Витольд Гуревич и Генри Волмэн

ТЕОРИЯ РАЗМЕРНОСТИ

И * Л

Государственное издательство

иностранной

литературы

*

DIMENSION THEORY

by

WITOLD HUREWICZ

and

HENRY WALLMAN

1941

В. ГУРЕВИЧ и Г. ВОЛМЭН

ТЕОРИЯ РАЗМЕРНОСТИ

Перевод с английского

И. А. ВАЙНШТЕЙН

под редакцией и с предисловием

П. С. АЛЕКСАНДРОВА

1948

Государственное издательство

ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Предлагаемая вниманию читателя книга Гуревича и Волмэна „Теория размерности“ является ценным произведением математической литературы как по богатству и свежести материала, значительная часть которого впервые изложена в современном его виде, так и по мастерству изложения, строгого, ясного и в то же время очень компактного. Книга написана доступно, опирается лишь на простейшие свойства метрических пространств и — в последней главе — на элементарные предложения теории групп. Таким образом, каждый университетский студент 3—4-го курса, интересующийся математическими вопросами теоретико-множественного характера и обладающий некоторой привычкой к применяемым в этих вопросах приемам математической мысли, может с успехом изучать эту книгу и несомненно много вынесет из нее. Чтение книги Гуревича-Волмэна является удобным способом войти в круг идей современной топологии путем изучения одного из наиболее увлекательных отделов этой дисциплины, связанного с другими основными частями топологии многочисленными и глубоко идущими нитями.

* * *

Развитие теории размерности довольно естественно распадается на три периода. К первому периоду относятся три знаменитые статьи, принадлежащие Пуанкаре [1]), Лебегу [2]) и Брауэру [3]). От статьи Пуанкаре идет сама проблема определения

[1]) Pourquoi l'espace a trois dimensions? *Revue de Méthaphisique et de Morale*, 1912.

[2]) Sur la non applicabilité de deux domaines appartenant à des espaces de n et $n+p$ dimensions, *Math. Ann.* 70 (1911).

[3]) Über den natürliche Dimensionsbegriff, *Journ. f. r. u. a. Math.* (Crelle), 1913.

размерности для достаточно широкого класса точечных множеств, и в ней дан первый набросок индуктивной формы этого определения. В работе Лебега впервые формулируется гениальная теорема о том, что n-мерный куб, допускающий, как легко видеть, при всяком $\varepsilon > 0$ конечные ε-покрытия[1]) кратности $n+1$, не допускает при достаточно малом ε конечных ε-покрытий кратности $< n+1$. Однако доказательство, данное Лебегом этой теореме, содержит существенные пробелы и не может считаться удовлетворительным. Первое безукоризненное доказательство было дано Брауэром, так что и самое теорему справедливо назвать теоремой Лебега-Брауэра. В цитированной работе Брауэр впервые превращает общие и еще очень расплывчатые идеи Пуанкаре в настоящее математическое определение того, что мы теперь называем индуктивной размерностью, и доказывает, что для n-мерного куба (или, что топологически, конечно, одно и то же — для n-мерного симплекса) индуктивная размерность совпадает с размерностью, определенной посредством кратности покрытий, которая в свою очередь совпадает с элементарно-геометрическим числом измерений. Таким образом, Брауэр не только дал впервые точное определение размерности, но и мотивировал это определение, доказав, что в применении к простейшим геометрическим фигурам — многообразиям и вообще полиэдрам — оно дает то, что нужно.

Объем понятия размерности открывает доступ к изучению ряда интересных свойств точечных множеств, к построению обширной теории, являющейся бесспорно одним из самых замечательных математических достижений первой половины двадцатого века.

Заслуга построения теории размерности в первую очередь принадлежит выдающемуся советскому математику Павлу Самуиловичу Урысону (1898—1924), который получил все относящиеся к ней результаты в течение осени 1921 и зимы 1921 — 1922 гг. и изложил их в докладах Московскому математическому обществу 16 октября 1921, 20 ноября 1921, 19 февраля 1922 и 28 мая 1922 г. (цитирую по протоколам Общества). В течение лета 1922 г. и зимы 1922/23 г. П. С. Урысон написал свой классический «Mémoire sur les mul-

[1]) Под ε-покрытием данного компакта F понимается система замкнутых множеств компакта F, каждое из которых имеет диаметр $< \varepsilon$ и которые в сумме дают весь компакт F.

tiplicités cantoriennes» (сданный в печать в марте 1923 г.)[1]; кроме того, он опубликовал в Comptes Rendus Парижской Академии 11 сентября и 25 сентября 1922 г. краткое изложение своих основных результатов.

Урысоновскую теорию размерности часто называют теорией Урысона-Менгера и даже Менгера-Урысона, основываясь на следующих произведениях австрийского математика К. Менгера:

1) Рукописная заметка, датированная осенью 1921 г. и принятая тогда же на хранение Венской Академией Наук; опубликована эта заметка лишь в 1926 г. в Proceedings Амстердамской Академии Наук, т. 29, стр. 1123—1124.

2) Работа „Über die Dimensionalität von Punktmengen", состоящая из двух частей; обе части напечатаны в журнале Monatshefte für Mathematik und Physik, первая — в т. 33, стр. 148—160, вторая — в т. 34, стр. 137—161.

Познакомимся ближе с этими произведениями.

Рукописная заметка не содержит ничего, кроме определений и формулировок следующих теорем (которые мы даем в современной терминологии):

1) Кривая, т. е. одномерный континуум, не может состоять из точек индекса 1.

2) Если все точки кривой имеют индекс $\leqslant 2$, то кривая есть либо простая дуга, либо простая замкнутая линия, либо открытая дуга.

3) Простая дуга есть кривая.

4) Кривая не может содержать топологического образа плоской области.

О множествах размерности >1 не высказано ни одной теоремы.

Оставляя в стороне вопрос о том, какой смысл вообще может иметь приоритет на определение, в связи с которым автор даже и не высказывает никаких теорем, мы можем сказать, что в данном случае этот вопрос просто снимается тем, что определение размерности было дано и основная теорема об n-мерности эвклидова пространства n-измерений была доказана Брауэром в работе, опубликованной за 8 лет до составления Менгером его рукописной заметки. Что же касается результатов, то ничего, кроме формулировок самых первых теорем об одномерных континуумах, эта заметка не содержит и поэтому, конечно, не может служить основанием для какой бы то ни было претензии на соавторство в создании теории размерности.

Переходим к изложению содержания основной публикации Менгера: «Über Dimensionalität von Punktmengen».

Как уже упоминалось, первая часть этой работы напечатана в 33 томе журнала Monatshefte für Mathematik und Physik. Эта первая часть вышла в свет в 1923 г. По собственному заявлению автора она была сдана в печать осенью 1922 г., т. е. после выхода в свет заметок Урысона в Comptes Rendus, содержащих все его основные результаты. На эти заметки Урысона Менгер ссылается в подстрочном

[1]) Работа опубликована в Fund. Math., тт. 7 и 8 (1925—1926).

примечании к своей работе, подчеркивая, впрочем, независимость своих результатов от результатов Урысона.

В разбираемой первой части работы Менгера мы находим определение размерности и определение кривой как одномерного континуума и, не считая почти очевидных предложений (как, например, теоремы о топологической инвариантности определения размерности, теоремы о том, что топологический образ отрезка имеет размерность равную 1, и т. п.), следующие теоремы:

Теорема III. Если в точке a континуум F имеет размерность >1, то не существует кривой, содержащей какую-либо окрестность точки a (относительно F).

Теорема IV. Если сумма счетного множества кривых (т. е. одномерных континуумов) есть континуум, то этот континуум есть кривая.

Теорема V. Кривая, лежащая в R^n, $n \geqslant 2$, не содержит внутренних точек (относительно этого R^n).

Теорема VI. Кривые на плоскости тождественны с континуумами без внутренних точек.

Теорема VII. На кривой точки, индекс ветвления которых $\leqslant$ данного n, образуют G_δ.

Теорема VIII. Среди компактных замкнутых множеств нульмерные множества совпадают с вполне несвязными, т. е. не содержащими связных множеств, состоящих более чем из одной точки.

Теорема X. Плоскость имеет размерность 2.

Другими словами, *эта первая часть содержит лишь предложения теории нульмерных и одномерных множеств и теорему о размерности плоскости*.

Из теорем об одномерных множествах наиболее трудной является теорема IV[1]).

Общий, т. е. n-мерный случай, без исследования которого ни о каком построении теории размерности, конечно, не может быть речи, составляет предмет лишь второй части работы Менгера; эта вторая часть, по печатному заявлению автора, сдана в печать осенью 1923 г., т. е. через год после выхода в свет заметок Урысона в Comptes Rendus. Подписана к печати работа 30 декабря 1924 г. (т. е. уже после смерти Урысона) и вышла в свет в самом начале 1925 г.

Эта вторая часть содержит следующие теоремы:

Теорема I. Подмножество n-мерного множества имеет размерность $\leqslant n$.

Теорема II. Размерность есть топологический инвариант.

Теорема III. Множество всех точек множества $\overline{M}$, в которых размерность M не больше (не меньше) k, есть G_δ (соотв. F_σ).

---

[1]) Эта теорема, имеющая в теории кривых основное значение, в рукописной заметке Менгера не формулируется; с другой стороны наиболее интересная и единственная сколько-нибудь трудная теорема, из числа сформулированных в рукописной заметке, а именно теорема 2 этой заметки (характеризующая простую дугу), в разбираемой основной работе своего доказательства не находит.

Теорема IV. Если A есть полное[1]) пространство, имеющее в данной точке a размерность $\geqslant n$, то не существует никакой окрестности $U(a)$ точки a и никакого замкнутого множества M размерности $\leqslant n-1$ таких, чтобы M содержало все точки, в которых A имеет размерность $\geqslant n$.

Эта теорема играет роль леммы при доказательстве следующего важного предложения:

Теорема V. В полном пространстве сумма счетного числа замкнутых множеств, имеющих размерность $\leqslant n$, имеет размерность $\leqslant n$.

Теорема VI. В полном пространстве ко всякому множеству M типа F_σ и ко всяким двум окрестностям O_1 и O_2 этого множества, из которых O_2 содержит O_1, можно найти третью окрестность, содержащую $\overline{O}_1$, содержащуюся в O_2 и имеющую границу размерности $\leqslant n-1$. (Эта теорема обычно называется теоремой об эквивалентности брауэровского определения с определением Урысона-Менгера.)

Теорема VII. Размерность n-мерного эвклидова пространства R^n и любого открытого множества этого пространства равна n.

Теорема VIII. Размерность границы ограниченного открытого множества в R^n равна $n-1$.

Теорема IX. $(n-2)$-мерные множества в R^n имеют связное дополнение.

Теорема X. Всякое n-мерное множество в R^n содержит открытое множество этого R^n.

Теорема XI. В R^n множества размерности n совпадают с множествами, содержащими внутренние точки.

Вот и все содержание основной работы Менгера. Если исключить предложения очевидные, а также многочисленные перефразировки одних и тех же утверждений, то содержание это сводится к двум действительно глубоким теоремам, именно: к теореме о том, что сумма счетного числа замкнутых множеств размерности $\leqslant n$ есть множество размерности $\leqslant n$, к теореме об n-мерности эвклидова пространства R^n и к довольно легким следствиям последнего предложения.

При этом следует иметь в виду, что теорема об n-мерности пространства R^n была доказана Брауэром за 10 лет до публикации Менгера.

Все теоремы, содержащиеся в разбираемых работах Менгера, были доказаны Урысоном осенью 1921 и зимой 1921/22 г. и изложены в его основном мемуаре.

Среди теорем, *доказанных Урысоном и не доказанных Менгером*, отметим следующие:

1) Прежде всего, в гл. 2 своего основного мемуара Урысон доказывает очень глубокую теорему о том, что совместная граница двух

---

[1]) Менгер называет полным множество, всякое ограниченное подмножество которого компактно, но при этом справедливо указывает, что можно было бы доказывать его результаты для любых множеств, являющихся абсолютными F_σ (т. е. суммой счетного числа компактов),

или более областей в трехмерном пространстве есть двумерное канторово многообразие (т. е. континуум, не разбивающийся никаким нульмерным множеством).

Для доказательства этой теоремы Урысон фактически построил в случае трехмерного пространства весь аппарат теории зацепления. Любопытно отметить, что в связи с доказательством этой теоремы Урысон совершенно самостоятельно, не зная о существовании работ Антуана, пришел к знаменитым антуановским примерам.

2) В гл. 6 Урысон доказывает свою знаменитую формулу

$$\dim(A \cup B) \leqslant \dim A + \dim B + 1$$

и выводит из нее теорему о том, что n-мерное множество может быть представлено как сумма $n+1$ нульмерных множеств и не может быть представлено как сумма меньшего числа нульмерных множеств. При этом даются очень точные оценки класса слагаемых с точки зрения дескриптивной классификации. Этой теоремы, одной из основных в теории размерности, у Менгера тоже нет. В той же шестой главе дается интереснейший эффективный пример n-мерного множества, не содержащего никакого континуума.

3) Но самая основная из теорем урысоновской теории размерности есть доказанная в гл. 5 теорема о том, что индуктивным образом определенная размерность $\dim F$ любого компакта F равна размерности, определенной при помощи покрытий, т. е. наименьшему числу $n = \operatorname{Dim} F$, такому, что при любом $\varepsilon > 0$ данный компакт имеет замкнутое ε-покрытие кратности $n+1$. Эта теорема является не только основой для всего дальнейшего развития теории размерности, но и для установления связей между этой теорией и важнейшими отделами комбинаторной топологии. Все важнейшие теоремы о размерности, доказанные за последние двадцать лет: теорема о превращении n-мерных компактов в n-мерные полиэдры путем сколь угодно малых непрерывных деформаций, равно как основывающаяся на этой теореме теорема о включении n-мерных компактов в $(2n+1)$-мерное эвклидово пространство, теорема о существенных отображениях на n-мерные симплексы, вся гомологическая теория размерности, понтрягинские примеры, опровергающие так наз. гипотезу произведения, теоремы о канторовых многообразиях, связи между размерностью и мерой и мн. др. возникли на почве определения размерности при помощи покрытий, т. е. касаются по существу инварианта $\operatorname{Dim} F$. Равенство $\operatorname{Dim} F = \dim F$ и установление таким образом возможности пользоваться „вторым" определением размерности принадлежит только Урысону; и Менгер, доказывая неравенство

$$\dim A \geqslant \operatorname{Dim} A, \tag{1}$$

нужное ему для доказательства совпадения размерности полиэдра с его элементарно геометрическим числом измерений, даже не ставит вопроса об обратном неравенстве[1]. Между прочим, неравенство (1) есть более легкая из двух частей урысоновской теоремы об эквивалентности, доказываемая почти автоматической индукцией, в то время

[1] И не выделяет $\operatorname{Dim} F$ в качестве особого топологического инварианта.

как обратное неравенство является действительно глубоким геометрическим фактом. Любопытно отметить, что доказательство неравенства (1) без всякого труда переносится на случай любых бикомпактов, между тем вопрос об обратном неравенстве

$$\dim A \leqslant \operatorname{Dim} A,$$

т. е. вопрос о справедливости теоремы Урысона для бикомпактов, составляет, повидимому, одну из труднейших задач теории топологических пространств, до сих пор не решенную, несмотря на большие усилия со стороны различных математиков.

Подведем итог сделанному краткому обзору работ Менгера. Единственной работой Менгера, которая, с одной стороны, написана до смерти Урысона (17 августа 1924 г.), а с другой — по содержанию своему может в какой бы то ни было мере претендовать на построение теории размерности, есть вторая часть его статьи «Über die Dimensionalität von Punktmengen». Но работа эта не только значительно беднее содержанием, чем урысоновский «Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes» и в соответствии с этим не оказала (и не могла оказать) на дальнейшее развитие топологии влияния, сравнимого с влиянием классического исследования Урысона, но *и была, по собственному заявлению автора, сдана в печать осенью 1923 г., т. е. через год после появления в печати урысоновских заметок в* Comptes Rendus и через полгода после того как Урысон сдал в печать свой мемуар, содержащий действительно полное и исчерпывающее изложение созданной им теории. При этих обстоятельствах преимущество Урысона перед Менгером в создании теории размерности является объективным историческим фактом, исключающим возможность считать Менгера равноправным с Урысоном соавтором этой теории.

* * *

Итак, второй период в развитии теории размерности — построение основ самой теории — связан в первую очередь с классическим исследованием П. С. Урысона «Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes». К этому же периоду относятся уже упомянутые работы Менгера, а также исследования Гуревича, советского тополога Л. А. Тумаркина, голландского математика Фрейденталя и др. Основные итоги этого периода подведены в книге Менгера «Dimensionstheorie» и в его же монографии «Kurventheorie», посвященной одномерному случаю теории размерности — теории канторовых кривых. Эта теория построена Урысоном во второй части его только что цитированного мемуара, опубликованной уже после его смерти пишущим эти строки в точном соответствии с планом, составленным еще самим Урысоном. Краткое изложение основных результатов второй части урысоновского мемуара содержится во второй его заметке в Comptes Rendus (от 25 сентября 1922 г.).

Из дальнейших результатов следует особенно отметить очень интересные работы Гуревича и Фрейденталя о непрерывных отображениях, изменяющих (т. е. повышающих или понижающих) размерность. В самое последнее время эти работы продолжены молодыми советскими учеными И. А. Вайнштейном и Я. М. Кажданом. Далее, необходимо отметить теорему Гуревича-Тумаркина о том, что каждый n-мерный компакт содержит n-мерное канторово многообразие (утвердительное решение задачи, поставленной П. С. Урысоном) и теорему Тумаркина о том, что любое p-мерное множество в n-мерном эвклидовом пространстве содержится в p-мерном же множестве типа G_δ, лежащем в том же пространстве.

*

Третий период развития теории размерности есть период геометризации этой теории и установления ее связей с другими отделами топологии, прежде всего комбинаторной. Как уже указывалось, все относящиеся сюда работы исходят из определения размерности посредством покрытий. Этот круг работ в современном построении теории занимает центральное место (в частности, в книге Гуревича-Волмэна около 140 страниц из 200 страниц основного текста этой книги). Подробнее об этих вещах мы будем говорить при более детальном обзоре содержания этой книги, к которому мы сейчас и переходим.

Первая глава книги носит вводный характер и посвящена историческим замечаниям, касающимся определения размерности и состояния теоретико-множественной топологии до возникновения теории размерности. В двух следующих главах — 2 и 3, дается построение теории индуктивной размерности[1]). Едва ли эту теорию, изложенную на 25 страницах, можно изложить проще, лучше и короче. Четвертая глава вводит нас в глубокие топологические свойства n-мерного эвклидова пространства, по существу комбинаторного характера, впервые понятые до конца Брауэром.

Глава начинается с изложения брауэровского понятия степени отображения, которое дается, как мы теперь говорим, „по модулю 2", т. е. с доведением до минимума всех алгебраических моментов изложения. После этого доказывается теорема Брауэра о неподвижных точках при непрерывных отображениях шара в себя и теорема о кратности покрытий n-мерного куба (т. е.

[1]) Для любых метризуемых пространств со счетной базой.

теорема Лебега-Брауэра). Мы привыкли в последние годы доказывать обе эти теоремы на основе леммы Шпернера. Автор избирает другой путь. Я не знаю короче ли он; во всяком случае он интересен, в частности, и тем, что доказательство Гуревича-Волмэна в известном смысле представляет, сравнительно со шпернеровским, возврат к первоначальным идеям Брауэра. Любопытно отметить, что хотя теорема Лебега-Брауэра и приводится, но сама n-мерность (в смысле индуктивного определения) n-мерного эвклидова пространства доказывается, минуя эту теорему, но, пожалуй, еще более в духе гомологической топологии, чем обычно. Следуют обычные теоремы об n- и $(n-1)$-мерных множествах в n-мерном эвклидовом пространстве. Глава заканчивается интереснейшим параграфом о бесконечномерных пространствах: вводятся слабо- и сильно-бесконечномерные пространства (последние характеризуются невозможностью представить их в качестве суммы счетного числа нульмерных, а значит, в силу теоремы Урысона и конечномерных множеств). Доказывается, что так наз. фундаментальный параллелепипед гильбертова пространства (а следовательно, и само гильбертово пространство) является сильно-бесконечномерным.

В гл. 5 доказывается, сразу для любых метризуемых пространств со счетной базой, основная теорема Урысона об эквивалентности двух определений размерности. Однако ввиду такой общности предпосылок вторая, наиболее глубокая и трудная часть теоремы, т. е. неравенство $\dim A \leqslant \operatorname{Dim} A$, доказывается лишь после теоремы о возможности топологического отображения любого n-мерного метрического пространства со счетной базой в $(2n+1)$-мерное эвклидово пространство R^{2n+1}.

Таким образом, основная теорема теории размерности:

$$\dim A = \operatorname{Dim} A,$$

где $\dim A$ есть индуктивная размерность, а $\operatorname{Dim} A$ — размерность, определенная при помощи кратности покрытий, оказывается как бы разорванной и вообще недостаточно выделенной. Между тем, как уже было упомянуто, основным инвариантом, изучению которого посвящена теория размерности, следует считать $\operatorname{Dim} A$, что, в частности, находит свое подтверждение в том, что геометрически наиболее интересные предложения теории размерности (мы перечислили некоторые из них на стр. 10) или прямо переносятся, или находят свои аналогии для любых бикомпактов, несмотря на то, что индуктивно определенная размерность (именно ввиду того, что ее совпадение с размерностью $\operatorname{Dim} A$ до сих пор не доказано) в случае бикомпактных топологических пространств без аксиомы счетности не дала до сих пор повода к установлению сколько-нибудь существенных новых топологических фактов. Недооценка основной роли инварианта $\operatorname{Dim} A$, присущая Гуревичу как математику, вышедшему из школы Менгера, приводит авторов книги к мнению, что интерес понятия размерности по существу ограничен применением этого понятия к метрическим пространствам со счетной базой. Это действительно так, если исходить из индуктивного определения. Между тем, если в основу теории класть размерность $\operatorname{Dim} A$, то область бикомпактов и даже просто нормальных пространств оказывается областью совершенно естественного и очень содержательного построения теории (см. по этому поводу мою статью о гомологической теории размерности, которая будет опубликована в одном из ближайших выпусков журнала „Успехи математических наук").

Я считаю нужным обратить внимание читателя на одну новую характеристику размерности, принадлежащую авторам рассматриваемой книги и представляющую, как мне кажется, большой интерес; к сожалению, она в книге Гуревича-Волмэна также разорвана и не выделена так, как того заслуживает. Речь идет о следующей теореме Гуревича-Волмэна:

Для того чтобы пространство имело размерность $\leqslant n-1$, необходимо и достаточно, чтобы при любом выборе n пар замкнутых множеств

$$(C_1, C_1'), (C_2, C_2'), \ldots, (C_n, C_n'),$$

удовлетворяющих условию $C_i \cap C_i' = 0$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, можно было бы найти замкнутые множества

$$B_1, B_2, \ldots, B_n$$

так, чтобы B_i отделяло C_i от C_i' (при любом $i = 1, 2, \ldots, n$) и чтобы

$$B_1 \cap \ldots \cap B_n = 0.$$

Доказательство этой теоремы помещено на стр. 58 и 111.

Очень интересным является обобщение одной половины этой теоремы на случай сильно-бесконечномерных компактов: авторы фактически доказывают (на стр. 75—76), но не формулируют следующую теорему:

Если в компакте Ф можно найти счетное число пар замкнутых множеств

$$(C_1, C_1'), (C_2, C_2'), \ldots, (C_n, C_n'), \ldots, C_n \cap C_n' = 0, \qquad (1)$$

таким образом, что при любом выборе замкнутых множеств B_n, соответственно отделяющих C_n от C_n', всегда

$$\bigcap_{(n)} B_n \neq 0,$$

то компакт Ф является сильно-бесконечномерным.

Возникает очень интересная задача: существует ли во всяком сильно-бесконечномерном компакте Ф счетное число пар, удовлетворяющих только что высказанному условию?

Основной предмет гл. VI разбираемой книги заключается в доказательстве следующих теорем:

1) Для того чтобы пространство имело размерность $\geqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы его можно было существенно отобразить на n-мерный куб.

2) Для того чтобы компакт, лежащий в n-мерном эвклидовом пространстве R^n, разбивал это пространство (т. е. чтобы $R^n \setminus Ф$ было несвязным), необходимо и достаточно, чтобы этот компакт можно было существенно отобразить на $(n-1)$-мерную сферу.

Обе эти теоремы впервые были доказаны мною в моей работе «Dimensionstheorie», Math. Ann. 106 (1932)[1]. Первую из двух только что сформулированных теорем (по существу тесно связанных между собою) авторы прилагают к доказательству теоремы Гуревича-Тумаркина о том, что во всяком n-мерном компакте содержится n-мерное канторово многообразие. Получающееся доказательство этой теоремы очень просто и элегантно.

Попутно доказываются различные элементарные теоремы, например классическая теорема Брауэра-Урысона о том, что всякая непрерывная функция, определенная на замкнутом

[1]) Мое первоначальное доказательство предполагало, что пространство компактно; впервые освободился от этого требования А. А. Марков. Впоследствии я показал, что теорема верна для любых бикомпактов и даже для любых нормальных пространств.

См. гл. VI моей книги „Комбинаторная топология", где воспроизведено мое первоначальное доказательство этой теоремы, не кажущееся мне более сложным, чем доказательства Гуревича-Волмэна.

множестве данного нормального пространства R, может быть продолжена на все это пространство[1]).

В конце гл. VI доказывается, что совместная граница двух или более областей в n-мерном пространстве есть всегда $(n-1)$-

[1]) Следуя очень распространенной, но необоснованной традиции, авторы называют эту теорему теоремой Титце. Между тем, для основного специального случая, когда объемлющее пространство R является эвклидовым (и даже в еще более широких предположениях), теорема была доказана Брауэром; для любых нормальных пространств она доказана — изумительно просто и прозрачно — Урысоном. *Обобщение на случай нормальных пространств представляет принципиальный интерес в силу своей окончательности:* во всяком не нормальном пространстве можно найти функцию, определенную на некотором замкнутом множестве и не допускающую продолжения на все пространство. Титце дал лишь промежуточный результат, доказав теорему для метрических пространств.

Исторические ссылки и цитаты составляют вообще самую слабую сторону книги Гуревича-Волмэна. Авторы указывают в предисловии, что „Исторические справки сделаны только для руководства начинающего студента и не претендуют на полноту". В действительности, исторических ссылок и цитат в книге вовсе не так мало, но, к сожалению, они не только не могут служить „руководством для начинающего студента", но сплошь и рядом могут лишь дезориентировать его. Дело в том, что, с одной стороны, приводятся ссылки на авторов тех или иных теорем часто по нисколько не принципиальным поводам. Таковы, например, ссылки на стр. 120 или специальная информация о том, что доказательство Куратовского представляет собой видоизменение доказательства Гуревича (стр. 89). В то же время действительно фундаментальные понятия и теоремы часто сообщаются без всякого упоминания имени их автора. Так, например, излагая в начале четвертой главы классическое брауэровское понятие степени отображения, авторы обходятся без упоминания имени Брауэра, которое, две страницы спустя, дается по поводу теоремы о неподвижных точках. „Начинающему студенту" естественно притти к заключению, что теорема о неподвижных точках доказана Брауэром, а понятие степени отображения, повидимому, принадлежит авторам книги! Точно так же еще во введении авторы дают различные формы задачи характеризации размерности с помощью существенных отображений, сообщая, что эти различные формы в *постановке* этой задачи принадлежат мне. Но они не считают нужным упомянуть, что *решение* этой задачи, которому в основном и посвящена гл. VI книги Гуревича-Волмэна, также принадлежит мне. Совершенно аналогичным образом авторы, посвящая длинную (занимающую почти треть всей книги) восьмую главу введению в гомологическую теорию размерности, не считают нужным указать, кто является автором этой теории и кому принадлежит основная доказываемая ими теорема этой теории. По поводу понятия канторова многообразия имя Урысона не упоминается вовсе. Вообще должного представления о фактической роли Урысона в создании теории размерности из книги получить нельзя. Я надеюсь, что настоящее предисловие до некоторой степени восполняет этот пробел.

мерное канторово многообразие. Эта теорема, которой Урысон придавал очень большое значение, доказана им с преодолением значительных трудностей для случая $n=3$ (для случая $n=2$ теорема была давно известна под названием „классической теоремы Фрагмена-Брауэра"). Первое доказательство для любого n было дано мною в 1927 г. Эта теорема была первым выходом теории размерности в область комбинаторных методов.

Гл. VII книги посвящена взаимоотношениям между теорией размерности и теорией меры, стоит в книге особняком и может быть пропущена без ущерба для цельности изложения и взаимной связи различных его частей. Относящиеся сюда результаты принадлежат польскому математику Шпильрайну. Однако еще до Шпильрайна вопросом о возможности характеризовать размерность посредством соотношения метрического характера с большим успехом занимались в Москве Л. С. Понтрягин и Л. Г. Шнирельман. Поэтому при издании русского перевода книги Гуревича-Волмэна было признано целесообразным дать в приложении замечательную работу Понтрягина-Шнирельмана.

Гл. VIII имеет своей задачей дать введение в так называемую гомологическую теорию размерности, построенную мною в 1930—1931 гг. и изложенную в моей работе «Dimensionstheorie». Фактически речь идет о „первой основной теореме" этой работы, устанавливающей возможность рассматривать брауэро-урысоновскую размерность как одну из гомологических размерностей. Привлечение открытой Александером и А. Н. Колмогоровым так наз. ∇-теории позволило авторам разбираемой книги дать особенно изящную формулировку этой теореме, рассматривая в качестве „области коэффициентов" лишь группу целых чисел.

Гомологическая теория размерности опирается на большой аппарат общей гомологической „комбинаторной" топологии. Этот аппарат в очень компактной форме дается читателю тут же, в гл. VIII, которая таким образом оказывается интересным, хотя и несколько своеобразным изложением основ комбинаторной топологии вообще, и может быть в этом качестве очень рекомендована читателю. В частности, в этой главе можно познакомиться с превосходным доказательством знаменитой теоремы Hopf'а о классификации отображений любого компакта на сферу. Все эти результаты, впрочем, легко обобщаются на случай любых нормальных пространств, с чем читатель может познакомиться по уже упоминавшейся моей статье, посвященной гомологической теории размерности, которая появится в одном из ближайших выпусков „Успехов математических наук".

При большом интересе, который представляет введение в гомологическую теорию размерности, данное в гл. VIII книги Гуревича-Волмэна, можно только сожалеть, что авторы не включили в свое изложение ни знаменитые понтрягинские примеры, опровергающие гипотезу сложения размерностей при топологическом перемножении компактов, ни основную теорему о характеризации размерности компакта, лежащего в R^n, посредством свойств его расположения в этом пространстве.

Заметим в заключение, что небольшие математические неточности случайного характера, изредка встречающиеся в книге, легко поддаются исправлению и были выправлены при переводе без особых оговорок.

П. Александров.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

В настоящей книге авторы ставили своей целью дать связный и простой обзор наиболее существенных разделов теории размерности. Были выбраны только те вопросы, которые могут представить интерес как для специалистов-топологов, так и для работников других областей математики.

Со времени появления, в 1928 году, хорошо известной «Теории размерности» К. Менгера, теория и в содержании, и в методе получила значительное развитие. Этим оправдывается новая трактовка; в настоящей книге главное внимание уделяется современному аппарату пространств отображений и отображений в сферы.

Алгебраически подготовленный читатель найдет в главе VIII сжатое изложение современной теории гомологий с приложениями к теории размерности.

Исторические ссылки даются исключительно в качестве руководства для начинающих студентов. Не было сделано никаких попыток добиться полноты в этом отношении.

Авторы желают выразить свою благодарность д-рам С. Эйленбергу и В. Флекснеру, которые своим советом побудили их к подготовке рукописи, и г-ну Д. Даганджи, внимательно прочитавшему корректуру и сделавшему ценные замечания.

Чепел Хилл, Северная Каролина
Мэдисон, Висконсин
Октябрь, 1941 г.

ВИТОЛЬД ГУРЕВИЧ
ГЕНРИ ВОЛМЭН

Глава I

ВВЕДЕНИЕ

1. Современное понятие размерности

«Из всех теорем analysis situs наиболее важной является та, которую мы выражаем, говоря, что пространство имеет три измерения. Именно это предложение мы собираемся рассмотреть, поставив вопрос в следующей форме: когда мы говорим, что пространство имеет три измерения, то чтó мы под этим подразумеваем?...

«... Если для того, чтобы разбить континуум, достаточно рассматривать в качестве разбивающих множеств некоторое число различных между собой элементов, то мы скажем, что этот континуум имеет одно измерение; если, напротив, для того, чтобы разбить континуум, в качестве разбивающих множеств необходимо рассматривать систему элементов, которые сами образуют один или несколько континуумов, мы будем говорить, что этот континуум имеет несколько измерений.

«Если для того, чтобы разбить континуум C, достаточны множества, образующие один или несколько континуумов одного измерения, то мы будем говорить, что C — континуум двух измерений; если достаточны множества, которые образуют один или несколько континуумов самое большее двух измерений, мы будем говорить, что C — континуум трех измерений и т. д.

«Чтобы оправдать это определение, необходимо продумать, не совпадает ли этот путь с тем, которым геометры вводят понятие трех измерений с самого начала своих работ. Что же мы видим? Обычно они начинают с определения поверхностей, как границ тел или кусков пространства, линий, как границ поверхностей, точек, как границ линий, и устанавливают, что этот процесс не может быть проведен дальше.

«Это и есть как раз идея, высказанная выше; чтобы разбить пространства, необходимы множества, называемые поверхностями; чтобы разбить поверхности, необходимы множества, называемые линиями; чтобы разбить линии, необходимы множества, называемые точками; мы не можем двигаться дальше, и точка не может быть разбита, но точка не является континуумом. Тогда линии, которые могут быть разбиты множествами, не являющимися континуумами, будут континуумами одного измерения; поверхности, которые могут быть разбиты непрерывными множествами одного измерения, будут континуумами двух измерений; и, наконец, пространство, которое может быть разбито непрерывными множествами двух измерений, будет континуумом трех измерений».

Эти слова написаны Пуанкаре в 1912 году, в последнем году его жизни. Пуанкаре писал в философский журнал[1]) и имел, повидимому, в виду выявить интуитивное понятие размерности, а не дать точную математическую формулировку. Однако Пуанкаре очень глубоко проник в существо вопроса, подчеркивая индуктивную природу геометрического смысла размерности и возможность разбиения пространства подмножествами более низкой размерности. Годом позже Брауэр[2]), использовав идею Пуанкаре, построил точное и топологически инвариантное определение размерности для очень широкого класса пространств (локально-связных метрических со счетной базой), эквивалентное определению, которым мы пользуемся сегодня.

В течение нескольких лет работа Брауэра оставалась почти незамеченной. Затем в 1922 году, независимо от Брауэра и друг от друга, Менгер и Урысон вновь ввели понятие размерности Брауэра с важными усовершенствованиями; и что, пожалуй, самое главное, они оправдали новое понятие, сделав его краеугольным камнем чрезвычайно красивой и плодотворной теории, внесшей единство и порядок в большую область геометрии.

Определение размерности, которое мы примем в этой книге (см. стр. 46), восходит к Менгеру и Урысону. В формулировке Менгера оно читается так:

a) пустое множество имеет размерность -1,

b) размерность пространства X есть наименьшее целое число n такое, что каждая точка $p \in X$ обладает произвольно

---

[1]) *Revue de métaphysique et de morale*, стр. 486.

[2]) Über den natürlichen Dimensionsbegriff, *Journ. f. Math.*, **142** (1913), стр. 146—152.

малыми окрестностями, границы которых имеют размерность, меньшую, чем n.

Авторы считают, что никакое из нескольких других возможных определений размерности не взывает столь непосредственно к интуиции как это и не вводит так изящно в существующую теорию.

2. Более ранние понятия размерности

До появления теории множеств математики употребляли размерность только в неопределенном смысле. Конфигурация называлась n-мерной, если наименьшее число действительных параметров, необходимых для того, чтобы описать ее точки некоторым не точно определенным способом, было равно n. Опасность и противоречивость такого подхода сделались ясными после двух знаменитых открытий конца 19-го века: канторовского взаимно однозначного соответствия между точками линии и точками плоскости, и пеановского непрерывного отображения отрезка на весь квадрат. Первое разрушило чувство, что плоскость богаче точками, нежели линия, и показало, что размерность может изменяться при взаимно однозначных отображениях. Второе противоречило убеждению, что размерность пространства может быть определена, как наименьшее число непрерывных действительных параметров, требуемых для того, чтобы описать пространство, и показало, что размерность может возрастать при однозначных непрерывных отображениях.

Чрезвычайно важный вопрос оставался открытым (ответ на него был дан лишь в 1911 году Брауэром): возможно ли при $m \neq n$ между n-мерным эвклидовым пространством (обычным пространством n действительных переменных) и m-мерным эвклидовым пространством установить соответствие, соединяющее свойства конструкций Кантора и Пеано, т. е. соответствие, которое одновременно взаимно однозначно и непрерывно? Этот вопрос был критическим, так как существование между n-мерным и m-мерным эвклидовыми пространствами соответствия указанного типа показало бы, что размерность (в том естественном смысле, что n-мерное эвклидово пространство имеет размерность n) не имеет никакого топологического значения! Класс топологических отображений оказался бы, следовательно, слишком широким, для того чтобы он мог иметь какое-либо реальное применение в геометрии.

3. Топологическая инвариантность размерности эвклидовых пространств

Первое доказательство того, что n-мерное и m-мерное эвклидовы пространства при $n \neq m$ не гомеоморфны, было дано Брауэром в его знаменитой работе: «Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl», *Math. Ann.* **70** (1911), стр. 161—165. Однако это доказательство ясно не обнаруживало некоторых простых топологических свойств n-мерного эвклидова пространства, отличающих его от m-мерного эвклидова пространства и являющихся причиной отсутствия гомеоморфизма между этими пространствами. Более проницательным было поэтому доказательство Брауэра в 1913 году[1]), когда он ввел свою „размерность" — целочисленную функцию пространства, которая была топологически инвариантна по самому своему определению. Брауэр показал, что „размерность" n-мерного эвклидова пространства в точности равна n (и, следовательно, заслуживает своего названия).

Тем временем Лебег другим путем подошел к доказательству того, что размерность эвклидова пространства топологически инвариантна. Он заметил[2]), что квадрат может быть покрыт произвольно малыми „кирпичами" таким образом, что никакая точка квадрата не содержится более, чем в трех из этих кирпичей; но если эти кирпичи достаточно малы, то по крайней мере три из них имеют общую точку. Подобным же образом, куб n-мерного эвклидова пространства может быть разложен на произвольно малые кирпичи так, чтобы не более чем $n+1$ из этих кирпичей пересекались. Лебег высказал предположение, что это число $n+1$ не может быть уменьшено, т. е., что для любого разложения на достаточно малые кирпичи должна существовать точка, принадлежащая, по крайней мере, $n+1$ кирпичу. Первое доказательство этой теоремы было дано Брауэром[1]). Теорема Лебега также обнаруживает топологическое свойство n-мерного эвклидова пространства, отличающее его от m-мерного эвклидова пространства, и, следовательно, влечет за собой топологическую инвариантность размерности эвклидовых пространств.

---

[1]) Über den natürlichen Dimensionsbegriff, *loc. cit.*

[2]) Sur la non applicabilité des deux domaines appartenant à des espaces de n et $n+p$ dimensions, *Math. Ann.* **70** (1911), стр. 166 — 168.

4. Размерность множеств более общей природы

Новое понятие размерности, как мы уже видели, придает точный смысл утверждению, что n-мерное эвклидово пространство имеет размерность n, и тем самым значительно выясняет его топологическую структуру. Другой особенностью, которая сделала новое понятие размерности вехой в развитии геометрии, была общность объектов, к которым оно может быть приложено. Отсутствие точного определения размерности, неудовлетворительное с эстетической и методологической точек зрения, не вызывало, однако, никаких реальных трудностей, поскольку геометрия ограничивалась изучением относительно простых фигур, таких, как полиэдры и многообразия. Несомненно, в каждом частном случае можно было установить, какую размерность надо приписать каждой из этих фигур. Это положение радикально изменилось после открытия Кантора, с развитием теории множеств. Эта новая ветвь математики чрезвычайно расширила класс объектов, которые можно рассматривать как „геометрические", и обнаружила конфигурации такой сложности, какую раньше нельзя было себе представить. Поставить в соответствие каждому из таких объектов число, которое можно было бы разумно назвать размерностью, было отнюдь не тривиальной задачей. Какое число, например, надо взять в качестве размерности неразложимого континуума Брауэра или «кривой» Серпинского, каждая из точек которой является точкой ветвления? Теория размерности дает полный ответ на эти вопросы. Каждому множеству точек эвклидова пространства (и даже каждому подмножеству гильбертова пространства)[1]), какое бы оно ни было «патологическое», она ставит в соответствие некоторое целое число, которое и на интуитивных и на формальных основаниях заслуживает быть названным его размерностью.

5. Различные подходы к понятию размерности

Прежде чем перейти к систематическому изучению теории размерности, остановимся на рассмотрении других возможных способов определения размерности.

---

[1]) Замечания о более общих пространствах см. в Прибавлении.

Мы уже упоминали о методе Лебега доказательства теоремы об инвариантности размерности эвклидовых пространств. Этот метод может быть очень хорошо использован для установления общего понятия размерности: размерность Лебега некоторого пространства есть наименьшее целое число n, обладающее тем свойством, что пространство может быть разложено на произвольно малые области, не более чем $n+1$ из которых пересекаются. Оказывается (см. главу V), что введенная этим методом размерность совпадает с размерностью, которая восходит к Брауэру, Менгеру и Урысону. Сейчас мы приведем другие примеры, показывающие, как топологические исследования совершенно различной природы приводят к этому же понятию размерности.

A)[1] Пусть

$$f_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, \ldots, m \tag{1}$$

m непрерывных функций от n действительных переменных, принимающих действительные значения, или, что то же самое, m действительных функций точки n-мерного эвклидова пространства. Один из основных фактов анализа состоит в том, что система m уравнений с n неизвестными,

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{2}$$

вообще говоря, не имеет решения, если $m > n$. Слова «вообще говоря» следующим образом могут быть сделаны точными: очень мало изменив функции f_i, можно получить новые непрерывные функции g_i, такие, что новая система

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{3}$$

не имеет решения. С другой стороны, существуют системы n уравнений с n неизвестными, которые разрешимы и которые остаются разрешимыми при достаточно малых изменениях их левых частей. Это свойство n-мерного эвклидова пространства может быть положено в основу общего понятия размерности. Пространство X можно было бы называть n-мерным, если n есть наибольшее целое число, такое, что существует n непрерывных действительных функций (1), определенных на X, обладающих тем свойством, что система уравнений (2) имеет реше-

[1]) Вопросы, рассматриваемые в A), B) и C), тесно связаны между собой, они были поставлены П. С. Александровым.

ние, которое существенно в указанном выше смысле. Оказывается, что эта «размерность» снова совпадает с размерностью Брауэра, Менгера и Урысона (см. главу VI).

B) Эта проблема является видоизменением A). Рассмотрим непрерывное отображение пространства в n-мерную сферу. Каждую точку n-мерной сферы можно рассматривать, как единичный вектор («направление») в $(n+1)$-мерном эвклидовом пространстве, так что вместо того, чтобы говорить о непрерывных отображениях в n-мерную сферу, можно говорить о непрерывном поле не равных нулю векторов $(n+1)$-мерного эвклидова пространства. Пусть C — замкнутое множество пространства X. Пусть на C определено непрерывное поле таких векторов. Можно ли тогда, не изменяя это поле на C, продолжить его в непрерывное поле неравных нулю векторов $(n+1)$-мерного эвклидова пространства, определенное на всем X? Оказывается, что размерность X есть наименьшее число n, для которого такое продолжение возможно для каждого замкнутого множества C и каждого определенного на C непрерывного поля таких векторов; в терминах отображений в n-мерную сферу, — наименьшее целое число n, обладающее тем свойством, что любое непрерывное отображение любого замкнутого подмножества $C \subset X$ в n-мерную сферу может быть продолжено на все X (см. главу VI).

C) Другой подход к понятию размерности возникает из теории гомологий. Рассмотрим одномерные циклы (грубо говоря, непрерывные замкнутые кривые) на двумерном многообразии. Некоторые из них ограничивают двумерные части многообразия или, в терминологии теории гомологий, являются ограничивающими циклами. С другой стороны, никакой двумерный цикл (за очевидным исключением нулевого двумерного цикла, все из коэфициентов которого равны нулю) не может ограничивать на двумерном многообразии, потому что не существует ничего трехмерного, что он мог бы ограничивать. Аналогично, n-мерное многообразие содержит не равные нулю ограничивающие m-мерные циклы для каждого m, меньшего чем n, но содержит только нулевой ограничивающий n-мерный цикл. Далее, теория гомологий может быть применена к произвольному компактному метрическому пространству. Значит, можно определить «гомологическую размерность» компактного метрического пространства, как наибольшее целое число n, для которого при подходящим образом выбранных коэффициентах существует не нулевой ограничивающий $(n-1)$-мерный цикл.

Оказывается, что так определенная гомологическая размерность также совпадает с нашей стандартной размерностью (см. главу VIII).

Д) Интуитивное восприятие размерности связывает со словом одномерный объекты, имеющие длину (или линейную меру), со словом двумерный — объекты, имеющие площадь (или двумерную меру), со словом трехмерный — объекты, имеющие объем (или трехмерную меру) и так далее. Попытка сделать это интуитивное ощущение точным встречает препятствие, состоящее в том, что размерность является топологическим понятием, в то время как мера — понятие метрическое. Рассмотрим, однако, вместе с данным метрическим пространством все метрики, совместимые с его топологической структурой. Мы увидим (см. главу VII), что размерность пространства X может быть охарактеризована как наибольшее действительное число p, для которого X *в каждой метризации* имеет положительную p-мерную хаусдорфову меру.

6. Замечания

В этой книге мы предполагаем, что читателю известны только очень элементарные сведения по теоретико-множественной топологии, которые содержатся, например, в первых главах книг:

Alexandroff-Hopf, Topologie, J. Springer, Berlin, 1935; Kuratowski, Topologie I, Monografie Mathematyczne, Warsaw, 1933; Menger, Dimensionstheorie, B. G. Teubner, Leipzig, 1928. Однако читатель может освежить свое знакомство с основами топологии, пользуясь Указателем. Указатель, помимо ссылок на определения и результаты теории размерности, содержит значительное число очень кратких пояснений (и даже несколько доказательств) к вопросам общей топологии, которые требуются изложением.

В книгу включено большое число иллюстрирующих примеров, многие из них без доказательств; их следует рассматривать как упражнения.

Математические утверждения вспомогательного характера называются предложениями. Ссылки на них делаются в соответствии со следующей схемой:

«По предложению А)» означает: по предложению А) того же самого параграфа и главы, в которых встретилась ссылка.

«По предложению 2 А)» означает: по предложению А) параграфа 2 той же главы, в которой встретилась ссылка.

«По предложению III 2 А)» означает: по предложению А) параграфа 2 главы III.

На протяжении всей книги рассматриваются пространства, являющиеся метрическими пространствами со счетным базисом, если явно не сформулировано противное. Ограничение сделано потому, что при распространении теории размерности на более общие пространства возникают серьезные затруднения. Краткое рассмотрение некоторых из этих затруднений дано в Прибавлении.

Глава II

РАЗМЕРНОСТЬ 0

Топология, в сущности, состоит в изучении связностной структуры пространств. Понятие связного пространства, которое в своей нынешней форме восходит к Хаусдорфу и Леннесу, можно рассматривать как коренное понятие, от которого, прямо или косвенно, происходит значительная часть важных понятий топологии (теория гомологий или теория «алгебраической связности», локальная связность, размерность и т. д.).

Пространство связно, если оно не может быть разбито на два непустых непересекающихся открытых множества. Другими словами, пространство связно, если, за исключением пустого множества и всего пространства, не существует никакого множества, граница [1]) которого пуста.

В этой главе мы имеем дело с пространствами, которые являются несвязными в чрезвычайно сильном смысле, а именно, имеют так много открытых множеств с пустой границей, что каждая точка содержится в произвольно малых множествах этого типа.

1. Определение размерности 0

Определение II 1. Пространство X имеет *размерность* 0 *в точке* p, если p обладает произвольно малыми окрестностями [2]) с пустой границей, т. е., если для каждой окрестности U точки p существует окрестность V точки p такая, что

$$V \subset U,$$

$$Fr\, V = 0.$$

---

[1]) См. Указатель. Заметим, что множество, граница которого пуста, одновременно открыто и замкнуто, и наоборот.

[2]) Под окрестностью точки мы понимаем любое открытое множество, содержащее эту точку.

Непустое пространство X имеет *размерность* 0, $\dim X = 0$, если X имеет размерность 0 в каждой своей точке.

A) Очевидно, что свойство пространства быть нульмерным, или быть нульмерным в точке p, топологически инвариантно.

B) Нульмерное пространство может быть также определено как непустое пространство, в котором существует базис, состоящий из множеств, которые одновременно открыты и замкнуты.

Пример II 1. Каждое непустое конечное или счетное пространство X нульмерно[1]). Действительно, пусть U — произвольная окрестность некоторой точки p. Пусть r — положительное число, такое, что сферическая окрестность точки p радиуса r (множество всех точек, расстояние которых от p меньше r) содержится в U. Пусть x_1, x_2 ... суть точки X, занумерованные в некоторой последовательности, и $\rho(x_i, p)$ — расстояние от x_i до p. Существует положительное число r', меньшее r и отличное от всех $\rho(x_i, p)$. Тогда сферическая окрестность точки p радиуса r' содержится в U, а ее граница пуста. Следовательно, X нульмерно.

В частности, множество $\mathfrak{R}$ действительных рациональных чисел нульмерно.

Пример II 2. Множество $\mathcal{J}$ действительных иррациональных чисел нульмерно. Ибо, если дана произвольная окрестность U некоторой иррациональной точки p, то существуют рациональные числа ρ и σ, такие, что $\rho < p < \sigma$, и множество V иррациональных чисел, заключенных между ρ и σ, содержится в U. В пространстве $\mathcal{J}$ иррациональных чисел множество V открыто и имеет пустую границу потому, что каждая иррациональная точка, которая является предельной точкой[2]) V, находится между ρ и σ и, следовательно, принадлежит к V.

Пример II 3. Канторов дисконтинуум[3]) $\mathcal{C}$ (множество всех действительных чисел, которые можно выразить в форме $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, где $a_n = 0$ или 2) нульмерен.

Пример II 4. Любое множество действительных чисел, не содержащее никакого интервала, нульмерно.

---

[1]) Не надо забывать, что если ясно не указано противное, то пространство, рассматриваемое в этой книге, является метрическим пространством со счетным базисом.

