгибаемого стержня. Если это распределение заменить другим, ему статически эквивалентным, то вблизи концов произойдет значительное изменение напряжений и деформаций. В сечениях же, удаленных от концов, эти изменения весьма малы (принцип Сев-Венана), мы можем ими пренебречь и считать справедливым допущение Бернулли — Эйлера. На основании таких же соображений мы можем распространить допущение Бернулли — Эйлера и на случай стержней, изгибаемых несколькими сосредоточенными силами. С большой точностью мы можем считать кривизну вдали от места приложения сил пропорциональной изгибающему моменту.

Когда от изгиба сосредоточенными силами переходим к случаю действия распределенных нагрузок, задача становится более сложной. Точное решение, полученное для изгиба равномерно распределенной нагрузкой<sup>1</sup>, показывает, что в этом случае выражение для кривизны составляется из двух членов: пропорционального изгибающему моменту и постоянного члена, обусловленного отчасти влиянием касательных напряжений, отчасти нормальными напряжениями, действующими по площадкам, параллельным оси балки. Этот постоянный член, представляющий поправку к гипотезе Бернулли — Эйлера, является малой величиной такого порядка, как квадрат отношения высоты балки к ее длине. В случае тонких призматических стержней этой поправкой будем пренебрегать и при определении прогибов под действием сил, лежащих в одной из главных плоскостей стержня, будем исходить из уравнения

$$\frac{EJ}{\rho} = M. \quad (1)$$

Здесь  $EJ$  — соответствующая жесткость стержня;  $\rho$  — радиус кривизны;  $M$  — изгибающий момент в рассматриваемом сечении стержня. Располагая

<sup>1</sup> Mitchell J. H. Some elementary distributions of stress in three dimensions. Proceedings of the London Mathematical Society, [1900] 1901, vol. 32, NN. 711—713, pp. 23—35. Подробное изложение решения Дж. Мичелла имеется в курсе A. Love, указанного в списке на стр. 9. (См. стр. 339 оригинала или стр. 409 немецкого перевода.)

координатные оси, как показано на рис. 1, и ограничиваясь случаем малых прогибов, мы можем уравнение (1) заменить таким:

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = -M. \quad (2)$$

На рисунке указаны стрелками те направления изгибающего момента и перерезывающей силы, которые мы в дальнейшем будем принимать положительными. Дифференцированием из уравнения (2) получаем уравнения

$$EJ \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{dM}{dx} = -N; \quad (3)$$

$$EJ \frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{dN}{dx} = q, \quad (4)$$

которыми иногда приходится пользоваться при решении технических задач. Здесь через  $q$  обозначена интенсивность сплошной нагрузки. Положительным направлением этой нагрузки принято направление сверху вниз. Когда поперечные размеры стержня

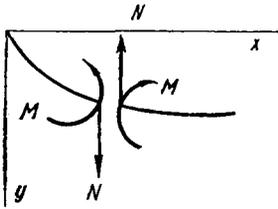


Рис. 1.

нельзя считать малыми по сравнению с его длиной и желательно получить более точное уравнение для изогнутой оси стержня, нужно в уравнение (2), полученное на основании допущения Бернулли — Эйлера, внести поправку, обусловленную отчасти действием касательных напряжений, отчасти нормальными напряжениями, действующими по площадкам, параллельным оси балки. В тех случаях, для которых имеются точные решения<sup>1</sup>, часть поправки, соответствующая касательным напряжениям, имеет преобладающее значение. Допустив, что то же самое заключение справедливо для всяких нагрузок и для балок любого сечения, мы можем получить нужную нам поправку к уравнению (2) приближенным способом. Будем исходить из такого выражения для кривизны<sup>2</sup>:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{de_{xy}}{dx} - \frac{de_{xx}}{dy}.$$

Вставляя сюда вместо  $e_{xy}$  и  $e_{xx}$  значение сдвига в центре тяжести поперечного сечения и значения продольных удлинений, определяемых по формулам Сен-Венана

$$e_{xy} = \frac{k'N}{GF}, \quad e_{xx} = \frac{My}{EJ},$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения стержня;  $G$  — модуль упругости при сдвиге и  $k'$  — численный коэффициент, зависящий от формы сечения и упругих свойств материала, приходим к такому дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} + \frac{k'}{GF} \frac{d^2M}{dx^2}. \quad (5)$$

<sup>1</sup> См. решения Дж. Мичелла для случая кругового сечения и высокого прямоугольного сечения при изгибе собственным весом. Результаты решения приведены на стр. 418 курса А. Лява (A. Love — A. Timpe), упомянутого на стр. 9 (стр. 347 английского издания). Случай балки эллиптического сечения, изгибаемой собственным весом, рассмотрен Я. М. Хлытчевым. Хлытчев Я. М. Об изгибе объемными силами цилиндра с эллиптическим основанием. Изв. Петербургского политехнического института, 1915, том 23, вып. 2, стр. 441—448.

<sup>2</sup> См. стр. 148.

Это уравнение приходится брать вместо уравнения (2), когда желательно найти более точное выражение для изогнутой оси стержня. Интегрируя уравнение (2) или (5) и принимая при этом во внимание условия закрепления концов, мы без особых затруднений можем в каждом частном случае найти прогибы стержня и углы поворота отдельных поперечных сечений. Ряд простейших примеров этого рода разобран в курсе сопротивления материалов, и мы в дальнейшем ограничимся рассмотрением нескольких более сложных задач, относящихся к исследованию изгиба балок, лежащих на упругом основании, и балок, подвергающихся одновременному действию изгиба и сжатия или изгиба и растяжения.

При вычислении напряжений мы будем предполагать, что в сечениях, удаленных от места приложения сил, величина напряжений с достаточной для практики точностью определяется решениями Сен-Венана. У точек приложения сосредоточенных сил возникают местные напряжения, характер распределения которых в случае плоской деформации мы изучили с достаточной полнотой в первой части данной книги. Напряжения эти быстро убывают по мере удаления от точки приложения силы и, как показывают подробные вычисления, произведенные для нескольких частных случаев<sup>1</sup>, мы можем в сечениях, удаленных от места приложения силы на расстояние, большее высоты балки, принимать с достаточной для практики точностью распределение напряжений, соответствующее решению Сен-Венана.

В заключение отметим, что уравнение (2) часто применяют не только к призматическим стержням, но и к стержням переменного сечения. Если сечение изменяется вдоль балки, то, как показывают некоторые точные решения плоской задачи<sup>2</sup>, напряжения и деформации будут мало отличаться от тех, которые получаются для призматических стержней и, следовательно, уравнением (2) можно пользоваться для определения прогибов таких стержней. При этом  $J$  будет некоторая функция  $x$ , что нужно иметь в виду при составлении уравнений, аналогичных уравнениям (3) и (4).

Если стержень составлен по длине из нескольких частей, причем на протяжении каждого участка сечение не изменяется, то уравнение (2) применимо к каждому участку и справедливо для всех точек оси, достаточно удаленных от мест сопряжения участков различных сечений. В переходных сечениях возникают местные напряжения, искажающие закон распределения напряжений и деформаций. Эти местные напряжения быстро убывают по мере удаления от переходных сечений и потому в тех случаях, когда поперечные размеры стержня малы по сравнению с длинами отдельных участков, мы можем, пользуясь уравнением (2), с достаточной точностью определять прогибы стержня.

## § 2. Изгиб балки, лежащей на сплошном упругом основании

В целом ряде технических вопросов приходится иметь дело с изгибом балок, лежащих на сплошном упругом основании. Предполагая, что при изгибе таких балок основание оказывает реакции, пропорциональные прогибам, обозначим через  $k$  величину реакции, приходящейся на единицу длины балки

<sup>1</sup> См. работу L. N. G. Filon, упомянутую в сноске на стр. 73. См. также Леви и И. О влиянии местных напряжений в балке, изгибаемой сосредоточенным грузом. Вестник инженеров и техников, 1915, том 1, № 2, стр. 58—67.

<sup>2</sup> См. стр. 108.

при прогибе, равном единице. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (4) напишется в данном случае так:

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q - ky. \quad (6)$$

Здесь  $q$  — интенсивность заданной сплошной нагрузки;  $ky$  — интенсивность реактивных воздействий основания на балку. Мы предполагаем, что  $y$  может иметь как положительные, так и отрицательные значения и основание препятствует не только опусканию, но и подъему балки. Введя для краткости записи обозначение

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}, \quad (7)$$

представим общий интеграл уравнения (6), при постоянном значении  $q$ , в таком виде:

$$y = \frac{q}{k} + C_1 e^{\alpha x} \cos \alpha x + C_2 e^{\alpha x} \sin \alpha x + C_3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + C_4 e^{-\alpha x} \sin \alpha x. \quad (8)$$

Произвольные постоянные  $C_1, \dots, C_4$  в каждом частном случае приходится выбирать таким образом, чтобы были удовлетворены условия на концах рассматриваемого участка балки. Ход вычислений покажем на нескольких частных примерах, имеющих техническое значение.

### § 3. Случай бесконечно длинной балки

Предположим, что балка  $AB$  неограниченной длины лежит на сплошном упругом основании и изгибается сосредоточенной силой  $P$  (рис. 2). Кривая изгиба в данном случае, очевидно, будет симметрична относительно точки приложения силы, причем прогибы  $y$  и производные  $y', y'', \dots$  должны быть малыми величинами для точек, весьма удаленных от места приложения силы. Этим условиям мы удовлетворим, если для правой ветви кривой, соответствующей положительным значениям  $x$ , положим в общем интеграле (8)

$C_1 = C_2 = 0$ . Кроме того, в нашем случае  $q = 0$ , следовательно,

$$y = e^{-\alpha x} (C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x).$$

Для определения произвольных постоянных  $C_3$  и  $C_4$  воспользуемся тем обстоятельством, что в точке приложения силы касательная к изогнутой оси балки горизонтальна<sup>1</sup> и перерезывающая сила непосредственно справа от места приложения силы равна  $-\frac{P}{2}$ . Следовательно,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0; \quad EJ \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_{x=0} = \frac{P}{2},$$

откуда находим

$$C_3 = C_4 = \frac{P}{8\alpha^3 EJ}.$$

<sup>1</sup> Мы здесь пренебрегаем влиянием касательных напряжений на прогиб.

Все обстоятельства изгиба балки в рассматриваемом случае определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{P}{8\alpha^3 EJ} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) = \frac{P\alpha}{2k} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x); \\ M &= -EJy'' = \frac{P}{4\alpha} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x); \\ N &= -EJy''' = -\frac{P}{2} e^{-\alpha x} \cos \alpha x. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Для всех входящих в эти выражения функций имеются готовые таблицы<sup>1</sup>, при помощи которых легко можно найти величину прогиба, изгибающего момента и перерезывающей силы в любом сечении балки. Пользуясь принципом сложения действия сил, легко при помощи формул (9) найти изгиб балки под действием системы сосредоточенных сил. Без всяких затруднений мы можем перейти также к случаю изгиба балки сплошной нагрузкой, распределенной на некотором протяжении. Предположим, например, что равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q$  занимает участок длиной  $c + c_1 = l$  (рис. 3). Пользуясь принципом сложения действия сил, находим для прогиба балки в какой-либо точке  $A$  такое выражение:

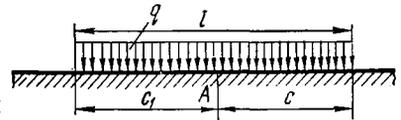


Рис. 3.

$$\begin{aligned} y &= \int_0^{c_1} \frac{qd\xi}{8\alpha^3 EJ} e^{-\alpha\xi} (\cos \alpha\xi + \sin \alpha\xi) + \int_0^c \frac{qd\xi}{8\alpha^3 EJ} e^{-\alpha\xi} (\cos \alpha\xi + \sin \alpha\xi) = \\ &= \frac{q}{2k} (2 - e^{-\alpha c_1} \cos \alpha c_1 - e^{-\alpha c} \cos \alpha c). \end{aligned} \quad (10)$$

Если длины  $c$  и  $c_1$  загруженных участков настолько значительны, что  $\alpha c_1$  и  $\alpha c$  представляют собой большие числа, то в полученном выражении для  $y$  можно отбросить два последних члена<sup>2</sup>, и мы получим  $y = q/k$ .

Следовательно, можно считать, что вдали от концов длинного загруженного участка балка не гнется, и приходящаяся на нее равномерная нагрузка равномерно распределяется по основанию. Если взять точку в конце длинного загруженного участка и положить, например  $c_1 = 0$ , то получим для этой точки  $y = q/2k$ , т. е. здесь прогиб будет вдвое меньше, чем в ранее взятой точке.

Перейдем к другому крайнему случаю: положим длину загруженного участка весьма малой и найдем прогиб, соответствующий середине загруженного участка. Полагая в выражении (10)  $\alpha c_1 = \alpha c = \alpha l/2$  и  $e^{-\frac{\alpha l}{2}} \cos \frac{\alpha l}{2} = 1 - \frac{\alpha l}{2}$ , получаем

$$y = \frac{q}{k} \left( 1 - e^{-\frac{\alpha l}{2}} \cos \frac{\alpha l}{2} \right) = \frac{ql\alpha}{2k}.$$

Результат этот совпадает с тем, который получается для сосредоточенного груза  $P = ql$ .

Заметим здесь, что, говоря о коротком или длинном загруженном участке, следует иметь в виду отношение длины участка к длине  $L = 2\pi/\alpha$ , представляющей длину волны, образуемых осью балки, в случае действия сосредоточенной силы [см. формулы (9)].

<sup>1</sup> Тимошенко С. П. Курс сопротивления материалов. Изд. 3-е. Киев, изд. книжного магазина Л. Издиковского, 1916, 475 стр. см. стр. 228.

<sup>2</sup> Если  $\alpha c$  и  $\alpha c_1$  больше трех, то погрешность от отбрасывания двух указанных выше членов будет меньше 5%.

Формулами (9) выгодно пользоваться при расчете рельсов, подвергающихся действию системы сосредоточенных грузов. Хотя рельс лежит не на сплошном упругом основании, а на упругих поперечинах, но при встречающихся на практике густоте расположения шпал и жесткостях рельсов мы получим достаточно точные результаты, если упругие опоры заменим сплошным упругим основанием<sup>1</sup>. Пусть  $D$  — сила, которую нужно приложить к шпале в месте прикрепления рельса, чтобы вызвать осадку шпалы, равную единице, и  $a$  — расстояние между осями шпал, тогда жесткость  $k$  упругого основания, заменяющего упругие опоры, определится так:  $k = D/a$ .

Теми же формулами (9) можно воспользоваться при расчете килевой балки, когда нужно определить напряжения от давлений, передаваемых балке поперечными водонепроницаемыми переборками при постановке судна на киль. Давления эти можно считать сосредоточенными силами. Роль упругого основания в этом случае будет играть набор кильблоков и положенный на них настил.

Приведем такой численный пример.

Момент инерции поперечного сечения килевой балки  $223 \cdot 10^6 \text{ см}^4$ . Расстояние от нейтрального слоя до наиболее удаленного волокна  $e = 124 \text{ см}$ ;  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ . Размеры и упругие свойства кильблоков таковы, что килевая балка вдавливается в основание на  $1 \text{ см}$  при нагрузке  $1330 \text{ кг/см}$ . Следовательно,  $k = 1330 \text{ кг/см}^2$ . Требуется найти наибольшие напряжения, возникающие в килевой балке у поперечной переборки, передающей сосредоточенное давление  $P = 2000 \text{ Т}$ . При этих данных имеем

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = \frac{1}{605} \text{ см}^{-1};$$

$$(y)_{\max} = \frac{Pa}{2k} = 1,24 \text{ см}; \quad (y'')_{x=0} = -2\alpha^2 (y)_{\max} = \frac{2 \cdot 1,24}{(605)^2} \text{ см}^{-1}.$$

Наибольшие напряжения

$$(y'')_{x=0} E e = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 124 \cdot 2 \cdot 1,24}{605^2} \approx 1680 \text{ кг/см}^2.$$

Пользуясь принципом сложения действия сил, легко оценить также влияние соседних переборок на величину найденных наибольших напряжений.

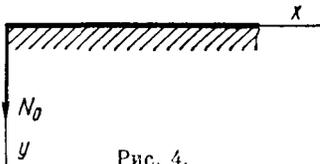


Рис. 4.

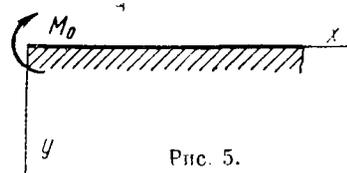


Рис. 5.

Из формул (9) легко можно получить два решения, имеющих практическое значение.

Если взять сечение, для которого  $\alpha x = \frac{\pi}{4}$ , то в нем изгибающий момент равен нулю и вся правая часть балки изгибается поперечной силой, действующей в взятом сечении. Надлежащим переносом начала координат получим решение для случая, представленного на рис. 4. Прогиб балки выразится при этом таким образом:

$$y = \frac{N_0}{2\alpha^3 EJ} e^{-\alpha x} \cos \alpha x. \quad (11)$$

Выбирая сечение, для которого  $\alpha x = \frac{\pi}{2}$ , мы при помощи формул (9) получаем решение для случая, представленного на рис. 5. Прогиб балки представится при этом такой формулой:

$$y = -\frac{M_0}{2\alpha^2 EJ} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x). \quad (12)$$

Формулами (11) и (12) можно воспользоваться для приблизительной оценки давлений на кильблоки у свешивающихся частей корпуса судна. Их можно применить также при определении давлений на основание, возникающих при спуске судов. И в том и в другом случае

<sup>1</sup> Тимошенко С. П. К вопросу о прочности рельс. Отд. оттиск. Институт инженеров путей сообщения, Петроград, тип. А. Э. Коллипса, 1915, 42 стр.

мы отсекаем свешивающуюся часть корпуса и действие ее заменяем поперечной силой и парой сил. Рассматривая часть корпуса, расположенную на основании, как призматическую балку большой длины, можем воспользоваться формулами (11) и (12) для определения прогибов и соответствующих давлений на основание.

#### § 4. Изгиб балки с опертыми концами, лежащей на сплошном упругом основании

Предположим, что балка  $AB$  с опертыми концами лежит на сплошном упругом основании и изгибается равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q$  (рис. 6). Общий интеграл (8) дифференциального уравнения изогнутой оси балки представим в такой форме<sup>1</sup>:

$$y = \frac{q}{k} + C_1 \sin \alpha x \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \sin \alpha x \operatorname{ch} \alpha x + C_3 \cos \alpha x \operatorname{sh} \alpha x + C_4 \cos \alpha x \operatorname{ch} \alpha x. \quad (13)$$

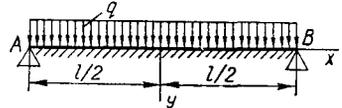


Рис. 6.

Из условий симметрии заключаем, что в нашем случае  $y$  должен представляться четной функцией  $x$ . Следовательно, в общем интеграле нужно положить  $C_2 = C_3 = 0$ .

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_4$  подберем так, чтобы на опорах прогибы и изгибающие моменты обращались в нуль, т. е. чтобы были выполнены такие условия:  $(y)_{x=l/2} = 0$ ,  $(y'')_{x=l/2} = 0$ .

Введя для краткости записи обозначение  $\frac{\alpha l}{2} = u$  и вставив вместо  $y$  его значение, перепишем условия на концах в таком виде<sup>2</sup>:

$$\frac{q}{k} + C_1 \sin u \operatorname{sh} u + C_4 \cos u \operatorname{ch} u = 0;$$

$$C_1 \cos u \operatorname{ch} u - C_4 \sin u \operatorname{sh} u = 0,$$

откуда находим

$$C_1 = -\frac{q}{k} \frac{\sin u \operatorname{sh} u}{\sin^2 u \operatorname{sh}^2 u + \cos^2 u \operatorname{ch}^2 u} = -\frac{q}{k} \frac{2 \sin u \operatorname{sh} u}{\cos 2u + \operatorname{ch} 2u};$$

$$C_4 = -\frac{q}{k} \frac{\cos u \operatorname{ch} u}{\sin^2 u \operatorname{sh}^2 u + \cos^2 u \operatorname{ch}^2 u} = -\frac{q}{k} \frac{2 \cos u \operatorname{ch} u}{\cos 2u + \operatorname{ch} 2u}.$$

Вставляя эти значения произвольных постоянных в выражение (13) и принимая во внимание, что

$$k = \alpha^4 EJ = \frac{64EJ\alpha^4}{l^4},$$

<sup>1</sup> В дальнейшем мы пользуемся гиперболическими функциями. Нужные для преобразований формулы и таблицы значений функций имеются в книге Jahnke E., Emde F., указанной на стр. 154, а также Ligoński W. *Tafeln der Hyperbelfunktionen und der Kreisfunktionen nebst einem Anhang enthaltend die Theorie der Hyperbelfunktionen*. Berlin, Wilhelm Ernst, 1890, 104 SS.

<sup>2</sup> При этом пользуемся формулами

$$\frac{d^2}{dx^2} (\cos \alpha x \operatorname{ch} \alpha x) = -2\alpha^2 \sin \alpha x \operatorname{sh} \alpha x;$$

$$\frac{d^2}{dx^2} (\sin \alpha x \operatorname{sh} \alpha x) = 2\alpha^2 \cos \alpha x \operatorname{ch} \alpha x.$$

получаем уравнение изогнутой оси балки в таком виде:

$$y = \frac{q l^4}{64 E J u^4} \left( 1 - \frac{2 \sin u \operatorname{sh} u}{\cos 2u + \operatorname{ch} 2u} \sin \alpha x \operatorname{Sh} \alpha x - \frac{2 \cos u \operatorname{ch} u}{\cos 2u + \operatorname{ch} 2u} \cos \alpha x \operatorname{Ch} \alpha x \right). \quad (14)$$

Полагая в этом выражении  $x = 0$ , находим для прогиба посередине такое значение:

$$(y)_{x=0} = \frac{q l^4}{64 E J u^4} \left( 1 - \frac{2 \cos u \operatorname{ch} u}{\cos 2u + \operatorname{ch} 2u} \right).$$

Вводя обозначение  $\frac{2 \cos u \operatorname{ch} u}{\cos 2u + \operatorname{ch} 2u} = \varphi_0(u)$ , получаем

$$(y)_{x=0} = \frac{q l^4}{64 E J} \frac{1}{u^4} [1 - \varphi_0(u)]. \quad (15)$$

При малых значениях  $u$  можно положить  $\varphi_0(u) = 1 - \frac{5}{6}u^4$ . В этом случае формула (15) дает известное выражение для прогиба балки с опертыми концами, нагруженной равномерной нагрузкой. Значения  $\varphi_0(u)$  при различных  $u$  приведены в табл. 1.

Таблица 1

$u$	$\varphi_0(u)$	$\varphi_1(u)$	$\chi_0(u)$	$\chi_1(u)$	$\chi_2(u)$	$\psi_0(u)$	$\psi_1(u)$	$\psi_2(u)$	$u$
0,1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,1
0,2	0,999	1,000	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,2
0,3	0,993	0,999	0,995	0,999	0,999	1,000	1,000	0,995	0,3
0,4	0,979	0,996	0,983	0,996	0,997	0,999	0,999	0,983	0,4
0,5	0,950	0,990	0,959	0,991	0,993	0,998	0,997	0,961	0,5
0,6	0,901	0,979	0,919	0,982	0,985	0,997	0,994	0,923	0,6
0,7	0,827	0,961	0,859	0,967	0,973	0,994	0,988	0,866	0,7
0,8	0,731	0,935	0,781	0,946	0,956	0,990	0,980	0,791	0,8
0,9	0,619	0,899	0,689	0,917	0,931	0,984	0,969	0,702	0,9
1,0	0,498	0,852	0,591	0,878	0,899	0,976	0,953	0,609	1,0
1,1	0,380	0,795	0,494	0,830	0,859	0,965	0,932	0,517	1,1
1,2	0,272	0,728	0,405	0,774	0,813	0,951	0,906	0,431	1,2
1,3	0,178	0,653	0,327	0,712	0,761	0,935	0,874	0,357	1,3
1,4	0,100	0,573	0,262	0,645	0,705	0,916	0,838	0,294	1,4
1,5	0,037	0,492	0,208	0,576	0,648	0,893	0,794	0,242	1,5
1,6	-0,013	0,411	0,164	0,509	0,591	0,868	0,747	0,200	1,6
1,7	-0,052	0,335	0,129	0,444	0,537	0,841	0,695	0,166	1,7
1,8	-0,081	0,264	0,101	0,384	0,486	0,812	0,641	0,138	1,8
1,9	-0,102	0,201	0,079	0,328	0,439	0,782	0,585	0,116	1,9
2,0	-0,117	0,144	0,062	0,279	0,397	0,752	0,529	0,099	2,0
2,2	-0,133	0,054	0,037	0,197	0,325	0,692	0,420	0,072	2,2
2,4	-0,135	-0,009	0,021	0,136	0,269	0,636	0,321	0,055	2,4
2,6	-0,127	-0,051	0,011	0,092	0,226	0,586	0,237	0,043	2,6
2,8	-0,114	-0,074	0,005	0,060	0,193	0,542	0,167	0,034	2,8
3,0	-0,098	-0,085	0,002	0,038	0,167	0,503	0,114	0,028	3,0
3,2	-0,081	-0,087	0,000	0,023	0,146	0,470	0,073	0,023	3,2
3,4	-0,064	-0,082	-0,001	0,012	0,129	0,442	0,042	0,019	3,4
3,6	-0,049	-0,073	-0,002	0,006	0,115	0,417	0,021	0,016	3,6
3,8	-0,035	-0,063	-0,002	0,002	0,104	0,394	0,006	0,014	3,8
4,0	-0,024	-0,052	-0,002	-0,001	0,094	0,375	-0,003	0,012	4,0

Дифференцируя выражение (14) по  $x$  и полагая потом  $x = l/2$ , находим угол поворота конца балки при изгибе:

$$(y')_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{ql^4}{64EJ} \frac{2}{lu^3} \frac{\text{sh } 2u - \sin 2u}{\text{ch } 2u + \cos 2u} = -\frac{ql^3}{24EJ} \psi_2(u), \quad (16)$$

где

$$\psi_2(u) = \frac{3}{4} \frac{1}{u^3} \frac{\text{sh } 2u - \sin 2u}{\text{ch } 2u + \cos 2u}.$$

Ряд значений функции  $\psi_2(u)$  приведен в табл. 1.

Чтобы определить изгибающий момент  $M$ , составляем выражение для  $y''$ . Тогда

$$M = -EJy'' = \frac{ql^2}{4} \frac{1}{u^2} \left( \frac{\text{sh } u \sin u}{\text{ch } 2u + \cos 2u} \text{ch } \alpha x \cos \alpha x - \frac{\text{ch } u \cos u}{\text{ch } 2u + \cos 2u} \text{sh } \alpha x \sin \alpha x \right).$$

Полагая в этом выражении  $x = 0$ , найдем изгибающий момент для середины балки:

$$(M)_{x=0} = \frac{ql^2}{8} \chi_0(u), \quad (17)$$

где

$$\chi_0(u) = \frac{2}{u^2} \frac{\text{sh } u \sin u}{\text{ch } 2u + \cos 2u}.$$

Рассмотрим теперь изгиб нашей балки парой сил  $M'$ , приложенной к левому концу (рис. 7). В общем интеграле (13) в этом случае будет отсутствовать первый член, и уравнение изогнутой оси представится так:

$$y = C_1 \sin \alpha x \text{sh } \alpha x + C_2 \sin \alpha x \text{ch } \alpha x + C_3 \cos \alpha x \text{sh } \alpha x + C_4 \cos \alpha x \text{ch } \alpha x. \quad (a)$$

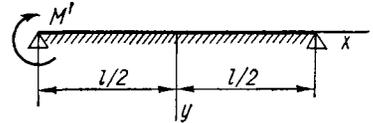


Рис. 7.

Для определения произвольных постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4$  будем иметь такие условия:

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = 0; \quad (y)_{x=-\frac{l}{2}} = 0; \quad (y'')_{x=\frac{l}{2}} = 0; \quad (y'')_{x=-\frac{l}{2}} = -\frac{M'}{EJ}.$$

Из этих условий находим

$$C_1 = -\frac{M'l^2}{8EJ} \frac{1}{u^2} \frac{\text{ch } u \cos u}{\text{ch } 2u + \cos 2u}; \quad C_2 = \frac{M'l^2}{8EJ} \frac{1}{u^2} \frac{\text{sh } u \cos u}{\text{ch } 2u - \cos 2u};$$

$$C_3 = -\frac{M'l^2}{8EJ} \frac{1}{u^2} \frac{\text{ch } u \sin u}{\text{ch } 2u - \cos 2u}; \quad C_4 = \frac{M'l^2}{8EJ} \frac{1}{u^2} \frac{\text{sh } u \sin u}{\text{ch } 2u + \cos 2u}.$$

Полагая в уравнении (a) изогнутой оси  $x = 0$ , находим прогиб посередине

$$(y)_{x=0} = \frac{M'l^2}{8EJ} \frac{1}{u^2} \frac{\text{sh } u \sin u}{\text{ch } 2u + \cos 2u}. \quad (18)$$

Для дальнейших приложений интересно найти углы поворота концов балки под действием момента  $M'$ . Составляя производную  $y'$  и полагая в ней  $x = \pm l/2$ , получаем

$$(y')_{x=-\frac{l}{2}} = \frac{M'l}{3EJ} \psi_0(2u);$$

$$(y')_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{M'l}{6EJ} \psi_1(2u). \quad (19)$$

Здесь для сокращения записи введены обозначения

$$\psi_0(u) = \frac{3}{2u} \frac{\operatorname{sh} 2u - \sin 2u}{\operatorname{ch} 2u - \cos 2u};$$

$$\psi_1(u) = \frac{6}{u} \frac{\operatorname{ch} u \sin u - \operatorname{sh} u \cos u}{\operatorname{ch} 2u - \cos 2u}.$$

Значения функций  $\psi_0(u)$  и  $\psi_1(u)$  приведены в табл. 1. При беспределном убывании  $u$  значения этих функций стремятся к единице, и формулы (19) дают в этом случае известные значения для углов поворота концов балки, свободно лежащей на двух опорах и изгибаемой парой сил, приложенных на конце.

Составляя производную  $y''$ , мы легко вычисляем величину изгибающего момента. Для середины пролета будем иметь

$$(M)_{x=0} = -EJ (y'')_{x=0} = 2\alpha^2 \frac{M'l^2}{8} \frac{1}{u^2} \frac{\operatorname{ch} u \cos u}{\operatorname{ch} 2u + \cos 2u}. \quad (20)$$

### § 5. Изгиб балок с заделанными концами и неразрезных балок, лежащих на сплошном упругом основании

Пользуясь принципом сложения действия сил, мы с помощью формул (16) и (19) легко решаем задачу об изгибе балки равномерно распределенной нагрузкой при любом способе закрепления концов. Возьмем, например, балку с абсолютно заделанными концами. Обозначим через  $M_0$  величину опорных моментов для этого случая. Так как концы балки не поворачиваются, то для определения  $M_0$  можем написать такое уравнение:

$$\frac{ql^3}{24EJ} \psi_2(u) + \frac{M_0 l}{3EJ} \psi_0(2u) + \frac{M_0 l}{6EJ} \psi_1(2u) = 0,$$

откуда

$$M_0 = -\frac{ql^2}{4} \frac{\psi_2(u)}{2\psi_0(2u) + \psi_1(2u)} = -\frac{ql^2}{12} \frac{3}{2u^2} \frac{\operatorname{sh} 2u - \sin 2u}{\operatorname{sh} 2u + \sin 2u},$$

или, вводя обозначение

$$\frac{3}{2u^2} \frac{\operatorname{sh} 2u - \sin 2u}{\operatorname{sh} 2u + \sin 2u} = \chi_2(u),$$

получаем

$$M_0 = -\frac{ql^2}{12} \chi_2(u). \quad (21)$$

При помощи формул (16) и (19) легко решается также задача об изгибе неразрезной балки, лежащей на сплошном упругом основании и изгибаемой равномерной нагрузкой. Ход решения такой же, как и при отсутствии упругого основания. Мы разрезаем балку над опорами и приводим, таким образом, задачу к расчету простых балок, опертых по концам. Величины опорных моментов найдутся из того условия, что над каждой опорой искривленные оси соприкасающихся участков балки должны иметь общую касательную. Если выделить  $n$ -й и  $n+1$ -й пролеты, имеющие общее сечение над  $n+1$ -й опорой, и обозначить через  $M_n$ ,  $M_{n+1}$  и  $M_{n+2}$  опорные моменты, соответствующие  $n$ -й,  $n+1$ -й и  $n+2$ -й опорам, то для правого конца  $n$ -го пролета можно написать

$$y' = -\frac{ql_n^3}{24EJ} \psi_2(u_n) - \frac{M_n l_n}{6EJ} \psi_1(2u_n) - \frac{M_{n+1} l_n}{3EJ} \psi_0(2u_n). \quad (a)$$

Для левого конца  $n + 1$ -го пролета будем иметь

$$y' = \frac{q_{n+1}^3}{24EJ} \psi_2(u_{n+1}) + \frac{M_{n+1}l_{n+1}}{3EJ} \psi_0(2u_{n+1}) + \frac{M_{n+2}l_{n+1}}{6EJ} \psi_1(2u_{n+1}). \quad (b)$$

Сравнивая (а) и (b), приходим к такому уравнению, связывающему три последовательных опорных момента:

$$M_n l_n \psi_1(2u_n) + 2M_{n+1} [l_n \psi_0(2u_n) + l_{n+1} \psi_0(2u_{n+1})] + M_{n+2} l_{n+1} \psi_1(2u_{n+1}) = -\frac{q l_n^3}{4} \psi_2(u_n) - \frac{q l_{n+1}^3}{4} \psi_2(u_{n+1}). \quad (22)$$

Таких уравнений мы можем составить столько, сколько имеется промежуточных опор. К ним нужно присоединить еще два уравнения, составляемых на основании условий закрепления концов балки. Решив полученную таким путем систему уравнений, мы найдем все опорные моменты, и дальнейшее решение задачи сведется к расчету балок с опертыми концами, нагруженных равномерной нагрузкой и моментами по концам.

### § 6. Расчет перекрестных балок

Результатами последних двух параграфов воспользуемся при расчете перекрестных балок, с которыми приходится встречаться в строительной механике корабля и в некоторых гидротехнических сооружениях. Предположим, что требуется рассчитать плоское перекрытие с прямоугольным контуром, состоящее из пластин и подкрепляющих балок. Нагрузка, воспринимаемая пластиной, передается системе равноудаленных балок, которые в дальнейшем будем называть балками главного направления. Эти балки поддерживаются опорой по концам перекрестной балкой  $AB$  (рис. 8). Предположим, что все балки главного направления одинаково нагружены, оперты по концам и имеют одинаковое поперечное сечение. Возьмем одну из этих балок. Пусть  $Q$  обозначает приходящуюся на эту балку сплошную нагрузку, передающуюся от пластины, и  $R$  — реакцию, оказываемую на рассматриваемую балку перекрестной балкой  $AB$ . Прогиб нашей балки в месте соприкосновения ее с перекрестной балкой может быть представлен такой формулой:

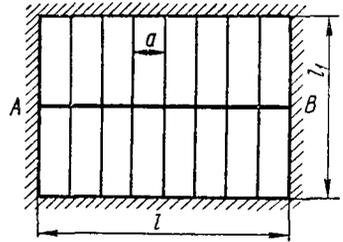


Рис. 8.

$$y = \gamma Q - \beta R, \quad (a)$$

где  $\gamma$  и  $\beta$  — постоянные коэффициенты, определяемые размерами балок главного направления, законом распределения нагрузки  $Q$  и местом расположения перекрестной балки. Если  $Q$  распределено равномерно или по закону трапеции и перекрестная балка делит пополам балки главного направления, то будем иметь

$$\gamma = \frac{5}{384} \frac{l_1^3}{EJ_1}; \quad \beta = \frac{l_1^3}{48EJ_1}.$$

Здесь через  $l_1$  обозначен пролет и через  $EJ_1$  — жесткость балок главного направления. Соответствующие величины для перекрестной балки обозначим через  $l$  и  $EJ$ .

Перекрестная балка изгибается давлениями  $R$ , приложенными в местах пересечения ее с балками главного направления. Давления эти на основании (а) могут быть представлены так:

$$R = \frac{\gamma Q}{\beta} - \frac{y}{\beta}. \quad (b)$$

Они имеют наименьшее значение в местах наибольшего прогиба перекрестной балки, т. е. у середины пролета  $AB$ , и достигают наибольшей величины у концов перекрестной балки, где прогибы малы. Вычисление давлений  $R$ , связанное с определением прогибов, мы выполним

следующим приближенным приемом<sup>1</sup>, дающим достаточно точные результаты при большом числе балок главного направления<sup>2</sup>.

Заменим каждое сосредоточенное давление  $R$  сплошной нагрузкой, равномерно распределенной на протяжении  $a$ , равном расстоянию между балками главного направления. Интенсивность этой нагрузки на каждом участке определится делением соответствующего значения  $R$  на длину  $a$ .

Таким образом, мы от изгиба сосредоточенными силами перейдем к изгибу сплошной нагрузкой, распределение которой вдоль перекрестной балки определяется ступенчатой линией (рис. 9). При большом числе балок главного направления мы можем заменить ступенчатую линию плавной кривой и таким образом свести расчет перекрестной балки к исследованию изгиба балки, нагруженной сплошной нагрузкой, изменяющейся по такому закону:

$$q' = \frac{R}{a} = \frac{\gamma}{\beta} \frac{Q}{a} - \frac{y}{\beta a} = q - ky.$$

Здесь для сокращения записи введены обозначения

$$q = \frac{\gamma Q}{\beta a}; \quad k = \frac{1}{\beta a}.$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси перекрестной балки записывается так:

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q - ky,$$

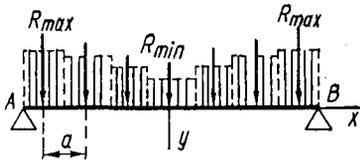


Рис. 9.

т. е. оно совершенно совпадает с уравнением для балки с опертыми концами, лежащей на сплошном упругом основании и изгибаемой равномерной нагрузкой. Поэтому для дальнейших вычислений можем воспользоваться результатами, полученными в § 4. Наибольший изгибающий момент имеет место по середине пролета и определяется на основании формулы (17) так:

$$M_{\max} = \frac{\gamma Q}{\beta a} \frac{l^2}{8} \chi_0(u),$$

где

$$u = \frac{\alpha l}{2} = \frac{l}{2} \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = \frac{l}{2} \sqrt[4]{\frac{1}{4EJ\beta a}}.$$

Определив  $u$ , мы легко найдем величину расчетного изгибающего момента при помощи табл. 1.

Вычислим теперь наибольшее и наименьшее значения давлений  $R$ . Наибольшее давление будет соответствовать крайним балкам главного направления. Пренебрегая здесь прогибом перекрестной балки, на основании (b) находим  $R_{\max} = \frac{\gamma Q}{\beta}$ .

Наименьшее давление получим для средней балки главного направления, где прогиб перекрестной балки (15) будет

$$(y)_{x=0} = \frac{q l^4}{64EJ} \frac{1}{u^4} [1 - \varphi_0(u)] = \frac{q}{k} [1 - \varphi_0(u)].$$

Вставляя это значение прогиба в формулу (b) и принимая во внимание, что в рассматриваемом случае  $\frac{q}{k} = \frac{\gamma Q}{\beta a} : \frac{1}{\beta a} = \gamma Q$ , находим  $R_{\min} = \frac{\gamma Q}{\beta} \varphi_0(u)$ .

При малых значениях  $u$ , т. е. когда балка главного направления весьма гибка по сравнению с перекрестной балкой, функция  $\varphi_0(u)$  близка к единице и, следовательно,  $R_{\min}$  близко к  $R_{\max}$ . Все балки главного направления будут примерно в таких условиях, как неразрезная балка на трех абсолютно жестких опорах. С возрастанием  $u$  функция  $\varphi_0(u)$  убывает и обращается в нуль при  $u = \frac{1}{2}\pi$ . При этом значении  $u$  средняя балка главного направления совер-

<sup>1</sup> Этот прием разработал И. Г. Бубновым. Бубнов И. Г. Строительная механика корабля. Часть II. С.-Петербург, тип. Морского министерства при Главном Адмиралтействе, 1914, стр. 368.

<sup>2</sup> Более подробные вычисления показывают, что уже при четырех балках главного направления приближенный метод дает вполне удовлетворительные результаты. См. стр. 378 указанной выше работы И. Г. Бубнова.

шенно не поддерживается перекрестной балкой и работает как балка, лежащая на двух опорах. При дальнейшем возрастании  $u$ , функция  $\varphi_0(u)$  делается отрицательной. Перекрестная балка в таком случае становится вредной, так как она не только не поддерживает средних балок главного направления, а, наоборот, увеличивает их прогиб.

Определив давления  $R$ , мы без затруднений можем рассчитать балки главного направления. Если нагрузка  $Q$  распределена равномерно или по трапеции, то можно ограничиться проверкой прочности крайней и средней балок главного направления, которым соответствует  $R_{\max}$  и  $R_{\min}$ .

Рассмотрим теперь случай, когда концы перекрестной балки не могут свободно поворачиваться. При этих условиях на перекрестную балку кроме нагрузки, представленной на рис. 9, будут действовать по концам моменты  $M'$  и  $M''$ . Величины этих моментов, в случае упругой заделки концов балки, легко находятся при помощи формул (16) и (19). Если перекрестная балка неразрезная, то опорные моменты находятся путем решения уравнений (22). Во всяком случае моменты  $M'$  и  $M''$  легко определить, пользуясь табл. 1. В дальнейшем нам понадобится полусумма этих моментов, и мы для сокращения записи введем обозначение  $\frac{M' + M''}{2} = \kappa M_0$ , где  $M_0$  — опорный момент для балки с абсолютно заделанными концами, определяемый формулой (21).

При проверке на прочность перекрестной балки нужно сравнить опорные моменты  $M'$  и  $M''$  с  $M_{\max}$ , имеющим место вблизи середины пролета. Наибольший из этих трех моментов и нужно положить в основу дальнейших расчетов. Хотя при неравных моментах величина  $M_{\max}$  не совпадает с серединой пролета, но мы можем с достаточной для практики точностью заменить максимальный момент моментом посередине пролета. Тогда на основании формул (17) и (20) получим

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} \chi_0(u) + \frac{\kappa M_0 l^2}{8} \frac{2\alpha^2}{u^2} \frac{2 \operatorname{ch} u \cos u}{\operatorname{ch} 2u + \cos 2u}.$$

Принимая во внимание равенства  $q = \frac{\gamma Q}{\beta a}$ ,  $\frac{\alpha^2 l^2}{4u^2} = 1$  и вставляя вместо  $\chi_0$  и  $M_0$  их значения, получаем

$$M_{\max} = \frac{\gamma Q l^2}{8\beta a} \left( \frac{2}{u^2} \frac{\operatorname{sh} u \sin u}{\operatorname{ch} 2u + \cos 2u} - \frac{2\kappa}{u^2} \frac{\operatorname{ch} u \cos u}{\operatorname{ch} 2u + \cos 2u} \frac{\operatorname{sh} 2u - \sin 2u}{\operatorname{sh} 2u + \sin 2u} \right).$$

Прибавляя и вычитая в скобках величину  $\kappa = \frac{2}{u^2} \frac{\operatorname{sh} u \sin u}{\operatorname{ch} 2u + \cos 2u}$  и пользуясь обозначениями

$$\frac{2}{u^2} \frac{\operatorname{sh} u \sin u}{\operatorname{ch} 2u + \cos 2u} = \chi_0(u);$$

$$\frac{6}{u^2} \frac{\operatorname{sh} u \sin u}{\operatorname{ch} 2u + \cos 2u} - \frac{6}{u^2} \frac{\operatorname{ch} u \cos u}{\operatorname{ch} 2u + \cos 2u} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2u - \sin 2u}{\operatorname{sh} 2u + \sin 2u} = \frac{6}{u^2} \frac{\operatorname{ch} u \sin u - \operatorname{sh} u \cos u}{\operatorname{sh} 2u + \sin 2u} = \chi_1(u),$$

получаем

$$M_{\max} = \frac{\gamma Q l^2}{8\beta a} \left[ (1 - \kappa) \chi_0(u) + \frac{1}{3} \kappa \chi_1(u) \right].$$

Вычисление  $M_{\max}$  по этой формуле, при пользовании табл. 1, не представляет никаких затруднений. Что касается давлений  $R$ , то наибольшее из них будет соответствовать крайним балкам главного направления и определится по формуле  $R_{\max} = \frac{\gamma Q}{\beta}$ ,  $R_{\min}$  получится в месте наибольшего прогиба перекрестной балки. Мы можем с достаточной для практики точностью положить, что наибольший прогиб равен прогибу посередине. В таком случае на основании формул (15) и (18) будем иметь

$$(y)_{x=0} = \frac{q}{k} [1 - \varphi_0(u)] + \frac{\kappa M_0 l^2}{4EJ} \frac{1}{u^2} \frac{\operatorname{sh} u \sin u}{\operatorname{ch} 2u + \cos 2u}.$$

Вставляя это выражение в формулу (b) и принимая во внимание равенство  $\frac{q}{k} = \gamma Q$ , находим

$$R_{\min} = \frac{\gamma Q}{\beta} \varphi_0(u) - \frac{\kappa M_0 l^2}{\beta 4EJ} \frac{1}{u^2} \frac{\operatorname{sh} u \sin u}{\operatorname{ch} 2u + \cos 2u}.$$

Вставляя вместо  $M_0$  и  $\varphi_0$  их значения и принимая во внимание равенство

$$q = \gamma Q k = \frac{\gamma Q \beta^4 E J u^4}{l^4},$$

находим

$$R_{\min} = \frac{\gamma Q}{\beta} \left( \frac{2 \cos u \operatorname{ch} u}{\operatorname{ch} 2u + \cos 2u} + \kappa \frac{\operatorname{sh} 2u - \sin 2u}{\operatorname{sh} 2u + \sin 2u} \frac{2 \operatorname{sh} u \sin u}{\operatorname{ch} 2u + \cos 2u} \right).$$

Прибавляя и вычитая в скобках величину  $\kappa \frac{2 \cos u \operatorname{ch} u}{\operatorname{ch} 2u + \cos 2u}$  и пользуясь обозначениями

$$\frac{2 \cos u \operatorname{ch} u}{\operatorname{ch} 2u + \cos 2u} = \varphi_0(u);$$

$\frac{2 \cos u \operatorname{ch} u}{\operatorname{ch} 2u + \cos 2u} + \frac{\operatorname{sh} 2u - \sin 2u}{\operatorname{sh} 2u + \sin 2u} \frac{2 \operatorname{sh} u \sin u}{\operatorname{ch} 2u + \cos 2u} = \frac{2(\operatorname{sh} u \cos u + \operatorname{ch} u \sin u)}{\operatorname{sh} 2u + \sin 2u} = \varphi_1(u),$   
получаем

$$R_{\min} = \frac{\gamma Q}{\beta} [(1 - \kappa) \varphi_0(u) + \kappa \varphi_1(u)].$$

Определив таким путем значения  $R_{\max}$  и  $R_{\min}$ , мы можем рассчитать балки главного направления. Заметим, что с возрастанием  $u$  убывает значение  $R_{\min}$ . Когда  $u$  достигает значения, при котором имеет место равенство  $(1 - \kappa) \varphi_0(u) + \kappa \varphi_1(u) = 0$ , величина  $R_{\min}$  обращается в нуль, и перекрестная балка перестает поддерживать среднюю балку главного направления. Приведенные формулы вполне решают вопрос о расчете систем с одной перекрестной балкой. В случае нескольких перекрестных балок намеченный здесь прием расчета приводит задачу к решению системы совокупных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Хотя при решении этих уравнений и не встречается каких-либо принципиальных затруднений, по все же оно требует довольно большого количества выкладок, и потому мы в дальнейшем дадим другой прием решения задачи.

## § 7. Балка переменного сечения, лежащая на сплошном упругом основании

В предыдущих задачах мы всегда предполагали сечение балки постоянным по длине. В технических вопросах иногда приходится иметь дело с более сложным случаем, когда сечение балки, лежащей на сплошном упругом основании, переменное. Такую задачу мы будем иметь, например, при определении напряжений, возникающих в корпусе судна, при постановке его в док, при расчете цилиндрических резервуаров, стенки которых имеют переменную толщину, при расчете фундаментных плит переменной толщины и т. д. Мы уже условились для балки переменного сечения сохранять в силе допущение Бернулли — Эйлера и потому при вычислении прогибов будем и в этом случае исходить из уравнения  $EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -M$ .

Последовательным дифференцированием находим

$$\frac{d}{dx} \left( EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = -N; \quad \frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = q - ky. \quad (23)$$

Здесь величины  $q$  и  $k$  имеют прежние значения (см. § 2).

Таким образом, решение задачи сводится к интегрированию дифференциального уравнения (23) четвертого порядка с переменными коэффициентами. Условия на концах балки представляются различно в зависимости от способа закрепления. Для опертого конца будем иметь условия  $y = 0$ ;  $EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ .

Для заделанного конца условия напишутся так:  $y = 0$ ;  $\frac{dy}{dx} = 0$ . На свободном конце будем иметь

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = 0; \quad \frac{d}{dx} \left( EJ \frac{d^2y}{dx^2} \right) = 0.$$

Лишь в некоторых частных случаях<sup>1</sup> удастся получить решение уравнения (23) в замкнутой форме. Обычно же приходится представлять интеграл этого уравнения бесконечными рядами или пользоваться для решения приближенными способами.

Различные приемы решения выясним на отдельных примерах.

В качестве первого примера рассмотрим изгиб балки  $AB$  со свободным концом  $A$  и заделанным концом  $B$ , лежащей на сплошном упругом основании и изгибаемой сплошной нагрузкой, изменяющейся по закону треугольника (рис. 10).

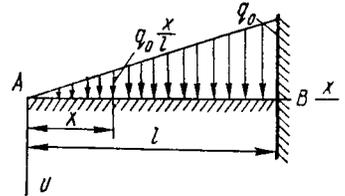


Рис. 10.

Поперечное сечение балки — прямоугольник постоянной ширины, которую мы примем равной единице. Высота прямоугольного сечения изменяется по линейному закону и определяется формулой  $h = h_0 \frac{x}{l} = h_0 \xi$ . Жесткость основания также предположим изменяющейся по линейному закону и примем<sup>2</sup>  $k = k_0 \xi$ .

Положив в уравнении (23)  $x = l\xi$  и введя для сокращения записи обозначения  $q = q_0 \xi$ ;  $\frac{12q_0 l^4}{Eh_0^3} = \lambda$ ;  $\frac{12k_0 l^4}{Eh_0^3} = \gamma$ , представим его в таком виде:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left( \xi^3 \frac{d^2y}{d\xi^2} \right) = \lambda \xi - \gamma \xi y. \quad (23')$$

Условия на концах представятся так:

$$\begin{aligned} \left( EJ \frac{d^2y}{d\xi^2} \right)_{\xi=0} &= 0; \quad \frac{d}{d\xi} \left( EJ \frac{d^2y}{d\xi^2} \right)_{\xi=0} = 0; \\ (y)_{\xi=1} &= 0; \quad \left( \frac{dy}{d\xi} \right)_{\xi=1} = 0. \end{aligned}$$

Общий интеграл уравнения (23') будем искать в форме бесконечного ряда  $y = \frac{\lambda}{\gamma} + A_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2 + A_3 \xi^3 + \dots$ . Вставляя это выражение в уравнение (23'), мы путем сравнения коэффициентов устанавливаем такие соотношения:

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{A_0 \gamma}{2^2 \cdot 3}; \quad A_3 = -\frac{A_1 \gamma}{3^2 \cdot 4 \cdot 2}; \\ A_n &= -\frac{A_{n-2} \gamma}{(n+1) n^2 (n-1)}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Например, в том случае, когда ширина прямоугольного поперечного сечения балки постоянна, а высота изменяется по линейному закону, решение получается в замкнутой форме при помощи функций Бесселя. См. Д и н и к А. Н. Продольный изгиб стержней, жесткость которых меняется по биномиальному закону. Изв. Екатеринбургского горного института, 1914, вып. II, стр. 1—22.

<sup>2</sup> Подобные условия получаются при расчете цилиндрического резервуара, если толщина стенки резервуара изменяется по закону треугольника. См. P ö s c h l Т., T e r z a g h i К. Berechnung von Behältern nach neueren analytischen und graphischen Methoden. Berlin, J. Springer, 1913, 212 SS.

Следовательно, искомое решение представится так:

$$y = \frac{\lambda}{\gamma} + A_0 \left( 1 - \frac{\gamma \xi^2}{2! 3!} + \frac{\gamma^2 \xi^4}{4! 5!} - \dots \right) + A_1 \xi \left( 1 - \frac{2\gamma \xi^2}{3! 4!} + \frac{2\gamma^2 \xi^4}{5! 6!} - \dots \right). \quad (24)$$

Полученный результат не представляет собой полного интеграла уравнения (23'), но в рассматриваемом случае условия на левом конце балки ( $\xi = 0$ ) выполняются, так как момент инерции сечения при  $\xi = 0$  равен нулю, и нам остается удовлетворить лишь условиям на правом конце, что мы можем всегда сделать надлежащим выбором постоянных  $A_0$  и  $A_1$ .

Полагая для краткости

$$y_1 = 1 - \frac{\gamma \xi^2}{2! 3!} + \frac{\gamma^2 \xi^4}{4! 5!} - \dots; \quad y_2 = \xi \left( 1 - \frac{2\gamma \xi^2}{3! 4!} + \frac{2\gamma^2 \xi^4}{5! 6!} \right),$$

получаем из условий на правом конце ( $\xi = 1$ ) такие уравнения:

$$\frac{\lambda}{\gamma} + A_0 y_1 + A_1 y_2 = 0; \quad A_0 y'_1 + A_1 y'_2 = 0.$$

Отсюда

$$\text{Здесь} \quad A_0 = -\frac{\lambda}{\gamma} \left[ \frac{y'_2}{y_1 y'_2 - y_2 y'_1} \right]_{\xi=1}; \quad A_1 = \frac{\lambda}{\gamma} \left[ \frac{y'_1}{y_1 y'_2 - y_2 y'_1} \right]_{\xi=1}.$$

$$[y'_1]_{\xi=1} = -\frac{2\gamma}{2! 3!} + \frac{4\gamma^2}{4! 5!} - \dots, \quad [y'_2]_{\xi=1} = 1 - \frac{3 \cdot 2\gamma}{3! 4!} + \frac{5 \cdot 2\gamma^2}{5! 6!} - \dots$$

Таким путем мы получаем полное решение поставленной задачи. Все обстоятельства изгиба вполне определяются величинами  $\gamma$  и  $\lambda$ .

Если бы на левом конце балки момент инерции поперечного сечения не обращался в нуль, то нам для решения задачи пришлось бы обратиться к полному интегралу уравнения (23') с четырьмя произвольными постоянными и все исследование получилось бы более сложным<sup>1</sup>.

Покажем теперь другой прием решения той же задачи, основанный на применении начала возможных перемещений<sup>2</sup>.

Если мы через  $V$  обозначим потенциальную энергию, накапливаемую при изгибе в балке и в упруго оседающем основании, а через  $2W$  — ту работу, которую совершает изгибающая балку нагрузка на перемещениях, соответствующих изгибу, то из начала возможных перемещений получим

$$\delta(V - 2W) = 0, \quad (\text{a})$$

т. е. приращение заключенной в скобки функции на всяком возможном отклонении от положения равновесия должно равняться нулю. В нашем случае потенциальная энергия системы составит из двух слагаемых и может быть представлена таким образом:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l ky^2 dx.$$

Для работы внешних сил получаем выражение

$$2W = \int_0^l qy dx.$$

<sup>1</sup> Reissner H. Über die Spannungsverteilung in zylindrischen Behälterwänden. Beton und Eisen, 1908, Bd 7, H. 6, SS. 150—155.

<sup>2</sup> См. § 23 части первой.

Принимая во внимание обозначения  $x = \xi l$ ;  $k = k_0 \xi$ ;  $q = q_0 \xi$ ;  $J = \frac{h_0^3 \xi^3}{12}$ ;  $\lambda = \frac{12q_0 l^4}{Eh_0^3}$ ;  $\gamma = \frac{12k_0 l^4}{Eh_0^3}$ , представляем выражение (а) в таком виде:

$$\delta \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} \xi^3 \left( \frac{d^2 y}{d\xi^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \gamma \xi y^2 - \lambda \xi y \right] d\xi = 0. \quad (a')$$

Следовательно, определение изогнутой формы балки сводится к разысканию такого выражения для прогибов  $y$ , при котором интеграл

$$\int_0^1 \left[ \frac{1}{2} \xi^3 \left( \frac{d^2 y}{d\xi^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \gamma \xi y^2 - \lambda \xi y \right] d\xi = S$$

приобретает *максимальное* или *минимальное* значение. Если бы мы приравняли нулю первую вариацию этого интеграла, то пришли бы к уравнению (23'). Мы можем обойти решение этого уравнения, если воспользуемся для определения функции  $y$  методом В. Ритца<sup>1</sup>. Представим приближенное выражение искомой функции в виде ряда

$$y_n = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 + \dots + a_n \psi_n, \quad (b)$$

где  $\psi_1, \dots, \psi_n$  — суть функции  $\xi$ , выбранные таким образом, что каждая из них удовлетворяет на концах балки тем же условиям, которым подчинена функция  $y$ . Что касается коэффициентов  $a_1, \dots, a_n$ , то их мы подберем таким образом, чтобы интеграл  $S$  после подстановки в него вместо  $y$  выражения  $y_n$  имел *максимальное* или *минимальное* значение, т. е. чтобы были удовлетворены условия

$$\frac{\partial S_n}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial S_n}{\partial a_n} = 0. \quad (c)$$

В данном случае мы получим систему линейных уравнений, из которой однозначно определим все коэффициенты  $a_1, \dots, a_n$ . Функции  $\psi_1, \dots, \psi_n$  в рассматриваемом случае выгодно взять в виде целых полиномов. Если мы ограничимся тремя членами ряда (b), то можем положить  $y_3 = a_1 (\xi - 1)^2 + a_2 (\xi - 1)^2 \xi + a_3 (\xi - 1)^2 \xi^2$ . При этом условия закрепления правого конца будут удовлетворены, так как взятые нами функции и их первые производные обращаются в нуль при  $\xi = 1$ . На левом конце условия удовлетворяются вследствие равенства нулю момента инерции поперечного сечения балки при  $\xi = 0$ . Вставляя  $y_3$  вместо  $y$  в выражение интеграла  $S$  и составляя уравнения (c), приходим к такой системе<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} a_1 \left( 1 + \frac{\gamma}{30} \right) + a_2 \left( \frac{2}{5} + \frac{\gamma}{105} \right) + a_3 \left( \frac{1}{5} + \frac{\gamma}{280} \right) &= \frac{1}{12} \lambda; \\ a_1 \left( \frac{2}{5} + \frac{\gamma}{105} \right) + a_2 \left( \frac{2}{5} + \frac{\gamma}{280} \right) + a_3 \left( \frac{2}{7} + \frac{\gamma}{630} \right) &= \frac{1}{30} \lambda; \\ a_1 \left( \frac{1}{5} + \frac{\gamma}{280} \right) + a_2 \left( \frac{2}{7} + \frac{\gamma}{630} \right) + a_3 \left( \frac{9}{35} + \frac{\gamma}{1260} \right) &= \frac{1}{60} \lambda. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> См. работу W. Ritz, упомянутую в списке на стр. 10.

<sup>2</sup> Эти результаты взяты из книги Th. Pöschl, K. Terzaghi, упомянутой на стр. 203.

Решение этих уравнений приводит нас к таким результатам:

при  $\gamma = 10$   $a_1 = 0,05869 \lambda$ ;  $a_2 = 0,0113 \lambda$ ;  $a_3 = -0,002164 \lambda$ ;

при  $\gamma = 100$   $a_1 = 0,01251 \lambda$ ;  $a_2 = 0,0212 \lambda$ ;  $a_3 = 0,00079 \lambda$ .

Чтобы судить о том, насколько быстро мы приближаемся к точному решению по мере увеличения числа коэффициентов  $a_1, \dots, a_n$ , приведем результаты, которые получаются, если ограничиться лишь двумя членами в выражении для  $u$ . Значение коэффициентов при этом получается следующее:

при  $\gamma = 10$   $a_1 = 0,0589 \lambda$ ;  $a_2 = 0,00946 \lambda$ ;

при  $\gamma = 100$   $a_1 = 0,0124 \lambda$ ;  $a_2 = 0,0218 \lambda$ .

Особенно хорошие совпадения получаются при больших значениях  $\gamma$ .

Сравнение результатов приближенного решения с тем, которое получается на основании решения (24), показывает, что при  $\gamma = 100$  погрешности в прогибах меньше 1%, погрешность в величине наибольшего изгибающего момента меньше 2%. Такая точность является, конечно, вполне достаточной для практических приложений.

Если момент инерции поперечного сечения балки не обращается в нуль на левом конце балки, функции  $\psi$  в разложении (b) приходится подчинить тем же условиям, которым должна удовлетворить функция  $u$  на левом конце, т. е. нужно удовлетворить уравнениям

$$\left( \frac{d^2\psi}{d\xi^2} \right)_{\xi=0} = \left( \frac{d^3\psi}{d\xi^3} \right)_{\xi=0} = 0.$$

Выбирая эти функции, как и раньше, в виде целых полиномов и ограничиваясь тремя членами разложения, можно положить

$$u_3 = a_1 \left( 1 - \frac{4}{3} \xi + \frac{1}{3} \xi^4 \right) + a_2 (\xi - 4\xi^4 + 3\xi^5) + a_3 (\xi^4 - 2\xi^5 + \xi^6).$$

Это выражение дает возможность получить с достаточной для практики точностью как величину прогиба, так и величину наибольшего изгибающего момента для балок прямоугольного сечения, высота которого изменяется по закону трапеции или по параболическому закону, т. е. когда  $h = h_1 + (h_0 - h_1) \xi$  или  $h = h_0 + (h_0 - h_1) \xi^2$ .

Указанный здесь прием исследования изгиба может быть с успехом применен и при других способах закрепления концов балки, а также при других законах изменения поперечного сечения. Так, например, этот метод не требует, чтобы закон изменения  $J$  вдоль оси балки представлялся одной какой-либо функцией. Весь пролет балки может распадаться на несколько участков, причем изменение сечения вдоль каждого участка может представляться особой функцией. Дальше мы увидим, что в целом ряде задач, относящихся к исследованию изгиба стержней и пластинок, применение метода Ритца дает прекрасные результаты и обеспечивает достаточную для практики точность при сравнительно небольшой вычислительной работе.

Возвращаясь к нашей задаче об изгибе балки переменного сечения, лежащей на сплошном упругом основании, отметим здесь еще возможность решения ее путем приближенного, вычислительного способа интегрирования уравнения (23). При этом пролет балки подразделяется на ряд участков, и величины прогиба  $u$  и его производных вычисляются последовательно для каждого участка, начиная с одного какого-либо конца балки, для которого величина  $u$  и ее последовательные производные известны или принимаются равными некоторым величинам, определяемым из условий на концах балки по окончании

всей вычислительной работы. При этих вычислениях весьма выгодно пользоваться приближенным способом К. Рунге<sup>1</sup>.

Наконец, следует еще отметить графический способ решения задачи, основанный на совпадении упругой линии с некоторой веревочной кривой. Этот прием выгодно употреблять, когда есть возможность заранее наметить подходящий вид изогнутой оси балки<sup>2</sup>.

§ 8. Балки, подвергающиеся одновременному действию изгиба и сжатия

Когда на призматический стержень по его оси действуют лишь продольные силы, то они будут вызывать в стержне растягивающие или сжимающие напряжения. Но если кроме продольных сил имеется еще и поперечная нагрузка, искривляющая ось стержня, то мы будем иметь более сложное явление, так как на изгиб стержня будут влиять не только поперечные, но и продольные силы. Эта зависимость деформаций, вызываемых продольными силами, от наличия поперечной нагрузки исключает возможность применения к продольным силам принципа сложения действия сил и тем усложняет решение поставленной задачи, имеющей весьма большое техническое значение.

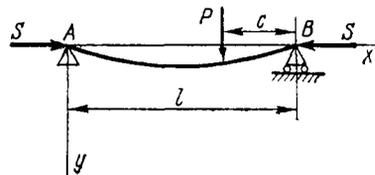


Рис. 11.

Рассмотрение задачи начнем с простейшего случая, представленного на рис. 11. Исходя из основного дифференциального уравнения (2) для изогнутой оси стержня, напишем уравнения для левой и правой частей балки в таком виде:

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = -Sy - \frac{Pc}{l} x; \quad EJ \frac{d^2y}{dx^2} = -Sy - \frac{P(l-c)}{l} (l-x). \quad (a)$$

Введя для краткости обозначение  $S/EJ = k^2$ , представим общие интегралы написанных уравнений так:

$$y = A \cos kx + B \sin kx - \frac{Pc}{Sl} x;$$

$$y = A_1 \cos kx + B_1 \sin kx - \frac{P}{Sl} (l-c)(l-x).$$

Из того условия, что прогибы балки на концах равны нулю, заключаем  $A = 0$ ;  $A_1 = -B_1 \operatorname{tg} kl$ .

Недостающие два уравнения для определения произвольных постоянных напишем, приняв во внимание условия равенства прогибов и углов наклона касательных для обоих участков упругой линии в точке приложения силы  $P$ . Таким путем получаем

$$B \sin k(l-c) = B_1 [\sin k(l-c) - \operatorname{tg} kl \cos k(l-c)];$$

$$Bk \cos k(l-c) = B_1 k [\cos k(l-c) + \operatorname{tg} kl \sin k(l-c)] + \frac{P}{S},$$

откуда

$$B = \frac{P \sin kc}{Sk \sin kl}; \quad B_1 = -\frac{P \sin k(l-c)}{Sk \operatorname{tg} kl}.$$

<sup>1</sup> Изложение способа Рунге можно найти в прекрасной книжке Г. Запфела, заключающей много полезных указаний по вопросам приближенных вычислений и приближенных способов интегрирования уравнений. Sanden H. Praktische Analysis. Leipzig—Berlin, B. G. Teubner, 1914, 185 SS.

<sup>2</sup> См. стр. 41 книги Th. Pöschl, K. Terzaghi, указанной на стр. 203.

Таким образом, для левой части балки получаем

$$y = \frac{P \sin kc}{Sk \sin kl} \sin kx - \frac{Pc}{Sl} x; \quad (25)$$

$$y' = \frac{P \sin kc}{S \sin kl} \cos kx - \frac{Pc}{Sl}; \quad y'' = -\frac{P \sin kc}{S \sin kl} \sin kx. \quad (26)$$

Соответствующие выражения для правой части балки получаются из выражений (25) — (26), если вместо  $x$  поставить  $l - x$ , вместо  $c$  величину  $l - c$  и переменить знак перед  $y'$ .

В полученные выражения поперечная сила  $P$  входит линейно, что же касается продольной силы, то она входит более сложным образом, так как величина  $k$ , входящая под синусом и косинусом, зависит от  $S$ . Если мы силу  $P$  увеличим в несколько раз, то во столько же раз увеличится и  $y$ . При увеличении же продольной силы, мы не будем получать пропорционального нарастания прогибов. Из вида уравнений (а) следует, что при действии на балку двух сил  $P_1$  и  $P_2$  прогиб  $y$ , вызываемый этими двумя силами, может быть получен сложением прогиба  $y_1$ , вызванного силой  $P_1$ , и прогиба  $y_2$ , вызванного силой  $P_2$ . Сила  $S$  в обоих случаях предполагается одинаковая. Следовательно, в дальнейшем мы можем складывать действия поперечных нагрузок. Для продольных же сил, как уже было сказано, принцип сложения действия сил не имеет места. Этими соображениями воспользуемся для получения при помощи результатов (25) и (26) решений в нескольких частных случаях.

Чтобы упростить вид получаемых формул, будем пользоваться таким обозначением:

$$\frac{Sl^2}{4EJ} = \frac{k^2 l^2}{4} = u^2. \quad (27)$$

Если изгибающая сила  $P$  расположена посередине пролета, то прогиб под силой, на основании (25), будет

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{P}{2Sk} \left( \operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \right) = \frac{Pl^3}{48EJ} \frac{\operatorname{tg} u - u}{\frac{1}{3} u^3}. \quad (28)$$

Первый множитель представляет собой прогиб балки при отсутствии продольной силы. Второй множитель, которым оценивается влияние продольной силы на прогиб, обращается в единицу при  $u = 0$  и возрастает с возрастанием  $u$ . При  $u = \pi/2$  этот множитель обращается в бесконечность, что соответствует критическому значению сжимающей силы  $S$ . В самом деле, в этом случае  $S = \frac{4EJu^2}{l^2} = \frac{EJ\pi^2}{l^2}$ , т. е. продольная сила равняется известной эйлеровой нагрузке.

Наибольший изгибающий момент в рассматриваемом случае будет иметь место посередине пролета. На основании (26) имеем

$$M_{\max} = -EJ (y'')_{x=\frac{l}{2}} = EJ \frac{Pk}{2S} \operatorname{tg} \frac{kl}{2} = \frac{Pl}{4} \frac{\operatorname{tg} u}{u}. \quad (29)$$

Чтобы получить изгиб балки, сжатой силами  $S$  и изогнутой парой  $M$ , приложенной к правому концу, нужно только в выражении (25) положить  $c = 0$ ;  $Pc = M$ , тогда получим

$$y = \frac{M}{S} \left( \frac{\sin kx}{\sin kl} - \frac{x}{l} \right).$$

Для вычисления углов поворота концов балки будем иметь

$$(y')_{x=0} = \frac{M}{S} \left( \frac{k}{\sin kl} - \frac{1}{l} \right) = \frac{Ml}{6EJ} 6 \left[ \frac{1}{2u \sin 2u} - \frac{1}{(2u)^2} \right];$$

$$(y')_{x=l} = \frac{M}{S} \left( \frac{k \cos kl}{\sin kl} - \frac{1}{l} \right) = \frac{Ml}{3EJ} 3 \left[ \frac{1}{2u \operatorname{tg} 2u} - \frac{1}{(2u)^2} \right]. \quad (29')$$

Имея эти результаты, легко получаем путем сложения решение для изгиба балки двумя парами сил, приложенными по концам. Возьмем, например, случай двух равных и прямо противоположных пар  $M$ . Тогда

$$y = \frac{M}{S} \left( \frac{\sin kx}{\sin kl} - \frac{x}{l} \right) + \frac{M}{S} \left[ \frac{\sin k(l-x)}{\sin kl} - \frac{(l-x)}{l} \right] = \frac{M}{S} \left[ \frac{\cos u \left( 1 - \frac{2x}{l} \right)}{\cos u} - 1 \right]. \quad (30)$$

Углы поворота концов при этом, на основании (29'), будут

$$(y')_{x=0} = - (y')_{x=l} = \frac{Ml}{2EJ} \left( \frac{1}{u \sin 2u} - \frac{1}{u \operatorname{tg} 2u} \right) = \frac{Ml}{2EJ} \frac{\operatorname{tg} u}{u}. \quad (31)$$

Наибольший изгибающий момент получается посередине. Он будет представляться такой формулой:

$$M_{\max} = - EJ (y'')_{x = \frac{l}{2}} = \frac{M}{\cos u}. \quad (32)$$

Пользуясь тем же способом сложения, мы на основании результата (25) легко напишем выражение для прогиба в любой точке балки с опертыми концами, изгибаемой системой вертикальных сил  $P_1, P_2, \dots, P_n$  и сжимаемой силами  $S$ . Если обозначим через  $c_1, c_2, \dots, c_n$  расстояния точек приложения сил  $P_1, \dots, P_n$  от правого конца (индексы при этом указывают порядок сил, в котором мы их встречаем, идя от правого конца), то для сечения балки между силами  $P_m$  и  $P_{m+1}$  прогиб представится так:

$$y = \frac{\sin kx}{Sk \sin kl} \sum_{i=1}^{i=m} P_i \sin kc_i - \frac{x}{Sl} \sum_{i=1}^{i=m} P_i c_i +$$

$$+ \frac{\sin k(l-x)}{S k \sin kl} \sum_{i=m+1}^{i=n} P_i \sin k(l-c_i) - \frac{(l-x)}{Sl} \sum_{i=m+1}^{i=n} P_i (l-c_i). \quad (33)$$

Таким же образом мы сразу могли бы написать выражение для угла поворота любого сечения и для величины изгибающего момента в этом сечении, пользуясь выражениями (26).

От сосредоточенных сил легко перейти к сплошным нагрузкам, нужно только суммирование заменить соответствующим интегрированием. Возьмем в качестве примера балку с опертыми концами, нагруженную равномерной нагрузкой интенсивности  $q$ . Для получения уравнения изогнутой оси нужно

только в выражении (33) вместо  $P_i$  поставить  $qdc$ , вместо  $\sum_{i=1}^{i=m}$  поставить  $\int_0^{l-x}$  и вместо  $\sum_{i=m+1}^{i=n}$  поставить  $\int_{l-x}^l$ . Выполняя указанное интегрирование,

получаем

$$y = \frac{q}{Sk^2} \left[ \frac{\cos \frac{kl}{2} \left(1 - \frac{2x}{l}\right)}{\cos \frac{kl}{2}} - 1 \right] - \frac{q}{2S} x(l-x). \quad (34)$$

Полагая в этом выражении  $x = l/2$ , находим прогиб посередине

$$(y)_{x=l/2} = \frac{q}{Sk^2} \left( \frac{1}{\cos u} - 1 - \frac{u^2}{2} \right),$$

который, на основании обозначения (27), легко представить в такой форме:

$$(y)_{x=l/2} = \frac{5}{2} \frac{ql^4}{384 EJ} \frac{\sec u - 1 - \frac{u^2}{2}}{\frac{5}{24} u^4}. \quad (35)$$

Эта формула имеет такой же характер, как и прежние. Прогиб балки при наличии поперечной нагрузки и продольной силы получается умножением прогиба от одной только поперечной нагрузки на некоторую функцию<sup>1</sup> аргумента  $u$ . Дифференцируя выражение (34) и полагая  $x = 0$ , получаем значения углов поворота концов балки в таком виде:

$$(y')_{x=0} = \frac{ql}{2S} \left( \frac{\operatorname{tg} \frac{kl}{2}}{\frac{kl}{2}} - 1 \right) = \frac{ql^3}{24EJ} \frac{\operatorname{tg} u - u}{\frac{1}{3} u^3}. \quad (36)$$

Наибольший изгибающий момент в рассматриваемом случае будет иметь место посередине пролета, и мы его вычислим на основании уравнения упругой линии (34):

$$M_{\max} = -EJ (y'')_{x=l/2} = EJ \frac{q}{S} \frac{1 - \cos \frac{kl}{2}}{\cos \frac{kl}{2}} = \frac{ql^2}{8} \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u}. \quad (37)$$

Из приведенных примеров ясно видно, что при помощи выражений (25) и (26) мы без всяких затруднений можем исследовать изгиб сжатой балки с опертыми концами при любой поперечной нагрузке.

Если бы изгибающие силы не лежали в главной плоскости балки, то каждую из сил пришлось бы разложить на две составляющие, направленные по главным осям инерции поперечного сечения, и потом отдельно исследовать изгиб балки в каждой из главных плоскостей так, как это мы делали выше.

При технических расчетах особый интерес представляет величина наибольших напряжений. В рассматриваемых задачах мы получаем для наибольшего по абсолютному значению напряжения формулу  $|X_x|_{\max} = \frac{S}{F} + \frac{M_{\max}}{W}$ , в ко-

<sup>1</sup> Для функций  $u$ , входящих в формулы (28), (29), (32), (35) и др. имеются подробные таблицы в работах А. П. Фан-дер-Флита. Фан-дер-Флит А. П. К расчету опорных мостовых стоек. Изв. собрания инженеров путей сообщения, 1900, том 20, № 6, стр. 111—118. Две теоремы, относящиеся к сложному сопротивлению изгибу и сжатию. Там же, 1900, том 20, № 9, стр. 164—180. К вопросу о сложном сопротивлении изгибу и сжатию. Там же, 1900, том 20, № 11, стр. 204—221. Расчет опорной рамы с абсолютно жесткою распоркой в мостах с ездой по низу. Там же, 1902, том 22, № 6, стр. 121—126. Об одной задаче строительной механики. Там же, 1903, том 23, № 10, стр. 224—228; № 11, стр. 241—249; № 12, стр. 266—273. Отд. оттиск: С.-Петербург, тип. Ю. Эрлих, 1904, 66 стр. Изгиб сжатых и вытянутых балок с заделанными концами. Изв. Петербургского политехнического института, 1904, том 1, вып. 1—2, стр. 3—76; вып. 3—4, стр. 258—279.

торой через  $F$  обозначена площадь поперечного сечения и через  $W$  — его момент сопротивления<sup>1</sup>. При выборе сечения приходится исходить из определенной величины допускаемых напряжений, и здесь возникает вопрос, можем ли мы в рассматриваемых задачах брать для допускаемого напряжения такую же норму, как и в тех случаях, где вполне применим принцип сложения действия сил. Предположим, что мы в каком-либо случае, где вполне применим принцип сложения действия сил, приняли допускаемое напряжение равным  $R$ , и допустим, что величина  $R'$  — значение опасного, предельного напряжения (например, величина напряжения, соответствующего *критической точке* для литого железа), тогда  $R = R'/n$  и  $n$  представляет собой коэффициент безопасности. Если бы все силы, действующие на рассматриваемую часть балки, увеличились в  $n$  раз, то вследствие принципа сложения во столько же раз увеличились бы и напряжения. Величина наибольшего напряжения при этом достигает опасного предела  $R'$ . Следовательно, здесь коэффициент безопасности  $n$  показывает, что мы достигнем опасного предельного напряжения при увеличении всех сил в  $n$  раз.

К иному заключению мы придем в тех случаях, когда, например, как в балке, подвергающейся действию изгиба и сжатия, принцип сложения не применим. Возьмем случай изгиба равномерной нагрузкой балки, сжимаемой силами  $S$ . Если для нее взять прежнее допускаемое напряжение  $R$  и определить поперечные размеры на основании формулы

$$R = \frac{S}{F} + \frac{ql^2}{8W} \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u}, \quad (a)$$

то легко видеть, что при увеличении всех сил в  $n$  раз наибольшие напряжения возрастут более чем в  $n$  раз и превзойдут опасный предел  $R'$ . В самом деле, при увеличении сил в  $n$  раз будут увеличиваться не только  $S$  и  $q$ , но также и множитель  $\frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u}$ , так как величина  $u^2$ , пропорциональная  $S$ , будет возрастать.

Чтобы и в этом случае наибольшие напряжения достигали опасного предела при увеличении нагрузок в  $n$  раз, нужно в расчетную формулу (а) вместо  $u^2 = \frac{Sl^2}{4EJ}$  поставить величину  $u_1^2 = \frac{nSl^2}{4EJ}$ , т. е. положить

$$R = \frac{S}{F} + \frac{ql^2}{8W} \frac{2(1 - \cos u_1)}{u_1^2 \cos u_1}, \quad (a')$$

так как при этом условии мы при увеличении всех сил в  $n$  раз получим для наибольших напряжений величину

$$\frac{S_n}{F} + \frac{qn l^2}{8W} \frac{2(1 - \cos u_1)}{u_1^2 \cos u_1} = Rn = R'.$$

Из этого следует, что при одновременном действии изгиба и сжатия величина допускаемых напряжений  $R_1$  должна быть меньшей, чем в тех случаях, где вполне применим принцип сложения, т. е. меньше  $R$ , и отношение  $\varphi = R_1/R$ , очевидно, равно отношению правых частей формул (а) и (а'). Таким же способом без особых затруднений могут быть вычислены коэффициенты уменьшения  $\varphi$  и для других частных случаев нагрузки<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Центр тяжести предполагается расположенным посередине высоты сечения.

<sup>2</sup> Ряд числовых таблиц, облегчающих расчеты при одновременном действии изгиба и сжатия, имеется в работах К. С. Завряева. З а в р и е в К. С. Сопротивление упругих стержней сложному продольному изгибу. Сб. института инженеров путей сообщения, 1913, вып. 82, стр. 1—81.

### § 9. Статически неопределимые случаи изгиба сжатых балок

Пользуясь результатами предыдущего параграфа, мы легко можем получить все нужные формулы для исследования изгиба сжатых балок с заделанными концами и неразрезных балок. В качестве примера возьмем балку с левым опертым и правым заделанным концом (рис. 12). При изгибе этой балки равномерной нагрузкой у правого конца появляется реактивный опорный момент

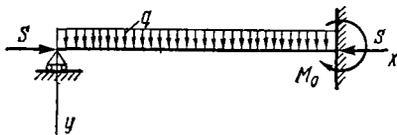


Рис. 12.

$M_0$ , величину которого примем за лишнюю неизвестную. Для определения  $M_0$  воспользуемся обычным приемом. Сначала отбросим лишнее закрепление, препятствующее поворачиванию правого конца, и для полученной таким образом равномерно нагруженной балки с опертыми концами найдем углы поворота конечных опорных сечений при помощи формулы (36). А потом подберем такое значение для момента  $M_0$ , чтобы вызываемый им угол поворота конца балки, определяемый на основании формул (29'), был равен по величине и противоположен по знаку углу, найденному выше из формулы (36).

Таким образом, для определения  $M_0$  получаем уравнение

$$\frac{ql^3}{24EJ} \frac{\operatorname{tg} u - u}{\frac{1}{3} u^3} = \frac{M_0 l}{3EJ} \left[ \frac{3}{2u \operatorname{tg} 2u} - \frac{3}{(2u)^2} \right],$$

откуда

$$M_0 = - \frac{ql^2}{8} \frac{4 \operatorname{tg} 2u (\operatorname{tg} u - u)}{u (\operatorname{tg} 2u - 2u)}. \quad (38)$$

Определив лишнюю неизвестную, мы привели задачу к расчету балки с опертыми концами, изгибаемой равномерной нагрузкой и парой сил  $M_0$ , приложенной к правому концу.

Если оба конца равномерно нагруженной и сжатой балки заделаны и не могут совершенно поворачиваться, то для определения опорных пар  $M_0$  воспользуемся формулами (31) и (36). Соответствующее уравнение напишется так:

$$\frac{ql^3}{24EJ} \frac{\operatorname{tg} u - u}{\frac{1}{3} u^3} = - \frac{M_0 l}{2EJ} \frac{\operatorname{tg} u}{u},$$

откуда

$$M_0 = - \frac{ql^2}{12} \frac{\operatorname{tg} u - u}{\frac{1}{3} u^2 \operatorname{tg} u}. \quad (39)$$

Если оба конца равномерно нагруженной и сжатой балки упруго заделаны и коэффициенты  $\alpha$ , характеризующие жесткость заделки, для обоих концов одинаковы и таковы, что угол поворота левого конца по часовой стрелке равен  $-\alpha M$ , где  $M$  — опорный момент, то величина  $M$  найдется из уравнения

$$\frac{ql^3}{24EJ} \frac{\operatorname{tg} u - u}{\frac{1}{3} u^3} + \frac{Ml}{2EJ} \frac{\operatorname{tg} u}{u} = -\alpha M.$$

Мы будем через  $M_0$  обозначать величину опорных моментов при абсолютно заделанных концах [формула (39)]. Тогда в рассматриваемом случае значение

опорных моментов  $M$  можно представить так:

$$M = \frac{M_0}{1 + \frac{2EJ}{l} \frac{u}{\operatorname{tg} u} \alpha} = M_0 \frac{u \operatorname{tg} u}{u \operatorname{tg} u + \frac{\alpha S l}{2}}. \quad (40)$$

Множитель при  $M_0$  в полученной формуле будем называть коэффициентом опорной пары и обозначать через  $\kappa$ , тогда  $M = \kappa M_0$ .

Уравнение изогнутой оси для рассматриваемого случая, на основании формул (30) и (34), представится так:

$$y = \left( \frac{q}{S k^2} + \frac{\kappa M_0}{S} \right) \left[ \frac{\cos u \left( 1 - \frac{2x}{l} \right)}{\cos u} - 1 \right] - \frac{q}{2S} x(l-x),$$

или, вставляя вместо  $M_0$  его значение (39), получаем

$$y = \frac{q}{S k^2} \frac{\operatorname{tg} u - \kappa (\operatorname{tg} u - u)}{\operatorname{tg} u} \left[ \frac{\cos u \left( 1 - \frac{2x}{l} \right)}{\cos u} - 1 \right] - \frac{q}{2S} x(l-x). \quad (41)$$

Перейдем теперь к исследованию изгиба неразрезных сжатых балок. Предположим опоры абсолютно жесткими и расположенными на одном уровне. За лишние неизвестные примем опорные моменты. Величины этих моментов будем разыскивать таким же способом, как и при отсутствии продольной силы. Поперечными сечениями, проведенными над опорами, разрезаем нашу многопролетную балку на ряд простых балок. Моменты, действующие по концам этих балок, найдутся из того условия, что над каждой из опор два соседние пролета изогнутой оси неразрезной балки имеют общую касательную. Таким путем мы получим систему уравнений, каждое из которых будет заключать величины трех последовательных опорных моментов. Число уравнений будет соответствовать числу промежуточных опор, и если концы многопролетной балки могут свободно поворачиваться, то из полученной системы уравнений найдутся все лишние неизвестные. В случае закрепленных концов нужно будет к составленной системе уравнений присоединить еще два уравнения, которые напишутся на основании условий закрепления концов. В качестве примера рассмотрим изгиб многопролетной балки, сжатой силами  $S$  и изгибаемой парами сил, приложенными по концам. Если других нагрузок нет, то мы можем все нужные нам уравнения составить при помощи формул (29'). Введя для краткости обозначения

$$\psi_1(2u) = 6 \left[ \frac{1}{2u \sin 2u} - \frac{1}{(2u)^2} \right]; \quad \psi_2(2u) = 3 \left[ \frac{1}{(2u)^2} - \frac{1}{2u \operatorname{tg} 2u} \right],$$

мы напишем для углов поворота  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в случае однопролетной балки (рис. 13) такие выражения:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{M_1 l}{3EJ} \psi_2(2u) + \frac{M_2 l}{6EJ} \psi_1(2u); \\ \theta_2 &= \frac{M_2 l}{3EJ} \psi_2(2u) + \frac{M_1 l}{6EJ} \psi_1(2u). \end{aligned} \quad (42)$$

Применим эти формулы к нашей неразрезной балке. Возьмем  $n$ -й и  $n + 1$ -й ее пролеты и обозначим через  $M_n$ ,  $M_{n+1}$  и  $M_{n+2}$  соответствующие опорные

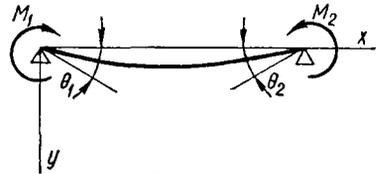


Рис. 13.

моменты. На  $n + 1$ -й опоре, являющейся общей для двух выделенных пролетов условие наличия общей касательной напишется на основании (42) так:

$$\frac{M_n l_n}{6EJ_n} \psi_1(2u_n) + \frac{M_{n+1} l_n}{3EJ_n} \psi_2(2u_n) = -\frac{M_{n+1} l_{n+1}}{3EJ_{n+1}} \psi_2(2u_{n+1}) - \frac{M_{n+2} l_{n+1}}{6EJ_{n+1}} \psi_1(2u_{n+1}). \quad (43)$$

Если сечение по длине балки постоянно, то получим

$$M_n l_n \psi_1(2u_n) + 2M_{n+1} [l_n \psi_2(2u_n) + l_{n+1} \psi_2(2u_{n+1})] + M_{n+2} l_{n+1} \psi_1(2u_{n+1}). \quad (43')$$

Полученные уравнения остаются в силе и в том случае, если продольное сжатие в различных пролетах неразрезной балки будет различным. Если бы на отдельных пролетах балки лежала равномерно распределенная нагрузка, то в правой части уравнения (43') вместо нуля получили бы выражение, зависящее от углов поворота, вызываемых равномерной нагрузкой. Это выражение легко может быть составлено при помощи формулы (36).

Если опоры неразрезной балки лежат на разных высотах и через  $\beta_n$  обозначен угол между линией, соединяющей опорные точки  $n$ -го пролета, и осью  $x$ , отсчитываемый по часовой стрелке, то вместо уравнения (43') получим такое <sup>1</sup>:

$$M_n l_n \psi_1(2u_n) + 2M_{n+1} [l_n \psi_2(2u_n) + l_{n+1} \psi_2(2u_{n+1})] + M_{n+2} l_{n+1} \psi_1(2u_{n+1}) = 6EJ (\beta_n - \beta_{n+1}). \quad (43'')$$

Если  $u$  беспрдельно убывает до нуля, функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  стремятся к единице и уравнения (43') и (43'') в пределе обращаются в известные уравнения трех моментов для балок, подвергающихся действию только изгиба.

В случае упругих опор иногда выгоднее за лишние неизвестные принять не опорные моменты, а опорные реакции. В таком случае мы отбрасываем промежуточные опоры и их действия на балку заменяем реактивными силами  $R_1, R_2, \dots, R_n$ . (Предполагаем  $n$  промежуточных опор. Индексы внизу указывают порядок опорных реакций в направлении от правого конца балки к левому.) Величины реактивных сил находим из тех условий, что осадка каждой из опор должна быть пропорциональна соответствующему давлению. Пусть  $\alpha_m$  — коэффициент жесткости  $m$ -й опоры, тогда  $\alpha_m R_m$  будет величина осадки этой опоры. Соответствующее уравнение получим, приравняв найденную осадку к прогибу балки в данном месте под действием лежащей на балке нагрузки и опорных реакций  $R_1, \dots, R_n$ . Возьмем случай равномерной нагрузки, тогда на основании (33) и (34) для сечения  $x_m$ , соответствующего  $m$ -й опоре, найдем

$$\begin{aligned} & \frac{q}{Sk^2} \left[ \frac{\cos u \left(1 - \frac{2x_m}{l}\right)}{\cos u} - 1 \right] - \frac{q}{2S} x_m (l - x_m) - \frac{\sin kx_m}{Sk \sin kl} \sum_{i=1}^{i=m} R_i \sin kc_i + \\ & + \frac{x_m}{Sl} \sum_{i=1}^{i=m} R_i c_i - \frac{\sin k(l - x_m)}{Sk \sin kl} \sum_{i=m+1}^{i=n} R_i \sin k(l - c_i) + \frac{l - x_m}{Sl} \sum_{i=m+1}^{i=n} R_i (l - c_i) = \\ & = \alpha_m R_m. \end{aligned} \quad (44)$$

<sup>1</sup> См. стр. 213 работы С. П. Тимошенко, указанной на стр. 193. Без всяких затруднений уравнение это может быть распространено на случай упругих опор. См. Z i m m e r m a n H. Der gerade Stab auf elastischen Einzelstützen mit Belastung durch längsgerichtete Kräfte. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse, Berlin, 1907, Halbband 1, 7 März, SS. 235—244.

Таких уравнений мы можем написать столько, сколько имеется промежуточных опор, следовательно, число уравнений будет соответствовать числу лишних неизвестных. Величина  $l$  в этих уравнениях обозначает длину балки, величины  $c_1, \dots, c_n$  — расстояния последовательных опор от правого конца балки.

### § 10. Балки, подвергающиеся одновременному действию изгиба и растяжения

В качестве основного случая рассмотрим изгиб балки сосредоточенной силой  $P$  (рис. 14). Уравнение изогнутой оси и дальнейшие формулы для этой задачи мы можем написать сразу, если только воспользуемся результатами § 8, полученными для случая сжатой балки. Для этой цели нужно только изменить знак у продольной силы. В таком случае вместо величин  $k^2$  и  $u^2$  в наши формулы везде войдут величины  $-k^2$  и  $-u^2$  и нам придется вместо  $k$  и  $u$  поставить  $ki$  и  $ui$ . Вводя на основании равенств  $\sin \alpha i = i \operatorname{sh} \alpha$ ;  $\cos \alpha i = \operatorname{ch} \alpha$ ;  $\operatorname{tg} \alpha i = i \operatorname{th} \alpha$  вместо тригонометрических функций гиперболические, получаем из формул (25) и (26) для левой части балки такие выражения:

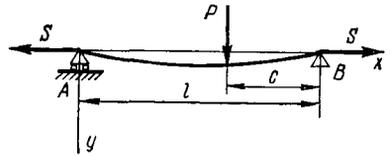


Рис. 14.

$$y = -\frac{P \operatorname{sh} kc}{S k \operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} kx + \frac{Pc}{Sl} x; \quad (45)$$

$$y' = -\frac{P \operatorname{sh} kc}{S \operatorname{sh} kl} \operatorname{ch} kx + \frac{Pc}{Sl}, \quad y'' = -\frac{Pk \operatorname{sh} kc}{S \operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} kx. \quad (46)$$

Для правой половины балки получим подобные формулы, нужно только поставить вместо  $c$  величину  $l - c$ , вместо  $x$  — величину  $l - x$  и изменить знак  $y'$ . Из этих формул путем сложения действия сил могут быть легко получены решения для всех тех случаев, которые мы разобрали раньше в связи с изгибом сжатых балок. Так, например, для изгиба балки двумя равными и прямо противоположными парами  $M$ , приложенными по концам, получим

$$y = \frac{M}{S} \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch} u \left( 1 - \frac{2x}{l} \right)}{\operatorname{ch} u} \right].$$

Для изгиба балки равномерной нагрузкой будем иметь

$$y = \frac{q}{Sk^2} \left[ \frac{\operatorname{ch} u \left( 1 - \frac{2x}{l} \right)}{\operatorname{ch} u} - 1 \right] + \frac{q}{2S} x(l-x).$$

Комбинируя эти два случая, легко находим решения для балки с абсолютно или упруго заделанными концами.

В первом случае имеем [см. формулу (39)]

$$M_0 = -\frac{ql^2}{12} \frac{u - \operatorname{th} u}{\frac{1}{3} u^2 \operatorname{th} u}. \quad (47)$$

Во втором случае для опорных пар получим такое выражение:

$$M = M_0 \frac{u \operatorname{th} u}{u \operatorname{th} u + \frac{\alpha Sl}{2}}. \quad (48)$$

Уравнение упругой линии в этом случае, на основании (41), напишется таким образом:

$$y = \frac{q}{Sk^2} \frac{\text{th } u - \kappa (\text{th } u - u)}{\text{th } u} \left[ \frac{\text{ch } u \left(1 - \frac{2x}{l}\right)}{\text{ch } u} - 1 \right] + \frac{q}{2S} x(l-x). \quad (49)$$

Здесь величина  $\kappa$  представляет собой коэффициент опорной пары, определяемый на основании (48) так:  $\kappa = \frac{u \text{ th } u}{u \text{ th } u + \frac{\alpha S l}{2}}$ . При абсолютной заделке  $\kappa = 1$ ,

при свободно поворачивающихся концах  $\kappa = 0$ . Величина эта зависит не только от жесткости закрепления, характеризуемой величиной  $\alpha$ , но и от величины продольной силы  $S$ . При малом значении силы  $S$ , т. е. при малых  $u$ , мы можем положить  $\kappa = \frac{1}{1 + \frac{2\alpha EJ}{l}}$ . Возьмем закрепление, при котором  $\alpha = l/2EJ$ . Тогда при

отсутствии продольной силы будем иметь  $\kappa = 0,5$ . Прикладывая силу  $S$  и постепенно увеличивая ее, получаем при различных  $u$  такие значения для  $\kappa$ :

$u$	0	1	2	5	10
$\kappa$	0,500	0,432	0,325	0,167	0,091

Коэффициент опорной пары в этом случае быстро убывает с увеличением продольной силы<sup>1</sup>. Следовательно, влияние заделки концов с возрастанием растягивающей силы также быстро уменьшается.

Воспользуемся уравнением упругой линии и приведем здесь ряд основных формул, которые могут понадобиться при расчете равномерно нагруженной балки с упруго заделанными концами, подвергающейся действию продольных растягивающих сил  $S$ .

Наибольший прогиб, очевидно, получится по середине пролета. Полагая в уравнении (49)  $x = l/2$ , получаем для него значение

$$(y)_{\max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} \frac{\frac{1}{\text{ch } u} - 1 + \frac{1}{2} u^2}{\frac{5}{24} u^4} - \frac{\kappa}{384} \frac{ql^4}{EJu^4} \frac{24 (\text{th } u - u)}{\text{th } u} \frac{1 - \text{ch } u}{\text{ch } u}$$

Для упрощения вводим такие обозначения:

$$\frac{\frac{1}{\text{ch } u} - 1 + \frac{1}{2} u^2}{\frac{5}{24} u^4} = f_0(u);$$

$$\frac{24 (\text{th } u - u)}{u^4 \text{ th } u} \frac{1 - \text{ch } u}{\text{ch } u} = \frac{\frac{1}{\text{ch } u} - 1 + \frac{u^2}{2}}{\frac{u^4}{24}} + \frac{-\frac{u}{\text{sh } u} + \frac{u}{\text{th } u} - \frac{u^2}{2}}{\frac{u^4}{24}} = 5f_0(u) - f_1(u).$$

Тогда будем иметь

$$(y)_{\max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} (1 - \kappa) f_0(u) + \kappa \frac{ql^4}{384EJ} f_1(u). \quad (50)$$

<sup>1</sup> Если бы мы взяли более жесткое закрепление, положили, например,  $\alpha = \frac{1}{10} \frac{l}{2EJ}$ , то влияние силы  $S$  на величину  $\kappa$  было бы меньшим. Для  $u = 0$  мы получили бы  $\kappa = 0,909$ , при  $u = 10$   $\kappa = 0,500$ .

Таблица 2

u	$\lg_{10} \sqrt{U_0} + 4$	$\lg_{10} \sqrt{U_1} + 4$	$\lg_{10} \sqrt{U_2} + 4$	Значения функций, входящих в формулу (50)		Значения функций, входящих в формулы для изгибающего момента		
						посередине [формула (51)]		на опорах [формула (52)]
				$f_0(u)$	$f_1(u)$	$\varphi_0(u)$	$\varphi_1(u)$	$\chi(u)$
0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,5	3,889	3,217	3,801	0,908	0,976	0,905	0,972	0,984
	406	331	425					
1,0	3,483	2,886	3,376	0,711	0,909	0,704	0,894	0,939
	310	223	336					
1,5	3,173	2,663	3,040	0,532	0,817	0,511	0,788	0,876
	262	182	292					
2,0	2,911	2,481	2,748	0,380	0,715	0,367	0,673	0,806
	227	161	257					
2,5	2,684	2,320	2,491	0,281	0,617	0,268	0,563	0,736
	198	146	228					
3,0	2,486	2,174	2,263	0,213	0,529	0,200	0,467	0,672
	175	134	202					
3,5	2,311	2,040	2,061	0,166	0,453	0,153	0,386	0,614
	156	124	180					
4,0	2,155	1,916	1,881	0,132	0,388	0,120	0,320	0,563
	141	115	163					
4,5	2,014	1,801	1,718	0,107	0,335	0,097	0,267	0,519
	128	107	148					
5,0	1,886	1,694	1,570	0,088	0,291	0,079	0,224	0,480
	118	100	135					
5,5	1,768	1,594	1,435	0,074	0,254	0,066	0,189	0,446
	108	93	124					
6,0	1,660	1,501	1,311	0,063	0,223	0,055	0,162	0,417
	100	88	115					
6,5	1,560	1,413	1,196	0,054	0,197	0,047	0,139	0,391
	93	82	107					
7,0	1,467	1,331	1,089	0,047	0,175	0,041	0,121	0,367
	87	78	100					
7,5	1,380	1,253	0,989	0,041	0,156	0,036	0,106	0,347
	82	74	94					
8,0	1,298	1,179	0,895	0,036	0,141	0,031	0,093	0,328
	77	70	89					
8,5	1,221	1,109	0,806	0,032	0,127	0,028	0,083	0,311
	73	67	83					
9,0	1,148	1,042	0,723	0,029	0,115	0,025	0,074	0,296
	69	63	80					
9,5	1,079	0,979	0,643	0,026	0,105	0,022	0,066	0,283
	65	61	75					
10,0	1,014	0,918	0,568	0,024	0,096	0,020	0,060	0,270
	63	58	72					
10,5	0,951	0,860	0,496	0,021	0,088	0,018	0,054	0,259
	59	55	69					
11,0	0,892	0,805	0,427	0,020	0,081	0,017	0,050	0,248
	57	54	65					
11,5	0,835	0,751	0,362	0,018	0,075	0,015	0,045	0,238
	55	51	63					
12,0	0,780	0,700	0,299	0,016	0,069	0,014	0,042	0,229

При  $\kappa = 0$  получаем отсюда прогиб балки с опертыми концами, при  $\kappa = 1$  имеем случай абсолютно заделанных концов. Если положим  $u = 0$ , то  $f_0(u) = = f_1(u) = 1$  и мы приходим к известным формулам для балок, подвергающихся лишь действию равномерно распределенной нагрузки. Если величины  $u$  и  $\kappa$  известны, то вычисление прогибов по формуле (50) не представит никаких затруднений. Для облегчения вычислений мы в табл. 2 приводим значения функций  $f_0(u)$  и  $f_1(u)$  для ряда значений  $u$ .

Величину изгибающего момента посередине пролета получим так:

$$(M)_{x=\frac{l}{2}} = -EJ(y'')_{x=\frac{l}{2}} = \frac{ql^2}{8} \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{ch} u}}{\frac{1}{2} u^2} + \frac{ql^2}{8} \kappa \frac{\operatorname{th} u - u}{\frac{1}{2} u^2 \operatorname{sh} u}.$$

Введя для краткости обозначения

$$\frac{1 - \frac{1}{\operatorname{ch} u}}{\frac{1}{2} u^2} = \varphi_0(u); \quad \frac{1 - \frac{u}{\operatorname{sh} u}}{\frac{1}{6} u^2} = \varphi_1(u),$$

представим выражение для изгибающего момента посередине в таком виде:

$$(M)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{ql^2}{8} (1 - \kappa) \varphi_0(u) + \frac{ql^2}{24} \kappa \varphi_1(u). \quad (51)$$

Наконец, опорный момент на основании (47) представится так:

$$(M)_{x=0=l} = -\frac{ql^2}{12} \chi(u),$$

где

$$\chi(u) = \frac{u - \operatorname{th} u}{\frac{1}{3} u^2 \operatorname{th} u}. \quad (52)$$

При помощи формул (51) и (52) легко решается вопрос о наибольших напряжениях в рассматриваемом случае. Числовые значения функций  $\varphi_0(u)$ ,  $\varphi_1(u)$  и  $\chi(u)$ , приводимые в табл. 2, значительно облегчают соответствующий расчет.

Таким же путем, как и в случае сжатых балок, мы можем прийти к заключению, что норма допускаемых напряжений при одновременном действии изгиба и растяжения может быть повышена, так как функции  $\varphi_0(u)$ ,  $\varphi_1(u)$  и  $\chi(u)$  убывают с возрастанием продольной силы.

В заключение отметим, что при беспредельном увеличении  $u$  первым членом в уравнении (49) можно будет пренебречь по сравнению со вторым, тогда приходим к такому выражению:

$$y = \frac{q}{2S} x(l-x). \quad (53)$$

Это известная формула для малых прогибов тяжелой гибкой нити.

## § 11. Случай, когда продольные силы неизвестны

Во всех предыдущих задачах мы предполагали, что величина продольной силы  $S$  нам известна и, следовательно, определение аргумента  $u$ , входящего во все полученные выше расчетные формулы, не встречает никаких затруднений. Иногда приходится встречаться с более сложным случаем, когда продольная сила не

задана, а является результатом деформации балки. Возьмем, например, балку, концы которой закреплены таким образом, что при изгибе совершенно не сближаются. В таком случае изгиб будет сопровождаться появлением продольной растягивающей силы, удерживающей концы от смещения. Величину этой силы мы можем определить из того условия, что вызываемое ею удлинение оси балки, очевидно, равняется разности между длиной искривленной оси балки и величиной расстояния между опорными точками. Соответствующее уравнение особенно просто напишется для того предельного случая, когда ось балки можно принять за параболическую кривую (см. выражение (53)). Пользуясь известной формулой, представляющей разность между длиной дуги параболы и длиной хорды в зависимости от стрелки провисания  $f$ , получаем нужное нам уравнение в таком виде:

$$\frac{8}{3} \frac{f^2}{l^2} = \frac{S}{EF}. \quad (54)$$

Вставляя вместо  $f$  его значение, определяемое из (53), находим для  $S$  такое кубическое уравнение:  $S^3 = \frac{1}{24} q^2 l^2 EF$ .

Уравнением (54) можно воспользоваться для приближенного решения и в том случае, когда величина  $u$  невелика и, следовательно, кривая изгиба значительно отличается от параболы, так как длина кривой при малых стрелках будет мало зависеть от вида кривой.

Вставляя в уравнение (54) вместо  $f$  величину прогиба балки при заданных поперечных нагрузках и неизвестной пока продольной силе, мы в каждом частном случае будем получать уравнение<sup>1</sup>, из которого путем подбора находится соответствующая величина  $S$ .

Дадим теперь полное решение задачи для случая равномерной нагрузки, когда уравнение изогнутой оси представляется формулой (49). Этот случай имеет большой практический интерес главным образом в связи с расчетом пластинок.

При составлении разности между длиной дуги и длиной соответствующей хорды мы применим формулу, которой часто пользовались в элементарном курсе сопротивления материалов, и напишем уравнение (54) в таком виде:

$$\frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx = \frac{Sl}{EF}. \quad (55)$$

В том частном случае, когда концы балки могут свободно поворачиваться ( $x = 0$ ), выражение для прогиба, на основании (49), напишется так:

$$y = \frac{q}{Sk^2} \left[ \frac{\operatorname{ch} u \left( 1 - \frac{2x}{l} \right)}{\operatorname{ch} u} - 1 \right] + \frac{q}{2S} x(l-x).$$

<sup>1</sup> Подобные приближенные решения для ряда частных случаев были получены А. П. Фан-дер-Флитом. См. его работы, указанные на стр. 210. Подробное исследование для случая равномерной нагрузки сделано И. Г. Бубновым в связи с рассмотрением изгиба пластинок по цилиндрической поверхности. Б у б н о в И. Г. Напряжения в обшивке судов от давления воды. С.-Петербург, Типолитография А. Э. Винке, 1904, 93 стр. См. Морской сборник, 1902, том 311, № 8, стр. 117—143; том 312, № 9, стр. 111—141, № 10, стр. 119—139; том 313, № 12, стр. 107—131. [Перепечатка: Б у б н о в И. Г. Труды по теории пластин. М., Гостехтеориздат, 1953, стр. 11—100]. См. также стр. 545 книги И. Г. Бубнова, указанной на стр. 200. Оттуда взяты таблицы вспомогательных функций и численный пример.

Вставляя это выражение в уравнение (55) и принимая во внимание равенства

$$\int_0^l \operatorname{sh}^2 u \left(1 - \frac{2x}{l}\right) dx = \frac{l}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} 2u}{2u} - 1\right); \quad \int_0^l (l - 2x)^2 dx = \frac{l^3}{3};$$

$$\int_0^l (l - 2x) \operatorname{sh} u \left(1 - \frac{2x}{l}\right) dx = \frac{l^2}{u} \left(\operatorname{ch} u - \frac{\operatorname{sh} u}{u}\right),$$

получаем

$$\frac{q^2}{S^2} \left(\frac{l^3}{24} - \frac{l}{k^2} - \frac{l}{4k^2 \operatorname{ch}^2 u} + \frac{5 \operatorname{th} u}{2k^3}\right) = \frac{Sl}{EF}. \quad (a)$$

Левая часть представляет собой разность между длиной дуги и длиной хорды<sup>1</sup>.

Для дальнейших приложений нам удобнее представить уравнение (a) в несколько ином виде. Вместо  $S$  подставим его значение  $k^2 EJ$  и потом разделим обе части уравнения (a) на  $\frac{q^2 k^2 l^3}{(EJ)^2}$ , тогда получим

$$\frac{9}{8u^6} - \frac{5 \cdot 27}{16u^8} + \frac{27 \operatorname{th}^2 u}{16u^8} + \frac{5 \cdot 27}{16} \frac{\operatorname{th} u}{u^9} = 2^6 \cdot 3^3 \frac{E^2 J^3}{q^2 F l^3}. \quad (56)$$

В правую часть этого уравнения входят лишь известные величины, и по заданным размерам балки и заданной нагрузке мы легко находим ее численное значение. После этого остается подобрать для  $u$  такое значение, при котором уравнение (56) было бы удовлетворено. Подыскивание решения может быть значительно упрощено, если иметь таблицу численных значений левой части нашего уравнения при различных значениях  $u$ . В дальнейшем мы для упрощения записи будем пользоваться обозначением

$$\frac{9}{8u^6} - \frac{5 \cdot 27}{16u^8} + \frac{27 \operatorname{th}^2 u}{16u^8} + \frac{5 \cdot 27}{16} \frac{\operatorname{th} u}{u^9} = U_0.$$

В табл. 2 помещены значения функции  $\lg 10^4 \sqrt{U_0}$ . Пользуясь этой таблицей, мы без затруднения можем решить уравнение (56) в каждом частном случае.

Возьмем в качестве примера балочку прямоугольного поперечного сечения высотой  $h$  и шириной, равной единице. Тогда уравнение (56) может быть переписано так:

$$U_0 = \left(\frac{E}{q}\right)^2 \left(\frac{h}{l}\right)^8. \quad (56')$$

Следовательно,

$$\lg 10^4 \sqrt{U_0} = \lg \left[ 10^4 \frac{E}{q} \left(\frac{h}{l}\right)^4 \right].$$

Положим  $E = 2,15 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ,  $q = 0,322 \text{ кг/см}$ ,  $h = 0,8 \text{ см}$ ,  $l = 120 \text{ см}$ , тогда  $10^4 \frac{E}{q} \left(\frac{h}{l}\right)^4 = 132$ ;  $\lg 132 = 2,12$ . Из данных табл. 2 заключаем, что  $4 < u < 4,5$ . Простое интерполирование дает нам  $u = 4,12$ .

Когда величина  $u$  найдена, дальнейший расчет балочки не представляет труда. Наибольший прогиб мы найдем, если стрелку прогиба, соответствующую нерастянутой балке, умножим на соответствующее значение  $f_0(u)$  [см. формулу (50)]. При определенном выше значе-

<sup>1</sup> Этим выражением иногда пользуются при вычислении поправок, когда измеряют расстояния при помощи стальной ленты, провисающей от собственного веса. См. работу А. Э. Юнга. Young A. E. On the form of a suspended wire or tape including the effect of stiffness. Philosophical Magazine and Journal of Science, Series 6, 1915, vol. 29, N 169, pp. 96—127.

нии и легко находим из таблицы, что  $f_0(u) = 0,126$ . Следовательно,

$$(y)_{\max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} 0,126.$$

Для вычисления наибольшего изгибающего момента, определяем из таблицы соответствующее значение  $\Phi_0(u)$  [см. формулу (51)]. Тогда найдем

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} \Phi_0(u) = \frac{ql^2}{8} 0,114.$$

В случае балки с абсолютно заделанными концами ( $\kappa = 1$ ), уравнение изогнутой оси напишется так [см. формулу (49)]:

$$y = \frac{q}{Sk^2} \frac{u}{\text{th } u} \left[ \frac{\text{ch } u \left(1 - \frac{2x}{l}\right)}{\text{ch } u} - 1 \right] + \frac{q}{2S} x(l-x).$$

Вставляя это в уравнение (55) и выполняя интегрирование, находим<sup>1</sup>:

$$\frac{q^2}{S^2} \left( \frac{l^3}{24} + \frac{l}{k^2} - \frac{3l^2}{8k \text{th } u} - \frac{l^3}{16 \text{sh}^2 u} \right) = \frac{Sl}{EF}. \quad (b)$$

Вставляя вместо  $S$  его значение, деля обе части на  $\frac{q^2 k^2 l^3}{(EJ)^2}$  и вводя обозначение

$$\frac{45}{16u^6} + \frac{27}{4u^8} - \frac{27}{16} \frac{1}{u^6 \text{th}^2 u} - \frac{81}{16} \frac{1}{u^2 \text{th } u} = U_1,$$

получаем для данного случая уравнение

$$U_1 = 2^6 \cdot 3^3 \frac{E^2 J^2}{q^2 F l^8}. \quad (57)$$

Для рассмотренного выше численного примера будем иметь

$$\lg 10^4 \sqrt{U_1} = \lg \left[ 10^4 \left( \frac{E}{q} \right) \left( \frac{h}{l} \right)^4 \right] = \lg 132 = 2,12.$$

Из табл. 2 заключаем, что  $3 < u < 3,5$ . Простое интерполирование дает нам  $u \approx 3,20$ . Дальнейший расчет балки может быть выполнен без всяких затруднений.

Перейдем теперь к более общему случаю, когда концы балки упруго заделаны ( $0 < \kappa < 1$ ). Вставляя соответствующее выражение для прогиба (49) в уравнение (55) и деля обе части уравнения на  $q^2 k^2 l^2 / (EJ)^2$ , получаем после некоторых преобразований

$$(1 - \kappa)U_0 + \kappa U_1 - \kappa(1 - \kappa)U_2 = 2^6 \cdot 3^3 \frac{E^2 J^3}{q^2 F l^8}. \quad (58)$$

Здесь для сокращения введено такое новое обозначение:

$$U_2 = \frac{27}{16} \frac{(u - \text{th } u)^2}{u^9 \text{th}^2 u} (u \text{th}^2 u - u + \text{th } u).$$

Значения функции  $\lg 10^4 \sqrt{U_2}$  приведены в табл. 2. Расчет балок в этом случае несколько сложнее, чем в приведенных выше примерах, так как в таблицах не дано значение  $\lg$  левой части уравнения (58), которую в дальнейшем будем обозначать для краткости через  $F(\kappa, u)$ . При решении задач будем основываться на том соображении, что в случае упруго заделанных концов, очевидно,  $u$

<sup>1</sup> Левая часть этого выражения также может служить для вычисления поправок на влияние жесткости стальной ленты. Первый член в скобках соответствует провисанию по параболу. Наибольшую поправку дает третий член в скобках.

должно иметь промежуточное значение между теми величинами, которые мы получаем для опертых и для абсолютно заделанных концов.

Для рассмотренного выше численного примера можем заключить, что при упругой заделке концов имеет место неравенство:  $3,20 < u < 4,12$ . Предположим, что закрепление концов таково, что  $\kappa = 0,5$ , тогда при помощи таблицы находим

$$F(0,5; 3,5) = 0,000236; \quad \lg [10^4 \sqrt{F(0,5; 3,5)}] = 2,19;$$

$$F(0,5; 4,0) = 0,000121; \quad \lg [10^4 \sqrt{F(0,5; 4)}] = 2,04.$$

Имея значения  $\lg$  левой части уравнения (58) для  $u = 3,5$  и для  $u = 4$ , легко находим простым интерполированием, что в нашем случае, когда  $\lg$  левой части равен 2,12, величина  $u$  равна 3,73.

При составлении основного уравнения (55) мы исходили из предположения, что концы изгибаемой балки совершенно не могут сближаться. Без особых затруднений полученные результаты могут быть распространены на тот случай,

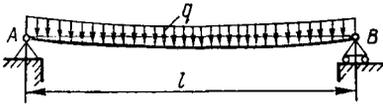


Рис. 15.

когда сближению концов препятствует какая-либо упругая связь, например распорка AB (рис. 15). При изгибе в балке появятся растягивающие усилия  $S$ . Усилия эти будут сжимающими для распорки. Если обозначим через  $F_1$  площадь сечения распорки и

через  $E_1$  соответствующий модуль упругости, то сжатие распорки будет равно  $Sl/E_1F_1$ .

Разность между длиной дуги искривленной оси балки и длиной сжатой распорки, очевидно, равна удлинению оси балки, сложенному с сжатием распорки, и мы для определения продольной силы получим уравнение такого вида:

$$\frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx = \frac{Sl}{EF} + \frac{Sl}{E_1F_1} = \frac{Sl}{EF} \left( 1 + \frac{EF}{E_1F_1} \right) = \frac{1}{K} \frac{Sl}{EF}, \quad (59)$$

где

$$K = \frac{E_1F_1}{EF + E_1F_1}. \quad (60)$$

Величину  $K$ , которая в зависимости от жесткости распорки может изменяться в пределах между нулем и единицей, мы будем называть *коэффициентом распора*. Задачи, рассмотренные выше, представляют собой тот частный случай, когда коэффициент распора обращается в единицу, т. е. жесткость распорки бесконечно велика. Ход решения уравнения (59) ничем не отличается от того, который применялся выше, и мы здесь отметим только, что с уменьшением жесткости распорки уменьшается, конечно, и величина продольной силы  $S$ . Когда  $K$  обратится в нуль, обратится в нуль также и  $S$ , мы будем иметь изгиб балки только поперечными силами.

## § 12. Применение тригонометрических рядов к исследованию изгиба балок<sup>1</sup>

Выражение для прогиба балки всегда можно представить в виде бесконечного тригонометрического ряда. Представление это, как мы увидим дальше, имеет особое преимущество при исследовании деформаций балок, подвергающихся

<sup>1</sup> См. статью С. П. Тимошенко, указанную в сноске на стр. 136.

одновременному действию продольных и поперечных сил, и балок, имеющих некоторое первоначальное искривление. В этих случаях пользование тригонометрическими рядами приводит нас к нескольким простым формулам, весьма удобным для практических приложений.

Возьмем балку с опертыми концами (рис. 16). В этом случае при  $x = 0$  и при  $x = l$  величины  $y$  и  $y''$  обращаются в нуль. Общее выражение для искривленной оси балки представится так:

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \\ + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (\text{a})$$

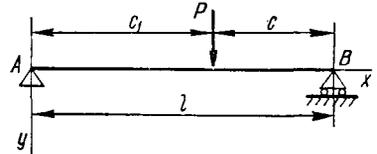


Рис. 16.

Оно, очевидно, удовлетворяет поставленным выше условиям на концах и при надлежащем выборе коэффициентов  $a_1, a_2, \dots$  может представить искривленную ось балки при любой нагрузке. Для определения коэффициентов мы воспользуемся началом возможных перемещений. Нужное нам при этом выражение для потенциальной энергии изгиба напишется так:

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l y''^2 dx = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^4 a_n^2. \quad (61)$$

Найдем величины коэффициентов для случая изгиба балки сосредоточенной силой (см. рис. 16). Коэффициенты эти, определяющие форму кривой изгиба, являются *координатами* нашей системы. Если мы одной из этих координат, например  $a_n$ , дадим приращение  $\delta a_n$ , то соответствующее приращение потенциальной энергии будет

$$\frac{\partial V}{\partial a_n} \delta a_n = \frac{EJ\pi^4}{2l^3} n^4 a_n \delta a_n.$$

Прогибы балки получают приращение

$$\delta a_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Работа внешних сил (силы  $P$  в нашем случае) на этом перемещении будет равна  $P \sin \frac{n\pi c_1}{l} \delta a_n$ . Множитель при  $\delta a_n$  представляет собой *обобщенную силу*, соответствующую координате  $a_n$ , и начало возможных перемещений дает нам такое уравнение:

$$\frac{EJ\pi^4}{2l^3} n^4 a_n \delta a_n = P \sin \frac{n\pi c_1}{l} \delta a_n,$$

откуда

$$a_n = \frac{2Pl^3 \sin \frac{n\pi c_1}{l}}{EJ\pi^4 n^4}.$$

Вставляя полученный результат в выражение (а) для изогнутой оси, получаем

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c_1}{l}}{n^4} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (62)$$

Располагая, например, силу  $P$  посередине пролета, находим для прогиба посередине такою выражение:

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \left( \frac{1}{4^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right).$$

Ряд — быстро сходящийся, и если бы мы ограничились только первым членом, то получили бы величину для прогиба с погрешностью около 1,5%.

Если мы будем беспредельно уменьшать расстояние  $c_1$  и при этом увеличивать  $P$  так, чтобы величина  $Pc_1$  оставалась конечной и равной  $M$ , то из выражения (62) получим уравнение изогнутой оси балки при действии пары сил  $M$  на левом конце:

$$y = \frac{2Ml^2}{EJ\pi^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (63)$$

Пользуясь принципом сложения действия сил, мы из (62) можем получить выражение для прогиба при любой системе поперечных нагрузок. Чтобы получить, например, уравнение изогнутой оси при равномерной нагрузке интенсивности  $q$ , нужно только в (62) поставить вместо  $P$  величину  $qdc_1$  и потом произвести интегрирование по  $c_1$  в пределах от нуля до  $l$ . Таким путем получаем

$$y = \frac{4ql^4}{EJ\pi^6} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} \frac{1}{n^6} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (64)$$

Без особых затруднений мы можем распространить наши выводы на тот случай, когда кроме поперечных нагрузок имеется еще продольная сжимающая или растягивающая сила  $S$ . Рассмотрим случай сжимающих сил, приложенных по концам. Сближение концов при изгибе, представленном выражением (а), будет

$$\delta l = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx = \frac{\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 a_n^2. \quad (65)$$

Если мы теперь, пользуясь началом возможных перемещений, дадим координате  $a_n$  приращение  $\delta a_n$ , то соответствующее перемещение для продольных сжимающих сил будет

$$\frac{\partial \delta l}{\partial a_n} \delta a_n = \frac{\pi^2}{2l} n^2 a_n \delta a_n$$

и уравнение равновесия напишется так:

$$-\frac{EJ\pi^4}{2l^3} n^4 a_n \delta a_n = P \sin \frac{n\pi c_1}{l} \delta a_n + S \frac{\pi^2}{2l} n^2 a_n \delta a_n,$$

откуда

$$a_n = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4 (n^4 - \alpha^2 n^2)} \sin \frac{n\pi c_1}{l}.$$

Здесь для сокращения письма введено обозначение  $Sl^2/EJ\pi^2 = \alpha^2$ , где  $\alpha^2$  — представляет собой отношение продольной сжимающей силы к величине эйлеровой нагрузки для балки с опертыми концами <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> При вычислении эйлеровой нагрузки здесь придется взять, очевидно, жесткость балки, соответствующую плоскости изгиба поперечными нагрузками, а не наименьшую жесткость.

Определив таким образом значение коэффициентов, получаем выражение для прогиба при действии силы  $P$  и продольных сжимающих сил  $S$  в таком виде:

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c_1}{l}}{n^4 - \alpha^2 n^2} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (66)$$

Отсюда, путем сложения действия сил, легко получить выражение для прогиба при любой поперечной нагрузке. Например, для равномерной нагрузки получаем

$$y = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n^3 (n^2 - \alpha^2)}. \quad (67)$$

Прогиб посередине для этого случая представляется так:

$$(y)_x = \frac{l}{2} = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \left[ \frac{1}{1 - \alpha^2} - \frac{1}{3^3 (3^2 - \alpha^2)} + \frac{1}{5^3 (5^2 - \alpha^2)} - \dots \right].$$

Все предыдущие рассуждения относятся к случаю продольной сжимающей силы. Если вместо сжатия у нас будет растяжение, то нужные нам выражения для прогибов мы получим из предыдущих, если в них везде поставим вместо  $\alpha^2$  величину  $-\alpha^2$ .

Во всех случаях величина наибольшего прогиба будет представляться суммой бесконечного быстро сходящегося ряда. Этим обстоятельством мы воспользуемся и составим приближенные формулы для оценки влияния продольной силы на величину прогиба и на величину максимального изгибающего момента. Если обозначить прогиб посередине, вызываемый только поперечной нагрузкой, через  $f_0$ , а через  $f$  — прогиб при одновременном действии поперечных сил<sup>1</sup> и продольной сжимающей силы, то на основании результатов (66) и (67) можно с достаточной для практики точностью положить

$$f = \frac{f_0}{1 - \alpha^2}. \quad (68)$$

Точность этой формулы зависит как от величины  $\alpha^2$ , так и от распределения поперечной нагрузки. Наименьшую точность мы будем иметь в случае действия сосредоточенной силы. Если сосредоточенная сила приложена посередине пролета, то приближенную формулу (68) нужно сравнивать с точной формулой (28). При малых значениях  $\alpha^2$  точность приближенной формулы очень велика, например при  $\alpha^2 = 0,2$  погрешность не превосходит 0,3%. С увеличением  $\alpha^2$  погрешность возрастает, и с приближением  $\alpha^2$  к единице (чему соответствует критическое значение силы) отношение прогибов, вычисленных по точной и приближенной формулам, стремится к предельному значению  $96/\pi^4$  и погрешность, следовательно, не превосходит 1,5%. При действии равномерной нагрузки погрешность в худшем случае не превосходит 0,5%. При изгибе балки сосредоточенной силой, приложенной не посередине, погрешность приближенной формулы возрастает с приближением нагрузки к одной из опор и в пределе, когда мы приходим к изгибу балки парой сил, погрешность в прогибе в худшем случае не превышает 3%. На основании этого заключаем, что формула (68) всегда может быть применена для вычисления прогиба посередине, который можно принимать равным наибольшему прогибу. Вычислив по формуле (68) наибольший прогиб, мы легко найдем также и величину наибольшего изгибающего

<sup>1</sup> Силы предполагаем направленными в одну сторону.

