В. С. ВЛАДИМИРОВ
И. И. МАРКУШ

ВЛАДИМИР АНДРЕЕВИЧ СТЕКЛОВ — УЧЕНЫЙ И ОРГАНИЗАТОР НАУКИ

В. С. ВЛАДИМИРОВ
И. И. МАРКУШ

ВЛАДИМИР АНДРЕЕВИЧ СТЕКЛОВ — УЧЕНЫЙ И ОРГАНИЗАТОР НАУКИ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1981

22.1Г
В 57
УДК 51(091)

Владимиров В. С., Маркуш И. И.

В 57 Владимир Андреевич Стеклов — ученый и организатор науки. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981, 96 с.

Книга содержит биографию и описание научно-педагогической и общественной деятельности замечательного русского математика и механика, создателя Петербургской школы математической физики, академика В. А. Стеклова (1864—1926). Книга написана на основе архивных материалов, анализа трудов В. А. Стеклова, переписки, воспоминаний современников, трудов о В. А. Стеклове. В ней прослеживается влияние основных трудов В. А. Стеклова на последующее развитие математики и приводится наиболее полный список его трудов.

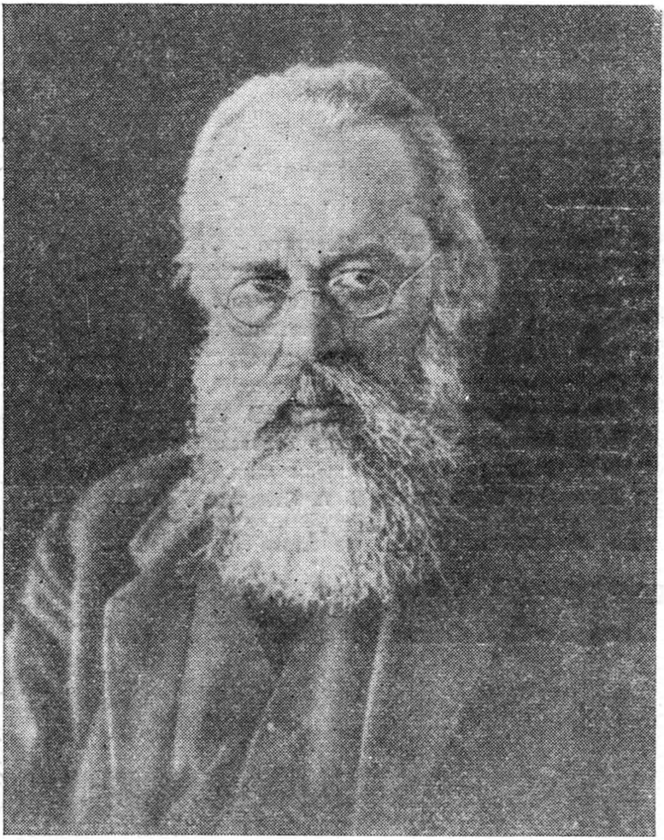
Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся историей русской науки, историей формирования фундаментальных математических понятий.

В $\dfrac{20201 - 131}{053\,(02)\text{-}81}$ 75-81. 1702010000

**ББК 22.1Г
51 (09)**

В $\dfrac{20201 - 131}{053\,(02)\text{-}81}$ 75-81. 1702010000

СОДЕРЖАНИЕ



Владимир Андреевич Стеклов
(1864—1926)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий очерк посвящается 50-летию со дня основания Математического института им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР. Он представляет собой биографию и описание научно-педагогической и общественной деятельности замечательного русского математика и механика, создателя Петербургской школы математической физики, организатора Физико-математического института Российской Академии Наук академика В. А. Стеклова (1864—1926). Он написан на основе архивных материалов, анализа его трудов, неопубликованной переписки, переписки с русскими и иностранными учеными, воспоминаний современников, трудов о В. А. Стеклове и других данных. В очерке дается анализ основных трудов В. А. Стеклова и прослеживается их влияние на последующее развитие математики. Приведен наиболее полный список трудов В. А. Стеклова.

Этот очерк представляет собой расширенное и переработанное изложение материала, содержащегося в нашей брошюре «Академик В. А. Стеклов», М., «Знание», 1973, 64 с. (серия «Математика, кибернетика», 5).

При подготовке материала большую помощь авторам оказали беседы с акад. И. М. Виноградовым и акад. В. И. Смирновым. Некоторые параграфы рукописи прочитали акад. С. М. Никольский, проф. В. П. Михайлов и проф. В. П. Коробейников и сделали ряд ценных замечаний. Всем этим лицам авторы выражают искреннюю благодарность.

Авторы

Репродукция с картины В. А. Серова. Слева направо: вице-президент Академии наук академик В. А. Стеклов, начальник Военно-медицинской академии профессор В. Н. Тонков, непременный секретарь Академии наук академик С. Ф. Ольденбург и писатель А. М. Горький на приеме у В. И. Ленина 27 января 1921 года.

§ 1. ЖИЗНЕННЫЙ ПУТЬ В. А. СТЕКЛОВА

Владимир Андреевич Стеклов родился 9 января 1864 г. (28 декабря 1863 г. ст. ст.) в Нижнем Новгороде (ныне Горький). Его отец Андрей Иванович, происходивший из среды сельского духовенства, был преподавателем и ректором Нижегородской, а последние два года жизни — Таврическо-Симферопольской духовной семинарии. Мать В. А. Стеклова, Екатерина Александровна, — сестра выдающегося русского критика и публициста, революционера-демократа Н. А. Добролюбова.

В 1874 г. В. А. Стеклов после достаточной домашней подготовки поступил в первый класс Нижегородского Александровского института, обучение в котором проводилось по программе гимназий. В течение первых пяти лет пребывания в институте В. А. Стеклов не проявлял особого интереса к учебе. Живой, предприимчивый, смелый, он во главе ватаги сверстников — непременный участник мальчишеских развлечений и проказ.

Все это, как впоследствии вспоминал сам Владимир Андреевич, «способствовало укреплению здоровья и нервной системы, но отнюдь не успешному прохождению курсов» [XXXII, оп. 3, № 195]. Однако после окончания пятого класса он основательно повторил в течение каникул все гимназические предметы за пятый класс и уже к концу первой четверти шестого класса был в числе лучших учеников. С этого времени В. А. Стеклов не только с интересом изучал обязательные предметы, но и всесторонне расширял свои знания: он интересуется физикой, химией, математикой. В 1882 г. он окончил институт с серебряной медалью, хотя в его аттестате все оценки были отличные. Золотой медалью не наградили его только потому, что, по мнению педсовета, он начал проявлять «неустойчивость во взглядах и признаки вредного направления», что особенно сказалось в поданном им сочинении на тему «Прекрасный век был век Екатерины».

В том же году В. А. Стеклов поступил на первый курс физико-математического факультета Московского университета. Первый год прошел для него неудачно. Сдав все основные экзамены на «хорошо» и «отлично», он получил неудовлетворительную оценку по физической географии у проф. А. Г. Столетова. Эта неудача была сильным ударом для самолюбивого характера В. А. Стеклова. Он привык быть первым среди своих сверстников, справедливо, хотя, быть может, еще смутно, сознавая свои большие способности и редкую силу натуры. После этой неудачи В. А. Стеклов предполагал перевестись на медицинский факультет, но мест не оказалось, и тогда он поступает на первый курс математического факультета Харьковского университета. Здесь В. А. Стеклов, как отмечает его товарищ по учебе Н. В. Раевский, был центром кружка студентов, преданных интересам науки. Занятиями В. А. Стеклова по математике на первых двух курсах руководил проф. М. Ф. Ковальский, умевший внушить студентам любовь и уважение к науке.

В 1885 г. в Харьковский университет переехал из Петербурга молодой приват-доцент, талантливый математик и механик А. М. Ляпунов (1857—1918), ученик П. Л. Чебышева, незадолго перед этим защитивший в Петербургском университете магистерскую диссертацию «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости» (впоследствии он стал действительным членом Академии наук). Вскоре В. А. Стеклов стал ближайшим учеником А. М. Ляпунова, и это определило, по существу, всю его дальнейшую научную работу. Между учителем и учеником установились тесные контакты, тем более что по возрасту разница между ними была лишь неполных семь лет. До конца дней своих В. А. Стеклов сохранил чувство исключительного уважения к своему учителю.

В 1887 г. В. А. Стеклов окончил Харьковский университет со степенью кандидата и был оставлен при нем для подготовки к профессорскому званию. Лето 1888 г. В. А. Стеклов провел в имении своего знакомого А. С. Постникова, бывшего профессора Одесского университета. Здесь В. А. Стеклов самостоятельно выполнил интересную работу о движении твердого тела в жидкости. В разговоре со своим учителем А. М. Ляпуновым В. А. Стеклов выяснил, что найденный им случай интегрирования дифференциальных уравнений движения ранее уже был открыт А. Клебшем. Однако В. А. Стеклов, продолжая исследования, вскоре действительно сделал важное открытие, которое А. М. Ляпунов сравнил с открытием нового случая интегрирования уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки, сделанным С. В. Ковалевской.

В это же время В. А. Стеклов занимался и другими самостоятельными исследованиями. В результате в 1889 г. появилась его первая печатная работа [1]. С этого времени научное творчество стало неизменной и привычной частью его жизни.

Одновременно с научными занятиями В. А. Стеклов продолжал подготовку к магистерскому экзамену, который успешно сдал осенью 1890 г. В том же году он женился на Ольге Николаевне Дракиной.

С 1891 г. В. А. Стеклов был допущен к чтению лекций в качестве приват-доцента в Харьковском университете: начал читать курс теории упругости — именно этим предметом он больше всего занимался в то время. Нужно отметить, что интересы В. А. Стеклова с самого начала его научной деятельности были очень разнообразными. Наряду с исследованиями по теории упругости [4, 5, 7, 28] он уже тогда, в харьковский период своей научной деятельности, выполнил несколько работ по гидродинамике [2, 3, 8—12, 15, 17, 52] и высшей алгебре [1, 6]. По результатам некоторых из этих исследований он в 1893 г. успешно защитил свою диссертацию «О движении твердого тела в жидкости» [9] и в 1894 г. получил степень магистра прикладной математики.

Осенью 1893 г. В. А. Стеклов получил приглашение занять должность преподавателя теоретической механики в Харьковском технологическом институте. В 1896 г. В. А. Стеклов назначается исполняющим должность экстраординарного профессора по кафедре механики Харьковского университета. Здесь он читает курсы по теории упругости [XXXII, оп. 1, № 103,

№ 104], теоретической механике [130], по линейным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами [XXXII, оп. I, № 114] и др. К этому времени он уже стал известен как математик и механик.

Примерно с 1895 г. В. А. Стеклов обращается преимущественно к исследованию вопросов математической физики [14, 16, 18, 20—27, 30—46 и т. д.], и до конца своей жизни наибольшее внимание он уделяет именно этой области математики — к ней относятся наиболее важные его исследования. Однако позже он неоднократно возвращается к вопросам механики [47, 52, 64—66, 70, 71, 77], а также значительно расширяет тематику своих прежних научных исследований.

Еще в Харьковский период деятельности В. А. Стеклов установил переписку со многими зарубежными учеными, в том числе с такими выдающимися математиками, как А. Пуанкаре, К. Жордан, Д. Гильберт, Ж. Адамар, Т. Леви-Чивита, Э. Пикар, А. Хаар, Э. Ландау, В. Вольтерра, С. Заремба, А. Корн, А. Кнезер [XXXVII] и др. В Ленинградском отделении Архива АН СССР (ЛОААН) сохранилось большое количество писем отечественных и зарубежных ученых к В. А. Стеклову и часть его собственных писем-черновиков. В них содержится обширный материал, относящийся ко многим разделам математики и механики. В различных архивах и у частных лиц (у сына А. Кнезера, например, и у одного из авторов настоящего очерка) сохранились также оригиналы большого числа писем В. А. Стеклова ко многих отечественным и зарубежным ученым. Все эти письма интересны как своим научным содержанием, так и имеющимся к них историческим материалом.

Переписка В. А. Стеклова с иностранными учеными способствовала созданию, сравнению и корректированию различных методов решения одинаковых или же подобных задач, приводила к постановке и решению новых задач. В переписке возникали дискуссии, объективно оценивался вклад в науку того или иного ученого. Наконец, научные связи позволяли постоянно быть в курсе последних достижений мировой науки.

В своем ответе на письмо профессора Парижского университета Л. Раффи, издавшего посмертно труды Г. Робена, В. А. Стеклов писал: «Возможное обобщение остроумных методов Вашего знаменитого друга г. Г. Робена — главная цель моих исследований. Все классические, позволю себе сказать, исследования г. Г. Робена интересуют меня, без сомнения, в самой высокой степени» [XXXII, оп. 2, № 375, л. 7].

В 1901 г. В. А. Стеклов писал А. Корну, что в одной из его работ он увидел почти те же результаты, что и в своей, посланной Э. Пикару для его журнала. Он писал: «Ни я, ни Вы, мы не могли, конечно, знать мыслей друг друга, но несмотря на все, они совпадают, и это, как Вы хорошо знаете, уже не в первый раз. Я могу только приветствовать наше научное единодушие и успехи, которые мы сделали в решении задач математической физики, опираясь на последние исследования нашего дорогого коллеги г. С. Зарембы, заслуги которого являются особенно важными» [XXXII, оп. 2, № 189, лл. 35—36].

Выдающийся польский математик С. Заремба, работы которого были тесно связаны с исследованиями В. А. Стеклова, писал последнему: «Я не менее, чем Вы сами, испытываю удовольствие, видя, как наши работы взаимно дополняют друг друга на пути столь захватывающих проблем, которые ставит физика» [XXXII, оп. 2, № 152, лл. 16—19].

Письма *) Н. Н. Салтыкова к В. А. Стеклову и А. М. Ляпунову содержат некоторые сведения о постановке преподавания математики и механики в университетах Парижа, Берлина, Геттингена и других европейских городов, об отношении иностранных ученых к русским математикам и математическим обществам.

В одном из своих писем к В. А. Стеклову от 6 декабря 1900 г. С. Заремба писал: «Чтение интересных заметок относительно уравнения Лапласа, опубликованных Вами в C. R., внушило мне сильнейшее желание познакомиться с работами, которые Вы написали по тем же самым вопросам. Это важно для меня особенно потому, что я читаю в этом году курс о задаче Дирихле и о задачах, связанных с нею...» [XXXII, оп. 2, № 152, л. 1]. В другом письме от 10 октября 1901 г. он писал: «Очень благодарен Вам за интересное сообщение, которое Вы изволили сделать в Ва-

*) ЛОААН, ф. 162, оп. 2, № 413; ф. 257, оп. 1, № 53.

шем последнем письме, и сердечно поздравляю Вас с тем, что Вам удалось дать широкое распространение теории фундаментальных функций...» [XXXII, оп. 2, № 152, л. 22].

Позже во время заграничных командировок и на математических конференциях и съездах, состоявшихся в России и за рубежом, В. А. Стеклов лично познакомился со многими из этих математиков.

Будучи за границей, В. А. Стеклов посещал музеи, библиотеки, места исторических событий. Большой знаток и любитель музыки и пения, он при всякой возможности бывал в театрах и на концертах. Он сам любил петь, у него был великолепный бас.

В 1901 г. Владимир Андреевич и Ольга Николаевна Стекловы понесли тяжелую утрату. Умерла их единственная дочь, десятилетняя Оля. Ее смерть сильно потрясла Владимира Андреевича, и он почти полгода не мог приняться за научные исследования.

В 1902 г. В. А. Стеклов получил степень доктора прикладной математики после защиты диссертации «Общие методы решения основных задач математической физики» [44]. Вскоре после этого ему было присвоено звание ординарного профессора Харьковского университета. К этому времени он имел уже около 45 печатных работ. С 1902 по 1906 г. В. А. Стеклов был председателем Харьковского математического общества. До В. А. Стеклова председателем общества был А. М. Ляпунов, после избрания академиком в 1902 г. переехавший из Харькова в Петербург.

В 1902 г. Петербургская Академия наук избрала В. А. Стеклова своим членом-корреспондентом.

Еще в Харьковский период проявилось исключительное мастерство В. А. Стеклова как педагога и организатора учебных занятий [XVII]. О высоком качестве его лекций в Харьковском технологическом институте можно судить по сохранившемуся литографированному курсу лекций «Теоретическая механика» *) [130]. Курс лекций содержит прекрасное изложение сведений по механике, необходимых будущему ученому и инженеру. В нем излагались некото-

*) Лекции имеются в библиотеке Харьковского политехнического института им. В. И. Ленина и в Государственной Публичной библиотеке им. М. Е. Салтыкова-Щедрина в Ленинграде.

рые дополнительные разделы по математике, не входившие в принятые тогда программы, но необходимые для глубокого изучения механики — элементы векторной алгебры и векторного анализа, сведения о криволинейных интегралах и др. Изложение механики на основе векторной алгебры и векторного анализа было новым и весьма редким явлением для того времени.

По предложению В. А. Стеклова вместо так называемых «репетиций» (промежуточных экзаменов) в Харьковском технологическом институте были введены практические занятия, на которых решались задачи, способствовавшие развитию интереса к изучаемому предмету. На этих занятиях давались дополнительные разъяснения наиболее трудных мест курса. Такие практические занятия сохранились и до наших дней, и польза их хорошо известна.

В. А. Стеклов принимал также деятельное участие и в политической жизни Харьковского университета. Вместе с другими профессорами он боролся против действовавшего тогда Университетского устава 1884 г. Он проявлял энергичную деятельность в Совете университета, а также в разных совещаниях по реформе университетов.

Господствовавшая в семье атмосфера почитания памяти Николая Добролюбова, чья жизнь была настоящим подвигом, в немалой степени способствовала формированию у В. А. Стеклова характерной для него с юных лет черты — высокого чувства гражданственности. Всякое дело, большое или малое, за которое брался В. А. Стеклов, он выполнял с большим трудолюбием, упорством и тщательностью.

Как в делах университетской жизни, так и в математическом обществе В. А. Стеклов не ограничивался простым присутствием на заседаниях, а неутомимо работал, выступал, составлял проекты, докладные записки, особые мнения и т. д. При этом он всегда проявлял большую эрудицию, самостоятельность, определенность взглядов.

В 1904 г. В. А. Стеклова избирают деканом математического факультета Харьковского университета. С этого времени он принимает особенно активное участие в университетских делах, участвует в выработке нового университетского устава и т. д.

В бурный 1905 г., когда в России вспыхнула революция, в Харьковском университете начались также выступления политического характера. На студенческих политических сходках, состоявшихся 7 и 9 февраля, присутствовало более тысячи студентов. Университет оказался в центре революционных волнений. О том, какую позицию занимал В. А. Стеклов в этих событиях, мы узнаем из его записей, хранящихся в архивах Харькова и Ленинграда, а также из других источников. Совместно с другими деканами и ректором университета он предпринимал активные меры, чтобы избежать кровопролития среди студенческой молодежи.

Своим постановлением от 30 января 1906 г. Совет Петербургского университета решил обратиться в Министерство народного просвещения с ходатайством об утверждении В. А. Стеклова в должности ординарного профессора Петербургского университета по кафедре чистой математики*). Вскоре (5 апреля 1906 г.) был издан приказ по гражданскому ведомству о перемещении В. А. Стеклова из Харьковского университета ординарным профессором в Санкт-Петербургский университет. В Петербурге Стекловы поселились на Петроградской стороне, в небольшой квартире дома 6/8 по Зверинской улице. В этом доме они прожили до 1919 г.

До приезда В. А. Стеклова основное руководство математической подготовкой студентов в Петербургском университете осуществлял А. Н. Коркин (1837—1908). По состоянию здоровья и возрасту он уже не мог руководить подготовкой студентов. Выдающийся математик А. А. Марков (1856—1922), хотя и читал тогда в университете свои курсы, основную работу проводил в Академии наук. А. М. Ляпунов также работал только в Академии наук. Поэтому появление В. А. Стеклова в Петербургском университете незамедлительно сказалось в некоторых нововведениях. В частности, были введены регулярные практические занятия. Вокруг В. А. Стеклова довольно быстро организовалась группа талантливых студентов, заня-

---

*) Протоколы заседаний Совета Санкт-Петербургского университета за 1906 г., СПб, 1907, № 62, с. 15. Там же, заседание 17 апреля 1906 г., с. 47.

тиями которых он руководил. В этот период В. А. Стеклов читает курсы по обыкновенным дифференциальным уравнениям [138, 140], уравнениям с частными производными [139, 141] и др. (см. [137], а также [118, 119]).

В. А. Стеклов, со студенческих лет предпочитавший самостоятельный метод работы, требовал такой же самостоятельности и от своих студентов. Он активно поддерживал их научные кружки и издательские комиссии, издававшие лекции профессоров университета.

Для характеристики педагогической деятельности В. А. Стеклова приведем отзыв его ученика В. И. Смирнова: «Я думаю, что не только лица, пользовавшиеся непосредственным руководством В. А. [Стеклова], но и многие студенты того времени помнят его лекции. Он не любил касаться общих вопросов о методах и целях математики, предпочитая показывать ее в действии, но делал это так, что в результате у слушателей получалось впечатление не отдельных теорем и терминов, а чего-то цельного. Достигал этого В. А. теми замечаниями, весьма краткими, но чрезвычайно ценными, которыми он обычно сопровождал доказательство теорем и решений примеров. Особенно, я думаю, памятны слушателям лекции В. А., посвященные уравнениям в частных производных, где В. А. знакомил нас и с некоторыми современными методами и задачами математической физики.

Требовательный к себе, он был требователен и к другим. От своих непосредственных учеников он требовал посильной, но безусловно самостоятельной научной работы с самого же начала. Но вместе с тем он не признавал и узкой специализации без достаточно широкого математического образования. Многие и до сих пор помнят те большие требования, которые он предъявлял на магистерском экзамене, но я твердо уверен, что все, прошедшие через этот искус, сейчас с чувством глубокой благодарности к В. А. сознают, как много дала им проделанная тогда работа. При всех обширных требованиях, надо сказать, никакой экзамен не доставлял столько удовлетворения и просто удовольствия, как магистерский экзамен у В. А.: полное отсутствие какой бы то ни было мелочности в вопросах, такая их постановка, при которой экзаменующийся чувствовал себя не проверяемым, а просто собеседником. У некоторых из нас часто возникали споры с В. А. Неизменно спокойный, он выслушивал спорящего и так же спокойно разубеждал его, когда это было надо» [VIII, с. 17].