[2]) См. Указатель.

[3]) (См.: Хаусдорф, *Теория множеств*, Москва - Ленинград, 1937, стр. 157).

Пример II 5. Множество $\mathcal{J}_2$ точек плоскости, обе координаты которых иррациональны, нульмерно. Ибо любая такая точка содержится в произвольно малых прямоугольниках, ограниченных прямыми, перпендикулярными к осям координат и пересекающими последние в точках с рациональными координатами. Границы же таких четырехугольников не пересекают $\mathcal{J}_2$.

Пример II 6. Множество $\mathfrak{R}_2^1$ точек плоскости, имеющих в точности одну рациональную координату, нульмерно. Потому что любая такая точка содержится в произвольно малых прямоугольниках, ограниченных прямыми, составляющими углы в 45° с осями координат и пересекающими их в точках с рациональными координатами. Границы таких прямоугольников не пересекают $\mathfrak{R}_2^1$.

Пример II 7. Множество $\mathfrak{R}_n$ точек n-мерного эвклидова пространства [1]) E_n, все координаты которых рациональны, нульмерно. Ибо $\mathfrak{R}_n$ счетно.

Пример II 8. Множество $\mathcal{J}_n$ точек E_n, все координаты которых иррациональны, нульмерно. Это простое обобщение примера II 5.

Замечание. Пусть $0 \leqslant m \leqslant n$. Обозначим через $\mathfrak{R}_n^m$ множество точек из E_n, которые имеют в точности m рациональных координат. В примерах II 7 и II 8 мы видели, что $\mathfrak{R}_n^n = \mathfrak{R}_n$ и $\mathfrak{R}_n^0 = \mathcal{J}_n$ нульмерны. Оказывается (пример II 12), что $\mathfrak{R}_n^m$ нульмерно для каждых m и n, но доказательство существенно зависит от «Теоремы сложения для нульмерных множеств» — теоремы II 2. Простое же доказательство примера II 6 не может быть обобщено.

Пример II 9. Множество $\mathfrak{R}'_\omega$ точек гильбертова [2]) параллелепипеда I_ω, все координаты которых рациональны, нульмерно (это множество несчетно).

Пусть

$$a = (a_1, \quad a_2, \ldots)$$

— произвольная точка I_ω, и U — окрестность a в I_ω. Взяв n достаточно большим, а p_i и q_i достаточно близкими к a_i, $p_i < a_i < q_i$, $i = 1, \ldots, n$, получим окрестность точки a, содер-

[1]) См. Указатель.
[2]) То же.

жащуюся в U, состоящую из точек

$$x = (x_1, x_2, \ldots)$$

параллелепипеда I_ω, первые n координат которых ограничены условием:

$$p_i < x_i < q_i \tag{1}$$

(остальные координаты ограничены только условием

$$|x_i| \leqslant \frac{1}{i}, \tag{2}$$

которое, конечно, всегда выполняется в I_ω).[1])

Предположим теперь, что $a \in \mathfrak{R}'_\omega$. Взяв p_i и q_i иррациональными, получим окрестность V точки a, каждая из граничных точек которой в I_ω имеет по меньшей мере одну иррациональную координату. Следовательно, V имеет пустую границу в $\mathfrak{R}'_\omega$, а это доказывает, что $\mathfrak{R}'_\omega$ нульмерно.

Пример II 10. Множество $\mathcal{J}'_\omega$ точек гильбертова параллелепипеда, все координаты которых иррациональны, нульмерно. Доказательство подобно доказательству примера II 9.

---

[1]) Мы должны показать, что для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти натуральное число n и положительное число δ, такие, что если $q_i - p_i < \delta$ для $i \leqslant n$, то для всех x, удовлетворяющих (1) и (2), имеет место неравенство:

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - a_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon. \tag{3}$$

Чтобы показать это, выберем n так, чтобы

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \frac{1}{8}\varepsilon^2,$$

и δ так, чтобы

$$n\delta^2 < \frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

Если $q_i - p_i$ меньше δ для $i \leqslant n$, то для всех x, удовлетворяющих (1) и (2), имеем:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - a_i)^2 < n\delta^2 + \sum_{i=n}^{\infty} \left(\frac{2}{i}\right)^2 < \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 = \varepsilon^2,$$

что доказывает (3).

Пример II 11. Множество $\mathfrak{R}_\omega$ точек гильбертова пространства, все координаты которых рациональны, не нульмерно[1]). (Сопоставьте это утверждение с утверждением примера II 9.) Достаточно показать, что любая ограниченная окрестность U начала координат в $\mathfrak{R}_\omega$ имеет непустую границу. Рассмотрим прямую линию: $-\infty < x_1 < +\infty$, $0 = x_2 = x_3 = = \ldots$ Она содержит точки и в U и в $\mathfrak{R}_\omega \setminus U$. Отсюда следует, что можно найти рациональное число a_1 такое, что точка

$$p^1 = (a_1, 0, 0, \ldots)$$

содержится в U и находится от $\mathfrak{R}_\omega \setminus U$ на расстоянии, меньшем, чем 1. Подобным же образом, рассматривая прямую линию: $x_1 = a_1, -\infty < x_2 < \infty$, $0 = x_3 = x_4 = \ldots$, мы определим точку

$$p^2 = (a_1, a_2, 0, \ldots)$$

при рациональном a_2 такую, что p^2 принадлежит U и находится от $\mathfrak{R}_\omega \setminus U$ на расстоянии, меньшем, чем $\frac{1}{2}$. По индукции определим последовательность $\{p^n\}$:

$$p^n = (a_1 a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots),$$

где каждое a_n рационально, каждое p^n принадлежит U и

$$\rho(p^n, \mathfrak{R}_\omega \setminus U) < \frac{1}{n}.$$

Отсюда легко следует, что точка p[2])

$$p = (a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots),$$

k-я координата которой равна a_k, является граничной точкой окрестности U.

Теорема II 1. *Непустое подмножество нульмерного пространства нульмерно.*

---

[1]) Это доказательство принадлежит Эрдошу, The dimension of rational points in Hilbert space, *Ann. Math.* 41 (1940), 734—736. В действительности $\dim R_\omega = 1$ (см. пример III 5).

[2]) p, действительно, есть точка $\mathfrak{R}_\omega$, потому что $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 < d^2$, $n = 1, 2, \ldots$, где d — диаметр U; отсюда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$.

Доказательство. Пусть p — произвольная точка непустого подмножества X' нульмерного пространства X, и пусть U' — некоторая окрестность точки p в X'. Тогда существует окрестность U точки p в X такая, что

$$U' = U \cap X'.$$

Так как X нульмерно, существует одновременно открытое и замкнутое множество V такое, что

$$p \in V \subset U.$$

Пусть

$$V' = V \cap X'.$$

Тогда V' одновременно открыто и замкнуто в X', и

$$p \in V' \subset U',$$

так что X' нульмерно.

2. Отделение подмножеств

Определение II 1. Если A_1, A_2 и B суть попарно непересекающиеся подмножества пространства X, то мы скажем, что A_1 и A_2 *отделены в X множеством B*, если $X \setminus B$ может быть разбито на два непересекающихся множества, открытых в $X \setminus B$ и содержащих соответственно A_1 и A_2, т. е. если существуют A_1' и A_2', для которых

$$X \setminus B = A_1' \cup A_2',$$

$$A_1 \subset A_1', \quad A_2 \subset A_2',$$

$$A_1' \cap A_2' = 0,$$

причем и A_1', и A_2' открыты в $X \setminus B$ (или, что то же, и A_1', и A_2' замкнуты в $X \setminus B$). Если A_1 и A_2 отделены пустым множеством, мы скажем просто, что A_1 и A_2 *отделены* в X.

A) A_1 и A_2 отделены в том и только в том случае, если существует множество A_1' такое, что

$$A_1 \subset A_1',$$

$$A_1' \cap A_2 = 0,$$

и A_1' одновременно открыто и замкнуто, т. е. имеет пустую границу. Ибо A_2' равно тогда $X \setminus A_1'$.

В) Докажем теперь, что определению II 1 эквивалентно

Определение II 1′. Непустое пространство имеет размерность нуль, если каждая точка p и каждое замкнутое множество C, не содержащее p, могут быть отделены[1]).

Доказательство. Предположим, что X нульмерно в смысле определения II 1. Тогда, так как $X \setminus C$ есть окрестность точки p, существует множество V такое, что

$$p \in V \subset X \setminus C,$$

причем V одновременно открыто и замкнуто. Из того, что

$$V \cap C = 0,$$

и предложения А) следует, что p и C отделены, что и требуется по определению II 1′. Обратное доказывается подобным образом.

С) Связное нульмерное пространство состоит из одной единственной точки.

Доказательство. Допустим, что нульмерное пространство X содержит две различные точки p и q. Определение II 1′ показывает, что p и q отделены. Следовательно, X несвязно.

D) Нульмерное пространство вполне несвязно, т. е. никакое связное его подмножество не содержит более, чем одну точку.

Доказательство. Это следует из теоремы II 1 и предложения С).

Е) В силу определения II 1′ очевидно, что пространство нульмерно, если любые два непересекающиеся замкнутые в нем множества могут быть отделены. Докажем[2]) обратное предложение: если пространство нульмерно, то любые два непересекающиеся замкнутые множества в нем могут быть отделены.

Доказательство. Путь X — нульмерно. Из определения II 1′ мы знаем, что любая точка $p \in X$ может быть отделена от любого замкнутого множества, не содержащего p. Пусть C и K — два непересекающиеся замкнутые множеста в X. Нам надо показать, что C отделено от K в X.

Для каждой точки $p \in X$ либо $p \cap C = 0$, либо $p \cap K = 0$. Следовательно, для каждой точки p существует окрестность

[1]) На протяжении всей книги мы не будем делать никакого различия в обозначениях между точкой p и множеством, состоящим из единственной точки p.

[2]) Существование в X счетного базиса открытых множеств существенно, как показано в Прибавлении; см. утверждение (b) в Прибавлении.

$U(p)$, одновременно открытая и замкнутая и такая, что либо $U(p) \cap C = 0$, либо $U(p) \cap K = 0$. Так как пространство X имеет счетный открытый базис, существует последовательность U_1, $U_2, \ldots$, состоящая из множеств $U(p)$, сумма элементов которой есть X (Alexandroff — Hopf, J. Springer, Berlin, 1935, стр. 78; эта книга будет дальше цитироваться, как АН). Определим новую последовательность множеств V_i следующим образом:

$$V_1 = U_1$$

$$V_i = U_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} U_k = U_i \cap (X \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} U_k) \qquad i = 2, 3, \ldots$$

Тогда

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i, \tag{1}$$

$$V_i \cap V_j = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j, \tag{2}$$

$$V_i \quad \text{открыто}, \tag{3}$$

либо $V_i \cap C = 0$, либо $V_i \cap K = 0$; (4)

(1), (2) и (4) очевидны. Чтобы доказать (3) заметим, что

$$\bigcup_{k=1}^{i-1} U_k$$

замкнуто, так что

$$X \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} U_k$$

открыто. Следовательно, V_i, как пересечение этого открытого множества с открытым множеством U_i, само открыто.

Пусть C' — сумма всех V_i, для которых $V_i \cap K = 0$, а K' — сумма остальных V_i. Тогда

$$X = C' \cup K' \qquad \text{по (1)},$$

$$C' \cap K' = 0 \qquad \text{по (2)},$$

$$C' \text{ и } K' \text{ открыты} \qquad \text{по (3) и}$$

$$(C' \cap K') \cup (K' \cap C) = 0 \qquad \text{по (4)};$$

отсюда следует, что $C \subset C'$ и $K \subset K'$. Таким образом, нужное отделение C от K осуществляется множествами C' и K'.

F) Если C_1 и C_2 — непересекающиеся замкнутые множества пространства X а A — нульмерное подмножество X, то существует замкнутое множество B, отделяющее C_1 от C_2, такое, что $A \cap B = 0$.

Доказательство. Так как X нормально [1]), существуют открытые множества U_1 и U_2, для которых

$$C_1 \subset U_1, \quad C_2 \subset U_2 \text{ и} \tag{5}$$
$$\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = 0.$$

Непересекающиеся множества $\overline{U}_1 \cap A$ и $\overline{U}_2 \cap A$ замкнуты в A и, так как $\dim A = 0$, могут быть отделены в A, по предложению E), и мы получаем непересекающиеся множества C_1' и C_2' такие, что

$$A = C_1' \cup C_2',$$
$$\overline{U}_1 \cap A \subset C_1', \quad \overline{U}_2 \cap A \subset C_2',$$

причем C_1' и C_2' одновременно открыты и замкнуты в A. Отсюда

$$(C_1' \cap \overline{U}_2) \cup (C_2' \cap \overline{U}_1) = 0, \tag{6}$$

$$(C_1' \cap \overline{C}_2') \cup (\overline{C}_1' \cap C_2') = 0; \tag{7}$$

(5) и (6) влекут за собой

$$(C_1' \cap \overline{C_2'}) \cup (C_2' \cap \overline{C_1'}) = 0. \tag{8}$$

Далее, так как U_1 и U_2 открыты, из (6) вытекает, что

$$(\overline{C}_1' \cap U_2) \cup (\overline{C}_2' \cap U_1) = 0,$$

а отсюда, на основании (5),

$$(\overline{C}_1' \cap C_2) \cup (\overline{C}_2' \cap C_1) = 0. \tag{9}$$

---

[1]) Пространство S *нормально* (АН, стр. 68), если для любых двух непересекающихся замкнутых множеств C_1 и C_2 существуют открытые множества V_1 и V_2 такие, что

$$C_1 \subset V_1, \; C_2 \subset V_2 \text{ и } V_1 \cap V_2 = 0.$$

Простым следствием нормальности является существование открытых множеств U_1 и U_2 таких, что

$$C_1 \subset U_1, \; C_2 \subset U_2 \text{ и } \overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = 0.$$

Каждое метрическое пространство нормально (АН, стр. 68).

Из (7), (8), (9) и того, что $\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 = C_1 \cap C_2 = 0$, следует, что никакое из непересекающихся множеств $C_1 \cup C_1'$ и $C_2 \cup C_2'$ не содержит предельной точки другого. Так как X вполне нормально[1]), существует открытое множество W такое, что

$$C_1 \cup C_1' \subset W \text{ и}$$

$$\bar{W} \cap (C_2 \cup C_2') = 0.$$

Граница $B = \bar{W} \setminus W$ отделяет C_1 от C_2 и не пересекается с $C_1' \cup C_2' = A$. Предложение F), таким образом, доказано.

3. Теорема сложения для нульмерных множеств

Сумма нульмерных множеств не обязана быть нульмерной. Это видно из разложения прямой на множества рациональных и иррациональных чисел, или на отдельные точки. Однако имеет место

Теорема II 2. **Теорема сложения для нульмерных множеств.** *Пространство, являющееся суммой счетного числа нульмерных замкнутых множеств, нульмерно.*

Доказательство. Предположим, что

$$X = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_i \cup \ldots,$$

где каждое C_i замкнуто и нульмерно. Пусть K и L суть два непересекающихся замкнутых множества пространства X. Мы покажем, что K и L могут быть отделены.

$K \cap C_1$ и $L \cap C_1$ — непересекающиеся замкнутые подмножества нульмерного пространства C_1. Следовательно (2E), существуют подмножества A_1 и B_1 множества C_1, замкнутые

---

[1]) Пространство X *вполне нормально* (АН, стр. 69), если каждое подпространство X нормально. Можно показать (Урысон: Über die Mächtigkeit der Zusammenhängenden Mengen, *Math. Ann.* **94**, 1925, стр. 262—295, в частности, стр. 284), что для любых двух непересекающихся подмножеств X_1 и X_2 вполне нормального пространства, никакое из которых не содержит предельных точек другого, существуют открытые множества W_1 и W_2, такие, что

$$X_1 \subset W_1,\ X_2 \subset W_2 \text{ и } W_1 \subset W_2 = 0;$$

ясно, что $\bar{W}_1 \cap X_2 = 0$. Каждое метрическое пространство вполне нормально потому, что каждое подпространство метрического пространства является метрическим пространством.

в C_1 и, следовательно, в X, такие, что

$$K \cap C_1 \subset A_1, \qquad L \cap C_1 \subset B_1,$$
$$A_1 \cup B_1 = C_1, \qquad A_1 \cap B_1 = 0.$$

Множества $K \cup A_1$ и $L \cup B_1$ замкнуты в X и не пересекаются. В силу нормальности пространства X, существуют открытые множества G_1 и H_1, для которых

$$K \cup A_1 \subset G_1, \qquad L \cup B_1 \subset H_1,$$
$$\overline{G}_1 \cap \overline{H}_1 = 0.$$

Следовательно,

$$G_1 \cup H_1 \supset C_1,$$
$$K \subset G_1, \qquad L \subset H_1.$$
$$\overline{G}_1 \cap \overline{H}_1 = 0.$$

Теперь повторим этот процесс, заменяя K и L множествами $\overline{G}_1$ и $\overline{H}_1$, а C_1 — множеством C_2. Эта замена приводит к открытым множествам G_2 и H_2, для которых

$$G_2 \cup H_2 \supset C_2,$$
$$\overline{G}_1 \subset G_2, \qquad \overline{H}_1 \subset H_2,$$
$$\overline{G}_2 \cap \overline{H}_2 = 0.$$

По индукции построим последовательности $\{G_i\}$ и $\{H_i\}$, открытых в X множеств, для которых

$$G_i \cup H_i \cap C_i,$$
$$\overline{G}_{i-1} \subset G_i, \ \overline{H}_{i-1} \subset H_i,$$
$$\overline{G}_i \cap \overline{H}_i = 0.$$

Пусть

$$G = \cup G_i, \qquad H = \cup H_i,$$

тогда G и H суть непересекающиеся открытые множества,

$$G \cup H \supset \bigcup_i C_i = X$$
$$K \subset G, \qquad L \subset H;$$

это и есть требуемое отделение.

Следствие 1. *Пространство, являющееся суммой счетного числа нульмерных* F_σ *множеств* [1]), *нульмерно.*

Следствие 2. *Сумма двух нульмерных подмножеств пространства* X, *по крайней мере одно из которых замкнуто, нульмерна.*

Доказательство. Пусть A и B нульмерны, и B замкнуто. Тогда $(A \cup B) \setminus B$ открыто в $A \cup B$. Как открытое множество в метрическом пространстве оно есть F_σ. Следствие 2 вытекает поэтому из следствия 1 и равенства

$$A \cup B = B \cup [(A \cup B) \setminus B].$$

Следствие 3. *Нульмерное пространство остается нульмерным после прибавления одной точки* [2]).

Доказательство. Очевидно, в силу следствия 2.

Пример II 12. Пусть $0 \leqslant m \leqslant n$. Обозначим через $\mathfrak{R}_n^m$ множество точек n-мерного эвклидова пространства E_n, имеющих точно m рациональных координат. Тогда $\mathfrak{R}_n^m$ нульмерно.

Каковы бы ни были m индексов $i_1, \ldots, i_m$, выбранных из чисел: $1, \ldots, n$ и m рациональных чисел $r_1 \ldots, r_m$, система уравнений

$$x_{i_1} = r_1, \; x_{i_2} = r_2, \; \ldots, \; x_{i_m} = r_m \tag{1}$$

определяет $(n-m)$-мерное линейное подпространство. Подмножество этого подпространства, состоящее из точек, у которых все остальные координаты иррациональны, обозначим через C_i. Каждое C_i изометрично $\mathcal{J}_{n-m}$ и, следовательно, нульмерно (пример II 8). Ясно, что каждое C_i замкнуто в $\mathfrak{R}_n^m$ и что сумма множеств C_i и есть $\mathfrak{R}_n^m$. Так как совокупность множеств C_i счетна, то из теоремы сложения для нульмерных множеств следует, что $\dim \mathfrak{R}_n^m = 0$.

Пример II 13. Пусть $0 \leqslant m$. Обозначим через $\mathfrak{R}_\omega^m$ множество точек гильбертова параллелепипеда, имеющих в точности m рациональных координат. Тогда $\mathfrak{R}_\omega^m$ нульмерно. (Доказательство подобно доказательству примера II 12 и использует пример II 10).

[1]) Под F_σ в пространстве мы понимаем сумму счетного числа замкнутых подмножеств; см. Kuratowski, Topologie I Monografje Matematiczne Warsaw, 1933, стр. 21. В метрическом пространстве любое открытое множество есть F_σ (Kuratowski, Topologie I, *loc. cit.*, стр. 78).

[2]) Предполагая, конечно, что расширенное пространство является метрическим со счетным базисом.

4. Компакты

Рассмотрим следующие четыре свойства пространства X:

(0) X вполне несвязно.

(1) Любые две различные точки в X могут быть отделены.

(2) Любая точка может быть отделена от любого не содержащего ее замкнутого множества, т. е. X нульмерно (см. определение II 1′).

(3) Любые два замкнутые непересекающиеся множества могут быть отделены.

Очевидно, из (3) следует (2), из (2) следует (1), из (1) следует (0). Обратно (см. предложение 2 Е)), из (2) следует (3) (это верно для пространств со счетным базисом. Для пространств без счетного базиса из (2) не следует (3): см. Прибавление, стр. 208). Свойства (0), (1) и (2), однако, не эквивалентны даже для метрических пространств со счетным базисом.

Пример II 14. Серпинский (Sur les ensambles connexes et non connexes, *Fund. Math.* 2 (1921), стр. 81—95) приводит на стр. 88 пример плоского множества, обладающего свойством (0), но не обладающего свойством (1).

Пример II 15. Мы узнали из примера II 11, что $\mathfrak{R}_\omega$ не обладает свойством (2), с другой стороны, оно обладает свойством (1). В самом деле, пусть p и q две точки из $\mathfrak{R}_\omega$, а i — индекс такой, что i-я координата p_i точки p отличается от i-й координаты q_i точки q; p_i и q_i, конечно, рациональны. Пусть ρ — произвольное иррациональное число, расположенное между p_i и q_i. Разложение $\mathfrak{R}_\omega$ на замкнутые непересекающиеся множества, определенные неравенствами:

$$x_i \leqslant \rho, \quad x_i \geqslant \rho,$$

осуществляет требуемое отделение p от q.

Тем не менее эквивалентность имеет место в важном случае:

А) Для компактов[1]) условия (0) — (3) эквивалентны. Остается доказать, что из (0) следует (1), и из (1) следует (2). Сначала докажем два предложения.

В) Пусть X — компакт, C — замкнутое подмножество компакта X, и p — точка из X. Тогда, если точка p может быть отделена от каждой точки $q \in C$, то точка p может быть отделена и от C.

[1]) См. Указатель.

Доказательство. Для каждой точки q множества C существуют два непересекающиеся одновременно замкнутые и открытые множества U_q и V_q такие, что $p \in U_q$, $q \in V_q$. Так как C — замкнутое подмножество компакта, то существует конечное число $q_1, \ldots, q_k$ точек q таких, что
$V_{q_1} \cup \ldots \cup V_{q_k} \supset C$. Пусть

$$U = \bigcap_{i=1}^{k} U_{q_i}, \quad V = \bigcup_{i=1}^{k} V_{q_i};$$

тогда $p \in U$, $C \subset V$; кроме того U и V не пересекаются, а каждое из них и открыто, и замкнуто. Следовательно, p и C отделены. Таким образом, предложение B) доказано.

C) Пусть X — компакт, p — точка из X, и $M(p)$ — множество всех точек, которые не могут быть отделены от p. Тогда $M(p)$ связно.

Доказательство. Сначала мы покажем, что $M(p)$ замкнуто или, что то же, что $X \setminus M(p)$ открыто. Произвольная точка x принадлежит $X \setminus M(p)$ в том и только в том случае, если существует разложение

$$X = U \cup V,$$
$$U \cap V = 0,$$
$$x \in U, \quad p \in V,$$

где U и V открыты. Легко видеть, что $U \subset X \setminus M(p)$, т. е. каждая точка $x \in X \setminus M(p)$ имеет окрестность, содержащуюся в $X \setminus M(p)$. Таким образом, $X \setminus M(p)$ открыто.

$M(p)$, очевидно, содержит p. Допустим, что $M(p)$ несвязно. Тогда

$$M(p) = C \cup K, \quad C \neq 0, \quad K \neq 0, \quad C \cap K = 0,$$

C и K замкнуты в $M(p)$. Допустим, что $p \in C$. Так как $M(p)$ замкнуто в X, то C и K замкнуты в X. Следовательно, в силу нормальности пространства X, существует открытое в X множество U такое, что $C \subset U$ и $\overline{U} \cap K = 0$. Так как

$$B(U) = FrU = \overline{U} \setminus U,$$

то

$$B(U) \cap M(p) = B(U) \cap (C \cup K) = 0.$$

Это означает, что каждая точка множества $B(U)$ отделена от p. Так как $B(U)$ замкнуто, то можно, применив B), получить такое одновременно открытое и замкнутое множество V, что $B(U) \subset V$ и $p \cap V = 0$. Таким образом, $U \setminus V$ содержит p. Легко видеть, что $U \setminus V$ можно представить и в виде $U \setminus \overline{V}$, так как $V = \overline{V}$, и в виде $\overline{U} \setminus V$, так как $B(U) \subset V$. Первое представление показывает, что $U \setminus V$ открыто, а второе — что $U \setminus V$ замкнуто. Но $(U \setminus V) \cap K = 0$. Следовательно, p отделено от точек множества $K \subset M(p)$. Однако это противоречит определению $M(p)$.

Доказательство того, что из (0) следует (1). Предположим, что X вполне несвязно. Для каждой точки p рассмотрим множество $M(p)$. В силу C), оно связно и поэтому, так как X вполне несвязно, состоит из одной точки p. Следовательно, любые две точки пространства X отделены.

Доказательство того, что из (1) следует (2). Это следует из B).

D) Среди компактов нульмерные пространства тождественны с вполне-несвязными пространствами.

Замечание 1. Предложение D) сохраняется также для пространств, которые только локально-компактны.

Замечание 2. *Неверно* (см. примеры II 16 и III 17), что если пространство обладает свойством (0) или (1), то оно сохраняет это свойство при прибавлении к нему одной точки. Сравните это со следствием 3 теоремы II 2. Таким образом, теорема сложения была бы неверна для теории размерности, в которой размерность 0 была бы определена как вполне-несвязность, или как возможность отделения любых пар точек.

Пример II 16. Кнастер и Куратовский (Sur les ensembles connexes, *Fund. Math.* **2** (1921), стр. 206—255), приводят (на стр. 241) следующий удивительный пример плоского множества, вполне-несвязного [свойство (0)], но теряющего это свойство и становящегося связным после прибавления к нему одной точки; обозначим через $\mathcal{C}$ канторов дисконтинуум (см. пример II 3). Пусть P — подмножество дисконтинуума C, состоящее из точек

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

таких, что, начиная с достаточного большого n, числа a_n либо все равны 0, либо все равны 2 (P — счетное множество, состоящее из концевых точек, интервалов, которые надо удалить из $[0,1]$, чтобы получить $\mathcal{C}$). Пусть Q — множество остальных точек $\mathcal{C}$. Пусть a — точка на плоскости с координатами $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Обозначим через $L(c)$ отрезок, соединяющий переменную точку c множества $\mathcal{C}$ с точкой a. Обозначим для $p \in P$ через $L^*(p)$ множество всех точек отрезка $L(p)$, имеющих *рациональные* ординаты, а для $q \in Q$ через $L^*(q)$ — множество всех точек отрезка $L(q)$, имеющих *иррациональные* ординаты. Тогда, как доказывают Кнастер и Куратовский,

$$X = \bigcup_{p \in P} L^*(p) \cup \bigcup_{q \in Q} L^*(q)$$

связно, хотя $X \setminus a$ вполне-несвязно.

Так как X связно, оно не нульмерно [1]), и так как нульмерное пространство остается нульмерным после прибавления одной точки (следствие 3 теоремы II 2), то и $X \setminus a$ не нульмерно.

Пример II 17. Серпинский (см. ссылку в примере II 14) приводит пример пространства, обладающего свойством (1), но теряющего это свойство после прибавления одной точки.

---

[1]) На самом деле (см. пример IV 3),

$$\dim (X \setminus a) = \dim X = 1.$$

$X \setminus a$ является примером пространства, имеющего размерность 1, даже несмотря на то, что оно вполне-несвязно. Более того, Мазуркевич [Sur les problèmes $\varkappa$ et λ de Urysohn, *Fund. Math.*, **10** (1927), стр. 311—319] показал, что для каждого конечного n существует вполне несвязное [в действительности, обладающее тем свойством, что любые две точки могут быть отделены; см. (1) стр. 26] пространство размерности n. Таким образом, тот факт, что пространство имеет положительную размерность, очень мало говорит о его связности.

Глава III

РАЗМЕРНОСТЬ n

Грубо говоря, пространство имеет размерность $\leqslant n$, если произвольно малые куски пространства, окружающие каждую точку, могут быть ограничены подмножествами размерности $\leqslant n-1$. Этот метод определения размерности является индуктивным методом, причем изящной исходной точкой индукции является принятие пустого множества в качестве (—1)-мерного пространства.

1. Определение размерности n

Определение III 1. Пустое множество и только пустое множество имеет *размерность* — 1.

Пространство X имеет *размерность* $\leqslant n$ $(n \geqslant 0)$ *в точке* p, если p обладает произвольно малыми окрестностями, границы которых имеют размерность $\leqslant n-1$.

X имеет *размерность* $\leqslant n$, $\dim X \leqslant n$, если X имеет размерность $\leqslant n$ в каждой своей точке.

X имеет *размерность* n в точке p, если верно, что X имеет размерность $\leqslant n$ в p и неверно, что X имеет размерность $\leqslant n-1$ в p.

X имеет *размерность* n, если $\dim X \leqslant n$ верно, а $\dim X \leqslant n-1$ неверно.

X имеет *размерность* ∞, если $\dim X \leqslant n$ неверно для каждого n.

A) Очевидно, что свойство иметь размерность n (или иметь размерность n в точке p) топологически инвариантно. Размерность не является, однако, инвариантом непрерывных отображений. Проекция плоскости на прямую является примером непрерывного отображения, понижающего размерность, а пеановское отображение отрезка на весь квадрат—примером непрерывного отображения, повышающего размерность.

B) Условие $\dim X \leqslant n$ эквивалентно существованию в X базиса, состоящего из открытых множеств, границы которых имеют размерность $\leqslant n-1$.

C) При $n=0$ очевидно, что определения II 1 и III 1 совпадают.

D) Пусть $\dim X = n$, n-конечное. Тогда для каждого $m \leqslant n$ X содержит некоторое m-мерное подмножество.

Доказательство. Так как $\dim X > n-1$, существует точка $p_0 \in X$ и окрестность U_0 точки p_0, обладающая тем свойством, что если V — произвольное открытое множество такое, что $p_0 \in V \subset U_0$, то

$$\dim FrV \geqslant n-1.$$

С другой стороны, так как $\dim X \leqslant n$, существует открытое множество V_0 такое, что $p_0 \in V_0 \subset U$, для которого

$$\dim FrV_0 \leqslant n-1.$$

Следовательно, граница множества V_0 является подмножеством пространства X, размерность которого в точности равна $n-1$. Окончание доказательства предложения D) теперь очевидно.

Замечание. Утверждение предложения D) не может быть распространено на бесконечномерные пространства. Действительно, если справедлива континуум-гипотеза, то существуют даже такие бесконечномерные пространства, конечномерными подпространствами которых являются только счетные множества [1]).

Пример III 1. Прямая и интервал прямой имеют размерность 1.

Пример III 2. Любой многоугольник имеет размерность 1.

Пример III 3. Любое двумерное многообразие имеет размерность $\leqslant 2$ (доказательство следует из примера III 2).

Пример III 4. n-мерное эвклидово пространство E_n имеет размерность $\leqslant n$. Индуктивное доказательство этого предоставляется читателю. Однако доказательство того, что размерность E_n в точности равна n, отнюдь не тривиально и будет являться основной целью главы IV.

Пример III 5. Множество $\mathfrak{R}_\omega$ точек гильбертова параллелепипеда, все координаты которых рациональны, одномерно. Мы уже видели (пример II 11), что $\dim \mathfrak{R}_\omega \geqslant 1$. Покажем теперь,

---

[1]) W. Hurewicz, Une remarque sur l'hypothèse du continu; *Fund. Math.* **19** (1932), стр. 8—9.

что $\dim \mathfrak{R}_\omega \leqslant 1$, т. е. что каждая точка $p \in \mathfrak{R}_\omega$ может быть заключена в произвольно малые сферические окрестности в $\mathfrak{R}_\omega$, имеющие нульмерные границы. Обозначим через S сферу в гильбертовом пространстве с центром в начале координат и радиусом $d < 1$, т. е. множество точек, находящихся на расстоянии d от начала координат. Совершенно ясно, что достаточно доказать, что $\dim S \cap \mathfrak{R}_\omega = 0$. Чтобы доказать это, поставим в соответствие каждой точке x сферы S:

$$x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots),$$

точку

$$x' = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_i}{i}, \ldots\right);$$

x' содержится в гильбертовом параллелепипеде (см. Указатель). Как легко можно показать, S обладает тем свойством, что последовательность $\{p^n\}$ точек из S сходится к точке $p \in S$ в том и только в том случае, если i-е координаты точек p^n сходятся к i-й координате точки p, $i = 1, 2, \ldots$. Так как I_ω обладает тем же свойством, то переход от x к x' является гомеоморфизмом S на подмножество I_ω. Но этот гомеоморфизм, очевидно, переводит $S \cap \mathfrak{R}_\omega$ в подмножество $\mathfrak{R}'_\omega$, а мы знаем (пример II 9), что $\dim \mathfrak{R}'_\omega = 0$. Следовательно, $\dim S \cap \mathfrak{R}_\omega = 0$.

Теорема III 1. *Подпространство пространства размерности $\leqslant n$ имеет размерность $\leqslant n$.*

Доказательство. (По индукции.) Утверждение очевидно для $n = -1$. Предположим теперь, что оно справедливо для $n-1$. Пусть X — пространство размерности $\leqslant n$, X' — подпространство пространства X, и p — произвольная точка из X'. Пусть U' — окрестность точки p в X'. Тогда существует окрестность U точки p в X такая, что $U' = U \cap X'$. Так как $\dim X \leqslant n$, то существует множество V, открытое в X и такое, что

$$p \in V \subset U,$$

$$\dim FrV \leqslant n - 1.$$

Пусть $V' = V \cap X'$. Тогда V' открыто в X', $p \in V' \subset U'$. Пусть B — граница множества V в X, и B' — граница множества[1] V' в X'. Тогда, как легко видеть, B' содержится в $B \cap X'$. По индуктивному предположению, $\dim B' \leqslant n-1$, что и требовалось доказать.

---

[1]) $B = \overline{V} \setminus V$, $B' = (\overline{V'} \setminus V') \cap X'$.

Теперь мы докажем, что определению III 1 эквивалентно

Определение III 1′. X имеет размерность $\leqslant n$, если каждая точка $p \in X$ может быть отделена от любого не содержащего ее замкнутого множества $C \subset X$ замкнутым множеством размерности $\leqslant n-1$.

Доказательство. Допустим, что $\dim X \leqslant n$ в смысле определения III 1. Множество $X \setminus C$ является окрестностью точки p и, следовательно, в силу регулярности[1]) пространства X, существует другая окрестность V точки p, для которой

$$\overline{V} \subset X \setminus C.$$

Тогда существует окрестность W точки p такая, что $W \subset V$, а $B = Fr W$ имеет размерность $\leqslant n-1$. Легко показать, что B отделяет p и C. Это доказывает, что $\dim X \leqslant n$ в смысле определения III 1′.

Наоборот, если $\dim X \leqslant n$ в смысле определения III 1′, то $\dim X \leqslant n$ в смысле определения III 1. Действительно, пусть U — окрестность точки p. Тогда $X \setminus U$ есть замкнутое множество, не содержащее p, и, следовательно, $X \setminus U$ может быть отделено от p замкнутым множеством B размерности $\leqslant n-1$. Это означает, что

$$X \setminus B = U' \cup V', \; p \in U', \; X \setminus U \subset V', \; U' \cap V' = 0,$$

причем U' и V открыты в $X \setminus B$ и, следовательно, в X. U' является окрестностью p, содержащейся в U, и так как граница FrU' содержится в B, то из теоремы III 1 следует, что граница FrU' имеет размерность $\leqslant n-1$.

2. Размерность подпространств. Размерность сумм

При исследовании размерности подпространства X' пространства X иногда бывает удобно определять размерность X' с помощью окрестностей по отношению ко всему пространству X.

A) Подпространство X' пространства X имеет размерность $\leqslant n$ в том и только в том случае, если каждая точка из X'

[1]) Пространство *регулярно* (АН, стр. 68), если каждая окрестность U точки p содержит такую окрестность V точки p, что

$$\overline{V} \subset U.$$

Очевидно, что каждое метрическое пространство регулярно и что каждое нормальное пространство регулярно (АН, стр. 68).

обладает произвольно малыми окрестностями в X, пересечение границ которых с X' имеет размерность $\leqslant n-1$.

Доказательство. Допустим, что X' удовлетворяет условиям предложения А). Пусть p — произвольная точка из X', и U' — окрестность p в X'. Тогда существует окрестность U точки p в X такая, что $U'=U \cap X'$. Следовательно, существует открытое в X множество V такое, что

$$p \in V \subset U,$$
$$\dim (X' \cap Fr V) \leqslant n-1.$$

Пусть $V'=V \cap X'$. Тогда V' открыто в X', $p \in V' \subset U'$. Снова, обозначая через B и B' границы множеств V в X и V' в X', мы имеем: $B' \subset B \cap X'$. Следовательно, $\dim B' \leqslant n-1$, так что $\dim X' \leqslant n$.

Наоборот, допустим, что $\dim X' \leqslant n$. Пусть p — произвольная точка X', и U — окрестность точки p в X. Тогда

$$U'=U \cap X'$$

есть окрестность точки p в X'. Поэтому существует окрестность V' точки p в X', для которой

$$p \in V' \subset U' \quad \text{и}$$
$$\dim B' \leqslant n-1,$$

где B' — граница множества V' в X'. Никакое из непересекающихся множеств V' и $X' \setminus \overline{V}'$ не содержит предельной точки другого. Поэтому, так как X вполне нормально [1]), существует открытое множество W такое, что

$$V' \subset W \text{ и } W \cap (X' \setminus V')=0.$$

Заменив, если нужно, W пересечением $W \cap U$, можем предположить, что

$$W \subset U.$$

Множество

$$\overline{W} \setminus W = Fr W$$

не содержит никаких точек из $X' \setminus \overline{V}'$ и из V'. Отсюда следует, что пересечение X' с $Fr V$ содержится в B' и, следовательно (теорема III 1), имеет размерность $\leqslant n-1$, так что условие предложения А) выполнено.

[1]) См. Указатель.

Теперь мы используем А) для доказательства чрезвычайно важного предложения относительно размерности суммы двух множеств. Уже было замечено, что размерность суммы $A \cup B$ не определяется размерностями A и B. Однако:

В) Для любых двух подпространств A, B пространства X

$$\dim (A \cup B) \leqslant 1 + \dim A + \dim B.$$

Доказательство (двойной индукцией по размерностям подпространств A и B). Предложение очевидно для случая, когда

$$\dim A = \dim B = -1.$$

Пусть теперь $\dim A = m$, $\dim B = n$, и предположим, что утверждение справедливо в случае выполнения одного из двух следующих условий:

$$\dim A \leqslant m, \quad \dim B \leqslant n - 1; \tag{1}$$

$$\dim A \leqslant m - 1, \quad \dim B \leqslant n. \tag{2}$$

Пусть p — точка множества $A \cup B$. Предположим, что $p \in A$. Пусть U — окрестность точки p в X. В силу А) существует открытое множество V такое, что

$$p \in V \subset U$$

и

$$\dim (W \cap A) \leqslant m - 1,$$

где W есть граница множества V. Но $W \cap B$ — подмножество множества B, и потому

$$\dim (W \cap B) \leqslant n.$$

По индуктивному предположению (1) и (2)

$$\dim [W \cap (A \cup B)] \leqslant m + n.$$

В силу А), этим доказано, что

$$\dim (A \cup B) \leqslant m + n + 1,$$

и индукция оказывается проведенной.

С) Сумма $(n+1)$-го подпространства размерности $\leqslant 0$ имеет размерность $\leqslant n$.

Пример III 6. Пусть $0 \leqslant m \leqslant n$. Обозначим через $\mathcal{M}_n^m$ множество точек пространства E_n, имеющих *не более* m рациональных координат, и через $\mathcal{L}_n^m$ — множество точек пространства E_n, имеющих *не менее* m рациональных координат.

Тогда[1])

$$\dim \mathcal{M}_n^m \leqslant m,$$

и

$$\dim \mathcal{L}_n^m \leqslant n-m.$$

Так как очевидно, что

$$\mathcal{M}_n^m = \mathfrak{R}_n^0 \cup \mathfrak{R}_n^1 \cup \ldots \cup \mathfrak{R}_n^m$$

$$\mathcal{L}_n^m = \mathfrak{R}_n^m \cup \mathfrak{R}_n^{m+1} \cup \ldots \cup \mathfrak{R}_n^n,$$

то утверждение следует из C) и того факта, что каждое слагаемое здесь нульмерно (пример II 12).

Пример III 7. Пусть $0 \leqslant m$. Обозначим через $\mathcal{M}_\omega^m$ множество точек гильбертова параллелепипеда I_ω, имеющих не более m рациональных координат. Тогда[2])

$$\dim \mathcal{M}_\omega^m \leqslant m;$$

так как

$$\mathcal{M}_\omega^m = \mathfrak{R}_\omega^0 \cup \mathfrak{R}_\omega^1 \cup \ldots \cup \mathfrak{R}_\omega^m,$$

то утверждение следует из C) и того факта, что каждое слагаемое нульмерно (пример II 13).

3. Теорема сложения для n-мерных пространств и теорема о разложении n-мерного пространства в сумму нульмерных пространств

Теперь мы докажем наиболее важные теоремы абстрактной части теории размерности.

Теорема III 2. **Теорема сложения для размерности n.** *Пространство, являющееся суммой счетного числа замкнутых множеств размерности $\leqslant n$, имеет размерность $\leqslant n$.*

---

1) В действительности,

$$\dim \mathcal{M}_n^m = m,$$

$$\dim \mathcal{L}_n^m = n-m$$

(см. пример IV 1). Кроме того, мы позднее докажем (теорема V 5), что каждое n-мерное пространство может быть топологически включено в $\mathcal{L}_{2n+1}^n$.

2) В действительности,

$$\dim \mathcal{M}_\omega^m = m$$

(см. пример IV 2).

Доказательство. (По индукции). Обозначим теорему сложения для размерности n через Σ_n. Очевидно, Σ_n эквивалентна утверждению, что любое пространство, являющееся суммой счетного числа F_σ множеств размерности $\leqslant n$, имеет размерность $\leqslant n$.

Σ_{-1} тривиальна. Мы выведем теперь Σ_n из Σ_{n-1}, использовав Σ_0, которая уже была доказана независимо (теорема II 2). Сначала мы докажем, что из Σ_{n-1} вытекает следующее предложение:

Δ_n. Любое пространство размерности $\leqslant n$ является суммой подпространства размерности $\leqslant n-1$ и подпространства размерности $\leqslant 0$.

Доказательство предложения Δ_n. Пусть X — пространство размерности $\leqslant n$. По предложению 1 В) существует базис открытых множеств пространства X, состоящий из множеств, границы которых имеют размерность $\leqslant n-1$. Так как X — пространство со счетным базисом, то существует [1]) счетный базис $\{U_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, состоящий из множеств, границы $\{B_i\}$ которых имеют размерность $\leqslant n-1$. Из Σ_{n-1} следует, что

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

имеет размерность $\leqslant n-1$.

Мы утверждаем, что

$$\dim (X \setminus B) \leqslant 0. \tag{1}$$

В самом деле, границы множеств U_i, очевидно, не пересекаются с $X \setminus B$, и, следовательно, условие предложения 2 А) (с $n = 0$ и $X \setminus B$ вместо X') удовлетворяется. Поэтому Δ_n следует из равенства $X = B \cup (X \setminus B)$.

Воспользуемся теперь Σ_{n-1} и Δ_n для доказательства Σ_n. Предположим, что

$$X = C_1 \cup \ldots \cup C_i \cup \ldots,$$

$$\dim C_i \leqslant n,$$

где каждое C_i замкнуто. Мы хотим доказать, что $\dim X \leqslant n$. Пусть

$$K_1 = C_1,$$

$$K_i = C_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j = C_i \cap (X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j), \quad i = 2, 3, \ldots$$

---

[1]) АН, стр. 78.

Тогда

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i, \tag{2}$$

$$K_i \cap K_j = 0, \text{ если } i \neq j, \tag{3}$$

$$K_i \text{ есть } F_\sigma \text{ в } X, \tag{4}$$

$$\dim K_i \leqslant n. \tag{5}$$

Соотношения (2) и (3) очевидны. Чтобы доказать (4), заметим, что сумма

$$\bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$$

является замкнутым множеством. Поэтому множество

$$X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$$

открыто и, следовательно, как открытое множество в метрическом пространстве есть[1]) F_σ; множество K_i, как пересечение этого F_σ с замкнутым множеством C_i, также есть F_σ. (5) выполнено в силу того, что K_i является подмножеством C_i. Неравенство (5) позволяет применить Δ_n к каждому K_i, и мы получаем:

$$K_i = M_i \cup N_i,$$

$$\dim M_i \leqslant n-1, \quad \dim N_i \leqslant 0.$$

Обозначим $\bigcup M_i$ через M и $\bigcup N_i$ через N. Из (2) следует, что

$$X = M \cup N$$

каждое M_i есть F_σ в M. Действительно,

$$M_i = M_i \cap K_i = (M_1 \cup \ldots \cup M_i \cup \ldots) \cap K_i = M \cap K_i,$$

так как $M_i \subset K_i$ и $K_i \cap K_j = 0$ для $i \neq j$ в силу (3). Поэтому M_i, как пересечение M с K_i, являющимся, в силу (4), F_σ-множеством, само есть F_σ в M. Следовательно, применяя Σ_{n-1}, заключаем, что $\dim M \leqslant n-1$. Подобным же образом можно показать, что каждое N_1 есть F_σ в N и, следовательно, $\dim X \leqslant n$ в силу[2]) Σ_0.

---

[1]) АН, стр. 68.

[2]) Явное использование здесь Σ_0 сделало необходимым отдельное доказательство для Σ_0 в теореме II 2.

Таким образом, $X = M \cup N$, причем $\dim M \leqslant n - 1$ и $\dim N \leqslant 0$. Из 2 В) следует, что $\dim X \leqslant n$; что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Сумма двух подпространств, каждое из которых имеет размерность $\leqslant n$ и одно из которых замкнуто, имеет размерность $\leqslant n$.*

Доказательство такое же, как доказательство следствия 2 теоремы II.

Следствие 2. *Размерность непустого пространства не возрастает при прибавлении к нему одной точки.*

Доказательство. Следствие 2, очевидно, вытекает из следствия 1.

Следствие 3. *Если пространство X' размерности $\leqslant n$ содержится в некотором пространстве X, то каждая точка пространства X имеет произвольно малые окрестности (в X), пересечения границ которых с X' имеют размерность $\leqslant n - 1$* [сравнивая с 2 А), обратим внимание на то, что 2 А) налагает ограничение только на окрестности точек $p \in X'$].

Следствие 4. *Каждое пространство размерности $\leqslant n$ является суммой подпространства размерности $\leqslant n - 1$ и подпространства размерности $\leqslant 0$.*

Доказательство. Следствие 4 есть Δ_n, которое, как было показано при доказательстве теоремы III 2, является следствием Σ_{n-1}.

Теорема III 3. **Теорема о разложении n-мерного пространства в сумму нульмерных пространств.** *Пространство имеет размерность $\leqslant n$, n — конечное, в том и только в том случае, если оно является суммой $(n+1)$-го подпространства размерности $\leqslant 0$.*

Доказательство. Теорема III 3 следует из повторного применения следствия 4, доказанного выше, и 2 С).

Следствие. Если $\dim X = n$, а p и q — два целых числа $\geqslant -1$ таких, что $p + q + 1 = n$, то X является суммой двух подмножеств P и Q, размерность которых, соответственно, равна p и q.

Доказательство. Непосредственно следует из теоремы III 3.

Пример III 8. Мы уже привели (пример II 12) разложение пространства E_n на $(n+1)$ пространств $\mathfrak{R}_n^0, \ldots, \mathfrak{R}_n^n$ размерности 0.

4. Размерность топологического произведения

Теорема III 4. *Обозначим через $A \times B$ топологическое произведение*[1]) *двух пространств A и B, по крайней мере одно из которых непусто. Тогда*

$$\dim (A \times B) \leqslant \dim A + \dim B.$$

Доказательство. (По индукции). Предложение очевидно, если

$$\dim A = -1 \text{ или } \dim B = -1.$$

Пусть теперь $\dim A = m$, $\dim B = n$, и предположим, что предложение справедливо для случаев

$$\dim A \leqslant m, \quad \dim B \leqslant n - 1, \tag{1}$$

и

$$\dim A \leqslant m - 1, \quad \dim B \leqslant n. \tag{2}$$

Каждая точка $p = (a, b)$ пространства $A \times B$ обладает произвольно малыми окрестностями вида $U \times V$, где U — окрестность точки a в A и V — окрестность точки b в B, причем можно предположить, что

$$\dim FrU \leqslant m - 1, \quad \dim FrV \leqslant n - 1.$$

Мы имеем

$$Fr(U \times V) = (\overline{U} \times FrV) \cup (\overline{V} \times FrU).$$

Здесь каждое слагаемое замкнуто и по индуктивному предположению (1), (2) имеет размерность $\leqslant m + n - 1$. Следовательно, по теореме сложения

$$\dim Fr(U \times V) \leqslant m + n - 1;$$

этим доказано, что

$$\dim (A \times B) \leqslant m + n.$$

Следствие. *Если B нульмерно, то*

$$\dim (A \times B) = \dim A + \dim B. \tag{3}$$

Доказательство. Так как B непусто:

$$A \times B \supset A.$$

---

[1]) См. Указатель.

Следовательно, $\dim(A \times B) \geqslant \dim A = \dim A + \dim B$, что в соединении с теоремой III 4 доказывает следствие.

Замечание. Можно было бы предположить, что логарифмический закон (3) будет справедлив и в общем случае. К сожалению, это не так, ибо ясно, что $\mathfrak{R}_\omega$ (множество точек гильбертова пространства, все координаты которых рациональны) гомеоморфно $\mathfrak{R}_\omega \times \mathfrak{R}_\omega$, в то время как пример III 5 показывает, что $\dim \mathfrak{R}_\omega = 1$. (3) не имеет, вообще говоря, места даже в том случае, когда и A, и B являются компактами. Это показано понтрягинским примером (*Comptes Rendus*, 190 (1930), стр. 1105—1107) двумерных компактов, произведение которых трехмерно. Можно показать, что (3) имеет место для случая, когда B одномерно, а A является компактом. Проблема установления характеристики пространств B, для которых при произвольном пространстве A имеет место (3), остается открытой.