момента. Для равномерной нагрузки эта величина найдется так:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} + fS = \frac{ql^2}{8} + \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} \frac{S}{1-\alpha^2} = \frac{ql^2}{8} \left( 1 + \frac{1,028\alpha^2}{1-\alpha^2} \right).$$

Сравнение этого результата с точной формулой (37) показывает, что даже при больших значениях продольной силы приближенная формула дает весьма точные результаты.

В случае растягивающей продольной силы для вычисления наибольшего прогиба можем воспользоваться формулой

$$f = \frac{f_0}{1 + \alpha^2}. \quad (69)$$

Точность этой формулы также убывает вместе с возрастанием  $\alpha^2$ . Так, например, при равномерно распределенной нагрузке и  $\alpha^2 = 1$  погрешность составляет около 0,3%, при  $\alpha^2 = 2$  — 0,7%, при  $\alpha^2 = 10$  — около 1,7%. Если взять как предельное значение, с которым на практике приходится встречаться, величину  $\alpha^2 = 4,144/\pi^2$  (этому соответствует  $u = \alpha l/2 = 12$ ), то погрешность приближенной формулы (69) достигнет 2,6%. Во всяком случае мы получим точность, вполне достаточную для практических приложений. Имея величину прогиба, мы можем составить формулу для изгибающего момента посередине пролета

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} \left( 1 - \frac{1,028\alpha^2}{1 + \alpha^2} \right).$$

Заметим, что здесь искомый момент получается как разность между изгибающим моментом от равномерной нагрузки и моментом от продольной силы. С убыванием этой разности точность приближенной формулы падает. При  $\alpha^2 = 1$  погрешность меньше 1%. При  $\alpha^2 = 5$  погрешность достигает 6%. Для больших  $\alpha^2$  мы можем пользоваться приближенной формулой  $M_{\max} = \frac{8}{\pi^2\alpha^2} \frac{ql^2}{8}$ , которая

получается из точной формулы (51), если в ней положить  $x = 0$ ,  $\frac{1}{\operatorname{ch} u} = 0$ . Погрешность этой новой формулы при  $\alpha^2 = 5$  составляет 6%, при  $\alpha^2 = 10$  она уже меньше 1,5%, и дальше эта погрешность убывает с возрастанием  $\alpha^2$ .

Установив приближенные формулы для балки с опертыми концами, перейдем к случаю абсолютно заделанных концов. Имея выражение для изогнутой оси балки при действии моментов, приложенных по концам, мы путем сложения действия сил могли бы получить величину прогиба балки с заделанными концами в форме тригонометрического ряда, но для получения приближенной формулы для прогиба мы можем воспользоваться иным приемом. Зададимся подходящей формулой кривой, удовлетворяющей условиям на концах, другими словами, обратим нашу систему (упругий стержень), имеющую бесконечное число степеней свободы, в систему с конечным числом степеней свободы и потом найдем прогиб, применяя начало возможных перемещений. Опыт показывает, что при этом самые грубые предположения относительно формы кривой дают вполне удовлетворительные результаты при определении прогиба. Возьмем, например, для балки с заделанными концами такое уравнение изогнутой оси:

$$y = a \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right). \quad (b)$$

Оно, очевидно, удовлетворяет условиям закрепления, так как  $y$  и  $y'$  обращаются в нуль на концах балки. Соответствующее значение потенциальной

энергии будет

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l y'^2 dx = \frac{4EJ\pi^4}{l^3} a^2.$$

Найдем величину  $a$  для случая равномерной нагрузки. При этом начало возможных перемещений дает нам уравнение

$$\frac{8EJ\pi^4}{l^3} a = q \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right) dx = ql,$$

и мы будем иметь

$$y = \frac{ql^4}{8EJ\pi^4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right).$$

Прогиб посередине балки будет  $(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{ql^4}{4EJ\pi^4}$ . Погрешность этой приближенной формулы около 1,5%.

Если кроме поперечной нагрузки имеется еще продольная сжимающая сила  $S$ , то при составлении уравнения нужно принять в расчет работу и этой силы.

Сближение концов балки, соответствующее изгибу по кривой (b), будет

$$\delta l = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx = \frac{a^2 \pi^2}{l},$$

и уравнение равновесия напишется так:

$$\frac{8EJ\pi^4}{l^3} a = ql + \frac{2Sa\pi^2}{l},$$

откуда

$$a = \frac{ql^4}{8EJ\pi^4 (1 - \alpha^2/4)}.$$

Для получения соответствующей формулы при растягивающей силе нужно только изменить знак перед  $\alpha^2$ . Таким образом, для случая изгиба с сжатием или изгиба с растяжением получаем такую приближенную формулу:

$$f = \frac{f_0}{1 \mp \frac{\alpha^2}{4}}. \quad (70)$$

Из нее видно, что при заделанных концах влияние продольной силы значительно меньше, чем при свободно поворачивающихся концах. Что касается точности приближенной формулы (70), то при равномерной нагрузке она весьма велика для малых значений  $\alpha^2$  и убывает вместе с возрастанием  $\alpha^2$ . При  $\alpha^2 = 1$  погрешность составляет около 0,5%, при  $\alpha^2 = 14,6$  ( $u = 6$ ) погрешность уже 3,7% и, наконец, при  $\alpha^2 = 57,6$  ( $u = 12$ ) погрешность достигает 8%. При столь больших значениях  $\alpha^2$  более точные значения для прогиба мы найдем по формуле  $f = f_0 \frac{48}{\alpha^2 \pi^2} \left(1 - \frac{4}{\alpha \pi}\right)$ , которая получается из точной формулы (50) при  $\kappa = 1$  и при большом значении  $u$ .

### § 13. Приближенный способ определения продольной силы

Приближенные формулы, полученные нами в предыдущем параграфе, можно применить при определении продольной силы, которая появляется в том случае, когда свободному сближению концов балки при изгибе препятствуют

какие-либо распорки (см. рис. 15). Если концы балки оперты, то на основании предыдущих результатов мы можем положить  $y = \frac{f_0}{1 + \alpha^2} \sin \frac{\pi x}{l}$ .

В таком случае уравнение (59), служащее для определения продольной силы, переписывается так:

$$\alpha^2 (1 + \alpha^2)^2 = \frac{f_0^2}{4r^2} K, \quad (71)$$

где  $r^2$  — квадрат радиуса инерции поперечного сечения. Вычислив предварительно величину прогиба балки от одной поперечной нагрузки, мы без всякого затруднения подберем при помощи (71) соответствующее значение  $\alpha^2$  и таким образом определим продольную силу, появляющуюся при изгибе. Заметим, что уравнение (71) особенно просто решается при помощи логарифмической линейки. Обозначая величину  $1 + \alpha^2$  через  $x$ , приводим его к виду  $x^3 - x^2 = a$ . Для численного примера, рассмотренного в § 11, получим  $x^3 - x^2 = 423$ , откуда  $x = 7,85$ ;  $\alpha^2 = 6,85$ ;  $u = \frac{\alpha \pi}{2} = 4,11$ .

Если нагрузку увеличить вдвое, то правая часть уравнения (71) возрастет вчетверо, и мы получим  $\alpha^2 = 11,26$ ;  $u = 5,27$ . При уменьшении нагрузки вдвое найдем  $\alpha^2 = 4,10$ ;  $u = 3,18$ .

Числа эти получены при помощи линейки и в них могут быть погрешности в одну-две единицы последнего знака. Такого же порядка будут разности между результатами, получаемыми из приближенного уравнения (71) и из точного уравнения (59), и, если мы примем во внимание, что в эти уравнения входит величина  $E$ , известная лишь приблизительно, то можем заключить, что уравнение (71) дает величины продольной силы с точностью, вполне достаточной для практических приложений.

Определив таким образом продольную силу, мы можем выполнить дальнейший расчет балки или при помощи табл. 2, или же при помощи приближенных формул предыдущего параграфа. В тех случаях, когда мы имеем дело с весьма гибкими стержнями, для которых величина  $\alpha^2$  представляет собой большое число, можно сделать одно заключение относительно величины максимальных напряжений. Напряжения эти имеют место посередине пролета и состояются из двух частей: из напряжений от растягивающей силы  $S$  и из напряжений от изгиба.

Пользуясь для наибольшего момента приближенной формулой предыдущего параграфа, представляем величину максимальных напряжений так:

$$(X_x)_{\max} = \frac{S}{F} + \frac{1}{W} \frac{ql^2}{8} \frac{8}{\pi^2 \alpha^2}.$$

В случае балки прямоугольного поперечного сечения, ширина которого равна единице и высота равна  $h$ , мы можем переписать выражение для наибольших напряжений в таком виде:

$$(X_x)_{\max} = \alpha^2 E \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{h}{l}\right)^2 + \frac{6}{\pi^2 \alpha^2} q \left(\frac{l}{h}\right)^2.$$

Первый член, представляющий собой напряжение от продольной силы, возрастает вместе с  $\alpha^2$ . Напряжения изгиба, представленные вторым членом нашего выражения, убывают с возрастанием  $\alpha^2$ . Найдем значение  $\alpha^2$ , которому соответствует наибольшее значение напряжения. Составляя производную от  $(X_x)_{\max}$  по  $\alpha^2$  и приравнявая ее нулю, получаем

$$\alpha^2 = \frac{6\sqrt{2}}{\pi^2} \sqrt{\frac{q}{E}} \left(\frac{l}{h}\right)^3. \quad (a)$$

Вставляя это в выражение для наибольших напряжений, находим

$$(X_x)_{\max} = \sqrt{2qE}. \tag{b}$$

Предположим, что продольная сила, возникающая при изгибе, такова, что  $\alpha^2$  получает значение, определяемое формулой (а). Тогда уравнение (71) для балки прямоугольного поперечного сечения переписется в виде

$$\alpha^2(1 + \alpha^2)^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{5}{32}\right)^2 \alpha^8 \frac{\pi^4}{6^4} K,$$

и мы найдем такое приближенное решение:

$$\alpha^2 = \frac{7,45}{K} + 2. \tag{c}$$

На практике  $K$  обыкновенно не выходит за пределы 0,2—0,8. Следовательно, величина  $\alpha$ , определяемая на основании формулы (с), будет изменяться в пределах 9,8—5,3, т. е. будет близка к тем значениям, которые встречаются на практике (см. изгиб пластинки по цилиндрической поверхности).

Так как функции обыкновенно медленно изменяются у своего максимума, то мы можем считать, что даже значительные отклонения величины  $\alpha^2$  от значения (с) мало отклонят величину  $(X_x)_{\max}$  от ее максимального значения, определяемого формулой (b).

На основании этого мы можем заключить, что в случае гибких стержней изменение высоты сечения  $h$  будет мало влиять на величину наибольших напряжений. Каждое из слагаемых в общей формуле для  $(X_x)_{\max}$  будет изменяться, но общая их сумма остается при этом почти постоянной. Такое же заключение можно сделать относительно наибольших напряжений посередине пролета в случае балки с заделанными концами, так как приближенная формула для изгибающего момента при больших значениях  $\alpha^2$  остается прежней.

Применим теперь приближенный метод к решению еще одной задачи, имеющей практическое значение. Предположим, что балка с распоркой подвергается действию не только поперечной равномерно распределенной нагрузки, но также и продольной силы  $S$  (рис. 17).

При таком действии сил, очевидно, усилие  $S$ , растягивающее балку, не будет равняться сжимающей силе в распорке. Разность между этими усилиями будет равняться величине растягивающей внешней силы  $S_0$ . Уравнение (59), из которого может быть определена сила  $S$ , напишется так:

$$\frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx = \frac{Sl}{EF} + \frac{(S - S_0)l}{E_1 F_1} = \frac{1}{K} \frac{Sl}{EF} - \frac{S_0 l}{E_1 F_1}.$$

Если мы вместо  $y$  подставим его приближенное выражение

$$y = \frac{f_0}{1 + \alpha^2} \sin \frac{\pi x}{l},$$

то получим

$$\alpha^2(1 + \alpha^2)^2 = K \frac{f_0^2}{4r^2} + (1 + \alpha^2)^2 K \frac{S_0 l^2}{E_1 F_1 r^2 \pi^2}. \tag{72}$$

Полагая  $1 + \alpha^2 = x$ , мы приводим уравнение (72) к такому виду:

$$x^3 - ax^2 = b.$$

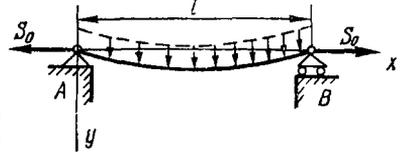


Рис. 17.

Уравнение это весьма просто решается при посредстве линейки, и мы легко можем составить целую таблицу значений  $x$ , соответствующих различным величинам силы  $S_0$ . Полагая в уравнении (72)  $\alpha^2$  равным нулю, получаем

$$S_0 = -\frac{\pi^2}{4} E_1 F_1 \left( \frac{f_0}{l} \right)^2.$$

Это то значение силы  $S_0$ , при котором продольное усилие в балке обращается в нуль.

Рассмотрим теперь балку с заделанными концами. Положив [см. формулу (70)]

$$y = \frac{f_0}{2 \left( 1 + \frac{\alpha^2}{4} \right)} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right),$$

представим для этого случая уравнение (59) в таком виде:

$$\alpha^2 \left( 1 + \frac{\alpha^2}{4} \right)^2 = \frac{f_0^2}{4r^2} K.$$

Уравнение это также легко решается при помощи линейки. Полагая  $1 + \frac{\alpha^2}{4} = x$ , получаем для нашего прежнего численного примера  $x^3 - x^2 = 4,23$ , откуда  $x = 2,03$ ;  $\alpha^2 = 4,12$ ;  $u = 3,19$ .

При нагрузке вдвое большей интенсивности получим  $x^3 - x^2 = 16,92$ , откуда  $x = 2,95$ ;  $u = 4,39$ .

Влияние дополнительных продольных сил может быть оценено таким же способом, как и в случае опертых концов.

#### § 14. Об изгибе слегка искривленных стержней

При исследовании изгиба кривых стержней<sup>1</sup> мы убедились, что элементарная теория, построенная на гипотезе плоских сечений, дает для напряжений весьма точные результаты. Поэтому в основание дальнейших выводов мы можем положить эту гипотезу и считать, что величина изгибающего момента пропорциональна изменению кривизны оси стержня в рассматриваемом сечении. Рассмотрим здесь случай, когда ось стержня весьма мало искривлена в одной из главных плоскостей стержня и все силы действуют в плоскости кривизны. Задача эта представляет практический интерес, так как ее решение позволит нам сделать некоторые выводы относительно влияния начального прогиба, всегда встречающегося при практическом выполнении прямых стержней, на обстоятельства изгиба стержня. При исследовании изгиба направим ось  $x$  по линии, соединяющей концы искривленной оси стержня, ось  $y$  расположим в плоскости кривизны. Обозначим через  $y_0$  ординаты начального искривления оси и через  $y_1$  — прогибы, обусловленные действием сил. При малых искривлениях мы можем как для начальной кривизны, так и для кривизны, получающейся после деформации, брать приближенные выражения. В таком случае изменение кривизны, вызванное действием сил, представляется так:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^2 y_0}{dx^2},$$

где  $y = y_0 + y_1$ . Следовательно, дифференциальное уравнение, определяющее изменение кривизны оси стержня, напишется так:

$$EJ \frac{d^2 y_1}{dx^2} = -M. \quad (a)$$

<sup>1</sup> См. §§ 38, 39 части первой.

Если концы стержня при изгибе свободно могут скользить по оси  $x$  и никаких продольных сил не приложено, то, очевидно, прогибы  $y_1$  слегка искривленного стержня ничем не будут отличаться от соответствующих прогибов стержня с идеально прямой осью. Иной результат мы получим, если перейдем к исследованию изгиба в случае действия не только поперечных нагрузок, но и продольных сил. Действие этих сил, как мы уже видели, зависит от искривления оси стержня, и потому начальная кривизна в задачах такого рода будет играть существенную роль. Исследование этих вопросов, конечно, можно выполнить путем интегрирования основного уравнения (а), но мы быстрее придем к цели, если воспользуемся представлением уравнения изогнутой оси стержня в форме тригонометрического ряда<sup>1</sup>. Начальное искривление оси стержня всегда можно представить в такой форме:

$$y_0 = b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + b_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (b)$$

Здесь, как и прежде, через  $l$  обозначено расстояние между опорными точками стержня. Начало координат совпадает с левым концом оси стержня. Концы стержня предположим свободно поворачивающимися. В таком случае прогиб, обусловленный действием сил, можно представить так:

$$y_1 = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (c)$$

Для определения коэффициентов  $a_1, a_2, \dots$  воспользуемся началом возможных перемещений. При этом нам понадобится выражение для потенциальной энергии изогнутого стержня и для работы внешних сил. Так как уравнение (а) для определения  $y_1$  такое же, как и в случае прямого стержня, то, очевидно, мы можем воспользоваться прежним выражением для потенциальной энергии (61)

$$\text{и положить } V = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^4 a_n^2.$$

В качестве поперечной нагрузки возьмем силу  $P$ , сосредоточенную на расстоянии  $c_1$  от левого конца. Если мы будем рассматривать перемещения, соответствующие приращению  $\delta a_n$  коэффициента  $a_n$  в выражении (с), то работа, совершаемая силой  $P$  на этом перемещении, очевидно, представится так:

$$P \delta a_n \sin \frac{n\pi c_1}{l}.$$

Предположим, что кроме поперечной нагрузки на наш стержень действуют продольные сжимающие силы  $S$ , приложенные по концам. При вычислении работы этих сил на возможных перемещениях нам нужно знать изменение расстояния между концами стержня при искривлении сил. Разность между длиной искривленной оси стержня после деформации и длиной хорды, соединяющей концы стержня, на основании формулы (65), представится так:

$$\delta l = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l (y'_0 + y'_1)^2 dx = \frac{\pi^2}{4l} \left( \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 b_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 b_n a_n + \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 a_n^2 \right).$$

Та же разность до деформации

$$\delta l_0 = \frac{1}{2} \int_0^l y_0'^2 dx = \frac{\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 b_n^2.$$

<sup>1</sup> Тимошенко С. П. Об изгибе стержней, имеющих незначительную первоначальную кривизну. Вестник общества технологов, 1913, том 20, № 13, стр. 411—414.

Следовательно, изгиб стержня сопровождается таким изменением расстояния между его концами:

$$\delta l - \delta l_0 = \frac{\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 a_n^2 + \frac{\pi^2}{2l} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 a_n b_n. \quad (73)$$

Если мы коэффициенту  $a_n$  дадим приращение  $\delta a_n$ , то этому будет соответствовать изменение расстояния между концами

$$\frac{\partial(\delta l - \delta l_0)}{\partial a_n} \delta a_n = \frac{\pi^2}{2l} n^2 (a_n + b_n) \delta a_n.$$

При этом сжимающие силы совершат работу

$$S \frac{\pi^2}{2l} n^2 (a_n + b_n) \delta a_n,$$

и соответствующее уравнение для определения коэффициента  $a_n$  напишется так:

$$P \sin \frac{n\pi c_1}{l} \delta a_n + S \frac{\pi^2}{2l} n^2 (a_n + b_n) \delta a_n = \frac{\partial V}{\partial a_n} \delta a_n = \frac{EJ\pi^4}{2l^3} n^4 a_n \delta a_n.$$

Если мы воспользуемся прежним нашим обозначением  $\alpha^2 = \frac{Sl^3}{EJ\pi^2}$ , то получим

$$\alpha_n = \frac{2Pl^3 \sin \frac{n\pi c_1}{l}}{EJ\pi^4 (n^4 - \alpha^2 n^2)} + \frac{\alpha^2 b_n}{n^2 - \alpha^2}.$$

Вставляя это в выражение для прогибов (с), находим

$$y_1 = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c_1}{l}}{n^4 - \alpha^2 n^2} \sin \frac{n\pi x}{l} + \alpha^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_n}{n^2 - \alpha^2} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (74)$$

Сравнивая это с результатом, полученным нами раньше для прямых стержней [см. формулу (66)], заключаем, что первая сумма полученного выражения (74) представляет собой прогиб прямого стержня. Второй суммой оценивается влияние кривизны. Дополнительный прогиб, обусловленный начальным искривлением, совершенно не зависит от поперечной нагрузки, и мы его можем вычислить без всяких затруднений, если только заданы коэффициенты  $b_1, b_2$ . Пользуясь сложением действий поперечных нагрузок, мы при помощи выражения (74) легко найдем прогибы при любой поперечной нагрузке. Возьмем, например, изгиб равномерно распределенной нагрузкой стержня, имеющего начальное искривление по параболе. Чтобы представить это искривление в виде тригонометрического ряда, поступим так. Возьмем случай изгиба прямого стержня двумя равными и прямо противоположными парами сил, приложенными по концам. На основании формулы (63) уравнение искривленной оси представится так:

$$y = \frac{4Ml^2}{EJ\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (d)$$

и прогиб посередине будет

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{4Ml^2}{EJ\pi^3} \left( 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots \right).$$

С другой стороны, для того же прогиба мы можем написать

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{Ml^2}{8EJ} = f. \quad (e)$$

Так как в этом случае можно искривленную ось стержня принять за параболу (приближенная формула для кривизны приводит нас в случае частого изгиба к искривлению по параболической кривой), то на основании сравнения (d) и (e) мы можем для начального параболического искривления со стрелкой  $f$  взять такое выражение:

$$y_0 = \frac{32}{\pi^3} f \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Следовательно, коэффициент  $b_n$  в выражении (b) будет иметь значение  $\frac{32f}{n^3\pi^3}$ , и формула (74) даст нам для равномерной нагрузки такое уравнение изогнутой оси:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n^3(n^2 - \alpha^2)} + \frac{32f\alpha^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n^3(n^2 - \alpha^2)} = \\ &= \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \left( 1 + \frac{8\alpha^2 EJ\pi^2 f}{ql^4} \right) \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n^3(n^2 - \alpha^2)} = \\ &= (1 + \beta) \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n^3(n^2 - \alpha^2)}, \end{aligned} \quad (75)$$

где

$$\frac{8\alpha^2 EJ\pi^2 f}{ql^4} = \frac{8fS}{ql^4} = \beta.$$

В рассмотренном случае влияние начальной кривизны может быть оценено очень просто, нужно только прогибы, вычисленные для прямого стержня, помножить на величину  $1 + \beta$ . При положительных значениях  $f$  начальная кривизна вызывает увеличение прогибов. Отрицательное значение  $f$  вызовет, конечно, противоположное действие. От прогибов мы можем перейти к углам поворота концов и к изгибающим моментам.

Изменяя знак силы  $S$ , мы без всяких затруднений переходим к исследованию изгиба при одновременном действии поперечной нагрузки и продольных растягивающих сил. Например, в случае равномерной нагрузки и при первоначальном искривлении по параболе выражение для прогибов балки с опертыми концами (см. § 10) напишется так:

$$y_1 = (1 - \beta) \frac{q}{Sk^2} \left[ \frac{\operatorname{ch} u \left( 1 - \frac{2x}{l} \right)}{\operatorname{ch} u} - 1 \right] + \frac{q}{2S} x(l - x)(1 - \beta).$$

При абсолютно заделанных концах опорные моменты  $M_0$  на основании формулы (47) представляется так:

$$M_0 = - \frac{ql^2}{12} \frac{u - \operatorname{th} u}{\frac{1}{3} u^2 \operatorname{th} u} (1 - \beta).$$

Выражение для прогибов балки при упруго заделанных концах напишется на основании (49) так:

$$y_1 = \frac{q}{Sk^2} \frac{\operatorname{th} u - x(\operatorname{th} u - u)}{\operatorname{th} u} (1 - \beta) \left[ \frac{\operatorname{ch} u \left( 1 - \frac{2x}{l} \right)}{\operatorname{ch} u} - 1 \right] + \frac{q}{2S} x(l - x)(1 - \beta). \quad (76)$$

Формулы эти отличаются от тех, что мы имели для прямых стержней, лишь множителем  $1 - \beta$ . Знак перед  $\beta$  мы переменили соответственно изменению

знака  $S$ . Еще более простые выражения для прогиба получим, если возьмем начальное искривление по синусоиде  $y_0 = b \sin \frac{\pi x}{l}$ .

Рассмотрим случай действия только продольной силы. В таком случае формула (74) дает нам

$$y_1 = \frac{\alpha^2 b \sin \frac{\pi x}{l}}{1 - \alpha^2}. \quad (77)$$

С увеличением продольной сжимающей силы возрастает  $\alpha^2$ , а вместе с тем возрастает и прогиб. Особенно быстро начинает увеличиваться прогиб с приближением  $\alpha^2$  к единице, что соответствует приближению продольной сжимающей силы к эйлеровой нагрузке. При  $\alpha^2 = 1$  наше выражение (77) обращается в бесконечность. При  $\alpha^2 > 1$  знаменатель выражения (77) становится отрицательным, и мы будем получать положительные прогибы при отрицательном значении  $b$ . Это показывает, что мы можем стержень с начальным искривлением перегнуть в противоположную сторону и держать его так в изогнутом состоянии при помощи продольных сжимающих сил, но величина этих сил должна быть больше эйлеровой нагрузки и тем больше, чем меньше искривление мы желаем поддерживать.

До сих пор мы предполагали продольные силы заданными. Иногда они нам не известны и являются следствием того, что концы стержня при изгибе не могут свободно скользить вдоль оси  $x$ . Предположим, например, что вследствие особых закреплений расстояние между концами не может изменяться. В таком случае

$$\delta l - \delta l_0 = \frac{1}{2} \int_0^l [y_1'^2 + 2y_0 y_1'] dx = \frac{Sl}{EF}.$$

Вставляя вместо  $y_1$  и  $y_0$  их значения, мы из этого уравнения могли бы найти величину продольной оси и потом полностью исследовать вопрос об изгибе, как это мы делали в предыдущих задачах, где продольные силы были заданы. Если концы стержня соединены упругой связью так, что изменение расстояния между ними пропорционально продольной силе, то величина продольной силы найдется из уравнения

$$\frac{1}{2} \int_0^l [y_1'^2 + 2y_0 y_1'] dx = \frac{1}{K} \frac{Sl}{EF}, \quad (78)$$

где  $K$  — коэффициент распора.

Если бы мы, например, вместо  $y_0$  взяли начальный прогиб, соответствующий искривлению по параболе, и вместо  $y_1$  — выражение (76), то получили бы уравнение для определения продольной силы при упруго заделанных концах. В это уравнение войдет величина  $\beta$ , зависящая от  $S$ , и потому определение  $S$  в этом случае будет сложнее, чем было при прямом стержне [см. уравнение (58)]. Решение уравнения удастся разыскать лишь путем последовательных попыток. Мы для упрощения этой задачи воспользуемся тем же приближенным методом, который был применен раньше для прямых стержней (см. § 13). Допустим, что под действием поперечной нагрузки и продольных растягивающих сил стержень с опертыми концами изгибается по синусоиде <sup>1</sup>;  $\frac{f_0}{1 + \alpha^2} \sin \frac{\pi x}{l}$ . Начальное ис-

<sup>1</sup> Это совершенно точно при действии сплошной нагрузки, изменяющейся по закону синусоиды. Для равномерной нагрузки мы таким путем получаем приближенное решение; но точность его, как можно судить на основании вычислений, сделанных для прямых стержней, вполне достаточна для практических приложений.

кривление также примем по синусоиде:  $y_0 = b \sin \frac{\pi x}{l}$ . В таком случае

$$y_1 = \frac{f_0}{1 + \alpha^2} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{b\alpha^2 \sin \frac{\pi x}{l}}{1 + \alpha^2}.$$

Вставляя это в уравнение (78), приходим к такому уравнению для определения  $\alpha^2$ :

$$\frac{(f_0 - b\alpha^2)^2}{(1 + \alpha^2)^2} + \frac{2b(f_0 - b\alpha^2)}{1 + \alpha^2} = \frac{4\alpha^2 r^2}{K}, \quad (79)$$

где  $r^2$ , как и раньше, обозначает квадрат радиуса инерции поперечного сечения. Из этого уравнения величина  $\alpha^2$  может быть определена без всяких затруднений. Несколько численных примеров этого рода мы приводим ниже в связи с исследованием изгиба пластинок по цилиндрической поверхности.

### § 15. Применение тригонометрических рядов к исследованию изгиба стержней, лежащих на сплошном упругом основании

Если стержень с опертыми концами лежит на сплошном упругом основании, то при исследовании его изгиба выгодно воспользоваться выражением для прогиба в форме тригонометрического ряда

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (a)$$

Коэффициенты  $a_1, a_2, \dots$  в этом выражении вычисляются для каждого частного случая при помощи начала возможных перемещений. Нужное для этого выражение потенциальной энергии составится из двух частей: энергии изгиба стержня  $V_1$  и энергии деформации упругого основания  $V_2$ . Для первой части можем воспользоваться известным выражением (61). Что касается энергии деформации основания, то она представится таким образом<sup>1</sup>:

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_0^l ky^2 dx = \frac{kl}{4} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n^2. \quad (80)$$

Следовательно,

$$V = V_1 + V_2 = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^4 a_n^2 + \frac{kl}{4} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n^2.$$

Рассмотрим изгиб балки сосредоточенной силой  $P$ , приложенной на расстоянии  $c_1$  от левого конца. Для определения любого коэффициента  $a_n$  в выражении (a) начало возможных перемещений дает в этом случае такое уравнение:

$$\frac{\partial V}{\partial a_n} \delta a_n = P \delta a_n \sin \frac{n\pi c_1}{l},$$

откуда находим

$$a_n = \frac{2Pl^3 \sin \frac{n\pi c_1}{l}}{EJ\pi^4 \left( n^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} \right)}.$$

<sup>1</sup> Величина  $k$  характеризует жесткость основания (см. § 2).

Общее выражение (а) для изогнутой оси стержня переписывается так:

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \left( \frac{\sin \frac{\pi c_1}{l}}{1^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4}} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{\sin \frac{2\pi c_1}{l}}{2^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4}} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right). \quad (81)$$

Имея этот результат, мы путем сложения действия сил легко можем перейти к любому случаю нагрузки. Например, для равномерно распределенной нагрузки интенсивности  $q$  нужно в выражение (81) поставить вместо  $P$  величину  $qdc_1$  и потом произвести интегрирование по  $c_1$  в пределах от нуля до  $l$ . При этом получается такой результат:

$$y = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n^5 + \frac{nk l^4}{EJ\pi^4}}. \quad (82)$$

В тех случаях, когда мы имеем дело с податливым основанием, величина  $kl^4/EJ\pi^4$  будет мала, и мы с достаточной для практики точностью можем ограничиться лишь первым членом выражения (82). Наибольший прогиб будет иметь место посередине пролета и величина его будет

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \frac{1}{1 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4}}. \quad (83)$$

Этой формулой выгодно воспользоваться для приближенного расчета перекрестной балки (§ 6). Величина промежуточной опорной реакции для среднего стержня главного направления определится из выражения [см. формулу (b) § 6]

$$R = \frac{\gamma Q}{\beta} - \frac{y}{\beta}.$$

Если в него поставить вместо  $y$  величину, определяемую из (83), и принять во внимание, что в рассмотренном случае (см. § 6)  $k = \frac{1}{\beta a}$ ;  $q = \frac{\gamma Q}{\beta a}$ , то получим

$$R = \frac{\gamma Q}{\beta} \left( 1 - \frac{4}{\pi} \frac{u^4}{\frac{64}{\pi^4} + u^4} \right), \quad (b)$$

где для сокращения пользуемся прежним обозначением

$$u = \frac{l}{2} \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}.$$

При малых значениях  $u$  приближенная формула (b) дает для  $R$  достаточно точные значения. С возрастанием  $u$  точность убывает и при  $u = 1$  относительная погрешность уже несколько больше 1%.

Подобным же образом решается задача в случае двух перекрестных балок<sup>1</sup>. Распространение того же приема на случай какого угодно числа равноудаленных поперечных балок приводим в следующем параграфе.

Если кроме равномерной нагрузки имеется еще продольная сжимающая или растягивающая сила, то выражение для изогнутой оси легко представляется в таком виде:

$$y = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n^5 \pm n^3 \alpha^2 + \frac{nk l^4}{EJ\pi^4}}, \quad (82')$$

где  $\alpha^2$  представляет собой, как и прежде, отношение продольной силы к эйлеровой нагрузке.

<sup>1</sup> См. стр. 324 работы С. П. Тимошенко, упомянутой на стр. 193.

## § 16. Случай нескольких перекрестных балок

Предположим, что система балок главного направления, параллельных оси  $y$  (рис. 18), поддерживается несколькими перекрестными балками. Исследуем изгиб этих балок под действием сплошной нагрузки, распределенной по площади  $ABCD$ . Искривленная поверхность, по которой изогнется наша система балок, может быть представлена так:

$$w = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{l_1}. \quad (a)$$

Чтобы из этого выражения получить уравнение изогнутой оси  $i$ -й балки главного направления, нужно только вместо  $x$  поставить соответствующее значение  $x_i$ . Точно так же для получения уравнения изогнутой оси  $j$ -й перекрестной балки нужно вместо  $y$  поставить соответствующее значение  $y_j$ .

Если  $p$  обозначает число балок главного направления,  $r$  — число перекрестных балок,  $EJ_1^i$  — жесткость  $i$ -й балки главного направления и  $EJ_j$  — жесткость  $j$ -й перекрестной балки, то потенциальная энергия изгиба нашей системы балок представится таким выражением:

$$\begin{aligned} V = & \sum_{i=1}^{i=p} \frac{EJ_1^i \pi^4}{4l_1^3} \left[ \left( \sum_{m=1}^{m=\infty} a_{m1} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \right)^2 + 2^4 \left( \sum_{m=1}^{m=\infty} a_{m2} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 3^4 \left( \sum_{m=1}^{m=\infty} a_{m3} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \right)^2 + \dots \right] + \sum_{j=1}^{j=r} \frac{EJ_j \pi^4}{4l_1^3} \left[ \left( \sum_{n=1}^{n=\infty} a_{1n} \sin \frac{n\pi y_j^2}{l_1} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2^4 \left( \sum_{n=1}^{n=\infty} a_{2n} \sin \frac{n\pi y_j}{l_1} \right)^2 + 3^4 \left( \sum_{n=1}^{n=\infty} a_{3n} \sin \frac{n\pi y_j}{l_1} \right)^2 + \dots \right]. \quad (84) \end{aligned}$$

Работа сплошной нагрузки при изгибе балок будет равна  $\frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{l_1} q w dx dy$ .

Коэффициенты  $a_{mn}$  определяются из условия <sup>1</sup>

$$\delta(V - \int \int q w dx dy) = 0. \quad (b)$$

Рассмотрим подробнее случай, когда балки главного направления равно удалены и имеют одинаковое поперечное сечение. Те же предположения сделаем относительно перекрестных балок и допустим, что система балок изгибается равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q$ . Из условий симметрии можем заключить, что в общем выражении (a) для прогиба войдут лишь члены с нечетными значками  $m$  и  $n$ , и уравнения для определения коэффициентов  $a_{mn}$ , получаемые из общего выражения (b), будут иметь такой вид:

$$\begin{aligned} & \frac{EJ_1 \pi^4}{2l_1^3} n_1^4 \sum_{i=1}^{i=p} \sin \frac{m_1 \pi x_i}{l} \sum_{m=1,3,5,\dots} a_{m n_1} \sin \frac{m \pi x_i}{l} + \\ & + \frac{EJ \pi^4}{2l_1^3} m_1^4 \sum_{j=1}^{j=r} \sin \frac{n_1 \pi y_j}{l_1} \sum_{n=1,3,5,\dots} a_{m_1 n} \sin \frac{n \pi y_j}{l_1} = \frac{4q l l_1}{m_1 n_1 \pi^2}. \quad (85) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Мы предполагаем концы балок свободно поворачивающимися, поэтому работа сплошной нагрузки представляет собой всю работу внешних сил и уравнение (b) является следствием начала возможных перемещений.

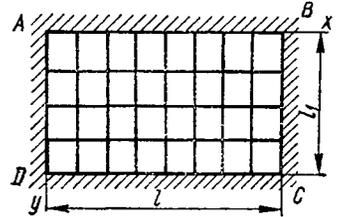


Рис. 18.

Уравнения эти сильно упрощаются, если принять во внимание такие равенства<sup>1</sup>: если  $m \neq n$  и числа  $m + n$  и  $m - n$  не делятся на  $2(p + 1)$ ,

$$\sum_{i=1}^{i=p} \sin \frac{m\pi i}{p+1} \sin \frac{n\pi i}{p+1} = 0;$$

если  $m + n$  делится на  $2(p + 1)$ ,

$$\sum_{i=1}^{i=p} \sin \frac{m\pi i}{p+1} \sin \frac{n\pi i}{p+1} = -\frac{p+1}{2};$$

если  $m - n$  делится на  $2(p + 1)$ ,

$$\sum_{i=1}^{i=p} \sin \frac{m\pi i}{p+1} \sin \frac{n\pi i}{p+1} = +\frac{p+1}{2};$$

если  $m$  не делится на  $p + 1$ ,

$$\sum_{i=1}^{i=p} \sin^2 \frac{m\pi i}{p+1} = \frac{p+1}{2};$$

если  $m$  делится на  $p + 1$ ,

$$\sum_{i=1}^{i=p} \sin^2 \frac{m\pi i}{p+1} = 0.$$

Практически приходится ограничиваться лишь несколькими первыми членами в общем выражении (а) для прогиба, и потому при достаточно большом числе балок [ $2(r + 1) > m + n$ ,  $2(p + 1) > m + n$ ] каждое из уравнений (85) будет заключать лишь один неизвестный коэффициент. Коэффициенты легко вычисляются по такой формуле

$$a_{m_1 n_1} = \frac{4qll_1}{[m_1 n_1 \pi^2]} \frac{4l^3}{EJ\pi^4} \frac{1}{m_1^4 (r + 1) + n_1^4 (p + 1)} \frac{J_1 l^3}{J_1^3}. \quad (86)$$

Имея выражение для коэффициентов, легко найти прогиб любой перекрестной балки. Предположим, например, что у нас число перекрестных балок нечетное и найдем уравнение изогнутой оси для средней балки, которой соответствует  $y \frac{r+1}{2} = l_1/2$ . Вставляя это значение  $y$  в выражение (а), получаем

$$w = \sin \frac{\pi x}{l} \sum_{n=1,3,5,\dots} a_{1n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} + \sin \frac{3\pi x}{l} \sum_{n=1,3,5,\dots} a_{3n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} + \dots$$

<sup>1</sup> Все эти равенства получаются на основании формулы

$$\cos \alpha + \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha + 2\beta) + \dots + \cos (\alpha + n\beta) = \frac{\cos \left( \alpha + \frac{n\beta}{2} \right) \sin \frac{(n+1)\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

Из нее следует

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{i=p} \sin \frac{m\pi i}{p+1} \sin \frac{n\pi i}{p+1} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=p} \left( \cos \frac{(m+n)\pi i}{p+1} - \cos \frac{(m-n)\pi i}{p+1} \right) = \\ & = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin \left[ (m+n)\pi - \frac{(m+n)\pi}{2(p+1)} \right]}{\sin \frac{(m+n)\pi}{2(p+1)}} - \frac{\sin \left[ (m-n)\pi - \frac{(m-n)\pi}{2(p+1)} \right]}{\sin \frac{(m-n)\pi}{2(p+1)}} \right\}. \end{aligned}$$

Или, пользуясь выражением (86) для коэффициентов  $a_{mn}$ , получаем

$$w = \frac{4ql_1 4l^3}{EJ\pi^6(r+1)} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{\sin \frac{m\pi x}{l}}{m \left( m^4 + \frac{J_1 l^3}{J l_1^3} \frac{p+1}{r+1} \right)} - \frac{4ql_1 4l^3}{3EJ\pi^6(r+1)} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{\sin \frac{m\pi x}{l}}{m \left( m^4 + 3^4 \frac{J_1 l^3}{J l_1^3} \frac{p+1}{r+1} \right)} + \dots$$

Наибольшую роль играет первый член этого выражения и обыкновенно в качестве первого приближения им можно ограничиться. Тогда на основании (80) можно сказать, что прогиб рассматриваемой перекрестной балки такой же, как и балки с опертыми концами, лежащей на сплошном упругом основании и изгибаемой равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q_1 = \frac{4ql_1}{\pi(r+1)}$ ; жесткость основания характеризуется величинами

$$k = \frac{EJ_1}{l l_1^3} \frac{\pi^4(p+1)}{r+1}, \quad u = \frac{l}{2} \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = \sqrt[4]{\frac{\pi^4}{64} \frac{p+1}{r+1} \frac{J_1 l^3}{J l_1^3}}.$$

Для вычисления прогибов в таком случае проще всего воспользоваться формулой (15). Тогда для прогиба посередине получим выражение

$$(w)_{x=\frac{l}{2}; y=\frac{l_1}{2}} = \frac{q_1 l^4}{64EJ} \frac{1}{u^4} [1 - \Phi_0(u)] = \frac{4}{\pi^5} \frac{Q l_1^3}{EJ_1} [1 - \Phi_0(u)]. \quad (87)$$

Здесь через  $Q$  обозначена величина  $q_1 l / (p+1)$ , представляющая собой нагрузку, приходящуюся на одну балку главного направления. Множитель, стоящий перед скобками в полученном выражении для прогиба перекрестной балки, с достаточной точностью может быть принят равным прогибу балки главного направления при отсутствии перекрестных балок. Множителем  $[1 - \Phi_0(u)]$  оценивается влияние перекрестных балок. На основании табл. 1 заключаем, что при  $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3}{2}$  л перекрестные балки будут вредны. Они не только не поддерживают средней балки главного направления, но, наоборот, увеличивают ее прогиб. Когда прогибы перекрестных балок определены описанным здесь способом, легко может быть рассчитана средняя балка главного направления. Для этого проще всего воспользоваться формулами для неразрезной балки с опорами, расположенными на различных высотах.

Мы до сих пор предполагали, что все перекрестные балки имеют одинаковую жесткость, такое же допущение мы делали и относительно балок главного направления, но тот же прием может быть с выгодой применен и в тех случаях, когда одной или нескольким балкам придано иное сечение. Ход решения задачи поясним на таком примере. Предположим, что плоское покрытие, несущее равномерную нагрузку, поддерживается одинадцатью равноудаленными балками главного направления и пятью перекрестными балками. Концы всех балок предполагаются свободно поворачивающимися. Поперечные сечения всех балок главного направления одинаковы. Что касается перекрестных балок, то средняя из них имеет вдвое большую жесткость, чем другие. Для потенциальной энергии изгиба нашей системы балок мы напишем такое же выражение, как и в случае перекрестных балок постоянной жесткости  $EJ$  и потом к нему присоединим выражение  $\frac{EJ\pi^4}{4l^3} [(a_{11} - a_{13} + a_{15} - \dots)^2 + 3^4 (a_{31} - a_{33} + a_{35} - \dots)^2 + \dots]$ , представляющее собой ту прибавку к потенциальной энергии, которая соответствует удвоению жесткости средней перекрестной балки.

Уравнения для определения коэффициентов  $a_{m_1 n_1}$  получают при этом такой вид:

$$\begin{aligned} & \frac{EJ_1 \pi^4}{2l_1^3} n_1^4 \sum_{i=1}^{i=11} \sin \frac{m_1 \pi x_i}{l} \sum_{m=1,3,5,\dots} a_{m n_1} \sin \frac{m \pi x_i}{l} + \\ & + \frac{EJ_2 \pi^4}{2l_2^3} m_1^4 \sum_{j=1}^{j=5} \sin \frac{n_1 \pi y_j}{l} \sum_{n=1,3,5,\dots} a_{m_1 n} \sin \frac{n \pi y_j}{l} + \\ & + \frac{EJ_3 \pi^4}{2l_3^3} m_1^4 (a_{m_1 1} - a_{m_1 3} + a_{m_1 5} - \dots) (-1)^{\frac{n_1-1}{2}} = \frac{4ql_1}{m_1 n_1 \pi^2} = \frac{48Q}{m_1 n_1 \pi^2}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание значение сумм

$$\sum_{i=1}^{i=p} \sin \frac{m \pi i}{p+1} \sin \frac{n \pi i}{p+1}$$

при различных  $m$  и  $n$  и ограничиваясь лишь первыми членами в общем выражении (а) [ $m+n < 12$ ], мы находим, что система уравнений для определения коэффициентов  $a_{m_1 n_1}$  распадается на группы, причем в каждую группу входят лишь коэффициенты с одинаковыми знаками  $m_1$ . Решение этих уравнений крайне просто, так как значения величин  $a_{m_1 n_1}$  быстро убывают с увеличением  $n$ . Если в нашем примере мы возьмем девять членов в общем выражении (а) и введем для сокращения обозначения

$$\alpha = \frac{J_1 l^3}{J_1^3}; \quad A = \frac{Q l^3}{EJ \pi^6},$$

то первая группа уравнений ( $m_1 = 1$ ) напишется так:

$$\begin{aligned} 6\alpha a_{11} + 3a_{11} + (a_{11} - a_{13} + a_{15}) &= 96A; \\ 3^4 \cdot 6\alpha a_{13} + 3a_{13} - (a_{11} - a_{13} + a_{15}) &= 32A; \\ 5^4 \cdot 6\alpha a_{15} + 3a_{15} + (a_{11} - a_{13} + a_{15}) &= \frac{96}{5}A. \end{aligned}$$

Произведем вычисления для того случая, когда  $\alpha = 0,438$ . Решение уравнений дает нам  $a_{11} = 14,49A$ ;  $a_{13} = 0,214A$ ;  $a_{15} = 0,003A$ .

Подобным же образом из второй и третьей групп уравнений ( $m_1 = 3$ ) и ( $m_1 = 5$ ) найдем  $a_{31} = 0,107A$ ;  $a_{33} = 0,036A$ ;  $a_{35} = 0,0004A$ ;  $a_{51} = 0,0086A$ ;  $a_{53} = 0,0044A$ ;  $a_{55} = 0,0003A$ .

Имея значения коэффициентов  $a_{mn}$ , легко написать выражение для изогнутой оси каждой перекрестной балки. Так, например, для средней перекрестной балки ( $y = l/2$ ) получим

$$w_{j=3} = \sin \frac{\pi x}{l} (a_{11} - a_{13} + a_{15}) + \sin \frac{3\pi x}{l} (a_{31} - a_{33} + a_{35}) + \sin \frac{5\pi x}{l} (a_{51} - a_{53} + a_{55}).$$

Вставляя сюда значения коэффициентов и полагая  $x = l/2$ , получаем

$$w_{x=\frac{l}{2}, y=\frac{l}{2}} = 14,21 \frac{Ql^3}{EJ \pi^6}.$$

Подобным же образом для следующих двух перекрестных балок, полагая  $y = l/3$ ,  $y = l/6$ , получаем

$$w_{x=\frac{l}{2}, y=\frac{l}{3}} = 12,46 \frac{Ql^3}{EJ \pi^6}; \quad w_{x=\frac{l}{2}, y=\frac{l}{6}} = 7,38 \frac{Ql^3}{EJ \pi^6}.$$

Величину изгибающего момента для каждой перекрестной балки найдем из формулы<sup>1</sup>  $|M| = EJ \frac{d^2 w}{dx^2}$ . Вставляя вместо  $w$  соответствующие выражения для прогибов, находим для средних перекрестных балок такие значения моментов:

<sup>1</sup> Для средней балки вместо  $EJ$  нужно, конечно, взять  $2EJ$ .

$$M_{x=\frac{l}{2}, y=\frac{l_1}{2}} = 0,282Ql; \quad M_{x=\frac{l}{2}, y=\frac{l_1}{3}} = 0,122Ql; \quad M_{x=\frac{l}{2}, y=\frac{l_1}{6}} = 0,071Ql.$$

Теперь остается рассчитать балки главного направления. Крайние из этих балок можно рассматривать как неразрезные балки на семи абсолютно жестких опорах. Опорные моменты для них будут иметь такие значения:

$$(M)_{y=\frac{l_1}{6}} = -0,00294Ql_1; \quad (M)_{y=\frac{l_1}{3}} = -0,00214Ql_1; \quad (M)_{y=\frac{l_1}{2}} = -0,00241Ql_1.$$

Что касается средней балки главного направления, то для нее придется к вычисленным выше опорным моментам присоединить моменты, обусловленные осадкой опор. Обозначив их соответственно через  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$ , получим, на основании найденных выше прогибов, такую систему уравнений<sup>1</sup>:

$$4M_1 + M_2 = \frac{6 \cdot 36EJ_1}{l_1^2} \frac{Ql^3}{EJ\pi^6} (7,38 - 5,08);$$

$$M_1 + 4M_2 + M_3 = \frac{6 \cdot 36EJ_1}{l_1^2} \frac{Ql^3}{EJ\pi^6} (5,08 - 1,75);$$

$$2M_2 + 4M_3 = \frac{6 \cdot 36EJ_1}{l_1^2} \frac{Ql^3}{EJ\pi^6} (1,75 + 1,75),$$

откуда находим  $M_1 = 0,0425Ql_1$ ;  $M_2 = 0,0572Ql_1$ ;  $M_3 = 0,0572Ql_1$ . Присоединяя сюда найденные выше опорные моменты от нагрузки, получаем окончательно для изгибающих моментов в узлах средней балки главного направления значения  $M'_1 = 0,0396Ql_1$ ,  $M'_2 = 0,0551Ql_1$ ,  $M'_3 = 0,0548Ql_1$ .

Заметим, что при взятом нами числе знаков в выражениях для прогибов перекрестных балок третий знак в числах, полученных для моментов, является сомнительным. Конечно, можно было бы получить и более точное выражение для моментов, но такой расчет не имел бы практического значения, так как все решение задачи является по существу лишь приближенным. Мы, например, совершенно не принимали во внимание закона распределения давлений, получаемых балками главного направления от пластины плоского перекрытия, и приняли эти давления равномерно распределенными по плоскости покрытия. На самом деле этого нет, и получаемые вследствие этого погрешности будут в рассмотренном численном примере, вероятно, не меньше тех погрешностей, которые являются следствием неточного определения прогибов перекрестных балок. Выясненный на численном примере способ расчета перекрестных балок легко может быть распространен на тот случай, когда нагрузка не равномерная, а, например, изменяется вдоль оси  $y$  по линейному закону. Если по концам перекрестных балок приложены моменты, то можно пользоваться тем же приемом расчета, нужно только к работе нагрузки присоединить работу опорных пар.

<sup>1</sup> См. уравнения (43<sup>a</sup>) при  $u = 0$ .

§ 17. Малые деформации стержня с круговой осью  
в плоскости кривизны

При исследовании изгиба стержней малой кривизны (§ 14) было указано, что с достаточной для практики точностью можно считать изменение кривизны оси бруска в каком-либо поперечном сечении пропорциональным величине соответствующего изгибающего момента.

Если за положительное направление момента примем то, которое увеличивает начальную кривизну, и обозначим начальный радиус оси бруска через  $r$  и радиус кривизны изогнутой оси бруска после деформации через  $\rho$ , то основное уравнение для изогнутой оси бруска при действии сил в плоскости кривизны, с которой совпадает одна из главных осей инерции поперечного сечения бруска, напишется так <sup>1</sup>:

$$EJ \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right) = M. \tag{88}$$

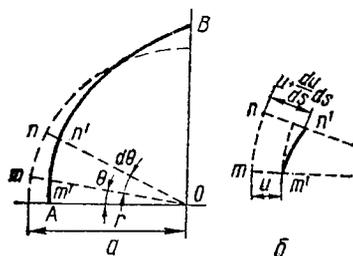


Рис. 19.

Совершенно так же, как и для прямых стержней, мы при условии малых перемещений можем заменить уравнение (88) более простым уравнением, если выразим изменение кривизны оси бруска через перемещение  $u$ , которое совершают точки оси в радиальном направлении при деформации бруска. Пусть  $AB$  — искривленная ось бруска и пунктиром указана первоначальная круговая ось (рис. 19, а). Радиальные перемещения  $u$  считаем положительными, если они происходят в направлении к центру  $O$ . Двумя радиусами с углом  $d\theta$  выделим элемент  $mn$ , кривизна которого до деформации будет  $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}$ .

В случае весьма малых перемещений мы при определении изменения кривизны можем сравнивать кривизну элемента  $mn$  с кривизной элемента  $m'n'$ , выделенного из деформированной оси бруска теми же радиусами  $Om$  и  $On$ .

Для элемента  $m'n'$  кривизна может быть представлена так:

$$\frac{d\theta + \delta d\theta}{ds + \delta ds} = \frac{1}{\rho}.$$

<sup>1</sup> Мы предполагаем, что размер поперечного сечения бруска в радиальном направлении мал по сравнению с радиусом кривизны. В таком случае выражение для жесткости при изгибе будет такое же, как для прямых стержней.

Из геометрических соображений (рис. 19, б) можем написать

$$\delta d\theta = \frac{d^2u}{ds^2} ds; \quad \delta ds = -ds \frac{u}{r}. \quad (a)$$

В таком случае, пренебрегая малыми высшего порядка, получаем

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta + \frac{d^2u}{ds^2} ds}{ds \left(1 - \frac{u}{r}\right)} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\theta}{ds} \frac{u}{r} + \frac{d^2u}{ds^2}. \quad (89)$$

Вставляя это выражение в уравнение (88), получаем<sup>1</sup>

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{Mr^2}{EJ}. \quad (88')$$

Совершенно такой же результат мы получили бы, если бы взяли уравнение искривленной оси  $AB$  в полярных координатах  $R = r - u$  и выражение для радиуса вектора  $R$  вставили в известную формулу для кривизны

$$\frac{1}{\rho} = \frac{R^2 + 2 \left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 - R \frac{d^2R}{d\theta^2}}{\left[R^2 + \left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Путем отбрасывания малых высшего порядка приходим и в этом случае к уравнению (88').

Уравнение (88') играет такую же роль, как уравнение (2) в случае прямых стержней. Общий интеграл этого уравнения легко находится и может быть написан в таком виде:

$$u = \left(C_1 - \int \frac{Mr^2}{EJ} \sin \theta d\theta\right) \cos \theta + \left(C_2 + \int \frac{Mr^2}{EJ} \cos \theta d\theta\right) \sin \theta. \quad (90)$$

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  должны быть найдены из условий закрепления концов бруска. В случае статически неопределенных задач решение (90) дает возможность найти лишние неизвестные величины, являющиеся результатом лишних закреплений.

В качестве примера возьмем случай круговой арки с шарнирными закреплениями<sup>2</sup> (рис. 20). На арку действует сосредоточенная сила  $P$ , приложенная в среднем сечении  $C$ . Произведем в этом сечении разрез и заменяя действие правой половины арки на левую силами  $\frac{P}{2}$  и  $S_0$  и моментом  $M_0$ , найдем для какого-либо сечения  $m$  изгибающий момент

$$M_\theta = -M_0 - S_0 r (1 - \cos \theta) + \frac{P}{2} r \sin \theta.$$

Вставляя это выражение в общий интеграл (90), получаем

$$\frac{EJ}{r^2} u = -M_0 - S_0 r \left(1 - \frac{\theta}{2} \sin \theta\right) + \frac{Pr}{4} (\sin \theta - \theta \cos \theta) - C_1' \cos \theta - C_2' \sin \theta.$$

<sup>1</sup> Уравнение это впервые было получено Ж. Буссинэ. B o u s s i n e s q J. Résistance d'un anneau à la flexion, quand sa surface extérieure supporte une pression normale, constante par unite de longueur de sa fibre. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 1883, t. 97, N 15, pp. 842—848.

<sup>2</sup> Целый ряд примеров, относящихся к изгибу круговых арок и круговых колец, подробно разобран в статье Р. Майера: M a y e r R. Über Elastizität und Stabilität des geschlossenen und offenen Kreisbogens. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1913, Bd 1, H. 3, SS. 246—320. Там же приведена литература по данному вопросу.

Сюда вошли две лишние неизвестные  $M_0$  и  $S_0$ . Для определения этих величин и произвольных постоянных  $C'_1$  и  $C'_2$  имеем следующие условия на концах:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)_{\theta=0} = 0; \quad (u)_{\theta=\alpha} = 0; \quad M_\alpha = \frac{EJ}{r^2} \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)_{\theta=\alpha} = 0.$$

Четвертое уравнение получим, пренебрегая растяжениями от продольной силы и полагая равным нулю изменение длины оси бруска. В таком случае

$$\int_0^\alpha \delta ds = 0 \quad \text{или} \quad \int_0^\alpha u d\theta = 0.$$

Из найденных четырех уравнений определятся все нужные нам величины, и мы можем найти деформации и напряжения в любом сечении арки.

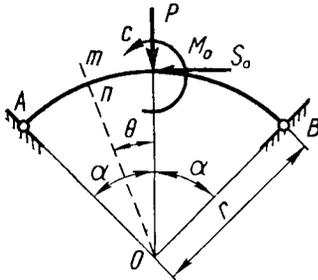


Рис. 20.

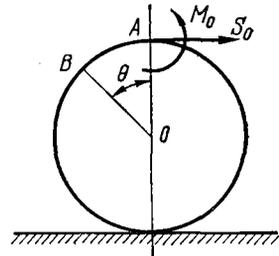


Рис. 21.

В качестве второго примера рассмотрим изгиб под действием собственного веса кругового кольца, опирающегося на горизонтальную плоскость (рис. 21). Производа сечения в точке A и заменяя действие правой половины на левую силой  $S_0$  и парой  $M_0$ , мы находим в сечении B такое выражение для изгибающего момента:

$$M_\theta = -M_0 + S_0 r (1 - \cos \theta) + \gamma r^2 (\cos \theta + \theta \sin \theta - 1).$$

Здесь через  $\gamma$  обозначен вес единицы длины кольца. Вставляя выражение для  $M_\theta$  в общий интеграл (90), получаем

$$\begin{aligned} \frac{EJ}{r^2} u = & -M_0 - S_0 r \left(\frac{\theta}{2} \sin \theta - 1\right) - \\ & - \gamma r^2 \left(1 + \frac{\theta^2}{4} \cos \theta - \frac{1}{8} \cos \theta - \frac{3}{4} \theta \sin \theta\right) - C'_1 \cos \theta - C'_2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Для определения лишних неизвестных и постоянных  $C'_1$  и  $C'_2$  имеем условия

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)_{\theta=0} = 0; \quad \left(\frac{du}{d\theta}\right)_{\theta=\pi} = 0; \quad (u)_{\theta=\pi} = 0.$$

Кроме того, условие нерастяжимости оси дает нам четвертое уравнение  $\int_0^\pi u d\theta = 0$ . Из этих уравнений находим

$$C'_1 = \gamma r^2 \frac{9 - 2\pi^2}{8}, \quad C'_2 = 0; \quad M_0 = \frac{1}{2} \gamma r^2, \quad S_0 = \frac{1}{2} \gamma r.$$

Следовательно,

$$u = \frac{\gamma r^4}{EJ} \left(\frac{\theta}{2} \sin \theta - 1 - \cos \theta - \frac{\theta^2 - \pi^2}{4} \cos \theta\right).$$

При составлении выражений для изгибающих моментов в рассмотренных примерах мы исходили из недеформированного состояния кольца и пренебрегали теми изменениями в расположении внешних сил, которые получаются вследствие деформации. В тех случаях, когда под действием внешних сил возникают значительные продольные усилия, изменение формы бруска может оказывать существенное влияние на обстоятельства изгиба и его приходится принимать во внимание при составлении выражения для изгибающего момента. Мы разрешим эту задачу при помощи тригонометрических рядов.

### § 18. Применение тригонометрических рядов к исследованию изгиба кругового кольца<sup>1</sup>

Предположим, что кольцо радиуса  $r$  (рис. 22) деформируется под действием заданной системы сил, лежащих в плоскости кольца ( $xy$ ). В той же плоскости лежит одна из главных осей инерции сечения. При деформации точки оси кольца будут совершать перемещения в плоскости  $xy$ . Перемещение какой-либо точки  $A$  можно разложить на составляющие; радиальное перемещение, направленное к центру, обозначим через  $u$  и перемещение по касательной к оси в направлении возрастания угла  $\theta$  обозначим через  $w$ . В самом общем случае мы можем представить радиальное перемещение таким рядом:

$$u = a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \dots + b_1 \sin \theta + b_2 \sin 2\theta + \dots \quad (a)$$

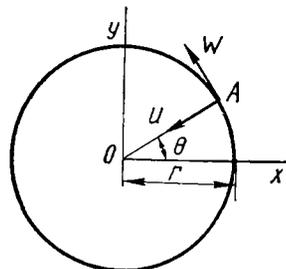


Рис. 22.

Что касается перемещения  $w$ , то общее выражение для него мы найдем, если примем во внимание, что в случае тонкого кольца относительные удлинения оси кольца весьма малы и их можно считать равными нулю<sup>2</sup> при вычислении перемещений  $u$  и  $w$ .

Принимая это допущение, мы тем самым берем вместо действительного кольца некоторую гипотетическую модель — кольцо с абсолютно нерастяжимой осью. При равномерном внешнем или внутреннем давлении такое кольцо будет вести себя как абсолютно твердое тело. Перемещения точек нашей модели будут весьма близки к перемещениям действительного кольца, если деформации растяжения оси кольца играют ничтожную роль по сравнению с деформациями изгиба, а это обыкновенно и имеет место в случае тонких колец, так как при уменьшении поперечного сечения кольца площадь сечения убывает как квадрат поперечных размеров, а момент инерции сечения, которым определяется деформация изгиба, убывает как четвертая степень тех же размеров. Следовательно, уменьшение размеров сечения сопровождается увеличением значения той части перемещений, которые обусловлены деформациями изгиба.

Напишем общее выражение для удлинения оси кольца через перемещения  $u$  и  $w$ . Из геометрических соображений заключаем, что перемещению  $w$  соответствует относительное удлинение  $dw/r d\theta$ . Радиальному перемещению  $u$  будет соответствовать относительное сжатие  $-u/r$ .

Пренебрегая малыми высшего порядка, мы получаем для удлинения оси кольца такое выражение:

$$e = \frac{1}{r} \left( \frac{dw}{d\theta} - u \right). \quad (b)$$

Для нашей модели с нерастяжимой осью будем иметь

$$\frac{dw}{d\theta} - u = 0. \quad (c)$$

<sup>1</sup> Rayleigh (John William Strutt). Theory of sound. 2 edition, Macmillan Co, N. Y., 1894, vol. 1, chapter XA. [Перевод на русский язык: Рэлей, Дж. В. Стрэтт. Теория звука. М., Гостехтеориздат, том 1, 1955, глава XA]. См. нашу работу, упомянутую на стр. 136.

<sup>2</sup> Это заключение, конечно, не может относиться к таким случаям, когда внешние силы вызывают лишь растяжение и сжатие оси кольца, не сопровождающееся изгибом, как, например, при равномерном наружном или внутреннем давлении.

Вставляя вместо  $u$  его выражение (а), получаем для  $w$  такое значение:

$$w = a_1 \sin \theta + \frac{1}{2} a_2 \sin 2\theta + \frac{1}{3} a_3 \sin 3\theta + \dots - \\ - b_1 \cos \theta - \frac{1}{2} b_2 \cos 2\theta - \frac{1}{3} b_3 \cos \theta - \dots \quad (d)$$

Деформация кольца нам будет известна, если мы найдем для заданной системы внешних сил соответствующие значения коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ . Разыскание этих коэффициентов легко выполняется при помощи начала возможных перемещений. Нужно только составить выражение для потенциальной энергии деформированного кольца.

Так как мы приняли для кривого бруска то же самое распределение напряжений, что и для бруска с прямой осью, то для энергии изгиба формула будет иметь такой вид [см. формулы (88) и (88')]:

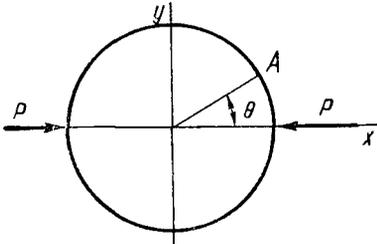


Рис. 23.

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right)^2 r d\theta = \\ = \frac{EJ}{2r^3} \int_0^{2\pi} \left( u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right)^2 d\theta,$$

или, вставляя вместо  $u$  его выражение (а), находим

$$V = \frac{EJ\pi}{2r^3} \sum_{n=2}^{n=\infty} (n^2 - 1)^2 (a_n^2 + b_n^2). \quad (91)$$

Заметим, что в этом выражении пропадают члены с коэффициентами  $a_1$  и  $b_1$ , так как соответствующее перемещение  $u = a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta$  есть не что иное, как общее перемещение кольца как твердого тела, не сопровождающееся деформациями. Перемещение это мы могли бы получить из уравнения (88'), полагая в нем  $M = 0$ .

Имея выражение (91), мы легко можем находить значения коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  для различных случаев нагрузки. Поясним это примерами. Рассмотрим случай изгиба кольца двумя взаимно противоположными силами  $P$  (рис. 23). Работа этих сил на перемещениях, соответствующих приращению  $\delta a_n$  какого-либо коэффициента  $a_n$ , напишется так:

при  $n$  четном

$$P\delta a_n (\cos 0 + \cos n\pi) = 2P\delta a_n,$$

при  $n$  нечетном

$$P\delta a_n (\cos 0 + \cos n\pi) = 0.$$

Подобным же образом для приращений  $\delta b_n$  найдем  $P\delta b_n (\sin 0 + \sin n\pi) = 0$ . Следовательно, отличными от нуля будут лишь коэффициенты  $a_n$  при четном значении  $n$ . Начало возможных перемещений дает для определения этих коэффициентов уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial a_n} \delta a_n = 2P\delta a_n,$$

откуда находим

$$a_n = \frac{2Pr^3}{EJ\pi(n^2 - 1)^2}.$$

Следовательно,

$$u = \frac{2Pr^3}{EJ\pi} \sum_{n=2,4,\dots}^{n=\infty} \frac{\cos n\theta}{(n^2 - 1)^2}. \quad (92)$$

Для сближения точек приложения сил  $P$  получаем выражение

$$(u)_{\theta=0} + (u)_{\theta=\pi} = \frac{4Pr^3}{EJ\pi} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - 1)^2}.$$

В качестве второго примера рассмотрим кольцо, подвергающееся действию наружного гидростатического давления (рис. 24). Центр кольца удерживается на глубине  $h$  при посредстве силы  $P$ . Принимая ширину кольца в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, равной единице и обозначая через  $\gamma$  вес единицы объема жидкости, находим, что интенсивность давлений на кольцо в каком-либо сечении  $A$  будет равняться  $(h + r \cos \theta) \gamma$ .

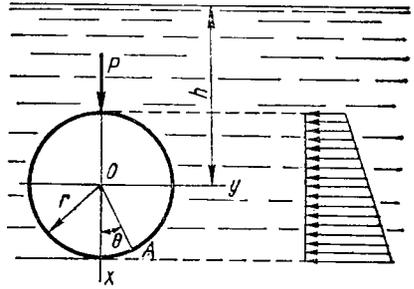


Рис. 24.

Сила  $P$ , удерживающая кольцо, очевидно, равна  $\pi r^2 \gamma$ . Так как все силы, приложенные к кольцу, имеют радиальное направление, то при составлении работы этих сил придется иметь в виду лишь перемещения  $u$ . Если коэффициенту  $a_n$  в общем выражении для  $u$  дать приращение  $\delta a_n$ , то соответствующая работа внешних сил напишется так:

при  $n > 1$

$$\delta a_n P \cos n\pi + r \delta a_n \int_0^{2\pi} \gamma \cos n\theta (h + r \cos \theta) d\theta = \delta a_n P (-1)^n,$$

при  $n = 1$

$$\delta a_n P \cos n\pi + r \delta a_n \int_0^{2\pi} \gamma \cos n\theta (h + r \cos \theta) d\theta = 0.$$

Работа, соответствующая приращению  $\delta b_n$ , будет равна нулю.

Для определения  $a_n$  начало возможных перемещений дает нам уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial a_n} \delta a_n = \delta a_n P (-1)^n, \text{ откуда } a_n = \frac{(-1)^n P r^3}{EJ\pi (n^2 - 1)^2}. \text{ Следовательно,}$$

$$u = \frac{Pr^3}{EJ\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2 - 1)^2} \cos n\theta. \tag{93}$$

Из приведенных примеров видно, что, пользуясь началом возможных перемещений, мы при помощи выражения (91) для потенциальной энергии можем представить перемещения  $u$  и  $w$  в виде быстро сходящихся рядов. Имея эти ряды, легко находим величину изгибающего момента для любого поперечного сечения кольца.

Остановимся теперь подробнее на втором разобранным нами примере. Из полученного решения (93) видно, что перемещения  $u$  не зависят от абсолютной величины давлений, приходящихся на кольцо, а лишь от разности этих давлений в верхней и нижней точках кольца (этой разностью определяется сила  $P$ ). Увеличивая глубину погружения кольца  $h$ , мы будем все время получать на основании (93) одно и то же сжатие кольца, несмотря на все увеличивающиеся давления. Между тем известно, что при большом востороннем давлении, сильно сжимающем кольцо, даже незначительные изгибающие силы могут вызвать

<sup>1</sup> Весом кольца мы здесь пренебрегаем.

большие искажения первоначально круговой формы кольца. Такое несоответствие между действительным явлением и решением (93) объясняется тем обстоятельством, что мы в своем исследовании все время исходили из первоначальной круговой формы кольца. При такой форме наша модель с нерастяжимой осью под действием всестороннего равномерного сжатия не получает никаких деформаций, но если какие-либо дополнительные силы вызовут искривления оси кольца, то всесторонние сжимающие усилия, наверное, увеличат эти искривления. Мы будем здесь иметь полную аналогию с задачей об изгибе прямого стержня, подвергающегося одновременному действию поперечной нагрузки и продольной сжимающей силы. Если в этом случае исходить из первоначальной прямой формы, то приходим к заключению, что продольная сила вызывает только сжатие. На самом деле вследствие искривления оси продольная сила будет вызывать не только сжатие, но и изгиб, и влияние ее на изгиб при некоторых условиях может быть очень велико. Чтобы оценить влияние всестороннего равномерного давления, вызывающего сжатие кольца,

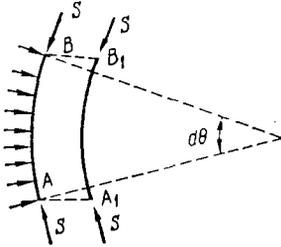


Рис. 25.

на изгиб, нужно исходить не из первоначальной формы кольца, а из той формы, которая получилась после деформации.

Пусть  $AB$  — элемент кольца до деформации (рис. 25). Продольные сжимающие силы  $S$  уравниваются внешнее равномерное давление, приходящееся на элемент  $AB$ . После деформации элемент  $AB$  занимает положение  $A_1B_1$ . Вследствие искривления элемента кольца  $AB$  силы  $S$  поворачиваются одна относительно другой на угол

$$r d\theta \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right) = \frac{d\theta}{r} \left( u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right).$$

Равнодействующая этих сил в радиальном направлении получит приращение  $\frac{S d\theta}{r} \left( u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right)$ .

Мы можем сказать, что при искривлении равномерно сжатого кольца действие продольных сжимающих сил  $S$  на прогибы равносильно действию сплошной нагрузки радиального направления и интенсивности <sup>1</sup>:

$$q = \frac{S}{r^2} \left( u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right). \quad (94)$$

Применим эти общие соображения к нашему первому примеру. Предположим, что круговое кольцо, испытывающее равномерное сжатие  $S$ , изгибается двумя взаимно противоположными силами  $P$  (см. рис. 23). Заменяя влияние продольной силы на прогиб радиальной сплошной нагрузкой (94) и применяя начало возможных перемещений, приходим к такому уравнению для определения коэффициента  $a_n$  при  $n$  четном:

$$\frac{\partial V}{\partial a_n} \delta a_n = 2P \delta a_n - \frac{S}{r} \delta a_n \int_0^{2\pi} \left( n + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \cos n\theta d\theta.$$

<sup>1</sup> Мы здесь предполагаем, что сжимающие силы при сплющивании кольца неизменны. Это соответствует выбранным перемещениям, не сопровождающимся удлинением оси кольца. Если произвести более подробное исследование деформаций, соответствующих принятым перемещениям, то найдем, что удлинения оси кольца выражаются величиной второго порядка малости. Результаты, получаемые на основании такого более подробного рассмотрения деформаций совершенно совпадают с теми, которые дает приведенное здесь элементарное решение.

Вставляя вместо  $u$  его выражение (а) и выполняя интегрирование, получаем

$$a_n = \frac{2Pr^3}{EJ\pi(n^2 - 1)^2 - Sr^2\pi(n^2 - 1)}.$$

Радиальные перемещения представляются так:

$$u = \frac{2Pr^3}{EJ\pi} \sum_{n=2,4,\dots}^{n=\infty} \frac{\cos n\theta}{(n^2 - 1)^2 - \frac{Sr^2}{EJ}(n^2 - 1)}. \quad (95)$$

Подобным же образом для второго примера получим <sup>1</sup>

$$u = \frac{Pr^3}{EJ\pi} \sum_{n=2,3,\dots}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \cos n\theta}{(n^2 - 1)^2 - \frac{Sr^2}{EJ}(n^2 - 1)}. \quad (96)$$

Как и следовало ожидать, продольная сжимающая сила  $S$  вызывает увеличение искривлений. Чтобы получить влияние продольной растягивающей силы, нужно только в полученных выше формулах изменить знак силы  $S$ .

Мы все время предполагали, что имеем полное замкнутое кольцо, но описанный здесь способ решения применим и в том случае, когда имеется лишь часть кольца с шарнирно опертыми концами. Если через  $\alpha$  обозначим центральный угол, соответствующий данному отрезку кольца, то угол  $\theta$  будет изменяться в пределах от 0 до  $\alpha$ . Для перемещения  $u$  можно взять выражение

$$u = a_1 \sin \frac{\pi\theta}{\alpha} + a_2 \sin \frac{2\pi\theta}{\alpha} + a_3 \sin \frac{3\pi\theta}{\alpha} + \dots$$

Так как при  $\theta = 0$  и при  $\theta = \alpha$  величины  $u$  и  $\frac{d^2u}{d\theta^2}$  обращаются в нуль, то условия на концах будут соблюдены. Вычисление коэффициентов  $a_1, a_2, \dots$  может быть выполнено так же, как и в предыдущих случаях.

Заметим еще, что намеченным здесь приемом без всяких затруднений решается также вопрос об изгибе кольца, деформациям которого препятствует упругая среда. В таких условиях будет находиться, например, горизонтально расположенное кольцо, прикрепленное к системе часто распределенных вертикальных упругих стоек. При решении этой задачи нужно к потенциальной энергии изгиба кольца присоединить энергию, соответствующую деформации упругой среды.

### § 19. Изгиб кольца силами, не лежащими в плоскости кривизны <sup>2</sup>

Предположим, что круговое кольцо, в плоскости кривизны которого лежит одна из главных осей инерции поперечного сечения, подвергается действию системы сил, не лежащих в плоскости кривизны кольца. Эти силы вызовут ис-

<sup>1</sup> Здесь  $S$  — сжимающее усилие, соответствующее всестороннему давлению на глубине  $h$  (см. рис. 24).

<sup>2</sup> См. стр. 509 книги А. Love, указанной на стр. 9 (стр. 423 английского издания). Несколько частных [примеров рассмотрено в статье Federhofer K. Berechnung des senkrecht zu seiner Ebene belasteten Bogenträgers. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1914, Bd 62, N. 1. SS. 40—63. Сравнение результатов приближенного решения с точным решением теории упругости приведено в работе J. H. Michell, указанной в сноске на стр. 182.

кривление оси кольца по некоторой пространственной кривой, которую мы сможем построить, если будем знать перемещение каждой точки оси кольца при деформации. Перемещения эти можно задать тремя составляющими, которые будем выбирать следующим образом.

Пусть  $AB$  — отрезок заданного кругового кольца (рис. 26), плоскость  $OAB$  есть плоскость кривизны кольца и  $O$  — центр кольца. Возьмем поперечное сечение в точке  $A$ , определяемой углом  $\theta$ , который будем отсчитывать от некоторого радиуса  $OB$ . Для выбранной точки построим подвижную систему координат  $x_0, y_0, z_0$ , причем ось  $z_0$  направим по касательной к круговой оси кольца в сторону возрастания угла  $\theta$ , ось  $x_0$  направим по главной оси инерции поперечного сечения к центру кольца, наконец ось  $y_0$ , совпадающую с другой главной осью инерции, направим так, чтобы оси  $x_0, y_0, z_0$  представляли собой правую винтовую координатную систему (при вращении от  $x_0$  к  $y_0$  закручивание происходит в направлении  $z_0$ ). Построив для каждой точки оси кольца подобную координатную систему, мы будем разлагать перемещения точек на направления построенных осей. Обозначим через  $u$  и  $w$  составляющие перемещения по направлениям  $x_0$  и  $z_0$ . Составляющую в направлении  $y_0$  обозначим через  $v$ .

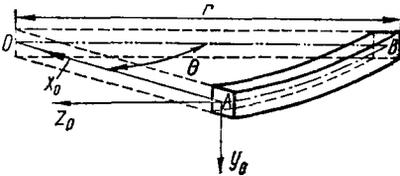


Рис. 26.

Перейдем теперь к деформированному состоянию кольца и для каждой точки оси построим координатную систему  $x, y, z$ , аналогичную только что описанной. Ось  $z$

будем направлять по касательной к деформированной оси кольца. Что касается осей  $x$  и  $y$ , то, принимая во внимание возможность искривления поперечного сечения кольца, условимся направлять их так, чтобы плоскость  $xz$  была касательной к той поверхности, по которой после деформации расположатся точки, лежавшие первоначально в плоскости  $x_0z_0$ . Ось  $y$  направим перпендикулярно к  $xz$ . Имея составляющие  $(u, v, w)$  перемещения, мы для каждой точки  $A$  находим ее новое положение  $A_1$  после деформации и в  $A_1$  помещаем начало координат системы  $x, y, z$ . Ось  $z$  направляем по касательной к искривленной оси кольца. Для определения направлений  $x$  и  $y$  нам нужно иметь еще одну величину. Выберем для этого угол  $\beta$  между плоскостями  $xz$  и  $z_0x_0$  (рис. 27). Угол этот отсчитываем в направлении от  $x_0$  и  $y_0$ .

Итак, при помощи четырех величин  $u, v, w$  и  $\beta$  мы можем вполне определить деформацию кольца, так как с их помощью мы не только можем построить искривленную ось кольца, но будем знать также поворот каждого поперечного сечения.

В общем случае деформации каждый элемент кольца, выделенный двумя бесконечно близкими поперечными сечениями, может испытывать одновременный изгиб в двух главных плоскостях и кручение. Величины изгибающих и скручивающего моментов, а следовательно, и величины вызываемых ими напряжений будут определяться изменениями кривизны и кручением. До деформации ось кольца представляла собой плоскую кривую и кривизна равнялась  $1/r$ . Величину эту в дальнейшем будем обозначать буквой  $\kappa$  и будем представлять ее отрезком, отложенным по оси  $y_0$  (рис. 28). Если представить себе начало координат  $A$  движущимся со скоростью, равной единице, вдоль оси бруска, а оси  $x_0, y_0, z_0$  вращающимися так, что в каждый момент они имеют принятые нами выше направления, то, очевидно,  $\kappa$  представит собой не что иное, как угловую скорость координатной системы  $x_0, y_0, z_0$ . В дальнейшем мы воспользуемся этим обстоятельством и с отрезками, представляющими кривизну, будем по-

ступать так, как в динамике твердого тела поступают с угловыми скоростями, — мы будем их геометрически складывать и вычитать.

Обратимся теперь к деформированному состоянию кольца и будем двигать начало координатной системы  $x, y, z$  со скоростью, равной единице, вдоль де-

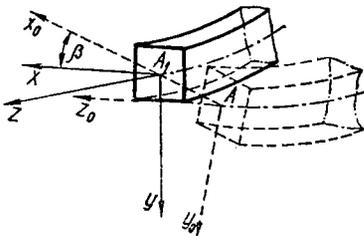


Рис. 27.

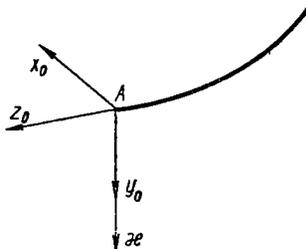


Рис. 28.

формированной оси кольца. Если при этом движении направление осей в каждый момент устанавливается таким, как мы условились выше, то угловая скорость вращения системы  $x, y, z$  относительно оси  $x$  дает нам кривизну оси кольца в главной плоскости  $zy$ . Мы ее обозначим через  $\kappa_1$  (рис. 29). Точно так же угловая скорость  $\kappa_2$  относительно оси  $y$  дает кривизну в плоскости  $zx$  и, наконец, угловая скорость  $\tau$  относительно оси  $z$  представляет собой кручение кольца <sup>1</sup>.

Обозначая изгибающие моменты в плоскостях  $zy$  и  $zx$  соответственно через  $M_1$  и  $M_2$  и скручивающий момент — через  $H$ , будем иметь

$$M_1 = B_1 \kappa_1; \quad M_2 = B_2 (\kappa_2 - \kappa); \quad H = C \tau. \quad (97)$$

Здесь через  $B_1$  и  $B_2$  обозначены жесткости при изгибе, через  $C$  — жесткость при кручении. Чтобы установить связь между внешними силами и перемещениями, нам нужно уметь выразить  $\kappa_1, \kappa_2$  и  $\tau$  при посредстве величин  $u, v, w$  и  $\beta$ , которыми определяется деформация кольца. Так как мы имеем дело лишь с малыми перемещениями, то можно определить изменения кривизны и кручение, вызываемые каждой из величин  $u, v, w$  и  $\beta$ , и потом влияния отдельных величин сложить. Начнем с величины  $\beta$ . Если перемещения  $u, v, w$  — нули и деформация кольца заключается лишь в поворачивании сечений на малые углы  $\beta$ , то кривизна оси остается прежней, равной  $\kappa$ , и составляющие ее, представляющие собой кривизны в главных плоскостях  $zy$  и  $zx$  (рис. 30), соответственно <sup>2</sup> будут

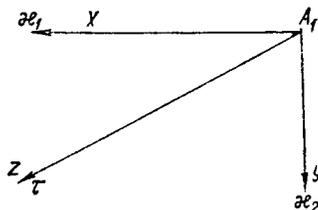


Рис. 29.

$$\kappa_1 = \kappa \beta; \quad \kappa_2 = \kappa. \quad (a)$$

Что касается кручения, то оно будет обусловлено изменением угла  $\beta$  вдоль оси кольца и представится так:

$$\tau = \frac{d\beta}{ds}. \quad (a')$$

<sup>1</sup> Отрезки  $\kappa_1, \kappa_2$  и  $\tau$  откладываем так, что наблюдатель, стоящий лицом по направлению стрелки, видит вращение против часовой стрелки.

<sup>2</sup> Мы считаем  $\beta$  малой величиной и полагаем  $\sin \beta = \beta; \cos \beta = 1$ .

Перемещения  $u$  и  $w$  вызывают лишь искривление оси кольца в плоскости начальной кривизны, и мы на основании прежних результатов (см. формулу (89)) будем иметь

$$\kappa_1 = 0; \quad \kappa_2 = \kappa + \frac{\kappa u}{r} + \frac{d^2 u}{ds^2}; \quad \tau = 0. \quad (b)$$

Рассмотрим теперь перемещения  $v$  в направлении, перпендикулярном к плоскости кольца. Эти перемещения вызовут искривление<sup>1</sup> в плоскости  $zy$  и не повлияют на кривизну в плоскости  $xz$ .

Следовательно,

$$\kappa_1 = -\frac{d^2 v}{ds^2}; \quad \kappa_2 = \kappa. \quad (c)$$

Кроме того, благодаря перемещениям  $v$  между осями  $z$  и  $z_0$  получится угол, величина которого представится производной  $dv/ds$ . Угол этот обуславливает появление кручения  $\tau$ . В самом деле, при движении координатной системы  $x, y, z$  со

скоростью, равной единице, вдоль оси кольца, получившей перемещения  $v$ , мы будем иметь вращение около оси  $x$  со скоростью  $\kappa_1$  и около оси, перпендикулярной плоскости кольца, со скоростью  $\kappa$ . Проекция скорости  $\kappa$  на направление оси  $z$  и представит собой кручение. Следовательно,

$$\tau = \kappa \frac{dv}{ds}. \quad (c')$$

Суммируя результаты (a), (b) и (c), найдем, что в случае кругового кольца, деформация которого определяется величинами  $u, v, w$  и  $\beta$ , величины кривизны  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  в главных плоскостях и кручения  $\tau$  могут быть представлены такими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \kappa\beta - \frac{d^2 v}{ds^2}; \\ \kappa_2 &= \kappa + \frac{\kappa u}{r} + \frac{d^2 u}{ds^2}; \\ \tau &= \frac{d\beta}{ds} + \kappa \frac{dv}{ds}. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

К этому присоединяем еще условие нерастяжимости оси [см. формулу (b) § 18]:

$$\frac{dw}{ds} - \frac{u}{r} = 0.$$

При помощи формул (97) и (98) мы можем решить целый ряд задач, относящихся к изгибу кругового кольца. Рассмотрим, например, случай, представленный на рис. 31. Часть кругового кольца  $AB$  заделана на конце  $B$  и изгибается силой  $P$ , перпендикулярной к плоскости кольца  $OBA$  и приложенной в точке<sup>2</sup>  $A$ . Для какой-либо точки  $D$ , определяемой углом  $\theta$ , величины изгибающих и скручивающего моментов легко находятся из рисунка и представляются такими формулами:

<sup>1</sup> Соответствующая кривизна определится такой же формулой, как для балок с прямой осью.

<sup>2</sup> Задача эта решена Сен-Венаном. Saint-Venant B., Wantzel L. *Nouvelles expériences sur l'écoulement de l'air déterminé par des différences de pression considérables.*

$$M_1 = -Pr \sin(\alpha - \theta); \quad M_2 = 0; \quad H = Pr [1 - \cos(\alpha - \theta)].$$

Тогда на основании (97) и (98) будем иметь

$$\begin{aligned} -Pr \sin(\alpha - \theta) &= B_1 \left( \kappa \beta - \frac{d^2 v}{ds^2} \right) = \frac{B_1}{r^2} \left( r\beta - \frac{d^2 v}{d\theta^2} \right); \\ Pr [1 - \cos(\alpha - \theta)] &= C \left( \frac{d\beta}{ds} + \kappa \frac{dv}{ds} \right) = \frac{C}{r^2} \frac{d}{d\theta} (r\beta + v). \end{aligned} \quad (d)$$

Из второго уравнения получаем

$$r\beta + v = \frac{Pr^3}{C} [\theta + \sin(\alpha - \theta)] + C_1.$$

Произвольную постоянную  $C_1$  выбираем так, чтобы у заделанного конца величина  $r\beta + v$  обращалась в нуль. Тогда

$$r\beta + v = \frac{Pr^3}{C} [\theta - \sin \alpha + \sin(\alpha - \theta)].$$

Определяя отсюда  $r\beta$  и вставляя его в первое из уравнений (d), находим

$$\frac{d^2 v}{d\theta^2} + v = \sin(\alpha - \theta) \left( \frac{Pr^3}{B_1} + \frac{Pr^3}{C} \right) + \frac{Pr^3}{C} \theta - \frac{Pr^3}{C} \sin \alpha.$$

Общий интеграл этого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами напишется так:

$$\begin{aligned} v &= C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + \frac{Pr^3}{C} \theta - \frac{Pr^3}{C} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \left( \frac{Pr^3}{B_1} + \frac{Pr^3}{C} \right) (\theta \sin \theta + \cos \theta) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \cos \alpha \left( \frac{Pr^3}{B_1} + \frac{Pr^3}{C} \right) (-\theta \cos \theta + \sin \theta). \end{aligned}$$

Подбирая произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  таким образом, чтобы при  $\theta = 0$  обращались в нули величины  $v$  и  $\frac{dv}{d\theta}$ , приходим к такому результату:

$$\begin{aligned} v &= \frac{Pr^3}{C} [\theta - \sin \theta - \sin \alpha (1 - \cos \theta)] + \frac{1}{2} \left( \frac{Pr^3}{B_1} + \frac{Pr^3}{C} \right) \theta \cos(\alpha - \theta) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{Pr^3}{B_1} + \frac{Pr^3}{C} \right) \sin \theta \cos \alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, перемещения точек оси бруска в направлении, перпендикулярном к плоскости кривизны, найдены. Что касается перемещений  $u$  и  $w$ , то, пренебрегая малыми высшего порядка, находим, что они равны нулю.

В самом деле, при действии сил, перпендикулярных к плоскости кривизны, момент  $M_2$  обращается в нуль, поэтому на основании (98) заключаем, что  $u$ , а следовательно, и  $w$  также будут равны нулю, если исключить перемещения бруска как твердого тела.

В случае действия нескольких сосредоточенных сил мы для вычисления прогибов  $v$  можем воспользоваться принципом сложения действия сил.

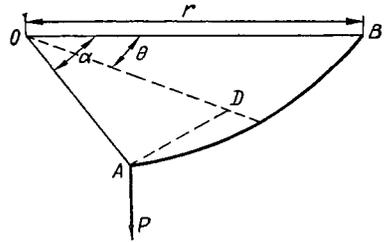


Рис. 31.

Если силы направлены как угодно, то мы их всегда можем разложить на составляющие, направляя одну из составляющих в плоскости кольца и другую перпендикулярно к этой плоскости. Первая система вызовет изгиб кольца в его плоскости. Под влиянием второй системы возникнут лишь перемещения  $v$ . Решая отдельно каждую из этих задач и потом суммируя перемещения и напряжения, мы получаем решение для случая действия сил, как угодно направленных.

Без особых затруднений мы можем составить дифференциальное уравнение для перемещений  $v$ , причем в это уравнение войдут кроме  $v$  лишь известные величины, зависящие от размеров бруска и распределения внешних сил, перпендикулярных к плоскости кольца. Напишем для этого уравнения равновесия элемента кольца, выделенного двумя бесконечно близкими поперечными сечениями, причем примем во внимание и деформацию этого элемента. В таком

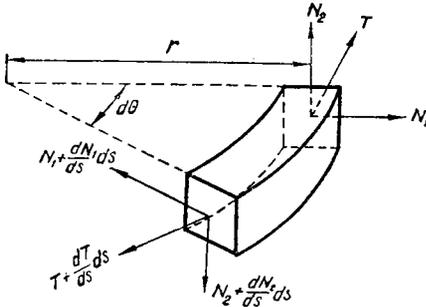


Рис. 32.

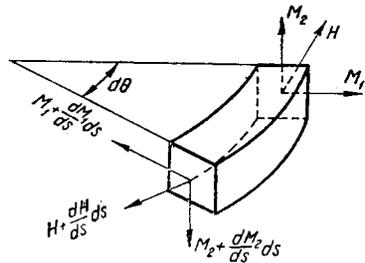


Рис. 33.

полном виде уравнения эти понадобятся в дальнейшем при решении некоторых вопросов устойчивости. Внешние силы, перпендикулярные к плоскости кольца, будем считать непрерывно распределенными и интенсивность их обозначим через  $Y$ .

Кроме этих сил на выделенный элемент кольца будут действовать усилия по плоскостям концевых поперечных сечений. Усилия эти на каждом конце мы можем привести к одной силе, приложенной в центре тяжести сечения и к паре сил. Как силу, так и пару разлагаем на составляющие по направлениям подвижной системы осей  $x, y, z$ . Силы  $N_1$  и  $N_2$  будут перерезывающими силами,  $T$  — продольной силой (рис. 32). Направления моментов, принятые за положительные, представлены на рис. 33. Проектируя все приложенные к элементу силы на ось  $x$ , получаем такое уравнение <sup>1</sup>:

$$\frac{dN_1}{ds} \delta s - N_2 \tau \delta s + \frac{T}{r} \delta s = 0.$$

Подобным же образом составляются и два другие уравнения. Сокращая их на  $\delta s$ , приходим к такой системе:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_1}{ds} - N_2 \tau + T \kappa_2 &= 0; \\ \frac{dN_2}{ds} + N_1 \tau - T \kappa_1 + Y &= 0; \\ \frac{dT}{ds} - N_1 \kappa_2 + N_2 \kappa_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

<sup>1</sup> При составлении уравнения принимаем во внимание, что ось  $x, y, z$  у одного из концов элемента вследствие деформации и начальной кривизны несколько повернуты относительно соответствующих осей другого концевого сечения элемента.

Пользуясь геометрическим представлением моментов (см. рис. 33), мы таким же способом составляем три других уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_1}{ds} - M_2\tau + H\kappa_2 - N_2 &= 0; \\ \frac{dM_2}{ds} + M_1\tau - H\kappa_1 + N_1 &= 0; \\ \frac{dH}{ds} - M_1\kappa_2 + M_2\kappa_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Если деформациями элемента пренебречь, то уравнения равновесия представляют в более простой форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_1}{ds} + \frac{T}{r} &= 0; & \frac{dM_1}{ds} + \frac{H}{r} - N_2 &= 0; \\ \frac{dN_2}{ds} + Y &= 0; & \frac{dM_2}{ds} + N_1 &= 0; \\ \frac{dT}{ds} - \frac{N_1}{r} &= 0; & \frac{dH}{ds} - \frac{M_1}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

При разыскании перемещений  $v$  нам понадобятся из этой системы лишь уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_2}{ds} + Y &= 0; \\ \frac{dM_1}{ds} + \frac{H}{r} - N_2 &= 0; \\ \frac{dH}{ds} - \frac{M_1}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Дифференцируя второе из этих уравнений по  $s$  и принимая во внимание уравнения первое и третье, получаем

$$\frac{d^2M_1}{ds^2} + \frac{M_1}{r^2} + Y = 0. \quad (g)$$

Далее на основании (97) и (98) имеем

$$\therefore \beta = \frac{d^2v}{ds^2} + \kappa_1 = \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{M_1}{B_1}; \quad (k)$$

$$\tau = \frac{H}{C} = \frac{d\beta}{ds} + \kappa \frac{dv}{ds} = \kappa \frac{dv}{ds} + \frac{1}{\kappa} \left( \frac{d^3v}{ds^3} + \frac{1}{B_1} \frac{dM_1}{ds} \right). \quad (l)$$

Отсюда

$$\frac{1}{C} \frac{dH}{ds} = \kappa \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{1}{\kappa} \left( \frac{d^4v}{ds^4} + \frac{1}{B_1} \frac{d^2M_1}{ds^2} \right).$$

Вставляя сюда вместо  $\frac{dH}{ds}$  его выражение через  $M_1$  из третьего уравнения системы (f) и принимая во внимание (g), получаем

$$M_1 = \frac{B_1 C r}{B_1 + C} \left[ \frac{1}{r^3} \left( \frac{d^2v}{d\theta^2} + \frac{d^4v}{d\theta^4} \right) - \frac{r}{B_1} Y \right]. \quad (m)$$

Подставив найденное значение  $M_1$  в уравнение (g), придем к искомой зависимости между перемещениями  $v$  и нагрузкой  $Y$ :

$$\frac{d^6 v}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\theta^4} + \frac{d^2 v}{d\theta^2} = r^4 \left( \frac{1}{B_1} \frac{d^2 Y}{d\theta^2} - \frac{1}{C} Y \right). \quad (102)$$

Определив из этого уравнения  $v$ , мы при помощи выражений (k), (l) и (m) легко найдем  $\beta$ ,  $H$  и  $M_1$ .

Если кольцо будет изгибаться сосредоточенными силами, то на протяжении между двумя точками приложения сил уравнение (102) будет иметь вид

$$\frac{d^6 v}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\theta^4} + \frac{d^2 v}{d\theta^2} = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения напишется так:

$$v = C_1 + C_2 \theta + C_3 \cos \theta + C_4 \sin \theta + C_5 \theta \cos \theta + C_6 \theta \sin \theta.$$

Произвольные постоянные должны быть определены из условий закрепления.

В качестве второго примера рассмотрим изгиб балки с полукруглой осью, поддерживающей равномерно распределенную нагрузку (рис. 34). Если через  $q$  обозначим интенсивность равномерной нагрузки, то уравнение (102) напишется так:

$$\frac{d^6 v}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\theta^4} + \frac{d^2 v}{d\theta^2} = - \frac{r^4}{C} q.$$

Отсюда находим

$$v = C_1 + C_2 \theta - \frac{r^4 q}{2C} \theta^2 + C_3 \cos \theta + C_4 \sin \theta + C_5 \theta \cos \theta + C_6 \theta \sin \theta.$$

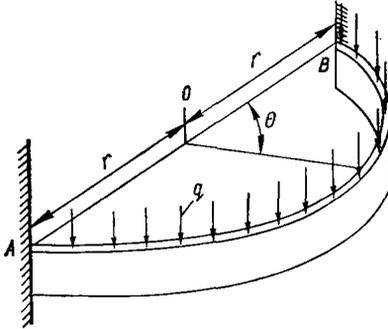


Рис. 34.

Если концы балки считать заделанными, то для определения постоянных  $C_1, \dots, C_6$  будем иметь шесть таких условий:

$$(v)_{\theta=0}; \theta=\pi = 0; \quad \left( \frac{dv}{ds} \right)_{\theta=0}; \theta=\pi = 0; \quad (\beta)_{\theta=0}; \theta=\pi = 0.$$

Определение постоянных несколько упростится, если угол  $\theta$  отсчитывать не от  $OB$ , а от радиуса, перпендикулярного к  $AB$ . В таком случае из условий симметрии заключаем, что  $v$  должно быть четной функцией  $\theta$  и, следовательно, в общем интеграле нужно положить  $C_2 = C_4 = C_6 = 0$ .

Для остальных постоянных получаем значения

$$C_1 = \frac{qr^4}{C} \frac{\pi^2}{8} \left( 1 + \frac{8}{\pi^2} \frac{n+1}{n} \right);$$

$$C_3 = - \frac{qr^4}{C} \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{n+1}{n} \right); \quad C_5 = - \frac{qr^4}{C} \frac{2}{n\pi} (n+1).$$

Здесь для краткости введено обозначение  $B_1/C = n$ .

Вставляя найденные значения постоянных в общий интеграл, мы при помощи (m) и (l) получаем

$$M_1 = -qr^2 \left( 1 - \frac{4}{\pi} \cos \theta \right); \quad H = -qr^2 \left( \theta - \frac{4}{\pi} \sin \theta \right).$$

При помощи этих формул может быть выполнен расчет балки.

## § 20. Методы решения вопросов устойчивости

Решение задач, относящихся к исследованию устойчивости различных форм равновесия упругих систем, представляет некоторые особенности, и поэтому мы считаем целесообразным выделение вопросов устойчивости в особую главу. При изучении деформаций тел, у которых все размеры одного порядка, мы привели теорему Кирхгофа<sup>1</sup>, которая говорит, что заданной системе внешних сил может соответствовать лишь одно решение уравнений теории упругости, т. е. одна форма равновесия. Такая форма равновесия как единственная, очевидно, будет устойчивой, и если какие-либо внешние причины вызовут отклонение тела от этой формы, то по устранении этих причин тело вернется в свое первоначальное состояние.

Доказательство теоремы Кирхгофа было основано на допущении, что малым деформациям, которые могут возникать при допускаемых на практике напряжениях, будут соответствовать весьма малые перемещения точек тела и потому можно не делать различия в распределении сил до и после деформации. Когда мы переходим к телам, у которых один или два размера малы, т. е. исследуем вопросы о равновесии тонких пластинок или тонких стержней, то здесь встречаемся с возможностью появления весьма значительных перемещений при деформациях, не выходящих за допускаемые пределы. В таких случаях приходится принимать во внимание те изменения в действии сил, которые обусловлены перемещениями при деформации. В качестве простейшего примера приведем подробно рассмотренную нами задачу об одновременном действии на балку продольной силы и поперечных нагрузок. Если бы мы в этой задаче при оценке действия продольной силы исходили из первоначальной прямой формы, то заключили бы, что продольная сила вызывает лишь растяжение или сжатие стержня. Иной результат мы получим, если примем во внимание перемещения, вызванные деформацией. Мы находим, что продольная сила влияет на изгиб стержня и это влияние при некоторых условиях может быть весьма значительным.

Таким образом, в случае тонких стержней и пластинок отпадают те условия, на которых построено доказательство теоремы об однозначности решения уравнений теории упругости, и мы встречаемся с возможностью существования нескольких форм равновесия при одних и тех же внешних силах. Так, например, при действии продольных сжимающих сил прямой стержень может сохранить свою прямую ось; но при некоторых условиях эта ось может и искривиться, тогда мы

---

<sup>1</sup> См. § 22 части первой.

будем иметь явление продольного изгиба, изученное еще Эйлером<sup>1</sup>. То же самое мы будем иметь в случае кругового кольца, сжимаемого равномерно распределенными давлениями. Под действием этих давлений кольцо может сохранить свою круговую форму и только несколько сжаться, но при некотором соотношении между поперечными размерами кольца и давлением круговая форма равновесия перестает быть устойчивой и кольцо сплющивается.

С тем же вопросом устойчивости мы встречаемся при исследовании изгиба тонкой полосы, имеющей форму линейки. Если такую линейку изгибать в плоскости ее наибольшей жесткости, то легко можно убедиться, что при некотором значении изгибающих сил плоская форма изгиба перестает быть устойчивой и полоса выпучивается в направлении наименьшей жесткости. В настоящее время имеются решения для целого ряда задач этого рода. Особый интерес в этих решениях представляют те предельные значения внешних сил, при которых становится возможным появление нескольких форм равновесия. Эти предельные значения в дальнейшем будем называть *критическими нагрузками*. Они играют весьма важную роль во всех технических вопросах, так как безусловно необходимо, чтобы те формы равновесия, которые кладутся в основание расчетов на прочность, были устойчивы.

Первое систематическое рассмотрение устойчивости равновесия упругих тел принадлежит Дж. Брайану<sup>2</sup>. Он выяснил пределы применимости теоремы Кирхгофа и показал, что при условии малых деформаций она отпадает, если только один или два размера тела можно считать малыми. При этом явление неустойчивости может иметь место в пределах упругости, если произведение модуля упругости  $E$  на квадрат отношения малого размера к конечному будет того же порядка, что и предел упругости материала. Дальнейшая разработка общей теории устойчивости равновесия упругих тел принадлежит Р. Саусвеллу<sup>3</sup>. Он устранил ограничение относительно малости деформаций и оперирует с идеальным телом бесконечно большой прочности. При этих условиях и тела, у которых все размеры одного порядка, могут оказаться в состоянии неустойчивого равновесия. Исходя из однородного напряженного состояния тела, Р. Саусвелл дает точкам тела весьма малые перемещения ( $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ ) и для этой отклоненной формы пишет дифференциальные уравнения нейтрального равновесия, причем считает начальные деформации конечными. То соотношение между внешними силами и размерами тела, при котором полученные уравнения дают для  $u'$ ,  $v'$  и  $w'$  решения, удовлетворяющие условиям на поверхности, определяет критическое значение нагрузки в рассматриваемом случае. Применяя свой общий метод к тонким стержням и пластинкам, Р. Саусвелл нашел, что имеющиеся решения задач устойчивости являются лишь первыми приближениями, хотя и вполне достаточными для практических приложений. Мы в дальнейшем ограничимся этими приближенными решениями, отсылая интересующихся теорией вопроса к работе Р. Саусвелла.

При решении вопросов устойчивости можно пользоваться двумя приемами<sup>4</sup>. Первый из них основан на рассмотрении условий равновесия отклоненной фор-

<sup>1</sup> Euler L. Sur la force des colonnes. Histoire de l'Académie Royale des sciences et belles-lettres avec les Mémoires, tirés des Régistres de cette Académie. 1757 [1759], t. 13, pp. 252—282.

<sup>2</sup> Bryan G. H. On the stability of elastic systems. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (mathematical and physical sciences), 1888, vol. 6, pp. 199—210.

<sup>3</sup> Southwell R. V. On the general theory of elastic stability. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 1913, vol. 213, N. 501, pp. 187—244.

<sup>4</sup> Третий прием, основанный на изучении колебаний системы около той формы равновесия, устойчивости которой мы изучаем, не нашел широкого распространения, и мы им в дальнейшем пользоваться не будем.

мы, весьма близкой к изучаемой форме равновесия. Второй прием основан на рассмотрении энергии системы. При пользовании первым приемом мы будем составлять дифференциальное уравнение равновесия для формы, весьма мало отклоненной от изучаемого состояния равновесия. При малых отклонениях мы придем к линейному дифференциальному уравнению и *критические* значения нагрузок найдутся из тех соотношений между силами и размерами тела, при которых наше уравнение может иметь несколько решений, удовлетворяющих одним и тем же условиям на поверхности. При этом одна из произвольных постоянных остается неопределенной, т. е. мы в пределах весьма малых отклонений будем иметь состояние безразличного равновесия. Иногда этот прием несколько видоизменяют, присоединяют к заданным нагрузкам, *критическое* значение которых нужно определить, дополнительные силы и смотрят, при каком значении заданных сил перемещения, вызываемые дополнительными силами, будут неопределенно возрастать. Это значение заданных сил и будет *критическим*.

При пользовании вторым приемом мы определяем энергию, соответствующую изучаемой форме равновесия, и сравниваем ее с энергией соседних форм. Критерий устойчивости тот же, что и в случае абсолютно твердых тел: устойчивой формой равновесия будет та, которой соответствует минимум потенциальной энергии. Например, при рассмотрении случаев, представленных на рис. 35, мы прежде всего, применяя начало возможных перемещений, убеждаемся, что все три положения шарика  $O$  представляют собой формы равновесия, если только точке касания  $A$  соответствует вертикальная нормаль шаровой поверхности  $mn$ .

Считая поверхности идеальными и ограничиваясь лишь малыми первого порядка, мы легко убеждаемся, что во всех трех случаях работа силы тяжести шарика на всяком возможном перемещении равна нулю. Во всех трех случаях мы имеем положение равновесия. Чтобы оценить, устойчивы или неустойчивы эти формы, необходимо более подробное исследование, нужно принять в расчет малые высшего порядка. Тогда мы убедимся, что в случае, показанном на рис. 35,  $a$ , всякое отклонение шарика сопровождается повышением его центра тяжести, т. е. увеличением потенциальной энергии. В случае, представленном на рис. 35,  $b$ , мы при всяком отклонении будем иметь понижение центра тяжести шарика, уменьшение потенциальной энергии. Первая форма равновесия, которой соответствует минимум потенциальной энергии, будет устойчива; вторая — неустойчива. Случай, изображенный на рис. 35,  $b$ , представляет собой форму безразличного равновесия.

В рассмотренных примерах устойчивость равновесия зависит лишь от устройства системы и не находится ни в какой связи с величиной действующей силы. При изучении устойчивости равновесия упругих тел задача стоит несколько иначе. При малых значениях действующих сил формы обыкновенно устойчивы и теряют свою устойчивость лишь тогда, когда внешние силы достигнут определенного *критического* значения. Задачи этого рода можно иллюстрировать такой механической моделью <sup>1</sup> (рис. 36,  $a$ ).

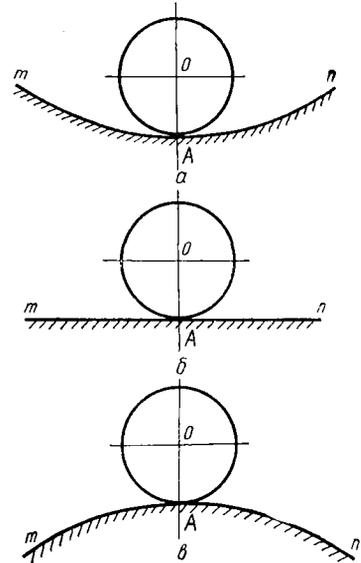


Рис. 35.

<sup>1</sup> Пример этот заимствован из статьи R. Southwell, упомянутой на стр. 258.

Шарик веса  $Q$  и радиуса  $r$  занимает низшую точку шаровой впадины радиуса  $R$ . На шарик передается давление  $P$  при помощи штифта, перемещающегося в особых направляющих по вертикальному радиусу шаровой впадины. Нужно исследовать вопрос об устойчивости этой формы равновесия шарика, если все поверхности идеально гладкие. Отклоняя шарик от среднего положения на весьма малый угол  $\varphi$  (рис. 36, б), мы видим, что центр тяжести шарика поднимается на высоту  $pq$ , а груз  $P$  опускается вниз на величину  $mn$ . Применяя основной критерий устойчивости, заключаем, что форма равновесия устойчива, если  $Qpq > Pmn$ , и неустойчива, когда  $Qpq < Pmn$ .

Из рисунка видим, что  $pq$  — отрезок между касательной и дугой круга с углом  $\varphi$  и радиусом  $R - r$ , следовательно, при малом  $\varphi$

$$pq = \frac{\varphi^2}{2} (R - r). \quad (a)$$

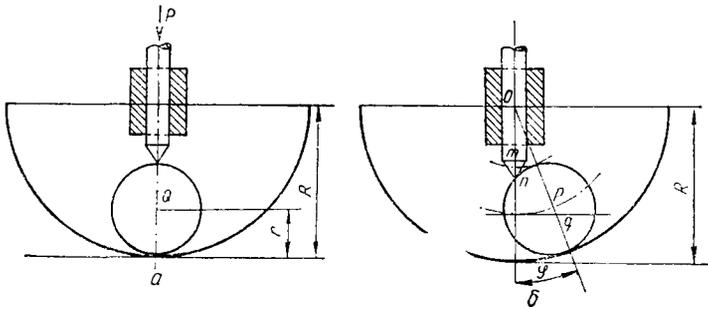


Рис. 36.

Отрезок  $mn$  заключен между дугами, радиусы которых равны  $R - 2r$  и  $r$  и углы равны  $\varphi$  и  $\varphi (R - 2r)/r$ . В таком случае на основании формулы (а) имеем

$$mn = \frac{\varphi^2}{2} (R - 2r) + \frac{\varphi^2}{2} \frac{(R - 2r)^2}{r^3} r = \frac{\varphi^2}{2r} (R - 2r)(R - r). \quad (b)$$

*Критическое* значение груза  $P$  — это то значение, которому соответствует переход от устойчивой к неустойчивой форме равновесия. Мы его найдем, приравняв нулю изменение энергии системы при всяком отклонении шарика от его среднего положения, т. е. положив

$$Q \frac{\varphi^2}{2} (R - r) = P \frac{\varphi^2}{2r} (R - 2r)(R - r),$$

откуда

$$P_{кр} = \frac{Qr}{R - 2r}.$$

При всяком значении нагрузки  $P$ , меньшем критического, форма равновесия, представленная на рис. 36, будет устойчивой, и если какая-либо случайная причина сообщит шарiku весьма малое отклонение, то по устранении этой причины он вернется в свое первоначальное положение. При нагрузках, больших критической, форма равновесия перестает быть устойчивой.

Описанная механическая модель представляет собой полную аналогию тем задачам, с которыми мы встречаемся при исследовании устойчивости упругих систем. Возьмем простейшую из них — задачу Эйлера (рис. 37).

Призматический упругий стержень, вертикально заделанный нижним концом, сжимается грузом  $P$ , приложенным к верхнему концу. Если сжимающий груз  $P$  мал, то прямая форма равновесия стержня будет устойчивой. Стержень будет испытывать лишь сжатие, и если какая-либо посторонняя причина слегка изогнет его, то по устранении этой причины он вернется в свое первоначальное состояние. Постепенно увеличивая груз  $P$ , мы можем достигнуть того предела, когда прямая форма равновесия перестает быть устойчивой и, наконец, стержень искривляется в плоскости наименьшей жесткости, как показано на рисунке.

При определении критического значения груза  $P$  применяем тот же прием, что и в разобранный выше примере. Дадим нагруженному стержню весьма малое отклонение от прямой формы. При этом потенциальная энергия деформации стержня несколько возрастет, к энергии сжатия присоединится энергия изгиба. Пусть  $\delta V$  представляет собой приращение энергии деформации. Указанное искривление стержня будет сопровождаться опусканием груза  $P$ , а следовательно, и некоторым уменьшением энергии системы. Пусть  $\delta T$  будет это уменьшение, равное работе опускающегося груза. Применяя основной критерий устойчивости, заключаем, что прямая форма равновесия сжатого стержня будет устойчива, если  $\delta V > \delta T$ , и неустойчива при  $\delta V < \delta T$ .

Критическое значение сжимающей силы найдется из условия

$$\delta V = \delta T. \quad (103)$$

Этим условием мы будем в дальнейшем часто пользоваться при определении критических нагрузок.

Заметим здесь, что в случае применения основного критерия устойчивости к упругим системам, имеющим бесконечное число степеней свободы, нужно из всех возможных форм отклонения выбрать такую, для которой уравнение (103) дает наименьшее значение критической нагрузки. Это разыскание надлежащей формы отклонения приводит нас в конце концов к тому же дифференциальному уравнению, которое приходится составлять при условии пользования первым методом решения вопросов устойчивости. Мы можем избежать интегрирования этого уравнения и получить приближенное решение задачи, заменив нашу упругую систему системой с конечным числом степеней свободы. Тогда решение задачи сводится к разысканию обыкновенного максимума или минимума, и вычисление критических нагрузок с любой степенью точности не представляет никаких принципиальных затруднений. Этот способ вычисления мы дальше поясним на отдельных примерах.

В заключение заметим, что в основание всех дальнейших выводов положен закон Гука, и потому значения критических нагрузок, вычисляемые по приводимым ниже формулам, будут соответствовать действительности лишь в том случае, если вызываемые этими нагрузками напряжения не выходят из пределов упругости.

В тех случаях, когда форма равновесия становится неустойчивой при напряжениях, превосходящих предел упругости материала, вычисление критических нагрузок должно выполняться иными методами. В настоящее время уже имеется решение простейших задач этого рода<sup>1</sup> и полученные результаты прекрасно совпадают с данными опытов.

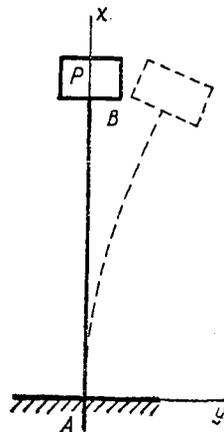


Рис. 37.

<sup>1</sup> K a r m a n Th. Untersuchungen über Knickfestigkeit. Göttingen, Philos. Dissertation, 1909. Berlin, A. W. Schade, 1909, 49 SS. [Эта работа опубликована под тем же названием в

## § 21. Задача Эйлера

В качестве простейшей задачи, где придется иметь дело с исследованием устойчивости равновесия<sup>1</sup>, рассмотрим случай, представленный на рис. 38, и на этом примере рассмотрим различные методы решения вопросов устойчивости. Применяя первый метод (см. стр. 258) для определения критического значения нагрузки  $P$ , мы должны взять в плоскости наименьшей жесткости слегка искривленную форму, указанную на рисунке пунктиром, составить для этой формы дифференциальное уравнение равновесия и из него найти то наименьшее значение  $P$ , при котором искривленная форма возможна. Это значение  $P$  и будет искомой критической нагрузкой для рассматриваемого случая. Располагая координатные оси, как указано на рисунке, получаем для искривленной оси стержня уравнение

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = -Py, \quad (104)$$

откуда, принимая во внимание, что  $y = 0$  при  $x = 0$ , и пользуясь обозначением  $\frac{P}{EJ} = k^2$ , получаем

$$y = A \sin kx. \quad (a)$$

Условие у закрепленного конца послужит нам для определения  $P_{кр}$ . Это условие будет выполнено, если  $\cos kl = 0$  или

$$kl = (2n + 1) \frac{\pi}{2}. \quad (b)$$

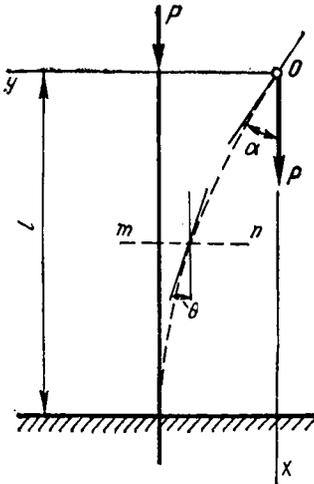


Рис. 38.

Следовательно, критическая нагрузка в рассматриваемом случае будет<sup>2</sup>

$$P_{кр} = \frac{EJ\pi^2}{4l^2}. \quad (105)$$

Что касается произвольной постоянной  $A$  в уравнении (a) изогнутой оси стержня, то она остается неопределенной. Наша система при действии критической нагрузки оказывается как бы в состоянии безразличного равновесия и может занимать различные положения вблизи прямой формы равновесия. Неопределенными остаются также и те формы, которые принимает изогнутый стержень при нагрузках, превышающих критическую. Такая неопределенность является следствием того, что мы в основание наших выводов положили приближенное уравнение (104) для изогнутой оси стержня.

Если бы мы в левой части этого уравнения поставили полное выражение для кривизны, то убедились бы, что для значения  $P$ , меньшего  $P_{кр}$ , определенное из

«Mitteilungen über Forschungsarbeiten, herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure», 1910, H. 81, 44 SS. Перепечатка: K a r m a n Th. Collected works, vol. 1, Ld., Butterworths scientific publication, London, 1956, vol. 1, pp. 90—140]; S o u t h w e l l R. V. The strength of struts. Engineering, 1912, vol. 94, August 23, pp. 249—250; См. также R a b b o w F. Über Knickfestigkeit. Die Eulersche Formel für die Knickkraft bei Zugrundelegung verschiedener Dehnungsgesetze. Dissertation, Technische Hochschule, Hannover, 1912, 47 SS.

<sup>1</sup> Задача эта была решена Эйлером. См. его статью, указанную на стр. 258.

<sup>2</sup> Мы везде ограничиваемся первой искривленной формой: все высшие формы с точками перегиба неустойчивы и не представляют практического интереса.

формулы (105), возможна лишь прямая форма равновесия стержня. При  $P$ , большем  $P_{кр}$ , возможна кроме прямой также и искривленная форма, причем при увеличении силы  $P$  искривления нарастают очень быстро. Так, например, увеличение силы  $P$  на 1,5% по сравнению с критической уже вызывает прогиб, равный почти четверти длины стержня. Следовательно, приведенное выше приближенное решение дает вполне правильное значение для критической нагрузки<sup>1</sup>, но не дает никаких указаний относительно искривлений бруса при нагрузках, больших критической.

Чтобы составить себе представление об этих искривленных формах, обратимся к более точному дифференциальному уравнению изогнутой оси стержня. Обозначая через  $\theta$  угол, составляемый касательной к изогнутой оси стержня с осью  $x$ , и через  $s$  длину<sup>2</sup> искривленной оси, отсчитываемую от верхнего конца, напишем это уравнение в таком виде:  $EJ \frac{d\theta}{ds} = -Py$ , откуда дифференцированием находим

$$EJ \frac{d^2\theta}{ds^2} = -P \sin \theta. \quad (106)$$

Если в это уравнение вместо  $s$  подставить время  $t$ , то оно совпадет с уравнением движения маятника.

Момент инерции соответствующего маятника относительно оси вращения будет определяться величиной  $EJ$  и вес его — величиной  $P$ . Если представить себе точку, движущуюся со скоростью, равной единице, вдоль искривленной оси стержня, и допустить, что в начальный момент она находилась в точке приложения силы  $P$ , то в каждом новом ее положении направление соответствующей касательной к искривленной оси определится положением качающегося маятника, если только в начальный момент он был отклонен в свое крайнее положение на угол  $\alpha$ , равный углу наклона касательной к оси  $x$  в месте приложения силы<sup>3</sup> (см. рис. 38).

При интегрировании уравнения (106) поступаем так, как с уравнением для маятника: умножаем обе части на  $\frac{d\theta}{ds}$  и выполняем первое интегрирование, тогда, принимая во внимание условие на верхнем конце, получаем

$$\frac{EJ}{2} \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 = P (\cos \theta - \cos \alpha),$$

откуда

$$ds = - \frac{d\theta}{k \sqrt{2} \sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}}.$$

<sup>1</sup> Вопрос о допустимости пользования приближенным уравнением (104) для определения величины критических нагрузок с большой полнотой был выяснен Ф. С. Ясинским. Я с и н с к и й Ф. С. Собрание сочинений. Ред. Н. Н. Митинский. Том 1. С.-Петербург, 1902. Сборник института инженеров путей сообщения, 1902, вып. 56, стр. 153—157.

<sup>2</sup> Здесь предполагается ось стержня не сжимаемой, и потому длина всей искривленной оси будет равна длине стержня  $l$ .

<sup>3</sup> Совпадение уравнения (106) с уравнением движения маятника представляет собой частный случай известной динамической аналогии Кирхгофа, который показал, что можно привести к совпадению задачу о направлении главных осей инерции тяжелого твердого тела, вращающегося около неподвижной точки, с задачей о направлениях осей подвижной системы  $x, y, z$  [см. § 19] для стержня, удерживаемого в искривленном состоянии силами, приложенными по концам. См. K i r c h h o f f G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes. J. für die reine und angewandte Mathematik, 1859, Bd 56, H. 4, SS. 285—313. H e s s W. Über die Biegung und Drillung eines unendlich dünnen elastischen Stabes mit zwei gleichen Widerständen auf dessen freies Ende eine Kraft und ein um die Hauptaxe ungleichen Widerstandes drehendes Kräftepaar einwirkt. Mathematische Annalen, 1885, Bd 25, H. 1, SS. 1—38. В русской литературе тому же вопросу посвящена работа Е. Л. Николаи. Н и к о л а и Е. Л. Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонн. Изв. С.-Петербургского политехнического института, отделение техники, естествознания и математики, 1907, том 8, вып. 1, стр. 255—288. [Перепечатка: Н и к о л а и Е. Л. Труды по механике. М., Гостехтеоретиздат, 1955, 584 стр. См. стр. 9—44].

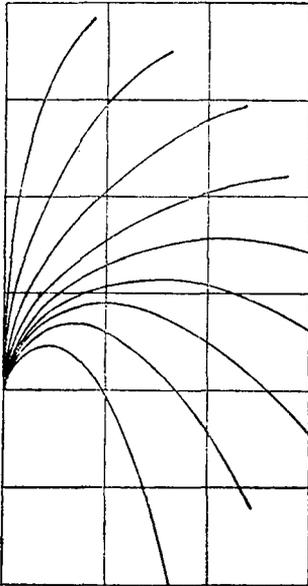


Рис. 39.

Для длины дуги мы получаем выражение

$$l = \frac{1}{k\sqrt{2}} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} = \frac{1}{2k} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}. \tag{c}$$

Положим  $\sin \frac{\alpha}{2} = p$ . Тогда, принимая во внимание, что  $\sin \frac{\theta}{2} < \sin \frac{\alpha}{2}$ , можно ввести новую переменную  $\varphi$ , положив  $\sin \frac{\theta}{2} = p \sin \varphi$ .

При изменении  $s$  от нуля до  $l$  значение  $\theta$  изменяется от  $\alpha$  до нуля, следовательно,  $\varphi$  будет изменяться от  $\frac{\pi}{2}$  до нуля. Вставляя в выражение (c) вместо  $\theta$  новую переменную  $\varphi$ , получаем

$$l = \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi}}. \tag{107}$$

Если положить  $p = \sin \frac{\alpha}{2} = 0$ , то интеграл в формуле (107) получит значение  $\pi/2$ , и мы из этой формулы найдем ранее вычисленное нами значение  $P_{кр}$ .

Для всякого конечного значения  $p$  тот же интеграл будет больше  $\pi/2$  и будет возрастать вместе с  $p$ , т. е. вместе с искривлением стержня. Этому возрастанию интеграла будет соответствовать увеличение изгибающей силы  $P$ . Зависимость искривлений от силы  $P$  легко установить, так как имеются готовые таблицы, в которых приведены значения нашего интеграла <sup>1</sup> при различных значениях  $p$ . При помощи этих таблиц мы легко получаем приводимые ниже отношения  $P/P_{кр}$  и соответствующие значения  $\alpha$  — угла наклона на концевой касательной.

$\alpha$ , град	20	40	60	80	100	120	140	160	176
$\frac{P}{P_{кр}}$	1,015	1,063	1,152	1,293	1,518	1,884	2,541	4,029	9,116
$\frac{x_1}{l}$	0,970	0,881	0,741	0,560	0,349	0,123	-0,107	-0,340	-0,577
$\frac{y_1}{l}$	0,220	0,422	0,593	0,719	0,792	0,803	0,750	0,625	0,421

Последние две строки дают нам координаты основания стержня относительно осей  $x, y$ , перемещающихся при искривлении. Наконец, на рис. 39 представлен вид соответствующих кривых изгиба <sup>2</sup>. Рассматривая эти кривые как четверть полного периода, мы путем их соединения получаем все фигуры, представленные на рис. 40.

<sup>1</sup> Это так называемый эллиптический интеграл первого рода. Таблицы его значений можно найти в известной книге Е. Jahnke, F. Emde, указанной на стр. 154.

<sup>2</sup> На вычислении координат точек искривленной оси мы здесь не останавливаемся. Интересующиеся найдут много подробно разобранных примеров в книге Saalchütz L. Der belastete Stab unter Einwirkung einer seitlichen Kraft. Auf Grundlage des strengen Ausdrucks für den Krümmungsradius. Leipzig, B. G. Teubner, 1880, 247 SS. См. также Kriemler K. J. Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren vollkommen elastischer auf Biegung beanspruchter Stäbe mit besonderer Berücksichtigung der Knickvorgänge. Karlsruhe, Druck der G. Braun'schen Hofbuchdruckerei, 1902, 56 SS. Born M. Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie in Ebene und Raum unter verschiedenen Grenzbedingungen. Dissertation. Preisschrift. Göttingen, 1906, 103 SS.