Характеристику В. А. Стеклова-педагога удачно дополняет и высказывание его младшего коллеги, академика Я. В. Успенского (1883—1947): «Будучи сам талантливым человеком, В. А. любил других талантливых людей, заботливо относился к их судьбе и всегда готов был оказать им помощь. В нем не было того, что можно назвать ревностью к успехам других, и когда его ученикам удавалось решить какой-нибудь вопрос лучше, чем мог сделать он сам, он всегда первый прилагал старания, чтобы дать возможность опубликовать соответствующую работу...» [VII, с. 854].

В Петербургском университете, кроме научных занятий и педагогической деятельности, В. А. Стеклов много занимался вопросами организации университетской жизни. Его деятельность в этой области, начатая еще в Харькове, нашла свое отражение в заметках [132—136], помещенных в трудах «Совещания по выработке университетского устава при Министерстве народного просвещения» (1906 г.).

Не прошло и года работы В. А. Стеклова на новом месте, как он выступил на заседании Совета Петербургского университета с предложением отказаться от выборов представителя от университета и Академии наук в Государственный совет, ввиду того, что это «учреждение бюрократическое и сословное, отстаивающее интересы бюрократии и привилегированных классов, и пребывание в нем представителя науки будет не только бесполезным, но и вредным» *).

Из этого и других выступлений и докладных записок, рапортов и т. д. видно, что В. А. Стеклов был необыкновенно смелым, правдивым и принципиальным человеком, не боявшимся протестовать против фальши и несправедливости. Он категорически высказывался против введения в Петербургском университете профессорского дисциплинарного суда, выступал с протестом против допуска в здание университета полиции

*) Протокол заседания Совета Санкт-Петербургского университета за 1907 г., СПб, 1908, № 63, с. 13—16.

и против произведенных ею арестов во время студенческих сходок, вносил предложение немедленно отменить запрещения свободного доступа в лекторий университета лицам, оставленным для подготовки к профессорскому званию, и т. д. Выступления его носили откровенный и прямой характер. В некоторых случаях они содержали явную критику существовавших в России порядков. В те годы — годы реакции — для таких выступлений требовалась большая смелость и мужество.

В 1910 г. В. А. Стеклова избирают адъюнктом Академии наук, а в 1912 г. — ординарным академиком. Однако он не покидает своей деятельности и в университете. Только с 1916 г., когда его избирают членом правления Академии наук, он начинает отходить от университета, а в 1919 г., после избрания его вице-президентом Академии наук, прекращает там чтение своих лекций. С этого времени начинается напряженнейшая работа В. А. Стеклова в Академии наук, продолжавшаяся до конца его жизни.

§ 2. ТРУДЫ В. А. СТЕКЛОВА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Построение и исследование математических моделей физических явлений составляет предмет математической физики.

Со времен И. Ньютона математическая физика развивалась параллельно развитию физики и математики. Классическая математическая физика рассматривает задачи классической физики и механики: колебания упругих тел и сред, теплопроводности и диффузии, электродинамики, оптики, гидро-газодинамики, переноса, теории потенциала, теории устойчивости и т. д. За последние полвека рамки и методы математической физики значительно расширились за счет возникновения квантовой физики, теории относительности и новых задач газовой динамики, теории переноса и физики плазмы, а также за счет привлечения широкого арсенала математических средств, включая ЭВМ.

Классическая математическая физика имеет дело прежде всего с дифференциальными уравнениями, описывающими тот или иной физический процесс. Для полного описания процесса во времени необходимо, во-первых, задать картину процесса в некоторый начальный момент времени (начальные условия) и, во-вторых, задать режим на границе той среды, где протекает изучаемый процесс (граничные условия). Система дифференциальных уравнений вместе с соответствующими начальными и граничными условиями называется краевой задачей математической физики. Краевая задача — это и есть математическая модель физического процесса. Классическая математическая физика именно и занимается изучением краевых задач.

Типичными уравнениями математической физики являются следующие линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

Уравнение колебаний

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F. \qquad (1)$$

Уравнение распространения тепла (диффузии)

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F. \qquad (2)$$

Стационарное уравнение

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = F. \qquad (3)$$

Здесь функции $\rho > 0$, $p > 0$, $q \geqslant 0$ и F — известны; их физический смысл определяется изучаемым процессом *).

В частности, при постоянных ρ и p и $q = 0$ уравнения (1), (2) и (3) упрощаются и принимают соответственно вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f \qquad (4)$$

— *волновое уравнение;*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f \qquad (5)$$

— *уравнение теплопроводности;*

$$\Delta u = -f \qquad (6)$$

*) Выводы основных уравнений и постановки краевых задач математической физики можно найти почти во всех учебниках по математической физике (см., например, В. С. Владимиров. Уравнения математической физики. — 4-е изд. — М.: Наука, 1981, с. 43—55).

— *уравнение Пуассона.* Здесь $a^2 = p/\rho$, $f = F/\rho$ и

$$\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

— оператор Лапласа.

Начальные условия. Для уравнения колебаний (1) задается в начальный момент времени, скажем при $t = 0$, как величина самого возмущения u, так и скорость изменения его со временем u_t:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, 0) &= \varphi_0(x, y, z), \\ u_t(x, y, z, 0) &= \varphi_1(x, y, z). \end{aligned} \tag{7}$$

Для уравнения распространения тепла (2) задается при $t = 0$ лишь температура u:

$$u(x, y, z, 0) = \varphi_0(x, y, z). \tag{8}$$

Для стационарного уравнения (3) начальные условия естественно отсутствуют.

Граничные условия. Обозначим через D область, в которой происходит процесс, и пусть S — ее граница. Для приложений достаточно ограничиться рассмотрением кусочно-гладких поверхностей S. Пусть $n = n(x, y, z)$ — внешняя нормаль к S в точке (x, y, z). Следующие типы граничных условий описывают режим на границе практически всех реальных физических процессов:

$$u|_S = g \tag{9}$$

— на границе S задается сама величина u во все моменты времени $t \geqslant 0$;

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu|_S = g, \quad h \geqslant 0 \tag{10}$$

— на границе S задается линейная комбинация величин u и $\frac{\partial u}{\partial n}$ при всех $t \geqslant 0$; в частности, при $h = 0$ задается поток величины u.

Для *уравнения Лапласа* $\Delta u = 0$ краевая задача с граничным условием (9) называется *задачей Дирихле*; краевая задача с граничным условием:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = g \tag{11}$$

— *задачей Неймана* *). Если D — ограниченная область, то различают внутренние и внешние задачи Дирихле и Неймана. Для внешних краевых задач требуют еще выполнения дополнительного условия на бесконечности: в случае, когда число переменных $n \geqslant 3$, решение должно стремиться к нулю, при $n = 2$ решение ограничено.

Отметим, что число пространственных переменных в приведенных уравнениях и краевых условиях может быть любым, в частности меньше трех. Это будет в случае линейных областей (струна, стержень) или плоских областей (мембрана), а также в том случае, если все величины, описывающие рассматриваемый процесс, не зависят от некоторых пространственных переменных.

Тот факт, что краевые задачи математической физики суть математические модели физических явлений, отчетливо сознавал в свое время В. А. Стеклов. Об этом свидетельствуют следующие выдержки из его книги «Основные задачи математической физики», ч. I [118].

«Решение задач математической физики приводится к определению одной или нескольких величин, характеризующих тот или иной физический процесс, совершающийся в данной среде (в данном теле), в зависимости от положения каждой точки этой среды и времени при помощи одного или нескольких дифференциальных уравнений.

Эти уравнения выводятся при помощи небольшого числа возможно простых гипотез, которые полагаются в основу теории каждого физического явления и представляются как результат обобщения длинного ряда опытов и наблюдений над физическими процессами, которые действительно происходят в окружающей нас природе или создаются искусственно.

В результате такого отвлечения (обобщения) создается небольшое число основных положений (гипотез), которые должны быть независимы между собою и не противоречить ни одному из известных в данное время фактов действительности.

---

*) Эту задачу В. А. Стеклов называет основной задачей гидродинамики.

Эти гипотезы полагаются в основу теории того или иного физического явления, и вся теория развивается затем дедуктивно при помощи аксиом математики и основных законов общей механики по методам дифференциального и интегрального исчислений.

Таким путем, по физическим данным каждой задачи, составляются дифференциальные уравнения, характеризующие сущность рассматриваемого процесса для каждой точки среды и для каждого момента времени.

Задача сводится к определению в функции времени, координат каждой точки среды, в которой происходит изучаемое явление, и величин, определяющих физические свойства среды, тех неизвестных, которые фигурируют в полученных дифференциальных уравнениях, т. е. к интегрированию этих уравнений.

При этом получаемое таким путем решение должно удовлетворять всем данным, которые получаются как результат непосредственного наблюдения над изучаемым процессом.» (Стр. 43.)

«Сущность физических процессов, во всех подробностях, нам не известна. Обобщая всю совокупность данных опыта и наблюдений, мы строим, как упомянуто выше, некоторое число наиболее вероятных гипотез, при помощи которых создаем в своем воображении особого рода механическую модель изучаемого физического явления.

Чем полнее соответствие процессов, которые воспроизводятся этой моделью, с теми фактами, которые могут быть непосредственно наблюдаемы в действительном явлении природы, подмененном построенной нами моделью, тем эта модель лучше, тем более заслуживают доверия гипотезы, положенные в основу ее построения.

Создав такую по возможности самую простую модель, механическая конструкция которой нам известна, мы получаем возможность изобразить законы ее движения в аналитических формах по принципам математики и общей механики.

Получаемые таким путем математические соотношения характеризуют, строго говоря, не те движения, которые на самом деле совершаются в природе, а те, которые происходят и должны происходить в построенной нами модели.

Выводя аналитически различные свойства и особенности этих последних движений нашей модели, мы сравниваем затем полученные таким путем данные с фактами действительности.

Если получается постоянное совпадение тех и других, если новые факты, выводимые из известных свойств построенной нами модели, подтверждаются опытом и наблюдениями, то соответствие между нашим искусственным построением и действительным физическим явлением делается все более заслуживающим доверия и гипотезы, положенные в основу наших суждений, становятся все более и более вероятными, превращаясь с течением времени в законы.

Если же, наоборот, хоть один вывод из аналитических формул, изображающих законы движения построенной модели, оказывается в явном противоречии с данными непосредственного наблюдения, то такая модель должна быть признана недостаточной, гипотезы (или некоторые из них), послужившие основой для ее построения, неудовлетворительными, несоответствующими действительности.

В таком случае приходится приниматься за построение новой модели или соответствующим образом видоизменять старую.

Вся история опытных наук, в особенности наиболее точных из них, как то геометрии, механики, физики, астрономии, представляет собою образец создания и постоянной перестройки такого рода моделей.

Применяя сказанное к интересующим нас задачам математической физики, мы должны прежде всего отметить следующее:

Если дифференциальные уравнения с упомянутыми выше начальными и предельными условиями построены не на ошибочных основаниях, не находятся в явном противоречии с действительностью, то они должны давать для каждой задачи единственный и вполне определенный ответ, подобно тому как дифференциальные уравнения общей механики, при определенных начальных данных, должны давать единственное и вполне определенное решение.

В действительной, наблюдаемой нами природе, всякий физический процесс, вызываемый определенными причинами, всегда принимает определенное, единственно возможное течение.

Материальное тело, например, помещенное в определенное положение в пространстве и пущенное с определенной скоростью под действием данных сил, может приобрести одно и только одно определенное движение.

Поэтому первым и необходимым условием соответствия движений в построенных нами моделях с движениями в действительных физических процессах, которые мы желаем изобразить при помощи этих механических моделей, является требование, чтобы упомянутые выше дифференциальные уравнения в совокупности с начальными и предельными условиями давали, как сказано выше, единственное и вполне определенное решение.» (Стр. 54—55).

В. А. Стеклов опубликовал более ста пятидесяти работ, большая часть которых относится к разнообразным вопросам математической физики. Первые его работы по математической физике появились в 90-е годы прошлого столетия. В те времена благодаря трудам Г. Шварца, Э. Пикара и особенно А. Пуанкаре в математическую физику начинают проникать новые идеи. Классическая математическая физика, созданная в конце XVIII и в первой половине XIX века Л. Эйлером, Ж. Даламбером, Д. Бернулли, Ж. Лагранжем, Ж. Фурье, П. Лапласом, С. Пуассоном, Ж. Лиувиллем, М. В. Остроградским, уже не удовлетворяла новым повышенным требованиям к строгости. Поэтому встала задача не только теоретического обоснования старых схем, но и создания новых методов, которые приводили бы к строгому решению задач. В первую очередь это относится к кругу вопросов, связанных со строгим обоснованием так называемого *метода разделения переменных.* Этот метод еще в XVIII в. был предложен Л. Эйлером, а затем использован Д. Бернулли и Ж. Лагранжем для задачи о колебании однородной упругой струны. В начале XIX в. метод разделения переменных был детально разработан и применен к задаче о распространении тепла в твердом теле французским математиком Ж. Фурье в его знаменитой работе «Аналитическая теория тепла»; впоследствии метод разделения переменных получил название метода Фурье. Отметим, что

М. В. Остроградскому (1802—1862) удалось значительно развить начатые Ж. Фурье исследования о распространении тепла

Изложим метод Фурье применительно к задаче о свободном колебании струны с концами 0 и l.

Уравнение (1), начальное условие (7) и граничное условие (10) примут вид:

$$\rho u_{tt} = (pu_x)_x - qu, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{12}$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{13}$$

$$u_x - hu\,|_{x=0} = u_x + Hu\,|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{14}$$

Пусть функции ρ, p и q в уравнении (12) и величины h и H в граничном условии (14) не зависят от времени t (это предположение весьма существенно для метода Фурье!). Кроме того, будем считать постоянные h и H неотрицательными.

Ищем решение u уравнения (12) в виде произведения функции X, зависящей только от пространственной переменной x, и функции T, зависящей только от времени t, т. е.

$$u(x, t) = X(x)\,T(t). \tag{15}$$

Подставляя произведение (15) в уравнение (12), получим:

$$\rho X T'' = (pX')'\,T - qXT,$$

так что

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{[p(x)\,X'(x)]' - q(x)\,X(x)}{\rho(x)\,X(x)}. \tag{16}$$

Левая часть равенства (16) не зависит от x, а правая — от t. Но в таком случае каждая часть равенства (16) не зависит ни от x, ни от t, т. е. является постоянной величиной. Эту постоянную мы обозначим через $-\lambda$, так что равенство (16) превращается в следующие два равенства:

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \tag{17}$$

$$-(pX')' + qX = \lambda\rho X. \tag{18}$$

Таким образом, в результате подстановки (15) дифференциальное уравнение в частных производных (12) распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения (17) и (18). В этом случае говорят, что *переменные разделились.* В результате такого разделения переменных возник дополнительный (неизвестный) параметр λ.

Обратимся к дифференциальному уравнению (18). Нас будут интересовать те решения этого уравнения, которые удовлетворяют граничным условиям (14):

$$X'(0) - hX(0) = X'(l) + HX(l) = 0. \qquad (19)$$

Очевидно, краевая задача (18)—(19) всегда имеет тривиальное решение $X = 0$. Но такое решение интереса не представляет, и в дальнейшем мы будем исключать его из рассмотрения. Может оказаться, что при некоторых λ уравнение (18) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее граничным условиям (19). Такие λ называются *собственными значениями* краевой задачи (18)—(19), а соответствующие решения — *собственными функциями* этой задачи, соответствующими собственному значению λ. Краевая задача (18)—(19) об отыскании собственных значений и собственных функций называется *задачей Штурма — Лиувилля.*

Доказывается, что существует счетное множество неотрицательных собственных значений

$$0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k, \ldots, \quad \lambda_k \to \infty, \quad k \to \infty.$$

Каждому λ_k соответствует единственная собственная функция $X_k(x)$, а собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны с весом ρ, так что

$$\int_0^l \rho(x) X_k(x) X_i(x)\, dx = \delta_{ki}, \qquad (20)$$

где δ_{ki} — символ Кронекера: $\delta_{kk} = 1$, $\delta_{ki} = 0$, $k \neq i$.

Для примера приведем собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля (18)—(19) при $\rho = 1$, $p = 1$, $q = 0$, $h = \infty$ и $H = \infty$:

$$-X'' = \lambda X, \quad X(0) = X(l) = 0, \qquad (21)$$

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2}; \; X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{k\pi}{l} x, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (22)$$

Графики собственных функций $X_k(x)$ при $k=1, 2, 3$ изображены на рис. 1 жирными линиями.

При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (17) имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cdot \cos\sqrt{\lambda_k} \cdot t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k}\, t, \tag{23}$$

где a_k и b_k — произвольные постоянные.

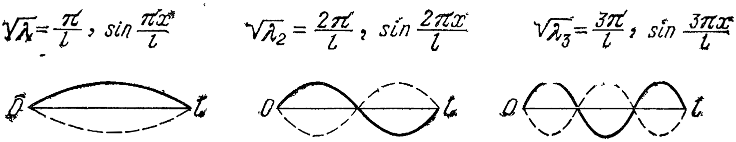


Рис. 1.

Итак, в силу (15), мы построили счетное число линейно независимых решений уравнения (12) в виде:

$$u_k(x, t) = \left(a_k \cos\sqrt{\lambda_k}\, t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k}\, t\right) X_k(x),$$
$$k = 1, 2, \ldots \tag{24}$$

Каждое такое решение удовлетворяет граничным условиям (14). Надеясь получить решение задачи (12)—(14), составим формальный ряд:

$$u(x, t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\sqrt{\lambda_k}\, t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k}\, t\right] X_k(x) \tag{25}$$

и подберем неизвестные постоянные a_k и b_k таким образом, чтобы формально удовлетворить начальным условиям (13), т. е. мы должны получить:

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x), \quad \varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\, b_k X_k(x). \tag{26}$$

Из свойств нормировки и ортогональности (20) собственных функций $X_k(x)$ следует, что коэффициенты a_k и b_k в (26) однозначно определяются формулами:

$$a_k = \int_0^l \rho\varphi_0 X_k\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^l \rho\varphi_1 X_k\, dx. \tag{27}$$

Таким образом, формальный ряд (25) (мы его назовем *формальным решением* задачи (12)—(14)) полностью определен.

Каждый член $u_k(x, t)$ ряда (25) представляет собой гармоническое колебание типа *стоячей волны с частотой* $\sqrt{\lambda_k}$. Последовательность чисел $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots$ называется *спектром собственных частот* колеблющейся струны. Гармонические колебания с наименьшей частотой называются *основным тоном*, а остальные колебания — *обертонами*. Решение (25) складывается из отдельных тонов (основного тона и последовательных обертонов), и их суммарное действие приводит к созданию *тембра звука*, издаваемого струной. Для однородной закрепленной струны стоячие волны при $k = 1, 2, 3$ изображены на рис. 1.

Изложенная формальная схема метода Фурье решения краевых задач, как видно, нуждается в обосновании в следующих пунктах: нужно доказать,

1) что существует бесконечное (счетное) число собственных значений и собственных функций (задача (A));

2) что собственных функций «достаточно много», т. е. что всякую «достаточно хорошую» функцию можно разложить в сходящийся ряд Фурье по собственным функциям (задача (B));

3) что полученный формальный ряд (25) сходится и дает решение (может быть и обобщенное) исходной задачи (задача (C)).

Те же самые проблемы возникают, конечно, при обосновании метода Фурье и в многомерном случае.

Эти фундаментальные задачи явно назрели в конце XIX в., и тогда их решение представляло значительные трудности. Эти задачи привлекли внимание такого выдающегося математика, как А. Пуанкаре. В своих мемуарах «Sur les équations de la physique mathématique» (1894) и «La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet» (1896) А. Пуанкаре сформулировал основные результаты своих исследований в этом направлении. Однако его анализ был построен на допущении, что гармоническая функция, решающая задачу Дирихле, имеет правильные нормальные производные на данной поверхности и что таковые же производные существуют и для потенциалов двойного слоя, причем последние непрерывны при переходе через поверхность (см. [18]).

Доказать существование решений задач Дирихле и Неймана, обойдя трудности, возникшие у А. Пуанкаре, причем при минимальных предположениях относительно поверхности S и граничных функций g — таков круг задач, решаемых В. А. Стекловым в период 1897—1902 гг. Результаты этих исследований систематически изложены им в монографии «Основные задачи математической физики», ч. II, [119].

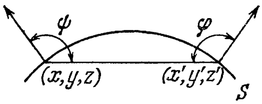


Рис. 2.

В первой же работе [18] (1897 г.) (см. также [27]) по задаче Неймана В. А. Стеклов предлагает другой подход, а именно: решение внутренней задачи Неймана он представляет в виде потенциала простого слоя на поверхности S:

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{\mu(x', y', z')}{r} ds \qquad (28)$$

с неизвестной плотностью μ, где r — расстояние между точками (x, y, z) и (x', y', z'). Плотность μ он находит методом последовательных приближений

$$\mu = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k + \ldots, \qquad (29)$$

где

$$\rho_k = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \rho_{k-1} \frac{\cos\psi}{r^2} ds, \quad \rho_0 = g, \; k = 1, 2, \ldots \qquad (30)$$

Здесь ψ — угол между внешней нормалью к S в точке (x, y, z) и вектором с началом в (x, y, z) и с концом в (x', y', z') (рис. 2). (У В. А. Стеклова в качестве ψ берется угол, дополнительный к нашему ψ.)

Из рекуррентной формулы (30), в силу формулы Гаусса, вытекает, что

$$\iint\limits_S \rho_k ds = \iint\limits_S \rho_0 ds, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (31)$$

Следует отметить, что примерно в то же время были впервые строго доказаны А. М. Ляпуновым свойства потенциалов простого и двойного слоев для класса поверхностей, названных В. А. Стекловым *поверхностями Ляпунова* *).

Будем говорить, следуя Стеклову, что поверхность Ляпунова S удовлетворяет *принципу Робена*, если функции ρ_k, определенные в (30), для всех точек поверхности S удовлетворяют неравенству

$$|\rho_k - \rho_{k-1}| < N\tau^k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{32}$$

при некоторых $N > 0$ и $\tau < 1$, не зависящих от выбора исходной функции ρ_0. Из принципа Робена сейчас же вытекает следующее утверждение: если функция $\rho_0 = g$ подчинена условию

$$\iint_S \rho_0\, ds = \iint_S g\, ds = 0, \tag{33}$$

то

$$|\rho_k| < N\tau^k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{34}$$

Теперь заметим, что для решения внутренней задачи Неймана условие (33) необходимо должно быть выполнено, так что и оценка (34) остается справедливой. Отсюда следует, что ряд (29) сходится абсолютно и равномерно на S, определяя непрерывную плотность μ. Этим существование решения внутренней задачи Неймана и его представимость в виде потенциала простого слоя доказаны.