5. Отделение множеств в n-мерных пространствах

A) Если пространство X имеет размерность $\leqslant n$, то любые два непересекающиеся замкнутые множества могут быть отделены в X замкнутым множеством размерности $\leqslant n-1$.

Предложение A) содержится (при $X = A$) в более общем предложении:

B) Пусть C_1 и C_2 — два непересекающиеся замкнутые множества пространства X (произвольной размерности), и A — подмножество пространства X размерности $\leqslant n$. Тогда существует замкнутое множество B, отделяющее C_1 от C_2 и такое, что $\dim A \cap B \leqslant n-1$.

Доказательство. Если $n = 0$, то или $\dim A = -1$, и B) очевидно, или $\dim A = 0$. Но для этого случая B) было уже доказано в II F).

Допустим теперь, что $n > 0$. Применяя к множеству A следствие III 2, получаем: $A = D \cup E$, причем $\dim D \leqslant n-1$, $\dim E \leqslant 0$. В силу предложения B) для $n = 0$, существует множество B, отделяющее C_1 от C_2 и не пересекающееся с E. Следовательно,

$$A \cap B \subset D.$$

Но $\dim D \leqslant n-1$; поэтому $\dim A \cap B \leqslant n-1$; что и требовалось доказать.

Замечание. Утверждение, обратное к А), очевидно; так что А) устанавливает эквивалентность между локальным свойством отделения точки от замкнутого множества и свойством «в целом»—отделения двух замкнутых множеств. Это—та связь локальных свойств и свойств «в целом», которая, в значительной степени, является причиной плодотворности понятия размерности (см. Прибавление).

Следующее предложение будет играть важную роль в главе IV:

С) Пусть X — пространство размерности $\leqslant n-1$, и пусть C_i, C_i', $i=1,\ldots, n$, — n пар замкнутых подмножеств пространства X, для которых

$$C_i \cap C_i' = 0.$$

Тогда существуют n замкнутых множеств B_i таких, что B_i отделяет C_i от C_i' и

$$B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n = 0.$$

Доказательство. В силу А) существует замкнутое множество B_1, отделяющее C_1 от C_2, такое, что

$$\dim B_1 \leqslant n-2.$$

Пользуясь предложением В), находим замкнутое множество B_2, отделяющее C_2 от C_2', такое, что

$$\dim B_1 \cap B_2 \leqslant n-3.$$

Повторением этого применения предложения В), получим n множеств B_i таких, что B_i отделяет C_i от C_i' и

$$\dim (B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_k) \leqslant n-k-1, \quad k=1,\ldots,n.$$

При $k=n$ заключаем, что $B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n = 0$.

Замечание. Свойство предложения С) является *характеристическим* для пространств размерности, меньшей, чем n (см. замечание на стр. 112).

6. Компакты

Рассмотрим следующие свойства пространства X:

(1) Любые две различных точки могут быть отделены замкнутым множеством размерности $\leqslant n-1$.

(2) Любая точка может быть отделена от несодержащего ее замкнутого множества замкнутым множеством размерности $\leqslant n-1$, т. е. $\dim X \leqslant n$ (см. определение III 1').

(3) Любые два непересекающиеся замкнутые множества могут быть отделены замкнутым множеством размерности $\leqslant n-1$.

Ясно, что из (3) следует (2), а из (2) следует (1). Мы уже показали (5A), что из (2) для произвольных (метрических со счетным базисом) пространств следует (3), а в параграфе 4 главы II мы исследовали отношения между этими свойствами для случая $n=0$. Теперь, по аналогии с II 4 A), мы докажем, что

A) Для компактов свойства (1), (2) и (3) эквивалентны.

Доказательство. Осталось показать, что из (1) следует (2). Мы покажем это, доказав следующее предложение.

B) Пусть X — компакт, C — замкнутое подмножество пространства X, и p — точка из X. Тогда, если p может быть отделена замкнутым множеством размерности $\leqslant n-1$ от каждой точки множества C, то p может быть отделена замкнутым множеством размерности $\leqslant n-1$ от C.

Доказательство. Для каждой точки $q \in C$ существует открытое множество $U(q)$, для которого

$$q \in U(q), \quad p \notin \overline{U}(q),$$
$$\dim FrU(q) \leqslant n-1.$$

Множество C, как замкнутое подмножество компакта, само является компактом. Следовательно, существует конечное число $q_1, q_2, \ldots, q_k$ точек q таких, что

$$C \subset U = U(q_1) \cup \ldots \cup U(q_k).$$

Пусть B — граница множества U, $B = \overline{U} \setminus U$. Тогда

$$B \subset FrU(q_1) \cup \ldots \cup FrU(q_k),$$

и, следовательно, по теореме сложения для размерности $n=1$

$$\dim B \leqslant n-1.$$

Кроме того $p \notin \overline{U}$. Следовательно, p отделено от C замкнутым множеством B размерности $\leqslant n-1$, что и требовалось доказать.

C) Компакт имеет размерность $\leqslant n$ в том и только в том случае, если любые две различные точки в нем могут быть отделены замкнутым множеством размерности $\leqslant n-1$.

Замечание. Предложение C) остается справедливым для локально-компактных пространств.

Глава IV

РАЗМЕРНОСТЬ ЭВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В этой главе введенное нами понятие размерности будет оправдано доказательством того, что размерность n-мерного эвклидова пространства в точности равна n.

Следует иметь в виду, что до сих пор не было даже показано существование пространств размерности >1.

1. Некоторые топологические свойства пространства E_n

Мы уже знаем (пример III 4), что $\dim E_n \leqslant n$, и остается доказать, что $\dim E_n \geqslant n$. Для того чтобы доказать это, нам нужны некоторые общие теоремы о сферах и эвклидовых пространствах.

Интуитивно ясно, по крайней мере для $n=1$ и $n=2$, что n-мерная сфера не может быть стянута в лежащую на ней точку [1]). Под этим мы подразумеваем, что точки n-мерной сферы S_n нельзя за конечный промежуток времени переместить вдоль путей, лежащих в S_n и имеющих общую конечную точку так, что положение движущейся точки непрерывно зависит от времени и исходного положения точки. Точнее:

A) Пусть S_n — n-мерная сфера, т. е. множество всех точек $x \in E_{n+1}$, находящихся на расстоянии 1 от начала координат. Тогда не существует никакой непрерывной функции $f_t(x)$ двух переменных: $x \in S_n$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$, принимающей значения из S_n и

---

[1]) Конечно, является тривиальным тот факт, что двумерную сферу можно стянуть в точку в трехмерном эвклидовом пространстве. С другой стороны, резиновую пленку, натянутую на твердый шар, нельзя стянуть в точку, не разорвав ее, и это есть в точности то, что интуитивно понимается под нестягиваемостью двумерной сферы.

удовлетворяющей граничным условиям

$$f_0(x) = x \quad \text{и} \quad f_1(x) = \text{const}\,[1]. \tag{1}$$

Для читателя, знакомого с понятием степени отображения (n-мерной сферы в себя) и с теоремой о том, что степень отображения остается инвариантной при непрерывных деформациях, мы можем доказать предложение А) очень быстро: тождественное отображение f_0 имеет степень 1, постоянное отображение f_1 имеет степень 0; следовательно, невозможно, чтобы f_0 и f_1 принадлежали к одному и тому же непрерывному семейству f_t.

Теперь мы приведем вполне элементарное доказательство.

Доказательство. Мы воспользуемся простым геометрическим фактом, состоящим в том, что если $p_0, \ldots, p_n$ — точки единичной сферы S_n, попарные расстояния между которыми меньше 1, то $p_0, \ldots, p_n$ определяют единственный (возможно, вырождающийся) сферический n-мерный симплекс [2]).

(i) Пусть T — триангуляция сферы S_n, элементами которой являются сферические симплексы. Предположим, что каждой вершине a_i триангуляции T мы поставили в соответствие некоторую точку $\varphi(a_i) \in S_n$, причем так, что для любого n-мерного симплекса Δ, принадлежащего T, точки, соответствующие его вершинам, образуют множество диаметра меньшего 1 и, следовательно, определяют новый n-мерный симплекс Δ^φ (который может быть вырождающимся). Таким образом, φ ставит в соответствие триангуляции T сферы S_n некоторую совокупность T^φ n-мерных (сферических) симплексов на S_n; симплексы из T^φ будут, вообще говоря, перекрываться. Для любой точки $p \in S_n$, не лежащей на границе никакого из симплексов Δ^φ, принадлежащих T^φ, обозначим через

$$n(p, \varphi, T)$$

число n-мерных симплексов Δ^φ, содержащих p. Мы утверждаем,

---

[1]) f_1 является «постоянным» отображением: вообще, отображение f пространства X в пространстве Y называется *постоянным* отображением, если f отображает все X в одну точку пространства Y.

[2]) *Сферический n-мерный симплекс*, определенный $p_0, \ldots, p_n$, есть проекция на S_n из начала координат наименьшего выпуклого множества в E_{n+1}, содержащего $p_0, \ldots, p_n$. Этот n-мерный симплекс *вырождается*, если он лежит в n-мерной гиперплоскости, содержащей $p_0, \ldots, p_n$ и начало координат. Мы не касаемся вопросов ориентации.

что если q — другая точка S_n, не принадлежащая границе никакого Δ^φ из T^φ, то

$$n(p, \varphi, T) \equiv n(q, \varphi, T) \pmod 2. \tag{2}$$

При доказательстве соотношения (2) можно предполагать, что

точки $\varphi(a_i)$ находятся в общем положении[1]), (3)

т. е., если $m \leqslant n$, то никакие $m+1$ из точек $\varphi(a_i)$ не лежат в m-мерной плоскости, проходящей через начало координат. В самом деле, для фиксированных p и q мы можем точки $\varphi(a_i)$ заменить точками $\varphi'(a_i)$, удовлетворяющими условию (3) и такими, что

$p \in \Delta_i^\varphi$ тогда и только тогда, когда $p \in \Delta_i^{\varphi'}$ и
$q \in \Delta_i^\varphi$ тогда и только тогда, когда $q \in \Delta_i^{\varphi'}$, т. е.
$n(p, \varphi, T) = n(p, \varphi', T)$ и $n(q, \varphi, T) = n(q, \varphi', T)$.

Проведем на S_n дугу, соединяющую p и q, пересекающую каждую $(n-1)$-мерную грань любого симплекса из T^φ не более, чем в конечном числе точек, и не содержащую никаких точек, принадлежащих более, чем одной $(n-1)$-мерной грани. Это возможно в силу (3). Когда точка x пробегает вдоль этой дуги от p к q, целое число $n(x, \varphi, T)$ изменяется только в момент, когда x пересекает некоторую $(n-1)$-мерную грань какого-либо симплекса Δ^φ из T^φ. Пусть такая грань определена точками $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)$. Вершины $a_1, \ldots, a_n$ определяют некоторый $(n-1)$-мерный симплекс исходной триангуляции T, и этот $(n-1)$-мерный симплекс является общей гранью в точности двух n-мерных симплексов Δ и Γ триангуляции T. Рассмотрим симплексы Δ^φ и Γ^φ. Симплекс Δ^φ либо перекрывается симплексом Γ^φ, либо нет. В первом случае $n(x, \varphi, T)$ изменяется на 2, когда x пересекает рассматриваемую $(n-1)$-мерную грань, а во втором случае $n(x, \varphi, T)$ остается неизменным; в обоих случаях *четность* числа $n(x, \varphi, T)$ остается неизменной. Таким образом, соотношение (2) доказано.

Обозначим теперь через $n(\varphi, T)$ общее значение чисел $n(p, \varphi, T) \pmod 2$.

(ii) Пусть f — отображение[2]) сферы S_n в себя. Тогда существует триангуляция T сферы S_n, симплексы которой так малы,

[1]) Отсюда следует, что никакой из симплексов Δ^φ не вырождается.

[2]) Начиная с этого момента, под словом «отображение» всегда будет пониматься непрерывное отображение, если специально не оговорено противное.

что образ каждого из них при отображении f имеет диаметр, меньший, чем 1. Рассматривая в (i) $f(a_i)$ вместо $\varphi(a_i)$, определим $n(p, f, T)$ и $n(f, T)$. Кроме того, в действительности $n(f, T)$ зависит только от f:

$$n(f, T) = n(f, T') \tag{4}$$

для всяких двух триангуляций T и T', для которых эти символы имеют смысл. Так как любые две триангуляции T и T' имеют общее подразделение T'', достаточно, следовательно, доказать (4) для случая, когда T' является подразделением триангуляции T. Достаточно ограничиться даже случаем, когда T' получается из T подразделением только одного симплекса Δ_0 триангуляции T, с сохранением всех остальных симплексов неизменными. Чтобы дать доказательство в этом частном случае, выберем точку p вне Δ_0^f. Равенство (4) следует тогда из тривиального равенства

$$n(p, f, T) = n(p, f, T').$$

Обозначим через $n(f)$ общее значение $n(f, T)$. Это целое число, определенное только по модулю 2, называется *степенью* отображения f по модулю 2. Ясно, что если f—тождественное отображение, то $n(f) = 1$, а если f—постоянное отображение, то $n(f) = 0$.

(iii) Возвратимся теперь к доказательству предложения А). Допустим, что непрерывная функция $f_t(x)$ описанного в А) типа действительно существует. Из компактности сферы S_n и отрезка $0 \leqslant t \leqslant 1$ следует, что $f_t(x)$ является равномерно непрерывной функцией пары (x, t). Следовательно, существует триангуляция T_0 сферы S_n, обладающая следующим свойством: для каждого t образ любого симплекса триангуляции T_0 при отображении f_t имеет диаметр меньше 1. Очевидно, что если p—произвольная точка, для которой определено $n(p, f_t, T_0)$, то существует $\delta > 0$ такое, что $n(p, f_{t'}, T_0)$ также определено и

$$n(p, f_t, T_0) = n(p, f_{t'}, T_0)$$

для каждого t', удовлетворяющего неравенству $|t - t'| < \delta$. Следовательно, $n(f_t) = n(f_{t'})$ при $|t - t'| < \delta$; этим доказано, что $n(f_t)$ постоянно. Поэтому невозможно, чтобы $f_t(x)$ удовлетворяла граничным условиям (1), потому что из них следуют равенства $n(f_0) = 1$ и $n(f_1) = 0$.

Предложение А) можно также сформулировать следующим образом:

B) Пусть K_n—замкнутый шар в E_n, т. е. множество точек пространства E_n, находящихся на расстоянии, меньшем или равном 1 от начала координат, и пусть S_{n-1}—$(n—1)$-мерная сфера, являющаяся границей K_n. Тогда не существует никакого отображения F шара K_n в S_{n-1}, оставляющего неподвижными все точки сферы S_{n-1}.

Доказательство. Действительно, допустим, что F— такое отображение. Тогда функция

$$f_t(x) = F[(1-t)x], \quad x \in S_{n-1}$$

удовлетворяет (1) (мы здесь рассматриваем x, как единичный вектор с началом в начале координат; $(1-t)x$ является тогда вектором, компоненты которого равны компонентам x, умноженным на $(1-t)$).

В качестве следствия из B) получаем одну из наиболее известных теорем топологии:

C) **Теорема Брауэра о неподвижной точке.** *При отображении замкнутого шара K_n пространства E_n в себя всегда существует неподвижная точка, т. е. точка, совпадающая со своим образом.*

Доказательство. Допустим, что существует непрерывная функция $g(x)$, определенная на K_n, для которой $g(x) \neq x$ для каждой точки x. Пусть S_{n-1} — $(n-1)$-мерная сфера, ограничивающая K_n. Для каждой точки $x \in K_n$ рассмотрим луч, соединяющий x с $g(x)$, направленный от $g(x)$ к x. Пусть $f(x)$ — пересечение этого луча с S_{n-1}. Тогда соответствие

$$x \longrightarrow f(x)$$

является, очевидно, отображением K_n в S_n, оставляющим неподвижными все точки $x \in S_{n-1}$. Такое отображение, однако, существовать не может, так как его существование противоречит предложению B).

D) Пусть I_n — куб в E_n, например множество точек, каждая из координат $x_1, \ldots, x_n$ которых удовлетворяет неравенству

$$|x_i| \leqslant 1.$$

Пусть C_i — грань I_n, определенная уравнением

$$x_i = 1,$$

и C_i' — противоположная грань. Пусть B_i — замкнутое множество, отделяющее C_i от C_i'. Тогда

$$B_1 \cap \ldots \cap B_n \neq 0.$$

Доказательство. B_i отделяет C_i от C_i' в I_n, т. е.

$$I_n \setminus B_i = U_i \cup U_i',$$
$$C_i \subset U_i, \quad C_i' \subset U_i',$$
$$U_i \cap U_i' = 0,$$

причем U_i и U_i' открыты в $I_n \setminus B$, а, следовательно, и в I_n. Для каждой точки $x \in I_n$ пусть $V(x)$ есть вектор, i-я компонента которого имеет значение

$$\pm \rho(x, B_i)$$

($\rho(x, B_i)$, как обычно, обозначает расстояние от x до B_i), где берется знак $+$, если $x \in U_i'$, и $-$, если $x \in U_i$. Поместим начальную точку вектора $V(x)$ в точку x и поставим точке x в соответствие в качестве ее образа $f(x)$ конечную точку этого вектора. Правило знаков обеспечивает нам, что в любом случае $f(x) \in I_n$. Соответствие $f(x)$, как легко видеть, непрерывно: $f(x)$ является непрерывным отображением куба I_n в себя. Из теоремы Брауэра о неподвижной точке (C), которую можно применить к I_n, так как I_n гомеоморфно K_n, следует, что существует точка x^0 такая, что

$$f(x^0) = x^0.$$

Это означает, что

$$\rho(x^0, B_i) = 0$$

для каждого i; другими словами, $x^0 \in B_i$. Следовательно,

$$B_1 \cap \ldots \cap B_n \neq 0,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Предложения A), B), C) и D) тесно связаны между собой, и любое из них может быть выведено из другого с помощью весьма простых рассуждений.

2. Размерность пространства E_n

Теперь мы докажем наиболее важные результаты этой главы.

A) $$\dim I_n \geqslant n.$$

Доказательство. Предположим, что $\dim I_n \leqslant n-1$. Тогда, в силу III 5 C), существует n таких замкнутых подмножеств B_i куба I_n, отделяющих различные пары противоположных граней, что $B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n = 0$. Но это противоречит 1 D).

B) $$\dim E_n \geqslant n.$$

Доказательство. Предложение следует из того, что I_n является подмножеством пространства E_n.

Теорема IV 1. *n-мерное эвклидово пространство имеет размерность n*[1]).

Доказательство. Надо сопоставить B) с примером III 4.

Следствие. *n-мерный эвклидов куб имеет размерность n.*

Доказательство. Надо сопоставить A) с тем фактом, что I_n является подмножеством пространства E_n.

Пример IV 1. $\dim \mathcal{M}_n^m = m$ и $\dim \mathcal{L}_n^m = n-m$. В самом деле, очевидно (см. пример III 6),

$$E_n = \mathcal{M}_n^m \cup \mathcal{L}_n^{m+1},$$

причем $\dim \mathcal{M}_n^m \leqslant m$ и $\dim \mathcal{L}_n^{m+1} \leqslant n-m-1$. Следовательно, если хотя бы одно из равенств $\dim \mathcal{M}_n^m = m$ и $\dim \mathcal{L}_n^{m+1} = n-m-1$ было бы неверным, то оказалось бы, что (III 2 B) $\dim E_n < n$.

Пример IV 2. $\dim \mathcal{M}_\omega^m = m$. В самом деле, рассмотрим множество M точек x гильбертова параллелепипеда,

$$x = (x_1 x_2, \ldots, x_i, \ldots),$$

первые m координат которых произвольны, а для каждого индекса $k > m$, x_k принимает иррациональное значение $\frac{1}{k\pi}$. M гомеоморфно I_m. Следовательно (теорема IV 1), $\dim M = m$.

---

[1]) Впервые доказана Брауэром: Über den natürlichen Dimensionsbegriff, *Journ. f. Math.* **142** (1913), стр. 146—152. Брауэр, так же как Менгер и Урысон, основывал свои доказательства на теореме Лебега о покрытиях (см. ниже).

Но M является подмножеством множества $\mathcal{M}^m_\omega$, так что $\dim \mathcal{M}^m_\omega \geqslant m$. Сопоставляя это с примером III 7, заключаем, что $\dim \mathcal{M}^m_\omega = m$.

3. Теорема Лебега о покрытиях

Теорема IV. **2. Теорема Лебега о покрытиях.** *Пусть n-мерный куб есть сумма конечного числа замкнутых множеств, ни одно из которых не пересекается ни с какими двумя противоположными гранями. Тогда по крайней мере $n+1$ из этих замкнутых множеств имеют общую точку.*

Хотя эта теорема не используется в настоящей книге, мы докажем ее, ввиду ее большого исторического значения (см. параграф 3 главы 1). Доказательство существенно опирается на предложение 1 D).

Сначала мы докажем два вспомогательных предложения:

A) Пусть A — замкнутое множество пространства X, C и C' — пара непересекающихся замкнутых подмножеств пространства X, и K — замкнутое подмножество множества A, отделяющее $A \cap C$ от $A \cap C'$ в A. Тогда существует замкнутое множество B, отделяющее C от C' в X, такое, что $A \cap B \subset K$.

Доказательство. Утверждение, что K отделяет в A множество $A \cap C$ от множества $A \cap C'$, означает, что

$$A \setminus K = D \cup D',$$

$$A \cap C \subset D, \ A \cap C' \subset D',$$

$$D \cap D' = 0,$$

причем D и D' замкнуты в $A \setminus K$. Следовательно, ни одно из непересекающихся множеств $C \cup D$ и $C' \cup D'$ не содержит предельных точек другого. Так как X вполне нормально[1]), существует открытое в X множество W такое, что $C \cup D \subset W$ и $\overline{W} \cap (C' \cup D') = 0$. Отсюда следует, что $B = FrW$ отделяет C от C' в X и $B \cap (D \cup D') = 0$; следовательно, $A \cap B \subset K$.

B) Пусть C_i и C'_i $(i = 1, \ldots, n)$ — пары противоположных граней куба I_n. Пусть

$$K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \tag{1}$$

[1]) См. Указатель.

— убывающая последовательность замкнутых множеств куба I_n таких, что K_1 отделяет C_1 от C_1' в I_n; K_2 отделяет $K_1 \cap C_2$ от $K_1 \cap C_2'$ в K_1;...,;K_n отделяет $K_{n-1} \cap C_n$ от $K_{n-1} \cap C_n'$ в K_{n-1}. Тогда K_n не пусто.

Доказательство. Пусть $B_1 = K_1$. Пользуясь предложением A) и принимая K_{i-1} за A, а C_i и C_i' — за C и C', расширим каждое K_i $(i = 2, \ldots, n)$ до множества, отделяющего C_i от C_i' в I_n. В результате получим систему $B_1, \ldots, B_n$ замкнутых множеств, обладающих следующими свойствами:

$$B_i \textit{ отделяет } C_i \textit{ от } C_i' \textit{ в } I_n. \tag{2}$$

$$B_1 = K_1,\ B_i \cap K_{i-1} \subset K_i,\ i = 2, \ldots, n \tag{3}$$

Из (1) и (3) следует, что

$$B_1 \cap \ldots \cap B_n \subset K_n; \tag{4}$$

из (2) и предложения 1 D) вытекает, что

$$B_1 \cap \ldots \cap B_n \neq 0; \tag{5}$$

следовательно, K_n не пусто.

Доказательство теоремы IV 2. Обозначим через L_1 сумму множеств заданного разложения куба I_n, пересекающихся с C_1, через L_2 — сумму множеств, не вошедших в L_1 и пересекающихся с C_2, через L_3 — сумму множеств, не принадлежащих $L_1 \cup L_2$ и пересекающихся с $C_3, \ldots$, наконец, через L_{n+1} — сумму множеств, не пересекающихся ни с одним из C_i. Пусть

$$K_1 = L_1 \cap (L_2 \cup \ldots \cup L_{n+1}),$$
$$K_2 = L_1 \cap L_2 \cap (L_3 \cup \ldots \cup L_{n+1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$K_{n-1} = L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_{n-1} \cap (L_n \cup L_{n+1}),$$
$$K_n = L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_n \cap L_{n+1}.$$

Из условий теоремы, как легко видеть, следует, что множества K_i удовлетворяют условиям предложения B). Следовательно, $K_n \neq 0$, т. е.

$$L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_{n+1} \neq 0.$$

Справедливость самой теоремы вытекает из того обстоятельства, что каждое из исходных замкнутых множеств заданного разложения содержится лишь в одном из L_i.

Замечание. В главе V мы покажем, что теорема Лебега выражает общее свойство всех пространств размерности $\geqslant n$.

4. Подмножества пространства E_n

Пусть N — подмножество пространства E_n, содержащее непустое открытое множество. Очевидно, $\dim N = n$. Действительно, существует точка $p \in N$ и положительное действительное число ρ такие, что сферическая окрестность $S(p, \rho)$ точки p радиуса ρ целиком содержится в N, а $S(p, \rho)$, очевидно, гомеоморфна E_n.

Докажем теперь обратное утверждение.

Теорема IV 3. *Для того чтобы подмножество N пространства E_n было n-мерным, необходимо и достаточно, чтобы N содержало непустое открытое в E_n множество.*

Доказательство. Нам нужно показать, что если $\dim N = n$, то N содержит непустое открытое множество. Обозначим через M дополнение к N. Тогда высказанное выше утверждение эквивалентно утверждению, что если M — плотное в E_n множество, то дополнение множества M имеет размерность $\leqslant n-1$. Не уменьшая общности, можно предположить, что M счетно. Действительно, M, как подмножество пространства со счетным базисом, содержит счетное плотное в нем подмножество A, а из того, что $\dim (E_n \setminus A) \leqslant n-1$ конечно, вытекает, что $\dim (E_n \setminus M) \leqslant n-1$.

Утверждение, несомненно, верно (пример III 6), если в качестве M взять счетное множество $\mathfrak{R}_n$ точек пространства E_n, все координаты которых рациональны. Для того чтобы вывести отсюда справедливость нашего утверждения для произвольного плотного в E_n счетного множества M, достаточно доказать свойство однородности эвклидовых пространств, выражаемое следующим предложением.

A) *Каковы бы ни были два всюду плотных счетных подмножества A и B пространства E_n, существует гомеоморфизм пространства E_n на себя, переводящий A в B.*

Прежде чем доказать предложение A), сделаем несколько предварительных замечаний.

Пусть (x^1, x^2) и (y^1, y^2) — две упорядоченные пары точек пространства E_n. Если оси координат находятся в общем положении, т. е. никакая гиперплоскость, параллельная координатной гиперплоскости, не содержит более, чем одну точку x^1 или x^2, и более, чем одну точку y^1 или y^2, то мы скажем, что

(x^1, x^2) и (y^1, y^2) подобно расположены, если векторы x^1-x^2 и y^1-y^2 содержатся в одном и том же «квадранте» E_n, т. е., если для каждого $i=1,\ldots, n$ действительные числа $x_i^1 - x_i^2$ и $y_i^1-y_i^2$ имеют один и тот же знак, где x_i и y_i — координаты точек x и y.

Пусть $X=x^1, x^2,\ldots, x^n,\ldots$, и $Y=y^1,y^2,\ldots, y^n,\ldots$ — две счетные последовательности точек или же два конечных множества точек одинаковой мощности. Всегда возможно таким образом выбрать систему координат, чтобы оси координат находились в общем положении (т. е. чтобы никакая гиперплоскость, параллельная координатной гиперплоскости, не содержала более, чем одну точку x, и более, чем одну точку y), так как для этого нужно лишь, чтобы оси не были направлены по не более, чем счетному числу определенных направлений. Предполагая это условие выполненным, мы скажем, что X и Y подобно расположены, если две упорядоченные пары точек (x^{μ_1}, x^{μ_2}) и (y^{μ_1}, y^{μ_2}) подобно расположены для каждой пары индексов μ_1 и μ_2.

B) Пусть A и B — два счетных плотных в E_n множества, и пусть координатные оси находятся в общем положении по отношению к A и B. Тогда A и B можно переупорядочить в подобно расположенные последовательности.

Доказательство B). Пусть A и B произвольным образом упорядочены: $A=a^1,\ldots, a^i\ldots$ и $B=b^1,\ldots, b^i\ldots$. Мы определим подобно расположенные последовательности $C=c^1,\ldots, c^i,\ldots$ и $D=d^1,\ldots, d^i,\ldots$, совпадающие соответственно с A и B, но только упорядоченные по-иному. Эта конструкция строится индуктивно, причем каждый шаг индукции состоит из выбора: (1) элемента множества C из A, (2) элемента множества D из B, (3) другого элемента множества D из B, и, наконец, (4) другого элемента множества C из A.

Начинаем, полагая $c^1=a^1$ и $d^1=b^1$. Затем полагаем $d^2=b^2$ и $c^2=a^\sigma$, где σ — наименьший номер такой, что (c^1, a^σ) и (d^1, d^2) подобно расположены. c^2 существует, в силу того, что A плотно в E^n.

Допустим, что $c^1,\ldots,c^{2j}$ и $d^1,\ldots, d^{2j}$ уже выбраны так, что системы $c^1,\ldots, c^{2j}$ и $d^1,\ldots, d^{2j}$ подобно расположены. Обозначим через c^{2j+1} первый элемент a, не содержащийся среди элементов $c^1,\ldots, c^{2j}$, и через d^{2j+1} — первый элемент b такой, что $c^1,\ldots, c^{2j}, c^{2j+1}$ и $d^1,\ldots, d^{2j}, d^{2j+1}$ подобно расположены. Такой элемент d^{2j+1} существует, так как B плотно в E_n.

Далее, обозначим через d^{2j+2} первый элемент b, не содержащийся среди $d^1, \ldots, d^{2j}, d^{2j+1}$, и через c^{2j+2} — первый элемент a такой, что $c^1, \ldots, c^{2j}, c^{2j+1}, c^{2j+2}$ и $d^1, \ldots, d^{2j}, d^{2j+1}, d^{2j+2}$ подобно расположены. Элемент c^{2j+2} существует, так как A плотно в E^n.

Это завершает индукцию. Ясно, что C и D подобно расположены и что в C входит каждый элемент A, а в D — каждый элемент B, т. е. C и D совпадают, соответственно с A и B, но только упорядочены по-иному. Предложение В) доказано.

Возвратимся теперь к доказательству предложения А).

Доказательство предложения А). Предложение В) позволяет нам рассматривать счетные плотные в пространстве E_n последовательности A и B как подобно расположенные. Предложение А) будет доказано тем, что взаимно однозначное соответствие

$$f: a^i \rightleftarrows b^i$$

между A и B будет продолжено в гомеоморфное отображение пространства E_n на себя.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная точка пространства E_n, не принадлежащая A. Мы определим $y = f(x)$, задавая для каждого k, $k = 1, \ldots, n$, k-ую координату y_k точки y. Множество A разобьем на два непересекающиеся класса: класс, состоящий из всех точек множества A, k-я координата которых не больше x_k, и класс, состоящий из точек, k-я координата которых больше x_k. С этим разбиением множества A, в силу взаимно однозначного характера соответствия $f(A) = B$, связано разбиение множества B на два непересекающиеся класса. Разбиение множества B, в свою очередь, порождает разбиение на два непересекающиеся класса множества K всех k-ых координат элементов множества B. Так как A и B подобно расположены, то это разбиение множества K обладает тем свойством, что каждый элемент одного класса меньше, чем каждый элемент другого класса. Так как K плотно на числовой прямой, то полученное сечение определяет действительное число, которое мы и берем в качестве y_k. Простое доказательство того, что так распространенное отображение f является гомеоморфным отображением пространства[1]) E_n на себя, мы предоставляем чита-

[1]) Интересно заметить, что это гомеоморфное отображение обладает тем свойством, что k-ая координата точки-образа зависит только от k-й координаты исходной точки.

телю. Таким образом, А), а следовательно, и теорема IV 3 доказаны.

Следствие 1. *Для того чтобы подмножество N n-мерного многообразия (связного пространства, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную E_n) было n-мерно, необходимо и достаточно, чтобы N содержало непустое открытое подмножество многообразия.*

Следствие 2. *Пусть U—непустое и не всюду плотное*[1]) *открытое множество пространства E_n, и пусть B—граница множества U. Тогда* $\dim B = n - 1$.

Доказательство. Прежде всего, из теоремы IV 3 следует, что $\dim B \leqslant n - 1$, так как B не содержит никакого непустого открытого множества. Теперь мы покажем, что невозможно, чтобы B имело размерность $\leqslant n - 2$.

Предположим сначала, что U ограничено. Пусть p — некоторая точка U. Если бы B имело размерность $\leqslant n - 2$, то простым процессом сжатия мы могли бы получить произвольно малые окрестности точки p, гомеоморфные U, границы которых гомеоморфны B и, следовательно, имеют размерность $\leqslant n - 2$. Таким образом, E_n имело бы размерность $\leqslant n - 1$ в точке p. В силу однородности пространства E_n отсюда следовало бы, что E_n имеет размерность $\leqslant n - 1$, в противоречии с теоремой IV 1. Таким образом, $\dim B = n - 1$.

Теперь предположим, что U не ограничено. В этом случае обозначим через p внутреннюю точку дополнения к U. Пусть ρ — столь малое действительное число, что сферическая окрестность $S(p, \rho)$ точки p радиуса ρ содержится в дополнении к множеству U. Произведем инверсию пространства E_n с центром p и радиусом инверсии ρ. Инверсия, конечно, является гомеоморфным отображением $E_n \setminus p$ на себя и переводит U в непустое ограниченное открытое множество U', целиком содержащееся в $S(p, \rho)$. Если через B' мы обозначим границу множества U', то окажется, что $B' \setminus p$ гомеоморфно B. В силу только что доказанного, $\dim B' = n - 1$. Из того факта, что размерность непустого множества не может быть повышена прибавлением одной точки (следствие 2 теоремы III 2), вытекает, что $\dim B = n - 1$.

Замечание. Пусть U — непустое и не всюду плотное открытое множество некоторого n-мерного многообразия, и

---

[1]) Т. е. и U, и его дополнение содержат непустое открытое множество.

B — граница множества U. Тогда $\dim B = n - 1$. Это вытекает из следствия 1 теоремы IV 4.

Пример IV 3. Пусть $X \setminus a$ — вполне несвязное множество Кнастера и Куратовского, становящееся связным после прибавления точки a (см. пример II 16). Тогда

$$\dim (X \setminus a) = \dim X = 1,$$

ибо мы уже знаем, что $X \setminus a$ и X имеют размерность $\geqslant 1$, но ни $X \setminus a$, ни X, являющиеся подмножествами E_2, не содержат открытого множества пространства E_2.

5. Разбивающие множества в E_n

Определение IV 1. Подмножество D пространства X *разбивает* X, если $X \setminus D$ несвязно.

А) Следующие три утверждения о пространстве X эквивалентны:

(1) X может быть разбито подмножеством D размерности $\leqslant m$;

(2) X содержит открытое множество U, непустое и не всюду плотное, граница которого имеет размерность $\leqslant m$;

(3) $X = C_1 \cup C_2$, где C_1, C_2 — замкнутые истинные подмножества пространства X и $\dim C_1 \cap C_2 \leqslant m$.

Доказательство. (1) $\to$ (2). Так как D разбивает пространство X, то

$$X \setminus D = U_1 \cup U_2, \quad U_1 \neq 0, \quad U_2 \neq 0,$$

и

$$(U_1 \cap \overline{U_2}) \cup (\overline{U_1} \cap U_2) = 0. \tag{4}$$

Мы можем предположить, что

$$X = \overline{X \setminus D} = \overline{U_1} \cup \overline{U_2},$$

так как в противном случае D содержало бы непустое открытое множество V такое, что $\overline{V} \subset D$. Граница множества V, как подмножество множества D, имела бы размерность $\leqslant m$ и, следовательно, удовлетворяла бы условиям (2).

Пусть $U = X \setminus \overline{U_1}$. Из (4) и (5) заключаем, что $U_2 \subset U \subset \overline{U_2}$. Этим показано, что U непусто. Кроме того, U не всюду плотно, так как, в силу (4), $\overline{U_2} \neq X$. Наконец, граница множества U содержится в $\overline{U_2} \setminus U_2$, следовательно, и в D, а поэтому имеет размерность $\leqslant m$. Таким образом, X удовлетворяет условию (2).

(2) $\longrightarrow$ (3). Если U — множество, удовлетворяющее условию (2), то $C_1 = \overline{U}$, $C_2 = X \setminus U$ — множества, удовлетворяющие условию (3).

(3) $\longrightarrow$ (1). Если C_1 и C_2 — множества, удовлетворяющие условию (3), то $D = C_1 \cap C_2$ — множество, удовлетворяющее условию (1).

Теорема IV 4. *E_n не может быть разбито подмножеством размерности $\leqslant n-2$.*

Доказательство. Действительно, если бы теорема была не верна, то E_n, в силу А), содержало бы некоторое открытое множество, непустое и не всюду плотное, граница которого имеет размерность $\leqslant n-2$, что противоречило бы следствию 2 теоремы IV 3.

Следствие 1. *S_n, а так же любое n-мерное многообразие, не может быть разбито подмножеством размерности $\leqslant n-2$.*

Доказательство. Пусть R — n-мерное многообразие, и пусть D разбивает R, т. е. $R \setminus D = A_1 \cup A_2$, где множества A_1 и A_2 замкнуты в $R \setminus D$ и $A_1 \cap A_2 = 0$. Допустим, что $\dim D \leqslant n-2$. Тогда $R \setminus D$ плотно в R. Следовательно, каждая точка $p \in D$ является предельной либо для множества A_1, либо для множества A_2. Найдется точка $p \in D$, предельная для обоих множеств A_1 и A_2, ибо, в противном случае, замкнутые множества $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ дают в сумме R и $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = 0$, что невозможно, так как R связно. Рассмотрим окрестность U точки p, гомеоморфную пространству E_n. Легко видеть, что U разбивается множеством $D \cap U$, что противоречит теореме IV 4.

Следствие 2. *Куб I_n не может быть разбит подмножеством размерности $\leqslant n-2$.*

Доказательство. Пусть D — подмножество куба I_n, имеющее размерность $\leqslant n-2$, а I'_n — внутренность куба I_n. I'_n гомеоморфно пространству E_n. Поэтому $I'_n \setminus D$ связно. Но все точки множества $I_n \setminus D$ являются предельными точками множества $I'_n \setminus D$, следовательно, образуют также связное множество (множество остается связным после прибавления к нему произвольного множества его предельных точек).

6. Бесконечномерные пространства

Обозначим через J_ω подмножество гильбертова пространства, состоящее из точек, все координаты которых, за исключением конечного числа из них, равны нулю. J_ω содержит топологический образ n-мерного эвклидова пространства для каждого n, следовательно, $\dim J_\omega = \infty$. J_ω является примером бесконечномерного пространства, которое представимо в виде суммы счетного числа конечномерных пространств; именно $E_1 \cup E_2 \cup \ldots$, где E_n — n-мерное эвклидово пространство, порождаемое первыми n координатными осями.

J_ω некомпактно, но также очень легко построить компактное подмножество K_ω гильбертова параллелепипеда, являющееся суммой счетного числа конечномерных пространств. Пусть M_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — n-мерный «куб», состоящий из точек $x = (x_1, x_2, \ldots)$, удовлетворяющих условиям:

$$|x_i| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots n,$$

$$|x_i| = 0 \quad \text{для} \quad i > n,$$

и пусть $K_\omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$.

Не всякое бесконечномерное пространство является суммой счетного числа конечномерных пространств. В самом деле:

A) Гильбертов параллелепипед не является суммой счетного числа конечномерных пространств.

Доказательство. На основании теоремы о разложении n-мерного пространства в сумму нульмерных пространств (теорема III 3) доказываемое предложение эквивалентно тому, что гильбертов параллелепипед не является суммой счетного числа нульмерных пространств.

Допустим противное:

$$I_\omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots, \tag{1}$$

где каждое A_i — нульмерно. Пусть C_i — грань куба I_ω, определенная уравнением $x_i = \frac{1}{i}$, а C'_i — противоположная ей грань. На основании II 2 F) существует замкнутое множество B_i, отделяющее C_i от C'_i и такое, что

$$A_i \cap B_i = 0. \tag{2}$$

Обозначим через B_i^n пересечение множества B_i с n-мерным эвклидовым пространством, порождаемым первыми n координатами гильбертова пространства. Тогда для данного n очевидно, что множества $B_1^n, B_2^n, \ldots, B_n^n$ суть замкнутые множества куба n-мерного эвклидова пространства, отделяющие различные пары его противоположных граней. Следовательно, в силу 1 D), эти n множеств имеют непустое пересечение, и тем более $B_1 \cap \ldots \cap B_n \neq 0$. Из компактности I_ω следует, что

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \neq 0. \tag{3}$$

С другой стороны, из (1) и (2) следует, что

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = 0,$$

чего быть не может.

Следствие. Никакое из пространств L_p и никакое из пространств l_p [1]) не является суммой счетного числа нульмерных пространств.

Доказательство. Утверждение немедленно следует из того факта, что все пространства L_p и l_p гомеоморфны [2]), а l_2 есть гильбертово пространство.

Возможность разложения в сумму счетного числа конечномерных пространств тесно связана с так называемой «трансфинитной размерностью». Продолжая определение III 1 с помощью трансфинитной индукции, мы скажем, что $\dim X \leqslant \alpha$ (α — порядковое число), если каждая точка пространства X обладает произвольно малыми окрестностями, границы которых имеют размерность, меньшую, чем α [3]). Мы скажем, что $\dim X = \alpha$, если верно, что $\dim X \leqslant \alpha$, но неверно, что $\dim X < \alpha$.

Не всякое пространство имеет трансфинитную размерность, но

B) Если X имеет трансфинитную размерность α, то α — число первого или второго порядкового класса.

Доказательство. Нам нужно показать, что α меньше, чем $\Omega = \omega_1$. Допустим противное. Пусть β — наименьшее порядковое число $\Omega \leqslant \beta \leqslant \alpha$, для которого существует про-

[1]) См. Указатель.

[2]) S. Mazur. Une remarque sur l'homéomorphie des champs fonctionnels, *Studia Math.* **1** (1929), стр. 83—85.

[3]) $\dim B < \alpha$, конечно, означает, что $\dim B \leqslant \beta$ для некоторого $\beta < \alpha$.

странство B размерности β. По определению трансфинитной размерности, B обладает базисом, составленным из открытых множеств, границы которых имеют размерность, меньшую чем β и, следовательно, в силу минимального характера β, меньшую чем Ω. Так как пространство B обладает счетным базисом, то можно предположить, что и этот базис счетный. Но счетное множество порядковых чисел первого или второго класса имеет верхнюю границу, принадлежащую второму классу. Это означает, что существует порядковое число

$$\gamma < \Omega$$

такое, что граница каждого элемента нашего базиса имеет размерность, меньшую, чем γ. Но тогда

$$\dim B \leqslant \gamma$$

в противоречии с тем, что

$$\dim B = \beta \geqslant \Omega.$$

C) Если X имеет трансфинитную размерность, то X является суммой счетного числа конечномерных подпространств.

Доказательство. Пусть $\dim X = \alpha$. Предложение C) очевидно, если $\alpha = 0$. Предположим, что предложение справедливо для всех α, меньших β, и покажем, что оно справедливо и для α, равного β. Пусть X — пространство размерности β. Рассмотрим счетный базис пространства X, составленный из множеств, границы которых имеют размерность меньше β.

По индуктивному предположению каждая из этих границ равна сумме счетного числа нульмерных пространств. Следовательно, сумма B этих границ является суммой счетного числа нульмерных множеств. Доказательство вытекает поэтому из замечания (см. доказательство формулы (1) на стр. 37), что $X \setminus B$ нульмерно.

Следствие. *Гильбертово пространство и гильбертов параллелепипед не имеют никакой трансфинитной размерности.*

Утверждение, обратное предложению C), неверно: J_ω — множество тех точек из E_ω, у которых все координаты, кроме конечного числа из них, равны нулю, является суммой счетного числа конечномерных пространств, но можно доказать, что J_ω не имеет никакой трансфинитной размерности.

Однако частичное обращение предположения C) имеет место:

D) Если X — полное пространство[1]) (и тем более, если X — компакт), являющееся суммой счетного числа нульмерных пространств, то X имеет трансфинитную размерность.

Доказательство. Пусть

$$X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots, \tag{5}$$

где каждое A_i нульмерно. Допустим, что X не имеет трансфинитной размерности. Тогда существует точка $p \in X$ и окрестность U точки p, обладающая следующим свойством: если V — произвольная окрестность точки p, содержащаяся в U, то граница B окрестности V не имеет трансфинитной размерности. Так как A_1 нульмерно, то существует (следствие 3 теоремы III 2) окрестность V_1 точки p, содержащаяся в U, граница B_1 которой не имеет трансфинитной размерности (следовательно, не пуста) и не пересекается с A_2. Мы можем также потребовать, чтобы диаметр множества B_1 был меньше 1.

Теперь заменим X множеством B_1 и построим в B_1 замкнутое множество B_2 диаметра меньше $\frac{1}{2}$, не имеющее трансфинитной размерности и не пересекающееся с A_2. По индукции получим счетную убывающую последовательность замкнутых непустых множеств B_i, диаметры которых стремятся к нулю и таких, что

$$A_i \cap B_i = 0. \tag{6}$$

Предположение, что X — полное пространство, влечет за собой существование точки, общей для всех B_i. С другой стороны, соотношения (5) и (6) делают это невозможным.

[1]) См. Указатель.

Глава V

ТЕОРЕМЫ О ПОКРЫТИЯХ И О ВКЛЮЧЕНИИ

Любое подмножество эвклидова пространства является метрическим конечномерным пространством со счетным базисом. Справедливо ли обратное?

Мы докажем, что обратное действительно справедливо — точнее: каждое (метрическое со счетным базисом) пространство размерности $\leqslant n$ может быть топологически включено в E_{2n+1} (теорема V 3). Это значит, что класс конечномерных пространств топологически тождествен классу подмножеств эвклидовых пространств [1].

Пример А. Флореса (Пример V 3) показывает, что невозможно понизить число $2n+1$, т. е. произвольное n-мерное пространство включить в эвклидово пространство размерности $2n$.

Другим фундаментальным результатом этой главы является доказательство эквивалентности определения размерности, принятого в этой книге, с определением, опирающимся на свойства покрытий, по-существу, принадлежащим Лебегу (теорема V 8). Этот результат приводит к теореме Александрова

---

[1]) Теорему V 3 можно также выразить следующим образом: если $\dim X < n$, то среди совокупности всех непрерывных действительных функций, определенных на X, существует множество, состоящее из $(2n+1)$ функций

$$f_1(x), \ldots, f_{2n+1}(x),$$

(координатные функции), образующих базис в том смысле, что любая непрерывная действительная функция $f(x)$, определенная на X, может быть выражена в форме

$$\varphi(f_1(x), \ldots, f_{2n+1}(x)),$$

где φ — непрерывная функция $(2n+1)$ действительных переменных.

об аппроксимации n-мерных пространств n-мерными полиэдрами и связывает понятие размерности с комбинаторными свойствами пространств.

1. Теоремы о покрытиях

Определение V 1. Под *покрытием*[1]) пространства X мы понимаем *конечную* систему $U_1, \ldots, U_r$ *открытых* множеств пространства X, сумма которых есть X. *Порядком* покрытия называется наибольшее целое число n такое, что существует $(n+1)$ элемент $U_{i_1}, \ldots, U_{i_{n+1}}$ покрытия с непустым пересечением. Если X ограничено, то *диаметром* покрытия называется наибольший из диаметров [2]) множеств U_i.

Пусть M — подмножество пространства X. Мы говорим, что конечная система открытых множеств пространства покрывает M, если сумма множеств этой системы содержит M.

Пример V 1. Если покрыть квадрат рядами «кирпичей» таким образом, чтобы стыки кирпичей каждого ряда приходились на середины кирпичей соседних рядов, и затем каждый из кирпичей немного увеличить, то эти кирпичи, рассматриваемые как открытые множества (без границы), образуют покрытие квадрата порядка 2. Ясно, что существуют покрытия этого вида произвольно малого диаметра.

Пример V 2. Аналогично, I_n допускает покрытия произвольно малого диаметра, порядок которых равен n.

Определение V 2. Покрытие β называется покрытием, *вписанным* в покрытие α, если каждый элемент покрытия β содержится в некотором элементе покрытия α.

A) Пусть X — пространство, и M — его подмножество размерности $\leqslant 0$. Если U_1 и U_2 — два открытые множества пространства X, покрывающие M, то существуют два открытые множества V_1 и V_2, покрывающие M и обладающие тем свойством, что

$$V_1 \subset U_1, \quad V_2 \subset U_2, \qquad V_1 \cap V_2 = 0.$$

Доказательство. A) Очевидно, если $\dim M = -1$, т. е. если M пусто. Допустим теперь, что M нульмерно. Мы можем предположить, что

$$X = U_1 \cup U_2,$$

[1]) Слово «покрытие» очень часто употребляется в более общем чем у нас смысле, обозначая произвольную систему произвольных множеств, сумма которых есть X.

[2]) См. Указатель.

так как в противном случае мы могли бы заменить X на $U_1 \cup U_2$. Тогда

$$C_1 = X \setminus U_2 \text{ и } C_2 = X \setminus U_1 \tag{1}$$

суть непересекающиеся замкнутые множества. Так как $\dim M = 0$, можно, применив II 2F), получить непересекающееся с M замкнутое множество B, отделяющее C_1 от C_2. Отсюда вытекает существование двух открытых множеств V_1 и V_2, обладающих следующими свойствами:

$$V_1 \supset C_1, \quad V_2 \supset C_2, \tag{2}$$

$$V_1 \cap V_2 = 0, \tag{3}$$

$$X \setminus B = V_1 \cup V_2 \tag{4}$$

Из (1), (2) и (3) получаем

$$V_1 \subset U_1, \quad V_2 \subset U_2,$$

а из (4) и из того, что $M \cap B = 0$,

$$V_1 \cup V_2 \supset M.$$

Предложение А) доказано.

В) Пусть X—пространство, M—его подмножество размерности $\leqslant 0$, а $U_1, U_2, \ldots, U_r$ — открытые множества, покрывающие M. Тогда существуют открытые множества $V_1, V_2, \ldots, V_r$, покрывающие M, такие, что

$$V_i \subset U_i, \quad i = 1, 2, \ldots, r; \quad V_i \cap V_j = 0, \quad i \neq j.$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу множеств U_i. Предложение В) очевидно, если имеется лишь одно U_i. Предположим теперь, что число множеств U_i равно r и что предложение В) справедливо, когда число множеств U_i равно $r-1$.
Положим

$$U_{r-1}^1 = U_{r-1} \cup U_r.$$

Рассмотрим покрытие множества M, состоящее из открытых множеств

$$U_1, \ldots, U_{r-2}, U'_{r-1},$$

число которых равно $r-1$.