Если представить графически зависимость между силой  $P$  и прогибом  $f$  верхнего конца стержня, то получим кривую  $AB$ , изображенную на рис. 41. Кривая эта начерчена в том предположении, что все явление происходит в пределах упругости. За пределами упругости продольный изгиб протекает иначе. Если бы, например, точка  $C$  соответствовала началу появления остающихся деформаций, то при дальнейшей нагрузке зависимость между  $P$  и  $f$

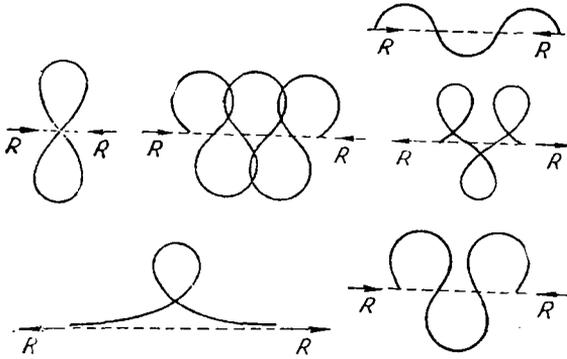


Рис. 40.

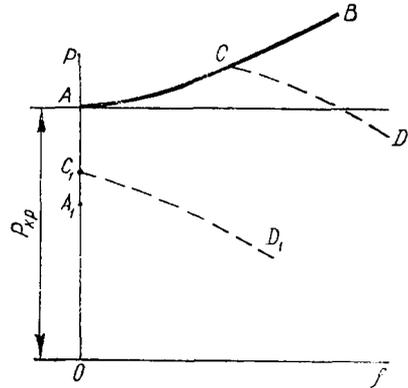


Рис. 41.

представилась бы не кривой  $BC$ , а какой-либо кривой  $CD$ . Наконец, если предел упругости будет достигнут при нагрузке  $OA_1 < P_{кр}$ , зависимость между  $P$  и  $f$  представится кривой <sup>1</sup> вида  $C_1D_1$ .

Решим теперь ту же задачу вторым способом, основанным на рассмотрении энергии системы. Для упрощения рассуждений удвоим длину стержня и будем считать концы его опертыми. При симметричной форме искривления (рис. 42) каждая половина стержня, очевидно, будет в таких же условиях, как и в выше разобранном случае Эйлера, и мы должны получить прежнее значение для  $P_{кр}$ . Одной из возможных форм равновесия будет прямая форма, которой соответствует простое сжатие стержня. Чтобы выяснить, когда кроме прямой становится возможной и искривленная форма равновесия, поступим так: дадим прямой оси стержня весьма малое искривление. Тогда к потенциальной энергии сжатия, соответствующей прямой форме равновесия, присоединится еще энергия изгиба. В общем энергия деформации возрастет на некоторую величину  $\delta V$ , но при этом сжимающие силы  $P$  совершат работу  $\delta T$ , которую мы получим, умножая  $P$  на сближенные  $\delta l$  концов стержня при искривлении. Если при всяком отклонении  $\delta V > \delta T$ , то, очевидно, прямая форма — единственная возможная форма равновесия и эта форма будет устойчива.

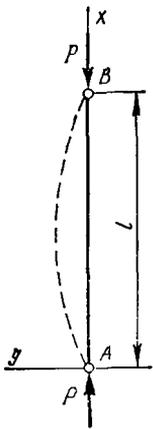


Рис. 42.

Если удастся разыскать такие искривления, для которых  $\delta V < \delta T$ , то прямая форма неустойчива и стержень под действием соответствующей нагрузки искривляется. Критическое значение сжимающей силы найдем из условия

$$\delta V = \delta T. \tag{d}$$

Из всех возможных искривлений нужно при этом выбрать то, которому соответствует наименьшее  $P$ .

<sup>1</sup> См. работу R. Southwell, упомянутую в сноске на стр. 258.

При опертых концах все возможные формы искривления могут быть представлены рядом

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l}. \quad (e)$$

Соответствующие значения энергии изгиба и работы сжимающих сил на основании ранее найденных формул (61) и (65) представятся так:

$$\delta V = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^4 a_n^2; \quad \delta T = \frac{P\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 a_n^2.$$

Вставляя это в уравнение (d), получаем

$$P = \frac{EJ\pi^2}{l^2} \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} n^4 a_n^2}{\sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 a_n^2}. \quad (f)$$

Наименьшее значение для  $P$  получается в том случае, если в суммах, которые вошли в выражение (f), все члены, кроме первого, положить равными нулю и принять, следовательно, искривление по кривой  $y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l}$ . В таком случае

$$P_{кр} = \frac{EJ\pi^2}{l^2}. \quad (108)$$

Результат этот, если принять во внимание удвоение длины стержня, совершенно совпадает с формулой (105).

В рассмотренном случае мы без затруднения нашли ту форму, которой соответствует наименьшее  $P$  и получили точное выражение для  $P_{кр}$ . Иногда этого не удастся достигнуть, тогда мы, пользуясь намеченным способом, можем найти приближенное решение, взяв для вычислений какую-либо подходящую форму искривления, удовлетворяющую условиям закрепления. Задаваясь формой кривой, мы тем самым обращаем нашу систему в систему с конечным числом степеней свободы. Число степеней свободы будет определяться числом произвольных параметров, которые входят в уравнение выбранной нами искривленной формы. Вычисляя соответствующие значения  $\delta V$  и  $\delta T$  и вставляя их в уравнение (d), находим выражение для  $P$ . Чтобы определить  $P_{кр}$ , остается выбрать для произвольных параметров такие значения, при которых  $P$  имеет наименьшую величину, представляющую, очевидно, приближенное значение для  $P_{кр}$ . Задаваясь определенной формой кривой изгиба, мы тем самым как бы вводим дополнительные связи в нашу упругую систему. Такое увеличение числа связей может сопровождаться только увеличением жесткости системы, но никак не уменьшением ее, поэтому получаемые приближенным способом значения  $P_{кр}$  могут быть только больше действительных, но ни в коем случае не меньше их. Применение приближенного приема к целому ряду задач<sup>1</sup> показывает, что точность решения, даже при условии пользования лишь одним произвольным параметром, обыкновенно вполне достаточна для практических приложений. Возьмем, например, только что рассмотренный случай стержня с опертыми концами. Если вместо

<sup>1</sup> Тимошенко С. П. Об устойчивости упругих систем. Применение новой метода к исследованию устойчивости некоторых мостовых конструкций. Изв. Киевского политехнического института, 1910, год 10, отдел инженерной механики, кн. 4, стр. 375—560. Отд. оттиск, Киев, тип. С. В. Кульженко, 1910, 188 стр. [Перепечатка: Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М., Физматгиз, 1971, стр. 208—383].

действительного искривления по синусоиде мы возьмем изгиб по кривой, соответствующей изогнутой оси балки с опертыми концами и нагруженной силой посередине, то найдем для энергии изгиба значение  $\delta V = \frac{24f^2 EJ}{l^3}$ , где  $f$  — прогиб посередине.

Для работы сжимающих сил получим

$$\delta T = \frac{P}{2} \int_0^l y'^2 dx = Pf^2 \int_0^{\frac{l}{2}} \left( \frac{3}{l} - \frac{12x^2}{l^3} \right)^2 dx = \frac{12}{5} \frac{Pf^2}{l}.$$

В таком случае уравнение (d) дает нам  $P_{кр} = \frac{10EJ}{l^2}$ , что отличается от точного решения менее чем на 1,5%.

Если бы мы в основу расчетов положили кривую изгиба балки под действием равномерной нагрузки, то получили бы  $P_{кр} = \frac{9,882EJ}{l^2}$ . Здесь погрешность всего около 0,1%.

Возможно, конечно, получить и дальнейшие приближения. Если бы мы, например, составили кривую изгиба из двух членов, т. е. основывались на системе с двумя степенями свободы, то получили бы для критической нагрузки выражение с точностью до четвертого знака <sup>1</sup>.

## § 22. Устойчивость призматического стержня при различных способах закрепления концов

Мы рассмотрели пока случаи продольного изгиба для стержня с одним свободным и другим заделанным концами и стержня с двумя опертыми концами. Для других способов закрепления концов легко найдутся нужные значения критических нагрузок, если воспользоваться решениями для балок, подвергающихся одновременному действию изгиба и сжатия (§ 9).  $P_{кр}$  — это то значение продольной сжимающей силы, при котором прогибы, вызываемые поперечной нагрузкой, неопределенно возрастают. Возьмем, например, стержень с одним заделанным и другим опертым концами (рис. 43, а). Если к продольной силе присоединить равномерную поперечную нагрузку  $q$ , то опорный момент  $M_0$  представится так [см. формулу (38)]:

$$M_0 = -\frac{ql^2}{8} \frac{4 \operatorname{tg} 2u (\operatorname{tg} u - u)}{u (\operatorname{tg} 2u - 2u)}, \quad (a)$$

где при взятых обозначениях  $u = \sqrt{\frac{Pl^2}{4EJ}}$ .

Прогиб стержня, а следовательно, и опорный момент  $M_0$  неопределенно возрастают, если знаменатель выражения (a) обращается в нуль. В таком случае

<sup>1</sup> Применяя метод энергии, мы пренебрегали изменением длины оси стержня. Если эти изменения принять в расчет, то мы придем к тем же результатам. См. Timoshenko S. Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1910, Bd 58, N. 4, SS. 337—385. [Перепечатка: Timoshenko S. The Collected Papers. N. Y.—London—Toronto, McGraw-Hill Publishing Company Ltd. 1953, pp. 1—50. Перевод на русский язык: Тимошенко С. П. Некоторые теоретические проблемы упругой устойчивости. В кн.: «Устойчивость стержней, пластин и оболочек». М., Физматгиз, 1971, стр. 386—433]. Нужно только в расчет вводить не первоначальную длину стержня, а ту, которая соответствует сжатию силой  $P_{кр}$ .

$P_{кр}$  найдется из уравнения

$$\operatorname{tg} 2u = 2u. \quad (b)$$

Первое приближение для корней этого трансцендентного уравнения проще всего найти графически (рис. 44), определив пересечения прямой  $y = 2u$  с кривыми  $y = \operatorname{tg} 2u$ .



Рис. 43.

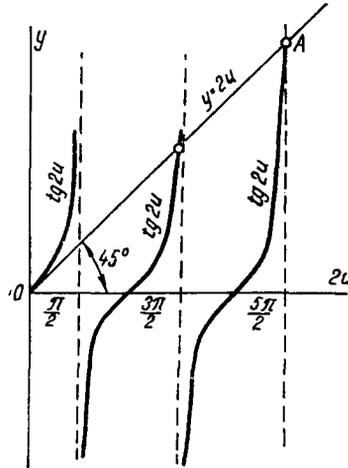


Рис. 44.

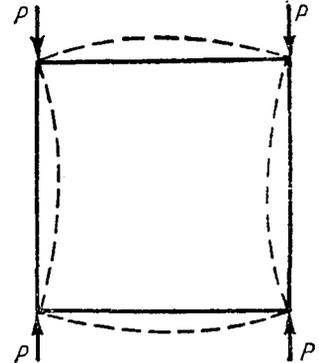


Рис. 45.

Наименьший корень уравнения, соответствующий  $P_{кр}$ , будет

$$2u = \sqrt{\frac{Pl^2}{EJ}} = 4,49,$$

тогда

$$P_{кр} = \frac{20,16EJ}{l^2}. \quad (109)$$

При одинаковой упругой заделке обоих концов стержня (см. рис. 43, б) нужный нам опорный момент представится так [см. формулу (40)]:

$$M = M_0 \frac{u \operatorname{tg} u}{u \operatorname{tg} u + \frac{\alpha Pl}{2}}.$$

Критическая нагрузка определится из условия

$$u \operatorname{tg} u + \frac{\alpha Pl}{2} = 0. \quad (c)$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент, на который нужно множить  $M$ , чтобы получить поворот конца. При  $\alpha = \infty$  имеем свободно поворачивающиеся концы и уравнение (с) дает нам

$$u = \frac{\pi}{2}; \quad P_{кр} = \frac{EJ\pi^2}{l^2}.$$

При абсолютно заделанных концах  $\alpha = 0$ . Тогда из уравнения (с) находим для первого корня значение  $u = \pi$ , следовательно,

$$P_{кр} = \frac{4EJ\pi^2}{l^2}. \quad (110)$$

Для всяких промежуточных значений  $\alpha$  уравнение (с) также легко решается.

Рассмотрим, например, устойчивость сжатых сторон квадрата с жесткими узлами при том условии, что все стержни имеют одинаковую жесткость (рис. 45). Легко видеть, что при искривлении, указанном на рисунке,  $\alpha = \frac{l}{2EJ}$ , и уравнение (с) принимает вид  $\operatorname{tg} u + u = 0$ , откуда  $u = 2,029$ . Следовательно,  $P_{кр} = \frac{16,46EJ}{l^2}$ .

Без всяких затруднений решается задача и в тех случаях, если для двух концов стержня упругость заделки различна.

### § 23. Устойчивость многопролетных стержней

Для решения вопроса об устойчивости стержней, лежащих на многих опорах, мы воспользуемся уравнениями (43) [§ 9] для неразрезных балок, подвергающихся одновременному действию изгиба и сжатия. Пусть  $l_1, l_2, \dots$  обозначают длины пролетов,  $P_1, \dots, P_4$  — сжимающие усилия в последовательных пролетах (рис. 46). Тогда, сохраняя наши прежние обозначения, будем иметь

$$l_1 \sqrt{\frac{P_1}{EJ_1}} = 2u_1; \quad l_2 \sqrt{\frac{P_2}{EJ_2}} = 2u_2.$$

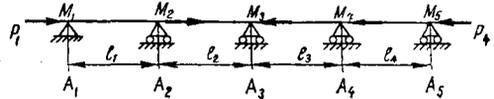


Рис. 46.

Если допустить, что под действием продольных сил стержень искривился, то в опорных сечениях появятся моменты, связанные между собой уравнениями вида (43):

$$\begin{aligned} \frac{M_{n/n}}{6EJ_n} \psi_1(2u_n) + M_{n+1} \left[ \frac{l_n}{3EJ_n} \psi_2(2u_n) + \frac{l_{n+1}}{3EJ_{n+1}} \psi_2(2u_{n+1}) \right] + \\ + \frac{M_{n+2} l_{n+1}}{6EJ_{n+1}} \psi_1(2u_{n+1}) = 0. \end{aligned} \quad (a)$$

Число этих уравнений будет равно числу промежуточных опор.

В том случае, когда концы стержня не могут свободно поворачиваться и, следовательно, концевые моменты отличны от нуля, мы к уравнениям вида (а) должны присоединить еще два уравнения, которые легко могут быть написаны на основании условий закрепления [см. формулу (42)]. Полученная таким образом система уравнений может дать для опорных моментов решения, отличные от нуля<sup>1</sup>, лишь в том случае, если определитель этой системы обращается в нуль. Равенство нулю определителя и даст нам нужное уравнение для нахождения критической нагрузки.

В случае одной промежуточной опоры и опертых концов будем иметь одно уравнение вида (а), и условие для определения критической силы напишется так:

$$\frac{l_1}{3EJ_1} \psi_2(2u_1) + \frac{l_2}{3EJ_2} \psi_2(2u_2) = 0. \quad (b)$$

<sup>1</sup> Равенство нулю всех опорных моментов соответствует или прямой форме равновесия стержня, или тому случаю, когда все пролеты при искривлении изгибаются независимо друг от друга, т. е. когда сжимающее усилие в каждом пролете равно критической силе для этого пролета. В последнем случае будем иметь  $2u_1 = 2u_2 = \dots = \pi$ .

Если продольные силы приложены лишь по концам, то вставляя вместо  $\psi_2(2u_1)$  и  $\psi_2(2u_2)$  их значения (§ 9), получаем такое уравнение:

$$\left(1 - \frac{2u_1}{\operatorname{tg} 2u_1}\right) \frac{1}{l_1} + \left(1 - \frac{2u_2}{\operatorname{tg} 2u_2}\right) \frac{1}{l_2} = 0. \quad (c)$$

Наименьшее значение силы  $P$ , удовлетворяющее этому уравнению, и будет искомая критическая нагрузка. В случае стержня постоянного сечения уравнение (c), определяющее критическую нагрузку, может быть представлено в более простом виде.

Для стержня, имеющего две промежуточные опоры и сжатого силами, приложенными по концам, уравнения (a) напишутся так:

$$\begin{aligned} M_2 \left[ \frac{1}{l_1} \left(1 - \frac{2u_1}{\operatorname{tg} 2u_1}\right) + \frac{1}{l_2} \left(1 - \frac{2u_2}{\operatorname{tg} 2u_2}\right) \right] + M_3 \frac{1}{l_2} \left( \frac{2u_2}{\sin 2u_2} - 1 \right) &= 0; \\ M_2 \frac{1}{l_2} \left( \frac{2u_2}{\sin 2u_2} - 1 \right) + M_3 \left[ \frac{1}{l_2} \left(1 - \frac{2u_2}{\operatorname{tg} 2u_2}\right) + \frac{1}{l_3} \left(1 - \frac{2u_3}{\operatorname{tg} 2u_3}\right) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (d)$$

Приравняв нулю определитель этих уравнений, получим уравнение для определения критической нагрузки. Разыскание корней этого уравнения приходится производить путем последовательных попыток. Пределы для наименьшего корня мы легко установим, если представим себе стержень разрезанным над опорами и вычислим критические нагрузки для отдельных пролетов. Искомая критическая нагрузка, очевидно, будет заключаться между наибольшей и наименьшей из тех, которые мы найдем для отдельных пролетов. Таким образом, расчет на продольный изгиб многопролетных стержней не встречает каких-либо принципиальных затруднений, вся трудность заключается лишь в разыскании корней соответствующего трансцендентного уравнения.

Способ, намеченный нами здесь для абсолютно жестких опор, без особых затруднений может быть распространен на случай упругих опор, с которыми мы встречаемся, например, при расчете на устойчивость сжатых поясов открытых мостов<sup>1</sup>.

Для стержней постоянного сечения и равномерно сжатых по всей длине поставленная задача решается проще, если мы за известные примем не опорные моменты, а опорные реакции. Для определения промежуточных опорных реакций в случае балок, подвергающихся одновременному действию сжатия и равномерной поперечной нагрузки, мы имеем систему уравнений (44) [§ 9]. Критическое значение сжимающей силы — это то наименьшее значение, при котором определитель уравнений (44) обращается в нуль.

Возьмем в качестве простейшего примера стержень, концы которого оперты на абсолютно жесткие опоры. Промежуточное сечение лежит на упругой опоре (рис. 47).

Для определения промежуточной опорной реакции мы будем иметь одно уравнение вида (44). Приравнявая нулю коэффициент при  $R$  в этом уравнении,

<sup>1</sup> Подробное рассмотрение этого вопроса можно найти в статьях Г. Циммермана. Z i m m e r m a n n H. Der gerade Stab auf elastischen Einzelstützen mit Belastung durch längsgerichtete Kräfte. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. Sitzung der physikalisch — mathematischen Klasse. Berlin, 1907, 1 Halbband, Strück 11, SS. 235—244. Das Stabeck auf elastischen Einzelstützen mit Belastung durch längsgerichtete Kräfte. Там же, 1907, 1 Halbband, Strück 18, SS. 326—338; Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit mehreren Feldern. Там же, 1909, 1 Halbband, Strück 6, SS. 180—212; Strück 12, SS. 348—362.

получаем условие для определения критического значения сжимающей силы. Положив  $l_1 + l_2 = l$ ;  $\sqrt{\frac{P}{EJ}} = k$ ;  $kl = 2u$ , представим это условие так:

$$\sin kl_1 \sin kl_2 = 2u \sin 2u \left( \frac{l_1 l_2}{l^2} - \frac{\alpha P}{l} \right). \quad (e)$$

Теперь остается только путем последовательных попыток найти наименьшее значение  $P$ , удовлетворяющее полученному уравнению. При  $\alpha = 0$  будем иметь бесконечно жесткую промежуточную опору и уравнение (e) совпадет с тем, которое получается из (c) при по-

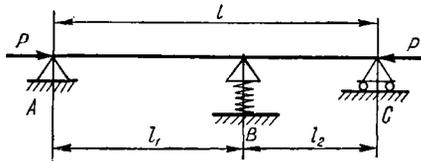


Рис. 47.

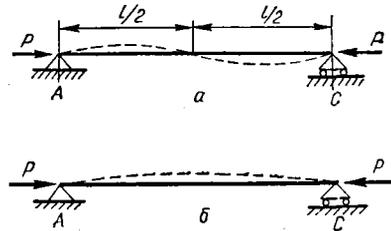


Рис. 48.

стоянному сечению стержня. При  $\alpha = \infty$  будем иметь стержень на двух опорах со свободно поворачивающимися концами, и для критической нагрузки получаем  $2u = \pi$ .

Для всех промежуточных значений  $\alpha P_{кр}$  будет заключаться между предельными значениями, соответствующими  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \infty$ , и найдется путем попыток из уравнения (e). Наиболее просто решается этот вопрос в том случае, когда промежуточная опора делит сжатый стержень пополам. При этом будем иметь  $kl_1 = kl_2 = u$ , и уравнение (e) переписется так:

$$\sin u \left[ -\sin u + 4u \cos u \left( \frac{1}{4} - \frac{\alpha P}{l} \right) \right] = 0. \quad (f)$$

Крайние пределы для  $P$  в данном случае устанавливаются очень просто. Когда  $\alpha = 0$ , стержень при выпучивании делится на две совершенно независимые полуолны (рис. 48, a) и критическая нагрузка будет такая же, как для стержня половинной длины со свободно поворачивающимися концами. Высший предел для наименьшего корня уравнения (f) будет, следовательно,  $u = \pi$ .

Для  $\alpha = \infty$ , которому соответствует искривление, представленное на рис. 48, б, получим низший предел наименьшего корня уравнения (f):  $u = \pi/2$ .

Для всех промежуточных значений  $\alpha$  наименьший корень уравнения (f) будет оставаться в пределах  $\pi/2 < u < \pi$ .

При этом  $\sin u > 0$ ,  $\cos u < 0$ , следовательно, второй множитель в уравнении (f) может обращаться в нуль лишь при условии

$$\frac{\alpha P}{l} \geq \frac{1}{4}. \quad (g)$$

Для всех значений  $\alpha$ , меньших, чем те, которые определяются неравенством (g), т. е. для всех более жестких опор критическая нагрузка соответствует обращению в нуль первого множителя в выражении (f) и мы будем иметь  $u = \pi$ , т. е. ту же критическую силу, что и при абсолютно жесткой промежуточной опоре. Неравенство (g) представляет практический интерес, так как иногда приходится подбирать жесткость промежуточной опоры, и мы при помощи этого неравенства всегда сможем подобрать жесткость так, чтобы среднюю опору можно было принимать за абсолютно жесткую.

Наименьшая жесткость, при которой опору можно считать абсолютно жесткой, определится на основании (g) из условия

$$\alpha = \frac{1}{4} \frac{l}{P_{\text{кр}}} = \frac{1}{4} \frac{l^3}{4EJ\pi^2}. \quad (g')$$

Пользуясь вторым приемом для решения вопросов устойчивости, мы в данном случае весьма просто находим приближенное решение, допустив, что выпучивающийся под действием продольной силы стержень изгибается по синусоиде  $y = f \sin \frac{\pi x}{l}$ .

Приращение энергии деформации составит из энергии изгиба  $\delta V_1 = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} f^2$  и из энергии, накапливаемой в оседающей опоре,  $\delta V_2 = \frac{f^2}{2\alpha}$ .

Для работы сжимающей силы  $P$  при сближении концов стержня имеем  $\delta T = P\delta l = \frac{P\pi^2}{4l} f^2$ . Критическая сила определится из условия  $\delta V_1 + \delta V_2 = \delta T$  или  $\frac{P\pi^2}{4l} = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} + \frac{1}{2\alpha}$ . Следовательно,

$$P = \frac{EJ\pi^2}{l^2} + \frac{2l}{\alpha\pi^2}. \quad (k)$$

При малой жесткости промежуточной опоры (при большом  $\alpha$ ) формула эта имеет большую точность. С возрастанием жесткости точность формулы убывает, но даже и в предельном случае, когда опора начинает вести себя как абсолютно жесткая, мы получаем по приближенной формуле вполне удовлетворительный результат. В самом деле, предельное значение жесткости  $\alpha$ , при котором опора перестает смещаться и, следовательно,  $P_{\text{кр}} = \frac{4EJ\pi^2}{l^2}$ , определится по приближенной формуле (k) из условия  $\frac{2l}{\alpha\pi^2} = \frac{3EJ\pi^2}{l^2}$ , откуда  $\alpha = \frac{8}{3\pi^2} \frac{l}{P_{\text{кр}}}$ , что отличается от точного значения (g') примерно на 7%.

Если промежуточная опора расположена не посередине пролета, то для определения  $P_{\text{кр}}$  нужно обратиться к уравнению (e). Нижний предел для наименьшего корня, очевидно, сохраняется прежним, он соответствует абсолютно гибкой промежуточной опоре. Верхний предел для  $u$  получим при  $\alpha = 0$ . Он будет меньше  $\pi$ . В самом деле, при  $u = \pi$  и при  $\alpha = 0$  правая часть уравнения (e) будет равна нулю, левая же часть, очевидно, будет отрицательной. Несколько уменьшив  $u$ , мы сможем уравнять левую и правую части. Следовательно, смещение средней опоры от середины пролета сопровождается уменьшением устойчивости системы. Установив пределы, разыскиваем нужный нам наименьший корень уравнения (e) путем последовательных попыток.

При этом необходимо иметь в виду следующее обстоятельство: при  $\frac{\alpha P}{l} = \frac{l_1 l_2}{l^2}$  или  $\alpha = \frac{l_1 l_2}{Pl}$  правая часть уравнения (e) обращается в нуль, и если предположить, что  $l_1 > l_2$ , то наименьшее значение для  $P$  получим, положив  $kl_1 = \frac{2ul_1}{l} = \pi$ , откуда  $u = \frac{l\pi}{2l_1}$ . Отсюда заключаем, что при  $\alpha > \frac{l_1 l_2}{Pl}$  искомый корень уравнения (e) заключается в пределах  $\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi l}{2l_1}$ . При большей жесткости промежуточной опоры корень лежит в пределах  $\frac{\pi l}{2l_1} < u < \pi$ .

Если сжатый стержень концами опирается на абсолютно жесткие опоры и в ряде промежуточных сечений лежит на упругих опорах, то при определении критической нагрузки придется взять систему уравнений вида (44). Число таких

уравнений будет соответствовать числу промежуточных опор. Приравняв к нулю определитель этих уравнений, получим трансцендентное уравнение для разыскания критической нагрузки.

Решение этого уравнения возможно лишь путем последовательных попыток. Что касается тех значений коэффициентов жесткости  $\alpha$ , при которых опоры ведут себя как абсолютно жесткие, то в случае равной жесткости опор и равных пролетов задача эта решается без особых затруднений<sup>1</sup>. Предположим, что наш стержень подразделяется на  $m$  равных пролетов. В таком случае при абсолютной жесткости опор критическая нагрузка определится условием  $kl/m = \pi$ , откуда

$$P_{кр} = \frac{m^2 EJ \pi^2}{l^2}.$$

Будем теперь искать то значение коэффициента жесткости  $\alpha$ , при котором критическая нагрузка меньше только что найденной на бесконечно малую величину. В таком случае

$$\frac{kl}{m} = \pi - \varepsilon, \quad (h)$$

где  $\varepsilon$  — бесконечно малая величина.

Вставляя (h) в уравнения вида (44) и отбрасывая малые величины по сравнению с конечными, находим, что все члены, заключающие произведения синусов, пропадут. Это значительно упрощает наши уравнения. Так, например, в случае двух промежуточных опор уравнения эти напишутся так:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{9} \frac{l}{P} - \alpha\right) R_1 + \frac{l}{9P} R_2 &= 0; \\ \frac{l}{9P} R_1 + \left(\frac{2}{9} \frac{l}{P} - \alpha\right) R_2 &= 0. \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю определитель этих уравнений, получаем

$$\left(\frac{2}{9} \frac{l}{P_{кр}} - \alpha\right)^2 - \left(\frac{l}{9P_{кр}}\right)^2 = 0.$$

Отсюда находим нужный нам корень

$$\alpha = \frac{0,333l}{3P_{кр}}.$$

Подобным же образом для трех промежуточных опор найдем

$$\alpha = \frac{0,293l}{4P_{кр}}.$$

Вообще в случае балки, имеющей  $m$  пролетов, для той предельной жесткости, при которой опоры ведут себя как абсолютно жесткие, получим такое выражение:

$$\alpha = \frac{\beta l}{mP_{кр}}. \quad (111)$$

Значения  $\beta$  следующие:

$m$	2	3	4	5	6	7	9	11
$\beta$	0,500	0,333	0,293	0,276	0,268	0,263	0,258	0,255

<sup>1</sup> Решение это принадлежит И. Г. Бубнову. Б у б н о в И. Г. Строительная механика корабля. Часть I. С.-Петербург, тип. Морского министерства при Главном Адмиралтействе, 1912, стр. 259. Из этой книги заимствован приведенный ниже вывод.

## § 24. Продольный изгиб стержней переменного сечения

Эйлер, которому принадлежат первые решения в области устойчивости сжатых стержней, не ограничился случаем призматического стержня и рассмотрел несколько задач, где поперечное сечение стержня изменялось вдоль оси. Так, например, им решена задача об устойчивости конического стержня и стержня, боковая поверхность которого представляет собой параболоид вращения<sup>1</sup>. Некоторые задачи этого рода представляют практический интерес и мы приводим здесь нужные для расчетов численные результаты.

Рассмотрим случай, когда момент инерции поперечного сечения, соответствующий изгибу стержня в плоскости наименьшей жесткости  $xy$ , изменяется пропорционально квадрату расстояния от некоторой точки  $O$ , лежащей на оси  $x$  (рис. 49)<sup>2</sup>. Пусть  $J_0$  и  $J_1$  — моменты инерции для верхнего и нижнего сечений. Тогда  $J_0 = Aa^2$ ;  $J_1 = A(l+a)^2$ , где  $A$  — некоторый постоянный коэффициент. Положим

$$J_0 : J_1 = a^2 : (l+a)^2 = k^4.$$

В таком случае

$$a = \frac{k^2 l}{1 - k^2},$$

$$A = \frac{J_0}{a^2} = \frac{J_0}{l^2} \left( \frac{1 - k^2}{k^2} \right)^2.$$

При выбранном расположении координатных осей дифференциальное уравнение напишется так:

$$EAx^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py. \quad (a)$$

Уравнение это легко приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами, и общий интеграл его в случае, когда  $\frac{P}{FA} > \frac{1}{4}$ , представится так:

$$y = \sqrt{x} \left[ C_1 \sin \left( \beta \ln \frac{x}{a} \right) + C_2 \cos \left( \beta \ln \frac{x}{a} \right) \right]. \quad (b)$$

Здесь для сокращения записи введено обозначение

$$\beta = + \sqrt{\frac{P}{EA} - \frac{1}{4}}.$$

Условия закрепления для стержня с нижним заделанным и верхним свободным концами будут такие:  $(y)_{x=a} = 0$ ;  $(y')_{x=l+a} = 0$ .

Первое из этих условий будет удовлетворено, если мы в общем интеграле положим  $C_2 = 0$ . Второе условие приводит нас к трансцендентному уравнению

$$\operatorname{tg}(2\beta \ln k) - 2\beta = 0, \quad (c)$$

<sup>1</sup> См. работу L. Euler., указанную на стр. 258.

<sup>2</sup> Примерно такие условия мы будем иметь при расчете на продольный изгиб пирамидальной клепанной стойки, составленной из четырех уголков и соединительных решеток. Момент инерции сечения можно принять пропорциональным квадрату расстояния между центрами тяжести уголков. См. Franke A Knicksicherheit bei entsprechender Zunahme des Trägheitsmoments des Stabquerschnittes. Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen. Hannover, 1907, Bd 53 (Bd 12 der neuen Folge), N 5, SS. 471—482. Д и н н и к А. Н. О продольном изгибе при распределенной нагрузке. Изв. Екатеринбургского горного института, 1915, том 11, вып. 1, стр. 1—19. [Перепечатка: Д и н н и к А. Н. Избранные труды. Том 3. Киев, изд-во АН УССР, 1956, стр. 187—201]. В этой работе решена задача о продольном изгибе стержней, жесткость которых изменяется по биномиальному закону.

наименьший корень которого определяет величину  $P_{кр}$ . Величина эта будет зависеть от  $k$ , и мы окончательную формулу можем представить так:

$$P_{кр} = \mu \frac{EJ_1}{l^2}, \quad (112)$$

где  $\mu$  — величина, определяемая на основании решения уравнения (с). При  $k < 1$ , как это мы приняли в нашем выводе, очевидно,  $\mu < \frac{\pi^2}{4}$ . Для стержня, расширяющегося кверху,  $k > 1$ , и мы получим  $\mu > \frac{\pi^2}{4}$ . Несколько числовых результатов приведено<sup>1</sup> в табл. 3.

Таблица 3

$\frac{J_0}{J_1}$	$\mu$	$\frac{J_0}{J_1}$	$\mu$
0	0,250	0,8	2,311
0,1	1,350	0,9	2,392
0,2	1,593	1,0	2,467
0,3	1,763	2	3,055
0,4	1,904	3	3,485
0,5	2,023	4	3,837
0,6	2,128	5	4,141
0,7	2,223	10	5,297

Таблица 4

$\frac{J_0}{J_1}$	$\mu$	$\frac{J_0}{J_1}$	$\mu$
0	0	0,8	2,308
0,1	1,202	0,9	2,391
0,2	1,505	1	2,467
0,3	1,710	2	3,025
0,4	1,870	3	3,400
0,5	2,002	4	3,691
0,6	2,116	5	3,932
0,7	2,217	10	4,773

Числами этой таблицы, очевидно, можно воспользоваться при расчете стержня, полученного путем соединения основаниями двух равных стержней только что рассмотренного вида и опертого по концам. Каждая половина полученного таким образом стержня будет совершенно в таких же условиях, как и рассмотренный выше стержень.

Решение уравнения (а) для тех случаев, когда  $\frac{P}{EA} < \frac{1}{4}$ , приводит нас при заданных условиях на концах к прямой форме равновесия.

В случае конического стержня, располагая координатные оси, как указано на рис. 50, придем к уравнению

$$EAx^4 \frac{d^2y}{dx^2} = -Py. \quad (d)$$

При этом  $Aa^4 = J_0$ ;  $A(l+a)^4 = J_1$ .

Решение уравнения (d) показывает, что критическая нагрузка может быть определена по формуле (112). Нужно только вместо  $\mu$  подставить числа<sup>2</sup> из табл. 4.

Если оба конца конического стержня оперты, то для получения критической силы нужно в формулу (112) вместо  $\mu$  подставить его значения из табл. 5.

Некоторый практический интерес представляет форма стержня, которая при заданном  $P_{кр}$  имеет наименьший объем<sup>3</sup>. Оказывается, что эта форма представляет собой тело вращения, причем радиус сечения изменяется так, что его момент сопротивления все время

<sup>1</sup> Таблицы для различных способов закрепления концов рассматриваемого стержня составлены А. Н. Динником. См. его работу, упомянутую в сноске на стр. 274.

<sup>2</sup> Числа заимствованы из указанной на стр. 274 работы А. Н. Динника.

<sup>3</sup> Задачей этой занимался еще Ж. Лагранж Lagrange J. L. Sur la figure des colonnes. Miscellanea Taurinensia Royal Society of Turin, t. 5, 1770—1773, p. 123 [Перепечатка: Oeuvres de Lagrange, Publiées par les soins de M. I. A. Serret. T. 2. Paris, Gauthier — Villars, 1868, pp. 125—170]. Однако решение ее удалось получить значительно позднее Т. Клаузену Clausen Th. Sur la forme des colonnes architectoniques. Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Académie Impériale des sciences de St.-Petersbourg, 1851, t. 9, pp. 369—380. См. стр. 325—329 части первой второго тома работы, I. Todhunter, K. Pearson, указанной на стр. 13. Дальнейшее развитие той же задачи и распространение решения на случай действия сил, распределенных по длине стержня, дал Е. Л. Николаи. См. его статью, указанную в сноске на стр. 263. См. также Blasius H. Träger kleinster durch Biegung und Stäbe grosser Knickfestigkeit bei gegebenen Materialverbrauch. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1913, Bd 62, H. 2, SS. 182—197.

остается пропорциональным изгибающему моменту  $P_y$  от продольной сжимающей силы (см. рис. 38). Если через  $J_1$  обозначим момент инерции сечения в плоскости заделки, то для критической нагрузки в случае формы наименьшего объема получим

Таблица 5

$\frac{J_0}{J_1}$	$\mu$	$\frac{J_0}{J_1}$	$\mu$
0	0	0,6	7,645
0,1	3,121	0,7	8,258
0,2	4,414	0,8	8,828
0,3	5,406	0,9	9,363
0,4	6,242	1,0	9,870
0,5	6,979		

$$P_{кр} = \frac{3\pi^2 EJ_1}{16 l^2} = 1,85 \frac{EJ_1}{l^2}.$$

Мы до сих пор рассматривали непрерывное изменение поперечного сечения стержня. В случае резких изменений (рис. 51) нужно стержень разбить на участки и отдельно составить дифференциальное уравнение для каждого участка. Если каждый участок имеет призматическую форму, то решение задачи не представляет никаких затруднений<sup>1</sup>, и мы на основании условий на концах и условий на границах участков получаем трансцендентное уравнение для определения критической нагрузки:

деления  $P_{кр}$ . Например, в случае двух участков (см. рис. 51), пользуясь обозначениями  $\sqrt{\frac{P}{EJ_0}} = k_1$ ;  $\sqrt{\frac{P}{EJ_1}} = k_2$ , получаем такое уравнение для определения критической нагрузки:

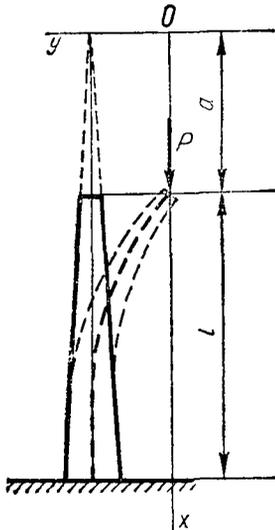


Рис. 50.

$$\operatorname{tg} k_1 a \operatorname{tg} k_2 b = \frac{k_1}{k_2}. \quad (e)$$

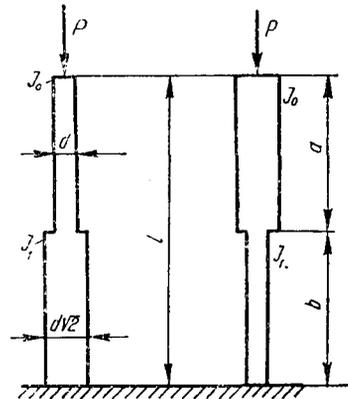


Рис. 51.

Если взять  $b = a$  и положить  $J_1 = 4J_0$ , то найдем

$$P_{кр} = \frac{6,08 EJ_0}{l^2}.$$

Если  $J_1 = \frac{1}{4} J_0$ , то  $P_{кр} = 2,83 \frac{EJ_1}{l^2}$ .

Пользуясь уравнением (e), можно без затруднений выяснить влияние ослаблений сечения на небольшом протяжении по длине стержня. Влияние ослабления получается тем большим, чем оно ближе к заделанному основанию стержня.

<sup>1</sup> Frankе А. Die Tragkraft der Säulen bei veränderlichem Querschnitt. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1901, Bd 46, N. 4, SS. 419—434. Тимошенко С. П. К вопросу о продольном изгибе. Изв. Киевского политехнического института, 1908, год 8, кв. 2, стр. 181—212. Отд. оттиск, Киев, тип. С. В. Кульженко, 1908, 32 стр. [Перепечатка: Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М., Физматгиз, 1971, стр. 166—190].

§ 25. Продольный изгиб стержней под действием сил, распределенных по длине

Рассмотрим сначала непрерывное распределение сил вдоль оси стержня и в качестве простейшего примера возьмем продольный изгиб призматического стержня под действием собственного веса. Нижний конец стержня предполагаем заделанным, верхний — свободным (рис. 52).

Дифференциальное уравнение изогнутой оси напишется так:

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = M. \tag{a}$$

В данном случае изгибающий момент представится интегралом  $\int_0^{l-x} q d\xi (\eta - y)$ . Чтобы освободиться от этого интеграла, дифференцируем наше уравнение (a) по  $x$ , тогда получаем

$$EJ \frac{d^3y}{dx^3} = -q(l-x) \frac{dy}{dx}. \tag{b}$$

Введем теперь вместо  $x$  новую независимую переменную  $z$ , положив

$$\frac{2}{3} \sqrt{\frac{q}{EJ}} (l-x)^{3/2} = z.$$

Тогда, обозначая через  $y'$ ,  $y''$ , ... последовательные производные от  $y$  по новой переменной, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -y'z \sqrt{\frac{3}{2} \frac{q}{EJ}}; & \frac{d^2y}{dx^2} &= \left(\frac{3}{2} \frac{q}{EJ}\right)^{3/2} \left(\frac{1}{3}z^{-1/3}y' + z^{2/3}y''\right); \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{3}{2} \frac{q}{EJ} \left(\frac{1}{9}z^{-1}y' - y'' - zy'''\right). \end{aligned} \tag{c}$$

Вставляя это в уравнение (b), приходим к такому уравнению:

$$y''' + \frac{1}{z}y'' + \left(1 - \frac{1}{9z^2}\right)y' = 0,$$

или, полагая  $y' = p$ , получаем

$$p'' + \frac{1}{z}p' + \left(1 - \frac{1}{9z^2}\right)p = 0. \tag{113}$$

Будем искать интеграл этого уравнения<sup>1</sup> в виде бесконечного ряда  $p = a_1z^{m_1} + a_2z^{m_2} + a_3z^{m_3} + \dots$

Вставляя этот ряд в уравнение (113), убеждаемся, что между показателями должна быть такая зависимость:

$$m_2 = m_1 + 2; \quad m_3 = m_2 + 2.$$

Связь между последовательными коэффициентами напишется так:  $a_n = -\frac{a_{n-1}}{m_n^2 - 1}$ .

Показатель  $m_1$  определяется из уравнения  $m_1^2 - \frac{1}{9} = 0$ , откуда  $m_1 = \pm 1/3$ .

Соответственно этим двум решениям для  $m_1$  общий интеграл уравнения (113) представится в виде двух бесконечных рядов, расположенных по возрастающим

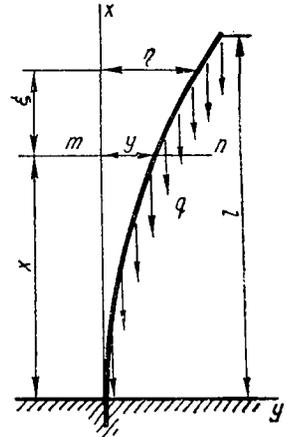


Рис. 52.

<sup>1</sup> С уравнением подобного вида мы уже встречались в первой части курса. См. стр. 154.

степеням  $z$ , и мы будем иметь <sup>1</sup>

$$p = C_1 z^{-\frac{1}{3}} \left( 1 - \frac{3z^2}{2 \cdot 4} + \frac{3^2 z^4}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 10} - \dots \right) + C_2 z^{\frac{1}{3}} \left( 1 - \frac{3z^2}{2 \cdot 8} + \frac{3^2 z^4}{2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 14} - \dots \right). \quad (d)$$

Подберем теперь произвольные постоянные так, чтобы были удовлетворены условия закрепления. При выбранном расположении координат мы имеем у нижнего, заделанного, конца  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $\frac{dy}{dx} = 0$ , следовательно, [см. формулу (с)]  $y' = 0$ . У верхнего конца имеем  $x = l$ ;  $\frac{dy}{dx^2} = 0$ , следовательно,

$$z = 0; \quad z^{-\frac{1}{3}} y' + 3z^{\frac{2}{3}} y'' = 0. \quad (e)$$

Рассмотрим последнее условие (e). При малых значениях  $z$  мы можем в общем решении (d) ограничиться лишь первыми членами рядов и положить

$$y' = C_1 z^{-\frac{1}{3}} + C_2 z^{\frac{1}{3}}; \quad y'' = -C_1 \frac{1}{3} z^{-\frac{4}{3}} + C_2 \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}}$$

Вставляя это в условие (e), заключаем, что  $C_2 = 0$ . Следовательно,

$$p = \frac{dy}{dz} = -\frac{dy}{dx} z^{-\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{2 EJ}{3 q}} = C_1 z^{-\frac{1}{3}} \left( 1 - \frac{3z^2}{2 \cdot 4} + \frac{3^2 z^4}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 10} - \dots \right). \quad (f)$$

На нижнем конце, т. е. при

$$z = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{ql^3}{EJ}},$$

производная  $p$ , как мы видели, должна обращаться в нуль.

На основании этого получаем уравнение

$$C_1 \left( \frac{2}{3} \sqrt{\frac{ql^3}{EJ}} \right)^{-\frac{1}{3}} \left[ 1 - \frac{3}{2 \cdot 4} \left( \frac{4}{9} \frac{ql^3}{EJ} \right) + \frac{3^2}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 10} \left( \frac{4}{9} \frac{ql^3}{EJ} \right)^2 - \dots \right] = 0.$$

При помощи готовых таблиц для функции, которая представляет величину  $p$ , легко находится наименьший корень полученного уравнения:

$$\frac{2}{3} \sqrt{\frac{ql^3}{EJ}} = 1,87.$$

Для критического значения собственного веса получаем <sup>2</sup>:

$$Q_{кр} = ql = \frac{7,87 EJ}{l^2}.$$

<sup>1</sup> Частные интегралы для  $p$ , которые мы даем в виде бесконечных рядов, представляют собой, при надлежащем выборе постоянных множителей, функции Бесселя порядка  $-1/3$  и  $+1/3$ . Таблицы для этих функций составлены А. Н. Динником. Д и н н и к А. Н. Продольный изгиб при действии собственного веса. Изв. Донского политехнического института. Новочеркасск, 1912, том 1, отдел II, стр. 19—46.

<sup>2</sup> Решение рассматриваемой задачи получено А. Гринхиллом. Greenhill A. G. Determination of the greatest height consistent with stability that a vertical pole or mast can be made, and of the greatest height to which a tree of given proportions can grow. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, mathematical and physical sciences, 1881, vol. 4, pp. 65—73. В этой работе А. Гринхилл намечает целый класс задач по продольному изгибу, решаемых в функциях Бесселя. Численное решение этих задач имеется в работе А. Н. Динника, указанной в ссылке на стр. 274.

Для решения рассмотренной задачи с успехом можно применить приближенный метод решения вопросов устойчивости и найти критическое значение собственного веса на основании рассмотрения энергии системы<sup>1</sup>. Мы используем этот метод для приближенной оценки влияния собственного веса на величину критической нагрузки  $P$  (рис. 53).

Очевидно, вследствие действия собственного веса величина критической нагрузки для случая, представленного на рис. 53, будет меньше той, что нам дает формула (105), полученная для невесомого стержня. Допустим, что под

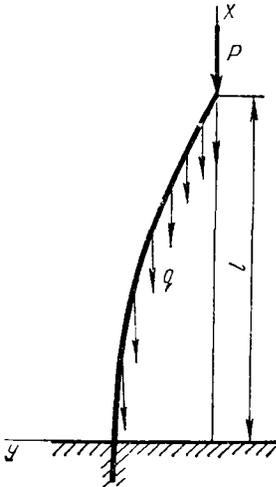


Рис. 53.

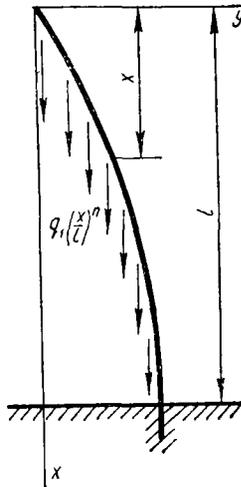


Рис. 54.

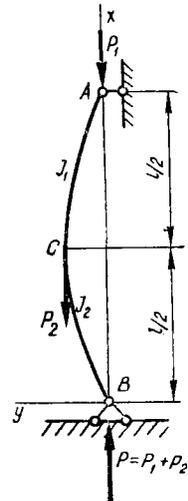


Рис. 55.

действием силы  $P$  и собственного веса стержень изогнулся по кривой  $y = f \cos \frac{\pi x}{2l}$ , которая удовлетворяет условиям на концах.

Потенциальная энергия изгиба будет

$$\delta V = \frac{EJ}{2} \int y'^2 dx = \frac{EJ\pi^4}{64l^3} f^2.$$

Работа внешних сил составит в этом случае из работы груза  $P$  и из работы собственного веса. Выражение для работы будет такое:

$$\delta T = \frac{P}{2} \int_0^l y'^2 dx + \frac{q}{2} \int_0^l y'^2 (l-x) dx = \left[ \frac{P\pi^2}{16l} + \frac{q}{8} \left( \frac{\pi^2}{4} - 1 \right) \right] f^2.$$

Из уравнения  $\delta V = \delta T$  находим

$$P_{кр} = \frac{EJ\pi^2}{4l^2} - \frac{2ql}{\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{4} - 1 \right) \approx \frac{EJ\pi^2}{4l^2} - 0,3ql,$$

т. е. действие собственного веса можно приравнять действию приложенной к верхнему концу сосредоточенной силы, равной  $0,3ql$ .

<sup>1</sup> См. стр. 17 нашей работы, указанной в сноске на стр. 266.

Кроме рассмотренного случая продольного изгиба призматического стержня под действием собственного веса к уравнению типа (113) приводится целый ряд других задач устойчивости. Оказывается, что всякий раз, когда жесткость стержня изменяется вдоль оси (рис. 54) по закону  $EJ = EJ_1 \left(\frac{x}{l}\right)^m$  и интенсивность собственного веса — по закону  $q = q_1 \left(\frac{x}{l}\right)^n$ , мы можем привести дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня к типу (113), путем введения новой переменной  $z$ , положив

Таблица 6

$n$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
0	7,87	5,78	3,67	—
1	16,1	13,0	9,87	6,59
2	27,3	23,1	18,9	14,7
3	41,3	36,1	30,9	25,7
4	—	52,1	45,8	39,5
5	—	—	63,6	—

пу (113), путем введения новой переменной  $z$ , положив

$$z^2 = \frac{4q_1 l^{m-n}}{EJ_1 (n+1)(m-n-3)^2 x^{m-n-3}}.$$

Введя обозначение  $p = \frac{m-1}{m-n-3}$ ,

представим решение этого уравнения в таком виде:

$$\frac{dy}{dx} = z^p [C_1 J_{-p}(z) + C_2 J_p(z)],$$

где  $J_p$  и  $J_{-p}$  — функции Бесселя порядка  $p$  и  $-p$ . Общий вид для этих функций такой:

$$J_p(z) = Az^p \left[ 1 - \frac{z^2}{2(2p+2)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \dots \right].$$

Из условий закрепления получаем уравнение для определения критического значения нагрузки. Если для критической нагрузки ввести обозначение  $Q_{кр} = \int_0^l q_1 \left(\frac{x}{l}\right)^n dx$ ,

то общая формула для всех случаев будет такая:  $Q_{кр} = \mu \frac{EJ_1}{l^2}$ . Значения коэффициента  $\mu$  для различных  $m$  и  $n$  приводим в табл. 6<sup>1</sup>.

Когда стержень искривляется под действием сосредоточенных сил, приложенных в промежуточных сечениях (рис. 55), то для определения критического значения сил приходится составлять дифференциальное уравнение равновесия для каждого участка между двумя последовательными сосредоточенными си-

Таблица 7

$\gamma$	$h = 1,00$	$h = 1,25$	$h = 1,50$	$h = 1,75$	$h = 2,00$	$h = 3,00$
1,00	1,00	0,95	0,91	0,89	0,87	0,82
1,25	1,06	1,005	0,97	0,94	0,915	—
1,50	1,12	1,06	1,02	0,99	0,96	—
1,75	1,18	1,11	1,07	1,04	1,005	—
2,00	1,24	1,16	1,12	1,08	1,05	—

лами. Уравнение для определения критической нагрузки найдется из условий на концах и из условий на границах участков. Если имеется лишь два участка одинаковой длины, но разных поперечных сечений<sup>2</sup>, то величина критической нагрузки определяется формулой  $(P_1 + P_2)_{кр} = \mu \frac{EJ_2}{l^2}$ . Значения коэффициен-

<sup>1</sup> Числа таблицы заимствованы из работы А. Н. Динника, упомянутой на стр. 278.

<sup>2</sup> Случай этот, имеющий большое практическое значение, рассмотрен Ф. С. Ясинским. См. § 9 (стр. 171—175) первого тома его посмертных сочинений, указанного на стр. 263.

та  $\mu$  зависят от отношений  $\frac{J_2}{J_1} = \gamma$ ;  $\frac{P_1 + P_2}{P_1} = k$ . Несколько значений  $\mu$  приведены в табл. 7.

Заметим, что применяя второй метод решения задач устойчивости, мы легко получаем приближенные формулы, точность которых вполне достаточна для практических приложений. Так, например, для двух участков (рис. 55) при значениях  $\gamma$ , близких к единице, можно с достаточной для практики точностью положить <sup>1</sup>

$$(P_1 + P_2)_{кр} = \frac{k(\gamma + 1)}{\gamma(k + 1)} \frac{EJ_2\pi^2}{l^2}.$$

### § 26. Устойчивость равномерно сжатого стержня в упругой среде

Нам уже приходилось указывать (§ 6), что в некоторых задачах строительной механики случается иметь дело с изгибом стержней, встречающих при искривлениях боковые сопротивления, пропорциональные прогибам.

Во многих случаях сопротивления эти могут быть заменены реакциями непрерывной упругой среды. Рассмотрим здесь устойчивость таких стержней при сжатии их силами  $P$ , приложенными по концам <sup>2</sup>. Предположим, что сжатый стержень опирается по концам на абсолютно жесткие опоры (рис. 56). Тогда выражение для изогнутой оси стержня в самом общем виде может быть представлено так:

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (a)$$

Критическое значение сжимающей силы найдем на основании рассмотрения энергии системы. При искривлении стержня к энергии сжатия присоединяются энергия изгиба  $\delta V_1$  и энергия деформации упругой среды  $\delta V_2$ . Энергия деформации появляется за счет той работы  $\delta T$ , которую совершают сжимающие силы  $P$  при сближении концов стержня. Значение  $P_{кр}$  найдем из условия

$$\delta V_1 + \delta V_2 = \delta T.$$

На основании уже известных формул [(61), (65) и (80)] переписываем это условие в таком виде:

$$\frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^4 a_n^2 + \frac{kl}{4} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n^2 = \frac{P\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 a_n^2. \quad (b)$$

Здесь через  $k$  обозначен коэффициент, характеризующий жесткость упругой среды. С увеличением  $k$  увеличивается и значение  $P_{кр}$ .

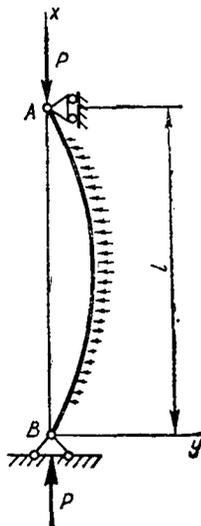


Рис. 56.

<sup>1</sup> См. стр. 17 нашей монографии, упомянутой на стр. 266.

<sup>2</sup> Т и м о ш е н к о С. П. О продольном изгибе стержней в упругой среде. Изв. С.-Петербургского политехнического института, 1907, том 7, отдел техники, естествознания и математики, вып. 1, стр. 145—157. Отд. оттиск, С.-Петербург, типолитография Шредера, 1907, 13 стр. [Перепечатка: Т и м о ш е н к о С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М., Физматгиз, 1971, стр. 106—115].

Из уравнения (b) находим

$$P = \frac{EJ\pi^2}{l^2} \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 a_n^2 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n^2}{\sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 a_n^2}. \quad (114)$$

Теперь остается из всех возможных форм искривления, определяемых выражением (a), найти ту, которой соответствует наименьшее значение  $P$ , вычисляемое по формуле (114). В данном случае вопрос этот решается весьма просто: выражение (114) получает наименьшее значение, когда все коэффициенты  $a_n$ , кроме одного, обращаются в нуль. Соответствующей формой искривления будет синусоида  $y = a_m \sin \frac{m\pi x}{l}$ . Здесь  $a_m$  — единственный не обратившийся в нуль коэффициент в общем выражении (a) для изогнутой оси стержня. Формула (114) переписывается так<sup>1</sup>:

$$P = \frac{EJ\pi^2}{l^2} \frac{m^4 a_m^2 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} a_m^2}{m^2 a_m^2} = \frac{EJ\pi^2}{l^2} \left( m^2 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4 m^2} \right). \quad (115)$$

Остается теперь только выбрать надлежащим образом число  $m$ , которое указывает, на сколько полуволен подразделяется стержень при искривлении. При  $k = 0$  мы, очевидно, будем иметь явление продольного изгиба стержня со свободной боковой поверхностью и критическая нагрузка получится, если в формуле (115) положить  $m = 1$ . Первая искривленная форма представит собой кривую без перегибов.

К такому же заключению мы придем, когда  $k$  отлично от нуля, но представляет собой малую величину. В этом случае упругая среда весьма податлива, первая искривленная форма не будет иметь точек перегиба и представит собой одну полуволну синусоиды.

Постепенно увеличивая жесткость среды, мы в заключение придем к таким значениям  $k$ , когда формула (115) будет давать для  $P$  меньшие значения при  $m = 2$ , а не при  $m = 1$ . В таком случае первая искривленная форма будет уже иметь две полуволны, а не одну. То значение  $k$ , при котором совершается переход от формы с одной полуволной к форме с двумя полуволнами найдется из (115), если мы примем во внимание, что для этого предельного состояния формула (115) даст одну и ту же величину  $P$  независимо от того, вставим ли мы в нее  $m = 2$  или  $m = 1$ . Таким образом, получаем

$$1 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} = 2^2 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} \frac{1}{2},$$

откуда

$$\frac{kl^4}{EJ\pi^4} = 1 \cdot 2^2. \quad (c)$$

<sup>1</sup> На основании формулы (115) легко получается значение критической угловой скорости для быстро вращающегося круглого вала. При выпучивании такого вала на каждый его элемент будет действовать центробежная сила  $\frac{q}{g} \omega^2 y dx$ , где  $\frac{q}{g} dx$  — масса элемента вала и  $\omega$  — его угловая скорость. Эти силы будут стремиться увеличивать искривление, и мы приходим, таким образом, к изгибу стержня в среде с отрицательным значением  $k$ , именно  $k = -\frac{q}{g} \omega^2$ . Подставив это в формулу (115) и полагая  $P = 0$ , найдем для наименьшей

скорости  $\omega$ , удовлетворяющей оставленному условию, значение  $\omega_{кр} = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJg}{q}}$ .

При значении  $k$ , несколько меньшем, чем то, которое находится из (с), мы будем иметь искривление по одной полуволне, при  $k$ , несколько большем, получается две полуволны.

Если мы будем продолжать увеличение жесткости упругой среды, то в дальнейшем придем к формам с тремя, с четырьмя и т. д. полуволнами. Чем жестче среда, тем на большее число полуволн стремится подразделиться при продольном изгибе стержень. В этом существенное отличие рассматриваемой задачи от случая стержня со свободной боковой поверхностью, выпучивающегося при продольном изгибе по кривой без перегибов<sup>1</sup>.

То предельное значение  $k$ , при котором совершается переход от формы с  $m$  полуволнами к форме с  $m + 1$  полуволнами найдется так же, как мы это выше сделали для  $m = 1$  и  $m = 2$ , из уравнения

$$m^2 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4 m^2} = (m + 1)^2 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4 (m + 1)^2},$$

откуда легко находим

$$\frac{kl^4}{EJ\pi^4} = m^2(m + 1)^2. \quad (116)$$

Для значений  $k$ , несколько меньших того, что дает полученное уравнение, мы будем иметь первую искривленную форму с  $m$  полуволнами, для несколько больших  $k$  получим  $m + 1$  полуволн. Таким образом, уравнение (116) может послужить для определения того числа полуволн, при котором формула (115) дает для  $P$  наименьшее значение. Это значение и будет искомая критическая нагрузка.

Вводя обозначения  $\alpha = \frac{kl^4}{16EJ}$ ;  $\beta = \sqrt{\frac{1}{m^2 + \frac{16\alpha^2}{m^2\pi^4}}}$ , можем представить

формулу для  $P_{кр}$  в таком виде:

$$P_{кр} = \frac{EJ\pi^2}{(\beta l)^2} \quad (117)$$

Коэффициент  $\beta$  называют *коэффициентом длины*, а величину  $\beta l$  — *приведенной длиной*. Определив *приведенную длину*, мы тем самым сводим нашу задачу к простейшему случаю продольного изгиба стержня с опертыми концами и со свободной боковой поверхностью (108), для которого имеются подробные расчетные таблицы.

Значения коэффициента длины  $\beta$  приводим в табл. 8.

В тех случаях, когда стержень вследствие большой длины или вследствие большой жесткости среды подразделяется при выпучивании на весьма большое число полуволн, мы можем заменить уравнение (116) таким:

$$\frac{kl^4}{EJ\pi^4} = m^4. \quad (116')$$

Вставляя его в формулу (115), получаем

$$P_{кр} = \frac{2EJ\pi^2 m^2}{l^2} = \frac{2EJ\pi^2}{\lambda^2}, \quad (117')$$

где

$$\lambda = \frac{l}{m} = \sqrt[4]{\frac{EJ\pi^4}{k}}. \quad (118)$$

<sup>1</sup> Проф. Ф. С. Ясинский, занимавшийся исследованием продольного изгиба в упругой среде, исходил из предположения, что первая искривленная форма не имеет перегибов. Это предположение в случае среды большой жесткости неправильно, и оно привело Ф. С. Ясинского к некоторым погрешностям. См. стр. 33 нашей книги, указанной на стр. 266.

Таким образом, критическая сила в этом случае вдвое больше, чем для стержня со свободной боковой поверхностью и опертыми концами, имеющего длину  $\beta$ , равную длине одной полуволны стержня, выпучивающегося в упругой среде. Полученными результатами можно воспользоваться для приближенной оценки устойчивости спаянных трамвайных рельсов, заделанных в упругое основание. При повышении температуры в таких рельсах возникают весьма значительные

Таблица 8

$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
0	1	200	0,286
1	0,927	300	0,263
3	0,819	500	0,235
5	0,741	700	0,214
10	0,615	1000	0,195
15	0,537	1500	0,179
20	0,483	2000	0,165
30	0,437	3000	0,149
40	0,421	4000	0,140
50	0,406	5000	0,132
75	0,376	8000	0,117
100	0,351	10000	0,110

Таблица 9

$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
0	$\infty$	150	0,451
1	2,74	200	0,414
5	1,04	300	0,372
10	0,914	400	0,342
15	0,828	500	0,324
20	0,788	600	0,310
36	0,693	750	0,292
56,5	0,613	1000	0,270
98,7	0,518		

продольные сжимающие усилия и при недостаточной жесткости заделки стержня в основание возможно явление продольного изгиба.

Мы все время предполагали непрерывную упругую среду, но полученные выше расчетные формулы можно применить для получения приближенного решения и в том случае, когда стержень опирается на ряд равноудаленных упругих опор одинаковой жесткости. Если жесткость опор такова, что на каждую полуволну<sup>1</sup> приходится не меньше трех опор, то получаемые таким путем приближенные решения обладают достаточной для практических приложений точностью. В противном случае придется для решения задачи воспользоваться приемами, изложенными в § 23.

На основании рассмотрения энергии деформации мы можем решить также вопрос об устойчивости равномерно сжатого стержня в упругой среде, когда нет опор и концы стержня совершенно свободны<sup>2</sup>. Здесь также вид искривленных форм равновесия будет зависеть от жесткости упругой среды. Мы сохраним наши предыдущие обозначения и ограничимся лишь окончательными результатами, приведенными в табл. 9. Здесь даны значения коэффициента длины  $\beta$ , который должен быть вставлен в прежнюю формулу (117).

Сравнение чисел, приведенных в табл. 8 и 9, показывает, что стержень со свободными концами менее устойчив, чем стержень на двух жестких опорах. Разность между соответствующими коэффициентами длины будет тем меньшей, чем больше жесткость среды, что является вполне естественным, так как с увеличением жесткости среды увеличивается число полуволн, на которые стержень подразделяется при выпучивании, следовательно, убывает влияние способа закрепления концов. Такую же роль как увеличение жесткости среды играет увеличение длины стержня или уменьшение его жесткости при изгибе.

<sup>1</sup> Длина полуволны находится из уравнения (116).

<sup>2</sup> См. стр. 27 нашей работы, указанной на стр. 266. См. также Z i m m e r m a n n Н. Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung. Zentralblatt der Bauverwaltung, 1906, Bd 26, N 40, SS. 251—255.

## § 27. Задача Ф. С. Ясинского

Результатами предыдущего параграфа иногда пользуются для приближенной оценки устойчивости сжатых поясов открытых мостов. Проф. Ф. С. Ясинский поставил себе задачей более подробное исследование этого же вопроса. Он рассматривает сжатый пояс равномерно нагруженной фермы с параллельными поясами (рис. 57). В таком случае можно считать, что усилия в раскосах возрастают по направлению от середины пролета к опорам по линейному закону, и положить, что верхний пояс сжимается непрерывно распределенными усилиями, интенсивность которых изменяется по закону, представленному на рис. 57, б заштрихованной площадью. Через  $Q$  обозначена вся нагрузка, приходящаяся на ферму;  $h$  — высота фермы. Предположим, что опорные стойки  $AA_1$  и  $BB_1$  устроены так, что верхние их точки  $A_1$  и  $B_1$  совершенно не могут перемещаться в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка. Что же касается промежуточных стоек, то они сравнительно гибкие, и мы для простоты допустим, что жесткость их при изгибе в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка, одинакова. В таком случае верхний пояс можно рассматривать как стержень с опертыми концами, сжатый непрерывно распределенными усилиями, интенсивность которых представлена на рис. 57, б. В этом виде вопрос об устойчивости сжатых поясов открытых мостов впервые был поставлен и разрешен Ф. С. Ясинским<sup>1</sup>. Заменяв действие отдельных стоек действием непрерывной упругой среды<sup>2</sup>, жесткость которой характеризуется коэффициентом  $k$ , Ясинский применил первый метод исследования устойчивости (рассмотрение условия равновесия отклоненной формы, весьма близкой к первоначальной форме равновесия), он допустил возможным искривление верхнего пояса в плоскости, перпендикулярной к плоскости рисунка (рис. 57, а), и для этой искривленной формы составил дифференциальное уравнение равновесия.

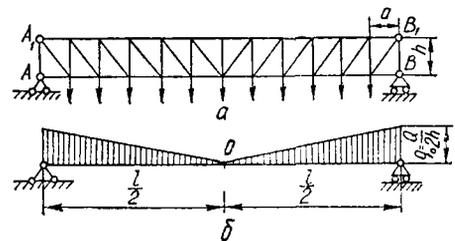


Рис. 57.

Таким путем он пришел к дифференциальному уравнению четвертого порядка с переменными коэффициентами и решил это уравнение в предположении, что стержень имеет постоянное сечение, при помощи бесконечных рядов. Мы воспользуемся для решения того же вопроса вторым методом, обратимся к рассмотрению энергии системы и покажем на этой задаче, как, пользуясь этим методом, можно получать приближенные решения и увеличивать точность этих решений путем увеличения числа произвольных параметров, которыми определяется искривленная форма равновесия сжатого стержня.

Таким путем он пришел к дифференциальному уравнению четвертого порядка с переменными коэффициентами и решил это уравнение в предположении, что стержень имеет постоянное сечение, при помощи бесконечных рядов. Мы воспользуемся для решения того же вопроса вторым методом, обратимся к рассмотрению энергии системы и покажем на этой задаче, как, пользуясь этим методом, можно получать приближенные решения и увеличивать точность этих решений путем увеличения числа произвольных параметров, которыми определяется искривленная форма равновесия сжатого стержня.

<sup>1</sup> См. § 23 (стр. 215—218) его первого тома собрания сочинений, указанного на стр. 263.

<sup>2</sup> Коэффициент жесткости  $k$ , характеризующий упругую среду, мы найдем, разделив на длину панели  $a$  величину той силы  $D$ , которую нужно приложить к верхнему концу стойки, чтобы получить прогиб стойки из плоскости рисунка на одну единицу. Если стойку рассматривать как балку с нижним заделанным и верхним свободным концами, подвергающуюся действию сжимающей силы и изгибающей нагрузки  $P$ , приложенной на конце, то между прогибом и силой имеем зависимость  $f = \frac{Ph^3}{3EJ_1} \frac{1}{1 - \alpha^2}$ . Следовательно,  $k = \frac{3EJ_1}{h^3} \frac{1 - \alpha^2}{a}$ , где  $\alpha^2$  — известное число, которым определяется влияние продольной силы на прогиб стойки (см. § 12).

Представим, как это мы всегда делали в случае опертых концов, искривленную форму оси стержня тригонометрическим рядом

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \tag{a}$$

Энергия деформации изогнутого стержня и упругой среды выразится, как и в предыдущей задаче, суммой

$$\frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^4 a_n^2 + \frac{kl}{4} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n^2. \tag{b}$$

Что касается работы сжимающих сил, то для нее получим здесь более сложное выражение, которое можно составить на основании следующих соображений. Пусть  $AB$  представляет искривленную ось стержня (рис. 58) и заштрихованные площади — интенсивность

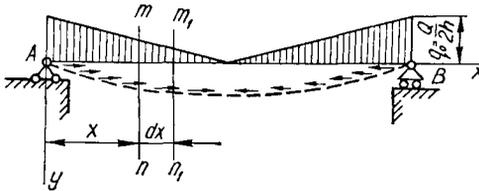


Рис. 58.

распределенных сжимающих усилий, имеющих в каждой точке направление к середине стержня. Аналитически интенсивность усилий может быть представлена формулой  $q = q_0 \left(1 - \frac{2x}{l}\right)$ .

Наибольшая сжимающая сила  $P$  получается посередине стержня, где она

равна площади одного из заштрихованных треугольников, т. е.  $P = q_0 l/4$ .

Для подсчета работы сжимающих усилий при изгибе стержня выделим элемент оси стержня двумя бесконечно близкими сечениями  $m$  и  $m_1$ . При изгибе элемент этот наклонится к оси  $x$  на угол, равный  $y'$ , благодаря чему вся правая часть стержня переместится в направлении к неподвижной опоре на величину  $\frac{y'^2}{2} dx$  и совокупность приложенных к правой части усилий произведет работу

$$-\frac{1}{2} y'^2 dx \int_x^l q_0 \left(1 - \frac{2x}{l}\right) dx = \frac{q_0}{2l} y'^2 x(l-x).$$

Вывяснив таким образом работу, соответствующую повороту одного элемента оси стержня, легко получим нужное нам полное выражение для работы в виде интеграла

$$\frac{q_0}{2l} \int_0^l y'^2 x(l-x) dx.$$

Подставляя сюда вместо  $y$  его общее выражение (а) и принимая во внимание значения интегралов

$$\begin{aligned} \int_0^l x \cos^2 \frac{m\pi x}{l} dx &= \frac{l^3}{4}; \\ \int_0^l x^2 \cos^2 \frac{m\pi x}{l} dx &= \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{4m^2\pi^2}; \\ \int_0^l x \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx &= 0 \text{ при } m+n \text{ четном;} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Ось стержня предполагаем абсолютно нерастяжимой. Влияние растяжений, как мы видели на примере простейшей задачи продольного изгиба, играет ничтожную роль.



Для второй группы получаем

$$\left. \begin{aligned} \left[ 2^4 \pi^2 + \gamma \pi^2 - \delta \left( 2^2 \frac{2}{3} \pi^2 - 2 \right) \right] a_2 + \delta \frac{160}{9} a_4 + \delta \frac{15}{2} a_6 + \dots &= 0; \\ \delta \frac{160}{9} a_2 + \left[ 4^4 \pi^2 + \gamma \pi^2 - \delta \left( 4^2 \frac{2}{3} \pi^2 - 2 \right) \right] a_4 + \delta \frac{1248}{25} a_6 + \dots &= 0; \\ \delta \frac{15}{2} a_2 + \delta \frac{1248}{25} a_4 + \left[ 6^4 \pi^2 + \gamma \pi^2 - \delta \left( 6^2 \frac{2}{3} \pi^2 - 2 \right) \right] a_6 + \dots &= 0; \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} (g)$$

Искривленная форма равновесия становится возможной, если одна из написанных групп уравнений может дать для коэффициентов  $a_n$  решения, отличные от нуля, т. е. если определитель одной из этих систем уравнений обращается в нуль. Равенство нулю определителя одной из этих систем и даст нам уравнение для разыскания величины  $\delta$ , которой определяется критическое значение сжимающей силы  $P$ .

Для технических расчетов удобно иметь готовую таблицу коэффициентов длины  $\beta$ , вычисленных для различных значений величины  $\alpha = kl^4/16EJ$ .

При составлении этой таблицы начнем с малых значений величины  $\alpha$ , когда искривленная форма имеет одну полуволну и, следовательно, симметрична относительно середины пролета.

Критическая сила определяется в таком случае системой уравнений (f). Если, например, положить  $\alpha = 0$ , т. е. взять стержень, который при выпучивании не встречает сопротивления упругой среды, то для получения первого приближения можно положить все коэффициенты в выражении (a), кроме первого, равными нулю. Тогда первое из уравнений (f) дает нам

$$\delta = \frac{\pi^2}{\frac{2}{3} \pi^2 - 2} = 2,15; \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{\delta}} = 0,682.$$

Следовательно,

$$P_{кр} = \left( \frac{q_0 l}{4} \right)_{кр} = \frac{EJ \pi^2}{(0,682l)^2}.$$

Для получения второго приближения возьмем первые два уравнения системы (f) и положим равными нулю все коэффициенты, кроме  $a_1$  и  $a_3$ . Равенство нулю определителя этих уравнений приводит нас к такому уравнению

$$\left[ \pi^2 - \delta \left( \frac{2}{3} \pi^2 - 2 \right) \right] \left[ 81 \pi^2 - \delta \left( 3^2 \frac{2}{3} \pi^2 - 2 \right) \right] - \left( \frac{15}{2} \right)^2 \delta^2 = 0,$$

откуда  $\delta = 2,06$ ;  $\beta = \sqrt{\frac{1}{\delta}} = 0,694$ .

Разность между первым и вторым приближениями всего лишь 2%. Для вычисления третьего приближения нужно было бы взять три уравнения системы (f) и т. д. Вычисление дальнейших приближений не представляет в данном случае практического интереса, так как уже второе приближение обеспечивает три верных знака. Произведя такие же вычисления для  $\alpha = 5$ ,  $\alpha = 10$ ,  $\alpha = 15$ , получим для коэффициента длины  $\beta$  значения, приводимые в табл. 10. Начиная с  $\alpha = 18$ , приходится при определении  $P_{кр}$  обращаться к системе уравнений (g), так как им будет соответствовать наименьшее значение сжимающей силы. Соответствующая форма равновесия будет иметь две полуволны. При дальнейшем увеличении жесткости среды мы будем получать формы с тремя, четырьмя и т. д. полуволнами и для определения соответствующих критических нагрузок

нужно будет обращаться или к системе (f) для нечетного числа полуволн, или к системе (g), если число полуволн четное.

Пользуясь тем же методом, мы можем решить вопрос об устойчивости сжатого пояса и в том случае, когда опорные стойки моста обладают такой же жесткостью, как промежуточные, и задача сводится к исследованию устойчивости стержня со свободными концами в упругой среде.

Если принять такой же закон для распределения сжимающих сил, как и в предыдущем случае, то получим для коэффициента длины  $\beta$  значения, приведенные в табл. 11.

При вычислении этих значений мы ограничились везде вторым приближением. Заметим, что приводимое здесь приближенное решение вопроса об устой-

Таблица 10

$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
0 <sub>2</sub>	0,694	100 <sub>3</sub>	0,290
5 <sub>2</sub>	0,524	162,8 <sub>3</sub>	0,259
10 <sub>2</sub>	0,443	200 <sub>3</sub>	0,246
15 <sub>3</sub>	0,396	300 <sub>3</sub>	0,225
22,8 <sub>2</sub>	0,363	500 <sub>3</sub>	0,204
56,5 <sub>3</sub>	0,324	1000 <sub>4</sub>	0,174

Таблица 11

$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
0	$\infty$	50	0,431
1	2,22	100	0,340
3	1,28	150	0,277
5	0,993	200	0,261
10	0,703	300	0,236
15	0,574	500	0,206
20	0,542	1000	0,176

Примечание. Индекс при значениях  $\alpha$  указывает порядок взятого приближения <sup>1</sup>.

чивости сжатого пояса будет тем ближе к действительности, чем гибче стойки, чем больше стоек приходится на одну полуволну искривленной формы выпучившегося пояса. При больших значениях  $\alpha$  и при редком расположении стоек на полученные выше решения приходится смотреть лишь как на первое грубое приближение. Для более подробного решения вопроса нужно при составлении энергии системы рассмотреть изгиб каждой стойки и работу каждой силы, передающейся от раскосов сжатому поясу. Общий ход решения задачи остается прежним. При решении той же задачи можно, конечно, воспользоваться также приемами, примененными нами при исследовании устойчивости многопролетных стержней на упругих опорах (§ 23).

Этим мы закончим исследование вопросов устойчивости сжатых стержней. Влияние на устойчивость стержней касательных напряжений и исследование устойчивости клепаных составных стержней с достаточной полнотой рассмотрено в нашем курсе сопротивления материалов и здесь мы на этих вопросах останавливаться не будем, а перейдем к исследованию устойчивости плоской формы изгиба балок.

### § 28. Об устойчивости плоской формы изгиба полосы

Если полосу, имеющую узкое прямоугольное поперечное сечение, изгибать в плоскости ее наибольшей жесткости, то можно, постепенно увеличивая изгибающие силы, достигнуть предела, за которым плоская форма изгиба перестает

<sup>1</sup> Приближения выше второго вычислены студентом Института инженеров путей сообщения В. Вержбицким.

быть устойчивой и полоса выпучивается в направлении легчайшего изгиба. С этим явлением приходится считаться в целом ряде технических задач, и мы его здесь изучим при различных способах нагрузки изгибаемой полосы<sup>1</sup>.

В качестве простейшего примера рассмотрим *чистый изгиб* полосы парами сил, приложенными по концам (рис. 59, а). Предположим, что концы полосы закреплены таким образом, что концевые сечения свободно могут поворачиваться относительно осей, совпадающих с главными осями инерции сечений. Вращение

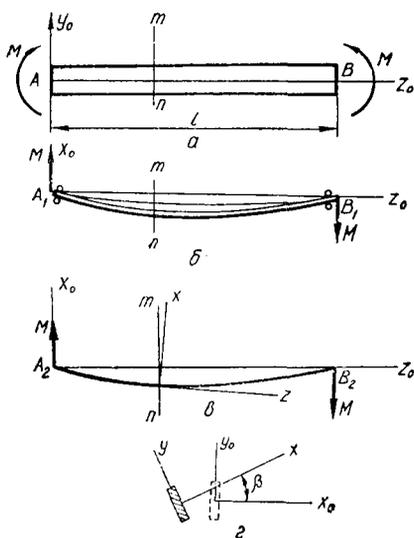


Рис. 59.

же сечений относительно оси  $z_0$  невозможно. В таком случае путем увеличения моментов  $M$  можно достигнуть выпучивания полосы, представленного на рис. 59, б. Легко видеть, что это выпучивание должно сопровождаться также некоторым скручиванием полосы. Для определения критического значения изгибающего момента воспользуемся здесь первым методом исследования устойчивости. Допустим, что под действием  $M$  получилось весьма малое выпучивание, представленное на рисунке. Составим дифференциальные уравнения равновесия для этой искривленной формы и из условий на концах найдем то значение  $M$ , при котором предположенная нами искривленная форма равновесия может иметь место. Здесь мы будем иметь дело с искривлением полосы в двух главных плоскостях, сопровождающимся кручением, и в дальнейшем нам выгодно воспользоваться результатами, полученными раньше при исследовании деформаций кривого бруса (§ 19). Нужно только в найденных там формулах везде по-

ложить начальную кривизну  $\kappa$  равной нулю.

Возьмем неподвижную систему координат  $x_0, y_0, z_0$  и обозначим через  $u$  и  $v$  перемещения точек оси полосы в направлении  $x_0$  и  $y_0$ . Кроме того, в каждом поперечном сечении выпучившейся полосы можем построить систему осей  $x, y, z$  так, что ось  $z$  направлена по касательной к изогнутой оси полосы, оси  $x$  и  $y$  совпадают с новыми направлениями главных осей переместившегося поперечного сечения.

Направление осей выбрано так, что при вращении от  $x$  к  $y$  закручивание происходит в направлении оси  $z$ . Угол между плоскостями  $xz$  и  $x_0z_0$  мы, как и прежде, будем обозначать через  $\beta$ . В таком случае при условии весьма малых перемещений мы на основании рис. 59, в, г легко составим таблицу значений

<sup>1</sup> Первые задачи этого рода были решены почти одновременно и независимо друг от друга Л. Прандтлем и А. Мичеллом. Prandtl L. Kipperscheinungen. Ein Fall von instabilem elastischen Gleichgewicht. Dissertation der Universität München. 1899. Nürnberg. 1900, SS. 1—75. [Перепечатка: Prandtl L. Gesammelte Abhandlungen zur angewandte Mechanik, Hydro- und Aerodynamik. Erster Teil. Berlin—Göttingen — Heidelberg, Springer-Verlag, 1961, SS. 10—74]. Michell A. G. M. On the elastic stability of long beams under transverse forces. Philosophical Magazine and Journal of Sciences, Series 5, 1899, vol. 48, N 292, pp. 298—309.

косинусов углов, составляемых осями  $x, y, z$  и  $x_0, y_0, z_0$ :

	$x_0$	$y_0$	$z_0$
$x$	1	$\beta$	$-\frac{du}{dz}$
$y$	$-\beta$	1	$-\frac{dv}{dz}$
$z$	$\frac{du}{dz}$	$\frac{dv}{dz}$	1

Оставляя для кривизны, кручения и жесткостей при изгибе и кручении те же обозначения, что и в случае кривого стержня, можем на основании формул (97) и (98) (§ 19) написать

$$M_1 = B_1 \kappa_1; \quad M_2 = B_2 \kappa_2; \quad H = C \tau. \quad (97')$$

$$\kappa_1 = -\frac{d^2 v}{dz^2}; \quad \kappa_2 = \frac{d^2 u}{dz^2}; \quad \tau = \frac{d\beta}{dz}. \quad (98')$$

Здесь  $M_1, M_2$  и  $H$  — моменты сил, приложенных к правой части полосы относительно осей  $x, y, z$ . Момент считаем положительным, если соответствующее ему вращение сопровождается закручиванием в направлении положительной оси.

В рассматриваемом случае чистого изгиба момент сил, приложенных к правой части полосы, равен  $M$  и представится при нашем правиле знаков вектором  $B_2 M$  (см. рис. 59, *в*). Проектируя этот вектор на оси  $x, y, z$ , при помощи приведенной выше таблицы косинусов получаем

$$M_1 = -M; \quad M_2 = \beta M; \quad H = -\frac{du}{dz} M.$$

Подставляя эти значения в формулы (97'), мы на основании (98') приходим к такой системе дифференциальных уравнений равновесия:

$$\left. \begin{aligned} M &= B_1 \frac{d^2 v}{dz^2}; \\ \beta M &= B_2 \frac{d^2 u}{dz^2}; \\ -\frac{du}{dz} M &= C \frac{d\beta}{dz}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Дифференцируя третье уравнение по  $z$  и исключая потом, при помощи второго уравнения, величину  $d^2 u / dz^2$ , приходим к такому дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2 \beta}{dz^2} = -\frac{M^2}{CB_2} \beta,$$

откуда

$$\beta = C_1 \sin \frac{M}{\sqrt{CB_2}} z + C_2 \frac{M}{\sqrt{CB_2}} z.$$

Так как по условиям закрепления угол  $\beta$  равен нулю по концам полосы, то, чтобы удовлетворить условию на левом конце, нужно положить  $C_2 = 0$ . Условие на правом конце приводит нас к такому трансцендентному уравнению:  $\sin \frac{M}{\sqrt{CB_2}} = 0$ . Первый корень этого уравнения и даст нам искомое критическое значение для изгибающего момента

$$M_{кр} = \frac{\pi \sqrt{CB_2}}{l}. \quad (120)$$

Этому значению момента будет соответствовать форма равновесия, приведенная на рис. 59 и состоящая из одной полуволны. Дальнейшие корни трансцендентного уравнения соответствуют формам равновесия с двумя, тремя и т. д. полуволнами. Все эти формы, как и в случае продольного изгиба, неустойчивы и не имеют практического значения. Заметим, что формула (120) может быть применима к расчетам лишь в том случае, если вычисленные по  $M_{кр}$  напряжения не превосходят предела упругости материала.

В качестве второго примера рассмотрим изгиб полосы силой, приложенной на конце (рис. 60, а). Постепенно увеличивая силу  $P$ , можно достигнуть предела, за которым начинается искривление полосы в направлении легчайшего

изгиба (рис. 60, б). Для определения  $P_{кр}$  воспользуемся тем же приемом, что и в предыдущем случае. Возьмем искривленную форму равновесия (рис. 60, в, г) и составим соответствующие дифференциальные уравнения. В какой-либо точке  $D$  оси стержня моменты  $M_{x_0}$ ,  $M_{y_0}$ ,  $M_{z_0}$  изгибающей силы  $P$  относительно осей, параллельных осям  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ , представятся так:

$$M_{x_0} = P(l - z); \quad M_{y_0} = 0; \quad M_{z_0} = -P(f - u).$$

Здесь через  $f$  обозначено перемещение  $u$  для конца полосы.

При помощи таблицы косинусов легко переходим к моментам относительно осей  $x$ ,  $y$ ,  $o$  и, отбрасывая малые величины высших порядков, получаем

$$M_1 = P(l - z); \quad M_2 = -P(l - z)\beta;$$

$$H = P(l - z)\frac{du}{dz} - P(f - u).$$

Вставляя это в формулы (97'), мы при помощи (98') приходим к такой системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} P(l - z) &= -B_1 \frac{d^2v}{dz^2}; \\ -P(l - z)\beta &= B_2 \frac{d^2u}{dz^2}; \\ P(l - z)\frac{du}{dz} - P(f - u) &= C \frac{d\beta}{dz}. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

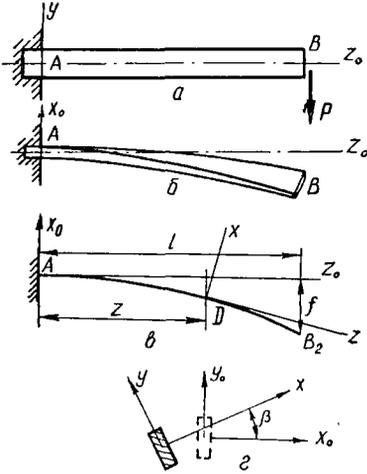


Рис. 60.

Дифференцируя третье из этих уравнений по  $z$  и исключая при помощи второго уравнения величину  $\frac{d^2u}{dz^2}$ , находим

$$\frac{d^2\beta}{dz^2} + \frac{P^2}{B_2C} (l - z)^2 \beta = 0,$$

или, вводя новую переменную  $w = l - z$  и полагая для сокращения  $P^2/B_2C = a^2$ , получаем

$$\frac{d^2\beta}{dw^2} + a^2 w^2 \beta = 0.$$

Решив это уравнение при помощи бесконечных рядов, найдем

$$\beta = C_1 \left( 1 - \frac{a^2}{3 \cdot 4} w^4 + \frac{a^4}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} w^8 - \frac{a^6}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} w^{12} + \dots \right) + C_2 \left( w - \frac{a^2}{4 \cdot 5} w^5 + \frac{a^4}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} w^9 - \frac{a^6}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13} w^{13} + \dots \right). \quad (c)$$

Условия на концах полосы следующие. У левого заделанного конца угол  $\beta$  должен обращаться в нуль, следовательно, при  $z = 0$  и  $w = l$  имеем  $\beta = 0$ .

На другом конце полосы скручивающий момент  $H$  обращается в нуль, так как точка приложения силы  $P$  предполагается совпадающей с концом оси полосы. В таком случае при  $z = l$   $w = 0$ ,  $\frac{d\beta}{dz} = 0$ .

Для выполнения этого последнего условия нужно в общем интеграле (с) положить  $C_2 = 0$ , и мы получим для  $\beta$  выражение

$$\beta = C_1 \left( 1 - \frac{a^2}{3 \cdot 4} w^4 + \frac{a^4}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} w^8 - \frac{a^6}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} w^{12} + \dots \right).$$

Чтобы было удовлетворено условие у заделанного конца, должно иметь место равенство

$$1 - \frac{a^2}{3 \cdot 4} l^4 + \frac{a^4}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} l^8 - \frac{a^6}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} l^{12} + \dots = 0.$$

Для суммы ряда, стоящего в левой части уравнения, имеются готовые таблицы<sup>1</sup>, при помощи которых легко находятся нужный нам наименьший корень уравнения  $al^2 = 4,013$  и соответствующее критическое значение силы  $P$

$$P_{кр} = \frac{4,013 \sqrt{B_2C}}{l^2}. \quad (121)$$

Подобным же образом мы можем решить вопрос об устойчивости полосы с опертыми концами, изгибаемой силою  $2P$ , приложенной посередине (рис. 61, а).

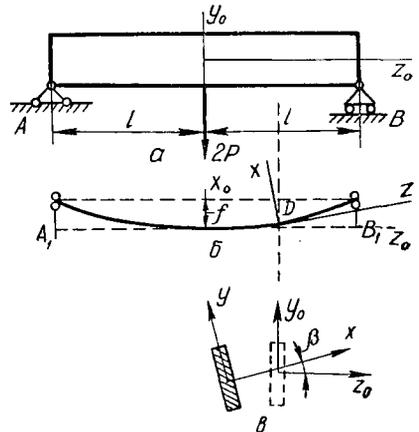


Рис. 61.

<sup>1</sup> Таблицы эти вычислены Л. Прандтлем. Они имеются в книге Я. Янке и Ф. Эмде. См. стр. 106 (стр. 194 русского перевода) их книги, указанной на стр. 154. Там же на стр. 91 и 92 дается выражение рядов, входящих в интеграл (с) через функции Бесселя,  $J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{aw^2}{2}\right)$ ,  $J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{aw^2}{2}\right)$ . См. работу L.Prandtl, указанную на стр. 290.

Если закрепления препятствуют лишь вращению концов относительно оси  $z_0$ , то изогнутая ось для первой искривленной формы выпучившейся полосы имеет вид, представленный на рис. 61, б. Опорные реакции, равные  $P$ , будут приложены в точках  $A_1$  и  $B_1$ .

В какой-либо точке  $D$  оси стержня моменты  $M_{x_0}$ ,  $M_{y_0}$  и  $M_{z_0}$  опорной реакции  $P$  относительно осей, параллельных осям  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ , представятся так (см. рис. 61, в):

$$M_{x_0} = -P(l-z); \quad M_{y_0} = 0; \quad M_{z_0} = -Pu.$$

При помощи таблицы косинусов находим следующие значения моментов относительно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$M_1 = -P(l-z); \quad M_2 = P(l-z)\beta; \quad H = -P(l-z)\frac{du}{dz} - Pu.$$

На основании (97') и (98') приходим к такой системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} B_1 \frac{d^2v}{dz^2} &= P(l-z); \\ B_2 \frac{d^2u}{dz^2} &= P(l-z)\beta; \\ C \frac{d\beta}{dz} &= -P(l-z)\frac{du}{dz} - Pu. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Из уравнений второго и третьего, как и прежде, получаем

$$\frac{d^2\beta}{dz^2} + \frac{P^2}{CB_2}(l-z)^2\beta = 0.$$

Решение этого уравнения приводит нас к такому значению критической нагрузки:

$$(2P)_{\text{кр}} = \frac{16,93\sqrt{B_2C}}{(2l)^2}. \quad (122)$$

Покажем на этом примере, как можно получить величину критической нагрузки на основании рассмотрения энергии системы.

При выпучивании полосы из плоскости ее наибольшей жесткости к энергии изгиба в этой плоскости присоединяется энергия изгиба в плоскости, ей перпендикулярной,  $V_1$  и энергия кручения  $V_2$ . В то же время, благодаря выпучиванию полосы, изгибающий груз  $2P$  несколько опускается и совершает работу  $T$ . Критическое значение изгибающей силы — это наименьшее из тех ее значений, при которых удовлетворено условие

$$V_1 + V_2 = T. \quad (e)$$

Для энергии деформации мы воспользуемся известными формулами

$$V_1 = B_2 \int_0^l \left( \frac{d^2u}{dz^2} \right)^2 dz; \quad V_2 = C \int_0^l \left( \frac{d\beta}{dz} \right)^2 dz.$$

Опускание груза  $2P$  при выпучивании полосы найдем из таких соображений. Выделим у точки  $D$  (см. рис. 61, б) бесконечно малый элемент длиной  $dz$ . Если середину полосы будем удерживать неподвижно, а концам дадим возможность перемещаться, то при искривлении выделенного элемента в плоскости  $xz$  правый конец оси полосы опишет дугу  $\frac{d^2u}{dz^2}(l-z)dz$ .

Так как плоскость  $xz$  составляет с плоскостью  $x_0z_0$  угол  $\beta$ , то указанному перемещению конца будет соответствовать повышение его над точкой приложения силы на величину

$$\beta \frac{d^2 u}{dz^2} (l - z) dz.$$

Суммируя эти элементарные повышения, находим для опускания точки приложения груза  $2P$  такое выражение:

$$\int_0^l \beta \frac{d^2 u}{dz^2} (l - z) dz.$$

Уравнение (е) можно будет переписать так:

$$2P \int_0^l \beta \frac{d^2 u}{dz^2} (l - z) dz = B_2 \int_0^l \left( \frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz + C \int_0^l \left( \frac{d\beta}{dz} \right)^2 dz, \quad (f)$$

или, исключая отсюда  $\frac{d^2 u}{dz^2}$  при помощи второго из уравнений (д), получаем

$$\frac{P^2}{B_2} \int_0^l \beta^2 (l - z)^2 dz = C \int_0^l \left( \frac{d\beta}{dz} \right)^2 dz. \quad (g)$$

Так как концы полосы не поворачиваются относительно оси  $z_0$ , то самое общее выражение для  $\beta$  напишется так:

$$\beta = a_1 \cos \frac{\pi z}{2l} + a_2 \cos \frac{3\pi z}{2l} + \dots \quad (h)$$

Если ограничиться первым членом этого ряда и вставить его в уравнение (g), то в качестве первого приближения получим

$$(2P)_{кр} = \frac{17,2 \sqrt{B_2 C}}{(2l)^2}.$$

Сравнение этого результата с формулой (122) показывает, что погрешность первого приближения составляет около 1,5%. Если бы мы взяли два члена в ряде (h), то получили бы второе приближение, имеющее четыре верных знака<sup>1</sup>. Следовательно, применение второго метода исследования устойчивости имеет в рассматриваемом случае значительные преимущества. Сравнительно сложное решение уравнения при помощи бесконечных рядов заменяется вычислением нескольких квадратур.

Задача об устойчивости полосы решена для целого ряда случаев и выражения для критической нагрузки имеют везде один и тот же вид:

$$P_{кр} = \frac{\mu \sqrt{B_2 C}}{l^2}.$$

Для каждого частного случая приходится лишь вычислить соответствующее значение коэффициента  $\mu$ . Некоторые численные результаты мы приводим ниже.

<sup>1</sup> См. стр. 100 нашей монографии, указанной на стр. 266. В этой работе имеются приближенные решения для целого ряда задач, относящихся к устойчивости полосы.

1. Для полосы с одним заделанным и другим свободным концами, нагруженной равномерной нагрузкой интенсивности  $q$ , имеем

$$(ql)_{\text{кр}} = \frac{12,85 \sqrt{B_2 C}}{l^2}. \quad (123)$$

2. Для той же полосы при изгибе ее силой  $P$ , приложенной на конце выше центра тяжести поперечного сечения на  $a$ , имеем такую приближенную формулу<sup>1</sup>:

$$P_{\text{кр}} = \frac{4,013 \sqrt{B_2 C}}{l^2} \left( 1 - \frac{a}{l} \sqrt{\frac{B_2}{C}} \right). \quad (124)$$

3. При изгибе полосы с опертыми концами (см. рис. 61) равномерно распределенной нагрузкой получим

$$(2ql)_{\text{кр}} = \frac{28,3 \sqrt{B_2 C}}{(2l)^2}. \quad (125)$$

4. При изгибе полосы с опертыми концами (см. рис. 61) силой  $2P$ , приложенной не посередине пролета, величина коэффициента  $\mu$  в формуле

$$(2P)_{\text{кр}} = \frac{\mu \sqrt{B_2 C}}{(2l)^2}$$

Таблица 12

$\alpha$	$\mu$	$\alpha$	$\mu$
0,50	16,93	0,20	29,11
0,45	17,15	0,15	37,88
0,40	17,82	0,10	56,01
0,35	19,04	0,05	111,6
0,30	21,01	0	$\infty$
0,25	24,10		

будет зависеть от положения точки приложения силы. Обозначая через  $\alpha$  отношение расстояния точки приложения силы от ближайшего конца к пролету балки, получаем для  $\mu$  ряд значений<sup>2</sup>, которые приведены в табл. 12.

Мы видим, что перемещение силы в пределах средней трети пролета полосы мало влияет на величину критической нагрузки.

При переходе от критической нагрузки к критическим напряжениям придется наибольшее значение изгибающего момента, соответствующего критической нагрузке, делить на момент сопротивления полосы, т. е. на величину  $\frac{2B_1}{Eh}$ , где  $h$  — высота поперечного сечения полосы.

Полагая

$$C : B_2 = \frac{2}{1 + \delta} \approx 1,54$$

и вводя обозначение

$$\frac{B_2}{B_1} \frac{h}{l} = \varphi, \quad (126)$$

представляем величину критического напряжения в случае чистого изгиба [формула (120)] так:  $p_{\text{кр}} = 0,62 \pi \varphi E$ .

Для случая изгиба полосы силой, приложенной на конце [формула (121)], получим  $p_{\text{кр}} = 2,49 \varphi E$ .

Для изгиба полосы с одним заделанным концом равномерной нагрузкой [формула (123)] будем иметь  $p_{\text{кр}} = 3,98 \varphi E$ .

<sup>1</sup> Подробное исследование влияния повышения и понижения точки приложения силы на величину  $P_{\text{кр}}$  сделано А. Коробовым. Коробов А. П. Устойчивость плоской формы изгиба полосы. Изв. Киевского политехнического института, 1911, год 11, отдел инженерной механики, кн. 4, стр. 247—264.

<sup>2</sup> См. указанную выше работу А. П. Коробова.

Для полосы с опертыми концами, нагруженной посередине (см. рис. 61), найдем, сохраняя прежнее обозначение (126),  $p_{кр} = 1,312\phi E$ .

Для той же полосы, равномерно нагруженной [формула (125)], имеем  $p_{кр} = 1,10\phi E$ .

§ 29. Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки<sup>1</sup>

Формулы, полученные в предыдущем параграфе для полосы высокого прямоугольного поперечного сечения, можно применять и к двутавровым балкам, если отношение высоты балки к ее пролету — малая величина и полки балки имеют сравнительно малую ширину. В противном случае, т. е. при коротких балках с широкими полками, найденные выше формулы будут давать для величин критических нагрузок преуменьшенные значения, и двутавровые балки в действительности будут значительно устойчивее. Эта разница между устойчивостью полосы и двутавровой балки обусловлена жесткостью полок последней, в значительной мере влияющих на явление кручения. Для большей ясности мы установим связь между жесткостью полок и кручением балки на простейшем примере и потом уже воспользуемся найденной зависимостью для решения вопросов устойчивости.

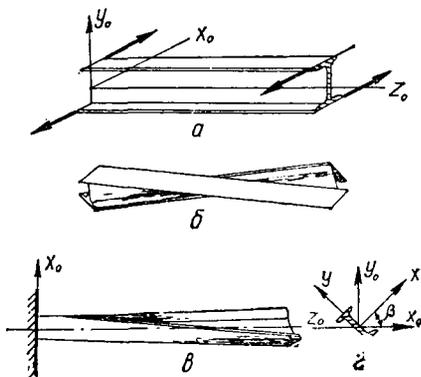


Рис. 62.

Если двутавровую балку скручивать парами сил, приложенными по концам (рис. 62, а), то кручение  $\frac{d\beta}{dz}$  будет постоянным по длине и связь между скручивающим моментом  $H$  и кручением можно по-прежнему (см. выражение (97') § 28 части второй) представить прежней формулой<sup>2</sup>

$$H = C\tau = C \frac{d\beta}{dz}. \tag{a)}$$

При этом полки балки при малых закручиваниях почти не изгибаются в плоскости их наибольшей жесткости (рис. 62, б). Иной результат получим, если будем скручивать двутавровую балку с одним заделанным концом (рис. 62, в, г). В этом случае скручивание балки сопровождается изгибом полок в плоскости их наибольшей жесткости; углы закручивания будут меньше, чем при свободных концах, и кручение  $\frac{d\beta}{dz}$  будет изменяться вдоль оси балки. Скручивающий момент будет уравниваться отчасти напряжениями кручения [формула (а)], отчасти моментом перерезывающих сил, возникающих при изгибе полок.

<sup>1</sup> Тимошенко С. П. Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки под влиянием сил, действующих в плоскости ее наибольшей жесткости. Изв. С.-Петербургского политехнического института, 1905, том 4, вып. 3—4, стр. 151—219; 1906, том 5, вып. 1—2, стр. 3—34; том 5, вып. 3—4, стр. 263—292. Отд. оттиск. С.-Петербург, 1906, 132 стр. [Перепечатка: Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М., Физматгиз, 1971, стр. 9—105].

<sup>2</sup> Жесткость  $C$  при кручении двутавровой балки может быть вычислена приближенным способом. См. § 49 первой части (стр. 128 и далее).

Как раз с таким явлением нам и придется иметь дело при выпучивании двутавровых балок, изгибаемых в плоскости их наибольшей жесткости.

Обозначим через  $D$  величину наибольшей жесткости при изгибе одной полки [величина эта с достаточной для практики точностью может быть принята равной  $\frac{1}{2} B_2$ ], тогда при изгибе полки (рис. 63) в ней возникает перерезывающая сила  $N = D \frac{d^3 u}{dz^3}$ . [Результат этот получается из формулы (3) [см. § 1], если в ней заменить  $x$  на  $z$  и  $y$  на  $-u$ ]. Принимая во внимание, что при малых углах закручивания между прогибами полки и углом закручивания  $\beta$  имеется зависимость  $u = -\frac{\beta h}{2}$ , находим, что поперечные силы  $N$ , действующие в полках, дают момент относительно оси  $z_0$ :

$$Nh = -\frac{Dh^2}{2} \frac{d^3 \beta}{dz^3}.$$

Присоединяя этот момент к моменту, соответствующему собственно кручению двутавровой балки, приходим к такой зависимости между скручивающим моментом и углом закручивания  $\beta$ <sup>1</sup>:

$$H = C \frac{d\beta}{dz} - \frac{Dh^2}{2} \frac{d^3 \beta}{dz^3}. \quad (127)$$



Рис. 63.

Второй член этой формулы оценивает влияние изгиба полки; он будет иметь тем меньшее значение, чем меньше  $D$  и чем меньше высота балки  $h$  по сравнению с пролетом  $l$ .

Переходя теперь к исследованию устойчивости двутавровых балок, мы можем воспользоваться дифференциальными уравнениями, полученными для полосы, нужно будет только везде произвести изменение в выражении для  $H$ , именно вместо зависимости (а) поставить везде выражение (127).

В случае чистого изгиба нужные нам дифференциальные уравнения для искривленной формы равновесия напишутся так [см. формулу (а) § 28]:

$$\beta M = B_2 \frac{d^2 u}{dz^2};$$

$$-\frac{du}{dz} M = C \frac{d\beta}{dz} - \frac{Dh^2}{2} \frac{d^3 \beta}{dz^3}.$$

Исключая из этих уравнений  $\frac{d^2 u}{dz^2}$  и вводя обозначения

$$\frac{2C}{Dh^2} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{2M^2}{DB_2 h^2} = \frac{1}{d^4}, \quad (b)$$

приходим к уравнению

$$\beta^{IV} - \frac{1}{a^2} \beta'' - \frac{1}{d^4} \beta = 0,$$

общий интеграл которого напишется так:

$$\beta = C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z + C_3 e^{\delta z} + C_4 e^{-\delta z}.$$

<sup>1</sup> Проведенные нами опыты дали для угла закручивания значения, весьма близкие (наибольшая погрешность 4%) к тем, которые получаются по найденной формуле.

где

$$\alpha = \sqrt{-\frac{1}{2a^2} + \sqrt{\frac{1}{4a^4} + \frac{1}{d^4}}};$$

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2a^2} + \sqrt{\frac{1}{4a^4} + \frac{1}{d^4}}}.$$

Принимая во внимание условия на концах

$$\begin{array}{lll} \text{при } z = 0 & 1) \beta = 0; & 2) \beta'' = 0; \\ \text{при } z = l & 3) \beta = 0; & 4) \beta'' = 0, \end{array}$$

заключаем на основании условий 1 и 2, что  $C_2 = 0$ ;  $C_3 = -C_4$ .

Условия 3 и 4 приводят нас к таким уравнениям:

$$\begin{aligned} C_1 \sin \alpha l + C_1' \operatorname{sh} \delta l &= 0; \\ -C_1 \alpha^2 \sin \alpha l + C_1' \delta^2 \operatorname{sh} \delta l &= 0, \end{aligned}$$

откуда заключаем:  $C_1' = 0$ ,  $\sin \alpha l = 0$ . Следовательно,

$$-\frac{l^2}{2a^2} + \sqrt{\frac{l^4}{4a^4} + \frac{l^4}{d^4}} = \pi^2.$$

Отсюда, принимая во внимание обозначения (b), получаем

$$M_{кр} = \frac{\pi \sqrt{B_2 C}}{l} \sqrt{1 + \frac{a^2}{l^2} \pi^2}. \quad (128)$$

Сравнивая этот результат с формулой (120) для случая чистого изгиба полосы, заключаем, что балка будет тем устойчивее полосы, чем большее значение имеет отношение

$$\frac{a^2}{l^2} = \frac{Dh^2}{2Cl^2}. \quad (129)$$

Формулу (128) можно переписать в таком виде:

$$M_{кр} = \frac{\mu \sqrt{B_2 C}}{l}. \quad (128')$$

Причем ряд значений коэффициента  $\mu$ , вычисленных для различных  $l^2/a^2$ , приведен в табл. 13.

Таблица 13

$\frac{l^2}{a^2}$	$\mu$	$P_{кр},$ кг/см <sup>2</sup>	$\frac{l^2}{a^2}$	$\mu$	$P_{кр},$ кг/см <sup>2</sup>
0,1	31,4	495	16	4,00	800
1	10,36	518	20	3,83	860
2	7,66	540	24	3,73	915
4	5,85	585	28	3,66	965
6	5,11	625	32	3,59	1015
8	4,70	665	36	3,55	1065
10	4,43	700	40	3,51	1110
12	4,24	735	110	3,29	1645

Отсюда мы видим, как с уменьшением жесткости полки  $D$  коэффициент  $\mu$  приближается к  $\pi$  и балка по своим свойствам приближается к полосе прямоугольного сечения. Из формулы (128') легко получаем значение критических

напряжений

$$P_{\text{кр}} = \frac{\mu \sqrt{B_2 C}}{l} \frac{hE}{2B_1}.$$

Принимая во внимание наши обозначения

$$C = \frac{l^2}{a^2} \frac{Dh^2}{2l^2} \approx \frac{l^2}{a^2} \frac{B_2 h^2}{4l^2},$$

получаем

$$P_{\text{кр}} = \frac{1}{4} \mu \frac{l}{a} E \frac{h^2}{l^2} \frac{B_2}{B_1}.$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначением

$$\frac{h^2}{l^2} \frac{B_2}{B_1} = \Phi, \quad (130)$$

тогда

$$P_{\text{кр}} = \frac{1}{4} \mu \frac{l}{a} E \Phi. \quad (131)$$

Приведенные в табл. 13 значения критических напряжений вычислены в предположении  $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$ ,  $\Phi = 1 \cdot 10^{-4}$ .

Таким образом, расчет балки на устойчивость сводится в рассматриваемом случае к вычислению по формуле (129) значения  $a^2/l^2$  и подыскиванию соответствующего значения  $P_{\text{кр}}$ , которое нужно помножить на величину  $\Phi \cdot 10^4$ , где  $\Phi$  определяется формулой (130).

В случае *изгиба двутавровой балки силой, приложенной на конце* (см. рис. 60), нужные нам дифференциальные уравнения напишутся так [см. уравнения (b) § 28]:

$$\begin{aligned} -P(l-z)\beta &= B_2 \frac{d^2 u}{dz^2}; \\ P(l-z) \frac{du}{dz} - P(f-u) &= C \frac{d\beta}{dz} - \frac{Dh^2}{2} \frac{d^3 \beta}{dz^3}. \end{aligned} \quad (c)$$

Исключая отсюда  $\frac{d^2 u}{dz^2}$ , получаем

$$\beta^{\text{IV}} - \frac{1}{a^2} \beta'' - \frac{2P^2(l-z)^2}{B_2 Dh^2} \beta = 0.$$

Это дифференциальное уравнение четвертого порядка проинтегрировано нами при помощи бесконечных рядов, и из условий на концах найдено для критической нагрузки выражение

$$P_{\text{кр}} = \frac{\mu \sqrt{B_2 C}}{l^2}.$$

Причем оказалось, что значения коэффициента  $\mu$  как и в предыдущем случае, зависят лишь от отношения  $l^2/a^2$ , определяемого формулой (129). Несколько значений  $\mu$  приводим в табл. 14.

Для значений  $l^2/a^2 > 40$  коэффициент  $\mu$  можно находить по такой приближенной формуле:

$$\mu = \frac{4,01}{\left(1 - \frac{a}{l}\right)^2}.$$

Точно так же, как и в предыдущем случае, мы легко можем получить формулу для критических напряжений. Они оказываются пропорциональными  $\Phi$  и значения их для  $\Phi = 1 \cdot 10^{-4}$  приведены в табл. 14 ( $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ).

Таблица 14

$\frac{l^2}{a^2}$	$\mu$	$P_{кр},$ кг/см <sup>2</sup>	$\frac{l^2}{a^2}$	$\mu$	$P_{кр},$ кг/см <sup>2</sup>
0,1	44,3	700	10	7,58	1200
1	15,7	785	12	7,20	1250
2	12,2	860	14	6,96	1300
3	10,7	925	16	6,73	1345
4	9,76	975	24	6,19	1515
6	8,69	1065	32	5,87	1660
8	8,03	1140	40	5,64	1785

При изгибе балки силой, приложенной посередине пролета (см. рис. 61), мы на основании уравнений (d) предыдущего параграфа получаем нужные нам дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} B_2 \frac{d^2 u}{dz^2} &= P(l-z)\beta; \\ C \frac{d\beta}{dz} - \frac{Dh^2}{2} \frac{d^3 \beta}{dz^3} &= -P(l-z) \frac{du}{dz} - Pu, \end{aligned} \quad (d)$$

откуда легко может быть получено дифференциальное уравнение четвертого порядка для  $\beta$ , которое нами проинтегрировано при помощи бесконечных рядов. Мы здесь покажем, как та же задача решается путем рассмотрения энергии системы. Отличие от того, что мы имели в соответствующей задаче для полосы [см. уравнение (f) § 28], заключается лишь в несколько более сложном выражении для потенциальной энергии изгиба. При составлении этого выражения придется принять во внимание, что прогибы полки вследствие кручения не равны прогибам оси балки, а отличаются от последних на величины  $\pm \frac{\beta h}{2}$ . В таком случае энергия изгиба представится таким выражением:

$$\begin{aligned} V_1 &= (B_2 - 2D) \int_0^l \left( \frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz + D \int_0^l \left( \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{h}{2} \frac{d^2 \beta}{dz^2} \right) dz + \\ &+ D \int_0^l \left( \frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{h}{2} \frac{d^2 \beta}{dz^2} \right)^2 dz = B_2 \int_0^l \left( \frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz + \frac{Dh^2}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 \beta}{dz^2} \right)^2 dz. \end{aligned}$$

Вторым членом в этом выражении учитывается влияние жесткости полки при кручении.

Уравнение для определения  $(2P)_{кр}$  в случае двутавровой балки, соответствующее уравнению (f) для полосы, напишется так:

$$2P \int_0^l \beta \frac{d^2 u}{dz^2} (l-z) dz = B_2 \int_0^l \left( \frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz + \frac{Dh^2}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 \beta}{dz^2} \right)^2 dz + C \int_0^l \left( \frac{d\beta}{dz} \right)^2 dz,$$

или, принимая во внимание первое из уравнений равновесия (d) и пользуясь обозначением <sup>1</sup> (129), получаем

$$\frac{P^2}{B_2} \int_0^l \beta^2 (l-z)^2 dz = C \left[ \int_0^l \left( \frac{d\beta}{dz} \right)^2 dz + a^2 \int_0^l \left( \frac{d^2 \beta}{dz^2} \right)^2 dz \right]. \quad (e)$$

<sup>1</sup> Здесь  $l$  означает половину пролета балки (см. рис. 61).

Полагая

$$\beta = a_1 \cos \frac{\pi z}{2l} + a_2 \cos \frac{3\pi z}{2l} + \dots \quad (f)$$

и выбирая  $a_1, a_2, \dots$  так, чтобы  $P$  имело минимальное значение, можем найти величину  $(2P)_{кр}$  с любой степенью точности. Ограничиваясь лишь одним первым членом ряда (f), мы получаем решение, точность которого около 0,5%. Второе приближение, как можно заключить из сравнения его с результатами решения бесконечными рядами, дает погрешность лишь в четвертом знаке.

На основании этих вычислений получаем

$$(2P)_{кр} = \frac{\mu \sqrt{B_2 C}}{(2l)^2}.$$

Значения коэффициента  $\mu$  зависят лишь от отношения  $l^2/a^2$ . Ряд этих значений приводим в табл. 15.

Таблица 15

$\frac{l^2}{a^2}$	$\mu$	$P_{кр},$ кг/см <sup>2</sup>	$P_{кр}',$ кг/см <sup>2</sup>	$P_{кр}'' ,$ кг/см <sup>2</sup>	$\frac{l^2}{a^2}$	$\mu$	$P_{кр},$ кг/см <sup>2</sup>	$P_{кр}'$ кг/см <sup>2</sup>	$P_{кр}''$ кг/см <sup>2</sup>
0,1	86,4	680	405	1150	16	18,3	1830	1490	2240
1,0	31,9	800	505	1250	20	18,1	2020	1670	2420
2,0	25,6	910	600	1350	24	17,9	2190	1840	2580
4,0	21,8	1090	770	1520	40	17,5	2770	2420	3160
6,0	20,3	1250	920	1670	60	17,4	3360	3020	3740
8,0	19,6	1380	1050	1860	80	17,2	3860	3500	4240
12	19,0	1620	1280	2030	100	17,2	4300	3940	4680

От критической нагрузки переходим к критическим напряжениям

$$P_{кр} = \frac{(2P)_{кр} l E h}{4B_1} = \frac{1}{8} \mu \frac{l}{a} E \Phi',$$

где

$$\Phi' = \frac{B_2}{B_1} \frac{h^2}{(2l)^2}. \quad (132)$$

Критические напряжения, вычисленные для  $\Phi' = 1 \cdot 10^{-4}$ , приведены в третьей графе табл. 15 ( $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>).

Все эти результаты получены в том предположении, что точка приложения силы совпадает с центром тяжести среднего поперечного сечения балки.

Всякое повышение точки приложения силы, очевидно, сопровождается уменьшением устойчивости балки. Понижению точки приложения соответствует увеличение устойчивости. Мы даем в четвертой и пятой строчках приведенной выше таблицы значения  $P_{кр}$  и  $P_{кр}'$ , вычисленные для тех случаев, когда точка приложения силы совпадает с верхней или нижней гранью балки. При вычислениях, как и раньше, принято

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad \Phi' = 1 \cdot 10^{-4}.$$

Все вычисления произведены здесь в предположении первой искривленной формы равновесия, не имеющей точек перегиба. Иногда бывают устройства, при которых не только концы балки, но и ее среднее сечение не могут поворачиваться относительно оси  $z_0$  (см. рис. 61)<sup>1</sup>. В таком случае первая искривленная

<sup>1</sup> Подобные условия мы имеем, например, в случае, когда две продольные мостовые балки соединены между собой поперечными связями по середине пролета.

форма будет иметь одну точку перегиба посередине пролета (рис. 64). Значение критической нагрузки представится прежней формулой

$$(2P)_{кр} = \frac{\mu \sqrt{B_2 C}}{(2l)^2}.$$

Величины коэффициента  $\mu$  и критических напряжений, вычисленных при

$$\Phi' = \frac{B_2}{B_1} \frac{h^2}{(2l)^2} = 1 \cdot 10^4,$$

приводим в табл. 16.

Таблица 16

$\frac{P}{\sigma^2}$	$\mu$	$P_{кр}$
0,1	466	3680
1,0	154	3840
2,0	114	4010
4,0	86,4	4320
8,0	69,2	4900
24	54,5	6680
32	52,4	7420
50	49,8	8810
100	47,4	11900

Таблица 17

$\frac{l^2}{a^2}$	$\mu$	$P_{кр}$	$\frac{l^2}{a^2}$	$\mu$	$P_{кр}$
0,1	268	2120	10	37,8	3000
1,0	88,8	2220	12	36,3	3140
2,0	65,5	2320	16	34,1	3420
4,0	50,2	2500	32	30,7	4340
6,0	43,6	2680	50	29,4	5200
8,0	40,2	2840	80	28,4	6360
			100	28,2	7040

Примечание. При вычислении  $P_{кр}$  принималось  $E = 2 \times 10^6$  кг/см<sup>2</sup>;  $\Phi' = 1 \cdot 10^{-4}$ .

Примечание. При вычислении  $P_{кр}$  принималось  $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>;  $\Phi' = 1 \cdot 10^{-4}$ .

Если концы балки заделаны так, что они не могут вращаться ни вокруг оси  $z_0$ , ни вокруг оси  $y_0$ , то первая искривленная форма изогнутой оси балки в плоскости  $z_0x_0$  будет иметь вид, представленный на рис. 65. Для величин  $(2P)_{кр}$  и



Рис. 64.

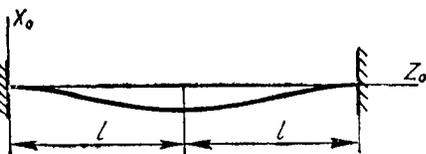


Рис. 65.

$P_{кр}$  сохраняются такие же выражения, как и в предыдущих случаях. Значения коэффициента  $\mu$  и  $P_{кр}$  приведены в табл. 17.

Если балка с опертыми концами изгибается равномерно распределенной нагрузкой (рис. 66, а), то формулы для критической нагрузки и критического напряжения сохраняют прежний вид (рис. 66, б):

$$(2ql)_{кр} = \frac{\mu \sqrt{B_2 C}}{(2l)^2}; \quad P_{кр} = \frac{1}{16} \mu \frac{l}{a} E \Phi'.$$

Значения  $\mu$  и  $P_{кр}$  при  $\Phi' = 1 \cdot 10^{-4}$  приводим в табл. 18, где даны также значения  $P_{кр}$  и  $P_{кр}''$  в кг/см<sup>2</sup> для тех случаев, когда нагрузка приложена по верхней или нижней грани балки.

Таблица 18

$\frac{l^2}{a^2}$	$\mu$	$P_{кр}$	$P'_{кр}$	$P''_{кр}$	$\frac{l^2}{a^2}$	$\mu$	$P_{кр}$	$P'_{кр}$	$P''_{кр}$
0,1	143	568	367	879	16	30,5	1530	1290	1810
1,0	53,0	663	454	967	20	30,1	1680	1440	1960
2,0	42,6	752	538	1050	32	29,4	2080	1840	2350
4,0	36,3	905	684	1200	50	29,0	2570	2330	2840
6,0	33,8	1040	813	1330	70	28,8	3020	2770	3280
8,0	32,6	1150	923	1430	90	28,6	3400	3160	3670
12	31,5	1350	1120	1630	100	28,6	3580	3330	3840

Значения  $\mu$ ,  $P_{кр}$ ,  $P'_{кр}$ ,  $P''_{кр}$  для второй формы равновесия (рис. 66, б), получающейся при дополнительном закреплении посередине пролета, приводим в табл. 19.

Пользуясь всеми приведенными таблицами, мы без всяких затруднений можем проверить двутавровую балку на устойчивость для рассмотренных случаев нагрузки. Проверку начинаем с вычисления величины  $l^2/a^2$  [формула (129)]<sup>1</sup>. Нужное для этого значение  $C$  может быть вычислено по приближенной формуле

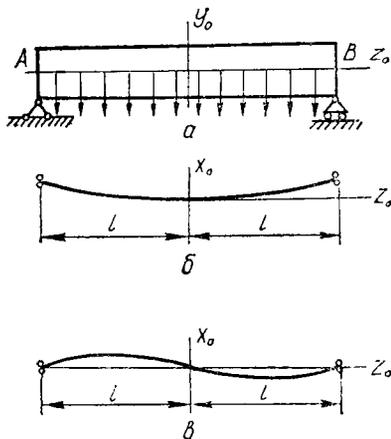


Рис. 66.

Таблица 19

$\frac{l^2}{a^2}$	$\mu$	$P_{кр}$	$P'_{кр}$	$P''_{кр}$
0,1	673	2660	2320	3060
1,0	221	2770	2430	3150
2,0	164	2900	2560	3280
4,0	126	3130	2800	3520
8,0	101	3550	3220	3940
24	79,5	4860	4520	5240
32	76,4	5400	5060	5770
50	72,8	6440	6100	6810
100	69,6	8690	8350	9060

Примечание. При вычислении  $P_{кр}$ ,  $P'_{кр}$ ,  $P''_{кр}$  принималось  $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>;  $\Phi' = 1 \cdot 10^{-4}$ .

Сен-Венана или при помощи аналогии Прандтля. Для найденного значения  $l^2/a^2$  подыскиваем в таблице соответствующее критическое напряжение. Это табличное значение нужно умножить на  $\Phi \cdot 10^4$  или  $\Phi' \cdot 10^{-4}$ , чтобы получить искомого критическое напряжение<sup>2</sup>.

Получаемая таким путем величина критического напряжения будет соответствовать действительности, если только она не превосходит предела упругости материала.

<sup>1</sup> В этой формуле в случае чистого изгиба и изгиба силой, приложенной на конце,  $l$  обозначает весь пролет. Для других рассмотренных случаев  $l$  — половина пролета.

<sup>2</sup> В случае изгиба парой или силой, приложенной на конце,  $\Phi$  определяется из формулы (130), в остальных случаях нужно пользоваться величиной  $\Phi'$ , определяемой по формуле (132).

§ 30. Об устойчивости равномерно сжатого кругового кольца или его части

Если круговое кольцо подвергнуть действию равномерно распределенных внешних давлений интенсивности  $q$ , то ось кольца будет испытывать равномерное сжатие, сохраняя первоначальную круговую форму. Постепенно увеличивая интенсивность давлений, мы можем достигнуть предела, за которым круговая форма перестает быть устойчивой и кольцо начинает сплющиваться, как показано на рис. 67. При исследовании устойчивости применим первый метод (см. стр. 258). Предположим, что под действием внешних давлений сплющивание произошло, составим дифференциальное уравнение равновесия для искривленной формы и из решения этого уравнения найдем, каковы должны быть давления  $q$ , чтобы искривленная форма была возможной. Оси симметрии <sup>1</sup> сплющенной формы принимаем за координатные оси  $x, y$  и производим разрез кольца по горизонтальной оси симметрии (рис. 67, б). Тогда действие нижней половины кольца на верхнюю может быть в каждом из произведенных сечений заменено силой  $S$  и парой сил  $M_0$ . Что касается усилия  $S$ , то его мы легко находим из условий статики. Обозначая через  $u_0$  радиальные перемещения для точек  $A$  и  $B$ , будем, очевидно, иметь  $S = q(r - u_0)$ .

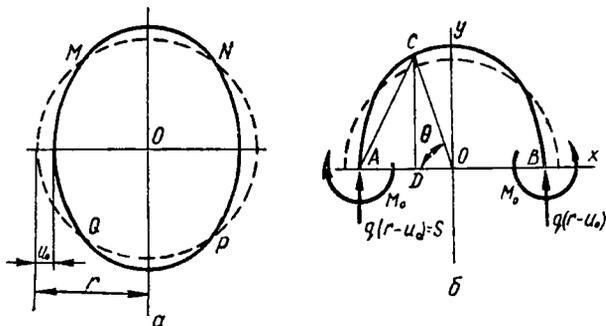


Рис. 67.