Аналогичным образом решаются внешняя задача Неймана, а также задача Дирихле, внутренняя и внешняя [27, 34, 44, 53, 119].

На языке теории интегральных уравнений формулы (29)—(30) суть не что иное, как последовательные приближения для интегрального уравнения Фредгольма

$$\mu = -\frac{1}{2\pi}\iint_S \mu \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds + g. \tag{35}$$

При этом $+1$ есть характеристическое число союзного ядра $-\frac{\cos\varphi}{2\pi r^2}$ (угол φ изображен на рис. 2), а

*) Определение поверхности Ляпунова см., например, в книге: В. С. Владимиров Уравнения математической физики. — 4-е изд.— М.: Наука, 1981, с. 400.

$\mu \equiv 1$ — соответствующая собственная функция (в силу формулы Гаусса). Поэтому в соответствии с теоремами Фредгольма возникает условие разрешимости (33) интегрального уравнения (35). При этом решение этого уравнения определяется с точностью до собственной функции μ_0 однородного интегрального уравнения (35):

$$\mu_0 = -\frac{1}{2\pi} \iint_S \mu_0 \frac{\cos \psi}{r^2} ds. \tag{36}$$

Доказывается, что собственная функция μ_0 — единственна; она называется *плотностью потенциала Робена*, а соответствующий потенциал простого слоя — *потенциалом Робена*. Из интегрального уравнения (36) непосредственно вытекает, что потенциал Робена есть величина, постоянная в области D и отличная от 0. Отсюда, в силу (28), сразу следует, что решение внутренней задачи Неймана определено с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

Задача нахождения потенциала Робена есть *основная задача электростатики*, или *задача Робена*.

В. А. Стеклов дает решение указанной задачи Робена [18, 27], т. е. строит решение однородного интегрального уравнения (36). Это решение строится с помощью итераций (30), причем исходная функция ρ_0 выбирается произвольной положительной. Тогда ряд

$$\lim_{k \to \infty} \rho_k = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) + (\rho_3 - \rho_2) + \ldots,$$

в силу принципа Робена (32), сходится абсолютно и равномерно на поверхности S, определяя непрерывную (положительную) плотность μ_0 потенциала Робена.

Здесь В. А. Стеклов ликвидировал пробел в первоначальном варианте метода Робена, строго доказав существование собственной функции.

Подчеркнем особо, что сходимость метода последовательных приближений для интегрального уравнения (35). В. А. Стекловым доказана на характеристическом числе и для всех поверхностей, удовлетворяющих принципу Робена. В общей же теории интегральных уравнений Фредгольма сходимость метода последовательных приближений гарантируется лишь в том случае, когда модуль наименьшего (по модулю) характеристического числа больше, чем 1. Здесь мы имеем замечательный пример глубокого использования специфики задачи!

В. А. Стеклов показал, что принцип Робена справедлив для достаточно гладких поверхностей, мало уклоняющихся от сферы, а затем и для выпуклых (достаточно гладких) поверхностей [18, 27, 31, 34, 44]. Наконец, в 1902 г. в [53] он, пользуясь одной леммой С. Зарембы, доказывает применимость принципа Робена ко всем поверхностям Ляпунова. Таким образом, к 1902 г. теория потенциала получила полное обоснование, в основном, благодаря трудам А. М. Ляпунова и В. А. Стеклова.

Обоснование теории потенциала повлекло за собой и строгое обоснование метода Шварца — Пуанкаре*) при доказательстве существования собственных значений и собственных функций краевой задачи

$$-\Delta X = \lambda X, \quad \frac{\partial X}{\partial n} + hX \Big|_S = 0, \quad 0 \leqslant h = \text{const} \leqslant \infty. \tag{37}$$

Метод Шварца — Пуанкаре состоит в следующем. Ищем решение краевой задачи

$$-\Delta u = \lambda u + f, \quad \frac{\partial u}{\partial n} + hu \Big|_S = 0 \tag{38}$$

в виде ряда по степеням λ:

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots \tag{39}$$

Для каждой коэффициентной функции u_k в ряде (39) получим краевую задачу

$$-\Delta u_0 = f, \quad -\Delta u_k = u_{k-1}, \quad \frac{\partial u_k}{\partial n} + hu_k \Big|_S = 0. \tag{40}$$

Функции u_k теперь, после работ В. А. Стеклова, могут быть построены методами теории потенциала. Далее А. Пуанкаре доказывает, что функция u, определяемая рядом (39), мероморфная по λ с бесконечным числом полюсов, причем все ее полюсы $\lambda = \lambda_k$ ($k =$

*) См. цитированный выше мемуар А. Пуанкаре 1894 г.

$= 1, 2, \ldots$) — простые и суть собственные значения краевой задачи (37); вычет в полюсе λ_k даст линейную комбинацию собственных функций, соответствующих собственному значению λ_k. Этим и решается сформулированная выше задача (A) по обоснованию метода Фурье. (См. по этому поводу мемуары В. А. Стеклова [34, 46, 53, 63] и более поздние его заметки [79, 80].)

Следует отметить введенные В. А. Стекловым еще в 1895 г. фундаментальные функции V_k:

$$\Delta V_k = 0 \quad \text{в} \quad D, \quad \frac{\partial V_k}{\partial n} = \lambda_k \varphi V_k \quad \text{на} \quad S\,(\varphi > 0), \tag{41}$$

ныне носящие его имя — *фундаментальные функции Стеклова.* (В отличие от собственных функций параметр здесь входит в граничное условие.) Существование этих функций было установлено В. А. Стекловым в его докторской диссертации [44] (1901), там же он использует их для решения задач Дирихле и Неймана (см. также мемуары [53]). Фундаментальные функции Стеклова ортогональны на S с весом φ и являются распространением на общие поверхности сферических функций.

В современных терминах задача (41) — это нетривиальный пример задачи на собственные значения для псевдодифференциального оператора, заданного на поверхности S.

Следует отметить, что в мемуаре [22] (1897 г.) (см. также [46]) В. А. Стеклов находит точное значение постоянной в неравенстве Пуанкаре*): если функция f один раз непрерывно дифференцируема в замыкании $\bar{D}$ и удовлетворяет условию $\iiint\limits_D f\,dv = 0$, то

$$\iiint\limits_D f^2\,dv \leqslant \frac{1}{C(D)} \iiint\limits_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right] dv, \tag{42}$$

где $C(D) = \lambda_1$ — наименьшее (положительное) собственное значение задачи Неймана для оператора

*) См. цитированный выше мемуар А. Пуанкаре 1894 г.

Лапласа в области D. Для одной переменной, когда $D=(0,\ l)$ неравенство (42) принимает вид *) [16, 118]

$$\int_0^l f^2(x)\,dx \leqslant \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \int_0^l f'^2(x)\,dx. \qquad (43)$$

Еще раньше, в 1896 г. (см. [14]), В. А. Стеклов устанавливает справедливость неравенства (42) для функций f, удовлетворяющих граничному условию $f|_S=0$, с точным значением постоянной $C(D)$: $C(D)=\lambda_1$ — наименьшему собственному значению задачи Дирихле для оператора Лапласа в области D **).

Существует много различных обобщений неравенства (42). Неравенства такого типа широко используются в современной математике; они представляют собой простейшие примеры так называемых *теорем вложения* функциональных пространств.

§ 3. ТЕОРИЯ ЗАМКНУТОСТИ В. А. СТЕКЛОВА

Для решения задачи (B) по обоснованию метода Фурье, т. е. для выяснения вопроса о том, какие функции разлагаются в ряды Фурье по собственным функциям краевых задач X_k, и более общей задачи — разложимости функций по ортогональным системам функций — В. А. Стеклов посвящает большое число статей и мемуаров за 30-летний период 1896—1926 гг., в которых он развивает свою знаменитую *теорию замкнутости.*

В чем состоит теория замкнутости В. А. Стеклова?

В случае конечномерного евклидова пространства условие замкнутости выражается *теоремой Пифагора.* Как известно, всякий вектор a n-мерного евклидова пространства R^n единственным образом разлагается по любой ортонормальной системе n векторов (ортов) $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $(e_k, e_j)=\delta_{kj}$ по формуле

$$a=a_1e_1+a_2e_2+\ \ldots\ +a_ne_n, \quad a_k=(a,\ e_k), \qquad (1)$$

*) В книге Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуда и Г. Полиа «Неравенства» (М., ИЛ, 1948, с. 223) неравенство (43) неправильно приписано Виртингеру. (Пользуясь случаем, обращаем внимание, что в этой книге неравенство (43) дано при $l=2\pi$ с ошибкой: отсутствует множитель 4.)

**) В настоящее время это неравенство приписывается К. Фридрихсу.

причем квадрат длины вектора a равен сумме квадратов длин составляющих векторов $(a_k e_k)$, т. е.

$$|a|^2 = a_1^2 + \ldots + a_n^2 \tag{2}$$

(теорема Пифагора). (Здесь (a, b) — скалярное произведение векторов a и b из R^n.) Равенство (2) выражает условие замкнутости ортонормальной системы $e_1 \ldots e_n$ в пространстве R^n. Таким образом, мы видим, что всякая ортонормальная система n векторов является замкнутой (полной) в R^n.

Аналогичные понятия можно ввести и для функций, рассматривая каждую функцию как элемент (вектор) надлежащим образом определенного линейного функционального пространства. Однако положение вещей здесь значительно усложняется. Это связано с тем, что наиболее интересные функциональные пространства являются бесконечномерными.

Рассмотрим для примера совокупность вещественных измеримых функций $f(x)$, заданных в интервале $(0, l)$ и таких, что

$$\int_0^l \rho(x) f^2(x)\, dx < \infty,$$

где вес $\rho(x)$ — непрерывная положительная функция на $(0, l)$. Аналогом длины вектора здесь служит норма функции, определяемая равенством

$$\|f\| = \left[\int_0^l \rho(x) f^2(x)\, dx\right]^{1/2},$$

а аналогом скалярного произведения векторов — скалярное произведение функций

$$(f, g) = \int_0^l \rho(x) f(x) g(x)\, dx.$$

Введенные понятия нормы и скалярного произведения для функций обладают теми же свойствами, какими обладают длина и скалярное произведение для векторов. Эта совокупность функций является линейным множеством, и мы назовем ее пространством функций $L_2^\rho(0, l)$. Пространство $L_2^\rho(0, l)$ относится к типу так называемых *гильбертовых пространств*, являющихся естественным обобщением *евклидовых пространств* R^n. Однако в отличие от конечномерного случая здесь мы встречаемся с тем фактом, что в $L_2^\rho(0, l)$ существует *бесконечная* (*счетная*) *система ортонормальных функций* (например, система (22) § 2 ортонормальная в $L_2^\rho(0, l)$ при $\rho = 1$).

Пусть X_k, $k = 1, 2, \ldots$ — ортонормальная система функций в $L_2^\rho(0, l)$, т. е. $(X_k, X_i) = \delta_{ki}$; функции X_k играют роль «ортов» в $L_2^\rho(0, l)$. Всякой функции f из $L_2^\rho(0, l)$ можно сопоставить формальный ряд

$$a_1X_1(x) + a_2X_2(x) + \ldots + a_kX_k(x) + \ldots,\qquad a_k = (f, X_k) \tag{3}$$

— ее (обобщенный) *ряд Фурье* по ортонормальной системе функций $\{X_k\}$; a_k — ее коэффициенты Фурье. Спрашивается, когда ряд (3) сходится к функции $f(x)$?

Рассмотрим разность $\varepsilon_n(x)$ между функцией $f(x)$ и суммой n первых членов ряда Фурье (3):

$$\varepsilon_n(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_kX_k(x). \tag{4}$$

При помощи несложных выкладок устанавливается следующее равенство:

$$\|\varepsilon_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2. \tag{5}$$

Число $\|\varepsilon_n\|^2$ называется *средней квадратичной погрешностью* в приближенном представлении $f(x)$ отрезком ее ряда Фурье (3); если $\|\varepsilon_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, то говорят, что ряд Фурье (3) сходится к функции $f(x)$ в среднем на $(0, l)$ или, короче, в $L_2^\rho(0, l)$. Из равенства (5) непосредственно вытекает: 1) ряд, составленный из квадратов коэффициентов Фурье по любой ортонормальной системе, всегда сходится и справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \leqslant \|f\|^2, \tag{6}$$

называемое *неравенством Бесселя*; 2) для сходимости ряда Фурье (3) к функции $f(x)$ в $\overset{\circ}{L}_2(0, l)$ необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \| f \|^2, \tag{7}$$

аналогичного равенству (2) — теореме Пифагора для конечномерного пространства.

В связи с последним результатом В. А. Стеклов впервые вводит в математику понятие замкнутой системы функций: ортонормальная система $\{X_k\}$ называется *замкнутой*, если для любой функции f из $\overset{\circ}{L}_2(0, l)$ справедливо равенство (7), названное им *условием замкнутости*. Это понятие В. А. Стеклов ввел в 1910 г. в заметке [85], хотя фактически пользовался им с 1896 г. [14, 16, 22, 56].

Сказанное без существенных изменений переносится и на функции многих переменных.

Замкнутые системы функций обладают свойством полноты, т. е. такие системы не могут быть расширены присоединением новых функций без нарушения свойства ортогональности. В бесконечномерном функциональном пространстве (в гильбертовом пространстве), разумеется, нет возможности убедиться в полноте системы «ортов» путем их простого счета. С другой стороны, проверка условия замкнутости является необходимой предпосылкой при изучении вопросов разложимости функций в (равномерно сходящиеся) ряды Фурье по данной ортонормальной системе функций. Поэтому важное значение приобретают доказательства условия замкнутости различных ортогональных систем функций. Проблему замкнутости ортогональных систем функций для ряда краевых задач математической физики впервые в общем виде поставил В. А. Стеклов и, начиная с 1896 г., до конца своей жизни постоянно ею занимался. Его исследования по теории замкнутости и разложениям по ортогональным системам функций были первыми в мировой литературе среди огромного количества работ в этой области.

В мемуаре [59] 1904 г. собраны все ортогональные системы функций (11 систем), известные к тому времени, включая классические ортогональные полиномы, собственные функции задачи Штурма — Лиувилля (18) — (19) § 2, собственные функции краевой задачи (37) § 2, фундаментальные функции Стеклова V_k (см. (41) § 2) и родственные им функции (Пуанкаре, Ле руа и Корна), для которых условие замкнутости было установлено В. А. Стекловым (см. также [53]). Теории замкнутости посвящен также его мемуар [88] (1911 г.) и заметка [87], а также более поздние заметки [99, 100] (1916 г.).

В своих исследованиях по теории замкнутости В. А. Стеклов пользуется классическим понятием интеграла, а именно интегралом Римана. В дальнейшем выяснилось, что эта теория принимает законченный вид, если использовать более общее понятие интеграла — интеграла Лебега или даже интеграла Лебега — Стилтьеса.

Условие замкнутости приобрело впоследствии большое значение не только при решении краевых задач математической физики, но и для развития математического анализа вообще. В частности, оно дает возможность распространить геометрические понятия, относящиеся к конечномерному евклидову пространству на бесконечномерные, гильбертовы пространства. Таким образом, благодаря своей теории замкнутости В. А. Стеклов вплотную подошел к понятию гильбертова пространства (как мы сказали бы теперь, он работал в предгильбертовом пространстве). В настоящее время условие замкнутости (7) В. А. Стеклова часто называют равенством Парсеваля, впервые указавшего его без доказательства для тригонометрической системы функций (1805 г.). Поэтому нам представляется справедливым назвать условие замкнутости (7) *равенством Парсеваля — Стеклова.*

Немецкий математик А. Кнезер в некрологе, посвященном памяти В. А. Стеклова, напечатанном в 1929 г., пишет [IX]: «Уравнение замкнутости вполне может быть названо излюбленной формулой Стеклова; это уравнение можно бы назвать формулой Стеклова, так как он, превзойдя А. Гурвица, впервые строго доказал его для других случаев».

Следует отметить, что первоначальным толчком для работ В. А. Стеклова по теории замкнутости послужили исследования А. М. Ляпунова (1896 г.) по тригонометрическим и сферическим функциям *). Ра-

*) См. протоколы заседаний ХМО за 1896 г.

бота А. Гурвица *), посвященная теории замкнутости только тригонометрических функций, появилась в 1903 г., когда основные положения этой теории были уже хорошо известны А. М. Ляпунову и В. А. Стеклову.

Не касаясь отдельно методов, которыми пользовался В. А. Стеклов в своих исследованиях по теории замкнутости, укажем на один из них, так называемый *метод сглаживания*, которым он, начиная с 1907 г. (см. [67]), широко пользуется. Пусть функция $f(x)$ задана на $[0, l]$ и продолжена вне $[0, l]$, например, так, что $f(x)=f(0)$, $x<0$ и $f(x)=f(l)$, $x \geq l$. Рассмотрим при каждом $h>0$ функцию

$$F(x)=\frac{1}{h} \int\limits_{x}^{x+h} f(\xi)\, d\xi, \tag{8}$$

называемую теперь *функцией Стеклова*. Функция Стеклова F обладает лучшими свойствами гладкости, чем исходная функция f, например, если f непрерывна, то F непрерывно дифференцируема; кроме того, $F(x) \to f(x)$ при $h \to 0$ равномерно; далее, если условие замкнутости выполнено для F, то оно будет выполнено и для f.

Последний результат является частным случаем известной *теоремы Стеклова*: если условие замкнутости выполнено на множестве функций, плотном в $L_2^\rho(0, l)$, то оно выполнено и для всех функций из $L_2^\rho(0, l)$. (Для $L_2^\rho(0, l)$ плотным является множество полиномов, а также множество бесконечно дифференцируемых и финитных в $(0, l)$ функций.)

На современном языке функция Стеклова $F(x)$ есть не что иное, как свертка исходной функции $f(x)$ с функцией

$$\delta_h(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{h} & -h \leqslant x \leqslant 0, \\ 0 & x<-h \quad \text{или} \quad x>0. \end{cases}$$

Последовательность функций $\delta_h(x)$, $h \to 0$, является δ-образной последовательностью (рис. 3), т. е. $\delta_h(x)$

*) Math. Ann., 1903, Bd. 57, S. 425—446.

слабо стремится к δ-функции Дирака*), так что $F(x)=f(x)*\delta_h \to f(x)$ при $h\to 0$ равномерно.

Таким образом, метод сглаживания Стеклова есть не что иное, как метод (усреднения) регуляризации (обобщенных) функций, широко используемый в современной математике.

В работах [22, 34, 44, 53, 63] В. А. Стеклов дает достаточные условия, при которых возможны разложения функций многих переменных в равномерно сходящиеся ряды Фурье по ортогональным системам функций для ряда краевых задач математической физики. Так, для собственных функций задачи (37) § 2 он устанавливает разложимость в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье всякой дважды непрерывно дифференцируемой функции, удовлетворяющей соответствующему граничному условию для областей, ограниченных поверхностями Ляпунова.

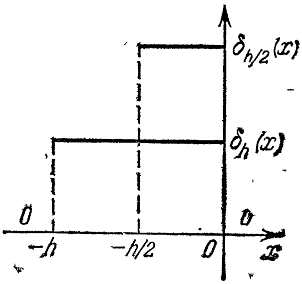


Рис. 3.

Особенно много работ В. А. Стеклов посвящает вопросам разложимости по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля (18)—(19) § 2 при различных предположениях о коэффициентах ρ, p и q и при различных краевых условиях [16, 46, 59, 68, 69, 79—91]. Систематическое изложение относящихся сюда результатов дано им в монографии «Основные задачи математической физики», ч. I [118].

Совершенствуя и развивая метод Шварца — Пуанкаре и пользуясь своей теорией замкнутости, В. А. Стеклов постепенно, начиная с 1896 г., устанавливает все более точные теоремы разложимости по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля. В этих кратких очерках нет возможности проследить все этапы этой большой его работы (это сделано Н. М. Гюнтером в приложении III к работе [VIII]).

*) Элементарные сведения из теории обобщенных функций можно найти в цитированной выше книге В. С. Владимирова, гл. II.

Обращаем внимание, что обширным мемуаром [63] (1904) В. А. Стеклов откликнулся на только что появившееся знаменитое сообщение Д. Гильберта по теории интегральных уравнений с симметричным ядром. В нем В. А. Стеклов, применяя свои методы, устанавливает теоремы разложимости, вполне аналогичные теоремам Д. Гильберта. Вскоре после диссертации Э. Шмидта (1905 г.) теория Гильберта — Шмидта объединила оба подхода. Однако теорема Гильберта — Шмидта о разложимости функций, истокообразно представимых через симметричное ядро, по собственным функциям этого ядра, требует завышенных условий гладкости от разлагаемой функции.

В качестве примера приведем наиболее известный результат В. А. Стеклова 1907 г. [68], не вытекающий из теоремы Гильберта — Шмидта.

Если функция $f(x)$ *непрерывно дифференцируема* на $[0, l]$ *и удовлетворяет граничным условиям* $f(0) = f(l) = 0$, *то она разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля* (18)—(19) § 2.

В более поздних работах 1910 г. [81, 84] и в мемуаре 1913 г. [91] В. А. Стеклов распространяет свои результаты на еще более широкие классы функций и при весьма общих граничных условиях (см. также [118]).

Касаясь методов, используемых В. А. Стекловым при доказательстве теорем разложения, необходимо отметить следующий важный его результат: если ортонормальная система $\{X_k\}$ замкнута, $f \in L_2^\rho(0, l)$ и ряд (3) есть ряд Фурье функции f, то для любой φ из $L_2^s(0, l)$ справедливо равенство

$$\int_0^l \rho f \varphi \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^l \rho X_k \varphi \, dx. \tag{9}$$

Этот результат, кроме приложений к вопросам разложимости, имеет принципиальное значение. Он показывает, что, даже если формальный ряд Фурье (3) расходится или не представляет функцию $f(x)$ в отдельных точках x, его можно почленно интегрировать с любой функцией φ из $L_2^\rho(0, l)$ и полученный числовой ряд будет сходиться к величине (f, φ). Таким образом, ряд (3), как теперь говорят, *слабо сходится в* $L_2^\rho(0, l)$. Эта плодотворная идея предварительного *усреднения* формального ряда или какого-либо другого формального математического объекта (расходящегося интеграла, производной от недифференцируемой функции и т. д.), после чего этому объекту сопоставляются конечные величины, результаты усреднений, привели в дальнейшем к понятию *функции множества* и далее к понятию *обобщенной функции*, играющей фундаментальную роль в современной математике. Эти понятия в настоящее время прочно вошли в математику, физику и технику. Они сблизили математическую физику с реальными условиями физического эксперимента.