По индуктивному предположению существует покрытие

$$V_1, \ldots, V_{r-2}, V'_{r-1}$$

множества M такое, что

$$V_1 \subset U_1 \ldots, \quad V_{r-2} \subset U_{r-2} \quad V_r{}'_{-1} \subset \ddot{U}'_{r-1},$$

причем $V_1, \ldots, V_{r-2}$, и V'_{r-1} попарно не пересекаются.

Множество $V_r{}'_{-1} \cap M$ имеет размерность $\leqslant 0$; множества $U_{r-1} \cap V_r{}'_{-1}$ и $U_r \cap V_r{}'_{-1}$ покрывают $V_r{}'_{-1} \cap M$. Следовательно, в силу А), существуют открытые множества V_{r-1} и V_r, покрывающие $V_r{}'_{-1} \cap M$ и удовлетворяющие условиям:

$$V_{r-1} \subset U_{r-1} \cap V'_{r-1}, \quad V_r \subset U_r \cap V'_{r-1},$$

$$V_{r-1} \cap V_r = 0.$$

Тогда множества

$$V_1, \ldots, V_{r-2}, V_{r-1}, V_r$$

удовлетворяют условию предложения В).

Из В) будет выведена следующая важная [1]) теорема:

Теорема V 1. *Пусть X — пространство размерности $\leqslant n$, и α — покрытие пространства X. Тогда существует вписанное в α покрытие β порядка $\leqslant n$.*

Доказательство. Теорема очевидна, если $n = \infty$. Допустим теперь, что n конечно. По теореме о разложении n-мерного пространства в сумму нульмерных (теорема III 3):

$$X = A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1},$$

где каждое слагаемое A_i имеет размерность $\leqslant 0$. Так как α покрывает каждое множество A_i, то, применив В), можно получить для каждого i конечную систему β^i открытых множеств:

$$\beta^i = (V_1^i, \ldots, V_{r(i)}^i) \quad i = 1, \ldots, n+1,$$

такую, что

$$\beta^i \text{ покрывает } A_i, \text{ и } V_j^i \cap V_k^i = 0, \text{ если } j \neq k. \tag{5}$$

Пусть β — покрытие пространства X, состоящее из всех множеств V_j^i, $i = 1, \ldots, n+1$; $j = 1, \ldots, r(i)$. Тогда мы утверждаем, что β имеет порядок $\leqslant n$. Действительно, в силу обычного

---

[1]) Утверждение, обратное этой теореме, будет доказано ниже (теорема V 7)

рассуждения о $(n+2)$-х предметах, лежащих в $(n+1)$-м ящике, среди $(n+2)$-х элементов покрытия β всегда имеется два элемента, принадлежащих одному покрытию β^i. Условие (5) тогда показывает, что их пересечение пусто.

Следствие. *Пусть X — компакт размерности $\leqslant n$. Тогда X обладает покрытиями произвольно малого диаметра, порядок которых $\leqslant n$.*

Доказательство. Рассмотрим для произвольного положительного ε систему всех сферических окрестностей в X, имеющих радиус $0{,}5\,\varepsilon$. Так как X компактно, существует покрытие пространства X, состоящее из элементов этой системы, т. е. покрытие, диаметр которого $\leqslant \varepsilon$. Применяя теорему V 1 к этому покрытию, получаем доказываемое следствие.

2. Пространство отображений

Рассмотрения в главах V, VI и VII широко опираются на чрезвычайно важную идею, принадлежащую Фреше, состоящую в том, чтобы множество отображений одного пространства в другое рассматривать как топологическое пространство. Важность этого понятия для общей топологии трудно переоценить.

Определение V 3. Пусть X — произвольное пространство, а Y — компакт [1]. Обозначим множество всех отображений пространства X в Y через Y^X, и введем метрику [2] в *пространстве отображений* Y^X, полагая

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x)).$$

Из компактности пространства Y следует, что $\rho(f, g)$ конечно. Непосредственно ясно, что $\rho(f, g) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) \equiv g(x)$, и что аксиома треугольника в Y^X следует из аксиомы треугольника в Y.

A) Y^X — полное [3] пространство.

Доказательство. Пусть f_n — фундаментальная последовательность элементов пространства Y^X. Тогда для каждой точки x пространства X последовательность точек $f_n(x)$ является

[1] В этой книге всякий раз, когда идет речь о пространствах отображений, рассматриваются только отображения в компакты.

[2] Можно показать, что топология пространства Y^X зависит только от топологии пространств X и Y, а не от их метрик.

[3] См. Указатель.

фундаментальной последовательностью в Y. Так как Y — компактное, следовательно и подавно, полное пространство, то $f_n(x)$ сходится к некоторой точке, которую мы обозначим через $f(x)$. Мы утверждаем, что $f(x)$ непрерывно, т. е. что $f \in Y^X$. Действительно [1],

$$\rho(f(x), f(x')) \leqslant \rho(f(x), f_n(x)) + \rho(f_n(x), f_n(x')) + \\ + \rho(f_n(x'), f(x')).$$

Мы знаем, что f_n равномерно сходятся к f; следовательно, если x' стремится к x, то $f(x')$ стремится к $f(x)$.

B) Предложение A) позволяет применять к пространству отображений Y^X теорему Бэра [2]: пересечение счетного числа плотных в Y^X G_δ-множеств [3]) плотно в Y^X; в частности, такое пересечение не пусто.

3. Включение n-мерного компакта в I_{2n+1}

Вместо того, чтобы сразу приступить к теореме о включении для общих пространств (теорема V 3), мы сначала отдельно рассмотрим случай компактов. Это облегчит понимание главной идеи общего доказательства, излагаемого далее, ибо в случае компактов доказательство проще и не затемняется техническими деталями.

Теорема V 2. *Пусть X — компакт, и* $\dim X \leqslant n$, *где n — конечное. Тогда X гомеоморфно подмножеству куба* I_{2n+1} [4]).

[1]) Это — точный аналог доказательства того, что предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций есть непрерывная функция.

[2]) См. Указатель.

[3]) Под G_δ в некотором пространстве мы понимаем пересечение счетного числа открытых множеств (Kuratowski, Topologie I, *Monografie Matematiczne*, Warsaw, 1933, стр. 21).

[4]) Утверждение и доказательство этой теоремы для случая $n = 1$ были даны Менгером: Allgemeine Räume und Cartesische Räume, *Proc. Acad. Wetensch. Amst.*, **29** (1926), стр. 476—482; утверждение для общего случая было дано Менгером: Über umfassendste, n-dimensionale Mengen, *Proc. Akad. Wetensch. Amst.*, **29** (1926), стр. 1125—1128; общее доказательство, а также теорема V 5 были даны Нобелингом: Üeber eine, n-dimensionale Universalmenge im R_{2n+1}, *Math. Ann.* **104** (1930), стр. 71—80.

Более того[1]), *множество гомеоморфных отображений пространства X в*[2]) I_{2n+1} *является плотным*[3]) G_δ *в пространстве отображений* I_{2n+1}^X.

Сначала мы рассмотрим отображения, которые ведут себя «приблизительно» так же, как гомеоморфизмы.

Определение V 4. Пусть X — компакт, ε — положительное число, а g — отображение компакта X в пространство Y. Мы скажем, что g есть ε-отображение, если полный прообраз каждой точки множества $g(X)$ имеет диаметр меньше ε.

A) Если отображение g компакта X в компакт Y есть $\frac{1}{i}$-отображение для каждого натурального числа i, то g есть гомеоморфизм компакта X в Y, и обратно.

Доказательство. Если g есть $\frac{1}{i}$-отображение при каждом i, то g должно быть взаимно однозначным, а взаимно однозначное отображение компакта является гомеоморфизмом (АН, стр. 95). Обратно, каждый гомеоморфизм является $\frac{1}{i}$-отображением при каждом i.

B) Пусть X — компакт. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ множество G_ε всех ε-отображений открыто в Y^X.

Доказательство. Пусть g есть ε-отображение. Положим,

$$\eta = \inf \rho(g(x), g(x')),$$

где нижняя грань берется по парам (x, x'), для которых $\rho(x, x') \geqslant \varepsilon$. В силу компактности X, η равно $\rho(g(x), g(x'))$ для некоторой пары точек x, x' такой, что $\rho(x, x') \geqslant \varepsilon$; следовательно, $\eta > 0$, так как в противном случае g не было бы ε-отображением. Пусть теперь f — произвольное отображение, для которого

$$\rho(f, g) < \frac{1}{2}\eta.$$

---

[1]) Об этом утверждении, а также доказательстве теоремы V 2, данном здесь, см. Hurewicz, Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmengen Cartesischer Räume, Sitzb. Preuss. Akad. d. Wiss., phys. math. Klasse, 1933, стр. 754—768.

[2]) Напоминаем, что гомеоморфизм «в» означает гомеоморфизм «на часть».

[3]) Утверждение, что гомеоморфные отображения образуют всюду плотное множество, интуитивно означает, что каждое отображение пространства X в I_{2n+1} произвольно малым изменением может быть сделано гомеоморфизмом.

Пусть точки x и x' таковы, что $f(x)=f(x')$. Тогда расстояние $\rho(g(x), g(x'))<\eta$, и поэтому $\rho(x, x')<\varepsilon$. Следовательно, f также является ε-отображением.

Доказательство теоремы V 2. Рассмотрим пространство отображений I_{2n+1}^X. Пусть $G_{\frac{1}{i}}$ — множество всех $\frac{1}{i}$-отображений (см. определение V 4) компакта X в куб I_{2n+1}. Положим

$$H=\bigcap_{i=1}^{\infty} G_{\frac{1}{i}}.$$

В силу 3 A), H состоит из гомеоморфных отображений компакта X в I_{2n+1}. В силу 3 B), каждое $G_{\frac{1}{i}}$ открыто и, следовательно, есть G_δ. Поэтому (см. 2 B)) для доведения до конца доказательства теоремы V 2 нам необходимо лишь следующее предложение:

C) Пусть X — компакт, и $\dim X \leqslant n$, где n конечно. Для каждого положительного числа ε обозначим через G_ε множество ε-отображений компакта X в куб I_{2n+1}. Тогда G_ε плотно в пространстве отображений I_{2n+1}^X.

Доказательство. Пусть f — произвольный элемент пространства I_{2n+1}^X, и η — положительное число. Мы построим g такое, что

$$\rho(f, g)<\eta, \tag{1}$$

$$g \in G_\varepsilon. \tag{2}$$

В силу равномерной непрерывности[1]) отображения f, существует положительное число $\delta<\varepsilon$ такое, что

$$\rho(f(x), f(x'))<\frac{1}{2}\eta,$$

как только

$$\rho(x, x')<\delta.$$

На основании следствия теоремы V 1 существует покрытие

$$\beta: U_1, \ldots, U_r$$

[1]) Непрерывная функция на компакте является равномерно непрерывной.

компакта X, обладающее свойствами:

$$\text{порядок покрытия } \beta \leqslant n \tag{3}$$

и [1])

$$\delta(U_i) < \delta, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{4}$$

Следовательно,

$$\delta(f(U_i) < \frac{1}{2}\eta, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{5}$$

Выберем в I_{2n+1} точки $p_1, \ldots, p_r$ такие, что

$$\rho(p_i, f(U_i)) < \frac{1}{2}\eta, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{6}$$

$$p_i \text{ находятся в общем положении в } E_{2n+1}, \tag{7}$$

т. е. никакие $(m+2)$ из точек p_i $(m = 0, 1, \ldots, 2n)$ не лежат ни в каком m-мерном линейном подпространстве пространства E_{2n+1}.

Для каждой точки x пространства X положим: [2])

$$w_i(x) = \rho(x, X_i \setminus U_i), \quad i = 1, \ldots, r.$$

Очевидно, что

$$w_i(x) > 0, \text{ если } x \in U_i, \text{ и } w_i(x) = 0, \text{ если } x \notin U_i.$$

Для каждой точки x, по крайней мере, одно $w_i(x)$ положительно, так как U_i покрывают X. Каждой точке p_i, выбранной выше, поставим в соответствие вес $w_i(x)$, и обозначим через $g(x)$ центр тяжести системы точек p_i, взятых с этими весами. Ясно, что g [3]) является непрерывным отображением компакта X в I_{2n+1}. Покажем теперь, что g удовлетворяет условиям (1) и (2).

Доказательство (1): Пус ь x — произвольная точка компакта X. Предположим, ч.о U_i занумерованы таким образом, что $U_1, \ldots, U_s$ есть множество всех U_i, содержащих x. Тогда $w_i(x) > 0$ для $i \leqslant s$, и $w_i(x) = 0$ для $i > s$; поэтому при определении $g(x)$ нам нужно рассматривать лишь $p_1, \ldots, p_s$

---

[1]) $\delta(M)$ обозначает диаметр множества M; см. Указатель.

[2]) Если $U_i = X$, то принимаем, что $w_i(x) = 1$.

[3]) Такие «барицентрические» отображения имеют много важных приложений и будут детально рассмотрены в параграфе 9.

Из того, что $x \in U_i$ при $i \leqslant s$, и из (5) и (6) получаем, что

$$\rho(p_i, f(x)) < \eta. \qquad i \leqslant s.$$

Тем более центр тяжести $g(x)$ вершин p_i удовлетворяет условию

$$\rho(g(x), f(x)) < \eta. \tag{1}$$

Доказательство (2). Пусть

$$U_{i_1}, \ldots, U_{i_s}$$

суть все элементы покрытия β, содержащие данную точку x пространства X. Из (3) следует, что $s \leqslant n+1$. Рассмотрим линейное $(s-1)$-мерное пространство $L(x)$ в E_{2n+1}, содержащее точки

$$p_{i_1}, \ldots, p_{i_s}.$$

Очевидно, что $g(x)$ лежит в $L(x)$. Пусть x' — некоторая другая точка компакта X. Мы утверждаем: *если $L(x)$ и $L(x')$ пересекаются, то они содержат общую точку p_i; следовательно, x и x' содержатся в некотором общем элементе U_i покрытия* β. Действительно, пусть $L(x')$ проходит через точки

$$p_{j_1}, \ldots, p_{j_t}.$$

Снова, в силу (3), $t \leqslant n+1$, и $L(x')$ есть $(t-1)$-мерное пространство. Если $L(x)$ и $L(x')$ пересекаются, то линейное пространство, наименьшей размерности, содержащее все p_i и p_j, имеет размерность $\leqslant s+t-2 \leqslant 2n$. Отсюда и из (7) следует, что, по крайней мере, одна вершина p_i встречается также среди вершин p_j. Итак, справедливость нашего утверждения установлена.

Теперь допустим, что $g(x) = g(x')$. Тогда $L(x)$ и $L(x')$ пересекаются. В силу доказанного выше утверждения, x и x' принадлежат общему элементу покрытия β. Поэтому из (1) вытекает, что $\rho(x, x') < \delta < \varepsilon$ и, следовательно, g является ε-отображением. Этим завершается доказательство предложения C) и, следовательно, теоремы V 2.

4. Включение n-мерного пространства в I_{2n+1}.

Пользуясь доказательством теоремы V как моделью, мы докажем теперь следующую теорему:

Теорема V 3. *Пусть* X — *произвольное пространство и* $\dim X \leqslant n$, *где* n *конечно. Тогда* X *гомеоморфно*[1]) *подмножеству куба* I_{2n+1}.

Более того[2]), *множество гомеоморфных отображений пространства* X *в* I_{2n+1} *содержит*[3]) *плотное* G_δ *в пространстве отображений* I_{2n+1}^X.

ε-отображения, которыми мы пользовались в параграфе 3, не годятся для нашей теперешней цели, так как отображение произвольного пространства, являющееся ε-отображением при каждом $\varepsilon > 0$, может не быть топологическим, как например, отображение

$$\theta = x$$

полуинтервала $0 \leqslant x < 2\pi$ прямой на окружность $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Вместе с тем доказано, что в общем вопросе перехода от компактов к произвольным пространствам большое значение имеет метод, состоящий в том, чтобы заменять выражение: «для каждого положительного ε существует множество диаметра меньше ε», выражением: «для каждого покрытия α существует покрытие, вписанное в α». Пользуясь этим методом, приходим к следующему видоизменению определения V 4.

Определение V 5. Пусть α — покрытие пространства X, и g — отображение пространства X в пространство Y. Мы скажем, что g есть α-отображение, если каждая точка пространства Y обладает окрестностью в Y, полный прообраз которой целиком содержится в некотором элементе покрытия α.

Определение V 6. Пусть α — покрытие пространства X. Обозначим через $S(x)$ открытое множество, являющееся суммой элементов покрытия α, содержащих данную точку x. Счетная система $\alpha^1, \alpha^2, \ldots$ покрытий называется *базисной последо-*

---

[1]) Этот результат впервые был получен соединением теоремы Менгера-Нобелинга (первая часть теоремы V 2) с принадлежащим Гуревичу (Ueber das Verhältnis separabller Räume zu kompakten Räumen, *Proc. Akad. Wetensch. Amst.* **30** (1927), стр. 425 — 430) доказательством того факта, что любое пространство топологически содержится в компакте той же размерности (в настоящей книге это утверждение появляется (теорема V 7), как следствие общей теоремы о включении).

[2]) Впервые доказано Куратовским (Sur les théorèmes de «plongement» dans la théorie de la dimension, *Fund. Math.* **28** (1937), стр. 336—342), метод которого является небольшим видоизменением метода Гуревича в его работе в Sitzgb, цитированной на стр. 85.

[3]) Следует обратить внимание на различие между этим утверждением и соответствующим утверждением в компактном случае. Неизвестно, будет ли множество гомеоморфизмов X в I_{2n+1} само G_δ.

вательностью покрытий, если для произвольной точки x и ее произвольной окрестности U, по крайней мере, одно из открытых множеств

$$S_{\alpha^1}(x),\ S_{\alpha^2}(x),\ldots,$$

содержится в U.

А) Для каждого пространства X существует базисная последовательность покрытий.

Доказательство. Путь U_1, U_2, ... — счетный базис пространства X. Рассмотрим пары U_n, U_m непустых открытых множеств этого базиса, для которых

$$\overline{U}_n \subset U_m.$$

Обозначим через $\alpha^{n,m}$ покрытие пространства X, состоящее из двух элементов: $X \setminus \overline{U}_n$ и U_m. Совокупность покрытий $\alpha^{n,m}$, конечно, счетна. Кроме того, из $x \in U_n$ следует $S_{\alpha^{n,m}}(x) = U_m$. Следовательно, система множеств $\{S_{\alpha^{n,m}}(x)\}$ для данного x включает совокупность всех U_m, содержащих x. Таким образом, $\{\alpha^{n,m}\}$ является базисным семейством покрытий.

В) Пусть α^1, α^2, ... — базисная последовательность покрытий пространства X. Тогда, если g есть α^i-отображение пространства X в пространство Y для каждого i, то g есть гомеоморфизм[1]).

Доказательство. Мы покажем, что если x — произвольная точка пространства X и U — окрестность точки x, то существует окрестность V точки $g(x)$ в Y, полный прообраз которой содержится в U. Отсюда вытекает взаимная однозначность отображения g и непрерывность отображения g^{-1}.

По определению базисной последовательности окрестностей существует покрытие α^i, для которого

$$S_{\alpha^i}(x) \subset U. \tag{1}$$

[1]) Обратное неверно. В самом деле, пусть X — полупрямая $x \geqslant 0$, Y — отрезок $0 \leqslant y \leqslant 1$ и h — «сжатие» X в Y, задаваемое формулой

$$y = \frac{x}{1+x}.$$

Пусть α^0 — покрытие пространства X, состоящее из двух открытых множеств: дополнения до множества всех четных и дополнения до множества всех нечетных целых чисел. Хотя h — гомеоморфизм, h не является α^0-отображением, так как никакая окрестность точки $y = 1$ не обладает полным прообразом, содержащимся целиком в каком-либо элементе покрытия α^0.

Так как g есть α^i-отображение, то существует окрестность V точки x и элемент U_0^i покрытия α^i, для которых

$$g^{-1}(V) \subset U_0^i. \qquad (2)$$

Но

$$x \in g^{-1}(V) \subset U_0^i.$$

Отсюда

$$U_0^i \subset S_{\alpha^i}(x). \qquad (3)$$

(2), (3) и (1) доказывают предложение.

C) Пусть α — покрытие компакта X. Тогда существует положительное число η, обладающее тем свойством, что каждое подмножество компакта X, имеющее диаметр меньше η, целиком содержится в некотором элементе покрытия α.

Доказательство. В противном случае существовала бы последовательность множеств X_1, X_2, ..., не содержащихся ни в одном элементе покрытия α и таких, что диаметры $\delta(X_i) \to 0$. Пусть $x_i \in X_i$. Так как X — компакт, $\{x_i\}$ имеет предельную точку x, которая содержится в некотором элементе U_0 покрытия α. Но U_0 открыто, так что $\rho(x, X \setminus U_0) = d > 0$. Тогда всякое X_i, находящееся от x на расстоянии, меньшем, чем $\frac{d}{2}$, и имеющее диаметр, меньший, чем $\frac{d}{2}$, целиком содержится в U_0, что противоречит предположению.

D) Пусть X — произвольное пространство, и Y — компакт. Для каждого покрытия α множество G_α всех α-отображений в Y открыто в Y^X.

Доказательство. Пусть g есть α-отображение. Это значит, что каждая точка компакта Y имеет окрестность, полный прообраз которой целиком содержится в некотором элементе покрытия α. Так как Y — компакт, то существует конечная подсистема системы таких окрестностей, образующая покрытие σ компакта Y. В силу C), существует положительное число η, обладающее тем свойством, что произвольное множество компакта Y, имеющее диаметр меньше, чем η, содержится в некотором элементе покрытия σ, и, следовательно, его полный прообраз при отображении g целиком содержится в некотором элементе покрытия α. Пусть теперь f — отображение, удовлетворяющее условию

$$\rho(f, g) < \frac{1}{3}\eta.$$

Возьмем сферические окрестности диаметра $\frac{1}{3}\eta$ вокруг каждой точки пространства Y. Пусть A — полный прообраз при f одной из этих окрестностей. Легко видеть, что $g(A)$ имеет диаметр $<\eta$, так что, в силу определения η, A содержится в некотором элементе покрытия α. Таким образом, f является α-отображением.

Доказательство теоремы V 3. Рассмотрим пространство отображений I_{2n+1}^X. Пусть α^1 $\alpha^2, \ldots$ — базисная последовательность покрытий пространства X, G_{α^i} — множество всех α^i-отображений (см. определение V 5) пространства X в I_{2n+1}, и

$$H=\bigcap_{i=1}^{\infty} G_{\alpha^i}$$

Каждый элемент множества H является, в силу 4 B), гомеоморфизмом пространства X в I_{2n+1}. На основании 4 D) каждое G_{α^i} открыто и, следовательно, является G_δ-множеством. Поэтому (см. 2 B) для доказательства теоремы V 3 нам необходимо только следующее предложение[1]).

E) пусть $\dim X \leqslant n$, где n — конечно. Для каждого покрытия α пространства X обозначим через G_α множество α-отображений пространства X в I_{2n+1}. Тогда G_α плотно в пространстве отображений I_{2n+1}^X.

Доказательство. Пусть f — произвольный элемент пространства I_{2n+1}^X, и η — положительное число. Мы построим отображение g такое, что

$$\rho(f, g)<\eta, \tag{4}$$

$$g \in G_\alpha. \tag{5}$$

Как компакт, I_{2n+1} имеет покрытие диаметра, меньшего, чем $\frac{1}{2}\eta$. Пусть τ — покрытие пространства X, состоящее из полных прообразов открытых множеств этого покрытия при отображении f. В силу теоремы V 1, существует покрытие β

---

[1]) Сопоставьте это с аналогичной частью (предложение 3 C) доказательства теоремы V 2.

порядка $\leqslant n$, вписанное и в α, и в τ:

$$\text{порядок покрытия } \beta \leqslant n, \tag{6}$$

$$\beta \text{ вписано в } \alpha, \tag{7}$$

$$\delta(f(U_i)) < \frac{1}{2}\eta, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{8}$$

Теперь мы с помощью r точек $p_1, \ldots, p_r$, находящихся в I_{2n+1} в общем положении, строим g точно так же, как это было сделано выше в доказательстве предложения 3 С), как «барицентрическое» отображение. Доказательство неравенства (4) точно такое же, как раньше, а при доказательстве включения (5) нужно только заменить последний абзац следующим.

Так как имеется только конечное число линейных подпространств $L(x)$, то существует число $\eta > 0$ такое, что любые два из этих линейных подпространств $L(x)$ и $L(x')$ или пересекаются, или, в противном случае, находятся на расстоянии $\geqslant \eta$ друг от друга. Если $\rho(g(x), g(x')) < \eta$, то расстояние $\rho(L(x), L(x'))$, конечно, $< \eta$, следовательно, $L(x)$ и $L(x')$ пересекаются. Отсюда, как показано выше, вытекает, что обе точки x и x' содержатся в некотором элементе покрытия β. Следовательно, g является α-отображением.

Пример V 3. Пусть s_{2n+2} — $(2n+2)$-мерная клетка [1]) и P_n — совокупность всех граней клетки s_{2n+2} размерности $\leqslant n$. Тогда P_n является n-мерным пространством, которое нельзя включить в E_{2n}. Доказательство можно найти в работе Флореса «Über n-dimensionale Komplexe die im R_{2n+1} absolut selbstverschlungen sind», *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* 6 (1933—4), стр. 4—7. Оно показывает, что число $2n+1$ в теореме V 3 не может быть понижено.

5. Включение произвольных пространств в гильбертов параллелепипед

Теорема V 4. *Пусть X — произвольное пространство. Тогда X может быть топологически включено*[2]) *в I_ω. Более*

---

1) См. стр. 98.

2) Это — знаменитая теорема Урысона: Zum Metrisationsproblem *Math. Ann.* 94 (1925), стр. 309—315. X, конечно, метрическое со счетным базисом.

того, множество гомеоморфных отображений пространства X в I_ω содержит плотное G_δ в $I_\omega{}^X$.

Доказательство. Доказательство почти в точности совпадает с доказательством теоремы V 3 с тем упрощением, что не нужно интересоваться порядком покрытия β. Точки p_i выбираются так, чтобы любое конечное подмножество этих точек было линейно независимо.

6. Универсальное n-мерное пространство

Определение V 7. Некоторое n-мерное пространство является *универсальным n-мерным пространством*, если каждое пространство размерности $\leqslant n$ может быть в него топологически включено.

Теорема V 5.[1]) *Множество*

$$\mathcal{X}_n = \mathcal{M}_{2n+1}^{n} \cap I_{2n+1}$$

точек куба I_{2n+1}, имеющих не более n рациональных координат, является универсальным n-мерным пространством.

Доказательство. Нам нужно показать, что любое пространство размерности $\leqslant n$ может быть топологически включено в $\mathcal{X}_n$. Доказательство является видоизменением доказательства теоремы V 3 и использует те же обозначения. Легко видеть, что если M — фиксированное n-мерное линейное подпространство пространства E_{2n+1}, то небольшим сдвигом вершин $p_1, \ldots, p_r$ можно добиться того, чтобы ни одно из $L(x)$ (см. 3 C) и 4 E)) не пересекало M. Поэтому, исходя из произвольного отображения f пространства X в I_{2n+1} и положительного числа η, мы можем построить отображение g, удовлетворяющее нера-

[1]) Nöbeling, Ueber eine n-dimensionale Universalmenge im R_{2n+1}, *Math. Ann.* 104 (1930) стр. 71—80.

Другое универсальное n-мерное пространство было описано Менгером, но без доказательства: Ueber umfassendste n-dimensionale Mengen, *Proc. Acad. Wetensch. Amst.* **29** (1926), стр. 1125—1128; доказательство было дано Лефшецом; On compact spaces, *Ann. Math.* 32 (1931), стр. 521—538. Универсальное пространство Менгера обладает добавочным свойством: оно является компактом. Для $n=0$ универсальные пространства Нобелинга и Менгера превращаются соответственно в множество иррациональных чисел отрезка прямой и канторово множество. Заметим, что существование компактного универсального n-мерного пространства следует из применения приведенной ниже теоремы V 6 к универсальному n-мерному пространству X.

венству $\rho(f, g) < \eta$ и добавочному условию:

$$\overline{g(X)} \subset I_{2n+1} \setminus M. \tag{1}$$

Отсюда следует, что множество отображений g пространства X в I_{2n+1}, для которых имеет место (1), плотно в I_{2n+1}^X. Это множество также и открыто, потому что из (1) вытекает, что $g(X)$ находится на положительном расстоянии η от M и, следовательно, для каждого отображения f, для которого $\rho(f,g) < \eta$, оказывается, что

$$\overline{f(X)} \subset I_{2n+1} \setminus M.$$

Дополнение множества $\mathcal{X}_n$ состоит из точек куба I_{2n+1}, имеющих, по крайней мере, $n+1$ рациональную координату, т. е. дополнение множества $\mathcal{X}_n$ является суммой гиперплоскостей в I_{2n+1} вида

$$x_{i_1} = r_1, \ldots, x_{i_{n+1}} = r_{n+1},$$

где все r_i рациональны. Каждая из этих гиперплоскостей имеет размерность $2n+1-(n+1)=n$, причем имеется лишь счетное число таких гиперплоскостей. Назовем их $M_1, M_2, \ldots$ Пусть G_i — открытое плотное в I_{2n+1}^X множество, состоящее из всех отображений g, для которых

$$\overline{g(X)} \subset I_{2n+1} \setminus M_i.$$

В силу теоремы V 3, существует плотное в I_{2n+1}^X G_δ-множество H, все элементы которого являются гомеоморфизмами пространства X в I_{2n+1}. Пусть

$$H' = H \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i.$$

H', как счетное пересечение всюду плотных G_δ-множеств, само является всюду плотным G_δ-множеством (см. 2 B); в частности, H' не пусто Пусть $h \in H'$. Ясно, что h есть гомеоморфизм X в I_{2n+1} и

$$h(X) \subset I_{2n+1} \setminus (M_1 \cup M_2 \cup \ldots) = \mathcal{X}_n \tag{2}$$

Следовательно, для каждого пространства X размерности $\leqslant n$ существует гомеоморфное отображение h пространства X в I_{2n+1} такое, что

$$\overline{h(X)} \subset \mathcal{X}_n \tag{3}$$

Но $\mathcal{X}_n$ имеет размерность n (см. пример IV 1). Таким образом, теорема доказана.

Замечание. Неизвестно, содержит ли $\mathcal{M}^k_n$, $n < 2k+1$, топологический образ каждого k-мерного подмножества пространства E_n, или даже, существует ли при $n < 2k+1$ какое-либо [1]) k-мерное подмножество пространства E_n, содержащее топологический образ каждого k-мерного подмножества пространства E_n.

Теорема V 6. *Любое пространство может быть топологически включено в компакт той же размерности.*

Доказательство. Пусть X — некоторое пространство. Теорема очевидна, если $\dim X = \infty$, ибо любое пространство может быть топологически включено в I_ω (теорема V 4). Если $\dim X \leqslant n$, где n конечно, то теорема следует из приведенной выше при доказательстве теоремы V 5 формулы (3), так как $\overline{h(X)}$, как замкнутое подмножество I_{2n+1}, является компактом.

7. Размерностный тип Фреше

По аналогии с теорией кардинальных чисел, Фреше в 1909 г. ввел понятие размерностного типа, говоря для двух данных пространств A и B, что размерностный тип пространства A не больше размерностного типа пространства B, если A может быть топологически включено в B.

Если при этом также справедливо, что размерностный тип пространства B не больше размерностного типа пространства A, то говорят, что A и B имеют один и тот же размерностный тип.

n-мерное эвклидово пространство, по определению, имеет размерностный тип n.

Очевидно, что два пространства одного и того размерностного типа имеют одну и ту же размерность. С другой стороны, простой пример окружности и дуги показывает, что два пространства одной и той же размерности не обязательно имеют один и тот же размерностный тип.

Теорему V 3 можно перефразировать следующим образом: если $\dim X \leqslant n$, то размерностный тип пространства $X \leqslant 2n+1$. Теорема V 5 устанавливает, что среди размерностных типов

---

[1]) См. Menger, Ueber umfassendste n-dimensionale Mengen, *Kon. Akad. v. Wetensch. Amst.* **29**, (1926), стр. 1125—1128.

пространств размерности $\leqslant n$ существует наибольший размерностный тип. Теорема V 4 утверждает, что размерностный тип каждого пространства не больше размерностного типа гильбертова параллелепипеда.

Рассуждения параграфа 6, главы IV, показывают, что среди бесконечномерных пространств имеются пространства, по крайней мере, двух размерностных типов, а именно сам гильбертов параллелепипед и его подмножество, являющееся суммой счетного числа конечномерных пространств.

8. Снова теоремы о покрытиях

Теорема V 7. *Если в каждое покрытие пространства X можно вписать покрытие порядка $\leqslant n$, то X имеет размерность $\leqslant n$.*

Доказательство. Теорема следует из того, что в доказательстве теоремы V 5 мы, пользуясь только указанным в условии свойством покрытий пространства X, вывели, что X может быть включено в универсальное n-мерное пространство $\mathcal{X}_n$.

Следствие. *Пусть X — компакт. Если X обладает покрытиями произвольно малого диаметра, имеющими порядок $\leqslant n$, то X имеет размерность $\leqslant n$.*

Доказательство. Из 4 С) заключаем, что в каждое покрытие пространства X можно вписать покрытие порядка $\leqslant n$. Поэтому следствие непосредственно вытекает из теоремы V 7.

Теорема V 8. **Теорема о покрытиях.** *Пространство имеет размерность $\leqslant n$ в том и только в том случае, если в каждое его покрытие можно вписать покрытие порядка $\leqslant n$.*

Доказательство. Теорема является объединением теорем V 1 и V 7.

Следствие. **Теорема о покрытиях для компактов.** *Компакт имеет размерность $\leqslant n$ в том и только в том случае, если он обладает покрытиями произвольно малого диаметра, имеющими порядок $\leqslant n$.*

Доказательство. Следствие есть объединение следствия теоремы V 1 со следствием теоремы V 7.

9. Нервы и отображения в полиэдры

Мы будем рассматривать полиэдры в наиболее элементарном смысле, а именно как точечные множества эвклидова пространства, являющиеся объединением конечного числа клеток.

Вершина или *нульмерная клетка* есть точка; *одномерная клетка* — отрезок без его концевых точек; *двумерная клетка* — треугольник без его сторон; *трехмерная клетка* — тетраэдр без его граней и т. д. k-мерная клетка, $k = 0, 1, 2, \ldots$, определенная с помощью вершин, сторон, граней, ... p-мерной клетки, называется *k-мерной гранью* этой p-мерной клетки; мы также включаем саму p-мерную клетку в число ее граней. *n-мерный полиэдр* есть точечное множество, расположенное в некотором E_m и составленное определенным способом из конечной системы непересекающихся p-мерных клеток, $0 \leqslant p \leqslant n$, по крайней мере, одна из которых является n-мерной клеткой, причем каждая грань каждой клетки системы также должна принадлежать системе.

Рассмотрим теперь произвольное множество объектов, которые мы будем называть (*абстрактными*) *вершинами*. Под (*абстрактным*) p-мерным симплексом s^p, $p = 0, 1, 2, \ldots$, мы понимаем произвольное множество, состоящее из $p + 1$ вершины. k-мерный симплекс, вершины которого выбраны из вершин симплекса s^p, называется *k-мерной гранью симплекса* s^p. s_p является своей собственной p-мерной гранью. (*Абстрактный*) *n-мерный комплекс* есть конечная система p-мерных симплексов, $0 \leqslant p \leqslant n$, содержащая вместе с симплексом и все его грани и, по крайней мере, один n-мерный симплекс.

Связь между полиэдрами и комплексами становится ясной из следующих двух утверждений:

A) Каждому полиэдру P поставим в соответствие комплекс N, называемый *комплексом остовов* полиэдра P; вершины комплексов N тождественны с вершинами полиэдра P, а симплексами комплекса остовов являются те совокупности вершин, которые определяют клетки полиэдра P.

Наоборот:

B) Для данного n-мерного комплекса N существует n-мерный полиэдр P, называемый *геометрической реализацией* комплекса N, комплексом остовов которого является N; кроме того оказывается, что P можно считать подмножеством куба I_{2n+1}.

Доказательство. Пусть $p_1, \ldots, p_r$ — вершины комплекса N. Легко можно показать, что в I_{2n+1} можно выбрать r вершин, которые мы продолжаем обозначать через $p_1, \ldots, p_r$, в общем положении, т. е. так, что любые $m + 2$ $(m \leqslant 2n)$ из этих точек линейно независимы. Пусть P — совокупность всех тех клеток в I_{2n+1}, порожденных вершинами $p_{i_0}, \ldots, p_{i_k}$, для которых $(p_{i_0}, \ldots, p_{i_k})$ является симплексом комплекса N. Если бы P было полиэдром, то его комплексом остовов был бы комплекс N. Таким образом, остается показать, что P есть полиэдр. Для этого докажем, что любые две клетки s и t, принадлежащие P, не пересекаются. Пусть $p_1, \ldots, p_k$ суть все различные вершины клеток s и t. Каждая из клеток полиэдра P имеет размерность $\leqslant n$, следовательно, $k \leqslant 2n+2$. Так как точки $p_1, \ldots, p_2$ находятся в общем положении, то точки $p_1, \ldots, p_k$ линейно независимы и, следовательно, определяют $(k-1)$-мерную клетку u, которая имеет и s, и t среди своих граней. Наше утверждение следует тогда из того факта, что любые две различные грани клетки не пересекаются.

Замечание. Легко можно показать, что два полиэдра с одним и тем же комплексом остовов гомеоморфны. Поэтому геометрическая реализация комплекса определяется топологически однозначно.

Александров[1]) ввел следующий очень полезный процесс, ставящий в соответствие каждому покрытию пространства некоторый комплекс, называемый его нервом. Понятие нерва имеет огромное значение в современной топологии, потому что оно связывает между собой непрерывные и комбинаторные методы. Нервы можно рассматривать как комбинаторные конфигурации, аппроксимирующие пространство, при этом, чем мельче покрытие, тем лучше аппроксимация.

Определение V 8. Пусть $\alpha: U_1, \ldots, U_r$ — покрытие пространства. Каждому непустому U_i поставим в соответствие значок p_i и следующим образом построим, считая p_i вершинами, комплекс $N(\alpha)$, называемый *нервом* покрытия α:

$$(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k})$$

является симплексом комплекса $N(\alpha)$ в том и только в том случае, если

$$U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_k} \neq 0.$$

Ясно, что

$$\dim N(\alpha) = \text{порядку покрытия } \alpha.$$

Мы обозначаем через $P(\alpha)$ геометрическую реализацию комплекса $N(\alpha)$.

С понятием нерва тесно связано понятие «барицентрического» отображения.

[1]) Ueber den allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehungen zur elementaren geometrischen Anschauung, *Math. Ann.* **98** (1928), стр. 617—635, в частности, стр. 634.

Определение V 9. Пусть X — пространство, и α — его покрытие. Пусть P — полиэдр, вершины [1]) которого $p_1, \ldots, p_r$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами U_i покрытия α. Пусть Z_i — *звезда* вершины p_i, т. е. открытое множество в P, состоящее из всех клеток, имеющих p_i своей вершиной. Отображение g пространства X в P называется *барицентрическим α-отображением*, если

$$g^{-1}(Z_i) = U_i.$$

C) Так как Z_i образуют покрытие полиэдра P, то барицентрическое α-отображение является α-отображением (см. определение V 5).

D) Пусть g — барицентрическое α-отображение пространства X в полиэдр P, и P' — полиэдр, содержащийся в P и состоящий из всех граней клеток полиэдра P, содержащих хотя бы одну точку множества $g(X)$. Тогда комплекс остовов полиэдра P' совпадает с $N(\alpha)$, или, что то же, P' является геометрической реализацией нерва $N(\alpha)$.

Доказательство. Сначала мы покажем, что если s' — произвольная клетка полиэдра P', которую мы обозначим через $(p_1, \ldots, p_m)$, то

$$\bigcap_{i=1}^{m} U_i \neq 0, \tag{1}$$

т. е. s' является также симплексом комплекса $N(\alpha)$. По определению P' существует клетка s (обозначим ее через $(p', \ldots, p_m, p_{m+1}, \ldots, p_k)$), содержащая точку $y_0 \in g(X)$ и имеющая s' своей гранью. Тогда

$$y_0 \in Z_i, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Отсюда

$$g^{-1}(y_0) \subset g^{-1}(Z_i) = U_i, \qquad i = 1, \ldots, k,$$

и это доказывает (1).

Наоборот, пусть $s(p_1, \ldots, p_m)$ — произвольный симплекс нерва $N(\alpha)$. Тогда $U_1, \ldots, U_m$ имеет общую точку x_0. Далее

$$g(x_0) \in Z_i \qquad i = 1, \ldots, m.$$

---

[1]) В качестве p_i могут быть также взяты вершины нерва $N(\alpha$

и так как $g(x_0)$ является точкой полиэдра P', то отсюда вытекает, что

$$g(x_0) \in Z_i', \qquad i = 1, \ldots, m,$$

где Z_i' обозначает звезду вершины p_i в полиэдре P'. Следовательно, звезды Z_i' $i = 1, \ldots, m$ имеют непустое пересечение, и потому $(p_1, \ldots, p_m)$ является клеткой полиэдра P'. Доказательство D) закончено [1].

Предложение D) показывает, что, не уменьшая общности, мы можем при изучении барицентрических α-отображений ограничиться случаем, когда P является геометрической реализацией нерва покрытия α.

Название: «барицентрическое» α-отображение оправдывается следующим предложением.

E) Барицентрические α-отображения пространства X в $P(\alpha)$ совпадают с отображениями g, получаемыми следующей конструкцией. Пусть $U_1, \ldots, U_r$ — элементы покрытия α. Определим r непрерывных действительных функций $w_i(x)$ таких, что

$$w_i(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \notin U_i, \tag{2}$$

$$w_i(x) > 0, \quad \text{если} \quad x \in U_i. \tag{3}$$

$g(x)$ есть тогда отображение, ставящее в соответствие каждой точке $x \in X$ центр тяжести вершин p_i с весами $w_i(x)$.

Доказательство. Пусть g — барицентрическое α-отображение. Для данной точки $x \in X$ мы определяем $w_i(x)$ следующим образом: Пусть $s = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_k})$ — клетка полиэдра $P(\alpha)$, содержащая $g(x)$. Пусть

$w_i(x) = 0$, если i отлично от каждого из $i_1, \ldots, i_k$,

$w_i(x)$ = барицентрической координате [2] точки относительно p_i, если i — одно из $i_1, \ldots, i_k$.

$w_i(x) > 0$ тогда и только тогда, когда $p_i \in s$, т. е. $g(x) \in Z_i$.

---

[1] Интересный частный случай предложения D) получается, когда $X = P$, α есть покрытие полиэдра P, звездами его вершин, а g — тождественное отображение P на себя. В этом случае P', конечно, есть само P, так что D) утверждает, что нерв покрытия α есть *комплекс остовов полиэдра* P.

[2] Барицентрическими координатами точки p клетки $(p_1, \ldots, p_k)$ являются веса $w_1, \ldots, w_k$, в сумме равные 1, которые надо приписать соответствующим вершинам, чтобы получить p в качестве центра тяжести.

Следовательно, функции $w_i(x)$ удовлетворяют условиям (2) и (3).

Обратное предложение доказывается подобным же образом.

F) Всегда могут быть найдены функции $w_i(x)$, удовлетворяющие условиям (2) и (3) предложения E), [1] иными словами, *для каждого покрытия α пространства X существует барицентрическое α-отображение пространства X в $P(\alpha)$.*

Доказательство. Достаточно положить:

$$w_i(x) = \rho(x, X \setminus U_i).$$

(Если $X \setminus U_i$ пусто, полагаем $w_i(x) = 1$.)

Замечание 1. Если мы просмотрим доказательства предложений 3C) и 4E), то мы увидим, что построенное там отображение g обладает тем свойством, что $\overline{g(x)}$ содержится в некотором n-мерном полиэдре, лежащем в I_{2n+1}; в действительности, g является барицентрическим отображением пространства X в геометрическую реализацию нерва покрытия β. Это замечание позволяет высказать следующее усиление предложения 4E):

4E′) Пусть $\dim X \leqslant n$, где n конечно. Для каждого покрытия α пространства X обозначим через G'_α множество α-отображений пространства X таких, что $\overline{g(X)}$ содержится в n-мерном полиэдре, расположенном в I_{2n+1}. Тогда G'_α плотно в пространстве отображений I^X_{2n+1}.

Замечание 2. Читатель может теперь заметить, что доказательство теоремы о включении использует следующие идеи:

(a) n-мерное пространство обладает произвольно мелкими покрытиями порядка n (теорема V 1);

(b) нерв покрытия порядка n может быть геометрически реализован с помощью полиэдра, лежащего в I_{2n+1} (предложение B));

(c) пространство может быть барицентрически отображено на геометрическую реализацию любого из его нервов (предложение B));

(d) теорема Бэра.

Теперь будет доказана

Теорема V 9. **Аппроксимация полиэдрами.** *Пространство X имеет размерность $\leqslant n$ в том и только в том*

[1]) Предложение F) имеет место в несколько более общем случае «совершенно нормальных» пространств, даже если они не метризуемы.

случае, если для каждого покрытия α пространства X существует α-отображение пространства X в полиэдр размерности $\leqslant n$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\dim X \leqslant n$. По теореме V 1 существует покрытие α' порядка $\leqslant n$, вписанное в покрытие α. В силу F), существует α'-отображение (в действительности барицентрическое α'-отображение) пространства X в $P(\alpha')$. Но α'-отображение и подавно является α-отображением, а $P(\alpha')$ имеет размерность $\leqslant n$.

Доказательство достаточности содержится в следующем предложении.

G) Пусть $\dim X \geqslant m$. Тогда существует покрытие α пространства X, обладающее тем свойством, что для каждого α-отображения g пространства X в компакт Y

$$\dim g(X) \geqslant m.$$

Доказательство. По теореме V 7 существует такое покрытие α пространства X, что каждое вписанное в него покрытие имеет порядок $\geqslant m$. Пусть g есть α-отображение пространства X в Y. Каждая точка компакта Y имеет окрестность, полный прообраз которой содержится в некотором элементе покрытия α. Так как Y — компакт, конечное число этих окрестностей покрывает Y, и в пересечении с $g(X)$ это конечное число окрестностей образует покрытие β множества $g(X)$. Допустим, что $\dim g(X) < m$. Тогда, по теореме V 1, в β можно вписать покрытие β' порядка $< m$. Полные прообразы элементов покрытия β' образуют покрытие порядка $< m$, вписанное в α, в противоречии с предположением. Следовательно, доказано предложение G), а с ним и теорема V 9.

Следствие. **Теорема Александрова об аппроксимации компактов полиэдрами**[1]. *Пусть X — компакт. Тогда $\dim X \leqslant n$ в том и только в том случае, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует ε-отображение компакта X в полиэдр размерности $\leqslant n$.*

Доказательство. Если $\dim X \leqslant n$, то из теоремы V 9 следует, что для каждого покрытия α существует α-отображение g_α пространства X в полиэдр размерности $\leqslant n$. Если дано $\varepsilon > 0$, то пусть α есть покрытие пространства X, имею-

[1] Эта теорема послужила основой для многих современных топологических исследований. См. Александров, Über den allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehungen zur elementaren geometrischen Anschauung, *Math. Ann.* **98** (1928), стр. 617—635.

щее диаметр $< \varepsilon$. Такое покрытие существует, так как X — компакт. Для этого α-отображение g_α является ε-отображением.

Наоборот, допустим, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует ε-отображение g_ε пространства X в полиэдр размерности $\leqslant n$. Если дано произвольное покрытие α пространства X, то пусть ε — положительное число (см. 4 С)), обладающее тем свойством, что любое множество диаметра $< \varepsilon$ содержится в каком-либо элементе покрытия α. Для этого ε отображение g_ε является α-отображением. Отсюда, по теореме V 9, заключаем, что $\dim X \leqslant n$. Итак, следствие доказано.

Пусть α — покрытие пространства X, и $P(\alpha)$ — геометрическая реализация нерва покрытия α. Отображение f пространства X в $P(\alpha)$ называется *квази-барицентрическим α-отображением*[1]), если (см. определение V 9)

$$f^{-1}(Z_i) \subset U_i.$$

---

[1]) Нетрудно показать, что квази-барицентрические α-отображения совпадают с отображениями, определяемыми непрерывными действительными функциями $w_i(x)$ такими, что

$$w_i(x) = 0, \text{ если } X \notin U_i, \tag{2}$$

$$w_i(x) \geqslant 0, \text{ если } x \in U_i, \tag{3}$$

$$\Sigma w_i(x) > 0 \text{ для каждой точки } x. \tag{4}$$

(Сопоставьте эти формулы с формулами (2) и (3) E)). Если дано нормальное пространство X, со счетным базисом или без него, и произвольное покрытие α: $U_1, \ldots, U_r$ пространства X, то всегда существует квази-барицентрическое α-отображение пространства X в $P(\alpha)$. Это доказывается следующим образом. Так как X нормально, то для каждого U_i найдется открытое множество V_i такое, что

$$\overline{V}_i \subset U_i;$$

V_i образуют покрытие α' пространства X. Нервы покрытия α и α' тождественны. Также, в силу нормальности пространства X, найдутся r непрерывных действительных функций $w_i(x)$, таких, что

$$0 \leqslant w_i(x) \leqslant 1,$$

$$w_i(x) = 0 \quad \text{для каждой точки } x \notin U_i,$$

$$w_i(x) = 1 \quad \text{для каждой точки } x \in V.$$

Эти функции $w_i(x)$ удовлетворяют указанным выше условиям (2′), (3′) и (4′).

Квази-барицентрическое α-отображение является, конечно, α-отображением.

H) Рассмотрим все подполиэдры P' полиэдра $P(\alpha)$, обладающие следующим свойством:

(4) Существует квази-барицентрическое α-отображение f пространства X в $P(\alpha)$ такое, что $f(X) \subset P'$.