Составим теперь основное дифференциальное уравнение (88') для изогнутой оси кольца. Изгибающий момент  $M$  в какой-либо точке  $C$  составит из момента силы  $S$  и пары сил  $M_0$ , приложенных в точке  $A$ , и из момента давлений, равномерно распределенных по дуге  $AC$ . Таким образом, мы получаем

$$M = -M_0 - SAD + q \frac{AC^2}{2} = -M_0 + q \left[ \frac{AC^2}{2} - (r - u_0) \overline{AD} \right].$$

Из рисунка видно, что

$$\overline{OC}^2 = (r - u)^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AO}^2 - 2\overline{AO} \cdot \overline{AD},$$

откуда

$$\overline{AC}^2 - 2\overline{AO} \cdot \overline{AD} = \overline{OC}^2 - \overline{AO}^2 = (r - u)^2 - (r - u_0)^2.$$

Пренебрегая малыми высшего порядка, мы можем теперь выражение для изгибающего момента переписать так:  $M = -M_0 + qr(u_0 - u)$ . Тогда дифференциальное уравнение для изогнутой оси представится так:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{r^3}{EJ} [-M_0 + qr(u_0 - u)]. \tag{a}$$

Вводя для краткости обозначение

$$1 + \frac{qr^3}{EJ} = \alpha^2, \tag{b}$$

<sup>1</sup> Выражая искривление оси кольца при помощи тригонометрических рядов, можно показать, что принятая нами форма с двумя осями симметрии является первой возможной искривленной формой.

получаем для  $u$  такое выражение:

$$u = C_1 \sin \alpha \theta + C_2 \cos \alpha \theta + \frac{qr^3 u_0 - M_0 r^2}{EJ + qr^3}. \quad (c)$$

Так как мы условились  $\theta$  отсчитывать от оси симметрии, то для определения произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$  будем иметь

$$\frac{du}{d\theta} = 0 \text{ при } \theta = 0; \quad \frac{du}{d\theta} = 0 \text{ при } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,  $C_1 = 0$  и

$$(\sin \alpha \theta)_{\theta = \frac{\pi}{2}} = 0. \quad (d)$$

Второе из этих уравнений дает нам  $\frac{\alpha \pi}{2} = n\pi$ , где  $n$  — целое число.

Полагая  $n = 1$ , находим на основании принятого обозначения (b)  $qr^3/EJ = 3$ , откуда <sup>1</sup>

$$(q)_{кр} = \frac{3EJ}{r^3}. \quad (132')$$

Мы взяли наименьший корень уравнения (d), которому соответствует  $\alpha = 2$ . При этом величина  $u$ , как видно из общего решения (c), два раза проходит через значение максимума и два раза — через значение минимума. Общий вид искривления представлен на рис. 67, а. Следующим корням уравнения (d) будут соответствовать большие значения  $q$  и большее число максимумов и минимумов в выражении для  $u$ .

Заметим, что те же результаты можно получить, если воспользоваться решениями в форме тригонометрических рядов [формулы (95) и (96) § 18].

Если взять первый член этих рядов ( $n = 2$ ), то видим, что он будет неопределенно возрастать, если сжимающая кольцо сила приближается к пределу  $S = 3EJ/r^2$ . Точно так же второй член ряда (96) будет неопределенно возрастать, если сжимающая сила подходит к пределу  $S = 8EJ/r^2$ , и т. д. Легко видеть, что значения сжимающей силы, найденные таким образом, при  $n$  четном соответствуют критическим значениям давления  $q$ , которые определяются корнями уравнения (d).

Подобным же образом решается задача об устойчивости части равномерно сжатого кольца. Возьмем, например, случай двухшарнирной круговой арки, подвергающейся действию равномерного нормального давления интенсивности  $q$  (рис. 68). Так как в этом случае точки  $A$  и  $B$  при выпучивании сжатой арки не смещаются, то давление  $S$  в этих точках не изменяет своей величины, и мы получим дифференциальное уравнение для искривленной формы, представленной на рисунке, если в уравнении (a) положим  $u_0 = 0$ ,  $M_0 = 0$ . Тогда

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{qr^3}{EJ} u. \quad (a')$$

<sup>1</sup> Эта формула впервые была получена М. Леви. L é v y M. Mémoire sur un nouveau cas integrable du probleme de l'élastique et l'une de ses applications. Journal de mathématiques pures et appliquées (Liouville Journal), Series 3, 1884, vol. 10, pp. 5—42. Строгое решение этого же вопроса дано в работе H a l p h e n G. H. Sur une courbe élastique. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. 1884, vol. 98, N 7, pp. 422—428. Исследование различных форм равновесия равномерно сжатого кольца, см. G r e e n h i l l A. G. The elastic curve under uniform normal pressure. Mathematische Annalen, 1899, Bd 52, SS. 465—500.

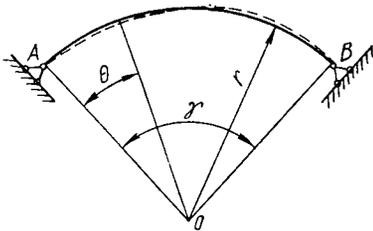


Рис. 68.

Полагая

$$1 + \frac{qr^3}{EJ} = \alpha_1^2,$$

находим  $u = C_1 \sin \alpha_1 \theta + C_2 \cos \alpha_1 \theta$ .

Из условия, что перемещение  $u$  на левой опоре обращается в нуль, находим  $C_2 = 0$ . Что касается перемещений  $w$ , направленных нормально к радиусу  $r$ , то из условий нерастяжимости оси следует [формула (с) § 18]

$$\frac{dw}{d\theta} = u = C_1 \sin \alpha_1 \theta; \quad w = \frac{C_1}{\alpha_1} (1 - \cos \alpha_1 \theta).$$

Для определения критического значения давлений  $q$  воспользуемся условиями на правом конце арки; так как здесь перемещения  $u$  и  $w$  должны равняться нулю, то получаем  $\alpha_1 \gamma = 2n\pi$ , где  $n$  — целое число.

Наименьшее значение для  $q$  получаем при  $n = 1$ . Соответствующая искривленная форма представлена на рис. 68, и критическое давление определяется формулой<sup>1</sup>

$$q = \frac{EJ}{r^3} \left( \frac{4\pi^2}{\gamma^2} - 1 \right). \quad (133)$$

При  $\gamma = \pi$  этот результат совпадает с формулой (132'), чего и нужно было ожидать, так как цельное кольцо после выпучивания составляет из двух половинок  $MNP$  и  $PQM$  (см. рис. 67, а), находящихся в таких же условиях, как и двухшарнирная круговая арка с центральным углом  $\gamma = \pi$ .

При небольших значениях угла  $\gamma$  мы можем в формуле (133) пренебречь единицей по сравнению с большим числом  $\frac{4\pi^2}{\gamma^2}$ , и тогда получим для критического значения силы  $S$ , сжимающей арку, такую формулу:

$$S_{кр} = (qr)_{кр} = \frac{4EJ\pi^2}{(r\gamma)^3}. \quad (134)$$

Сравнивая этот результат с той формулой, которую мы имели для прямого стержня той же длины, что и арка, с опертыми концами, находим, что  $S_{кр}$  для арки в четыре раза больше, чем  $P_{кр}$  для стержня. Объясняется это тем, что для первой искривленной формы арки вследствие принятой нерастяжимости оси прогиб  $u$  посередине пролета должен обращаться в нуль. При беспредельном уменьшении  $\gamma$ <sup>2</sup> первая искривленная форма для арки совпадает со второй формой для стержня.

### § 31. Об устойчивости плоской формы изгиба полосы с круговой осью<sup>3</sup>

Если полосу прямоугольного поперечного сечения с начальным искривлением по дуге круга радиуса  $r$  изгибать в плоскости ее наибольшей жесткости, то при некоторых предельных значениях изгибающих нагрузок мы встретимся с таким же явлением неустойчивости плоской

<sup>1</sup> См. стр. 66 нашей монографии, указанной на стр. 266. Экспериментальная проверка с достаточной точностью подтверждает полученную формулу. См. Mehrrens G. C., Bleich F. Der Wettbewerf um den Bau einer Rheinstrassenbrücke in Köln. Der Eisenbau, 1912, Bd 3. Н. 1. SS. 22—38; Н. 2. SS. 65—76; Н. 3. SS. 113—122; Н. 5. SS. 138—193. Der zweite engere Wettbewerf um den Bau einer Rheinstrassenbrücke in Köln. (Fortsetzung). Там же, 1913, Bd 4, Н. 10, SS. 361—367

<sup>2</sup> Когда  $\gamma$  весьма мала, нельзя пренебречь изменениями длины оси арки. Принять эти удлинения в расчет можно так, как это было указано в § 14.

<sup>3</sup> Тимошенко С. П. К вопросу об устойчивости упругих систем. Изв. Киевского политехнического института. 1910, год 10, отдел инженерной механики, кн. 2, стр. 147—167. Отд. оттиск, Киев, 1910, 24 стр. [Перепечатка: Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М., Физматгиз, 1971, стр. 191—207].

формы изгиба, как и в случае полосы с прямой осью. Рассмотрим здесь простейший пример, когда изгиб производится двумя равными и прямо противоположными парами сил  $M$  (рис. 69). Предположим, что закрепление концов не допускает вращения конечных поперечных сечений относительно конечных касательных к оси полосы. Вращение конечных сечений относительно главных осей инерции может происходить совершенно свободно. При составлении дифференциальных уравнений равновесия для выпучивающейся из плоскости кривизны полосы воспользуемся системой осей  $x_0, y_0, z_0$  и  $x, y, z$ , которые мы ввели, когда рассматривали общий случай изгиба кругового кольца (§ 19). Перемещения любой точки  $D$  в направлении осей  $x_0, y_0, z_0$  обозначим, как и прежде, через  $u, v$  и  $w$ , угол поворота плоскости  $xz$  относительно  $x_0z_0$  — через  $\beta$  (рис. 69, а). Момент всех сил, приложенных к левой половине полосы, представится вектором  $M$  (рис. 69, б), имеющим направление оси  $y_0$ . Проекции этого вектора на оси  $x, y, z$ , построенные в точке  $D$ , находятся из геометрических соображений и представляются такими формулами:

$$M_1 = \beta M; \quad M_2 = M; \quad H = M \frac{dv}{ds}.$$

Пользуясь теперь формулами (97) и (98) и принимая во внимание значение начальной кривизны  $\kappa = \frac{1}{r}$ , приходим к таким дифференциальным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \beta M &= B_1 \left( \frac{\beta}{r} - \frac{d^2 v}{ds^2} \right); \\ M &= B_2 \left( \frac{u}{r^2} + \frac{d^2 u}{ds^2} \right); \\ M \frac{dv}{ds} &= C \left( \frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{r} \frac{dv}{ds} \right). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

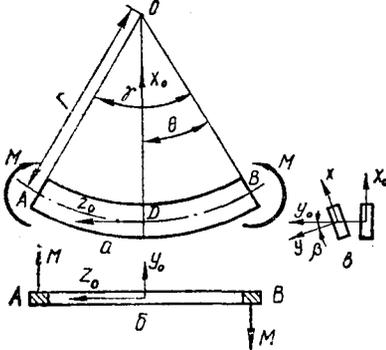


Рис. 69.

Исключая  $v$  из первого и третьего уравнений, приходим к такому уравнению для  $\beta$

$$\left( \frac{B_1}{r} - M \right) \ddot{\beta} = \frac{B_1 C}{M - \frac{C}{r}} \frac{d^2 \beta}{ds^2}. \quad (b)$$

При  $r$ , равном бесконечности, уравнение это совпадает с тем, которое мы имели для прямого изгиба полосы с прямой осью [§ 28]<sup>1</sup>.

Вводя для краткости обозначение

$$\frac{\left( -\frac{B_1}{r} + M \right) \left( M - \frac{C}{r} \right)}{B_1 C} = \alpha^2, \quad (c)$$

получаем  $\beta = C_1 \sin \alpha s + C_2 \cos \alpha s$ . Так как  $\beta$  обращается в нуль при  $s = 0$  и при  $s = \gamma r$ , то, следовательно,

$$C_2 = 0, \quad \sin(\alpha \gamma r) = 0. \quad (d)$$

Последнее уравнение дает нам возможность определить  $M_{кр}$ . Наименьший корень этого уравнения будет  $\alpha \gamma r = \pi$ , откуда, принимая во внимание обозначение (c), получаем для  $M_{кр}$  уравнение

$$M^3 - \frac{B_1 + C}{r} M + \frac{B_1 C}{r^2} \left( 1 - \frac{\pi^2}{\gamma^2} \right) = 0.$$

Следовательно,

$$M_{кр} = \frac{B_1 + C}{2r} \pm \sqrt{\left( \frac{B_1 + C}{2r} \right)^2 - \frac{B_1 C}{r^2} \left( 1 - \frac{\pi^2}{\gamma^2} \right)}. \quad (135)$$

Положив в этом выражении  $r = \infty$  и  $\gamma r = l$ , придем к формуле

$$M_{кр} = \pm \frac{\pi \sqrt{B_1 C}}{l}.$$

<sup>1</sup> При взятом расположении координатных осей наименьшая жесткость изгиба обозначена у нас через  $B_1$ , а не через  $B_2$ , как это было в § 28.

При малых значениях  $\gamma$ , т. е. если ось полосы обладает малым начальным искривлением, полученный результат (135) дает возможность для оценки влияния этого искривления составить такую приближенную формулу:

$$M_{кр} = \frac{B_1 + C}{2r} \pm \frac{\pi \sqrt{B_1 C}}{l}.$$

Знак «плюс» соответствует направлению моментов, увеличивающему начальную кривизну полосы, знак «минус» соответствует моментам противоположного направления. Следовательно, начальное искривление оси полосы несколько увеличивает ее устойчивость в отношении моментов, взятых на рис. 69, а, и уменьшает устойчивость при моментах противоположного направления.

Постепенно увеличивая  $\gamma$ , мы можем достигнуть значения  $\gamma = \pi$ , чему соответствует полоса, изогнутая в полукруг. При этом одно из значений  $M_{кр}$ , определяемых формулой (135) обращается в нуль. Такой результат соответствует возможности вращения полосы без деформаций вокруг диаметра, являющегося общей главной осью инерции для обоих концевых сечений полосы.

При  $\gamma > \pi$  оба значения  $M_{кр}$ , получаемые из (135), положительны, и для разыскания отрицательного значения  $M_{кр}$  нужно обратиться к высшим формам равновесия, соответствующим дальнейшим корням уравнения (d).

Если полоса, имеющая начальное искривление по дуге круга, заделана в сечении  $A$  и изгибается силой  $P$ , приложенной на свободном конце  $B$  и направленной по касательной к оси полосы (рис. 70), то искривленная форма выпучившейся полосы может быть, как и в предыдущем случае, определена при помощи перемещений  $u, v, w$ , отнесенных к осям  $x_0, y_0, z_0$ , и угла  $\beta$ , составляемого плоскостью  $xz$  системы  $x, y, z$  с плоскостью  $x_0z_0$ .

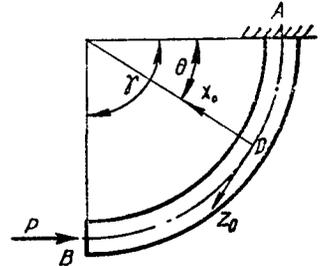


Рис. 70.

Таблица косинусов углов, составляемых осями  $x, y, z$  с соответствующей системой  $x_0, y_0, z_0$ , напишется так:

	$x_0$	$y_0$	$z_0$
$x$	1	$\beta$	$-\frac{du}{ds} - \frac{w}{r}$
$y$	$-\beta$	1	$-\frac{dv}{ds}$
$z$	$\frac{du}{ds} + \frac{w}{r}$	$\frac{dv}{ds}$	$1 + \frac{dw}{ds}$

Выражения для моментов силы  $P$  относительно осей  $x, y, z$ , построенных в какой-либо точке  $D$  оси полосы, могут быть составлены при помощи приведенной таблицы косинусов. Они напишутся так:

$$M_1 = -P \cos(\gamma - \theta)(v_0 - v) - Pr\beta [1 - \cos(\gamma - \theta)];$$

$$M_2 = -Pr [1 - \cos(\gamma - \theta)];$$

$$H = -Pr \frac{dv}{ds} [1 - \cos(\gamma - \theta)] + P \sin(\gamma - \theta)(v_0 - v).$$

Здесь через  $v_0$  обозначен прогиб в направлении  $y_0$  конца  $B$  выпучившейся полосы. На основании (97) и (98) составляем нужные нам дифференциальные уравнения равновесия для искривленной формы:

$$B_1 \left( \frac{\beta}{r} - \frac{d^2v}{ds^2} \right) = -P \cos(\gamma - \theta)(v_0 - v) - Pr\beta [1 - \cos(\gamma - \theta)];$$

$$C \left( \frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{r} \frac{dv}{ds} \right) = -Pr \frac{dv}{ds} [1 - \cos(\gamma - \theta)] + P \sin(\gamma - \theta)(v_0 - v).$$

Если взять полосу, представляющую четверть круга, то  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , и уравнения равновесия переписутся так:

$$B_1 \left( \frac{\beta}{r} - \frac{d^2 v}{ds^2} \right) = -P \sin \theta (v_0 - v) - Pr\beta (1 - \sin \theta);$$

$$C \left( \frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{r} \frac{dv}{ds} \right) = -Pr \frac{dv}{ds} (1 - \sin \theta) + P \cos \theta (v_0 - v).$$

Решение этих уравнений в замкнутой форме нам не известно. Определение критического значения силы  $P$  может быть найдено приближенным способом.

### § 32. Об устойчивости длинного круглого вала при кручении

Если длинный круглый стержень скручивать парами сил, приложенными по концам, то постепенно увеличивая значение скручивающих моментов, можно достигнуть предела, когда прямая форма равновесия перестает быть устойчивой, и при дальнейшем увеличении момента ось начинает искривляться. Мы удовлетворим всем условиям равновесия, если допустим, что ось искривляется по винтовой линии. Обозначим через  $r$  радиус того цилиндра, на котором располагается искривившаяся по винтовой линии ось стержня, и через  $\alpha$  — угол, составляемый элементами винтовой линии с осью цилиндра. Тогда главная кривизна для оси стержня после выпучивания представится так:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin^2 \alpha}{r}. \quad (a)$$

Для второй кривизны, соответствующей кручению стержня, имеем выражение

$$\tau = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r}. \quad (b)$$

Длина  $s$  одного оборота винтовой линии определится условием

$$\tau s = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r} s = 2\pi. \quad (c)$$

Если концы скручиваемого стержня оперты, то мы получим значение  $M_{кр}$ , допустив, что ось стержня длиной  $l$  при выпучивании образует один виток винтовой линии и так как эта линия будет весьма близка к прямой, то из (a), (b) и (c) получаем

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha^2}{r}; \quad \tau = \frac{\alpha}{r}; \quad \frac{\alpha l}{r} = 2\pi. \quad (d)$$

Этими величинами определяется искривленная ось стержня. Обратимся теперь к величине изгибающего и скручивающего моментов. Проектируя момент  $M$ , скручивающий стержень, на направление бинормали и касательной к винтовой линии, получаем такие значения изгибающего и скручивающего моментов для искривленной оси стержня:  $M_1 = M\alpha$ ;  $H = M$ . Обозначая через  $B$  жесткость при изгибе стержня, получаем для определения  $M_{кр}$  такое условие:

$$M_1 = M\alpha = \frac{B}{\rho} - \frac{B\alpha^2}{r}.$$

откуда  $M_{кр} = B \frac{\alpha}{r}$ , или на основании третьего из равенств (d)

$$M_{кр} = \frac{B2\pi}{l}. \quad (136)$$

Если кроме кручения стержень испытывает еще и продольное сжатие силой  $P$ , то при этом величина критического момента уменьшается и определяется такой формулой<sup>1</sup>:

$$\frac{M_{кр}^2}{4B^2} + \frac{P}{B} = \frac{\pi^2}{l^2}.$$

Перемена знака  $P$ , т. е. переход от сжатия к растяжению, конечно, будет сопровождаться увеличением устойчивости скручиваемого вала.

<sup>1</sup> Результат этот принадлежит А. Гринхиллу, изучавшему устойчивость длинных парных валов, испытывающих одновременное действие кручения и сжатия. Greenhill A. G. On the strength of shafting when exposed both to torsion and to end thrust. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1883, April, pp. 182—209.

При решении ряда технических вопросов прочности приходится иметь дело с задачами динамики. Например, при расчете многих машинных частей, участвующих в движении, приходится принимать во внимание силы инерции. И напряжения, вызываемые этими силами, иногда во много раз больше тех, которые получаются от статически действующих нагрузок. Такого рода условия мы имеем при расчете быстро вращающихся барабанов и дисков паровых турбин, шатунов быстроходных машин и паровозных спарников, маховых колес и т. д. Решение таких задач может быть выполнено без особых затруднений, так как здесь деформации не играют роли: мы можем при подсчете сил инерции рассматривать тела как идеально твердые и потом, присоединив найденные таким путем силы инерции к статическим нагрузкам, привести задачу динамики к задаче статики. Эти задачи достаточно полно были рассмотрены в курсе сопротивления материалов, и мы на них здесь останавливаться не будем, а перейдем к другой группе вопросов динамики — к исследованию колебаний упругих систем под действием переменных сил. Мы знаем, что при некоторых условиях амплитуда этих колебаний имеет тенденцию возрастать и может достигнуть таких пределов, когда соответствующие ей напряжения становятся опасными с точки зрения прочности материалов. Выяснению таких условий, главным образом по отношению к колебаниям призматических стержней, и будет посвящена настоящая глава. Как частные случаи рассмотрим деформации, вызываемые в стержнях внезапно приложенными силами, и явление удара.

### § 33. Колебание системы с одной степенью свободы

При исследовании колебаний упругих тел мы встречаемся обыкновенно со сложной задачей, с движением системы, имеющей бесконечное множество степеней свободы. Иногда задачу можно значительно упростить и получить вполне удовлетворительное для практических приложений решение путем замены сложной упругой системы системой с одной степенью свободы. Рассмотрим, например, колебания груза, подвешенного на пружине и могущего перемещаться лишь в вертикальном направлении (рис. 71). Если вес груза  $Q$  велик по сравнению с весом пружины, то массой пружины можно в первом приближении пренебречь. Можно также пренебречь деформациями груза и рассматривать его как идеально твердое тело. Таким путем мы приходим к системе с одной степенью свободы. Положение груза вполне определяется координатой  $x$ . Дальше мы увидим, что

ряд задач таким же образом может быть приведен к рассмотрению колебаний систем с одной степенью свободы. Результаты, полученные для таких систем, возможно будет использовать при решении более сложных задач, поэтому является целесообразным начать изучение колебаний с системы с одной степенью свободы.

Пусть начало координат совпадает с центром тяжести груза  $Q$  в положении равновесия. Если мы грузу сообщим каким-либо способом колебательное движение по оси  $x$ , то в любой момент равнодействующая всех сил, приложенных к грузу, будет равна  $ax$ , где  $a$  — коэффициент, характеризующий жесткость пружины. Он представляет собой ту силу, которую нужно приложить к пружине, чтобы вызвать удлинение или укорочение, равное единице длины.

Дифференциальное уравнение движения груза напишется так:

$$x'' + k^2x = 0. \quad (a)$$

Здесь для краткости введено обозначение

$$\frac{ag}{Q} = k^2. \quad (b)$$

Общее решение уравнения (a) будет

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (c)$$

Получаем простое гармоническое колебание, период которого равен

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{Q}{ag}} = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}}, \quad (137)$$

где  $\lambda$  — удлинение пружины, вызываемое собственным весом груза  $Q$ . Следовательно, период колебания груза  $Q$  такой же, как математического маятника, длина кото-

рого равна  $\lambda$ , а величина постоянных  $C_1$  и  $C_2$  должна быть найдена из начальных условий.

Если через  $x_0$  обозначим начальное перемещение груза от положения равновесия и через  $x_0'$  — его начальную скорость, то, очевидно, мы удовлетворим этим начальным условиям, переписав общий интеграл (c) в таком виде:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{x_0'}{k} \sin kt. \quad (138)$$

Таким образом, амплитуда колебаний груза вполне определяется начальными условиями, тогда как период зависит лишь от устройства системы.

Выше мы предполагали, что груз при своих колебаниях не встречает никаких сопротивлений. В действительности сопротивление среды всегда имеет место, и потому амплитуда колебаний со временем постепенно убывает, колебания *затухают*. Сделаем предположение, что сопротивление среды пропорционально скорости движущегося груза. В таком случае дифференциальное уравнение движения напишется так:

$$x'' + 2nx' + k^2x = 0. \quad (d)$$

Здесь через  $2n$  обозначено сопротивление, приходящееся на единицу массы движущегося груза при скорости, равной единице. Будем считать сопротивление среды малым и положим, что  $k^2 - n^2 > 0$ . Тогда, введя обозначение

$$k^2 - n^2 = n_1^2, \quad (e)$$

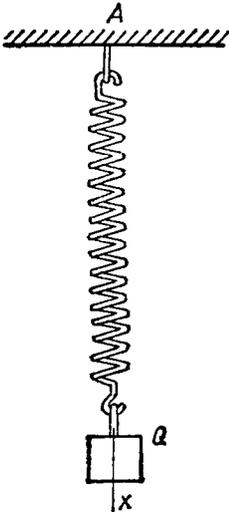


Рис. 71.

напишем общий интеграл уравнения (d) в таком виде:

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t). \quad (f)$$

Первый множитель в полученном выражении беспредельно убывает со временем, и потому колебания будут постепенно затухать. Быстрота затухания определяется величиной  $n$ . Период колебаний будет

$$\tau = \frac{2\pi}{n_1}. \quad (139)$$

На основании обозначения (e) заключаем, что в случае малых сопротивлений приращение периода, обусловленное этим сопротивлением, представится малой величиной второго порядка и потому при вычислении периода колебаний можно пользоваться формулой (137). Что касается амплитуды колебаний, зависящей от величин  $C_1$  и  $C_2$  в общем интеграле (f), то она определяется из начальных условий. Если для начального перемещения и начальной скорости оставить прежние обозначения, то интеграл (f) переписется таким образом:

$$x = e^{-nt} \left[ x_0 \frac{\sin n_1 t}{n_1} + x_0 \left( \cos n_1 t + \frac{n}{n_1} \sin n_1 t \right) \right]. \quad (140)$$

Мы пока предполагали, что колебания груза вызваны в начальный момент и после этого система была предоставлена самой себе. Поэтому решения (138) и (140) представляют собою *свободные* или *собственные* колебания системы. Рассмотрим теперь те колебания, которые совершает груз при непрерывном действии на него какой-либо периодически изменяющейся силы. Возьмем, например, простейший случай, когда раскачивающая сила изменяется по закону синуса, и пусть величина этой силы, отнесенная к единице массы груза, равна

$$q \sin pt. \quad (g)$$

Тогда период раскачивающей силы будет

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{p},$$

и дифференциальное уравнение движения при наличии сопротивления среды, пропорционального скорости, запишется так:

$$x'' + 2nx' + k^2x = q \sin pt. \quad (h)$$

Общий интеграл соответствующего уравнения без последнего члена даст нам рассмотренные выше *затухающие* колебания груза. Частное решение уравнения (h) представит собой *вынужденные* колебания груза. Легко проверить, что в рассматриваемом случае нужное нам частное решение представляется таким выражением:

$$x_1 = - \frac{2qpn}{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} \cos pt + \frac{q(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} \sin pt. \quad (141)$$

Это выражение может быть представлено в более простом виде, если ввести такие обозначения:

$$\frac{q(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} = C \cos \alpha; \quad \frac{2qpn}{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} = C \sin \alpha,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2pn}{k^2 - p^2}; \quad C = \frac{q}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2}} = \frac{q \sin \alpha}{2pn}. \quad (142)$$

В таком случае для вынужденных колебаний получаем

$$x_1 = C \sin (pt - \alpha). \quad (141')$$

Мы видим, что период вынужденных колебаний такой же, как и период раскачивающей силы, амплитуда вынужденных колебаний  $C$  пропорциональна величине силы. Момент наибольшего перемещения груза от положения равновесия не совпадает с моментом наибольшего значения раскачивающей силы и величина расхождения определяется углом  $\alpha$ , который называют *разностью фаз*. Если  $k > p$ , т. е. если период раскачивающей силы больше периода собственных колебаний груза,  $\operatorname{tg} \alpha$  имеет положительные значения, вынужденные колебания отстают от раскачивающей силы на величину, меньшую  $\pi/2$ , и это отставание будет тем больше, чем ближе  $p$  к  $k$ . При  $p = k$   $\alpha = \pi/2$ , вынужденные колебания отстают от силы на четверть периода и, когда сила, постепенно увеличиваясь, достигает максимального значения, груз, идя в ту же сторону, проходит через свое среднее положение. Если  $k < p$ , т. е. когда период раскачивающей силы меньше периода собственных колебаний,  $\operatorname{tg} \alpha < 0$ , отставание колебаний от силы больше четверти периода и в пределе достигает половины периода. В этом случае сила достигает своего максимального значения в известном направлении, когда перемещение груза достигает своей наибольшей величины в направлении прямо противоположном. Примером подобного колебания может служить математический маятник. В момент наибольшего его отклонения сила тяжести дает наибольшую составляющую в направлении, прямо противоположном отклонению.

Амплитуда вынужденных колебаний, как видно из формулы (142), при определенных значениях  $q$  и  $n$  в большей степени зависит от  $p$  и  $k$ , т. е. от периодов вынужденных и свободных колебаний системы. Принимая во внимание значения  $k^2$  и  $q$  [см. формулы (b) и (g)], заключаем, что  $q/k^2 = \lambda_1$ , где  $\lambda_1$  — удлинение пружины, которое мы получили бы при статическом действии наибольшего значения раскачивающей силы. В таком случае для амплитуды вынужденных колебаний получаем выражение

$$C = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4n^2}{k^2} \cdot \frac{p^2}{k^2}}} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + \gamma^2 \beta^2}}, \quad (142')$$

где

$$\frac{p}{k} = \beta, \quad \frac{2n}{k} = \gamma.$$

Если  $p$  весьма мало по сравнению с  $k$ , т. е. если период изменения силы весьма велик по сравнению с периодом собственных колебаний,  $\beta$  будет весьма малой величиной и, следовательно,  $C = \lambda_1$ , т. е. перемещения груза при вынужденных колебаниях будут такими же, как и при статическом действии раскачивающей силы. Если мы возьмем другой крайний случай, — положим, что  $\beta$  беспрельдно возрастает, — амплитуда вынужденных колебаний будет стремиться к нулю. Особенно большие значения амплитуда вынужденных колебаний приобретает в том случае, когда  $p$  приближается к  $k$ . Здесь мы будем иметь дело с явлением резонанса, и размахи вынужденных колебаний будут тем большими, чем меньше сопротивление среды, т. е. чем меньше  $\gamma$ . На рис. 72 построенные кривые дают представление об изменении амплитуды вынужденных колебаний в зависимости от  $\beta$  и  $\gamma$ . По оси абсцисс отложены значения  $\beta$ , по ординатам — значения того множителя, на который приходится умножать статическое растяжение пружины  $\lambda_1$ , чтобы получить амплитуду вынужденных колебаний.

Обратимся теперь к общему интегралу уравнения (h). Прибавляя к найденному выше частному решению общий интеграл соответствующего уравнения без последнего члена, получаем

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t) + C \sin (pt - \alpha). \quad (143)$$

Значение первого члена, представляющего собой свободные колебания системы, постепенно убывает и нам практически придется считаться лишь со вторым членом — с вынужденными колебаниями.

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  в общем интеграле должны быть определены из начальных условий. Эти величины отличаются от нуля в том случае, когда  $x_0 = x_0 = 0$ .

Следовательно, в начальный момент под действием раскачивающей силы возникнут и собственные и вынужденные колебания, но собственные колебания имеют существенное значение лишь в начале движения. Дальше роль их благодаря затуханию постепенно убывает. Если периоды собственных и вынужденных колебаний близки к равенству, то в первое время, пока свободные колебания еще не успели затухнуть, мы будем иметь известное явление *биения*, которое получается всякий раз, когда складываются два гармонических колебания, близких по величине периодов. В те моменты, когда близки к совпадению наибольшие отклонения в известном направлении для обоих складываемых колебаний, мы будем иметь амплитуду результирующего колебания, примерно равную сумме амплитуд складываемых колебаний. В те же моменты, когда разность фаз складываемых колебаний близка к  $\pi$ , в результате сложения получим колебание, амплитуда которого близка к разности амплитуд складываемых колебаний. Таким образом, с течением времени амплитуда получающегося от сложения колебания будет то возрастать, достигая значения, равного примерно сумме амплитуд складываемых колебаний, то убывать до значения, равного их разности.

Пока все наши заключения относятся к случаю действия силы, изменяющейся по закону синуса [формула (g)], но линейность основного уравнения (h) позволяет сразу наши заключения обобщить на случай действия любой силы. В самом деле, закон изменения любой силы на протяжении одного периода всегда можно представить тригонометрическим рядом, и колебания, вызываемые этой силой, получатся путем сложения колебаний, вызываемых каждым членом ряда в отдельности, т. е. таких колебаний, которые были изучены выше. При этом, конечно, если среди членов ряда, представляющего раскачивающую силу, будет такой, период которого близок к периоду собственных колебаний системы, то мы будем иметь явление резонанса. Этот член будет играть преобладающую роль, амплитуда соответствующего ему колебания может достигнуть большой величины.

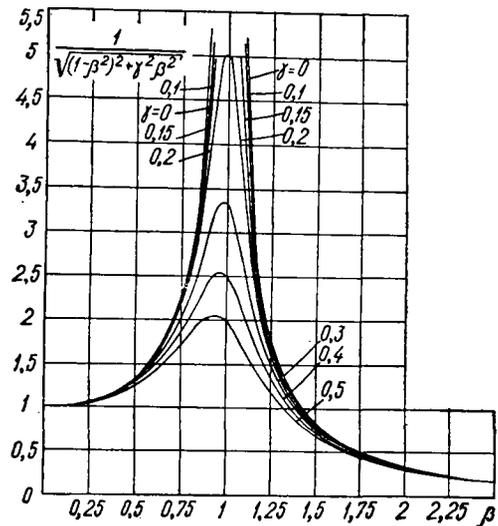


Рис. 72.

Пользуясь линейностью основного уравнения (h), мы можем общий интеграл его представить в весьма простом виде. Для простоты рассуждений обратимся сначала к собственным колебаниям системы при отсутствии сопротивлений. Решение (138) показывает, что в этом случае мы можем движение разложить на два колебания: одно — обусловлено начальным перемещением  $x_0$ ; другое — начальной скоростью  $x'_0$ . Чтобы теперь перейти от собственных или свободных колебаний к колебаниям, вызываемым любой раскачивающей силой, представим себе действие непрерывной силы как ряд толчков. Определим скорость, сообщаемую грузу каждым толчком, и посмотрим, как эта скорость, сообщенная грузу в какой-либо момент  $t_1$ , отразится на величине перемещения груза в момент  $t$ . Последний вопрос разрешается формулой (138).

Обозначим через  $f(t)$  величину раскачивающей силы, отнесенную к единице массы груза. В момент  $t_1$  за промежуток времени  $dt_1$  эта сила сообщит единице массы скорость, равную  $f(t_1) dt_1$ . На основании (138) заключаем, что найденной скорости, сообщенной в момент  $t_1$ , будет соответствовать в момент  $t$  перемещение

$$\frac{1}{k} f(t_1) \sin k(t - t_1) dt_1.$$

Полное перемещение, вызываемое силой  $f(t)$  к моменту  $t$ , составит путем суммирования найденных выше элементарных перемещений. Нужно только  $t_1$  изменять в пределах  $0 - t$ . Таким образом, получаем

$$x = \frac{1}{k} \int_0^t f(t_1) \sin k(t - t_1) dt_1. \quad (144)$$

Если мы обратимся к более общему случаю и примем во внимание сопротивление среды, то на основании (140) путем прежних рассуждений придем к такому выражению:

$$x = \frac{1}{n_1} \int_0^t e^{-n(t-t_1)} f(t_1) \sin n_1(t - t_1) dt_1. \quad (145)$$

Заметим, что выражения (144) и (145) представляют собой перемещения, обусловленные не только вынужденными колебаниями, но также и теми собственными колебаниями, которые под действием силы возникают в начальный момент. Для получения общего решения нужно к интегралам (144) и (145) присоединить собственные колебания, обусловленные начальным перемещением и начальной скоростью [формулы (138) и (140)].

В тех случаях, когда вынуждающая колебания сила изменяется по закону синуса или косинуса, при вычислении вынужденных колебаний нет надобности обращаться к формулам (144) и (145). Проще непосредственно искать частное решение уравнения (h), как это было сделано раньше.

### § 34. О колебаниях упругих систем <sup>1</sup>

При изучении колебаний упругих тел будем иметь дело с системами, имеющими бесконечное множество степеней свободы. Для определения изменений формы колеблющегося упругого тела нужно задать бесконечное множество коорди-

<sup>1</sup> Изучению колебаний уделено много внимания в курсе Routh E. I. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. Being part II of a treatise on the whole subject. 5-th edition revised and enlarged, Ld.—N. Y., Macmillan and Co, 1892, 431 pp.

нат. В таких случаях выгодно пользоваться обобщенными координатами и обобщенными силами, как при выводе общих теорем Кастилиано и Бетти, играющих столь важную роль при решении различных задач статики упругих систем. От задач динамики мы всегда можем перейти к задачам статики, пользуясь началом Даламбера. Присоединяя к действующим силам силы инерции, на основании начала возможных перемещений можем для любой системы написать уравнение

$$\sum m (x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) = \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z). \quad (a)$$

Здесь суммирование должно быть распространено на все точки системы; буквой  $m$  обозначаются массы этих точек;  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  обозначают проекции равнодействующей всех сил, приложенных к какой-либо точке  $m$ , на координатные оси; наконец  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  представляют собой возможные перемещения точек системы, т. е. те малые перемещения, которые допускаются устройством системы. Между величинами  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  должны существовать вполне определенные зависимости, устанавливаемые на основании условий связи.

Мы упростим решение задачи, если вместо декартовых координат  $(x, y, z)$  возьмем новые координаты  $(\varphi, \psi, \theta)$  и подберем их таким образом, чтобы они были совершенно независимы, т. е. чтобы устройство системы позволяло каждой из этих координат давать совершенно произвольные приращения.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь таких систем, для которых между старыми и новыми координатами имеются зависимости вида

$$x = f(\varphi, \psi, \theta). \quad (b)$$

В уравнения (b) не входит явно время  $t$ , кроме того, они не включают производных  $\frac{d\varphi}{dt}$ ,  $\frac{d\psi}{dt}$ , ..., а что касается вида координат, то он может быть весьма различен в зависимости от устройства системы. Иногда эти координаты представляют собою длины некоторых отрезков, иногда они будут являться углами поворота или представлять собой изменения некоторых площадей, некоторых объемов и т. д.

В качестве пояснения приведем такой пример: предположим, что система состоит из точки  $A$ , соединенной с неподвижной точкой  $O$  посредством идеально твердого стержня  $OA$  длины  $r$  (рис. 73). При движении точка  $A$ , очевидно, должна находиться на поверхности шара радиуса  $r$ . Ее координаты  $x, y, z$  связаны между собой условием связи  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , и потому приращения этих координат  $\delta x, \delta y, \delta z$  не могут быть совершенно произвольными.

В качестве независимых координат мы могли бы в данном случае взять углы  $\varphi$  и  $\psi$ , которыми вполне определяется положение точки  $A$  на шаровой поверхности. Тогда зависимость между старыми и новыми координатами

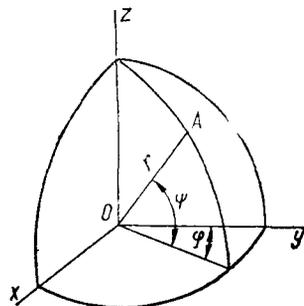


Рис. 73.

<sup>1</sup> Вибрациям упругих тел посвящено сочинение лорда Рэлей. См. Rayleigh (John William Strutt). Theory of sound. 2 edition, Macmillan and Co, vol. 1, 1894, 470 pp.; vol. 2, 1896, 504 pp. [Перевод на русский язык: Рэлей, Стратт Д. В). Теория звука, том 1, 503 стр.; том 2, 475 стр. М., Гостехтеоретиздат, 1955]. Литература предмета приведена в статье Х. Лэмба. См. Lamb H. Schwingungen elastischer systeme, insbesondere Akustik. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Leipzig, В. G. Teubner, 1907, Bd 4, T. 4, Hälfte 2, H. 2, SS. 215—310.

запишется так:

$$x = r \cos \psi \sin \varphi, \quad y = r \cos \psi \cos \varphi, \quad z = r \sin \psi. \quad (c)$$

Новым координатам можно давать совершенно произвольные приращения. Приращению  $\delta\varphi$  будет соответствовать перемещение точки  $A$  по параллельному кругу.  $\delta\psi$  определяет собой перемещение точки  $A$  по меридиану.

В качестве второго примера можно взять изгиб стержня с опертыми концами. Общее выражение для прогиба может быть представлено так:

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (d)$$

Здесь за координаты можно принять коэффициенты  $a_1, \dots$ . Им можно давать произвольные приращения. Каждому такому приращению будет соответствовать прогиб по некоторой синусоиде.

Расширяя таким образом понятие о координатах и пользуясь обобщенными координатами, мы должны ввести в наше рассмотрение также и понятие об обобщенной силе. Мы условимся называть обобщенной силой  $\Phi$ , соответствующей обобщенной координате  $\varphi$ , тот множитель, на который приходится умножать приращение координаты  $\delta\varphi$ , чтобы получить работу приложенных к системе сил на соответствующих этому приращению перемещениях.

В первом примере (рис. 73) обобщенная сила  $\Phi$ , соответствующая координате  $\varphi$ , представляет собой взятый с надлежащим знаком момент приложенной к точке  $A$  силы относительно оси  $OZ$ .

Обобщенная сила  $\Psi$  представляется моментом приложенной в  $A$  силы относительно оси, перпендикулярной к  $AOZ$  и проходящей через точку  $O$ . Различные выражения обобщенной силы во втором примере мы уже выяснили ранее в связи с применением тригонометрических рядов к исследованию изгиба стержней (см. § 12). Из нашего определения обобщенной силы и обобщенной координаты следует, что правая часть общего уравнения (a) в новых координатах представится так:  $\Phi\delta\varphi + \Psi\delta\psi + \Theta\delta\theta + \dots$

Займемся теперь преобразованием к новым координатам левой части того же уравнения. Для упрощения рассуждений возьмем перемещения системы, соответствующие приращению одной какой-либо из независимых координат, например координаты  $\varphi$ . Тогда имеем

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \delta \varphi; \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \delta \varphi; \quad \delta z = \frac{\partial z}{\partial \varphi} \delta \varphi.$$

Левая часть уравнения (a) перепишется так:

$$\sum m \left( x'' \frac{\partial x}{\partial \varphi} + y'' \frac{\partial y}{\partial \varphi} + z'' \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) \delta \varphi. \quad (e)$$

Опуская множитель  $\delta\varphi$ , можем представить это выражение в виде такой разности<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \sum m \left( x' \frac{\partial x}{\partial \varphi} + y' \frac{\partial y}{\partial \varphi} + z' \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) - \\ & - \sum m \left( x' \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + y' \frac{d}{dt} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + z' \frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (f)$$

Обе входящие сюда суммы легко могут быть преобразованы к новым координатам, если мы воспользуемся выражением для живой силы  $T$ :

$$2T = \sum m (x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

<sup>1</sup> Штрихами обозначаем полные производные от координат по времени.

Из него получаем

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \sum m \left( x' \frac{\partial x'}{\partial \varphi'} + \dots \right); \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \sum m \left( x' \frac{\partial x'}{\partial \varphi} + \dots \right) \quad (g)$$

На основании наших ограничений относительно зависимостей (b) заключаем, что

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \varphi' + \frac{\partial x}{\partial \psi} \psi' + \frac{\partial x}{\partial \theta} \theta' + \dots$$

Следовательно,

$$\frac{\partial x'}{\partial \varphi'} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial x'}{\partial \psi'} = \frac{\partial x}{\partial \psi}, \dots$$

и первое из равенств (g) напишется так:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \sum m \left( x' \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \dots \right).$$

Таким образом, при помощи выражения для живой силы системы может быть преобразована первая из сумм, входящих в (f). Для преобразования второй суммы воспользуемся равенством

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial \varphi} x'.$$

Тогда второе из равенств (g) дает нам

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \sum m \left( x' \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + y' \frac{d}{dt} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + z' \frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right).$$

Окончательно выражение (f), преобразованное к новым координатам, запишется так:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \quad (f')$$

и уравнение (a) при изменении только координаты  $\varphi$  представится в таком виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \Phi. \quad (h)$$

В дальнейшем при исследовании движения упругих тел выгодно будет отделять внешние приложенные к системе силы от внутренних сил упругости. Эти последние имеют потенциал, и если через  $V$  обозначить потенциальную энергию деформации, то работа внутренних сил упругости на перемещениях, соответствующих приращению  $\delta\varphi$  координаты  $\varphi$ , будет  $-\frac{\partial V}{\partial \varphi} \delta\varphi$ , и уравнение (h) переписывается таким образом:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \Phi. \quad (146)$$

Здесь при составлении обобщенной силы  $\Phi$  нужно принимать во внимание лишь внешние силы, приложенные к упругой системе. Уравнение вида (146) может быть написано для каждой из координат  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$ , ..., и этим уравнением воспользуемся при исследовании колебаний упругих тел.

Будем рассматривать лишь малые колебания тел около их положения равновесия и координаты  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$  будем отсчитывать от положения равновесия. В таком случае потенциальная энергия представится однородной функцией второй степени от координат:

$$V = \frac{1}{2} a_{11} \varphi^2 + \frac{1}{2} a_{22} \psi^2 + \frac{1}{2} a_{33} \theta^2 + \dots + a_{12} \varphi \psi + a_{13} \varphi \theta + \dots \quad (147)$$

Живая сила системы в случае малых колебаний представится однородной функцией второй степени от скоростей  $\varphi'$ ,  $\psi'$ , и мы можем написать ее так:

$$T = \frac{1}{2} b_{11}\varphi'^2 + \frac{1}{2} b_{22}\psi'^2 + \frac{1}{2} b_{33}\theta'^2 + \dots + b_{12}\varphi'\psi' + b_{13}\varphi'\theta' + \dots \quad (148)$$

Здесь  $b_{11}$ , ...,  $b_{12}$ , ... — коэффициенты, которые в случае малых колебаний можно считать постоянными.

Подставляя выражения для  $V$  и  $T$  в дифференциальные уравнения движения (146), приходим к системе линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Особенно просто напишется эта система уравнений, если обобщенные координаты  $\varphi$ ,  $\psi$ , ... выберем так, чтобы в выражениях для живой силы и потенциальной энергии системы пропали члены, содержащие произведения координат и соответствующих им скоростей. Выбранные таким образом координаты называются *главными* или *нормальными* координатами системы. В дальнейшем обозначим их через  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , ... Тогда живая сила и потенциальная энергия системы представляются так:

$$V = \frac{1}{2} a_1\varphi_1^2 + \frac{1}{2} a_2\varphi_2^2 + \frac{1}{2} a_3\varphi_3^2 + \dots;$$

$$T = \frac{1}{2} b_1\varphi_1'^2 + \frac{1}{2} b_2\varphi_2'^2 + \frac{1}{2} b_3\varphi_3'^2 + \dots,$$

и уравнения (146) приобретают следующий простой вид:

$$\left. \begin{aligned} b_1\varphi_1'' + a_1\varphi_1 &= \Phi_1; \\ b_2\varphi_2'' + a_2\varphi_2 &= \Phi_2; \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (146')$$

Каждое такое уравнение представляет собой простое гармоническое колебание [§ 33], которому соответствует изменение лишь одной из главных координат. При этом колебании все точки колеблющейся системы будут в каждый момент находиться в одной фазе. В один и тот же момент все они будут проходить через свое среднее положение и также одновременно будут достигать наибольших отклонений. Колебания эти будем называть *главными* или *нормальными*. Из них, как мы видим, складывается самое общее колебание системы. Периоды главных колебаний определяются величинами коэффициентов  $a_1$ , ...,  $a_n$ ,  $b_1$ , ... и, следовательно, будут зависеть лишь от устройства системы. В дальнейшем будем называть *основным типом колебания* системы то колебание, которому соответствует наибольший период.

### § 35. Продольные колебания призматических стержней

Исследование колебаний стержней начнем с простейшей задачи — с продольных колебаний, при которых поперечные сечения стержня, оставаясь плоскими и параллельными друг другу, совершают перемещения по оси стержня. Те растяжения и сжатия, которые при этом испытывает стержень, будут, конечно, сопровождаться соответствующими изменениями поперечных размеров и потому лишь точки оси стержня будут совершать при этих колебаниях прямолинейное движение. Движение точек, не совпадающих с осью, будет более сложным, но, если поперечные размеры стержня малы по сравнению с его длиной, можно

пренебречь <sup>1</sup> перемещениями точек в плоскостях поперечных сечений <sup>2</sup>. Общее для всех точек какого-либо поперечного сечения  $m_1$  (рис. 74) перемещение в направлении оси  $x$  обозначим через  $u$ , тогда относительное удлинение в этом сечении и соответствующее растягивающее напряжение представятся так:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad X_x = E \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Для поперечного сечения  $m_1 n_1$ , бесконечно близкого к взятому выше, те же величины имеют значение

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta x; \quad E \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta x \right).$$

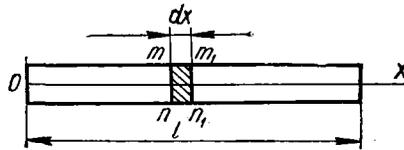


Рис. 74.

Следовательно, разность растягивающих напряжений для двух взятых сечений равна

$$E \frac{d^2 u}{dx^2} \delta x.$$

Обозначая через  $\gamma$  вес единицы объема стержня, получаем для выделенного из стержня элемента  $m_1 n_1$  такое дифференциальное уравнение движения:

$$\frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Отсюда, вводя для краткости обозначение

$$\frac{Eg}{\gamma} = a^2, \tag{149}$$

получаем дифференциальное уравнение для продольных колебаний стержня в таком виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{150}$$

Мы видели, что самый общий вид колебаний может быть получен сложением главных (нормальных) колебаний, каждое из которых представляет собой простое гармоническое колебание. Возьмем одно из этих колебаний, и пусть соответствующие ему перемещения будут пропорциональны  $\cos pt$ , где  $p$  — частота взятого типа колебаний. Перемещение  $u$  зависит не только от времени, но и от положения сечения, т. е. от  $x$ , и для выбранного нами типа колебаний можно положить

$$u = X \cos pt, \tag{a}$$

где  $X$  — неизвестная нам пока функция  $x$ .

Вставляя выражение (a) в дифференциальное уравнение (150), получаем для  $X$  такое уравнение:

$$X'' + \frac{p^2}{a^2} X = 0, \tag{b}$$

откуда находим

$$X = C_1 \cos \frac{p}{a} x + C_2 \sin \frac{p}{a} x. \tag{c}$$

<sup>1</sup> Полное решение вопроса о продольных колебаниях круглого цилиндра принадлежит Л. Похгаммеру. См. его работу, указанную в ссылке на стр. 153.

<sup>2</sup> В дальнейшем ограничимся лишь наиболее низкими типами колебаний, т. е. колебаниями с наиболее продолжительными периодами.

Произвольные постоянные должны быть найдены из условий на концах стержня. Возьмем, например, стержень со свободными концами. В таком случае растягивающие напряжения по концевым поперечным сечениям должны обращаться в нуль, следовательно,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} = 0.$$

Первому из этих условий мы удовлетворим, положив в решении (с)  $C_2 = 0$ . Для удовлетворения второго условия нужно положить

$$\sin \frac{pl}{a} = 0. \quad (d)$$

Это уравнение дает для  $p$  бесконечное множество решений, которым будет соответствовать бесчисленное множество типов собственных колебаний стержня. Основным тип колебаний получим, взяв наименьший корень уравнения (d), т. е. положив

$$p_1 = \frac{a\pi}{l}.$$

В этом случае из общего выражения (a) получаем

$$u_1 = A_1 \cos \frac{\pi x}{l} \cos p_1 t.$$

Таким же путем могут быть получены и высшие типы колебаний. Мы предполагали перемещения для каждого типа главных колебаний пропорциональными  $\cos pt$ . В самом общем случае к члену, пропорциональному косинусу, нужно присоединить член, пропорциональный синусу, и для основного типа колебаний получим

$$u_1 = \cos \frac{\pi x}{l} (A_1 \cos p_1 t + B_1 \sin p_1 t).$$

Составляя подобные же выражения для высших типов колебаний и складывая все эти колебания, приходим к такому общему выражению для продольных колебаний призматических стержней со свободными концами:

$$u = \sum_{i=1}^{i=\infty} \cos \frac{i\pi x}{l} \left( A_i \cos \frac{i\pi a t}{l} + B_i \sin \frac{i\pi a t}{l} \right). \quad (151)$$

Легко показать, что при надлежащем выборе постоянных  $A_i$ ,  $B_i$  можно удовлетворить любым начальным условиям для колебаний стержня. В самом деле, чтобы эти условия были вполне определены, должны быть заданы перемещения всех поперечных сечений в начальный момент и их начальные скорости. Положим

$$(u)_{t=0} = f(x); \quad \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0} = f_1(x).$$

Подставляя вместо  $u$  его выражение (151), получаем

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \cos \frac{i\pi x}{l}; \quad f_1(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} B_i \frac{i\pi a}{l} \cos \frac{i\pi x}{l}.$$

Отсюда коэффициенты  $A_i$  и  $B_i$  могут быть определены по известным формулам

$$A_i = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{i\pi x}{l} dx; \quad B_i = \frac{2}{i\pi a} \int_0^l f_1(x) \cos \frac{i\pi x}{l} dx.$$

В общем выражении (151) мы можем принять заключенные в скобки множители за нормальные координаты для нашей упругой системы. Обозначив их через  $\varphi_i$ , будем иметь

$$u = \sum_{i=1}^{i=\infty} \varphi_i \cos \frac{i\pi x}{l}.$$

Принимая площадь поперечного сечения стержня равной единице, получаем для потенциальной энергии системы такое выражение:

$$V = \frac{E}{2} \int_0^l \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx = \frac{E\pi^2}{4l} \sum_{i=1}^{i=\infty} i^2 \varphi_i^2. \quad (152)$$

Живая сила системы напишется так:

$$T = \frac{\gamma}{2g} \int_0^l \left( \frac{du}{dt} \right)^2 dx = \frac{\gamma l}{4g} \sum_{i=1}^{i=\infty} \dot{\varphi}_i^2. \quad (153)$$

Выражения для  $V$  и  $T$  включают лишь члены с квадратами координат  $\varphi_i$  и квадратами соответствующих скоростей. Следовательно, эти координаты — главные, и соответствующие им дифференциальные уравнения (146'), когда отсутствуют внешние силы, запишутся так:

$$\ddot{\varphi}_i + \frac{a^2 \pi^2 i^2}{l^2} \varphi_i = 0,$$

откуда мы получаем для  $\varphi_i$  прежнее выражение.

Применение нормальных координат имеет значительные преимущества при исследовании вынужденных колебаний. Воспользуемся ими для решения задачи о вынужденных колебаниях стержня с одним заделанным и другим свободным концами. У заделанного конца стержня перемещения равны нулю, на свободном конце обращается в нуль относительное удлинение. Таким условиям будет удовлетворять каждая половина рассмотренного выше стержня со свободными концами при колебаниях, симметричных относительно середины. Этим мы воспользуемся, чтобы из выражения (151) сразу получить решение для нашего случая. Располагая начало координат в заделанном конце и обозначая через  $l$  длину стержня, мы должны будем в выражении (151) заменить  $\cos \frac{i\pi x}{l}$  на  $\sin \frac{i\pi x}{2l}$ . Условие симметрии требует сохранения лишь членов с нечетными значениями  $i$ . Следовательно,

$$u = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \sin \frac{i\pi x}{2l} \left( A_i \cos \frac{i\pi a t}{2l} + B_i \sin \frac{i\pi a t}{2l} \right).$$

Множители в скобках являются нормальными координатами. Обозначим их через  $\varphi_i$ . Тогда

$$u = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \varphi_i \sin \frac{i\pi x}{2l};$$

$$V = \frac{E\pi^2}{16l} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} i^2 \varphi_i^2, \quad T = \frac{\gamma l}{4g} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \dot{\varphi}_i^2.$$

Уравнения (146') будут иметь такой вид:

$$\ddot{\varphi}_i + \frac{a^2 i^2 \pi^2}{4l^2} \varphi_i = \frac{2g}{\gamma l} \Phi_i.$$

Пользуясь решением (144), напомним общий интеграл полученного уравнения в таком виде:

$$\varphi_i = A_i \cos \frac{i\pi a t}{2l} + B_i \sin \frac{i\pi a t}{2l} + \frac{4g}{\gamma a i \pi} \int_0^t \Phi_i \sin \frac{i\pi a}{2l} (t - t_1) dt_1.$$

Первые два члена полученного выражения представляют собой свободные колебания, обусловленные начальным значением координаты  $\varphi_i$  и соответствующей ей скорости. Эти колебания вследствие сопротивлений постепенно затухают, и приходится иметь дело лишь с третьим членом, который дает перемещение, вызванное обобщенной силой  $\Phi_i$ . Ограничиваясь лишь этими перемещениями, получаем

$$u = \frac{4g}{\gamma a \pi} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi x}{2l} \int_0^t \Phi_i \sin \frac{i\pi a}{2l} (t - t_1) dt_1. \quad (154)$$

Для получения колебаний, вызываемых внешними силами, остается подставить в полученную формулу соответствующее значение  $\Phi_i$ .

В качестве примера возьмем случай раскачивания стержня силой  $f(t)$ , приложенной к свободному концу<sup>1</sup>. Чтобы найти  $\Phi_i$ , дадим координате  $\varphi_i$  приращение  $\delta\varphi_i$ . Этому приращению будут соответствовать перемещения, определяемые формулой

$$\delta u = \delta\varphi_i \sin \frac{i\pi x}{2l}.$$

При этом свободный конец стержня, к которому приложена сила  $f(t)$ , переместился на величину

$$\delta\varphi_i \sin \frac{i\pi}{2}$$

и сила произведет работу

$$f(t) \delta\varphi_i \sin \frac{i\pi}{2}.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\Phi_i = f(t) \sin \frac{i\pi}{2}.$$

Подставляя значение  $\Phi_i$  в выражение (154) и полагая в нем, что  $x = l$ , для перемещения свободного конца стержня находим такое выражение:

$$(u)_{x=l} = \frac{4g}{\gamma a \pi} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i} \int_0^t f(t_1) \sin \frac{i\pi a}{2l} (t - t_1) dt_1.$$

В частном случае, когда приложенная на конце сила постоянна и равна  $q$ , получаем

$$(u)_{x=l} = \frac{8glq}{\gamma a^2 \pi^2} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^2} \left(1 - \cos \frac{i\pi a t}{2l}\right). \quad (f)$$

Наибольшее перемещение получим при  $t = 2l/a$ , когда

$$(u)_{x=l} = \frac{16glq}{\gamma a^2 \pi^2} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{16glq}{\gamma a^2 \pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{2lq}{E}.$$

<sup>1</sup> Так как площадь поперечного сечения принята равной единице, сила  $f(t)$  представляет собой напряжение у свободного конца.

Получаем, таким образом, известный результат: сила, внезапно приложенная к концу стержня, вызывает в нем удлинение, которое вдвое больше тех, что получаются при постепенном приложении силы.

### § 36. Колебания груза, подвешенного на упругом стержне <sup>1</sup>

Если масса стержня мала по сравнению с массой подвешенного груза, то задача, как мы видели (см. § 33), сводится к колебаниям системы с одной степенью свободы. Рассмотрим теперь ту же задачу в общем случае. Дифференциальное уравнение (150) для продольных колебаний стержня остается без изменений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где

$$a^2 = \frac{Eg}{\gamma}.$$

Располагая начало координат в заделанном конце стержня, получаем для этого конца условие

$$(u)_{x=0} = 0. \quad (a)$$

Для другого конца, где прикреплен груз, напомним граничное условие, принимая во внимание, что растягивающие напряжения, появляющиеся на этом конце при колебаниях, обусловлены силами инерции подвешенного груза. Обозначим через  $P$  вес подвешенного груза, приходящийся на единицу площади поперечного сечения стержня. Тогда, приравнявая растягивающие напряжения на конце силам инерции груза  $P$ , получаем

$$E \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = - \frac{P}{g} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=l}. \quad (b)$$

Возьмем одно из главных колебаний системы и предположим, что соответствующие ему перемещения пропорциональны  $\cos pt$ , тогда  $u = X \cos pt$ , где  $X$  — функция только  $x$ . Подставляя принятое выражение для  $u$  в основное уравнение задачи (150), получаем  $a^2 X'' + p^2 X = 0$ . Отсюда

$$X = C_1 \cos \frac{p}{a} x + C_2 \sin \frac{p}{a} x.$$

<sup>1</sup> Свободные колебания этой системы были изучены еще С. Пуассоном: P o i s s o n S. Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques. Mémoires de l'Académie Royal des Sciences de l'institut de France, 1829, t. 8, pp. 357—570; pp. 623—627. Вынужденные колебания подробно рассмотрены в книге А. Н. Крылова. См. К р ы л о в А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. С.-Петербург, тип. Императорской Академии наук. Изв. Николаевской морской академии, 1913, том 4, вып. 2, стр. 308. [Перепечатка: Собрание трудов академика А. Н. Крылова. М.—Л., Изд-во АН СССР, т. 3, ч. 2, 1949, стр. 338]. См. также работу Т и м о ш е н к о С. П. О вынужденных колебаниях призматических стержней (Приложение к исследованию колебания мостов). Изв. Киевского политехнического института, 1909, год 9, кн. 4, стр. 201—252. Отд. оттиск, Киев тип. С. В. Кульженко, 1909, 50 стр. См. также: Т и м о ш е н к о С. P. Über die Erzwingene Schwingungen von prismatischer Stäbe. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1911, Bd 59, H. 2, SS. 163—203. [Перепечатка: Т и м о ш е н к о S. The collected papers. N. Y.—Ld—Toronto. McGraw—Hill Publishing Company, Ltd, 1953, pp. 51—91].

Чтобы удовлетворить условиям (a) и (b), нужно положить

$$C_1 = 0, \quad E \frac{p}{a} \cos \frac{pl}{a} = \frac{P}{g} p^2 \sin \frac{pl}{a}.$$

Обозначая через  $\alpha$  отношение веса стержня  $\gamma l$  к весу груза  $P$  и полагая, что  $pl/a = \mu$ , перепишем второе условие в таком виде:

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \alpha. \quad (c)$$

Корни этого трансцендентного уравнения позволяют вычислить значения периодов главных колебаний описываемой системы. Основному типу колебаний будет соответствовать наименьший корень уравнения. Некоторые значения этого корня для различных  $\alpha$  приведены в табл. 20.

Таблица 20

$\alpha$	$\mu_1$	$\alpha$	$\mu_1$
0,01	0,10	2,0	1,13
0,1	0,32	3,0	1,20
0,3	0,52	4,0	1,27
0,5	0,65	5,0	1,32
0,7	0,75	10,0	1,42
0,9	0,82	20,0	1,52
1,0	0,86	100,0	1,568
1,5	0,98	$\infty$	1,571

Вычислив последовательные корни уравнения (c), можно написать выражения для каждого типа собственных колебаний. Для типа порядка  $i$  общее выражение для перемещений напомним так:

$$u_i = \sin \frac{\mu_i x}{l} \left( A_i \cos \frac{\mu_i at}{l} + B_i \sin \frac{\mu_i at}{l} \right). \quad (d)$$

Заключенный в скобки множитель представляет собой нормальную координату  $\varphi_i$ . Первый множитель, зависящий от  $x$ , является соответствующей нормальной функцией. В самом общем случае колебание нашей системы получается сложением главных колебаний (d), и мы можем написать

$$u = \sum_{i=1}^{i=\infty} \varphi_i \sin \frac{\mu_i x}{l}. \quad (e)$$

Воспользуемся нормальными координатами при изучении вынужденных колебаний. Для этого составим выражения кинетической и потенциальной энергии системы. Выражения эти не будут содержать членов с произведениями координат и соответствующих им скоростей, так как взятые координаты являются главными координатами системы.

В качестве проверки приводим здесь соответствующие вычисления:

$$\begin{aligned} V &= \frac{E}{2} \int_0^l \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx = \frac{E}{2l^2} \int_0^l \left( \sum_{i=1}^{i=\infty} \mu_i \varphi_i \cos \frac{\mu_i x}{l} \right)^2 dx = \\ &= \frac{E}{4l} \sum_{i=1}^{i=\infty} \mu_i^2 \varphi_i^2 \left( 1 + \frac{\sin 2\mu_i}{2\mu_i} \right). \end{aligned} \quad (f)$$

Интегралы вида

$$\int_0^l \cos \frac{\mu_n x}{l} \cos \frac{\mu_m x}{l} dx \quad \text{при } m \neq n$$

обращаются в нуль в силу уравнения (c).

Составим теперь выражение для живой силы системы:

$$T = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \int_0^l \left( \frac{du}{dt} \right)^2 dx + \frac{P}{2g} \left( \frac{du}{dt} \right)^2_{x=l}.$$

Подставляя вместо  $u$  его выражение (е) и принимая во внимание, что в силу уравнения (с)

$$\gamma \int_0^l \sin \frac{\mu_n x}{l} \sin \frac{\mu_m x}{l} dx = -P \sin \mu_n \sin \mu_m,$$

получаем

$$T = \frac{\gamma l}{4g} \sum_{i=1}^{i=\infty} \Phi_i^2 \left(1 - \frac{\sin 2\mu_i}{2\mu_i}\right) + \frac{P}{2g} \sum_{i=1}^{i=\infty} \Phi_i^2 \sin^2 \mu_i.$$

Выражая  $P$  через  $\gamma l$  и пользуясь уравнением (с), представляем  $T$  в таком виде:

$$T = \frac{\gamma l}{4g} \sum_{i=1}^{i=\infty} \Phi_i^2 \left(1 + \frac{\sin 2\mu_i}{2\mu_i}\right). \quad (g)$$

Дифференциальные уравнения движения (146') запишутся так:

$$\frac{\gamma l}{2g} \left(1 + \frac{\sin 2\mu_i}{2\mu_i}\right) \Phi_i'' + \frac{E}{2l} \mu_i^2 \left(1 + \frac{\sin 2\mu_i}{2\mu_i}\right) \Phi_i = \Phi_i. \quad (h)$$

Мы ограничимся лишь колебаниями, возникающими под действием сил  $\Phi_i$ , для чего воспользуемся решением (144), которое в данном случае напишется так:

$$\Phi_i = \frac{l}{a\mu_i} \cdot \frac{2g}{\gamma l} \frac{2\mu_i}{2\mu_i + \sin 2\mu_i} \int_0^t \Phi_i \sin \frac{a\mu_i}{l} (t - t_1) dt_1.$$

Подставляя это в выражение (е), получаем

$$u = \frac{4g}{a\gamma} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{\mu_i x}{l}}{2\mu_i + \sin 2\mu_i} \int_0^t \Phi_i \sin \frac{a\mu_i}{l} (t - t_1) dt_1. \quad (155)$$

Для получения перемещений груза нужно только в этом выражении положить  $x = l$  и вместо  $\Phi_i$  поставить соответствующее значение обобщенной силы.

В качестве примера возьмем случай, когда в начальный момент  $t = 0$  к концу стержня приложена сила  $q \text{ кг/см}^2$ . Для обобщенной силы получаем такое выражение:  $\Phi_i = q \sin \mu_i$ . Следовательно,

$$(u)_{x=l} = \frac{4gql}{a^2\gamma} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin^2 \mu_i}{\mu_i (2\mu_i + \sin 2\mu_i)} \left(1 - \cos \frac{a\mu_i t}{l}\right). \quad (156)$$

Если беспредельно уменьшать вес подвешенного груза, то величина  $a$  беспредельно возрастет и корни уравнения (с) будут определяться такой формулой:

$$\mu_i = \frac{2i-1}{2} \pi.$$

Подставляя эту формулу в выражение (156), приходим к ранее полученному решению (f) для стержня с одним заделанным и другим свободным концами.

Второй крайний случай получаем, когда  $a$  стремится к нулю и, следовательно, корни уравнения (с) стремятся к такому выражению:

$$\mu_i = (i-1) \pi.$$

Первый корень стремится к нулю, к нулю стремятся также все члены, кроме первого в общем решении (156). В пределе приходим к системе с одной степенью свободы и для перемещения подвешенного груза получаем выражение

$$(u)_{x=l} = \frac{gql}{a^2\gamma} \left( 1 - \cos \frac{\alpha\mu_1 t}{l} \right).$$

Наибольшее удлинение получается вдвое больше того, которое мы бы имели при статическом действии растягивающей силы. Таким образом, для двух крайних случаев оказывается справедливым высказанное Клапейроном положение, что наибольшая деформация, вызываемая внезапно приложенной силой, вдвое больше той, которая получается при статическом действии такой же силы.

Доказательство Клапейрона основано на предположении, что в момент наибольшей деформации вся работа, совершенная приложенной силой, полностью обратится в потенциальную энергию деформации. Предположение это в только что рассмотренной задаче справедливо для двух крайних случаев, но при конечном значении  $\alpha$  корни  $\mu_i$  трансцендентного уравнения (с) будут несоизмеримы и мы не будем иметь такого момента, когда кинетическая энергия полностью обращается в потенциальную. Поэтому наибольшее удлинение должно получиться меньше двойного статического удлинения.

Если вес стержня мал по сравнению с весом груза, величина  $\alpha = \gamma l/P$  будет мала. Для определения периода основного колебания уравнение (с) можно заменить таким:

$$\mu \left( \mu + \frac{\mu^3}{3} \right) = \frac{\gamma l}{P}. \quad (k)$$

В качестве первого приближения можно положить  $\mu = \sqrt{\frac{\gamma l}{P}}$ . В таком случае период основных колебаний будет

$$\tau = \frac{2\pi l}{\mu a} = 2\pi \sqrt{\frac{Pl}{Eg}},$$

что совпадает с результатом (137) для системы с одной степенью свободы.

В качестве второго приближения для корня уравнения (k) можно взять

$$\mu = \sqrt{\frac{\gamma l}{P}} \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{\gamma l}{P} \right).$$

В таком случае

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{Eg} \left( P + \frac{1}{3} \gamma l \right)}.$$

Получаем известное правило: чтобы учесть влияние собственного веса стержня на период колебаний подвешенного груза, нужно представить себе треть веса стержня присоединенной к грузу.

Особое преимущество дает использование нормальных координат в тех случаях, когда желательно сравнить перемещения системы при колебаниях с теми *статическими* перемещениями, которые мы получили бы при бесконечно медленном изменении раскачивающей силы. Такие сравнения приходится на практике делать во многих случаях, например при оценке степени достоверности показаний индикаторов, применяемых в паровых машинах и газовых двигателях, при определении давлений газов во время взрыва по деформациям особых крешеров и т. д. Поясним это на рассмотренном выше примере груза, подвешенного на упругом стержне. Предположим, что к грузу приложена периодическая сила, изменяющаяся по закону  $q \sin pt$ . Чтобы найти в этом случае значение обобщенной силы  $\Phi_i$ , соответствующей координате  $\phi_i$ , дадим этой

координате приращение  $\delta\varphi_i$ . При этом конец стержня, как видно из общего выражения (е), переместится на величину  $\delta\varphi_i \sin \mu_i$ , и приложенная к нему сила совершит работу  $q \sin pt \sin \mu_i \delta\varphi_i$ . Следовательно,  $\Phi_i = q \sin pt \sin \mu_i$  и уравнения (146') будут иметь такой вид:

$$\frac{\gamma l}{2g} \left( 1 + \frac{\sin 2\mu_i}{2\mu_i} \right) \varphi_i + \frac{E\mu_i^2}{2l} \left( 1 + \frac{\sin 2\mu_i}{2\mu_i} \right) \varphi_i = q \sin \mu_i \sin pt.$$

Ограничиваясь лишь перемещениями, вызываемыми периодической силой, получим на основании (142)

$$\varphi_i = \frac{2gq \sin \mu_i}{\gamma l \left( 1 + \frac{\sin 2\mu_i}{2\mu_i} \right)} \cdot \frac{\sin pt}{\left( \frac{a^2 \mu_i^2}{l^2} - p^2 \right)}.$$

Перемещение конца стержня представится так:

$$(u)_{x=l} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \varphi_i \sin \mu_i = \sin pt \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2gq \sin^2 \mu_i}{\gamma l \left( 1 + \frac{\sin 2\mu_i}{2\mu_i} \right) \left( \frac{a^2 \mu_i^2}{l^2} - p^2 \right)}. \quad (157)$$

Заметим, что величина  $\frac{a\mu_i}{l}$  представляет собой частоту собственных колебаний системы порядка  $i$ . Из выражения (157) видим, что в тех случаях, когда частота  $p$  раскачивающей силы приближается к частоте одного из типов собственных колебаний системы, мы будем иметь явление резонанса. Соответствующий член в бесконечном ряде выражения (157) приобретет преобладающее значение.

Чтобы получить статическое перемещение системы, нужно только в знаменателе каждого из членов ряда (157) положить  $p = 0$ ; тогда будем иметь

$$(u_s)_{x=l} = \sin pt \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2gq \sin^2 \mu_i}{\gamma l \left( 1 + \frac{\sin 2\mu_i}{2\mu_i} \right) \frac{a^2 \mu_i^2}{l^2}} = \sin pt \frac{4ql}{E} \sum \frac{\sin^2 \mu_i}{\mu_i (2\mu_i + \sin 2\mu_i)}.$$

Принимая во внимание, что

$$\sum \frac{\sin^2 \mu_i}{\mu_i (2\mu_i + \sin 2\mu_i)} = \frac{1}{4},$$

приходим к известной формуле для удлинения призматического стержня под действием статически приложенной силы.

Мы видим, что статические перемещения будут мало отличаться от динамических лишь в том случае, если  $p$  мало по сравнению с величиной  $\frac{a\mu_1}{l}$ , т. е. если период раскачивающей силы велик по сравнению с периодом основных колебаний системы. В этом случае, ограничиваясь первым членом разложения (157), можем заключить, что принимая динамические перемещения равными статическим, опускаем погрешность порядка  $\frac{p^2 l^2}{a^2 \mu_1^2}$ .

Сделанные здесь заключения легко распространить на другие случаи действия сил, так как мы всегда можем периодическую силу представить тригонометрическим рядом и изучить действие каждого отдельного члена этого ряда. В частности, по отношению к намеченной выше задаче о показаниях индикатора можно заключить, что эти показания дадут значения давления пара, близкие

к действительным лишь в том случае, если время одного оборота машины можно считать большим по сравнению с периодом основных колебаний поршня индикатора.

### § 37. Колебания кручения круглых валов

Сделаем допущение, что при колебаниях кручения поперечные сечения вала, поворачиваясь одно относительно другого, остаются плоскими и радиусы сечений остаются прямыми<sup>1</sup>. Если через  $\theta$  обозначим углы поворота поперечных сечений, то скручивающий момент в каком-либо поперечном сечении  $m$  (см. рис. 74) будет  $GJ_p \frac{d\theta}{dx}$ . Приравнявая разность скручивающих моментов в двух бесконечно близких сечениях  $m$  и  $m_1 n_1$  моменту сил инерции выделенного из вала элемента  $m m_1 n_1$  относительно оси вала, получаем

$$\frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} J_p = GJ_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}.$$

Вводя для сокращения обозначение

$$\frac{Gg}{\gamma} = a^2, \quad (158)$$

получаем

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (159)$$

Уравнение это совершенно совпадает с уравнением (150), полученным для продольных колебаний призматических стержней, и потому мы можем пользоваться найденными раньше решениями (см. § 35).

В частности, для вала со свободными концами получаем решение

$$\theta = \sum_{i=1}^{i=\infty} \cos \frac{i\pi x}{l} \left( A_i \cos \frac{i\pi a t}{l} + B_i \sin \frac{i\pi a t}{l} \right).$$

В качестве более сложного примера рассмотрим здесь имеющий практическое значение случай колебания вала, к концам которого прикреплены шкивы<sup>2</sup>. Если через  $J_1$  и  $J_2$  обозначим моменты инерции этих шкивов относительно оси вала, то условия на концах вала получим, приравнявая скручивающие моменты моментам сил инерции соответствующих шкивов. Условия эти напишутся так:

$$\begin{aligned} J_1 \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right)_{x=0} &= GJ_p \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=0}; \\ J_2 \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right)_{x=l} &= -GJ_p \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=l}. \end{aligned} \quad (a)$$

<sup>1</sup> В случае длинных валов для первых типов колебаний это допущение дает вполне удовлетворительные результаты. Когда длина вала весьма мала (случай круглого диска) или когда изучается высокий тип колебаний, которому соответствует подразделение вала на большое число волн, необходимо обратиться к точному решению задачи (см. упомянутую на стр. 153 работу L. Pochhammer).

<sup>2</sup> F r a h m H. Neue Untersuchungen über die dynamischen Vorgänge in den Wellenleitungen von Schiffsmaschinen mit besonderer Berücksichtigung der Resonanzschwingungen. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure. 1902. Bd 46, N 22, SS. 797—803. Тимошенко С. П. К вопросу о явлениях резонанса в валах. Изв. С.-Петербургского политехнического института, 1905, том 3, вып. 1—2, стр. 55—106. Отд. оттиск: С.-Петербург, 1905, 52 стр. См. также работы С. П. Тимошенко, указанные в сноске на стр. 325.

Возьмем одно из главных колебаний и положим, что углы  $\theta$  изменяются по закону косинуса. Тогда

$$\theta = X \cos pt, \quad (b)$$

где  $X$  — функция только  $x$ .

Подставив выражение (b) в уравнение (159), найдем

$$X = C_1 \cos \frac{px}{a} + C_2 \sin \frac{px}{a}.$$

Для определения частоты колебаний  $p$  воспользуемся условиями (a). Подставляя в них значение  $\theta$ , получаем

$$\begin{aligned} -C_1 p^2 J_1 &= C_2 \frac{p}{a} G J_p; \\ p^2 \left( C_1 \cos \frac{pl}{a} + C_2 \sin \frac{pl}{a} \right) J_2 &= \frac{p}{a} G J_p \left( C_2 \cos \frac{pl}{a} - C_1 \sin \frac{pl}{a} \right). \end{aligned}$$

Отсюда приходим к такому трансцендентному уравнению для определения частоты  $p$ :

$$p^2 \left( \cos \frac{pl}{a} - \frac{paJ_1}{GJ_p} \sin \frac{pl}{a} \right) J_2 = -\frac{p}{a} G J_p \left( \sin \frac{pl}{a} + \frac{paJ_1}{GJ_p} \cos \frac{pl}{a} \right).$$

Вводя для упрощения обозначения

$$\frac{pl}{a} = \mu; \quad \frac{\gamma}{g} l J_p = J_0,$$

перепишем полученное выше трансцендентное уравнение в такой форме:

$$\mu \frac{J_2}{J_0} \left( 1 - \frac{J_1}{J_0} \mu \operatorname{tg} \mu \right) = - \left( \operatorname{tg} \mu + \mu \frac{J_1}{J_0} \right). \quad (160)$$

Обозначая через  $\mu_1, \mu_2, \dots$  последовательные корни этого уравнения, можем написать для  $\theta$  такое общее выражение:

$$\theta = \sum_{i=1}^{i=\infty} \varphi_i \left( \cos \frac{\mu_i x}{l} - \mu_i \frac{J_1}{J_0} \sin \frac{\mu_i x}{l} \right), \quad (161)$$

где  $\varphi_i$  — нормальные координаты; множители в скобках — соответствующие нормальные функции. Составим теперь выражения для потенциальной энергии и для живой силы системы:

$$\begin{aligned} V &= \frac{GJ_p}{2} \int_0^l \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx = \frac{GJ_p}{2} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\mu_i^2}{l^2} \int_0^l \varphi_i^2 \left( \sin \frac{\mu_i x}{l} + \right. \\ &\quad \left. + \mu_i \frac{J_1}{J_0} \cos \frac{\mu_i x}{l} \right)^2 dx = \frac{GJ_p}{8l} \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \mu_i \varphi_i^2, \end{aligned} \quad (162)$$

где для краткости введено обозначение

$$A_i = 2\mu_i \left( 1 + \mu_i^2 \frac{J_1^2}{J_0^2} \right) - \sin 2\mu_i + \mu_i^2 \frac{J_1^2}{J_0^2} \sin 2\mu_i + 2\mu_i \frac{J_1}{J_0} (1 - \cos 2\mu_i).$$

Члены с произведениями координат в выражение (162) не войдут в силу свойств нормальных координат. В этом можно убедиться и непосредственно, вычислив соответствующие значения интегралов и приняв во внимание уравнение (160).

Живая сила системы составит из живой силы вала и живой силы прикрепленных по концам шкивов. Для нее получим такое выражение:

$$T = \frac{\gamma J_p}{2g} \int_0^l \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 dx + \frac{J_1}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2_{x=0} + \frac{J_2}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2_{x=l} = \frac{J_0}{8} \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \frac{1}{\mu_i} (\varphi_i)^2. \quad (163)$$

Уравнения (146') получают следующий вид:

$$\frac{J_0}{4\mu_i} \Phi_i + \frac{GJ_p}{4l} \mu_i \Phi_i = \frac{1}{A_i} \Phi_i.$$

Рассматривая лишь перемещения, вызванные силами  $\Phi_i$ , имеем

$$\Phi_i = \frac{4l}{aJ_0 A_i} \int_0^l \Phi_i \sin \frac{a\mu_i}{l} (t - t_1) dt_1.$$

Следовательно,

$$\theta = \frac{4l}{aJ_0} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{A_i} \left( \cos \frac{\mu_i x}{l} - \mu_i \frac{J_1}{J_0} \sin \frac{\mu_i x}{l} \right) \int_0^t \Phi_i \sin \frac{a\mu_i}{l} (t - t_1) dt_1. \quad (164)$$

Для вычисления  $\theta$  остается лишь в каждом частном случае подставить в выражение (164) вместо  $\Phi_i$  соответствующее значение обобщенной силы.

Остановимся теперь подробнее на предельных случаях, когда моменты инерции шкивов или очень велики, или очень малы по сравнению с моментом инерции вала. Если величины  $J_1$  и  $J_2$  беспречно уменьшать, то корни трансцендентного уравнения (160) будут стремиться к значениям  $\pi$ ,  $2\pi$ , ..., и в пределе получим решение для вала со свободными концами.

Предположим теперь, что отношения  $J_0/J_1 = \kappa_1$ ,  $J_0/J_2 = \kappa_2$  представляют собой малые величины. Тогда уравнение (160) можно представить в таком виде:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\mu (\kappa_1 + \kappa_2)}{\mu^2 - \kappa_1 \kappa_2}. \quad (165)$$

Пренебрегая малыми второго порядка, можно положить

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \kappa_1 + \kappa_2. \quad (165')$$

Приближенное значение первого корня этого уравнения будет

$$\mu_1 = \sqrt{\kappa_1 + \kappa_2}.$$

Следующие корни представятся так:

$$\mu_2 = \pi + \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\pi}, \quad \mu_3 = 2\pi + \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2\pi}.$$

Первый корень мал по сравнению с последующими и потому период основных колебаний будет велик по сравнению с периодом следующего по порядку колебания. Первое приближение для частоты основного тона будет

$$p_1 = \frac{a}{l} \sqrt{\kappa_1 + \kappa_2} = \sqrt{\frac{GJ_p (J_1 + J_2)}{lJ_1 J_2}}. \quad (166)$$

Подставляя в уравнение (165) вместо  $\operatorname{tg} \mu$  величину  $\mu + \frac{\mu^3}{3}$ , получаем в качестве следующего приближения для первого корня этого уравнения величину

$$\mu_1 = \sqrt{\kappa_1 + \kappa_2 - \frac{1}{3} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - \kappa_1 \kappa_2)}.$$

Соответствующее значение для частоты основного тона получим из формулы (166), если вместо  $J_1$  и  $J_2$  подставим выражения

$$J_1 + \frac{1}{3} J_0 \frac{J_2}{J_1 + J_2}; \quad J_2 + \frac{1}{3} J_0 \frac{J_1}{J_1 + J_2}.$$

Таким путем получаем возможность оценить влияние массы вала на период колебаний закрепленных по концам шкивов.

### § 38. Поперечные колебания стержней

С поперечными колебаниями мы встречаемся при расчете различного рода балок, подвергающихся действию переменных поперечных сил, при исследовании колебаний мостов и железнодорожных рельсов под действием подвижных нагрузок, при изучении вибраций, возникающих в корпусе судов под действием сил инерции неуравновешенных частей машин, и т. д.

Будем предполагать, что колебания совершаются в одной из главных плоскостей стержня. В таком случае будем иметь дело с плоским изгибом. Плоскость изгиба примем за координатную плоскость  $xy$  (рис. 75). При составлении дифференциального уравнения движения будем исходить из предположения, что поперечные размеры стержня малы по сравнению с его длиной. В таком случае при изучении первых (наиболее низких) типов колебаний можно пользоваться приближенным уравнением для изогнутой оси балки

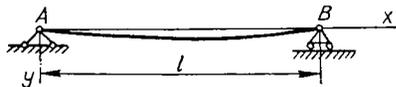


Рис. 75.

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -M,$$

откуда двойным дифференцированием получаем

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = q,$$

где  $q$  обозначает интенсивность сплошной нагрузки.

Если стержень совершает свободные колебания, то придется при составлении уравнения изогнутой оси принять во внимание лишь силы инерции и положить

$$q = - \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Здесь  $\gamma$  — вес единицы объема стержня;  $F$  — площадь поперечного сечения стержня.

Уравнение движения для свободных колебаний стержня запишется так:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = - \frac{\gamma F}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (167)$$

В случае призматических стержней это уравнение может быть написано в таком более простом виде:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad (168)$$

где для сокращения введено обозначение

$$\frac{EJg}{\gamma F} = a^2. \quad (169)$$

Предположим, что стержень совершает одно из главных колебаний частоты  $p$  и перемещения изменяются с временем по закону косинуса. Тогда можно положить

$$y = X \cos pt, \quad (\text{a})$$

где через  $X$  обозначена функция только  $x$ . Ею определяется форма той кривой, по которой изгибается стержень при колебаниях. Если выражение (a) подставим в основное уравнение (168), то для определения  $X$  получим дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\frac{d^4 X}{dx^4} = \frac{p^2}{a^2} X. \quad (170)$$

Общий интеграл этого уравнения будет включать четыре произвольные постоянные и может быть представлен в таком виде:

$$X = C_1 \left( \cos \sqrt{\frac{p}{a}} x + \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} x \right) + C_2 \left( \cos \sqrt{\frac{p}{a}} x - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} x \right) + C_3 \left( \sin \sqrt{\frac{p}{a}} x + \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{a}} x \right) + C_4 \left( \sin \sqrt{\frac{p}{a}} x - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{a}} x \right). \quad (171)$$

Из условий на концах стержня (по два условия на каждом конце) можно найти соотношения между произвольными постоянными  $C_1, C_2, \dots$  и, кроме того, получить трансцендентное уравнение для определения частоты  $p$ . Уравнение это будет иметь бесчисленное множество корней. Каждому такому корню  $p_i$  будут соответствовать своя функция  $X_i$  и свой тип колебаний. Наложением таких колебаний можно получить самый общий вид поперечных колебаний стержня, удовлетворяющий любым начальным обстоятельствам движения.

Таким образом, в общем случае можно положить

$$y = \sum_{i=1}^{i=\infty} X_i (A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t) = \sum_{i=1}^{i=\infty} X_i \varphi_i. \quad (172)$$

Множители в скобках будут нормальными координатами, а соответствующие им функции  $X_i$  — нормальными функциями.

В дальнейшем при изучении вынужденных колебаний понадобятся выражения для потенциальной энергии  $V$  и для живой силы  $T$  колеблющегося стержня. Пользуясь выражением (172), получаем для этих величин такие значения:

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{EJ}{2} \sum_{i=1}^{i=\infty} \varphi_i^2 \int_0^l \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right)^2 dx; \quad (173)$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{\gamma F}{g} \int_0^l \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 dx = \frac{\gamma F}{2g} \sum_{i=1}^{i=\infty} \varphi_i^2 \int_0^l X_i^2 dx. \quad (174)$$

Вследствие основного свойства нормальных координат члены, включающие произведения координат или соответствующих им скоростей в выражениях (173) и (174), пропадают. В этом нетрудно убедиться при непосредственном интегрировании, если принять во внимание основное уравнение (168).

Пусть  $X_m$  и  $X_n$  представляют собой нормальные функции порядка  $m$  и  $n$ , причем  $m \neq n$ . Каждая из этих функций должна удовлетворять уравнению (170). Следовательно, будем иметь

$$\frac{d^4 X_m}{dx^4} = \frac{p_m^2}{a^2} X_m; \quad \frac{d^4 X_n}{dx^4} = \frac{p_n^2}{a^2} X_n.$$

Умножая первое уравнение на  $X_n$ , второе на  $X_m$ , вычитая одно из другого и потом интегрируя по всей длине стержня, получаем

$$\frac{p_n^2 - p_m^2}{a^2} \int_0^l X_m X_n dx = \int_0^l \left( X_m \frac{d^4 X_n}{dx^4} - X_n \frac{d^4 X_m}{dx^4} \right) dx,$$

или, выполняя в правой части интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned} \frac{p_n^2 - p_m^2}{a^2} \int_0^l X_m X_n dx = & \left[ X_m \frac{d^3 X_n}{dx^3} - X_n \frac{d^3 X_m}{dx^3} + \right. \\ & \left. + \frac{dX_n}{dx} \frac{d^2 X_m}{dx^2} - \frac{dX_m}{dx} \frac{d^2 X_n}{dx^2} \right]_0^l. \end{aligned} \quad (b)$$

Правая часть этого равенства при  $x = 0$  и при  $x = l$  обращается в нуль при любом способе закрепления концов<sup>1</sup>, следовательно, интеграл, входящий в левую часть, должен равняться нулю (так как  $p_m \neq p_n$ ) и выражение (174) не будет включать членов с произведениями координат. Подобным же образом может быть показано, что в выражении (173) пропадают члены с произведениями координат.

Воспользуемся выражением (b) для вычисления интеграла

$$\int_0^l X_m^2 dx, \quad (c)$$

который понадобится при составлении выражения (174) для кинетической энергии стержня. Если в равенстве (b) положить  $m = n$ , то каждая часть его тождественно обращается в нуль и мы не найдем значения нужного интеграла (c). Поступим иначе, положим

$$\frac{p_m}{a} = \frac{k^2}{l^2}, \quad \frac{p_n}{a} = \frac{k_1^2}{l^2},$$

где  $k$  и  $k_1$  — некоторые отвлеченные числа. Посмотрим, во что обращается равенство (b), если  $k_1 = k + \delta k$  и величина  $\delta k$  беспрестанно убывает<sup>2</sup>. Принимая во внимание, что в этом случае

$$\frac{p_m^2 - p_n^2}{a^2} = \frac{4k^3 \delta k}{l^4}$$

и

$$X_n = X_m + \frac{\partial X_m}{\partial k} \delta k,$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{4k^3}{l^4} \int_0^l X_m^2 dx = & \left[ X_m \frac{d}{dk} \frac{d^3 X_m}{dx^3} - \frac{dX_m}{dk} \frac{d^3 X_m}{dx^3} + \right. \\ & \left. + \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d}{dk} \frac{dX_m}{dx} - \frac{dX_m}{dx} \frac{d}{dk} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right]_0^l. \end{aligned} \quad (d)$$

Для сокращения штрихами обозначим производные от  $X$  по величине  $\frac{kx}{l}$ . Тогда будем иметь

$$\frac{dX_m}{dx} = \frac{k}{l} X'_m; \quad \frac{dX_m}{dk} = \frac{x}{l} X'_m.$$

<sup>1</sup> В самом деле, для опертого конца  $X_i = 0$ ,  $\frac{d^2 X_i}{dx^2} = 0$ , для заделанного конца  $X_i = 0$ ,  $\frac{dX_i}{dx} = 0$  и, наконец, для свободного конца  $\frac{d^2 X_i}{dx^2} = 0$ ,  $\frac{d^3 X_i}{dx^3} = 0$ . Во всех случаях правая часть равенства обращается в нуль.

<sup>2</sup> При этом  $X_n$  уже не будет нормальной функцией, удовлетворяющей уравнению (163), и для получения  $X_n$  нужно в выражении  $X_m$  дать величине  $k$  приращение  $\delta k$ , оставляя другие величины без изменения.

Кроме того, уравнение (170) переписется так:  $X^{IV} = X$ . При этих обозначениях выражение (d) переписется таким образом:

$$\frac{4k^3}{l^4} \int_0^l X_m^2 dx = \left[ \frac{3k^2}{l^3} X_m X_m'' + \frac{k^2 x}{l^4} X_m^2 + \frac{k^2 x}{l^4} X_m' X_m''' + \right. \\ \left. + \frac{k^2}{l^3} X_m' X_m'' + \frac{k^2 x}{l^4} (X_m'')^2 - \frac{2k^2}{l^3} X_m' X_m'' - \frac{k^2 x}{l^4} X_m' X_m'' \right]_0^l,$$

или после сокращений

$$\frac{4k}{l} \int_0^l X_m^2 dx = \left[ 3X_m X_m'' + \frac{kx}{l} X_m^2 - \frac{2kx}{l} X_m' X_m'' - X_m' X_m'' + \frac{kx}{l} X_m'^2 \right]_0^l.$$

При всяком способе закрепления мы будем иметь для концов  $X_m X_m''' = 0$ ;  $X_m' X_m'' = 0$ . Следовательно,

$$\int_0^l X_m^2 dx = \frac{1}{4} [x (X_m^2 - 2X_m' X_m'' + X_m'' + X_m'^2)]_0^l \\ = \frac{l}{4} (X_m^2 - 2X_m' X_m'' + X_m'^2)_{x=l}. \quad (175)$$

Таким образом, можно найти значение интеграла (с) при любом способе закрепления концов. Если правый конец стержня совершенно свободен, то

$$(X_m')_{x=l} = (X_m'')_{x=l} = 0,$$

и тогда

$$\int_0^l X_m^2 dx = \frac{l}{4} (X_m^2)_{x=l}.$$

При заделанном правом конце

$$\int_0^l X_m^2 dx = \frac{l}{4} (X_m'^2)_{x=l}.$$

Наконец, при опертом конце, когда

$$(X_m)_{x=l} = (X_m'')_{x=l} = 0,$$

будем иметь

$$\int_0^l X_m^2 dx = -\frac{l}{2} (X_m' X_m'')_{x=l}.$$

Для вычисления интеграла

$$\int_0^l (X_m'')^2 dx = \frac{l^4}{k^4} \int_0^l \left( \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{a^2}{p_m^2} \int_0^l \left( \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right)^2 dx,$$

который нам понадобится при составлении выражения для потенциальной энергии (173), воспользуемся уравнением (170). Умножая обе части этого уравнения на  $X$  и интегрируя по всей длине стержня, получаем

$$\frac{p^2}{a^2} \int_0^l X^2 dx = \int_0^l \frac{d^4 X}{dx^4} X dx.$$

Правая часть равенства может быть преобразована путем интегрирования по частям. Тогда приходим к такому результату:

$$\frac{P^2}{a^2} \int_0^l X^2 dx = \int_0^l \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (176)$$

Следовательно, при составлении выражения для потенциальной энергии нам не придется вычислять новые интегралы, можно воспользоваться найденными выше [формула (175)] значениями интеграла (с).

Имея выражения для  $V$  и  $T$ , без затруднений можно исследовать как свободные, так и вынужденные колебания стержня. Некоторые примеры будут приведены в следующих параграфах. Здесь остановимся подробнее на дифференциальном уравнении движения (168) и внесем в него поправки, оценивающие влияние конечности поперечных размеров стержня на частоту собственных колебаний. Поправки эти, как мы видим, могут иметь существенное значение при изучении высших типов колебаний, когда вибрирующий стержень улововыми сечениями подразделяется на большое число полуоволн сравнительно малой длины.

В качестве первой поправки учтем влияние поворота поперечных сечений стержня при колебаниях изгиба. При составлении уравнения (168) мы приняли во внимание лишь силы инерции, соответствующие поступательному движению элементов стержня в направлении оси  $y$ . Однако это движение сопровождается искривлением оси стержня, а следовательно, и поворотом поперечных сечений относительно соответствующих им нейтральных линий. Угол поворота для каждого сечения определяется соответствующим значением производной  $\partial y / \partial x$ . При поперечных колебаниях стержня этот угол все время изменяется. Значения угловой скорости вращения и углового ускорения представляются производными

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2}.$$

Если выделить двумя бесконечно близкими поперечными сечениями элемент стержня длиной  $\delta x$ , то силы инерции, соответствующие вращению этого элемента, дадут момент, равный

$$- \frac{J \gamma}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t^2} \delta x. \quad (e)$$

При составлении дифференциального уравнения для изогнутой оси стержня нужно принять во внимание не только непрерывно распределенную нагрузку, соответствующую силам инерции поступательного движения, но и непрерывно распределенные моменты, определяемые формулой (e). В таком случае изменение изгибающего момента вдоль оси стержня представится так:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q - \frac{J \gamma}{g} \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2}.$$

Здесь  $Q$  — поперечная сила, получающаяся от сил инерции поступательного движения элементов стержня.

Подставляя найденное значение производной  $\partial M / \partial x$  в дифференциальное уравнение

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}.$$

получаем

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = - \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{J \gamma}{g} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2}. \quad (177)$$

Второй член в правой части уравнения представляет собой поправку, обусловленную поворотом поперечных сечений при колебаниях.

Более точное уравнение получим, если примем во внимание не только влияние сил инерции, соответствующих повороту сечений, но также и влияние касательных напряжений на прогиб стержня<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Влияние касательных напряжений на период поперечных колебаний стержня обычно не принимается в расчет, а между тем соответствующая ему поправка по своей величине больше той, которая получается от поворачивания сечений.

Выделим из стержня двумя бесконечно близкими сечениями элемент длиной  $\delta x$  и составим для него уравнения движения. Положение выделенного элемента определится перемещением  $y$  его центра тяжести и углом поворота  $\varphi$  относительно нейтральной линии<sup>1</sup>.

Так как прогиб стержня обусловлен не только относительным поворотом поперечных сечений, но также и сдвигом одного из них относительно другого, то угол наклона касательной к изогнутой оси стержня не будет равняться углу поворота сечения. Разность между этими углами будет, очевидно, равняться относительному сдвигу, который обозначим через  $\beta$ .

Таким образом, получаем зависимость

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi + \beta. \quad (f)$$

Кроме того, для изгибающего момента и для перерезывающей силы будем иметь выражения

$$M = -EJ \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad Q = k' \beta FG = k' \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \varphi \right) FG. \quad (h)$$

где  $k'$  — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения.

Принимая во внимание приложенные к выделенному элементу силы (рис. 76), напишем уравнение движения, соответствующее вращению элемента, в таком виде:

$$-\frac{\partial M}{\partial x} \delta x + Q \delta x = \frac{\gamma J}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \delta x,$$

или, вставляя вместо  $M$  и  $Q$  их значения (h),

$$EJ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k' \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \varphi \right) FG - \frac{\gamma J}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (k)$$

Уравнение движения, соответствующее перемещению элемента в направлении оси  $y$ , запишем так:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \delta x = \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta x$$

или

$$\frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - k' \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) FG = 0. \quad (l)$$

Исключая из (k) и (l) величину  $\varphi$ , приходим к такому уравнению для поперечных колебаний стержня:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \left( \frac{\gamma J}{g} + \frac{EJ\gamma}{gk'G} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\gamma J}{g} \frac{\gamma}{gk'G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0. \quad (178)$$

Сравнивая (177) и (178), устанавливаем те члены, которыми определяется поправка на касательные напряжения. Ниже на примере покажем, как сказывается эта поправка на частоте различных типов собственных колебаний.

<sup>1</sup> При составлении уравнений рассматриваем элемент как абсолютно твердое тело и пренебрегаем искривлением поперечных сечений, поэтому поправка лишь приближенно оценивает влияние касательных сил. Нами совместно с проф. П. Эрэнфестом получено также точное решение задачи для полосы прямоугольного поперечного сечения. [Речь идет о поперечных колебаниях стержня прямоугольного поперечного сечения на основе уравнений теории упругости. Этот результат, полученный С. П. Тимошенко и П. Эрэнфестом, совместно не публиковался. В письме к отв. редактору настоящего издания от 2 июля 1970 г. С. П. Тимошенко замечает, что «эта работа была сделана в 1913 г., когда Эрэнфест жил в Петербурге. Позже я с ним не работал». В статье С. П. Тимошенко «On the transverse vibration of bars of uniform cross-section». Philosophical Magazine and Journal of Science, Series, 6, 1922, Bd 43, SS. 125—131 на стр. 127 указывается: «Это частотное уравнение было найдено мною совместно с проф. П. Эрэнфестом. Само же решение, изложенное в статье, принадлежит мне». Это решение, как и упомянутое на стр. 153 решение Л. Похгаммера для круглого цилиндра, показывает, что приводимое здесь приближенное решение с достаточной точностью учитывает влияние касательных сил.

### § 39. Свободные поперечные колебания стержня при различных способах закрепления концов

Для определения частоты различных типов колебаний и соответствующих форм искривления оси стержня приходится, как было видно, обратиться к условиям закрепления на концах стержня. При помощи этих условий возможно найти соотношение между произвольными постоянными в общем выражении (171) для нормальных функций  $X$  и составить то трансцендентное уравнение, из которого находятся частоты различных типов собственных колебаний.

Особенно простой вид нормальные функции имеют в случае стержня с опертыми концами. Условия на концах в этом случае будут такие:

$$(X)_{x=0} = 0; \quad (a)$$

$$\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0; \quad (b)$$

$$(X)_{x=l} = 0; \quad (c)$$

$$\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)_{x=l} = 0. \quad (d)$$

Из условий (a) и (b) следует, что в общем решении (171)  $C_1 = C_2 = 0$ .

Из условий (c) и (d) заключаем, что  $C_3 = C_4$ ;  $\sin \sqrt{\frac{p}{a}} l = 0$ .

Следовательно,  $\sqrt{\frac{p}{a}} l = n\pi$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$

Для частот различных типов колебаний получаем значения

$$p_1 = \frac{a\pi^2}{l^2}, \quad p_2 = \frac{4a\pi^2}{l^2}, \quad p_3 = \frac{9a\pi^2}{l^2}.$$

Соответствующие периоды колебаний будут иметь такие значения:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{2l^2}{a\pi} = \frac{2l^2}{\pi} \sqrt{\frac{\gamma F}{EJg}}; & \tau_2 &= \frac{1}{4} \frac{2l^2}{\pi} \sqrt{\frac{\gamma F}{EJg}}; \\ \tau_3 &= \frac{1}{9} \frac{2l^2}{\pi} \sqrt{\frac{\gamma F}{EJg}}. \end{aligned} \quad (179)$$

Период колебаний для стержня из заданного материала будет, следовательно, пропорционален квадрату длины и обратно пропорционален радиусу инерции поперечного сечения.

Формы искривлений при различных типах собственных колебаний определяются выражениями для соответствующих нормальных функций:

$$X_1 = C_1 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad X_2 = C_2 \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad X_3 = C_3 \sin \frac{3\pi x}{l}, \dots$$

Первому типу колебаний соответствует искривление стержня по синусоиде с одной полуволной. Для второго типа колебаний будем иметь две полуволны — по середине пролета получается точка перегиба. Третьему типу колебаний соответствует подразделение стержня на три полуволны и т. д.

В самом общем виде свободные колебания для рассматриваемого случая могут быть представлены так [см. формулу (172)]:

$$y = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} (A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t). \quad (e)$$

Коэффициенты  $A$  и  $B_i$  определяются из начальных обстоятельств.

Предположим, что начальное искривление и начальное значение скорости задано таким образом:

$$(y)_{t=0} = f(x); \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = f_1(x).$$

Полагая в выражении (е), что  $t = 0$ , получаем

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad (f)$$

Для получения коэффициентов  $A_i$  поступаем по известному правилу: умножаем обе части равенства (f) на  $\sin \frac{i\pi x}{l} dx$  и интегрируем в пределах  $0 - l$ . При этом все члены бесконечного ряда, кроме члена с коэффициентом  $A_i$ , пропадают и мы получаем

$$\int_0^l f(x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx = A_i \int_0^l \sin^2 \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{A_i l}{2},$$

следовательно,

$$A_i = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx. \quad (g)$$

Для получения коэффициентов  $B_i$  составляем производную по времени от выражения (е) и полагаем в ней  $t = 0$ , тогда получим

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} B_i p_i \sin \frac{i\pi x}{l},$$

откуда находим

$$B_i = \frac{2}{lp_i} \int_0^l f_1(x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx. \quad (h)$$

Предположим, например, что в начальный момент стержень не искривлен и посредством удара участку стержня весьма малой длины  $\delta$ , расположенному на расстоянии  $c$  от левой опоры, сообщена начальная скорость  $v_0$ . В таком случае  $f(x) = 0$ . Что касается функции  $f_1(x)$ , то она обращается в нуль во всех точках, кроме точки  $x = c$ , соответствующей месту удара, где  $f_1(c) = v_0$ .

На основании (g) заключаем, что все коэффициенты  $A_i$  обращаются в нуль. Для коэффициентов  $B_i$  из выражения (h) получаем

$$B_i = \frac{2}{lp_i} v_0 \delta \sin \frac{i\pi c}{l}.$$

Следовательно, колебания стержня, которые при этом возникают, представятся так:

$$y = \frac{2v_0\delta}{l} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{p_i} \sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin p_i t.$$

Если удар произведен по середине пролета, то  $c = \frac{1}{2} l$ , и мы будем иметь

$$y = \frac{2v_0\delta}{l} \left( \frac{1}{p_1} \sin \frac{\pi x}{l} \sin p_1 t - \frac{1}{p_3} \sin \frac{3\pi x}{l} \sin p_3 t + \right. \\ \left. + \frac{1}{p_5} \sin \frac{5\pi x}{l} \sin p_5 t - \dots \right).$$

В этом случае возникнут лишь колебания с нечетным числом полуволн. Члены полученного ряда быстро убывают, так как  $p_i$  пропорционально  $i^2$ .

Рассмотрим теперь, как влияют силы инерции, соответствующие повороту сечений, и касательные напряжения на период собственных колебаний стержня с опертыми концами. Для этого обратимся к уравнению (178). Разделив его на величину  $\gamma F/g$  и обозначив через  $r$  радиус инерции поперечного сечения, получим

$$a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - r^2 \left( 1 + \frac{E}{Gk'} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{r^2 \gamma}{gk'G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0. \quad (к)$$

Для  $y$  сохраняются на концах такие же условия, как и в предыдущем случае<sup>1</sup>, когда мы пользовались менее точным уравнением (168). Тип колебаний порядка  $m$  представится так:

$$y = C \sin \frac{m\pi x}{l} \cos p_m t.$$

Подставляя это выражение в уравнение (к), получаем для определения частоты колебаний уравнение

$$a^2 = \frac{m^4 \pi^4}{l^4} - p^2 - p^2 \frac{m^2 \pi^2 r^2}{l^2} - \frac{E}{k'G} p^2 \frac{m^2 \pi^2 r^2}{l^2} + \frac{r^2 \gamma}{gk'G} p^4 = 0. \quad (л)$$

Если взять лишь первых два члена уравнения, то можно получить для частоты прежнее значение

$$p_m = a \frac{m^2 \pi^2}{l^2} = \frac{a\pi^2}{\lambda^2}.$$

Через  $\lambda$  обозначена длина тех полуволн, на которые стержень подразделяется при колебаниях.

Взяв три первых члена уравнения (л), тем самым введем поправку на влияние сил инерции, соответствующих повороту сечений. Считая эту поправку малой величиной, найдем

$$p_m = \frac{a\pi^2}{\lambda^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 r^2}{\lambda^2} \right).$$

Величина поправки, как видим, возрастает с уменьшением  $\lambda$ , т. е. с увеличением числа волн, на которые подразделяется стержень при колебаниях. Если взять стержень прямоугольного сечения и предположить, что  $\lambda$  в десять раз больше высоты сечения, то величина поправки составит несколько больше 4%. Чтобы оценить влияние касательных сил, нужно обратиться к полному уравнению (л). Подставляя в последний член этого уравнения вместо  $p_m$  его первое приближение  $\frac{a\pi^2}{\lambda^2}$ , легко показать, что при малых значениях величины  $\pi^2 r^2 / \lambda^2$  этот член представляет собой малую величину второго порядка. Отбрасывая его, находим для  $p_m$  выражение:

$$p_m = \frac{a\pi^2}{\lambda^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 r^2}{\lambda^2} \left( 1 + \frac{E}{k'G} \right) \right].$$

Для прямоугольного сечения можно положить  $k' = 2/3$ , кроме того,  $E = 8G/3$ ; следовательно,  $E/k'G = 4$ .

Поправка на касательные напряжения в 4 раза больше поправки на силы инерции вращения.

<sup>1</sup> Так как на концах прогиб и изгибающий момент обращаются в нуль, то следует положить  $y = 0$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ . В таком случае на основании зависимости (f) (см. § 38) получим на конце  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial \beta}{\partial x}$ . Подставляя вместо сдвига  $\beta$  его выражение через поперечную силу, находим для концов:  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{k'FG} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{k'FG} \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ . Величина эта равна нулю, так как на опертых концах  $y = 0$ .

Рассмотрим колебания стержня со свободными концами. В этом случае будем иметь такие граничные условия:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)_{x=0} &= 0; & \left(\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}\right)_{x=0} &= 0; \\ \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)_{x=l} &= 0; & \left(\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}\right)_{x=l} &= 0. \end{aligned}$$

Чтобы удовлетворить первым двум условиям, нужно в общем выражении (171) для нормальных функций положить  $c_2 = c_4 = 0$ . В таком случае

$$X = C_1 \left( \cos \sqrt{\frac{p}{a}} x + \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} x \right) + C_3 \left( \sin \sqrt{\frac{p}{a}} x + \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{a}} x \right). \quad (m)$$

Условия на другом конце стержня дают нам два таких уравнения:

$$\begin{aligned} C_1 \left( -\cos \sqrt{\frac{p}{a}} l + \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} l \right) + C_3 \left( -\sin \sqrt{\frac{p}{a}} l + \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{a}} l \right) &= 0; \\ C_1 \left( \sin \sqrt{\frac{p}{a}} l + \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{a}} l \right) + C_3 \left( -\cos \sqrt{\frac{p}{a}} l + \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} l \right) &= 0. \end{aligned} \quad (n)$$

Эти уравнения могут дать для  $C_1$  и  $C_3$  решения, отличные от нуля, лишь в том случае, если определитель их обращается в нуль, т. е. если соблюдено условие

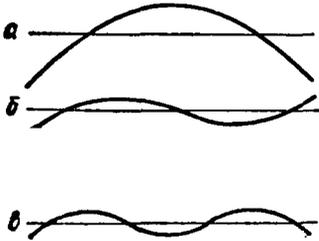


Рис. 77.

$$\begin{aligned} \left( -\cos \sqrt{\frac{p}{a}} l + \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} l \right)^2 &= \\ &= \operatorname{sh}^2 \sqrt{\frac{p}{a}} l - \sin^2 \sqrt{\frac{p}{a}} l, \end{aligned}$$

или, принимая во внимание, что

$$\operatorname{ch}^2 \sqrt{\frac{p}{a}} l - \operatorname{sh}^2 \sqrt{\frac{p}{a}} l = 1,$$

получаем

$$\cos \sqrt{\frac{p}{a}} l \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} l = 1. \quad (180)$$

Это и будет нужное нам трансцендентное уравнение для определения частоты различных типов собственных колебаний. Определив теперь из (n) отношение  $C_1 : C_3$  и подставив его в (m), найдем выражение для соответствующих функций, определяющих форму искривления стержня при колебаниях. Кривые для первых трех типов колебаний представлены соответственно на рис. 77, а, б, в.

Пользуясь обозначением  $\sqrt{\frac{p}{a}} l = k$ , перепишем уравнение (180) в таком виде:  $\cos k \operatorname{ch} k = 1$ . Первые пять корней этого уравнения, определяющих частоту и период первых пяти типов колебаний стержня, следующие:  $k_1 = 4,730$ ;  $k_2 = 7,853$ ;  $k_3 = 10,996$ ;  $k_4 = 14,137$ ;  $k_5 = 17,279$ .

Если оба конца стержня заделаны, то граничные условия напишутся так:

$$(X)_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{x=0} = 0; \quad (X)_{x=l} = 0; \quad \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{x=l} = 0.$$

Из первых двух условий следует, что в общем интеграле (171) нужно положить  $C_1 = C_3 = 0$ .

Два других условия приводят к уравнениям

$$C_2 \left( \cos \sqrt{\frac{p}{a}} l - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} l \right) + C_4 \left( \sin \sqrt{\frac{p}{a}} l - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{a}} l \right) = 0;$$

$$C_2 \left( \sin \sqrt{\frac{p}{a}} l + \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{a}} l \right) + C_4 \left( -\cos \sqrt{\frac{p}{a}} l + \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} l \right) = 0.$$

Отсюда для определения частоты колебаний получаем трансцендентное уравнение (180).

Для стержня с левым заделанным и правым свободным концами найдем из условий для левого конца:  $C_1 = C_3 = 0$ . Условия на свободном конце приводят к уравнению

$$\cos \sqrt{\frac{p}{a}} l \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} l = -1. \tag{181}$$

Первые шесть корней этого уравнения следующие:  $k_1 = 1,875$ ;  $k_2 = 4,694$ ;  $k_3 = 7,855$ ;  $k_4 = 10,996$ ;  $k_5 = 14,137$ ;  $k_6 = 17,279$ .

Подобным же образом могут быть исследованы колебания и при других способах закрепления концов.

### § 40. Вынужденные поперечные колебания стержней

Имея выражения (173) и (174) для потенциальной энергии и живой силы стержня, можно составить дифференциальные уравнения движения (146') и исследовать вынужденные колебания при любых раскачивающих силах. В качестве простейшего примера рассмотрим вынужденные колебания балки с опертными концами. В этом случае, как мы видели,

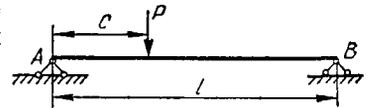


Рис. 78.

$$y = \sum_{i=1}^{i=\infty} \varphi_i \sin \frac{i\pi x}{l}, \tag{a}$$

и выражения (173) и (174) переписываются таким образом:

$$V = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_{i=1}^{i=\infty} i^4 \varphi_i^2; \quad T = \frac{\gamma Fl}{4g} \sum_{i=1}^{i=\infty} \dot{\varphi}_i^2. \tag{b}$$

Уравнения (146') представятся в таком виде:

$$\ddot{\varphi}_i + \frac{a^2 \pi^4 i^4}{l^4} \varphi_i = \frac{2g}{\gamma Fl} \Phi_i, \tag{c}$$

и нам нужно только в каждом частном случае вместо  $\Phi_i$  вставить соответствующее значение обобщенной силы. Общий интеграл уравнения (c) будет

$$\varphi_i = A_i \cos \frac{i^2 \pi^2 a t}{l^2} + B_i \sin \frac{i^2 \pi^2 a t}{l^2} + \frac{l^2}{i^2 \pi^2 a} \frac{2g}{\gamma Fl} \int_0^t \Phi_i \sin \frac{i^2 \pi^2 a (t - t_1)}{l^2} dt_1. \tag{d}$$

Первых два члена уравнения (d) представляют собой свободные колебания, определяемые начальными условиями движения, третий член — колебания, вызванные силой  $\Phi_i$ . Найдем эти последние колебания для нескольких частных случаев.

Предположим, что балка AB (рис. 78) раскачивается силой  $P = P_0 \sin pt$ , приложенной на расстоянии  $c$  от левой опоры. Найдем соответствующее

значение  $\Phi_i$ . Для этого в общем выражении (а) дадим координате  $\varphi_i$  приращение  $\delta\varphi_i$ . Этому будет соответствовать искривление балки по кривой

$$\delta y = \delta\varphi_i \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Точка приложения силы  $P$  совершит перемещение

$$\delta\varphi_i \sin \frac{i\pi c}{l},$$

и нужное нам выражение для обобщенной силы найдется из условия

$$\delta\varphi_i \sin \frac{i\pi c}{l} P_0 \sin nt = \delta\varphi_i \Phi_i.$$

Следовательно,

$$\Phi_i = P_0 \sin \frac{i\pi c}{l} \sin nt.$$

Подставив это выражение в последний член выражения (d), для колебаний, вызванных силой  $\Phi_i$ , найдем

$$\varphi_i = \frac{2g}{\gamma F} P_0 \sin \frac{i\pi c}{l} \left[ \frac{l^3}{i^4 \pi^4 a^2 - n^2 l^4} \sin nt - \frac{n l^5}{i^2 \pi^2 a (i^4 \pi^4 a^2 - n^2 l^4)} \sin \frac{i^2 \pi^2 a t}{l^2} \right].$$

Подставляя этот результат в (а), получаем

$$y = \frac{2gP_0 l^3}{\gamma F} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^4 \pi^4 a^2 - n^2 l^4} \sin nt - \frac{2gnP_0 l^5}{\gamma F \pi^2 a} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i^2 \pi^2 a t}{l^2}}{i^2 (i^4 \pi^4 a^2 - n^2 l^4)}. \quad (182)$$

Первая сумма полученного решения представляет собой вынужденные колебания стержня. Период их такой же, как и период раскачивающей силы. Вторая сумма дает свободные колебания, вызываемые силой  $P$ . Колебания эти благодаря сопротивлениям затухают, и практически приходится считаться с вынужденными колебаниями

$$y = \frac{2gP_0 l^3}{\gamma F} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^4 \pi^4 a^2 - n^2 l^4} \sin nt. \quad (183)$$

Вынужденные колебания могут получить особенно большую амплитуду в тех случаях, когда знаменатель какого-либо члена ряда близок к нулю, т. е. когда период раскачивающей силы приближается к периоду одного из типов собственных колебаний.

Если раскачивающая сила изменяется весьма медленно, величина  $n$  будет малой, и, отбросив в знаменателях членов ряда величину  $n^2 l^4$ , придем к статическому прогибу (см. § 12):

$$y = \frac{2gP_0 l^3 \sin nt}{\gamma F a^2 \pi^4} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i^4} \sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l} = \frac{2l^3 P_0 \sin nt}{EJ \pi^4} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i^4} \sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Предположим, что раскачивающая сила приложена по середине пролета. В таком случае  $c = \frac{l}{2}$ , и выражение (183) представится так:

$$y = \frac{2gP_0 l^3 \sin nt}{\gamma F} \left( \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{\pi^4 a^2 - n^2 l^4} - \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^4 \pi^4 a^2 - n^2 l^4} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{l}}{5^4 \pi^4 a^2 - n^2 l^4} - \dots \right).$$

Если период раскачивающей силы велик по сравнению с периодом основного типа собственных колебаний стержня, то отношение  $nl^2/\pi^2a$  будет малой величиной, которую обозначим через  $\alpha$ ; тогда получим

$$y = \frac{2l^3P_0 \sin nt}{EJ\pi^4} \left( \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1-\alpha^2} - \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^4-\alpha^2} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{l}}{5^4-\alpha^2} - \dots \right),$$

и так как преобладающее значение имеет первый член ряда, то можно заключить, что

$$y_d = y_{st} \frac{1}{1-\alpha^2},$$

т. е. динамический прогиб получается умножением статического прогиба на дробь  $1/(1-\alpha^2)$ , где  $\alpha^2$  представляет собой квадрат отношения периода основного тона к периоду раскачивающей силы. Если, например, это отношение равно  $1/4$ , то динамический прогиб превышает статический приблизительно на 6%.

От сосредоточенной силы легко перейти путем суммирования к системе сил или к какой угодно сплошной переменной нагрузке. Предположим, например, что весь пролет балки покрыт равномерной нагрузкой, интенсивность которой изменяется по закону  $q = q_0 \sin nt$ . Для получения вынужденных колебаний нужно в выражение (183) вместо  $P_0$  подставить величину  $q_0 dx$  и потом проинтегрировать в пределах  $0 - l$ . Таким путем найдем

$$y = \frac{4gql^4}{\gamma F \pi} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l}}{i(i^4\pi^4a^2 - n^2l^4)} \sin nt. \quad (184)$$

Полагая в знаменателях всех членов ряда  $n = 0$ , т. е. предполагая, что раскачивающая нагрузка изменяется бесконечно медленно, приходим к известному выражению для статического изгиба балки равномерной нагрузкой  $q_0 \sin nt$ .

Рассмотрим теперь колебания балки, возникающие под действием постоянной силы  $P$ , перемещающейся вдоль балки с постоянной скоростью  $v$ . Если время отсчитывать от момента нахождения силы над левой опорой, то в момент  $t$  точка приложения силы будет отстоять от левой опоры на расстоянии  $c = vt$ . Для получения выражения обобщенной силы  $\Phi_i$  дадим координате  $\varphi_i$  в выражении (а) приращение  $\delta\varphi_i$ . При этом точка приложения силы  $P$  переместится на величину

$$\delta\varphi_i \sin \frac{i\pi c}{l} = \delta\varphi_i \sin \frac{i\pi vt}{l}$$

и обобщенная сила найдется из условия

$$\Phi_i \delta\varphi_i = P \delta\varphi_i \sin \frac{i\pi vt}{l}.$$

Подставляя найденное таким путем значение  $\Phi_i$  в третий член выражения (d), определяя  $\varphi_i$  и подставляя его в (а), находим

$$y = \frac{2gPl^3}{\gamma F \pi^2} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l}}{i^2(i^2\pi^2a^2 - v^2l^2)} \sin \frac{i\pi vt}{l} - \frac{2gPl^4v}{\gamma F \pi^3 a} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i^2\pi^2at}{l^2}}{i^3(i^2\pi^2a^2 - v^2l^2)}. \quad (185)$$

Первая сумма полученного решения дает колебания, зависящие от скорости движения силы  $P$  по балке. Это будут вынужденные колебания системы. Вторая сумма представляет собой свободные колебания.

<sup>1</sup> Подобную нагрузку представляют, например, силы инерции, изгибающие паровозный спарник постоянного поперечного сечения.

Если уменьшить скорость  $v$ , то в пределе придем к статическому изгибу балки. Стоит только в полученном решении (185) положить  $v = 0$  и  $vt = c$  и мы получим

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^4},$$

что совпадает с известным выражением для изогнутой оси балки при статическом действии силы  $P$

Рассмотрим подробнее тот случай, когда знаменатель одного из членов выражения (185) обращается в нуль. Положим, например, что  $a^2\pi^2 = v^2l^2$ . Так как период основных колебаний стержня [формула (179)] равен  $\tau_1 = 2l^2/a\pi$ , то, следовательно,  $\tau_1 = 2l/v$ , т. е. сила  $P$  пробегает пролет балки за время, равное половине периода основных колебаний. При этом первые члены сумм, входящих в выражение (185), дадут

$$\frac{2gPl^3}{\gamma F\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} \frac{\sin \frac{\pi vt}{l} - \frac{lv}{a\pi} \sin \frac{\pi^2 at}{l^2}}{\pi^2 a^2 - v^2 l^2}.$$

Раскрывая полученную неопределенность, приходим к такому результату:

$$- \frac{Pg}{\gamma F\pi v} t \cos \frac{\pi vt}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{Pgl}{\gamma F\pi^2 v^2} \sin \frac{\pi vt}{l} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Наибольшего значения это выражение достигает при  $t = \frac{l}{v}$ , когда оно равняется

$$\frac{Pgl}{\gamma F\pi v^2} \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{Pl^3}{EJ\pi^3} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (f)$$

Принимая во внимание, что выделенные нами два члена имеют преобладающее значение в общем выражении для прогиба (185), на основании выражения (f) заключаем, что

$$y_d \approx \frac{\pi}{2} y_{st},$$

т. е. при выбранной нами скорости движения динамический прогиб примерно в полтора раза больше статического.

Рассмотрев колебания, вызываемые одной движущейся силой, мы можем получить путем сложения колебания при действии нескольких движущихся сил и, наконец, рассмотреть колебания, вызываемые непрерывно распределенными движущимися силами<sup>1</sup>.

В качестве более сложной задачи исследуем колебания, вызываемые в балке с опертыми концами равномерно движущейся силой переменной величины<sup>2</sup>  $P = P_0 \cos nt$ . Рассуждая совершенно таким же образом, как и в ранее рассмотренных случаях, найдем для обобщенной силы выражение

$$\Phi_i = P_0 \cos nt \sin \frac{i\pi vt}{l}.$$

<sup>1</sup> Несколько примеров такого рода имеется в нашей работе (см. ссылку на стр. 325).

<sup>2</sup> Подобного рода действия будут оказывать на мостовую балку избыточные противовесы паровозов.