Укажем теперь на работы В. А. Стеклова, посвященные разложениям функций по классическим ортогональным полиномам: по полиномам Якоби [54, 57, 106—108, 115], по полиномам Эрмита [101, 106—108], по полиномам Лагера [102, 103] и по ортогональным полиномам с неотрицательным весом, который может обращаться в нуль лишь в отдельных точках*) [54, 59, 69, 94, 103, 106—108, 113—115, 121, 125—126].

§ 4. ТРУДЫ В. А. СТЕКЛОВА ПО МЕХАНИКЕ

Свою научно-исследовательскую и педагогическую деятельность В. А. Стеклов начал в области механики. Первая из этих работ появилась в печати в 1891 г., а последняя вышла в свет в 1909 г. В этой области он получил важные результаты. Сюда относятся 17 работ по гидродинамике, четыре — по теории упругости и три — по аналитической механике.

В гидродинамике имя Стеклова прежде всего связано с одним из немногих интегрирующихся случаев движения твердого тела в жидкости. Он исследует также теорию вихрей, движение жидкого эллипсоида, движение твердого тела с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью.

К моменту появления работ Стеклова вопросами движения твердого тела в жидкости занимались мно-

*) Такие полиномы В. А. Стеклов называл полиномами Чебышева [54].

гие выдающиеся ученые. Еще в середине XVIII ст. эти задачи изучались Д. Бернулли и Л. Эйлером, а в начале XIX в. — С. Пуассоном. В 40-х годах XIX в. появляются работы Д. Стокса. Он показал, что давление жидкости на движущееся тело играет такую же роль, как и увеличение массы тела. Д. Стокс первый обратил внимание на задачу о движении тела с полостями, наполненными жидкостью, и показал, что жидкость в полости можно заменить эквивалентным твердым телом. В 1852 г. П. Дирихле определил движение шара в идеальной жидкости и наметил путь для получения общих уравнений движения твердого тела в жидкости. В 1856 г. А. Клебш рассмотрел более общий случай — движение эллипсоида в жидкости. В 1867 г. В. Томсон и П. Тэт указали иной путь для вывода уравнений движения твердого тела в жидкости — с помощью принципа Гамильтона. Затем в 1870 г. Г. Кирхгоф, развивая эту идею, представил уравнение движения тела в жидкости в той форме, которую имеют уравнения движения тела в пустоте. Он получил три интеграла движения тела и привел к квадратурам решение вопроса о движении в жидкости тела вращения.

Дальнейшие исследования этих вопросов проводились в 70-х годах прошлого столетия А. Клебшем, Г. Кирхгофом, В. Томсоном, К. Нейманом, Г. Ламбом и другими учеными.

В 80-х и 90-х годах XIX в. по вопросу о движении тела в жидкости появились работы русских ученых Н. Е. Жуковского (1847—1921), А. М. Ляпунова, В. А. Стеклова и С. А. Чаплыгина (1869—1942).

Начиная с 1891 г. В. А. Стеклов печатает свои работы по гидродинамике в отечественных и иностранных журналах. Результаты ранних своих работ [2, 3, 8, 10] он подытоживает в магистерской диссертации «О движении твердого тела в жидкости» [9], которая вышла в свет в 1893 г. В этой работе В. А. Стеклов выводит дифференциальные уравнения движения тела в жидкости при весьма общих предположениях: 1) тело ограничено замкнутой многосвязной поверхностью и имеет внутри одну или несколько полостей, наполненных жидкостью; 2) жидкость идеальная, несжимаемая и заполняет все пространство вне тела; 3) скорости точек жидкости как в полостях, так и вне тела имеют потенциал, скорость жидкости в бесконечности равна нулю; 4) силы, приложенные к телу, произвольные, а силы, приложенные к жидкости, консервативные.

В дальнейшем изложении В. А. Стеклов не принимает во внимание полостей, имея в виду, что жидкость, заключенная в полости, может быть заменена в случае односвязной полости эквивалентным твердым телом (как ранее показал Д. Стокс), а в случае многосвязной полости — эквивалентным твердым телом и гироскопом.

В. А. Стеклов использует метод последовательных приближений для интегрирования полученных им дифференциальных уравнений при условиях, что отношение плотности жидкости, окружающей тело, к массе тела и жидкости, содержащейся в полостях, достаточно мало, движение осуществляется по инерции, а наружная поверхность тела односвязна. Далее автор дает описание различных возможных движений твердого тела в жидкости. Наконец, он находит новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости, не замеченный раньше А. Клебшем. Его результаты способствовали А. М. Ляпунову в нахождении еще одного, последнего случая, когда уравнения допускают четвертый однородный интеграл второй степени.

С. А. Чаплыгин, в то время молодой ученый, так писал об этой работе В. А. Стеклова: «...она заключает в себе обзор всего относящегося сюда материала, добытого различными учеными до времени ее появления; кроме того, автор дает собственный обстоятельный вывод уравнений движения, не стесняя поверхности тела условием односвязности, указывает... новые случаи интегрируемости, описывает некоторые типы движений в жидкости тяжелого тела и рассматривает разнообразные частные случаи решения задачи без действия сил ...» *).

В работе [12] В. А. Стеклов рассматривает твердое тело, движущееся в жидкости, симметричное относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей, а также тело более общего вида, для которого выражение кинетической энергии содержит не только

*) С. А. Чаплыгин. Мат. сб., т. XX, вып. 1—4, М., 1897.

квадраты проекций главного вектора и главного момента количества движения, но еще три члена с произведениями соответствующих проекций вектора и момента; он указывает тот случай, когда одновременно существуют три частных линейных интеграла движения.

В работе [52] В. А. Стеклов дальше развивает метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости, изложенный им в магистерской диссертации. В результате своих исследований он сводит решение указанной задачи к интегрированию дифференциальных уравнений движения свободного твердого тела в пустоте и к интегрированию некоторых линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Он доказывает, пользуясь методом последовательных приближений, что дифференциальные уравнения движения твердого тела в жидкости (тело снаружи ограничено односвязной поверхностью), при достаточно малом отношении плотности окружающей жидкости к массе тела и жидкости в полостях, имеет бесконечное число периодических решений с общим периодом, равным периоду решений, когда вышеуказанное отношение равно нулю.

В статье [15] В. А. Стеклов изучает движение вязкой несжимаемой жидкости, асимптотически приближающейся к состоянию покоя, в предположении, что проекции вихря в какой-либо точке пропорциональны проекциям скорости в этой точке, и, следовательно, вихревые линии совпадают с линиями тока; коэффициент пропорциональности — величина постоянная. При помощи метода последовательных приближений он доказывает, что данное движение существует и полностью определяется, если известна нормальная составляющая скорости на поверхности, ограничивающей жидкость, причем эта составляющая выражается в виде произведений функций координат на функцию $e^{-\alpha t}$, где $\alpha > 0$ и t — время.

В мемуаре [71] В. А. Стеклов дает общее решение задачи о движении несжимаемой жидкости: при заданных вихрях в несжимаемой жидкости, заполняющей замкнутый односвязный сосуд, который движется по известному закону, определить скорости точек жидкости. Он показывает, что для решения сформулированной задачи достаточно проинтегрировать систему уравнений, состоящую из уравнений неразрывности и трех дифференциальных уравнений, определяющих вихрь как функцию времени и координат точки, при условии, что нормальные составляющие скорости любой точки жидкости, примыкающей к поверхности сосуда, и скорость соответствующей точки этой поверхности равны между собой. В. А. Стеклов сводит эту задачу к решению задачи Неймана; в результате получает выражения для проекций скорости, содержащие две произвольные функции, целесообразным выбором которых упрощает ход решения в конкретных случаях. Отметим, что до исследований В. А. Стеклова было известно решение этой задачи только в следующих частных случаях: 1) жидкость безгранична и на бесконечности находится в состоянии покоя; 2) жидкость заполняет неподвижный сосуд и известны скорости точек жидкости, прилегающих к поверхности сосуда. В работах [71, 72, 77] В. А. Стеклов рассматривает также ряд конкретных частных случаев определения скорости движения жидкости по заданному вихрю.

Другой большой круг гидродинамических задач, рассматриваемых В. А. Стекловым, относится к движению жидкой массы, сохраняющей форму эллипсоида, частицы которой взаимно притягиваются по закону Ньютона. Эта проблематика привлекала к себе внимание многих выдающихся математиков и механиков, поскольку она находится в тесной связи с одним из важнейших вопросов небесной механики, с вопросом о форме небесных тел.

После работ К. Маклорена, П. Лапласа, К. Якоби, посвященных эллипсоидальным формам равновесия вращающейся жидкости, в начале 60-х годов прошлого века появляются основополагающие мемуары П. Дирихле и Г. Римана, в которых рассматриваются разные случаи движения жидкости (однородной, идеальной, несжимаемой), сохраняющей эллипсоидальную форму, в предположении, что координаты каждой точки жидкости во все моменты времени являются линейными однородными функциями ее начальных координат, причем центр эллипсоида считается неподвижным (предположения Дирихле).

В. А. Стеклов посвятил этой задаче три заметки [64—66] (1905—1906 гг.) и большой мемуар [72] (1908—1909 гг.), в которых он исследовал (в предположениях Дирихле) все возможные случаи движения жидкого эллипсоида, предполагая, что он представляет собой или эллипсоид вращения, или трехосный эллипсоид с неизменяющимися по длине осями. Он доказал, что для каждой из указанных форм эллипсоида существуют только три типа движений (случай П. Дирихле и два случая Г. Римана), которые в указанных работах подробно исследуются.

Большое значение для астрономии и небесной механики имеет работа В. А. Стеклова [77]. В этой работе исследуется вращательное движение вокруг неподвижной точки твердого тела с эллипсоидальной полостью, наполненной несжимаемой жидкостью, причем оси этого эллипсоида совпадают с главными осями инерции тела относительно неподвижной точки. Предполагается, что на частицы жидкости действуют лишь гравитационные силы взаимного притяжения и в ее движении вихревые нити — параллельные прямые с одинаковым напряжением. Пользуясь уравнениями работы [71] и предполагая, что момент внешних сил равен нулю, В. А. Стеклов получает три интеграла движения этих уравнений. Рассматривая случай, когда масса жидкости достаточно мала по сравнению с массой тела, В. А. Стеклов применяет для интегрирования составленной им системы дифференциальных уравнений движения метод последовательных приближений и доказывает существование периодических движений. Рассматривая частные случаи, он получает разные типы движений. Случай, когда твердое тело и полость представляют собой эллипсоиды вращения вокруг общей оси, интегрируется до конца в эллиптических функциях. Наконец, переходя к общему случаю вязкой жидкости, В. А. Стеклов, предполагая, что момент внешних сил относительно неподвижной точки равен нулю, показывает, что движение системы стремится к равномерному вращению, как твердого тела, около одной из главных осей инерции.

Полученные результаты дают В. А. Стеклову возможность сделать выводы о характере движений полюсов Земли и изменений географических широт, оценить плотность твердой оболочки Земли и ее примерную толщину, а также плотность жидкой массы.

В гидродинамических работах В. А. Стеклова получены и другие интересные результаты, о которых здесь нет возможности говорить (см., например, [47]).

Как сказал И. В. Мещерский [VIII], «в гидродинамике имя Владимира Андреевича Стеклова сохранится навсегда».

В. А. Стекловым были опубликованы также четыре работы по теории упругости. Они относятся к первым годам (1891—1898) самостоятельной научной деятельности В. А. Стеклова.

В работе [4] решается задача о равновесии бесконечно тонкого стержня, имеющего форму кривой двоякой кривизны с сечением, для которого два момента инерции относительно двух главных осей равны между собой (круг или правильный многоугольник). Предполагается, что стержень находится под действием внешних сил, приложенных к его концам и, кроме того, на линию центров тяжести сечений действует постоянное давление по главной нормали к этой кривой. Задача о равновесии тонкого стержня, когда один или два размера поперечного сечения весьма малы по сравнению с длиной стержня, в самом общем виде решена Г. Кирхгофом, который вывел соответствующие дифференциальные уравнения для произвольного расположения сил, но проинтегрировал полученные уравнения лишь для случая, когда силы приложены к концам стержня. В. А. Стеклов исходит из основных уравнений Г. Кирхгофа, пользуясь ими в изложении А. Клебша. При сделанных выше предположениях В. А. Стеклов проинтегрировал дифференциальные уравнения равновесия упругого стержня, выразив элементы, характеризующие деформации стержня в эллиптических интегралах и в θ-функциях Якоби. Наконец, В. А. Стеклов указывает, как можно, пользуясь полученными им уравнениями, перейти к случаю плоской формы равновесия, указанному М. Леви. Работа [5] В. А. Стеклова связана с задачей Сен-Венана о равновесии упругого стержня цилиндрической или призматической формы в предположении, что одно из его оснований закреплено, к другому основанию приложены внешние силы, а боковая поверхность и внутренние его массы свободны от действия внешних сил. Считаем, что ось координат z направлена вдоль образующей цилиндра, а начало координат находится на одном из его сечений. Б. Сен-Венан при решении своей задачи исходил из следующей физической гипотезы: составляющие напряжений X_x, X_y, Y_x, Y_y равны нулю в каждой точке внутри цилиндра. Он определил деформации и напряжения в цилиндре при условии, что на боковой поверхности напряжения равны нулю.

Изучая эту задачу, В. А. Стеклов, не делая никаких предположений относительно напряжений, показал, что если на боковую поверхность цилиндра и на внутренние его массы не действуют никакие силы, то единственное общее решение, когда всякая прямая, параллельная оси цилиндра, преобразуется в алгебраическую кривую, есть решение Сен-Венана (т. е. преобразуется в алгебраическую кривую третьего порядка). В этой же работе В. А. Стеклов изучает также задачу, когда силы действуют и на боковую поверхность цилиндра.

В работе [28] В. А. Стеклов возвращается к задаче о равновесии упругих изотропных цилиндрических тел. Задаваясь значениями для перемещений в виде

$$u = u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{1 \cdot 2} + u_3 \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

(аналогичные выражения для v, w, θ), где коэффициенты при z суть функции от x, y, он дал решение, в математическом смысле объединяющее решения задач Сен-Венана и Клебша и являющееся более общим. Задача Клебша состоит в нахождении условий равновесия плиты или цилиндра, размер которого по высоте мал по сравнению с размерами поперечного сечения, а внешние силы приложены к боковой поверхности цилиндра; при этом считают напряжения X_z, Y_z и Z_z равными нулю.

В статье [7] В. А. Стеклов рассматривает задачу о равновесии упругих тел вращения. Свои общие выводы он применил к изучению некоторых отдельных случаев: 1) равновесия кругового цилиндра под действием сил, приложенных к его боковой поверхности; 2) равновесия полого цилиндра под действием сил, приложенных к его основанию; 3) равновесия тел вращения, ограниченных сферами и коническими поверхностями.

Рассмотрим также три работы В. А. Стеклова, относящиеся к аналитической механике.

В этой области В. А. Стеклов изучает классическую задачу о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в пустоте. Этой проблематикой занимались Л. Эйлер, Ж. Лагранж, Л. Пуансо, С. В. Ковалевская, Н. Е. Жуковский.

В статьях [13] и [29] В. А. Стеклов нашел новые частные случаи интегрируемости уравнения движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Один из этих случаев одновременно изучался Д. К. Бобылевым и вошел в литературу под названием случая *Бобылева — Стеклова*.

Работа [19] В. А. Стеклова посвящена изложению некоторого преобразования, называемого в настоящее время *преобразованием Стеклова*, и его приложениям к различным задачам механики. Он приводит здесь много примеров, иллюстрирующих применение его метода. В частности, он показывает, что, пользуясь этим методом, можно получить результаты, найденные в 1895 г. Д. Н. Горячовым другим методом в работе «К задаче о трех телах».

Все работы В. А. Стеклова по механике отличаются широтой постановки вопросов и строгой математической обработкой. Его труды дают и новые выводы, и развитие полученных ранее результатов, внося существенные дополнения в исследования таких крупных ученых, как П. Дирихле, Г. Риман, А. Клебш, Б. Сен-Венан, Г. Кирхгоф, В. Томсон, С. В. Ковалевская, Н. Е. Жуковский, А. М. Ляпунов и др.

§ 5. РАБОТЫ В. А. СТЕКЛОВА ПО КВАДРАТУРНЫМ ФОРМУЛАМ*)

Пусть $\rho(x)$ — заданная интегрируемая функция на интервале $(-1, 1)$. *Квадратурной формулой***)

---

*) Квадратурные формулы В. А. Стеклов называет формулами механических квадратур.

**) Для многих переменных аналогичные формулы называются кубатурными формулами.

с весом ρ и n узлами называется приближенное равенство

$$\int_{-1}^{1} \rho(x) f(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f\left(x_k^{(n)}\right), \qquad (1)$$

причем коэффициент $A_k^{(n)}$ и узлы $x_k^{(n)}$ выбирают так, чтобы приближенное равенство (1) превращалось в точное равенство на всех полиномах степени p_n. Число p_n называется *степенью точности*, а выражение

$$R_n[f] = \int_{-1}^{1} \rho(x) f(x)\, dx - \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f\left(x_k^{(n)}\right) \qquad (2)$$

— *остаточным членом* квадратурной формулы (1). Предполагаем в дальнейшем, что $p_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

В частности, при $\rho(x) \equiv 1$ Р. Котес предложил выбирать узлы равноотстоящими, что дало квадратурную формулу степени точности $p_n = n - 1$; К. Гаусс, стремясь к большей точности, предложил квадратурную формулу, в которой узлы — корни соответствующих полиномов Лежандра, что привело к степени точности $p_n = 2n - 1$, наивысшей из возможных; П. Л. Чебышев с целью упрощения вычислений предложил такой способ выбора узлов, при котором все коэффициенты одинаковы, так что $p_n = n$ при n четном и $p_n = n + 1$ при n нечетном *); А. А. Марков предложил зафиксировать крайние узлы $x_1^{(n)} = -1$ и $x_n^{(n)} = 1$ и подбирать оставшиеся узлы и коэффициенты так, чтобы степень точности была равной $2n - 3$.

Относительно квадратурных формул возникают три основных вопроса:

1. Сходимость квадратурной формулы, т. е. указать те достаточные условия на функцию f, когда остаточный член $R_n[f] \to 0$ при $n \to \infty$.

2. Оценка остаточного члена квадратурной формулы для данной функции f (или класса функций).

3. Выбор наиболее практичной квадратурной формулы для данного класса функций.

---

*) Формул Чебышева не существует при $n = 8$ и $n \geqslant 10$ (узлы комплексные, если $\rho = 1$).

До В. А. Стеклова этой проблематике был посвящен ряд работ К. Гаусса, Р. Котеса, П. Л. Чебышева, Н. Я. Сонина, К. Поссе, Т. Стилтьеса, Д. Пеано, А. А. Маркова.

В ряде работ, напечатанных в Известиях Академии наук за период 1916—1919 гг., В. А. Стеклов достигает выдающихся результатов большой общности во всех указанных направлениях. При этом он часто применяет свою теорию замкнутости и метод сглаживания.

Вопросу сходимости квадратурных формул В. А. Стеклов посвящает замечательную статью [98] за 1916 г. С помощью легко доказываемой формулы

$$R_n[f] = \int_{-1}^{1} \rho(x)\, q_{p+1}(x)\, dx - \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} q_{p+1}\left(x_k^{(n)}\right), \qquad (3)$$

в которой $q_{p+1} = f - P_p$, $P_p(x)$ — любой полином степени $p \leqslant p_n$, вопрос сводится к задаче о приближении функции $f(x)$ полиномами. Принимая за $P_p(x)$ сумму первых p членов в разложении $f(x)$ по полиномам Лежандра, В. А. Стеклов устанавливает оценку

$$|R_n[f]| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\sqrt{p_n}} \left(\sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}| + \int_{-1}^{1} |\rho(x)|\, dx \right) \max |f''(x)|. \qquad (4)$$

Оценка (4) показывает, что все квадратурные формулы, у которых

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}| \leqslant K, \qquad (5)$$

сходятся на всех функциях с ограниченной второй производной. Далее, применяя дважды метод сглаживания, он доказывает сходимость таких квадратурных формул на всех непрерывных функциях. Этот весьма общий результат В. А. Стеклова, обобщающий известную теорему Стилтьеса о сходимости квадратурной формулы Гаусса, в настоящее время является классическим.

Квадратурные формулы типа Гаусса и Чебышева удовлетворяют условию (5), поскольку для них

$A_k^{(n)} > 0$. Поэтому эти формулы сходятся на всех непрерывных функциях.

Некоторые из квадратурных формул, в частности формулы Котеса и Маркова, не удовлетворяют условию (5). Поэтому В. А. Стеклов рассматривает тот случай, когда условие (5) заменяется на более общее

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}| \leqslant Kn^{\mu}, \quad \mu > 0. \tag{6}$$

(Квадратурная формула Маркова удовлетворяет условию (6) при $\mu = 1$.) Для таких квадратурных формул В. А. Стеклов доказывает сходимость на таких функциях $f(x)$, что $f^{(s)}(x)$ удовлетворяет условию Липшица, где s — целое число, удовлетворяющее неравенству

$$s > \mu - \frac{1}{2}.$$

Квадратурная формула Котеса не удовлетворяет условию (6), но удовлетворяет более общему условию

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}| \leqslant K \frac{2^n}{n^{3/2} \ln^2 n}. \tag{7}$$

В. А. Стеклов доказывает, что квадратурная формула Котеса сходится на функциях $f(x)$, голоморфных в некоторой окрестности отрезка $[-1,1]$. Наконец, сходимость квадратурных формул с положительными коэффициентами он доказывает на всех интегрируемых по Риману функциях.

Вопросу оценки остаточного члена квадратурных формул В. А. Стеклов посвятил вторую замечательную статью [104] и значительную часть обширных работ [106—108]. Исходным пунктом его исследования служит приближение функций с помощью ортогональных полиномов с весом ρ (полиномов Чебышева)*). Пользуясь рекуррентными соотношениями для этих полиномов, В. А. Стеклов получает выражение для остаточного члена (погрешности) при разло-

---

*) См. сноску на с. 41.