Пусть P_0 — подполиэдр полиэдра $P(\alpha)$, неприводимый по отношению к этому свойству, т. е. такой, что P_0 удовлетворяет условию (4), в то время как никакой его подполиэдр не удовлетворяет условию (4). Такой полиэдр, очевидно, существует. Пусть f_0 — квази-барицентрическое α-отображение пространства X в $P(\alpha)$, для которого $f_0(x) \subset P_0$. Тогда

$$f_0(X) = P_0.$$

Доказательство. Допустим, что точка $p_0 \in P_0$ не принадлежит $f_0(X)$. Пусть s — клетка полиэдра P_0, содержащая p_0, и пусть S — *звезда клетки* s, т. е. множество всех клеток, имеющих s своей гранью. Обозначим через $B(S)$ («граница» S) множество всех клеток, не принадлежащих S, но являющихся гранями клеток звезды S. Для каждой точки $x \in X$, образ которой принадлежит S, мы заменим $f_0(x)$ ее проекцией $f'(x)$ на $B(S)$ из точки p_0. Легко доказать, что $f'(x)$ также является квази-барицентрическим α-отображением пространства X в P_0. Но $f'(X)$ содержится в собственном подполиэдре полиэдра P_0, что противоречит определению полиэдра P_0. Это показывает, что в теореме V 9 отображение «в» может быть заменено отображением «на».

Теорема V 10.[1]) *Пространство X имеет размерность $\leqslant n$ в том и только в том случае, если для каждого покрытия α пространства X существует α-отображение пространства X на полиэдр размерности $\leqslant n$.*

Доказательство. Нуждается в доказательстве только необходимость. Пусть $\dim X \leqslant n$. Впишем в покрытие α покрытие α' порядка $\leqslant n$. Пусть f_0 есть α'-отображение пространства X на неприводимый полиэдр P_0, существование которого вытекает из предложения H). Тогда f_0 есть требуемое отображение.

---

[1]) Эта теорема для наиболее важного случая компактов доказана Александровым (см. сноску на стр. 103).

Глава VI

ОТОБРАЖЕНИЯ В СФЕРЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

В этой главе мы изучим отображения топологических пространств в сферы и дадим характеристику размерности в терминах таких отображений. Эта характеристика, содержащаяся в теореме VI 4, является основным результатом главы. Она находит свои наиболее важные приложения в главе VIII, где служит базисом для алгебраической и комбинаторной трактовки теории размерности.

Аппарат отображений в сферы и чрезвычайно важное понятие гомотопии применяются далее для того, чтобы получить простые доказательства теорем о разбиении эвклидовых пространств (n-мерная теорема Жордана, § 7) и исследовать изменения размерности, производимые непрерывными отображениями пространства (§ 4).

1. Устойчивые и неустойчивые значения

В этом параграфе мы исследуем следующую проблему: при каких условиях пространство X можно отобразить в n-мерное эвклидово пространство E_n так, чтобы, по крайней мере, одна точка пространства E_n была покрыта «существенно», т. е. не могла стать непокрытой при произвольно малых изменениях отображения? Другими словами, при каких условиях возможно определить n непрерывных действительных функций

$$f_i(x), \qquad x \in X, \qquad\qquad i = 1, \ldots, n$$

таким образом, чтобы для любой системы непрерывных функций $g_i(x)$, аппроксимирующих функции $f_i(x)$ достаточно близко, система уравнений

$$g_i(x) = 0$$

имела решение $x \in X$?

Оказывается (теоремы VI 1 и VI 2), что такая система функций существует в том и только в том случае, если $\dim X \geqslant n$.

Определение VI 1. Пусть f — отображение пространства X в пространство Y. Точка y множества $f(X)$ называется *неустойчивым значением* отображения f, если для всякого $\delta > 0$ существует отображение g пространства X в Y, удовлетворяющее условиям:

$$\rho(f(x), g(x)) < \delta \text{ для каждой точки } x \text{ в } X, \tag{1}$$

$$g(X) \subset Y \setminus y. \tag{2}$$

Остальные точки множества $f(X)$ называются *устойчивыми* значениями отображения f.

Пример VI 1. Пусть f — отображение прямой в себя, определенное функцией $y = x^2$. Точка $y = 0$ является неустойчивым значением отображения f. Остальные значения функции f устойчивы.

Пример VI 2. Пусть f — тождественное отображение n-мерного куба I_n на себя. Каждая граничная точка куба I_n является неустойчивым значением отображения f, так как куб I_n отображением, очень мало отличающимся от тождественного, может быть преобразован в меньший концентрический куб. С другой стороны, каждая внутренняя точка куба I_n является устойчивым значением отображения f. Ввиду однородности достаточно доказать это для начала координат $(0, 0, \ldots, 0)$. Мы покажем, что для любого отображения g, удовлетворяющего неравенству (1) при $\delta = \frac{1}{2}$, начало координат является точкой множества $g(I_n)$. Пользуясь векторными обозначениями, рассмотрим отображение

$$k(x) = x - g(x) = f(x) - g(x).$$

Это отображение преобразует куб $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ в себя и, следовательно по теореме Брауэра о неподвижной точке (стр. 64), должна найтись точка x, для которой $k(x_0) = x_0$, т. е. $g(x_0) = 0$.

Пример VI 3. Пусть X — произвольное множество пространства E_n, и f — тождественное отображение X в E_n. Тогда каждая внутренняя точка p множества X является устойчивым значением отображения f. Ибо p принадлежит кубу Q, содержащемуся в X, и из предыдущего примера следует, что p является устойчивым значением для частичного[1]) отображения

[1]) Отображения f, рассматриваемого только на Q.

$f|Q$ и, следовательно, тем более для f. Мы предоставляем читателю доказательство того, что граничные точки множества X неустойчивы.

Пример VI 4. Пусть X — произвольное пространство, и f — его отображение в I_n. Тогда каждая точка границы куба I_n является неустойчивой. Ибо, если дано положительное δ (< 1), функции

$$g_i(x) = (1 - \delta) f_i(x), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

определяют отображение, при котором образ пространства X не покрывает ни одной граничной точки куба I_n.

Теорема VI 1. *Пусть X — пространство, размерность которого меньше n, и f — отображение пространства X в I_n. Тогда все значения отображения f неустойчивы.*

Доказательство. Из примера VI 4 мы знаем, что никакая граничная точка куба I_n не может быть устойчивым значением. Следовательно, достаточно доказать, что нет никаких устойчивых точек среди внутренних точек куба I_n, а это равносильно утверждению, что начало координат не является устойчивым значением отображения f. Пусть $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ — координаты точки $f(x)$, δ — произвольное положительное число, C_i^+ — множество точек пространства X, для которых

$$f_i(x) \geqslant \delta,$$

и C_i^- — множество точек пространства X, для которых

$$f_i(x) \leqslant -\delta.$$

Для каждого i множества C_i^+ и C_i^- замкнуты и не пересекаются. Следовательно по III 5 C), существуют замкнутые множества $B_1, \ldots, B_n$ такие, что B_i отделяет C_i^+ от C_i^-, т. е.

$$X \setminus B_i = U_i^+ \cup U_i^-,$$

где U_i^+ и U_i^- - непересекающиеся открытые множества, содержащие соответственно C_i^+ и C_i^-, и

$$B_1 \cap \ldots \cap B_n = 0. \tag{4}$$

Мы определим новые функции $g_1(x), \ldots, g_n(x)$:

$$g_i(x) = f_i(x), \text{ если } x \in C_i^+ \cup C_i^-,$$

$$g_t(x) = \delta \frac{\rho(x_1 B_i)}{\rho(x, C_i^+ + \rho(x, B_i)}, \text{ если } x \in U_i^+ \setminus C_i^+,$$

$$g_i(x) = -\delta \frac{\rho(x, B_i)}{\rho(x, C_i^-) + \rho(x, B_i)}, \text{ если } x \in U_i^- \setminus C_i^-,$$

$$g_i(x) = 0, \text{ если } x \in B_i.$$

Легко видеть, что $g_i(x)$ непрерывны и что

$$|g_i(x) - f_i(x)| \leqslant 2\delta. \tag{5}$$

Кроме того, $g_i(x)$ равно нулю только в том случае, если x принадлежит B_i. Следовательно по (4), не существует ни одной точки в пространстве X, в которой все функции $g_i(x)$ одновременно равны нулю. Это значит, что начало координат не является точкой образа пространства X при отображении, определенном функциями g_i, а вместе с (5) это показывает, что начало координат не является устойчивым значением отображения f.

А) Пусть даны отображение f пространства X в I_n и точка $y \in I_n$.

Если
$$f(X) \subset I_n \setminus y,$$

то для всякого $\delta > 0$ существует отображение g пространства X в I_n такое, что

$$\rho(f(x), g(x)) < \delta \text{ для каждой точки } x \in X, \tag{6}$$

$$\overline{g(X)} \subset I_n \setminus y. \tag{7}$$

Доказательство. Если y лежит на границе куба I_n, то для нашей цели годится отображение, определенное формулой (3) в примере VI 3. Пусть теперь y — внутренняя точка куба I_n, и пусть $f'(x)$ — проекция точки $f(x)$ из y на границу куба I_n. Если длина отрезка, соединяющего $f(x)$ с $f'(x)$, $\geqslant \frac{1}{2}\delta$, то определяем $g(x)$, как точку этого отрезка, находящуюся на расстоянии $\frac{1}{2}\delta$ от $f(x)$; если длина отрезка, соединяющего $f(x)$ с $f'(x)$, меньше, чем $\frac{1}{2}\delta$, то мы полагаем, что $g(x)$ равно $f'(x)$. Очевидно, для g условия (6) и (7) выполнены. Итак, А) доказано.

Теперь мы докажем теорему, обратную теореме VI, пользуясь аппаратом пространств отображений, развитым в главе V.

Теорема VI 2. *Если X — пространство размерности $\geqslant n$, то существует отображение пространства X в I_n, имеющее, по крайней мере, одно устойчивое значение.*

Доказательство. Допустим, что никакое отображение пространства X в I_n не имеет устойчивых значений. Из A) и определения неустойчивых значений следует, что для всякой точки y куба I_n каждое отображение f пространства X в I_n может быть сколь угодно точно аппроксимировано отображениями g, обладающими тем свойством, что

$$\overline{g(X)} \subset I_n \setminus y.$$

Рассмотрим теперь пространство I_ω^X отображений пространства X в гильбертов параллелепипед (см. определение V 3). Пусть $M = M(i_1 \ldots, i_n; c_1, \ldots, c_n)$ — линейное подпространство гильбертова пространства, определяемое n уравнениями

$$x_{i_1} = c_1, \ldots, x_{i_n} = c_n. \tag{8}$$

Обозначим через $G(M)$ множество отображений g пространства X в I_ω, обладающих тем свойством, что

$$\overline{g(X)} \subset I_\omega \setminus M.$$

Множество $G(M)$ *плотно* в I_ω^X, так как, если дано произвольное отображение

$$f(x) = (f_1(x), \quad f_2(x), \ldots), \qquad |f_i(x)| \leqslant \frac{1}{i}$$

пространства X в I_ω, то функции

$$f_{i_1}(x), \ldots, f_{i_n}(x) \tag{9}$$

определяют отображение X в I_n и, как замечено выше, можно освободить точку $(c_1, \ldots, c_n)$ от замыкания образа пространства X, произвольно мало изменив отображение (9).

Далее, множество $G(M)$ *открыто* в I_ω^X. Так как, если g принадлежит $G(M)$, то расстояние

$$d = \rho(g(X), M)$$

положительно; каждое же отображение f, для которого $\rho(f, g) < d$, принадлежит множеству $G(M)$.

Теперь мы сосредоточим наше внимание на тех отображениях g пространства X в I_ω, для которых

$$\overline{g(X)} \subset \mathcal{M}_\omega^{n-1}, \tag{10}$$

где $\mathcal{M}_\omega^{n-1}$ обозначает (см. пример III 7) множество точек гильбертова параллелепипеда I_ω, имеющих не более $n-1$ рациональных координат. Дополнение множества $\mathcal{M}_\omega^{n-1}$ в I_ω является пересечением I_ω с суммой счетного числа линейных пространств M_1, $M_2, \ldots$ типа (8), именно подпространств, соответствующих всевозможным комбинациям n индексов i_j и n рациональных чисел c_j. Следовательно, (10) эквивалентно условию $\overline{g(X)} \subset I_\omega \setminus M_i$, или

$$g \in G(M_i) \quad \text{для каждого } i = 1, 2, \ldots$$

I_ω^X, в силу теоремы V 4, содержит плотное G_δ-множество H, каждый элемент которого является гомеоморфизмом. Множество

$$H' = H \cap \bigcap_i G(M_i),$$

как пересечение счетного числа плотных G_δ-множеств в полном пространстве, само плотно в I_ω^X (см. V 2 B); в частности, оно не пусто.

Следовательно, существует гомеоморфизм h, отображающий пространство X на подмножество множества $\mathcal{M}_\omega^{n-1}$. Но (пример III 7)

$$\dim \mathcal{M}_\omega^{n-1} \leqslant n-1$$

— в противоречии с предположением, что

$$\dim X \geqslant n.$$

Это завершает доказательство теоремы VI 2.

Замечание. Из теоремы VI 2 вытекает, что в пространстве, размерность которого $\geqslant n$, всегда можно определить n пар замкнутых множеств C_i, C_i'; $i = 1, \ldots, n$; $C_j \cap C_i' = 0$, удовлетворяющих следующему условию: если B_i, $i = 1, \ldots, n$, есть замкнутое множество, отделяющее C_i от C_i', то

$$B_1 \cap \ldots \cap B_n \neq 0.$$

Ибо, в противном случае, мы могли бы, пользуясь рассуждениями доказательства теоремы VI 1, получить противоречие с теоремой VI 2.

Следующее предложение показывает, что для отображений в I_n вопрос о том, будет ли некоторая точка устойчивой или неустойчивой, зависит только от поведения отображения в произвольно малой окрестности этой точки.

В) Пусть f — отображение пространства X в I_n. Внутренняя [1] точка y множества $f(X)$ является неустойчивым значением отображения f в том и только в том случае, если для каждой окрестности U точки y существует отображение g пространства X в I_n, удовлетворяющее условиям:

$$g(x)=f(x), \qquad \text{если } f(x) \notin U, \tag{11}$$

$$g(x) \in U, \qquad \text{если } f(x) \in U, \tag{12}$$

$$y \notin g(X). \tag{13}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что условие достаточно. Ибо из (11) и (12) мы имеем

$$\rho(f(x), g(x)) \leqslant \delta(U) \text{ для каждой точки } x \in X,$$

так что существуют отображения g, аппроксимирующие f произвольно точно и удовлетворяющие соотношению (2).

Перейдем к доказательству необходимости. Пусть y — внутренняя точка куба I_n, и δ — действительное положительное число. Не уменьшая общности, можно предположить, что y — начало координат, а U — сферическая окрестность точки y радиуса δ. Так как y — неустойчивое значение отображения f, то существует отображение g' пространства X в I_n, для которого в векторных обозначениях

$$|f(x)-g'(x)|=\rho(f(x), g'(x)) < \frac{1}{2}\delta. \tag{14}$$

$$g'(x) \neq 0,$$

Построим новое отображение g следующим образом:

$$g(x)=g'(x), \quad \text{если } |f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\delta, \tag{16}$$

$$g(x)=2\left(1-\frac{|f(x)|}{\delta}\right)g'(x)-\left(1-\frac{2|f(x)|}{\delta}\right)f(x),$$
$$\text{если } \frac{1}{2}\delta < |f(x)| < \delta, \tag{17}$$

$$g(x)=f(x), \quad \text{если } |f(x)| \geqslant \delta. \tag{18}$$

[1] Прилагательное «внутренняя» можно опустить, так как очень легко можно показать, что и предложение, и заключение всегда удовлетворяются при любом отображении для граничных точек.

Проверим, что $g(x)$ является отображением пространства X в I_n, обладающим свойствами (11)—(13). (11) равносильно условию (18). Если $\frac{1}{2}\delta < |f(x)| < \delta$, из (14 и (17) с помощью простых выкладок получаем:

$$|f(x)-g(x)| = 2\left(1-\frac{|f(x)|}{\delta}\right)|f(x)-g'(x)| < \delta - |f(x)|$$

и, следовательно,

$$0 < |g(x)| < \delta. \tag{19}$$

В силу (14,) (15) и (16), неравенство (19) имеет силу и в случае, если $|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\delta$. Это доказывает (12) и (13) и завершает доказательство предложения В).

Из В) получаем следующее расширение теоремы VI 1:

С) Пусть X — пространство, размерность которого меньше n, и f — его отображение в пространство B, содержащее открытое подмножество U, гомеоморфное E_n. Тогда все значения отображения f, принадлежащие U, неустойчивы.

Доказательство. Пусть U' — полный прообраз множества U при f. Частичное отображение $f|U'$ можно рассматривать как отображение множества U' в I_n, так как U гомеоморфно множеству внутренних точек куба I_n. Отсюда, в силу теоремы VI 1 и В), для каждой точки $y \in U$ и окрестности V точки y, замыкание которой содержится в U, существует отображение g множества U' в U такое, что

$$g(x) = f(x), \quad \text{если} \quad f(x) \notin V, \tag{20}$$

$$g(x) \in V, \quad \text{если} \quad f(x) \in V, \tag{21}$$

$$y \notin g(X). \tag{22}$$

Положив $g(x)$ равным $f(x)$ для $x \in X \setminus U'$, получим отображение (которое будем попрежнему обозначать через g) всего пространства X в B. Новое отображение g сохраняет свойства (20), (21), (22). Так как V, а следовательно, и $\rho(f, g) = \sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x))$ могут быть сделаны сколь угодно малыми, каждое значение отображения f является неустойчивым.

D) Если f есть отображение пространства X в n-мерную сферу и $\dim X < n$, то все значения отображения f неустойчивы.

Доказательство. Предложение D) является следствием предложения С).

2. Продолжение отображений

Определение VI 2. Пусть A — подмножество пространства X, и $f(x)$ — отображение множества A в пространство Y. Отображение $F(x)$ пространства X в Y, удовлетворяющее условию

$$F(x) = f(x) \quad \text{для} \quad x \in A,$$

называется *продолжением отображения f на X относительно Y*. В том случае, когда недоразумения невозможны, слова «относительно Y» будут опускаться.

Теорема VI 3. **Теорема Титце о продолжении.** *Пусть C — замкнутое подмножество пространства X, и $f(x)$ — непрерывная действительная функция, определенная на C и ограниченная константой k:*

$$|f(x)| \leqslant k.$$

Тогда существует действительная функция $F(x)$, являющаяся продолжением отображения f на X такая, что

$$|F(x)| \leqslant k.$$

Доказательство[1]. Мы докажем сначала существование непрерывной функции F_1, определенной на X, удовлетворяющей неравенствам:

$$|F_1(x)| \leqslant \frac{1}{3}k, \quad x \in X.$$

$$|F_1(x) - f(x)| \leqslant \frac{2}{3}k, \quad x \in C.$$

Пусть C^+ — множество точек $x \in C$, для которых

$$f(x) \geqslant \frac{1}{3}k,$$

и C^- — множество, для точек которого

$$f(x) \leqslant -\frac{1}{3}k.$$

Тогда функция

$$F_1(x) = \frac{1}{3}k\,\frac{\rho(x, C^-) - \rho(x, C^+)}{\rho(x, C^-) + \rho(x, C^+)}$$

[1] Это доказательство принадлежит Урысону: Über die Mächtigkeit zusammenhängender Mengen, *Math. Ann.* **94** (1925), стр. 262—295, в частности, стр. 293.

обладает требуемыми свойствами, так как

$$F_1(x) = \frac{1}{3}k, \quad \text{если} \quad f(x) \geqslant \frac{1}{k}k,$$

$$-\frac{1}{3}k \leqslant F_1(x) \leqslant \frac{1}{3}k, \quad \text{если} \quad -\frac{1}{3}k \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{3}k,$$

$$F_1(x) = -\frac{1}{3}k, \quad \text{если} \quad f(x) \leqslant -\frac{1}{3}k.$$

Заменяя $f(x)$ функцией $f(x) - F_1(x)$ и k — числом $\frac{2}{3}k$, определим на X функцию $F_2(x)$ такую, что

$$|F_2(x)| \leqslant \frac{2}{3^2}k, \quad x \in X,$$

$$|f(x) - F_1(x) - F_2(x)| \leqslant \frac{2^2}{3^2}k, \quad x \in C.$$

Продолжая этот процесс, получим последовательность $\{F_n(x)\}$ непрерывных функций, определенных на X, удовлетворяющих неравенствам

$$|F_n(x)| \leqslant \frac{2^{n-1}}{3^n}k, \quad x \in X \tag{1}$$

$$|f(x) - \sum_{i=1}^{n} F_i(x)| \leqslant \frac{2^n}{3^n}k, \; x \in C. \tag{2}$$

Неравенство (1) показывает, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$$

сходится равномерно на X и, следовательно, имеет непрерывную сумму $F(x)$. Из (1) и (2) следуют соотношения:

$$|F(x)| \leqslant k$$

и

$$F(x) = f(x) \quad \text{для} \quad x \in C,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Пусть C — замкнутое подмножество пространства X, и f — произвольное отображение множества C в I_n (в I_ω). Тогда f может быть продолжено на X (относительно I_n (I_ω)).*

Доказательство. Утверждение следует из применения теоремы VI 3 к каждой из координат точки $f(x)$.

Если заменить I_n n-мерной сферой S_n и рассмотреть отображение f замкнутого подмножества C пространства X в S_n, то, вообще говоря, f не может быть продолжено на все X относительно S_n. Например, пусть X — замкнутый шар $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \leqslant 1$ в E_{n+1}, ограниченный сферой S_n. Как было показано в IV 1 B), тождественное отображение S_n на S_n не может быть продолжено в отображение пространства X в S_n. Однако:

Следствие 2. *Пусть C — замкнутое подмножество пространства X, и f — отображение C в n-мерную сферу S_n. Тогда существует открытое в X множество, содержащее C, на которое f может быть продолжено (относительно S_n)*[1].

Доказательство. Пусть координаты точки $f(x)$ в E_{n+1} суть

$$f_1(x), \ldots, f_{n+1}(x).$$

Если S_n имеет радиус 1, то

$$\sum_{i=1}^{n+1} (f_i(x))^2 = 1,$$

и, следовательно,

$$|f_i(x)| \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

В силу теоремы Титце о продолжении, существует продолжение $F_i(x)$ функций $f_i(x)$ на X. Пусть U — множество точек пространства X, для которых

$$\sum (F_i(x))^2 > 0.$$

U является, очевидно, открытым множеством, содержащим C.

Если положить, что $F(x)$ является точкой сферы S_n, i-я

[1]) Следствия 1 и 2 выражают определенные свойства пространств I_n и S_n.

Если пространство A обладает свойством, которым, в силу следствия 1, обладает I_n, то оно называется *абсолютным ретрактом*; если A обладает свойством, которым, в силу следствия 2, обладает S_n, то оно называется *абсолютным окрестностным ретрактом*. Легко можно показать, что каждый полиэдр является абсолютным окрестностным ретрактом. Эти понятия были введены Борсуком и играли видную роль в топологических исследованиях последних лет.

координата которой равна

$$\frac{F_i(x)}{\left[\sum_{i=1}^{n+1}(F_i(x))^2\right]^{1/2}},$$

то отображение F будет искомым продолжением отображения f на U.

Теорема Титце о продолжении делает возможной перефразировку теорем VI 1 и VI 2 в терминах отображений в сферы.

Теорема VI 4. *Пространство X имеет размерность $\leqslant n$ в том и только в том случае, если для каждого замкнутого множества C и отображения f множества C в S_n существует продолжение отображения f на X.*

Доказательство. *Условие необходимо.* Пусть даны замкнутое множество C и отображение f множества C в сферу S_n, которую мы здесь будем рассматривать, как границу куба I_{n+1}. f является тогда отображением множества C в I_{n+1}. По следствию 1 теоремы Титце о продолжении, существует отображение F' пространства X в I_{n+1}, которое является продолжением отображения f. Так как

$$\dim X \leqslant n,$$

то из теоремы VI 1 следует, что начало координат не является устойчивым значением отображения F'. Тогда 1 B) дает нам отображение F'' пространства X в I_{n+1} такое, что начало координат не содержится в $F''(X)$, тогда как $F''(x)=F'(x)$ для всех значений $F'(x)$, не являющихся внутренними точками куба I_{n+1}. В частности, для $x \in C$

$$F''(x)=F'(x)=f(x).$$

Пусть $F(x)$ — проекция точки $F''(x)$ на границу куба I_{n+1} из начала координат. Тогда, очевидно, F является нужным нам продолжением отображения f.

Условие достаточно. Для того чтобы доказать, что $\dim X \leqslant n$, достаточно, в силу теоремы VI 2, показать, что отображение f пространства X в I_{n+1} не может иметь устойчивых значений. Граничная точка куба I_{n+1} никогда не устойчива (см. пример VI 4). Поэтому пусть y — внутренняя точка куба I_{n+1}, и U — сферическая окрестность точки y радиуса $\frac{1}{2}\delta$. Будем рассматривать S_n как границу множества U. Обозначим через C полный прообраз сферы S_n при f. C замкнуто, потому что f непрерывно. По предположению существует отображение F всего пространства X в S_n такое, что $F(x)=f(x)$ для $x \in C$. Построим теперь новое отображение $g(x)$ пространства X в I_{n+1}, положив

$$g(x)=f(x), \quad \text{если} \quad f(x) \notin U,$$
$$g(x)=F(x), \quad \text{если} \quad f(x) \in U;$$

$g(x)$ является отображением пространства X в $I_{n+1} \setminus U$, и $\rho(f, g) < \delta$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть C — замкнутое подмножество пространства X. Тогда, если $X \setminus C$ имеет размерность $\leqslant n$, то каждое отображение множества C в S_n может быть продолжено на X.*

Доказательство. Пусть f — отображение множества C в S_n. Следствие 2 теоремы Титце о продолжении показывает, что существует открытое множество U, содержащее C, и продолжение f' отображения f на U. Пусть V — открытое в X множество такое, что

$$C \subset V \subset \overline{V} \subset U;$$

V существует, так так X нормально [1]. Рассмотрим частичное отображение

$$f' \mid \overline{V} \cap (X \setminus C).$$

Это есть отображение в S_n замкнутого подмножества пространства $X \setminus C$. Но $X \setminus C$ имеет размерность $\leqslant n$. По теореме VI 4 существует поэтому продолжение f'' этого отображения на $X \setminus C$. Если мы положим

$$F(x)-f(x) \quad \text{для} \quad x \in C,$$
$$F(x)=f''(x) \quad \text{для} \quad x \in X \setminus C,$$

то получим искомое продолжение отображения f на X.

Важным приложением теоремы VI 4 является простое доказательство теоремы Брауэра об инвариантности области. Читатель, если он желает, может непосредственно перейти к этой теореме (теорема VI 9).

[1] См. Указатель.

3. Гомотопия

Определение VI 3. Пусть X и Y — два пространства. Мы скажем, что отображение f пространства X в Y *гомотопно* отображению g пространства X в Y, если можно найти функцию $f(x, t)$ двух переменных x и t, где x — точка пространства X, а t — действительное число, $0 \leqslant t \leqslant 1$, принимающую значения из пространства Y, непрерывную по паре (x, t) и удовлетворяющую условиям:

$$f(x, 0) = f(x),$$
$$f(x, 1) = g(x).$$

Функция $f(x, t)$ указанного выше вида является, конечно, ничем иным, как отображением пространства $X \times I$ (произведения пространства X на единичный отрезок I) в Y. Интуитивный смысл гомотопии состоит в том, что g может быть получено из f процессом непрерывной деформации, все фазы которой являются отображениями в Y.

Ясно, что соотношение гомотопности симметрично и транзитивно, т. е. если f гомотопно g, то g гомотопно f, и если f гомотопно g, а g гомотопно h, то f гомотопно h. Таким образом, возникает разбиение всех отображений пространства X в Y на непересекающиеся *гомотопические классы.*

Определение VI 4. Отображение пространства X в пространство Y называется *несущественным*, если оно гомотопно постоянному отображению. Отображение, не являющееся несущественным, называется *существенным.*

Пример VI 5. Пусть и X, и Y — n-мерные сферы S_n, и f — тождественное отображение. Тогда, как показывает предложение VI 1 A), f существенно, и этот факт послужил основанием для доказательства того, что E_n n-мерно. Известно, что существует счетное множество гомотопических классов отображений сферы S_n в себя (пример VIII 25). Каждый из этих классов характеризуется целым числом, называемым его степенью; грубо говоря, степень — это алгебраическое число навертываний сферы на себя при отображении.

Пример VI 6. Если пространство Y обладает тем свойством, что каждая пара точек может быть соединена в нем простой дугой, то для любого пространства X все несущественные отображения пространства X в Y принадлежат одному и тому же гомотопическому классу, так как из указанного свойства, очевидно, следует, что все постоянные отображения гомотопны.

Пример VI 7. Мы скажем, что X — *стягиваемое* пространство, если тождественное отображение X на X несущественно. Интуитивно это означает, что X можно стянуть по себе в точку. E_n и I_n являются примерами стягиваемых пространств; S_n нестягиваемо (см. пример VI 5). Легко показать, что если хотя бы одно из пространств X и Y является стягиваемым, то все отображения пространства X в Y несущественны. В частности, всякое отображение куба I_n в произвольное пространство несущественно.

Пример VI 8. Пусть f и g — два отображения произвольного пространства X в S_n такие, что для любого $x \in X$ точки $f(x)$ и $g(x)$ находятся друг от друга на расстоянии меньшем, чем диаметр сферы S_n, т. е. никогда не являются диаметрально противоположными. Тогда f и g гомотопны; ибо всегда существует однозначно определенная меньшая дуга большого круга, соединяющая $f(x)$ и $g(x)$, и мы можем в качестве $f(x, t)$ взять точку, делящую эту дугу в отношении $\frac{t}{1-t}$. Как следствие получаем: любое отображение f пространства X в S_n, оставляющее некоторую точку $g \in S_n$ свободной от $f(X)$, несущественно, потому что, как только что было установлено, f гомотопно постоянному отображению g пространства X в точку, диаметрально противоположную точке q.

Начиная с этого момента, мы будем рассматривать, главным образом, отображения в S_n. Мы возвратимся к вопросу о продолжении отображения, определенного на замкнутом подмножестве пространства, в отображение, определенное на всем пространстве. Оказывается, что существование такого отображения зависит только от гомотопического класса данного отображения, — факт, имеющий много очень важных приложений.

Теорема VI 5. **Теорема Борсука** [1]). *Пусть C — замкнутое подмножество пространства X, а f и g — два гомотопных отображения множества C в S_n. Тогда, если суще-*

[1]) Заметим, что единственное свойство сферы S_n, используемое в доказательстве, это свойство быть абсолютным окрестностным ретрактом (см. сноску на стр. 116). Поэтому теорема Борсука останется справедливой, если S_n заменить произвольным абсолютным окрестностным ретрактом. Приведенное здесь доказательство принадлежит С. Г. Доукеру и содержится в его диссертации «Теоремы об отображениях в некомпактных пространствах».

ствует продолжение F отображения f на X, то существует также продолжение G отображения g на X, гомотопное F.

Предпошлем доказательству предложение относительно открытых множеств в топологическом произведении пространств.

A) Пусть C — подмножество пространства X, а U — открытое множество топологического произведения[1] $X \times I$, содержащее $C \times I$. Тогда существует открытое множество V в X такое, что $C \subset V$ и $V \times I \subset U$.

Доказательство. Сначала мы покажем, что каждая точка $c \in C$ имеет в X окрестность v, для которой $v \times I \subset U$. Рассмотрим отрезок $c \times I$. Он содержится в U. Следовательно, каждая его точка имеет содержащуюся в U окрестность вида $w \times i$, где w — окрестность точки c в X и i — интервал в I. Так как $c \times I$ — компакт, то конечное число этих «прямоугольных» окрестностей покрывает $c \times I$. В качестве окрестности v берем тогда пересечение проекций всех этих окрестностей в X. Предложение A) будет теперь установлено, если в качестве окрестности V взять сумму окрестностей v по всем точкам $c \in C$.

Возвратимся теперь к доказательству теоремы.

Доказательство теоремы Борсука. Гомотопность отображения f и g означает, что существует отображение $f(x, t)$ произведения $C \times I$ в S_n, удовлетворяющее условиям:

$$f(x,\ 0) = f(x),$$
$$f(x,\ 1) = g(x),$$

где $x \in C$. По предположению, существует также отображение F пространства X в S_n, совпадающее с f на C. Пусть C' — множество в $X \times I$, состоящее из точек $(x,\ 0)$ для $x \in X$ и точек $(x,\ t)$ для $x \in C$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$. C' является замкнутым подмножеством пространства $X \times I$. Рассмотрим следующее отображение множества C' в S_n:

$$F(x,\ 0) = F(x) \qquad \text{для} \quad x \in X,$$
$$F(x,\ t) = f(x,\ t) \qquad \text{для} \quad x \in C \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

По следствию 2 теоремы VI 3 существует открытое в $X \times I$ множество $U \supset C'$, на котором $F(x,\ t)$ может быть продолжено; продолженное отображение мы будем попрежнему обозначать

[1]) I обозначает единичный отрезок $[0,1]$.

через $F(x, t)$. В силу А), существует открытое в X множество V, содержащее C, такое, что $V \times I \subset U$. Заметим, что отображение $F(x, t)$ определено для любого $x \in V$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$ и, кроме того, для любого $x \in X$ и $t = 0$.

C и дополнение множества V являются непересекающимися замкнутыми подмножествами пространства X. Следовательно, существует непрерывная действительная функция $p(x)$, определенная [1]) на X, принимающая значения между 0 и 1, равная 1 на C и 0 на $X \setminus V$. Рассмотрим теперь функцию

$$G(x, t) = F(x, tp(x)).$$

$G(x, t)$ определена для всех $x \in X$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$ и непрерывна по (x, t). Если мы определим $G(x)$ равенством

$$G(x) = G(x, 1),$$

то ясно, что

$$G(x) = g(x) \quad \text{для} \quad x \in C,$$

так что $G(x)$ является продолжением отображения $g(x)$ на X. Также ясно, что $G(x, 0) = F(x)$; так как $G(x, 1) = G(x)$ по определению, то F и G гомотопны.

Следствие. *Несущественное отображение замкнутого подмножества пространства X в S_n всегда может быть продолжено на X.*

Доказательство. В самом деле, постоянное отображение всегда может быть продолжено.

Теперь мы установим связь между размерностью и гомотопией.

В) Пусть f и g — два отображения пространства X в S_n такие, что точки, в которых $f(x)$ не равно $g(x)$, образуют множества D размерности $\leqslant n-1$. Тогда f и g гомотопны.

Доказательство. D, очевидно, открыто. Пусть D^* — замкнутое множество произведения $X \times I$, состоящее из точек $(x, 0)$ и $(x, 1)$ для $x \in X$ и точек (x, t) для $x \in X \setminus D$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$. Следующим образом определяем отображение $F(x, t)$ множества D^* в S_n:

$$F(x, t) = f(x) = g(x) \text{ для } x \in X \setminus D,$$

$$F(x, 0) = f(x), \; F(x, 1) = g(x).$$

---

[1]) Например, $p(x) = \dfrac{\rho(x, X \setminus V)}{\rho(x, X \setminus V) + \rho(x, C)}$. См. АН, стр. 74, 76.

Дополнение множества D^* содержится в $D \times I$, и, в силу теоремы III 4, $\dim D \times I \leqslant n$. По следствию теоремы VI 4, $F(x, t)$ можно продолжить в отображение пространства $X \times I$ в S_n, доказав этим гомотопность f и g.

Теорема VI 6. *Если X — пространство размерности меньшей чем n, то все отображения X в S_n гомотопны и, следовательно, несущественны.*

Доказательство. Теорема есть непосредственное следствие предложения B).

Соединяя предложение B) с теоремой Борсука, получаем следующий результат, утверждающий, что если отображения, определенные на двух замкнутых частях пространства как бы «приспособлены» друг к другу всюду, за исключением, быть может, множества меньшей размерности, то любое из отображений может быть изменено таким образом, чтобы оно стало «приспособлено» к другому полностью.

C) Допустим, что пространство X является суммой двух замкнутых подмножеств C_1 и C_2. Пусть F_1 и F_2 — отображения множеств C_1 и C_2 в S_n. Пусть, далее, точки (в $C_1 \cap C_2$), для которых $F_1(x)$ не равно $F_2(x)$, образуют множество размерности $\leqslant n-1$. Тогда F_1 может быть продолжено на X.

Доказательство. Частичные отображения $F_1 | C_1 \cap C_2$ и $F_2 | C_1 \cap C_2$ отличаются друг от друга только на множестве размерности $\leqslant n-1$ и, следовательно в силу B), гомотопны. Так как $F_2 | C_1 \cap C_2$ может быть продолжено на C_2, именно в F_2, то из теоремы Борсука следует, что существует продолжение, скажем F_1', отображения $F_1 | C_1 \cap C_2$ на C_2. Полагая

$$F(x) = F_1(x) \text{ для } x \in C_1,$$

$$F(x) = F_1'(x) \text{ для } x \in C_2,$$

получаем искомое продолжение.

Теперь мы установим несколько результатов, которые будут иметь важные приложения в следующих параграфах.

D) Пусть f и g — отображения пространства X в S_n. Допустим, что X является суммой двух замкнутых подмножеств C_1 и C_2, пересечение которых имеет размерность $\leqslant n-2$. Если f и g гомотопны на каждом из множеств C_1 и C_2, т. е., если $f | C_1$ гомотопно $g | C_1$, и $f | C_2$ гомотопно $g | C_2$, то f и g гомотопны.

Доказательство. Рассмотрим топологическое произведение $X \times I$. По предположению, существуют отображения:

$$f_1(x, t), \text{ определенное для } x \in C_1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$f_2(x, t), \text{ определенное для } x \in C_2,\ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

такие, что

$$\text{для } x \in C_1: \quad f_1(x, 0) = f(x),\ f_1(x, 1) = g(x),$$

$$\text{для } x \in C_2: \quad f_2(x, 0) = f(x),\ f_2(x, 1) = g(x).$$

Расширим область определения отображения $f_1(x, t)$, положив,

$$\text{для } x \in C_2: \ f_1(x, 0) = f(x), \ f_1(x, 1) = g(x).$$

Каждое из отображений $f_1(x, t)$ и $f_2(x, t)$ определено на замкнутом подмножестве пространства $X \times I$, причем точки, в которых $f_1(x, t)$ и $f_2(x, t)$ определены, но имеют различные значения, принадлежат множеству $(C_1 \cap C_2) \times I$ и, следовательно (теорема III 4), образуют множество размерности $\leqslant n-1$. Предложение C) показывает тогда, что существует продолжение $F(x, t)$ отображения $f_1(x, t)$ на все $X \times I$. Мы имеем:

$$F(x, 0) = f_1(x, 0) = f(x),$$

$$F(x, 1) = f_1(x, 1) = g(x),$$

откуда следует, что f и g гомотопны.

E) Пусть f — отображение пространства X в S_n. Допустим, что X является суммой двух замкнутых подмножеств C_1 и C_2, пересечение которых имеет размерность $\leqslant n-2$. Если f несущественно на каждом из множеств C_1 и C_2, т. е. если $f|C_1$ и $f|C_2$ несущественны, то f несущественно.

Доказательство. Предложение есть частный случай предложения D), когда g — постоянное отображение.

F) Пусть C — замкнутое подмножество пространства X, и $\{V_\lambda\}$ — совокупность открытых множеств, в сумме дающих X, границы которых имеют размерность $\leqslant n-1$. Если f есть отображение множества C в S_n, допускающее продолжение на каждое из множеств $C \cup \overline{V_\lambda}$, то f можно продолжить на всё пространство X.

Доказательство. Так как X обладает счетным базисом, то можно предположить (АН, стр. 78), что $\{V_\lambda\}$ является счетной совокупностью $V_1, V_2, \ldots$. Определим последовательные продолжения отображения f, взяв в качестве F_1 произвольное продолжение отображения f на $C \cup \overline{V}_1$. Предположим, что мы уже определили F_k как продолжение отображения F_{k-1} на множество $C \cup \overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_k$. Разделим $C \cup \overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_{k+1}$ на две замкнутые части:

$$C_1 = C \cup \overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_k$$

и

$$C_2 = (C \cup \overline{V}_{k+1}) \setminus (V_1 \cup \ldots \cup V_k).$$

По предположению, f допускает продолжение F^k на C_2. Точки x, для которых $F_k(x) \neq F^k(x)$, принадлежат множеству

$$(C_1 \cap C_2) \setminus C \subset Fr(V_1 \cup \ldots \cup V_k) \subset Fr\, V_1 \cup \ldots \cup Fr\, V_k,$$

которое, в силу теоремы сложения (теорема III 2), имеет размерность $\leqslant n-1$. Следовательно, можно применить C) и получить распространение F_{k+1} отображения F_k на $C \cup \overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_{k+1}$.

Пусть теперь x — произвольная точка пространства X, и m — первый номер такой, что $x \in V_m$. Полагая $F(x) = F_m(x) = F_{m+1}(x) = F_{m+2}(x) = \ldots$, получаем отображение F пространства X в S_n, которое, очевидно, является продолжением отображения f.

G) Пусть пространство X является суммой (не обязательно счетной)[1]) семейства замкнутых множеств $\{K_\lambda\}$, обладающих следующими двумя свойствами: каждое K_λ имеет размерность $\leqslant n$, и если даны произвольное K_λ и открытое множество U, содержащее K_λ, то найдется открытое множество V такое, что

$$K_\lambda \subset V \subset U$$

и

$$\dim Fr\, V \leqslant n-1.$$

Тогда X имеет размерность $\leqslant n$.

Доказательство. В силу теоремы VI 4, для того чтобы доказать, что X имеет размерность $\leqslant n$, достаточно показать,

---

[1]) Сравните это предложение с теоремой сложения (теорема III 2). С одной стороны это предложение сильнее, так как в нем не сделано никаких предположений о счетности, но с другой — оно слабее, так как оно налагает на замкнутые множества семейства требование обладания тем свойством, что они могут быть произвольно тесно заключены в открытые множества, имеющие границы размерности $\leqslant n-1$. Следует также обратить внимание на то, что если $\{K_\lambda\}$ является множеством всех точек пространства X, то G) сводится к обычному определению размерности.

что если дано произвольное замкнутое множество $C \subset X$ и произвольное отображение f множества C в S_n, то существует продолжение отображения f на X. Из того обстоятельства, что $\dim K_\lambda \leqslant n$, вытекает, что для каждого $K \in \{K_\lambda\}$ отображение f можно продолжить на $C \cup K$ (положим в следствии теоремы VI 4 $X = C \cup K$, тогда $X \setminus C \cup K$) и (следствие 2 теоремы VI 3) что можно даже продолжить f на некоторое открытое множество

$$U \supset C \cup K. \tag{1}$$

Из предположения следует, что найдется открытое множество V такое, что

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U \tag{2}$$

и

$$\dim Fr V \leqslant n-1. \tag{3}$$

Так как, по (1) и (2), $C \cup \overline{V} \subset U$, то ясно, что f можно продолжить на $C \cup \overline{V}$.

В силу (2), сумма множеств V заполняет X; предложение F) доказывает возможность продолжения f на X, что завершает доказательство.

4. Отображения, понижающие размерность

Непрерывность однозначного отображения f пространства X в пространство Y можно определить с помощью требования, чтобы обратное отображение f^{-1} переводило замкнутые множества пространства Y в замкнутые множества пространства X или, что то же (так как f определено на всем X), открытые множества пространства Y — в открытые множества пространства X. Это наводит нас на мысль говорить, что f^{-1} (многозначное отображение) непрерывно, если само f переводит замкнутые множества пространства X в замкнутые множества пространства Y. Мы могли бы, по этой причине, притти к решению называть непрерывное отображение f в обе стороны непрерывным, если f отображает замкнутые множества пространства X в замкнутые множества пространства Y. Однако против этого имеется серьезное возражение, состоящее в том, что в такой же степени разумно говорить, что f^{-1} непрерывно, если f переводит открытые множества пространства X в открытые множества пространства Y; к сожалению, два возможных способа определения непрерывности отображения f^{-1} не совпадают (см. примеры VI 9 и 9.1), за исключением случая взаимнооднозначных отображений X на Y. Следовательно, пожалуй, лучше избегать неясного выражения: «в обе стороны непрерывное» и говорить лишь о замкнутых и открытых отображениях, как они определены ниже.

Определение VI 5. *Замкнутым* (*открытым*) отображением пространства X в пространство Y называется отображение, переводящее замкнутые (открытые) подмножества пространства X в замкнутые (открытые) подмножества пространства Y.

Пример VI 9. Пусть X — интервал $0 < x < 1$, и Y — отрезок $0 \leqslant x \leqslant 1$. Пусть f — тождественное отображение $f(x) = x$ пространства X в Y. Тогда f не замкнуто, так как X, которое, конечно, замкнуто в X, не замкнуто в Y. Легко однако, видеть, что f открыто.

Пример VI 9. 1. Пусть X — плоское множество, состоящее из вертикальной и горизонтальной осей, а Y — горизонтальная ось. Пусть f — вертикальная проекция X в Y. Тогда f замкнуто, но не открыто.

Замечание. Замкнутое подмножество компакта является компактом (АН, стр. 86), и непрерывный образ компакта также является компактом (АН, стр. 95). Далее, компакт замкнут во всяком содержащем его пространстве (АН, стр. 91); следовательно, каждое отображение компакта замкнуто.

Рассмотрим ортогональную проекцию куба I_{n+k} на I_n; это отображение понижает размерность на k единиц. Полный прообраз каждой точки куба I_n имеет размерность k. Теперь мы докажем, что, вообще, непрерывное замкнутое отображение одного пространства в другое не может понижать размерность на k единиц без того, чтобы, по крайней мере, одно k-мерное множество не сплющивалось в точку.

Теорема VI 7. *Пусть f — непрерывное замкнутое*[1]) *отображение пространства X в пространстве Y, и*

$$\dim X \setminus \dim Y = k,$$

$k > 0$. *Тогда существует точка пространства Y, полный прообраз которой имеет размерность $\geqslant k$.*

Доказательство. Для удобства доказательства пред-

[1]) Для компактов слово «замкнутое» излишне: см. замечание выше. Теорема неверна для открытых и, тем более, просто для непрерывных отображений: см. ниже пример VI 10.

ставим утверждение теоремы в следующей форме: если для каждого $y \in Y$

$$\dim f^{-1}(y) \leqslant m,$$

то

$$\dim X \leqslant m + \dim Y.$$

Очевидно, можно предположить, что Y конечномерно. Мы докажем теорему индукцией по размерности пространства Y, сохраняя m фиксированным. Утверждение тривиально, если $\dim Y = -1$, потому что в этом случае X также пусто. Предположим теперь, что утверждение справедливо при $\dim Y \leqslant n-1$, и докажем его справедливость при $\dim Y = n$.

Для того чтобы доказать, что $\dim X \leqslant m + n$, достаточно показать, что семейство замкнутых множеств $f^{-1}(y)$ удовлетворяет условиям предложения 3 G), где n заменено на $n+m$. По предположению, мы имеем:

$$\dim f^{-1}(y) \leqslant m \leqslant m + n.$$

Далее, если U — открытое множество в X, содержащее $f^{-1}(y)$, то множество

$$C = f(X \setminus U)$$

замкнуто в Y, как образ замкнутого множества $X \setminus U$ при замкнутом отображении f. Это множество C не содержит точки y. Так как, в силу предположения, $\dim Y \leqslant n$, то существует окрестность V точки y в Y такая, что

$$C \cap V = 0, \tag{1}$$

$$\dim Fr\, V \leqslant n-1. \tag{2}$$

Из (1) следует, что

$$f^{-1}(C) \cap f^{-1}(V) = 0,$$

и потому

$$f^{-1}(V) \subset U.$$

Множество $f^{-1}(V)$, содержащее $f^{-1}(y)$, является, как полный прообраз открытого множества V при непрерывном отображении, открытым множеством. Пусть B — граница этого множества. Легко видеть, что $f(B)$ содержится в границе множества V. Следовательно в силу (2), $\dim f(B) \leqslant n-1$. Применяя индуктивное предположение к отображению множества B на $f(B)$, заключаем, что $\dim B \leqslant m+n-1$; это показывает, что условия предложения 3 G) выполнены.

Пример VI 10. Возвратимся к вполне несвязному пространству Кнастера и Куратовского (см. пример II 16), которое становится связным после прибавления одной точки a. Пользуясь обозначениями примера II 16, рассмотрим непрерывное отображение f пространства $X \setminus a$ на $\mathcal{C}$, отображающее каждое $L^*(p)$ в точку p и каждое $L^*(q)$ в точку q. Мы имеем:

$$\dim (X \setminus a) = 1$$

(см. пример IV 3) и

$$\dim f(X \setminus a) = \dim \mathcal{C} = 0$$

(см. пример II 3), так что f понижает размерность на единицу. Тем не менее, полный прообраз каждой точки множества $\mathcal{C}$ нульмерен. Легко видеть, что отображение f открыто. Здесь нет противоречия с теоремой VI 17, ибо f не замкнуто.

Замечание. Существует двойственная в некотором отношении теореме VI 7 теорема о повышающих размерность отображениях: пусть f — замкнутое непрерывное отображение пространства X на пространство Y, и пусть

$$\dim Y - \dim X = k, \quad k > 0.$$

Тогда существует хотя бы одна точка пространства Y, полный прообраз которой содержит, по крайней мере, $k+1$ точку. Доказательство этой теоремы требует методов, совершенно отличных от тех, которыми мы пользуемся здесь[1]), и поэтому опускается.

5. Канторовы многообразия

Определение VI 6. n-мерный компакт, при $n \geqslant 1$, называется *n-мерным канторовым многообразием*[2]), если он не может быть разбит[3]) подмножеством размерности $\leqslant n-2$.

---

[1]) См. W. Hurewicz: Über dimensionserhöhende stetige Abbildungen, *Journ. f. Math.* 169 (1933), стр. 71—78.

[2]) К сожалению, употребление в этой связи слова «многообразие» прочно установилось в литературе. Канторовы многообразия не обязательно должны быть многообразиями в том обычном смысле слова что многообразие есть связное пространство, обладающее базисом, составленным из множеств, гомеоморфных пространству E_n.

[3]) См. определение IV 1.

Пример VI 11. Из следствий теоремы IV 4 вытекает, что I_n, а также S_n и — общёе — произвольное *замкнутое* n-мерное многообразие являются n-мерными канторовыми многообразиями.

A) Легко видеть, что канторово многообразие связно и что n-мерное канторово многообразие имеет размерность n в каждой своей точке.

B) Из IV 5 A) следует, что n-мерный компакт C является n-мерным канторовым многообразием в том и только в том случае, если невозможно разложение

$$C = C_1 \cup C_2,$$

где C_1 и C_2 — замкнутые подмножества C, а

$$\dim (C_1 \cap C_2) \leqslant n - 2.$$

Основной теоремой о канторовых многообразиях является следующая.

Теорема VI 8. *Любой n-мерный компакт X содержит n-мерное канторово многообразие.*

Сначала мы установим:

C) Пусть дан компакт X, замкнутое множество $C \subset X$ и отображение f множества C в S_n, когорое не может быть продолжено на X. Тогда в X существует замкнутое множество K такое, что (1) f не может быть продолжено на $C \cup K$, но (2) если K' — собственное замкнутое подмножество множества K, то f можно продолжить на $C \cup K'$.