Вычисляя соответствующее значение обобщенной координаты  $\varphi_i$  и подставляя его в (а), получаем для колебаний такое выражение:

$$y = \frac{P_0 l^3}{EJ\pi^4} \sum_{i=1}^{i=\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} \left\{ \frac{\sin \left( \frac{i\pi v}{l} + n \right) t}{i^4 - (\beta + i\alpha)^2} + \frac{\sin \left( \frac{i\pi v}{l} - n \right) t}{i^4 - (\beta - i\alpha)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{i} \left[ \frac{\sin \frac{i^2 \pi^2 a t}{l^2}}{i^2 \alpha^2 - (i^2 - \beta)^2} + \frac{\sin \frac{i^2 \pi^2 a t}{l^2}}{i^2 \alpha^2 - (i^2 + \beta)^2} \right] \right\}. \quad (186)$$

Здесь для сокращения введены обозначения

$$\frac{vl}{a\pi} = \alpha; \quad \frac{n l^2}{a\pi^2} = \beta.$$

Полагая в выражении (186)  $n = 0$ , приходим к колебаниям балки под действием постоянной движущейся силы.

Если  $n = a\pi^2/l^2$ , т. е. если период переменной силы равен периоду основного типа собственных колебаний, мы будем иметь явление резонанса. Выделяя из общего решения (186) наиболее существенные члены, найдем, что в этом случае величина наибольшего прогиба по середине достигает примерно величины<sup>1</sup>

$$\frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \frac{\pi}{4\alpha}.$$

На этом закончим вопрос о вынужденных колебаниях стержней с опертыми концами. При других способах закрепления следует лишь составить соответствующие выражения для  $V$  и  $T$ . Разыскание колебаний производится таким же способом, как и в рассмотренных выше примерах.

### § 41. Колебания стержней в упругой среде<sup>2</sup>

Предположим, что колеблющийся стержень при изгибе встречает сопротивления среды, пропорциональные в каждой точке прогибу стержня. Если пренебречь массой упругой среды, считать ее невесомой, то исследование как свободных, так и вынужденных колебаний стержней не встречает никаких затруднений. Рассмотрим в качестве примера колебания стержня с опертыми концами.

Кинетическая энергия системы будет такая же, как и при отсутствии упругой среды, а потенциальная энергия составит из двух частей: из энергии изгиба стержня и из энергии деформации среды. Таким образом, будем иметь

$$T = \frac{\gamma Fl}{4g} \sum_{i=1}^{i=\infty} \dot{\varphi}_i^2, \quad V = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^l y^2 dx = \\ = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_{i=1}^{i=\infty} i^4 \varphi_i^2 + \frac{kl}{4} \sum_{i=1}^{i=\infty} \varphi_i^2. \quad (a)$$

Уравнения (146') получают такой вид:

$$\ddot{\varphi}_i + \frac{2g}{\gamma Fl} \left( \frac{EJ\pi^4 i^4}{2l^3} + \frac{kl}{2} \right) \varphi_i = \frac{2g}{\gamma Fl} \Phi_i. \quad (b)$$

Если коэффициент  $k$ , характеризующий жесткость упругой среды, положить равным нулю, то получим уравнение (с) предыдущего параграфа. При исследовании колебаний мы

<sup>1</sup> Для мостов  $\alpha$  — малая дробь (от 1/20 до 1/35), поэтому прогибы, вызываемые противоресами в случае резонанса, могут достигнуть весьма большой величины.

<sup>2</sup> См. Т и м о ш е н к о С. П. К вопросу о вибрациях рельс. Известия электротехнического института, 1915, том 13, стр. 1—17. Отд. оттиск, Петроград, 1916, 17 стр.

можем воспользоваться полученными выше решениями для стержня со свободной боковой поверхностью. Стоит только в них поставить вместо  $\frac{EJ\pi^4 i^4}{2l^3}$  величину  $\frac{EJ\pi^4 i^4}{2l^3} + \frac{kl}{2}$  и мы найдем соответствующее выражение для колебаний стержня в упругой среде. Возьмем, например, раскачивание стержня силой  $P = P_0 \sin nt$ , приложенной на расстоянии  $c$  от левого конца. На основании (183) пишем для вынужденных колебаний выражение

$$y = \frac{2P_0 l^3 \sin nt}{EJ\pi^4} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} - \frac{n^2 l^4 \gamma F}{EJ\pi^4 g}}. \quad (c)$$

Если в знаменателях членов полученного ряда положим  $n = 0$ , то придем к статическому изгибу стержня, лежащего на упругом основании, под действием силы  $P_0 \sin nt$ . Чтобы от статики перейти к динамике, нужно, как видно из (c), коэффициент  $k$  заменить меньшей величиной:

$$k_1 = k - \frac{n^2 \gamma F}{g}. \quad (d)$$

Динамический эффект сказывается как бы в уменьшении коэффициента жесткости упругого основания, и так как задача о статическом изгибе для стержня, лежащего на сплошном упругом основании, решается без всяких затруднений (§ 3), то форма изгиба для вынужденных колебаний, представленных бесконечным рядом (c), легко может быть дана в замкнутой форме. Все сказанное остается в силе при переходе к стержню бесконечной длины. В этом случае статический изгиб представляется так<sup>1</sup>:

$$y = \frac{P\alpha}{2k} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x).$$

Здесь  $x$  отсчитывается от точки приложения силы и  $\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$ .

Если вместо  $k$  подставим величину  $k_1$ , определяемую равенством (d), то получим динамический изгиб стержня бесконечной длины под действием переменной силы  $P = P_0 \sin nt$ . Для получения колебаний, возникающих под действием силы  $P$ , движущейся по стержню с постоянной скоростью, мы можем воспользоваться решением (185). Подставляя вместо  $a^2$  его значение (169) и заменяя

$$\frac{EJ\pi^4 i^4}{2l^3} \quad \text{через} \quad \frac{EJ\pi^4 i^4}{2l^3} + \frac{kl}{2},$$

получаем для вынужденных колебаний стержня, лежащего на сплошном упругом основании, такое выражение:

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{ivt}{l}}{i^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} - i^2 \frac{v^2 \gamma F}{g} \frac{l^2}{EJ\pi^2}}. \quad (e)$$

Если в полученном решении положим  $v = 0$  и  $vt = c$ , придем к известному выражению (81) для статического изгиба стержня, лежащего на упругом основании, сосредоточенной силой  $P$ . Динамический прогиб отличается от статического тем, что в знаменатель каждого члена ряда (e) входит добавочный член

$$- i^2 \frac{v^2 \gamma F}{g} \frac{l^2}{EJ\pi^2}.$$

Сравнение решения (e) с выражением

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} - i^2 \frac{Sl^2}{EJ\pi^2}},$$

представляющим изгиб стержня с опертыми концами, лежащего на сплошном упругом основании и сжимаемого продольными силами  $S$  (см. § 15), позволяет заключить, что влияние на

<sup>1</sup> См. первую формулу (9) § 3.

прогиб перемещения изгибающей силы таково, как и влияние продольной сжимающей силы  $S$ , определяемой равенством

$$S = \frac{v^2 \gamma F}{g}. \quad (f)$$

Заключение это, конечно, будет сохранять свою силу и в том случае, когда мы будем беспредельно увеличивать длину стержня.

Мы знаем, что, постепенно увеличивая продольную сжимающую силу, можно достигнуть критического ее значения, при котором прямая форма равновесия стержня перестает быть устойчивой и стержень искривляется. Соответственно этому в рассматриваемой задаче динамики можно найти критическую скорость для перемещения силы  $P$ . Так как  $^1 S_{\text{кр}} = 2 \sqrt{kEJ}$ , то на основании (f)

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{4kEJg^2}{\gamma^2 F^2}}.$$

Применяя эту формулу к железнодорожным рельсам, мы получили бы для  $v_{\text{кр}}$  значение, во много раз превосходящее скорости, встречающиеся на практике.

## § 42. Колебания стержней переменного сечения

В случае призматических стержней исследование колебаний не встречает каких-либо затруднений, так как разыскание нормальных функций приводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения (170) с постоянными коэффициентами. Задача становится более сложной, если сечения стержня изменяются по длине. В таком случае для определения собственных колебаний стержня нужно обратиться к решению уравнения (167)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = - \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (a)$$

в котором  $J$  и  $F$  будут заданными функциями от  $x$ .

Полагая, как это мы делали в случае призматических стержней,  $y = X \cos pt$ , мы получим для нормальных функций такое дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right) - p^2 \frac{\gamma F}{g} X = 0. \quad (187)$$

Лишь при некоторых частных заданиях относительно  $J$  и  $F$  удается найти интеграл этого уравнения в замкнутой форме <sup>2</sup>. В других случаях приходится искать решение уравнения (187) в форме бесконечных рядов <sup>3</sup> или пользоваться

<sup>1</sup> См. формулы (116') и (117') § 26.

<sup>2</sup> Так, например, для случая стержней, имеющих форму клина или конуса, решение получается при помощи функций Бесселя. См. K i r c h h o f f G. Über die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt. Monatsbericht der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Sitzung der physikalisch — mathematischen Klasse, 1879, Oktober, SS. 815—828. [Перепечатка: K i r c h h o f f G. Gesammelte Abhandlungen. Leipzig, Johann Ambrosius Barth, 1882, SS. 339—351]. Подробное изложение результатов Г. Кирхгофа см. стр. 92—98 второй части второго тома работы I. Todhunter и K. Pearson, указанной в ссылке на стр. 13.

Ряд задач о поперечных колебаниях стержня переменного сечения рассмотрен в книге А. Н. Динника. См. Д и н н и к А. Н. Приложение функций Бесселя к задачам теории упругости, ч. 2. Новочеркасск, тип. К. Маттисена, Юрьев, 1915. [Перепечатка: Д и н н и к А. Н. Избранные труды, том 2. Киев, Изд-во АН УССР, 1955, стр. 125—221, ч. 2. Теория вибраций.

<sup>3</sup> С у ш е н к о в Б. К. К вопросу о вычислении свободных колебаний судна. Изв. Петербургского политехнического института, 1914, том 21, вып. 2, стр. 575—636.

приближенными методами решений, например графическим методом или вычислительным методом К. Рунге.

Если отклонения стержня от призматической формы малы, то для вычисления частоты собственных колебаний с успехом может быть применен приближенный метод Рэля, которым мы не раз пользовались в элементарном курсе сопротивления материалов. Сущность этого приема заключается в том, что при малом отклонении формы стержня от призматической можно принять тип колебаний его таким же, как и для призматического стержня. Задав тип колебаний, мы тем самым обращаем нашу систему в систему с одной степенью свободы, и так как выражения для  $V$  и  $T$  могут быть составлены без всяких затруднений, то частота, соответствующая выбранному типу колебаний, легко

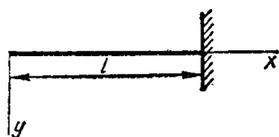


Рис. 79.

находится. Оказывается, что даже грубые предположения относительно формы искривления колеблющегося стержня дают вполне удовлетворительные результаты при определении частоты колебаний. Возьмем, например, призматический брусок с одним заделанным и другим свободным концом (рис. 79). Для этого случая имеется точное решение (см. § 39). Найдем теперь частоту основного типа колебаний приближенным методом Рэля. В качестве формы искривления, соответствующей этому типу колебаний, возьмем кривую изгиба стержня под действием собственного веса.

Тогда  $y = f \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{x}{l} + \frac{1}{3} \frac{x^4}{l^4} \right)$ , где  $f$  — прогиб стержня на свободном конце

Для  $V$  и  $T$  получаем выражения

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{8}{5} \frac{EJf^2}{l^3};$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\gamma F}{g} y'^2 dx = \frac{52}{405} \frac{\gamma Fl}{g} f'^2. \quad (b)$$

Уравнение движения (146') напишется так:

$$\frac{104}{405} \frac{\gamma Fl}{g} f'' + \frac{16}{5} \frac{EJf}{l^3} = 0, \quad (c)$$

откуда для частоты основного типа колебаний получаем

$$p = \sqrt{\frac{162}{13}} \sqrt{\frac{EJg}{\gamma Fl^4}} = 3,530 \sqrt{\frac{EJg}{\gamma Fl^4}} = 3,530 \frac{a}{l^2},$$

где  $a$  имеет прежнее значение (169).

Точное решение для этого случая дает нам

$$p' = (1,875)^2 \sqrt{\frac{EJg}{\gamma Fl^4}} = 3,515 \sqrt{\frac{EJg}{\gamma Fl^4}} = 3,515 \frac{a}{l^2},$$

погрешность приближенного решения около 0,5%.

Если взять форму искривления, соответствующую изгибу стержня силой, приложенной на конце, то, поступая, как и в предыдущем случае, мы получим частоту с погрешностью 1,5%.

Увеличение погрешности объясняется тем, что эта кривая изгиба не удовлетворяет условию  $\left( \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right)_{x=0} = 0$  на свободном конце колеблющегося стержня.

Пользуясь тем же приемом, легко оценить влияние добавочного груза, прикрепленного в каком-либо сечении стержня, на частоту колебаний.

Предположим, что к свободному концу стержня прикреплен груз  $q$ . Сохраняя прежний тип колебаний, мы должны оставить без изменений выражение для потенциальной энергии. Значение живой силы изменится и придется к прежнему выражению (b) присоединить живую силу добавленного груза  $\frac{1}{2} \frac{q}{g} f'^2$ .

Соответственно этому уравнение (c) заменится таким:

$$\left( \frac{104}{405} \frac{\gamma Fl}{g} + \frac{q}{g} \right) f'' + \frac{16}{5} \frac{EJf}{l^3} = 0 \quad (d)$$

и для частоты основного типа получим выражение

$$p = 3,530 \sqrt{\frac{EJg}{\left( \gamma Fl + \frac{405}{104} q \right) l^3}} = 3,530 \frac{a}{l^2} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{405}{104} \frac{q}{Q}}},$$

где через  $Q$  обозначен вес стержня.

При весьма малом значении  $q$  полученная формула дает  $p$  с большой точностью, но и в другом крайнем случае, когда  $q$  весьма велико по сравнению с  $Q$ , точность нашей формулы оказывается вполне удовлетворительной. В самом деле, полагая в уравнении (d) величину  $\gamma Fl$  равной нулю, найдем для частоты такой результат:

$$p = \sqrt{\frac{16}{5} \frac{EJg}{ql^3}}$$

точное решение на основании известного правила для систем с одной степенью свободы (§ 33) напишется так:  $p = \sqrt{3 \frac{EJg}{ql^3}}$ .

Погрешность приближенной формулы в этом крайнем случае несколько больше 3%.

Совершенно таким же способом, как мы сейчас учли влияние добавочного груза, может быть оценено влияние на частоту местного ослабления сечения стержня. Легко показать, что ослабление сечения у свободного конца стержня, уменьшая главным образом кинетическую энергию системы, повлечет за собой увеличение частоты колебаний. Противоположное влияние окажет ослабление у заделанного конца. Заметим здесь, что, применяя приближенный метод, мы всегда будем допускать погрешность в сторону преувеличения частоты колебаний. Навязывая стержню определенную форму искривления, мы тем самым как бы идем в направлении увеличения жесткости системы<sup>1</sup>.

В тех случаях, когда форма стержня значительно отличается от призматической, точность приближенного метода Рэлея может оказаться недостаточной, в особенности при исследовании высших типов колебаний. Здесь уместно воспользоваться методом Ритца<sup>2</sup>, который мы уже применяли при исследовании изгиба стержней переменного сечения, лежащих на упругом основании (см. § 7).

Применяя метод Ритца, мы интегрирование дифференциального уравнения заменим разысканием условий для максимума или минимума некоторого интеграла. Для составления этого интеграла воспользуемся началом возможных

<sup>1</sup> Строгое доказательство этого положения принадлежит Рэлею (См. стр. 113 первого тома его сочинений, указанного в ссылке на стр. 317). Им показано также, как может быть вычислено второе приближение для частоты, в котором учитывается изменение типов колебаний, обусловленное малыми изменениями в системе.

<sup>2</sup> В. Ритц применял свой метод к исследованию колебаний прямоугольной пластинки со свободными краями. См. Ritz W. Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern. Annalen der Physik, 1909, Bd 28, H. 4, SS. 737—786. [Перепечатка: Ritz W. Gesammelte Werke. Paris, Gauthier — Villars, 1911, pp. 265—314].

перемещений. Применяя его к силам инерции колеблющегося стержня и приравнявая работу сил инерции на всяком возможном перемещении соответствующему приращению потенциальной энергии, получаем

$$\delta V + \int_0^l \delta y \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx = 0.$$

Подставляя вместо  $V$  его выражение через  $y$  и считая, что при колебаниях  $y$  изменяется пропорционально  $\cos pt$ , приходим к такому результату:

$$\delta \int_0^l \left| \frac{EJ}{2} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - \frac{\gamma F p^2}{2g} y^2 \right| dx = 0. \quad (e)$$

Следовательно, искомая частота колебаний и соответствующая форма искривления найдутся из условия максимума или минимума интеграла

$$\int_0^l \left| \frac{EJ}{2} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - \frac{\gamma F p^2}{2g} y^2 \right| dx = S \quad (f)$$

при заданных условиях на концах.

Разыскание максимума или минимума интеграла (f) по правилам вариационного исчисления привело бы нас к уравнению (187). Мы поступим иначе и задачу вариационного исчисления заменим разысканием простого максимума или минимума. Для этого мы возьмем приближенное выражение для  $y$  в виде ряда

$$y_n = a_1 \psi_1(x) + a_2 \psi_2(x) + \dots + a_n \psi_n(x). \quad (g)$$

Функции  $\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$  подберем таким образом, чтобы они удовлетворяли условиям на концах стержня. Коэффициенты  $a_1, \dots, a_n$

играют при этом роль координат. Беря ряд (g) с  $n$  членами, мы обращаем наш стержень в систему с  $n$  степенями свободы. Для надлежащего выбора значений  $a_1, \dots, a_n$  используем условие (e). Вставляя в него вместо  $y$  его приближенное выражение  $y_n$ , подберем  $a_1 \dots a_n$  так, чтобы были соблюдены условия

$$\frac{\partial S_n}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial S_n}{\partial a_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial S_n}{\partial a_n} = 0. \quad (h)$$

Эта система уравнений даст нам возможность найти соотношение между коэффициентами  $a_1, \dots, a_n$  и частоту колебаний. Ограничиваясь первым членом ряда (g), мы получаем первое приближение для частоты колебаний; оно будет соответствовать приближенному решению Рэлея. Присоединяя последующие члены ряда (g), мы будем получать дальнейшие приближения. По разности между двумя последовательными приближениями можно составить себе некоторое представление о степени точности получаемых результатов.

Ход вычислений выясним на частном примере. Найдем частоту основного типа колебаний для клина, имеющего постоянную толщину в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка (рис. 80). Для этого случая имеется точное решение<sup>1</sup>. Оно дает для частоты основного тона значение

$$p = 5,315 \frac{b}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3\gamma}},$$

где  $2b$  — ширина клина в плоскости заделки.

<sup>1</sup> См. работу G. Kirchhoff, указанную в ссылке на стр. 349.

Применим теперь метод Ритца. Для упрощения выкладок преобразуем предварительно условие (е) введением новой переменной  $\xi$ , положив  $\xi = x/l$ . В таком случае

$$\delta \int_0^1 \left[ \frac{Eg}{\gamma} \frac{b^2}{3l^4} \xi^3 \left( \frac{d^2y}{d\xi^2} \right)^2 - p^2 \xi y^2 \right] d\xi = 0; \quad (e')$$

$$S_n = \int_0^1 \left[ \frac{Eg}{\gamma} \frac{b^2}{3l^4} \xi^3 \left( \frac{d^2y_n}{d\xi^2} \right)^2 - p^2 \xi y_n^2 \right] d\xi. \quad (f')$$

Установим теперь для  $y$  условия на концах стержня. На левом, свободном, конце момент и перерезывающая сила обратятся в нуль в силу равенства нулю площади поперечного сечения. Что касается правого, заделанного, конца, то для него имеем

$$(y)_{x=l} = 0, \quad \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{1}{l} \left( \frac{dy}{d\xi} \right)_{\xi=1} = 0.$$

Ряд (g) может быть в данном случае взят в таком виде:

$$y = (\xi - 1)^2 (a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + \dots). \quad (k)$$

Легко проверить, что при  $\xi = 1$  выражения для  $y$  и его производной обращаются в нуль.

Чтобы получить первое приближение, ограничимся первым членом ряда (k), тогда

$$y_1 = a_1 (\xi - 1)^2, \quad \frac{d^2 y_1}{d\xi^2} = 2a_1.$$

Подставляя  $y_1$  и  $d^2 y_1/d\xi^2$  в выражение (f') и выполняя указанное интегрирование, получаем

$$S_1 = \frac{Eg}{\gamma} \frac{b^2}{3l^4} a_1^2 - \frac{p^2}{30} a_1^2.$$

Из уравнения  $\partial S_1 / \partial a_1 = 0$  находим

$$p_1 = \frac{b}{l^2} \sqrt{\frac{10Eg}{\gamma}} = 5,48 \frac{b}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3\gamma}}.$$

Из сравнения с точным решением заключаем, что погрешность первого приближения составляет около 3%. Для получения второго приближения положим

$$y_2 = (\xi - 1)^2 (a_1 + a_2 \xi),$$

тогда

$$\frac{d^2 y_2}{d\xi^2} = 2(a_1 - 2a_2 + 3a_2 \xi).$$

Подставляя это выражение в (f') и выполняя интегрирование, находим

$$S_2 = \frac{Eg}{\gamma} \frac{b^2}{3l^4} \left[ (a_1 - 2a_2)^2 + \frac{24}{5} a_2 (a_1 - 2a_2) + 6a_2^2 \right] - p^2 \left( \frac{a_1^2}{30} + \frac{2a_1 a_2}{105} + \frac{a_2^2}{280} \right).$$

Условия минимума для  $S_2$  приводят нас к уравнениям

$$\frac{\partial S_2}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial S_2}{\partial a_2} = 0,$$

откуда получаем

$$\left(\frac{Eg}{\gamma} \frac{b^2}{3l^4} - \frac{p^2}{30}\right) a_1 + \left(\frac{2}{5} \frac{Eg}{\gamma} \frac{b^2}{3l^4} - \frac{p^2}{105}\right) a_2 = 0;$$

$$\left(\frac{2}{5} \frac{Eg}{\gamma} \frac{b^2}{3l^4} - \frac{p^2}{105}\right) a_1 + \left(\frac{2}{5} \frac{Eg}{\gamma} \frac{b^2}{3l^4} - \frac{p^2}{280}\right) a_2 = 0.$$

Эта система уравнений может дать для  $a_1$  и  $a_2$  решения, отличные от нуля, лишь в том случае, если ее определитель обращается в нуль, т. е. при условии

$$\left(\frac{Eg}{\gamma} \frac{b^2}{3l^4} - \frac{p^2}{30}\right) \left(\frac{2}{5} \frac{Eg}{\gamma} \frac{b^2}{3l^4} - \frac{p^2}{280}\right) - \left(\frac{2}{5} \frac{Eg}{\gamma} \frac{b^2}{3l^4} - \frac{p^2}{105}\right)^2 = 0. \quad (1)$$

Отсюда получаем для  $p^2$  два значения. Меньший корень, соответствующий основному типу колебаний, даст нам

$$p = 5,319 \frac{b}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3\gamma}}.$$

Следовательно, второе приближение уже обеспечивает весьма большую точность для частоты основного типа колебаний. Частота второго типа колебаний, соответствующего большему корню уравнения (1), будет определена с меньшей точностью. Для повышения точности и для исследования высших типов колебаний приходится увеличивать число членов ряда ( $k$ ). Соответственно этому возрастает число уравнений в системе ( $h$ ) и повышается степень соответствующего определителя.

Таким образом, исследование собственных колебаний и вычисление соответствующих периодов не встречают принципиальных затруднений. Задача сводится к вычислению ряда интегралов <sup>1</sup> и к определению корней того уравнения, которое получается путем приравнивания нулю определителя системы уравнений ( $h$ ).

Большое удобство способа Ритца заключается в том, что применение его не требует, чтобы изменение сечения стержня и его нагрузки по всей длине задавалось одной какой-либо функцией. На отдельных участках закон изменения поперечных сечений и нагрузок может быть различен, и функции, представляющие эти изменения, в некоторых сечениях стержня могут претерпевать разрывы. Это обстоятельство позволяет применять способ Ритца <sup>2</sup> к исследованию колебаний таких сложных систем, как, например, корпуса судов.

При вычислении частоты основного типа колебаний будем рассматривать корпус судна как стержень со свободными концами. Предположим, что изменения интенсивности нагрузки и моментов инерции поперечных сечений могут быть представлены с достаточной точностью плавными кривыми. Приведем вычисления для того случая, когда эти кривые — параболы, симметрично расположенные относительно середины стержня. Располагая начало координат по середине и обозначая длину стержня через  $2l$ , будем иметь

$$J = J_0(1 - bx^2); \quad F = F_0(1 - cx^2).$$

<sup>1</sup> Вычисления эти можно значительно облегчить, если пользоваться готовыми таблицами неопределенных интегралов, например книгой Petit Bois G. Tafeln unbestimmter Integrale. Leipzig, V. G. Teubner, 1906, 154 SS.

<sup>2</sup> Иной способ вычисления последовательных приближений для частоты основных колебаний дал Морроу. См. Morrow J. On the lateral vibration of bars of uniform and varying sectional area. Philosophical Magazine and Journal of Science, series 6, 1905, vol. 10, N 55, pp. 113—125.

Для функций  $\psi_i(x)$ , входящих в выражение (g), возьмем значения <sup>1</sup>

$$\psi_i(x) = \frac{\operatorname{ch} k_i \cos \frac{k_i x}{l} + \cos k_i \operatorname{ch} \frac{k_i x}{l}}{\sqrt{\cos^2 k_i + \operatorname{ch}^2 k_i}}, \quad (\text{m})$$

где  $k_i$  определяется из условия <sup>2</sup>

$$\operatorname{tg} k_i + \operatorname{th} k_i = 0. \quad (\text{n})$$

Легко проверить, что выбранные таким образом функции  $\psi_i(x)$  удовлетворяют условиям

$$[\psi_i(x)]_{x=0}^l = [\psi_i(x)]_{x=l}^0 = 0$$

на свободных концах стержня.

Введя для краткости обозначения

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{F_0}{J_0} \frac{\gamma}{g} \frac{1}{E} p^2; \\ \int_{-l}^{+l} (1 - bx^2) \psi_i \dot{\psi}_j dx &= \alpha_{ij}; \\ \int_{-l}^{+l} (1 - cx^2) \psi_i \psi_j dx &= \beta_{ij}, \end{aligned} \quad (\text{p})$$

найдем, что уравнения (h) получают такой вид:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i (\alpha_{ij} - \lambda \beta_{ij}) = 0. \quad (\text{q})$$

Ограничимся при вычислениях первыми двумя членами ряда (g). Первые два корня уравнения (n) имеют значения  $k_1 = 0$ ;  $k_2 = 2,3650$ . Соответственно этому будем иметь

$$\psi_1(x) = \operatorname{const}; \quad \psi_2(x) = \frac{k_2^2}{l^2} \frac{\cos k_2 \operatorname{ch} \frac{k_2 x}{l} - \operatorname{ch} k_2 \cos \frac{k_2 x}{l}}{\sqrt{\cos^2 k_2 + \operatorname{ch}^2 k_2}}.$$

Первому члену ряда будет соответствовать перемещение стержня, не сопровождающееся изгибом. Второму члену соответствует изгиб по кривой, получающейся при основном типе колебаний призматического стержня со свободными концами.

Полагая

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

на основании (p) найдем <sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= 0; \quad \alpha_{12} = 0; \\ \alpha_{22} &= \int_{-l}^{+l} (1 - bx^2) (\psi_2)^2 dx = \frac{31,28}{l^3} (1 - 0,087bl^2); \end{aligned}$$

$$\beta_{11} = l(1 - 0,333cl^2); \quad \beta_{12} = 0,297cl^2; \quad \beta_{22} = l(1 - 0,481cl^2).$$

Уравнения (q) напишутся в данном случае так:

$$\begin{aligned} a_1 (\alpha_{11} - \lambda \beta_{11}) + a_2 (\alpha_{21} - \lambda \beta_{21}) &= 0; \\ a_1 (\alpha_{12} - \lambda \beta_{12}) + a_2 (\alpha_{22} - \lambda \beta_{22}) &= 0. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Это выражение представляет собой нормальную функцию четного порядка в случае колебаний призматического стержня со свободными концами.

<sup>2</sup> Уравнение (n) легко привести к уравнению (180), если принять во внимание, что  $l \sqrt{\frac{p}{a}} = 2k$ .

<sup>3</sup> Приводимые ниже результаты заимствуем из дипломной работы студента Е. В. Красноперова. См. Красноперов Е. В. Применение метода Рунца к исследованиям свободных колебаний балок. Изв. Петроградского политехнического института, 1916, том 25, стр. 377—400. Отд. оттиск: Петроград, тиз. Р. Г. Шредера, 1916, 24 стр.

Приравнивая нулю определитель этих уравнений и принимая во внимание, что  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$ , получаем для определения  $\lambda$  такое уравнение:

$$\lambda^2 \left( 1 - \frac{\beta_{12}^2}{\beta_{11}\beta_{22}} \right) - \lambda \frac{\alpha_{22}}{\beta_{22}} = 0.$$

Первому корню этого уравнения ( $\lambda = 0$ ) соответствует перемещение стержня без изгиба. Второй корень

$$\lambda = \frac{\alpha_{22}}{\beta_{22}} \frac{1}{1 - \frac{\beta_{12}^2}{\beta_{11}\beta_{22}}}$$

определяет частоту основного типа колебаний нашего стержня.

На основании принятых обозначений получаем

$$p = \sqrt{\lambda} \sqrt{\frac{J_0 g E}{F_0 \gamma}}.$$

Применим эту формулу к такому численному примеру:

$$2l = 100 \text{ м}; \quad J_0 = 20 \text{ м}^4; \quad F_0 \gamma = 7g \text{ м/м};$$

$$b = c = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-2}.$$

Соответствующее водоизмещение судна будет

$$D = 2 \cdot 7g \int_0^l (1 - 0,0003x^2) dx \approx 5150 \text{ м}.$$

По этим данным находим нужные нам коэффициенты:  $\alpha_{22} = 23,40 \cdot 10^{-5}$ ;  $\beta_{22} = 31,95$ ;  $\beta_{11} = 37,50$ ;  $\beta_{12} = 11,14$ .

В таком случае  $\lambda = 0,817 \cdot 10^{-5}$ . Полагая  $E = 2 \cdot 10^7 \text{ м/м}^2$ , находим  $p = \sqrt{\frac{20}{7}} 2 \cdot 10^7 \cdot 0,817 \cdot 10^{-5} \approx 21,6$ .

Число собственных колебаний судна в минуту будет <sup>1</sup>

$$N = \frac{60p}{2\pi} \approx 206.$$

Тот вид функций  $\psi_i(x)$ , которым мы здесь воспользовались, может быть применен и при других видах кривой нагрузки и кривой изменения моментов инерции, а также в тех случаях, когда эти кривые заданы не уравнениями, а значениями ряда ординат.

Задача сводится в каждом частном случае к вычислению коэффициентов  $\alpha_{ij}$  и  $\beta_{ij}$ , что всегда может быть выполнено с достаточной для практики точностью.

### § 43. Колебания балки под действием подвижного груза

Вопрос о колебаниях балки под действием движущегося по ней груза, несмотря на всю его практическую важность, до сих пор не имеет полного решения, и мы в настоящее время умеем вычислять динамические напряжения, вызываемые подвижным грузом, лишь в двух крайних случаях, когда вес движущегося груза можно считать или очень малым, или очень большим по сравнению с весом балки.

В первом случае для определения колебаний балки можно воспользоваться решением (185), полученным для случая движения по балке постоянной силы.

<sup>1</sup> Этот пример заимствован из упомянутой на стр. 349 статьи Б. К. Сушенкова. Полученный здесь численный результат совпадает с тем, что было найдено Б. К. Сушенковым при помощи рядов. Этим подтверждается достаточная точность вычисленного по методу Рунге первого приближения.

Когда мы от движущейся силы переходим к движущемуся грузу, задача сразу усложняется. Движущийся груз совершает вследствие изгиба балки некоторые перемещения в направлении, перпендикулярном к оси балки, поэтому давление груза на балку не будет равно весу груза. К этому весу необходимо присоединить еще силы инерции груза, зависящие от вертикальных его перемещений. Для приближенного решения задачи поступим так. Сначала примем давление на балку постоянным, равным весу движущегося груза и при помощи решения (185) найдем выражение для вертикальных перемещений груза. По этим перемещениям составим выражение для сил инерции груза и присоединим эти силы к силе веса.

Таким образом получаем некоторую переменную силу, движущуюся по балке. Вызываемые этой силой колебания могут быть исследованы общим приемом (§ 40), и мы получим, таким образом, поправку к решению (185) на силы инерции движущегося груза. Если вес груза мал по сравнению с весом балки, найденная поправка будет малой величиной и полученное нами приближенное решение будет обладать достаточной точностью.

В другом крайнем случае, когда вес груза велик по сравнению с весом балки, мы для получения приближенного решения можем пренебречь весом балки. В таком случае прогиб балки под грузом будет пропорционален давлению  $P$  груза на балку и представится известной формулой

$$y = \frac{Px^2(l-x)^2}{3lEJ}. \quad (a)$$

Здесь  $x$  и  $l-x$  — расстояние груза от опор балки.

Для получения давления  $P$  нужно к весу груза  $Q$  присоединить силы инерции

$$- \frac{Q}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Обозначая скорость движения груза по балке через  $v$  и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial y}{\partial t} = v \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

получаем для давления груза на балку выражение

$$P = Q \left( 1 - \frac{v^2}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right).$$

Подставив это выражение в (a), приходим к такому дифференциальному уравнению для определения траектории точки касания движущегося груза с балкой<sup>1</sup>:

$$y = Q \left( 1 - \frac{v^2}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \frac{x^2(l-x)^2}{3lEJ}. \quad (b)$$

<sup>1</sup> Уравнение (b) получено проф. Р. Виллисом (см. Willis Robert. Report of the commissioners appointed to inquire into the application of iron to railway structures. Ld., 1849, 435 pp. The Commissioners were Lord Wrottesley, Robert Willis, Henry James, George Rennie, W. Cubitt and Eaton Hodgkinson, with Douglas Galton as secretary. Appendix B. Experiments for determining the effects produced by causing weights to travel over bars with different velocities, made in Portsmouth, Dockyard and at Cambridge, pp. 181—250, by the Rev. Robert Willis, F. R. S., Jacksonian, Professor, etc., Captain Henry James, R. E., F. R. S., and Lieutenant Douglas Galton, R. E.), который первый занялся вопросом о действии подвижной нагрузки на балку. История вопроса и много данных по разысканию приближенных решений имеются в известной книге А. Clebsch, указанной в сноске на стр. 10.

Для получения приближенного решения этого уравнения подставим в правую часть его вместо  $y$  выражение

$$\frac{Qx^2(l-x)^2}{3lEJ},$$

которое представляет собой траекторию точки касания груза при бесконечно малой скорости движения. Наибольшее значение для  $y$  получится в таком случае при прохождении груза через середину пролета балки. В этот момент

$$P = Q \left( 1 + \frac{v^2}{g} \frac{Ql}{3EJ} \right) = Q \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right),$$

где

$$\frac{1}{\beta} = \frac{v^2}{3g} \frac{Ql}{EJ} = \frac{16v^2}{g l^2} f_{ст}.$$

Для наибольшего динамического прогиба получаем, таким образом, выражение

$$f_d = f_{ст} \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right). \quad (c)$$

Такое же соотношение получится между наибольшими динамическим и статическим изгибающими моментами.

На практике дробь  $\frac{1}{\beta}$  представляет собой обыкновенно малую величину и полученное приближенное решение (c) близко к результату, получаемому из точного решения уравнения (b).

Полное решение уравнения (b) сначала в виде рядов и потом в замкнутой форме получено Стоксом, который затратил много труда на разработку вопроса о действии подвижной нагрузки на мосты<sup>1</sup>.

Заметим, что для построения траектории точки касания груза с балкой выгодно применить вычислительный способ интегрирования уравнения<sup>2</sup> (b). Для этого мы разбиваем балку на большое число равных промежутков и последовательно для каждого деления вычисляем  $y$ ,  $y'$  и  $y''$ . Для начального деления  $y_0$  и  $y'_0$  предполагаются известными. Подставляя  $y_0$  в (b), находим начальное значение  $y''_0$ . По начальным значениям  $y_0$ ,  $y'_0$  и  $y''_0$  мы можем, например, способом К. Рунге вычислить  $y_1$  и  $y'_1$  для следующего деления и получить при помощи (b)  $y''_1$  для того же деления. Имея величины  $y_1$ ,  $y'_1$  и  $y''_1$ , возможно тем же путем перейти к  $y_2$  и  $y'_2$  и т. д.

Таким способом может быть решена задача о динамическом действии подвижного груза на балку при любом способе закрепления концов балки, а также в случае многопролетных балок и балок, лежащих на упругих опорах. Предварительно из статического расчета устанавливаем связь между давлением  $P$  и прогибом в точке приложения давления. Пусть эта зависимость представится так:  $y = Pf(x)$ , тогда уравнение, соответствующее уравнению (b), напишется таким образом:

$$y = Q \left( 1 - \frac{v^2}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) f(x).$$

Это уравнение в каждом частном случае может быть проинтегрировано указанным выше вычислительным способом.

<sup>1</sup> Stokes G. G. Discussion of a differential equation relating to the breaking of railway bridges. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Pt 5, 1849, vol. 8, pp. 707—735. [Перепечатка: Stokes G. G. Mathematical and physical papers. Reprinted from the original journals and transactions, with additional notes by the author, vol 2. Cambridge, University Press, 1883, pp. 178—220].

<sup>2</sup> Прием этот к настоящей задаче впервые был применен Н. П. Петровым. См. Петров Н. П. Влияние постоянной скорости колеса на напряжения в рельсе. Записки императорского русского технологического общества, С.-Петербург, 1903, год 37, № 2, февраль, стр. 27—115. Впоследствии Н. П. Петров применил этот способ к исследованию изгиба многопролетных балок на упругих опорах и к расчету рельсов.

## § 44. О действии удара на балку

При технических расчетах задача о действии удара на балку решается обычно приближенно. Предполагают, что под действием удара балка изгибается по такой же кривой, как и при статическом действии силы в месте удара. Задавшись видом кривой, мы легко вычислим количество потенциальной энергии в балке при различных значениях прогиба в месте удара. В качестве *первого* приближения берут для динамического прогиба  $f_d$  то значение, при котором потенциальная энергия изогнутой балки равна работе падающего груза. Таким путем получается известная формула

$$f_d = f_{ст} + \sqrt{f_{ст}^2 + f_{ст} \frac{v^2}{g}}, \quad (a)$$

где через  $v$  обозначена скорость ударяющего груза в момент его соприкосновения с балкой.

Таким способом мы совершенно не учитываем потери живой силы груза, которая происходит в момент удара и потому, надо думать, получаем для  $f_d$  преувеличенные значения. Потери живой силы будут, очевидно, тем больше, чем больше вес балки по сравнению с весом ударяющего груза. Чтобы учесть влияние массы балки на  $f_d$ , принимают во внимание потерю живой силы в момент удара, причем удар считают совершенно неупругим и массу балки заменяют некоторой *приведенной* массой, зависящей от способа закрепления концов балки и от места удара<sup>1</sup>. Если через  $m$  обозначим отношение веса груза к весу балки и через  $n$  обозначим коэффициент, на который множится масса балки для получения приведенной массы, то в качестве *второго* приближения для динамического прогиба получаем формулу

$$f_d = f_{ст} + \sqrt{f_{ст}^2 + f_{ст} \frac{v^2}{g} \frac{m}{m+n}}. \quad (b)$$

При составлении формул (a) и (b) исходят из предположения, что форма кривой изгиба балки такая же, как и в случае статического действия силы. В действительности явление значительно сложнее; в момент удара возникают поперечные колебания балки, которые приближенными формулами (a) и (b) не учитываются вовсе.

Изучению этих колебаний посвящен ряд работ Сен-Венана<sup>2</sup>. Сен-Венан исходил из предположения, что удар совершенно не упругий, ударяющий груз в момент удара сообщает свою скорость соответствующему поперечному сечению стержня и в дальнейшем, по крайней мере в течение полупериода основных колебаний стержня, остается со стержнем в соприкосновении. Таким образом, вопрос об ударе сводится к задаче о колебаниях стержня с прикрепленным к нему в месте удара грузом. Причем предполагается, что в начальный момент весь стержень находится в покое и лишь сечение, скрепленное с ударяющим грузом, обладает скоростью, равной скорости ударяющего груза. Колебания эти могут быть найдены таким же способом, как при продольных колебаниях стержня с подвешенным к нему грузом. В результате своих исследований Сен-Венан пришел к заключению, что второе приближение (b) с большой точностью дает величину наибольшего динамического прогиба.

Во всех этих исследованиях остается совершенно не выясненным вопрос о нарастании давлений, оказываемых грузом на балку в месте удара, и потому не доказано, будет ли

<sup>1</sup> См. стр. 432 нашего курса, указанного на стр. 193.

<sup>2</sup> См. стр. 490 книги А. Clebsch, упомянутой в сноске на стр. 10.

действительно ударяющий груз оставаться в соприкосании с балкой в продолжение одного полупериода основных колебаний. Для решения этих вопросов необходимо изучить местные деформации у поверхности соприкосания груза с балкой, что возможно лишь при определенных данных относительно вида поверхностей ударяющихся тел.

Предположим, что стержень прямоугольного поперечного сечения с опертными концами подвергается действию удара шаром по середине пролета<sup>1</sup>. Для исследования местных деформаций можно в этом случае воспользоваться решением Герца (см. стр. 169). Если через  $P$  обозначим давление в месте удара, то сближение ударяющихся тел в месте удара вследствие местных деформаций равно  $\alpha = kP^{2/3}$ , где коэффициент  $k$  зависит от упругих свойств ударяющихся тел и от радиуса шара. Сила  $P$  возрастает вместе с вдавливанием шарика в поверхность балки и вызывает прогиб балки, который мы легко найдем, если воспользуемся общим приемом для исследования вынужденных колебаний (§ 40). Обобщенная сила в этом случае представится так:

$$\Phi_i = P \sin \frac{i\pi}{2},$$

и мы на основании формул (а) и (d) § 40 получим для прогиба по середине в момент  $t$  также выражение

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{l}{2} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^2} \frac{l^2}{a\pi^2} \frac{2g}{\gamma Fl} \int_0^t P \sin \frac{i^2\pi^2 a(t-t_1)}{l^2} dt_1.$$

Если мы вдавливание  $\alpha$  сложим с полученным прогибом балки, то должны получить перемещение центра тяжести шарика за промежуток времени от 0 до  $t$ . То же самое перемещение возможно представить в ином виде на основании рассмотрения движения шарика, имеющего начальную скорость  $v$  и находящегося под действием переменной силы  $P$ . В какой-либо момент  $t_1$  скорость шарика будет равна

$$v - \frac{1}{m} \int_0^{t_1} P dt_1,$$

где  $m$  — масса шарика.

На основании этого перемещение шарика к моменту  $t$  представится таким образом:

$$vt - \frac{1}{m} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} P dt_1.$$

Сравнивая два различных выражения для одного и того же перемещения шарика, приходим к такому уравнению:

$$vt - \frac{1}{m} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} P dt_1 = k(P^{2/3})_t + \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^2} \frac{l^2}{a\pi^2} \frac{2g}{\gamma Fl} \int_0^t P \sin \frac{i^2\pi^2 a(t-t_1)}{l^2} dt_1. \quad (c)$$

Полученное уравнение возможно решить вычислительным путем и получить, таким образом, изменение  $P$  и  $(y)_{x=l/2}$  в зависимости от  $t$ . Мы ограничимся здесь приведением окончательных результатов, полученных нами для двух численных примеров.

В первом примере взята стальная балочка квадратного поперечного сечения  $1 \times 1$  см, для которой  $l = 15,35$  см,  $E = 2,2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $\gamma = 7,96$  г/см<sup>3</sup>,  $G = 9 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>. На середину пролета балочки падает стальной шарик радиуса 1 см со скоростью  $v = 1$  см/сек. Период основных колебаний для такой балочки  $\tau = 0,001$  сек. При решении уравнения (с) вычислительным путем время было разделено на интервалы  $\delta t$ , причем  $\delta t = \tau/180$ . На рис. 81<sup>2</sup> кривая I представляет закон нарастания давлений  $P$ . Для сравнения пунктиром показана соответствующая кривая для случая удара шарика о неподвижную плоскость.

Мы видим, что в соприкосании с балочкой шарик остается в течение времени  $28\delta t \approx \frac{1}{6}\tau$ , после этого шарик отделяется от балки. Перемещения шарика представлены кривой II и нарастание прогибов — кривой III.

<sup>1</sup> Этот случай рассмотрен нами в статье. T i m o s c h e n k o S. P. Zur Frage nach der Wirkung eines Stosses auf einem Balken. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1913, Bd 62, H. 2, SS. 198—209. [Перепечатка: T i m o s c h e n k o S. P. The collected papers. N. Y.—Ld.—Toronto, McGraw-Hill Publishing Company Ltd., 1953, pp. 225—236.]

<sup>2</sup> Каждое деление рисунка соответствует 1 см.

Во втором примере взята балочка прежних поперечных размеров, но вдвое большей длины. В таком случае период собственных колебаний будет в четыре раза больше, чем в предыдущем примере. При ударе по этой балке шарика с радиусом 1 см явление удара протекает примерно так же, как и в предыдущем случае (см. рис. 82), но при радиусе шарика

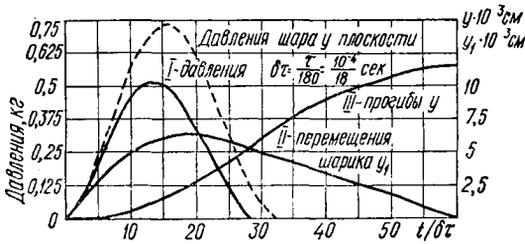


Рис. 81.

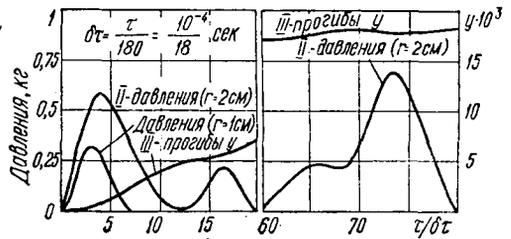


Рис. 82.

в 2 см картина становится более сложной. Нарастание давлений для этого случая представлено на рис. 82 кривой II. Мы видим, что с момента удара шарик находится в соприкосновении с балкой в течение примерно 19,5 дт. После этого шарик от балки отделяется, прогиб балки начинает расти быстрее перемещений шарика. При  $t \approx 60\text{дт}$  опять происходит соприкосновение шарика с балкой, получается как бы повторный удар. Нарастание прогибов для этого случая представлено на рис. 82 кривой III.

Таким образом, явление удара в пределах упругости для рассмотренных простейших примеров оказывается гораздо более сложным, чем то представление об этом явлении, которое положено в основу приближенных формул (а) и (б) и исследований Сен-Венана.

### § 45. Продольный удар стержней

При решении вопроса о напряжениях, возникающих в случае продольного удара призматических стержней, обыкновенно пользуются приближенными формулами такого же вида, как мы получили для поперечного удара [(а) и (б) § 44], но уже Томас Юнг<sup>1</sup> заметил, что влияние массы стержня должно быть учитываемо более рациональным способом, чем это делается при выводе приближенной формулы. Он, между прочим, показал, что, как бы ни был мал ударяющий груз, при ударе возникнут остаточные деформации, если только отношение скорости ударяющего груза  $v$  к скорости распространения колебаний в стержне (скорости распространения звука)  $v_1$  превосходит относительное удлинение, соответствующее пределу упругости материала. В самом деле, в момент удара по плоскости соприкосновения<sup>2</sup> в стержне возникнут сжимающие напряжения и соответствующее им сжатие будет распространяться со скоростью звука  $v_1$  вдоль стержня. Возьмем весьма малый промежуток времени  $t$ , за который можно считать скорость  $v$  падающего груза не изменившейся. За этот промежуток сжатие в стержне распространится на протяжении участка  $v_1 t$  (рис. 83). Укорочение этого участка будет равно перемещению падающего груза  $vt$ . Следовательно, относительное сжатие в момент удара равно  $v/v_1$ , что соответствует высказанному выше положению Т. Юнга.

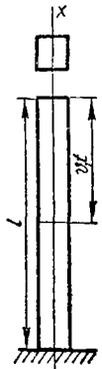


Рис. 83.

Вопрос о колебаниях, возникающих при продольном ударе стержня с одним заделанным и другим свободным концами (рис. 83), впервые был разрешен

<sup>1</sup> История вопроса о продольном ударе и полученные решения с большой полнотой изложены в примечаниях Сен-Венана к книге А. Clebsch, упомянутой в ссылке на стр. 10. Note finall du § 60, p. 480.

<sup>2</sup> Предполагается, что поверхности соприкосновения груза и стержня при ударе представляют собой идеально гладкие плоскости.

Навье<sup>1</sup> при помощи тригонометрического ряда. При решении этой задачи Навье исходил из предположения, что в момент удара ударяющий груз сообщает свою скорость  $v$  концевому поперечному сечению ударяемого стержня и потом остается в соприкосании со стержнем, по крайней мере, в продолжение полупериода основных колебаний стержня. Таким образом, вопрос об ударе сводится к исследованию продольных колебаний стержня с прикрепленным к нему на конце грузом, причем в начальный момент стержень находится в покое, а грузу сообщена скорость  $v$ .

Разыскание этих колебаний может быть выполнено без всяких затруднений, если воспользоваться общим решением [(d) § 36] для собственных колебаний стержня с подвешенным к нему грузом.

Получаемое таким путем решение оказывается неудобным для приложений, так как из него очень трудно найти выражение для наибольших напряжений. Поэтому Сен-Венан, много порабатывший над исследованием продольного удара стержней, обратился к решению соответствующих уравнений в замкнутой форме и получил сравнительно простые формулы для случая продольного удара двух стержней со свободными концами, а также для стержня с одним заделанным и другим свободным концами. В дальнейшем эти решения были упрощены благодаря трудам Буссинэ<sup>2</sup>, Гюгонно и Себерта<sup>3</sup>. Мы приводим здесь результаты, относящиеся к стержню с одним заделанным и другим свободным концом (рис. 83). Сохранив прежние обозначения (§ 36), будем иметь для продольных колебаний уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (a)$$

где

$$a^2 = \frac{Eg}{\gamma}.$$

Условия на концах напишутся таким образом:

$$(u)_{x=0} = 0, \quad E \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = - \frac{P}{g} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=l}.$$

Обозначив через  $m$  отношение веса ударяющего груза к весу стержня, перепишем условие на свободном конце стержня так:

$$ml \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=l} = - a^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l}. \quad (b)$$

В начальный момент для всех значений  $x$  между 0 и  $l$   $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ . Для концевого сечения  $x = l$  начальная скорость равна скорости  $v$  ударяющего груза.

Общее решение уравнения (a) можно представить так:

$$u = f(at - x) + f_1(at + x), \quad (c)$$

где  $f$  и  $f_1$  представляют собой произвольные функции.

Принимая во внимание условие у заделанного конца, заключаем, что  $f(at) + f_1(at) = 0$ . Следовательно,  $f_1 = -f$  и общее решение (c) может быть представлено так:

$$u = f(at - x) - f(at + x). \quad (d)$$

<sup>1</sup> Navier C. L. M. H. Rapport A Monsieur Becquey, conseiller d'état, directeur général des ponts et chaussées et des mines; et Mémoire sur les ponts suspendus. Paris, De l'Imprimerie Royale, 1823, 228 pp.

<sup>2</sup> Boussinesq J. См. стр. 508 его книги, указанной в сноске на стр. 167.

<sup>3</sup> Sebert M., Hugoniot P. H. Sur les vibrations longitudinales des barre élastiques dont les extrémités sont soumises a des efforts gueleongues. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 1882, t. 95, N 5, pp. 213—215; N 6, pp. 278—281; N 7, pp. 338—340; Sur le choc longitudinal d'une tige élastique fixée par l'une de ses extrémités. Там же, 1882, t. 95, N 8, pp. 381—383.

В дальнейшем будем рассматривать  $f$  как функцию аргумента  $z$  и будем полагать в случае надобности  $z$  равным  $at - x$  или равным  $at + x$ . Попробуем теперь на основании начальных условий составить функцию  $f$  для определенного интервала.

Так как в начальный момент  $\partial u / \partial x = 0$  и  $\partial u / \partial t = 0$  для всех значений  $x$  между 0 и  $l$ , то, следовательно,

$$f'(-z) - f'(z) = 0, \quad -f'(-z) - f'(z) = 0$$

для всех значений  $z$ , заключенных в пределах  $l > z > -l$ .

Отсюда следует, что  $f'(z) = 0$  при условии  $l > z > -l$ . В таком случае для этого промежутка  $f(z)$  представляет собой постоянную величину, которую можно положить равной нулю.

Чтобы найти выражение для  $f(z)$  вне указанных границ, обратимся к граничному условию (b). Подставляя вместо  $u$  его выражение (d), получаем для  $x = l$  уравнение

$$ml [f'(at - l) - f'(at + l)] = f'(at - l) + f'(at + l),$$

которое может быть переписано в таком виде:

$$f(z) + \frac{1}{ml} f'(z) = f'(z - 2l) - \frac{1}{ml} f'(z - 2l). \quad (e)$$

Этим уравнением мы воспользуемся для определения  $f(z)$  в пределах от  $z = l$  до  $z = -3l$ . Правая часть уравнения (e) в этих пределах будет оставаться равной нулю, так как величина  $z - 2l$  будет изменяться в пределах от  $-l$  до  $+l$ , где  $f'$  равно нулю.

Интегрируя уравнение (e), находим

$$f'(z) = C e^{-z/ml}$$

при

$$3l > z > l. \quad (f)$$

Для определения произвольной постоянной  $C$  используем начальные условия. Выражение для скорости движения отдельных поперечных сечений стержня напишется так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a [f'(at - x) - f'(at + x)]. \quad (g)$$

В момент удара скорости всех промежуточных сечений равны нулю. Скорость конечного сечения, подвергающегося действию удара, сразу становится равной  $-v$ . При помощи (g) мы запишем это так

$$f'(-l + 0) - f'(l + 0) = -\frac{v}{a}.$$

Первый член в левой части уравнения равен нулю на основании ранее доказанного, следовательно,

$$f'(l + 0) = \frac{v}{a}.$$

Вставляя вместо  $f'$  его значение (f), получаем

$$c e^{-\frac{l}{ml}} = c e^{-\frac{1}{m}} = \frac{v}{a},$$

откуда

$$c = e^{\frac{1}{m}} \frac{v}{a}.$$

Окончательно получаем

$$f'(z) = \frac{v}{a} e^{-(z-l)/ml} \quad (h)$$

при  $3l > z > l$ .

Имея это значение  $f'(z)$  и подставляя его в правую часть уравнения (e), мы можем найти путем интегрирования выражение

$$f(z) = \frac{v}{a} e^{-(z-l)/ml} + \frac{v}{a} \left[ 1 - \frac{2}{ml} (z - 3l) \right] e^{-(z-3l)/ml} \quad (k)$$

при  $5l > z > 3l$ .

Это дает нам возможность вычислить  $f'(z)$  для следующего интервала и т. д. Имея эти выражения, можно путем интегрирования определить  $f(z)$  и потом найти все элементы, характеризующие явление удара: величину наибольших напряжений, величину укорочения сжатого стержня (перемещение свободного конца) и, наконец, продолжительность удара.

Очевидно, что соприкосание груза со стержнем будет продолжаться до тех пор, пока величина

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} = -[f'(at-l) + f'(at+l)]$$

не станет положительной, и время  $t$ , соответствующее концу удара, не определится из условия  $f'(at-l) + f'(at+l) = 0$ . (1)

Пока  $2l > at > 0$ , левая часть уравнения (1) представляется при помощи формулы (h) и в нуль не обращается. В этих пределах не произойдет окончания удара.

При  $4l > at > 2l$  уравнение (1) при помощи (h) и (k) напишется так:

$$\frac{v}{a} e^{-\frac{at}{ml}} \left[ 1 + 2e^{\frac{2}{m}} \left( 1 - \frac{at-2l}{ml} \right) \right] = 0.$$

Это уравнение даст нужное нам решение при условии  $m < 1,73$ .

При больших значениях  $m$  удар не окончится в пределах  $4l > at > 2l$  и нужно перейти к составлению уравнения для следующего интервала <sup>1</sup>.

Что касается наибольших напряжений, то они получаются в закрепленном конце стержня. При большом  $m$ , например  $m > 24$ , эти напряжения можно вычислять по приближенной формуле <sup>2</sup>

$$p = E \frac{v}{a} (\sqrt{m} + 1).$$

При  $24 > m > 5$  следует пользоваться формулой

$$p = E \frac{v}{a} (\sqrt{m} + 1,1).$$

Наконец, для  $m < 5$  Сен-Венан дает формулу

$$p = 2E \frac{v}{a} (1 + e^{-2/m}).$$

Заметим здесь, что приведенное решение для продольного удара призматических стержней основано на предположении, что в начальный момент все точки концевого поперечного сечения стержня сразу получают скорость ударяющего груза. Это требует идеально гладких плоскостей соприкосания. Практически всегда приходится иметь дело с различными неровностями, благодаря которым соприкосание сначала получается лишь в нескольких точках сечения. Здесь начинаются местные деформации и лишь впоследствии может получиться более полное соприкосание. Вследствие этого обстоятельства опыты, которые ставились для проверки решения Сен-Венана, не подтвердили его результатов <sup>3</sup>. Чтобы достигнуть совпадения опытных данных с расчетными, приходится искусственным путем уменьшать влияние местных деформаций по плоскости удара. Для этого берут ударяемый стержень из податливого материала, например каучука, и снабжают ударяемый конец твердым наконечником или заменяют ударяемый стержень спиральной пружиной <sup>4</sup>. Другой прием, применяемый для приведения к совпадению теории продольного удара с данными опытов, заключается в том, что концам ударяющихся стержней придают закругленную форму. Этим путем достигается полная определенность в отношении местных деформаций, которые здесь могут быть найдены при помощи формулы Герца <sup>5</sup>.

<sup>1</sup> Подробные таблицы и диаграммы, иллюстрирующие явление продольного удара, имеются в приложении Сен-Венана к его переводу книги А. Клебша, упомянутой в сноске на стр. 10 (см. статью: *Saint-Venant, Flamant M. Détermination et représentation graphique des lois du choc longitudinal d'une tige ou barre elastique prismatique*, pp. 1—27).

<sup>2</sup> Приближенная формула, соответствующая формуле (a) предыдущего параграфа, напишется так:  $p = E \frac{v}{a} \sqrt{m}$ .

<sup>3</sup> Опыты проводились над ударом двух стержней со свободными концами. См. *Voigt W. Die Theorie des longitudinalen Stosses zylindrischer Stäbe. Annalen der Physik und Chemie*, 1883, Bd 19, H. 5, SS. 44—65.

<sup>4</sup> *Ramsauer C. Experimentelle und theoretische Grundlagen des elastischen und mechanischen Stosses. Annalen der Physik*, 1909, Bd 30, H. 2, SS. 417—494. Здесь приведена литература вопроса.

<sup>5</sup> Теория удара стержней с закругленными концами разработана Сирсом, который для решения задачи воспользовался весьма удобным вычислительным приемом интегрирования соответствующего дифференциального уравнения. См. *Sears J. E. On the longitudinal impact of metal rods with rounded ends. Proc. of the Cambridge Philosophical Society*, 1908, vol. 14, pt 3, pp. 257—286.

Тонкие пластинки представляют собой тела цилиндрической формы, у которых один из размеров, именно высота цилиндра (толщина пластинки), мал по сравнению с двумя другими. Плоскость, делящую пополам высоту цилиндра, называют *срединной плоскостью*.

В элементарной теории изгиба пластинок эта плоскость играет такую же роль, как *нейтральный слой* при изгибе балок. Линия пересечения срединной плоскости с ограничивающей цилиндрической поверхностью пластинки представляет собой *контур* пластинки. При исследовании изгиба пластинок условимся координатную плоскость  $xu$  располагать в срединной плоскости пластинки. Ось  $z$  будем направлять так, чтобы получалась правовинтовая координатная система  $(x, y, z)$ . Толщину пластинки обозначим через  $h$  и прогибы срединной поверхности пластинки в направлении оси  $z$  — через  $w$ . Исследование изгиба пластинок начнем с простейших задач: 1) с изгиба пластинки по цилиндрической поверхности и 2) чистого изгиба. Для решения задачи в этих двух частных случаях можно воспользоваться, как мы увидим ниже, результатами, полученными при исследовании изгиба стержней.

#### § 46. Изгиб пластинок по цилиндрической поверхности

В ряде технических задач приходится иметь дело с изгибом пластинок по цилиндрической поверхности. Если, например, пластинка оперта на прямоугольный контур, у которого одна сторона весьма велика по сравнению с другой и на пластинку действует нагрузка, распределение которой не изменяется в направлении длинной стороны контура, то в частях пластинки, удаленных от коротких сторон контура, искривленную поверхность мы можем без особых погрешностей принимать за поверхность цилиндра, образующие которого параллельны длинным сторонам контура. В таком случае мы можем при исследовании изгиба ограничиться рассмотрением одной элементарной полоски, выделяемой из пластинки двумя плоскостями, перпендикулярными к длинной стороне контура и удаленными на расстояние 1 см друг от друга (рис. 84), и привести задачу к исследованию изгиба *балки-полоски* прямоугольного поперечного сечения  $1 \times h$  см<sup>2</sup>. При этом исследовании мы можем воспользоваться уже известными результатами, полученными для балок (§ 11—13).

В отличие от балки поперечное сечение балки-полоски вследствие связи с соседними полосками не будет искажаться и удлинение  $e_{xx}$  не будет сопровождаться поперечным сжатием в направлении оси  $y$ .

Между удлинениями и напряжениями получится в таком случае зависимость

$$e_{xx} = \frac{X_x (1 - \sigma^2)}{E}.$$

Вместо величины  $E$ , которая входила в уравнение изогнутой оси балки, теперь придется подставить величину  $E/(1 - \sigma^2)$ . Уравнение изогнутой оси балки-полоски при выбранном направлении осей напишется так:

$$\frac{EJ}{1 - \sigma^2} \frac{d^2w}{dx^2} = -M. \quad (188)$$

Если края пластинки при изгибе могут свободно смещаться в плоскости контура, то выделенная полоска будет находиться в условиях балки, изгибаемой только поперечными нагрузками, и для определения прогибов придется в каждом частном случае выполнить интегрирование уравнения (188). В том случае, когда по продольным сторонам пластинки будут приложены равномерно распределенные растягивающие или сжимающие усилия, выделенная полоска окажется в условиях балки, испытывающей одновременное действие изгиба и сжатия или изгиба и растяжения. Обозначим через  $T$  величину растягивающего усилия для выделенной полоски и положим

$$\frac{Tl^2(1 - \sigma^2)}{Eh^3} = k^2; \quad \frac{kl}{2} = u; \quad \frac{Tl^2(1 - \sigma^2)}{Eh^3\pi^2} = \alpha^2.$$

Тогда к нашей балке-полоске будут применимы все формулы, полученные выше (§ 11) для балок, и потому вычисление прогибов и напряжений не представит никаких затруднений. Остановимся здесь подробнее на одном случае, с которым часто приходится

встречаться на практике, а именно рассмотрим цилиндрический изгиб прямоугольной пластинки под действием равномерной нагрузки. Продольные края пластинки предполагаем закрепленными по контуру так, что сближению их препятствуют некоторые упругие распоры. В таком случае при изгибе выделенной полоски в ней возникнут продольные растягивающие силы  $T$ , для определения которых можно будет составить уравнение, аналогичное уравнению (59) (§ 11). Если мы заменим распоры эквивалентной по площади пластинкой толщиной  $t$  и будем предполагать, что сжатие распор не сопровождается поперечным расширением, то нужное нам уравнение напишется так:

$$\frac{1}{2} \int_0^l w'^2 dx = \frac{(1 - \sigma^2) Tl}{Eh} + \frac{(1 - \sigma^2) Tl}{Et} = (1 - \sigma^2) \frac{Tl}{Eh} \frac{t+h}{t} = \frac{1}{K} \frac{Tl}{Eh} (1 - \sigma^2), \quad (189)$$

где для упрощения введено обозначение

$$\frac{l}{t+h} = K.$$

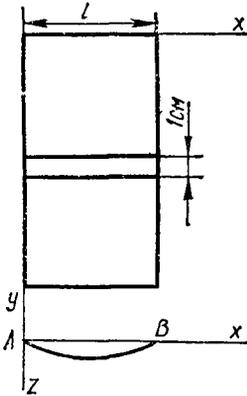


Рис. 84.

Подставляя вместо  $w$  соответствующее ему выражение, как это мы делали в случае балок (§ 11), или вводя вместо  $w$  приближенное выражение для прогиба (§ 13), получаем возможность определить продольные силы  $T$ . Дальнейший расчет легко выполняется при помощи табл. 2 части второй.

Рассмотрим в качестве первого примера пластинку со свободно поворачивающимися краями и возьмем приближенное выражение для прогиба:

$$w = \frac{f_0}{1 + \alpha^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Тогда уравнение (189) переписывается таким образом:

$$\alpha^2 (1 + \alpha^2)^2 = 3K \frac{f_0^2}{h^2}. \quad (190)$$

Для прогиба  $f_0$  от одной поперечной нагрузки мы должны будем в данном случае вставить выражение

$$f_0 = \frac{5}{32} \frac{ql^4 (1 - \sigma^2)}{Eh^3}.$$

Тогда получим

$$\alpha^2 (1 + \alpha^2)^2 = 3K \left( \frac{5}{32} \right)^2 (1 - \sigma^2)^2 \left( \frac{q}{E} \right)^2 \left( \frac{l}{h} \right)^8. \quad (190')$$

Корни этого уравнения очень просто находятся при помощи линейки.

Возьмем такой численный пример: весьма длинная прямоугольная стальная пластинка с опертими краями изгибается равномерной нагрузкой интенсивности  $q$ . Определить при помощи табл. 2 части второй величину наибольших прогибов и наибольших напряжений, если  $l = 120$  см,  $h = 0,8$  см;  $t = h$ ,  $E = 2,15 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $\sigma = 0,3$ . Величина нагрузки  $q$  изменяется от 0,1 до 1 кг/см<sup>2</sup>.

Положим, например,  $q = 0,5$  кг/см<sup>2</sup>, тогда уравнение (190') переписывается так:

$$\alpha^2 (1 + \alpha^2)^2 = 420.$$

Отсюда при помощи линейки находим

$$\alpha^2 = 6,85; \quad u = \frac{\alpha\pi}{2} = 4,41;$$

$$\frac{T}{h} = \frac{\alpha^2 \pi^2}{12 (1 - \sigma^2)} \frac{Eh^2}{l^2} = 592 \text{ кг/см}^2;$$

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} \Phi_0(u) = 0,115 \frac{ql^2}{8};$$

$$f = \frac{f_0}{1 + \alpha^2} = 1,71 \text{ см};$$

$$(X_x)_{\max} = \frac{T}{h} + \frac{M_{\max}}{W} = \frac{\alpha^2 \pi^2}{12 (1 - \sigma^2)} \frac{Eh^2}{l^2} + \frac{3}{4} q \left( \frac{l^2}{h} \right) \Phi_0(u) = 1560 \text{ кг/см}^2.$$

Подобным же образом находим все нужные нам величины для других значений  $q$ . Полученные результаты приводим в табл. 21.

В случае пластинки с заделанными краями мы можем для приближенного решения уравнения (189) взять прогиб полоски в таком виде:

$$w = \frac{f_0}{2 \left( 1 + \frac{\alpha^2}{4} \right)} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right).$$

Тогда для определения  $\alpha^2$  получаем такое уравнение:

$$\alpha^2 \left( 1 + \frac{\alpha^2}{4} \right)^2 = 3K \frac{f_0^2}{h^2}. \quad (191)$$

Таблица 21

$q, \text{ кг/см}^2$	$\alpha^2$	$u$	$\varphi_0(u)$	$\frac{T}{h}, \text{ кг/см}^2$	$(X_x)_{\text{max}}, \text{ кг/см}^2$	$f_0, \text{ см}$	$l, \text{ см}$	$\frac{\sqrt{2qE}}{\sqrt{1-\sigma^2}}, \text{ кг/см}^2$
0,1	1,95	2,19	0,329	169	720	2,68	0,91	688
0,2	3,43	2,91	0,212	297	1010	5,36	1,21	976
0,3	4,68	3,40	0,162	406	1230	8,04	1,40	1190
0,4	5,80	3,78	0,134	502	1410	10,7	1,57	1380
0,5	6,85	4,11	0,115	592	1560	13,4	1,71	1560
0,6	7,80	4,39	0,102	675	1710	16,1	1,83	1690
0,7	8,72	4,64	0,092	755	1840	18,7	1,92	1820
0,8	9,60	4,87	0,084	830	1960	21,4	2,02	1950
0,9	10,44	5,07	0,077	905	2070	24,1	2,10	2060
1,0	11,23	5,27	0,072	973	2190	26,8	2,18	2180

Прогиб  $f_0$  представится в рассматриваемом случае так:

$$f_0 = \frac{1}{32} \frac{ql^4(1-\sigma^2)}{Eh^3}.$$

Следовательно,

$$\alpha^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right)^2 = 3K \left(\frac{1}{32}\right)^2 (1-\sigma^2)^2 \left(\frac{q}{E}\right)^2 \left(\frac{l}{h}\right)^8. \quad (191')$$

Если взять пластинку прежних размеров, то уравнение (191') при  $q = 0,5 \text{ кг/см}^2$  переписывается так:

$$\alpha^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right)^2 = 16,8,$$

откуда

$$\alpha^2 = 4,12; \quad u = 3,20;$$

$$\frac{T}{h} = \frac{\alpha^2 \pi^2}{12(1-\sigma^2)} \frac{Eh^2}{l^2} = 357 \text{ кг/см}^2;$$

$$M_{x=\frac{l}{2}} = \frac{l}{2} = \frac{ql^2}{24} \Phi_1(u);$$

$$M_{x=0} = -\frac{ql^2}{12} \chi(u); \quad f = \frac{f_0}{1 + \frac{\alpha^2}{4}} = 1,32 \text{ см};$$

$$(X_x)_{\text{max}} \Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{\alpha^2 \pi^2}{12(1-\sigma^2)} \frac{Eh^2}{l^2} + \frac{ql^2}{4h^2} \Phi_1(u) = 1580 \text{ кг/см}^2;$$

$$(X_x)_{\text{max}} \Big|_{x=0} = \frac{\alpha^2 \pi^2}{12(1-\sigma^2)} \frac{Eh^2}{l^2} + \frac{q}{2} \frac{l^2}{h^2} \chi(u) = 4010 \text{ кг/см}^2.$$

Подобным же образом все нужные для расчета величины могут быть получены и при других значениях  $q$ . Ниже в табл. 22 приводим все результаты, полученные для нашего численного примера. Все вычисления произведены на линейке и значения функций  $\Phi_1(u)$  и  $\chi(u)$  взяты из табл. 2 части второй путем простого интерполирования, поэтому в третьем знаке приводимых чисел уже могут быть погрешности, но они не превышают 1%. Следовательно, числа определены во всяком случае с гораздо большей точностью, чем, например, нам известная величина  $E$ .

Таблица 22

$q$ , кг/см <sup>2</sup>	$\alpha^2$	$u$	$\frac{T}{h}$ , кг/см <sup>2</sup>	$\Phi_1(u)$	$\chi(u)$	$(X_x)_{x=\frac{l}{2} \text{ макс.}}$ кг/см <sup>2</sup>	$(X_x)_{x=0 \text{ макс.}}$ кг/см <sup>2</sup>	$f_0$ , см	$f$ , см	$\frac{\sqrt{2qE}}{\sqrt{1-\sigma^2}}$ , кг/см <sup>2</sup>
0,1	0,53	1,14	46	0,864	0,921	531	1080	0,54	0,48	688
0,2	1,46	1,89	126	0,698	0,821	912	1980	1,07	0,79	976
0,3	2,38	2,42	206	0,581	0,747	1190	2730	1,60	1,00	1190
0,4	3,27	2,84	283	0,498	0,692	1400	3400	2,14	1,18	1380
0,5	4,12	3,20	357	0,435	0,649	1580	4010	2,68	1,32	1560
0,6	4,92	3,48	426	0,390	0,616	1740	4580	3,22	1,44	1690
0,7	5,68	3,74	492	0,353	0,588	1880	5120	3,74	1,55	1820
0,8	6,40	3,97	555	0,324	0,566	2010	5660	4,28	1,65	1950
0,9	7,10	4,18	615	0,301	0,547	2140	6150	4,82	1,74	2060
1,0	7,80	4,39	675	0,279	0,529	2250	6640	5,36	1,82	2180

Из приведенных табл. 21 и 22 мы видим, насколько существенную роль играет продольная растягивающая сила при изгибе выделенной балки-полоски. В случае опертых краев уже при самых незначительных нагрузках продольная сила оказывает большее влияние на величину максимального прогиба и максимальных напряжений. Поэтому все обстоятельства изгиба резко отличаются от тех, которые мы имели бы при действии на балку-полоску одной равномерной нагрузки. Влияние продольной силы на величину изгибающего момента характеризуется величиной  $\Phi_0(u)$ . Эта функция убывает с возрастанием  $u$ , поэтому напряжения изгиба растут гораздо медленнее, чем в случае действия только поперечных нагрузок. То же самое замечание относится и к нарастанию прогибов. Вследствие действия продольной силы прогибы  $f$  при больших нагрузках во много раз меньше соответствующих значений  $f_0$ .

Из табл. 22 для пластинки с заделанными краями мы видим, что здесь при малых нагрузках влияние продольных сил сказывается значительно меньше, чем в случае пластинок с опертыми краями. Но дальше, с нарастанием нагрузки, разница между условиями изгиба пластинок при разных способах закрепления краев сглаживается и, например, при давлении  $q = 1$  кг/см<sup>2</sup> между величинами наибольших прогибов и наибольших напряжений по середине пролета особой разницы уже нет.

Путем таких же соображений, как и в случае балок [формула (b) § 13], можно показать, что при больших значениях  $\alpha^2$  величина максимальных напряжений по середине пролета будет мало отклоняться от величины

$$\frac{\sqrt{2qE}}{\sqrt{1-\sigma^2}}. \quad (a)$$

Насколько это заключение правильно, мы видим из сравнения значений  $(X_x)_{\text{макс}}$  при  $x = l/2$  с числами последней колонки табл. 21 и 22.

Следовательно, в случае гибких пластинок, для которых  $\alpha^2$  получается большим, мы не сможем заметно изменить напряжения изменением толщины. Для существенного уменьшения напряжений нужно перейти к таким значениям отношения  $h/l$ , при которых величина  $\alpha^2$  существенно отличалась бы от того значения  $\alpha^2$ , которое соответствует величине напряжений (a) (§ 13).

Наибольшие напряжения в случае пластинок с заделанными краями имеют место у контура. Из разобранный примера мы видим, что эти напряжения растут быстрее, чем напряжения по середине пролета и очень скоро достигают значений, превосходящих предел упругости для железа и стали. Если мы будем

продолжать увеличивать нагрузку, то у краев появятся остаточные деформации и вместе с тем изменится закон нарастания изгибающих моментов по концам выделенной балки-полоски. Эти моменты, очевидно, будут меньше полной пары закрепления, вычисленной в предположении следования материала закону Гука. Однако, как легко видеть из сравнения чисел табл. 21 и 22, такое изменение опорных моментов в случае гибких пластинок лишь в слабой степени скажется на величине максимальных напряжений по середине пролета.

На практике в тех случаях, когда имеют дело с постоянной нагрузкой или нагрузкой, которая прикладывается лишь в редких случаях, часто подбирают размеры пластинок так, чтобы лишь по середине пролета максимальные напряжения не превосходили допускаемой нормы. При этом на контуре напряжения, очевидно, будут больше допускаемых и даже больше предела упругости материала. У краев появятся остаточные деформации, но при постоянной нагрузке эти деформации не представляют опасности. В случае переменных нагрузок и в особенности в случае нагрузок, меняющих свой знак, такие остаточные деформации, очевидно, недопустимы, здесь приходится считаться с явлением усталости материалов.

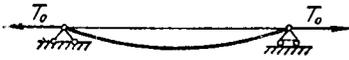


Рис. 85.

Мы до сих пор имели в виду лишь те продольные силы, которые являются следствием изгиба балки-полоски. Иногда приходится иметь дело с более сложной задачей, когда кроме продольных сил, появляющихся при изгибе, к выделенной балке-полоске приложены еще дополнительные растягивающие силы  $T_0$  (рис. 85).

Если мы через  $T$  будем обозначать растягивающую силу в балке-полоске, то сжимающая сила в распорке, очевидно, будет равна  $T - T_0$ . И уравнение для определения  $T$  напишется так:

$$\frac{1}{2} \int_0^l w'^2 dx = (1 - \sigma^2) \frac{Tl}{Eh} + (1 - \sigma^2) \frac{(T - T_0)l}{Et}.$$

Подставляя вместо  $w$  его приближенное выражение при опертых краях

$$w = \frac{f_0}{1 + \alpha^2} \sin \frac{\pi x}{l}$$

и вводя для краткости обозначение

$$\frac{T_0}{t + h} = p_0; \quad \frac{t}{t + h} = K,$$

получаем

$$3K \left( \frac{5}{32} \right)^2 \left( \frac{q}{E} \right)^2 \left( \frac{l}{h} \right)^8 (1 - \sigma^2)^2 = \alpha^2 (1 + \alpha^2)^2 - \frac{12}{\pi^2} (1 - \sigma^2) \frac{p_0}{E} \left( \frac{l}{h} \right)^2 (1 + \alpha^2). \quad (192)$$

При заданных размерах пластинки и заданном значении  $p_0$  вычисление  $\alpha^2$  не представляет никаких затруднений. Полагая, как мы это делали раньше,  $1 + \alpha^2 = x$ , приводим уравнение (192) к виду  $x^3 - ax^2 = b$ .

Корни этого уравнения отсчитываем непосредственно по линейке.

Если взять размеры пластинки те же, что и в предыдущих примерах, и положить  $q = 0,6 \text{ кг/см}^2$ ;  $p_0 = 1200 \text{ кг/см}^2$ , то уравнение (192) представится так:

$$605 = \alpha^3 (1 + \alpha^2)^2 - 13,9 (1 + \alpha^2).$$

Отсюда находим

$$\alpha^2 = 15,98; \quad u = 6,28; \quad \varphi_0(u) = 0,050;$$

$$\frac{T}{h} = 1380 \text{ кг/см}^2; \quad (X_x)_{\max} = 1890 \text{ кг/см}^2.$$

Величина продольной силы благодаря приложению усилий  $T_0$  значительно увеличилась по сравнению с тем, что нам дает табл. 21, но величина максимальных напряжений по середине пролета изменилась весьма мало, так как увеличение продольной силы сопровождается уменьшением напряжений изгиба.

Если бы мы вместо растягивающих приложили сжимающие усилия такой же величины, то уравнение (192) написалось бы так:

Отсюда находим

$$605 = \alpha^2 (1 + \alpha^2)^2 + 13,9 (1 + \alpha^2)^2.$$

$$\alpha^2 = 4,70; \quad u = 3,40; \quad \varphi_0(u) = 0,162;$$

$$\frac{T}{h} = 406 \text{ кг/см}^2; \quad (X_x)_{\max} = 2050 \text{ кг/см}^2.$$

Сравнивая эти результаты с соответствующими числами табл. 21, видим, что продольные сжимающие усилия  $T_0$  передаются главным образом на распоры и лишь отчасти уменьшают продольную растягивающую силу.

Заметим здесь, что изменения коэффициента распора  $K$  приводят к такому же эффекту, как приложение добавочных продольных сил. Этим изменениям может соответствовать значительное изменение продольной силы, но это лишь в слабой степени сказывается на величине максимальных напряжений.

В качестве второго примера возьмем более толстую пластинку и положим  $h = 2$  см. Остальные величины оставим без изменения.

Уравнение (192) при растяжении ( $p_0 = 1200 \text{ кг/см}^2$ ) напишется так:

$$0,396 = \alpha^2 (1 + \alpha^2)^2 - 2,225 (1 + \alpha^2),$$

откуда  $\alpha^2 = 2,27$ ,  $u = 2,36$ .

При сжимающих усилиях ( $p_0 = -1200 \text{ кг/см}^2$ ) получим  $\alpha^2 = -0,518$ ,  $u = -1,13$ . В этом случае приложением сжимающих сил нам удалось получить продольное сжатие в выделенной балке-полоске.

## § 47. Влияние начальной кривизны на изгиб пластинок по цилиндрической поверхности

Рассмотрим теперь, как изменяется напряжение в пластинке, если она имеет некоторую начальную кривизну по цилиндрической поверхности. Предполагая начальное искривление балки-полоски по синусоидальной кривой

$$w_0 = b \sin \frac{\pi x}{l},$$

мы на основании результатов, полученных для стержня [формула (79)], придем к такому уравнению для определения продольной силы в случае пластинки со свободно поворачивающимися краями:

$$\frac{(j_0 - b\alpha^2)^2}{(1 + \alpha^2)^2} + \frac{2b(j_0 - b\alpha^2)}{1 + \alpha^2} = \frac{\alpha^2 h^2}{3} \frac{1}{K},$$

откуда после простых преобразований получаем

$$\alpha^2 (1 + \alpha^2)^2 = 3K \left( \frac{j_0}{h} + \frac{b}{h} \right)^2 - 3K \frac{b^2}{h^2} (1 + \alpha^2)^2. \quad (193)$$

Полагая  $1 + \alpha^2 = x$ , приходим к такому кубическому уравнению:

$$x^3 + ax^2 + c = 0, \quad (193')$$

где

$$a = 3K \frac{b^2}{h^2} - 1; \quad c = -3K \left( \frac{f_0}{h} + \frac{b}{h} \right)^2.$$

В тех случаях, когда начальный прогиб  $b$  весьма мал и коэффициент  $a$  в нашем уравнении получает отрицательное значение, мы будем иметь один действительный положительный корень. При положительных значениях  $a$  кроме положительного корня наше уравнение может иметь еще два отрицательных корня и мы здесь встретимся с наличием нескольких форм равновесия, соответствующих одной и той же поперечной нагрузке, и с вопросом устойчивости этих форм.

Когда начальный прогиб  $b$  имеет положительное значение, т. е. когда искривление направлено в ту же сторону, куда действует и поперечная нагрузка, нет никакого сомнения относительно того, какая именно форма равновесия будет иметь место. Очевидно, приложение поперечной нагрузки вызовет дальнейший прогиб пластинки, и кроме напряжений изгиба появятся растягивающие напряжения от продольных сил.

Исследование всех обстоятельств изгиба проведем на численном примере. Для более удобной оценки влияния начальной кривизны удобно взять пластинку прежних размеров (§ 46) и только придать ей начальное искривление. Возьмем начальный прогиб  $b = 1$  см и поперечную нагрузку  $q = 0,1$  кг/см<sup>2</sup>. Тогда наше кубическое уравнение представится в таком виде:

$$x^3 + 1,34x^2 = 31,8.$$

По линейке отсчитываем положительный корень этого уравнения:  $x = 2,78$ . Отрицательных корней уравнение не имеет, и мы будем иметь лишь одну форму равновесия, которая как единственная будет, конечно, устойчива. Найдя корень уравнения, мы сейчас же получаем

$$\alpha^2 = x - 1 = 1,78; \quad u = \frac{\alpha\pi}{2} = 2,09.$$

Растягивающие напряжения от продольной силы будут такие:

$$\frac{T}{h} = \frac{\alpha^2\pi^2}{12(1-\sigma^2)} \cdot \frac{Eh^2}{l^2} = 154 \text{ кг/см}^2.$$

Прогиб посередине представится так:

$$(w_1)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{f_0 - b\alpha^2}{1 + \alpha^2} = \frac{2,68 - 1,78}{2,68} = 0,32 \text{ см.}$$

Для получения напряжений изгиба мы воспользуемся тем обстоятельством, что прогиб, а следовательно и кривизна, могут быть представлены в виде двух слагаемых: первое слагаемое соответствует изгибу прямого стержня, вторым оценивается влияние начальной кривизны. При вычислении изгибающего момента по середине пролета мы первое слагаемое пойдем при помощи таблицы значений функции  $f_0(u)$  (см. табл. 2, части второй). Что касается второго слагаемого, то при начальном искривлении по синусоиде дополнительный прогиб, обусловленный этим искривлением, будет

$$\frac{-b\alpha^2 \sin \frac{\pi x}{l}}{1 + \alpha^2}.$$

Соответствующий ему момент по середине пролета равен

$$-\frac{b\alpha^2}{1 + \alpha^2} \frac{\pi^2}{l^2} \frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)}.$$

Эту величину нужно прибавить к той, которую мы получаем для прямой балки-полоски. Так как величина эта отрицательна, то, следовательно, при положительных значениях  $b$  начальное искривление уменьшает напряжения изгиба и полные напряжения получаются

меньшими, чем для неискривленной пластинки. В табл. 23 мы помещаем результаты, относящиеся к нагрузкам  $q = 0,1 \text{ кг/см}^2$ ;  $0,5 \text{ кг/см}^2$ ;  $1,0 \text{ кг/см}^2$ . Такие же вычисления проделаны и для пластинки с начальным прогибом  $b = 2 \text{ см}$  (табл. 24).

Таблица 23

$q, \text{ кг/см}^2$	$f_0, \text{ см}$	$\alpha^2$	$u$	$\frac{T}{h}, \text{ кг/см}^2$	$\Phi_0(u)$	$(X_x)_1, \text{ кг/см}^2$	$(X_x)_2, \text{ кг/см}^2$	$(X_x), \text{ кг/см}^2$	$f, \text{ см}$
0,1	2,68	1,78	2,09	154	0,349	588	-415	327	0,32
0,5	13,4	6,44	3,99	558	0,121	1020	-562	1020	0,94
1,0	26,8	10,8	5,16	935	0,075	1270	-593	1610	1,36

Таблица 24

$q, \text{ кг/см}^2$	$f_0, \text{ см}$	$\alpha^2$	$u$	$\frac{T}{h}, \text{ кг/см}^2$	$\Phi_0(u)$	$(X_x)_1, \text{ кг/см}^2$	$(X_x)_2, \text{ кг/см}^2$	$(X_x), \text{ кг/см}^2$	$f, \text{ см}$
0,1	2,68	1,20	1,72	104	0,442	746	-707	143	0,13
0,5	13,4	4,98	3,50	431	0,153	1280	-1080	631	0,58
1,0	26,8	9,23	4,77	799	0,087	1470	-1170	1100	0,81

Здесь через  $(X_x)_1$  обозначены максимальные напряжения изгиба, вычисленные как для прямой балки-полоски; через  $(X_x)_2$  — напряжения изгиба, обусловленные начальным искривлением; наконец, через  $X_x$  — полные наибольшие напряжения по середине пролета. Сравнивая эти результаты с соответствующими числами табл. 21 (§ 46) для неискривленной пластинки, находим, что начальное искривление несколько уменьшило продольную силу, значительно уменьшило прогиб и напряжения изгиба. В смысле напряжений такое начальное искривление является выгодным. Особенно велико влияние начального искривления при малых нагрузках, когда элементарная балка-полоска по условиям работы весьма близка к гибкой нити. При больших нагрузках разница между прямой и слегка искривленной балкой-полоской должна постепенно сглаживаться.

В рассмотренных случаях, когда направление начального прогиба совпадает с направлением нагрузки, форма равновесия, которую примет балка-полоска, будет соответствовать положительному значению  $\alpha^2$ , хотя для некоторых значений нагрузки наше основное уравнение (193) может давать для  $\alpha^2$  и отрицательные решения. Например, при  $b = 2 \text{ см}$  и  $q = 0,1 \text{ кг/см}^2$  мы кроме положительного решения для  $\alpha^2$ , приведенного в табл. 24, получим еще два отрицательных решения:  $\alpha^2 = -4,12$  и  $\alpha^2 = -8,45$ , которым будут соответствовать формы равновесия с отрицательными прогибами. Обе эти формы, вероятно, будут неустойчивы.

Рассмотрим теперь случай, когда поперечная нагрузка отсутствует. Полагая в основном уравнении (193)  $f_0 = 0$ , мы придем к уравнению, одно из решений которого будет  $\alpha^2 = 0$ . Этому решению соответствует недеформированное состояние нашей балки-полоски.

Кроме этого решения, в том случае, когда  $\frac{3Kb^2}{h^2} \geq 4$ , мы получим еще два действительных отрицательных решения для  $\alpha^2$ . Эти решения указывают на то, что нашу балку-полоску можно перегнуть в сторону, противоположную начальной кривизне, и держать в таком состоянии при помощи продольных сжимающих сил. Силы эти будут больше эйлеровой.

Рассмотрим теперь случай, когда направление действия нагрузки противоположно направлению начального искривления. В таком случае  $f_0$  и  $b$  будут иметь противоположные знаки. Основное кубическое уравнение (193) остается в силе и изменяется лишь величина постоянного члена  $c$ . Возьмем пластинку прежних размеров, придадим ей начальную кривизну по синусоиде с амплитудой  $b = 1 \text{ см}$  и приложим равномерную нагрузку интенсивности  $q = 0,1 \text{ кг/см}^2$ . Так как направление нагрузки противоположно направлению начального прогиба, то будем иметь  $f_0 = -2,68 \text{ см}$ , и кубическое уравнение запишется так:  $x^3 + 1,34x^2 = 6,62$ , откуда находим  $x = 1,52$ ,  $\alpha^2 = 0,52$ ;

$$(w_1)_{x=1/2} = \frac{f_0 - b\alpha^2}{1 + \alpha^2} = -2,1 \text{ см}.$$

Под влиянием приложенной нагрузки наша пластинка прогнется в сторону, противоположную начальному искривлению. Определение возникающих при этом напряжений изгиба не представляет, конечно, никаких затруднений. Величина их в рассматриваемом случае, очевидно, будет значительно большей, чем при положительном значении  $f_0$ , так как роль продольной силы при малом значении  $\alpha^2$  невелика. Если мы увеличим интенсивность нагрузки и положим, например,  $q = 0,5 \text{ кг/см}^2$ , то найдем, как и в предыдущем случае, лишь одно действительное решение для нашего кубического уравнения, именно

$$x = 6,69; \quad \alpha^2 = 5,69; \quad (w_1)_{x=l/2} = -2,85 \text{ см.}$$

При малых значениях  $q$  мы кроме одного положительного корня будем получать еще два отрицательных корня для нашего кубического уравнения, что указывает на возможность существования трех различных форм равновесия. Возьмем, например,  $q = 0,05 \text{ кг/см}^2$ , тогда кубическое уравнение напишется так:  $x^3 + 1,34x^2 = 0,271$ . Корни этого уравнения такие:  $x_1 = 0,395$ ,  $x_2 = -0,610$ ,  $x_3 = -1,125$ . Соответственно этому получаем:  $\alpha_1^2 = -0,605$ ,  $\alpha_2^2 = -1,610$ ,  $\alpha_3^2 = -2,125$ .

Прогобы для соответствующих форм равновесия будут иметь значения

$$(w_1)'_{x=l/2} = -1,87 \text{ см; } (w_1)''_{x=l/2} = -0,442 \text{ см; } (w_1)'''_{x=l/2} = -0,694 \text{ см.}$$

Первой форме равновесия соответствует искривление в направлении, прямо противоположном начальной кривизне. Вторая и третья формы равновесия имеют искривления в ту же сторону, что и начальная прогиб, причем третьей форме, как наиболее пологой, соответствует наибольшее значение продольной сжимающей силы.

Когда выделенная балка-полоска, имеющая некоторое начальное искривление, испытывает продольные усилия  $T$  не только вследствие изгиба поперечной нагрузкой, но и вследствие приложенных извне усилий  $T_0$  (см. рис. 85), то для определения  $T$  можно составить уравнение, аналогичное уравнению (192).

Останавливаясь на случае опертых краев, предполагая начальное искривление по синусоиде

$$w_0 = b \sin \frac{\pi x}{l}$$

и сохраняя наши прежние обозначения

$$\frac{T_0}{t+h} = p_0; \quad \frac{t}{t+h} = K, \quad (194)$$

мы приходим к такому уравнению:

$$\begin{aligned} & \frac{3K}{h^2} (f_0 - b\alpha^2)^2 + \frac{3K}{h^2} (1 + \alpha^2) 2b (f_0 - b\alpha^2) = \\ & = \alpha^2 (1 + \alpha^2)^2 - \frac{12}{\pi^2} (1 - \sigma^2) \frac{p_0}{E} \left( \frac{l}{h} \right)^2 (1 + \alpha^2)^2. \end{aligned} \quad (195)$$

Если положить  $b = 0$ , то уравнение это совпадает с уравнением (192), полученным для прямолинейной балки-полоски. После простых преобразований оно может быть представлено в таком виде:

$$\begin{aligned} & \frac{3K}{h^2} (f_0 + b)^2 - \frac{3Kb^2}{h^2} (1 + \alpha^2)^2 = \\ & = \alpha^2 (1 + \alpha^2)^2 - \frac{12}{\pi^2} (1 - \sigma^2) \frac{p_0}{E} \left( \frac{l}{h} \right)^2 (1 + \alpha^2)^2 \end{aligned} \quad (195')$$

и легко решается при помощи логарифмической линейки.

Если длинная прямоугольная пластинка с начальным искривлением по синусоиде имеет упругие распоры, препятствующие свободному сближению опертых продольных краев пластинки, то продольные усилия  $T$ , возникающие в элементарной балке-полоске под действием только сил  $T_0$ , могут быть легко найдены из того же уравнения (195'), если в нем положить  $f_0 = 0$ .

В таком случае будем иметь

$$\alpha^2(1 + \alpha^2)^2 = \frac{12}{\pi^2}(1 - \sigma^2) \frac{p_0}{E} \left(\frac{l}{h}\right)^3 (1 + \alpha^2)^2 - \frac{3Kb^2}{h^2} [(1 + \alpha^2)^2 - 1]. \quad (195'')$$

Когда величины начального прогиба  $b$ , растягивающего напряжения  $p_0$  и размеры пластинки известны, то из написанного уравнения легко определяется величина  $\alpha^2$ , величина продольной силы  $T$  и соответствующее ей растягивающее напряжение  $p = T/h$ . Напряжение это вследствие начального искривления пластинки всегда получается по абсолютному значению меньшим, чем извне приложенное напряжение  $p_0$  и тем меньше, чем больше начальный прогиб  $b$ . При больших начальных искривлениях продольные силы  $T_0$  будут восприниматься, главным образом, упругими распорами пластинки. Это обстоятельство имеет существенное практическое значение и потому в табл. 25 приводим ряд числовых значений<sup>1</sup> отношения  $p/p_0$ , вычисленных при различных значениях величин:

$$m = \frac{Kb^2}{h^2}, \quad n = \frac{12}{\pi^2}(1 - \sigma^2) \frac{p_0}{E} \left(\frac{l}{h}\right)^3.$$

Когда приходится рассчитывать на простое растяжение листовые настилы, подкрепленные продольными и поперечными жесткими ребрами, то при вычислении продольных растягивающих напряжений в ребрах и листах нужно считаться с возможными начальными искривлениями листов. Принимая это начальное искривление изменяющимся по синусоиде, мы для оценки напряжений в листах можем воспользоваться числами табл. 25.

Т а б л и ц а 25

n	m										
	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,80	1,00
+12	1,00	0,99	0,98	0,96	0,95	0,93	0,90	0,88	0,85	0,80	0,75
+10	1,00	0,99	0,97	0,96	0,94	0,91	0,88	0,85	0,82	0,76	0,70
+ 8	1,00	0,98	0,96	0,95	0,93	0,89	0,85	0,82	0,78	0,71	0,64
+ 6	1,00	0,98	0,95	0,93	0,90	0,85	0,81	0,76	0,71	0,62	0,53
+ 4	1,00	0,96	0,93	0,89	0,86	0,79	0,72	0,65	0,59	0,47	0,37
+ 3	1,00	0,95	0,91	0,86	0,82	0,73	0,65	0,57	0,50	0,38	0,29
+ 2	1,00	0,93	0,87	0,81	0,75	0,64	0,54	0,46	0,38	0,29	0,22
+1,5	1,00	0,92	0,84	0,77	0,70	0,57	0,47	0,39	0,33	0,25	0,20
+ 1	1,00	0,89	0,79	0,70	0,63	0,50	0,41	0,34	0,29	0,22	0,17
+0,5	1,00	0,85	0,72	0,62	0,54	0,42	0,34	0,29	0,25	0,19	0,16
0	1,00	0,77	0,63	0,53	0,45	0,36	0,29	0,25	0,22	0,17	0,14
-0,5	1,00	0,65	0,51	0,43	0,38	0,30	0,25	0,22	0,19	0,16	0,13
- 1	1,00	0,51	0,42	0,36	0,32	0,26	0,22	0,19	0,17	0,14	0,12
-1,5	0,67	0,41	0,34	0,30	0,27	0,23	0,20	0,17	0,16	0,13	0,11
- 2	0,50	0,34	0,29	0,26	0,23	0,20	0,18	0,16	0,14	0,12	0,10
- 3	0,33	0,25	0,22	0,20	0,19	0,16	0,14	0,13	0,12	0,10	0,09
- 4	0,25	0,20	0,18	0,16	0,15	0,14	0,12	0,11	0,11	0,09	0,08
- 6	0,17	0,14	0,13	0,12	0,11	0,10	0,10	0,09	0,08	0,07	0,07
- 8	0,13	0,11	0,10	0,09	0,09	0,08	0,08	0,07	0,07	0,06	0,06
-10	0,10	0,09	0,08	0,08	0,08	0,07	0,07	0,06	0,06	0,05	0,05
-12	0,08	0,07	0,07	0,07	0,06	0,06	0,06	0,05	0,05	0,05	0,04

Участие листов в растяжении будет тем меньшим, чем больше начальное искривление, и нам при подсчете растягивающих напряжений в подкрепляющих

<sup>1</sup> Числа заимствуем из курса И. Г. Бубнова. См. стр. 629 его книги, указанной в сноске на стр. 200.

ребрах придется вместо полной площади поперечного сечения листов брать некоторую приведенную площадь, получаемую умножением сечения листов на соответствующий коэффициент из табл. 25. С увеличением растягивающих напряжений  $p_0$  влияние начального искривления падает и коэффициенты таблицы приближаются к единице.

Когда вместо растягивающих имеются сжимающие напряжения  $p_0$ , то коэффициенты таблицы быстро убывают с увеличением этих напряжений, так как сжимающее напряжение в листе не может получить значений, больших критического.

## § 48. Чистый изгиб пластинок

В случае чистого изгиба призматических стержней точное решение вопроса о распределении напряжений является крайне простым. Каждый продольный элемент изгибаемого стержня оказывается в состоянии линейного напряженного состояния, и напряжение это пропорционально расстоянию элемента от нейтрального слоя. Таким образом, точное решение совпадает с тем результатом, который получается элементарным путем, если исходить из гипотезы плоских сечений. Пользуясь принципом сложения, мы можем получить напряженное

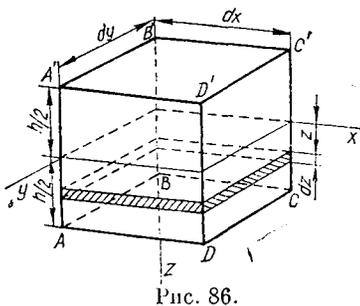


Рис. 86.

состояние, соответствующее чистому изгибу по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Осуществить подобное напряженное состояние мы можем таким образом. Возьмем пластинку с прямоугольным контуром и по двум взаимно противоположным краям ее приложим непрерывно и равномерно распределенные изгибающие пары. Таким образом, мы получим в пластинке такое же напряженное состояние, как и в стержне, испытывающем чистый изгиб. Пластинка при этом изогнется, как мы знаем, по антикластической поверхности<sup>1</sup>.

Если теперь мы приложим и по двум другим краям пластинки равномерно распределенные изгибающие пары, то получим более общий случай напряженного состояния, который условимся называть чистым изгибом пластинки.

Установим теперь связь между интенсивностью равномерно распределенных изгибающих пар и соответствующим им искривлением пластинки. Пусть  $ABCD A'B'C'D'$  (рис. 86) представляет собой элемент, вырезанный из нашей прямоугольной пластинки двумя парами взаимно перпендикулярных плоскостей, параллельных краям пластинки. Координатные оси  $x$  и  $y$  направим параллельно сторонам прямоугольного контура пластинки. По граням элемента, параллельным плоскости  $yz$ , будут действовать нормальные напряжения  $X_x$ , вызываемые теми изгибающими парами, которые непрерывно распределены вдоль краев пластинки, параллельных оси  $y$ . Изгибающим парам, распределенным вдоль двух других краев пластинки, будут соответствовать нормальные напряжения  $Y_y$  по граням элемента, параллельным плоскости  $xz$ . По толщине пластинки напряжения  $X_x$  и  $Y_y$  изменяются так же, как и в случае чистого изгиба призматических стержней. Срединная плоскость пластинки играет роль нейтрально-

<sup>1</sup> Конечно, это будет лишь в том случае, если прогибы пластинки можно считать малыми по сравнению с ее толщиной.

го слоя. Обозначим через  $M_1 dy$  и  $M_2 dx$  моменты, соответствующие напряжениям  $X_x$  и  $Y_y$ , действующим по граням выделенного элемента, тогда

$$M_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} X_x z dz; \quad M_2 = \int_{-h/2}^{+h/2} Y_y z dz. \quad (a)$$

$M_1$  представляет собой изгибающий момент, приходящийся на единицу длины сторон пластинки, параллельных оси  $y$ .  $M_2$  представляет соответствующую величину для сторон, параллельных оси  $x$ . Установим связь между моментами  $M_1$  и  $M_2$ , с одной стороны, и радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$ , соответствующими сечениям *срединной поверхности* пластинки плоскостями, параллельными  $zx$  и  $zy$ , с другой. Для этого выделим из элемента бесконечно тонкий слой, параллельный срединной плоскости и удаленный от нее на расстояние  $z$ . Напряжения и деформации этого элемента выразим через  $R_1$  и  $R_2$ . Так как грани нашего элемента при чистом изгибе остаются плоскими, то для относительных удлинений выделенного слоя получим известные выражения

$$e_{xx} = \frac{z}{R_1}; \quad e_{yy} = \frac{z}{R_2}.$$

Соответствующие значения напряжений напишутся так:

$$X_x = \frac{E}{1-\sigma^2} (e_{xx} + \sigma e_{yy}) = \frac{Ez}{1-\sigma^2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2} \right); \quad (196)$$

$$Y_y = \frac{E}{1-\sigma^2} (e_{yy} + \sigma e_{xx}) = \frac{Ez}{1-\sigma^2} \left( \frac{1}{R_2} + \frac{\sigma}{R_1} \right).$$

Вставляя эти значения в выражения (a), получаем

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2} \right); \quad (197)$$

$$M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \left( \frac{1}{R_2} + \frac{\sigma}{R_1} \right).$$

Величина  $Eh^3/12(1-\sigma^2)$  определяет собой, как мы видели (§ 46), жесткость балки-полоски при изгибе пластинки по цилиндрической поверхности. Условимся называть эту величину *цилиндрической жесткостью* пластинки и для упрощения введем обозначение

$$\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} = D.$$

В дальнейшем мы будем иметь дело лишь с весьма малыми искривлениями пластинки. В таком случае величины  $1/R_1$  и  $1/R_2$  могут быть заменены их приближенными выражениями  $-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ;  $-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ . Формулы (197) переписутся при этом так:

$$M_1 = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad (198)$$

$$M_2 = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right).$$

Сравнивая выражения для напряжений (196) с формулами (197), получаем

$$X_x = \frac{12M_1 z}{h^3}; \quad Y_y = \frac{12M_2 z}{h^3},$$

откуда

$$(X_x)_{\max} = \frac{6M_1}{h^2}; \quad (Y_y)_{\max} = \frac{6M_2}{h^2}. \quad (199)$$

В том случае, когда  $M_1 = M_2 = M$ , пластинка изгибается по шаровой поверхности и мы из формул (197) получим

$$M = \frac{D(1+\sigma)}{R}; \quad R = \frac{D(1+\sigma)}{M}. \quad (200)$$

В дальнейшем нам понадобится еще выражение для потенциальной энергии, накапливаемой в пластинке при чистом изгибе. Для выделенного нами элемента потенциальная энергия представится работой моментов  $M_1 dy$  и  $M_2 dx$ , возрастающих от нуля до их окончательного значения при поворачивании соответствующих боковых граней элемента на углы  $dx/R_1$ ;  $dy/R_2$ .

Следовательно,

$$dV = \frac{1}{2} \left( \frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2} \right) dx dy = \frac{D}{2} \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{2\sigma}{R_1 R_2} \right) dx dy. \quad (201)$$

Полученные формулы вполне решают вопрос о чистом изгибе пластинок. Зная  $M_1$  и  $M_2$ , мы из (198) находим соответствующие значения кривизны и путем интегрирования получаем прогибы пластинки. Из (199) находим величины наибольших напряжений.

#### § 49. Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности пластинки

Обратимся теперь к более общей задаче, когда изгибающие нагрузки любым образом распределены по поверхности пластинки и направлены нормально к ней и, кроме того, имеются силы и пары сил, приложенные по контуру пластинки. Двумя парами плоскостей, параллельных  $xz$  и  $zy$ , выделим из пластинки

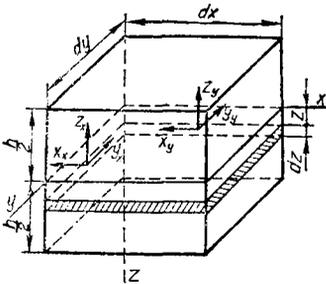


Рис. 87.

бесконечно малый элемент (рис. 87) и составим для него дифференциальные уравнения равновесия. Усилия, приходящиеся на какую-либо из боковых граней выделенного элемента, мы всегда можем привести к силе, приложенной в центре грани, и к паре сил. Для дальнейших выводов удобно разложить и силу и пару сил на составляющие, параллельные координатным осям. Обозначения для этих составляющих установим на основании подробного рассмотрения усилий, действующих по граням элемента, совпадающим с плоскостями  $zy$  и  $xz$ . Возьмем первую из этих граней. По ней будут действовать нормальные напряжения  $X_x$  и касательные напряжения  $Y_x$  и  $Z_x$ .

Совокупность всех усилий, соответствующих напряжениям  $X_x$ , дает нам составляющую равнодействующей силы в направлении оси  $x$ . Две другие составляющие будут соответствовать напряжениям  $Y_x$  и  $Z_x$ . Введем для этих составляющих такие обозначения:

$$T_1 dy = dy \int_{-h/2}^{+h/2} X_x dz;$$

$$S_1 dy = dy \int_{-h/2}^{+h/2} Y_x dz; \quad N_1 dy = dy \int_{-h/2}^{+h/2} Z_x dz.$$

Следовательно,  $T_1$  представляет собой отнесенную к единице длины силу, растягивающую пластинку в направлении оси  $x$ . Величины  $S_1$  и  $N_1$  суть отно-

сенные к единице длины касательные силы. Из них  $S_1$  стремится вызвать сдвиг в срединной плоскости пластинки, сила  $N_1$  направлена перпендикулярно к пластинке и мы ее в дальнейшем будем называть перерезывающей силой. Положительные направления силы  $T_1$ ,  $S_1$  и  $N_1$ , соответственно принятому ранее обозначению для напряжений, представлены стрелками на рис. 88 (для упрощения на рисунке сохранено лишь пересечение выделенного из пластинки элемента со срединной плоскостью). Совершенно таким же способом вводим обо-

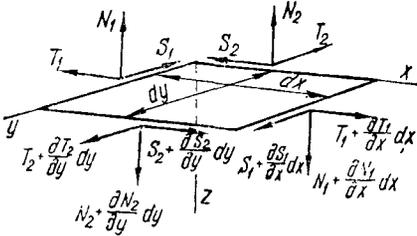


Рис. 88.

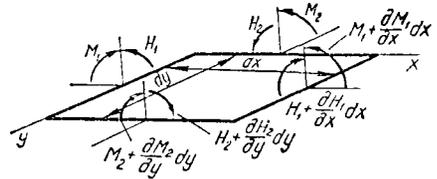


Рис. 89.

вращения для сил  $T_2$ ,  $S_2$  и  $N_2$ , соответствующих грани элемента, совпадающей с плоскостью  $xz$ :

$$T_2 dx = dx \int_{-h/2}^{+h/2} Y_v dz;$$

$$S_2 dx = dx \int_{-h/2}^{+h/2} X_v dz; \quad N_2 dx = dx \int_{-h/2}^{+h/2} Z_v dz.$$

Принимая во внимание равенство  $Y_x = X_y$ , заключаем, что  $S_1 = S_2$ . Направления  $N_2$ ,  $T_2$  и  $S_2$  даны на рис. 88. Для двух других боковых граней выделенного элемента получим усилия, если к величинам  $N_1, \dots, S_2$  присоединим бесконечно малые приращения, соответствующие изменениям координат на величины  $dx$  и  $dy$ . Таким образом, вместо  $N_1, \dots, S_2$  будем иметь величины

$$N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx; \quad S_1 + \frac{\partial S_1}{\partial y} dy.$$

Перейдем теперь к составлению моментов усилий, приложенных к граням выделенного элемента. Для грани, совпадающей с плоскостью  $zy$ , введем такие обозначения:

$$H_1 dy = dy \int_{-h/2}^{+h/2} Y_x z dz; \quad M_1 dy = dy \int_{-h/2}^{+h/2} X_x z dz.$$

Таким образом,  $H_1$  и  $M_1$  представляют собой отнесенные к единице длины моменты приложенных к грани усилий относительно осей, параллельных  $x$  и  $y$ .  $M_1$  является изгибающим и  $H_1$  — скручивающим моментами. Направления моментов, принятые за положительные, указаны стрелками (рис. 89). Что касается момента тех же усилий относительно оси, параллельной оси  $z$ , то он при бесконечно малом размере  $dy$  представляет собой бесконечно малую величину высшего порядка, которой можно пренебречь.

Для грани, совпадающей с плоскостью  $xz$ , соответствующие моменты обозначим так:

$$M_2 dx = dx \int_{-h/2}^{+h/2} Y_v z dz; \quad H_2 dx = -dx \int_{-h/2}^{+h/2} X_v z dz = -H_1 dx.$$

Моменты для двух других граней элемента получим, если к величинам  $M_1, \dots, H_2$  присоединим соответствующие приращения.

Кроме сил, приложенных по боковым граням элемента, на элемент будет действовать еще нагрузка, изгибающая пластинку. Мы предположили, что нагрузка является нормальной к поверхности пластинки, интенсивность нагрузки обозначим через  $q$ . В таком случае на выделенный элемент будет действовать внешняя сила  $q dx dy$ , параллельная оси  $z$ .

Составим теперь уравнения равновесия для выделенного элемента. Проектируя все приложенные к элементу силы на направления координатных осей, мы на основании принятых обозначений получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial S_1}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + q &= 0. \end{aligned} \quad (202)$$

Составляя моменты тех же сил относительно осей  $y$  и  $x$  и отбрасывая малые величины высших порядков, приходим к таким уравнениям:

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} - \frac{\partial H_2}{\partial y} - N_1 = 0; \quad \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial H_1}{\partial x} - N_2 = 0. \quad (203)$$

Первые два уравнения системы (202) связывают между собой силы, лежащие в срединной плоскости пластинки. Это те самые уравнения, с которыми мы имели дело при решении плоской задачи (см. ч. 1). Соответствующие им деформации не сопровождаются искривлением срединной плоскости пластинки. Изгиб пластинки определяется величинами, входящими в третье из уравнений (202) и в уравнения (203).

Таким образом, все силы разделились на две группы. Первой группе соответствуют деформации в плоскости пластинки, второй — изгиб пластинки. Каждая группа уравнений решается особо и полные напряжения получатся путем сложения напряжений соответствующей плоской задачи с напряжениями изгиба. Такое разделение уравнений на две группы явилось следствием того, что мы при составлении уравнений равновесия пренебрегали теми изменениями в направлениях сил  $T_1, \dots$ , которые являются следствием изгиба пластинки. В дальнейшем мы учтем это обстоятельство и выясним влияние сил  $T_1, T_2$  и  $S_1$  на изгиб пластинки. Здесь же займемся исследованием изгиба пластинки под действием только поперечных нагрузок, для чего обратимся к третьему уравнению системы (202) и к уравнениям (203). Исключив из них величины  $N_1$  и  $N_2$ , придем к такому дифференциальному уравнению равновесия:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} = -q. \quad (204)$$

Уравнение это, полученное на основании условий равновесия выделенного нами элемента, включает три неизвестные величины  $M_1, M_2$  и  $H_1$ , и нам для дальнейшего решения задачи необходимо установить между этими величинами дополнительные зависимости, что возможно сделать, если обратиться к деформациям пластинки. Связь между моментами  $M_1, M_2$  и  $H_1$  и прогибами пластинки  $w$  установим приближенным способом, положив в основу наших дальнейших выводов гипотезу, аналогичную гипотезе плоских сечений, на которой построена приближенная теория изгиба балок.

Мы видели, что в случае чистого изгиба (§ 48) сечения пластинки, параллельные  $zx$  и  $zy$ , остаются плоскими и устанавливаются нормально к срединной

поверхности искривленной пластинки<sup>1</sup>. Следовательно, всякий линейный элемент пластинки, перпендикулярный к срединной плоскости, остается при этом прямым и располагается нормально к искривленной срединной поверхности, которая играет роль нейтрального слоя пластинки. Допустим, что в том более общем случае, которым мы занимаемся сейчас, явление изгиба происходит таким же точно образом. Тогда удлинения элементов пластинки, параллельных осям  $x$  и  $y$ , и соответствующие им напряжения останутся такими же, как и в случае чистого изгиба (формулы (196)), и мы получим для моментов  $M_1$  и  $M_2$  прежние выражения (198).

Что касается момента  $H_1$ , то для его вычисления необходимо составить выражение для сдвигающих напряжений  $X_y$ . Соответствующий сдвиг  $e_{xy}$  определяется формулой

$$e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

где  $u$  и  $v$  — выражения для перемещений рассматриваемой точки пластинки по направлениям, параллельным осям  $x$  и  $y$ .

Перемещения эти легко находятся, если воспользоваться приведенной выше гипотезой. Предположим, что  $AB$  (рис. 90) представляет сечение срединной поверхности изогнутой пластинки плоскостью, параллельной  $zx$ . Какой-либо линейный элемент пластинки, перпендикулярный к срединной плоскости  $xu$ , после изгиба займет наклонное положение  $mn$ , нормальное к искривленной срединной поверхности. Так как срединная поверхность, по нашему предположению, не испытывает никаких растяжений и прогибы пластинки весьма малы, то перемещение какой-либо точки  $M$ , взятой на линейном элементе  $mn$ , по направлению оси  $x$  будет зависеть лишь от поворота  $mn$  на угол  $\frac{\partial w}{\partial x}$ .

Следовательно,

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Таким же образом найдем

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Для сдвига  $e_{xy}$  и сдвигающих напряжений  $X_y$  получаем

$$e_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad X_y = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{E}{1+\sigma} z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Следовательно,

$$H_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} X_y z dz = -\frac{Eh^3}{12(1+\sigma)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -D(1-\sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (205)$$

Подставив найденные выражения для моментов  $M_1$ ,  $M_2$  и  $H_1$  в уравнение (204), придем к такому дифференциальному уравнению для изогнутой поверхности пластинки:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q. \quad (206)$$

<sup>1</sup> Это, как легко показать, справедливо для всякого нормального сечения пластинки, испытывающей чистый изгиб.

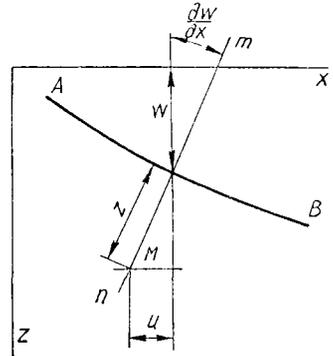


Рис. 90.

Уравнение это играет в теории изгиба пластинок такую же роль, что и уравнение (4) при исследовании изгиба балок. Если для какого-либо случая удастся найти решение уравнения (206), то при помощи формул (198) и (205) сейчас же находятся моменты  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $H_1$  и соответствующие им напряжения.

Перерезывающие силы  $N_1$  и  $N_2$  найдутся из уравнений (203). Подставляя в них значения  $M_1$ ,  $M_2$  и  $H_1$ , получаем

$$\begin{aligned} N_1 &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right); \\ N_2 &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right). \end{aligned} \quad (207)$$

В заключение приведем выражение для потенциальной энергии изогнутой пластинки. Энергия, накапливаемая в выделенном нами элементе, распадается на две части. Одна часть, соответствующая силам  $T_1$ ,  $T_2$  и  $S$ , представляет собой энергию деформации в плоскости пластинки. Другая часть, обусловленная моментами  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $H_1$  и силами  $N_1$  и  $N_2$ , представляет энергию изгиба, для которой мы желаем составить выражение. Роль перерезывающих сил  $N_1$  и  $N_2$  невелика, и потому в дальнейшем мы примем в расчет лишь энергию, соответствующую моментам.

Работу изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$  можем представить такой же формулой, как и в случае чистого изгиба [формула (201)]. Что касается работы скручивающего момента  $H$ , то ее подсчитаем так. Выделим из элемента бесконечно тонкий слой, параллельный срединной плоскости и отстоящий от нее на  $z$  (см. рис. 87). Соответствующее сдвигающее напряжение равно  $-\frac{E}{1+\sigma} z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  и энергия сдвига для выделенного тонкого слоя представится так:

$$\frac{E}{1+\sigma} z^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dz dx dy.$$

Для всего элемента энергия сдвига представится таким выражением:

$$\frac{E}{1+\sigma} dx dy \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dz = D(1-\sigma) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy.$$

Присоединяя это выражение к тому, что дает формула (201), получаем для энергии изгиба, накапливаемой в одном элементе пластинки, такое выражение:

$$dV = \frac{D}{2} \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\sigma) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy. \quad (208)$$

Путем интегрирования легко может быть получена энергия изгиба, накапливаемая всей пластинкой.

## § 50. Пределы применимости полученного уравнения

Приближенное уравнение предыдущего параграфа основано на следующих допущениях: 1) линейные элементы пластинки, перпендикулярные к срединной плоскости, после изгиба остаются прямыми и устанавливаются нормально к искривленной срединной поверхности; 2) срединная поверхность не испытывает никаких растяжений и играет роль нейтрального слоя. Допущения эти справедливы, пока мы имеем дело с чистым изгибом пластинки, но как только

мы переходим к более общему случаю изгиба поперечными нагрузками, задача становится более сложной. Ясно, что под влиянием касательных напряжений, соответствующих перерезывающим силам  $N_1$  и  $N_2$ , появятся сдвиги, которые вызовут искривление линейных элементов, перпендикулярных к срединной плоскости. Под влиянием нагрузки, лежащей на пластинке, наверное, возникнут напряжения  $Z_z$ , которые соответствуют надавливанию друг на друга слоев пластинки, параллельных срединной плоскости. Очевидно, что вследствие этих надавливаний срединная плоскость пластинки может испытать некоторые деформации в своей плоскости и уже не будет играть роль нейтрального слоя.

Для оценки степени достоверности сделанных допущений относительно деформации и выяснения надежности полученного приближенного решения приходится обращаться к имеющимся точным решениям<sup>1</sup>. Точные решения для изгиба пластинок силами, приложенными по контуру, а также сплошной нагрузкой, равномерно распределенной или изменяющейся по линейному закону, показывают, что во всех рассмотренных случаях приближенное уравнение (206) имеет место. Что касается применения формул (198) и (205) для определения моментов, то они не вполне точны. Соответствующие точные решения заключают в себе еще дополнительные члены, которыми оценивается влияние касательных напряжений и напряжений  $Z_z$  на величину прогиба пластинки. Однако значение этих членов весьма мало, пока толщина пластинки мала по сравнению с другими размерами<sup>2</sup>, и практически с этими поправками можно не считаться.

Гораздо большее влияние на степень точности приближенного уравнения (206) имеет величина трех прогибов  $w$ , которые получает пластинка. Условие малости прогибов ограничивает область применения полученного выше приближенного уравнения к исследованию изгиба пластинок в значительно большей степени, чем, например, при рассмотрении изгиба призматических стержней. Приближенная теория для призматических стержней дает удовлетворительные результаты даже в тех случаях, когда прогибы в несколько раз превосходят поперечные размеры стержня. Но в случае пластинок приближенное уравнение можно с уверенностью применять лишь тогда, когда прогибы пластинки малы по сравнению с ее толщиной. Причиной такой разницы между тонкими стержнями и тонкими пластинками является то обстоятельство, что искривление пластинки без деформаций в срединной плоскости возможно лишь в исключительных случаях, когда срединная плоскость обращается при изгибе в развертываемую поверхность<sup>3</sup>. Во всех других случаях изгиб сопровождается появлением деформаций в срединной поверхности. Деформации эти растут с прогибом и могут достигать значений такого же порядка, что и те деформации, которые учитываются приближенным решением. Эти обстоятельства легко объяснимы при рассмотрении простейшей задачи, которой является изгиб круглой пластинки парами сил, равномерно распределенными по контуру. Приближенное решение (200) соответствует в этом случае изгибу пластинки по шаровой поверхности. Пусть  $R$  — радиус этой поверхности,  $a$  — радиус пластинки и линия  $AOB$

<sup>1</sup> Точная теория пластинок принадлежит Дж. Мичеллу. См. его статью, упомянутую в сноске на стр. 50. Изложение ее в несколько упрощенном виде и приложения к частным случаям изгиба круглой и эллиптической пластинок имеются в указанном на стр. 9 курсе А. Лява (стр. 535 А. Love — А. Тисре или стр. 444 английского оригинала).

<sup>2</sup> Значения добавочных членов в случае изгиба круглой пластинки равномерной нагрузкой приведены на стр. 161.

<sup>3</sup> Так, например, в случае изгиба пластинки по цилиндрической поверхности возможны значительные прогибы без растяжений в срединной поверхности, поэтому полученные для этого случая решения (§ 46) применимы даже тогда, когда прогиб пластинки в несколько раз превосходит ее толщину.

(рис. 91) — диаметральное сечение изогнутой срединной поверхности. Если допустить, что радиусы, проведенные в срединной плоскости, при изгибе не изменяют своей длины, т. е. что  $OB = R\alpha = a$ , то в таком случае изгиб пластинки будет сопровождаться сжатием срединной поверхности по направлениям, перпендикулярным к проведенным радиусам. Вычислим это сжатие для окружности, представляющей контур пластинки. До деформации радиус этой окружности равнялся  $a$ . После изгиба контур пластинки, как видно из рисунка, имеет радиус  $CB = R \sin \alpha$ .

Интересующее нас относительное сжатие представится так:

$$e_{\theta\theta} = \frac{R\alpha - R \sin \alpha}{R\alpha} \approx \frac{\alpha^2}{6}.$$

Рис. 91.

Для удобства сравнения представим эту величину в зависимости от прогиба пластинки  $f$ . Из рисунка имеем

$$f = R(1 - \cos \alpha) = \frac{R\alpha^2}{2}.$$

Следовательно,

$$e_{\theta\theta} = \frac{f}{3R}. \tag{a}$$

Между тем максимальные удлинения, которые учитываются элементарной теорией, будут

$$(e_{rr})_{\max} = \frac{h}{2R}. \tag{b}$$

В действительности распределение деформаций в срединной плоскости является более сложным, чем мы предположили в нашем выводе, но максимальная величина деформаций будет такого же порядка, как и найденные нами удлинения (а), и пренебрегать этими деформациями по сравнению с тем, что нам дает элементарная теория [формула (b)], можно, как мы видим, лишь в том случае, если  $f$  мало по сравнению с  $h$ .

Ввиду практической важности этого заключения мы обратились к более точному решению задачи<sup>1</sup> об изгибе круглой пластинки парами сил, равномерно распределенными по контуру. При составлении уравнений приняли во внимание искривление срединной поверхности и таким образом получили уравнения

$$\frac{d^2u}{dr^2} = -\frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \frac{u}{r^2} - \frac{1-\sigma}{2r} \left(\frac{dw}{dr}\right)^2 - \frac{du}{dr} \frac{d^2w}{dr^2}; \quad \frac{d^3w}{dr^3} = -\frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} + \frac{12}{h^2} \frac{dw}{dr} \left[ \frac{du}{dr} + \sigma \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr}\right)^2 \right].$$

Уравнения эти для каждого частного случая могут быть проинтегрированы вычислительным путем. Результаты, относящиеся к одному численному примеру, приведены на



Рис. 92.

<sup>1</sup> Тимошенко С. П. О больших прогибах круглых пластинок. Сборник института инженеров путей сообщения, Петроград, 1915, вып. 89, стр. 1—10. Отд. оттиск, Петроград, 1915, 10 стр.