жении функций f по (нормированным) полиномам Чебышева $\mathscr{P}_p$ (с весом ρ) в виде интеграла

$$\rho_p(x) = \int_{-1}^{1} \rho(y) \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \times$$

$$\times [\mathscr{P}_{p+1}(x) \mathscr{P}_p(y) - \mathscr{P}_p(x) \mathscr{P}_{p+1}(y)]\, dy.$$

Искусно применяя выведенное им в [105] одно элементарное тождество, представляющее собой не что иное, как формулу многократного интегрирования по частям, он преобразовывает выражение остаточного члена к виду, содержащему производные высших порядков от разлагаемой функции. Так, например, для полиномов Лежандра В. А. Стеклов получает остаточный член в виде

$$\rho_p(x) = \frac{2}{(2p+1)!!} \left[f^{(p+1)}(\xi) - \frac{M+m}{2} \right], \tag{8}$$

где ξ — некоторое число из интервала $(-1,1)$, M и m — наибольшее и наименьшее значения $f^{(p+1)}(x)$ на $[-1, 1]$ соответственно.

Насколько точны его оценки, видно из того, что для разложений по полиномам Чебышева $T_n(x)$ (соответствующих весу $\rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$) получается

$$|\rho_p(x)| \leqslant \frac{\sigma_p}{2^p (p+1)!} \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left| f^{(p+1)}(x) \right|, \tag{9}$$

где $\sigma_p \to 1$ при $p \to \infty$, $1 < \sigma_p < 1{,}52$.

Исходя из формулы (8), В. А. Стеклов получает выражение для остаточного члена квадратурной формулы в виде

$$R_n[f] = \frac{2H_n}{(2p_n+1)!!} \left[f^{(p_n+1)}(\xi) - \frac{M+m}{2} \right], \tag{10}$$

где

$$H_n = \int_{-1}^{1} |\rho(x)|\, dx + \sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}|.$$

Используя общую формулу (10), он дает весьма простые выражения и оценки остаточных членов квадратурных формул Котеса и Чебышева. В. А. Стеклов получает также оценки остаточных членов квадратурных формул Гаусса и Маркова и сравнивает их с известными ранее оценками. Любопытно отметить, что его оценки, полученные из весьма общих рассмотрений, не сильно превосходят известные ранее оценки, полученные с использованием специфических особенностей квадратурных формул Гаусса и Маркова. Например, для формулы Гаусса при $n=5$ отношение оценок не превосходит 1,4.

Наконец, В. А. Стеклов указывает оценку остаточного члена в виде

$$|R_n[f]| \leqslant H_n E_{p_n}(f), \tag{11}$$

где $E_{p_n}(f)$ — величина наилучшего приближения функции f полиномами степени p_n. Известные в то время оценки величины $E_p(f)$ давали худшие оценки остаточного члена $R_n[f]$, чем его оценка (10). В связи с этим В. А. Стеклов ставит задачу о нахождении методов точного вычисления величины наилучшего приближения $E_p(f)$. Впоследствии эта проблематика получила широкое развитие и в настоящее время из нее выросло целое направление в математике — конструктивная теория функций.

Вопросу об отыскании наиболее практичных квадратурных формул В. А. Стеклов посвятил статьи [109—112]. Стремление улучшить квадратурные формулы Котеса и Чебышева привело его к убеждению, что в сложных случаях выгодно, с одной стороны, пожертвовать простотой распределения узлов, а с другой стороны, желательно иметь простые (рациональные) выражения для коэффициентов при условии сохранения максимально возможной степени точности. Предполагая, что нечетные моменты всех порядков, меньших или равных p_n, весовой функции ρ равны нулю, он исследует наиболее важные случаи квадратурных формул с небольшим числом узлов $n=3$, 4, 5, 6, 7. Для каждого из этих случаев В. А. Стеклов указал наиболее выгодные квадратурные формулы по простоте вычислений и точности. В частности, при $n=5$ им получена интересная квадратурная формула

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{32}{45} f(0) + \frac{49}{90}\left[f\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)\right] + \frac{1}{10}[f(-1) + f(1)] \tag{12}$$

с остаточным членом

$$R_5[f] = -\frac{2^5}{5 \cdot 3^2 \cdot 7^2} \frac{f^{(8)}(\xi)}{8!} = Af^{(8)}(\xi).$$

Любопытно отметить, что квадратурная формула Гаусса при $n = 4$, имеющая ту же степень точности, имеет остаточный член, равный $0{,}8Af^{(8)}(\xi')$.

В этом кратком обзоре работ В. А. Стеклова по квадратурным формулам уместно отметить известную формулу, полученную им в 1913 г. в работе [93]

$$f(x+0) - f(x+h-0) =$$

$$= \frac{4}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x}^{x+h} f(\xi) \cos \frac{(2k+1)\pi(\xi - x)}{h} d\xi. \quad (13)$$

Она справедлива для любых функций $f(x)$ с ограниченным изменением. Формула (13) имеет многочисленные применения; в частности, из нее следует теорема о разложении функций в тригонометрические ряды, асимптотические формулы, связанные с Г-функцией, свойства ζ-функции Римана и многие другие.

Наконец, нужно отметить, что В. А. Стеклов с большим совершенством владел аппаратом математического анализа и умел извлекать многочисленные и неожиданные следствия из сравнительно простых формул. Кроме цитированной работы [93], по этому поводу нужно отметить работы [55, 56, 58, 59, 105].

§ 6. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В РАБОТАХ В. А. СТЕКЛОВА

Асимптотические методы в анализе, зародившиеся еще в XVIII в., широко применялись уже в работах Ж. Лагранжа, П. Лапласа и У. Леверье, которые заложили фундамент теории возмущений.

Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений применяются в основном в следующих типах задач: 1) определение поведения решений дифференциального уравнения, когда независимая переменная стремится к некоторому пределу; 2) определение поведения решений дифференциального уравнения, когда некоторый параметр, входящий в уравнение или в дополнительные условия, стремится к некоторому пределу; 3) определение поведения решений дифференциального уравнения, когда независимая переменная и параметр стремятся к некоторым пределам одновременно; 4) определение решений дифференциального уравнения, которые имеют заданное асимптотическое поведение (ограниченные, устойчивые, имеют определенный порядок роста, периодические, почти периодические и т. д.).

Асимптотические методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, берут начало от работ Ж. Штурма и Ж. Лиувилля, применявших их при исследовании разложений по собственным функциям самосопряженной краевой задачи. Первое серьезное математическое обоснование эти методы получили в большом труде А. Пуанкаре «Новые методы небесной механики». Дальнейшее развитие асимптотических методов в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, было продолжено А. М. Ляпуновым и В. А. Стекловым.

Здесь мы остановимся вкратце на изложении исследований В. А. Стеклова по асимптотическим методам в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти методы возникли в связи с задачей (C) обоснования метода Фурье (см. § 2), когда потребовалось изучение асимптотического поведения собственных значений и собственных функций линейных дифференциальных операторов.

Имея в виду именно эту основную задачу, В. А. Стеклов в своих работах по асимптотическим методам дает общий метод получения асимптотических выражений для решений линейных самосопряженных дифференциальных уравнений и использует полученные асимптотические выражения для нахождения достаточных условий разложимости функций в ряды Фурье по собственным функциям. Эти результаты относятся, главным образом, к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям второго и четвертого порядков, содержащим большой параметр. Кроме того, В. А. Стекловым исследованы полиномы Якоби [54, 57, 106—108, 115], Эрмита [101, 106—108], Лагерра [102, 103], а также полиномы Чебышева [54, 59, 69, 94, 106—108, 113—115, 121, 125, 126] *), для которых он построил асимптотические формулы по независимой переменной.

*) См. сноску на с. 41.

Изученные В. А. Стекловым методы основаны на приведении уравнения

$$y'' + [\lambda^2 - q(x)]\, y = 0,$$

к которому сводится заменой независимой переменной и функции общее самосопряженное дифференциальное уравнение второго порядка, к интегральному уравнению Вольтерра и на применении к последнему метода последовательных приближений [69]. Эти методы восходят к Ж. Лиувиллю. Однако ни Ж. Лиувилль, ни другие авторы, пользовавшиеся этими методами (например, А. Кнезер), не применили их к столь общим и важным в анализе системам функций, как классические ортогональные полиномы. Между тем, эти полиномы связаны с краевой задачей, имеющей особенности (обращение $q(x)$ в бесконечность в случае полиномов Якоби или наличие бесконечного интервала в случае полиномов Эрмита и Лагерра), и поэтому не укладываются в обычную схему Штурма — Лиувилля. Впервые это сделал В. А. Стеклов, нашедший, кроме того, с помощью весьма простых и изящных соображений возможность дать удобную оценку для остаточных членов полученных им асимптотических выражений. В современной литературе разработанный им метод получения асимптотических выражений для классических ортогональных полиномов носит имя *Лиувилля — Стеклова*. Применение этого метода дало возможность В. А. Стеклову доказать теоремы разложения по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля с той же степенью общности, что и для обычных тригонометрических функций, но с меньшими ограничениями на коэффициенты уравнения, чем в работах А. Кнезера*). В работе [69] В. А. Стеклов выясняет, при каких условиях сходимость обобщенного ряда Фурье для функции $f(x)$ эквивалентна сходимости «приближенного» ряда, получаемого заменой функций, по которым производится разложение, первыми членами их асимптотических выражений.

Так как первый член асимптотических выражений, которые получает В. А. Стеклов, всегда представ-

*) Math. Ann, Bd. 58, 1904, S. 81—147; Bd. 60, 1905, S. 402—423; Bd. 63, 1907, S. 477—524.

ляется в виде $a_n\psi(x)\sin\lambda_n\varphi(x)$ или $a_n\psi(x)\cos\lambda_n\varphi(x)$ то полученные им теоремы устанавливают для некоторых классов функций одновременную сходимость обобщенного ряда Фурье и некоторого тригонометрического ряда. С этой точки зрения теоремы В. А. Стеклова весьма близки так называемым теоремам о *«равносходимости»*, установленным впоследствии в наиболее общей форме А. Хааром и Г. Сеге.

В своей заметке [83] (1910 г.) В. А. Стеклов вплотную подошел к теореме о равносходимости и фактически доказал ее для всех точек, где имеют смысл выражения $f(x \pm 0)$. Опираясь на свою теорию замкнутости, В. А. Стеклов доказывает совпадение суммы обобщенного ряда Фурье для функции $f(x)$ с самой функцией (или с $\frac{1}{2}[f(x+0)-f(x-0)]$ в ее точках разрыва). При этом ему приходится использовать вторые члены асимптотических формул. В этой заметке В. А. Стеклов установил, по сути, тот же результат о равносходимости, что и Э. Гобсон (1906 г.).

Позже В. А. Стеклов получил аналогичные результаты и для уравнений четвертого порядка. В совместной с Я. Д. Тамаркиным работе [86] он изучал задачу поперечных колебаний упругого однородного стержня, закрепленного на концах; здесь был получен важный результат: всякая функция, разлагающаяся в тригонометрический ряд Фурье, может быть разложена также и по фундаментальным функциям указанного уравнения.

Все перечисленные исследования В. А. Стеклова относятся к тому случаю, когда фундаментальные функции обладают свойством ортогональности.

Существенно новым этапом в развитии асимптотических методов в теории несамосопряженных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и вопросов разложения произвольных функций в ряды явились работы Я. Д. Тамаркина, выполненные под руководством В. А. Стеклова.

§ 7. ШКОЛА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В. А. СТЕКЛОВА

Петербургская математическая школа, созданная гениальным русским математиком и механиком П. Л. Чебышевым (1821—1894), истоки которой восходят еще к Л. Эйлеру (1707—1783), сыграла выдающуюся роль в развитии математики и механики как в нашей стране, так и за рубежом. На протяжении почти всей второй половины XIX и начала XX столетия в Петербурге преобладала тематика работ Чебышева. Положение несколько изменилось с того времени, когда сюда переехали из Харькова А. М. Ляпунов в 1902 г., а в 1906 г. В. А. Стеклов, вскоре создавший при Петербургском университете первую в нашей стране школу математической физики. Отметим, что выдающуюся роль в развитии математической физики в Петербурге сыграли исследования М. В. Остроградского (1801—1862) и В. Я. Буняковского (1804—1889). После появления их работ проблемы теории уравнений в частных производных находились в центре внимания многих представителей Петербургской математической школы (И. И. Сомов, В. Г. Имшенецкий, Н. Я. Сонин, С. В. Ковалевская и др.).

До приезда В. А. Стеклова в Петербург здесь получили замечательные результаты по теории дифференциальных уравнений такие выдающиеся математики, как А. Н. Коркин и А. А. Марков. Большое влияние на создание и научную деятельность школы В. А. Стеклова имели работы гениального русского математика и механика академика А. М. Ляпунова по математической физике (теория потенциала, теория устойчивости и др.).

В. А. Стеклов был не только выдающимся ученым, обогатившим математику и механику рядом важных исследований, но и прекрасным педагогом и организатором. Под его непосредственным руководством выросли такие ученые, как В. В. Булыгин (1888—1918), А. Ф. Гаврилов (1887—1961), М. Ф. Петелин (1886—1921), В. И. Смирнов (1887—1974), Я. Д. Тамаркин (1888—1945), А. А. Фридман (1888—1925), Я. А. Шохат (1886—1944) и др.

Плодотворной и многогранной была деятельность В. А. Стеклова и созданной им школы. Характерной чертой его научного творчества было объединение глубоких теоретических исследований с практическим применением математических методов к основам естествознания. Воспитанник Харьковского университета, лучший ученик и последователь А. М. Ляпунова, В. А. Стеклов в значительной мере воспринял тематику своего учителя. Уже во время пребывания в Харьковском университете по характеру и направлению своей научной деятельности В. А. Стеклов принадлежал к Петербургской математической школе. В начале своей научной деятельности В. А. Стеклов исследовал вопросы, связанные с механикой (гидродинамикой и теорией упругости). Однако наиболее важные результаты он получил, как уже отмечалось, в области математической физики. Большинство работ В. А. Стеклова относится к краевым задачам для уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений. Он впервые дал строгое обоснование метода Фурье решения смешанной задачи для уравнений колебания неоднородной струны и смешанной задачи охлаждения неоднородного твердого стержня. Математически вопрос сводится к задаче Штурма — Лиувилля для обыкновенного линейного самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка с линейными однородными граничными условиями. Основная задача состоит в доказательстве существования бесконечного множества собственных значений и в решении вопроса о разложимости произвольной функции по собственным функциям. В. А. Стеклов построил асимптотические выражения для собственных функций указанной задачи и для разложения произвольной функции по собственным функциям получает те же общие условия разложимости, что и при разложении в обычный тригонометрический ряд Фурье.

Наиболее важные результаты, достигнутые В. А. Стекловым, относятся к вопросам разрешимости и представления решений задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа при минимальных для своего времени предположениях о границе области и о граничных функциях. Особенно выдающихся успехов он добился в разработке теории замкнутости. Его идея усреднения функции, приведшая к понятию функции промежутка, области или множества, вошла в аппарат современной теории уравнений в частных производных, привела к понятию обобщенной функции и, таким образом, сблизила этот аппарат с реальными условиями физического эксперимента. Часть этих результатов В. А. Стеклов получил еще в харьковский период научной деятельности.

Появление В. А. Стеклова в Петербургском университете незамедлительно сказалось в учебной и научной жизни университета [XVI]. Уже за первые четыре года деятельности в университете он подготовил к научной работе нескольких способных студентов, из которых троих оставил в 1910 г. при кафедре математики для подготовки к научной и преподавательской деятельности.

Ученик В. А. Стеклова В. В. Булыгин *) был весьма одаренным и разносторонним математиком. По словам проф. А. М. Журавского, он был одним из любимых учеников В. А. Стеклова. В. В. Булыгин сначала занимался теорией дифференциальных уравнений, теорией эллиптических функций и другими вопросами математического анализа, а под конец своей краткой жизни с помощью теории эллиптических функций он нашел точную формулу для числа представлений целого числа N в виде суммы r квадратов **). Этот результат В. В. Булыгина является крупным успехом отечественной математики.

Исследования А. Ф. Гаврилова ***) относятся к уравнениям математической физики, к численным методам и другим вопросам. Он изучил нелинейные обобщения телеграфного уравнения и решил их методом разложения по степеням малого параметра. Здесь он применил к нелинейным уравнениям в частных производных одну идею А. М. Ляпунова и А. Н. Крылова, развитую ими для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Он показал, что разложение квадрата частоты в бесконечный ряд, достаточное для уничтожения вековых членов в решении обыкновенных дифференциальных уравнений, должно быть дополнено (в случае уравнений в частных производных) разложением в ряды по степеням малого пара-

*) В 1910 г. В. В. Булыгин окончил Петербургский университет и в том же году был оставлен В. А. Стекловым при кафедре для подготовки к научной и преподавательской работе. Рано умер (1918 г.), не успев оформить диссертацию.

**) ИАН, 1914, № 6, с. 389—404.

***) А. Ф. Гаврилов окончил Петербургский университет в 1912 г. и был оставлен В. А. Стекловым в 1914 г. при кафедре для подготовки к профессорскому званию.

метра также и других постоянных параметров, входящих в уравнение. Этим способом он получил нужные для устранения вековых членов параметры.

Ученик В. А. Стеклова М. Ф. Петелин *) уже в первой печатной работе «Об одной гидродинамической задаче Беркнеса» **), написанной совместно с А. А. Фридманом, показал, что он обладает большими способностями и трудолюбием. В этой работе рассматривается задача определения закона изменения объемов двух сфер, взаимное действие которых друг на друга в каждый момент подчиняется закону обратных квадратов расстояния.

Одним из наиболее выдающихся учеников В. А. Стеклова был ставший впоследствии академиком В. И. Смирнов ***), который получил замечательные результаты по аналитической теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. В своей магистерской диссертации В. И. Смирнов изучает уравнение

$$[x(x-a)(x-1)y']' + (x+\lambda)y = 0,$$

где $0 < a < 1$, λ — действительный параметр. В. И. Смирнов подробно исследует указанную задачу, в частности, дает полную картину спектра этого уравнения, а также выясняет вопрос, при каких условиях задача обращения имеет однозначное решение. Позже он дает качественный (топологический) критерий эквивалентности двух линейных уравнений второго порядка с рациональными коэффициентами с точки зрения рациональных преобразований независимого переменного. Данные результаты прилагаются к получению уравнения с четырьмя особыми точками из уравнения Гаусса. В дальнейшем В. И. Смирнов

*) Окончил в 1911 г. математическое отделение Петербургского университета и был оставлен В. А. Стекловым при кафедре для подготовки к научному званию.

**) СХМО, сер. 2, т. XIII, № 6, 1913, с. 253—262.

***) В 1910 г. окончил математическое отделение Петербургского университета. В 1912 г. был оставлен В. А. Стекловым при университете для подготовки к профессорскому званию. В 1918 г. В. И. Смирнов защитил магистерскую диссертацию «Задача обращения линейного дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками». В 1932 г. он избран членом-корреспондентом АН СССР. В 1943 г. В. И. Смирнов избран в действительные члены АН СССР.

получил важные результаты по теории дифференциальных уравнений в частных производных (функционально-инвариантные решения волнового уравнения на плоскости). Он исследовал (совместно с С. Л. Соболевым) сейсмические волны, распространяющиеся из некоторого точечного источника, находящегося под поверхностью Земли, под влиянием мгновенного толчка, возникшего в этой точке.

Перу В. И. Смирнова принадлежит известный «Курс высшей математики» в пяти томах — фундаментальное руководство, соединившее в себе необычайное богатство материала со строгостью и мастерством изложения.

Близким по тематике исследований учеником В. А. Стеклова был Я. Д. Тамаркин *). Ранние его исследования относятся к теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений любого порядка с переменными коэффициентами, а также к системе уравнений первого порядка, содержащих большой параметр λ. Коэффициенты уравнения или системы имеют асимптотическое представление в виде ряда по отрицательным степеням λ. Он дает метод интегрирования указанной системы при помощи рядов и выводит асимптотические представления решений при больших $|\lambda|$. Далее рассматривается предельная задача достаточно общего вида и выясняется связь между главной частью соответствующей функции Грина и собственными и присоединенными функциями. Изучается трансцендентное уравнение для характеристических значений и разложение функции Грина на простейшие дроби. Наконец, исследуется разложение произвольной функции по собственным и присоединенным функциям предельной задачи. Он впервые рассмотрел случай кратных корней соответствующего характеристического уравнения и построил асимптотические выражения, содержащие дробные степени

*) В 1910 г. окончил математическое отделение Петербургского университета и был оставлен В. А. Стекловым при университете для подготовки к научной и преподавательской деятельности. В 1917 г. Я. Д. Тамаркин защитил магистерскую диссертацию «О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды». Преподавал математику в Петрограде и Перми. В 1925 г. Тамаркин эмигрировал в Латвию, а оттуда в Америку, где и умер в 1945 г.

параметра λ. Работы Я. Д. Тамаркина, появившиеся вскоре после работ Г. Биркгофа, были первыми в нашей стране по несамосопряженным предельным задачам для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

Другой ученик Стеклова А. А. Фридман*) уже в студенческие годы исследует дифференциальные уравнения в частных производных эллиптического типа. В дальнейшем он стал известен работами по механике, динамической метеорологии и теории относительности.

Работы Я. А. Шохата**) посвящены изучению теории многочленов, наименее уклоняющихся от нуля на конечном и бесконечном промежутках, проблеме моментов и другим вопросам математики. В своей диссертации Я. А. Шохат исследует многочлены степени n (коэффициенты которых связаны некоторым линейным соотношением), наименее уклоняющиеся от нуля в данном промежутке (конечном или бесконечном).

Когда В. А. Стеклов приехал в Петербург и стал одним из основных руководителей математической подготовки в университете, Н. М. Гюнтер (1871—1941) уже имел значительный опыт преподавания математики в высших учебных заведениях. Он стал деятельным помощником В. А. Стеклова в организации школы математической физики.

Из всех петербургских математиков Н. М. Гюнтер стоял ближе всего к В. А. Стеклову по направлению своих исследований. Дальнейшее его научное творчество проходило под сильным влиянием научных достижений В. А. Стеклова. Источником основных идей Н. М. Гюнтера в математической физике явились

---

*) В 1910 г. окончил математическое отделение Петербургского университета и был оставлен В. А. Стекловым и Д. К. Бобылевым при университете для подготовки к научной и преподавательской деятельности. В 1922 г. защитил диссертацию «Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости».