Доказательство. Рассмотрим семейство $\{K_\lambda\}$ замкнутых множеств, таких, что (3) f не может быть продолжено на $C \cup K_\lambda$. $\{K_\lambda\}$ не пусто, так как оно содержит X. Если K^0 *является пересечением монотонно убывающей последовательности* $\{K_i\}, i = 1, 2, \ldots$ *замкнутых множеств, принадлежащих* $\{K_\lambda\}$, *то* K^0 *также принадлежит* $\{K_\lambda\}$. Действительно, допустим, что K^0 не принадлежит $\{K_\lambda\}$, т. е. что f можно продолжить на $C \cup K^0$. Тогда, по следствию 2 теоремы VI 3, существует открытое множество U, содержащее $C \cup K^0$, на которое f можно продолжить. Но, по крайней мере, одно из K_i, скажем K_{i_0}, содержится в U; в противном случае все K_i пересекались бы с дополнением T множества U, что невозможно, так как в этом случае из компактности T следовало бы, что само K^0 пересекается с T. Но из того, что $K_{i_0} \subset U$ вытекает, что f можно продолжить на $C \cup K_{i_0}$, а это противоречит свойству (3).

Мы видим, что семейство $\{K_\lambda\}$ удовлетворяет предположениям теоремы Брауэра [1]). Применяя эту теорему, получаем замкнутое множество K, неприводимое по отношению к свойству (3), т. е. замкнутое множество, удовлетворяющее условиям (1) и (2).

Доказательство теоремы VI 8. Так как $\dim X = n$, то, в силу теоремы VI 4, существует замкнутое подмножество C пространства X и отображение f множества C в S_{n-1}, которое не может быть продолжено на X. В силу C), в X существует замкнутое множество K, удовлетворяющее условиям (1) и (2). Мы утверждаем, что K есть n-мерное канторово многообразие. Ибо, в противном случае (см. B)),

$$K = C_1 \cup C_2,$$

где C_1 и C_2 — замкнутые подмножества K, и

$$\dim C_1 \cap C_2 \leqslant n - 2.$$

Из (2) следует, что f можно продолжить в отображения F_1 и F_2, определенные соответственно, на $C \cup C_1$ и $C \cup C_2$. В силу 3 C), F_1 можно продолжить на $C \cup K$ и, следовательно, f можно продолжить на $C \cup K$, в противоречии с условием (1).

Следствие. *Пусть X — n-мерный компакт, и A — его подмножество, состоящее из всех точек, в которых X имеет размерность n. Тогда* $\dim A = n$.

Доказательство. Пусть C — n-мерное канторово многообразие, содержащееся в X. Оно существует по теореме VI 8. Из предложения A) мы знаем, что $C \subset A$. Следовательно, $\dim A = n$. [2])

6. Инвариантность области в E_n.

Пусть X — подмножество произвольного пространства A. Допустим, что h есть гомеоморфизм, отображающий все A в A. Если x — внутренняя [3]) точка множества X, то $h(x)$ — внутренняя точка множества $h(X)$, и обратно. Предположим, однако, что гомеоморфизм h определен только на X.

---

[1]) См. Указатель.

[2]) Если X не компактно, то $\dim A$ может быть меньше, чем n. Однако можно доказать, что $\dim A$ всегда $\geqslant n - 1$ (см. Menger, Dimensionstheorie, Teubner, Leipzig, 1928, стр. 135).

[3]) См. Указатель.

Отнюдь неверно, что и в этом случае h переводит внутренние точки во внутренние и граничные точки в граничные.

Пример VI 12. Пусть A — подмножество пространства E_3, состоящее из плоскости (x_1, x_2) и оси x_3, X — подмножество множества A, состоящее из оси x_3, и h — гомеоморфизм, отображающий ось x_3 на ось x_1. Тогда точка (0, 0, 1) является внутренней точкой множества X, но ее образ не является внутренней точкой множества $h(X)$, так как в A нет никакого открытого множества, содержащего этот образ и содержащегося в $h(X)$.

Однако, если A — эвклидово пространство, то имеет место

Теорема VI 9. **Теорема Брауэра об инвариантности области.** *Пусть X — произвольное подмножество E_n, и h — гомеоморфизм множества X на другое подмножество пространства E_n. Тогда если x — внутренняя точка множества X, то $h(x)$ — внутренняя точка множества $h(X)$, и если x — граничная*[1] *точка множества X, то $h(x)$ — граничная точка множества $h(X)$. В частности, если A и B — гомеоморфные подмножества пространства E_n, и A открыто, то и B открыто.*

Доказательство. Мы докажем теорему VI 9, охарактеризовав внутренние точки множества X, или, что то же самое, граничные точки множества X, внутренними топологическими свойствами множества X, т. е. топологическими свойствами, независящими от пространства, в котором множество X расположено.

A) Пусть X — произвольное подмножество пространства E_n, и $x \in X$. Тогда x является граничной точкой множества X, $x \in \overline{(E_n \setminus X)} \cap X$, в том и только в том случае, если x обладает произвольно малыми окрестностями U в[2] X, обладающими тем свойством, что любое непрерывное отображение множества $X \setminus U$ в S_{n-1} можно продолжить на X (относительно S_{n-1}).

Доказательство. *Условие необходимо.* Пусть x — граничная точка множества X, $S(x)$ — сферическая окрестность точки x в E_n, и $U = X \cap S(x)$. Мы покажем, что U обладает нужным свойством. Пусть B обозначает $(n-1)$-мерную сферу, являющуюся границей окрестности $S(x)$. По следствию теоремы VI 4, любое непрерывное отображение f множества

[1] См Указатель.

[2] Т. е. подмножествами множества X, открытыми в X и содержащими x.

$X \setminus U$ в S_{n-1} можно продолжить в непрерывное отображение f', определенное на $(X \setminus U) \cup B$. Пусть q — точка $S(x)$, не принадлежащая X. Для каждой точки $x \in X$ обозначим через x' проекцию точки x из q на B. Теперь положим:

$$F(x) = f'(x') \quad \text{для} \quad x \in U,$$

$$F(x) = f(x) \quad \text{для} \quad x \in X \setminus U.$$

$F(x)$ является искомым продолжением.

Условие достаточно. Действительно, пусть x — внутренняя точка множества X. Пусть $S(x)$ — сферическая окрестность точки x, замыкание которой содержится в X. Мы покажем, что какова бы ни была окрестность U точки x, содержащаяся в $S(x)$, существует непрерывное отображение множества $X \setminus U$ в S_{n-1}, которое не может быть продолжено на X. Отождествим S_{n-1} с границей окрестности $S(x)$ и в качестве отображения f возьмем проекцию множества $X \setminus U$ из точки x на S_{n-1}. Тогда f не может быть продолжено на X, потому что такое продолжение отображало бы замыкание множества $S(x)$ на его границу, оставляя точки границы неподвижными, а это противоречит предложению IV 1 В). Таким образом, доказательство предложения А), а следовательно, и теоремы Брауэра об инвариантности области, закончены.

Следствие. *Теорема* VI 9 *останется справедливой, если E_n заменить произвольным многообразием.*

Доказательство. Следствие вытекает из того, что каждая точка множества X имеет в n-мерном многообразии окрестность, гомеоморфную E_n.

Замечание. Теорема VI 9 содержит в себе классическую теорему об «Инвариантности размерности эвклидовых пространств» (уже доказанную, в силу III 1 А) и теоремы IV 1): E_n и E_m не гомеоморфны при $n \neq m$. В самом деле, пусть $n > m$. Рассмотрим E_m как подпространство пространства E_n. Множество E_m не открыто в E_n в то время, как E_n, конечно, открыто в E_n. Следовательно, в силу инвариантности области, не существует никакого гомеоморфизма E_m на E_n.

7. Разбивающие множества в E_n

Начиная с этого момента мы предположим, что $n \geqslant 2$, и приступим к изложению теорем о разбиении пространства E_n.

Мы будем пользоваться следующими обозначениями. Пусть S_{n-1} — $(n-1)$-мерная сфера в E_n радиуса 1 с центром в начале координат 0. Для каждой точки $p \in E_n$ мы обозначаем через π_p отображение множества $E_p \setminus p$ в S_{n-1}, определенное следующим образом: $\pi_p(x)$, $x \in E_p \setminus p$, есть проекция точки $x-p$ (в векторных обозначениях) из точки 0 на S_{n-1}.

А) Пусть U — ограниченное открытое множество в E_n, p — точка множества U, и C — граница множества U. Тогда частичное отображение $\pi_p|C$ нельзя продолжить на $U \cup C = \overline{U}$.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно предположить, что p — начало координат. Пусть r так велико, что $U \cup C$ содержится в шаре $S(0, r)$ радиуса r с центром в 0. Допустим, что $\pi_0|C$ можно продолжить на $U \cup C$, скажем, в отображение φ. Тогда формулы

$$\psi(x) = \varphi(x) \quad \text{для} \quad rx \in U,$$

$$\psi(x) = \pi_0(x) \quad \text{для} \quad rx \in S(0, r) \setminus U$$

определяют непрерывное отображение ψ шара $S(0,1)$ на его границу S_{n-1}. Кроме того, для каждого $x \in S_{n-1}$ мы имеем: $\psi(x) = \pi_0(x) = x$, в противоречии с IV 1 B).

Теорема VI 10. *Пусть C—компактное (т. е. ограниченное замкнутое) множество в E_n. Две точки p, q, ни одна из которых не принадлежит C, отделены множеством C в том и только в том случае, если отображения $\pi_p|C$ и $\pi_q|C$ принадлежат к различным гомотопическим классам.*

Доказательство. Предположив сначала, что p и q отделены множеством C, мы докажем, что $\pi_p|C$ и $\pi_q|C$ не гомотопны. Нам дано, что

$$E_n \setminus C = U \cup V,$$

где U, V — непересекающиеся множества, открытые в $E_n \setminus C$ и, следовательно, в E_n, а $p \in U$, $q \in V$.

Одно из множеств U, V ограничено [1]). Действительно, пусть I_n—n-мерный куб, настолько большой, что $C \subset I_n$. Тогда, так как $E_n \setminus I_n \subset E_n \setminus C$ и $E_n \setminus I_n$ связно, то оно должно содержаться или в U, или в V. Предположим, например, что $E_n \setminus I_n \subset V$. Тогда $U \subset I_n$, т. е. U ограничено.

Теперь, $\pi_q|C$ можно продолжить на $U \cup C$ (в действительности на $E_n \setminus q \supset U \cup C$). С другой стороны, так как $FrU \subset C$,

[1]) Легко видеть, что это утверждение неверно для $n = 1$.

то, в силу предложения A), $\pi_q|C$ невозможно продолжить на $U \cup C$. Следовательно, $\pi_p|C$ и $\pi_q|C$ не гомотопны, так как их гомотопность противоречила бы теореме Борсука (стр. 120).

Предположим теперь, что p и q не отделены множеством C. Тогда, по хорошо известному свойству эвклидовых пространств, p и q можно соединить в $E_n \setminus C$ непрерывной дугой, т. е. можно найти непрерывную функцию $f(t)$ действительного параметра t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, принимающую значения из $E_n \setminus C$, такую, что

$$f(0) = p, \quad f(1) = q.$$

Функция

$$\pi_{f(t)}(x), \quad x \in C$$

является тогда непрерывной функцией по (x, t), показывающей, что $\pi_p|C$ и $\pi_q|C$ гомотопны.

С л е д с т в и е. *Если точки p и q отделены в E_n множеством $C_1 \cup C_2$, где C_1 и C_2 — компакты, пересечение которых имеет размерность $\leqslant n - 3$, то или C_1, или C_2 отделяет p от q.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В противном случае $\pi_p|C_1$ было бы гомотопно $\pi_q|C_1$, а $\pi_p|C_2$ было бы гомотопно $\pi_q|C_2$. Следовательно по 3 D), отображения $\pi_p|C_1 \cup C_2$ и $\pi_q|C_1 \cup C_2$ были бы гомотопны, так что, в силу теоремы VI 10, $C_1 \cup C_2$ не отделяло бы p от q.

Т е о р е м а VI 11. *Пусть C — компактное подмножество пространства E_n, отделяющее p от q, в то время как никакое собственное замкнутое подмножество множества C не отделяет p от q («неприводимое» отделяющее множество). Тогда C есть $(n-1)$-мерное канторово многообразие.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим сначала, что C не содержит никакого непустого открытого подмножества. Потому что в противном случае граница множества C была бы его собственным замкнутым подмножеством, отделяющим p от q.

Следовательно, по теореме IV 3, $\dim C \leqslant n - 1$. Кроме того, по следствию теоремы VI 10, если

$$C = C_1 \cup C_2,$$

где каждое из C_1 и C_2 является собственным замкнутым подмножеством множества C, то

$$\dim C_1 \cap C_2 \geqslant n-2.$$

Это показывает (5 В)), что C есть $(n-1)$-мерное канторово многообразие.

Замечание. Теорему VI 11 можно также сформулировать следующим образом: *Если компактное множество C пространства E_n является общей границей двух непересекающихся открытых связных подмножеств A_1 и A_2, то C есть $(n-1)$-мерное канторово многообразие.* Действительно, пусть p_1 и p_2 суть, соответственно, точки множеств A_1 и A_2. Очевидно, что p_1 и p_2 отделены множеством C. Однако они не отделены никаким его собственным замкнутым подмножеством C'. Действительно, пусть $q \in C \setminus C'$; обозначим через U сферическую окрестность точки q, такую, что $U \in E_n \setminus C'$. Тогда U содержит точки как множества A_1, так и множества A_2, и, следовательно, $A_1 \cup U \cup A_2$ является связным подмножеством множества $E_n \setminus C'$, содержащим p_1 и p_2; таким образом, p_1 и p_2 не отделены множеством C'.

Теорема VI 12. *Пусть X — компактное (замкнутое ограниченное) подмножество пространства E_n, и C — замкнутое подмножество множества X. Для того чтобы существовало непрерывное отображение f множества C в S_{n-1}, которое не может быть продолжено на X, необходимо и достаточно, чтобы существовало непустое открытое подмножество пространства E_n, содержащееся в $X \setminus C$, в то время как его граница содержится в C.*

Замечание. Мы предпошлем замечание для читателей, знакомых с теорией гомологий. Существует очень тесная связь между свойствами продолжения непрерывных отображений, с одной стороны, и гомологическими свойствами множеств — с другой. Эта связь выражается следующим образом (следствие 3 теоремы VIII 1'): *пусть дан компакт X размерности $\leqslant n$ и его замкнутое подмножество C. Каждое непрерывное отображение f множества C в S_{n-1} может быть продолжено на X в том и только в том случае, если каждый $(n-1)$-мерный цикл* mod 1 *в C ограничивает в C всякий раз, когда он ограничивает в X.* Если X — эвклидов n-мерный куб, то каждый $(n-1)$-мерный цикл в C ограничивает в X; в этом случае предыдущая теорема сводится, следовательно, к более простой форме: для того, чтобы каждое непрерывное отображение f множества C в S_{n-1} можно было продолжить на I_n, необходимо и достаточно, чтобы каждый $(n-1)$-мерный цикл в C ограничивал в C. Сопоставляя это с теоремой VI 12, заключаем, что в I_n существует полная эквивалентность между границами в теоретико-множественном смысле и границами в комбинаторном смысле теории гомологий, т. е. если замкнутое подмножество куба I_n является границей в теоретико-множественном смысле, то оно несет на себе существенный $(n-1)$-мерный цикл, ограничивающий в комбинаторном смысле, и обратно. Это в точности — более глубокий смысл теоремы VI 12.

Доказательство теоремы VI 12. *Необходимость.* Пусть f — отображение множества C в S_{n-1}, которое не может быть продолжено на X. Тогда по 5 C) существует замкнутое подмножество $K \subset X$, обладающее следующими свойствами:

$$f \text{ не может быть продолжено на } C \cup K, \text{ но} \tag{1}$$

если K' — произвольное собственное замкнутое подмножество множества K, то f может быть продолжено на $C \cup K'$. (2)

Мы утверждаем теперь, что

$$K \setminus C \neq 0, \tag{a}$$

$$K \setminus C \subset X \setminus C, \tag{b}$$

$$K \setminus C \text{ открыто}, \tag{c}$$

$$Fr(K \setminus C) \subset C. \tag{d}$$

Утверждение a) следует из свойства (1), а b) очевидно. Чтобы доказать c), мы рассмотрим произвольную точку s в $K \setminus C$ и покажем, что s является внутренней точкой множества $K \setminus C$. В силу предложения 6 A), достаточно показать, что для каждой окрестности U точки s в E_n такой, что $\overline{U} \cap C = 0$, можно определить непрерывное отображение множества $K \setminus C \setminus U$ в S_{n-1}, которое не может быть продолжено на $K \setminus C$. В качестве такого отображения возьмем произвольное продолжение F отображения f на $(C \cup K) \setminus U = C \cup (K \setminus U)$; F существует в силу свойства (2), так как $K \setminus U \neq K$. $F \mid K \setminus C \setminus U$ не может быть продолжено на $K \setminus C$ по той причине, что такое продолжение давало бы продолжение самого f на $C \cup K$, в противоречии со свойством (1). После того как c) установлено, d) следует немедленно. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть U — непустое открытое множество, содержащееся в $X \setminus C$, граница B которого содержится в C,

U ограничено как подмножество компактного множества X. Пусть $p \in U$. Тогда $\pi_p | B$ не может быть продолжено на $U \cup B$ (предложение 7 A)); так как $B \subset C$ и $U \cup B \subset X$, то тем более верно, что $\pi_q | C$ не может быть продолжено на X.

Теорема VI 13. *Компактное подмножество C пространства E_n разбивает E_n в том и только в том случае, если имеется существенное отображение множества C в S_{n-1}.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть C разбивает E_n. Тогда, конечно, существуют две точки p и q, отделенные друг от друга множеством C. По теореме VI 10 отображения $\pi_p | C$ и $\pi_q | C$ множества C в S_{n-1} принадлежат различным гомотопическим классам. Следовательно, по крайней мере, одно из них существенно.

Достаточность. Пусть f — существенное отображение множества C в S_{n-1}. Пусть I_n — n-мерный куб, настолько большой, что $C \subset I_n$. Продолжить f на I_n невозможно, так как иначе f было бы несущественным (пример VI 7). Следовательно, заменяя в теореме VI 12 пространство X кубом I_n, получаем, что существует непустое открытое в E_n подмножество $U \subset I_n \setminus C$, граница которого содержится в C. Ясно, что U является непустым собственным подмножеством множества $E_n \setminus C$, одновременно открытым и замкнутым в $E_n \setminus C$. Следовательно, C разбивает E_n.

Следствие 1. *Если компакт C разбивает E_n, то каждое подмножество пространства E_n, гомеоморфное C, также разбивает E_n.*

Доказательство. Следствие вытекает из того, что теорема VI 13 характеризует компактные множества, разбивающие E_n, их внутренними свойствами.

Следствие 2. **Теорема Жордана.** *Подмножество пространства E_n, гомеоморфное S_{n-1}, разбивает E_n.*

Доказательство. Это — очевидное приложение следствия 1.

Следствие 3. *Теорема* VI 13 *и следствия 1 и 2 сохраняются, если пространство E_n заменить сферой S_n.*

Доказательство. Легко видеть, что если C разбивает S_n, то оно разбивает $S_n \setminus p$ для любой точки $p \notin C$, и наоборот: но $S_n \setminus p$ гомеоморфно E_n.

Можно дать чрезвычайно изящную формулировку теоремы VI 13, если воспользоваться понятием пространства отображений.

Теорема VI 14. *Если C — компактное подмножество пространства E_n, то $E_n \setminus C$ связно в том и только в том случае, если связно пространство отображений S_{n-1}^C.*

Доказательство. Достаточно заметить, что компоненты пространства S_{n-1}^C совпадают с гомотопическими классами отображений множества C в S_{n-1}, так как, с одной стороны, каждый гомотопический класс связен, так как, по самому его определению, любые два элемента в нем можно даже соединить простой дугой, а, с другой стороны, каждый гомотопический класс одновременно открыт (это следует из примера VI 8) и замкнут.

Глава VII

РАЗМЕРНОСТЬ И МЕРА

Эта глава посвящена выяснению недавно установленной[1]) Шпильрайном связи между понятием размерности и понятием меры.

p-мерная мера для каждого неотрицательного действительного числа p была определена Хаусдорфом для произвольных метрических пространств. Эта мера тесно связана с обычной мерой Лебега. Она является метрическим понятием в то время, как размерность является понятием чисто *топологическим*. Тем не менее между этими двумя понятиями существует тесная связь, так как оказывается (теорема VII 2), что пространство размерности n должно иметь положительную n-мерную меру. Обратное, однако, неверно (см. пример VII 1). Но если рассмотреть не только само метрическое пространство X, но X вместе со всеми метриками, которые можно в нем ввести, или, что то же, класс всех метрических пространств, гомеоморфных X, тогда, если все эти пространства имеют положительную n-мерную меру, то само X должно иметь размерность $\geqslant n$. Основным результатом (доказанным теоремами VII 2 и VII 4) является:

Теорема VII 1. *Для того чтобы пространство X имело размерность $\leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы X было гомеоморфно подмножеству куба I_{2n+1}, $(n+1)$-мерная мера которого равна нулю.*

Пример VII 1. И множество $\mathcal{J}$ иррациональных точек единичного отрезка, и канторово множество $\mathcal{C}$ имеют размерность нуль, хотя $\mathcal{J}$ имеет (линейную) меру единицы, а $\mathcal{C}$ — меру

---

[1]) Szpilrajn, La dimension et la mesure, *Fund. Math.*, 28 (1937), стр. 81—89. Доказательство теоремы VII 5 принадлежит С. Эйленбергу.

нуль. Но так как[1]) $\mathcal{J}$ топологически содержится в $\mathcal{C}$, существует топологический образ $\mathcal{J}$, мера которого равна нулю.

1. p-мерная мера в общих метрических пространствах

Определение VII 1.[2]) Пусть X — пространство, и p — произвольное действительное число, $0 \leqslant p < \infty$. Для данного $\varepsilon > 0$ пусть[3])

$$m_p^\varepsilon = \inf \sum_{i=1}^{\infty} [\delta(A_i)]^p,$$

где $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ — произвольное разложение пространства X на счетное число подмножеств диаметра, меньшего, чем ε, и p — показатель степени.

Положим

$$m_p(X) = \sup_{\varepsilon > 0} m_p^\varepsilon(X);$$

$m_p(X)$ называется p-мерной мерой пространства X.

Проверка следующих трех предложений предоставляется читателю.

A) Из сноски[3]) следует, что
$m_0(X) = 0$, если X пусто,
$m_0(X) = n$, если X — конечное множество из n точек;
$m_0(X) = \infty$, если X — бесконечное множество.

B) Если $p < q$, то $m_p(X) \geqslant m_q(X)$; в действительности, из $p < q$ и $m_p(X) < \infty$ следует, что $m_q(X) = 0$.

C) n-мерный полиэдр имеет конечную n-мерную меру. Следовательно, его q-мерная мера равна нулю для всех $q > n$.

D) Для того чтобы компакт C имел p-мерную меру, равную нулю, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$

---

[1]) Каждый элемент множества G имеет однозначное представление в виде суммы $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ (двоичных дробей). Легко видеть, что $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2a_n)}{3^n}$ есть гомеоморфное отображение множества $\mathcal{C}$ в множество $\mathcal{C}$.

[2]) Hausdorff, Dimension und äusseres Mass, *Math. Ann.* 79 (1919), стр. 157—179, в частности стр. 163.

[3]) $\delta(A)$, где A — произвольное подмножество X, обозначает диаметр множества A; см. Указатель. Мы условимся считать, что $[\delta(E)]^0 = 0$, если E — пусто и $[\delta(E)]^0 = 1$ в противном случае.

существовало *конечное* разложение компакта C:

$$C = A_1 \cup \ldots \cup A_k,$$

такое, что

$$[\delta(A_1)]^p + \ldots + [\delta(A_k)]^p < \varepsilon. \tag{1}$$

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Приступим к доказательству необходимости. Допустим, что $m_p(C) = 0$. По определению VII 1 существует счетное число подмножеств $A'_1, A'_2, \ldots$ таких, что

$$C = A'_1 \cup A'_2 \cup \ldots$$

и

$$\sum_{i=1}^{\infty} [\delta(A'_i)]^p < \frac{1}{2}\varepsilon. \tag{2}$$

Каждое A'_i можно слегка увеличить до открытого множества A_i так, чтобы

$$[\delta(A_i)]^p < [\delta(A'_i)]^p + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}. \tag{3}$$

Так как C — компакт, то конечное число $A_1, \ldots, A_k$ множеств A_i покрывает C. Формула (1) следует тогда из формул (2) и (3).

E) Для подмножеств прямой одномерная мера совпадает с внешней мерой Лебега. Однако n-мерная мера подмножества пространства E_n может количественно отличаться от его внешней меры Лебега. Тем не менее равенство нулю n-мерной меры подмножества пространства E_n эквивалентно равенству нулю его внешней меры Лебега.

2. n-мерное пространство имеет положительную n-мерную меру

Теорема VII 2. *Пусть X — пространство размерности n, $0 \leqslant n < \infty$. Тогда $m_n(X) > 0$.*

Эта теорема, очевидно, эквивалентна (при замене n на $n+1$) следующей теореме:

Теорема VII 3. *Пусть X — пространство такое, что $m_{n+1}(X) = 0$ $(0 \leqslant n < \infty)$. Тогда* $\dim X \leqslant n$.

Доказательство теоремы VII 3. Пусть x_0 — произвольная точка пространства X. Для каждого $r > 0$ обозначим через $S'(r)$ границу сферической окрестности точки x радиуса r и через $S(r)$ — множество всех точек $x \in X$, для которых $\rho(x, x_0) = r$. Очевидно, $S'(r) \subset S(r)$. Выражение «для почти всех r» будет означать: для всех r, исключая множество лебеговой меры нуль. Тогда, если принять во внимание, что множество нульмерной меры нуль пусто (1 А)), то теорема VII 3 легко получится по индукции[1]), как только будет доказано следующее предложение:

А) Если X — пространство такое, что $m_{p+1}(X) = 0$, $0 \leqslant p < \infty$, то для почти всех r множество $S(r)$ имеет p-мерную меру нуль.

Доказательство предложения А). Так как $m_{p+1}(X) = 0$, то существует последовательность разложений пространства X:

$$X = A_1^n \cup A_2^n \cup \ldots,$$

такая, что

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} [\delta(A_i^n)]^{p+1} = 0. \tag{1}$$

Обозначим через $r_i^{(n)}$ и $R_i^{(n)}$ соответственно нижнюю и верхнюю границы чисел $\rho(x, x_0)$ для $x \in A_i^n$. Очевидно, что

$$R_i^{(n)} - r_i^{(n)} \leqslant \delta(A_i^n). \tag{2}$$

Положим

$$d_i^{(n)}(r) = \begin{cases} 0 \text{ для } 0 < r < r_i^{(n)} \text{ и } R_i^{(n)} < r, \\ [\delta(A_i^n)]^p \text{ для } r_i^{(n)} \leqslant r \leqslant R_i^{(n)}, \end{cases}$$

$$d^{(n)}(r) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i^{(n)}(r).$$

Из определения $d_i^{(n)}(r)$ и соотношения (2) вытекает:

$$\int_0^{\infty} d_i^{(n)}(r)\, dr \leqslant [\delta(A_i^n)]^{p+1}.$$

[1]) Фактически предложение А) сильнее, чем теорема VII 3, так как из А), очевидно, следует, что если $m_{p+1}(X) = 0$, то каждая точка $x \in X$ не только имеет произвольно малые окрестности с границей размерности $\leq n-1$, но *почти все* сферические окрестности точки x имеют границы размерности $\leq n-1$.

Каждая функция $d_i^{(n)}(r)$ неотрицательна, поэтому

$$\int_0^\infty d^{(n)}(r)\,dr = \sum_{i=1}^\infty \int_0^\infty d_i^{(n)}(r)\,dr \leqslant \sum_{i=1}^\infty [\delta(A_i^n)]^{p+1}.$$

Таким образом, в силу (1), последовательность функций $d^{(n)}(r)$ сходится в среднем к нулю. Следовательно [1]), существует подпоследовательность $d^{(n_k)}(r)$, сходящаяся к нулю для почти всех r.

Но мы имеем:

$$[\delta(A_i^n \cap S(r)]^p \leqslant d_i^{(n)}(r).$$

Поэтому для почти всех r

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^\infty [\delta(A_i^{n_k} \cap S(r))]^p = 0.$$

Следовательно,

$$m_p(S(r)) = 0 \quad \text{для почти всех } r,$$

и предложение A), а значит, и теорема VII 3 доказаны.

3. n-мерное пространство гомеоморфно пространству $(n+1)$-мерной меры нуль

Теорема VII 4. *Если пространство имеет размерность $\leqslant n$, то оно гомеоморфно подмножеству куба I_{2n+1} $(n+1)$-мерной меры нуль.*

Теорема VII 4 содержится в следующей теореме:

Теорема VII 5. *Если $\dim X \leqslant n$, то существует гомеоморфное отображение пространства X в куб I_{2n+1} такое, что для любого действительного числа $r > n$*

$$m_r(h(X)) = 0. \tag{1}$$

Более того, пространство I_{2n+1}^X содержит плотное G_δ множество гомеоморфных отображений, удовлетворяющих условию (1).

---

1) E. C. Tichmarsh, The Theory of Functions, Oxford, 1932, параграф 12.5, в частности, стр. 388.

Доказательство теоремы VII 5. Пусть $q > n$. Рассмотрим множество K_q всех отображений $f \in I_{2n+1}^X$ (см. главу V) таких, что

$$m_q(\overline{f(X)}) = 0. \tag{1}$$

$\overline{f(X)}$ компактно, как замкнутое подмножество куба I_{2n+1}. Следовательно (1 D)), так как $f \in K_q$, для каждого целого числа $i = 1, 2, \ldots$ существует конечное разложение, обозначаемое через (d):

$$X = A_1 \cup \ldots \cup A_k,$$

для которого

$$[\delta(f(A_1))]^q + \ldots + [\delta(f(A_k))]^q < \frac{1}{i}. \tag{2}$$

Это можно записать в виде соотношения:

$$K_q = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{(d)} G_{i,q}^{(d)},$$

где сложение производится по всем конечным разложениям (d), а $G_{i,q}^{(d)}$ обозначает множество всех отображений f, удовлетворяющих условию (2). Но $G_{i,q}^{(d)}$, очевидно, открыто; следовательно,

$$K_q \text{ есть } G_\delta \text{ в } I_{2n+1}^X.$$

Пусть K^* — множество всех $f \in I_{2n+1}^X$ таких, что $\overline{f(X)}$ содержится в n-мерном полиэдре. K^* плотно в I_{2n+1}^X, в силу замечания 1 на стр. 86; и так как $q > n$, то мы имеем (1, C)) $K^* \subset K_q$.

Отсюда

$$K_q \text{ есть плотное } G_\delta \text{ в } I_{2n+1}^X.$$

Пусть H — плотное в I_{2n+1}^X множество типа G_δ всех гомеоморфных отображений пространства X в I_{2n+1}, существующее в силу теоремы V 3. Пусть

$$H^* = H \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} K_{n+\frac{1}{i}}. \tag{3}$$

Тогда H^*, по теореме Бэра, является плотным G_δ в пространстве I_{2n+1}^X и, следовательно, не пусто. Кроме того, если $h \in H^*$, то

a) h является гомеоморфным отображением пространства X в I_{2n+1},

b) $m_r(\overline{h(X)}) = 0$ для каждого $r > n$, и теорема доказана.

Замечание 1. Теоремы VII 5 и VII 3 снова доказывают, что пространство можно включить в компакт той же размерности (теорема V 6).

Замечание 2. Из теоремы VII 4 и предложения 2 A) получаем такое следствие: пусть X — пространство размерности $\leqslant n$; тогда X можно переметризовать таким образом, чтобы пространство X в новой метрике обладало тем свойством, что каждая его точка x не только имеет произвольно малые окрестности с границами размерности $\leqslant n-1$, но *почти все сферические* окрестности точки x имеют границы размерности $\leqslant n-1$.

4. Хаусдорфова размерность

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Назовем хаусдорфовой размерностью[1]) пространства X верхнюю грань множества всех действительных чисел p, для которых $m_p(X) > 0$. Из теоремы VII 2 следует, что хаусдорфова размерность про. странства X не меньше $\dim X$. Хаусдорфова размерность пространства не обязательно является целым числом. Так, хаусдорфова размерность канторова множества равна[2]) $\frac{\lg 2}{\lg 3} = 0,63093$. Но из теоремы VII 5 вытекает, что если рассматривать всевозможные пространства, гомеоморфные данному пространству X, то нижняя грань хаусдорфовой размерности этих пространств равна размерности пространства X.

---

[1]) Hausdorff, Dimension und äusseres Mass„ *Math. Ann.* 79 (1919), стр. 166.

[2]) Hausdorff, Dimension und äusseres Mass, *Math. Ann.* 79 (1919), стр. 172.

Глава VIII

ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ И РАЗМЕРНОСТЬ

В начальных главах этой книги преобладали теоретико-множественные методы. Комбинаторные методы впервые появились в главе IV (в доказательстве того, что n-мерное эвклидово пространство имеет размерность n) и более полно проявились в главе V, где доказательство теоремы о включении было получено синтезом теоретико-множественных и комбинаторных методов. Причем теоретико-множественные методы нашли свое применение при рассмотрении пространства отображений, а комбинаторные—при использовании некоторых свойств комплексов. В этой главе мы исследуем теорию размерности с чисто алгебраической, комбинаторной точки зрения. Звеном, соединяющим эти новые методы с нашим предыдущим рассмотрением, является теорема VI 4 об отображениях в сферы. Главной целью этой главы является охарактеризование размерности алгебраическими свойствами (теорема VIII 3).

Большая часть главы посвящена сжатому изложению алгебраической теории связности[1]). Хотя это изложение непосредственно не связано с основным содержанием книги, авторам казалось желательным его включить, ввиду того, что за последнее время вид теории гомологий быстро изменился. Если бы авторы хотели ограничиться только теорией ∇-гомологий, опустив рассмотрение соотношений двойственности между Δ- и ∇-группами, то объем этого изложения весьма существенно сократился бы.

---

[1]) В этой главе предполагается некоторое знакомство с комбинаторной топологией и теорией групп, хотя логически глава совершенно самостоятельна и все основные определения подробно даны Мы рекомендуем главы 2 и 3 книги: Seifert Threlfall — Lehrbuch der Topologie, Leipzig, 1934 (русский перевод: Зейферт Трельфалль — Топология, Москва—Ленинград, 1938) как превосходное введение в комбинаторную топологию. Книга Л. С. Понтрягина—Непрерывные группы, Москва—Ленинград (1938), в частности, главы 1, 3, 5, содержат полное изложение необходимых сведений из теории групп.

Во всей главе слово «группа» означает коммутативную группу с групповой операцией записываемой как сложение. Наиболее часто употребляются две группы: группа целых чисел и группа действительных чисел, приведенных по модулю 1. Мы обозначаем их соответственно через $\mathfrak{J}$ и Π. Группа Π, конечно, изоморфна группе вращений окружности и мультипликативной группе комплексных чисел, по модулю равных 1.

1. Комбинаторная теория связности комплекса

Определение VIII 1. Пусть K — (конечный) комплекс (см. стр. 98), и n — целое положительное число. Под *ориентированным* n-мерным симплексом s^n комплекса K мы понимаем n-мерный симплекс комлекса K, вершины которого записаны в некотором определенном порядке:

$$s^n = (p_0, \ldots, p_n).$$

Ориентированные симплексы, имеющие одни и те же вершины, упорядоченные различными способами, рассматриваются как *равные*, если они могут быть получены один из другого с помощью четной перестановки вершин. Следовательно, каждому неориентированному n-мерному симплексу соответствуют два различных ориентированных симплекса; если один из них обозначен символом s или $+s$, то другой (полученный из s нечетной перестановкой его вершин) будет обозначаться через $-s$. Например

$$(p_0, p_1, p_2) = (p_1, p_2, p_0) = (p_2, p_0, p_1) = -(p_0, p_2, p_1) = \\ = -(p_2, p_1, p_0) = -(p_1, p_0, p_2).$$

Представляется удобным распространить определения ориентированных n-мерных симплексов на случай $n = 0$ и $n = -1$; причем делается это следующим образом: каждому неориентированному нульмерному симплексу комплекса K, т. е. каждой вершине p комплекса K, мы ставим в соответствие два символа: $+p$ и $-p$, и называем их *ориентированными* нульмерными симплексами, принадлежащими p. Далее, условимся называть пустое множество вершин комплекса K неориентированным (-1)-мерным симплексом комплекса K[1]) и ставить ему в соответствие

[1]) Пустое множество вершин является единственным (-1)-мерным симплексом комплекса K

два символа: $+\Lambda$ и $-\Lambda$, как ориентированные (-1)-мерные симплексы комплекса K. Конечно, мы полагаем

$$-(+p)=-p,\quad -(-p)=+p,$$
$$-(+\Lambda)=-\Lambda,\quad -(-\Lambda)=+\Lambda.$$

Ориентированный n-мерный симплекс $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$, $n \geqslant 1$, называется *ориентированной гранью ориентированного* $(n+1)$-*мерного симплекса* s^{n+1}, если

$$s^{n+1}=(p_{n+1}, p_0, \ldots, p_n).$$

Для $n \geqslant 2$ любой ориентированный n-мерный симплекс имеет $n+1$ ориентированные грани. Так, ориентированный двумерный симплекс (p_0, p_1, p_2) имеет три ориентированные грани: $(p_1, p_2)=-(p_2, p_1)$, $(p_2, p_0)=-(p_0, p_2)$, $(p_0, p_1)=-(p_1, p_0)$. *Ориентированные грани одномерного симплекса* (p_0, p_1) определяются как два ориентированных нульмерных симплекса: p_1 и $-p_0$. Условимся, кроме того, считать $+\Lambda$ *единственной ориентированной гранью нульмерного симплекса* типа $+p$ и $-\Lambda$ *единственной ориентированной гранью нульмерного симплекса* типа $-p$.

В дальнейшем символ s^n будет употребляться для обозначения произвольного ориентированного n-мерного симплекса комплекса K, причем нижние индексы отличают отдельные симплексы. Мы пишем $s^n \prec s^{n+1}$ или $s^{n+1} \succ s^n$; если симплекс s^n является гранью симплекса s^{n+1} и $s^n \prec s^{n+2}$ или $s^{n+2} \succ s^n$, если существует s^{n+1} такой, что $s^n \prec s^{n+1} \prec s^{n+2}$. Легко проверяются следующие простые факты.

A) Соотношение $s^n \prec s^{n+1}$ влечет за собой соотношение $-s^n \prec -s^{n+1}$, но исключает соотношения $s^n \prec -s^{n+1}$ и $-s^n \prec s^{n+1}$. Соотношения:

$$s^n \prec s^{n+2},\quad s^n \prec -s^{n+2},\quad -s^n \prec s^{n+2},\quad -s^n \prec -s^{n+2}$$

эквивалентны и утверждают, что все вершины симплекса s^n являются вершинами симплекса s^{n+2}, т. е. что неориентированный симплекс s^n является гранью неориентированного симплекса s^{n+2}. Если $s^n \prec s^{n+2}$, то существует только один ориентированный симплекс s^{n+1} такой, что $s^n \prec s^{n+1} \prec s^{n+2}$.

Цепи, Δ-циклы, ∇-циклы.

Определение VIII 2. Пусть G—абелева группа в аддитивной записи. Пусть K—комплекс, и n—целое число. Под *n-мерной* *цепью комплекса K по области коэффициентов* G мы понимаем функцию φ, ставящую каждому ориентированному n-мерному симплексу комплекса K в соответствие некоторый элемент группы G и удовлетворяющую условию:

$$\varphi(-s^n) = -\varphi(s^n).$$

Нулевая n-мерная цепь есть функция, ставящая каждому ориентированному n-мерному симплексу комплекса K в соответствие нуль группы G. Для каждого $n > \dim K$ существует одна и только одна n-мерная цепь комплекса K, именно — нулевая n-мерная цепь.

Замечание. (-1)-мерная цепь по области коэффициентов G может быть отождествлена с элементом $\varphi(+\Delta)$ группы G. Нульмерная цепь—это в сущности функция вершин p, принимающая значения из G. При $n \geqslant 1$ n-мерную цепь можно рассматривать как кососимметрическую функцию $(n+1)$ вершин, принимающую значения из G (эта функция определена только на тех множествах, состоящих из $(n+1)$ вершин, которым соответствует некоторый n-мерный симплекс комплекса K). Если G — группа целых чисел, приведенных по модулю 2, то n-мерную цепь по области коэффициентов G можно рассматривать как некоторую совокупность неориентированных n-мерных симплексов (именно, совокупность симплексов, удовлетворяющих соотношению $\varphi(s^n) = \varphi(-s^n) \neq 0$).

Определение VIII 3. Под суммой $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ двух n-мерных цепей φ_1 и φ_2 комплекса K по области коэффициентов G мы понимаем n-мерную цепь φ, определенную соотношением:

$$\varphi(s^n) = \varphi_1(s^n) + \varphi_2(s^n).$$

При таком определении сложения n-мерные цепи комплекса K образуют абелеву группу, называемую *группой n-мерных цепей комплекса K* и обозначаемую через $L^n(K, G)$ или, если никакие недоразумения невозможны, через $L^n(K)$ или даже L^n. Нулем этой группы является, конечно, нулевая n-мерная цепь.

Если $n > \dim K$, то $L^n(K, G)$ сводится к единственному элементу 0. Если даны симплекс $s_0^n \in K$ и элемент $g_0 \in G$, то символом $g_0 s_0^n$ мы обозначаем n-мерную цепь φ, определенную следующим образом:

$$\begin{aligned} &\varphi(s^n) = g_0, && \text{если } s^n = s^n_0 \\ &\varphi(s^n) = -g_0, && \text{если } s^n = -s^n_0 \\ &\varphi(s^n) = 0 && \text{в остальных случаях.} \end{aligned}$$

Цепи этого типа называются *элементарными* цепями. Каждая n-мерная цепь может быть представлена как сумма $\sum_i g_i s_i^n$ элементарных n-мерных цепей [1]), это представление однозначно, если пренебрегать членами с коэффициентом нуль и требовать, чтобы $s_i^n \neq \pm s_{i'}^n$, при $i \neq i'$.

Определение VIII 4. *Δ-граница* (или просто *граница*) $\Delta\varphi$ n-мерной цепи φ $(n \geqslant 0)$ есть $(n-1)$-мерная цепь, определенная формулой:

$$\Delta\varphi(s^{n-1}) = \sum_{s^n \succ s^{n-1}} \varphi(s^n);$$

∇-граница [2]) (или *верхняя граница*) $\nabla\varphi$ n-мерной цепи φ $(n \geqslant -1)$ есть $(n+1)$-мерная цепь, определенная формулой [3]):

$$\nabla\varphi(s^{n+1}) = \sum_{s^n \prec s^{n+1}} \varphi(s^n).$$

Пример VIII 1. Δ-границей элементарной цепи gs_0^n $(n \geqslant 0)$ является цепь

$$\sum_{s^{n-1} \prec s_0^n} gs^{n-1},$$

а ∇-границей — цепь

$$\sum_{s^{n+1} \succ s_0^n} gs^{n+1}.$$

B) Оператор Δ является, очевидно, гомоморфизмом группы L^n в группу L^{n-1}, а оператор ∇ — гомоморфизмом группы L^n в группу L^{n+1}. Операторы Δ и ∇ обладают важными свойствами:

$$\Delta\Delta\varphi = 0, \quad \nabla\nabla\varphi = 0$$

для любой n-мерной цепи φ (с ограничением $n \geqslant 1$ для первого соотношения).

---

1) В сущности, это — более обычный способ определения цепи как символической линейной формы от симплексов. Отсюда следует, что $L^n(K, G)$ является прямой суммой k групп, изоморфных G, где k — число неориентированных n-мерных симплексов комплекса K.

2) Понятие ∇-граница появилось совсем недавно, тогда как классическая комбинаторная топология пользовалась только понятием Δ-граница.

3) Сумму пустого множества слагаемых мы считаем равной нулю

Доказательство. В силу определений операторов Δ и ∇ и последней части предложения А), мы имеем

$$\Delta\Delta\varphi(s^{n-2}) = \sum_{s^n \succ s^{n-2}} \varphi(s^n),$$

$$\nabla\nabla\varphi(s^{n+2}) = \sum_{s^n \prec s^{n+2}} \varphi(s^n).$$

Из предложения А) мы знаем также, что из $s^n \prec s^{n+2}$ вытекает, что $s^n \prec -s^{n+2}$ и $-s^n \prec s^{n+2}$. Следовательно, каждый член $\varphi(s^n)$ в сумме погашается членом $\varphi(-s^n) = -\varphi(s^n)$, и это показывает, что $\Delta\Delta\varphi(s^{n-2}) = 0$ для каждого s^{n-2} и $\nabla\nabla\varphi(s^{n+2}) = 0$ для каждого s^{n+2}.

Определение VIII 5. n-мерная цепь φ комплекса K по области коэффициентов G называется *Δ-циклом*, если $\Delta\varphi = 0$, и *∇-циклом*, если $\nabla\varphi = 0$. Из В) следует, что любая n-мерная цепь, являющаяся Δ-границей некоторой $(n+1)$-мерной цепи (∇-границей $(n-1)$-мерной цепи), оказывается Δ-циклом (∇-циклом). Цепи этого типа называются *ограничивающими Δ-циклами* (*ограничивающими ∇-циклами*).

И n-мерные Δ-циклы, и n-мерные ∇-циклы комплекса K, очевидно, образуют подгруппы[1]) группы $L^n(K, G)$. Обозначим эти подгруппы соответственно через $Z^n_\Delta(K, G)$ и $Z^n_\nabla(K, G)$. Далее, n-мерные ограничивающие Δ-циклы образуют, в силу В), подгруппу[2]) группы $Z^n_\Delta(K, G)$, которую мы обозначаем через $H^n_\Delta(K, G)$. Аналогично n-мерные ограничивающие ∇-циклы образуют подгруппу[2]) группы $Z^n_\nabla(K, G)$, и мы обозначаем ее $H^n_\nabla(K, G)$.

Δ- И ∇-ГРУППЫ КОМПЛЕКСА

Определение VIII 6. Фактор-группа $Z^n_\Delta(K, G)/H^n_\Delta(K, G)$ группы n-мерных Δ-циклов по группе n-мерных ограничивающих Δ-циклов называется *n-мерной Δ-группой (группой Бетти) комплекса K по области коэффициента* G и обозначается

---

[1]) *Ядром* гомоморфизма h группы G в группу G' называется множество элементов $g \in G$ таких, что $h(g) = 0$. Подгруппы Z^n_Δ и Z^n_∇ являются, таким образом, ядрами гомоморфизмов Δ и ∇ группы L^n в группу L^{n-1} и группы L^n в группу L^{n+1}.

[2]) H^n_Δ является образом группы L^{n+1} при гомоморфизме Δ, а H^n_∇ является образом группы L^{n-1} при гомоморфизме ∇.

через $\Delta^n(K, G)$, или $\Delta^n(K)$, или просто Δ^n. Элементы группы Δ^n, т. е. смежные классы группы Z^n_Δ по подгруппе H^n_Δ, называются *n-мерными Δ-классами*, а два Δ-цикла, принадлежащие к одному и тому же Δ-классу, называются *гомологичными* между собой. Аналогично, фактор-группа $Z^n_\nabla(K, G)/H^n_\nabla(K, G)$ группы n-мерных ∇-циклов по группе n-мерных ограничивающих ∇-циклов называется *n-мерной ∇-группой комплекса K по области коэффициентов G* и обозначается через $\nabla^n(K, G)$, или $\nabla^n(K)$, или просто ∇^n. Элементы группы ∇^n, т. е. классы смежности группы Z^n_∇ по подгруппе H^n_∇, называются *n-мерными ∇-классами*, а два ∇-цикла, принадлежащие к одному и тому же ∇-классу, называются *гомологичными* между собой.

Ясно, что два n-мерных Δ-цикла φ и ψ гомологичны в том и только в том случае, если существует $(n+1)$-мерная цепь θ такая, что $\Delta\theta = \varphi - \psi$, и два n-мерных ∇-цикла φ и ψ гомологичны в том и только в том случае, если существует $(n-1)$-мерная цепь θ такая, что $\nabla\theta = \varphi - \psi$.

Замечание. Пусть $\mathfrak{J}$ — группа целых чисел. Тогда, для каждого n группа $\Delta^n(K, \mathfrak{J})$ является группой с конечным числом образующих. Следовательно [1]), она может быть разложена в прямую сумму свободной группы и некоторого числа групп конечных порядков. Ранг свободной подгруппы называется *n-мерным числом Бетти комплекса K*, а порядки конечных подгрупп в каноническом разложении называются *n-мерными коэффициентами кручения комплекса K*.

Известно, что числа Бетти и коэффициенты кручения вполне определяют Δ- и ∇-группы комплекса по произвольной группе G в качестве области коэффициетов. Например, $\nabla^n(K, \mathfrak{J})$ есть прямая сумма b_n бесконечных циклических групп, где b_n — n-мерное число Бетти комплекса K, и конечных циклических групп, порядки которых равны $(n-1)$-мерным коэффициентам кручения комплекса K. $\Delta^n(K, \text{II})$ есть прямая сумма b_n групп, изоморфных II, и конечных циклических групп, порядки которых равны $(n-1)$-мерным коэффициентам кручения комплекса K.

Пример VIII 2. Если $n > \dim K$, то $\nabla^n(K, G) = \Delta^n(K, G) = 0$.

Пример VIII 3. Комплекс K называется *связным*, если он не может быть разбит на два комплекса без общих вершин,

[1]) Зейферт и Трельфалль, Топология, Москва — Ленинград, 1938, стр. 86, в частности теорема III, стр. 351.

или, что сводится к тому же самому, если любые две вершины p и q комплекса K можно соединить последовательностью одномерных симплексов (p, p_1), (p_1, p_2), ..., (p_n, q). Каждый комплекс может быть единственным образом разложен на связные подкомплексы, называемые *компонентами* комплекса K. Можно без труда убедиться в том, что нульмерная цепь комплекса K, т. е. функция $\varphi(p)$ вершин $p \in K$, является ∇-циклом в том и только в том случае, если на каждой компоненте комплекса K функция $\varphi(p)$ имеет постоянное значение. Нульмерный ∇-цикл φ гомологичен нулю в том и только в том случае, если φ имеет постоянное значение на всем комплексе K. Следовательно, группа $\nabla^0(K, G)$ есть прямая сумма $m-1$ групп, изоморфных G, где m — число компонент комплекса K. Такой же результат легко установить для группы $\Delta^0(K, G)$.