рис. 92, где графически представлены прогибы, моменты и напряжения на различных расстояниях от центра изгибаемой пластинки. Расстояния выражены через толщину пластинки  $h$ ; через  $w_0$  обозначены прогибы, получаемые элементарным путем;  $w$  — более точные значения прогибов;  $T_1$  и  $T_2$  обозначают растягивающие усилия в срединной поверхности, имеющие соответственно направления радиуса и перпендикуляра к нему. Из рисунка видно, что при прогибе пластинки, составляющем 0,6 толщины, наибольшие напряжения в срединной плоскости пластинки достигают 18% тех максимальных напряжений, которые получаются элементарным путем.

С возрастанием прогиба разность между результатами точного и приближенного решений будет возрастать.

## § 51. Условия на контуре пластинки

Задача об изгибе пластинки сводится, как мы видели, к решению дифференциального уравнения

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q. \quad (a)$$

При интегрировании этого уравнения возникает вопрос о тех условиях, которым должна удовлетворять функция  $w$  на контуре пластинки. Как, в самом деле, запишутся эти условия при различных способах закрепления краев пластинки? В дальнейшем нам придется иметь дело главным образом с прямоугольными пластинками, поэтому для упрощения составим граничные условия для  $w$  в случае прямоугольного контура.

Особенно просто граничные условия напишутся для *заделанного края*. Для точек этого края прогиб должен равняться нулю и плоскость, касательная к искривленной поверхности пластинки, должна быть параллельна первоначальному направлению срединной плоскости пластинки. Если, например, край прямоугольной пластинки, совпадающий с осью  $x$  (рис. 93), заделан, то граничные условия для этого края напишутся так:

$$(w)_{y=0} = 0; \quad \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0. \quad (209)$$

Рассмотрим теперь условия для *опертого края*. Опертый край при изгибе пластинки может свободно поворачиваться, но прогибы по такому краю должны равняться нулю. Предположим, например, что край пластинки, совпадающий с осью  $y$ , оперт. Принимая во внимание, что свободное поворачивание этого края предполагает отсутствие изгибающих моментов  $M_1$ , напишем соответствующие граничные условия таким образом<sup>1</sup>:

$$(w)_{x=0} = 0; \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} = 0. \quad (210)$$

Несколько более сложно решается вопрос о граничных условиях на *свободном крае* пластинки. Предположим, например, что край пластинки  $x = a$  (рис. 93) совершенно свободен.

В общем случае все усилия по этому краю могут быть приведены к непрерывному распределению изгибающих моментов  $M_1$ , скручивающих моментов  $H_1$  и перерезывающих сил  $N_1$ . Вообще естественно положить для свободного края

$$(M_1)_{x=a} = 0; \quad (H_1)_{x=a} = 0; \quad (N_1)_{x=a} = 0. \quad (b)$$

<sup>1</sup> Предполагается, что изгиб происходит под действием нагрузок, распределенных по поверхности пластинки.

Таким образом, вместо двух граничных условий, которые мы имели в случае *опертого* и *заделанного краев*, здесь получаются три условия (b). В таком виде граничные условия были установлены С. Пуассоном, который первым, после появления работ Софи Жермен<sup>1</sup>, занялся строгим обоснованием основного уравнения (a) для изогнутой поверхности пластинки. Значительно позднее Г. Кирхгоф<sup>2</sup> показал, что два последних условия (b) не могут быть удовлетворены одновременно и что они сводятся к одному. Существо этого вопроса может быть выяснено путем следующих элементарных соображений. Положим, что *тлрр*q (рис. 94) представляет собой свободный край пластинки.

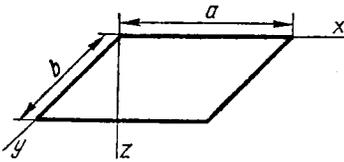


Рис. 93.

Выделим из него по длине бесконечно малый элемент ширины  $dy$ , заштрихованный на рисунке. Скручивающий момент, приходящийся на выделенный элемент, будет равен  $H_1 dy$ . На основании принципа Сен-Венана можно утверждать, что величина напряжений в точках пластинки, удаленных от выделенного элемента, не зависит от способа осуществления пары сил  $H_1 dy$ . Мы

можем, не вызывая перераспределения напряжений внутри пластинки, непрерывно распределенные касательные усилия, дающие момент  $H_1 dy$ , заменить парой сосредоточенных сил, причем направление этих сил выбрать совершенно произвольно.

Направим эти силы перпендикулярно к срединной плоскости по линиям, ограничивающим выделенный элемент края пластинки. Соответственно принятому нами ранее обозначению (см. рис. 89) направление этих сил будет такое, как указано на рис. 94, и так как плечо пары принято равным  $dy$ , то каждая из сил будет равна  $H_1$ , т. е. интенсивности скручивающего момента в рассматриваемом месте. Переходя от рассмотренного элемента к соседнему, ограниченному на рисунке пунктирной линией, можем произвести здесь такую же замену распределенных усилий парой сил. Но при этом нужно иметь в виду, что интенсивность скручивающих моментов вдоль края пластинки, вообще говоря, изменяется, поэтому мы для нового выделенного элемента получим силы, равные

$$H_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y} dy.$$

По линии *rs*, разграничивающей два рассмотренных элемента края пластинки, будут действовать, таким образом, две прямо противоположные силы  $H_1$  и  $H_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y} dy$ , и нам в дальнейшем придется считаться лишь с их разностью. Если представить себе весь край пластинки разделенным на бесконечно узкие

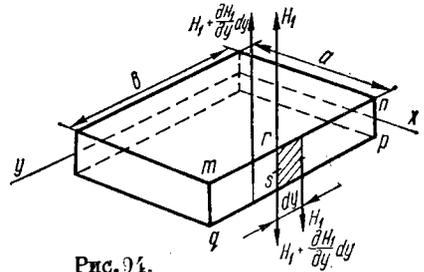


Рис. 94.

<sup>1</sup> Софи Жермен, которой принадлежит установление уравнения (a), исходила из ошибочного предположения относительно выражения для потенциальной энергии пластинки. Она полагала, что  $dV = \frac{D}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2 dx dy$ . См. Germain Sophie. Recherches sur la théorie des surfaces élastiques. Paris, Imprimerie de Hurard — Courcier, 1821, X, 96 pp.

<sup>2</sup> Kirchhoff G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Grelle), 1850, Bd 40, N 1, SS. 51—88. [Перепечатка: Kirchhoff G. Gesammelte Abhandlungen. Leipzig, Johann Ambrosius Barth, 1882, SS. 237—272].

элементы шириной  $dy$  и произвести для каждого элемента такое преобразование усилий, как это мы сделали выше, то мы получим по всем линиям, разграничивающим наши элементы, усилия  $\frac{\partial H_1}{\partial y} dy$ . Таким образом, непрерывное распределение скручивающих моментов на основании принципа Сен-Венана заменяется непрерывным распределением перерезывающих сил интенсивности  $\frac{\partial H_1}{\partial y}$ .

Присоединяя эти силы к силам  $N_1$ , получаем в случае свободного края вместо двух последних условий (b) одно такое условие:

$$\left(N_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y}\right)_{x=a} = 0. \quad (c)$$

Выражая условия на свободном крае в зависимости от  $w$  при помощи формул (198), (205) и (207), получаем

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a} = 0; \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right]_{x=a} = 0. \quad (211)$$

Производя описанную выше замену моментов  $H_1$  непрерывно распределенными перерезывающими усилиями интенсивности  $\partial H_1 / \partial y$ , мы должны остановиться на крайних элементах рассматриваемого края, прилегающих к углам пластинки. Очевидно, в каждом из этих двух элементов одна из сил пары  $H_1 dy$  останется неуравновешенной, поэтому мы в результате нашего преобразования кроме непрерывно распределенных перерезывающих сил получим еще две сосредоточенные силы (рис. 95), приложенные в вершинах пластинки. Совершенно таким же образом для края  $y = b$  кроме непрерывно распределенных перерезывающих усилий интенсивности

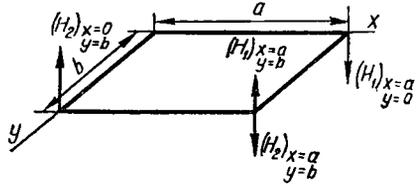


Рис. 95.

$$N_2 - \frac{\partial H_2}{\partial x} \quad (d)$$

получим у вершин сосредоточенные силы  $H_2$  (рис. 95).

Если для вершин пластинки  $H_2 = -H_1 = -H$ , то сосредоточенные силы приведутся к системе, представленной на рис. 96<sup>1</sup>. Стрелками указаны направления сил, соответствующие положительным значениям  $H$ . Для большей ясности рассмотрим направления этих сил для какого-либо частного случая. Возьмем, например, изгиб квадратной пластинки равномерно распределенной нагрузкой. Края пластинки будем считать опертыми. Для выяснения направлений сосредоточенных сил, появляющихся при изгибе в вершинах пластинки, нет надобности иметь уравнение для изогнутой поверхности пластинки. Достаточно иметь лишь общее представление о виде этой поверхности. Если равномерная нагрузка направлена параллельно оси  $z$ , то сечения искривленной срединной поверхности пластинки плоскостями, параллельными координатным плоскостям  $zx$  и  $zy$ , будут иметь вид, представленный на рис. 97. Прогибы, соответствующие этим сечениям, очевидно, будут тем меньшими, чем ближе сечение к соответствующей стороне контура. На основании этих общих данных мы можем установить знак второй производной  $\partial^2 w / \partial x \partial y$  для какой-либо точки  $A$ , взятой у вершины

<sup>1</sup> Вследствие резкого излома контура у вершин прямоугольной пластинки здесь может быть нарушено равенство  $H_1' = -H_2$ , которое имеет место внутри пластинки. Такому нарушению равенства соответствует нарушение непрерывности изменения напряжений у вершин пластинки.

$P$  прямоугольной пластинки. Первая производная  $\partial w/\partial x$  для этой точки отрицательна и по абсолютному значению равна тангенсу угла, составляемого касательной к сечению  $AC$  в точке  $A$  с плоскостью контура пластинки. Если мы будем приближать точку  $A$  к вершине  $P$ , то вследствие уменьшения кривизны соответствующего ей сечения  $AC$  отрицательная по знаку производная  $\partial w/\partial x$

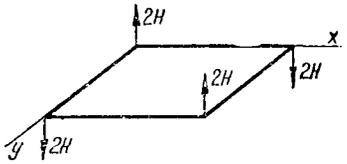


Рис. 96.

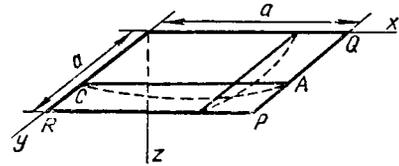


Рис. 97.

будет убывать по абсолютному значению, следовательно, производная  $\partial^2 w/\partial x \partial y$  положительна.

На основании формулы (205) заключаем, что  $H$  в точке  $P$  отрицательно, и соответствующая сосредоточенная сила будет иметь направление, противоположное тому, которое взято на рис. 96. Путем совершенно таких же рассуждений можем убедиться, что у вершины  $R$  вторая производная  $\partial^2 w/\partial x \partial y$  отрицательна. Следовательно,  $H$  положительно и соответствующая сосредоточенная сила

будет направлена так, как указано на рис. 96. Повторяя рассуждения для всех вершин квадратной пластинки, найдем, что сосредоточенные у вершин силы представляют систему, указанную на рис. 98. Все силы направлены вниз и прижимают вершины изгибаемой пластинки к контуру.

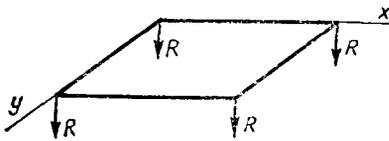


Рис. 98.

Опыты над изгибом квадратной пластинки с опертыми краями под действием

равномерной нагрузки показывают, что вершины пластинки при изгибе имеют тенденцию приподыматься, и, чтобы получить непрерывное соприкосновение краев пластинки с контуром, необходимо приложить в вершинах сосредоточенные силы, представленные на рис. 98.

Сосредоточенные силы, которые мы получали при замене моментов  $H$  соответствующим распределением перерезывающих сил, являются следствием изломов в контуре пластинки. Если контур пластинки представляет собой плавную кривую, мы получим лишь непрерывное распределение перерезывающих сил интенсивности  $\partial H/\partial s$ , где  $s$  — элемент дуги контура.

В тех случаях, когда  $H$  постоянно по всему контуру, производная  $\partial H/\partial s$  обращается в нуль. Следовательно, такое распределение скручивающих моментов не вызывает в пластинке деформаций. Мы исключаем при этом, конечно, части пластинки, лежащие непосредственно у контура, где придется иметь дело с местными напряжениями и деформациями.

Для одного частного случая, именно для прямоугольной пластинки, мы можем без всякого затруднения исследовать как общий изгиб, так и местные деформации пластинки под действием равномерно распределенных по контуру моментов  $H$ . Для этого воспользуемся решением Сен-Венана для кручения призмы прямоугольного поперечного сечения. Прямоугольную пластинку мы можем рассматривать как предельный случай такой призмы, когда одна из сторон прямоугольного сечения весьма мала по сравнению с другой. Рассмотрим сначала кручение пластинки моментами, приложенными по краям, параллельным оси  $x$  (рис. 99). Распределение касательных напряжений по этим краям возьмем таким же, как это получается из решения Сен-Венана для поперечных сечений скрученной призмы (см. ва-

стоящее издание). Для точек какой-либо линии  $mn$ , удаленной от вершин пластинки, касательные напряжения с большой точностью можно принимать параллельными срединной плоскости и пропорциональными расстоянию от этой плоскости. Совокупность всех этих напряжений дает лишь половину скручивающего момента. Другая половина этого момента состоит из напряжений, возникающих непосредственно у вершин пластинки от сосредоточенных сил  $P$  (рис. 99). Таким образом, распределение напряжений в пластинке, если исключить части, лежащие в непосредственной близости от краев, параллельных оси  $y$ , получается весьма простым. Отличными от нуля будут лишь напряжения  $X_y$ , для которых справедлива формула

$$X_y = 2\tau Gz, \quad (e)$$

где через  $\tau$  обозначен угол закручивания пластинки на единицу длины.

Для напряжений у краев имеем решение Сен-Венана в форме бесконечных рядов [§ 51 части первой].

Совершенно таким же образом можно найти напряжения при скручивании пластинки моментами, распределенными по краям, параллельным оси  $y$ . Выберем эти моменты такими, чтобы те силы, к которым приводятся касательные усилия у вершин пластинки, были равны по величине и противоположны по направлению силам  $P$ , найденным выше. Тогда напряжения, вызываемые этими моментами, будут такие:

$$X_y = -2\tau Gz. \quad (f)$$

Исключение составляют части пластинки, лежащие непосредственно у краев, параллельных оси  $x$ . Здесь более сложный закон распределения напряжений представляется решением Сен-Венана. Налагая друг на друга напряженные состояния, соответствующие двум рассмотренным выше скручиваниям, из сравнения формул (e) и (f) заключаем, что пластинка в этом случае окажется в общем не напряженной и лишь вблизи контура будут действовать касательные напряжения, которые легко вычисляются при помощи решения Сен-Венана.

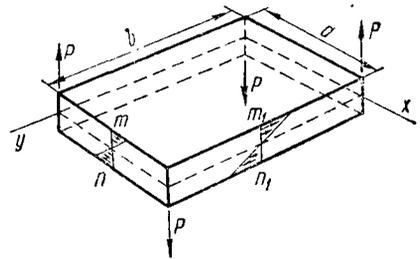


Рис. 99.

Мы рассмотрели три основных способа закрепления краев пластинки (заделанный, опертый и свободный край) и нашли соответствующие граничные условия для функции  $w$ . На практике приходится встречаться и с другими, промежуточными способами закрепления. Например, встречается такое закрепление края пластинки, когда прогиб по краю невозможен, поворачивание же края возможно, но сопровождается появлением изгибающих моментов, пропорциональных повороту. Таким образом получается *упруго заделанный край*. Иногда край пластинки опирается не на жесткий контур, а на какую-либо балку, прогибающуюся под действием приходящихся на нее давлений. В таком случае получим *упруго опертый край*. Возможны, конечно, и другие способы закрепления. Составление граничных условий для всех этих случаев, на основании того, что было выше сказано для трех основных способов закрепления, не представит никаких затруднений. Если, например, край пластинки  $y = b$  (см. рис. 93) *упруго заделан*, то соответствующие граничные условия напишутся так:

$$(w)_{y=b} = 0; \quad D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=b} = -\kappa \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b}.$$

Коэффициентом  $\kappa$  характеризуется *жесткость заделки* края. Составим теперь граничные условия для того случая, когда край пластинки ( $y = b$ ) опирается на балку жесткости  $EJ$ .

При изгибе пластинка будет производить на балку непрерывно распределенные давления, а балка в свою очередь будет оказывать на край пластинки равные и прямо противоположные этим давлениям реакции. Реакции эти соста-

вятся из перерезывающих сил  $N_2$  и из сил  $-\frac{\partial H_2}{\partial x}$ , заменяющих действие скручивающих моментов  $H_2$ . Следовательно, балка, поддерживающая край пластинки, окажется загруженной сплошной нагрузкой интенсивности

$$-\left(N_2 - \frac{\partial H_2}{\partial x}\right) = D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right].$$

Пользуясь дифференциальным уравнением (4) для изогнутой оси балки, найдем искомое граничное условие таким образом:

$$EJ \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)_{y=b} = D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=b}. \quad (212)$$

Второе условие при свободном поворачивании рассматриваемого края напишется так:

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=b} = 0.$$

Если же упруго опертый край вовсе не может поворачиваться, то в таком случае будем иметь

$$\left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} = 0.$$

Без всяких затруднений может быть написано граничное условие и в том случае, когда поворачиванию края препятствует упругое закрепление.

## § 52. Изгиб эллиптической пластинки с заделанными краями<sup>1</sup>

Задача об изгибе эллиптической пластинки с заделанными краями в случае действия равномерно распределенной нагрузки решается особенно просто. В самом деле, мы удовлетворим дифференциальному уравнению

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q \quad (a)$$

и условиям на контуре нашей пластинки (рис. 100), если положим

$$w = c \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2, \quad (b)$$

где для краткости введено обозначение

$$c = \frac{q}{D \left( \frac{24}{a^4} + \frac{24}{b^4} + \frac{16}{a^2 b^2} \right)}. \quad (c)$$

Для проверки этого составим последовательные производные от  $w$ :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{4cx}{a^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right); \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{4cy}{b^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right); \quad (d)$$

<sup>1</sup> Решение этой задачи принадлежит Дж. Брайану. Результаты Дж. Брайана приведены на стр. 463—464 книги А. Love, указанной в списке на стр. 9 (стр. 557—559 немецкого перевода).

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{8cx^3}{a^4} + \frac{4c}{a^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right);$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{8cy^3}{b^4} + \frac{4c}{b^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right);$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{24c}{a^4}; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{24c}{b^4}; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{8c}{a^2 b^2}.$$

При подстановке четвертых производных (f) в уравнение (a) убеждаемся, что при выбранном значении  $c$  уравнение это будет удовлетворено. Кроме того, из уравнения контура пластинки

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

следует [см. (b) и (d)], что на контуре

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

т. е. прогибы на контуре равны нулю и края пластинки не поворачиваются. Таким образом, решение (b) удовлетворяет всем поставленным условиям и представляет собой искомое решение задачи.

Имея выражение для прогиба, мы легко находим все элементы, характеризующие изгиб пластинки. Наибольший прогиб получится, очевидно, в центре пластинки и мы его найдем, если в общем решении (b) положим  $x = y = 0$ .

Тогда

$$(w)_{\max} = c = \frac{q}{D \left( \frac{24}{a^4} + \frac{24}{b^4} + \frac{16}{a^2 b^2} \right)}. \quad (213)$$

Когда  $b = a$ , контур пластинки обращается в круг, и мы получаем известную формулу для прогиба круглой пластинки с заделанными краями:

$$(w_1)_{\max} = \frac{qa^4}{64D}.$$

Другой предельный случай получим, положив  $b = \infty$ , тогда

$$(w_2)_{\max} = \frac{qa^4}{24D} = \frac{q(2a)^4}{384D}.$$

Это — прогиб балки-полоски пролетом  $2a$  при действии равномерно распределенной нагрузки.

Для вычисления напряжений нужно обратиться к выражениям (198) для изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$ . Наибольших напряжений следует ожидать у концов малой полуоси эллипса и в центре пластинки. Положим  $b > a$ , тогда нужные для расчета значения  $M_1$  будут

$$(M_1)_{x=\pm a} = -D \left( \frac{\partial w^2}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial w^2}{\partial y^2} \right)_{x=\pm a} = -D \frac{8c}{a^2};$$

$$(M_1)_{x=y=0} = D4c \left( \frac{1}{a^2} + \frac{\sigma}{b^2} \right).$$

Следовательно, наибольшее напряжение имеет место у концов малой полуоси, где  $M_1$  достигает наибольшего значения. Величина этого напряжения

$$(X_x)_{\max} = D \frac{8c}{a^2} \cdot \frac{6}{h^2} = \frac{6q}{h^2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{3a^2}{b^4}}. \quad (214)$$

Если положить  $a = b$ , то приходим к известной формуле для круглой пластинки с заделанными краями:

$$(X_x)_{\max} = \frac{3}{4} \frac{qa^2}{h^2}.$$

При  $b = \infty$  получим напряжение, соответствующее изгибу балки-полоски с заделанными концами под действием равномерной нагрузки. При помощи формул (198) и (205) мы можем вычислить значения  $M_1$ ,  $M_2$  и  $H$  для любой точки пластинки и определить соответствующие им значения  $X_x$ ,  $Y_y$  и  $X_y$ . По этим величинам легко находятся в любой точке значения главных напряжений.

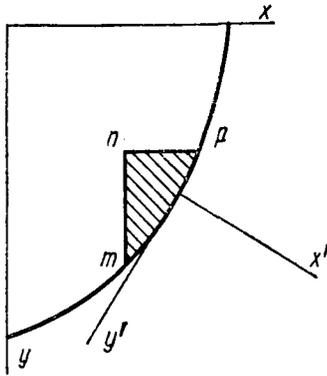


Рис. 101.

Найдем выражения для моментов и перерезывающих сил, действующих по криволинейному контуру нашей пластинки. Пусть  $mnp$  (рис. 101) представляет элемент пластинки, выделенный у контура сечениями, параллельными плоскостям  $zx$  и  $zy$ .

Направление внешней нормали к контуру и направление элемента контура примем за оси  $x'$  и  $y'$ . Тогда, обозначив через  $\theta$  угол между  $x$  и  $x'$ , получим такую таблицу значений косинусов углов между новыми и старыми осями:

	$x$	$y$
$x'$	$\cos \theta$	$\sin \theta$
$y'$	$-\sin \theta$	$\cos \theta$ .

При помощи этой таблицы составляем выражения для напряжений по площадке, нормальной к  $x'$  [см. ч. первую, § 5, формулы (6) и (7)]:

$$X'_{x'} = X_x \cos^2 \theta + Y_y \sin^2 \theta + X_y \sin 2\theta; \quad (215)$$

$$X'_{y'} = -\frac{1}{2} (X_x - Y_y) \sin 2\theta + X_y \cos 2\theta.$$

Отсюда легко находим выражения для изгибающих и скручивающих моментов, действующих по краю пластинки:

$$M = \int_{-h/2}^{+h/2} X'_{x'} z dz = M_1 \cos^2 \theta + M_2 \sin^2 \theta + H_1 \sin 2\theta; \quad (216)$$

$$H = \int_{-h/2}^{+h/2} X'_{y'} z dz = -\frac{1}{2} (M_1 - M_2) \sin 2\theta + H_1 \cos 2\theta.$$

Проектируя все силы, приложенные к выделенному элементу  $mnp$ , на направление оси  $z$ , получаем выражение для перерезывающих сил  $N$ , действующих по краю пластинки:

$$N = N_1 \cos \theta + N_2 \sin \theta. \quad (217)$$

Формулы (215), (216) и (217) решают вопрос о напряжениях, моментах и перерезывающей силе, действующих по любому нормальному сечению пластинки. Вычислим, например, значение перерезывающей силы на контуре нашей

пластинки. На основании общих формул (207) получаем

$$N_1 = -D \left( \frac{24cx}{a^4} + \frac{8cx}{a^2b^2} \right); \quad N_2 = -D \left( \frac{24cy}{b^4} + \frac{8cy}{a^2b^2} \right).$$

Кроме того, из уравнения эллиптического контура имеем

$$\cos \theta = \frac{dy}{ds} = \frac{xb^2}{\sqrt{y^2a^4 + x^2b^4}}; \quad \sin \theta = -\frac{dx}{ds} = \frac{ya^2}{\sqrt{y^2a^4 + x^2b^4}}.$$

Подставляя полученные выражения  $\cos \theta$  и  $\sin \theta$  в формулу (217), получаем

$$N = -\frac{8Dc}{\sqrt{y^2a^4 + x^2b^4}} \left\{ \frac{x^2}{a^2} \left( \frac{3b^2}{a^2} + 1 \right) + \frac{y^2}{b^2} \left( \frac{3a^2}{b^2} + 1 \right) \right\}.$$

При  $a = b$

$$N = -\frac{32Dc}{a^3} = -\frac{qa}{2}.$$

Этот результат для круглой пластинки можно было бы получить сразу делением нагрузки  $pa^2q$ , лежащей на пластинке, на окружность  $2\pi a$ .

При составлении выражения для давлений, воспринимаемых контуром, нужно к перерезывающим силам  $N$  присоединить непрерывно распределенные усилия, заменяющие скручивающие моменты  $H$ . Принимая во внимание направление для  $H$ , принятое при составлении формулы (216), мы путем таких же рассуждений, как и в предыдущем параграфе, найдем для реакций контура выражение  $N + \partial H / \partial s$ .

Имея это выражение и формулы (216) и (217), мы легко могли бы составить граничные условия для любого способа закрепления эллиптической пластинки. К сожалению, до сих пор удалось получить решение лишь для рассмотренного выше случая пластинки с заделанными краями.

## § 53. Изгиб круглой пластинки

Некоторые решения для круглой пластинки мы могли получить выше, рассматривая ее как частный случай пластинки с эллиптическим контуром. Но задача об изгибе круглой пластинки может быть разрешена в гораздо более общем случае<sup>1</sup>. При разыскании этого решения выгодно, конечно, пользоваться полярными координатами. Располагая начало координат в центре пластинки и определяя положение какой-либо точки величиной радиуса-вектора  $r$  и углом  $\theta$ , составляемым этим радиусом с осью  $x$ , будем иметь  $x = r \cos \theta$ ;  $y = r \sin \theta$ . Введя вместо  $x$  и  $y$  новые переменные  $r$  и  $\theta$ , получим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$$

Общее уравнение (206) для изогнутой пластинки напишется так:

$$D \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = q$$

или, выполняя дифференцирование,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \right. \\ \left. - \frac{2}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + 4 \frac{w}{r^4} \right) + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} = \frac{q}{D}. \end{aligned} \quad (218)$$

<sup>1</sup> Имеется общее решение для изгиба круглой пластинки нагрузкой, нормальной к средней плоскости и любым образом распределенной по поверхности пластинки. См. § 75, стр. 763 книги А. Clebsch, указанной в сноске на стр. 10.

А. Клебш дал общее решение этого уравнения и применил его к случаю действия на пластинку одной сосредоточенной силы. Имея решение для сосредоточенной силы, мы путем наложения найдем изгиб пластинки любой системой сил, перпендикулярных к пластинке.

Ограничимся здесь простейшим случаем, когда нагрузка, изгибающая пластинку, распределена симметрично относительно центра. При этом условии срединная поверхность изогнутой пластинки будет поверхностью вращения и величина прогиба  $w$  будет зависеть лишь от расстояния  $r$  рассматриваемой точки до центра пластинки. В таком случае в уравнении (218) пропадут члены, заключающие производные по  $\theta$ , и мы получим

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{q}{D} \quad (218')$$

Общий интеграл соответствующего уравнения без последнего члена напишется так<sup>1</sup>:  $w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4$ . Присоединяя к нему частное решение уравнения (218'), получаем общее выражение для  $w$ . Особенно просто решается задача в тех случаях, когда интенсивность нагрузки  $q$  представляется целой алгебраической функцией от  $r$ .

Возьмем, например, равномерно распределенную нагрузку. В этом случае  $q$  — постоянно и частное решение уравнения (218') напишется так:

$$w = \frac{qr^4}{64D}.$$

Произвольные постоянные в общем интеграле

$$w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 + \frac{qr^4}{64D}$$

нужно определить из условий на контуре и в центре пластинки (мы предполагаем пластинку сплошной). Чтобы прогиб пластинки и кривизна в центре (при  $r = 0$ ) получались конечными, нужно положить в общем интеграле  $C_1 = C_2 = 0$ .

Условия на контуре ( $r = a$ ) напишутся различно в зависимости от способа закрепления. Для заделанного края будем иметь

$$(w)_{r=a} = 0; \quad \left( \frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = 0. \quad (a)$$

В случае опертого края нужно составить выражение для изгибающих моментов по контуру и приравнять это выражение нулю. Совмещая ось  $x$  с направлением  $r$  и принимая во внимание, что в этом случае для симметричного изгиба имеют место равенства

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0,$$

найдем для изгибающих моментов, действующих по краю пластинки, выражение

$$M = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=a} \quad (b)$$

Условия для опертого края напишутся так:

$$(w)_{r=a} = 0; \quad \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = 0. \quad (c)$$

Определяя произвольные постоянные  $C_3$  и  $C_4$ , на основании условий (a), получаем для пластинки с заделанным краем

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2. \quad (219)$$

Подобным же образом для пластинки с опертым краем найдем

$$w = \frac{q}{64D} \left\{ (a^2 - r^2)^2 + \frac{4a^2 (a^2 - r^2)}{1 + \sigma} \right\}. \quad (220)$$

<sup>1</sup> Такое уравнение мы имели при решении плоской задачи в полярных координатах (см. стр. 95).

Имея уравнение изогнутой поверхности, легко найти значения изгибающих и скручивающих моментов, а также соответствующие им напряжения. Мы приняли ось  $x$  совпадающей с направлением  $r$ . В таком случае

$$M_1 = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \sigma \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right); \quad M_2 = -D \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \sigma \frac{d^2 w}{dr^2} \right); \quad H = 0.$$

Подставив сюда вместо  $w$  выражение (219), найдем

$$M_1 = \frac{q}{16} [a^2 (1 + \sigma) - r^2 (3 + \sigma)];$$

$$M_2 = \frac{q}{16} [a^2 (1 + \sigma) - r^2 (1 + 3\sigma)].$$

На контуре пластинки будем иметь

$$M_1 = -\frac{qa^2}{8}; \quad M_2 = -\frac{\sigma qa^2}{8}.$$

В центре

$$M_1 = M_2 = \frac{qa^2 (1 + \sigma)}{16}.$$

Наибольшие напряжения получаются у заделанного края, где

$$(\bar{r}r)_{\max} = \frac{3}{4} \frac{qa^2}{h^2}.$$

В случае пластинки с открытым краем получим

$$M_1 = \frac{q}{16} [a^2 (3 + \sigma) - r^2 (3 + \sigma)];$$

$$M_2 = \frac{q}{16} [a^2 (3 + \sigma) - r^2 (1 + 3\sigma)].$$

Наибольшие напряжения имеют место в центре пластинки, где

$$M_1 = M_2 = \frac{(3 + \sigma) qa^2}{16}; \quad \bar{r}r_{\max} = \frac{3(3 + \sigma)}{8} \frac{qa^2}{h^2}.$$

Сравним полученные здесь результаты приближенной теории пластинок с точными решениями. Для пластинки с открытым краем точное решение дает (см. стр. 161)

$$\bar{r}r_{\max} = \left[ \frac{3(3 + \sigma)}{8} \frac{a^2}{h^2} - \frac{3}{8} \frac{2 + \sigma}{5} + \frac{2 + \sigma}{8} \right] q;$$

$$w = \frac{q}{64D} \left[ (a^2 - r^2)^2 + \frac{4a^2(a^2 - r^2)}{1 + \sigma} \right] + \frac{q}{8D} (a^2 - r^2) \frac{8 + \sigma + \sigma^2}{5(1 - \sigma^2)} h^2.$$

Мы видим, что в тех случаях, когда толщина пластинки  $h$  мала по сравнению с радиусом  $a$ , поправки, которые получаются путем точного решения, весьма малы (порядка  $h^2/a^2$ ) и мы можем при расчетах ими пренебрегать. Также же заключения относительно точности приближенного решения можно получить и для пластинки с заделанными краями.

Путем элементарных соображений, аналогичных тем, которыми пользуются при оценке влияния касательных сил на прогиб балок, можно показать, что главная часть поправки к приближенному выражению для прогиба пластинки (220) соответствует действию касательных напряжений  $\bar{r}z$ .

В заключение приводим окончательные результаты, получаемые из уравнения (218') для нескольких частных видов нагрузки.

1. Для пластинки с открытым краем, нагруженной в центре сосредоточенной силой  $P$ ,

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[ -r^2 \ln \frac{a}{r} + \frac{1}{2} \frac{3 + \sigma}{1 + \sigma} (a^2 - r^2) \right].$$

2. При той же нагрузке, но для пластинки с заделанным краем

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[ -r^2 \ln \frac{a}{r} + \frac{1}{2} (a^2 - r^2) \right].$$

3. Для пластинки с опертым краем, несущей нагрузку  $P$ , равномерно распределенную по кругу радиуса  $b$ , выражение для  $w$  имеет различные формы в зависимости от того, будет ли  $r$  больше или меньше  $b$ :

$$w_{r>b} = \frac{P}{8\pi D} \left[ -(r^2 + b^2) \ln \frac{a}{r} + \frac{(3 + \sigma) a^2 - (1 - \sigma) b^2}{2(1 + \sigma) a^2} (a^2 - r^2) \right];$$

$$w_{r<b} = \frac{P}{8\pi D} \left[ -(r^2 + b^2) \ln \frac{a}{b} + (r^2 - b^2) + \frac{(3 + \sigma) a^2 - (1 - \sigma) b^2}{2(1 + \sigma) a^2} (a^2 - r^2) \right];$$

4. При той же нагрузке, но для пластинки с заделанным краем будем иметь <sup>1</sup>

$$w_{r<b} = \frac{P}{8\pi D} \left[ -(r^2 + b^2) \ln \frac{a}{b} + (r^2 - b^2) + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right) (a^2 - r^2) \right];$$

$$w_{r>b} = \frac{P}{8\pi D} \left[ -(r^2 + b^2) \ln \frac{a}{r} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right) (a^2 - r^2) \right].$$

Задача об изгибе круглой пластинки, лежащей на сплошном упругом основании, решена Г. Герцем <sup>2</sup>.

Если через  $k$  обозначим коэффициент, на который нужно множить прогиб  $w$ , чтобы получить интенсивность реакции основания в рассматриваемой точке и, кроме того, введем обозначение  $\alpha = \sqrt[4]{D/k}$ , то для максимального прогиба пластинки бесконечно большого радиуса под действием приложенной в центре силы  $P$  получим выражение  $w = P/8k\alpha^2$ . Пластика при этом подразделится на ряд волн, идущих по концентрическим кругам и постепенно затухающих по мере удаления от точки приложения силы. Мы получаем, таким образом, явление, аналогичное тому, которое имеет место при изгибе бесконечно длинной балки, лежащей на упругом основании и нагруженной сосредоточенной силой.

## § 54. Изгиб прямоугольной пластинки с опертыми краями <sup>3</sup>

Пусть  $a$  и  $b$  — длины сторон прямоугольной пластинки (рис. 102). Поместим начало координат в одной из вершин прямоугольного контура и направим оси по сторонам пластинки. Интенсивность сплошной изгибающей нагрузки в общем случае будет переменной, и мы ее определим некоторой функцией  $f(x, y)$ . Тогда дифференциальное уравнение изогнутой поверхности пластинки напишется так:

$$\frac{\partial w^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial w^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial w^4}{\partial y^4} = \frac{1}{D} f(x, y). \quad (a)$$

Так как края пластинки оперты, то на контуре прогиб  $w$  и изгибающие моменты  $M_1$  и  $M_2$  должны равняться нулю. Следовательно,  $w = 0$  при  $x = 0$ ,

<sup>1</sup> Решения 3 и 4 принадлежат Сен-Венану. См. обширное примечание к § 45 перевода книги А. Clebsch, указанного в списке на стр. 10. Решения 1 и 2, а также результаты (219) и (220) были получены С. Пуассоном. Poisson S. Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques. Mémoires de l'Académie Royale des sciences de l'institut de France, 1829, t. 8, pp. 357—570. (§ VI. Equations de l'équilibre et du mouvement d'une plaque élastique, pp. 523—545; § VII. Application des formules précédents à l'équilibre et au mouvement d'une plaque circulaire, pp. 545—570).

<sup>2</sup> Hertz H. Gesammelte Werke. Bd 3. Die Prinzipien der Mechanik, Leipzig, I. A. Barth, 1895, 288. SS. Решение этой задачи при различных нагрузках с помощью функций Бесселя имеется в статье А. Н. Динника, упомянутой в списке на стр. 128.

<sup>3</sup> Приводимое ниже решение принадлежит Л. Навье. См. примечание Сен-Венана Note finale du § 73, p. 740 в переводе книги А. Clebsch на французский язык, указанном в списке на стр. 10.

$x = a, y = 0, y = b:$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0 \text{ при } x = 0, x = a; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \text{ при } y = 0, y = b. \end{aligned}$$

Мы удовлетворим всем условиям на контуре пластинки, если возьмем для прогиба пластинки выражение

$$A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (b)$$

где  $m$  и  $n$  — целые числа. Подставив выражение (b) в левую часть уравнения (a), получим выражение

$$A_{mn} \pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

и уравнение будет удовлетворено лишь в том случае, если интенсивность изгибающей нагрузки в каждой точке пропорциональна принятому прогибу (b). Чтобы получить решение для любого распределения сплошной нагрузки, воспользуемся тем обстоятельством, что любую форму искривленной поверхности нашей пластинки можно представить в виде двойного бесконечного ряда, члены которого будут иметь вид (b). В таком случае можно положить

$$w = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (c)$$

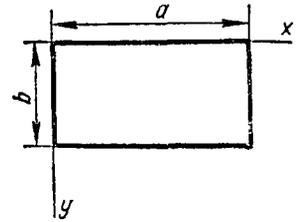


Рис. 102.

Подставляя это выражение в уравнение (a), находим, что коэффициенты  $A_{mn}$  ряда (c) должны быть подобраны так, чтобы было выполнено условие

$$\pi^4 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \frac{1}{D} f(x, y). \quad (d)$$

Для определения этих коэффициентов воспользуемся известным приемом. Помножим обе части равенства (d) на  $\sin \frac{n'\pi y}{b} dy$  и потом проинтегрируем в пределах от 0 до  $b$ . Принимая во внимание, что

$$\left. \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dy \right\} = 0 \text{ при } n \neq n' \\ = \frac{b}{2} \text{ при } n = n',$$

перепишем равенство (d) таким образом:

$$\frac{b}{2} \pi^4 \sum_{m=1}^{m=\infty} A_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{1}{D} \int_0^b f(x, y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy. \quad (d')$$

В левой части суммирование выполняется по  $m$ ; число  $n$  остается постоянным и равным  $n'$ . Чтобы привести полученный ряд к одному члену, помножим обе части равенства (d') на  $\sin \frac{m'\pi x}{a} dx$  и проинтегрируем в пределах от 0 до  $a$ . При этом пропадут все члены ряда, кроме того, для которого  $m = m'$ , и мы

в заключение получим

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \pi^4 A_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = \frac{1}{D} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} f(x, y) dy. \quad (d^*)$$

Если закон распределения изгибающей нагрузки задан, мы вставляем соответствующую функцию  $f(x, y)$  в равенство  $(d^*)$  и, выполняя интегрирование, получаем искомое значение коэффициента  $A_{mn}$ . Например, в случае равномерной нагрузки интенсивности  $q$  будем иметь

$$f(x, y) = q;$$

$$\frac{1}{D} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} f(x, y) dy = \frac{qab}{Dm\pi n^3} (1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi).$$

Уравнение  $(d^*)$  дает нам

$$A_{mn} = \frac{16q}{D\pi^4 mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

при  $m$  и  $n$  нечетных,

$$A_{mn} = 0$$

при  $m$  и  $n$  четных. Подставляя найденные выражения для  $A_{mn}$  в общую формулу (с), получаем для прогиба пластинки под действием равномерной нагрузки такое выражение:

$$w = \frac{16q}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{m\pi \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (221)$$

Если пластинка изгибается сосредоточенной силой  $P$ , приложенной в точке  $x = c$ ,  $y = d$ , то функция  $f(x, y)$  равна нулю по всей поверхности пластинки, кроме точки приложения силы, и мы найдем из  $(d^*)$

$$A_{mn} = \frac{4P \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b}}{D\pi^4 ab \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}.$$

В этом случае получаем для прогиба выражение

$$w = \frac{4P}{D\pi^4 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b}}{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (222)$$

Подобным же образом легко может быть получено выражение для  $w$  при всякой другой нагрузке<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Решение (с), которым мы здесь воспользовались, может быть распространено на тот случай, когда изгибаемая прямоугольная пластинка с опертными краями лежит на упругом основании. См. работу А. И. Маслова «К вопросу об устойчивости сжатых пластин, лежащих на упругом опорном контуре». С.-Петербург, тип. Морского министерства при Главном адмиралтействе, 1914, 13 стр.

Остановимся теперь подробнее на случае действия равномерно распределенной нагрузки, с которым часто приходится встречаться при технических расчетах.

Имея общее выражение (221) для прогиба и полагая в нем  $x = a/2$ ,  $y = b/2$ , получаем значение стрелки прогиба в центре пластинки

$$(w)_{\max} = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5 \dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5 \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}.$$

Подставляя вместо  $D$  его выражение и вычисляя значение двойной суммы при заданном соотношении между сторонами пластинки, можем представить максимальный прогиб так:

$$(w)_{\max} = \alpha \frac{qa^4}{Eh^3}.$$

Ряд значений коэффициента  $\alpha$  приводим в табл. 26<sup>1</sup>. Из нее видно, что с увеличением отношения  $b/a$  величина прогиба прямоугольной пластинки быстро приближается к прогибу пластинки, изгибаемой по цилиндрической поверхности (этот изгиб будем иметь при  $b/a = \infty$ ). При  $b/a = 3$  разность в прогибах составляет примерно 6,5% прогиба пластинки. При  $b/a = 5$  эта разность меньше 0,5%.

Для изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$  на основании (198) будем иметь

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ &= \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5 \dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5 \dots}^{\infty} \frac{m^2 + \sigma \frac{n^2}{\mu^2}}{mn \left( m^2 + \frac{n^2}{\mu^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ M_2 &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \\ &= \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5 \dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5 \dots}^{\infty} \frac{\frac{n^2}{\mu^2} + \sigma m^2}{mn \left( m^2 + \frac{n^2}{\mu^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Здесь через  $\mu$  обозначено отношение  $b/a$ .

На основании полученных выражений заключаем, что для двух пластинок с одинаковым отношением сторон  $\mu$  напряжения в соответствующих точках будут одинаковы, если только равны полные нагрузки, лежащие на пластинках<sup>2</sup>. В силу симметрии заключаем, что наибольшие напряжения имеют место

<sup>1</sup> Таблица заимствована из статьи Б. Г. Галеркина «Прямоугольные пластины, опертые по краям». Изв. Петроградского политехнического института. Отдел техники, естественных наук и математики, 1915, том 24, вып. 1, стр. 219—282 [Перепечатка: Галеркин Б. Г. Собрание сочинений, М., Изд-во АН СССР, том 2, 1953, стр. 3—42]. Б. Г. Галеркин берет для  $w$  выражение, отличное от (221). Те ряды, при помощи которых у него выражаются прогиб и другие элементы, характеризующие изгиб пластинки, оказываются более удобными для вычислений, чем ряды решения Навье. При вычислении табл. 26 принято  $\sigma = 0,3$ .

<sup>2</sup> Заключение это впервые было сделано Ф. Мариоттом. См. стр. 752 книги А. Clebsch, указанной в сноске на стр. 10.

в центре пластинки. Полагая  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = \frac{b}{2}$ , находим

$$(M_1)_{\max} = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5 \dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5 \dots}^{\infty} \frac{m^2 + \frac{\sigma n^2}{\mu^2}}{mn \left(m^2 + \frac{n^2}{\mu^2}\right)^2} (-1)^{\frac{m+n}{2}+1} = \beta qa^2;$$

$$(M_2)_{\max} = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5 \dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5 \dots}^{\infty} \frac{\frac{n^2}{\mu^2} + \sigma m^2}{mn \left(m^2 + \frac{n^2}{\mu^2}\right)^2} (-1)^{\frac{m+n}{2}-1} = \beta_1 qa^2.$$

Значения коэффициентов  $\beta$  и  $\beta_1$  при разных соотношениях между сторонами приведены в табл. 26. С увеличением длины пластинки значение максимального изгибающего момента приближается к величине, соответствующей изгибу пластинки по цилиндрической поверхности. Если при  $\mu = 3$  расчет пластинки заменить расчетом балки-полоски длины  $a$ , то в

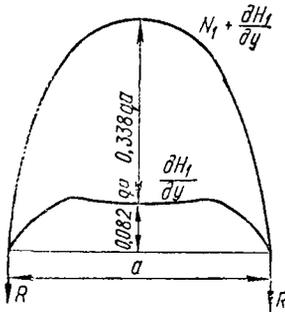


Рис. 103.

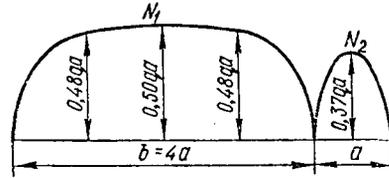


Рис. 104.

величине максимального момента получим погрешность, составляющую около 5%. При  $\mu = 5$  погрешность эта составит лишь  $\frac{1}{3}\%$ .

Для определения перерезывающих сил воспользуемся формулами (207)

$$N_1 = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right);$$

$$N_2 = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right).$$

Подставив в эти формулы вместо  $w$  его значение и произведя соответствующие вычисления, убедимся, что наибольшие значения перерезывающих сил имеют место в средних точках сторон пластинки. Эти максимальные значения  $N_1$  и  $N_2$  могут быть представлены в таком виде:

$$(N_1)_{\max} = \gamma qa; \quad (N_2)_{\max} = \gamma_1 qb,$$

значения коэффициентов  $\gamma$  и  $\gamma_1$  приведены в табл. 26.

Для получения давлений, передаваемых пластинкой на контур, нужно к  $N_1$  и  $N_2$  присоединить еще дополнительные усилия  $\frac{\partial H_1}{\partial y}$  и  $\frac{\partial H_1}{\partial x}$  (см. § 51), обусловленные скручивающим моментом  $H_1$ . Давления в средних точках сторон контура пластинки представятся так:

$$\left( N_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y} \right)_{y = \frac{b}{2}; x = 0} = \delta qa;$$

$$\left( N_2 + \frac{\partial H_1}{\partial x} \right)_{x = \frac{a}{2}; y = 0} = \delta_1 qb.$$

Коэффициенты  $\delta$  и  $\delta_1$ , вычисленные для различных значений  $\mu$ , приведены в табл. 26. Кроме того, на рис. 103 представлено изменение полных давлений и давлений, соответствующих скручивающим моментам  $H_1$ , вдоль стороны квадратной пластинки. На рис. 104<sup>1</sup> представлено изменение вдоль контура перерезывающих сил  $N_1$  и  $N_2$  для пластинки с отношением сторон  $\mu = 4$ . Вычисления показывают, что опорные реакции, соответствующие  $N_1$  и  $N_2$ , уравнивают нагрузку, лежащую на пластинке. Дополнительные реакции от скручивающих моментов  $H_1$  уравнивают сосредоточенные реактивные силы  $R$ , действующие в вершинах пластинки.

Полное давление, соответствующее перерезывающим силам  $N_2$  и передающееся на короткую сторону пластинки, медленно возрастает с увеличением

Таблица 26

$\mu = \frac{b}{a}$	$\alpha = \frac{Eh^2 w_{\max}}{qa^4}$	$\beta = \frac{(M_1)_{\max}}{qa^2}$	$\beta_1 = \frac{(M_2)_{\max}}{qa^2}$	$\gamma = \frac{(N_1)_{\max}}{qa}$	$\gamma_1 = \frac{(N_2)_{\max}}{qab}$	$\delta = \frac{\left(N_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y}\right)_{\max}}{qa}$	$\delta_1 = \frac{\left(N_2 + \frac{\partial H_1}{\partial x}\right)_{\max}}{qab}$	$m = \frac{R}{qab}$
1,0	0,0443	0,0479	0,0479	0,338	0,338	0,420	0,420	0,065
1,1	0,0530	0,0553	0,0494	0,360	0,315	0,440	0,400	0,064
1,2	0,0616	0,0626	0,0501	0,380	0,294	0,455	0,377	0,062
1,3	0,0697	0,0693	0,0504	0,397	0,275	0,468	0,357	0,061
1,4	0,0770	0,0753	0,0506	0,411	0,258	0,478	0,337	0,059
1,5	0,0843	0,0812	0,0500	0,424	0,242	0,486	0,323	0,057
1,6	0,0906	0,0862	0,0493	0,435	0,229	0,491	0,303	0,054
1,7	0,0964	0,0908	0,0486	0,444	0,216	0,496	0,287	0,052
1,8	0,1017	0,0948	0,0479	0,452	0,205	0,499	0,273	0,050
1,9	0,1064	0,0985	0,0471	0,459	0,194	0,502	0,260	0,048
2,0	0,1106	0,1017	0,0464	0,465	0,185	0,503	0,248	0,046
3,0	0,1336	0,1189	0,0404	0,493	0,124	0,505	0,166	0,031
4,0	0,1400	0,1235	0,0384	0,498	0,093	0,502	0,125	0,024
5,0	0,1416	0,1246	0,0375	0,500	0,074	0,500	0,100	0,019
$\infty$	0,1422	0,1250	0,0375	0,500	—	0,500	—	—

длинной стороны и в предельном случае превосходит то давление, которое мы имеем для квадратной пластинки (т. е. величину  $qa^2/4$ ), примерно на 8,5%. Полное давление на ту же сторону контура от скручивающих пар составляет в случае квадратной пластинки 26% и в случае весьма длинной пластинки 35% того давления, которое обусловлено усилиями  $N_2$ .

На длинных сторонах контура давление, соответствующее скручивающим парам  $H_1$ , играет меньшую роль. Его значение убывает с возрастанием длины пластинки, и, например, при  $\mu = 3$  оно составляет лишь около 8% давления, обусловленного силами  $N_1$ . Из рис. 104 видно, что при  $\mu = 4$  давление в средней части длинных сторон контура остается почти постоянным и близким к давлению, соответствующему бесконечно длинной пластинке.

Реактивные силы  $R$ , сосредоточенные в вершинах пластинки, определяются из формулы

$$R = -2H_1 = 2D(1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

<sup>1</sup> Рис. 103 и 104 заимствованы из книги Н е н с к у Н. Über den Spannungszustand in rechteckigen ebenen Platten bei gleichmässig verteilter und bei konzentrierter Belastung. Dissertation. Darmstadt technische Hochschule, 1913, München, Oldenbourg, 1913, 94 SS.

Подставляя сюда вместо  $w$  выражение (221), получаем для  $R$  значения, приведенные в последней строке табл. 26.

Решение Л. Навье можно применить при исследовании колебаний прямоугольной пластинки. Чтобы получить соответствующее дифференциальное уравнение, нужно в правую часть уравнения (а) вместо изгибающей нагрузки подставить силы инерции. Если через  $q$  мы обозначим вес пластинки, приходящийся на единицу поверхности, то уравнение для колебаний напишется так:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{1}{D} \frac{q}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (e)$$

Мы удовлетворим условиям на контуре пластинки, если положим

$$w = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos pt.$$

Подставляя это выражение для прогиба в уравнение (e), получаем для частоты выбранного типа колебаний значение

$$p = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{Dg}{q}}.$$

Исследование собственных и вынужденных колебаний пластинок может быть выполнено в рассматриваемом случае так же, как это было сделано при рассмотрении колебаний балок с опертыми концами.

### § 55. Изгиб прямоугольной пластинки, у которой две прямо противоположные стороны оперты, а две другие закреплены любым способом

Предположим, что стороны пластинки, параллельные оси  $y$  (см. рис. 102), оперты, а две другие стороны закреплены как угодно. При исследовании вопроса об изгибе этой пластинки воспользуемся решением М. Леви<sup>1</sup>. Мы удовлетворим условиям на опертых сторонах пластинки, если возьмем частное решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2} = \frac{1}{D} f(x, y) \quad (a)$$

в такой форме:

$$w_n = Y_n \sin \frac{n\pi x}{a}. \quad (b)$$

Здесь  $Y_n$  — неизвестная пока функция  $y$ , которая должна быть выбрана таким образом, чтобы были удовлетворены уравнение (a) и условия по сторонам пластинки, параллельным оси  $x$ . Будем искать выражение для прогиба пластинки в форме бесконечного ряда:

$$w = \sum_{n=1}^{n=\infty} Y_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad (c)$$

который получается путем наложения решений вида (b).

<sup>1</sup> L e v y M. Sur l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 1899, t. 129, N 15, pp. 535—539. Приложение решения М. Леви к ряду частных случаев имеется в статье E s t a n a v e M. E. Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire mince. Annales scientifiques de l'école normale supérieure publiques sous les auspices du ministre de l'instruction publique, par un comité de réduction composé des maîtres de conférences de l'école. Serie 3, 1900, t. 17, pp. 295—358.

Подставив выражение (с) в дифференциальное уравнение (а), найдем

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left( Y_n^{(4)} - 2 \frac{n^2 \pi^2}{a^2} Y_n'' + \frac{n^4 \pi^4}{a^4} Y_n \right) \sin \frac{n\pi x}{a} = \frac{1}{D} f(x, y).$$

Отсюда, умножая обе части полученного уравнения на  $\sin \frac{n\pi x}{a} dx$  и интегрируя их в пределах от 0 до  $a$ , получаем для функции  $Y_n$  такое линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$Y_n^{(4)} - \frac{2n^2 \pi^2}{a^2} Y_n'' + \frac{n^4 \pi^4}{a^4} Y_n = \frac{2}{aD} \int_0^a f(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} dx. \quad (d)$$

Если для сокращения положим  $n\pi/a = \alpha$  и обозначим через  $\varphi_n(y)$  частное решение уравнения (d), то общий интеграл его напишется так:

$$Y_n = \varphi_n(y) + A_n \operatorname{sh} \alpha y + B_n \operatorname{ch} \alpha y + y(C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n \operatorname{ch} \alpha y). \quad (e)$$

Произвольные постоянные  $A_n, \dots, D_n$  могут быть определены из условий закрепления по краям пластинки, параллельным оси  $x$ .

Найдем значения этих постоянных для нескольких частных случаев.

1. Если предположить, что края пластинки, параллельные оси  $x$ , опертые, то придем к рассмотренной выше задаче Навье. Условия закрепления на этих краях пишутся так:

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad y = b,$$

откуда

$$Y_n = 0; \quad Y_n'' = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad y = b.$$

Для получения произвольных постоянных общего интеграла (e) будем иметь такие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(0) + B_n &= 0; & \varphi_n''(0) + B_n \alpha^2 + 2C_n \alpha &= 0; \\ \varphi_n(b) + A_n \operatorname{sh} \alpha b + B_n \operatorname{ch} \alpha b + b(C_n \operatorname{sh} \alpha b + D_n \operatorname{ch} \alpha b) &= 0; \\ \varphi_n''(b) + \alpha^2 (A_n \operatorname{sh} \alpha b + B_n \operatorname{ch} \alpha b) + 2\alpha (C_n \operatorname{ch} \alpha b + D_n \operatorname{sh} \alpha b) + \\ &+ b\alpha^2 (C_n \operatorname{sh} \alpha b + D_n \operatorname{ch} \alpha b) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

В случае равномерно распределенной нагрузки интенсивности  $q$  уравнение (d) напишется так:

$$Y_n^{(4)} - \frac{2n^2 \pi^2}{a^2} Y_n'' + \frac{n^4 \pi^4}{a^4} Y_n = \frac{2}{aD} \cdot \frac{q}{\alpha} (1 - \cos n\pi).$$

При  $n$  четном правая часть полученного уравнения обращается в нуль и мы будем иметь  $\varphi_n(y) = 0$ . Произвольные постоянные  $A_n, \dots, D_n$ , определяемые из уравнений (f), будут при этом равняться нулю, вместе с тем обращаются в нуль и функции  $Y_n$  четного порядка.

При  $n$  нечетном найдем

$$\varphi_n(y) = \frac{4q}{aD\alpha^5}.$$

Уравнения (f) дадут для произвольных постоянных  $A_n, \dots, D_n$  значения

$$\begin{aligned} B_n &= -\frac{K}{\alpha^5}; & C_n &= \frac{\alpha}{2} \frac{K}{\alpha^5}; \\ D_n &= \frac{K}{\alpha^5} \cdot \frac{\alpha^2 (1 - \operatorname{ch} \alpha b)}{2\alpha \operatorname{sh} \alpha b}; \\ A_n &= \frac{K}{\alpha^5} \frac{(1 - \operatorname{ch} \alpha b)(b\alpha^2 - 2\alpha \operatorname{sh} \alpha b)}{2\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha b}. \end{aligned}$$

где для краткости принято обозначение

$$K = \frac{4q}{aD}$$

Выражение для  $Y_n$  напишется так:

$$Y_n = \frac{K}{\alpha^5} \left\{ 1 + \frac{(1 - \operatorname{ch} \alpha b)(b\alpha^2 - 2\alpha \operatorname{sh} \alpha b)}{2\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha b} \operatorname{sh} \alpha y - \operatorname{ch} \alpha y + \right. \\ \left. + y \left[ \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \alpha y + \frac{\alpha^2 (1 - \operatorname{ch} \alpha b)}{2\alpha \operatorname{sh} \alpha b} \right] \right\}.$$

Прогиб пластинки на основании (с) представится в таком виде:

$$w = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{K}{\alpha^5} \left\{ 1 + \frac{(1 - \operatorname{ch} \alpha b)(b\alpha^2 - 2\alpha \operatorname{sh} \alpha b)}{2\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha b} \operatorname{sh} \alpha y - \right. \\ \left. - \operatorname{ch} \alpha y + y \left[ \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \alpha y + \frac{\alpha^2 (1 - \operatorname{ch} \alpha b)}{2\alpha \operatorname{sh} \alpha b} \operatorname{ch} \alpha y \right] \right\} \sin \frac{n\pi x}{a}. \quad (223)$$

Полученный для  $w$  бесконечный ряд весьма быстро сходится и потому при вычислениях он представляет большие удобства, чем приведенное выше решение Навье (221)<sup>1</sup>. Пользуясь решением (223), мы можем без особых затруднений составить выражения для изгибающих моментов, для перерезывающих сил и для давления на контур. Соответствующие числовые результаты, полученные иным путем, приведены в табл. 26.

2. В качестве второго примера рассмотрим теперь случай, когда одна из сторон пластинки, параллельных оси  $x$ , заделана, а другая — совершенно свободна. Положим, что заделанной является сторона  $y = 0$ , тогда условия закрепления напишутся так (см. формулу (211)):

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0; \\ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad \text{при } y = b.$$

На опертых краях условия остаются прежними. Произвольные постоянные  $A_n, \dots, D_n$  общего интеграла (е) определяются из уравнений

$$\Phi_n(0) + B_n = 0; \\ \Phi_n'(0) + A_n \alpha + D_n = 0,$$

выражающих условия закрепления по заделанной стороне и двух других уравнений, относящихся к свободной стороне.

В случае равномерной нагрузки при  $n$  нечетном имеем

$$B_n = -\Phi_n(0) = -\frac{K}{\alpha^5}; \quad A_n = -\frac{D_n}{\alpha},$$

и два других уравнения для определения произвольных постоянных напишутся так:

$$D_n [(1 + \sigma) \operatorname{sh} \alpha b + (1 - \sigma) \alpha b \operatorname{ch} \alpha b] + C_n [2 \operatorname{ch} \alpha b + \\ + (1 - \sigma) \alpha b \operatorname{sh} \alpha b] = \frac{K}{\alpha^4} [(1 - \sigma) \operatorname{ch} \alpha b + \sigma]; \\ D_n [2 \operatorname{ch} \alpha b - (1 - \sigma) \alpha b \operatorname{sh} \alpha b] + C_n [(1 + \sigma) \operatorname{sh} \alpha b - \\ - (1 - \sigma) \alpha b \operatorname{ch} \alpha b] = -\frac{K}{\alpha^4} (1 - \sigma) \operatorname{sh} \alpha b.$$

<sup>1</sup> В упомянутой на стр. 402 работе М. Estanave показано, что решение Навье может быть приведено к виду (223).

На основании этих уравнений получаем для произвольных постоянных такие значения  $B = -K/\alpha^5$ :

$$C_n = \frac{K}{\alpha^4} \frac{(3 + \sigma)(1 - \sigma) \operatorname{ch}^2 \alpha b + 2\sigma \operatorname{ch} \alpha b - \sigma(1 - \sigma) \alpha b \operatorname{sh} \alpha b - (1 - \sigma^2)}{(3 + \sigma)(1 - \sigma) \operatorname{ch}^2 \alpha b + (1 - \sigma)^2 \alpha^2 b^2 + (1 + \sigma)^2}$$

$$A_n = -\frac{D_n}{\alpha} =$$

$$= \frac{K}{\alpha^5} \frac{(3 + \sigma)(1 - \sigma) \operatorname{sh} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b + \sigma(1 + \sigma) \operatorname{sh} \alpha b - \sigma(1 - \sigma) \alpha b \operatorname{ch} \alpha b - (1 - \sigma)^2 \alpha b}{(3 + \sigma)(1 - \sigma) \operatorname{ch}^2 \alpha b + (1 - \sigma)^2 \alpha^2 b^2 + (1 + \sigma)^2}$$

Таблица 27

$\frac{b}{a}$	$\frac{Eh^3w_{\max}}{qb^4}$	$\frac{ M_1 _{\max}}{qa^2}$	$\frac{ M_2 _{\max}}{qb^2}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{Eh^3w_{\max}}{qa^4}$	$\frac{ M_1 _{\max}}{qa^2}$	$\frac{ M_2 _{\max}}{qa^2}$
0	1,37	0	0,500	$\frac{3}{2}$	0,154	0,123	0,124
$\frac{1}{3}$	1,03	0,0078	0,428	2	0,164	0,131	0,125
$\frac{1}{2}$	0,635	0,0293	0,319	3	0,166	0,133	0,125
$\frac{2}{3}$	0,366	0,0558	0,227	$\infty$	0,166	0,133	0,125
1	0,123	0,0972	0,119				

При  $n$  четном постоянные  $A_n, \dots, D_n$  равны нулю.

Подставляя значения постоянных в общий интеграл (е), получаем при равномерно распределенной нагрузке выражение для прогиба пластинки в форме такого быстроходящегося ряда:

$$w = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[ \frac{K}{\alpha^5} + A_n \operatorname{sh} \alpha y + B_n \operatorname{ch} \alpha y + y(C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n \operatorname{ch} \alpha y) \right] \sin \frac{n\pi x}{a}. \quad (224)$$

Наибольший прогиб пластинки получится по середине свободного края пластинки. Кривую изгиба этого края найдем, если в общем выражении (224) положим  $y = b$ . Если  $b$  велико по сравнению с  $a$ , т. е. если свободный край пластинки весьма удален от параллельного ему заделанного края, то уравнение изогнутого свободного края пластинки отличается от уравнения изогнутой оси равномерно нагруженной балки с опертыми концами лишь множителем  $(3 - \sigma)(1 + \sigma)/(3 + \sigma)$  и наибольший прогиб пластинки больше соответствующего прогиба балки на 6,4%. Такое превышение прогиба пластинки над прогибом балки объясняется тем, что у свободного края происходит искривление пластинки не по цилиндрической, а по антикластической поверхности.

Если взять другой крайний случай, когда  $b$  мало по сравнению с  $a$ , то вдали от опертых краев будем иметь искривление пластинки по цилиндрической поверхности. Элементарные балки-полоски, параллельные опертым краям, будут гнуться, как балка с одним заделанным и другим свободным концом. Жесткость этих балок нужно принять равной  $D$ .

Значение наибольшего прогиба пластинки при различных соотношениях между  $a$  и  $b$  приведены в табл. 27<sup>1</sup> ( $\sigma = 0,3$ ).

<sup>1</sup> Числа таблицы заимствованы из книги: И. Г. Бубнова, указанной в списке на стр. 200.

Пользуясь общим выражением (224) для прогиба, мы можем составить формулы для изгибающих моментов, перерезывающих сил и давлений на контур. Наибольшее значение  $M_1$  получится в месте наибольшего прогиба, т. е. посередине свободной стороны пластинки. Наибольшее по абсолютной величине значение  $M_2$  будем иметь по середине заделанного края. Ряд значений  $M_{1\max}$  и  $|M_{2\max}|$  приведен в табл. 27.

3. В качестве последнего примера рассмотрим случай, когда стороны пластинки, параллельные оси  $x$ , оперты на упругий контур, например на балки, прогибающиеся под действием приходящихся на них давлений. Жесткости этих балок примем одинаковыми, тогда получим симметричный случай закрепления краев пластинки. Располагая координатные оси, как указано на рис. 105, и обозначая через  $EJ$  жесткость балок, на которые опираются продольные стороны пластинки, напишем условия на упруго опертом крае пластинки так (см. формулы (212)):

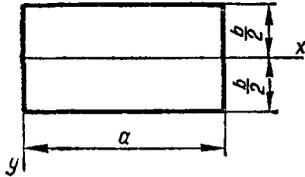


Рис. 105.

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y = \frac{b}{2}} = 0;$$

$$D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y = \frac{b}{2}} = (EJ \frac{\partial^4 x}{\partial x^4})_{y = \frac{b}{2}}.$$

Этими условиями воспользуемся для определения произвольных постоянных  $B_n$  и  $C_n$  общего интеграла (е). Постоянные  $A_n$  и  $D_n$  при выбранном расположении координат обрабатываются в нуль, так как  $Y_n$  должно быть четной функцией  $y$ . В случае равномерно распределенной нагрузки нужные нам уравнения напишутся для  $n$  нечетного так:

$$B_n \alpha^2 \operatorname{ch} \frac{ab}{2} (1 - \sigma) + C_n \left( 2\alpha \operatorname{ch} \frac{ab}{2} + \frac{\alpha^2 b}{2} \operatorname{sh} \frac{ab}{2} - \sigma \frac{\alpha^2 b}{2} \operatorname{sh} \frac{ab}{2} \right) = \sigma \frac{K}{\alpha^3};$$

$$- B_n \left[ \alpha^3 \operatorname{sh} \frac{ab}{2} (1 - \sigma) + \frac{EJ}{D} \alpha^4 \operatorname{ch} \frac{ab}{2} \right] + C_n \left[ (1 + \sigma) \alpha^2 \operatorname{sh} \frac{ab}{2} - \right.$$

$$\left. - (1 - \sigma) \frac{\alpha^3 b}{2} \operatorname{ch} \frac{ab}{2} - \frac{EJ}{D} \alpha^4 \frac{b}{2} \operatorname{sh} \frac{ab}{2} \right] = \frac{EJ}{D} \frac{K}{\alpha}.$$

Таблица 28

$\frac{EJ}{aD}$	$\frac{wEh^3}{qa^4}$	$\frac{M_1}{qa^2}$	$\frac{M_2}{qa^2}$	$\frac{EJ}{aD}$	$\frac{wEh^3}{qa^4}$	$\frac{M_1}{qa^2}$	$\frac{M_2}{qa^2}$
$\infty$	0,0443	0,0479	0,0479	4	0,0515	0,0528	0,0447
100	0,0447	0,0481	0,0477	2	0,0578	0,0571	0,0419
30	0,0454	0,0486	0,0473	1	0,0681	0,0643	0,0376
10	0,0474	0,0500	0,0465	0,5	0,0826	0,0744	0,0315
6	0,0495	0,0514	0,0455	0	0,1430	0,1160	0,0057

Решая эти уравнения для  $n$  нечетного, получаем

$$C_n = \frac{K}{\alpha^4} \frac{\sigma(1 - \sigma) \operatorname{sh} \frac{ab}{2} + \frac{EJ}{D} \alpha \operatorname{ch} \frac{ab}{2}}{(3 + \sigma)(1 - \sigma) \operatorname{sh} \frac{ab}{2} \operatorname{ch} \frac{ab}{2} - \frac{ab}{2} (1 - \sigma)^2 + \frac{EJ}{D} 2\alpha \operatorname{ch}^2 \frac{ab}{2}};$$

$$B_n = \frac{K}{\alpha^5} \frac{\sigma(1 + \sigma) \operatorname{sh} \frac{ab}{2} - \sigma(1 - \sigma) \frac{ab}{2} \operatorname{ch} \frac{ab}{2} - \frac{EJ}{D} \alpha \left( 2 \operatorname{ch} \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} \operatorname{sh} \frac{ab}{2} \right)}{(3 + \sigma)(1 - \sigma) \operatorname{sh} \frac{ab}{2} \operatorname{ch} \frac{ab}{2} - \frac{ab}{2} (1 - \sigma)^2 + \frac{EJ}{D} 2\alpha \operatorname{ch}^2 \frac{ab}{2}}.$$

При  $n$  четном  $C_n = B_n = 0$ . Подставив эти значения постоянных в общее выражение для прогиба

$$w = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} \left[ \frac{K}{\alpha^6} + B_n \operatorname{ch} \alpha y + C_n y \operatorname{sh} \alpha y \right] \sin \frac{n\pi x}{a},$$

найдем формулы для прогиба пластинки, для изгибающих моментов и для давления на контур. Чтобы показать, как влияет жесткость контура на обстоятельства изгиба пластинки, приводим в табл. 28 значения прогиба и моментов  $M_1$  и  $M_2$  в центре квадратной пластинки <sup>1</sup>.

При  $EJ = \infty$  получаем изгиб пластинки, опертой на абсолютно жесткий контур. При  $EJ = 0$  получаем изгиб квадратной пластинки в том случае, когда две стороны оперты на жесткий контур, а две другие совершенно свободны. Заметим, что в последнем случае прогиб по середине свободных краев пластинки будет больше, нежели прогиб в центре, и в этих точках  $M_1$  достигает наибольшего значения.

Без всяких затруднений решение М. Леви может быть применено также к исследованию изгиба пластинки, у которой стороны, параллельные оси  $x$ , обе заделаны или одна заделана, другая оперта, или, например, одна оперта, а другая свободна <sup>2</sup>. Решение М. Леви распространяется легко также на те случаи, когда стороны контура, параллельные оси  $x$ , не вполне жестки, а представляют собой сравнительно гибкие балки, прогибающиеся под действием проходящихся на них давлений.

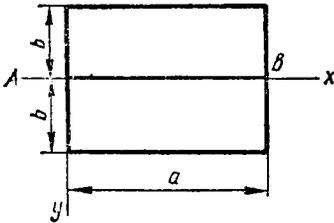


Рис. 106.

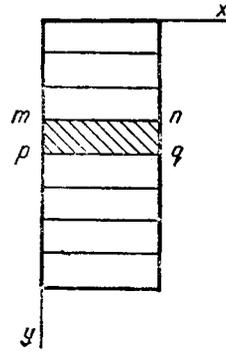


Рис. 107.

Таким способом без всяких затруднений может быть решена задача об изгибе прямоугольной пластинки, опертой на абсолютно жесткий контур и подкрепленной по середине ребром  $AB$  (рис. 106). При равномерной нагрузке поверхность изгиба будет симметрична относительно  $AB$  и каждая половина нашей пластинки будет находиться в условиях пластинки, три стороны которой оперты на жесткий контур, а четвертая заделана на упругом контуре. Условия для этой четвертой стороны, если мы будем рассматривать нижнюю половину нашей пластинки, пишутся так:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0; \quad D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] = - \frac{EJ}{2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad \text{при } y = 0.$$

Присоединяя сюда условия по опертому краю ( $y = b$ ), мы получим достаточное число уравнений для определения произвольных постоянных общего интеграла (е).

Если длинная прямоугольная пластинка подкреплена большим числом равноудаленных упругих ребер (рис. 107), то исследование изгиба части пластинки  $mnpq$ , удаленной от поперечных сторон, сводится к расчету пластинки, у которой две стороны оперты, а две другие заделаны на упругом контуре.

<sup>1</sup> Ч а л ы ш е в К. А. К вопросу о расчете пластинок, лежащих на упругом контуре. Изв. Петербургского института инженеров путей сообщения, 1914, вып. 87, стр. 1—22. Отд. оттиск, С.-Петербург, 22 стр.

<sup>2</sup> Общие решения для всех этих случаев имеются в упомянутой на стр. 402 работе М. Эстанаве.

### § 56. Изгиб пластинки с заделанными краями<sup>1</sup>

Мы ограничимся рассмотрением изгиба пластинки равномерно распределенной нагрузкой и, чтобы воспользоваться условиями симметрии, расположим координатные оси, как указано на рис. 108. Нам нужно найти решение уравнения

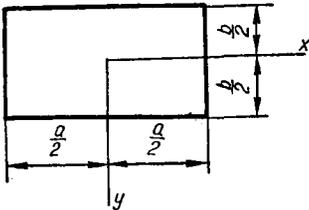


Рис. 108.

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q, \quad (a)$$

которое удовлетворяло бы на контуре условиям

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = \pm \frac{a}{2};$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = \pm \frac{b}{2}.$$

Положим

$$w = \frac{q}{8D} \left( \frac{a^2}{4} - x^2 \right) \left( \frac{b^2}{4} - y^2 \right) + w_1, \quad (b)$$

где  $w_1$  — новая функция  $x$  и  $y$ .

Подставляя (b) в уравнение (a), находим, что  $w_1$  должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} = 0. \quad (a')$$

Подставив (b) в условия на контуре пластинки, найдем

$$w_1 = 0 \quad \text{при } x = \pm \frac{a}{2}, \quad y = \pm \frac{b}{2}; \quad (c)$$

$$\left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)_{x=\pm \frac{a}{2}} = \pm \frac{q}{8D} a \left( \frac{b^2}{4} - y^2 \right); \quad (c')$$

$$\left( \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)_{y=\pm \frac{b}{2}} = \pm \frac{q}{8D} b \left( \frac{a^2}{4} - x^2 \right).$$

Уравнением (a') и условиями (c) и (c') определяется функция  $w_1$ , которая, очевидно, будет четной функцией относительно  $x$  и  $y$ . Функцию эту будем искать в таком виде:

$$w_1 = -\frac{qa^3}{64D} \left\{ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n \frac{4}{n^2 \pi^2} \frac{1}{\text{ch}^2 \frac{n\pi b}{2a}} Y_n \cos \frac{n\pi x}{a} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} B_n \frac{4}{n^2 \pi^2} \frac{b^3}{a^3} \frac{1}{\text{ch}^2 \frac{n\pi a}{2b}} X_n \cos \frac{n\pi y}{b} \right\}, \quad (d)$$

<sup>1</sup> С этой задачей связывается вопрос об интегрировании уравнения  $\Delta \Delta w = 0$ , которому посвящена обширная литература. См. T e d o n e O., T i m p e A. Spezielle Ausführungen zur Statik elastischer Körper. Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Bd 4, T. 2. Hälfte 2, H. 2, Art. 25, Leipzig, B. G. Teubner, 1907, SS. 125—214. В русской литературе этой задаче посвящена работа Б. М. Коялович «Об одном уравнении с частными производными четвертого порядка». С.-Петербург, тип. Императорской Академии наук, 1902, 125 стр. Подробные вычисления для прямоугольных пластинок с различными соотношениями сторон произведены И. Г. Бубновым. См. стр. 465 его книги, указанной на стр. 200. См. также диссертацию Н. Ненску, указанную в сноске на стр. 401, и работу Б. Г. Галеркина, упомянутую в сноске на стр. 399.

где  $Y_n$  — функция только  $y$  и  $X_n$  — функция только  $x$ . Функции эти подберем так, чтобы каждый член рядов, входящих в (d), представлял собой четную функцию  $x$  и  $y$ , удовлетворял уравнению (a') и обращался в нуль на контуре пластинки. Поступая так, как это мы делали в предыдущем параграфе, легко находим, что нужные нам функции  $X_n$  и  $Y_n$ , удовлетворяющие поставленным условиям, напишутся так:

$$\begin{aligned} X_n &= a \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{2b} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} - 2x \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}; \\ Y_n &= b \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} - 2y \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}. \end{aligned} \quad (e)$$

Произвольные постоянные  $A_n$  и  $B_n$ , входящие в выражение (d), подберем так, чтобы были удовлетворены условия (c') на краях пластинки. Подставляя в эти условия вместо  $w_1$  выражение (d) и вместо  $X_n$  и  $Y_n$  их значения (e), получаем

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)_{x=\frac{a}{2}} &= \frac{qa^3}{64D} \left[ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n \frac{4}{n^2\pi^2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{n\pi b}{2a}} \frac{n\pi}{a} \cdot Y_n \sin \frac{n\pi}{2} + \right. \\ &+ \left. \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} B_n \frac{4}{n^2\pi^2} \frac{b^3}{a^3} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{n\pi a}{2b}} \left( \frac{a\pi n}{b} + \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} \right) \cos \frac{n\pi y}{b} \right] = -\frac{q}{8D} a \left( \frac{b^2}{4} - y^2 \right); \end{aligned} \quad (f)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)_{y=\frac{b}{2}} &= \frac{qa^3}{64D} \left[ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n \frac{4}{n^2\pi^2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{n\pi b}{2a}} \left( \frac{n\pi b}{a} + \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} \right) \cos \frac{n\pi x}{a} + \right. \\ &+ \left. \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} B_n \frac{4}{n^2\pi^2} \frac{b^3}{a^3} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{n\pi a}{2b}} \frac{n\pi}{b} X_n \sin \frac{n\pi}{2} \right] = -\frac{q}{8D} b \left( \frac{a^2}{4} - x^2 \right). \end{aligned} \quad (f')$$

Функции  $Y_n$  и  $X_n$  как четные могут быть представлены в нашем случае в виде таких рядов:

$$\frac{n\pi}{a} Y_n = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} C_i \cos \frac{i\pi y}{b}; \quad \frac{n\pi}{b} X_n = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} D_i \cos \frac{i\pi x}{a},$$

где коэффициенты  $C_i$  и  $D_i$  имеют значения

$$\begin{aligned} C_i &= \frac{n\pi}{a} \frac{\int_0^{\frac{b}{2}} Y_n \cos \frac{i\pi y}{b} dy}{\int_0^{\frac{b}{2}} \cos^2 \frac{i\pi y}{b} dy} = \frac{16i}{n^2\pi} \cdot \frac{b^2}{a^2} \frac{1}{\left( \frac{b^2}{a^2} + i^2 \right)^2} \sin \frac{i\pi}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{n\pi b}{2a}; \\ D_i &= \frac{n\pi}{b} \frac{\int_0^{\frac{a}{2}} X_n \cos \frac{i\pi x}{a} dx}{\int_0^{\frac{a}{2}} \cos^2 \frac{i\pi x}{a} dx} = \frac{16i}{n^2\pi} \cdot \frac{b^2}{a^2} \frac{1}{\left( 1 + \frac{i^2}{n^2} \frac{b^2}{a^2} \right)^2} \sin \frac{i\pi}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{n\pi a}{2b}. \end{aligned}$$

Правые части уравнений (f) и (f') также могут быть представлены в виде тригонометрических рядов, которые напишутся так:

$$-\frac{q}{8D} a \left( \frac{b^2}{4} - y^2 \right) = -\frac{q}{8D} \cdot \frac{8}{\pi^3} \cdot ab^2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^3} \cos \frac{n\pi y}{b};$$

$$-\frac{q}{8D} b \left( \frac{a^2}{4} - x^2 \right) = -\frac{q}{8D} \cdot \frac{8}{\pi^3} a^2 b \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^3} \cdot \cos \frac{n\pi x}{a}.$$

Подставив эти разложения в уравнения (f) и (f'), получим

$$-\frac{q}{8D} \frac{8}{\pi^3} ab^2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^3} \cos \frac{n\pi y}{b} +$$

$$+ \frac{qa^3}{64D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n \frac{64}{n^3 \pi^3} \frac{i}{n} \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\left( \frac{b^2}{a^2} + \frac{i^2}{n^2} \right)^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{i\pi}{2} \cos \frac{i\pi y}{b} +$$

$$+ \frac{qa^3}{64D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} B_n \frac{4}{n^2 \pi^2} \frac{b^3}{a^3} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{n\pi a}{2b}} \left( \frac{a n \pi}{b} + \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} \right) \cos \frac{n\pi y}{b} = 0;$$

$$-\frac{q}{8D} \frac{8}{\pi^3} ba^2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^3} \cos \frac{n\pi x}{a} +$$

$$+ \frac{qa^3}{64D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n \frac{4}{n^2 \pi^2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{n\pi b}{2a}} \left( \frac{n\pi b}{a} + \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} \right) \cos \frac{n\pi x}{a} +$$

$$+ \frac{qa^3}{64D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} B_n \frac{64}{n^3 \pi^3} \frac{i}{n} \frac{b^3}{a^3} \frac{1}{\left( 1 + \frac{i^2}{n^2} \frac{b^2}{a^2} \right)^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{i\pi}{2} \cos \frac{i\pi x}{a} = 0.$$

Выделяя из двойных сумм, входящих в эти уравнения, члены, для которых  $i = n$  и приравнявая нулю коэффициенты<sup>1</sup> при каждом  $\cos \frac{n\pi y}{b}$  и  $\cos \frac{n\pi x}{a}$ , приходим к таким системам уравнений с бесконечным числом неизвестных  $A_n$  и  $B_n$ :

$$-\frac{64}{\pi^3} \frac{b^2}{a^2} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^3} + \sum_{r=1,3,5,\dots}^{\infty} A_r \frac{64}{r^3 \pi^3} \frac{n}{r} \frac{b^3}{a^2} \frac{1}{\left( \frac{b^2}{a^2} + \frac{n^2}{r^2} \right)^2} \sin \frac{r\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} +$$

$$+ B_n \frac{4}{n^2 \pi^2} \frac{b^3}{a^3} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{n\pi a}{2b}} \left( \frac{a n \pi}{b} + \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} \right) = 0; \quad (g)$$

<sup>1</sup> При этом мы допускаем, что порядок суммирования в наших двойных суммах может быть изменен.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{64}{\pi^3} \frac{b}{a} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^3} + A_n \frac{4}{n^2 \pi^2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{n\pi b}{2a}} \left( \frac{n\pi b}{a} + \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} \right) + \\
 & + \sum_{r=1,3,5,\dots}^{\infty} B_r \frac{64}{r^3 \pi^3} \cdot \frac{n}{r} \frac{b^5}{a^6} \frac{1}{\left(1 + \frac{n^2}{r^2} \frac{b^2}{a^2}\right)^2} \sin \frac{r\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} = 0.
 \end{aligned} \tag{g'}$$

Эти уравнения после некоторых сокращений можно представить в такой форме:

$$\begin{aligned}
 \beta_n B_n \sin \frac{n\pi}{2} + \sum_{r=1,3,5,\dots}^{\infty} A_r \left( \frac{n^2}{\mu^2 r^2 + n^2} \right)^2 \sin \frac{r\pi}{2} &= 1; \\
 \alpha_n A_n \sin \frac{n\pi}{2} + \sum_{r=1,3,5,\dots}^{\infty} B_r \left( \frac{n^2}{r^2 + \mu^2 n^2} \right)^2 \sin \frac{r\pi}{2} &= \mu^{-4}.
 \end{aligned} \tag{225}$$

Здесь для упрощения приняты такие обозначения:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{16} \left( \frac{a}{b} \right)^6 \frac{\frac{n\pi b}{a} + \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}}{\operatorname{ch}^2 \frac{n\pi b}{2a}}; \quad \beta_n = \frac{n\pi}{16} \cdot \frac{b}{a} \frac{\frac{n\pi a}{b} + \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}}{\operatorname{ch}^2 \frac{n\pi a}{2b}}; \quad \frac{b}{a} = \mu.$$

Дальнейший расчет пластинки с заделанными краями при заданном отношении  $\mu$  ее сторон состоит в разыскании значений коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$ , удовлетворяющих уравнениям (225). Задача эта может быть разрешена путем последовательных приближений. Ход вычислений покажем на случае квадратной пластинки, когда  $\mu = 1$  и обе системы уравнений (225) становятся одинаковыми. При этом  $\alpha_n = \beta_n$  и  $A_n = B_n$ . Вычисляя последовательные значения  $\alpha_n$ , приходим к такой системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 0,70814A_1 \left[ -\left(\frac{1}{10}\right)^2 A_3 + \left(\frac{1}{26}\right)^2 A_5 - \left(\frac{1}{50}\right)^2 A_7 + \left(\frac{1}{82}\right)^2 A_9 - \left(\frac{1}{122}\right)^2 A_{11} + \dots \right] &= 1; \\
 \left(\frac{9}{10}\right)^2 A_1 - 1,42989A_3 \left[ +\left(\frac{9}{34}\right)^2 A_5 - \left(\frac{9}{58}\right)^2 A_7 + \left(\frac{9}{90}\right)^2 A_9 - \left(\frac{9}{130}\right)^2 A_{11} + \dots \right] &= 1; \\
 \left(\frac{25}{26}\right)^2 A_1 - \left(\frac{25}{34}\right)^2 A_3 + 2,21355A_5 \left[ -\left(\frac{25}{74}\right)^2 A_7 + \left(\frac{25}{106}\right)^2 A_9 - \left(\frac{25}{146}\right)^2 A_{11} + \dots \right] &= 1; \\
 \left(\frac{49}{50}\right)^2 A_1 - \left(\frac{49}{58}\right)^2 A_3 + \left(\frac{49}{74}\right)^2 A_5 - 2,99889A_7 \left[ +\left(\frac{49}{130}\right)^2 A_9 - \left(\frac{49}{170}\right)^2 A_{11} + \dots \right] &= 1; \\
 \left(\frac{81}{82}\right)^2 A_1 - \left(\frac{81}{90}\right)^2 A_3 + \left(\frac{81}{106}\right)^2 A_5 - \left(\frac{81}{130}\right)^2 A_7 + 3,78417A_9 \left[ -\left(\frac{81}{202}\right)^2 A_{11} + \dots \right] &= 1; \\
 \left(\frac{121}{122}\right)^2 A_1 - \left(\frac{121}{130}\right)^2 A_3 + \left(\frac{121}{146}\right)^2 A_5 - \left(\frac{121}{170}\right)^2 A_7 + \left(\frac{121}{202}\right)^2 A_9 - 4,56969A_{11} \left[ + \dots \right] &= 1; \\
 \dots & \dots
 \end{aligned}$$

Легко видеть, что с увеличением  $n$  различие между двумя последовательными уравнениями убывает, и при достаточно большом  $n$  присоединение новых уравнений мало будет влиять на значения  $A_1, A_3, \dots$ , вычисленные на основании всех предыдущих уравнений. Для получения первого приближения

коэффициентов  $A_1, A_3, \dots$  мы отбросим все члены, расположенные справа от ступенчатой линии. Пользуясь этими приближенными значениями, можно из первого уравнения найти второе приближение для  $A_1$ , из следующего уравнения находим второе приближение для  $A_3$  и т. д. Повторяя вычисления несколько раз, можно обеспечить надлежащую степень точности коэффициентов. Таким образом получаем для квадратной пластинки следующие значения коэффициентов<sup>1</sup>:  $A_1 = +1,4138$ ,  $A_3 = +0,0945$ ,  $A_5 = -0,1093$ ,  $A_7 = +0,0770$ ,  $A_9 = -0,0510$ ,  $A_{11} = +0,0376$ ;  $A_{13} = -0,0264$ ,  $A_{15} = +0,0193$ ;  $A_{17} =$

Т а б л и ц а 29

$\mu = \frac{b}{a}$	$\alpha = \frac{Eh^3 w_{\max}}{qa^4}$	$\beta = \frac{(M_1)_{\max}}{qa^2}$	$\gamma = \frac{(N_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y})_{\max}}{qa}$	$\nu = \frac{R_1}{qab}$	$\nu_1 = \frac{R_2}{qa^2}$
1,00	0,0138	0,0513	0,44	0,250	0,250
1,25	0,0199	0,0665	0,50	0,298	0,253
1,50	0,0240	0,0757	0,52	0,332	0,252
1,75	0,0264	0,0817	0,52	0,356	0,252
2,00	0,0277	0,0829	0,52	0,375	0,251
$\infty$	0,0284	0,0833	0,500	0,500	—

$= -0,0141$ ,  $A_{19} = +0,0103$ ,  $A_{21} = -0,0077$ ,  $A_{23} = +0,0058$ ,  $A_{25} = -0,0041$ .

Подобным же образом могут быть определены коэффициенты  $A_n, B_n$  из уравнений (225) при любом соотношении между сторонами пластинки.

Подставив полученные таким образом значения коэффициентов в формулы (d) и (b), получим выражение для прогиба пластинки в форме ряда. Члены ряда быстро убывают и при достаточно большом  $n$  присоединение дальнейших членов оказывает лишь ничтожное влияние на величину  $w$ . Это обстоятельство дает некоторое основание считать, что полученный нами ряд представляет искомую функцию  $w$ . Наибольший прогиб в рассматриваемом случае получится в центре пластинки, и мы его найдем, если в выражении для  $w$  положим  $x = y = 0$ . Значения  $w_{\max}$  для различных соотношений между сторонами приведим в табл. 29<sup>2</sup>.

Пользуясь выражением для прогиба, составляем формулы для изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$  и для давлений на контуре. Наибольшие по абсолютному значению изгибающие моменты получаются на контуре в серединах длинных сторон пластинки. Несколько значений этой величины при различных соотношениях между сторонами пластинки даны в табл. 29. Изменения изгибающих моментов по краям пластинки представляются такими формулами:

$$(M_1)_{x=\frac{a}{2}} = \frac{qa^2}{16} \left( \frac{b^2 - 4y^2}{a^2} - \frac{4\mu^2}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} B_n \frac{\cos \frac{n\pi y}{b}}{n} \right);$$

$$(M_2)_{y=\frac{b}{2}} = \frac{qa^2}{16} \left( \frac{a^2 - 4x^2}{a^2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n \frac{\cos \frac{n\pi x}{a}}{n} \right).$$

Наибольшие давления на контуре получаются также в серединах длинных сторон пластинки. Значения их даны в табл. 29. В той же таблице приведены

<sup>1</sup> См. стр. 49 работы Н. Ненску, упомянутой на стр. 401.

<sup>2</sup> При вычислениях принято  $\sigma = 0,3$ .

также величины полных давлений  $R_1$  и  $R_2$ , приходящихся соответственно на стороны  $\pm a/2$  и  $\pm b/2$  контура пластинки. Полное давление  $R_2$  на короткую сторону мало изменяется при изменении соотношения между сторонами и может быть принято равным тому давлению, которое имеет место в случае квадратной пластинки.

Сравнивая числа полученной таблицы с теми результатами, которые мы имели для пластинки с опертыми краями (см. табл. 26), заключаем, что заделка краев пластинки весьма сильно влияет на величину наибольшего прогиба. При квадратной пластинке прогиб благодаря заделке уменьшается более чем в три раза. В случае пластинки с весьма вытянутым прямоугольным контуром прогиб вследствие заделки по контуру уменьшается в пять раз. Что касается максимальных напряжений, то при квадратном контуре они для пластинки с заделанными краями получаются несколько большими, чем для пластинки, опертой по контуру. Противоположное заключение мы получаем для пластинок с вытянутым прямоугольным контуром. Например, для соотношения  $\mu = 1,5$  заделка краев пластинки сопровождается уменьшением напряжений примерно на 7%. Заметим здесь, что с увеличением отношения  $\mu$  прогибы и максимальные напряжения для пластинок с заделанными краями быстро приближаются к тем значениям, которые соответствуют бесконечно длинным пластинкам. При  $\mu \geq 2$  мы можем для расчета прямоугольных пластинок с заделанными краями пользоваться с достаточной для практики точностью теми формулами, которые были получены для пластинок, изгибающихся по цилиндрической поверхности.

Прием, который был здесь применен к расчету пластинки с заделанными краями, может быть использован и при других способах закрепления пластинки по контуру.

При надлежащем выборе алгебраической части общего решения (b) можно получить решения для пластинки, опирающейся на упругий контур, для пластинки с упруго заделанными краями и для пластинки, опирающейся лишь в четырех точках, соответствующих вершинам прямоугольника<sup>1</sup>.

При исследовании изгиба пластинки с заделанными краями можно воспользоваться также общим методом В. Ритца. В таком случае приближенное выражение для прогиба берем в форме ряда

$$w_n = a_1\varphi_1(x, y) + a_2\varphi_2(x, y) + \dots + a_n\varphi_n(x, y), \quad (h)$$

причем функции  $\varphi_1(x, y), \dots, \varphi_n(x, y)$  выбираем так, чтобы каждый член ряда удовлетворял условиям закрепления на контуре пластинки. Значения коэффициентов  $a_1, \dots, a_n$  находятся путем применения начала возможных перемещений. На всяком возможном перемещении приращение потенциальной энергии изогнутой пластинки (см. формулу (208)) должно равняться работе изгибающих сил. Следовательно,

$$\delta \frac{D}{2} \int \int \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2(1 - \sigma) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \delta \int \int q w dx dy.$$

<sup>1</sup> Ряд задач этого рода рассмотрен Б. Г. Галеркиным (см. его статью, упомянутую на стр. 399).

Таким образом, разыскание искривления пластинки сводится к нахождению максимума или минимума интеграла

$$S = \iint \left\{ D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1 - \sigma) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - 2qw \right\} dx dy. \quad (k)$$

Подставив сюда вместо  $w$  приближенное значение (h), придем при определении коэффициентов  $a_1, \dots, a_n$  к такой системе линейных уравнений:

$$\frac{\partial S_n}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial S_n}{\partial a_2} = 0; \quad \frac{\partial S_n}{\partial a_n} = 0.$$

Вычисления показывают, что небольшое число членов ряда (h) обеспечивает вполне достаточную для практики точность величины наибольшего изгибающего момента<sup>1</sup>.

Намеченный прием расчета может быть применен и при других условиях закрепления краев пластинки, нужно только соответствующим образом подобрать функции  $\varphi(x, y)$  ряда (h).

Тот же прием с большим успехом может быть применен к исследованию колебаний пластинок с заделанными и свободными краями<sup>2</sup>.

### § 57. Изгиб пластинки при одновременном действии нормальной нагрузки и усилий в срединной плоскости

При составлении основного дифференциального уравнения (206) для искривленной поверхности пластинки мы пренебрегали действием усилий  $T_1, T_2$  и  $S$  на изгиб пластинки, поэтому решения, полученные нами ранее для различных частных случаев изгиба пластинок, будут справедливы лишь в том случае, если края пластинки при изгибе могут свободно смещаться в плоскости контура и если по краям не приложены нормальные и касательные усилия  $T$  и  $S$ , лежащие в срединной плоскости пластинки. При этих условиях малые прогибы пластинки не будут сопровождаться деформациями в срединной плоскости и уравнение (206) с достаточной для практики точностью определит искривленную поверхность пластинки. Если закрепления препятствуют свободному смещению краев пластинки в плоскости контура или по краям приложены усилия  $T$  и  $S$ , изгиб пластинки сопровождается деформациями срединной плоскости. Когда соответствующие этим деформациям напряжения малы<sup>3</sup>, мы можем их непосредственно прибавить к напряжениям изгиба, полученным на основании решения уравнения (206). В противном случае необходимо оценить влияние этих напряжений на изгиб пластинки. Соответствующее дифференциальное уравнение для изогнутой поверхности пластинки можно получить путем сле-

<sup>1</sup> Вычисления для квадратной пластинки выполнены В. Ритцем (см. стр. 41 его статьи, упомянутой в сноске на стр. 10). Для других соотношений между сторонами пластинки некоторые числовые результаты имеются в статье: П и е т р я к о в Д. Изгиб тонкой пластинки. Изв. Киевского политехнического института, отдел инженерно-механический, 1910, год 10, книга 3, стр. 309—373.

<sup>2</sup> См. работу W. Ritz, указанную в сноске на стр. 351.

<sup>3</sup> Малы по сравнению с эйлеровыми критическими напряжениями, которые мы в дальнейшем (см. гл. VI) определим для различных частных случаев.

дующих элементарных соображений. Пусть линия  $mn$  (рис. 109) представляет собой сечение срединной поверхности изогнутой пластинки плоскостью, параллельной  $xz$ , и  $ptrs$  — бесконечно малый элемент, вырезанный из пластинки. Легко найти из геометрических соображений, что усилия  $T_1 dy$ , приложенные по двум противоположным сторонам элемента, дадут в направлении оси  $z$  составляющую

$$T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy. \quad (a)$$

Подобным же образом найдем, что усилия  $T_2 dx$ , действующие по двум другим сторонам элемента, дадут в направлении оси  $z$  составляющую

$$T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy. \quad (b)$$

Что касается тангенциальных усилий  $S_1$ , то, как видно из рис. 110, они дают в направлении оси  $z$  составляющую

$$2S_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy. \quad (c)$$

Составляющие (a), (b) и (c) должны быть присоединены к нагрузке  $q dx dy$ , расположенной на выделенном элементе пластинки, при составлении уравнений равновесия этого элемента. Следовательно, прогиб пластинки при действии нормальной нагрузки  $q$  и усилий  $T_1$ ,  $T_2$  и  $S_1$  будет такой же, как прогиб пластинки под действием одной только нормальной нагрузки, имеющей интенсивность

$$q + T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

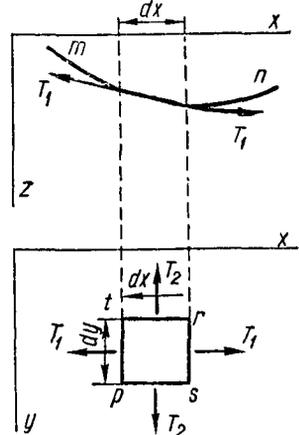


Рис. 109.

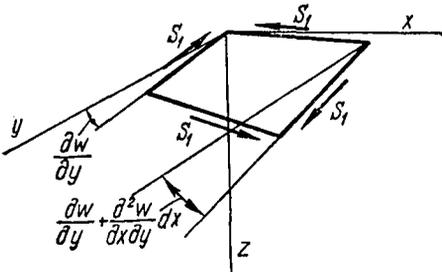


Рис. 110.

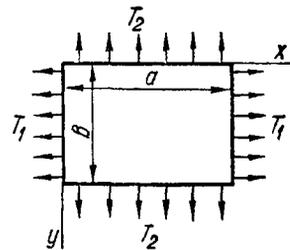


Рис. 111.

В таком случае нужное нам дифференциальное уравнение для искривленной поверхности пластинки напишется так:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q + T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (226)$$

Этим уравнением приходится пользоваться в тех случаях, когда нужно оценить влияние усилий  $T_1$ ,  $T_2$  и  $S$  на прогиб пластинки. Наиболее просто эта задача решается, когда  $T_1$ ,  $T_2$  и  $S$  постоянны по срединной плоскости пластинки. Возьмем, например, случай прямоугольной пластинки с открытыми краями,

изгибаемой равномерной нагрузкой  $q$  и растягиваемой усилиями  $T_1$  и  $T_2$  (рис. 114), тогда

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q + T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (d)$$

Условия на контуре удовлетворяются, если положить

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (d) и применяя для определения коэффициентов  $A_{mn}$  обычный прием, находим (при  $m$  и  $n$  нечетных)

$$A_{mn} = \frac{16qa^4}{m n D \pi^6} \frac{1}{\left( m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 + \frac{T_1 a^2}{D \pi^2} m^2 + \frac{T_2 a^2}{D \pi^2} n^2 \frac{a^2}{b^2}}.$$

Следовательно,

$$w = \frac{16qa^4}{D \pi^6} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{m n \left[ \left( m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 + \frac{T_1 a^2}{D \pi^2} m^2 + \frac{T_2 a^2}{D \pi^2} n^2 \frac{a^2}{b^2} \right]}. \quad (227)$$

Имея это выражение для прогиба, можем составить без всяких затруднений формулы для изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$  и для соответствующих напряжений. Решение (227) при  $T_1 = T_2 = 0$  совпадает с решением (221), полученным для прямоугольной пластинки, изгибаемой только нормальной нагрузкой. Сравнивая (227) и (221), заключаем, что растягивающие усилия  $T_1$  и  $T_2$  уменьшают прогиб пластинки от нагрузки  $q$ . Сжимающие усилия будут оказывать противоположное действие.

Рассмотрим крайний случай весьма длинной прямоугольной пластинки. Положим  $b > a$ , тогда  $a/b$  — малая дробь и выражение (227) может быть переписано таким образом:

$$w = \frac{16qa^4}{D \pi^6} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{m n \left( m^4 + \frac{T_1 a^2}{D \pi^2} m^2 \right)}.$$

Полагая  $y = \frac{b}{2}$  и принимая во внимание, что  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}$ , находим для прогиба полосы, параллельной оси  $x$ , такое выражение:

$$w = \frac{4qa^4}{D \pi^6} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{m^3 (m^2 + \alpha^2)},$$

где

$$\alpha^2 = \frac{T_1 a^2}{D \pi^2}.$$

Результат этот совершенно точно совпадает с тем, что получается для изогнутой оси балки с опертыми концами, изгибаемой равномерной нагрузкой и растягиваемой силами, приложенными по концам [см. формулу (67)]. Величина  $D$ , очевидно, будет соответствовать жесткости балки.

Если взять растяжение пластинки лишь в направлении оси  $x$ , то выражение для прогиба напишется так:

$$w = \frac{16qa^4}{D\pi^6} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[ \left( m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 + \frac{T_1 a^2}{D\pi^2} m^2 \right]}.$$

С увеличением растягивающих усилий  $T_1$  растет в знаменателе значение члена, не зависящего от размера  $b$ , и мы можем отсюда заключить, что при больших растягивающих усилиях роль поперечных сторон контура пластинки ничтожна и условия изгиба приближаются к тем, которые мы имеем при искривлении пластинки по цилиндрической поверхности.

Например, для пластинки, у которой  $b = 2a$ ,  $h = 0,01a$  при нагрузке  $q = 0,5 \text{ кг/см}^2$  и растягивающих усилиях  $T_1 = 1000h \text{ кг/см}$ , мы легко найдем, что прогиб и величина наибольших напряжений отличаются от соответствующих величин, вычисленных для весьма длинной прямоугольной пластинки, на 6 и 3%. При отсутствии растягивающих сил соответствующие разности, как видно из табл. 26, составят 22 и 18,5%. Такое уменьшение влияния поперечных сторон контура на обстоятельства изгиба пластинки при увеличении растягивающих усилий  $T_1$  дает основание во многих случаях пользоваться с достаточной для практики точностью формулами, полученными ранее при исследовании изгиба пластинок по цилиндрической поверхности.

Влияние растягивающих и сжимающих усилий  $T_1$  и  $T_2$  на изгиб прямоугольной пластинки с заделанными краями может быть учтено путем применения метода В. Ритца<sup>1</sup>.

Без особых затруднений может быть также разрешена задача об изгибе круглой пластинки, изгибаемой равномерной нагрузкой и испытывающей, кроме того, равномерное растяжение в срединной плоскости<sup>2</sup>.

В рассмотренных случаях мы все время предполагали, что усилия  $T_1$ ,  $T_2$  и  $S_1$  постоянны по поверхности пластинки. Задача становится сложнее, когда эти усилия представляются заданными функциями координат  $x$  и  $y$ . Тогда приходится решать дифференциальное уравнение (226) с переменными коэффициентами.

Еще сложнее становится вопрос в тех случаях, когда усилия, растягивающие срединную поверхность пластинки, не заданы и являются следствием закреплений пластинки по контуру, препятствующих смещению краев пластинки при изгибе. Подобный случай часто встречается на практике, и мы здесь приведем некоторые соображения, которыми можно воспользоваться для приближенного расчета прямоугольной пластинки с открытыми краями. Если края пластинки не могут свободно сближаться, то при изгибе возникнут усилия  $T_1$  и  $T_2$ , распределение которых по сторонам будет неравномерным. Положим  $b > a$ , тогда на обстоятельства изгиба преобладающее влияние будут оказывать усилия  $T_1$ , возникающие вдоль длинных сторон контура. Наибольшего значения эти усилия достигнут в серединах этих сторон, так как средняя балка-полоска  $m\pi$  (рис. 112) получает наибольший прогиб. Если края пластинки не смещаются вовсе, то вычисление  $(T_1)_{\max}$  может быть произведено по тем формулам, которые были получены ранее для весьма длинной прямоугольной пластинки (см. § 46)<sup>3</sup>. Погрешность получаемого таким образом результата будет убывать с возрастанием отношения  $b/a$ . Когда

<sup>1</sup> Некоторые результаты, относящиеся к этому случаю, имеются в упомянутой на стр. 414 статье Д. Пистрякова.

<sup>2</sup> См. стр. 33 работы И. Г. Бубнова, указанной в сноске на стр. 219 (стр. 51 ее перепечатки).

<sup>3</sup> Величина  $(T_1)_{\max}$  будет зависеть от максимального прогиба пластинки, а этот последний при значительных растягивающих силах мало отличается от прогиба пластинки, искривляющейся по цилиндрической поверхности.

сближению краев пластинки препятствуют упругие распоры, расчет приходится начинать с определения величины коэффициента распора. Для весьма длинной прямоугольной пластинки (см. § 46) этот коэффициент определяется отношением

$$K = \frac{h_1}{h + h_1}, \quad (e)$$

где  $h$  — толщина пластинки и  $h_1$  — приведенная толщина распора.

При конечном значении отношения  $b/a$  нужно принять во внимание, что усилия  $T_1$  убывают в направлении от середины длинной стороны контура к концам и, следовательно, общее сжимающее усилие, которое передается на распоры, будет меньшим, чем то, которое получается в предположении изгиба пластинки по цилиндрической поверхности. Вследствие этого уменьшается сжатие распор, и коэффициент распора при конечном значении отношения  $b/a$  будет больше величины  $K$ , определенной по формуле (e). Это увеличение коэффициента распора оценим таким приближенным способом. Допустим, что распределение растягивающих усилий  $T_1$  одинаково для всех сечений пластинки плоскостями, параллельными  $zy$ , тогда для какой-либо балки-полоски, параллельной  $x$ , можем написать уравнение<sup>1</sup>

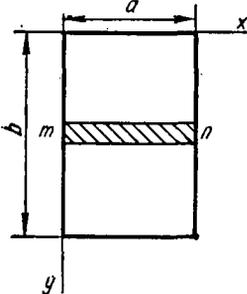


Рис. 112.

$$\frac{1}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{T_1 a (1 - \sigma^2)}{Eh} + \frac{a (1 - \sigma^2) \int_0^b T_1 dy}{Eh_1 b}. \quad (f)$$

Здесь  $bh_1$  — площадь поперечного сечения распоров, мешающих сближению продольных сторон пластинки, и  $\int_0^b T_1 dy$  — сжимающее усилие, приходящееся на эти распоры.

Умножая (f) на  $dy$  и интегрируя от 0 до  $b$ , получаем

$$\frac{1}{2} \int_0^b dy \int_0^a \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{a (1 - \sigma^2)}{E} \int_0^b T_1 dy \left( \frac{1}{h} + \frac{1}{h_1} \right). \quad (g)$$

Задаваясь каким-либо приближенным выражением для прогиба, мы найдем из уравнения (g) величину усилия  $\int_0^b T_1 dy$ , сжимающего распоры. Для пластинки, близкой к квадратной, можно положить

$$w = w_{\max} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (h)$$

Подставляя (h) в уравнение (g), находим

$$\frac{a (1 - \sigma^2)}{E} \frac{h + h_1}{hh_1} \int_0^b T_1 dy = \frac{\pi^2}{8} \frac{w_{\max}^2}{a^2} ab. \quad (k)$$

Подставляя (k) в уравнение (f) и применяя его к средней балке-полоске  $mn$ , получаем

$$\frac{\pi^2 w_{\max}^2}{4a} = \frac{(T_1)_{\max} a (1 - \sigma^2)}{Eh} + \frac{\pi^2}{8} \frac{w_{\max}^2}{a} \frac{h}{h + h_1}$$

или

$$\frac{\pi^2 w_{\max}^2}{4a} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{h}{h + h_1} \right) = \frac{(T_1)_{\max} a (1 - \sigma^2)}{Eh}.$$

Следовательно, при расчете средней балки-полоски, для которой напряжения получаются наибольшими, нужно коэффициент распора принять равным

$$K_1 = 1 - \frac{1}{2} \frac{h}{h + h_1} = \frac{h + 2h_1}{2(h + h_1)}. \quad (l)$$

<sup>1</sup> Оно соответствует уравнению (59) для балок (см. § 11).

При длинных пластинках изгиб средней их части будет близок к цилиндрическому и потому формула (1) даст для коэффициента распора несколько преувеличенное значение. Мы получим в этом случае результат, более близкий к действительности, если примем для точек пластинки, отстоящих от поперечных сторон ближе чем на расстояние  $0,5 a$ , искривление по поверхности

$$w = w_{\max} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}.$$

Для средней же части пластинки примем изгиб по цилиндрической поверхности

$$w = w_{\max} \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Тогда на основании уравнений (g) и (f) получаем

$$K_1 = 1 - \frac{h}{h + h_1} \left( 1 - \frac{a}{2b} \right) = \frac{2bh_1 + ah}{2b(h + h_1)}. \quad (1')$$

При  $a = b$  формулы (1) и (1') дают для  $K_1$  одно и то же значение.

Таким образом, для приближенной оценки влияния усилий  $T_1$  при изгибе прямоугольной пластинки с опертыми краями и с конечным значением отношения  $b/a$  можно пользоваться формулами, полученными ранее для цилиндрического изгиба. Нужно только несколько повысить коэффициент распора, для чего можно применить формулу (1) или (1'). Заключение это остается в силе и в том случае, когда к пластинке и распорам извне приложены растягивающие усилия  $T_0$ . Вместо уравнения (f) получим в таком случае

$$\frac{1}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{T_1 a (1 - \sigma^2)}{Eh} + \frac{a (1 - \sigma^2)}{Eh_1 b} \left( \int_0^b T_1 dy - T_0 b \right). \quad (f')$$

Задаваясь для прогиба выражением (1), получаем из (f') прежним способом следующее уравнение:

$$\frac{\pi^2}{8} \frac{w_{\max}^2}{a^2} ab = \frac{a (1 - \sigma^2)}{E} \cdot \frac{h + h_1}{hh_1} \int_0^b T_1 dy - \frac{T_0 ba (1 - \sigma^2)}{Eh_1}.$$

из которого найдется величина  $\int_0^b T_1 dy$ . Подставляя ее значение в уравнение (f') и применяя это уравнение к средней балке-полоске, получаем

$$\frac{\pi^2 w_{\max}^2}{4a} \frac{2h_1 + h}{2(h_1 + h)} = \frac{(T_1)_{\max} a (1 - \sigma^2)}{Eh} - \frac{T_0 a (1 - \sigma^2)}{E(h + h_1)}.$$

Сравнивая это выражение с уравнением

$$\frac{\pi^2 w_{\max}^2}{4a} \frac{h_1}{h_1 + h} = \frac{T_1 a (1 - \sigma^2)}{Eh} - \frac{T_0 a (1 - \sigma^2)}{E(h + h_1)},$$

закключаем, что они отличаются одно от другого лишь величиной коэффициента распора. Вместо величины  $\frac{h_1}{h + h_1}$  имеем  $\frac{2h_1 + h}{2(h_1 + h)}$ .

## § 58. Влияние начальных искривлений на изгиб пластинок<sup>1</sup>

Предположим, что пластинка имеет некоторое начальное искривление и соответствующие этому искривлению прогибы  $w_0$  малы по сравнению с толщиной пластинки. Если на эту пластинку будут действовать лишь нагрузки, нормаль-

<sup>1</sup> Тимошенко С. П. О влиянии первоначальной кривизны на изгиб прямоугольной пластинки с опертыми краями. Сборник Института инженеров путей сообщения. Петроград, 1915, вып. 89, стр. 1—4. Отд. оттиск, Петроград, 1914, 4 стр.

ные к плоскости контура, то вызываемые ими прогибы  $w_1$  могут быть найдены из тех уравнений, которыми мы пользовались в случае идеально плоских пластинок. Иное заключение мы получим, если возьмем случай изгиба пластинки нормальными нагрузками и силами  $T_1, T_2, S_1$ .

Влияние сил  $T_1, T_2$  и  $S_1$  будет для плоских и слегка искривленных пластинок не одинаково. Чтобы учесть влияние начального искривления на изгиб, вызываемый силами  $T_1, T_2$  и  $S_1$ , обратимся к уравнению (226). В правую часть этого уравнения кроме нагрузки  $q$  входят составляющие в направлении оси  $z$  от усилий  $T_1, T_2$  и  $S_1$ . Составляющие эти, очевидно, определяются полным искривлением пластинки, и потому, применяя уравнение (226) к искривленным пластинкам, нужно в правой части вместо  $w$  поставить величину  $w_0 + w_1$ . Что касается левой части уравнения (226), то она определяет деформации пластинки, вызванные внешними силами, и потому, применяя это уравнение к пластинкам с начальной кривизной, нужно в левой части поставить вместо  $w$  величину  $w_1$ . Таким образом, получаем для пластинок с начальной кривизной уравнение

$$D \left( \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} \right) = q + T_1 \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial y^2} + 2S_1 \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial x \partial y}. \quad (228)$$

Мы видим, что пластинка с начальной кривизной будет искривляться под действием сил  $T_1, T_2$  и  $S_1$  даже при отсутствии нормальной нагрузки  $q$ .

Применим уравнение (228) к такому простейшему примеру: прямоугольная пластинка с опертными краями имеет начальное искривление, заданное выражением

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (a)$$

Требуется найти прогибы  $w_1$  этой пластинки под действием усилий  $T_1$  и  $T_2$ , равномерно распределенных по краям пластинки. Уравнение (228) переписывается в данном случае так:

$$D \left( \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} \right) = T_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + T_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}. \quad (b)$$

Решение этого уравнения возьмем в такой форме:

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (c)$$

Подставляя (a) и (c) в уравнение (b), получаем для коэффициентов  $B_{mn}$  такое выражение:

$$B_{mn} = - \frac{A_{mn} \left( T_1 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + T_2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)}{D \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 + T_1 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + T_2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2}}. \quad (229)$$

Подставляя (229) в выражение (c) для прогиба  $w_1$ , получаем искомое решение задачи.

Возьмем начальное искривление по такой поверхности:

$$w_0 = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Тогда, введя обозначения <sup>1</sup>

$$\frac{T_1 \frac{\pi^2}{a^2}}{D \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2} = \alpha_1^2, \quad \frac{T_2 \frac{\pi^2}{b^2}}{D \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2} = \alpha_2^2,$$

получим

$$w_1 = - \frac{A (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}{1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (d)$$

При растяжении пластинки лишь в направлении оси  $x$  получим

$$w_1 = - \frac{A \alpha_1^2}{1 + \alpha_1^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (e)$$

С возрастанием растягивающих усилий величина  $w_1$  приближается к  $-w_0$ , а полный прогиб пластинки стремится к нулю.

Таким образом, изгиб слегка искривленной прямоугольной пластинки, опертой по контуру при равномерном распределении усилий  $T_1$  и  $T_2$  не представляет никаких затруднений. Гораздо сложнее получается задача в том случае, когда распределение усилий  $T_1$  и  $T_2$  неравномерно и в особенности когда эти усилия не заданы и являются следствием определенного перемещения какой-либо стороны. При этих условиях удается определить изгиб пластинки лишь приближенно путем введения упрощающих допущений.

Решим приближенным способом такую задачу. Прямоугольная пластинка (рис. 113) с начальным искривлением

$$w_0 = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (f)$$

изгибается растягивающими усилиями  $T_0$ , распределенными равномерно вдоль длинных сторон пластинки и передающимися отчасти на упругие распорки и отчасти на пластинку. Закрепления краев пластинки по контуру устроены так, что все точки продольных сторон пластинки при действии усилий  $T_0$  совершают одно и то же перемещение. Следовательно, продольные стороны контура пластинки не гнутся и распределяют приходящиеся на них усилия  $T_0$  между распорками и пластинкой. Очевидно, чем большее начальное искривление имеет пластинка, тем меньшую часть усилия она примет на себя, тем больше передается на распорки. Ясно также, что при одинаковом смещении всех точек продольной стороны пластинки растягивающие усилия  $T_1$ , приходящиеся на пластинку, распределятся вдоль этой стороны неравномерно. Наименьшее значение их при выбранной форме начального искривления получится по середине стороны. По мере приближения к вершине пластинки усилия  $T_1$  будут возрастать, и у вершин соответствующие им растягивающие напряжения в пластинке будут иметь такое же значение, как и в распорках. Допустим, что изгиб пластинки под действием этих усилий мало отличается от того, который вызовут равномерно распределенные усилия  $T_1'$ , определяемые из формулы

$$T_1' = \frac{1}{b} \int_0^b T_1 dy. \quad (g)$$

В таком случае прогиб пластинки, на основании (e), напишется так:

$$w_1 = - \frac{A \alpha_1^2}{1 + \alpha_1^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (h)$$

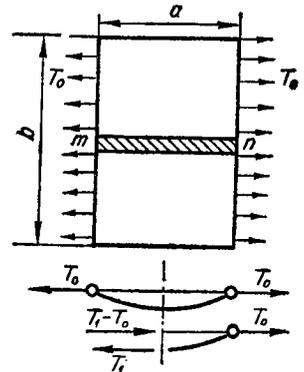


Рис. 113.

<sup>1</sup> Дальше будет показано, что  $\alpha_1^2$  и  $\alpha_2^2$  представляют собой отношения  $T_1$  и  $T_2$  к соответствующим критическим значениям сжимающих усилий.

где

$$\alpha_1^2 = \frac{T_1' \frac{\pi^2}{a^2}}{D \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2}. \quad (к)$$

Для какой-либо балки-полоски  $mn$  мы можем написать на основании таких же соображений, как и при цилиндрическом изгибе пластинки (см. § 47), следующее уравнение:

$$\frac{1}{2} \int_0^a \left[ \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] dx = \frac{T_1 a (1 - \sigma^2)}{Eh} + \frac{(T_1' - T_0) a (1 - \sigma^2)}{Eh_1}.$$

Умножая обе части этого уравнения на  $dy$  и интегрируя их в пределах от 0 до  $b$ , приходим к такому результату:

$$0,5A^2 \left[ \frac{\alpha_1^4}{(1 + \alpha_1^2)^2} \frac{\pi^2}{4a^2} - \frac{\alpha_1^2}{1 + \alpha_1^2} \frac{\pi^2}{2a^2} \right] = \frac{T_1' a (1 - \sigma^2)}{Eh} \cdot \frac{h + h_1}{h_1} - \frac{T_0 a (1 - \sigma^2)}{Eh_1} \quad (л)$$

Из этого уравнения (л)<sup>1</sup>, пользуясь обозначением (к), находим величину  $\alpha_1^2$  и величину  $T_1'$ , т. е. среднее значение растягивающего усилия для пластинки. Отношение этого среднего усилия к величине  $\frac{T_0}{h + h_1}$  даст нам значение редуцированного коэффициента для рассматриваемого случая. При одинаковых максимальных прогибах и одинаковых усилиях  $T_0$  величина его для пластинки с конечным отношением сторон будет больше, чем для весьма длинной прямоугольной пластинки.

<sup>1</sup> Уравнение может быть представлено в такой форме, как это мы имели в случае цилиндрического изгиба. Определение  $\alpha_1^2$  сведется к решению кубического уравнения.

§ 59. Об устойчивости сжатой прямоугольной  
пластинки с опертыми краями <sup>1</sup>

Предположим, что прямоугольная пластинка с опертыми краями сжимается силами  $P_1 = -T_1$ ;  $P_2 = -T_2$ , равномерно распределенными по соответствующим сторонам пластинки (рис. 114). Увеличивая сжимающие силы, мы можем достигнуть предела, когда плоская форма равновесия перестает быть устойчивой и дальнейшее увеличение сжатия сопровождается выпучиванием пластинки. Возникает явление, аналогичное явлению продольного изгиба в случае сжатия пружин стержней.

Практически обычно приходится встречаться с задачей, когда одно из усилий  $P$  задано и нужно разыскать то наименьшее значение для другого сжимающего усилия, при котором плоская форма равновесия пластинки перестает быть устойчивой. Это предельное значение сжимающих усилий будем называть *критическим*. Для его определения мы можем использовать те же приемы, которые применялись при изучении устойчивости сжатых стержней. Можно исходить из общего дифференциального уравнения (226) для искривленной поверхности пластинки и определить из него те значения усилий  $T_1$  и  $T_2$ , при которых прогиб, вызываемый нагрузкой  $q$ , начинает неопределенно возрастать. Этот прием мы в дальнейшем применим при изучении устойчивости пластинки с двумя опертыми краями и двумя другими краями, закрепленными как угодно. Здесь же применим другой метод, основанный на рассмотрении энергии деформации системы.

Метод этот, как мы дальше увидим, применим для решения не только данной сравнительно простой задачи, но дает возможность находить приближенные решения вопросов устойчивости в более сложных случаях, например в случае пластинок с заделанными краями и пластинок, подкрепленных жесткими ребрами.

Плоская форма равновесия пластинки, находящейся под действием усилий  $P_1$  и  $P_2$ , будет устойчива, пока ей соответствует минимум потенциальной энергии.

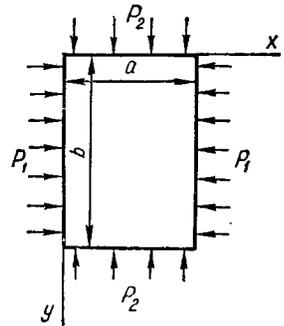


Рис. 114.

<sup>1</sup> Решение этой задачи принадлежит Дж. Брауну. См. В г у а н G. H. On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane, with application to the «buckling» of the side of a ship. Proc. of the London Mathematical Society, Series 1, 1891, vol. 22, pp. 54—67.

Если на всяком возможном отклонении пластинки от плоской формы равно весия приращение потенциальной энергии деформации будет больше, нежели работа усилий  $P_1$  и  $P_2$ , которую они совершат вследствие смещения краев при изгибе пластинки, то плоская форма устойчива. В противном случае она будет неустойчивой.

Если через  $V$  обозначим энергию изгиба, соответствующего весьма малому отклонению пластинки от плоской формы равновесия, и через  $T$  — работу усилий  $P_1$  и  $P_2$  при этих отклонениях, то критические значения сжимающих усилий могут быть найдены из условия

$$V = T. \quad (a)$$

В случае опертых краев общее выражение для отклонений пластинки от плоской формы представится выражением

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (b)$$

Общее выражение для потенциальной энергии изгиба на основании формулы (208) может быть представлено в таком виде:

$$V = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \sigma) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (230)$$

Подставив сюда вместо  $w$  принятый нами для пластинки прогиб (b), получим для левой части уравнения (a) такое значение <sup>1</sup>:

$$V = \frac{D}{2} \frac{ab}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2. \quad (231)$$

Для работы усилий  $P_1$  и  $P_2$  легко составим общее выражение, если примем во внимание, что сближение двух соответствующих точек, лежащих на сторонах  $x = 0$  и  $x = a$  или  $y = 0$  и  $y = b$  в зависимости от искривления пластинки, представляется так:

$$\frac{1}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \quad \frac{1}{2} \int_0^b \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} T &= \frac{P_1}{2} \int_0^b dy \int_0^a \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{P_2}{2} \int_0^a dx \int_0^b \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy = \\ &= \left( \frac{P_1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{P_2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \frac{ab}{4}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Легко показать, что второй член в квадратных скобках выражения (230) обращается в нуль, так как при выбранном для  $w$  выражении

$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy = \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy.$$

Подставляя это выражение в (а), получаем такое условие для определения критических значений сжимающих усилий:

$$P_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + P_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} = \\ = D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2. \quad (c)$$

### § 60. Об устойчивости прямоугольной пластинки, сжатой вдоль одной из сторон

Рассмотрим первоначально более простую задачу. Предположим, что одно из усилий, например  $P_2$ , равно нулю, и определим при помощи (с) критическое значение другого усилия. Условие (с) переписывается в этом случае так:

$$P_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} = D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2, \quad (c')$$

откуда

$$P_1 = \frac{D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2}{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2}}. \quad (d)$$

Критическим значением сжимающего усилия  $P_1$  будет наименьшее из тех его значений, которые получаются по формуле (d).