**) Я. А. Шохат окончил в 1910 г. Петербургский университет и был оставлен В. А. Стекловым в 1911 г. при кафедре для подготовки к научной и преподавательской деятельности. В 1922 г. защитил диссертацию «Исследование одного класса многочленов, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке». В том же году, получив разрешение Советского правительства, он репатриировал в Польшу (его родители были польского происхождения), откуда вскоре эмигрировал в Америку, где и умер в 1944 г.

работы В. А. Стеклова по сглаживанию функций. Большой цикл его исследований относится к применениям метода сглаживания функций. Этот метод привел к существенно более общим постановкам краевых задач математической физики. Н. М. Гюнтер систематически применяет понятие функции области (множества) и интеграла Стилтьеса к исследованию и решению этих задач. В этих терминах он излагает теорию потенциала.

Большое влияние оказывал В. А. Стеклов также и на научное творчество таких выдающихся ленинградских математиков и механиков, как И. М. Виноградов, А. М. Журавский, Н. С. Кошляков, Н. Е. Кочин, Р. О. Кузьмин, И. А. Лаппо-Данилевский, Н. Г. Четаев.

Работы В. А. Стеклова совпали с переломным моментом в истории математической физики. Уточняя старые и создавая новые методы, он вступал на совершенно новые пути математического исследования, предвосхищая плодотворные идеи современной математики — математики второй половины XX в. Сюда относятся, в первую очередь, его теория замкнутости и метод сглаживания функций.

После смерти В. А. Стеклова традиции ленинградской школы математической физики успешно развивали Н. М. Гюнтер, И. А. Лаппо-Данилевский, А. Н. Крылов, Р. О. Кузьмин, В. И. Смирнов, С. Л. Соболев, В. А. Фок, Н. П. Еругин и др.

§ 8. В. А. СТЕКЛОВ — ОРГАНИЗАТОР СОВЕТСКОЙ НАУКИ

Существенные изменения в Академии наук произошли вскоре после Февральской революции. В мае 1917 г. Императорская Академия наук была переименована в Российскую Академию наук. Тогда же впервые в истории этого научного учреждения академики сами избрали президента Академии наук. Президентом Академии стал академик А. П. Карпинский, который фактически руководил ею с мая 1916 г., исполняя обязанности вице-президента. Академик А. П. Карпинский, геолог, ученый с мировым именем, проявил себя крупным организатором науки.

Примерно в середине 1917 г. в Академии наук определилась группа ученых, стремившихся приблизить науку к народу и усилить ее влияние на жизнь общества. В этом движении, вдохновителем которого был А. М. Горький, принял самое активное участие и В. А. Стеклов. Человек твердых убеждений, мужественный и смелый, настоящий ученый и прекрасный организатор, веривший в великое будущее русского народа и русской науки, В. А. Стеклов стал одним из тех ученых, которые повели научный мир страны по пути становления нового общественного строя. Избрание именно такого человека вице-президентом Академии наук (1919 г.) явилось большим событием в ее жизни. На плечи В. А. Стеклова легло бремя больших забот, связанных с ростом и обновлением Академии наук, а вместе с ней и всей науки в России.

Сразу же после Великой Октябрьской социалистической революции партия большевиков во главе с В. И. Лениным поставила задачу широкого использования науки для строительства в нашей стране нового общественного строя — социализма. В апреле 1919 г. В. И. Ленин указывал: «Нужно взять всю культуру, которую капитализм оставил, и из нее построить социализм. Нужно взять всю науку, технику, все знания, искусство. Без этого мы жизнь коммунистического общества построить не можем. А эта наука, техника, искусство — в руках специалистов и в их головах» *). Задачу привлечения ученых, работавших в Академии наук, к культурному и хозяйственному строительству В. И. Ленин возложил на Наркомпрос. Народный комиссар просвещения РСФСР А. В. Луначарский писал: «Наркомпрос имел прямые директивы В. И. Ленина: относиться к Академии бережно и осторожно и лишь постепенно, не раня ее органов, ввести ее более прочно и органично в новое коммунистическое строительство» **).

В. А. Стеклов, ни минуты не колеблясь, перешел на сторону победившего народа и повел за собой многих ученых.

*) В. И. Ленин, Полн. собр. соч., т. 38, с. 55.
**) А. В. Луначарский. Академия наук и Советская власть.— «Рабочая газета», 1925, 14 августа.

Партия большевиков и Советская власть постепенно направляли усилия ученых, работавших в Академии наук, на строительство нового общества. Это привело не только к укреплению и расширению Академии наук, но и к подлинному расцвету всей советской науки. Большую роль в этом сыграла деятельность таких выдающихся ученых, как А. П. Карпинский, В. А. Стеклов, И. П. Павлов, К. А. Тимирязев, С. Ф. Ольденбург, А. Н. Крылов и др.

Молодая Советская республика переживала тогда тяжелые годы. Однако и в суровое время гражданской войны, несмотря на большие трудности, научная работа не прекращалась. Добиваясь расширения исследований в области физико-математических наук, В. А. Стеклов в январе 1919 г. совместно с академиком А. А. Марковым и А. Н. Крыловым поставил вопрос об организации в Академии наук специального Математического кабинета. Задачи его были сформулированы в записке, с которой эти ученые обратились к физико-математическому отделению *). Математический кабинет (ему были присвоены имена П. Л. Чебышева и А. М. Ляпунова) начал свою работу в 1919 г., его возглавил В. А. Стеклов. Он передал этому кабинету свою личную библиотеку.

В январе 1921 г. В. А. Стеклов представил в физико-математическое отделение развернутую записку, в которой обосновывал настоятельную необходимость организации при Академии наук физико-математического института **). Ссылаясь на М. В. Ломоносова, В. А. Стеклов пишет в этой записке: «Ни одна из естественных наук, если дело идет не о собирании сырого материала, а о действительном творчестве, не обойдется без математики, матери всех наук. Что же касается физики, поставленной впереди всех других наук, как и следует в проекте Ломоносовского Института, то в настоящее время математика и физика до такой степени слились в одно целое, что иногда трудно отделить — где кончается математика и начинается физика».

---

*) Протоколы заседаний физико-математического отделения Российской Академии наук, 1919, § 22.

**) Протоколы заседаний физико-математического отделения АН, 1921. Приложение к протоколу первого заседания (10 января 1921 г.).

Предложение В. А. Стеклова нашло единодушную поддержку в Академии наук, и в 1921 г. Физико-математический институт Российской Академии наук был организован ввиду «назревшей в науке потребности связать теснейшим образом физические науки с чисто математическими». Директором его был избран В. А. Стеклов. В состав института вошли Математический кабинет, Физическая лаборатория и Сейсмическая сеть, на базе которых были организованы соответствующие отделы. Физико-математический институт просуществовал до 1934 г. 11 марта 1934 г. он был разделен на два самостоятельных института: Математический институт им. В. А. Стеклова *), руководимый академиком И. М. Виноградовым, и Физический институт им. П. К. Лебедева во главе с академиком С. И. Вавиловым **).

После окончания гражданской войны масштабы научных исследований в нашей стране значительно расширились, что сказалось и на деятельности Академии наук. 26 января 1921 г. В. И. Ленин принял А. М. Горького, академиков В. А. Стеклова и С. Ф. Ольденбурга, начальника Военно-медицинской академии профессора В. Н. Тонкова и имел с ними беседу «по вопросу об обеспечении научно-исследовательской работы в Советской республике».

Вспоминая об этой встрече с В. И. Лениным, А. М. Горький впоследствии писал: «Помню, я был у него с тремя членами Академии наук ***). Шел разговор о необходимости реорганизации одного из высших научных учреждений Петербурга. Проводив ученых, Ленин удовлетворенно сказал:

— Это я понимаю. Это умники. Все у них просто, все сформулировано строго, сразу видишь, что люди хорошо знают, чего хотят. С такими работать — одно удовольствие. Особенно понравился мне этот ...

Он назвал одно из крупных имен русской науки, а через день уже говорил мне по телефону:

---

*) Имя В А Стеклова было присвоено Физико-математическому институту АН СССР в 1926 г., сразу после смерти Владимира Андреевича.

**) Протокол Президиума АН СССР от 11 марта 1934 г

***) В. Н Тонков, известный анатом, не был тогда действительным членом Академии наук. Он стал действительным членом АМН в 1944 г.

— Спросите С.*), пойдет он работать с нами? И когда С. принял предложение, это искренне обрадовало Ленина, потирая руки, он шутил:

— Вот так, одного за другим, мы перетянем всех русских и европейских архимедов, тогда мир, хочет не хочет, а — перевернется!» [XXXV].

Эта высокая оценка В. И. Ленина очень наглядно характеризует деятельность В. А. Стеклова после Октябрьской революции. Имеются сведения о том, что были и другие встречи В. А. Стеклова с В. И. Лениным. В. А. Стеклов высоко отзывался о В. И. Ленине. Он писал: «Влад[имир] Ильич представляется мне исключительным типом активного полит[ического] деятеля, соединившим в себе одновременно и способность действовать решит[ельно] и неуклонно для достиж[ения] намеченной цели, и редкий дар политической интуиции, позволяющий ему угадывать чутьем, так сказать, те стихийные начала, которыми движется жизнь народов и к которым почти никогда не применима обычная мерка логических рассудочных построений. Как практический деятель, он, на мой взгляд, обладает редкой способностью приводить в осуществление раз намеченную им цель, выбирая для этого средства, наиболее целесообразные для данного места и времени.

Эта отчетливость в мысли и действиях и ставила его выше других политических деятелей и естественно выдвигала его как вождя и руководителя того переворота, который и мог соверш[иться] только под его руков[одством].» [XXXII, оп. 3, № 184, л. 1].

Для переговоров по делам науки В. А. Стеклов встречался также и с народным комиссаром просвещения А. В. Луначарским. Сохранилась записка В. А. Стеклову М. Ф. Андреевой, которая писала:

«Глубокоуважаемый Владимир Андреевич! Так как Анатолий Васильевич Луначарский может приехать к Алексею Максимовичу только в 9 часов вечера сегодня, 19 апреля 1918 г., в пятницу, то Алексей Максимович Горький просит Вас пожаловать к нам сегодня к 9 часам для свидания и переговоров с Луначарским.

*) Речь шла о В. А. Стеклове.

Шлю Вам общий с Алексеем Максимовичем привет и ждем Вас вечером. Мария Андреева» [XXXII, оп. 2].

В. А. Стеклов был одним из инициаторов и организаторов Особого Временного Комитета науки при Совете Народных Комиссаров СССР. В состав этого комитета входили представители от Академии наук и народных комиссариатов. При непосредственном участии В. А. Стеклова комитет разработал и провел в жизнь ряд постановлений правительства, способствовавших росту как самой Академии наук, так и многих других научных учреждений страны.

В трудные годы гражданской войны В. А. Стеклов принимал активное участие в работе по изучению Курской магнитной аномалии, приведшему к открытию громадных залежей железной руды. Он заведовал теоретической и вычислительной частью экспедиции северного района Курской магнитной аномалии [XXXII, оп. 3, № 15, л. 18]. В. И. Ленин придавал большое значение этим исследованиям. Высоко оценивая работу В. А. Стеклова по изучению Курской магнитной аномалии, Совет Труда и Обороны СССР в апреле 1923 г. объявил ему благодарность [XXXII, оп. 3, № 1, л. 48].

В. А. Стеклов состоял членом Постоянной комиссии по изучению тропических стран и был также активным деятелем двух комитетов — Комитета по делам Главной Российской астрономической обсерватории и Комитета по делам Российского гидрологического института. Владимир Андреевич принимал активное участие в восстановлении и строительстве сети сейсмических станций в стране. В. А. Стеклов принимал деятельное участие в подготовке нового Устава Академии Наук. Этот Устав был почти без поправок принят в 1927 г. (спустя год после смерти В. А. Стеклова). Он оказывал большое влияние на строительство в Академии наук, будучи членом Строительной комиссии. Наконец, В. А. Стеклов был членом Издательской комиссии Академии наук и входил в Международную комиссию по изданию трудов Л. Эйлера, постоянное местопребывание которой было в Цюрихе (Швейцария).

На основе этого краткого перечня обязанностей В. А. Стеклова можно составить лишь самое общее, далеко не полное представление о его деятельности после Великой Октябрьской социалистической революции. Одновременно он вел большую общественно-организаторскую работу и вне Академии наук. Нужно отметить, что В. А. Стеклов не любил быть членом комиссии лишь по названию. Везде, где он участвовал, он проявлял себя энергичным и полным инициативы деятелем.

Вспоминая о деятельности В. А. Стеклова на посту вице-президента Академии наук в эти трудные годы А. Н. Крылов пишет [XIX]: «... лишь благодаря Стеклову и тому доверию, которое он заслужил у Советского правительства, он сохранил от гибели (от сырости и скудного отопления) коллекции Зоологического и Этнографического музеев, которые нельзя даже и оценить на деньги. Все труды по достойному оформлению 200-летнего юбилея Академии... Стеклов вынес на своих плечах. Новый устав Академии 1927 г. был разработан им лично и удостоен утверждения правительства с весьма немногими поправками».

Вспоминая о своем учителе, В. И. Смирнов так писал о В. А. Стеклове: «В. А. взял на себя работу как по административно-хозяйственной, так и по организационно-научной части в тот момент, когда, казалось, ничего нельзя сделать, все рассыпается. Но не в темпераменте В. А. было складывать руки в тяжелый момент. Чем затруднительнее было положение, тем с большей энергией брался В. А. за дело...» [VIII, стр. 18]. В другом месте [XXIV]: «Владимир Андреевич был человеком исключительной воли, целеустремленности и общественного темперамента. Это ярко сказывалось во всей его деятельности ... Но первым делом его жизни была наука... Но ошибочно было бы представить себе Владимира Андреевича только как математика. Он был большим знатоком русской истории и русской музыки. Его привычка приводить по разным поводам случаи из русской истории, изречения Петра Великого, Ломоносова, Лобачевского была не просто любовью к русскому стилю, а выражением подлинной, кровной связи со всей русской культурой...»

Деятельность В. А. Стеклова как вице-президента АН СССР — яркое выражение глубокого патриотизма крупнейшего русского ученого, его большой заботы о развитии советской науки.

§ 9. В. А. СТЕКЛОВ — ИСТОРИК МАТЕМАТИКИ, ФИЛОСОФ, ПИСАТЕЛЬ

В. А. Стеклов был не только выдающимся математиком и механиком, прекрасным педагогом и организатором научных исследований. Еще в молодые годы он часто задумывался над тем, какая роль принадлежит математике в материальном и культурном развитии общества. Развитие математической науки он рассматривал с позиций философа-материалиста. В этом сказалось влияние на него идей революционных демократов: И. А. Добролюбова, Н. Г. Чернышевского, Д. И. Писарева и др.

Уже с первых дней Февральской революции В. А. Стеклов вместе с А. М. Горьким начал активную деятельность в области популяризации науки. С этого же времени он начал обработку своих заметок историко-математического и философского характера.

В. А. Стеклов всегда стремился приблизить науку к народу, усилить ее влияние на жизнь общества. При этом он имел в виду не только прикладную роль науки. «Наука, — говорил он, — есть нравственный образователь человечества».

В. А. Стеклов был большим мастером трудного жанра научно-художественной прозы. Он написал две книги научно-биографического характера: одну о М. В. Ломоносове [147], другую о Г. Галилее [148]. М. В. Ломоносова он оценивал как одного из самых важных деятелей русской науки. По мнению В. А. Стеклова, М. В. Ломоносов не был понят своими современниками. Об этом он так писал: «Во времена Ломоносова только один человек ясно понимал всю глубину и самобытность его гения, это — один из величайших геометров мира Эйлер, что стало известным лишь из частных писем Эйлера ... Большинство же современных ему ученых относились к идеям Ломоносова безучастно, а иногда даже враждебно...» [147, стр. 6].

Нужно отметить, что до начала 20-х годов текущего столетия М. В. Ломоносов был больше известен как писатель. Тому представлению об этом гении русской науки, которое мы имеем сейчас, мы обязаны, в числе других работ, и книге В. А. Стеклова. Автор книги воскрешает живой портрет великого и самобытного ученого, вышедшего из неграмотной крестьянской среды дикого севера и открывшего в химии, физике и других науках столь широкие горизонты, что их не могли охватить не только его современники в России, но и большинство ученых Запада. Деятельность М. В. Ломоносова, и в особенности его научные достижения, описаны В. А. Стекловым так глубоко и интересно, как это мог сделать только разносторонний ученый, сам сделавший в науку большой вклад и к тому же мастерски владеющий художественным словом.

В. А. Стеклов написал прекрасный биографический очерк о Галилео Галилее. Этот очерк, хотя и не содержит подробной биографии великого ученого, дает ясное представление о науке того времени и о новых путях в ней, проложенных Г. Галилеем. В книге [148] показана героическая борьба великого ученого с господствовавшими во времена средневековья предрассудками и религиозным фанатизмом.

Блестящим примером популяризаторской деятельности В. А. Стеклова является речь, произнесенная им 16 мая 1921 г. на торжественном чествовании Академией наук столетия со дня рождения П. Л. Чебышева [145]. В этой речи с необыкновенной яркостью он раскрыл талант П. Л. Чебышева, умело объединявший глубокие теоретические исследования с насущными вопросами практики.

В. А. Стеклов написал прекрасные очерки о жизни и деятельности Н. И. Лобачевского [XXXII, оп. I, № 130, л. 1—15], М. В. Остроградского [131] и других ученых.

В 1920 г. В. А. Стеклов закончил работу над книгой на историко-философскую тему — «Математика и ее значение для человечества» [149]. Говоря о задачах своей книги, он писал: «Я хотел, с одной стороны, в кратком историческом обозрении установить теснейшую связь математики со всеми философскими системами, начиная с древнейших, показать, что именно математика всегда являлась и является источником философии, что она создала философию и может быть названа «матерью философии».»

С другой стороны, я пытался последовательно, в общих чертах, проследить движение философской мысли в решении вопроса о происхождении и достоверности человеческого знания... и, в частности, вопроса о происхождении и характере основных положений геометрии» [149, с. 30—31].

Краткий исторический обзор развития математики и ее влияния на философию написан В. А. Стекловым блестяще, точным и лаконичным языком математика. Он приходит к выводу, что математика является источником философии.

Излагая собственные воззрения, В. А. Стеклов утверждает, что все явления, происходящие в природе и в обществе, должны со временем стать объектами математики. Математика возникает и развивается на основе опыта, в результате практической деятельности людей. Он отвергает взгляд Э. Канта на математику как на априорную науку, вытекающую из свойств чистого разума, и выступает против кантовского агностицизма с его невозможностью познания «вещей в себе». Он писал: «... я признаю, что способность воспринимать известные внешние впечатления под формой именно пространственных ощущений, известных цветов и т. п. составляет природное свойство нашей организации и заложена в нас раньше всякого опыта, но в то же время утверждаю, что эта способность не может прийти в действие сама по себе, начать работать раньше, чем получится первое чувственное впечатление извне, т. е. раньше возникновения опыта в его первичной наипростейшей форме: человек в силу самой организации своей уже является в свет с потенциальной способностью воспринимать известную группу впечатлений под видом, например, пространственных ощущений, а не каких-либо иных, другую группу под видом цветов и т. п. Способности запоминать чувственные впечатления, ощущать их сходство и различие, т. е. сравнивать их между собой, воспроизводить их вновь в мозгу, также составляют природу того органа, который мы называем мозгом человека...» [149, с. 39].

В. А. Стеклов считал, что основы всех наук, в том числе и чистой математики (к которой он относил арифметику, алгебру и частично геометрию), созданы путем длительного ряда опытов и наблюдений и обобщения замеченных на многих частных случаях общих закономерностей. Особую роль он придавал интуиции как одной из форм познания. В. А. Стеклов писал: «... Здесь проявляется, на наш взгляд, особая способность человеческого ума, составляющая основу его творчества и одно из орудий открытия и изобретения, та способность, которую называют теперь интуицией, хотя и придают этому термину не всегда именно то значение, о котором мы сейчас говорим...» [149, с. 104]. Дальше он пишет: «... Метод открытия и изобретения у всех один и тот же, та же интуиция, ибо при помощи логики никто ничего не открывает; силогизм может только приводить других к признанию той или другой уже заранее известной истины, но, как орудие изобретения, бессилен... Математик иногда наперед высказывает весьма сложное положение, совершенно не очевидное, и затем начинает доказывать его... В изобретении чуть ли не каждого шага доказательства играет роль не логика, а все та же интуиция, которая идет поверх всякой логики» [149, с. 110].

Критикуя различные философские системы, В. А. Стеклов приходит к выводу: «Прирожденных или априорных идей в разуме человека не существует, все основные аксиомы и законы всех наук о природе, начиная с математики, извлекаются умом из опытов и наблюдений, но самая способность вскрывать их из накопленного в уме опыта указанным выше способом (интуиция) есть действительно прирожденное свойство того механизма, который мы называем мозгом. Наличность этой интуитивной способности устанавливается непосредственным наблюдением...» [149, с. 111].

По В. А. Стеклову, абсолютно достоверного ничего мы знать не можем, ибо наш ум — несовершенен, и он способен затушевывать истину. В. А. Стеклов придерживается в этом отношении точки зрения Н. И. Лобачевского, который говорил: «Оставьте трудиться напрасно, стараясь извлечь из ума всю мудрость: спрашивайте Природу — она хранит все тайны и на ваши вопросы будет вам отвечать непременно и удовлетворительно». Вполне понятно, что В. А. Стеклов придерживался взглядов Н. И. Лобачевского: сильный удар рационалистам и идеалистической школе Э. Канта был нанесен Н. И. Лобачевским созданием новой неевклидовой геометрии.

Заканчивая свою книгу, В. А. Стеклов высоко оценивает вклад великих русских математиков: «Изложенное выше направление в теории познания внешнего мира создано исключительно гениями математической мысли, среди которых одно из первых мест принадлежит русским математикам, а из этих последних первое место занимают Н. И. Лобачевский и П. Л. Чебышев» [149, стр. 137].

По поводу высказываний В. А. Стеклова о значении математики А. В. Луначарский писал: «Он был убежденным сторонником чисто эмпирического возникновения математики и с величайшим неодобрением относился к идеалистам и формалистам в этой науке. Он беспрестанно повторял, что математика — вся земная, но вместе с тем верил, что математическая формулировка явлений природы представляет собой предельную ясность истины. Он мне говорил как-то: «Люди непременно все согласятся между собой и притом по всем вопросам, но это будет тогда, когда наука о природе, т. е. вся истина, будет математически сформулирована». И торжествующе смеясь, хитро поглядывая на меня и поглаживая свою бороду пророка, он прибавлял: «Против математики не поспоришь...» Я обращаю особое внимание читателей на популярную брошюру Стеклова о математике, которую с пользой прочтет всякий, стремящийся к получению общего образования» [XXXIV].