Пример VIII 4. Если $n = \dim K$, то группа $\Delta^n(K, G)$ совпадает с группой $Z^n_\Delta(K, G)$. Кроме того, каждая n-мерная цепь является ∇-циклом и, следовательно, $\nabla^n(K, G)$ совпадает с группой $L^n(K, G)/H^n_\nabla(K, G)$.

Пример VIII 5. Пусть K — n-мерный комплекс, обладающий следующими свойствами: 1) каждый неориентированный $(n-1)$-мерный симплекс комплекса K является общей гранью в точности двух n-мерных симплексов; 2) K не может быть представлен как сумма двух комплексов, не имеющих ни одного общего $(n-1)$-мерного симплекса; (комплексы такого вида иногда называются *n-мерными псевдомногообразиями*). В качестве области коэффициентов возьмем группу $\mathfrak{J}$ и определим ∇-группу $\nabla^n(K) = \nabla^n(K, \mathfrak{J})$. Каждая n-мерная цепь является ∇-циклом, и единственный вопрос, на который нам остается ответить, состоит в следующем: когда n-мерная цепь является ограничивающим ∇-циклом? Следует различать два случая:

а) Допустим, что каждому n-мерному симплексу комплекса K можно придать определенную ориентацию, называемую *положительной* ориентацией, таким образом, чтобы каждый ориентированный $(n-1)$-мерный симплекс являлся ориентированной гранью в точности одного положительно ориентированного n-мерного симплекса (и, следовательно, в точности одного отрицательно ориентированного симплекса). Мы скажем тогда, что комплекс K *ориентируем*. Легко доказать, что каковы бы ни были два произвольных положительно ориентированных симплекса s^n и $\tilde{s}^n$, элементарные цепи $1s^n$ и $1\tilde{s}^n$ гомологичны. (Это ясно, когда s^n и $\tilde{s}^n$ — соседние симплексы; общее утверждение сводится к свойству 2)). Заметим далее, что каждая n-мерная цепь, являющаяся ∇-границей некоторой $(n-1)$-мерной цепи, удовлетворяет условию $\sum \varphi(s^n)=0$, где сумма распространена на все положительно ориентированные симплексы (достаточно проверить это для случая, когда φ является ∇-границей элементарной цепи). Отсюда можно заключить, что $\nabla^n(K)$ изоморфна группе $\mathfrak{J}$ и что, если s_0^n — произвольный ориентированный n-мерный симплекс, элементарные цепи ms_0^n, $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, представляют все ∇-классы, причем в каждый ∇-класс входит лишь одна из этих цепей. Аналогично, если G — произвольная группа, группа $\nabla^n(K, G)$ изоморфна G.

b) Допустим, что n-мерные симплексы комплекса K нельзя ориентировать в соответствии с требованиями, высказанными выше. В этом случае K называется *неориентируемым*. Легко показать, что для каждого s^n цепь $2s^n$ гомологична нулю и что группа $\nabla^n(K, \mathfrak{J})$ является группой порядка 2. Ненулевой элемент группы $\nabla^n(K, \mathfrak{J})$ представляется каждым из ∇-циклов $1s^n$ (для того чтобы доказать, что цепь $1s^n$ не гомологична нулю, надо показать, что если $\pm s_i^n$, $i=1, \ldots, k$, суть все ориентированные n-мерные симплексы комплекса K и φ — n-мерная цепь, являющаяся ∇-границей некоторой $(n-1)$-мерной цепи, то

$$\sum_{i=1}^{k} \varphi(s_i^n) \equiv 0 \pmod 2).$$

Пример VIII 6. Пусть комплекс K является суммой двух комплексов K_1 и K_2, не имеющих общих вершин. Тогда, при $n>0$, $\nabla^n(K, G)$ есть прямая сумма групп $\nabla^n(K_1, G)$ и $\nabla^n(K_2, G)$, и $\Delta^n(K, G)$ есть прямая сумма групп $\Delta^n(K_1, G)$ и $\Delta^n(K_2, G)$. При $n=0$ эти утверждения неверны (см. пример VIII 3).

Мы будем часто рассматривать соответствия между цепями одного и цепями другого комплекса.

c) Пусть K_1 и K_2 — два комплекса, и G — группа. Допустим, что каждой n-мерной цепи φ комплекса K_1 по области коэффициентов G постановлена в соответствие n-мерная цепь $h(\varphi)$ комплекса K_2 по той же области коэффициентов, $n=0, 1, 2, \ldots$, и для каждого n оператор h является гомоморфизмом группы $L^n(K_1, G)$ в группу $L^n(K_2, G)$. Допустим, наконец, что h

коммутирует с граничным оператором Δ, т. е.

$$h(\Delta(\varphi)) = \Delta(h(\varphi))$$

для каждой n-мерной цепи φ комплекса K_1. Тогда h переводит Δ-циклы в Δ-циклы и ограничивающие Δ-циклы — в ограничивающие Δ-циклы, и, следовательно, гомоморфно отображает группу $\Delta^n(K_1)$ в группу $\Delta^n(K_2)$. Аналогично, если h коммутирует с верхним граничным оператором ∇, т. е. если

$$h(\nabla(\varphi)) = \nabla(h(\varphi)),$$

то h переводит ∇-циклы в ∇-циклы и ограничивающие ∇-циклы в ограничивающие ∇-циклы, и, следовательно, гомоморфно отображает группу $\nabla^n(K_1)$ в группу $\nabla^n(K_2)$.

ЕСТЕСТВЕННЫЕ ГОМОМОРФИЗМЫ. Δ- и ∇-ГРУППЫ mod L

Пусть K — комплекс, L — подкомплекс[1]) комплекса K. Каждой n-мерной цепи Φ комплекса K, естественным образом, соответствует n-мерная цепь $\varphi = h_L\Phi$ комплекса L, полученная ограничением области определения цепи Φ только симплексами подкомплекса L и обратно, каждой цепи φ комплекса L соответствует цепь $\Phi = h_K\varphi$ комплекса K, определенная следующим образом: $\Phi(s^n) = \varphi(s^n)$, если $s^n \in L$, и $\Phi(s^n) = 0$, если $s^n \notin L$. Для каждого n мы получаем таким путем гомоморфизм h_L группы $L^n(K, G)$ в[2]) группу $L^n(L, G)$ и гомоморфизм h_K группы $L^n(L, G)$ в[2]) группу $L^n(K, G)$. Легко показать, что оператор

[1]) Существенно делать различие между цепями комплекса K и цепями подкомплекса L. Первые являются функциями, определенными на симплексах комплекса K, а вторые — функциями, определенными на симплексах подкомплекса L. Даже если (для некоторого фиксированного n) множество n-мерных симплексов подкомплекса L совпадает с множеством n-мерных симплексов комплекса K, необходимо отличать n-мерную цепь Φ комплекса K от n-мерной цепи φ подкомплекса L: область определения функции $\nabla\Phi$ состоит из всех $(n+1)$-мерных симплексов комплекса K, тогда как область определения функции $\nabla\varphi$ состоит лишь из $(n+1)$-мерных симплексов комплекса L. Следует быть особенно осторожным, когда цепь записывается как линейная комбинация элементарных цепей, ибо элементарная цепь gs_0^n, где s_0^n симплекс подкомплекса L, может означать как цепь комплекса L, так и цепь комплекса K.

[2]) В действительности h_L является гомоморфизмом группы $L^n(K, G)$ *на* группу $L^n(L, G)$, а h_K — *изоморфизмом* группы $L^n(L, G)$ в группу $L^n(K, G)$. (В этой книге и гомоморфизм и изоморфизм группы G в группу H означает отображение группы G на *под*группу группы H.)

h_L коммутирует с верхним граничным оператором ∇, т. е. для любой цепи Φ комплекса K

$$h_L \nabla \Phi = \nabla h_L \Phi. \tag{1}$$

Аналогично, оператор h_K коммутирует с граничным оператором Δ, т. е. для любой цепи φ подкомплекса L:

$$h_K \Delta \varphi = \Delta h_K \varphi. \tag{1'}$$

Из C) заключаем, что h_L порождает гомоморфизм группы $\nabla^n(K, G)$ в группу $\nabla^n(L, G)$ и h_K порождает гомоморфизм группы $\Delta^n(L, G)$ в группу $\Delta^n(K, G)$.

Определение VIII 7. Гомоморфизм h_L группы $\nabla^n(K, G)$ в группу $\nabla^n(L, G)$ и гомоморфизм h_K группы $\Delta^n(L, G)$ в группу $\Delta^n(K, G)$ называются *естественными гомоморфизмами*. Если элемент e группы $\nabla^n(L)$ является образом элемента $\tilde{e}$ группы $\nabla^n(K)$ при h_L, то $\tilde{e}$ называется *продолжением* элемента e, а элемент e — *продолжаемым на* K. Элемент группы $\Delta^n(L)$, переходящий при h_K в нуль группы $\Delta^n(K)$, называется *ограничивающим* в K.

Мы опускаем простое доказательство следующего предложения:

D) Пусть размерность комплекса K равна n. Естественный гомоморфизм группы $\Delta^n(L)$ в группу $\Delta^n(K)$ является *изо*морфизмом $\Delta^n(L)$ в $\Delta^n(K)$, тогда как естественный гомоморфизм группы $\nabla^n(K)$ в группу $\nabla^n(L)$ является гомоморфизмом $\nabla^n(K)$ *на* $\nabla^n(L)$, т. е. каждый элемент группы $\nabla^n(L)$ имеет продолжение (для доказательства нужно воспользоваться примером VIII 4). Пусть L — подкомплекс комплекса K, состоящий из всех симплексов комплекса K размерности $\leqslant m$. Для $m = n - 1$ естественный гомоморфизм группы $\Delta^m(L)$ в группу $\Delta^m(K)$ является гомоморфизмом $\Delta^m(L)$ *на* $\Delta^m(K)$, а естественный гомоморфизм группы $\nabla^m(K)$ в группу $\nabla^m(L)$ является *изо*морфизмом $\nabla^m(K)$ в $\nabla^m(L)$. Если $m \leqslant n - 2$, то оба естественных гомоморфизма являются *изо*морфизмами *на*.

E) Пусть e — элемент группы $\nabla^n(L)$, и $\tilde{e}$ — продолжение элемента e, $\tilde{e} \in \nabla^n(K)$. Тогда для каждого ∇-цикла φ подкомплекса L, представляющего e, существует ∇-цикл Φ комплекса K, представляющий $\tilde{e}$ и являющийся продолжением ∇-цикла φ.

Доказательство. Предположим сначала, что $\tilde{e} = 0$. Тогда $e = 0$, т. е. существует цепь ψ комплекса L такая, что $\nabla\psi = \varphi$. Гомологичный нулю ∇-цикл $\nabla h_K \psi$ является тогда продолжением φ, ибо $h_L \nabla h_K \psi = \nabla h_L h_K \psi = \nabla\psi = \varphi$. Пусть теперь $\tilde{e}$ — произвольный элемент группы $\nabla^n(K)$ и пусть Φ_1 — ∇-цикл комплекса K, принадлежащий ∇-классу $\tilde{e}$. Тогда $\varphi - h_L \Phi_1$ есть ограничивающий ∇-цикл комплекса L и, следовательно, он продолжаем в ограничивающий ∇-цикл Φ_2 комплекса K. ∇-цикл $\Phi_1 + \Phi_2$ является искомым продолжением ∇-цикла φ.

Рассмотрим теперь функции, принимающие значения из группы G, определенные на ориентированных n-мерных симплексах[1]) дополнения $K \setminus L$. Если такая цепь удовлетворяет условию: $\varphi(-s^n) = -\varphi(s^n)$, то она называется *n-мерной цепью* mod L. n-мерные цепи mod L образуют группу. Δ- и ∇-граница цепи φ mod L определяются таким же образом, как для обычных цепей, с тем единственным отличием, что $\Delta\varphi$ и $\nabla\varphi$ рассматриваются как цепи, определенные только для $s^n \in K \setminus L$. Проверяем, что $\Delta\Delta\varphi = 0$ и $\nabla\nabla\varphi = 0$. Как прежде, Δ- и ∇-циклы mod L определяем соотношениями $\Delta\varphi = 0$ и $\nabla\varphi = 0$. Определяем $\Delta^n(K \bmod L, G)$, *n-мерную Δ-группу* K mod L, как фактор-группу группы всех Δ-циклов mod L по группе всех ограничивающих Δ-циклов mod L, и $\nabla^n(K \bmod L, G)$, *n-мерную ∇-группу* K mod L, как фактор-группу группы всех ∇-циклов mod L по группе всех ограничивающих ∇-циклов mod L.

Пример VIII 8. Пусть K — произвольный комплекс. Образуем новый комплекс K^*, называемый *конусом* над K, прибавляя к вершинам комплекса K новую вершину p и считая симплексами комплекса K^* все симплексы комплекса K и все симплексы вида (p, s^n), где симплекс $s^n \in K$. Ясно, что ориентированные n-мерные симплексы дополнения $K^* \setminus K$ находятся во взаимно однозначном соответствии с ориентированными $(n-1)$-мерными симплексами комплекса K; следовательно, n-мерные цепи K^* mod K находятся в изоморфном соответствии с $(n-1)$-мерными цепями комплекса K. Нетрудно доказать, что группы $\nabla^n(K^* \bmod K)$ и $\nabla^{n-1}(K)$ и, точно так же, группы $\Delta^n(K^* \bmod K)$ и $\Delta^{n-1}(K)$ изоморфны, $n = 1, 2, \ldots$

Пример VIII 9. Если K_1, K_2, L — подкомплексы комплекса K и $K = K_1 \cup K_2$, $K_1 \cap K_2 \subset L$, то группа $\nabla^n(K \bmod L, G)$ есть

[1]) Т. е. n-мерных симплексах комплекса K, не принадлежащих L. K рассматривается как множество своих симплексов.

прямая сумма групп $\nabla^n(K_1 \bmod (L \cap K_1), G)$ и $\nabla^n(K_2 \bmod (L \cap K_2), G)$. Аналогичное утверждение справедливо для Δ-групп (в отличие от утверждений примера VIII 6 эти утверждения имеют место, даже если $n=0$).

Если Φ — m-мерная цепь комплекса K, то обозначим через $h_{K \setminus L}\Phi$ ту m-мерную цепь mod L, которая получается из Φ ограничением области определения цепи Φ только симплексами, входящими в $K \setminus L$. Если φ — m-мерная цепь mod L, то обозначим через $h_K\varphi$ m-мерную цепь комплекса K, определенную следующим образом: $h_K\varphi(s^m) = \varphi(s^m)$, если $s^m \in K \setminus L$, и $h_K\varphi(s^m) = 0$, если $s^m \in L$. Легко проверяем, что

$$h_{K \setminus L}\Delta\Phi = \Delta h_{K \setminus L}\Phi \tag{2}$$

для любой m-мерной цепи Φ комплекса K и

$$h_K\nabla\varphi = \nabla h_K\varphi \tag{2'}$$

для любой m-мерной цепи φ комплекса $K \bmod L$ (сопоставьте эти формулы[1]) с формулами (1) и (1′) и обратите внимание на то, что операторы Δ и ∇ меняются местами).

F) Допустим, что $\nabla^m(K \bmod L, G) = 0$. Пусть Φ — m-мерный ∇-цикл комплекса K, и ψ — $(m-1)$-мерная цепь подкомплекса L такая, что $\nabla\psi = h_L\Phi$. Тогда существует $(m-1)$-мерная цепь ψ комплекса K, обладающая свойствами:

$$h_L\Psi = \psi; \quad \nabla\Psi = \Phi.$$

Доказательство. $\Phi' = \Phi - \nabla h_K\psi$ является m-мерным ∇-циклом комплекса K, обладающим тем свойством, что $h_L\Phi' = 0$, т. е. $\Phi'(s^m) = 0$, если $s^m \in L$, так как, в силу (1′), $h_L\Phi' = h_L\Phi - \nabla\psi = 0$. Очевидно, $h_{K-L}\Phi'$ является m-мерным ∇-циклом mod L и, так как по предположению все m-мерные ∇-циклы mod L ограничивают, то существует $(m-1)$-мерная цепь ψ' mod L такая, что $\nabla\psi' = h_{K \setminus L}\Phi'$ и, следовательно, в силу (2′), $\nabla h_K\psi' = h_K\nabla\psi' = h_K h_{K \setminus L}\Phi' = \Phi' = \Phi - \nabla h_K\psi$.

---

[1]) Соотношения (2) и (2′) показывают, что оператор h_K порождает для данных m и G гомоморфизм группы $\nabla^m(K \bmod L, G)$ в группу $\nabla^m(K, G)$ и $h_{K \setminus L}$ порождает гомоморфизм группы $\Delta^m(K, G)$ в группу $\Delta^m(K \bmod L, G)$.

Цепь $\Psi = h_K\psi + h_K\psi'$ удовлетворяет условиям $h_L\Psi = \psi$ и $\nabla\Psi = \Phi$.

Из F) получаем:

G) Если $\nabla^m(K \bmod L,\ G) = 0$, то естественный гомоморфизм группы $\nabla^m(K,\ G)$ в группу $\nabla^m(L,\ G)$ является *изо*морфизмом, а естественный гомоморфизм группы $\nabla^{m-1}(K,\ G)$ в группу $\nabla^{m-1}(L,\ G)$ является гомоморфизмом *на* группу $\nabla^{m-1}(L,\ G)$.

Доказательство. С одной стороны, из F) вытекает, что m-мерный ∇-цикл Φ комплекса K ограничивает, если ограничивает $h_L\Phi$. С другой стороны, применяя F) к m-мерному ∇-циклу $\Phi = 0$ получаем, что каждый $(m-1)$-мерный ∇-цикл ψ подкомплекса L является образом некоторого ∇-цикла комплекса K при h_L.

Установим теперь предложения, аналогичные F) и G), для граничного оператора Δ. Будем для краткости называть две m-мерные цепи Φ_1 и Φ_2 комплекса K (которые не обязательно являются Δ-циклами) *гомологичными*, если их разность $\Phi_1 - \Phi_2$ является ограничивающим Δ-циклом; отсюда, конечно, следует, что Φ_1 и Φ_2 имеют одну и ту же границу.

F′) Допустим, что $\Delta^m(K \bmod L,\ G) = 0$. Пусть φ — $(m-1)$-мерный Δ-цикл подкомплекса L, и Ψ — m-мерная цепь комплекса K такая, что $\Delta\Psi = h_K\varphi$. Тогда существует m-мерная цепь ψ подкомплекса L такая, что цепь $h_K\psi$ гомологична Ψ. Отсюда следует, что $\Delta\psi = \varphi$ (так как h_K есть взаимно однозначное соответствие и, в силу (1′), $h_K\Delta\psi = \Delta h_K\psi = \Delta\Psi = h_K\varphi$).

Доказательство. $h_{K\setminus L}\Psi$ является m-мерным Δ-циклом $\bmod L$ (ибо, в силу (2), $\Delta h_{K\setminus L}\Psi = h_{K\setminus L}\Delta\Psi = h_{K\setminus L}h_K\varphi = 0$), и так как по предположению все m-мерные Δ-циклы $\bmod L$ ограничивают, $h_{K\setminus L}\Psi = \Delta\theta$, где θ — некоторая $(m+1)$-мерная цепь $\bmod L$. m-мерная цепь $\Psi' = \Psi - \Delta h_K\theta$ гомологична Ψ, и, в силу (2), мы имеем $h_{K\setminus L}\Psi' = h_{K\setminus L}\Psi - \Delta h_{K\setminus L}h_K\theta = h_{K\setminus L}\Psi - \Delta\theta = 0$. Это показывает, что $\Psi' = h_K h_L\Psi'$ и что, следовательно, цепь $\psi = h_L\Psi'$ удовлетворяет условиям предложения F′).

Из F′) получаем:

G′) Если $\Delta^m(K \bmod L,\ G) = 0$, то естественный гомоморфизм группы $\Delta^m(L,\ G)$ в группу $\Delta^m(K,\ G)$ является гомоморфизмом *на* гуппу $\Delta^m(K,\ G)$, а естественный гомоморфизм группы $\Delta^{m-1}(L,\ G)$ в группу $\Delta^{m-1}(K,\ G)$ является *изо*морфизмом.

Доказательство. Из F′), очевидно, следует, что $(m-1)$-мерный Δ-цикл φ подкомплекса L ограничивает, если $h_K\varphi$ ограничивает. С другой стороны, применяя F′) к $(m-1)$-мерному Δ-циклу $\varphi=0$, получаем, что каждый m-мерный Δ-цикл комплекса K является образом некоторого m-мерного Δ-цикла подкомплекса L при h_K.

Мы воспользуемся теперь предложениями G) и G′) для определения Δ- и ∇-групп простейших комплексов.

Пример VIII 10. Пусть Q^n — комплекс, состоящий из n-мерного симплекса и всех его граней. Тогда для всех m, ∇- и Δ-группы $\nabla^m(Q^n, G)$ и $\Delta^m(Q^n, G)$ суть нулевые группы. Это доказывается индукцией по n. Утверждение тривиально для Q^0. Допустим, что оно справедливо для Q^{n-1}. Но Q^n есть конус над Q^{n-1}. В силу примера VIII 8, группы $\nabla^m(Q^n \operatorname{mod} Q^{n-1}, G)$ суть нулевые группы при всех m. В силу G), $\nabla^m(Q^n, G)$ изоморфна $\nabla^m(Q^{n-1}, G)$ и, следовательно, является нулевой группой. Аналогично, $\Delta^m(Q^n, G)$ есть нулевая группа.

Пример VIII 11. Пусть R^n — комплекс, состоящий из всех граней $(n+1)$-мерного симплекса, размерность которых $\leqslant n$. Назовем этот комплекс *элементарной n-мерной сферой*. Если выбрана некоторая определенная ориентация s^{n+1} данного $(n+1)$-мерного симплекса, то мы будем говорить об *ориентированной элементарной n-мерной сфере* R^n, причем ориентированные грани симплекса s^{n+1} будем называть *положительно* ориентированными симплексами R^n. (R^n, очевидно, является ориентируемым псевдомногообразием). R^n, конечно, является подкомплексом комплекса Q^{n+1} и, так как, в силу предложения D), для $m \leqslant n-1$ группы $\nabla^m(R^n, G)$ и $\Delta^m(R^n, G)$ изоморфны соответственно группам $\nabla^m(Q^{n+1}, G)$ и $\Delta^m(Q^{n+1}, G)$, то из примера VIII 10 мы получаем, что $\nabla^m(R^n, G) = \Delta^m(R^n, G) = 0$, $m \leqslant n-1$. Рассмотрим теперь $\nabla^n(R^n, G)$. Воспользовавшись примером VIII 5, мы могли бы притти к заключению, что $\nabla^n(R^n, G)$ изоморфна группе G. Однако значительно проще следующее рассуждение: n-мерные ∇-циклы комплекса R^n суть просто все n-мерные цепи, и если n-мерная цепь φ комплекса R^n ограничивает, то n-мерная цепь[1] $\Phi = h_{Q^{n+1}}\varphi$ должна быть ∇-границей и, следовательно, — ∇-циклом комплекса Q^{n+1} (так как R^n состоит из всех симплексов комплекса Q^{n+1} размер-

[1]) Это — та же самая функция φ, но рассматриваемая теперь как цепь комплекса Q^{n+1}; см. сноску на стр. 156.

ности$\leqslant n$); наоборот, каждый n-мерный ∇-цикл комплекса Q^{n+1} ограничивает (согласно примеру VIII 10). Пусть s_i^n $(i=0, 1, \ldots, n+1)$ — положительно ориентированные n-мерные симплексы ориентированной элементарной n-мерной сферы. Если φ — некоторая n-мерная цепь комплекса R^n, то, для того чтобы цепь Φ была ∇-циклом комплекса Q^{n+1}, необходимо и достаточно, чтобы $\sum\limits_{i=0}^{n+1} \varphi(s_i^n)=0$; в соответствии со сделанным выше замечанием (о том, что n-мерные ограничивающие ∇-циклы комплекса R^n соответствуют n-мерным ∇-циклам комплекса Q^{n+1}), это равенство является также необходимым и достаточным условием, для того чтобы ∇-цикл φ ограничивал в R^n. Отсюда следует, что если φ — произвольная n-мерная цепь комплекса R^n, то элемент $\sum\limits_{i=0}^{n+1} \varphi(s_i^n)=\sum\limits_{i=0}^{n+1} \Phi(s_i^n)$ группы G характеризует ∇-класс, содержащий φ, и что, следовательно, $\nabla^n(R^n, G)$ изоморфна группе G. Различные ∇-классы представляются цепями gs^n_0, где g — некоторый элемент группы G. Заметим, что ориентировать R^n значит выбрать один из двух образующих свободной циклической группы $\nabla^n(R^n, \mathcal{J})$.

Рассмотрим теперь группу $\Delta^n(R^n, G)$, которая является ничем иным как группой $Z^n_\Delta(R^n, G)$ n-мерных Δ-циклов. n-мерная цепь φ является Δ-циклом в том и только в том случае, если $h_Q^{n+1}\varphi$ ограничивает в Q^{n+1}, в силу тех же рассуждений, как и в случае ∇-гомологии. Далее, элементарные $(n+1)$-мерные цепи комплекса Q^{n+1} суть цепи вида gs^{n+1}; границы этих цепей являются функциями, принимающими одно и то же значение g на всех симплексах s_i^n и значение $-g$ на всех симплексах $-s_i^n$. Это показывает, что $\Delta^n(R^n, G)$ также изоморфна группе G.

БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ ПОДРАЗДЕЛЕНИЯ

Пусть K — комплекс, и полиэдр P — его геометрическая реализация. Пусть P' — *барицентрическое подразделение* полиэдра P, т. е. однозначно определенное подразделение P на симплексы, вершинами которых являются вершины и центры тяжести клеток полиэдра P. Пусть K' — комплекс остовов полиэдра P'. Тогда K' называется *барицентрическим подразделением* комплекса K. K' следующим образом может быть определено абстрактно: каждой паре симплексов s^m и $-s^m$ комплекса K, т. е. каждому неориентированному симплексу, ставим в соответствие символ $[s^m]$; эти символы $[s^m]$ суть вершины комплекса K'. (Геометрической реализацией символа $[s^m]$ является центр тяжести клетки s^m.) Неориентированными симплексами комплекса K' являются последовательности

$$([s^{m_0}],\ [s^{m_1}], \ldots,\ [s^{m_i}]),$$

где $m_0 > m_1 > \ldots > m_i$ и симплекс s^{m_ρ} является гранью симплекса $s^{m_{\nu-1}}$.

Из геометрической картины полиэдра P ясно, что кажому ориентированному m-мерному симплексу комплекса K принадлежит $(m+1)!$ ориентированных m-мерных симплексов комплекса K'. Абстрактно симплекс

$$([p_0,\ p_1, \ldots, p_m],\ [p_1, \ldots, p_m], \ldots, [p_m]),$$

ориентированный как указано, называется ориентированным m-мерным *подсимплексом* ориентированного симплекса $(p_0, \ldots, p_m)$ комплекса K, а ориентированный иначе — ориентированным подсимплексом симплекса $-(p_0, \ldots, p_m)$.

Если $s_1^m \in K'$ есть ориентированный подсимплекс симплекса $s^m \in K$, то мы пишем: $s_1^m < \cdot\, s^m$.

Если дан комплекс K, то в результате итерации процесса барицентрического подразделения получаем последовательность комплексов, называемых *последовательными барицентрическими подразделениями* комплекса K и обозначаемых через $K', K'', \ldots, K^{(m)}, \ldots$. Мы, естественно, говорим об n-мерном симплексе $s^{n(m)} \in K^m$, что он является *ориентированным подсимплексом* симплекса $s^n \in K$, если существует цепочка симплексов $s^{n(i)} \in K^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m-1$, для которых

$$s^{n(m)} < \cdot\, s^{n(m-1)} < \cdot \ldots < \cdot\, s^{n'} < \cdot\, s^n.$$

Теперь мы докажем, что процесс барицентрического подразделения не изменяет Δ- и ∇-групп комплекса.

Каждой цепи φ комплекса K' поставим в соответствие цепь $\Phi = \pi\varphi$ комплекса K, определенную формулой

$$\Phi\ (s^m) = \sum_{s^{m'} < \cdot s^m} \varphi\ (s_1^m).$$

Легко видеть, что оператор π коммутирует с верхним граничным оператором: $\nabla\pi\varphi = \pi\nabla\varphi$. Следовательно (предложение C)), π порождает гомоморфизм группы $\nabla^m(K', G)$ в группу $\nabla^m(K, G)$. Более того.

H) *Гомоморфизм группы* $\nabla^m(K', G)$ *в группу* $\nabla^m(K, G)$, ***порожденный оператором*** π, *является изоморфизмом группы* $\nabla^m(K',G)$ *на группу* $\nabla^m(K,G)$.

Рассуждения, которыми мы пользовались при доказательстве G), показывают, что H) содержится в следующем предложении:

I) Пусть φ — m-мерный ∇-цикл комплекса K', и Ψ — $(m-1)$-мерная цепь комплекса K такая, что $\pi\varphi = \nabla\Psi$. Тогда существует $(m-1)$-мерная цепь ψ комплекса K' такая, что $\pi\psi = \Psi$ и $\nabla\psi = \varphi$, $m = 1, 2, \ldots$.

Доказательство предложения I) индукцией по размерности комплекса K. Предложение I) очевидно, если $\dim K = 0$, ибо в этом случае $K' = K$. Мы докажем I) для $\dim K = n > 0$, предполагая, что I), а, следовательно, и H), имеют место для любого комплекса размерности $\leqslant n-1$. Обозначим через K^{n-1} подкомплекс комплекса K, состоящий из всех симплексов размерности $\leqslant n-1$, и через $K^{n-1'}$ барицентрическое подразделение комплекса K^{n-1} ($K^{n-1'}$ является, конечно, подкомплексом комплекса K'). Первый шаг будет состоять в вычислении групп:

$$\nabla^m (K' \bmod K^{n-1'}) = \nabla^m (K' \bmod K^{n-1'}, G),\ m = 0, 1, 2, \ldots n.$$

Пусть $\pm s_1^n, \pm s_2^n, \ldots, \pm s_r^n$ суть все n-мерные симплексы комплекса K; пусть Q_i^n, $i = 1, 2, \ldots, r$, — комплекс, состоящий из симплекса s_i^n и всех его граней, R^{n-1}_i — элементарная $(n-1)$-мерная сфера, состоящая из граней симплекса s^{n-1}_i размерности $\leqslant n-1$, а $Q_i^{n'}$ и $R^{n-1'}_i$ — барицентрические подразделения комплексов Q_i^n и R^{n-1}_i. В силу примера VIII 9, группа $\nabla^m(K' \bmod K^{n-1'})$ есть прямая сумма групп

$$\nabla^m (Q_i^{n'} \bmod R^{n-1'}_i)\quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{3}$$

Так как $Q_i^{n'}$ является конусом над $R^{n-1'}_i$, то $\nabla^m (Q_i^{n'} \bmod R^{n}{}_i^{1'})$ изоморфна (пример VIII 8) группе $\nabla^m(R^{n-1'}_i)$, которая, по индуктивному предположению, в свою очередь изоморфна группе $\nabla^{m-1} (R^{n-1}_i)$ (при гомоморфизме, порожденном оператором π). Из примера VIII 11 вытекает, что $\nabla^m(Q_i^{n'} \bmod R^{n-1'}_i)$ есть нулевая группа при $m < n$ и изоморфна группе G при $m = n$; кроме того, ∇-класс n-мерного ∇-цикла φ комплекса $Q_i^{n'} \bmod R^{n-1'}_i$ характеризуется элементом $\sum\limits_{s^{n'} < \cdot\, s_i^n} \varphi(s^{n'})$ группа G. Замечая далее, что для произвольной n-мерной, цепи φ комплекса K' соотношение $\pi\varphi = 0$ эквивалентно соотношению $\sum\limits_{s^{n'} < \cdot s_i^n} \varphi(s^{n'}) = 0$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, r$, получаем следующее утверждение.

J) Все группы $\nabla^m(K' \bmod K^{n-1'})$ при $m < n$ являются нулевыми группами. n-мерный ∇-цикл φ комплекса $K' \bmod K^{n-1'}$ гомологичен нулю в том и только в том случае, если $\pi\varphi = 0$.

Продолжим теперь доказательство предложения I). Рассмотрим сначала случай $m = n$. Пусть ψ_1 — $(n-1)$-мерная цепь комплекса K' такая, что $\pi\psi_1 = \Psi$ (такая цепь, конечно, может быть найдена, ибо π является гомоморфизмом группы $L^n(K')$ на группу $L^n(K)$. Тогда мы имеем

$$\pi(\varphi - \nabla\psi_1) = \pi\varphi - \nabla\pi\psi_1 = \pi\varphi - \nabla\Psi = 0.$$

В силу второй части J), это означает, что ∇-цикл

$$h_{K' \setminus K^{n-1'}}(\varphi - \nabla\psi_1)$$

гомологичен нулю, другими словами

$$\varphi - \nabla\psi_1 = \nabla\psi_2, \tag{4}$$

где ψ_2 — некоторая $(n-1)$-мерная цепь комплекса K', удовлетворяющая условию: $\psi_2(s^{n-1'}) = 0$, если $s^{n-1'} \in K^{n-1'}$. Отсюда следует, что $\pi\psi_2 = 0$, а это вместе с (4) показывает, что цепь $\psi = \psi_1 + \psi_2$ удовлетворяет требованиям I).

Пусть теперь $m \leqslant n-1$. Применяя индуктивное предположение к комплексу K^{n-1}, устанавливаем прежде всего существование $(m-1)$-мерной цепи ψ_1 комплекса $K^{n-1'}$ такой, что $\pi\psi_1 = h_{K^{n-1}}\Psi$ и $\nabla\psi_1 = h_{K^{n-1'}}\varphi$. В силу первой части предложения J), предположения F) выполнены, и, следовательно, можно построить цепь ψ комплекса K', являющуюся продолжением цепи ψ_1 и имеющую φ своей ∇-границей. Очевидно, ψ удовлетворяет требованиям предложения I). Таким образом, доказательство I), а следовательно, и H), закончено.

Рассмотрим теперь оператор π', ставящий каждой m-мерной цепи Φ комплекса K в соответствие m-мерную цепь $\pi'\Phi$ комплекса K', определенную следующим образом: $\pi'\Phi(s^{m'}) = \Phi(s^m)$, если $s^{m'} < \cdot s^m$, и $\pi'\Phi(s^{m'}) = 0$, если $s^{m'}$ не является подсимплексом никакого симплекса s^m. Ясно, что π' устанавливает гомоморфизм группы $L^m(K, G)$ в группу $L^m(K', G)$. Легко проверить, что π' коммутирует с граничным оператором: $\pi'\Delta\Phi = \Delta\pi'\Phi$ для любой m-мерной цепи Φ комплекса K, $m \geqslant 0$.

Следовательно, π' приводит к гомоморфизму группы $\Delta^m(K,G)$ в группу $\Delta^m(K',G)$. По аналогии с H) имеем:

H′) *Гомоморфизм группы* $\Delta^m(K,G)$ *в группу* $\Delta^m(K',G)$, *порожденный оператором* π', *является изоморфизмом группы* $\Delta^m(K,G)$ *на группу* $\Delta^m(K',G)$.

Доказательство[1]) предложения H′) совершенно аналогично доказательству предложения H). Рассуждения, использованные при доказательстве предложения G′), показывают, что H′) содержится в

I′) Пусть Φ — $(m-1)$-мерный Δ-цикл комплекса K, и ψ — m-мерная цепь комплекса K' такая, что $\Delta\psi = \pi'\Phi$. Тогда существует m-мерная цепь Ψ комплекса K такая, что $\pi'\Psi$ гомологично ψ и, следовательно, $\Delta\Psi = \Phi$.

Доказательство предложения I′). I′) тривиально, сли $\dim K = 0$. Пусть $\dim K = n > 0$, и предположим, что I′) имеет место для всех комплексов размерности $\leqslant n-1$. Используя это индуктивное предположение, мы установим, в полной аналогии с J), предложение:

J′) при $m < n$ группы $\Delta^m(K' \bmod K^{n-1\prime})$ являются нулевыми группами. n-мерная цепь φ комплекса $K' \bmod K^{n-1\prime}$ является Δ-циклом $\bmod K^{n-1\prime}$ в том и только в том случае, если $h_{K'}\varphi$ является образом некоторой цепи комплекса K при гомоморфизме π'.

Доказательство предложения J′) мы опускаем. Докажем теперь I′) сначала для случая $m = n$. Так как $\pi'\Phi(s^{n-1\prime}) = 0$, если $s^{n-1\prime} \notin K^{n-1\prime}$, то из соотношения $\Delta\psi = \pi'\Phi$ следует, что $h_{K' \setminus K^{n-1}}\psi$ является Δ-циклом $\bmod K^{n-1\prime}$. В силу второй части J′), отсюда вытекает, что существует цепь Ψ комплекса K такая, что $\pi'\Psi = \psi$.

Пусть теперь $m \leqslant n-1$. В силу F′) и J′), существует m-мерная цепь ψ_1 комплекса $K^{n-1\prime}$ такая, что $h_{K'}\psi_1$ гомологично ψ. По индуктивному предположению, примененному к комплексу $K^{n-1\prime}$, существует m-мерная цепь Ψ комплекса K^{n-1} такая, что $\pi'\Psi$ гомологично ψ_1; это значит, что $\pi' h_K \Psi$ гомологично $h_{K'}\psi_1$ и, следовательно, ψ. Таким образом, цепь $h_K\Psi$ удовлетворяет требованиям предложения I′).

Замечание. H) и H′) представляют собой частные случаи основной теоремы комбинаторной топологии (предложение 4 E)): два комплекса, имеющие гомеоморфные геометрические реализации, имеют изоморфные ∇- и Δ-группы. Именно эта теорема

[1]) H′) можно также получить из H) применением методов двойственности, развитых ниже, в § 2. См. сноску на стр. 176.

дает ∇- и Δ-группам, в отличие от групп Δ-циклов, ∇-циклов, ограничивающих Δ-циклов и т. д., их топологическое значение.

Пример VIII 11. Пусть R^n, $R^{n'}$, $R^{n''}$, ...—элементарная n-мерная сфера и ее последовательные барицентрические подразделения. Из H) и H′) следует, что ∇- и Δ-группы этих комплексов одни и те же, т. е. (см. пример VIII 11) $\nabla^m(R^{n(i)}, G) = \Delta^m(R^{n(i)}, G) = 0$, если $m < n$, и $\nabla^n(R^{n(i)}, G) = \Delta^n(R^{n(i)}, G) = G$.

Можно расширить понятие барицентрического подразделения, определив *барицентрическое подразделение комплекса K по модулю подкомплекса L.* Мы ограничимся геометрическим определением этого вида подразделения в терминах полиэдров P и Q, являющихся геометрическими реализациями комплексов K и L, предоставляя читателю абстрактную формулировку. Под барицентрическим подразделением полиэдра $P \bmod Q$, где Q—подполиэдр полиэдра P, мы понимаем однозначно определенное подразделение полиэдра P, вершинами которого являются вершины полиэдра P и центры тяжести тех клеток полиэдра P, которые не содержатся в Q (так что Q не подразделяется). Операторы π и π' определяются так же, как и раньше, и предложения H) и H′) остаются справедливыми. Ясно, что можно говорить о *последовательных барицентрических подразделениях комплекса $K \bmod L$.*

2. Двойственность

Определение VIII 8. Пусть Π—группа действительных чисел, приведенных по модулю 1, и G—произвольная (абелева) группа. Гомоморфизм группы G в группу Π называется *характером* группы G. Если χ_1 и χ_2—два характера группы G, то характер χ, определенный равенством

$$\chi(g) = \chi_1(g) + \chi_2(g), \qquad g \in G,$$

называется *суммой* характеров χ_1 и χ_2. При таком определении характеры группы G образуют группу; эта группа называется *группой характеров* группы G и обозначается через G^*. Нулевым характером группы G является гомоморфизм, отображающий все G в нуль группы Π.

Замечание. Если G—счетная дискретная группа, то мы вводим в группу G^* топологию, следующим образом определяя сходимость: $\chi_n \to \chi$ в G^*, если для каждого $g \in G$ в группе Π

выполнено соотношение: $\chi_n(g) \to \chi(g)$. Оказывается[1]), что полученное таким образом топологическое пространство компактно и обладает счетным базисом; кроме того, группа *непрерывных* характеров группы G^* дискретна и изоморфна группе G.

На протяжении § 2 $G^{\cdot}$ будет обозначать счетную дискретную группу, а ее группа характеров топологизируется в соответствии с только что сделанным замечанием.

Пример VIII 12. Пусть $G = \mathfrak{J}$. Тогда G^* изоморфна Π.

Пример VIII 13. Пусть G—группа конечного порядка. Тогда G^* изоморфна G.

Определение VIII 9. Пусть H—подгруппа группы G. Совокупность характеров группы G, отображающих все элементы подгруппы H в нуль группы Π, образует замкнутую подгруппу группы G^*, называемую *аннулятором* подгруппы H. Обратно, для данной подгруппы J группы G^* совокупность элементов группы G, отображаемых каждым элементом подгруппы J в нуль группы Π, образует подгруппу группы G, называемую *аннулятором* подгруппы J.

Следует обратить внимание на то, что аннулятор подгруппы группы G является подгруппой группы G^*, аннулятор подгруппы группы G^* является подгруппой группы G, и чем меньше подгруппа, тем больше ее аннулятор.

Наиболее важное свойство аннуляторов содержится в следующем предложении A), доказанном Понтрягиным[2]), которое мы приводим здесь без доказательства.

A) a) Пусть H—подгруппа группы G и J—замкнутая подгруппа группы G^*. Тогда J является аннулятором подгруппы H в том и только в том случае, если H является аннулятором подгруппы J. b) В этом случае факторгруппа G^*/J является группой характеров группы H, и J является группой характеров группы G/H.

В качестве простого следствия предложения A) мы докажем:

B) Пусть H—подгруппа группы G, L—подгруппа группы H, $A(H)$ — аннулятор подгруппы H, и $A(L)$ — аннулятор подгруппы L. Тогда $A(L)/A(H)$ есть группа характеров группы H/L.

Доказательство. Из предложения A) следует, что $A(L)$ является группой характеров факторгруппы G/L. Снова применяя A), на этот раз к группе G/L и ее подгруппе H/L, получаем наше утверждение.

---

[1]) Понтрягин, стр. 143—теорема 31 и стр. 149—теорема 32.

[2]) То же, стр. 151—теоремы 33 и 34.

Нужно отметить также следующее следствие первой части предложения A):

C) Пусть g фиксировано. Если $\chi(g)=0$ для произвольного χ, то $g=0$, т. е. аннулятором группы G^* является нулевая подгруппа группы G.

Определение VIII 10. Рассмотрим две группы G_1 и G_2 и гомоморфизм h группы G_1 в группу G_2. Каждому характеру χ группы G_2 поставим в соответствие характер $h^*\chi$ группы G_1, согласно формуле

$$\{h^*\chi\}(g_1)=\chi(h(g_1)),$$

где g_1 — произвольный элемент группы G_1. Таким образом, мы получаем гомоморфизм h^* группы $G_2{}^*$ в группу $G_1{}^*$, и этот гомоморфизм h^* называется *сопряженным* с гомоморфизмом h.

D) Пусть G_1 и G_2 — две группы, и h — гомоморфизм группы G_1 в группу G_2. Тогда аннулятор подгруппы $h(G_1)$ группы G_2 является ядром гомоморфизма h^*, сопряженного с h. Далее, аннулятор группы $h^*(G_2^*)$ является ядром гомоморфизма h.

Доказательство. Первая часть, непосредственно следует из определения VIII 10, так как $\chi(h(g_1))=0$ означает $\{h^*\chi\}(g_1)=0$. Чтобы доказать вторую часть заметим, что аннулятор подгруппы $h^*(G_2^*)$ состоит из тех элементов $g_1 \in G_1$, для которых

$$\{h^*\chi\}(g_1)=\chi(h(g_1))=0 \text{ для произвольного } \chi \in G_2^*;$$

но это означает, в силу C), что $h(g_1)=0$.

E) Не только гомоморфизм h^* определяется гомоморфизмом h, но и гомоморфизм h определяется гомоморфизмом h^*, т. е. соответствие между гомоморфизмом и сопряженным с ним гомоморфизмом взаимно однозначно.

Доказательство. Пусть h и h' — два гомоморфизма группы G_1 в группу G_2, и h^* и h'^* — сопряженные с ними гомоморфизмы. Рассмотрим гомоморфизм $h-h'$ группы G_1 в группу G_2, определенный, естественным образом, соотношением

$$\{h-h'\}(g_1)=h(g_1)-h'(g_1).$$

Легко видеть, что гомоморфизмом, сопряженным с $h-h'$, является гомоморфизм $h^*-h'^*$. Предположим теперь, что $h^*=h'^*$. Тогда (см. определение VIII 10) для каждого характера χ группы G_2 и элемента $g_1 \in G_1$

$$0=\chi(\{h-h'\}(g_1)).$$

Следовательно, в силу C), $\{h-h'\}(g_1)=0$, т. е. $h=h'$. Таким образом, различные гомоморфизмы h и h' не могут иметь один и тот же сопряженный с ними гомоморфизм.

F) Для того чтобы гомоморфизм h был гомоморфизмом группы G_1 *на* группу G_2, необходимо и достаточно, чтобы гомоморфизм $\overset{*}{h}$ группы $\overset{*}{G_2}$ в группу $\overset{*}{G_1}$ был изоморфизмом.

Доказательство. Вспоминая, что гомоморфизм является изоморфизмом в том и только в том случае, если его ядро состоит лишь из нуля группы, мы видим из первой части D), что h^* является изоморфизмом в том и только в том случае, если аннулятор группы $h(G_1)$ состоит лишь из нуля группы $\overset{*}{G_2}$. Но в силу A) а) это эквивалентно утверждению, что $h(G_1)$ является аннулятором нулевой подгруппы группы $\overset{*}{G_2}$, т. е. $h(G_1)=G_2$.

ДВОЙСТВЕННОСТЬ МЕЖДУ Δ- и ∇-ГРУППАМИ КОМПЛЕКСА

Применим теперь аппарат теории характеров для изучения гомологических свойств комплексов. Пусть K — комплекс, G — счетная группа, и $n\geqslant -1$. Пусть L^n — группа всех n-мерных цепей комплекса K по области коэффициентов G. Пусть f — характер группы L^n. Пусть s_0^n — фиксированный n-мерный симплекс комплекса K. Применяя f к элементарным цепям gs_0^n, получаем характер группы G. Обозначим этот характер через $\chi=\chi(s_0^n)$. Тогда, очевидно,

$$\chi(-s_0^n)=-\chi(s_0^n).$$

Следовательно, χ является n-мерной цепью по области коэффициентов G^* (определение VIII 2). Можно легко проверить, что таким образом установлен изоморфизм между группой $L^n(K, G^*)$ и группой характеров группы $L^n(K, G)$. Если φ — n-мерная цепь по области коэффициентов G и ψ — n-мерная цепь по области коэффициентов G^*, то элемент $\psi(\varphi)$ группы Π, в который отображается элемент $\varphi\in L^n(K, G)$ характером ψ, может быть вычислен следующим образом: пусть $\pm s_i^n$, $i=1,\ldots,k$, — ориентированные n-мерные симплексы комплекса K. Тогда

$$\psi(\varphi)=\sum_{i=1}^{k}\{\psi(s_i^n)\}(\varphi(s_i^n)). \qquad (1)$$

Теперь мы утверждаем, что если φ^* — $(n+1)$-мерная цепь по области коэффициентов G^*, и φ — n-мерная цепь по области коэффициентов G, то

$$\{\Delta\varphi^*\}(\varphi) = \{\varphi^*\}(\nabla\varphi). \qquad (2)$$

Легко проверить (2), используя (1). Формула (2) показывает, что гомоморфизм Δ группы $L^{n+1}(K, G^*)$ в группу $L^n(K, G)$ является сопряженным (определение VIII 10) с гомоморфизмом ∇ группы $L^n(K, G)$ в группу $L^{n+1}(K, G)$. Используем теперь предложение D). Заметим, что ядром гомоморфизма Δ является группа $Z^{n+1}_\Delta(K, G^*)$ n-мерных Δ-циклов, ядром гомоморфизма ∇ является группа $Z^n_\nabla(K, G)$ n-мерных ∇-циклов, образом группы $L^{n+1}(K, G^*)$ при гомоморфизме Δ является группа $H^n_\Delta(K,G^*)$ n-мерных ограничивающих Δ-циклов и образом $L^n(K,G)$ при гомоморфизме ∇ является группа $H^{n+1}_\nabla(K, G)$ $(n+1)$-мерных ограничивающих ∇-циклов. Получаем результат (понижая в a) размерность на единицу):

G) a) $Z^n_\Delta(K,G^*)$ является аннулятором группы $H^n_\nabla(K, G)$,

b) $Z^n_\nabla(K,G)$ является аннулятором группы $H^n_\Delta(K, G^*)$.

Пользуясь предложением A), заменим b) на

b′) $H^n_\Delta(K,G^*)$ является аннулятором группы $Z^n_\nabla(K,G)$.

Из G) получаем следующий результат, являющийся главной целью настоящего параграфа:

H) $\Delta^n(K, G^*)$ *является группой характеров группы* $\nabla^n(K,G)$. *В частности,* $\Delta^n(K, \Pi)$ *является группой характеров группы* $\nabla^n(K, \mathfrak{J})$.

Доказательство. Применяем предложения B) и G), взяв $L^n(K,G)$ в качестве G, $Z^n_\nabla(K,G)$ — в качестве H и $H^n_\nabla(K,G)$ — в качестве L.

Замечание 1. Пользуясь аналогичными методами, можно доказать, что $\nabla^n(K, G^*)$ является группой характеров группы $\Delta^n(K,G)$.

Замечание 2. $\Delta^n(K, G^*)$ и $\nabla^n(K, G^*)$, как группы характеров счетных групп $\nabla^n(K, G)$ и $\Delta^n(K, G)$, являются компактными группами со счетным базисом (см. замечание на стр. 167). В действительности, топология в этих группах может быть определена непосредственно с помощью топологии группы G^*, без использования групп $\nabla^n(K,G)$ и $\Delta^n(K,G)$.

Замечание 3. В теории связности конечных комплексов теория ∇-гомологий не обладает никакими специальными преимуществами по сравнению с теорией Δ-гомологий. Положение, однако, меняется, когда мы переходим к теории связности более общих пространств, где существует несомненное преимущество в употреблении ∇-гомологии.