Так как числитель и знаменатель дроби (d) представляются в виде сумм положительных чисел, то наименьшее значение этой дроби будет получаться, когда все коэффициенты  $A_{mn}$ , кроме одного, положим равными нулю. Ясно также, что при этом  $n$  должно быть взято равным единице. Вместо (d) получаем

$$P_1 = \frac{D \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2}{\frac{m^2 \pi^2}{a^2}} = \frac{D \pi^2}{a^2} \left( m + \frac{a^2}{mb^2} \right)^2. \quad (d')$$

То обстоятельство, что нам пришлось из бесконечных сумм оставить в выражении (d) лишь по одному члену и положить  $n = 1$ , показывает, что *первая* искривленная форма равновесия пластинки имеет такой вид:

$$w = A_{m1} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

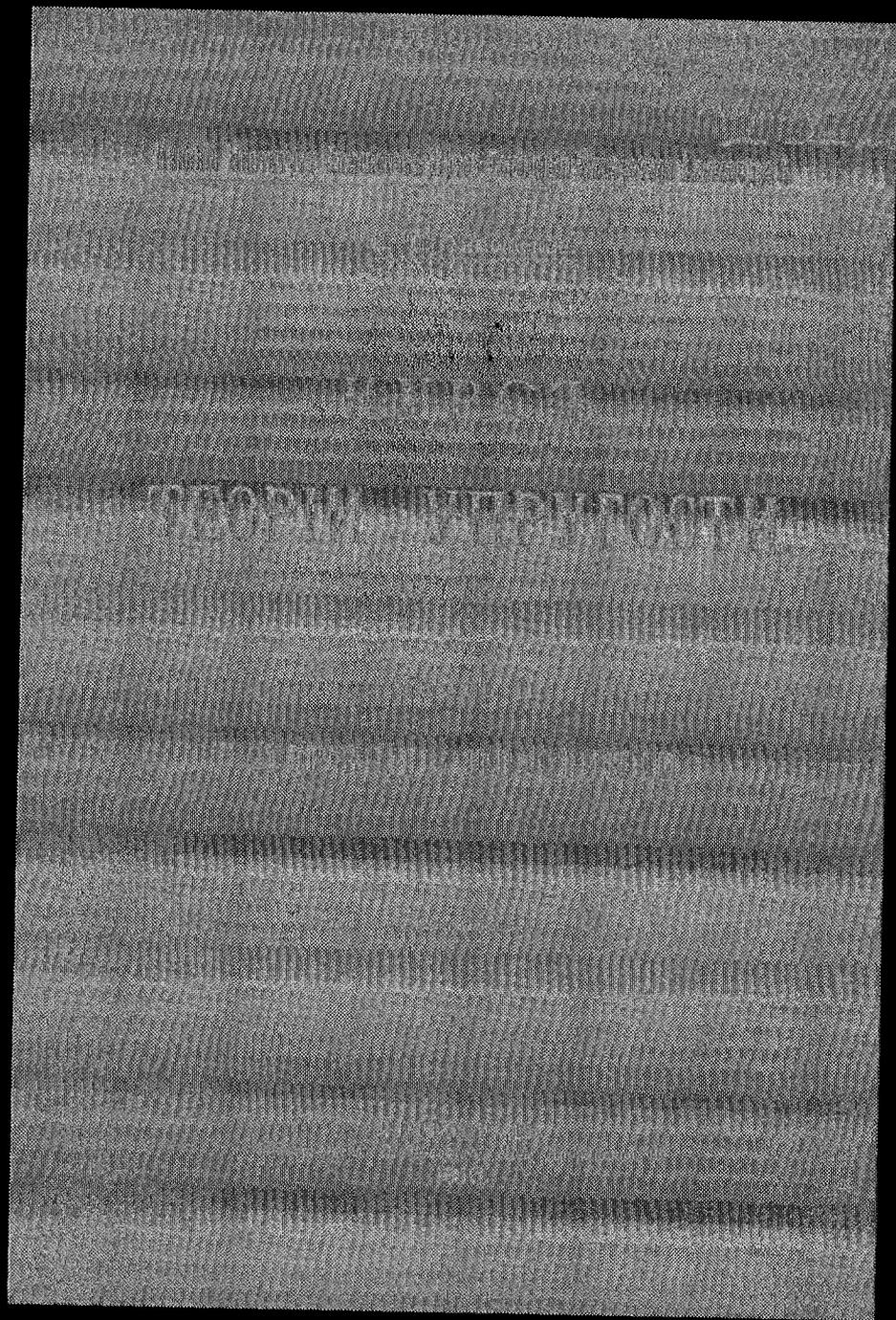
В случае сжатия пластинки в направлении оси  $x$  она выпучивается при критическом значении сжимающего усилия  $P_1$  так, что в направлении оси  $y$  получается одна полуволна, в направлении оси  $x$  —  $m$  полуволн. Для определения  $P_{1кр}$  нужно выбрать для  $m$  такое число, чтобы правая часть выражения (d') получила наименьшее значение, которое и представит собой критическое сжимающее усилие.

С. П. ПЕТРОВИЧ  
И. П. ПЕТРОВИЧ

# СОВЕТСКО-АМЕРИКАНСКАЯ КОМПАНИЯ

УСТАВ

Москва, 1925 г.



Если  $a$  мало по сравнению с  $b$ , то сразу видно, что в формуле (d') нужно положить  $m = 1$  и мы для определения  $P_{1\text{кр}}$  будем иметь в этом случае формулу

$$P_{1\text{кр}} = \frac{D\pi^2}{a^2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2. \quad (232)$$

Первый множитель в полученном выражении для  $P_{1\text{кр}}$  представляет собой критическое сжимающее усилие для балки-полоски, вычисленное по формуле Эйлера. Вторым членом в скобках оценивается влияние коротких сторон пластинки на величину критических сжимающих усилий. Перейдем теперь от критических усилий к критическим напряжениям. Разделив  $P_{1\text{кр}}$  на толщину пластинки и введя обозначения

$$\frac{P_{1\text{кр}}}{h} = (p_1)_{\text{кр}}; \quad \frac{D\pi^2}{a^2 h} = p_e,$$

получим

$$p_{1\text{кр}} = p_e \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2. \quad (233)$$

Обратимся теперь к другому крайнему случаю, когда пластинка имеет весьма большую длину в направлении действия сжимающих усилий  $P_1$ . Для определения числа полуволн, на которое пластинка подразделится при выпучивании, обратимся к выражению (d'). С числом  $m$  будем поступать как с непрерывно изменяющейся величиной. Составляя производную от (d') по  $m$  и приравнявая эту производную нулю, находим  $a^2 = m^2 b^2$ ,  $m = a/b$ , т. е. наименьшее значение сжимающих усилий  $P_1$  будет соответствовать той искривленной форме выпучившейся пластинки, когда длина полуволн, получившихся при выпучивании, равняется ширине пластинки. При этом пластинка подразделяется узловыми линиями (линиями, по которым прогиб пластинки равен нулю) на квадраты, и критическое значение сжимающих усилий на основании (d') представится так:

$$P_{1\text{кр}} = 4 \frac{D\pi^2}{b^2},$$

т. е. критические усилия имеют в данном случае такое же значение, как для балки-полоски длины  $b$  с заделанными концами. Введя обозначения

$$\frac{D\pi^2}{b^2 h} = p_e \quad (234)$$

для критических напряжений балки-полоски длины  $b$  с опертыми концами, получим в случае весьма длинной пластинки, сжимаемой в направлении длины,

$$p_{1\text{кр}} = 4p_e. \quad (235)$$

Результат этот можно было бы предвидеть на основании того, что нами было получено в случае сжатия короткой пластинки, выпучивающейся по одной полуволне. Соответствующая этому случаю формула (233) легко может быть представлена в таком виде:

$$p_{1\text{кр}} = p_e \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)^2 = kp_e. \quad (233')$$

Если мы, сохраняя постоянной ширину пластинки  $b$ , будем изменять ее длину, то при этом будет изменяться коэффициент  $k$ . Изменения эти представлены на рис. 115 кривой  $m = 1$ . Мы видим, что наименьшего значения этот коэффициент достигает в случае квадратной пластинки при  $k = 4$ .

Когда имеется весьма длинная пластинка, подразделяющаяся при выпучивании на ряд полуволн, то каждая полуволна, заключенная между двумя последовательными узловыми линиями, может быть рассмотрена как независимая пластинка с опертыми краями, так как по узловым линиям соответствующие изгибающие моменты обращаются в нуль. Для такой пластинки заданной ширины  $b$  критическое напряжение получается наименьшим, когда ее длина равна ширине. Отсюда можем заключить, что весьма длинная пластинка при выпучивании стремится подразделиться узловыми линиями на квадраты.

На квадраты подразделится также и пластинка конечной длины, если только отношение  $a/b$  представляет собой целое число. При  $a/b$  дробном пластинка подразделяется узловыми линиями на прямоугольнички с таким соотношением сторон, при котором критическое напряжение, вычисляемое для одной полуволны как для независимой пластинки, имеет наименьшее значение. Соответствующее число полуволн может быть установлено путем таких рассуждений.

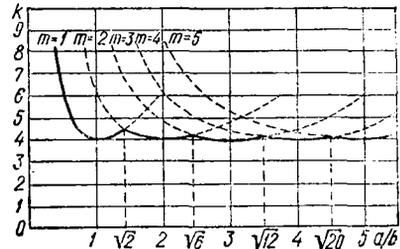


Рис. 115.

Пока длина пластинки  $a$  мала, мы будем иметь одну полуволну, и критическое усилие найдем по формуле (d'), полагая в ней  $m = 1$ . Сохраняя ширину пластинки  $b$  постоянной и увеличивая  $a$ , мы получаем наименьшее значение  $p_{1кр}$  при  $a=b$ . При дальнейшем увеличении  $a$  значение  $p_{1кр}$  начинает возрастать. Соответствующие изменения  $p_{1кр}$  представлены на рис. 115<sup>1</sup> кривой  $m = 1$ . Начиная с некоторой определенной длины  $a$  формула (d') будет давать наименьшее значение для  $P_1$  при условии  $m = 2$ . Этому соответствует подразделение пластинки на две полуволны. Рассматривая каждую полуволну как самостоятельную пластинку, получаем изменение критических напряжений, представленное рис. 115 кривой  $m = 2$ . Пересечение кривых  $m = 1$  и  $m = 2$  определит то значение отношения  $a/b$ , начиная с которого получается при выпучивании две полуволны. При дальнейшем увеличении  $a$  достигнем такой длины, когда наименьшие значения  $P_1$ , определяемые из формулы (d'), будут получаться при  $m = 3, m = 4$  и т. д. Изменения критических напряжений даются на рис. 115 кривыми  $m = 3, m = 4$ . То соотношение между длиной и шириной пластинки, которому соответствует переход от искривления по двум полуволнам к искривлению по трем полуволнам, определяется пересечением кривых  $m = 2$  и  $m = 3$ . Переход к четырем полуволнам определится пересечением кривых  $m = 3$  и  $m = 4$  и т. д. Вообще переход от  $m$  полуволн к  $m + 1$ -й полуволнам происходит при таком значении отношения  $a/b$ , при котором значение правой части формулы (d') не изменяется от замены  $m$  на  $m + 1$ , т. е. когда

$$m + \frac{a^2}{mb^2} = m + 1 + \frac{a^2}{(m + 1)b^2},$$

откуда получаем

$$\frac{a}{b} = \sqrt{m(m + 1)}. \tag{f}$$

Полагая здесь  $m = 1$ , находим, что переход от одной к двум полуволнам происходит при  $a/b = \sqrt{2}$ . Переход от двух к трем полуволнам получается при  $a/b = \sqrt{6}$  и т. д.

<sup>1</sup> На рисунке даны значения коэффициента  $k$  (см. формулу (233')), пропорциональные  $P_{1кр}$ .

Таким образом, формула (f) даст нам возможность установить в каждом частном случае число полуволн, соответствующих первой искривленной форме равновесия пластинки. Установив длину одной полуволны и вставив ее в (233') вместо  $a$ , найдем соответствующее критическое напряжение. На рис. 115 те части кривых, которые соответствуют искомому критическим напряжениям, показаны сплошной линией, и мы видим, что с увеличением длины пластинки

Т а б л и ц а 30

$\frac{a}{b}$	$k$	$P_{1кр}$ кг/см <sup>2</sup>	$\frac{a}{b}$	$k$	$P_{1кр}$ кг/см <sup>2</sup>
0,3	13,2	2620	1,0	4,00	795
0,4	8,41	1670	1,1	4,04	803
0,5	6,25	1240	1,2	4,13	821
0,6	5,14	1020	1,3	4,28	851
0,7	4,53	901	1,4	4,47	889
0,8	4,20	835	1,41	4,49	893
0,9	4,04	803			

уменьшаются колебания величины  $P_{1кр}$ . Несколько значений коэффициента  $k$ , входящего в формулу (233'), мы приводим в табл. 30.

В той же таблице даем значения  $P_{1кр}$ , вычисленные для  $h = 0,01 b$ ,  $E = 2,2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $\sigma = 0,3$ . Если для рассчитываемой пластинки  $h = 1b/n$ , то для получения критических напряжений нужно числа таблицы помножить на  $10^4/n^2$ .

Определим при помощи таблицы то значение  $n$  для весьма длинной прямоугольной пластинки, при котором  $P_{1кр} = 3000$  кг/см<sup>2</sup>. Это соответствует пределу текучести для стали повышенного качества, применяемой в кораблестроении. При большой длине пластинки мы можем принять длину полуволны равной ширине пластинки и положить  $k = 4$ . Из таблицы имеем  $P_{1кр} = 795$ . Нужно число  $n$  найдется из условия  $795 \cdot 10^4/n^2 = 3000$ , откуда  $n = 51,5$ .

## § 61. Об устойчивости прямоугольной пластинки, растягиваемой или сжимаемой вдоль обеих сторон

Предположим теперь, что кроме усилий  $P_1$ , действующих в направлении оси  $x$ , имеются еще перпендикулярные к ним усилия  $P_2$ . Очевидно, что всякое растягивающее усилие в направлении оси  $y$  будет увеличивать найденное нами ранее значение  $P_{1кр}$ , вычисленное для  $P_2 = 0$ . Точно так же сжатие в направлении оси  $y$  будет уменьшать то же усилие. Когда  $P_2$  достигает наименьшего из значений, при которых имеет место равенство [см. (с) § 59]

$$P_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} = D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2,$$

$(P_1)_{кр}$  обращается в нуль и при дальнейшем увеличении  $P_2$  плоская форма равновесия пластинки будет устойчива при отрицательных  $P_1$ , т. е. при подлежаще подобранных растягивающих усилиях в направлении оси  $x$ .

Так же, как при  $P_2 = 0$ , мы можем и в настоящем случае показать, что наименьшие значения для  $P_1$  и  $P_2$ , при которых плоская форма равновесия пластинки перестает быть устойчивой, получаются из условия (с) § 59, если в нем все коэффициенты  $A_{mn}$ , кроме одного, положить равными нулю. Таким образом, критические значения усилий должны удовлетворять уравнению

$$P_1 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + P_2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} = D \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2.$$

Или, переходя к напряжениям и пользуясь прежними обозначениями

$$P_1 = \frac{P_1}{h}; \quad P_2 = \frac{P_2}{h}; \quad \frac{D\pi^2}{a^2h} = p_e; \quad \frac{D\pi^2}{b^2h} = p'_e,$$

получаем условие

$$p_1 m^2 + p_2 n^2 \frac{a^2}{b^2} = p_e \left( m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2. \tag{г}$$

Каждому значению чисел  $m$  и  $n$  соответствует особая форма равновесия выпучивающейся пластинки, определяемая уравнением

$$w_{mn} = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

и вполне определенная зависимость между напряжениями  $p_1$  и  $p_2$ , получаемая из уравнения (г). Зависимость эта линейная и графически может быть представлена для каждой пары значений  $m$  и  $n$  соответствующей прямой линией.

На рис. 116 нанесено несколько таких линий, относящихся к случаю квадратной пластинки. По оси  $x$  отложены напряжения  $p_1$ , по оси  $y$  —  $p_2$ . Если в уравнении (г) положим  $p_2 = 0$ , то получим точки пересечения наших прямых с осью  $p_1$ . Ими определяются значения сжимающих напряжений, при которых возможны искривленные формы равновесия пластинки в случае действия лишь усилий  $P_1$ . Ближайшая из полученных точек пересечения определит найденное ранее значение для  $p_{1кр}$ . Точно так же, полагая в уравнении (г)  $p_1 = 0$ , приходим к задаче об устойчивости пластинки, сжимаемой лишь в направлении оси  $y$ . Критическое напряжение  $p_{2кр}$  определится ближайшей к началу координат точкой пересечения наших прямых с осью  $p_2$ . На нашем рисунке  $p_{1кр} = p_{2кр}$  и величина критических напряжений определяется пересечением прямой  $m = 1, n = 1$  с координатными осями. Получаем, таким образом, прежний результат. Для квадратной пластинки, сжимаемой усилиями  $P_1$  или  $P_2$ , первая возможная искривленная форма равновесия будет иметь лишь одну полуволну.

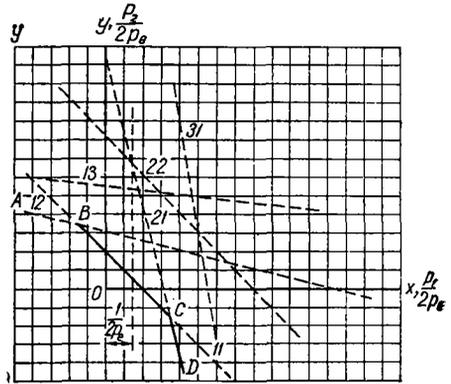


Рис. 116.

Составляя для заданного соотношения между сторонами пластинки рисунок, подобный рис. 116, мы легко решаем вопрос о критических напряжениях при любом соотношении между напряжениями  $p_1$  и  $p_2$ . Особенно просто решается задача в том случае, когда пластинка подвергается равномерному сжатию, т. е. когда  $p_1 = p_2 = p$ . При этом уравнение (г) переписывается так:

$$p = p_e \left( m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right).$$

Наименьшее значение для  $p$  получается при  $m = n = 1$ . Следовательно, в этом случае

$$p_{кр} = p_e \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right). \tag{236}$$

Чтобы получить это решение из рисунка, нужно только из начала координат провести линию, делящую пополам угол между координатными осями, и получить точку пересечения этой линии с прямой  $m = 1, n = 1$ . Таким образом, при равномерном сжатии первая искривленная форма всегда имеет одну полуволну как в направлении ширины, так и в направлении длины пластинки.

Если одно из напряжений, например  $p_1$ , задано, то для получения критического значения другого напряжения нужно только на рисунке провести линию, параллельную оси  $p_2$  и отстоящую от нее на заданном расстоянии  $p_1$ . Точки пересечения этой линии с прямыми (г) определяют все те значения  $p_2$ , при которых становятся возможными искривленные формы равновесия пластинки с заданным сжимающим напряжением  $p_1$ . Точка с наименьшей ординатой определит искомое  $p_{2кр}$ . При разыскании этой точки нет надобности наносить на рисунок все линии (г), нужно взять лишь две группы линий, для которых

$$m = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$n = 1, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

(h)

Пересечениями этих линий определяется многоугольник  $ABCD\dots$  (части линий, составляющих этот многоугольник, показаны на рис. 116 сплошной линией), разделяющий плоскость рисунка на две части. Легко показать, что в той части, где лежит начало координат, не будет проходить ни одна из линий ( $g$ ) и, следовательно, для определения критических напряжений нужно построить лишь многоугольник  $ABCD\dots$  Для каждого значения  $p_1$  пересечение прямой линии  $x = p_1$  с соответствующей стороной многоугольника  $ABCD\dots$  дает искомое значение  $p_{2кр}$ . Заметим, что положительным значениям  $p_1$  и  $p_2$  при принятых обозначениях соответствует сжатие, а отрицательным — растяжение. При расчете пластинок на устойчивость, когда задается напряжение  $p_1$  и нужно разыскать соответствующее  $p_{2кр}$ , выгодно по заданной величине заранее установить, которой из сторон многоугольника  $ABCD\dots$  следует пользоваться для определения  $p_{2кр}$ . Это может быть легко сделано следующим образом. Прежде всего установим те пределы для  $p_1$ , в которых нужно пользоваться линией  $m = 1$ ,  $n = 1$ . На рис. 116 они будут соответствовать, очевидно, абсциссам точек  $B$  и  $C$ . Наибольшее  $p_1$ , относящееся к линии  $m = 1$ ,  $n = 1$ , определяется точкой  $C$ , точкой пересечения линий

$$p_1 + p_2 \frac{a^2}{b^2} = p_e \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 \quad m = 1, \quad n = 1;$$

$$4p_1 + p_2 \frac{a^2}{b^2} = p_e \left(4 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 \quad m = 2, \quad n = 1.$$

Решая эти уравнения, находим

$$p_1 = p_e \left(5 + 2 \frac{a^2}{b^2}\right).$$

Нижний предел для  $p_1$  определяется точкой  $B$ , точкой пересечения линий

$$p_1 + p_2 \frac{a^2}{b^2} = p_e \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 \quad m = 1, \quad n = 1;$$

$$p_1 + 4p_2 \frac{a^2}{b^2} = p_e \left(1 + 4 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 \quad m = 1, \quad n = 2.$$

Из этих уравнений находим

$$p_1 = p_e \left(1 - 4 \frac{a^4}{b^4}\right).$$

Следовательно, при условии

$$p_e \left(1 - 4 \frac{a^4}{b^4}\right) < p_1 < p_e \left(5 + 2 \frac{a^2}{b^2}\right) \quad (к)$$

напряжение  $p_{2кр}$  будет определяться линией  $m = 1$ ,  $n = 1$ . Предположим, например, что прямоугольная пластинка, у которой  $a = 0,5 b$ , сжимается в направлении оси  $x$ , причем  $p_1 = p_e$ . Нужно найти то наименьшее значение для сжимающих напряжений  $p_2$ , при котором плоская форма перестает быть устойчивой. Подставляя заданное значение отношения  $a/b$  в неравенство (к), получаем  $0,75 p_e < p_1 < 5,5 p_e$ . Так как заданное нам  $p_1$  лежит в этих пределах, то  $p_{2кр}$  найдется из уравнения

$$p_1 + p_2 \frac{a^2}{b^2} = p_e \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2.$$

Полагая в нем  $a = 0,5 b$  и  $p_1 = p_e$ , получаем

$$p_{2кр} = 2,25 p_e = 2,25 \frac{D\pi^2}{a^2 h}.$$

Если заданное значение  $p_1$  выходит за пределы значений, устанавливаемых условием (к), то нужно пользоваться другими сторонами многоугольника  $ABCD\dots$  Причем для значений  $p_1$ , больших верхнего предела, в неравенстве (к) нужно пользоваться группой линий  $n = 1$ ,  $m = 2, 3, 4, \dots$

Для значений  $p_1$ , меньших нижнего предела, в неравенстве (к) нужно рассмотреть линии  $m = 1$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots$  Нетрудно установить пределы для  $p_1$ , относящиеся к каждой из этих линий.

Рассмотрим, например, первую группу линий, соответствующую случаю

$$p_1 > p_e \left(5 + 2 \frac{a^2}{b^2}\right).$$

Установим пределы для  $p_1$ , относящиеся к стороне  $m = i, n = 1$ . Нижний предел определяется пересечением линий  $m = i, n = 1$  и линии  $m = i - 1, n = 1$ . Решая соответствующие уравнения

$$p_1 i^2 + p_2 \frac{a^2}{b^2} = p_e \left( i^2 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2;$$

$$p_1 (i - 1)^2 + p_2 \frac{a^2}{b^2} = p_e \left[ (i - 1)^2 + \frac{a^2}{b^2} \right]^2,$$

получаем для нижнего предела значение

$$p_1 = p_e \left( 2i^2 - 2i + 1 + 2 \frac{a^2}{b^2} \right).$$

Подобным же образом для верхнего предела из условия пересечения линий  $m = i, n = 1; m = i + 1, n = 1$  находим

$$p_1 = p_e \left( 2i^2 + 2i + 1 + 2 \frac{a^2}{b^2} \right).$$

Следовательно, линией  $m = i, n = 1$  нужно пользоваться при определении  $p_{2кр}$ , если  $p_1$  лежит в таких пределах:

$$p_e \left( 2i^2 - 2i + 1 + 2 \frac{a^2}{b^2} \right) < p_1 < p_e \left( 2i^2 + 2i + 1 + 2 \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (1)$$

Совершенно таким же образом для тех случаев, когда

$$p_1 < p_e \left( 1 - 4 \frac{a^4}{b^4} \right)$$

и когда нужно пользоваться группой линий  $m = 1, n = 2, 3, 4, \dots$ , линия  $m = 1, n = i$  будет служить для определения  $p_{2кр}$ , если  $p_1$  лежит в таких пределах:

$$p_e \left[ 1 - i^2 (i - 1)^2 \frac{a^4}{b^4} \right] > p_1 > p_e \left[ 1 - i^2 (i + 1)^2 \frac{a^4}{b^4} \right]. \quad (2)$$

Применим полученные результаты к расчету пластинки, у которой  $a = 0,5$  и  $p_1 = 7p_e$ . В этом случае

$$p_1 > p_e \left( 5 + 2 \frac{a^2}{b^2} \right)$$

и нам нужно обратиться к неравенству (1). Оно будет удовлетворено при  $i = 2$ . Следовательно,  $p_{2кр}$  определится прямой

$$4p_1 + p_2 \frac{a^2}{b^2} = p_e \left( 4 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2.$$

Полагая здесь  $p_1 = 7p_e, a = 0,5b$ , находим  $p_{2кр} = -39,75 p_e$ .

Этим определяется то значение растягивающих напряжений  $p_2$ , при котором плоская форма равновесия пластинки со сжимающими напряжениями  $p_1 = 7p_e$  перестает быть устойчивой. Для растягивающих напряжений, больших найденного значения, пластинка устойчива, для меньших — не устойчива.

Если к той же пластинке приложены в направлении оси  $x$  растягивающие усилия  $p_1 = -11 p_e$ , то для определения  $p_{2кр}$  нужно обратиться к неравенствам (2). Неравенства будут удовлетворены при  $i = 4$ . Следовательно,  $p_{2кр}$  определяется прямой

$$p_1 + 16p_2 \frac{a^2}{b^2} = p_e \left( 1 + 16 \frac{a^2}{b^2} \right)^2.$$

Отсюда, полагая  $p_1 = -11 p_e, a = 0,5 b$ , находим  $p_{2кр} = 9 p_e$ .

### § 62. Об устойчивости прямоугольной пластинки с опертыми краями, изгибаемой и сжимаемой в срединной плоскости

Здесь мы рассмотрим вопрос об устойчивости прямоугольной пластинки с опертыми краями, подвергающейся действию усилий, параллельных оси  $x$ , причем интенсивность этих усилий изменяется по линейному закону (рис. 117), определяемому формулой

$$P_1 \left( 1 - \frac{y}{\alpha b} \right). \quad (a)$$

Изменяя в этой формуле величину  $\alpha$ , мы можем получить различные соотношения между напряжениями изгиба и напряжениями сжатия. Полагая, например,  $\alpha = 0,5$ , получаем случай чистого изгиба, когда наибольшее сжимающее усилие, имеющее место при  $y = 0$ , равняется наибольшему растягивающему усилию, получающемуся при  $y = b$ . При  $\alpha > 0,5$  мы получим случай одновременного действия изгиба и сжатия, при  $\alpha < 0,5$  будем иметь случай изгиба с растяжением. Если положить  $\alpha = \infty$ , то придем к ранее рассмотренному случаю равномерного сжатия пластинки вдоль одной из сторон.

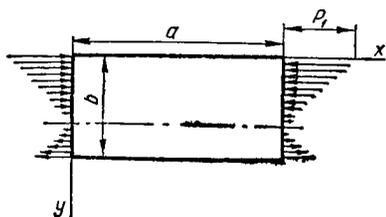


Рис. 117.

При определении  $P_{1кр}$  будем исходить из рассмотрения энергии системы. Самое общее выражение для искривленной формы равновесия пластинки в случае опертых краев напишется так:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (b)$$

Соответствующее выражение для потенциальной энергии изгиба (формула 231) будет

$$V = \frac{D}{2} \frac{ab}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left( \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right)^2.$$

Работа сжимающих усилий вследствие смещения краев при выпучивании пластинки вычислится по такой формуле:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^b dy \int_0^a P_1 \left( 1 - \frac{y}{\alpha b} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (c)$$

Подставляя сюда вместо  $w$  выражение (b) и принимая во внимание, что

$$\int_0^b y \sin \frac{i\pi y}{b} \sin \frac{j\pi y}{b} dy = \begin{cases} \frac{b^2}{4} & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \pm j \text{ четном,} \\ -\frac{4b^2}{\pi^2} \frac{ij}{(i^2 - j^2)^2} & \text{при } i \pm j \text{ нечетном,} \end{cases}$$

получаем для работы сжимающих сил выражение

$$T = \frac{P_1}{2} \frac{ab}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} - \frac{P_1}{2} \frac{a}{2\alpha b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left[ \frac{b^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 - \frac{8b^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_i^{\infty} \frac{A_{mn} A_{mi} ni}{(n^2 - i^2)^2} \right].$$

Приравнявая это выражение потенциальной энергии изгиба пластинки, получаем для  $P_1$  такое выражение:

$$P_1 = \frac{D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{a} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2}{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} - \frac{1}{2\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 - \frac{32}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_i^{\infty} \frac{A_{mn} A_{mi} ni}{(n^2 - i^2)^2} \right]}, \quad (d)$$

где  $n \pm i$  — нечетное число.

Теперь нужно из всех возможных искривленных форм равновесия выбрать такую, которой соответствует наименьшее значение  $P_1$ . Это значение и будет искомым  $P_{1кр}$ . Составляя производную от выражения (d) по каждому из коэффициентов  $A_{mn}$  и приравнявая эти производные нулю, мы приходим к системе бесконечного числа уравнений такого вида:

$$DA_{mn} \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 = P_1 \left\{ A_{mn} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} - \frac{1}{2\alpha} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left[ A_{mn} - \frac{16}{\pi^2} \sum_i^{\infty} \frac{A_{mi} ni}{(n^2 - i^2)^2} \right] \right\}. \quad (e)$$

Соберем все уравнения с определенным значением  $m$ . В эту систему войдут коэффициенты  $A_{m1}$ ,  $A_{m2}$ . Остальные коэффициенты положим равными нулю. Тогда соответствующая искривленная форма равновесия определится таким образом:

$$w = \sin \frac{m\pi x}{a} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Поверхность эта, как мы видим, подразделяется в направлении оси  $x$  узловыми линиями на  $m$  полуволн, поскольку каждую полуволну можно рассматривать как независимую пластинку, то мы в дальнейшем можем ограничиться исследованием выпучивания пластинки по одной полуволне. Для этого из системы уравнений (e) нужно оставить лишь уравнения, для которых  $m = 1$ . Пользуясь нашими прежними обозначениями

$$p_1 = \frac{P_1}{h}, \quad p_e = \frac{D\pi^2}{a^2 h}, \quad p_e' = \frac{D\pi^2}{b^2 h},$$

напишем эти уравнения в таком виде:

$$A_{1n} \left[ \left( 1 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 - \frac{p_1}{p_e} \left( 1 - \frac{1}{2\alpha} \right) \right] - \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{16}{\pi^2} \frac{p_1}{p_e'} \sum_i^{\infty} \frac{A_{1i} ni}{(n^2 - i^2)^2} = 0, \quad (f)$$

где  $n \pm i$  — нечетное число.

Мы получили систему линейных однородных уравнений, связывающих между собой коэффициенты  $A_{12}$ ,  $A_{14}$ , ... Система эта может дать для коэффициентов  $A_{1n}$  решения, отличные от нуля, лишь в том случае, если определитель ее равен нулю. Приравнявая нулю определитель уравнений (f), мы получаем,

таким образом, все те значения  $p_1$ , при которых возможна искривленная форма равновесия пластинки. Наименьшее из этих значений и будет искомым  $p_{1кр}$ . Вычислить  $p_{1кр}$  можно путем последовательных приближений. В качестве первого приближения можно ограничиться лишь первым уравнением системы (f) и оставить в нем лишь первый коэффициент  $A_{11}$ , положив остальные равными нулю. Тогда получим

$$(p_1)_{кр}' = p_e \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{2\alpha}} = p_e' \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{2\alpha}}. \quad (237)$$

Это первое приближение дает удовлетворительные результаты лишь в случае больших значений  $\alpha$  (при  $\alpha = 1,5$  погрешность первого приближения для квадратной пластинки составляет около 4%), т. е. когда напряжения сжатия преобладают над напряжениями изгиба. С увеличением  $\alpha$  формула (237) приближается к формуле (233'), полученной для равномерного сжатия.

Чтобы найти второе приближение, нужно взять два первых уравнения системы (f) и ограничиться коэффициентами  $A_{11}$  и  $A_{12}$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} \left[ \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 - \frac{p_1}{p_e} \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) \right] A_{11} - \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{16}{\pi^2} \frac{p_1}{p_e} \frac{2}{9} A_{12} &= 0; \\ - \frac{1}{2\alpha} \frac{16}{\pi^2} \frac{p_1}{p_e} \frac{2}{9} A_{11} + \left[ \left(1 + 4 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 - \frac{p_1}{p_e} \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) \right] A_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Приравнявая нулю определитель этих уравнений, получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_1}{p_e}\right)^2 \left[ \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{1}{2\alpha} \frac{16}{\pi^2} \frac{2}{9}\right)^2 \right] - \frac{p_1}{p_e} \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) \left[ \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 + \right. \\ \left. + \left(1 + 4 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 \right] + \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 \left(1 + 4 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем второе приближение для  $p_{1кр}$ . Например, в случае чистого изгиба, когда  $\alpha = 0,5$ , находим

$$p_{1кр} = \frac{9\pi^2}{32} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \left(1 + 4 \frac{a^2}{b^2}\right) p_e. \quad (238)$$

Погрешность второго приближения для квадратной пластинки около 8%. С возрастанием  $\alpha$  погрешность убывает и, начиная с  $\alpha = 0,75$ , можно при практических расчетах ограничиваться вторым приближением. Для получения третьего приближения нужно взять три уравнения системы (f). При  $\alpha = 0,5$  уравнения эти напишутся так:

$$\begin{aligned} A_{11} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 - \frac{16}{\pi^2} \frac{p_1}{p_e} \frac{2}{9} A_{12} + 0 &= 0; \\ - A_{11} \frac{16}{\pi^2} \frac{p_1}{p_e} \frac{2}{9} + \left(1 + 4 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 A_{12} - \frac{16}{\pi^2} \frac{p_1}{p_e} \frac{6}{25} A_{13} &= 0; \\ 0 - \frac{16}{\pi^2} \frac{p_1}{p_e} \frac{6}{25} A_{12} + \left(1 + 9 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 A_{13} &= 0. \end{aligned}$$

Приравнявая нулю определитель этих уравнений, находим третье приближение для  $p_{1кр}$ . Значения критических напряжений могут быть представлены в таком виде:

$$p_{1кр} = k p_e'. \quad (239)$$

<sup>1</sup> См. стр. 158 нашей работы, упомянутой на стр. 266. См. стр. 515 работы И. Г. Бубнова, упомянутой на стр. 200.

Величины коэффициентов  $k$ , полученные указанным выше способом, даны в табл. 31. Первая строчка значений  $k$  в этой таблице и первое число второй строчки получены на основании третьего приближения. Остальные значения вычислены по второму приближению. Можно было бы получить соответствующе-

Таблица 31

$\alpha$	$a/b$								
	0,4	0,5	0,6	0,667	0,75	0,8	0,9	1,0	1,5
0,50	29,1	25,6	24,1	23,9	24,1	24,4	25,6	25,6	24,1
0,75	18,7	—	12,9	—	11,5	11,2	—	11,0	11,5
1,00	15,1	—	9,7	—	8,4	8,1	—	7,8	8,4
1,25	13,3	—	8,3	—	7,1	6,9	—	6,6	7,1
1,50	10,8	—	7,1	—	6,1	6,0	—	5,8	6,1

щие числа с помощью дальнейших приближений, но им будут соответствовать столь малые изменения приведенных в таблице значений  $k$ , что практически с этими изменениями считаться не придется<sup>1</sup>. Заметим только, что всякое последующее приближение может сопровождаться лишь уменьшением  $k$ , так как увеличение числа коэффициентов  $A_{1n}$  соответствует увеличению числа степеней свободы нашей системы, что может сопровождаться лишь уменьшением общей жесткости системы.

Вычисления, которые мы здесь привели, относятся к случаю, когда в направлении оси  $x$  выпучившаяся пластинка представляет одну полуволну.

Но, принимая во внимание, что при выпучивании по нескольким полуволнам мы можем каждый участок пластинки между двумя узловыми линиями рассматривать как независимую пластинку, легко распространить наши результаты на случай пластинки с любым числом полуволн в направлении оси  $x$ . Возьмем, например, случай чистого изгиба. Изменения коэффициента  $k$  в зависимости от отношения  $a/b$  представлены на рис. 118 кривой  $m = 1$ . Мы видим,

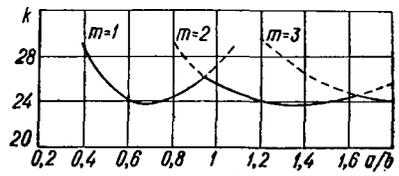


Рис. 118.

что сначала с возрастанием отношения  $a/b$  коэффициент  $k$  убывает и достигает своего наименьшего значения при  $a/b \approx 2/3$ . Далее начинается возрастание  $k$ , и при  $a/b = 1$  величина этого коэффициента, вычисленная в предположении одной полуволны, получается большей, чем для отношения  $a/b = 1/2$ . Это свидетельствует о том, что квадратная пластинка при чистом изгибе уже будет подразделяться на две полуволны и при дальнейшем возрастании отношения  $a/b$  нужно пользоваться кривой  $m = 2$ , которая получается из кривой  $m = 1$  путем удвоения абсцисс. Подобным же образом могут быть построены кривые  $m = 3$ ,  $m = 4$  и т. д. Пересечением кривых  $m = 1$  и  $m = 2$  определяется момент перехода от одной полуволны к двум. Так же точно кривые  $m = 2$  и  $m = 3$  в пересечении дают то значение отношения  $a/b$ , начиная с которого получается три полуволны, и т. д. Легко видеть из рисунка, что с увеличением длины пластинки значения  $k$  все меньше будут отклоняться от своего наименьшего значения. Для достаточно длинной пластинки мы можем полагать  $k = 23,9$  и считать, что при выпучивании такая пластинка подразделится узловыми линиями на участки, соотношение сторон которых равно приблизительно  $2/3$ .

<sup>1</sup> Для квадратной пластинки в случае  $\alpha = 0,5$  четвертое приближение отличается от третьего, данного в таблице, на 0,33%.

Полученные результаты показывают, что в случае чистого изгиба прямоугольные пластинки гораздо устойчивее, чем при равномерном сжатии, и критические напряжения могут получиться в пределах упругости лишь при сравнительно тонких пластинках. Так, например, при  $E = 2,2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ,  $b \approx 140h$  и  $\sigma = 0,3$  мы получаем  $P_{\text{кр}} = 2400 \text{ кг/см}^2$ . Подобным же образом решается вопрос об устойчивости длинных пластинок и при других значениях  $\alpha$ . Заметим, что с увеличением  $\alpha$  коэффициент  $k$  убывает и в пределе приходит к тем значениям, которые мы имели при равномерном сжатии. Соответственно изменяется и то значение отношения  $a/b$ , которому соответствует наименьшее  $k$ .

Отметим, что принятый здесь метод исследования устойчивости может быть распространен и на тот случай, когда линейно распределенные нормальные усилия действуют не только в направлении оси  $x$ , но также и в направлении оси  $y$ .

### § 63. Об устойчивости прямоугольной пластинки с опертыми краями при действиях касательных напряжений

Если прямоугольную пластинку с опертыми краями подвергать действию касательных усилий  $P_t$ , равномерно распределенных вдоль сторон пластинки (рис. 119), то при некотором критическом значении этих усилий плоская форма

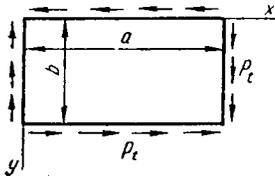


Рис. 119.

равновесия пластинки перестает быть устойчивой. Пластинка выпучивается и при большой длине подразделяется на полуволны линиями, наклоненными к осям  $x$  и  $y$ , причем линии наибольших прогибов располагаются, как показывают опыты, приблизительно нормально к направлению наибольшего сжатия.

Для определения  $P_{\text{кр}}$  мы воспользуемся прежним методом. Возьмем самое общее выражение для искривленной формы пластинки в виде двойного бесконечного ряда

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (\text{а})$$

Вопрос об устойчивости решим в зависимости от того, сопровождается принятое искривление (а) пластинки увеличением или уменьшением потенциальной энергии. При сравнении различных форм равновесия можно идти двумя путями. Можно предполагать, что при выпучивании пластинки усилия по контуру остаются неизменными и, следовательно, искривление сопровождается некоторым смещением точек контура, при котором внешние силы совершают известную работу. Таким методом мы пользовались при изучении устойчивости сжатых пластинок. Можно поступить иначе, а именно предположить, что точки контура не смещаются. В таком случае выпучивание пластинки будет сопровождаться изменением усилий, распределенных по контуру, и изменением соответствующей им потенциальной энергии системы.

И тем и другим путем мы придем к одному и тому же значению критических напряжений, но в первом случае критические напряжения найдутся из условия равенства энергии изгиба работе усилий, распределенных по контуру. Во втором случае работа внешних сил будет равна нулю, и критические напряжения найдутся из того условия, что изменение потенциальной энергии системы при перемещениях, соответствующих первой искривленной форме, должно равняться

нулю. Воспользуемся здесь вторым приемом и предположим, что выпучивание пластинки не сопровождается смещением точек контура. В таком случае искривление пластинки при выпучивании будет сопровождаться сдвигами в срединной плоскости и соответствующими изменениями энергии сдвига.

Величину сдвига в какой-либо точке  $O$  срединной плоскости легко находим из геометрических соображений (рис. 120). Пусть  $OA$  и  $OB$  — два бесконечно малых линейных элемента длины  $dx$  и  $dy$ . После изгиба они займут по отношению к плоскости, параллельной плоскости контура, положения  $OA_1$  и  $OB_1$ , причем вертикальные перемещения  $AA_1$  и  $BB_1$  будут соответственно равны величинам

$$\frac{\partial w}{\partial x} dx; \quad \frac{\partial w}{\partial y} dy.$$

Легко видеть, что при взятых перемещениях угол  $A_1OB_1$  меньше прямого. Перемещения  $AA_1$  и  $BB_1$  сопровождаются сдвигом, который равен, очевидно, уменьшению первоначально прямого угла  $AOB$ . Это уменьшение можно получить из рис. 120 таким образом. Сначала вращением площадки  $AOB$  относительно оси  $Oy$  совмещаем  $OA$  с  $OA_1$ .

Если теперь ту же площадку вращать относительно  $OA_1$  до совмещения с плоскостью  $A_1OB_1$ , то, очевидно, точка  $B$  пройдет по направлению  $BB_2$ , перпендикулярному к  $OA_1$  и наклоненному к  $BB_1$  под углом  $\frac{\partial w}{\partial x}$ . Следовательно,

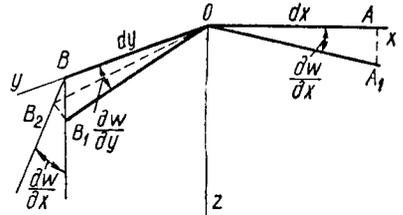


Рис. 120.

$$B_1B_2 = BB_1 \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dy,$$

и уменьшение первоначально прямого угла, равное  $B_2OB_1$ , представится так:

$$e_{xy} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Увеличение энергии сдвига вследствие выпучивания пластинки представится так:

$$V_1 = P_t \int_0^a \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy.$$

Подставив сюда вместо  $w$  его выражение (а) и приняв во внимание выражение

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{p\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \pm p \text{ четном,} \\ \frac{2a}{\pi} \frac{m}{m^2 - p^2} & \text{при } m \pm p \text{ нечетном,} \end{cases}$$

придем к такому результату:

$$V_1 = 8P_t \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q A_{mn} A_{pq} \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(q^2 - n^2)}, \quad (b)$$

где  $m \pm p$  и  $n \pm q$  — нечетные числа.

Что касается энергии изгиба  $V$ , то для нее сохраняется прежнее выражение (231). Приравнявая нулю энергию изгиба, сложенную с найденным выше

выражением  $V_1$ , получаем для  $P_t$  такое выражение:

$$P_t = -\frac{Dab}{64} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2}{\sum \sum \sum \sum A_{mn} A_{pq} \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(q^2 - n^2)}}. \quad (c)$$

Остается теперь подобрать для коэффициентов  $A_{mn}$  и  $A_{pq}$  такие соотношения, которым соответствует наименьшее  $P_t$ .

Это наименьшее значение и будет искомым  $P_{t\text{кр}}$ . Приравнивая нулю производную от (c) по каждому из коэффициентов  $A_{mn}$  и принимая во внимание условие  $V + V_1 = 0$ , приходим к системе уравнений, линейных относительно  $A_{mn}$ ,  $A_{pq}$ , ... Уравнения эти можно разбить на две группы. В одну из них войдут коэффициенты с четной суммой индексов, а в другую — с нечетной. Вычисления показывают, что наименьшее значение для  $P_t$  дает первая группа уравнений.

Пользуясь для сокращения обозначениями

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \beta; & p_{t\text{кр}} &= \frac{P_{t\text{кр}}}{h}; \\ p_e' &= \frac{D\pi^2}{b^2 h}; & \lambda &= -\frac{\pi^2}{32\beta} \frac{p_e'}{p_{t\text{кр}}}, \end{aligned} \quad (d)$$

можем написать эту систему бесконечно большого числа линейных дифференциальных уравнений в таком виде <sup>1</sup>:

$$\begin{array}{cccccc} A_{11} & A_{22} & A_{13} & A_{31} & A_{33} & A_{42} \\ \frac{\lambda(1+\beta^2)^2}{\beta^2} & + \frac{4}{9} & 0 & 0 & 0 & + \frac{8}{45} + \dots = 0 \\ + \frac{4}{9} & + \frac{16\lambda(1+\beta^2)^2}{\beta^2} & - \frac{4}{5} & - \frac{4}{5} & + \frac{36}{25} & 0 + \dots = 0 \\ 0 & - \frac{4}{5} & + \frac{\lambda(1+9\beta^2)^2}{\beta^2} & 0 & 0 & - \frac{24}{75} + \dots = 0 \\ 0 & - \frac{4}{5} & 0 & + \frac{\lambda(9+\beta^2)^2}{\beta^2} & 0 & + \frac{24}{21} - \dots = 0 \\ 0 & + \frac{36}{25} & 0 & 0 & + \frac{\lambda(9+9\beta^2)^2}{\beta^2} & - \frac{72}{35} - \dots = 0 \\ \frac{8}{45} & 0 & - \frac{24}{75} & + \frac{24}{21} & - \frac{72}{35} & + \frac{\lambda(16+4\beta^2)^2}{\beta^2} + \dots = 0 \end{array}$$

Величина  $p_{t\text{кр}}$  найдется из условия равенства нулю определителя написанной системы уравнений. Вычисления будем вести путем последовательных приближений <sup>2</sup>, как это мы делали в предыдущей задаче. Для первого приближения мы можем ограничиться двумя первыми строчками и двумя первыми столбцами написанной системы уравнений. Приравнивая нулю определитель по-

<sup>1</sup> Для краткости выписываем лишь множители при коэффициентах, написанных в первой строчке.

<sup>2</sup> Первое приближение см. на стр. 161—163 в нашей монографии, упомянутой на стр. 266. Вычисление дальнейших приближений см. в работе: Тимошенко С. П. Об устойчивости пластинок, подкрепленных жесткими ребрами. Сборник Института инженеров путей сообщения, Петроград, 1915, вып. 89, стр. 1—31. Отд. оттиск, Петроград, тип. А. Э. Коллинса, 1914, 31 стр. [Перепечатка: Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М., Физматгиз, 1971, стр. 473—502].

лученных двух уравнений с двумя неизвестными  $A_{11}$  и  $A_{12}$ , находим

$$\lambda = \pm \frac{1}{9} \frac{\beta^2}{(1 + \beta^2)^2}.$$

Отсюда на основании обозначений (d) получаем для первого приближения <sup>1</sup>

$$P'_{\text{кр}} = \mp \frac{9\pi^2}{2} \frac{(1 + \beta^2)^2}{\beta^2} P_e. \quad (240)$$

Формула эта в случае квадратной пластинки дает погрешность около 15%. С увеличением длины пластинки погрешность возрастает и для получения более удовлетворительных результатов нужно обратиться к следующему приближению. Если мы при этом возьмем пять строк и пять столбцов нашей бесконечной

Таблица 32

$\beta$	$h$	$P_t$ кр. кг/см <sup>2</sup>	$\beta$	$h$	$P_t$ кр. кг/см <sup>2</sup>
1	9,42	1870	1,8	6,8	1350
1,2	8,0	1590	2,0	6,6	1310
1,4	7,3	1450	2,5	6,3	1250
1,5	7,1	1410	3	6,1	1210
1,6	7,0	1390			

системы уравнений, то, приравнявая нулю соответствующий определитель, получаем после некоторых сокращений такой результат:

$$\lambda^2 = \frac{\beta^4}{81(1 + \beta^2)^4} \left[ 1 + \frac{81}{25} \frac{(1 + \beta^2)^2}{(1 + 9\beta^2)^2} + \frac{81}{25} \frac{(1 + \beta^2)^2}{(9 + \beta^2)^2} + \left( \frac{81}{25} \right)^2 \frac{(1 + \beta^2)^2}{(9 + 9\beta^2)^2} \right]. \quad (241)$$

Формула эта дает величину критических напряжений для пластинок, близких к квадратной, с большой точностью. Разность между вторым и третьим <sup>2</sup> приближениями для квадрата получается лишь в четвертом знаке. При  $\beta = 2$  эта разность достигает 2%. Наконец, при  $\beta = 3$  она равна 9,5%. Эти данные позволяют заключить, что результаты третьего приближения имеют вполне достаточную для практических приложений точность. Окончательные результаты мы можем представить в такой форме:

$$P''_{\text{кр}} = k P'_e = k \frac{D\pi^2}{b^2 h}.$$

Значения коэффициента  $k$  при  $h = 0,01 b$  приводим в табл. 32.

Мы видим, что с увеличением отношения  $a/b$  коэффициент  $k$  убывает, потому что длинная пластинка имеет возможность подразделяться на волны той длины, которой соответствует меньшее  $P_t$ . Убывание  $k$  с увеличением  $\beta$  все замедляется,  $k$  стремится к определенному пределу, соответствующему бесконечно длинной пластинке. Величину этого предельного значения  $k$  мы можем найти таким приближенным способом.

В случае весьма длинной пластинки влияние поперечных сторон ничтожно, и мы можем для приблизительной оценки величины критических напряжений задаться подходящей формой искривления так, чтобы в отношении прогибов были удовлетворены условия лишь на продольных сторонах пластинки. Такую форму мы получим, положив

$$w = A \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi}{s} (x - \alpha y).$$

<sup>1</sup> Разные знаки соответствуют двум различным направлениям касательных усилий  $P_t$ .

<sup>2</sup> Третье приближение вычислялось при шести строчках и шести столбцах в нашей системе уравнений.

Этому выражению соответствует выпучивание пластинки по ряду волн длины  $\alpha$ , причем узловые линии составляют с осью  $y$  угол, тангенс которого равен  $\alpha$ . Подставляя это выражение для  $w$  в наше условие  $V + V_1 = 0$ , получаем

$$p_t = \frac{p_e'}{2\alpha} \left[ 6\alpha^2 + 2 + \frac{s^2}{b^2} + \frac{b^2}{s^2} (1 + \alpha^2)^2 \right]. \quad (242)$$

Наименьшее значение для  $p_t$  получим, если положим  $s = b\sqrt{1 + \alpha^2}$  и  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , тогда найдем

$$p_{\text{кр}} = 5,7 p_e'. \quad (243)$$

Результат этот довольно близок к тому, что мы нашли выше для случая  $\beta = 3$ .

Имея значения коэффициента  $k$ , мы без затруднений можем подсчитать величину соответствующих критических напряжений. В табл. 32 значение  $p_{\text{кр}}$  дано для того случая, когда  $h = 0,01b$ ,  $E = 2,2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ,  $\sigma = 0,3$ .

Если для рассчитываемой пластинки  $h = \frac{1}{n}b$ , то нужно числа в табл. 32 помножить на  $10^4/n^2$ .

Заметим, что способ, который мы здесь применили, может быть распространен на более общие случаи, например на случай совместного действия касательных усилий с равномерным сжатием вдоль одной из сторон пластинки или одновременного действия касательных усилий с чистым изгибом. Последняя задача могла бы представить некоторый практический интерес в связи с проверкой на устойчивость вертикальной стенки клепаной двутавровой балки. При большой высоте балки отношение толщины стенки к ее высоте на практике иногда получается очень малым и надлежащая устойчивость достигается путем дополнительных подкреплений стенки особыми уголками жесткости. Отдельные участки стенки двутавровой балки между двумя соседними уголками жесткости следует проверять на устойчивость как независимую прямоугольную пластинку с опертыми краями. Упор эта пластинка будет находиться главным образом под действием касательных усилий и для проверки ее на устойчивость можно воспользоваться табл. 32. У середины пролета главную роль играют нормальные напряжения от изгиба и при проверке на устойчивость можно воспользоваться табл. 31 предыдущего параграфа.

#### § 64. Об устойчивости прямоугольной пластинки с опертыми краями, сжатой двумя взаимно противоположными сосредоточенными силами <sup>1</sup>

При вычислении критического значения сжимающих сосредоточенных сил  $P$  (рис. 121) мы можем воспользоваться прежним приемом. В случае значительной длины пластинки можно принять для искривленной формы такое выражение:

$$w = \sin \frac{\pi y}{b} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (a)$$

Соответствующее выражение для потенциальной энергии изгиба на основании прежней формулы (231) представится так:

$$V = \frac{D}{2} \frac{ab}{4} \sum A_m^2 \left( \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2. \quad (b)$$

<sup>1</sup> Sommerfeld A. Über die Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1906, Bd 54, H. 2, SS. 113—153 [см. также: Sommerfeld A. Nachtrag und Berichtigung zu der Abhandlung: Über die Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen. Там же, 1906, Bd 54, H. 3, SS. 318—324].

Работа сжимающих сил  $P$  при выпучивании пластинки представится таким выражением:

$$T = \frac{P}{2} \int_0^b \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x=\frac{a}{2}}^2 dy = \frac{P\pi^2}{4b} (A_1 - A_3 + A_5 - \dots)^2. \quad (c)$$

Сравнивая (b) и (c), получаем

$$P = \frac{D\pi^2 ab^3}{2} \frac{\sum A_m^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}{(A_1 - A_3 + A_5 - \dots)^2}. \quad (d)$$

Из того условия, что (d) должно иметь наименьшее значение, получаем для коэффициентов  $A_m$  такое общее выражение:

$$A_m = (-1)^{m-1} \frac{\sum A_m^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}{(A_1 - A_3 + A_5 - \dots) \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}.$$

Вставив его в выражение (d), найдем

$$P_{кр} = \frac{D\pi^2 ab^3}{2} \frac{1}{\sum \left( \frac{1}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \right)^2}. \quad (e)$$

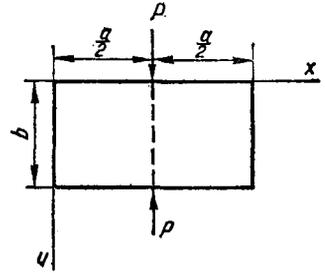


Рис. 121.

Вводя обозначение  $a/b = \beta$  и принимая во внимание равенство

$$\beta^3 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( \frac{1}{m^2 + \beta^2} \right)^2 = \frac{\pi}{8} \left( \text{th} \frac{\pi\beta}{2} - \frac{\frac{\pi\beta}{2}}{\text{ch}^2 \frac{\pi\beta}{2}} \right),$$

легко вычисляем  $P_{кр}$  при любом соотношении сторон. С увеличением длины пластинки величина  $P_{кр}$ , определяемая по формуле (e), быстро приближается к значению

$$P_{кр} = \frac{4\pi D}{b}. \quad (244)$$

Этим же путем возможно оценить влияние на величину  $P_{кр}$  подкрепляющего ребра, например уголка жесткости, расположенного по линии действия сжимающих сил.

### § 65. Об устойчивости сжатой прямоугольной пластинки с двумя опертими краями и двумя другими, закрепленными любым способом<sup>1</sup>

Предположим, что прямоугольная пластинка, опертая по сторонам  $x = 0$  и  $x = a$  (рис. 122), сжимается вдоль оси  $x$  равномерно распределенными усилиями  $P_1$ . Пусть эти усилия достигли предела, когда плоская форма равновесия пластинки перестала быть устойчивой.

Пластинка искривляется по поверхности, определяемой таким уравнением (см. § 58):

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + P_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (a)$$

<sup>1</sup> Тимошенко С. П. К вопросу об устойчивости сжатых пластинок. Изв. Киевского политехнического института, 1907, год 7, кн. 2, стр. 35—94. Отд. оттиск: Киев, тип. С. В. Кульженко, 1907, 60 стр. [Перепечатка: Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М., Физматгиз, 1971, стр. 116—165].

Частное решение этого уравнения возьмем в такой форме:

$$w = Y \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (b)$$

где  $Y$  — функция  $y$ .

Подставляя его в (а), получаем для определения  $Y$  такое линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$Y^{(4)} - \frac{2m^2\pi^2}{a^2} Y'' + \left( \frac{m^4\pi^4}{a^2} - \frac{P_1}{D} \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right) Y = 0. \quad (c)$$

Принимая во внимание, что благодаря закреплениям по продольным сторонам мы всегда будем иметь

$$\frac{P_1}{D} > \frac{m^2\pi^2}{a^2},$$

и пользуясь обозначениями

$$\alpha = \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{P_1}{D} \frac{m^2\pi^2}{a^2}}}; \quad \beta = \sqrt{-\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{P_1}{D} \frac{m^2\pi^2}{a^2}}},$$

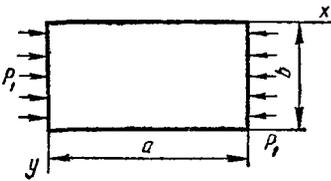


Рис. 122.

представляем общий интеграл уравнения (с) в таком виде:

$$Y = C_1 e^{-\alpha y} + C_2 e^{\alpha y} + C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y. \quad (d)$$

Произвольные постоянные  $C_1, \dots, C_4$  должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялись условия на продольных сторонах пластинки. Из этих условий может быть найдено также значение  $P_{1кр}$  для различных частных случаев закрепления. Приведем здесь несколько примеров.

I. Одна из продольных сторон пластинки оперта, другая свободна. В этом случае будем иметь на продольных сторонах такие условия:

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad (e)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad \text{при } y = b. \quad (f)$$

Из условий (е) следует, что в общем интеграле (d) нужно положить  $C_3 = 0$ ;  $C_1 = -C_2$ . Следовательно, функция  $Y$  в данном случае может быть представлена так:

$$Y = A \operatorname{sh} \alpha y + B \sin \beta y,$$

и условия (f) на свободной стороне напишутся таким образом:

$$A \left( \alpha^2 - \sigma \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right) \operatorname{sh} \alpha b - B \left( \beta^2 + \sigma \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right) \sin \beta b = 0; \quad (g)$$

$$A \alpha \left[ \alpha^2 - (2 - \sigma) \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right] \operatorname{ch} \alpha b - B \beta \left[ \beta^2 + (2 - \sigma) \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right] \cos \beta b = 0.$$

Этим уравнениям можно удовлетворить, положив  $A = B = 0$ , но этому будет соответствовать плоская форма равновесия пластинки. Отличными от нуля могут быть постоянные  $A$  и  $B$  лишь в том случае, если определитель уравнений (g) обращается в нуль, т. е. если будет удовлетворено уравнение

$$\beta \left( \alpha^2 - \sigma \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right)^2 \operatorname{th} \alpha b = \alpha \left( \beta^2 + \sigma \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right)^2 \operatorname{tg} \beta b. \quad (h)$$

Пользуясь этим уравнением, мы для заданного соотношения между сторонами пластинки и при заданных значениях  $E$  и  $\sigma$  можем найти соответствующее критическое напряжение. Вычисления показывают, что наименьшие значения сжимающего усилия получаются при  $m = 1$ . Следовательно, при выбранном способе закрепления даже длинная пластинка будет искривляться при выпучивании по одной полуволне. Разыскание корней трансцендентного уравнения (h) можно значительно упростить, если воспользоваться приближенным решением

$$p_{1кр} = p_e + 0,456p'_e, \dots, (m), \tag{245}$$

где

$$p_e = \frac{D\pi^2}{a^2h}; \quad p'_e = \frac{D\pi^2}{b^2h},$$

которое выводится на основании элементарных соображений. При  $a > b$  это решение дает достаточную для приложений точность. При  $a = 10b$  погрешнос-

Т а б л и ц а 33

$a/b$	$h$	$p_{1кр}$ кг/см <sup>2</sup>	$a/b$	$h$	$p_{1кр}$ кг/см <sup>2</sup>
0,5	4,400	855	2,0	0,698	136
1,0	1,440	280	2,5	0,610	119
1,2	1,135	221	3,0	0,564	110
1,4	0,952	185	4,0	0,516	100
1,6	0,835	162	5,0	0,506	98,4
1,8	0,755	147			

ти меньше 0,2%. Выражение для критических напряжений может быть представлено так:  $p_{1кр} = kp'_e$ . Значения  $k$ , полученные из уравнения (h) (для  $\sigma = 0,25$ ), приводим в табл. 33. Здесь же даны и критические напряжения, вычисленные для  $E = 2,2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $h = 0,01b$ . Мы видим, что даже при сравнительно малом значении отношения  $b/h$  пластинка с одним свободным краем будет мало устойчива.

II. Одна из продольных сторон пластинки заделана, другая свободна. В этом случае условия на продольных сторонах пластинки напишутся так:

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0; \tag{k}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \text{ при } y = b. \tag{l}$$

Из первых двух условий следует, что произвольные постоянные общего интеграла (d) связаны между собой таким образом:

$$C_1 = -\frac{\alpha C_3 + \beta C_4}{2\alpha}; \quad C_2 = -\frac{\alpha C_3 - \beta C_4}{2\alpha}.$$

Функция  $Y$  может быть представлена в таком виде:

$$Y = A(\cos \beta y - \text{ch } \alpha y) + B\left(\sin \beta y - \frac{\beta}{\alpha} \text{sh } \alpha y\right).$$

Подставляя это выражение в условия (l) на свободном крае пластинки, получаем два линейных однородных уравнения, связывающих между собой  $A$  и  $B$ . Приравнявая нулю определитель этих уравнений, получаем уравнение для определения  $p_{1кр}$ .

Введя для упрощения обозначения

$$t = \beta^2 + \sigma \frac{m^2 \pi^2}{a^2}; \quad s = \alpha^2 - \sigma \frac{m^2 \pi^2}{a^2},$$

представим это трансцендентное уравнение в таком виде:

$$2ts + (s^2 + t^2) \cos \beta b \operatorname{ch} \alpha b = \frac{\alpha^2 t^2 - \beta^2 s^2}{\alpha \beta} \sin \beta b \operatorname{sh} \alpha b. \quad (m)$$

Задавая различные значения отношения  $a/b$  и величиной  $\sigma$ , мы можем при помощи этого уравнения разыскать соответствующие значения коэффициента  $k$  в формуле

$$p_{1кр} = k p_e \quad (n)$$

Вычисления показывают, что в случае коротких пластинок первая искривленная форма равновесия пластинки имеет одну полуволну, так как при  $m = 1$

Таблица 34

$a/b$	$k$	$p_{1кр}$ кг/см <sup>2</sup>	$a/b$	$k$	$p_{1кр}$ кг/см <sup>2</sup>
1,0	1,70	328	1,7	1,33	257
1,1	1,56	301	1,8	1,34	259
1,2	1,47	283	1,9	1,36	263
1,3	1,41	271	2,0	1,38	267
1,4	1,36	263	2,2	1,45	281
1,5	1,34	258	2,4	1,47	283
1,6	1,33	257			

уравнение (m) дает в этом случае наименьшее значение для  $k$ . Ряд значений  $k$ , вычисленных на основании уравнения (m) при  $m = 1$  и  $\sigma = 0,25$ , приводим в табл. 34. В этой же таблице мы приводим значения  $p_{1кр}$ , вычисленные при  $E = 2,2 \cdot 10^8$  кг/см<sup>2</sup>,  $\sigma = 0,25$ ,  $h = 0,01 b$ . Мы видим, что с возрастанием отношения  $a/b$  величина коэффициента  $k$  сначала убывает. Она достигает своего наименьшего значения ( $k = 1,328$ ) при  $a/b = 1,635$ , после чего начинается возрастание  $k$ . Изменение  $k$  в зависимости от отношения сторон представлено

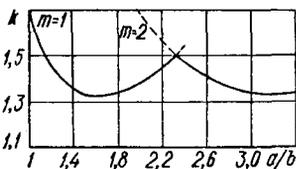


Рис. 123.

на рис. 123 кривой  $m = 1$ . Имея эту кривую, легко построить кривые  $m = 2$ ,  $m = 3$ , ... и т. д. Пользуясь ими, легко устанавливаем при заданном отношении  $a/b$  то число полуволн, на которое пластинка подразделяется при выгущивании. С увеличением длины пластинки коэффициент  $k$  все меньше будет отклоняться от своего минимального значения.

В условиях, подобных только что рассмотренным, находится сжатый вертикальный лист мостового пояса таврового сечения (рис. 124). При большой длине листа мы можем положить  $k = 1,33$ . В таком случае на основании табл. 34 находим

$$p_{1кр} = 257 \frac{10^4 \cdot 1,2^2}{50^2} = 1480 \text{ кг/см}^2.$$

Увеличить устойчивость листа можно было бы только путем наклеивания по нижнему краю листа особого уголка жесткости.

III. Одна из продольных сторон упруго заделана, другая свободна. Мы рассмотрели два предельных способа закрепления продольной стороны пластинки: когда край опертый, следовательно, свободно поворачивается и когда он абсо-

лютно заделан. На практике мы обыкновенно встречаемся с промежуточными случаями. Край пластинки склепывается с другими частями металлической конструкции и степень закрепления будет зависеть от относительной жесткости склепываемых частей. Например, в случае, представленном на рис. 124, верхний край вертикального листа можно было бы считать совершенно заделанным лишь в том случае, если бы выпучивание этого листа не сопровождалось поворачиванием горизонтальных листов и уголков пояса. В действительности это поворачивание будет происходить, выпучивание вертикального листа будет сопровождаться некоторым кручением остальных частей сжатого пояса и жесткость закрепления верхнего края листа будет зависеть от жесткости кручения горизонтальных листов и уголков пояса. Для решения вопроса об устойчивости вертикального листа нужно рассмотреть пластинку с одним свободным и другим упруго заделанным краем. Под упругой заделкой будем подразумевать такую, при которой заделанный край может несколько поворачиваться, но при этом поворачивании возникают вдоль края пластинки изгибающие моменты, пропорциональные углу поворота. Допустим, что сторона пластинки  $y = 0$  (см. рис. 122) упруго заделана. Тогда условия закрепления по этому краю напишутся так:

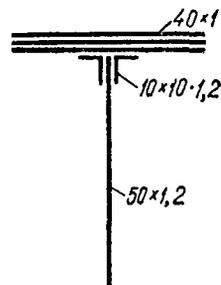


Рис. 124.

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \kappa \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{при } y = 0,$$

где  $\kappa$  — коэффициент, характеризующий жесткость заделки.

Из написанных условий находим между постоянными  $C_1, \dots, C_4$  общего интеграла (d) такие зависимости:

$$C_1 = -\frac{C_3(\alpha^2 + \beta^2 + \kappa\alpha)}{2\kappa\alpha} - \frac{C_4\beta}{2\alpha};$$

$$C_2 = \frac{C_3(\alpha^2 + \beta^2 - \kappa\alpha)}{2\kappa\alpha} + \frac{C_4\beta}{2\alpha}.$$

Функция  $Y$  в рассматриваемом случае представится так:

$$Y = A \left( \cos \beta y - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\kappa\alpha} \operatorname{sh} \alpha y - \operatorname{ch} \alpha y \right) + B \left( \sin \beta y - \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha y \right).$$

Подставив это выражение для функции  $Y$  в прежние наши условия на свободном крае пластинки, придем к таким двум уравнениям:

$$A(t \cos \beta b + s \operatorname{ch} \alpha b + q s \operatorname{sh} \alpha b) + B \left( t \sin \beta b + \frac{\beta}{\alpha} s \operatorname{sh} \alpha b \right) = 0; \quad (o)$$

$$A(-\beta s \sin \beta b + \alpha t \operatorname{sh} \alpha b + q \alpha t \operatorname{ch} \alpha b) + B(\beta s \cos \beta b + \beta t \operatorname{ch} \alpha b) = 0.$$

Здесь для сокращения приняты такие обозначения:

$$t = \beta^2 + \sigma \frac{\pi^2}{\alpha^2}; \quad s = \alpha^2 - \sigma \frac{\pi^2}{\alpha^2}; \quad q = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\kappa\alpha}.$$

Полагая в наших уравнениях  $\kappa = \infty$  или  $q = 0$ , приходим к уравнениям для случая абсолютно заделанного края пластинки. Критические напряжения находим, приравнявая нулю определитель уравнений (o).

Соответствующие значения коэффициента  $k$  в общей формуле (п) будут зависеть, конечно, от коэффициента жесткости заделки  $\kappa$ . В табл. 35 приводим значения  $k$  для случаев, когда  $\kappa b = 2$  и  $\kappa b = 8$ . Мы видим, что с уменьшением

коэффициента заделки уменьшаются значения  $k$  и вместе с тем увеличивается значение отношения  $a : b$ , которому соответствует наименьшее  $k$ . Мы можем заключить, что с уменьшением жесткости заделки увеличивается длина тех волн, на которые подразделяется весьма длинная пластинка при выпучивании.

Если построить по числам таблицы кривые изменений  $k$ , то можно из рисунка найти, что переход от одной полуволны к двум, когда  $\kappa b = 2$ , происходит примерно при  $a/b = 3,1$ , в случае  $\kappa b = 8$  — при  $a/b \approx 2,6$ .

Покажем теперь на численном примере, как может быть приблизительно вычислена величина  $\kappa$ . Возьмем случай, представленный на рис. 124, где по-

Т а б л и ц а 35

$a/b$	$\kappa b = 2$	$\kappa b = 8$	$a/b$	$\kappa b = 2$	$\kappa b = 8$
1,0	1,49	1,58	2,3	0,89	1,18
1,3	1,13	1,25	2,5	0,90	1,23
1,5	1,01	1,16	2,7	0,93	1,30
1,8	0,92	1,11	3,0	0,98	1,16
2,0	0,90	1,12	4,0	0,90	1,12

ворачиванию заделанного края вертикального листа препятствуют горизонтальные листы и уголки. Обозначим через  $C$  жесткость при кручении этих частей. Угол закручивания их, приходящийся на единицу длины края пластинки, будет, очевидно, равняться  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  и соответствующий скручивающий момент определится согласно формуле  $C = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ . Приращение этого момента по длине края пластинки определяется величиной изгибающих моментов, возникающих по краю пластинки. Отсюда получаем для определения жесткости заделки такое условие:

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( C \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right).$$

Принимая во внимание принятое выражение (b) для  $w$ , находим в случае выпучивания по одной полуволне

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = C \frac{\pi^2}{a^2} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\kappa = \frac{C}{D} \frac{\pi^2}{a^2}.$$

Если в запас прочности пренебречь связью между горизонтальными листами и допустить, что каждый лист и каждый уголок при кручении работают независимо, то при вычислении  $C$  можно воспользоваться приближенными формулами (см. стр. 130), которые для нашего численного примера при условии подразделения пластинки на полуволны, для которых  $a/b = 2$ , дают  $\kappa b = 7,3$ .

Пользуясь числами табл. 35 для  $\kappa b = 8$ , найдем при отношении  $a/b = 2$ , что  $k = 1,12$ . Следовательно <sup>1</sup>,

$$P_{1кр} = k p'_e = 1,12 \frac{D \pi^2}{b^2 h} = 1250 \text{ кг/см}^2.$$

При всех этих выводах мы предполагали распределение сжимающих усилий равномерным. Иногда приходится встречаться с линейным законом распределения этих усилий по ширине сжимаемой пластинки.

<sup>1</sup> Принято  $\sigma = 0,25$ .

Например, если стержень, сечение которого представлено на рис. 124, является сжатым элементом мостового пояса, то в нем кроме равномерного сжатия будут еще действовать и напряжения от изгиба, получающегося вследствие жесткого соединения отдельных элементов моста в узлах. Если изгиб так направлен, что при этом увеличиваются сжимающие напряжения по свободному краю вертикального листа, то это, конечно, будет уменьшать устойчивость листа. В противном случае устойчивость повышается. Допустим, что верхний продольный край вертикального листа оперт, тогда влияние изгиба на устойчивость листа может быть учтено элементарным путем, и приближенная формула, соответствующая формуле (m) при равномерном сжатии, напишется так:

$$p_{1кр} = \frac{b}{b + 4e} (p_e + 0,456p'e). \quad (246)$$

Здесь  $p_{1кр}$  — среднее значение сжимающего напряжения, получаемое делением эксцентрично приложенной сжимающей силы на площадь сечения листа. Через  $e$  обозначен тот эксцентриситет, с которым должна быть приложена сжимающая лист сила, чтобы осуществить линейное напряженное состояние, получающееся при одновременном действии изгиба и сжатия рассматриваемого элемента. Положительный знак  $e$  соответствует возрастанию сжимающих напряжений по свободному краю листа.

Если напряжения превайдут величину  $p_{1кр}$ , определенную из формулы (246), то это еще не значит, что элемент разрушится, как это имеет место в случае продольного изгиба стержня. Выпучится лишь вертикальный лист и все то усилие, которое должно было бы передаться на него сверх  $p_{1кр}$ , распределится между более устойчивыми частями рассматриваемого элемента. Горизонтальные листы и уголки окажутся при этом перенапряженными.

IV. Обе продольные стороны пластинки абсолютно заделаны. В этом случае условия на продольных сторонах запишутся так:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

при  $y = 0$  и при  $y = b$ .

Таким же точно путем, как и в предыдущих примерах, получим для определения критических напряжений трансцендентное уравнение

$$(\cos \beta b - \operatorname{ch} \alpha b)^2 = - \left( \sin \beta b - \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha b \right) \left( \sin \beta b + \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sh} \alpha b \right).$$

Ряд значений коэффициента  $k$ , полученных из этого уравнения, приводим в табл. 36.

Мы видим, что наименьшее значение для  $k$  получается при  $0,6 < \frac{a}{b} < 0,7$ .

Длинная пластинка с заделанными продольными краями будет при выпучивании подразделяться на полуволны, длина которых удовлетворяет полученному неравенству.

Без особых затруднений могут быть рассмотрены также другие способы закрепления продольных сторон сжатой пластинки. Некоторый практический интерес может иметь тот случай, когда свободный край пластинки для увеличения устойчивости подкрепляют особым продольным уголком жесткости. Подобную пластинку, например, представляет вертикальный лист сжатого таврового пояса моста, усиленный по низу уголком (рис. 125)<sup>1</sup>.

Таблица 36

$a/b$	$k$	$a/b$	$k$
0,4	9,44	0,8	7,29
0,5	7,69	0,9	7,83
0,6	7,05	1,0	7,69
0,7	7,00		

<sup>1</sup> Некоторые примеры этого рода рассмотрены в работе К. А. Чалышева, упомянутой на стр. 407, и в статье А. И. Маслова, указанной на стр. 398. Подробные таблицы для расчета подкрепляющего уголка (рис. 125) составлены студентом Института инженеров путей сообщения В. И. Раком. См. Р а к В. И. Об устойчивости сжатой прямоугольной пластинки, подкрепленной уголком жесткости. Петроград. Институт инженеров путей сообщения, 1916, 15 стр.

Если считать верхний край вертикального листа заделанным, то условия по продольным сторонам напишутся так:

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial w^2}{\partial x^2} = 0; \quad D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] = EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

при  $y = b$ .

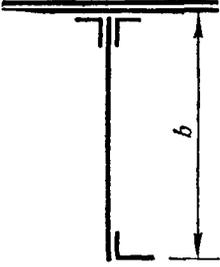


Рис. 125.

Мы пренебрегаем при этом сопротивлением подкрепляющего уголка кручению и принимаем в расчет его сопротивление изгибу. Через  $EJ$  обозначаем жесткость уголка при изгибе<sup>1</sup> и через  $T$  — сжимающую силу, приходящуюся на площадь поперечного сечения уголка. Условие, написанное нами для края  $y = b$ , несколько отличается от того, что мы имели раньше [см. формулу (212) § 51], так как здесь нами принято во внимание влияние продольной сжимающей силы  $T$  на изгиб подкрепляющего уголка.

## § 66. Об устойчивости пластинок, подкрепленных жесткими ребрами

Вопрос об устойчивости пластинок, подвергающихся действию усилий в их срединной плоскости, приобретает все большее практическое значение в связи с увеличением размеров металлических сооружений и повышением прочности материалов, которое позволяет переходить к высшим нормам допускаемых напряжений и, следовательно, к меньшим толщинам применяемых на практике железных и стальных листов. В виде примера можно привести хотя бы военное судостроение. За последние 20 лет водоизмещение крупных броненосцев изменилось с 14 000  $t$  до 30 000  $t$ , их длина возросла со 120  $m$  до 200  $m$ . При этом толщины листов обшивки и расстояние между подкрепляющими ребрами почти не изменились. Это показывает, насколько должны были возрасти напряжения в листах при работе корпуса судна как балки и насколько важным становится вопрос о надлежащем подкреплении этих листов, обеспечивающем их устойчивость. То же относится и к листам поперечных судовых переборок, играющих столь важную роль в поперечной крепости судна при постановке его в док. Еще более остро стоит вопрос об устойчивости листов обшивки в таких судах, как миноносцы, где толщины этих листов доведены до минимальных размеров.

Тот же вопрос об обеспечении устойчивости листов подкреплениями мы встречаем в высоких мостах со сплошной стенкой. Толщина стенки обыкновенно мало изменяется с высотой и надлежащая устойчивость достигается путем постановки особых уголков жесткости. Для некоторых случаев практика дает указания относительно расположения подкрепляющих ребер и предельного расстояния между этими ребрами<sup>2</sup>, но эти данные весьма не полны и не заклю-

<sup>1</sup> При вычислении этой жесткости следует принять во внимание, что уголок склепан с весьма широким листом.

<sup>2</sup> Так, например, в военном судостроении рекомендуется в случае продольного сжатия пластины подкреплять ее продольными ребрами, расстояние между которыми не должно

чают в себе никаких указаний относительно надлежащего выбора жесткости подкрепляющих ребер. Ниже мы, пользуясь приближенным методом, основанным на рассмотрении потенциальной энергии системы, решаем вопрос о выборе надлежащей жесткости подкрепляющих ребер в некоторых частных случаях<sup>1</sup>.

1. *Продольные подкрепления прямоугольной пластинки с опертыми краями, сжатой вдоль одной из сторон.* Вопрос об устойчивости такой пластинки мы рассмотрели выше (см. § 60) с достаточной полнотой и можем при помощи табл. 30 вычислить в каждом частном случае соответствующие критические напряжения. Иногда эти напряжения получаются меньшими допускаемых и меньшими тех, которые пластинка приняла бы на себя как часть рассчитываемой конструкции при условии достаточной устойчивости. Выпучивание пластинки не будет, конечно, сопровождаться разрушением всей конструкции, но все же возникает нежелательное явление. Та часть усилия, которая по недостатку устойчивости не может быть воспринята листом, передается на более жесткие части конструкции, служащие для листа контуром, и эти части оказываются перенапряженными. Мы можем достигнуть надлежащей устойчивости листа путем увеличения его толщины, но это обыкновенно сопровождается значительным увеличением веса. Поэтому является более рациональным, не меняя толщины листа, достигнуть нужной устойчивости при помощи дополнительных ребер жесткости. Если пластинку (рис. 126) оставить без подкреплений, то при  $a < b\sqrt{2}$  значения  $p_{1кр}$  найдутся из формулы (233'). Пользуясь прежним обозначением  $a/b = \beta$ , переписываем эту формулу так:

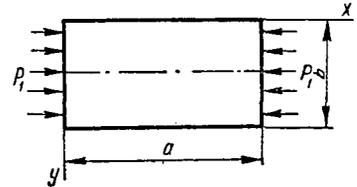


Рис. 126.

$$p_{1кр} = p_e \frac{(1 + \beta^2)^2}{\beta^2}. \quad (a)$$

При большой длине пластинка при выпучивании подразделяется на полуволны, число которых найдется при помощи неравенства (f) (см. § 60). В таком случае в формуле (a) число  $\beta$  будет обозначать отношение длины волны к ширине пластинки. Если пластинку подкрепить абсолютно жестким продольным ребром, делящим ширину пластинки пополам, то жесткость пластинки возрастет, так как вдвое уменьшится расчетная ширина. В случае большой длины пластинки напряжения  $p_{1кр}$  возрастут при этом примерно в четыре раза. При установке двух равноудаленных ребер мы уменьшаем расчетную ширину в три раза и получаем дальнейшее увеличение  $p_{1кр}$ . Таким образом, мы всегда можем подобрать надлежащее расстояние между ребрами, при котором  $p_{1кр}$  будет получаться не меньшим, чем предел текучести материала, и, следовательно, пластинка может быть использована полностью при передаче сжимающих усилий. Для выяснения той жесткости, которую должны иметь подкрепляющие ребра, чтобы их можно было считать абсолютно жесткими, воспользуемся прежним

быть более 80 толщин листа (см. Н о в г а р д W. Structural design of warships. London, Spon, 1915, 383 pp.). То же замечание относится и к длинным пластинкам, испытывающим сдвиг. Для подкрепления вертикальной стенки мостов по правилу American railway engineering association (General specifications for steel railway bridges, 1910, Chicago, 30 pp. 1. Bridges, Iron and Steel; 2. Bridges, Railroad; 3. Bridges, Specification) требуется постановка вертикальных уголков жесткости с расстоянием, не большим чем 60 толщин стенки. Сжатый лист с одним свободным краем не должен иметь ширину, большую 40 толщин.

<sup>1</sup> См. нашу работу, упомянутую в сноске на стр. 440.

методом, который мы применяли для неподкрепленной пластинки. Пусть произошло выпучивание пластинки и подкрепляющих ребер по поверхности:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (b)$$

Соответствующая энергия изгиба для пластинки представится так:

$$V = \frac{D}{2} \frac{ab}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left( \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right)^2. \quad (c)$$

Для продольного подкрепляющего ребра, имеющего жесткость  $B_i$  и расположенного на расстоянии  $c_i$  от края пластинки  $y = 0$ , энергия изгиба напишется так:

$$V_i = \frac{B_i\pi^4}{4a^3} \sum_{m=1}^{\infty} m^4 \left( A_{m1} \sin \frac{\pi c_i}{b} + A_{m2} \sin \frac{2\pi c_i}{b} + \dots \right)^2. \quad (d)$$

Для работы усилий  $P_1$ , сжимающих пластинку, получаем

$$T = \frac{P_1}{2} \frac{ab}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2\pi^2}{a^2} A_{mn}^2. \quad (e)$$

Если через  $P'_i$  обозначим сжимающую силу в рассматриваемом подкрепляющем ребре, то соответствующая работа при выпучивании этого ребра напишется так:

$$T_i = \frac{P'_i}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{y=c_i}^2 dx = \frac{P'_i}{2} \frac{\pi^2}{a^2} \frac{a}{2} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left( A_{m1} \sin \frac{\pi c_i}{b} + A_{m2} \sin \frac{2\pi c_i}{b} + \dots \right)^2. \quad (f)$$

Условие, из которого может быть найдено значение критического напряжения, напишется так:

$$V + \Sigma V_i = T + \Sigma T_i. \quad (g)$$

Подставляя сюда выражения (c) — (f) и пользуясь обозначениями

$$\frac{B_i}{bD} = \gamma_i; \quad \frac{P'_i}{bP_1} = \frac{F_i}{bh} = \delta_i,$$

определяющими отношения жесткости и площади поперечного сечения ребра к жесткости и сечению пластинки, получаем

$$P_1 = P'_e \frac{1}{\beta^2} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 (m^2 + n^2\beta^2)^2 + 2 \sum_i \gamma_i \sum_{m=1}^{\infty} m^4 \left( A_{m1} \sin \frac{\pi c_i}{b} + A_{m2} \sin \frac{2\pi c_i}{b} + \dots \right)^2}{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 A_{mn}^2 + 2 \sum_i \delta_i \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left( A_{m1} \sin \frac{\pi c_i}{b} + A_{m2} \sin \frac{2\pi c_i}{b} + \dots \right)^2}.$$

Теперь остается подобрать коэффициенты  $A_{mn}$  так, чтобы полученное для  $p_1$  выражение имело минимальное значение. Приравнявая нулю производные от

этого выражения по каждому из коэффициентов и принимая во внимание условие (q), приходим к системе линейных однородных уравнений такого вида:

$$p_e \left\{ A_{mn} (m^2 + n^2 \beta^2)^2 + 2 \sum_i \gamma_i \sin \frac{n\pi c_i}{b} m^4 \left( A_{m1} \sin \frac{\pi c_i}{b} + A_{m2} \sin \frac{2\pi c_i}{b} + \dots \right) \right\} - \\ - \beta^2 p_1 \left\{ m^2 A_{mn} + 2 \sum_i \delta_i \sin \frac{n\pi c_i}{b} m^2 \left( A_{m1} \sin \frac{\pi c_i}{b} + A_{m2} \sin \frac{2\pi c_i}{b} + \dots \right) \right\} = 0. \quad (h)$$

Приравнявая нулю определитель уравнений (h), получаем условие для определения  $p_{\text{кр}}$ .

Возьмем, например, случай одного подкрепляющего ребра, делящего ширину пластинки пополам. Совершенно так же, как и в случае неподкрепленной пластинки, можно и здесь ограничиться рассмотрением выпучивания пластинки по одной полуволне. Полагая  $m = 1$  и принимая во внимание, что  $\pi c/b = \pi/2$ , представим уравнение (h) в таком виде <sup>1</sup>:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{p_e}{\beta^2} [(1 + \beta^2)^2 A_1 + 2\gamma(A_1 - A_3 + A_5 - \dots)] - \\ & \quad - p_1 [A_1 + 2\delta(A_1 - A_3 + A_5 - \dots)] = 0; \\ & \frac{p_e}{\beta^2} (1 + 4\beta^2)^2 A_2 - p_1 A_2 = 0; \\ & \frac{p_e}{\beta^2} [(1 + 9\beta^2)^2 A_3 - 2\gamma(A_1 - A_3 + A_5 - \dots)] - \\ & \quad - p_1 [A_3 - 2\delta(A_1 - A_3 + A_5 - \dots)] = 0; \\ & \frac{p_e}{\beta^2} (1 + 16\beta^2)^2 A_4 - p_1 A_4 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Заметим, что уравнения четного порядка будут заключать лишь по одному коэффициенту  $A_n$ . Соответствующие им значения  $p_1$  представляют собой те сжимающие напряжения, при которых искривленная форма пластинки имеет своей узловой линией подкрепляющее ребро. Чтобы оценить влияние жесткости ребра, обратимся к уравнениям нечетного порядка системы (k). Сохраняя лишь первый коэффициент  $A_1$  и полагая остальные равными нулю, получаем из первого уравнения такое приближенное значение для критических напряжений:

$$p_{\text{кр}} = p_e \frac{(1 + \beta^2)^2 + 2\gamma}{\beta^2 (1 + 2\delta)}. \quad (247)$$

В случае длинных пластинок ( $\beta > 2$ ) это первое приближение, как показали более подробные вычисления, дает для критических напряжений вполне удовлетворительные результаты, и мы им пользовались при составлении табл. 37. Для коротких пластинок необходимо вычисление дальнейших приближений. Второе приближение мы получим, если в системе (k) возьмем первое и третье уравнения, сохранив коэффициенты  $A_1$  и  $A_3$ . Приравнявая нулю определитель этих уравнений, приходим к такому уравнению для величины  $k$ ,

$$\text{обозначающей, как и прежде, отношение } \frac{p_{\text{кр}}}{p_e} = \frac{P_{\text{кр}} b^2 h}{D \pi^2}: \\ (k\beta^2)^2 (1 + 4\delta) - k\beta^2 [(1 + 2\delta)(c + d) - 8\gamma\delta] + cd - 4\gamma^2 = 0. \quad (l)$$

<sup>1</sup> Первый индекс у коэффициентов  $A_{mn}$  опускаем.

Здесь для краткости введены такие обозначения:  $c = (1 + \beta^2)^2 + 2\gamma$ ;  $d = (1 + 9\beta^2)^2 + 2\gamma$ .

Уравнением (1) мы пользовались при вычислении  $k$  для более коротких пластинок ( $\beta < 2$ ). Разыскание третьего приближения для  $P_{1кр}$  приводит к решению кубического уравнения. Произведенные вычисления показали весьма малую расходимость между вторым и третьим приближениями, что позволяет при расчетах ограничиваться вторым приближением. Ряд значений  $k$ , вычисленных для различных  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$ , приведен в табл. 37. Мы видим, что каждому значению  $\gamma$  и  $\delta$  соответствует особое значение  $\beta$ , при котором  $k$  получается наименьшим. Это показывает, что длинная пластинка, подкрепленная ребром, будет при выпучивании подразделяться на ряд полуволин. Длина этих полуволин будет получаться тем большей, чем жестче подкрепляющее ребро. Если взять первое приближение (247), то легко показать, что наименьшего значения  $k$  достигает при  $\beta^2 = \sqrt{1 + 2\gamma}$ . Пользуясь этой формулой, можно выяснить длину волн, на которые подразделяется весьма длинная пластинка при выпучивании.

Таблица 37

P	γ = 5			γ = 10			γ = 15			γ = 20			γ = 25		
	δ = 0,05	δ = 0,1	δ = 0,2	δ = 0,05	δ = 0,1	δ = 0,2	δ = 0,05	δ = 0,1	δ = 0,2	δ = 0,05	δ = 0,1	δ = 0,2	δ = 0,05	δ = 0,1	δ = 0,2
0,6	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5
0,8	15,4	14,6	13,0	16,8	16,8	16,8	16,8	16,8	16,8	16,8	16,8	16,8	16,8	16,8	16,8
1,0	12,0	11,1	9,72	16	16	15,8	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0
1,2	9,83	9,06	7,88	15,3	14,2	12,4	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5
1,4	8,62	7,91	6,82	12,9	12,0	10,3	16,1	15,7	13,6	16,1	16,1	16,1	16,1	16,1	16,1
1,6	8,01	7,38	6,32	11,4	10,5	9,05	14,7	13,6	11,8	16,1	16,1	14,4	16,1	16,1	16,1
1,8	7,84	7,19	6,16	10,6	9,70	8,35	13,2	12,2	10,5	15,9	14,7	12,6	16,2	16,2	14,7
2,0	7,96	7,29	6,24	10,2	9,35	8,03	12,4	11,4	9,80	14,6	13,4	11,6	16,0	15,4	13,3
2,2	8,28	7,58	6,50	10,2	9,30	7,99	12,0	11,0	9,45	13,9	12,7	10,9	15,8	14,5	12,4
2,4	8,79	8,06	6,91	10,4	9,49	8,15	11,9	10,9	9,37	13,5	12,4	10,6	15,1	13,8	11,9
2,6	9,27	8,50	7,28	10,8	9,86	8,48	12,1	11,1	9,53	13,5	12,4	10,6	14,8	13,6	11,6
2,8	8,62	7,91	6,31	11,4	10,4	8,94	12,5	11,5	9,85	13,7	12,6	10,8	14,8	13,6	11,6
3,0	8,31	7,62	6,53	12,0	11,1	9,52	13,1	12,0	10,3	14,1	13,0	11,1	15,2	13,9	11,9
3,2	8,01	7,38	6,32	11,4	10,5	9,05	13,9	12,7	10,9	14,8	13,5	11,6	15,6	14,3	12,3
3,6	7,84	7,19	6,16	10,6	9,70	8,35	13,2	12,2	10,5	15,9	14,7	12,6	16,2	15,7	13,5
4,0	7,96	7,29	6,24	10,2	9,35	8,03	12,4	11,4	9,8	14,6	13,4	11,6	16,0	15,4	13,3

1. При помощи табл. 37 мы можем в каждом частном случае подобрать надлежащую жесткость подкрепляющего ребра. В качестве примера рассмотрим пластинку, для которой  $a = 120$  см,  $b = 200$  см,  $h = 1,4$  см,  $E = 2,2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $1 - \sigma^2 = 0,9$ . В таком случае

$$P_e' = \frac{D\pi^2}{b^2h} = 98,5 \text{ кг/см}^2; \quad Db = 50,8E \text{ кгсм}^2$$

При отсутствии подкреплений мы получим на основании формулы (а)

$$P_{1кр} = P_e' \frac{1,36^2}{0,36} = 506 \text{ кг/см}^2.$$

Наибольшее критическое напряжение, которое может быть получено при помощи продольного подкрепляющего ребра, найдется из той же формулы (а), если в нее вставить вместо  $b$  величину  $0,5 b$ . Таким образом, найдем

$$P_{1кр} = 4P_e' \frac{2,44^2}{1,44} = 1627 \text{ кг/см}^2.$$

Если мы в качестве подкрепляющего ребра возьмем швеллер № 8, то, принимая во внимание склепывание полки швеллера с широким листом, можно при вычислении жесткости ребра взять момент инерции швеллера относительно оси, лежащей в плоскости соприкосновения швеллера с листом. В таком случае  $B = E (114 + 11,9 \cdot 4^2) = 304 E \text{ кг/см}^2$ , и мы имеем

$$\gamma = \frac{B}{bD} \approx \frac{6}{\delta} = 0,042.$$

На основании данных табл. 37 заключаем, что при нашем соотношении между сторонами пластинки ( $\beta = 0,6$ ) выбранный швеллер будет играть роль абсолютного жесткого ребра.

2. Если бы мы все оставили без изменения, но увеличили толщину пластинки до 2 см, то имели бы  $p'_e = 201 \text{ кг/см}^2$ ;  $Db = 148 E \text{ кгсм}^2$ . При отсутствии подкрепляющего ребра мы получили бы  $p_{1\text{кр}} = 1033 \text{ кг/см}^2$ .

Подкрепляя пластинку швеллером № 8, находим

$$\gamma = \frac{304}{148} = 2,05; \quad \delta \approx 0,03,$$

и из уравнения (1) получим  $k = 14,8$ , следовательно,  $p_{1\text{кр}} = 2975 \text{ кг/см}^2$ .

3. Рассмотрим теперь пластинку вдвое большей длины:  $a = 240 \text{ см}$ ,  $b = 200 \text{ см}$ ,  $h = 1,4 \text{ см}$ ,  $E = 2,2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$ ,  $1 - \sigma^2 = 0,9$ .

Из табл. 37 видим, что при этом соотношении между сторонами пластинки ( $\beta = 1,2$ ) величина  $\gamma$  для обеспечения абсолютной жесткости ребра должна быть больше 10. Возьмем в качестве подкрепляющего ребра швеллер № 10. В таком случае  $B = (213 + 13,9 \cdot 25) E = 560 E \text{ кг/см}^2$ ;  $\gamma = 11,0$ ;  $\delta = 0,05$  и уравнение (1) дает нам  $k = 16,4$ ,  $p_{1\text{кр}} = 1615 \text{ кг/см}^2$ .

Подобным же образом может быть решена задача о подкреплениях в случае двух ребер, делящих ширину пластинки на три равные части. В качестве первого приближения мы получим формулу

$$p_{1\text{кр}} = p'_e \frac{(1 + \beta^2)^2 + 3\gamma}{1 + 3\delta}. \quad (m)$$

Несколько значений коэффициента  $k$  мы приводим в табл. 38.

Таблица 38

$\beta$	$\gamma = \frac{1}{3} 10$		$\gamma = 5$		$\gamma = \frac{1}{3} 20$		$\gamma = 10$	
	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,1$	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,1$	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,1$	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,1$
0,6	26,8	24,1	36,4	33,2	36,4	36,4	36,4	36,4
0,8	16,9	15,0	23,3	20,7	29,4	26,3	37,2	37,1
1,0	12,1	10,7	16,3	14,5	20,5	18,2	28,7	25,6
1,2	9,61	8,51	12,6	11,2	15,5	13,8	21,4	19,0
1,4	8,32	7,36	10,5	9,32	12,7	11,3	17,2	15,2
1,6	7,70	6,81	9,40	8,31	11,1	9,82	14,5	12,8
1,8	7,51	6,64	8,85	7,83	10,2	9,02	12,9	11,4
2,0	7,61	6,73	8,70	7,69	9,78	8,65	11,9	10,6

При помощи формулы (m) легко установить длину тех полуволн, на которые подразделяется весьма длинная пластинка при выпучивании, и можно приблизительно оценить ту жесткость, которую нужно придать подкрепляющим ребрам, чтобы можно было считать их абсолютно жесткими.

Если число равноудаленных продольных ребер больше двух, то для вычисления первого приближения получим из уравнений (h) такую формулу:

$$p'_{1кр} = \frac{p'_e}{\beta^2} \frac{(1 + \beta^2)^2 + 2\Sigma\gamma_i \sin^2 \frac{\pi c_i}{b}}{1 + 2\Sigma\delta_i \sin^2 \frac{\pi c_i}{b}}. \quad (248)$$

Возьмем, например, пластинку с такими размерами:  $a = 1100$  см,  $b = 550$  см,  $h = 3,75$  см,  $E = 2,2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $1 - \delta^2 = 0,9$ . Вычислим величину  $p_{1кр}$  при наличии пяти равноудаленных ребер, для которых имеются такие данные:  $B = 42 \cdot 10^3$  Е кг/см<sup>2</sup>;  $\gamma = 15,7$ ;  $\delta = 0,062$ .

Подставив данные в формулу (248), найдем  $p_{1кр} = 2030$  кг/см<sup>2</sup>.

II. Поперечные подкрепления прямоугольной пластинки с опертыми краями, сжатой вдоль одной из сторон (рис. 127). Поступая так же, как и выше при наличии продольных ребер, приходим к системе линейных уравнений вида<sup>1</sup>

$$A_m (m^2 + \beta^2)^2 + \sum_i 2\gamma_i \beta^3 \sin \frac{m\pi c_i}{a} \left( A_1 \sin \frac{\pi c_i}{a} + A_2 \sin \frac{2\pi c_i}{a} + \dots \right) = \\ = \frac{p_1}{p_e} \beta^2 m^2 A_m. \quad (s)$$

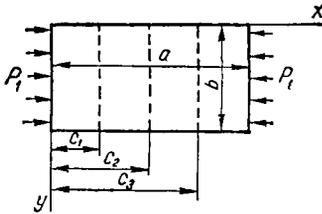


Рис. 127.

Здесь  $\gamma$  и  $\beta$  имеют прежние значения.

В направлении оси  $x$  сжатая пластинка может подразделяться на несколько полуволн. Число их будет зависеть от отношения  $\beta$  и от жесткости подкрепляющих ребер.

1. Если ребра обладают одинаковой малой жесткостью и распределены настолько густо, что на каждую полуволну выпучившейся пластинки приходится несколько изогнувшихся ребер, то в бесконечных рядах, входящих в уравнения (s), можно сохранить лишь члены с коэффициентом  $A_m$ . Тогда для критических напряжений получаем формулу

$$p'_{1кр} = p'_e \frac{(m^2 + \beta^2)^2 + r\gamma\beta^3}{\beta^2 m^2}. \quad (249)$$

Здесь  $r$  обозначает число поперечных ребер;  $m$  — число полуволн, которое должно быть подобрано так, чтобы наша формула давала для  $p_1$  наименьшее значение.

2. Если пластинка подкреплена одним поперечным ребром, разделяющим длину пластинки пополам, то из первого уравнения системы (s) получаем в качестве первого приближения

$$p'_{1кр} = p'_e \frac{(1 + \beta^2)^2 + 2\gamma\beta^3}{\beta^2}. \quad (250)$$

<sup>1</sup> Здесь при коэффициентах  $A_{mn}$  опускаем значок  $n$ , так как при поперечных подкреплениях наименьшее значение  $p_1$  соответствует тому случаю, когда выпучившаяся пластинка в поперечном направлении имеет одну полуволну. Следовательно,  $n$  везде равно единице и мы этот значок можем опустить.

Рассматривая первое и третье уравнения системы (s), мы получим для  $p_{\text{ткр}}$  второе приближение, обычно мало отличающееся от первого. Это показывает, что вычисление дальнейших приближений излишне. Пользуясь вторым приближением, можем для различных соотношений между сторонами пластинки установить те наименьшие значения  $\gamma$ , при которых подкрепляющее ребро можно считать абсолютно жестким. Ниже приводим значения  $\gamma$ .

$\beta$	0,5	0,5	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,41
$\gamma$	12,6	7,18	4,39	2,80	1,82	1,26	0,433	0

3. Подобным же образом может быть разрешен вопрос о подкреплении пластинки тремя равноудаленными поперечными ребрами одинаковой жесткости.

Несколько значений для  $\gamma$ , при которых подкрепляющие ребра начинают играть роль абсолютно жестких подкреплений, мы даем ниже:

$\beta$	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
$\gamma$	101	42,6	21,7	12,4	7,71

III. Подкрепления пластинки, испытывающей чистый сдвиг. Рассмотрим случай длинной прямоугольной пластинки. Если сдвигающие напряжения превзойдут критическое значение (243), то пластинка выщупается и при этом разделится на ряд полуволн (рис. 128). Мы можем повысить устойчивость пластинки введением дополнительных подкреплений. Наиболее действенным является расположение подкрепляющих ребер по направлениям наибольших сжимающих напряжений в пластинке. В некоторых случаях такое расположение не совсем удобно по конструктивным соображениям и приходится усиливать пластинку ребрами, параллельными одной из ее сторон. Если расположить ребра параллельно продольной стороне, то для вычисления критических напряжений можно воспользоваться приближенным приемом, который мы применили для получения решения (242) в случае неподкрепленной длинной пластинки (§ 63). Присоединяя к энергии изгиба пластинки энергию изгиба подкрепляющих ребер, получаем вместо формулы (242) такую:

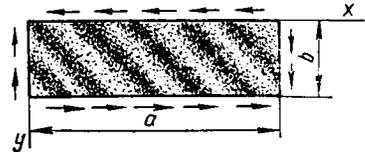


Рис. 128.

$$p_{\text{ткр}} = \frac{p'_e}{2\alpha} \left\{ 2 + 6\alpha^2 + \frac{s^2}{b^2} + \frac{b^2}{s^2} [\gamma_1 + (1 + \alpha^2)^2] \right\}. \quad (t)$$

Все обозначения здесь оставлены прежними. Новая величина  $\gamma_1$ , вошедшая в эту формулу, имеет такое значение:

$$\gamma_1 = \frac{\sum 2B_i \sin^2 \frac{\pi c_i}{b}}{Db},$$

где  $B_i$  — жесткость ребра  $i$ ;  $c_i$  — расстояние того же ребра от оси  $x$ . Для каждого значения  $\gamma_1$  нужно подобрать те значения  $\alpha$  и  $s$ , при которых формула (t) дает наименьшее значение  $p_t$ . Это критическое значение касательных напряжений может быть представлено прежней формулой  $p_{\text{ткр}} = kp'_e$ .

Значения коэффициента  $k$  приводим в табл. 39.

Возьмем такой численный пример. Стальной лист шириной  $b = 180$  см и толщиной 1 см подкреплён тремя равноудалёнными швеллерами № 8. В этом случае

$$p_e = 62 \text{ кг/см}^2; Db = 15E; \gamma_1 \approx 80.$$

Таблица 39

$\gamma_1$	$h$	$\gamma_1$	$h$	$\gamma_1$	$h$
5	6,98	40	9,90	80	11,4
10	7,70	50	10,4	90	11,7
20	8,67	60	10,8	100	12,0
30	9,36	70	11,1		

Из табл. 39 находим  $k = 11,4$ , следовательно,  $p_{\text{ткр}} = 11,4 \cdot 62 = 707 \text{ кг/см}^2$ .

Увеличив толщину листа до 1,2 см, получим

$$p_e' = 89,3 \text{ кг/см}^2; \gamma_1 \approx 46; k = 10,2; p_{\text{ткр}} = 911 \text{ кг/см}^2.$$

Если длина и ширина пластинки одного порядка, то для выяснения нужной жесткости подкрепляющих ребер следует обратиться к тому общему методу, которым мы пользовались при исследовании неподкрепленной пластинки, находящейся в условиях чистого сдвига (см. § 63).

## § 67. Основные допущения

Оболочками будем называть тонкие пластинки, имеющие в своем естественном состоянии криволинейную поверхность.

Толщину оболочек будем предполагать постоянной и обозначим ее через  $h$ . Поверхность, делящую толщину оболочки пополам, назовем *срединной поверхностью*. При исследовании изгиба тонкой оболочки будем исходить из допущения, которыми мы уже пользовались в теории плоских пластинок.

Мы будем предполагать, что при изгибе линейные элементы, нормальные к срединной поверхности до деформации, остаются прямыми и располагаются нормально к деформированной срединной поверхности<sup>1</sup>.

Рассмотрим предварительно такой простейший случай. Бесконечно малый элемент  $ABCD$  (рис. 129), вырезанный из оболочки главными нормальными сечениями, деформируется так, что соответствующий элемент срединной поверхности не испытывает растяжений. Боковые грани остаются плоскими и лишь поворачиваются относительно линий пересечения их со срединной поверхностью. Пусть  $R_1, R_2$  — главные радиусы кривизны срединной поверхности до деформации и  $R'_1, R'_2$  — соответственно их величины после деформации. Имея значения главных радиусов кривизны после деформации, легко найдем деформации в любой точке выделенного элемента. Берем начало координат на срединной поверхности и координатные оси направляем по касательным к главным нормальным сечениям этой поверхности. Ось  $z$  направляем так, чтобы получить праввинтовую координатную систему  $(x, y, z)$ .

Выделим из нашего элемента бесконечно тонкий слой, параллельный срединной поверхности и отстоящий от нее на расстоянии  $z$ . Удлинения  $e_{xx}$  и  $e_{yy}$  этого слоя легко могут быть найдены из геометрических соображений. Размер выделенного слоя в направлении оси  $x$  до деформации равен (рис. 129)  $ds_1 \left(1 - \frac{z}{R_1}\right)$ . После деформации тот же размер при не изменившейся длине  $ds_1$

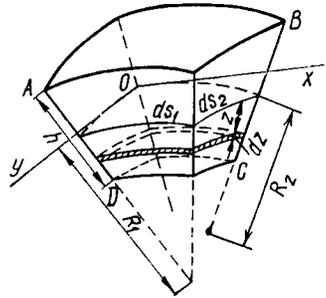


Рис. 129.

<sup>1</sup> Гипотеза эта соответствует гипотезе плоских сечений в теории изгиба кривых стержней. Мы видели (см. стр. 96), что для тонких стержней это предположение приводит к весьма точным результатам.

представится так:  $ds_1 \left(1 - \frac{z}{R_1'}\right)$ . Следовательно, относительное удлинение в направлении оси  $x$  будет

$$e_{xx} = -\frac{z}{1 - \frac{z}{R_1'}} \left( \frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1} \right).$$

Подобным же образом найдем и другое растяжение:

$$e_{yy} = -\frac{z}{1 - \frac{z}{R_2'}} \left( \frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Каких-либо сдвигов в плоскости выделенного тонкого слоя при сделанных предположениях относительно общей деформации элемента  $ABCD$ , очевидно, не будет.

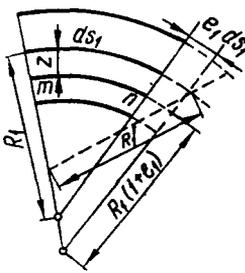


Рис. 130.

Мы можем несколько обобщить наши формулы, наложив на рассмотренную деформацию элемента  $ABCD$  растяжения срединной поверхности  $e_1$  и  $e_2$  по направлениям  $x$  и  $y$ . При этих растяжениях будем предполагать грани элемента перемещающимися параллельно самим себе. В этом случае относительное удлинение слоя  $mn$ , как видно из рис. 130, представится так:

$$e_{xx} = \frac{e_1}{1 - \frac{z}{R_1}} - \frac{z}{1 - \frac{z}{R_1'}} \left[ \frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1(1 + e_1)} \right].$$

Мы в дальнейшем будем рассматривать лишь случай тонких оболочек, когда  $h$  мало по сравнению с  $R_1$  и  $R_2$ . Поэтому в наших формулах величинами  $z/R_1$  и  $z/R_2$  можно будет пренебрегать по сравнению с единицей<sup>1</sup> и написать выражения для удлинений в таком виде:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= e_1 - z \left( \frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1} + \frac{e_1}{R_1} \right) = e_1 - z\kappa_1; \\ e_{yy} &= e_2 - z \left( \frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2} + \frac{e_2}{R_2} \right) = e_2 - z\kappa_2. \end{aligned} \quad (251)$$

Величины  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  будем называть *изменениями кривизны*.

Пренебрегая напряжениями  $Z_z$ <sup>2</sup>, мы по найденным растяжениям  $e_{xx}$  и  $e_{yy}$  получаем формулы для напряжений:

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{E}{1 - \sigma^2} [e_1 + \sigma e_2 - z(\kappa_1 + \sigma \kappa_2)]; \\ Y_y &= \frac{E}{1 - \sigma^2} [e_2 + \sigma e_1 - z(\kappa_2 + \sigma \kappa_1)]. \end{aligned} \quad (252)$$

<sup>1</sup> Аналогичное допущение делается в случае исследования изгиба кривых стержней, у которых поперечные размеры малы по сравнению с радиусом кривизны. При этом допущении гипотеза плоских сечений приводит к линейному закону распределения нормальных напряжений по сечению стержня.

<sup>2</sup> Точное решение задачи в случае изгиба кривых брусков (стр. 97) дает некоторые основания считать напряжения  $Z_z$  весьма малыми.

Соответствующие этим напряжениям усилия, действующие по граням элемента  $ABCD$ , можно для каждой грани привести к одной силе, приложенной в центре тяжести грани <sup>1</sup>, и к паре сил. Силу и линейный момент пары сил разлагаем на составляющие по направлению нормали к срединной поверхности и по касательным к соответствующим главным нормальным сечениям срединной поверхности. Величины этих составляющих, отнесенные к единице длины сечения срединной поверхности, будем обозначать такими же буквами, как это было принято при исследовании изгиба пластинок. Тогда мы получим для растягивающих усилий такие выражения:

$$T_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_x dz = \frac{Eh}{1-\sigma^2} (e_1 + \sigma e_2);$$

$$T_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_y dz = \frac{Eh}{1-\sigma^2} (e_2 + \sigma e_1).$$
(253)

Для изгибающих моментов будем иметь

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z X_x dz = -D (\kappa_1 + \sigma \kappa_2);$$

$$M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z Y_y dz = -D (\kappa_2 + \sigma \kappa_1).$$
(254)

Здесь величина  $D$  представляет жесткость оболочки при изгибе. Величина эта, как и в случае пластинок, представляется формулой

$$D = Eh^3/12(1 - \sigma^2).$$

Таким образом, принятый нами простейший случай деформации элемента  $ABCD$  может быть осуществлен путем приложения по граням элемента только нормальных напряжений, приводящихся к растягивающим усилиям интенсивности  $T_1$  и  $T_2$  и к изгибающим моментам интенсивности  $M_1$  и  $M_2$ .

Более общий вид деформации элемента  $ABCD$  мы получим, если по граням его приложим кроме нормальных усилий, найденных выше, еще и касательные усилия. В таком случае напряжения по грани с нормалью  $x$  кроме нормальной составляющей  $X_x$  будут иметь еще и касательные составляющие  $Y_x$  и  $Z_x$ . Точно так же для граней с нормалью  $y$  будем иметь касательные напряжения  $X_y$  и  $Z_y$ . Соответственно этому получим касательные усилия, для которых сохраним те же обозначения, которыми мы пользовались в случае пластинок.

<sup>1</sup> Так как у нас  $h$  мало по сравнению с радиусами кривизны, то в дальнейшем будем принимать грани элемента  $ABCD$  как прямоугольники. Следовательно, их центры тяжести будут лежать на срединной поверхности.

Таким образом, будем иметь

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Z_x dz; & N_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Z_y dz; \\ S_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_x dz; & S_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_y dz. \end{aligned} \quad (255)$$

Касательные напряжения дадут нам крутящие моменты  $H_1$  и  $H_2$ , которые представятся такими формулами<sup>1</sup>:

$$H_1 = - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z Y_x dz, \quad H_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z X_y dz. \quad (256)$$

Установим связь между этими крутящими моментами и деформацией оболочки, как это мы сделали для изгибающих моментов [формула (254)].

Под действием моментов  $H_1$  и  $H_2$ , равных по абсолютному значению, но противоположных по знаку, элемент  $ABCD$  будет испытывать два одинаковых кручения вокруг осей  $x$  и  $y$ . Благодаря первому кручению грани с нормалью  $x$  повернутся одна относительно другой вокруг оси  $x$  на угол  $\tau ds_1$ . Вследствие второго кручения грани с нормалью  $y$  повернутся одна относительно другой на  $\tau ds_2$ . Через  $\tau$  мы обозначили здесь одинаковую для обоих направлений величину кручения. Благодаря этим кручениям бесконечно тонкий слой, выделенный из элемента  $ABCD$  (см. рис. 129) и отстоящий от срединной поверхности на расстояние  $z$ , получит сдвиг, величина которого легко находится из геометрических соображений. На рис. 131  $m_1 p_1 q_1 n_1$  представляет в плане выделенный из элемента  $ABCD$  бесконечно тонкий слой.

Благодаря двум кручениям, он получит в плане форму ромба  $m_1 p_1 q_1 n_1$ . Уменьшение первоначально прямого угла  $m_1 p_1 q_1$ , представляющее искомый сдвиг, будет равно  $-2\tau z$  и соответствующее сдвигающее напряжение представится так:

$$X_y = -2\tau z G = - \frac{E\tau z}{1+\sigma}.$$

Следовательно,

$$H_1 = -H_2 = \frac{E}{1+\sigma} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau z^2 dz = D\tau(1-\sigma). \quad (257)$$

<sup>1</sup> Для крутящих моментов взяты направления, противоположные тем, которыми мы пользовались в пластинках.

Чтобы составить полную деформацию выделенного нами из оболочки элемента, остается рассмотреть тот сдвиг в срединной поверхности, который является следствием действия усилий  $S_1$  и  $S_2$ . Обозначая через  $\omega$  величину этого сдвига, можем написать

$$S_1 = S_2 = \frac{Eh}{2(1 + \sigma)} \omega. \quad (258)$$

Таким образом, при сделанном нами основном допущении относительно деформации оболочки, соответствующем гипотезе плоских сечений в теории изгиба стержней, деформация выделенного из оболочки элемента определится тремя величинами:  $e_1$ ,  $e_2$  и  $\omega$ , характеризующими искажения в срединной поверхности, и тремя элементами:  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  и  $\tau$ , зависящими от изгиба срединной поверхности. Все шесть величин  $e_1$ , ...,  $\tau$ , как мы дальше увидим, могут быть в каждом частном случае выражены через перемещения, которые совершают точки срединной поверхности при деформации оболочки.

Потенциальная энергия, накапливаемая в элементе оболочки при деформации, может быть представлена в виде двух слагаемых: одного, соответствующего растяжениям и сдвигу в срединной поверхности, и другого, зависящего от изгиба срединной поверхности и определяемого величинами  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  и  $\tau$ .

Первая часть потенциальной энергии оболочки, отнесенная к единице поверхности, представится так:

$$V_1 = \frac{1}{2} (T_1 e_1 + T_2 e_2 + S_1 \omega).$$

Подставляя вместо  $T_1$ ,  $T_2$  и  $S_1$  их значения из (253) и (258), получаем

$$V_1 = \frac{Eh}{2(1 - \sigma^2)} \left[ (e_1 + e_2)^2 - 2(1 - \sigma) \left( e_1 e_2 - \frac{1}{4} \omega^2 \right) \right]. \quad (259)$$

Для потенциальной энергии изгиба  $V_2$  будем иметь выражение такого же вида, как и в случае изгиба пластинок [см. формулу (208)]. Следовательно,

$$V_2 = \frac{D}{2} [(\kappa_1 + \kappa_2)^2 - 2(1 - \sigma)(\kappa_1 \kappa_2 - \tau^2)]. \quad (260)$$

Применим теперь полученные нами общие формулы к решению нескольких простейших задач по расчету тонких оболочек.

## § 68. Плоская деформация трубок постоянного поперечного сечения

Когда на трубку постоянного сечения со свободными концами действуют силы, величина и расположение которых по длине трубки не изменяются, то вопрос о деформации трубки решается весьма просто. В этом случае каждое элементарное кольцо, вырезанное из трубки двумя нормальными поперечными сечениями и достаточно удаленное от концов, будет испытывать одну и ту же деформацию. Вопрос о расчете тонкой оболочки сводится, таким образом, к исследованию изгиба кольца, что может быть всегда выполнено с достаточной для практики точностью элементарным путем. Если трубка представляет собой круглый тонкостенный цилиндр, то мы можем при расчете воспользоваться результатами, полученными выше (см. § 17, 18) для кругового кольца. Выделяя из такой

трубки элементарное кольцо шириной 1 см и обозначая через  $w$  радиальные перемещения точек кольца по направлению к центру и через  $D$  жесткость оболочки при изгибе, получаем для искривленной оси кольца такое дифференциальное уравнение (рис. 132):

$$D \left( \frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \right) = Ma^2.$$

Оно отличается от того, что мы имели раньше для кольца [см. формулу (88')], лишь величиной жесткости. Вместо жесткости кольца  $EJ$  нужно поставить жесткость оболочки  $D$ . После этой замены мы можем воспользоваться всеми прежними результатами.

Большой практический интерес представляет вопрос об устойчивости цилиндрической трубки, подвергающейся действию равномерного нормального давления. Если это давление превысит определенное значение, круговая цилиндрическая форма равновесия перестанет быть устойчивой, цилиндр сплющивается.

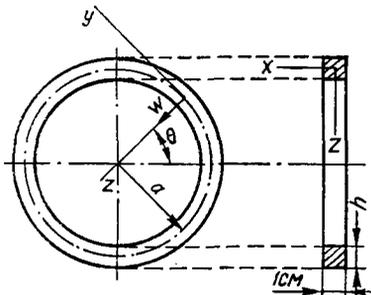


Рис. 132.

Чтобы исключить вопрос о влиянии закрепления концов на устойчивость трубки, мы здесь будем предполагать, что длина трубки весьма велика по сравнению с ее диаметром. Тогда части трубки, удаленные от концов, будут находиться в условиях, которые мы здесь принимаем, и вопрос об устойчивости трубки сводится к вопросу устойчивости элементарного кольца. Величина критических давлений на трубку найдется по известной формуле (132):

$$q_{кр} = \frac{E}{4(1-\sigma^2)} \left( \frac{h}{a} \right)^3. \quad (261)$$

Произведенные опыты показали<sup>1</sup>, что при достаточной длине трубки формула (261) дает вполне удовлетворительные результаты, если только сжимающие напряжения, соответствующие  $q_{кр}$ , не превосходят предела упругости материала. В противном случае формула (261) будет давать, очевидно, преувеличенные значения для критических давлений. Мы можем расширить применение нашей формулы, если только условимся за пределами упругости вместо постоянной величины  $E$  ставить некоторую переменную величину  $E'$ , которая может быть вычислена на основании предварительных опытов на сжатие за пределом упругости. При этом мы можем воспользоваться той формулой, которую применяют при исследовании продольного изгиба призматических стержней прямоугольного сечения, и положить<sup>2</sup>

$$E' = \frac{4EE_1}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_1})^2}. \quad (262)$$

Здесь  $E$  — модуль упругости материала;  $E_1$  — переменная величина, представляющая для каждого значения сжимающего напряжения  $p$  величину отношения бесконечно малого приращения этого напряжения к приращению соответ-

<sup>1</sup> Сагман А. Р. Resistance of tubes to collapse. Bulletin of Illinois University, 1906, vol. 3. N 17, pp. 1—26. Stewart R. T. Collapsing pressure of bessemer steel lapwelded tubes, three to ten inches in diameter. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1906, vol. 27, N 1116, pp. 730—821 (discussion: pp. 820—821).

<sup>2</sup> См. стр. 445 нашего курса, указанного на стр. 193.

вующего относительного сжатия. Произведенные на основании этих соображений вычисления<sup>1</sup> дали для критических давлений значения, близкие к результатам опытов.

### § 69. Деформации круглой цилиндрической трубки, симметричные относительно оси

Вопрос о деформациях трубки, симметричных относительно оси, встречается при решении целого ряда технических задач. Такие деформации испытывает, например, цилиндрическая трубка, закрытая по концам и подвергающаяся действию наружного или внутреннего равномерного давления. Подобные же деформации испытывают стенки круглого резервуара, наполненного жидкостью. Здесь давление на стенку будет изменяться от уровня жидкости до дна резервуара по линейному закону. Быстро вращающийся относительно своей оси цилиндрический барабан также испытывает деформации, симметричные относительно оси, под действием сил инерции, которые при больших угловых скоростях вращения могут вызвать в стенках барабана весьма значительные напряжения.

Условия симметрии дают возможность значительно упростить задачу о деформациях цилиндрической оболочки в этих случаях. Так как все точки стенки трубки, лежащие в одном каком-либо поперечном сечении, совершают одно и то же радиальное перемещение<sup>2</sup>  $w$ , то мы можем ограничиться рассмотрением изгиба элементарной полоски шириной  $1$  см, выделенной из трубки двумя меридиональными сечениями. Радиальные перемещения  $w$  представляют собой прогибы выделенной балки-полоски. Пусть  $mn$  представляет собой такую балку-полоску (рис. 133, а). Каждый элемент, выделенный из этой балки двумя бесконечно близкими поперечными сечениями (рис. 133, б), будет испытывать кроме изгиба растяжения, определяемые величиной усилий  $T_1$  и  $T_2$ . Мы предположим, что усилия  $T_1$  постоянны, т. е. что наша трубка испытывает вдоль оси равномерное растяжение или сжатие. Что касается усилий  $T_2$ , то они будут зависеть от радиальных перемещений  $w$ , которым соответствует относительное удлинение окружности трубки, равное  $-w/a$ . Пользуясь принятыми обозначениями (см. § 67), можем написать [(см. формулу 253)]

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\sigma^2} \left( e_1 - \sigma \frac{w}{a} \right); \quad T_2 = \frac{Eh}{1-\sigma^2} \left( -\frac{w}{a} + \sigma e_1 \right),$$

откуда получаем

$$T_2 = \sigma T_1 - \frac{wEh}{a}.$$

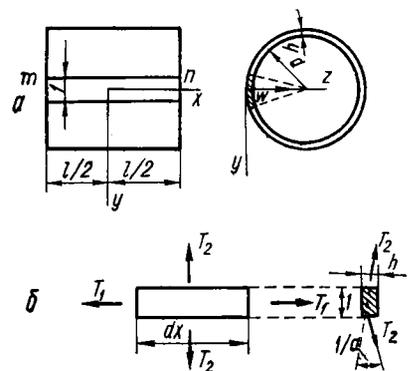


Рис. 133.

<sup>1</sup> Southwell R. V. On the collapse of tubes by external pressure. Philosophical Magazine and Journal of Sciences, Series 6, pt I, 1913, vol. 25, May, N 149, pp. 687—698; pt II, 1913, vol. 26, September, N 153, pp. 502—514; pt III, 1915, vol. 29, January, N 169, pp. 67—77.

<sup>2</sup> Изменением толщины стенки трубки при деформации мы пренебрегаем.

Эти усилия, как видно из рис. 133, б, дадут некоторую силу, действующую в плоскости изгиба выделенной балки-полоски. Величина этой силы, отнесенная к единице длины балки-полоски, будет равна

$$\frac{T_2}{a} = \frac{\sigma T_1}{a} - \frac{wEh}{a^2}.$$

Точно так же найдем, что вследствие изгиба выделенной полоски продольные усилия  $T_1$  тоже дадут составляющую, действующую в радиальном направлении и равную  $T_1 \frac{d^2w}{dx^2}$ . Кроме того, на балку-полоску будут действовать усилия, распределенные по поверхности трубки. Интенсивность их будем обозначать через  $q$ . В рассматриваемых случаях симметричной деформации  $q$  может быть, очевидно, функцией только  $x$ .