Большие способности В. А. Стеклова в области художественной прозы проявились в книге «В Америку и обратно. Впечатления» [151] и в его повествованиях о своей жизни [XXXII]. В книге [151] он интересно описывает все: уклад жизни, нравы и вкусы представителей различных классов и национальностей Америки, роскошь главных улиц западных городов и убожество их окраин. В. А. Стеклов вводит читателя и в большой зал собрания представителей мировой науки, и в душную атмосферу биржи. Его описания природы одновременно и просты, и красочны.

Там же В. А. Стеклов описывает торжественную церемонию присуждения ему степени почетного доктора Торонтского университета, которой он был удостоен за свои выдающиеся работы по математике и механике.

Поражает громадная ответственность В. А. Стеклова перед своим народом: будучи за границей, он интересуется многими, казалось бы, посторонними вещами: новыми машинами, заводами, рудниками и по приезде составляет подробную записку с рекомендациями, как использовать технические новинки в народном хозяйстве России.

Работы В. А. Стеклова в области истории и философско-методологических основ математики, а также его научно-популярные произведения и блестящие статьи и речи о П. Л. Чебышеве [145], А. М. Ляпунове [144], А. А. Маркове [146], А. Пуанкаре [142], В. Томсоне [150] и др. не утратили своей актуальности и в наше время.

§ 10. ПОСЛЕДНИЕ ГОДЫ ЖИЗНИ В. А. СТЕКЛОВА

После избрания В. А. Стеклова вице-президентом Академии наук он переселился на квартиру в «академический дом» на набережной Невы, возле моста лейтенанта Шмидта. В этом доме раньше жили П. Л. Чебышев, А. М. Ляпунов, А. А. Марков, А. П. Карпинский, С. Ф. Ольденбург и другие академики. Большая квартира (№ 1) В. А. Стеклова находилась на первом этаже дома. Ее окна выходили на Неву.

Дом В. А. Стеклова всегда был открыт для близких друзей и многочисленных учеников. Часто бывал в нем А. М. Горький.

Ольга Николаевна всегда окружала В. А. Стеклова своими заботами. В эти трудные годы ей приходилось иногда и недоедать, но от мужа она это скрывала. Все это сказалось на ее здоровье. В 1920 году В. А. Стеклов отправил ее в Кисловодск, где она и умерла 7 сентября в возрасте 59 лет. Смерть жены была тяжелым ударом для В. А. Стеклова. Он стал более замкнутым, более суровым и в характере начала проявляться необычная для него мрачность.

Ведя большую организационную работу, В. А. Стеклов в последние годы своей жизни продолжал интенсивно заниматься наукой, но как и раньше — предмущественно в ночное время. Появляются его книги по математической физике [118], [119], книги о М. В. Ломоносове [147] и Г. Галилее [148], книга «Математика и ее значение для человечества» [149], впечатления от поездки в Америку [151], учебник по дифференциальным уравнениям [127], научные статьи [125], [126] и др.

Большим событием последних лет жизни В. А. Стеклова была командировка на Международный математический конгресс, проходивший в августе 1924 г. в Торонто (Канада). На конгрессе В. А. Стеклов сделал два доклада — «О задачах представления функций при помощи полиномов, приближенного вычисления определенных интегралов, разложения функций в ряды по полиномам и об интерполировании с точки зрения идей Чебышева» [121] и «О посмертном труде А. М. Ляпунова о формах равновесия вращающейся неоднородной жидкости» [122]. Вместе с В. А. Стекловым на конгрессе от Советского Союза были Н. М. Гюнтер, В. А. Костицын, Н. М. Крылов, Я. В. Успенский. Они сделали ряд сообщений по теории чисел, интерполированию, интегральным уравнениям, гидродинамике и другим вопросам математики.

Доклад В. А. Стеклова о посмертном труде А. М. Ляпунова произвел огромное впечатление на многих участников конгресса, о чем он позже так писал: «Не только методы и результаты посмертного труда А. М. Ляпунова, но и многие выводы его, полученные начиная с 1916 г., оказались новостью для западноевропейских и американских специалистов...» [151, стр. 27].

На этом конгрессе В. А. Стеклов подружился с профессором Дж. Филдсом, президентом конгресса. Отметим, кстати, что именно на этом конгрессе Дж. Филдс предложил учредить две золоты медали с премиями для награждения молодых математиков за выдающиеся достижения в математике, что и было принято в 1932 году после его смерти.

Командированный в июне и октябре 1925 г. в Германию, Италию и Австрию, В. А. Стеклов посещал там научные учреждения, встречался с видными учеными и вел переговоры об укреплении научных свявей. В Германии В. А. Стеклов, в частности, имел беседы с непременным секретарем Берлинской академии наук М. Планком.

Эти заграничные поездки В. А. Стеклова и участие его вместе с другими советскими математиками в работе конгресса способствовали повышению авторитета и влияния советской математики за рубежом.

В 1925 году исполнилось 200 лет со дня основания Академии наук. К празднованию своего юбилея Академия начала готовиться задолго до этой даты. В. А. Стеклов приложил много труда и энергии, чтобы этот юбилей превратился в подлинный праздник советской науки. Накануне юбилея он неоднократно выступал на страницах печати со статьями, в которых описывался большой исторический путь, пройденный Академией наук. В дни юбилея он участвовал в торжественных заседаниях и приемах в честь иностранных гостей, неоднократно выступал с докладами и речами.

Юбилейная сессия Академии наук СССР проходила с 5 по 14 сентября в Москве и Ленинграде. В один из этих дней В. А. Стеклов вместе с группой академиков осматривал Московский Кремль. Весь день шел проливной дождь. В. А. Стеклов был в легком пальто, без зонта и промок насквозь. На следующий день он почувствовал сильное недомогание, но, как всегда, перенес эту болезнь на ногах. Последствия оказались роковыми.

Вскоре В. А. Стеклов поехал в Италию и вернулся домой в декабре 1925 г. Однако состояние его здоровья не улучшалось.

23 февраля 1926 г. отмечалось 100 лет со дня открытия Н. И. Лобачевским неевклидовой геометрии. В. А. Стеклов, высоко чтивший великого ученого, присутствовал на торжествах в Казани. Поездка в Казань еще больше ухудшила его здоровье. От Москвы до Казани он ехал в холодном вагоне, промерз и простудился. В Москву возвратился с температурой около 39 °С, но как только температура спала, он опять занялся делами. Он не хотел принимать врачей и лишь после многих настояний (уже в апреле) согласился принять врача. Проходит еще один месяц — состояние

здоровья В. А. Стеклова все время ухудшается, появляется одышка. Он решает уехать в Крым лечиться. 14 мая перед отъездом навещает академию — это было его последнее посещение академии. 15 мая выезжает в Крым, предполагая пробыть там один месяц, однако судьба распорядилась по-своему: 30 мая в Гаспре В. А. Стеклов внезапно скончался. Похоронен В. А. Стеклов на Волковом кладбище в Ленинграде.

ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ. НЕКОТОРЫЕ ИТОГИ

Имена и дела ученых подвергаются испытанию временем. Сохраняется и развивается лишь то, что служит прогрессу и практической деятельности людей. Труды В. А. Стеклова, бесспорно, выдерживают такое испытание. Они оказали и продолжают оказывать большое влияние на дальнейшее развитие математики и механики. Академик А. Н. Крылов писал в 1936 г. о В. А. Стеклове: «... его можно причислить к той группе знаменитых русских математиков, в которую входят Остроградский, Чебышев и Ляпунов» [XIX].

Научные интересы В. А. Стеклова охватывали чрезвычайно обширный круг вопросов. В него входят исследования в области гидродинамики, теории упругости, аналитической механики, геофизики, истории науки, философии и, в особенности, многие вопросы математической физики и анализа: краевые задачи для уравнения Лапласа, теория фундаментальных функций, обоснование метода Фурье, теория замкнутости, асимптотические методы, разложение функций в ряды, квадратурные формулы, приближение функций, ортогональные полиномы и др.

Основные работы В. А. Стеклова посвящены математической физике В этой области им достигнуты выдающиеся результаты. Уточняя старые и создавая новые методы, он вступал на совершенно новые пути математического исследования, предвосхищая плодотворные идеи современной математики. Сюда относятся, в первую очередь, его теория замкнутости, метод сглаживания (усреднения) функций, функциональные неравенства типа теорем вложения. Он придал многим разделам математики ту строгость и точность, которые являются столь характерными для

Петербургской математической школы. По широте постановок задач и по глубине используемых методов работы В. А. Стеклова в области математики являются образцовыми.

Научно-педагогическая и общественная деятельность В. А. Стеклова была высоко оценена его современниками. За научные заслуги его избрали в 1902 году членом-корреспондентом Академии наук, в 1910 г. — адъюнктом Академии наук, в 1912 г. — ординарным академиком. С 1919 г. и до конца своей жизни В. А. Стеклов — вице-президент Академии наук. Он был членом многих математических обществ: Харьковского, Московского, Петербургского-Ленинградского, Палермо, почетным доктором университета в Торонто, членом-корреспондентом Академии наук в Геттингене, членом Германского сейсмологического общества в Йене и др.

Велики заслуги В. А. Стеклова и в том, что он впервые в нашей стране создал при Петербургском университете свою школу математической физики. Под его непосредственным руководством выросли многие крупные ученые.

В очень тяжелое время для нашей страны, в годы гражданской войны и разрухи, В. А. Стеклов осуществлял в Академии наук управление как по научно-организационной, так и по административно-хозяйственной работе. Он наладил печатание ученых трудов и приобретение из-за границы научной литературы и приборов, много работал над восстановлением разоренной сейсмической сети.

В. А. Стеклов состоял членом многих важных комиссий: комиссии по изучению производительных сил страны при Госплане, членом Комитета науки при Совнаркоме, председателем постоянной сейсмической комиссии и многих других организаций. Везде, где бы В. А. Стеклов ни участвовал, он проявлял себя инициативным и энергичным деятелем.

Особенно следует подчеркнуть роль В. А. Стеклова в организации Физико-математического института Академии наук, директором которого он был с момента его организации (1921 г.) и до конца своей жизни. В 1934 г. Физико-математический институт был разделен на два института: Физический институт им. П. Н. Лебедева и Математический институт им.

В. А. Стеклова. Фактически же началом организации Математического института следует считать дату 28 ноября 1932 г., когда академик И. М. Виноградов был избран его директором*). Ныне всемирно известный Математический институт Академии наук СССР по праву и с гордостью носит имя Владимира Андреевича Стеклова.

Имя В. А. Стеклова останется навсегда в науке. Его будут вспоминать не только как замечательного ученого-исследователя, но и как одного из выдающихся организаторов отечественной науки и блестящего педагога.

---

*) Еще раньше, 28 февраля 1932 г., общим собранием АН СССР было принято решение о разделении Физико-математического института.

СПИСОК ТРУДОВ В. А. СТЕКЛОВА

СОКРАЩЕННЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ИЗДАНИЙ, ГДЕ БЫЛИ ОПУБЛИКОВАНЫ РАБОТЫ:

СХМО	— Сообщения Харьковского математического общества.
Math. Ann.	— Mathematische Annalen.
ТОФНОЛЕ	— Труды Отделения физических наук общества любителей естествознания.
CR	— Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris
ЗХУ	— Записки Харьковского университета.
AFT	— Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.
JRAM	— Journal für reine und angewandte Mathematik.
B. l'Ac. Crac.	— Bulletin de l'Académie des sciences de Cracovie.
ЗФМО	— Записки Императорской Академии наук по физико-математическому отделению.
AEN	— Annales scientif. de l'École normale supérieure.
RAL	— Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei.
RCMP	— Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo
ИАН	— Известия Академии наук.
ДАН	— Доклады Российской Академии наук.

РАБОТЫ В. А. СТЕКЛОВА ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

1. Об интерполировании некоторых произведений. — СХМО, серия 2, 1889, т. 1, № 5–6, с. 239—248.

2. О движении тяжелого твердого тела в жидкости (статья I) — СХМО, серия 2, 1891, т. 2, № 5—6, с. 209—235.

3. О движении тяжелого твердого тела в жидкости (статья II) — СХМО, серия 2, 1891, т. 2, № 5—6, с. 236—244.

4. Одна задача из теории упругости. — СХМО, серия 2, 1891, т. 3, № 1, с. 1—34.

5. О равновесии упругих цилиндрических тел. — СХМО, серия 2, 1891, т. 3, № 1, с. 42—48; № 2, с. 49—93.

6. О высших и низших пределах вещественных корней алгебраических уравнений и их отделении. — СХМО, серия 2, 1891, т. 3, № 3, с 103—125.

7. О равновесии упругих тел вращения. — СХМО, серия 2, 1892, т. 3, № 4, с. 173—192; № 5, с. 193—251.

8. О движении твердого тела в жидкости. — СХМО, серия 2, 1893, т. 3, № 6, с. 263—264.

9. О движении твердого тела в жидкости. Диссертация на степень магистра прикладной математики. — Харьков, 1893, XVI + 234 с.

10 Über die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. — Math. Ann., т. 42, 1893, с. 273—274.

11. Дополнение к сочинению: «О движении твердого тела в жидкости» — СХМО, серия 2, 1894, т. 4, № 4, с. 161—164.

12. О некоторых возможных движениях твердого тела в жидкости — ТОФНОЛЕ, 1895, т. 7, вып 2, с. 10—21.

13. Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. — ТОФНОЛЕ, 1896, т. 8, вып. 2, с. 19—21.

14. О разложении данной функции в ряд по гармоническим функциям. — СХМО, серия 2, 1896, т 5, № 1—2, с. 60—73

15. Один случай движения вязкой несжимаемой жидкости. — СХМО, серия 2, 1896, т. 5, № 3—4, с. 101—124.

16. Задача об охлаждении неоднородного твердого стержня, — СХМО, серия 2, 1896, т. 5, № 3—4, с 136—181.

17 Sur le mouvement d'un solide dans un liquide indéfini. — CR, 1896, т 123, с. 1252—1253.

18. К вопросу о существовании конечной и непрерывной внутри данной области функции координат, удовлетворяющей уравнению Лапласа, при данных значениях ее нормальной производной на поверхности, ограничивающей область. — СХМО, серия 2, 1897, т 5, № 5—6, с. 255—286.

19. Об одном преобразовании дифференциальных уравнений движения свободной материальной точки в плоскости и его приложениях. — ТОФНОЛЕ, 1897, т. 9, вып. 1, с. 16—26.

20. О дифференциальных уравнениях математической физики. — Мат. сб., 1897, т. 19, вып. 4, с. 469—585.

21 По поводу одной теоремы Кирхгофа. — ЗХУ, 1897, кн. 4, с. 169—180.

22. О разложении данной функции в ряд по гармоническим функциям. — СХМО, серия 2, 1897, т. 6, № 2—3, с 57—124

23 Le problème de la distribution de l'électricité et le problème de C. Neumann. — CR 1897, т. 125, с. 1026—1029

24. Sur le problème de refroidissement d'une barre hétérogene. — CR, 1898, т. 126, с. 215—218.

25. Sur un problème de la théorie analytique da la chaleur. — CR, 1898, т. 126, с. 1022—1025.

26. О задаче Фурье. — Дневник X съезда русских естествоиспытателей и врачей в Киеве, 1898, с. 105

27. Sur le problème de la distribution de l'électricité. — СХМО, 2 серия, 1898, т. 6, № 4—5, с. 154—159.

28 К задаче о равновесии упругих изотропных цилиндров. — СХМО, серия 2, 1898, т. 6, № 4—5, с. 160—193

29 Новое частное решение дифференциальных уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку — ТОФНОЛЕ, 1899, т. 10, № 1, с. 1—3.

30. Sur le développement d'une fonction donnée suivant les fonctions harmoniques. — CR, 1899, т. 128, с. 279—282.

31. Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique — CR, 1899, т. 128, с. 588—591.

32. Sur l'existence des fonctions fondamentales. — CR, 1899, т. 128, с. 808—810.
33. Sur la théorie des fonctions fondamentales. — CR, 1899, т. 128, с. 984—987.
34. Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la physique mathématique. — AFT, série 2, 1900, т. 2, с. 207—272.
35 Mémoire sur les fonctions harmoniques de M. H. Poincaré. — AFT, 2e série, 1900, т. 2, с. 273—303.
36. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet.— CR, 1900, т. 130, с. 396—399.
37. Sur les problèmes de Neumann et de Gauss. — CR, 1900, т. 130, с. 480—483.
38. Remarque relative à une Note de M. A. Korn· «Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet». — CR, 1900, т. 130, с. 826—827.
39. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet (note II). — CR, 1900, т. 130, с. 1599—1601.
40. Le problème des températures stationnaires. — CR, 1900, т. 131, с. 608—611.
41. Sur les fonctions fondamentales et le problème de Dirichlet. — CR, 1900, т. 131, с. 870—873.
42. Sur la méthode de la moyenne arithmétique de Neumann (note I). — CR, 1900, т. 131, с. 987—989.
43 Sur la méthode de la moyenne arithmétique de Neumann (note II). — CR, 1900, т. 131, с. 1182—1185.
44. Общие методы решения основных задач математической физики., Докторская диссертация. — Харьков: Издательство ХМО, 1901, V + 291 с.
45. Sur l'existence de fonctions fondamentales. — CR, 1901, т. 135, с. 450—453.
46. Problème de refroidissement d'une barre hétérogène. — AFT, 2e série, 1901, т. 3, с. 281—313.
47. Remarque sur un problème de Clebsch sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini et sur le problème de M. Bruns. — CR, 1902, т. 135, с. 526—528.
48. Sur certaines égalités remarquables. — CR, 1902, т. 135, с. 783—786.
49. Sur la représentation approchée des fonctions. — CR, 1902, т. 135, с. 848—851.
50 Sur quelques conséquences de certains développements en séries analogues aux développements trigonométriques. — CR, 1902, т. 135, с. 946—949.
51. Remarques relatives à ma Note· «Sur la représentation approchée des fonctions». — CR, 1902, т. 135, с. 1311—1313.
52. Mémoire sur la mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini. — AFT, série 2e, 1902, т. 4, с. 171—219.
53. Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique. — AEN, série 3, 1902, т. 19, с. 191—259, с. 455—490.
54. Sur le développement d'une fonction donnée en séries procédant suivant les polynomes de Tchébycheff et en particulier, suivant les polynomes de Jacobi. — JRAM, 1902, т. 125, № 3, с 207—236.

55. Remarques relatives aux formules sommatoires d'Euler et de Bool. — СХМО, серия 2, 1904, т. 8, № 11—2, с. 136—144, 1904, т. 8, № 3—4, с. 145—195.
56. Sur une propriété remarquable de plusieurs développements souvent employés dans l'analyse. — CR, 1903, т. 136, с. 876—878.
57. Sur le développement d'une fonction donnée en séries procédant suivant les polynomes de Jacobi. — CR, 1903, т. 136, с. 1230—1232.
58. Sur la théorie des séries trigonométriques. — B. l'Ac. Crac., 1903, № 9, с. 713—740.
59. Sur certaines égalités générales communes à plusieurs séries de fonctions souvent employées dans l'analyse. — ЗФМО, серия 8, 1904, т. 15, № 7, с. 1—32.
60. Sur une égalité générale commune à toutes les fonctions fondamentales — CR, 1904, т. 139, с. 35—37.
61. Addition au mémoire «Sur la théorie des séries trigonométriques». — B. l'Ac. Crac., 1904, № 6, с. 280—283.
62. Sur la théorie générale des fonctions fondamentales. — CR, 1904, т. 138, с. 1569—1571.
63. Théorie générale des fonctions fondamentales. — AFT, 2 série, 1904, т. 6, с. 351—475.
64. Sur le problème du mouvement d'un ellipsoïde fluide homogène dont toutes les parties s'attirent suivant la loi de Newton. — CR, 1905, т. 141, с. 999—1001.
65. Sur le mouvement non stationnaire d'un ellipsoïde fluide de révolution qui ne change pas sa figure pendant le mouvement (note I). — CR, 1905, т. 141, с. 1215—1217.
66. Sur le mouvement non stationnaire d'un ellipsoïde fluide de révolution qui ne change pas sa figure pendant le mouvement (note II). — CR 1906, т. 142, с. 77—79.
67. Sur une méthode nouvelle pour résoudre plusieurs problèmes sur le développement d'une fonction arbitraire en séries infinies. — CR, 1907, т. 144, с. 1329—1332.
68. Sur le problème d'analyse intimement lié avec le problème de refroidissement d'une barre hétérogène. — CR, 1907, т. 144, с. 730—733.
69. Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions définies par les équations différentielles du second ordre et leurs applications au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant les dites fonctions. — СХМО, серия 2, 1907, т. 10, с. 97—199; русск. перев.: Об асимптотическом выражении некоторых функций, определяемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка и их применении к задаче разложения произвольной функции в ряд по этим функциям/Редакция и комментарии Н. С. Ландкофа. — Харьков: Издательство ХГУ, 1956, с. 1—138.
70. Remarque complémentaire au Mémoire; «Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions définies par les équations différentielles etc. — СХМО, серия 2, 1907, т. 10, с. 201—202.
71. Sur la théorie des tourbillons. — AFT, 2-e série, 1908, т. 10, с. 271—334.
72. Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible de la forme ellipsoïdale dont les parties s'attirent suivant la loi

de Newton (2 parties) — AEN, 3-e série, 1908, т. 25, p. 469—528; 1909, т. 26, с. 275—336.

73. Sur une généralisation d'un théorème de Jacobi. — CR, 1909, т. 148, с. 153—155.

74. Application du théorème généralisé de Jacobi au problème de Lie — Mayer. — CR, 1909, т. 148, с. 277—279.

75. Application du théorème généralisé de Jacobi au problème de Jacobi — Lie. — CR, 1909, т 148, с. 465—468.

76. Sur le théorème de l'existence des fonctions implicites. — CR, 1909, т. 148, с. 1085—1087.

77. Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoidale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes. — AFT, série 3, 1909, т. 1, с. 145—256.

78. Об уравнениях математической физики. — Дневник XII съезда русск. естествоисп. и врачей. — М., 1910, с. 425—426.

79. Sur l'existence des fonctions fondamentales correspondant à une équation différentielle linéaire du second ordre — RAL, 1910, т 8, с. 159—170.