Вся нагрузка, приходящаяся на единицу длины балки-полоски, напишется так:

$$q + \frac{\sigma T_1}{a} - \frac{wEh}{a^2} + T_1 \frac{d^2w}{dx^2}.$$

Предпоследний член в этом выражении пропорционален прогибу балки-полоски. Следовательно, выделенная полоска будет изгибаться как балка, лежащая на сплошном упругом основании. Роль внешней нагрузки будет играть величина

$$q + \frac{\sigma T_1}{a} + T_1 \frac{d^2w}{dx^2}.$$

Жесткость упругого основания определится величиной

$$k = \frac{Eh}{a^2}.$$

Если продольных усилий  $T_1$  нет, то дифференциальное уравнение для изогнутой оси выделенной балки-полоски напишется так:

$$D \frac{d^4w}{dx^2} = q - \frac{Eh}{a^2} w. \quad (a)$$

Когда действуют и продольные усилия  $T_1$ , соответствующее дифференциальное уравнение представится в таком виде:

$$D \frac{d^4w}{dx^4} - T_1 \frac{d^2w}{dx^2} = q + \frac{\sigma T_1}{a} - \frac{wEh}{a^2}. \quad (b)$$

Займемся сначала уравнением (а). От уравнения (б), полученного для случая изгиба стержня, оно отличается лишь тем, что вместо жесткости  $EJ$  в него входит жесткость оболочки  $D$ . Произведя эту замену, мы можем воспользоваться результатами, полученными ранее для стержней, а также данными вспомогательной табл. 1. Заметим, что в этом случае величина  $\alpha$  будет иметь такое значение:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4D}} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\sigma^2)}{a^2 h^2}}. \quad (c)$$

Следовательно,

$$u = \frac{\alpha l}{2} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\sigma^2)}{16} \frac{l^2}{a^2} \frac{l^2}{h^2}}. \quad (d)$$

Вычисляя таким образом  $u$ , мы при помощи табл. 1 находим все величины, характеризующие изгиб выделенной полоски, для тех случаев, когда нагрузка  $q$

постоянная по длине полоски и концы трубы закреплены так, что нашу полосу можно рассматривать как балку опертую, заделанную или упруго заделанную на абсолютно жестких опорах. В таких условиях будет находиться, например, стенка быстровращающегося барабана<sup>1</sup> (рис. 133), если пренебречь радиальными растяжениями дисков, скрепляющих барабан с осью.

Чтобы оценить влияние растяжения дисков на изгиб балки-полоски, нужно написать выражение для опорных давлений полоски и вычислить радиальные перемещения по окружности диска под действием этих давлений и сил инерции самого диска. Найденные таким образом радиальные перемещения дадут нам прогибы балки-полоски на опорах. При нашем расположении координатных осей давление  $R$  балки-полоски на правую опору, равное перерезывающей силе в опорном сечении, напишется так:

$$R = - \left( D \frac{d^3 w}{dx^3} \right)_{x=l/2}.$$

Соответствующее растяжение дисков будет равно

$$- \frac{a(1 - \sigma^2)}{h_0 E} \left( D \frac{d^3 w}{dx^3} \right)_{x=l/2}.$$

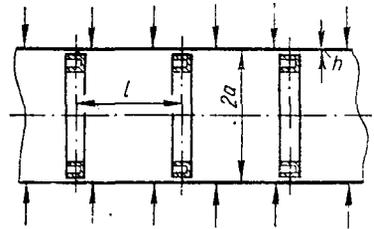


Рис. 134:

Пренебрегая растяжением диска от сил инерции<sup>2</sup>, получаем условие для прогиба на конце балки-полоски в таком виде:

$$w = \frac{a(1 - \sigma^2)}{h_0 E} D \frac{d^3 w}{dx^3} \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$

Второе условие напишется в зависимости от способа закрепления концов полоски. Придется различать опертые, заделанные и упруго заделанные концы. Этих двух условий достаточно, чтобы найти из уравнения (а) выражение для изогнутой оси балки-полоски.

Подобную задачу мы будем иметь также при исследовании изгиба цилиндрической оболочки, испытывающей равномерное давление и подкрепленной жесткими кольцами (рис. 134). Если пренебречь сжатием подкрепляющих колец, то элементарная полоска, выделенная из оболочки между двумя кольцами, будет находиться в условиях балки с абсолютно заделанными концами, лежащей на сплошном упругом основании и изгибаемой равномерной нагрузкой. Наибольший изгибающий момент будет иметь место на опоре. Его величина найдется из формулы (21) при помощи табл. 1. Легко видеть, что сжатие колец должно сопровождаться уменьшением опорного изгибающего момента. Это уменьшение может быть вычислено, если ввести в расчет осадку опор элементарной балки-полоски, как это было намечено нами в предыдущей задаче.

Заметим, что напряжения, возникающие в балке-полоске вследствие действия опорного момента и опорных реакций, имеют характер местных напряжений и быстро затухают по мере удаления от опор. Вдали от опор можно с большой точностью полагать, что трубка находится в условиях плоской деформации. Некоторое представление о быстроте затухания можно себе составить на основании формул (11) и (12), полученных для весьма длинной балки, лежащей на сплошном упругом основании. Из этих формул видно, что на расстоянии, равном длине волны  $L = 2\pi/\alpha$ , от нагруженного конца изгиб уже весьма мал.

Обращаясь к рассматриваемому случаю симметричной деформации трубы и пользуясь для определения  $\alpha$  формулой (с), легко сделать вывод, что то рас-

<sup>1</sup> Некоторые задачи, относящиеся к расчету быстровращающихся барабанов, рассмотрены в работе: L o g e n z R. Die Berechnung rotierender Trommeln. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1910, Bd 54, N. 34, SS. 1397—1403.

<sup>2</sup> Это растяжение может быть вычислено по известным формулам для вращающегося диска постоянной толщины (см. стр. 396 нашей книги, упомянутой на стр. 193).

стояние, на котором влияние опорных моментов и опорных реакций становится пренебрежимо малым, будет такого порядка, как  $\sqrt{ah}$ .

Если кроме боковых давлений на цилиндрическую оболочку действуют еще продольные усилия  $T_1$ , задача об изгибе балки-полоски сводится к интегрированию уравнения (б). Очевидно, что растягивающие усилия  $T_1$  будут уменьшать прогиб балки-полоски, а сжимающие усилия, наоборот, будут его увеличивать. Решение этой задачи не представляет никаких затруднений, и мы можем в каждом частном случае найти напряжения от изгиба элементарной полоски, напряжения от усилий  $T_1$ , а также напряжения, соответствующие усилиям  $T_2$ . Последние напряжения найдутся, если будут известны прогибы  $w$  элементарной балки-полоски.

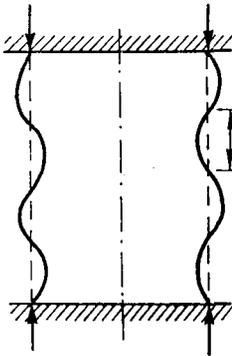


Рис. 135.

Практический интерес представляет то значение продольных усилий  $T_1$ , при котором цилиндрическая форма равновесия трубки перестает быть устойчивой и стенки трубки выпучиваются (рис. 135) по волнообразной поверхности, симметричной относительно оси цилиндра<sup>1</sup>. Пользуясь результатами, полученными для случая продольного изгиба стержня в упругой среде (см. стр. 283), заключаем, что сжатая длинная трубка при выпучивании подразделится на полуволны, длина которых равна

$$s = \pi \sqrt[4]{\frac{D}{k}} = \pi \sqrt[4]{\frac{a^3 h^3}{12(1-\sigma^2)}}. \quad (263)$$

Соответствующее значение критических сжимающих напряжений определится из формулы

$$(p_1)_{кр} = -\frac{(T_1)_{кр}}{h} = \frac{2\sqrt{kD}}{h} = E \frac{h}{a} \frac{1}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}. \quad (264)$$

Мы видим, что рассматриваемое явление может произойти в пределах упругости лишь при весьма малых значениях отношения  $h/a$ . За пределами упругости форма (264) будет давать преувеличенные значения для  $p_{кр}$  и, чтобы ее распространить на область неупругих деформаций, нужно при вычислении жесткости  $D$  вместо модуля упругости  $E$  ввести переменную величину  $E'$  [см. формулу (262)]. В таком случае мы будем получать критические напряжения за пределами упругости, если в формулу (264) введем добавочный множитель  $\sqrt{E'/E}$ . При этом изменится также формула (263), определяющая длину волн.

В заключение заметим, что благодаря упрощениям, получающимся из условия симметрии, мы можем решить вопрос о деформациях цилиндрической трубки переменной толщины. Задача сводится в этом случае к расчету элементарной балки-полоски переменного сечения, лежащей на сплошном упругом основании переменной жесткости. Подобную задачу мы встречаем при расчете цилиндрических резервуаров со стенками переменной толщины. Один пример такого рода был нами рассмотрен выше (см. § 7).

<sup>1</sup> Более общий случай будет рассмотрен ниже.

### § 70. Деформации цилиндрической оболочки, не сопровождающиеся растяжениями срединной поверхности<sup>1</sup>

При изучении деформации круглого кольца (§ 17, 18) мы уже пользовались теми упрощениями, которые получаются, если ось кольца считать абсолютно нерастяжимой. При таком допущении перемещения точек оси кольца можно представить в форме тригонометрических рядов, коэффициенты которых определяются путем применения начала возможных перемещений. Решения эти, конечно, могут быть использованы при исследовании плоской деформации цилиндрической оболочки, когда все сводится к расчету элементарного кольца. Но допущение нерастяжимости срединной поверхности может привести к удовлетворительному решению и в ряде других случаев, когда по распределению нагрузок можно ожидать, что перемещения точек срединной поверхности оболочки обусловлены главным образом искривлением оболочки, а не растяжениями ее срединной поверхности.

Рассмотрим, какие дополнительные ограничения будут налагаться на искомые перемещения, если мы действительную оболочку заменим гипотетической моделью, обладающей свойством нерастяжимости.

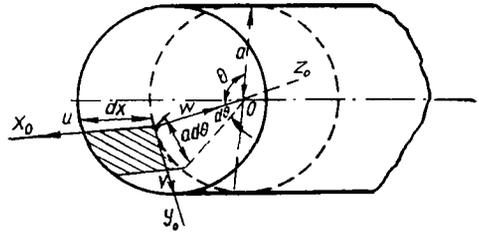


Рис. 136.

Перемещения точек срединной поверхности условимся разлагать на составляющие  $u$ ,  $v$  и  $w$ , которые имеют в каждой точке недеформированной поверхности направления координатных осей  $(x_0, y_0, z_0)$  (рис. 136), построенных так, что ось  $z_0$  имеет направление главной нормали, ось  $y_0$  направлена по касательной к параллельному кругу в сторону возрастания угла  $\theta$ , наконец, ось  $x_0$  совпадает с образующей цилиндра так, что  $(x_0, y_0, z_0)$  представляет собой правовинтовую систему.

Условие нерастяжимости оболочки в направлении оси  $x_0$  напишется так:

$$e_1 = \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (a)$$

Для растяжений в направлении оси  $y_0$  воспользуемся выражением, которое мы получили [см. формулу (b) § 18] при рассмотрении кольца, и условия нерастяжимости в этом направлении напишем так:

$$e_2 = \frac{\partial v}{a \partial \theta} - \frac{w}{a} = 0. \quad (b)$$

Наконец, условие отсутствия сдвигов в срединной поверхности напишется таким образом:

$$\frac{\partial u}{a \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (c)$$

Мы удовлетворим написанным условиям нерастяжимости, если возьмем для перемещений те же выражения, которыми мы пользовались в случае кольца. Выражения эти могут быть написаны в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 0; \\ v_1 &= \sum a (A_n \cos n\theta - A'_n \sin n\theta); \\ w_1 &= - \sum na (A_n \sin n\theta + A'_n \cos n\theta). \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

<sup>1</sup> См. главу X первого тома монографии J. Rayleigh, упомянутой на стр. 245.

Здесь  $A_n$  и  $A'_n$  — постоянные величины, которые приходится определять при каждом частном задании относительно действующих сил.

К перемещениям (d), соответствующим плоской деформации цилиндрической трубки, мы можем присоединить еще такие выражения:

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= -\Sigma (a/n)(B_n \sin n\theta + B'_n \cos n\theta); \\ v_2 &= x \Sigma (B_n \cos n\theta - B'_n \sin n\theta); \\ w_2 &= -\Sigma n (B_n \sin n\theta + B'_n \cos n\theta), \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

тоже удовлетворяющие условиям (a), (b) и (c) нерастяжимости срединной поверхности. Здесь  $v_2$  и  $w_2$  являются линейными функциями  $x$ , следовательно прямолинейные образующие цилиндрической оболочки остаются прямыми, но при этом несколько наклоняются к своему первоначальному направлению и, кроме того, совершают перемещение  $u_2$  в направлении оси цилиндра. Общие выражения для перемещений при деформации оболочки без растяжения получим наложением решений (d) и (e). Тогда эти перемещения представляются так:

$$u = u_1 + u_2; \quad v = v_1 + v_2; \quad w = w_1 + w_2. \quad (f)$$

Составим теперь выражение (260) для потенциальной энергии искривленной оболочки. Чтобы получить значения величин  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  и  $\tau$ , входящих в это выражение, воспользуемся приемом, который мы применяли при исследовании изгиба кольца силами, не лежащими в плоскости кривизны (см. § 19).

Кроме подвижной координатной системы  $(x_0, y_0, z_0)$ , построенной для каждой точки недеформированной срединной поверхности, представим себе еще подвижную систему  $(x, y, z)$ , построенную в каждой точке срединной поверхности после деформации. При этом ось  $z$  направлена по нормали к искривленной поверхности, ось  $x$  совпадает с направлением, по которому располагается соответствующая образующая цилиндра после деформации и, наконец, ось  $y$  перпендикулярна к плоскости  $xz$ . Если начало координат системы  $(x, y, z)$  будет перемещаться по деформированной срединной поверхности оболочки в направлении оси  $y$  с постоянной скоростью, равной единице, и при этом в каждый момент оси  $(x, y, z)$  будут занимать указанные выше направления, то угловые скорости вращения системы  $(x, y, z)$  дадут нам возможность вычислить изменение кривизны  $\kappa_2$  и кручение  $\tau$ .

В рассматриваемом случае образующие цилиндра остались после деформации прямыми и соответствующее изменение кривизны  $\kappa_1$  равно нулю. Для определения  $\kappa_2$  можем воспользоваться второй строчкой формулы (98).

Изменяя буквы соответственно принятым здесь обозначениям, получаем

$$\kappa_2 = \frac{w}{a^2} + \frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \theta^2} \quad (g)$$

или на основании условия нерастяжимости

$$\kappa_2 = \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \theta^2}. \quad (g')$$

Наконец, для получения  $\tau$  можно воспользоваться третьей строчкой формулы (98)<sup>1</sup>. В ней нужно вместо угла  $\beta$  поставить величину  $-\frac{\partial w}{\partial x}$ , вместо  $v$  — ве-

<sup>1</sup> При выводе формул (98) положительным направлением для  $\beta$  и  $\tau$  выбрано то направление вращения, которому соответствует завинчивание по направлению  $+z$  (см. рис. 29). Здесь же при наших обозначениях (256) и (257) положительному  $\tau$  будут соответствовать завинчивания в направлении  $-y$ .

личину  $u$  и потом изменить знак при  $\tau$ . Тогда получим

$$\tau = - \left( - \frac{\partial^2 w}{a \partial \theta \partial x} + \frac{\partial u}{a^2 \partial \theta} \right)$$

или на основании (с)

$$\tau = \frac{\partial^2 w}{a \partial \theta \partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (h)$$

Вставляя найденные значения для  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  и  $\tau$  в формулу (260), мы, пользуясь выражениями (d) и (e) для перемещений, придем к такому значению для потенциальной энергии цилиндра, имеющего длину  $2l$ :

$$V = \pi D l \sum \frac{(n^2 - 1)^2}{a^2} \left\{ n^2 \left[ a^2 (A_n^2 + A_n'^2) + \frac{1}{3} l^2 (B_n^2 + B_n'^2) \right] + 2(1 - \sigma) a^2 (B_n^2 + B_n'^2) \right\}. \quad (265)$$

Рассматривая коэффициенты  $A_n, \dots, B_n'$  как координаты системы и применяя начало возможных перемещений, можем в каждом частном случае найти соответствующие значения для  $A_n, \dots$ . Возьмем такой пример (рис. 137). Цилиндр сжимается двумя равными и прямо противоположными силами  $P$ , действующими по одному из диаметров<sup>1</sup>.

Так как силы  $P$  имеют радиальное направление, то при составлении уравнений равновесия нам придется иметь дело лишь с перемещениями  $w$ . Угол  $\theta$  будем отсчитывать от вертикального диаметра, по которому действуют силы  $P$ . В таком случае силы  $P$  будут совершать работу, отличную от нуля лишь на перемещениях, соответствующих приращениям координат  $A_n'$  и  $B_n'$ . Пользуясь выражениями (d) и (e), получаем такие уравнения:

$$\frac{\partial V}{\partial A_n'} \delta A_n' = - n a \delta A_n' (1 + \cos n\pi) P;$$

$$\frac{\partial V}{\partial B_n'} \delta B_n' = - n x_1 \delta B_n' (1 + \cos n\pi) P.$$

Подставляя вместо  $V$  его выражение (265), получаем

$$A_n' = - \frac{a^2 P}{n (n^2 - 1)^2 \pi D l} \quad \text{при } n \text{ четном};$$

$$B_n' = - \frac{n x_1 P a^3}{\pi D l (n^2 - 1)^2 \left[ \frac{1}{3} n^2 l^2 + 2(1 - \sigma) a^2 \right]} \quad \text{при } n \text{ четном}.$$

При  $n$  нечетном будем иметь  $A_n' = B_n' = 0$ .

Коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$ , как было выяснено выше, равны нулю. Для получения выражений для перемещений нужно только в формулы (d) и (e) подставить найденные значения коэффициентов. Тогда получим быстросходящиеся ряды, при помощи которых может быть найдено перемещение любой точки оболочки. Формулы (g) и (h) дают возможность найти изгибающие и скручивающие моменты и соответствующие им напряжения. Заметим, что получаемые таким

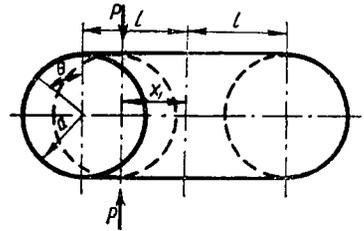


Рис. 137.

<sup>1</sup> См. стр. 415 первого тома монографии J. Rayleigh, упомянутой на стр. 245.

образом решения не удовлетворяют условиям по краям цилиндрической трубки. Для осуществления принятых нами перемещений (d) и (e) необходимо приложить по краям моменты и силы, выражения для которых могут быть составлены на основании общих формул. Напряжения и деформации, соответствующие этим силам, имеют характер местных напряжений и деформаций. Они быстро затухают по мере удаления от концов трубки и потому не оказывают существенного влияния на результаты, полученные в предположении отсутствия растяжений срединной поверхности оболочки<sup>1</sup>.

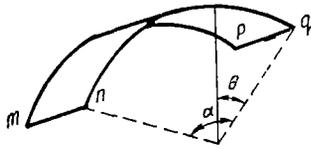


Рис. 138.

Считая срединную поверхность нерастяжимой, мы можем получить решение и для части цилиндрической оболочки, вырезанной из цилиндра двумя меридиональными сечениями (рис. 138). Если возьмем, например, перемещения

$$u = - \sum \frac{\alpha a}{\pi n} B_n \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha}; \quad V = \sum a A_n \cos \frac{n\pi\theta}{\alpha} + x \sum B_n \cos \frac{n\pi\theta}{\alpha};$$

$$w = - \sum \frac{\pi n}{\alpha} a A_n \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} - x \sum \frac{n\pi}{\alpha} B_n \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha},$$

то получим случай, когда по образующим  $mn$  и  $pq$  цилиндрической оболочки нет перемещений  $u$  и  $w$  и нет изгибающих моментов.

**§ 71. Дифференциальные уравнения равновесия для общего случая деформации цилиндрической оболочки**

Нужные нам дифференциальные уравнения мы получим, как и при исследовании изгиба пластинок, если напишем условия равновесия для сил, приложенных к одному элементу, вырезанному из оболочки двумя бесконечно близкими меридиональными сечениями и двумя сечениями, нормальными к оси цилиндра. На рис. 139 представлена соответствующая этому элементу часть срединной поверхности после деформации оболочки и указаны направления усилий  $T_1, \dots, N_2$ , принятые нами [см. формулы (253, 255)] за положительные. Усилия эти имеют направления соответствующих координатных осей подвижной системы  $x, y, z$  и потому при составлении уравнений равновесия нужно считаться с теми углами, на которые поворачивается эта система при переходе от одной стороны выделенного четырехугольника  $OABC$  к стороне, ей прямо противоположной. Так как эти углы зависят главным образом от искривления оболочки<sup>2</sup>, то растяжениями средин-

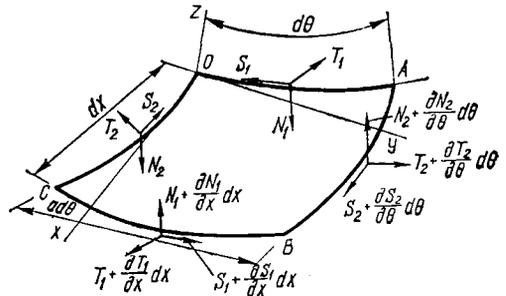


Рис. 139.

<sup>1</sup> Вопрос этот подвергался подробному изучению в связи с исследованием колебаний цилиндрической оболочки. См. стр. 520 монографии А. Love (стр. 626 немецкого перевода), упомянутой в сноске на стр. 9.

<sup>2</sup> См. стр. 497 и 508 (соответственно стр. 597 и 610 немецкого перевода) работы А. Love, упомянутой в сноске на стр. 9.

ной поверхности при составлении уравнений равновесия будем пренебрегать и будем пользоваться условиями нерастяжимости (а), (b) и (с) предыдущего параграфа.

Напишем сначала три уравнения равновесия элемента  $OABC$ , получающиеся путем проектирования всех приложенных к элементу сил на направление осей  $X, Y, Z$ , построенных для точки  $O$ . Составим проекцию всех сил на ось  $X$ . Если бы мы пренебрегали искривлением элемента и соответствующими поворотами подвижных осей  $x, y, z$ , то при проектировании получили бы, как и в случае пластинок, уравнение <sup>1</sup>

$$\left(T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial x} dx\right) a d\theta - T_1 a d\theta + \left(S_2 + \frac{\partial S_2}{\partial \theta} a d\theta\right) dx - S_2 dx = 0.$$

Напишем теперь выражения для углов поворота системы  $(x, y, z)$  и воспользуемся этими углами для составления уравнений равновесия элемента в полном виде, где уже будет учтено искривление срединной поверхности оболочки. Возьмем сначала стороны  $OA$  и  $BC$  нашего элемента. Углы поворота подвижной системы  $(x, y, z)$  при переходе от одной стороны к другой относительно осей  $x, y$  и  $z$  обозначим соответственно через  $p_1 dx, q_1 dx, r_1 dx$ .

Вращение стороны  $CB$  нашего четырехугольника относительно оси  $X$  будет происходить вследствие перемещений  $v$  и  $w$ . Так как эти перемещения малы, то мы при составлении углов поворота можем отдельно рассмотреть поворот от каждого из этих перемещений и потом найденные углы сложить.

Перемещением  $v$  соответствует движение отрезков  $OA$  и  $BC$  по параллельным кругам цилиндра. Если  $v$  — перемещение отрезка  $OA$ , то соответствующий поворот его относительно оси  $x$  при деформации оболочки будет равен  $v/a$ . Для отрезка  $CB$  тот же поворот напишется так:

$$\frac{1}{a} \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right)$$

и нужный нам относительный поворот этих двух отрезков будет равняться  $\frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial x} dx$ .

Вследствие перемещений  $w$  отрезок  $OA$  поворачивается относительно оси  $y$  на угол, равный  $\frac{\partial w}{a \partial \theta}$ . Соответственно для отрезка  $CB$  такой же поворот представится выражением  $\frac{\partial w}{a \partial \theta} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{a \partial \theta} \right) dx$ . Суммируя полученные углы поворота, находим

$$p_1 dx = \left( \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) dx. \quad (a)$$

Составим теперь угол поворота системы осей  $x, y, z$  относительно оси  $Y$ . Этот поворот получается вследствие искривления образующих цилиндра в плоскости меридиана, и так как ось  $x$  — касательна к этой искривленной образующей, то для искомого угла можем написать сразу <sup>2</sup>

$$q_1 dx = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx. \quad (b)$$

<sup>1</sup> Мы предполагаем, что давления, изгибающие оболочку, нормальны к срединной поверхности и составляющая их в направлении оси  $x$  равна нулю.

<sup>2</sup> Положительным вращением мы выбираем то, которое соответствует правовинтовой системе. Когда речь идет о вращении относительно оси  $y$ , то положительному вращению соответствует движение оси  $z$  в направлении оси  $x$ .

Точно так же поворот системы  $(x, y, z)$  относительно оси  $Z$  обусловлен искривлением образующей цилиндра в плоскости, касательной к срединной поверхности, и потому можно написать сразу

$$r_1 dx = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx. \quad (c)$$

Обратимся теперь к углам поворота, соответствующим переходу от стороны  $OC$  к стороне  $AB$  нашего четырехугольника. При составлении этих углов проще всего воспользоваться формулами (98), полученными при исследовании общего случая изгиба кольца.

Производя надлежащее изменение букв, получаем из второй строчки формулы (98) для угла поворота относительно оси  $X$

$$p_2 a d\theta = \left( \frac{1}{a} + \frac{w}{a^2} + \frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \theta^2} \right) a d\theta$$

или на основании условия нерастяжимости (b) предыдущего параграфа

$$p_2 a d\theta = \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \theta^2} \right) a d\theta. \quad (d)$$

Для угла поворота относительно оси  $Y$  после надлежащей замены букв в третьей строчке формулы (98) получаем

$$q_2 a d\theta = \left( -\frac{\partial^2 w}{a \partial x \partial \theta} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) a d\theta.$$

Пользуясь условием нерастяжимости (c) предыдущего параграфа, представим этот угол поворота так:

$$q_2 a d\theta = \left( -\frac{\partial^2 w}{a \partial x \partial \theta} - \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial x} \right) a d\theta. \quad (e)$$

Наконец, для угла поворота относительно оси  $Z$  на основании первой строчки формулы (98) будем иметь

$$r_2 a d\theta = \left( -\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{a^2 \partial \theta^2} \right) a d\theta$$

или на основании условия нерастяжимости (c) предыдущего параграфа получаем

$$r_2 a d\theta = \left( -\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} \right) a d\theta. \quad (f)$$

Имея формулы (a) — (f) для углов поворота, легко составляем нужные нам уравнения равновесия выделенного элемента. Проектирование всех сил на ось  $X$  приведет нас к такому уравнению:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T_1}{\partial x} dxad\theta + \frac{\partial S_2}{a \partial \theta} dxad\theta - N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dxad\theta - S_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dxad\theta - \\ & - N_2 \left( \frac{\partial^2 w}{a \partial x \partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dxad\theta + T_2 \left( \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{a \partial x \partial \theta} \right) dxad\theta = 0. \end{aligned}$$

Подобным же образом для осей  $Y$  и  $Z$  получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T_2}{a \partial \theta} dxad\theta + \frac{\partial S_1}{\partial x} dxad\theta + T_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dxad\theta - N_1 \left( \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) dxad\theta + \\ & + S_2 \left( -\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} \right) dxad\theta - N_2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \theta^2} \right) dxad\theta = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} dx d\theta + \frac{\partial N_2}{a \partial \theta} dx d\theta + S_1 \left( \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) dx d\theta + T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx d\theta +$$

$$+ T_2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) dx d\theta + S_2 \left( \frac{\partial^2 w}{a \partial x \partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx d\theta + q dx d\theta = 0.$$

После некоторых сокращений получаем такую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} & a \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial \theta} - a N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a S_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \\ & - N_2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) - T_2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0; \\ & \frac{\partial T_2}{\partial \theta} + a \frac{\partial S_1}{\partial x} + a T_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - N_1 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) + \\ & + S_2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - N_2 \left( 1 + \frac{\partial v}{a \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{a \partial \theta^2} \right) = 0; \\ & a \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + S_1 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) + a T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ & + T_2 \left( 1 + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + S_2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) + qa = 0. \end{aligned} \right\} (266)$$

Обратимся теперь к уравнениям моментов. Направления моментов, принятые за положительные при составлении формул (254) и (256), отмечены на рис. 140. Если их представить векторами, то в праввинтовой системе векторы  $H_1$ ,  $M_1$  и  $H_2$  совпадут с направлениями  $T_1$ ,  $S_1$  и  $T_2$ . Для вектора  $M_2$  направление будет прямо противоположно  $S_2$ . Пользуясь этим, мы на основании (266) сразу можем написать такие уравнения:

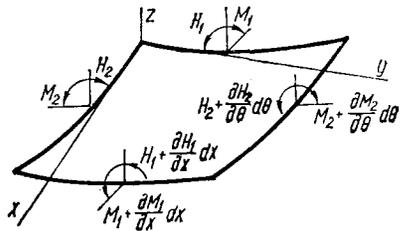


Рис. 140.

$$\left. \begin{aligned} & a = \frac{\partial H_1}{\partial x} - \frac{\partial M_2}{\partial \theta} - a M_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - H_2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + a N_2 = 0; \\ & \frac{\partial H_2}{\partial \theta} + a \frac{\partial M_1}{\partial x} + a H_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - a N_1 = 0; \\ & M_1 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) + a H_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H_2 \left( 1 + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \\ & - M_2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) + a (S_1 - S_2) = 0. \end{aligned} \right\} (267)$$

Усилия  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $S_1$  и  $S_2$  и моменты  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $H_1$  и  $H_2$  могут быть выражены при помощи формул (253) — (258), через деформации срединной поверхности  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $\omega$  и через величины  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  и  $\tau$ . А все эти величины выражаются через перемещения  $u$ ,  $v$  и  $w$  так <sup>1</sup> (см. § 70):

$$e_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad e_2 = \frac{\partial v}{a \partial \theta} - \frac{w}{a}; \quad \omega = \frac{\partial u}{a \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (g)$$

$$\kappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_2 = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right); \quad \tau = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} \right). \quad (h)$$

<sup>1</sup> Влиянием растяжений на изменение кривизны пренебрегаем.

Таким образом, из уравнений (266) и первых двух уравнений (267) мы получим систему уравнений, заключающую неизвестные функции  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $N_1$  и  $N_2$ , и в каждом частном случае задача сводится к решению этих уравнений.

Если усилия  $T_1$ ,  $T_2$  и  $S$  можно предполагать малыми по сравнению с теми критическими их значениями, при которых цилиндрическая форма равновесия оболочки перестает быть устойчивой, то в уравнениях (266) и (267) можно пропустить те члены, где эти усилия множатся на производные от малых перемещений  $u$ ,  $v$  и  $w$ . В таком случае придем к системе уравнений

$$\begin{aligned} a \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial \theta} &= 0; \\ \frac{\partial T_2}{\partial \theta} + a \frac{\partial S_1}{\partial x} - N_2 &= 0; \\ a \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + T_2 + qa &= 0; \\ a \frac{\partial H_1}{\partial x} - \frac{\partial M_2}{\partial \theta} + aN_2 &= 0; \\ \frac{\partial H_2}{\partial \theta} + a \frac{\partial M_1}{\partial x} - aN_1 &= 0. \end{aligned}$$

Исключая отсюда усилия  $N_1$  и  $N_2$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} a \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial \theta} &= 0; \\ \frac{\partial T_2}{\partial \theta} + a \frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} &= 0; \\ T_2 + \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial \theta} + a \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \theta^2} + qa &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (268)$$

Если цилиндрическая трубка подвергается действию значительных продольных усилий  $T_1$ , то члены, имеющие это усилие своим множителем, необходимо сохранить. Тогда вместо системы (268) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} a \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial \theta} &= 0; \\ \frac{\partial T_2}{\partial \theta} + a \frac{\partial S_1}{\partial x} + aT_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial H_1}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} &= 0; \\ T_2 + aT_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial \theta} + a \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \theta^2} + qa &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (269)$$

В тех случаях когда трубка подвергается значительному боковому давлению и можно ожидать преобладающего влияния на изгиб усилий  $T_2$ , пужно в общих уравнениях сохранить члены, имеющие множителем  $T_2$ . Таким образом, придем к системе

$$\left. \begin{aligned} a \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial \theta} - T_2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0; \\ \frac{\partial T_2}{\partial \theta} + a \frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} &= 0; \\ T_2 \left( 1 + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial \theta} + a \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \theta^2} + qa &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (270)$$

Подставляя в уравнения (268), (269) и (270) вместо усилий и моментов их выражения через перемещения, придем в каждом частном случае к трем дифференциальным уравнениям, заключающим три неизвестные функции  $u$ ,  $v$  и  $w$ .

## § 72. О деформациях цилиндрической трубки с опертыми краями

Пользуясь дифференциальными уравнениями (268) предыдущего параграфа, мы можем решить вопрос о деформациях, возникающих в цилиндрической трубке с опертыми краями в случае действия на боковую поверхность трубки распределенных нормальных давлений интенсивности  $q$ . Подставив в эти уравнения вместо  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $S$  и моментов  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $H$  их выражения через перемещения, что можно сделать при помощи формул (g) и (h) предыдущего параграфа, мы придем к трем таким уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\sigma}{2} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\sigma}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\sigma}{a} \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \\ & \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + a \frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\ & + \frac{h^2}{12} \frac{(1-\sigma)}{a} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2} \right) + \frac{h^2}{12} \left( \frac{\sigma}{a} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{a^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{1}{a^3} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^2} \right) = 0; \\ & \sigma \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{a} - \frac{h^2}{12} \left( a \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\sigma}{a} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\sigma}{a} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} \right) - \\ & - \frac{h^2 (1-\sigma)}{6a} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} \right) - \frac{h^2}{12} \left( \frac{\sigma}{a} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{a^3 \partial \theta^4} + \frac{\partial^3 v}{a^3 \partial \theta^3} \right) + \\ & + \frac{aq(1-\sigma^2)}{Eh} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Обозначим через  $l$  длину трубки и поместим начало координат у одного из концов, тогда условиям на опертых краях цилиндрической оболочки мы удовлетворим, если возьмем для перемещений такие выражения:

$$\begin{aligned} u &= \Sigma \Sigma A_{mn} \sin n\theta \cos \frac{m\pi x}{l}; & v &= \Sigma \Sigma B_{mn} \cos n\theta \sin \frac{m\pi x}{l}; \\ w &= \Sigma \Sigma C_{mn} \sin n\theta \sin \frac{m\pi x}{l}. \end{aligned} \quad (b)$$

Легко видеть, что при этом по концам трубки при  $x = 0$  и  $x = l$  обращаются в нуль значения  $w$  и  $M_1$ .

Подставляя выражения для перемещений (b) в уравнения (a), мы получаем возможность найти коэффициенты  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$ , и если полученные таким путем ряды (b) будут сходящимися, то они представляют собой искомые перемещения точек цилиндрической оболочки.

Когда вместо целой цилиндрической трубки мы будем иметь лишь часть ее, ограниченную двумя образующими и двумя параллельными кругами, то в случае опертых краев можно для перемещений взять выражения

$$\begin{aligned} u &= \Sigma \Sigma A_{mn} \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \cos \frac{m\pi x}{l}; & v &= \Sigma \Sigma B_{mn} \cos \frac{n\pi\theta}{\alpha} \sin \frac{m\pi x}{l}; \\ w &= \Sigma \Sigma C_{mn} \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \sin \frac{m\pi x}{l}, \end{aligned} \quad (c)$$

где через  $\alpha$  обозначен центральный угол, соответствующий выделенной части цилиндрической трубки, причем для прямолинейных краев оболочки принято  $\theta = 0$  и  $\theta = \alpha$ .

При таком выборе выражений для перемещений мы найдем, что по контуру оболочки радиальные перемещения и изгибающие моменты обращаются в нуль.

Подставляя выражения для перемещений (с) в уравнения (а) и представляя интенсивность распределенных по цилиндрической оболочке давлений  $q$  двойным тригонометрическим рядом

$$q = \Sigma \Sigma D_{mn} \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (d)$$

мы приходим к таким уравнениям для определения коэффициентов  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  и  $C_{mn}$ <sup>1</sup>:

$$\left. \begin{aligned} A_{mn}\pi \left[ \left( \frac{am}{l} \right)^2 + \frac{1-\sigma}{2} \left( \frac{n}{\alpha} \right)^2 \right] + B_{mn}\pi \frac{1+\sigma}{2} \frac{n}{\alpha} \frac{am}{l} + C_{mn}\sigma \frac{am}{l} &= 0; \\ A_{mn}\pi \frac{1+\sigma}{2} \frac{n}{\alpha} \frac{am}{l} + B_{mn}\pi \left[ \frac{1-\sigma}{2} \left( \frac{am}{l} \right)^2 + \frac{n^2}{\alpha^2} \right] + \\ + C_{mn} \frac{n}{\alpha} \left\{ 1 + \frac{\pi^2 h^2}{12a^2} \left[ \left( \frac{am}{l} \right)^2 + \left( \frac{n}{\alpha} \right)^2 \right] \right\} &= 0; \\ A_{mn}\sigma l \frac{am}{l} + B_{mn} \frac{n\pi}{\alpha} \left\{ 1 + \frac{\pi^2 h^2}{12a^2} \left[ \left( \frac{n}{\alpha} \right)^2 + (2-\sigma) \left( \frac{am}{l} \right)^2 \right] \right\} + \\ + C_{mn} \left\{ 1 + \frac{\pi^4 h^2}{12a^2} \left[ \left( \frac{am}{l} \right)^2 + \left( \frac{n}{\alpha} \right)^2 \right]^2 \right\} - D_{mn} \frac{a^3(1-\sigma^2)}{Eh} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Подставляя сюда вместо  $D_{mn}$  значения, соответствующие заданной нагрузке, мы получаем возможность определить коэффициенты  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  и  $C_{mn}$ . В качестве примера приводим некоторые результаты<sup>2</sup>, относящиеся к изгибу равномерной нагрузкой цилиндрической оболочки с малым углом  $\alpha$  и длиной  $l$ , равной  $\alpha a$ .

В этом случае

$$q = \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{16q}{\pi^2} \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha}.$$

Подставив соответствующее значение  $D_{mn}$  в уравнения (е), мы найдем, что при малых величинах угла  $\alpha$  коэффициенты  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  и  $C_{mn}$  будут зависеть от отношения  $\mu = f/h$ , где  $f$  — стрелка дуги радиуса  $a$ , соответствующая углу  $\alpha$ . Величина максимального прогиба представится формулой

$$w_{\max} = \beta \frac{ql^4}{D}.$$

Приводим несколько значений коэффициента  $\beta$ :

$\mu$	0	0,5	1,0	2,0	4,0	7,0	12,0
$\beta \cdot 10^6$	406	394	364	276	141	56	19

Таким образом, мы видим, как быстро возрастает жесткость пластинки с увеличением начальной стрелки  $f$ . Подобным же образом можно убедиться, что с увеличением начального искривления пластинки быстро убывают значения напряжений, соответствующих изгибающим моментам  $M_1$  и  $M_2$ . Заметим, что при вычислениях изгибающих моментов приходится для обеспечения надлежащей точности брать большое число членов в рядах, представляющих перемещения  $u$ ,  $v$  и  $w$ , что в большей степени усложняет вычислительную работу, в особенности с увеличением стрелки  $f$ .

### § 73. Об устойчивости цилиндрической трубки, подвергающейся действию равномерного наружного давления

При исследовании плоской деформации цилиндрической трубки (см. § 68) мы выяснили вопрос об устойчивости трубки, испытывающей равномерное наружное давление.

<sup>1</sup> В этих уравнениях мы пренебрегли величиной  $h^2/12a^2$ , малой по сравнению с единицей.

<sup>2</sup> Числовые результаты заимствуем из дипломной работы студента кораблестроительного факультета Петроградского политехнического института П. Х. Герретца (1915 г.)

Полученное нами при этом значение критического давления [см. формулу (261)] будет совпадать с данными опытов лишь в том случае, если длина трубки весьма велика по сравнению с ее диаметром. В противном случае на величину критического давления существенное влияние будет оказывать способ закрепления концов.

Рассмотрим здесь такое закрепление концов, которое допускает равномерное сжатие цилиндрической трубки, но препятствует сплющиванию трубки у концов в том случае, когда наружное давление превзойдет критическое значение и трубка в средней своей части потеряет свое первоначальное круговое очертание. Допустим также, что эта деформация не сопровождается появлением изгибающих моментов по концам трубки.

Если расположить начало координат по середине длины трубки и обозначить эту длину через  $l$ , то условия по концам запишутся так:

$$(w)_{x=\pm \frac{l}{2}} = \frac{q a^2}{h E}; \quad (M_1)_{x=\pm \frac{l}{2}} = 0, \quad (a)$$

где  $q$  обозначает равномерное боковое давление,  $a$  и  $h$  имеют прежние значения.

В рассматриваемом случае преобладающее значение будут иметь усилия  $T_2$ , поэтому мы при определении критических давлений будем пользоваться уравнениями (270). Частное решение этих уравнений, соответствующее круговой форме равновесия сжатой трубки, мы можем получить сразу, положив

$$v = 0; \quad w = \frac{q a^2}{h E}; \quad T_1 = 0; \quad T_2 = -q a.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь малые отклонения от круговой формы равновесия сжатой трубки и потому будем отбрасывать последние члены в первом и третьем уравнениях системы (270)<sup>1</sup>. Если еще принять во внимание условие нерастяжимости (см. § 70) при рассматриваемых отклонениях, из которого следует, что

$$\frac{\partial v}{a \partial \theta} = \frac{w}{a},$$

то уравнения (270) для нашей задачи напишутся так:

$$a \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial \theta} = 0;$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \theta} + a \frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = 0;$$

$$a \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \theta^2} + T_2 = q \left( w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)$$

или после небольших преобразований

$$a^2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 S_2}{\partial x \partial \theta} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial \theta^2} - a^2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{a} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \theta^2} = 0;$$

$$a \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial \theta^2} - a^2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + T_2 = q \left( w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right).$$

(270')

При помощи формул § 67, 70 все усилия и моменты выражаем через перемещения и, таким образом, приходим к трем уравнениям, заключающим три

<sup>1</sup> В таком случае  $T_2$  будет обозначать не полное усилие, а лишь то изменение этого усилия, которое будет происходить при сплющивании трубки.

неизвестные функции  $u$ ,  $v$  и  $w$ . Мы можем удовлетворить этим уравнениям и условиям на концах, если положим <sup>1</sup>

$$u = A \sin n\theta \sin \frac{\alpha x}{a}, \quad v = B \cos n\theta \cos \frac{\alpha x}{a}, \quad w = \sin n\theta \cos \frac{\alpha x}{a}, \quad (b)$$

где  $n$  — целое число и  $\alpha = a\pi/l$ . Этой форме равновесия, как легко видеть, соответствует искривление образующих цилиндра по синусоиде с одной полуволной. Число полуволн, образующихся по окружности трубки, определяется числом  $n$ .

Подставив величины (b) в уравнения (270'), выраженные через перемещения, и вводя для упрощения обозначения

$$(1 - \sigma)(nB + 1) = C; \quad nB + 1 - \alpha A = D; \\ \frac{h^2}{12a^2} = x; \quad q \frac{a}{h} \frac{1 - \sigma^2}{E} = y, \quad (c)$$

придем к таким уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} D[2\alpha^2 + (1 - \sigma)n^2] - C(\alpha^2 + n^2) - \alpha^2(1 - \sigma) &= 0; \\ D(\sigma n^2 - \alpha^2) + C(\alpha^2 + n^2 + a_1 x) - a_2 x &= 0; \\ D(\sigma n^2 - \alpha^2 - \sigma) + C(n^2 + \alpha^2 - 1 + a_3 x) - y(1 - n^2) - a_4 x &= 0. \end{aligned} \right\} (d)$$

Здесь для сокращения введены такие обозначения:

$$a_1 = \frac{n^2}{1 - \sigma} + \alpha^2; \quad a_2 = -(n^2 - 1)(n^2 + \alpha^2) - \sigma \alpha^2; \\ a_3 = -\frac{\alpha^2}{1 - \sigma}; \quad a_4 = \alpha^2(n^2 + \alpha^2 - 1). \quad (e)$$

Критическое значение давлений  $q$  и соответствующее значение  $y$  находим из условия совместности уравнений (d).

Составляя соответствующий определитель и приравнявая его нулю, приходим после ряда преобразований к такому результату:

$$y[1 + x(1 - 0,3\rho)(1 + 0,43\rho)] = 0,91 \frac{\rho^2}{n^2 - 1} + \\ + \frac{x}{n^2 - 1} \left[ \frac{n^4}{(1 - \rho)^2} - 2n^2(1 + 1,3\rho)(1 + 0,35\rho) + (1 - 0,3\rho)(1 + 1,6\rho) \right] + \\ + \frac{\rho^2}{(1 - \rho)^2} \frac{n^4}{n^2 - 1} (0,7 + 1,3\rho) x^2. \quad (f)$$

Здесь мы положили  $\sigma = 0,3$  и приняли обозначение

$$\frac{\alpha^2}{n^2 + \alpha^2} = \frac{1}{1 + \frac{n^2 l^2}{a^2 \pi^2}} = \rho. \quad (g)$$

Вычисления показывают, что уравнение (f) может быть значительно упрощено. Можно отбросить член, содержащий множитель  $x^2$ , и считать величину  $\rho$

<sup>1</sup> Вопросу устойчивости трубки конечной длины, подвергающейся равномерному боковому давлению, посвящены работы: Lorenz R. Die nicht achsensymmetrische Knickung dünnwandiger Hohlzylinder. Physikalische Zeitschrift, 1911, Bd 12, N 7, SS. 241—260. Southwell R. W. On the collapse of tubes by external pressure. Philosophical Magazine and Journal of Science, 1913, Series 6, vol. 25, N 149, pp. 687—698; vol. 26, N 153, pp. 502—511. Mises R. Der kritische Aussendruck zylindrische Rohre. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1914, Bd 58, N 19, SS. 750—755. Из последней работы мы заимствуем приводимые ниже результаты.

малой, тогда будем иметь

$$y = \frac{1 - \sigma^2}{n^2 - 1} \rho^2 + x [n^2 - 1 + \rho(2n^2 - 1 - \sigma)]. \quad (271)$$

По размерам трубки мы, задаваясь числом  $n$ , можем на основании обозначений (с) и (g) вычислить  $\rho$  и  $x$  и потом из (271) найти соответствующее  $y$ , которым определяется давление  $q$ . Путем последовательных попыток нужно найти такое число  $n$ , которому соответствует наименьшее  $y$ . Этим значением и определится искомое  $q_{кр}$ . Оказывается, что, чем меньше длина трубки по сравнению с диаметром, тем больше  $n$ , тем большее число полуволн образуется по окружности выпучившейся трубки. Несколько значений для  $q_{кр}$  в  $\text{кг/см}^2$  мы приводим в табл. 40. При вычислениях принято  $\sigma = 0,3$ ;  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ .

Таблица 40

$a/l$	100 $h/a$							
	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2
0	0,035	0,28	0,95	2,25	4,4	7,6	12	18
0,1	0,18	1,0	2,9	6,6	12,3	17	23	31
0,2	0,37	2,1	5,9	13	21	32	47	66
0,3	0,56	3,2	9,3	18	32	51	76	111
0,4	0,76	4,5	11,6	25	45	70	101	140
0,5	0,97	5,5	15	32	55	87	132	190
1	2,0	—	—	—	—	—	—	—
2	4,2	—	—	—	—	—	—	—

Конечно, приведенные значения критических давлений будут совпадать с опытом<sup>1</sup> лишь в том случае, когда соответствующие им сжимающие напряжения не превосходят предела упругости материала. За этим пределом таблица будет давать для  $q_{кр}$  преувеличенные значения. Мы могли бы ближе подойти к действительности, если бы вместо постоянного модуля  $E$  ввели некоторую переменную величину  $E'$ , зависящую от сжимающих напряжений в трубке<sup>2</sup>. Если материал трубки имеет модуль  $E_1$ , отличный от модуля  $E$ , принятый при составлении таблицы, то числа таблицы нужно множить на отношение  $E_1 : E$ .

Полученные результаты относятся к определенному закреплению концов, но, нужно думать, что способ закрепления в данном случае не будет играть существенной роли, если только трубка при сплющивании сохраняет по концам круговое очертание. Если, например, концы трубки не могут свободно поворачиваться и искривление сопровождается появлением по концам изгибающих моментов  $M_1$ , то влияние этих моментов будет иметь лишь местное значение и, вероятно, не окажет значительного влияния на критические напряжения, если только длина трубки  $l$  не будет малой по сравнению с радиусом  $a$ .

<sup>1</sup> Опытные исследования см. в работах С а г м а н А. P. Resistance of tubes to collapse. Physical Review, 1905, vol. 21, N 6, pp. 381—387. Bach. Die auf keiserlichen Werft in Danzig von 1887 bis 1892 ausgeführten versuche über die Widerstandsfähigkeit von Flammrohren. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1894, Bd 38, № 23, ss. 689—696. Fairbairn W. On the resistance of tubes to collapse. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 1858, vol. 148, pt II, pp. 389—414.

<sup>2</sup> Вопрос об устойчивости трубки за пределом упругости в рассматриваемом случае сложнее, нежели при плоской деформации, так как изменению кривизны  $\kappa_1$  должно соответствовать неизменное значение  $E$  и лишь  $\kappa_2$  соответствует измененный модуль  $E'$ .

### § 74. Об устойчивости цилиндрической трубки, подвергающейся действию продольного сжатия

Предположим, что цилиндрическая трубка со свободной от усилий боковой поверхностью испытывает равномерное продольное сжатие. Увеличивая сжимающие напряжения, мы можем достигнуть предела, когда цилиндрическая форма равновесия перестанет быть устойчивой и трубка выпучится. Частный случай, когда искривленная поверхность симметрична относительно оси трубки, нами был рассмотрен ранее (см. § 69). Здесь разрешим ту же задачу в более общем виде, для чего воспользуемся уравнениями (269). Мы удовлетворим этим уравнениям, если положим

$$q = 0, \quad v = 0, \quad \sigma \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{w}{a} = \text{const.} \quad (a)$$

Это соответствует цилиндрической форме равновесия сжатой трубки. Под действием продольного сжатия трубка получает некоторое увеличение диаметра, постоянное во всех сечениях. С увеличением сжатия мы достигаем предела, когда эта форма равновесия перестает быть устойчивой и стенки трубки выпучиваются. Предположим, что края трубки закреплены так, что при выпучивании концы трубки сохраняют круговое очертание ( $v = w = 0$  по концам трубки) и изгибающие моменты  $M_1$  по концам равны нулю. Уравнения (269), если входящие в них усилия и моменты выразить через перемещения  $u, v, w$ , переписутся так:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1 + \sigma}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\sigma}{a} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1 - \sigma}{2} \frac{\partial^2 u}{a \partial \theta^2} = 0; \\ & \frac{1 + \sigma}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + a \frac{1 - \sigma}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{a \partial \theta^2} - \frac{\partial w}{a \partial \theta} + \frac{h^2}{12} \frac{(1 - \sigma)}{a} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2} \right) + \\ & + \frac{h^2}{12} \left( \frac{\sigma}{a} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{a^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^3 v}{a^3 \partial \theta^3} \right) + \frac{T_1 a}{Eh} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} (1 - \sigma^2) = 0; \\ & \frac{a T_1}{Eh} (1 - \sigma^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{a \partial \theta} - \frac{w}{a} - \\ & - \frac{h^2}{12} \left( a \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\sigma}{a} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\sigma}{a} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} \right) - \frac{h^2}{6} (1 - \sigma) \left( \frac{\partial^4 w}{a \partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^3 v}{a \partial x^2 \partial \theta} \right) - \\ & - \frac{h^2}{12} \left( \frac{\sigma}{a} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{a^3 \partial \theta^4} + \frac{\partial^3 v}{a^3 \partial \theta^3} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (272)$$

Мы можем удовлетворить этим уравнениям, положив  $v = 0$  и допустив, что  $u$  и  $w$  — функции только  $x$ .

В таком случае уравнения (272) переписутся так:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\sigma}{a} w = 0; \\ & \frac{a T_1}{Eh} (1 - \sigma^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{a} - \frac{h^2}{12} a \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

и мы придем к форме выпучивания, симметричной относительно оси, т. е. к решению, которое нами было рассмотрено раньше.

Для получения критических значений сжимающих напряжений в случае форм равновесия, несимметричных относительно оси, возьмем решения урав-

нений (272) в такой форме<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} u &= A \sin n\theta \cos \frac{m\pi x}{l}; & v &= B \cos n\theta \sin \frac{m\pi x}{l}; \\ w &= C \sin n\theta \sin \frac{m\pi x}{l}. \end{aligned} \quad (c)$$

Здесь  $l$  обозначает длину трубки. Начало координат расположено на одном из концов трубки.

Подставив (c) в уравнения (272) и введя для сокращения обозначения

$$\frac{h}{2a} = \beta; \quad \frac{am\pi}{l} = \gamma; \quad \frac{T_1(1-\sigma^2)}{Eh} = -y, \quad (d)$$

придем к таким уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} A \left( \gamma^2 + \frac{1-\sigma}{2} n^2 \right) + B \frac{1+\sigma}{2} n\gamma + C\sigma\gamma &= 0; \\ A \frac{1+\sigma}{2} n\gamma + B \left[ \frac{1-\sigma}{2} \gamma^2 + n^2 + \frac{\beta^2}{3} (1-\sigma) \gamma^2 + \frac{\beta^2}{3} n^2 - \gamma^2 y \right] + \\ + C \left( n + \frac{\beta^2}{3} n^3 + \frac{\beta^2}{3} n\gamma^2 \right) &= 0; \\ A\sigma\gamma + B \left( n + \frac{\beta^2}{3} n^3 + \frac{2-\sigma}{3} \beta^2 n\gamma^2 \right) + \\ + C \left[ -\gamma^2 y + 1 + \frac{\beta^2}{3} \gamma^4 + \frac{2}{3} \beta^2 n^2 \gamma^2 + \frac{\beta^2}{3} n^4 \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Принятая нами искривленная форма равновесия становится возможной, когда определитель полученной системы уравнений (e) будет обращаться в нуль. Приравнявая этот определитель нулю, получаем для величины  $y$  квадратное уравнение, из которого можно найти  $y$  и соответствующее значение критической сжимающей силы. Отбрасывая малые члены, имеющие множителями величины  $y^2$  и  $\left(\frac{\beta^2}{3}\right)^2$ , приходим к такому результату:

$$y = \frac{(1-\sigma^2)\gamma^4 + \frac{\beta^2}{3} [(n^2 + \gamma^2)^4 - (2+\sigma)(3-\sigma)\gamma^4 n^2 + 2\gamma^4(1-\sigma^2) - \gamma^2 n^4(7+\sigma) + (3+\sigma)\gamma^2 n^2 + n^4 - 2n^6]}{\gamma^2 \left\{ (n^2 + \gamma^2)^2 + \frac{2}{1-\sigma} \left( \gamma^2 + \frac{1-\sigma}{2} n^2 \right) \left[ 1 + \frac{\beta^2}{3} (n^2 + \gamma^2)^2 \right] - \frac{2\sigma^2 \gamma^2}{1-\sigma} + \frac{2}{1-\sigma} \left( \gamma^2 + \frac{1-\sigma}{2} n^2 \right) \frac{\beta^2}{3} [n^2 + (1-\sigma)\gamma^2] \right\}} \quad (273)$$

Рассмотрим сначала случай, когда длина сжимаемой трубки мала или трубка при выпучивании подразделяется по длине на большое число коротких волн. При таком условии  $\gamma^2$  представляет собой большое число, и мы, ограничиваясь в решении (273) главными членами, получаем

$$y = \frac{\beta^2}{3} \frac{(n^2 + \gamma^2)^2}{\gamma^2} + \frac{(1-\sigma^2)\gamma^4}{(n^2 + \gamma^2)^2}. \quad (274)$$

<sup>1</sup> Тимошенко С. П. К вопросу о деформациях и устойчивости цилиндрической оболочки. Вестник общества технологов, 1914, том 21, № 21, стр. 785—792; Изв. Электротехнического института, Петроград, 1914, том 11, стр. 267—287. Отд. оттиск. Петроград, тип. А. Э. Коллинса, 1914, 23 стр. [Перепечатка: Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М., Физматгиз, 1971, стр. 457—472].

При  $n = 0$  мы получаем отсюда прежний результат (см. § 69) для критического сжатия в случае деформации трубки, симметричной относительно оси. Наименьшее значение для  $y$  дает нам формула (274) при

$$\left(\gamma + \frac{n^2}{\gamma}\right)^2 = \frac{1}{\beta} \sqrt{3(1 - \sigma^2)}.$$

Этому соответствует такое же значение критических напряжений, как и для формы равновесия, симметричной относительно оси, и мы можем сделать такое заключение: пока длина трубки так мала, что

$$\gamma^2 \geq \frac{1}{\beta} \sqrt{3(1 - \sigma^2)},$$

мы будем при выпучивании получать деформацию, симметричную относительно оси трубки. С увеличением длины и убыванием  $\gamma$  будут появляться две, три и т. д. волны по окружности цилиндра, но величина критических напряжений будет весьма мало колебаться, оставаясь примерно такой же, как при

$$\gamma^2 = \frac{1}{\beta} \sqrt{3(1 - \sigma^2)}.$$

При дальнейшем увеличении длины мы снова в качестве первой искривленной формы равновесия получим форму, симметричную относительно оси трубки и т. д. На основании этого заключаем, что в случае коротких трубок или в случае длинной трубки, подразделяющейся при выпучивании на большое число полуволн в направлении длины, критическое напряжение следует принимать равным тому, которое мы получили для формы равновесия, симметричной относительно оси.

Рассмотрим теперь второй крайний случай, когда величина  $\gamma$ , входящая в выражение (273), мала, т. е. когда длина тех волн, на которые подразделяется по длине выпучивающаяся трубка, велика по сравнению с диаметром. Сохраняя главные члены в выражении (273), получаем

$$y = \frac{(1 - \sigma^2) \gamma^4 + \frac{\beta^2}{3} \{(n^4 - n^2)^2 + \gamma^2 [4n^6 - (7 + \sigma) n^4 + (3 + \sigma) n^2]\}}{\gamma^2 (n^4 + n^2)}. \quad (275)$$

При  $n = 1$  из (275) получаем

$$y = \frac{1 - \sigma^2}{2} \gamma^2; \quad \frac{T_1}{Eh} = -\frac{\pi^2 a^2}{2l^2},$$

что совершенно совпадает с формулой Эйлера для случая стержня с опертыми концами, так как  $a^2/2$  есть не что иное, как квадрат радиуса инерции поперечного сечения тонкостенной трубки. Перемещения при этом представляются так:

$$v = B \cos \theta \sin \frac{m\pi x}{l}; \quad w = B \sin \theta \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Каждая точка трубки при выпучивании совершает перемещение, равное  $B \sin \frac{m\pi x}{l}$  и параллельное плоскости  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ; поперечное сечение остается круговым.

Для  $n > 1$  мы, опуская в формуле (275) малые величины высших порядков, получаем

$$y = \frac{(1 - \sigma^2) \gamma^2}{n^2 (n^2 + 1)} + \frac{\beta^2}{3} \frac{n^2 (n^2 - 1)^2}{\gamma^2 (n^2 + 1)}. \quad (276)$$

Наименьшее значение для  $y$  мы получаем, полагая <sup>1</sup>

$$\gamma^2 = \frac{\beta n^2 (n^2 - 1^2)}{\sqrt{3(1 - \sigma^2)}},$$

чему соответствует

$$\frac{T_1}{Eh} = -\frac{h}{a} \frac{1}{\sqrt{3(1 - \sigma^2)}} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}. \quad (277)$$

Таким образом, при значительной длине трубки первая искривленная форма будет по длине состоять из сравнительно длинных полуволн и критическое напряжение получается при этом меньшим, чем в изученном выше случае формы равновесия, симметричной относительно оси.

Пользуясь предыдущими результатами, мы можем сделать некоторые заключения об устойчивости цилиндрической оболочки, ограниченной двумя прямолинейными образующими цилиндра и двумя параллельными кругами и сжатой вдоль образующих. Пусть  $\alpha$  — центральный угол, соответствующий рассматриваемой части цилиндрической оболочки. В качестве решения уравнений (272) возьмем

$$u = A \sin \frac{k\pi\theta}{\alpha} \sin \frac{m\pi x}{l}; \quad v = B \cos \frac{k\pi\theta}{\alpha} \sin \frac{m\pi x}{l};$$

$$w = C \sin \frac{k\pi\theta}{\alpha} \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

При этом радиальные перемещения и изгибающие моменты по контуру оболочки обращаются в нуль. Для определения критических напряжений мы можем воспользоваться формулой (273), заменив в ней число  $n$  величиной  $k\pi/\alpha$ .

Рассмотрим случай, когда  $\gamma$  — большое число. Из формулы (274) при этом получаем

$$y = \frac{\beta^2}{3} \frac{\left(\frac{k^2\pi^2}{\alpha^2} + \gamma^2\right)^2}{\gamma^2} + \frac{(1 - \sigma^2)\gamma^2}{\left(\frac{k^2\pi^2}{\alpha^2} + \gamma^2\right)^2}. \quad (274')$$

Особый практический интерес представляет тот случай, когда угол  $\alpha$  мал. При этом искривленная форма равновесия выпучившейся оболочки будет иметь в направлении параллельного круга лишь одну полуволну ( $k = 1$ ). При  $a = \infty$  формула (274') дает нам в этом случае

$$y = \frac{\beta^2}{3} \frac{\left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} + \gamma^2\right)^2}{\gamma^2}.$$

Наименьшее значение сжимающих усилий получится при  $\gamma^2 = \pi^2/\alpha^2$ .

Обозначив через  $b$  величину  $a\alpha$ , ширину сжимаемой пластинки, найдем для наименьшего  $y$  значение

$$y = \frac{\beta^2}{3} \frac{4\pi^2 a^2}{b^2} = \frac{h^2}{12} \frac{4\pi^2}{b^2},$$

откуда

$$T_1 = -\frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)} \frac{4\pi^2}{b^2},$$

<sup>1</sup> Эта искривленная форма равновесия, соответствующая подразделению трубки при выпучивании на длинные полуволны, рассмотрена R. Southwell в работе, указанной в сноске на стр. 258.

что совпадает с известной формулой Дж. Брайана для сжатых прямоугольных пластинок с опертыми краями.

При конечном значении  $a$  и при  $k = 1$  наименьшее значение  $y$ , определяемое из формулы (274'), представится так:

$$y = \frac{4}{3} \beta^2 \frac{\pi^2}{\alpha^2} + (1 - \sigma^2) \frac{\alpha^2}{4\pi^2}. \quad (g)$$

Первый член в этой формуле соответствует тому критическому усилию, которое мы получаем для длинной пластинки ширины  $b = \alpha a$  с опертыми краями. Вторым членом оценивается увеличение жесткости, обусловленное начальным искривлением пластинки по цилиндрической поверхности.

При малом значении  $\alpha$  мы можем воспользоваться следующей зависимостью между шириной искривленной пластинки  $b$  и стрелкой ее начального прогиба  $f$ :  $b^2 = a^2 \alpha^2 = 8af$ . Тогда формула (g) может быть переписана в таком виде:

$$- \frac{T_1}{Eh} = \frac{h^2}{12(1 - \sigma^2)} \frac{4\pi^2}{b^2} + \frac{2}{\pi^2} \frac{f}{a} = \frac{h^2}{12(1 - \sigma^2)} \frac{4\pi^2}{b^2} \left( 1 + 0,448 \frac{f^2}{h^2} \right). \quad (278)$$

Мы видим, как быстро возрастает устойчивость сжатой пластинки, искривленной по цилиндрической поверхности, если увеличить стрелку начального прогиба  $f$ .

Прием, который мы применили в последних двух параграфах к исследованию устойчивости цилиндрической трубки, может быть использован также и для того случая, когда цилиндрическая трубка подвергается одновременному действию продольного равномерного сжатия и равномерного бокового давления. Подобного рода условия мы имеем, например, в случае проверки на устойчивость наружной обшивки подводной лодки.

Вопрос об устойчивости цилиндрической трубки, подвергающейся скручиванию, оказывается задачей более сложной, так как выражения для перемещений уже не могут быть представлены простыми формулами (с).

Если края сжатой цилиндрической трубки не только свободно поворачиваются ( $M_1 = 0$ ), но и могут свободно смещаться, то при сжатии, превосходящем известный предел, трубка может принять новую форму равновесия, причем переход к этой форме не будет сопровождаться растяжением срединной поверхности. При этом образующие цилиндра останутся прямыми и лишь наклонятся к направлению сжатия.

Соответствующее значение критических сжимающих сил равно <sup>1</sup>

$$- T_1 = \frac{2D}{a^4} \frac{9}{5} \left[ \frac{4}{3} l^2 + 2(1 - \sigma) a^2 \right]. \quad (279)$$

Для коротких тонкостенных цилиндрических трубок это значение критических сжимающих усилий будет во много раз меньше того, что мы получили выше при несмещающихся концах сжимаемой трубки.

## § 75. О деформациях симметрично нагруженной сферической оболочки

Задача о расчете тонких оболочек, имеющих сферическую срединную поверхность, встречается при решении ряда практически важных вопросов. С ней мы имеем дело при расчете сферических днищ котлов и различного рода резервуаров, при расчете непроницаемых переборок в паровых турбинах, при расчете

<sup>1</sup> См. стр. 162 нашей работы, упомянутой на стр. 266.

купольных сводов и т. д. Наиболее просто эта задача решается в двух крайних случаях: 1) когда оболочка под действием приходящихся на нее нагрузок деформируется так, что напряжениями от изгиба оболочки можно пренебречь по сравнению с напряжениями, соответствующими растяжениям срединной поверхности; 2) когда напряжениями от растяжения срединной поверхности можно пренебречь по сравнению с напряжениями от изгиба.

Первый случай встречается при расчете сферических днищ тонкостенных резервуаров, подвергающихся действию равномерного внутреннего давления. Далее мы увидим, что в частях этих днищ, удаленных от опорного контура, напряжения изгиба невелики, и мы ими можем пренебрегать по сравнению с напряжениями, соответствующими растяжению срединной поверхности. У опорного контура вследствие закреплений могут получиться весьма значительные напряжения изгиба, имеющие характер *местных* напряжений, и для их определения необходимы дополнительные исследования. Но если опорные закрепления сферической оболочки допускают свободные радиальные перемещения точек контура и свободные поворачивания краев оболочки (*подвижно опертый* край оболочки), то напряжения изгиба везде остаются малыми и мы можем получить вполне удовлетворительное приближенное решение, рассматривая лишь деформации растяжения срединной поверхности.

Со вторым крайним случаем, когда преобладающую роль играют напряжения изгиба, мы встречаемся при исследовании колебаний незамкнутой тонкой сферической оболочки<sup>1</sup>. Подобные деформации, не сопровождающиеся растяжениями срединной поверхности, должны играть существенную роль в вопросе об устойчивости сферической оболочки, подвергающейся действию равномерно наружного давления.

Для полного решения вопроса о напряжениях и деформациях в симметрично нагруженной сферической оболочке составим соответствующие дифференциальные уравнения равновесия.

На рис. 141, *a* представлено меридиональное сечение сферической оболочки, на которую действует нагрузка, симметрично распределенная относительно оси  $OO$ . Вырежем из оболочки бесконечно малый элемент двумя меридиональными сечениями, наклоненными под углом  $d\varphi$  друг к другу, и двумя коническими поверхностями с углами  $\theta$  и  $\theta + d\theta$ . Из условий симметрии следует, что по границам выделенного элемента, соответствующим меридиональным сечениям, будут действовать лишь нормальные напряжения, которые мы можем привести к растягивающим силам интенсивности  $T_2$  и изгибающим моментам интенсивности

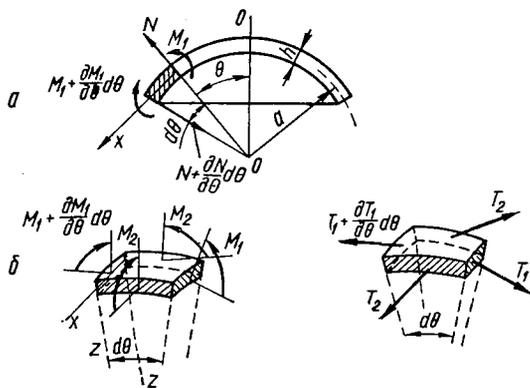


Рис. 141.

<sup>1</sup> Вопрос о вибрациях сферической оболочки, не сопровождающихся растяжением срединной поверхности, разрешен Рэлеем. См. Rayleigh (John William Strutt). On the infinitesimal bending of surfaces of revolution. Proc of the London Mathematical Society, 1881/82, vol. 13, N 180, pp. 4—16. [Перепечатка: Rayleigh (Strutt J. W.) Scientific Papers. Cambridge, University press, vol. 1 (1869—1881), 1899, pp. 551—562. См. также гл. ХА его монографии, упомянутой на стр. 245.

$M_2$  (рис. 141, б). По двум другим граням выделенного элемента кроме нормальных напряжений, приводящихся к силам  $T_1$  и парам сил  $M_1$ , мы будем иметь также и перерезывающие силы  $N$ . Интенсивность внешних давлений, приложенных к оболочке, разложим на две составляющие. Составляющую  $P$  направим к центру шаровой поверхности и составляющую  $Q$  направим по касательной к меридиану в сторону возрастания угла  $\theta$ . Эти направления примем за оси  $z$  и  $x$  и соответствующие перемещения при деформации оболочки обозначим через  $w$  и  $u$ .

При наших обозначениях дуги срединной поверхности, соответствующие выделенному элементу, имеют длины  $a d\theta$  и  $a \sin \theta d\psi$ .

Проектируя все приложенные к элементу силы на направления осей  $x$  и  $z$  и составляя момент этих сил относительно третьей оси, приходим к таким дифференциальным уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (T_1 a \sin \theta d\psi) d\theta - N a \sin \theta d\psi d\theta - T_2 a \cos \theta d\theta d\psi + Q a^2 \sin \theta d\psi d\theta = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (N a \sin \theta d\psi) d\theta + T_2 a \sin \theta d\psi d\theta + T_1 a \sin \theta d\psi d\theta + P a^2 \sin \theta d\psi d\theta = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (M_1 a \sin \theta d\psi) d\theta - M_2 a \cos \theta d\psi d\theta - N a^2 \sin \theta d\psi d\theta = 0.$$

Отсюда после сокращений получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \theta} + (T_1 - T_2) \operatorname{ctg} \theta - N + Qa &= 0; \\ \frac{\partial N}{\partial \theta} + N \operatorname{ctg} \theta + T_2 + T_1 + Pa &= 0; \\ \frac{\partial M_1}{\partial \theta} + (M_1 - M_2) \operatorname{ctg} \theta - Na &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (280)$$

Входящие в эти уравнения усилия  $T_1$ ,  $T_2$  и моменты  $M_1$  и  $M_2$  могут быть выражены через перемещения  $u$  и  $w$ . Начнем с определения растяжений срединной поверхности. Растяжение  $e_1$  вдоль касательной к меридиану будет зависеть как от радиального перемещения  $w$ , так и от перемещения  $u$  и представится такой формулой:

$$e_1 = \frac{1}{a} \frac{du}{d\theta} - \frac{w}{a}. \quad (281)$$

Растяжение  $e_2$  соответствует удлинению дуги параллельного круга. Приняв во внимание, что радиус этого круга, равный  $a \sin \theta$ , получает благодаря перемещениям  $u$  и  $w$  приращение  $u \cos \theta - w \sin \theta$ , получим

$$e_2 = \frac{u \operatorname{ctg} \theta - w}{a}. \quad (282)$$

Найдем теперь выражения для изменения кривизны сферической оболочки при деформации. Чтобы найти изменение кривизны меридионального сечения, воспользуемся формулой (89), которую мы получили при рассмотрении изгиба кругового кольца. При взятых обозначениях искомое изменение кривизны представится так:

$$\frac{1}{a^2} \left( w + \frac{d^2 w}{d\theta^2} \right),$$

и мы на основании (251) и (281) будем иметь

$$\kappa_1 = \frac{1}{a^2} \left( w + \frac{d^2 w}{d\theta^2} \right) + \frac{1}{a^2} \left( \frac{du}{d\theta} - w \right) = \frac{1}{a^2} \left( \frac{du}{d\theta} + \frac{d^2 w}{d\theta^2} \right). \quad (283)$$

Рассмотрим теперь изменение кривизны, соответствующей нормальному сечению, перпендикулярному к плоскости меридиана. Какой-либо элемент меридиана  $mn$  (рис. 142) при деформации оболочки займет положение  $m_1 n_1$ . При этом новый радиус кривизны  $AB$  будет меньше  $a$ , и это уменьшение, как легко видеть из рисунка, равно

$$w + \frac{dw}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta.$$

Соответствующее изменение кривизны представится так:

$$\frac{1}{a^2} \left( w + \frac{dw}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta \right),$$

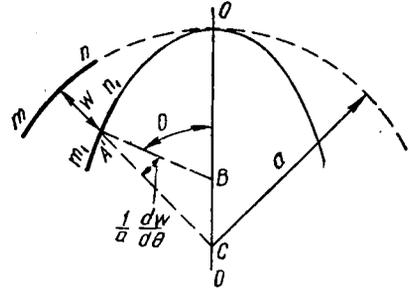


Рис. 142.

и мы, на основании (251) и (282), будем иметь

$$\kappa_2 = \frac{1}{a^2} \left( w + \frac{dw}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{a^2} (u \operatorname{ctg} \theta - w) = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{a^2} \left( u + \frac{dw}{d\theta} \right). \quad (284)$$

Теперь усилия  $T_1$ ,  $T_2$  и моменты  $M_1$  и  $M_2$  легко выражаются через перемещения при помощи известных формул (253) и (254):

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\sigma^2} (e_1 + \sigma e_2); & T_2 &= \frac{Eh}{1-\sigma^2} (e_2 + \sigma e_1); \\ M_1 &= -D (\kappa_1 + \sigma \kappa_2); & M_2 &= -D (\kappa_2 + \sigma \kappa_1). \end{aligned} \quad (a)$$

Подставив (a) в уравнения (280), мы придем к трем уравнениям, заключающим три неизвестные функции  $u$ ,  $w$  и  $N$ . Если эти функции будут найдены, то сейчас же найдутся выражения для напряжений изгиба и напряжений, соответствующих растяжению срединной поверхности.

### § 76. Расчет сферической оболочки с подвижно открытыми краями

Предположим, что опорным контуром симметрично загруженной сферической оболочки является один из параллельных кругов. Закрепления по этому контуру допускают свободное перемещение в радиальном направлении и свободное поворачивание открытого края оболочки относительно касательной к опорному контуру (рис. 143).

В этом случае, как мы уже упоминали, можно получить приближенное решение задачи, если пренебречь напряжениями изгиба и принять в расчет лишь напряжения, соответствующие усилиям  $T_1$  и  $T_2$ . Тогда уравнения (280) приведутся к такой системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \theta} + (T_1 - T_2) \operatorname{ctg} \theta + Qa &= 0; \\ T_1 + T_2 + Pa &= 0. \end{aligned} \quad (285)$$

Исключая из этих уравнений  $T_2$ , получаем для определения  $T_1$  такое дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \theta} + 2T_1 \operatorname{ctg} \theta = -a(P \operatorname{ctg} \theta + Q).$$

Интегрируя полученное линейное дифференциальное уравнение первого порядка способом изменения произвольных постоянных, получаем

$$T_1 = \frac{a}{\sin^2 \theta} \left[ C - \int \left( P \frac{\sin 2\theta}{2} + Q \sin^2 \theta \right) d\theta \right]. \quad (a)$$

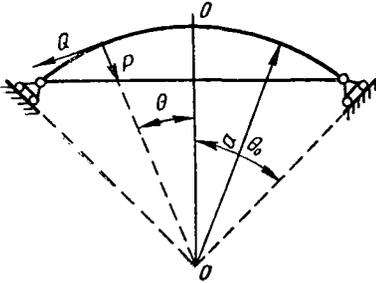


Рис. 143.

Отсюда легко находятся решения для различных частных случаев нагрузки. Возьмем, например, нагрузку собственным весом. Если через  $\gamma$  обозначим вес единицы объема оболочки, то для рассматриваемого случая будем иметь  $P = \gamma h \cos \theta$ ;  $Q = \gamma h \sin \theta$ . Подставив эти выражения в общее решение (a), найдем

$$T_1 = \frac{a}{\sin^2 \theta} (C + \gamma h \cos \theta).$$

Произвольную постоянную  $C$  нужно подобрать так, чтобы в вершине оболочки при  $\theta = 0$  усилия  $T_1$  оставались конечными. Этому условию мы удовлетворим, если положим  $C = -\gamma h$ .

Тогда будем иметь

$$T_1 = -a\gamma h \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta};$$

$$T_2 = -(aP + T_1) = -a\gamma h \left( \cos \theta - \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right).$$

В табл. 41 приведены значения скобок, входящих в выражения для  $T_1$  и  $T_2$  при различных значениях угла  $\theta$ .

Т а б л и ц а 41

$\theta$ , град	$\frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta}$	$\cos \theta - \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta}$	$\theta$ , град	$\frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta}$	$\cos \theta - \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta}$
0	0,500	0,500	50	0,608	0,035
10	0,505	0,480	60	0,666	-0,166
20	0,515	0,425	70	0,744	-0,402
30	0,536	0,330	80	0,852	-0,679
40	0,568	0,198	90	1,000	-1,000

В вершине оболочки усилия  $T_1$  и  $T_2$  — сжимающие и равны по величине —  $0,5a\gamma h$ . С увеличением угла  $\theta$  сжимающее усилие  $T_1$  все возрастает. Усилие  $T_2$  убывает по абсолютному значению и при  $\theta$ , несколько большем  $50^\circ$ , переходит через нулевое значение, обращаясь в растягивающее усилие.

Если бы сферическая оболочка в вершине не была сомкнутой, а имела отверстие по параллельному кругу, соответствующему углу  $\theta_0$ , то произвольную постоянную  $C$  в общем интеграле (a) нужно было бы подобрать так, чтобы по внутреннему контуру, который мы будем считать свободным от усилий, вели-

чина  $T_1$  обращалась в нуль. Для этого нужно положить  $C = -\gamma h \cos \theta_0$ , и мы сейчас же можем составить формулы для  $T_1$  и  $T_2$ .

Рассматривая полученные таким образом решения задачи как первое приближение, мы можем при помощи формул предыдущего параграфа получить дальнейшие приближения и учесть влияние напряжений изгиба на найденные нами приближенные значения  $T_1$  и  $T_2$ <sup>1</sup>. Вычисление дальнейших приближений ведется в таком порядке. Сначала, пользуясь найденными выше приближенными значениями  $T_1$  и  $T_2$ , вычисляем при помощи известных формул

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\sigma^2} (e_1 + \sigma e_2); \\ T_2 &= \frac{Eh}{1-\sigma^2} (e_2 + \sigma e_1) \end{aligned} \quad (b)$$

соответствующие значения перемещений  $u$  и  $w$ . Подставляя эти величины в формулы (283) и (284), находим  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ , при помощи которых находим первое приближение для изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$ . Для получения дальнейших приближений поступаем так: найденные значения  $M_1$  и  $M_2$  подставляем в третье уравнение (280) и находим перерезывающую силу  $N$ . Тогда первое и второе уравнения той же системы дадут возможность найти второе приближение для усилий  $T_1$  и  $T_2$ , при помощи которых можно получать дальнейшие приближения, повторяя расчеты в прежнем порядке. Применим это к рассмотренному выше случаю действия на сферическую оболочку собственного веса. Формулы (b) переписуются при этом так:

$$\begin{aligned} -a\gamma h \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta} &= \frac{Eh}{1-\sigma^2} (e_1 + \sigma e_2); \\ -a\gamma h \left( \cos \theta - \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) &= \frac{Eh}{1-\sigma^2} (e_2 + \sigma e_1), \end{aligned}$$

и мы из них легко находим выражения для  $e_1$  и  $e_2$ .

Для получения перемещений обратимся к формулам (281) и (282). При помощи этих формул находим

$$\frac{du}{d\theta} - u \operatorname{ctg} \theta = a(e_1 - e_2).$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$u = a \sin \theta \left( C + \int \frac{e_1 - e_2}{\sin \theta} d\theta \right). \quad (286)$$

Тогда на основании (282)

$$w = -a \left[ e_2 - \cos \theta \left( C + \int \frac{e_1 - e_2}{\sin \theta} d\theta \right) \right]. \quad (287)$$

Подставляя эти результаты в формулы (283) и (284), получаем для изменений кривизны  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  такие значения:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{a} \left[ -\frac{d^2 e_2}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{d(e_1 - e_2)}{d\theta} - \frac{e_1 - e_2}{\sin^2 \theta} \right]; \\ \kappa_2 &= \frac{\operatorname{ctg} \theta}{a} \left[ -\frac{d e_2}{d\theta} + \operatorname{ctg} \theta (e_1 - e_2) \right]. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Приводимый ниже прием приближенной оценки напряжений изгиба в случае подвижно опертой сферической оболочки принадлежит Г. Рейсснеру. См. Reissner H. Spannungen in Kugelschalen (Kuppeln.) Festschrift, Heinrich Müller-Breslau gewidmet, Leipzig, A. Kröner, 1912, SS. 181—193.

Подставляя это в известные формулы для моментов [см. формулу (а) § 75], получаем

$$M_1 = M_2 = \frac{\gamma h^3}{12} \frac{(1 + \sigma)(2 + \sigma)}{1 - \sigma^2} \cos \theta.$$

Напряжения от изгиба для точек наружной и внутренней поверхности оболочки по абсолютному значению будут

$$\frac{6M_1}{h^2} = \frac{\gamma h}{2} \frac{(1 + \sigma)(2 + \sigma)}{1 - \sigma^2} \cos \theta.$$

Отношение этих напряжений к напряжениям от сжимающих усилий  $T_1$  представится так:

$$\frac{h}{2a} \frac{(1 + \sigma)(2 + \sigma)}{1 - \sigma^2} \cos \theta \cdot 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

Это отношение достигает наибольшего значения в вершине оболочки, где оно равно

$$\frac{h}{a} \frac{(1 + \sigma)(2 + \sigma)}{1 - \sigma^2} \approx 3,28 \frac{h}{a}.$$

Мы видим, что при малых толщинах оболочки напряжения изгиба при действии собственного веса будут малы по сравнению с напряжениями, соответствующими усилиям  $T_1$  и  $T_2$ .

Если бы мы для рассматриваемого случая пожелали вычислить дальнейшие приближения, то, поступая, как было указано выше, мы нашли бы для усилий  $T_1$  и  $T_2$  значения, отличающиеся от первого приближения членами порядка  $h^2/a^2$ .

Следовательно, при расчете подвижно опертой сферической оболочки, находящейся под действием собственного веса, можно пренебрегать изгибом оболочки и принимать в расчет лишь усилия  $T_1$  и  $T_2$ . Этим соображением можно воспользоваться при расчете купольных сводов. При малых толщинах свода мы можем получить для точек, удаленных от опорного контура, достаточно точные выражения для напряжений, пренебрегая напряжениями изгиба. Напряжения у опорного контура могут быть получены лишь путем решения уравнений (280). К этому решению мы теперь и переходим.

### § 77. Общее решение для симметрично нагруженной сферической оболочки

В случае подвижно опертых краев мы можем, как было показано, получить достаточно точное для практических приложений решение путем последовательных приближений. Для получения решения при других способах закрепления края оболочки нужно обратиться к общим уравнениям (280). Мы можем несколько упростить эту систему, если воспользуемся интегралом первых двух ее уравнений:

$$2\pi a \sin \theta (T_1 \sin \theta + N \cos \theta) = -2\pi F(\theta), \quad (а)$$

где

$$F(\theta) = a^2 \int (P \cos \theta + Q \sin \theta) \sin \theta d\theta + C.$$

Надлежащее значение постоянной  $C$  определяется из условий статики. Легко видеть, что левая часть равенства (а) представляет собой проекцию на ось симметрии (см. рис. 141) усилий, распределенных по сечению сферической оболочки конусом с углом при вершине, равным  $2\theta$ . Следовательно,  $2\pi F(\theta)$

представляет собой проекцию на ту же ось соответствующей нагрузки сферической оболочки.

В каждом частном случае вычисление  $F(\theta)$  не представляет затруднений, и тогда мы при помощи второго уравнения (280) получаем

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} \sin^2 \theta + T_2 \sin^2 \theta + Pa \sin^2 \theta - \frac{F(\theta)}{a} = 0. \quad (b)$$

Присоединяя к (a) и (b) третье уравнение (280), получаем систему, к решению которой сводится расчет сферической симметрично нагруженной оболочки.

За основные переменные примем в дальнейшем  $U$  и  $V$ , определяемые таким образом<sup>1</sup>:

$$U = a\kappa_2 \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{a} \left( u + \frac{dw}{d\theta} \right); \quad V = aN. \quad (c)$$

В таком случае из (a) и (b) получаем

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} \theta V - \frac{1}{a} \frac{F(\theta)}{\sin^2 \theta}; \\ T_2 &= -\frac{1}{a} \frac{dV}{d\theta} - aP + \frac{F(\theta)}{a \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (288)$$

На основании принятых обозначений (c) формулы (283) и (284) переписутся так:

$$\kappa_1 = \frac{1}{a} \frac{dU}{d\theta}; \quad \kappa_2 = \frac{1}{a} U \operatorname{ctg} \theta. \quad (289)$$

Подставляя это в выражения для изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$ , представим третье уравнение (280) так:

$$\frac{d^2 U}{d\theta^2} + \frac{dU}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta - (\operatorname{ctg}^2 \theta + \sigma) U + \frac{Va}{D} = 0 \quad (d)$$

или, вводя для сокращения обозначение

$$L(\ ) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{d(\ )}{d\theta} \right] - \operatorname{ctg}^2 \theta (\ ), \quad (e)$$

получаем

$$L(U) - \sigma U = -\frac{Va}{D}. \quad (f)$$

Для получения другого уравнения, связывающего переменные  $U$  и  $V$ , воспользуемся формулами (286) и (287) предыдущего параграфа. При помощи этих формул находим

$$U = \frac{1}{a} \left( u + \frac{dw}{d\theta} \right) = -\frac{de_2}{d\theta} + \operatorname{ctg} \theta (e_1 - e_2).$$

Подставляя вместо  $e_1$  и  $e_2$  их значения

$$e_1 = \frac{1}{Eh} (T_1 - \sigma T_2); \quad e_2 = \frac{1}{Eh} (T_2 - \sigma T_1),$$

мы, на основании (288), получаем

$$EhaU = \frac{d^2 V}{d\theta^2} + \frac{dV}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta - V (\operatorname{ctg}^2 \theta - \sigma) + a^2 \frac{dP}{d\theta} - a^2 (1 + \sigma) Q, \quad (g)$$

<sup>1</sup> Такой выбор переменных позволит в дальнейшем привести наши уравнения к удобному для интегрирования виду. Впервые эти переменные введены Г. Рейсснером (см. его работу, упомянутую на стр. 491).

или в сокращенном виде

$$L(V) + \sigma V = EhaU - \Phi(\theta), \quad (g')$$

где

$$\Phi(\theta) = a^2 \frac{dP}{d\theta} - a^2(1 + \sigma)Q. \quad (h)$$

Если вместо переменной  $U$  ввести новую переменную  $U_1$ , таким образом, что при этом

$$U = U_1 \frac{i}{\lambda D}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{12(1 - \sigma^2)}}{h}; \quad i = \sqrt{-1},$$

уравнения (f) и (g') переписутся в таком виде:

$$\begin{aligned} L(U_1) - \sigma U_1 &= i\lambda aV; \\ L(V) + \sigma V &= i\lambda aU_1 - \Phi(\theta). \end{aligned} \quad (k)$$

Вопрос о расчете сферической симметрично нагруженной оболочки сводится, таким образом, к решению двух совокупных дифференциальных уравнений (k) второго порядка. В ряде случаев удается найти частное решение этих уравнений и привести, таким образом, задачу к тому случаю, когда на оболочке нет нагрузки [ $\Phi(\theta) = 0$ ] и напряжения возникают лишь благодаря действию усилий по опорному контуру оболочки. Дифференциальные уравнения (k) переписутся при этом так:

$$\begin{aligned} L(U_1) - \sigma U_1 &= i\lambda aV; \\ L(V) + \sigma V &= i\lambda aU_1. \end{aligned} \quad (k')$$

Определяя из второго уравнения  $U_1$  и подставляя его в первое уравнение, получаем для величины  $V$  такое дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$LL(V) + \mu^2 V = 0, \quad (290)$$

где

$$\mu^2 = a^2 \lambda^2 - \sigma^2. \quad (m)$$

Такому же уравнению будет удовлетворять также и величина  $U_1$ .

Уравнение четвертого порядка (290) распадается на два уравнения второго порядка такого вида:

$$\begin{aligned} L(V) + i\mu V &= 0; \\ L(V) - i\mu V &= 0. \end{aligned} \quad (n)$$

Легко видеть, что интеграл каждого из этих уравнений будет в то же время и интегралом уравнения (290). Возьмем, например, первое уравнение (n). Из него имеем

$$L(V) = -i\mu V; \quad LL(V) = -i\mu L(V) = -\mu^2 V.$$

Следовательно, решения этого уравнения будут удовлетворять уравнению (290). То же можно показать и для второго уравнения (n).

Заметим еще, что если  $m + ni$  будет решением первого уравнения (n), то  $m - ni$  будет удовлетворять второму уравнению той же системы и мы можем, следовательно, ограничиться рассмотрением лишь одного из этих уравнений.

Первое из уравнений (n) на основании обозначения (e) переписется так:

$$\frac{d^2 V}{d\theta^2} + \frac{dV}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta - V \operatorname{ctg}^2 \theta + i\mu V = 0. \quad (p)$$

Введя новые переменные <sup>1</sup>

$$S = \frac{1}{\sin \theta} V; \quad x = \sin^2 \theta, \tag{r}$$

получим для  $S$  уравнение

$$x(x-1) \frac{d^2 S}{dx^2} + \left( \frac{5}{2} x - 2 \right) \frac{dS}{dx} + S \frac{1-i\mu}{4} = 0, \tag{s}$$

которое принадлежит к уравнениям вида

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0. \tag{t}$$

Уравнения (s) и (t) можно привести к совпадению, если положить

$$\gamma = 2; \quad \alpha = \frac{3 \mp \sqrt{5+4i\mu}}{4}; \quad \beta = \frac{3 \pm \sqrt{5+4i\mu}}{4}. \tag{o}$$

Интеграл уравнения (t) будем искать в форме такого ряда:

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots \tag{u}$$

Если мы вставим этот ряд в уравнение (t) и приравняем нулю коэффициенты при каждой степени  $x$ , то получим такую зависимость между коэффициентами  $A_0, A_1, \dots$  ряда (u):

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} A_0; & A_2 &= \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(\gamma+1)} A_1; \\ &\dots & &\dots \\ A_n &= A_{n-1} \frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{n(\gamma+n-1)}; \\ &\dots & &\dots \end{aligned}$$

Интеграл уравнения (t) представится таким рядом:

$$\begin{aligned} y &= A_0 \left( 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots \right). \end{aligned}$$

Этот ряд называется *гипергеометрическим*. Он будет, безусловно, сходящимся для всех значений  $x$ , меньших единицы, и мы можем им воспользоваться для представления искомой функции  $S$ . Вводя для сокращения обозначение

$$\delta^2 = 5 + 4i\mu = 5 + 4i \sqrt{\frac{12(1-\sigma^2)a^2}{h^2} - \sigma^2}, \tag{291}$$

мы можем интеграл уравнения (s) написать так:

$$S_1 = A_0 \left( 1 + \frac{3^2 - \delta^2}{16 \cdot 1 \cdot 2} x + \frac{(3^2 - \delta^2)(7^2 - \delta^2)}{16^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} x^2 + \dots \right). \tag{292}$$

Второй интеграл того же уравнения получается несколько более сложным путем <sup>2</sup> и может быть представлен в таком виде:

$$S_2 = \lg x S_1 + \frac{1}{x} \Phi(x),$$

<sup>1</sup> Приводимое ниже решение принадлежит Е. Мейсснеру. См. Meissner E. Das Elastizitätsproblem für dünne Schalen von Ringflächen — Kugel — oder Kegelform. Physikalische Zeitschrift, 1913, Bd 14, H. 8, SS. 343—349.

<sup>2</sup> Riemann G. F. B. Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik. Nach Riemann's Vorlesungen in vierter Auflage neu bearbeitet von H. Weber. Bd 2. Braunschweig, 1901, 506 SS. См. SS. 3—29.

где  $\Phi(x)$  представляет собой степенной ряд, сходящийся при  $|x| < 1$ . При  $x = 0$  интеграл  $S_2$  обращается в бесконечность. Поэтому мы в дальнейшем при рассмотрении напряжений в сферической оболочке, не имеющей отверстия у своей вершины, можем ограничиваться решением (292).

Разделив (292) на действительную и мнимую часть, можем написать

$$V_1 = S_1 \sin \theta = J_1 + iJ_2, \quad (v)$$

где  $J_1$  и  $J_2$  — ряды, расположенные по возрастающим степеням  $x$ . Коэффициенты этих рядов найдутся из (292). К тем же рядам мы придем, как было показано, также и при решении второго уравнения системы (n). Следовательно, при рассмотрении сферической оболочки без отверстия в вершине мы можем интеграл уравнения (290) написать так:

$$V = a_1 J_1 + a_2 J_2, \quad (w)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — произвольные постоянные.

Два других решения этого уравнения четвертого порядка, обращающихся в бесконечность в вершине оболочки (при  $x = 0$ ), нужно в данном случае отбросить.

Перейдем теперь к определению функции  $U$ . Подставив значение  $V_1$  в первое уравнение системы (n), найдем

$$L(J_1) = \mu J_2; \quad L(J_2) = -\mu J_1.$$

Второе уравнение (k') дает нам

$$i\lambda a U_1 = EhaU = L(V) + \sigma V.$$

Следовательно, на основании (w)

$$EhaU = (a_1\sigma - a_2\mu)J_1 + (a_2\sigma + a_1\mu)J_2. \quad (w')$$

Имея функции  $U$  и  $V$ , мы на основании (288) и (289) для того случая, когда усилия приложены лишь по опорному контуру сферической оболочки, находим

$$T_1 = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} \theta V; \quad T_2 = -\frac{1}{a} \frac{dV}{d\theta}; \quad (293)$$

$$M_1 = -D(\kappa_1 + \sigma\kappa_2) = -\frac{D}{a} \left( \frac{dU}{d\theta} + \sigma U \operatorname{ctg} \theta \right); \quad (294)$$

$$M_2 = -D(\kappa_2 + \sigma\kappa_1) = -\frac{D}{a} \left( U \operatorname{ctg} \theta + \sigma \frac{dU}{d\theta} \right).$$

Для определения перемещений мы можем воспользоваться формулами (286) и (287) предыдущего параграфа. Таким образом, общее решение задачи о напряжениях в симметрично нагруженной сферической оболочке можно считать законченным. Заметим здесь, что таким же образом решается задача о напряжениях в симметрично нагруженной конической оболочке и в оболочке, имеющей тороидальную срединную поверхность<sup>1</sup>. В тех случаях, когда толщина оболочки весьма мала по сравнению с радиусом и центральный угол, соответствующий оболочке, не мал, выгодно вместо намеченного здесь решения воспользоваться асимптотическим интегрированием уравнения (290)<sup>2</sup>. Наконец,

<sup>1</sup> См. упомянутую в сноске на стр. 495 работу E. Meissner.

<sup>2</sup> Blumenthal O. Über asymptotische Integration von Differentialgleichungen mit Anwendung auf die Berechnung von Spannungen in Kugelschalen. Proceedings of the Fifth International congress of mathematicians (Cambridge, 22—28 August 1912), vol. 2, Communications to sections II—IV, Section III (a) (Mechanics, Physical Mathematics, Astronomy), Cambridge, University Press, 1913, pp. 319—327. См. Тимошенко С. П. К вопросу о расчете сферических оболочек. Вестник общества технологов, 1913, том 20, N 17, стр. 549—557. Отд. оттиск. С.-Петербург, 1914, 25 стр.

к решению той же задачи могут быть применены приближенные приемы интегрирования соответствующих уравнений, основанные на пользовании конечными разностями<sup>1</sup>. Эти приемы дают возможность найти приближенные значения напряжений в случае переменной оболочки.

§ 78. Практические приложения полученных результатов

Расчет сферической оболочки, находящейся под действием заданной симметрично распределенной нагрузки, приходится начинать с разыскания частного решения для уравнений (к) предыдущего параграфа. Решение это для случаев, наиболее часто встречающихся на прак-

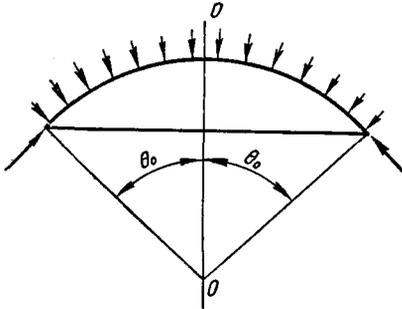


Рис. 144.

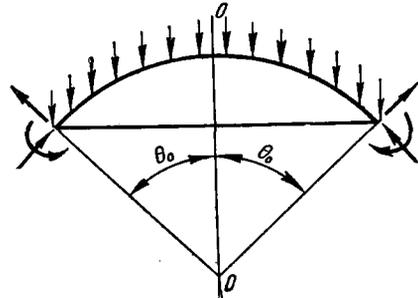


Рис. 145.

тике, например для равномерного давления, действия собственного веса или действия центробежной силы, соответствующей вращению относительно оси симметрии, находится без всяких затруднений.

Особенно простой результат получается при действии равномерного давления q (рис. 144). В этом случае сферическая оболочка получит равномерное сжатие, не сопровождающееся изгибом. Мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} Q &= 0; \quad P = q; \quad \Phi(\theta) = 0; \\ T_1 = T_2 &= -\frac{qa}{2}; \quad M_1 = M_2 = N = 0; \\ e_1 = e_2 &= -\frac{qa(1-\sigma)}{2hE}; \quad u = 0; \quad w = e_1 a. \end{aligned} \right\} \quad (295)$$

При действии собственного веса (рис. 145) нагрузка, приходящаяся на единицу поверхности, равна  $\gamma h = q_1$ , и мы будем иметь

$$Q = q_1 \sin \theta; \quad P = q_1 \cos \theta; \quad \Phi(\theta) = -a^2 q_1 (2 + \sigma) \sin \theta.$$

Если принять во внимание, что

$$L(\sin \theta) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{d(\sin \theta)}{d\theta} \right] - \text{ctg}^2 \theta \sin \theta = -\sin \theta,$$

то легко подобрать частное решение уравнений (к) в такой форме:

$$U_1 = A \sin \theta; \quad V = B \sin \theta, \quad (296)$$

где A и B — надлежащим образом выбранные постоянные коэффициенты.

<sup>1</sup> F a n k h a u s e r E. Experimentelle und theoretische Untersuchungen über die Festigkeit von Kegel — und Kugelböden. Dissertation Eidgenössische technische Hochschule, Zürich, 1913/1914. Berlin, 1913, A. W. Schade, 88 SS; K e l l e r H. Berechnung gewölbter Platten. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Berlin, 1912, H. 124, SS. 33—82.

В случае действия центробежных сил (рис. 146) горизонтальное усилие, приходящееся на единицу поверхности оболочки, будет равно

$$q_2 = \frac{\gamma h}{g} \omega^2 a \sin \theta,$$

где  $\omega$  — соответствующая угловая скорость.

В таком случае

$$\begin{aligned} Q &= q_2 \cos \theta; \quad P = -q_2 \sin \theta, \\ \Phi(\theta) &= -a^2 q_2 (3 + \sigma) \cos \theta. \end{aligned}$$

Если принять во внимание, что  $L(\sin \theta \cos \theta) = -5 \sin \theta \cdot \cos \theta$ , то можно легко подобрать частное решение уравнения (к) в такой форме:

$$U_1 = -aC_1 \sin \theta \cos \theta, \quad V = -aC_2 \sin \theta \cos \theta. \quad (297)$$

Если не удастся подобрать решение для уравнений (к), то мы можем воспользоваться приближенным решением, получаемым путем последовательных приближений (см. § 76). Во всех этих случаях найденные решения, вообще говоря, не будут удовлетворять условиям закрепления по опорному контуру и мы для получения полного решения задачи должны к найденному для заданной нагрузки частному решению уравнений (к) присоединить решение уравнений (к'). Решения эти [см. формулы (w) и (w') § 77] заключают в себе две произвольные постоянные, надлежащим выбором которых можно всегда удовлетворить условиям закрепления оболочки по опорному контуру<sup>1</sup>. Общий ход расчета поясним на численном примере<sup>2</sup>. В дальнейшем мы будем пользоваться такими обозначениями для напряжений, соответствующих усилиям  $T_1$  и  $T_2$ :

$$p_1 = \frac{T_1}{h}; \quad p_2 = \frac{T_2}{h}.$$

Кроме того, напряжения при равномерном наружном давлении интенсивности  $q$  будем обозначать через  $p$ . Следовательно,

$$p = -qa/2h.$$

Максимальные напряжения от изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$  будем обозначать так:

$$p_x = \frac{6M_1}{h^2}; \quad p_y = \frac{6M_2}{h^2}.$$

Наконец, для распора оболочки и соответствующих этому распору напряжений примем обозначения

$$H = T_1 \cos \theta - N \sin \theta; \quad p_h = \frac{H}{h}.$$

Для моментов  $M_1$ ,  $M_2$  и для усилий  $T_1$ ,  $T_2$  будем пользоваться формулами (293) и (294). Что касается перемещений, то соответствующие им формулы (286) и (287) могут быть представлены в более удобном для приложений виде.

Принимая во внимание, что

$$e_1 - e_2 = \frac{1}{Eh} (1 + \sigma) (T_1 - T_2) = \frac{1}{Eh} \frac{1 + \sigma}{a} \left( \frac{dV}{d\theta} - V \operatorname{ctg} \theta \right),$$

находим

$$\int \frac{e_1 - e_2}{\sin \theta} d\theta = \frac{1}{Eh} (1 + \sigma) \frac{V}{a \sin \theta}.$$

<sup>1</sup> Предполагаем, что оболочка без отверстия в вершине.

<sup>2</sup> Приводимые ниже числовые результаты заимствованы из весьма интересной работы Л. Болле, где имеются приложения решения Е. Мейсснера к частным случаям расчета сферических оболочек. См. Bolle L. Festkeitsberechnung von Kugelschalen. Schweizerische Bauzeitung, 1915, Bd 66, N. 9, SS. 105—108; N. 10, SS. 111—113.

В таком случае при принятых выше обозначениях для напряжений получаем формулы для перемещений в таком виде:

$$u = Ca \sin \theta - \frac{a(1 + \sigma)}{E} \operatorname{tg} \theta p_1; \tag{298}$$

$$w = Ca \cos \theta - \frac{a}{E} (p_1 + p_2).$$

Возьмем такой численный пример: чугунная сферическая оболочка, для которой  $a = 143$  см;  $h = 6$  см;  $\theta_0 = 39^\circ$ ;  $\sigma = 0,2$ . подвергается действию равномерного давления  $q = 20$  кг/см<sup>2</sup>.

Нужно найти напряжения в оболочке при различных способах закрепления по опорному контуру. В качестве первого способа закрепления рассмотрим случай (I) подвижно опертых краев. Тогда будем иметь равномерное сжатие

$$p = -\frac{qa}{2h} = -238 \text{ кг/см}^2.$$

Для выяснения влияния различных способов закрепления по контуру на распределение напряжений производим предварительно расчеты для двух частных случаев (II) и (III),

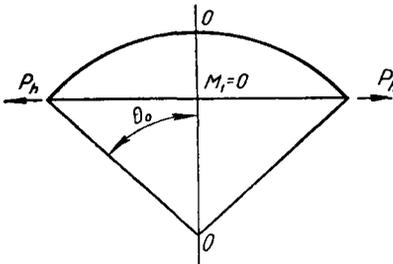


Рис. 147.

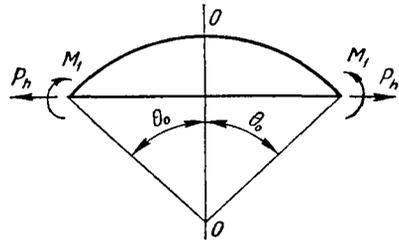


Рис. 148.

представленных на рис. 147 и 148. Рис. 147 соответствует случаю (II), когда напряжения в оболочке вызываются равномерно распределенными по контуру горизонтальными усилиями  $H$  и изгибающие моменты  $M_1$  равны нулю. Рис. 148 представляет случай (III), когда по контуру действуют усилия  $H$  и моменты  $M_1$ , подобранные так, что края оболочки при деформации не поворачиваются, т. е.

$$\varphi_{\theta=\theta_0} = \left( \frac{u}{a} + \frac{dw}{ad\theta} \right)_{\theta=\theta_0} = U_{\theta=\theta_0} = 0.$$

Произвольные постоянные в решениях ( $w$ ) и ( $w'$ ) предыдущего параграфа подберем так, чтобы для случая (II) были выполнены на контуре условия

$$p_h = \frac{H}{h} = -p = +238 \text{ кг/см}^2; \quad M_1 = 0 \tag{b}$$

и для случая (III) условия

$$p_h = +238 \text{ кг/см}^2; \quad (\varphi)_{\theta=\theta_0} = 0. \tag{c}$$

Тогда напряжения  $p_1$  и  $p_2$ , соответствующие срединной поверхности, найдутся при помощи формул (293). Их изменение в зависимости от  $\theta$  представлено на рис. 149 и 150 пунктирными линиями. Напряжения изгиба  $p_x$  и  $p_y$  могут быть найдены при помощи формул (294). Суммарные напряжения от изгиба и растяжения представлены на рисунках сплошными линиями.

Комбинируя случаи (II) и (III) со случаем равномерного сжатия (I), получаем решения (II') и (III'), для которых на опорном контуре имеют место такие условия:

$$p_h = 0, \quad M_1 = 0; \tag{II'}$$

$$p_h = 0, \quad (\varphi)_{\theta=\theta_0} = 0. \tag{III'}$$

В случае (II') сферическая оболочка, испытывающая равномерное давление, опирается на идеально гладкую плоскость. В случае (III') по контуру приложены моменты, которые

препятствуют поворачиванию опертого края оболочки. Напряжения для случаев (II') и (III') получатся из предыдущих решений при помощи таких схем:

$$(I) + (II) \cos \theta_0 = (II'); \quad (I) + (III) \cos \theta_0 = (III').$$

Следовательно, все напряжения могут быть получены из тех же рис. 149 и 150, если в них ось  $OO$  заменить новой осью  $O'O'$  и изменить масштаб ординат в отношении  $\cos \theta_0$ .

[Для случаев (II) и (III) напряжения отложены по ординатам в масштабе  $2 \text{ см} = 800 \text{ кг/см}^2$ . Для (II') и (III') масштаб  $2 \text{ см} = 800 \cos 39^\circ = 622 \text{ кг/см}^2$ . Перемещение оси  $O'O'$  относительно  $OO$  равно  $238 \text{ кг/см}^2$ , отложенным в новом масштабе].

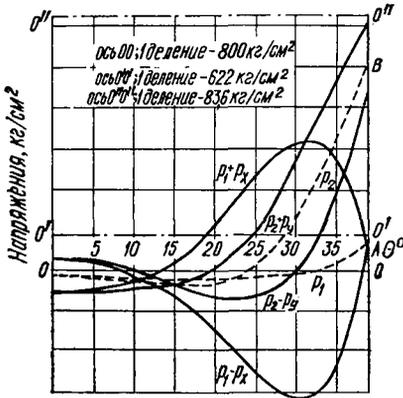


Рис. 149.

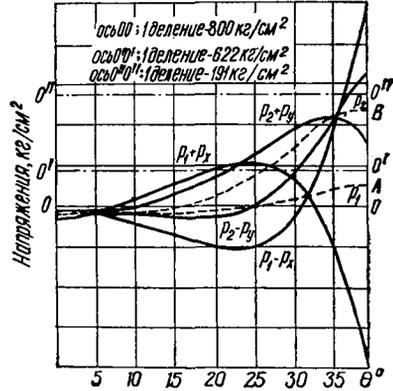


Рис. 150.

Подобным же образом могут быть получены случаи (II'') и (III''), для которых по контуру имеются такие условия:

$$e_2 = 0, \quad M_1 = 0; \quad (II'')$$

$$e_2 = 0, \quad \varphi_{\theta=\theta_0} = 0. \quad (III'')$$

Случай (II'') представляет собой сферическую оболочку с неподвижно опертым краем. Случай (III'') соответствует неподвижно заделанному краю. Можно показать, что и в этих случаях напряжения получаются из рис. 149 и 150, нужно только отсчет вести от осей  $O''O''$  и взять для напряжений новый масштаб  $2 \text{ см} = 83,6 \text{ кг/см}^2$ .

Особый практический интерес представляют случаи (II') и (III'), т. е. случаи оболочки, свободно опертой на гладкую плоскость или абсолютно заделанной по контуру. Подробные вычисления для этих случаев, произведенные при условии различных размеров оболочек и при различных углах  $\theta_0$ , показали, что в весьма широких пределах величина расчетных напряжений зависит почти исключительно от значения произведения  $\mu \sin^2 \theta_0$ , где

$$\mu = \sqrt{12(1 - \sigma^2) \frac{a^2}{h^2} - \sigma^2}.$$

Это обстоятельство дает возможность представить значения максимальных напряжений  $P_{\text{max}}$  для случаев (II') и (III') при помощи простых приближенных формул, полученных на основании многочисленных расчетов<sup>1</sup>. Для каждого из этих случаев приводим по две формулы, одна из них относится к случаю малых значений величины  $\mu \sin^2 \theta_0$ , другая применима при больших  $\mu \sin^2 \theta_0$ .

Случай (II'):

$$\frac{a}{h} \sin^2 \theta_0 < 1,2; \quad P_{\text{max}} = -1,24 \left( \frac{r}{h} \right)^2 q \cos \theta_0; \quad r = a \sin \theta_0;$$

$$1,2 < \frac{a}{h} \sin^2 \theta_0 < 12; \quad P_{\text{max}} = q \frac{a}{2h} \left[ -1 + \cos \theta_0 \left( 1,6 + 2,44 \sin \theta_0 \sqrt{\frac{a}{h}} \right) \right].$$

<sup>1</sup> См. упомянутую на стр. 498 работу L. Bolle.

Случай (III<sup>a</sup>) (оболочка с абсолютно заделанным краем):

$$\frac{a}{h} \sin^2 \theta_0 < 3; \quad p_{\max} = -q \left( \frac{r}{h} \right)^2 \left[ 0,75 - 0,038 \left( \frac{r}{h} \right)^2 \sin^2 \theta_0 \right];$$

$$r = a \sin \theta_0; \quad 3 < \frac{a}{h} \sin^2 \theta_0 < 12; \quad p_{\max} = -1,20 \frac{a}{h} q.$$

Формулы эти составлены в предположении, что оболочки изготовлены из литой стали, для которой  $\sigma = 0,3$ . При помощи этих формул легко решается вопрос о прочности сферических оболочек, подвергающихся действию равномерного наружного давления и закрепленных по контуру соответственно случаям (II') и (III'').

Мы здесь ограничились рассмотрением оболочек, не имеющих отверстия в вершине. При наличии отверстия необходимо обратиться к полному интегралу дифференциального уравнения (290). Распоряжаясь четырьмя произвольными постоянными, можно удовлетворить условиям не только по опорному контуру оболочки, но и условиям по краю отверстия. Произведенные для этих случаев вычисления показывают, что усилия, распределенные по краю отверстия, мало влияют на напряжения у опорного контура, а так как эти последние обычно являются максимальными, то, следовательно, при проверке на прочность сферической оболочки с отверстием в вершине обычно можно не считаться с перераспределением напряжений, вызываемым наличием отверстия, и пользоваться результатами, полученными для оболочек без отверстия.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора . . . . .	5
Предисловие автора ко второму изданию . . . . .	8
Предисловие автора к первому изданию . . . . .	9
Введение . . . . .	13

### ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

#### ОБЩАЯ ТЕОРИЯ. ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

##### ГЛАВА I НАПРЯЖЕНИЯ

§ 1. Внешние силы . . . . .	19
§ 2. Компоненты напряжения . . . . .	19
§ 3. Уравнения равновесия . . . . .	21
§ 4. Исследование напряженного состояния в какой-либо точке тела . . . . .	22
§ 5. Преобразование составляющих напряжения к новым осям . . . . .	24
§ 6. Поверхность напряжения . . . . .	25
§ 7. Эллипсоид напряжений . . . . .	26
§ 8. Вычисление главных напряжений и наибольших касательных напряжений . . . . .	27
§ 9. Дифференциальные уравнения равновесия . . . . .	29

##### ГЛАВА II ДЕФОРМАЦИИ

§ 10. Перемещения . . . . .	32
§ 11. Исследование деформации в какой-либо точке тела . . . . .	33
§ 12. Поверхность деформации . . . . .	36
§ 13. Дифференциальные зависимости между составляющими деформации . . . . .	37

##### ГЛАВА III ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И НАПРЯЖЕНИЯМИ

§ 14. Обобщенный закон Гука . . . . .	39
§ 15. Общее выражение для энергии деформации . . . . .	41
§ 16. Дальнейшее сокращение числа упругих постоянных . . . . .	43
§ 17. Изотропное тело . . . . .	45
§ 18. Модули упругости . . . . .	46

Г Л А В А IV  
ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

§ 19.	Определение напряжений . . . . .	49
§ 20.	Определение перемещений . . . . .	51
§ 21.	Непосредственное определение перемещений . . . . .	52
§ 22.	Однозначность решения . . . . .	54
§ 23.	Применение начала возможных перемещений к упругим телам . . . . .	55

Г Л А В А V  
ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 24.	Постановка задачи . . . . .	62
§ 25.	Напряжения постоянны по объему тела . . . . .	62
§ 26.	Напряжения линейно зависят от координат . . . . .	63
§ 27.	Кручение призматических стержней кругового поперечного сечения . . . . .	66
§ 28.	Чистый изгиб призматических стержней . . . . .	67

Г Л А В А VI  
ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 29.	Плоская деформация . . . . .	70
§ 30.	Обобщенное плоское напряженное состояние . . . . .	73
§ 31.	Решение плоской задачи при помощи целых полиномов . . . . .	77
§ 32.	Изгиб балки с заделанным концом силой, приложенной к свободному концу . . . . .	79
§ 33.	Принцип Сен-Венана . . . . .	83
§ 34.	Изгиб балки с опертыми концами под действием равномерно распределенной нагрузки . . . . .	84
§ 35.	Общее решение плоской задачи для полосы, любым образом нагруженной по продольным сторонам . . . . .	86
§ 36.	Решение плоской задачи для случая клина . . . . .	89
§ 37.	Плоская задача в полярных координатах . . . . .	91
§ 38.	Чистый изгиб части кругового кольца . . . . .	93
§ 39.	Изгиб кривого бруса силой, приложенной на конце . . . . .	97
§ 40.	Общий случай изгиба кривого бруса . . . . .	99
§ 41.	Влияние круглых отверстий на распределение напряжений в пластинках . . . . .	101
§ 42.	Распределение напряжений при действии на пластинку сосредоточенной силы . . . . .	105
§ 43.	Сжатие кругового диска и кругового кольца двумя взаимно противоположными силами . . . . .	113
§ 44.	Приближенные способы решения плоской задачи . . . . .	117
§ 45.	Экспериментальная проверка распределения напряжений в случае плоской задачи . . . . .	119

Г Л А В А VII  
КРУЧЕНИЕ

§ 46.	Кручение призматических стержней . . . . .	121
§ 47.	Эллиптическое поперечное сечение . . . . .	124
§ 48.	Другие формы поперечных сечений . . . . .	126
§ 49.	Аналогия Прандтля . . . . .	128
§ 50.	Применение метода Ритца к определению напряжений при кручении . . . . .	133
§ 51.	Случай прямоугольного поперечного сечения . . . . .	135

Г Л А В А VIII  
ИЗГИБ

§ 52.	Постановка задачи . . . . .	139
§ 53.	Круговое и эллиптическое поперечные сечения . . . . .	142
§ 54.	Прямоугольное поперечное сечение . . . . .	144

§ 55. Другие формы поперечных сечений . . . . .	147
§ 56. Перемещения при изгибе . . . . .	148

**Г Л А В А IX**  
**ДЕФОРМАЦИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ**

§ 57. Уравнения теории упругости в цилиндрических координатах . . . . .	149
§ 58. Деформация кругового цилиндра . . . . .	153
§ 59. Решение задачи при помощи целых полиномов . . . . .	156
§ 60. Изгиб круглой пластинки . . . . .	158
§ 61. О напряжениях в быстро вращающихся дисках . . . . .	161
§ 62. О напряжениях, вызываемых в упругой среде сосредоточенной силой . . . . .	163
§ 63. О напряжениях в стенках сферического сосуда при равномерном наружном и внутреннем давлениях . . . . .	165
§ 64. Задача Буссинэ . . . . .	167
§ 65. Сжатие упругих тел . . . . .	171
§ 66. Тепловые напряжения . . . . .	177
§ 67. Скручивание стержней переменного сечения . . . . .	181

**ЧАСТЬ ВТОРАЯ**  
**СТЕРЖНИ И ПЛАСТИНКИ**

Предисловие . . . . .	187
-----------------------	-----

**Г Л А В А I**  
**МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЕЙ**  
**С ПРЯМОЙ ОСЬЮ**

§ 1. Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня . . . . .	189
§ 2. Изгиб балки, лежащей на сплошном упругом основании . . . . .	191
§ 3. Случай бесконечно длинной балки . . . . .	192
§ 4. Изгиб балки с опертыми концами, лежащей на сплошном упругом основании . . . . .	195
§ 5. Изгиб балок с заделанными концами и неразрезных балок, лежащих на сплошном упругом основании . . . . .	198
§ 6. Расчет перекрестных балок . . . . .	199
§ 7. Балка переменного сечения, лежащая на сплошном упругом основании . . . . .	202
§ 8. Балки, подвергающиеся одновременному действию изгиба и сжатия . . . . .	207
§ 9. Статически неопределимые случаи изгиба сжатых балок . . . . .	212
§ 10. Балки, подвергающиеся одновременному действию изгиба и растяжения . . . . .	215
§ 11. Случай, когда продольные силы неизвестны . . . . .	218
§ 12. Применение тригонометрических рядов к исследованию изгиба балок . . . . .	222
§ 13. Приближенный способ определения продольной силы . . . . .	227
§ 14. Об изгибе слегка искривленных стержней . . . . .	230
§ 15. Применение тригонометрических рядов к исследованию изгиба стержней, лежащих на сплошном упругом основании . . . . .	235
§ 16. Случай нескольких перекрестных балок . . . . .	237

**Г Л А В А II**  
**МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЕЙ С КРИВОЙ ОСЬЮ**

§ 17. Малые деформации стержня с круговой осью в плоскости кривизны . . . . .	242
§ 18. Применение тригонометрических рядов к исследованию изгиба кругового кольца . . . . .	245
§ 19. Изгиб кольца силами, не лежащими в плоскости кривизны . . . . .	249

**Г Л А В А III**  
**ОБ УСТОЙЧИВЫХ**  
**И НЕУСТОЙЧИВЫХ ФОРМАХ**  
**РАВНОВЕСИЯ СТЕРЖНЕЙ**

§ 20.	Методы решения вопросов устойчивости . . . . .	257
§ 21.	Задача Эйлера . . . . .	262
§ 22.	Устойчивость призматического стержня при различных способах закрепления концов . . . . .	267
§ 23.	Устойчивость многопролетных стержней . . . . .	269
§ 24.	Продольный изгиб стержней переменного сечения . . . . .	274
§ 25.	Продольный изгиб стержней под действием сил, распределенных по длине . . . . .	277
§ 26.	Устойчивость равномерно сжатого стержня в упругой среде . . . . .	281
§ 27.	Задача Ф. С. Ясинского . . . . .	285
§ 28.	Об устойчивости плоской формы изгиба полосы . . . . .	289
§ 29.	Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки . . . . .	297
§ 30.	Об устойчивости равномерно сжатого стержня кругового кольца или его части . . . . .	305
§ 31.	Об устойчивости плоской формы изгиба полосы с круговой осью . . . . .	307
§ 32.	Об устойчивости длинного круглого вала при кручении . . . . .	310

**Г Л А В А IV**  
**О КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЕЙ**

§ 33.	Колебание системы с одной степенью свободы . . . . .	311
§ 34.	О колебаниях упругих систем . . . . .	316
§ 35.	Продольные колебания призматических стержней . . . . .	320
§ 36.	Колебания груза, подвешенного на упругом стержне . . . . .	325
§ 37.	Колебания кручения круглых валов . . . . .	330
§ 38.	Поперечные колебания стержней . . . . .	333
§ 39.	Свободные поперечные колебания стержня при различных способах закрепления концов . . . . .	339
§ 40.	Вынужденные поперечные колебания стержней . . . . .	343
§ 41.	Колебания стержней в упругой среде . . . . .	347
§ 42.	Колебания стержней переменного сечения . . . . .	349
§ 43.	Колебания балки под действием подвижного груза . . . . .	356
§ 44.	О действии удара на балку . . . . .	359
§ 45.	Продольный удар стержней . . . . .	361

**Г Л А В А V**  
**ИЗГИБ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК**

§ 46.	Изгиб пластинок по цилиндрической поверхности . . . . .	365
§ 47.	Влияние начальной кривизны на изгиб пластинок по цилиндрической поверхности . . . . .	371
§ 48.	Чистый изгиб пластинок . . . . .	376
§ 49.	Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности пластинки . . . . .	378
§ 50.	Пределы применимости полученного уравнения . . . . .	382
§ 51.	Условия на контуре пластинки . . . . .	385
§ 52.	Изгиб эллиптической пластинки с заделанными краями . . . . .	390
§ 53.	Изгиб круглой пластинки . . . . .	393
§ 54.	Изгиб прямоугольной пластинки с опертыми краями . . . . .	396
§ 55.	Изгиб прямоугольной пластинки, у которой две прямо противоположные стороны оперты, а две другие закреплены любым способом . . . . .	402
§ 56.	Изгиб пластинки с заделанными краями . . . . .	408
§ 57.	Изгиб пластинки при одновременном действии нормальной нагрузки и усилий в срединной плоскости . . . . .	414
§ 58.	Влияние начальных искривлений на изгиб пластинок . . . . .	419

**Г Л А В А VI**  
**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНОК**

§ 59. Об устойчивости сжатой прямоугольной пластинки с опертыми краями . . . . .	423
§ 60. Об устойчивости прямоугольной пластинки, сжатой вдоль одной из сторон . . . . .	425
§ 61. Об устойчивости прямоугольной пластинки, растягиваемой или сжимаемой вдоль обеих сторон . . . . .	430
§ 62. Об устойчивости прямоугольной пластинки с опертыми краями, изгибаемой и сжимаемой в срединной плоскости . . . . .	434
§ 63. Об устойчивости прямоугольной пластинки с опертыми краями при действии касательных напряжений . . . . .	438
§ 64. Об устойчивости прямоугольной пластинки с опертыми краями, сжатой двумя взаимно противоположными сосредоточенными силами . . . . .	442
§ 65. Об устойчивости сжатой прямоугольной пластинки с двумя опертыми краями и двумя другими, закрепленными любым способом . . . . .	443
§ 66. Об устойчивости пластинок, подкрепленных жесткими ребрами . . . . .	450

**Г Л А В А VII**  
**МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ И УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКИХ**  
**ОБОЛОЧЕК**

§ 67. Основные допущения . . . . .	459
§ 68. Плоская деформация трубок постоянного поперечного сечения . . . . .	468
§ 69. Деформации круглой цилиндрической трубки, симметричные относительно оси . . . . .	465
§ 70. Деформации цилиндрической оболочки, не сопровождающиеся растяжениями срединной поверхности . . . . .	469
§ 71. Дифференциальные уравнения равновесия для общего случая деформации цилиндрической оболочки . . . . .	472
§ 72. О деформациях цилиндрической трубки с опертыми краями . . . . .	477
§ 73. Об устойчивости цилиндрической трубки, подвергающейся действию равномерного наружного давления . . . . .	478
§ 74. Об устойчивости цилиндрической трубки, подвергающейся действию продольного сжатия . . . . .	482
§ 75. О деформациях симметрично нагруженной сферической оболочки . . . . .	486
§ 76. Расчет сферической оболочки с подвижно опертыми краями . . . . .	489
§ 77. Общее решение для симметрично загруженной сферической оболочки . . . . .	492
§ 78. Практические приложения полученных результатов . . . . .	497

**СТЕПАН ПРОКОФЬЕВИЧ ТИМОШЕНКО**  
**КУРС ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Редакторы Л. Е. Зборовская,  
Н. З. Лаптева  
Художественный редактор И. В. Козий  
Оформление художника В. М. Флакса  
Технические редакторы М. А. Притыкина,  
Б. М. Кричевская  
Корректор Л. М. Тищенко

Сдано в набор 16/VIII—1971 г. Подписано к печати  
13/IV—1972 г. БФ 01327. Зак. № 640 Изд. 285. Тираж  
10 000. Бумага № 1, 70×100<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Условно-печ. листов.  
41,28. Учетно-изд. листов 41. Цена 2 руб. 52 коп.

Издательство «Наукова думка», Киев, Репина, 3.

Отпечатано с матриц Киевского полиграфического  
комбината, ул. Довженко, 3, на Киевской книжной  
типографии № 5 Государственного комитета Совета  
Министров УССР по делам издательства, полиграфии  
и книжной торговли. Киев, Репина, 4.