80. Sur un théorème général d'existence des fonctions fondamentales correspondant à une équation différentielle linéaire du second ordre. — CR, 1910, т. 150, с. 452—454.

81. Sur le développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant certaines fonctions fondamentales. — CR, 1910, т. 150, с. 601—603.

82. Sur le développement d'une function arbitraire en séries de fonctions fondamentales. — CR, 1910, т. 151, с. 800—802.

83. Solution générale du problème de développement d'une function arbitraire en séries suivant les fonctions fondamentales de Sturm-Liouville. — RAL, 5 série, 1910, т. 19, с. 490—496.

84. Une application nouvelle de ma méthode de développement des fonctions fondamentales. — CR, 1910, т. 151, с. 974—977

85. Sur la condition de fermèture des systèmes de fonctions orthogonales. — CR, 1910, т. 151, с. 1116—1119.

86. Problème des vibrations transversales d'une verge élastique homogène/Совместно с Я. Д Тамаркиным. — RCP, 1911, т. 31, с 341—362.

87. К теории замкнутости систем ортогональных функций, зависящих от какого угодно числа переменных. — ИАН, серия 6, 1911, т. 5, № 10, с. 754—757.

88. Sur la théorie de fermeture des systèmes do fonctions orthogonales dépendant d'un nombre quelconque des variables. — ЗФМО, серия 8, 1911, т. 30, № 4, с. 1—87.

89. Remarque relative à ma note: «Solution générale du problème de développement etc». — RAL, 1911, т. 20, с. 16—17.

90. О некоторых задачах анализа, связанных со многими задачами математической физики. — ИАН, серия 6, 1912, т. 6, № 17, с. 1007—1010.

91. Sur quelques questions d'analyse qui se rattachent à plusieurs problèmes de la physique mathématique. — ЗФМО, серия 8, 1913, т. 31, № 7, с. 1—85.

92. Об одном приложении теории замкнутости к задаче о разложении произвольной функции в ряды под полиномам Чебышева. — ИАН, серия 6, 1913, т. 7, № 2, с. 87—92.

93. Sur une formule générale de l'analyse et ses diverses applications — Ann. di Mat. Pura et Appl., 3 série, 1913, т. 21, с. 65—120.

94. Sur une application de la théorie de fermeture au problème du développement des fonctions arbitraires en séries procédant suivant les polynomes de Tchébycheff. — ЗФМО, серия 8, 1914, т. 33, № 8, с. 1—59.

95. Quelques applications nouvelles de la théorie de fermeture au probème de représentation approchée des fonctions et au problème des moments. — ЗФМО, серия 8, 1914, т. 32, № 4, с. 1—74.

96. Application de la théorie de fermeture à la solution de certaines questions qui se rattachent au problème de moments. — ЗФМО, серия 8, 1915, т. 33, № 9, с. 1—52.

97. По поводу одной задачи Лапласа. — ИАН, 6 серия, 1915, т. 9, № 14, с 1515—1537.

98. О приближенном вычислении определенных интегралов при помощи формул механических квадратур. Сходимость формул механических квадратур. (Сообщение первое.) — ИАН, серия 6, 1916, т. 10, № 3, с. 169—186.

99. Sur la théorie de fermeture. — ИАН, 6 серия, 1916, т. 10, № 4, с. 219—226.

100. Quelques remarques complémentaires relatives à la théorie de fermeture. — ИАН, серия 6, 1916, т. 10, № 4, с. 257—265.

101. Théorème de fermeture pour les polynomes de Laplace — Hermite-Tchébycheff. — ИАН, серия 6, 1916, т. 10, № 6, с. 403—416.

102. Théorème de fermeture pour les polynomes de Tchébycheff — Laguerre. — ИАН, серия 6, 1916, т. 10, № 8, с. 633—642.

103. Sur le développement des fonctions arbitraires en séries de polynomes de Tchébycheff — Laguerre. — ИАН, серия 6, 1916, т. 10, № 9, с. 719—738.

104. О приближенном вычислении определенных интегралов при помощи формул механических квадратур. Остаточный член формул механических квадратур (сообщение второе). — ИАН, 1916, серия 6, т. 10, с. 829—850.

105. Sur quelques applications d'une identité élémentaire. — ЗФМО, серия 8, 1916, т. 34, № 2, с. 1—52.

106. Sur l'approximation des fonctions à l'aide des polynomes de Tchébycheff et sur les quadratures (статья I). — ИАН, серия 6, 1917, т. 11, № 3, с. 187—218.

107. Sur l'approximation des fonctions à l'aide des polynomes de Tchébycheff et sur les quadratures (статья II). — ИАН, серия 6, 1917, т. 11, № 8, с. 535—566.

108 Sur l'approximation des fonctions à l'aide des polynomes de Tchébycheff et sur les quadratures (статья III). — ИАН, серия 6, 1917, т. 11, № 10, с. 687—718.

109. Remarque sur les quadratures. — ИАН, серия 6, 1918, т. 12, № 2—3, с. 99—118.

110. Quelques remarques complémentaires sur les quadratures. — ИАН, серия 6, 1918, т. 12, № 7, с. 587—614.

111. Sur les quadratures (статья I). — ИАН, 6 серия, 1918, т. 12, № 17, с 1859—1890.

112. Sur les quadratures (статья II). — ИАН, 6 серия, 1919, т. 13, № 1, с. 65—96.

113. Sur le développement des fonctions continues en séries de polynomes de Tchébycheff. — ИАН, серия 6, 1921, т. 15, № 1—18, с. 249—266.

114. Une contribution nouvelle au problème du développement des fonctions arbitraires en séries de polynomes de Tchébycheff. — ИАН, 6 серия, 1921, т. 15, № 1—18, с. 267—280.

115. Une méthode de la solution du problème du développement des fonctions en séries de polynomes de Tchébycheff indépendante de la théorie de fermeture (статьи I и II). — ИАН, 6 серия, 1921, т. 15, с. 281—302, с. 303—326.

116. Определение размеров и глубины залегания магнитного слоя по 4 и 6 наблюдениям. — ДАН, серия А, 1922, с. 1—4.

117. К общей теории гравитационного вариометра Этвеша. — ДАН, серия А, 1922, с. 5—6.

118. Основные задачи математической физики, ч. I. — Петроград, 1922, IV + 285 с.

119. Основные задачи математической физики, ч. II. — Петроград, 1923, II + 285 с.

120. Sopra la teorie delle quadrature dette meccaniche. — RAL, 1923, т. 32, № 7, с. 320—326.

121. Sur les problèmes de représentation des fonctions à l'aide de polynomes, du calcul approché des intégrales définies, du développement des fonctions en séries infinies suivant les polynomes et de l'interpolation, considérés au point de vue des idées de Tchébycheff. — Proc. Int. Math. Congress, Toronto, august 11—16, 1924, т. 1, с. 631—640.

122. Les recherches posthumes de Liapounoff sur les figures d'équilibre du liquide hétérogène en rotation. — Proc. Int. Math. Congress, Toronto, august 11—16 1924, т. 2, с. 23—30.

123. Sur les mouvements spéciaux enregistrés par la station sismique Leningrad/Совместно с П. М. Никифоровым. — ДАН СССР, серия А, январь 1926, с. 5—6.

124. Über die Wiederherstellung des Netzes seismischer Stationen von USSR und über den gegenwärtigen Zustand der Arbeiten des Physikalisch-Matematischen Instituts der Akademie der Wissenschaften. — Zeitschrift fur Geophysik, 1926, № 1, с. 12—13.

125. Sur le problème d'approximation des fonctions arbitraires à l'aide des polynomes de Tchébycheff. — ИАН, серия 6, 1926, т. 20, № 10—11, с. 857—862.

126. Théorie de fermeture et le problème de représentation approchée des fonctions continues à l'aide des polynomes de Tchébycheff. — Acta Math., 1926, т. 49, с. 263—299.

127. Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.; Л.: Госиздат, 1927, X + 419 с.

РАБОТЫ В. А. СТЕКЛОВА ПО ИСТОРИИ НАУКИ, ФИЛОСОФИИ И ДРУГИМ ВОПРОСАМ; УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ, ОТЗЫВЫ

128. По поводу одного вопроса в споре о влиянии хлебных цен на некоторые стороны русского народного хозяйства. — Новое обозрение, СПб, 1897, № 8, с. 114—125.

129 Труд и хлебные цены. — Новое обозрение, СПб, 1897, № 10, с. 79—95.

130. Теоретическая механика/Курс лекций. — Харьков, 1901 (1), с. 1—370 (типолитография).
131. О работах М. В. Остроградского в области математической физики. — В кн.: П. Трипольский. Михаил Васильевич Остроградский. — Полтава, 1902, с. 1—138. (То же, УМН, 1953, т. 8, № 1, с. 102—103)
132. К вопросу о сроке службы профессоров и доцентов. — Труды совещания по выработке университетского устава при Министерстве народного просвещения. — СП, 1906 г., 5 с.
133. О двух ученых степенях. — Там же, 9 с.
134. О необходимости соединить две кафедры математики и механики в одну под общим названием кафедры математики. — Там же, 2 с.
135. Об университетских стипендиатах, лаборантах, ассистентах, помощниках прозектора и приват-доцентах. — Там же, 18 с.
136. Ученые степени, личный состав, порядок избрания и сроки службы профессоров и доцентов, — Там же, с. 5.
137. Сборник формул к лекциям по интегрированию функций, читанных в 1907 г. проф. Стекловым — Санкт-Петербургский ун-т, 1907 г., с. 1—10 (литография).
138. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений.—Санкт-Петербургский ун-т, 1910—1911, 222 с. (литография).
139. Уравнения с частными производными. — Санкт-Петербургский ун-т, 1910—1911, с. 1—280 (литография).
140. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. — Санкт-Петербургский ун-т, 1912—1913, с. 1—252 (литография).
141. Уравнения с частными производными. — Санкт-Петербургский ун-т, 1912—1913, с. 1—192 (литография).
142. Анри Пуанкаре/Некролог. — Журнал Мин. нар. просв., новая серия, 1913, ч. 43, № 1, отд. 4, с. 42—60; Ж. Русск. физ.-хим. об-ва, 1913, т. 95, физич. отдел., вып. 5, с. 173—193.
143 Празднование трехсотлетия открытия логарифмов в Эдинбурге (24—27 июля н. с. 1914 г.) — ИАН, серия 6, 1914, т. 8, с. 1133—1136.
144. Александр Михайлович Ляпунов (1857—1918)/Некролог. — ИАН, серия 6, 1919, т. 13, № 8—11, с. 367—388.
145. Теория и практика в исследованиях Чебышева. Речь, произнесенная на торжественном заседании Академии Наук, посвященном столетию со дня рождения П. Л. Чебышева. — Петроград, 1921, с. 1—21.
146. Андрей Андреевич Марков (некрологический очерк). — ИАН, серия 6, 1922, т. 16, № 1—18, с. 169—184.
147. Михайло Васильевич Ломоносов. — Москва; Ленинград — Берлин: Госиздат, 1923, с. 1—203.
148. Галилео Галилей. Биографический очерк. — Москва; Ленинград; Берлин: Госиздат, 1923, 103 с.
149. Математика и ее значение для человечества. — Москва; Ленинград — Берлин: Госиздат, 1923, 137 с.
150. В. Томсон (лорд Кельвин) — математик, физик, философ. — М.; Л.: Электричество, 1924, № 6, с. 300—309.
151. В Америку и обратно. Впечатления. — Л.: Время, 1925, 146 с.
152. Восстановление сети сейсмических станций СССР, кн. 2. — М.: Научный работник, 1925, с. 64—70.

153. А. А. Фридман/Некролог. — Геофизический сб., 1927, т. 5, № 1, с. 7—8.

154. Лекции по механике. 405 с. (Библиотека Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР) (литография)

155. Александр Михайлович Ляпунов (1857—1918)/Некролог. — Математический и астрономический сборник. Из Известий Российской Академии Наук, 6 серия, 1919. — Пгр., 1922, с. 367—388.

156. Записка об ученых трудах профессора Петроградского университета Якова Викторовича Успенского/Совместно с А. А. Марковым и А. Н. Крыловым. — ИАН, серия 6, 1921, т. 15, № 1—18, с. 4—6.

157. Записка об ученых трудах Жака Адамара (Jacques Hadamard)/Совместно с Я. В. Успенским и А. Ф. Иоффе. — ИАН, серия 6, 1922, т. 16, № 1—18, с. 33—37.

158. Записка об ученых трудах Давида Гильберта (David Hilbert)/Совместно с Я. В. Успенским и А. Ф. Иоффе. — ИАН, серия 6, 1922, т. 16, № 1—18, с. 29—32

159. Записка об ученых трудах С. Н. Бернштейна/Совместно с П. П. Лазаревым и А. А. Белопольским. — ИАН, серия 6, 1924, т. 18, № 12—18, с. 447—448.

160. Записка об ученых трудах Д. А. Граве, — ИАН, серия 6, 1924, т. 18, № 12—18, с. 448—449.

161. Записка об ученых трудах Н. М. Гюнтера. — ИАН, серия 6, 1924, т. 18, № 12—18, с. 441—442.

162. Записка об ученых трудах Д. Ф. Егорова. — ИАН, серия 6, 1924, т. 18, № 12—18, с. 445—446

163. Записка об ученых трудах Станислава Зарембы (S. Zaremba). — ИАН, серия 6, 1924, т. 18, № 12—18, с. 456—457.

164. Записка об ученых трудах И. И. Иванова, — ИАН, серия 6, 1924, т. 18, № 12—18, с. 442—444.

165. Записка об ученых трудах Адольфа Кнезера (Adolf Kneser). — ИАН, 6 серия, 1924, т. 18, № 12—18, с. 452—453.

166. Записка об ученых трудах Эдмунда Ландау (Edmund Landau). — ИАН, серия 6, 1924, т. 18, № 12—18, с. 451—452.

167. Записка об ученых трудах Поля Пенлевэ (Paul Painlevé). — ИАН, серия 6, 1924, т. 18, № 12—18, с. 449—450.

168. Записка об ученых трудах Франческо Севери (Francesco Severi). — ИАН, серия 6, 1924, т. 18, № 12—18, с. 453—454.

169. Записка об ученых трудах Дж. Чарльза Филдса (G. Charles Fields). — ИАН, серия 6, 1924, т. 18, № 12—18, с. 455—456.

170. Записка об ученых трудах Г. Х. Харди (Godfred Herold Hardy). — ИАН, серия 6, 1924, т. 18, № 12—18, с 450—451.

171. Записка об ученых трудах С. А. Чаплыгина. — ИАН, серия 6, 1924, т 18, № 12—18, с. 444—445.

172. К 200-летию Академии Наук. — «Известия», 29 июля 1925 г., № 171, с. 2.

173. Последнее пятилетие. — «Известия», 5 сентября 1925 г., № 202, с. 2.

174. Советская власть и наука. — «Экономическая жизнь», 5 сентября 1925 г., № 202, с. 4.

175. Выступление В. А. Стеклова на торжественном пленуме Моссовета по случаю 200-летнего юбилея Академии наук. — «Известия», 5 сентября 1925 г., № 210, с. 2.

ЛИТЕРАТУРА О В. А. СТЕКЛОВЕ

I. Материалы для библиографического словаря действительных членов императорской Академии наук, ч. 2. — П., 1917.

II В И. Ленин. Замстки во время беседы с А. М. Горьким. — Полное собрание сочинений, изд. 5-е.— М.: Госполитиздат, т. 44, с. 466.

III. Н. Н. Парфентьев. Научная характеристика В. А. Стеклова. — Известия физ.-матем. об-ва при Казанском университете, сер. 3, 1926, т. 1, с. 2—13.

IV А В. Луначарский. В. А. Стеклов. — «Наша газета», 1926, 1 июня.

V. А. Н. Крылов. Prof. V. A. Steklov — Nature, 1926, т. 118, № 2959, с. 91—92.

VI. П. М. Никифоров. В. А. Стеклов.— Природа, 1926, № 9—10, с. 3—20.

VII. Я. В. Успенский. Владимир Андреевич Стеклов. — Изв. АН СССР, серия 6, 1926, т. 20, № 10—11, с. 837—856

VIII Памяти В. А. Стеклова: Сборник статей. — Л.: Изд-во АН СССР, 1928, 92 с. (Н. М. Гюнтер, «О научных достижениях В. А. Стеклова»; В. И Смирнов, «В. А. Стеклов, Биографический очерк»; Б. Г. Галеркин, «Труды В. А. Стеклова по теории упругости»; И. В. Мещерский, «Гидродинамические труды В. А. Стеклова»; Н. М. Гюнтер, «Труды В А. Стеклова по математической физике»; Р. О. Кузьмин, «О работах В. А. Стеклова по теории механических квадратур».)

IX. A. Kneser. Wladimir Stekloff zum Gedächtnis. — Jahresb. der Deutsch. Mathem. Verein. — B ; L ; 1929, т. 38, № 9—12, с. 206—231.

X. Два месяца работы В. И. Ленина (Из хроники жизни и деятельности. Январь-февраль 1921). — М.: Партиздат, 1934 (О В А Стеклове — с. 39).

XI. Математика в изданиях Академии наук 1728—1935/Под ред. В. И Смирнова. — М.; Л.: Изд-во Академии Наук СССР, 1936.

XII. Б. В. Гнеденко. Очерки по истории математики в России — М.; Л., 1946, с. 161—162

XIII. В. И. Смирнов Работы В А. Стеклова о разложениях по ортогональным функциям/Юбил. сборник, посвященный 30 летию Великой Октябрьской социалистической революции. — М.; Л, Изд-во АН СССР, 1947, с 136—213

XIV. В. И Смирнов. Владимир Андреевич Стеклов (1864—1926). — В кн.: Люди русской науки, т. 1. — М ; Л., 1918, с. 235—240.

XV. Я. Л. Геронимус. Очерки о работах корифеев русской механики. — М., 1952, с. 394—449.

XVI. И. Я. Депман. В. А. Стеклов в Петербургском университете. — В сб. «Историко-математические исследования», вып. 6. — М.: ГИТТЛ, 1953, с. 509—528.

XVII. Э. Я. Бахмутская. О педагогической деятельности В. А. Стеклова в Харьковском технологическом институте. — В сб.: «Историко-матем. исследования», вып. 6, М.: ГИТТЛ, 1953, с. 529—534.

XVIII. Н. И. Ахиезер. К 90-летию со дня рождения В. А. Стеклова. — Труды Харьковского политехнического института, серия инж.-физ., 1955, т. 5. № 1, с. 3—14.

XIX. А. Н. Крылов. Памяти В. А. Стеклова. — В кн.: «Воспоминания и очерки». — Изд. АН СССР, 1956, с. 396—398.

XX. Стеклов Владимир Андреевич. — БСЭ, 2-е изд., 1957, т. 40, с. 578.

XXI. А. В. Кольцов. Академик В. А. Стеклов — вице-президент Академии наук СССР. — Вопросы истории естествознания и техники, 1959, № 7, с. 107—112.

XXII А П. Юшкевич. Математика. — История естествознания в России, т. II, М, 1960, с. 151—158.

XXIII. А. Т. Григорьян. Очерки истории механики в России. — М.: Изд-во АН СССР, 1961, с. 206—209.

XXIV. В. И. Смирнов. Памяти Владимира Андреевича Стеклова. — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 73, с. 5—13

XXV. А. И. Бородин. Академик В. А. Стеклов (К 100-летию со дня рождения). — Математика в школе, 1964, № 1, 81—82.

XXVI. История отечественной математики/Под ред. И. З. Штокало, т. II — Киев: Наукова думка, 1967, с. 363—377.

XXVII. Г. И. Игнациус. Владимир Андреевич Стеклов. — М.: Наука, 1967.

XXVIII. В. С. Владимиров, И. И. Маркуш. Академик В. А. Стеклов. — Знание, Сер. Математика и кибернетика, 1973, № 5, 64 с.

XXIX. И. И. Маркуш. К вопросу о создании Петербургской-Ленинградской школы математической физики В. А. Стеклова. — В сб.: «История и методология естественных наук», № 16, Математика и механика, М.: МГУ, 1974, с. 141—153.

XXX. В. С. Владимиров, И. И. Маркуш. В. А. Стеклов — человек, ученый, организатор советской науки. — Наука и жизнь, 1975, № 2.

XXXI. В. С. Владимиров. Стеклов Владимир Андреевич. — БСЭ, т. 24—1, 1976, с. 473—474.

XXXII. Ленинградское отделение архива Академии наук СССР, ф. 162, оп. 1—5.

XXXIII. Б. В. Пясковський. Соціально-політичні, філософські і науково-атеїстичні погляди академіка В. А Стеклова. Нариси з історії природознавстваі техніки, т. 6. — Київ, 1965, с. 72—81

XXXIV. А. И. Бородин, А. С. Бугай. Биографический словарь деятелей в области математики. — Киев: «Радянска школа», 1979, с. 463—465.

XXXV. А. М. Горький. В. И. Ленин. — В кн.: «Воспоминания о В. И Ленине», ч. I. — М.: Госполитиздат, 1955, с. 383.

XXXVI. А. И. Бородин. Советские математики. — Киев — Донецк: «Вища школа», 1978, с. 86—87.

XXXVII. В. А. Стеклов, А. Кнезер. Научная переписка (1901—1925)/Составители Маркуш И. И., Мюрсепп П. В., Бырдина Т. В., отв. редактор Е. П. Ожигова. — М.: Наука, 1980, с. 1—80.

XXXVIII. В. А. Костицын. Памяти В. А. Стеклова (вице-президент Академии наук СССР). — Научный работник, 1926, № 5—6, с. 6—11.

XXXIX. А. Ф. Иоффе. В. А. Стеклов как ученый. — Ленинградская правда, 1926, № 125.

Василий Сергеевич Владимиров
Иван Иванович Маркуш

ВЛАДИМИР АНДРЕЕВИЧ СТЕКЛОВ — УЧЕНЫЙ И ОРГАНИЗАТОР НАУКИ

Редакторы *В. П. Михайлов, М. М. Горячая*
Техн. редактор *Н. В Вершинина*
Корректоры *А. И. Назарова, И. Я. Кришталь, И. А. Шагас*

ИБ № 11902

Сдано в набор 16.04.81. Подписано к печати 21.10.81. Т 27733. Формат $84 \times 108^{1}/_{32}$. Бумага тип. № 1. Литературная гарнитура Высокая печать. Условн. печ. л. 5,04. Уч.-изд. л. 5,07. Тираж 45 000 экз. Заказ № 1116. Цена 15 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

15 коп.