3. Симплициальные отображения комплексов

Определение VIII 11. Мы говорим, что f есть *симплициальное* отображение комплекса K_1 в комплекс K_2, если f каждой вершине $p \in K_1$ ставит в соответствие некоторую вершину $f(p) \in K_2$ таким образом, что для любого n-мерного симплекса комплекса K_1 с вершинами $p_0, \ldots, p_n$ точки $f(p_0), \ldots, f(p_n)$ являются вершинами некоторого симплекса комплекса K_2 (размерности, возможно, меньшей, чем n). Пусть $s^n = (p_0, \ldots, p_n)$ — ориентированный n-мерный симплекс комплекса K_1, и f — симплициальное отображение комплекса K_1 в комплекс K_2. Если все вершины $f(p_0), \ldots, f(p_n)$ различны, то через $f(s^n)$ обозначаем ориентированный n-мерный симплекс $(f(p_0), \ldots, f(p_n))$; в противном случае $f(s^n)$ не определено.

А) Пусть f — симплициальное отображение комплекса K_1 в комплекс K_2. Тогда[1]) f порождает гомоморфизм h^f группы $\nabla^n(K_2)$ в группу $\nabla^n(K_1)$, определяемый следующим образом: Если дана n-мерная цепь ψ комплекса K_2, то мы ставим ей в соответствие n-мерную цепь $\varphi = h^f\psi$ комплекса K_1, полагая

$$\varphi(s^n) = \psi(f(s^n)), \text{ если } f(s^n) \text{ определено,}$$
$$\varphi(s^n) = 0 \text{ в противном случае.}$$

Очевидно, h^f является гомоморфизмом группы $L^n(K_2)$ в группу $L^n(K_1)$. Легко проверить, что h^f коммутирует с ∇. Следовательно (предложение 1 С)), h^f приводит к гомоморфизму группы $\nabla^n(K_2)$ в группу $\nabla^n(K_1)$, который мы продолжаем обозначать символом h^f.

В) Аналогично, симплициальное отображение f комплекса K_1 в комплекс K_2 порождает гомоморфизм h_f группы $\Delta^n(K_1)$ в группу $\Delta^n(K_2)$, определяемый следующим образом: пусть z^n — произвольный n-мерный симплекс комплекса K_2. Тогда произвольной n-мерной цепи φ комплекса K_1 мы ставим в соответствие n-мерную цепь $\psi = h_f\varphi$ комплекса K_2, полагая

$$\psi(z^n) = \sum_{f(s^n) = z^n} \varphi(s^n).$$

1) Область коэффициентов G произвольна.

Очевидно, h_f является гомоморфизмом группы $L^n(K_1)$ в группу $L^n(K_2)$. Легко видеть, что h_f коммутирует с Δ. Следовательно (предложение 1 С)), h_f приводит к гомоморфизму группы $\Delta^n(K_1)$ в группу $\Delta^n(K_2)$, который мы продолжаем обозначать через h_f.

Легко доказать, что если f — симплициальное отображение комплекса K_1 в комплекс K_2 и g — симплициальное отображение комплекса K_2 в комплекс K_3, то гомоморфизм h_{gf} группы $\Delta^n(K_1)$ в $\Delta^n(K_3)$, порожденный отображением gf, равен произведению $h_g h_f$. Аналогичное утверждение о транзитивности имеет место для гомоморфизмов ∇-групп, порожденных симплициальными отображениями.

C) Пусть G^* — группа характеров группы G, f — симплициальное отображение комплекса K_1 в комплекс K_2, h_f — гомоморфизм группы $L^n(K_1, G^*)$ в группу $L^n(K_2, G)$, порожденный отображением f, и h^f — гомоморфизм группы $L^n(K_2, G)$ в группу $L^n(K_1, G)$, порожденный отображением f. Мы утверждаем, что h_f является сопряженным с h^f гомоморфизмом (определение VIII 10), т. е. если ψ — n-мерная цепь комплекса K_1 по области коэффициентов G^* и φ — n-мерная цепь комплекса K_2 по области коэффициентов G, то

$$\{h_f \psi\}(\varphi) = \psi(h^f(\varphi)).$$

Простое доказательство этого факта предоставляется читателю.

D) Пусть G — счетная группа, и G^* — ее группа характеров. Вспомним, что группы $\Delta^n(K_1, G^*)$ и $\Delta^n(K_2, G^*)$ являются группами характеров групп $\nabla^n(K_1, G)$ и $\nabla^n(K_2, G)$. Если в соотношении (1) ψ будет Δ-циклом, а φ — ∇-циклом, то мы видим, что гомоморфизм h_f группы $\Delta^n(K_1, G^*)$ в группу $\Delta^n(K_2, G^*)$ является сопряженным с гомоморфизмом h^f группы $\nabla^n(K_2, G)$ в группу $\nabla^n(K_1, G)$. Используя аналогичные методы, можно доказать, что f порождает сопряженные друг с другом гомоморфизмы: группы $\nabla^n(K_2, G^*)$ в группу $\nabla^n(K_1, G^*)$ и группы $\Delta^n(K_1, G)$ в группу $\Delta^n(K_2, G)$.

Пример VIII 14. Пусть L — подкомлекс комплекса K, и f — тождественное отображение L в K. Тогда f есть симплициальное отображение. Гомоморфизмы ∇-групп комплекса K в ∇-группы комплекса L и Δ-групп комплекса L в Δ-группы комплекса K, порожденные f, являются, конечно, естественными гомоморфизмами этих групп (определение VIII 7).

Пример VIII 15. Пусть K — комплекс, и K' — его барицентрическое подразделение. На стр. 147 мы определили гомоморфизм π групп n-мерных цепей комплекса K' в группу n-мерных цепей комплекса K, и мы знаем (предложение 1 Н)), что этот гомоморфизм порождает изоморфизм группы $\nabla^n(K', G)$ на группу $\nabla^n(K, G)$.

Поставим теперь каждой вершине p комплекса K' в соответствие определенную, хотя и произвольно выбранную, вершину того симплекса комплекса K, центром тяжести которого является p. Тогда мы получим симплициальное отображение f комплекса K' в K и, следовательно, гомоморфизм h^f (см. А)) группы $L^n(K, G)$ в $L^n(K', G)$. Легко видеть, что πh^f есть тождественное отображение группы $L^n(K, G)$ на себя. Следовательно, πh^f в применении к группе $\nabla^n(K, G)$ также является тождественным отображением, и так как, что было замечено выше, π является изоморфизмом группы $\nabla^n(K', G)$ на $\nabla^n(K, G)$, то также должно быть верным, что h^f является изоморфизмом группы $\nabla^n(K, G)$ на $\nabla^n(K', G)$. Таким образом, получаем результат, состоящий в том, что гомоморфизм группы $\nabla^n(K, G)$ в группу $\nabla^n(K, G)$, порожденный отображением f, является, в действительности, изоморфизмом группы $\nabla^n(K, G)$ на группу $\nabla^n(K', G)$, обратным гомоморфизму π.

Подобным образом можно показать, что гомоморфизм группы $\Delta^n(K', G)$ в группу $\Delta^n(K, G)$, порожденный отображением f, является, в действительности, изоморфизмом группы $\Delta^n(K', G)$ на $\Delta^n(K, G)$, обратным изоморфизму π'. Кроме того, если G — счетная группа, то изоморфизм π' группы $\nabla^n(K, G^*)$ на $\nabla^n(K', G^*)$ является сопряженным гомоморфизмом с изоморфизмом π группы $\nabla^n(K', G)$ на $\nabla^n(K, G)$.

Пример VIII 16. Пусть K — комплекс, и R — элементарная n-мерная сфера (см. пример VIII 11) или одно из ее последовательных барицентрических подразделений. Пусть f — симплициальное отображение K в R, и $\mathfrak{J}$ — группа целых чисел. Тогда мы знаем, что $\nabla^n(R, \mathfrak{J})$ есть свободная циклическая группа, образующий элемент которой определяется ориентацией сферы. Следовательно, гомоморфизм h^f группы $\nabla^n(R, \mathfrak{J})$ в группу $\nabla^n(K, \mathfrak{J})$ вполне определяется элементом $h^f(\alpha)$, соответствующим образующему элементу α группы $\nabla^n(R, \mathfrak{J})$; этот элемент называется *степенью* отображения f. Степень отображения f легко вычисляется. Пусть z_0^n — произвольный положительно ориентированный n-мерный симплекс[1]) n-мерной сферы R. В силу примера VIII 11, элементарная цепь

---

[1]) Т. е. ориентированный подсимплекс одного из ориентированных симплексов элементарной n-мерной сферы.

$1 \cdot z_0^n$ представляет ∇-класс, являющийся образующим элементом группы $\nabla^n(R, \mathfrak{J})$. Тогда степень отображения f есть ∇-класс следующей цепи φ комплекса K: для каждого n-мерного симплекса s^n комплекса K:

$$\begin{aligned} \varphi(s^n) &= 1, && \text{если } f(s^n) = z_0^n, \\ \varphi(s^n) &= -1, && \text{если } f(s^n) = -z_0^n, \\ \varphi(s^n) &= 0 && \text{в иных случаях.} \end{aligned}$$

Если K также является элементарной n-мерной сферой или одним из ее барицентрических подразделений, то степень отображения f можно рассматривать как целое число, именно $\sum \varphi(s^n)$, где сумма берется по всем положительно ориентированным симплексам s^n; интуитивно степень показывает, сколько раз симплекс z_0^n положительно накрывается при отображении f, причем для каждого целого числа m легко построить отображение f степени m.

Пусть K — снова произвольный комплекс; рассмотрим группу характеров Π группы $\mathfrak{J}$. Симплициальное отображение f порождает гомоморфизм h_f группы $\Delta^n(K, \Pi)$ в группу $\Delta^n(R, \Pi)$. Мы знаем, что $\Delta^n(R, \Pi)$ изоморфна Π, так что h_f является характером группы $\Delta^n(K, \Pi)$. Но h_f является сопряженным с h^f гомоморфизмом, и, следовательно, каждый из этих гомоморфизмов определяется другим. Таким образом, степень отображения f можно с таким же успехом определять с помощью этого характера[1]) группы $\Delta^n(K, \Pi)$.

Замечание. Точно таким же образом можно определить степень отображения для более общего случая симплициального отображения n-мерного комплекса в произвольное n-мерное ориентируемое псевдомногообразие (см. пример VIII 5). Если комплекс K и сам является ориентируемым псевдомногообразием, то степень отображения можно рассматривать как целое число.

E) Пусть f и g — два симплициальные отображения комплекса K_1 в комплекс K_2, обладающие следующим свойством: для каждого симплекса s комплекса K_1 симплексы $f(s)$ и $g(s)$ являются гранями некоторого симплекса комплекса K_2. Тогда f и g порождают одни и те же гомоморфизмы Δ-групп ком-

---

[1]) Это находится также в согласии с тем фактом, что $\nabla^n(K, \mathfrak{J})$ есть группа непрерывных характеров своей группы характеров $\Delta^n(K, \Pi)$ (см. замечание на стр. 167).

плекса K_1 в Δ-группы комплекса K_2 и ∇-групп комплекса K_2 в ∇-группы комплекса K_1.

Доказательство. Достаточно доказать E) для ∇-групп, так как при заданной счетной группе G гомоморфизм группы $\nabla^n(K_2, G^*)$ в группу $\nabla^n(K_1, G^*)$, порожденный отображением f, является сопряженным (предложение D)) с гомоморфизмом группы $\Delta^n(K_1, G)$ в $\Delta^n(K_2, G)$, порожденным f, и, следовательно (предложение 2 E)), второй определяется первым. Случай произвольной группы G, взятой в качестве области коэффициентов, сводится к случаю счетной группы[1]) с помощью следующего простого замечания. Пусть φ — n-мерный Δ-цикл комплекса K_1 по области коэффициентов G, и пусть G_1 — счетная подгруппа группы G, порожденная элементом $\varphi(s^n)$. Тогда $h_f\varphi$ и $h_g\varphi$ можно рассматривать как n-мерные Δ-циклы по области коэффициентов G_1, и если они гомологичны по отношению к области коэффициентов G_1, то тем более они будут гомологичны по отношению к области коэффициентов G.

Можно предположить, что g и f отличаются друг от друга лишь на одной вершине комплекса K_1, так как g можно получить из f с помощью конечного числа изменений, каждая из которых состоит в перемене образа лишь одной вершины. В соответствии с этим пусть p — единственная вершина, для которой $f(p)$ отлично от $g(p)$. Поставим в соответствие каждой n-мерной цепи φ комплекса K_2 $(n-1)$-мерную цепь φ^* комплекса K_1 следующим образом: пусть $s^{n-1} = (p_0, \ldots, p_{n-1})$ — $(n-1)$-мерный симплекс комплекса K_1, имеющий p своей вершиной, и такой, что симплекс $f(s^{n-1})$ определен и не имеет $g(p)$ своей вершиной. Пусть z^n — n-мерный симплекс комплекса K_2, вершинами которого являются вершины симплекса $f(s^{n-1})$ и вершина $g(p)$, а ориентация определяется следующим образом: $z^n = (g(p), f(p_0), \ldots, f(p_{n-1}))$.

Тогда мы полагаем: $\varphi^*(s^{n-1}) = \varphi(z^n)$. Для всех $(n-1)$-мерных симплексов s^{n-1} комплекса K_1, не обладающих указанными свойствами, полагаем: $\varphi^*(s^{n-1}) = 0$. Обозначим через h^f и h^g гомоморфизмы группы $L^n(K_2, G)$ в группу $L^n(K_1, G)$, порожденные соответственно отображениями f и g. Тогда простые вычисления показывают, что

$$\nabla\varphi^* = -(\nabla\varphi)^* + h^f\varphi - h^g\varphi.$$

---

[1]) Аналогичные рассуждения можно использовать для того, чтобы получить предложение 1 H′) из предложения 1 H).

Если φ — ∇-цикл, то первый член в правой части равенства равен нулю, так что эта формула устанавливает ∇-гомологию между $h^f\varphi$ и $h^g\varphi$ и доказывает предложение.

4. Δ- и ∇-группы компактов

Одним из крупнейших достижений топологии в последние годы было перенесение теории гомологий с полиэдров на произвольные компакты[1]). Это — один из наиболее существенных шагов в установлении связи между комбинаторными и теоретико-множественными методами в топологии.

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ СПЕКТРЫ

Пусть Σ — *частично упорядоченное множество*, т. е. множество, в котором существует транзитивное соотношение $<$, определенное[2]) для некоторых (не обязательно всех) пар элементов. Подмножество Σ' множества Σ называется *конфинальным* множеству Σ, если для любого элемента $\sigma \in \Sigma$ существует элемент $\sigma' \in \Sigma'$, следующий за σ: $\sigma < \sigma'$. Σ называется *направленным* множеством, если для любой пары элементов $\sigma\tau \in \Sigma$ существует элемент $\rho \in \Sigma$, следующий, как за σ, так и за τ: $\sigma < \rho$ и $\tau < \rho$.

Определение VIII 12. Пусть Σ — направленное частично упорядоченное множество. Пусть каждому элементу $\sigma \in \Sigma$ поставлена в соответствие группа G_σ, а каждой паре элементов $\sigma < \tau$ соответствует гомоморфизм $h^{\sigma\tau}$ группы G_σ в группу G_τ,

---

[1]) Наше изложение тесно связано со стинродовской трактовкой чеховской теории гомологий: N. Steenrod. Universal Homology Groups, *American Journ. of Math.* 58 (1936), стр. 661 — 701; Čech, Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque, *Fund. Math.* **19** (1937), стр. 149 — 184, а также с работой Фрейденталя: «Alexanderscher und Gordonscher Ring und ihre Isomorphie», *Annals of Mathematics* **38** (1937), стр. 647 — 655. Работа Чеха, в свою очередь, опирается на идеи Александрова о спектрах и нервах покрытий «Untersuchungen über Gestalt und Lage abgechlossener Mengen beliebiger Dimension,» *Annals of Mathematics* **30** (1929), стр. 71 — 85. В отличие от методов Александрова и Чеха, старая теория Виеториса пользовалась бесконечными комплексами, вершинами которых являются точки пространства.

См. также работу Александрова (которая появилась, когда наша книга уже находилась в печати). «General combinatorial topology» *Trans. Am. Math. Soc.* 49 (1941), 41 — 105 «Общая теория гомологий», Учебные записки МГУ, вып. 45 (1940, стр. 1 — 60).

[2]) Мы не предполагаем, что из $\sigma < \tau$ и $\tau < \sigma$ следует, что $\sigma = \tau$.

причем предполагается, что если $\rho < \sigma < \tau$, то всегда

$$h^{\rho\tau} = h^{\sigma\tau}(h^{\rho\sigma}).$$

Такая система групп называется *прямым спектром.* Для данного прямого спектра мы определим теперь новую группу, называемую *предельной группой G прямого спектра.* Элемент g_σ группы G_σ называется *эквивалентным* элементу g_τ группы G_τ, если существует такое $\rho \in \Sigma$, что $\sigma < \rho$, $\tau < \rho$ и в группе G_ρ: $h^{\sigma\rho} g_\sigma = h^{\tau\rho} g_\tau$. Класс, состоящий из всех элементов, эквивалентных некоторому элементу g_σ группы G_σ, считается, по определению, *элементом* группы G, а g_σ называется *представителем*[1]) в группе G_σ этого элемента предельной группы. *Сложение* в G определяется следующим образом. Пусть g_σ и g_τ — представители двух элементов g и g' группы G, соответственно в группах G_σ и G_τ, и пусть ρ — такой элемент множества Σ, что $\sigma < \rho$ и $\tau < \rho$. Тогда под *суммой* элементов g и g' понимаем элемент группы G, определенный элементом $h^{\sigma\rho} g_\sigma + h^{\tau\rho} g_\tau$ группы G_ρ. (Нулем группы G является класс, содержащий нули каждой группы G_σ.)

Пример VIII 17. Пусть G_1, G_2, ... — последовательность групп, причем G_n является подгруппой группы G_{n+1} при каждом n, и пусть h^{mn}, $m \leqslant n$, — тождественное отображение G_m в G_n. Тогда, очевидно, $\{G_n\}$ является прямым спектром, а предельная группа изоморфна теоретико-множественной сумме групп G_n.

Пример VIII 18. Пусть $\{G_\sigma\}$ — прямой спектр такой, что $h^{\sigma\tau}$ является изоморфизмом группы G_σ на группу G_τ при любых $\sigma < \tau$. Тогда предельная группа спектра $\{G_\sigma\}$ изоморфна каждой группе G_σ.

A) Пусть Σ — направленное частично упорядоченное множество, Σ' — его конфинальное подмножество, и $\{G_\sigma\}$, $\sigma \in \Sigma$, — прямой спектр. Тогда подсистема системы $\{G_\sigma\}$, соответствующая элементам $\sigma \in \Sigma'$, является, очевидно, прямым спектром, и легко видеть, что предельная группа этого спектра изоморфна предельной группе всего спектра.

B) Если в прямом спектре $\{G_\sigma\}$, $\sigma \in \Sigma$, каждая группа G_σ счетна и если Σ имеет счетное конфинальное подмножество, то предельная группа прямого спектра счетна.

---

[1]) Элемент группы G не обязательно имеет представителей в каждой группе G_σ и может иметь несколько представителей в какой-либо группе G_σ, но он полностью определяется любым из своих представителей.

Определение VIII 13. Пусть Σ — направленное частично упорядоченое множество. Пусть каждому элементу $\sigma \in \Sigma$ поставлена в соответствие группа G_σ, а каждой паре элементов $\sigma < \tau$ соответствует гомоморфизм $h_{\tau\sigma}$ группы G_τ в[1]) группу G_σ, причем предполагается, что если $\rho < \sigma < \tau$, то всегда

$$h_{\tau\rho} = h_{\sigma\rho}\ (h_{\tau\sigma}).$$

Такая система групп называется *обратным спектром*. Определим теперь ***предельную группу G обратного спектра***[2]). Элементом группы G, по определению, считается система элементов $\{g_\sigma\}$, содержащая в точности по одному элементу g_σ из каждой группы G_σ и обладающая тем свойством, что если $\sigma < \tau$, то $h_{\tau\sigma}\ g_\tau = g_\sigma$; g_σ называется *представителем*[3]) этого элемента предельной группы в группе G_σ. *Сложение* в G определяется следующим образом: пусть g и g' — два элемента группы G, а g_σ и $g_\sigma{}'$ — их представители в группе G_σ. Тогда под суммой элементов g и g' понимаем систему элементов $\{g_\sigma + g'{}_\sigma\}$; (нулем предельной группы является система элементов, состоящая из нулей всех групп G_σ).

Пример VIII 19. Пусть $G_1, G_2, \ldots$ — последовательность групп, причем G_{n+1} является подгруппой группы G_n при каждом n, и пусть h_{nm}, $m \leqslant n$, — тождественный гомоморфизм G_n в G_m. Тогда последовательность $\{G_n\}$ является, очевидно, обратным спектром, а предельная группа изоморфна пересечению групп G_n.

Пример VIII 20. Пусть $\{G_\sigma\}$ — обратный спектр такой, что $h_{\tau\sigma}$ является изоморфизмом группы G_τ на группу G_σ при любых $\sigma < \tau$. Тогда предельная группа спектра $\{G_\sigma\}$ изоморфна каждой группе G_σ.

C) Пусть Σ — направленное частично упорядоченное множество, и Σ' — его конфинальное подмножество. Пусть $\{G_\sigma\}$, $\sigma \in \Sigma$, — обратный спектр. Тогда подсистема системы $\{G_\sigma\}$, соответствующая элементам $\sigma \in \Sigma'$, является, очевидно, обрат-

---

[1]) Вместо того, чтобы, как раньше: группы G_σ в группу G_τ.

[2]) Если $\{G_\sigma\}$ — обратный спектр, в котором группы G_σ — топологические и гомоморфизмы $h_{\tau\sigma}$ являются непрерывными, то предельную группу спектра $\{G_\sigma\}$ можно рассматривать как топологическую группу; но если $\{G_\sigma\}$ — прямой спектр, то в предельной группе спектра нельзя ввести топологию, исходя из топологии групп G_σ.

[3]) Таким образом, элемент группы G имеет в точности по одному представителю в каждой группе G_σ, но различные элементы группы G могут иметь одного и того же представителя в некоторой группе G_σ.

ным спектром, и легко видеть, что предельная группа этого спектра изоморфна предельной группе всего спектра[1]).

D) Пусть $\{G_\sigma\}$ — прямой спектр с гомоморфизмами $h^{\sigma\tau}$, $\sigma < \tau$. Пусть $\overset{*}{G}_\sigma$ — группа характеров группы G_σ и $\overset{*}{h}_{\tau\sigma}$ — гомоморфизм группы $\overset{*}{G}_\tau$ в группу $\overset{*}{G}_\sigma$, сопряженный с гомоморфизмом $h^{\sigma\tau}$ (см. определение VIII 10). Тогда: a) группы $\{\overset{*}{G}_\sigma\}$ с гомоморфизмами $\overset{*}{h}_{\tau\sigma}$ $\sigma<\tau$ образуют обратный спектр; b) если G — предельная группа спектра $\{G_\sigma\}$, то ее группа характеров $\overset{*}{G}$ является предельной группой спектра $\{\overset{*}{G}_\sigma\}$.

Доказательство. Предоставив доказательство утверждения a) читателю, приступим к доказательству утверждения b). Согласно определению предельной группы прямого спектра, каждый элемент $g_\sigma \in G_\sigma$ определяет некоторый элемент группы G, и это соответствие, очевидно, является гомоморфизмом h^σ группы G_σ в группу G. Далее, если $\sigma < \tau$,

$$h^\sigma = h^\tau h^{\sigma\tau}. \tag{1}$$

Пусть теперь χ — характер группы G. При фиксированном σ χh^σ является характером группы G_σ, т. е. элементом $\overset{*}{g}_\sigma$ группы $\overset{*}{G}_\sigma$. Далее, из (1) следует, что если $\sigma < \tau$, то

$$\overset{*}{h}_{\tau\sigma}\, \overset{*}{g}_\tau = \overset{*}{g}_\sigma, \tag{2}$$

и, следовательно, система элементов $\{\overset{*}{g}_\sigma\}$ является элементом предельной группы обратного спектра $\{\overset{*}{G}_\sigma\}$. Таким образом, каждому характеру группы G соответствует некоторый элемент предельной группы обратного спектра $\{\overset{*}{G}_\sigma\}$. Нетрудно довести это доказательство до конца, показав, что это соответствие является изоморфизмом группы G^* на предельную группу спектра $\{\overset{*}{G}_\sigma\}$.

Пример VIII 20. 1. Пусть каждая группа G_i, $i = 1, 2, \ldots$, есть группа $\mathfrak{J}$ целых чисел, и пусть h^{ik}, $i \leqslant k$, — гомоморфизм группы G_i в группу G_k, задаваемый формулой:

$$h^{ik}(m) = m \cdot 2^{k-i}, \quad m \in \mathfrak{J}. \tag{3}$$

Тогда группы $\{G_i\}$ с этими гомоморфизмами образуют прямой спектр, предельная группа G которого, как легко видеть,

[1]) Было бы ошибочно сделать из C) заключение, по аналогии с B), что если каждая группа G_σ счетна и Σ имеет счетное конфинальное подмножество, то предельная группа обратного спектра счетна.

изоморфна группе двоично-рациональных чисел, т. е. группе дробей вида $\frac{m}{2^n}$. В силу D), группа характеров G^* группы G является предельной группой обратного спектра $\{G_i^*\}$, где группы G_i^* изоморфны группе Π, а гомоморфизмы $\overset{*}{h}_{ki}$, $i \leqslant k$, задаются формулой:

$$\overset{*}{h}_{ki}(r) = r \cdot 2^{k-i}, \quad r \in \Pi. \tag{4}$$

G^* называется (ван Данциг) диадическим соленоидом; как группа характеров счетной группы G она компактна и по своей топологической структуре является неразложимым одномерным континуумом.

Если в качестве группы G_i, $i = 1, 2, \ldots$, взять группу целых чисел, приведенных по модулю 2, а гомоморфизмы снова определить по формуле (3), то G будет группой двоично-рациональных чисел, приведенных по модулю 1, а ее группа характеров G^* — диадической нульмерной группой [1]).

Δ- и ∇-ГРУППЫ КОМПАКТОВ

Рассмотрим теперь произвольный компакт X. Пусть Σ — множество всех покрытий пространства X, частично упорядоченное следующим образом: σ предшествует τ, $\sigma < \tau$, если покрытие τ вписано [2]) в покрытие σ. Σ направлено, так как для любых двух покрытий σ и τ существует покрытие, вписанное и в σ и в τ (состоящее из попарных пересечений элементов покрытия σ с элементами покрытия τ). Для каждого покрытия σ рассмотрим его нерв $N(\sigma)$ (см. определение V 8). Пусть $\sigma < \tau$, т. е. покрытие τ вписано в покрытие σ. Для каждого элемента покрытия τ выберем некоторый, содержащий его элемент покрытия σ. Получаем симплициальное отображение комплекса $N(\tau)$ в комплекс $N(\sigma)$, называемое проекцией $N(\tau)$ в $N(\sigma)$. Вообще говоря, существует много проекций $N(\tau)$ в $N(\sigma)$, соответствующих различному выбору элемента покрытия σ, содержащего каждый данный элемент покрытия τ; но любые две проекции p и p' удовлетворяют условию предложения 3 E) и, следовательно, порождают один и тот же гомоморфизм $h^{\sigma\tau}$ группы $\nabla^n(N(\sigma), G)$ в группу $\nabla^n(N(\tau), G)$ и один и тот же гомомор-

[1]) См. Понтрягин, The theory of topological commutative groups, *Ann. Math.* **35** (1934), стр. 361—384.

[2]) Не σ вписано в τ.

физм $h_{\tau\sigma}$ группы $\Delta^n(N(\tau), G)$ в группу $\Delta^n(N(\sigma), G)$. Если $\rho < \sigma < \tau$ и p является проекцией $N(\tau)$ в $N(\sigma)$, а q — проекцией $N(\sigma)$ в $N(\rho)$, то qp является проекцией $N(\tau)$ в $N(\rho)$, следовательно, $h^{\rho\tau} = h^{\sigma\tau}h^{\rho\sigma}$, и $h_{\tau\rho} = h_{\sigma\rho}h_{\tau\sigma}$. Таким образом, при любом выборе целого числа n и области коэффициентов G, группы $\{\nabla^n(N(\sigma), G)\}$ с гомоморфизмами $h^{\sigma\tau}$ образуют прямой спектр, а группы $\{\Delta^n(N(\sigma), G)\}$ с гомоморфизмами $h_{\tau\sigma}$ образуют обратный спектр.

Определение VIII 14. Пусть X — компакт, G — группа, n — целое число $\geqslant 0$, и $\{\sigma\}$ — совокупность покрытий пространства X. *n-мерной Δ группой $\Delta^n(X, G)$ по области коэффициентов G* (если невозможны недоразумения, мы пишем просто $\Delta^n(X)$) называется предельная группа обратного спектра $\{\Delta^n(N(\sigma), G)\}$, и *$n$-мерной ∇-группой по области коэффициентов G* (если невозможны недоразумения, мы пишем $\nabla^n(X)$) называется предельная группа прямого спектра $\{\nabla^n(N(\sigma), G)\}$.

Замечание 1. Ясно, что определение VIII 14 является топологически инвариантным, т. е. гомеоморфные пространства имеют одни и те же Δ- и ∇-группы.

Замечание 2. При изучении комплексов мы замечали полную симметрию между Δ- и ∇-группами. Но здесь, в теории гомологий компактов, эта симметрия исчезает, так как Δ-группы являются предельными группами *обратных* спектров, а ∇-группы являются предельными группами *прямых* спектров.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ КОМБИНАТОРНЫХ Δ- и ∇-ГРУПП

E) Пусть X — полиэдр, K — его комплекс остовов $\nabla^n(X)$ и $\Delta^n(X)$ — (топологически инвариантные) ∇- и Δ-группы пространства X, а $\nabla^n(K)$ и $\Delta^n(K)$ — (комбинаторные) ∇- и Δ-группы комплекса K. Тогда *группа $\nabla^n(X)$ изоморфна группе $\nabla^n(K)$, а группа $\Delta^n(X)$ изоморфна группе $\Delta^n(K)$. Следовательно, если K_1 и K_2 — комплексы остовов гомеоморфных полиэдров, то они имеют изоморфные ∇- и Δ-группы.*

Доказательство. Пусть $K = K_{(0)}$, и обозначим через $K_{(1)}$, $K_{(2)}, \ldots$ последовательные барицентрические подразделения комплекса K. Каждому комплексу $K_{(i)}$ соответствует подразделение X_i полиэдра X на симплексы. Пусть σ_i — покрытие пространства X, состоящее из звезд (см. определение V 9) вершин подразделения X_i. Заметим[1]), что нервом $N(\sigma_i)$ покрытия σ_i является комплекс $K_{(i)}$. Ясно (V 4 C)), что последовательность

[1]) См. сноску [1]) на стр. 101.

$\{\sigma_i\}$ конфинальна множеству всех покрытий, так как диаметр покрытия σ_i стремится к нулю. Следовательно, в силу A) и C), группы $\nabla^n(X)$ и $\Delta^n(X)$ являются предельными группами, соответственно, прямого и обратного спектров $\{\nabla^n(N(\sigma_i))\}$ и $\{\Delta^n(N(\sigma_i))\}$. Но проекция f комплекса $N(\sigma_{i+1})$ в комплекс $N(\sigma_i)$ является симплициальным отображением $K_{(i+1)}$ в $K_{(i)}$ типа, рассмотренного в примере VIII 15, и, следовательно, порождает изоморфизмы группы $\nabla^n(N(\sigma_i))$ на группу $\nabla^n(N(\sigma_{i+1}))$ и группы $\Delta^n(N(\sigma_{i+1}))$ на группу $\Delta^n(N(\sigma_i))$.

Из примеров VIII 18 и VIII 20 поэтому следует, что предельные группы, т. е. $\nabla^n(X)$ и $\Delta^n(X)$, изоморфны группам $\nabla^n(K)$ и $\Delta^n(K)$.

Замечание. Пусть φ — ∇-цикл комплекса K, и φ^* — ∇-цикл одного из последовательных барицентрических подразделений $K_{(m)}$ комплекса K (или, более общо, одного из последовательных барицентрических подразделений комплекса K по модулю некоторого подкомплекса) и пусть φ и φ^* связаны между собой следующим образом: если s^n — ориентированный симплекс комплекса K, то

$$\varphi(s^n) = \sum \varphi^*(s^n_{(m)}), \tag{5}$$

где сумма распространена по всем ориентированным подсимплексам $s^n_{(m)}$ симплекса s^n. Это означает, что φ^* получается из φ m-кратным применением оператора[1]) π. Тогда из предшествовавших рассмотрений следует, что φ и φ^* представляют один и тот же элемент группы $\nabla^n(P)$, где P обозначает геометрическую реализацию комплекса K.

Пример VIII 21. Пусть I_n — n-мерный куб. Так как I_n гомеоморфен n-мерному симплексу, то $\nabla^m(I_n, G) = \Delta_m(I_n, G) = 0$ для всех m, в силу примера VIII 10.

Пример VIII 22. Пусть S_n — n-мерная сфера. Так как сфера S_n гомеоморфна полиэдру, состоящему из всех собственных граней $(n+1)$-мерного симплекса, то из примера VIII 11 легко следует, что если $m < n$, то и $\nabla^m(S_n, G)$ и $\Delta^m(S_n, G)$ суть нулевые группы, тогда как и группа $\nabla^n(S_n, G)$, и группа $\Delta^n(S_n, G)$ изоморфны группе G.

Пример VIII 22. 1. Пусть компакт X является суммой замкнутых непересекающихся множеств X_1 и X_2. Если $n > 0$, то $\nabla^n(X)$ есть прямая сумма групп $\nabla^n(X_1)$ и $\nabla^n(X_2)$, и $\Delta^n(X)$ есть

[1]) Определенного на стр. 163.

прямая сумма групп $\Delta^n(X_1)$ и $\Delta^n(X_2)$. Это легко следует из примера VIII 6.

F) Пусть X — компакт. Тогда, если $n > \dim X$, то $\Delta^n(X) = \nabla^n(X) = 0$.

Доказательство. В силу теоремы V 1, множество покрытий пространства X, имеющих порядок $\leqslant n$, составляет конфинальное подмножество множества всех покрытий пространства X. Сопоставление этого обстоятельства с предложениями A) и C) и примером VIII 2 доказывает предложение F).

ДВОЙСТВЕННОСТЬ МЕЖДУ Δ- и ∇-ГРУППАМИ КОМПАКТА

Пусть теперь G — счетная группа. Заметим, что множество $\{\sigma\}$ всех покрытий компакта X содержит счетное конфинальное подмножество, ибо, если σ_i — некоторое покрытие диаметра $\leqslant \frac{1}{i}$, $i = 1, 2, \ldots$, то в каждое покрытие компакта X вписано хотя бы одно покрытие σ_i. Из предложения B) мы видим, что ∇-группа $\nabla^n(X, G)$ счетна.

G) *Пусть G — счетная группа, и G^* — ее группа характеров. Тогда группа $\Delta^n(X, G^*)$ является группой характеров группы $\nabla^n(X, G)$.*

Доказательство. Мы уже видели (2H)), что для каждого покрытия σ пространства X группа $\Delta^n(N(\sigma), G^*)$ является группой характеров группы $\nabla^n(N(\sigma), G)$. Наше утверждение следует поэтому из предложения D).

Из предложения G) и того обстоятельства, что группа $\nabla^n(X, G)$ счетна, вытекает важное следствие, состоящее в том, что к паре групп $\nabla^n(X, G)$ и $\Delta^n(X, G^*)$ можно применить понтрягинскую теорию двойственности, изложенную в § 2.

Замечание 1. Пусть X — произвольный компакт и G — счетная группа. Как группа характеров счетной дискретной группы, группа $\Delta^n(X, G^*)$ допускает компактную топологию, но не существует никакого естественного способа определения топологии в группе $\nabla^n(X, G^*)$.

Замечание 2. Пусть X — компакт, и G — *произвольная* группа. Известно[1]), что Δ- и ∇-группы компакта X по области коэффициентов G полностью определяются как Δ-группами компакта X по области коэффициентов $\mathfrak{R}$, так и ∇-группами компакта X по области коэффициентов $\mathfrak{J}$.

---

[1]) N. Steenrod, Universal Homology Groups, *Amer. Journ. Math.* 58 (1936), стр. 661—701.

Замечание 3. Формально определения Δ- и ∇-групп, данные выше, могут быть приложены к некомпактным пространствам, однако полученная таким путем теория гомологий совершенно неудовлетворительна. Ибо, например, одномерная Δ-группа Бетти прямой даже при наиболее простых группах G оказывается чрезвычайно сложной [1]). Кроме того, не существует никакой простой двойственности между Δ- и ∇-гомологиями.

Пример VIII 22.2. Определим компакт X следующим образом: точками пространства X являются последовательности комплексных чисел (включая число ∞):

$$(z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots),$$

удовлетворяющих условию:

$$z_{i+1}^2 = z_i, \qquad i = 1, 2, \ldots .$$

Сходимость в X означает почленную сходимость этих последовательностей. Очевидно, X — компактное пространство со счетным базисом. Пусть i — фиксированное целое число >0. Ставя каждой точке $z = (z_1, z_2, \ldots)$ в соответствие ее i-ю координату z_i, получаем отображение f_i компакта X в комплексную числовую сферу S. Каждому покрытию σ сферы S ставим в соответствие покрытие σ^i компакта X, элементами которого являются полные прообразы элементов покрытия σ при отображении f_i. Нерв $N(\sigma^i)$, очевидно, тождественен нерву $N(\sigma)$.

Легко можно построить последовательность $\{\sigma_i\}$ покрытий сферы S, диаметр которых стремится к нулю, таких, что окрытие σ_{i+1}^{i+1} вписано в покрытие σ_i^i, $i = 1, 2, \ldots$. Нетрудно видеть, что проекция нерва $N(\sigma_{i+1}^{i+1}) = N(\sigma_{i+1})$ в нерв $N(\sigma_i^i) = N(\sigma_i)$ является симплициальным отображением степени 2 и что, следовательно, порожденные им гомоморфизмы группы $\nabla^2(N(\sigma_i), \mathfrak{J})$ в группу $\nabla^2(N(\sigma_k^k), \mathfrak{J})$, $(k \geqslant i)$, суть гомоморфизмы (3) примера VIII 20.1. Группа $\nabla^2(X, \mathfrak{J})$ является предельной группой прямого спектра $\{\nabla^2(N(\sigma_i^i), \mathfrak{J})\}$, и поэтому, в силу примера VIII 20.1, она изоморфна группе двоично-рациональных чисел. Ее группа характеров $\Delta^2(X, \Pi)$ есть диадический соленоид.

Пусть Y — замкнутое подмножество компакта X, состоящее из точек $(z_1, z_2, \ldots)$ таких, что $|z_i| \leqslant 1$, и пусть Z — про-

[1]) C. H. Dowker, Hopf's Theorem for Non-Compact Spaces, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **23** (1937), стр. 293—294.

странство, полученное из Y отождествлением каждой пары точек $\{z_i\}$, $\{z'_i\}$, удовлетворяющих условию:

$$|z_1| = |z'_1| = 1, \quad \left(\frac{z_i}{z'_i}\right)^{2^i} = 1, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots .$$

Методами, аналогичными методам, использованным выше, можно показать, что группа $\nabla^2(Z, \mathfrak{J})$ является предельной группой прямого спектра $\{G_i\}$, где G_i — циклическая группа порядка 2 и гомоморфизмы h^{ik}, $i \leqslant k$, определяются формулой (3) примера VIII 20.1. Следовательно, группа $\nabla^2(Z, \mathfrak{J})$ является группой двоично-рациональных чисел, приведенных по модулю 1, а ее группа характеров $\Delta^2(Z, \Pi)$ есть нульмерная диадическая группа.

5. Отображения компактов

В этом параграфе мы рассмотрим отображение одного компакта в другой с точки зрения теории гомологий.

A) Пусть X и Y — два компакта, и f — отображение X в Y. Пусть G — группа, и n — целое число. Тогда f порождает гомоморфизм h^f группы $\nabla^n(Y, G) = \nabla^n(Y)$ в группу $\nabla^n(X, G) = \nabla^n(X)$, определяемый следующим образом: пусть σ — покрытие пространства Y, σ_f — покрытие пространства X, элементами которого являются полные прообразы элементов покрытия σ.

Вершины нерва $N(\sigma_f)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с вершинами нерва $N(\sigma)$, и это соответствие, очевидно, является симплициальным отображением комплекса $N(\sigma_f)$ в $N(\sigma)$. В силу предложения 3 A), это симплициальное отображение порождает гомоморфизм группы $\nabla^n(N(\sigma))$ в группу $\nabla^n(N(\sigma_f))$. Кроме того, если τ — другое покрытие пространства Y, а $g_\sigma \in \nabla^n(N(\sigma))$ и $g_\tau \in \nabla^n(N(\tau))$ — эквивалентные элементы (см. определение VIII 12), то образы элементов g_σ и g_τ в группах $\nabla^n(N(\sigma_f))$ и $\nabla^n(N(\tau_f))$ также будут эквивалентными. Таким образом, для каждого элемента группы $\nabla^n(Y)$ мы получаем некоторый элемент группы $\nabla^n(X)$. Именно это отображение группы $\nabla^n(Y)$ в группу $\nabla^n(X)$ (являющееся, как легко видеть, гомоморфизмом) мы обозначаем через h^f.

B) Аналогично, f порождает гомоморфизм h_f группы $\Delta^n(X)$ в группу $\Delta^n(Y)$. В силу предложения 3 B), симплициальное отображение нерва $N(\sigma_f)$ в нерв $N(\sigma)$ порождает гомоморфизм группы $\Delta^n(N(\sigma_f))$ в группу $\Delta^n(N(\sigma))$. Гомоморфизм h_f группы $\Delta^n(X)$ в группу $\Delta^n(Y)$ получается следующим путем: каждому элементу e группы $\Delta^n(X)$ ставим в соответствие тот элемент группы $\Delta^n(Y)$, представитель которого в группе $\Delta^n(N(\sigma))$ является образом представителя элемента e в группе $\Delta^n(N(\sigma_f))$.

Пусть f — отображение компакта X в компакт Y, и g — отображение компакта Y в компакт Z. Тогда гомоморфизм группы $\Delta^n(X)$ в группу $\Delta^n(Z)$, порожденный отображением gf, совпадает с произведением гомоморфизмов $h_g h_f$. Аналогичное утверждение о транзитивности имеет место для гомоморфизмов ∇-групп, порожденных отображениями f, g и gf.

Пример VIII 23. Пусть P и Q — два полиэдра в данных симплициальных подразделениях. Отображение f полиэдра P в полиэдр Q называется *симплициальным отображением*, если оно обладает следующим свойством: если $p_0, \ldots, p_k$ — вершины некоторой клетки полиэдра P, то $f(p_0), \ldots, f(p_k)$ являются вершинами некоторой клетки полиэдра Q, и f отображает клетку с вершинами $p_0, \ldots, p_k$ в клетку с вершинами $f(p_0), \ldots, f(p_k)$ *линейно*. Симплициальное отображение полиэдра P в полиэдр Q, конечно, порождает симплициальное отображение комплекса остовов полиэдра P в комплекс остовов полиэдра Q; и наоборот, симплициальное отображение комплекса остовов полиэдра P в комплекс остовов полиэдра Q порождает симплициальное отображение полиэдра P в Q. Мы предоставим читателю доказать, что если f — симплициальное отображение полиэдра P в полиэдр Q, то порожденные отображением f гомоморфизмы группы $\Delta^n(P)$ в группу $\Delta^n(Q)$ и группы $\nabla^n(Q)$ в группу $\nabla^n(P)$ совпадают с ранее определенными гомоморфизмами, порожденными симплициальным отображением комплексов остовов (см. § 3). (Рассматриваем покрытие σ полиэдра Q и покрытие τ полиэдра P, порожденные звездами вершин данных симплициальных подразделений, и используем тот факт, что τ вписано в покрытие, образованное полными прообразами элементов покрытия σ.)

Пример VIII 24. Пусть τ — покрытие компакта X, $P(\tau)$ — геометрическая реализация нерва $N(\tau)$, и b — барицентрическое τ-отображение пространства X в полиэдр $P(\tau)$ (см. определение V 9). Тогда гомоморфизм h^b группы $\nabla^n(P(\tau))$ в группу $\nabla^n(X)$, порожденный отображением b, является просто гомоморфизмом, ставящим каждому элементу e_τ группы $\nabla^n(N(\tau))$ в соответствие элемент e группы $\nabla^n(X)$, имеющий e_τ своим представителем. Это непосредственно следует из определения гомоморфизма h^b.

Определение VIII 15. Пусть C — замкнутое подмножество компакта X, и f — тождественное отображение C в X. Гомоморфизмы группы $\Delta^n(C)$ в группу $\Delta^n(X)$ и группы $\nabla^n(X)$ в группу $\nabla^n(C)$, порожденные отображением f, называются *естественными гомоморфизмами*. Элемент группы $\Delta^n(C)$, который отображается этим гомоморфизмом в нуль группы $\Delta^n(X)$, называется *ограничивающим* в X. Элемент группы $\nabla^n(C)$, являющийся образом при этом гомоморфизме некоторого элемента группы $\nabla^n(X)$, называется *продолжаемым* на X.

Замечание. Если X — полиэдр и C его подполиэдр, то это определение согласуется с определением (определение VIII 7) естественных гомоморфизмов комплексов остовов полиэдров X и C; это следует из примеров VIII 14 и VIII 23.

С) Пусть f — отображение компакта X в компакт Y, и h^f — гомоморфизм группы $\nabla^n(Y)$ в группу $\nabla^n(X)$, порожденный отображением f. Тогда для каждого элемента e группы $\nabla^n(Y)$ существует положительное число δ, обладающее тем свойством, что если g — отображение компакта X в Y такое, что $\rho(f,g)<\delta$, то $h^g(e)=h^f(e)$.

Доказательство. Пусть дан элемент e группы $\nabla^n(Y)$, и пусть $\nabla^n(N(\sigma))$ — группа, в которой e имеет представителя. Допустим, что этот представитель есть e_σ. Пусть, далее, покрытие σ пространства Y состоит из открытых множеств $V_1, \ldots, V_k$, а τ — покрытие пространства X, элементы $U_1, \ldots, U_k$ которого удовлетворяют условию

$$\overline{U}_i \subset f^{-1}(V_i)$$

(существование покрытия τ вытекает из нормальности пространства X). Тогда взаимно однозначное соответствие между U_i и V_i дает нам симплициальное отображение m нерва $N(\tau)$ в нерв $N(\sigma)$, являющееся произведением симплициального отображения нерва $N(\sigma_f)$ в нерв $N(\sigma)$, определенного в А), и проекции нерва $N(\tau)$ в $N(\sigma_f)$. Следовательно, отображение m порождает гомоморфизм группы $\nabla^n(N(\sigma))$ в группу $\nabla^n(N(\tau))$, причем ясно, что образ элемента e_σ при этом гомоморфизме является элементом группы $\nabla^n(N(\tau))$, представляющим элемент $h^f(e)$. Положим:

$$\delta = \min \rho\,(f(\overline{U}_i),\ Y \setminus V_i).$$

Тогда, если g — отображение компакта X в Y, для которого $\rho(f, g) < \delta$, $\overline{U}_i \subset g^{-1}(V_i)$, и, следовательно, g также порождает то же самое симплициальное отображение нерва $N(\tau)$ в нерв $N(\sigma)$. Следовательно, $h^g(e) = h^f(e)$.

D) Пусть f — отображение компакта X в компакт Y, и h_f — гомоморфизм группы $\Delta^n(X)$ в группу $\Delta^n(Y)$, порожденный отображением f. Тогда для произвольно заданного элемента e группы $\Delta^n(X)$ и покрытия σ пространства Y существует положительное число δ, обладающее тем свойством, что если g — отображение компакта X в Y такое, что $\rho(f, g) < \delta$, то $h_f(e)$ и $h_g(e)$ имеют одного и того же представителя в группе $\Delta^n(N(\sigma))$. Это может быть доказано методами, аналогичными методам, использованным при доказательстве предложения C).

E) Из C) и D) вытекает, что *гомотопные отображения одного компакта в другой порождают один и тот же гомоморфизм ∇-групп и один и тот же гомоморфизм Δ-групп.*

Пример VIII 25. Пусть f — отображение компакта X в n-мерную сферу S_n. Пусть $G = \mathfrak{J}$. В силу примера VIII 22, группа $\nabla^n(S_n, \mathfrak{J})$ является свободной циклической группой. Мы говорим, что S_n *ориентирована*, если выбран один из двух образующих элементов этой группы. Предполагая, что S_n ориентирована, определим *степень* отображения f, в точности как в примере VIII 16, как элемент группы $\nabla^n(X, \mathfrak{J})$, соответствующий при гомоморфизме h^f образующему группы $\nabla^n(S_n, \mathfrak{J})$. Снова, как в примере VIII 16, степень отображения f может быть определена как характер h_f группы $\Delta^n(X, \Pi)$.

Предложение E) показывает, что степень отображения компакта в ориентированную n-мерную сферу является гомотопическим инвариантом. Вспомним, что частный случай этого утверждения был установлен нами еще в § 1 главы IV и затем использован для доказательства нестягиваемости n-мерной сферы.

F) Пусть X и Y — компакты, G — счетная группа, G^* — ее группа характеров, и n — целое число. Вспомним (4 G)), что группы $\Delta^n(X, G^*)$ и $\Delta^n(Y, G^*)$ являются группами характеров групп $\nabla^n(X, G)$ и $\nabla^n(Y, G)$. Пусть теперь f — отображение компакта X в Y, h^f — гомоморфизм группы $\nabla^n(Y, G)$ в группу $\nabla^n(X, G)$, порожденный отображением f, и h_f — гомоморфизм группы $\Delta^n(X, G^*)$ в группу $\Delta^n(Y, G^*)$, также порожденный отображением f. Тогда $\overset{*}{h}_f$ является гомоморфизмом, сопряженным с гомоморфизмом h^f.

Доказательство. Пусть σ — покрытие компакта Y, и σ_f — покрытие компакта X, элементами которого являются полные прообразы элементов покрытия σ. Группы $\Delta^n(N(\sigma_f), G^*)$ и $\Delta^n(N(\sigma), G^*)$ являются группами характеров групп $\nabla^n(N(\sigma_f), G)$ и $\nabla^n(N(\sigma), G)$. Предложение F) является поэтому простым следствием замечания, состоящего в том, что гомоморфизм группы $\Delta^n(N(\sigma_f), G^*)$ в группу $\Delta^n(N_\sigma, G^*)$ является сопряженным с гомоморфизмом группы $\nabla^n(N(\sigma), G)$ в группу $\nabla^n(N(\sigma_f), G)$ (см. 3 C)).

6. Теорема Хопфа о продолжении отображения

В этом параграфе областью коэффициентов для ∇-групп будет всегда группа $\mathfrak{J}$ целых чисел, а областью коэффициентов для Δ-групп будет всегда группа Π — группа характеров группы $\mathfrak{J}$.

Пусть C — замкнутое подмножество компакта X, и f — отображение C в компакт Y. При каких условиях f можно продолжить на X (см. определение VI 2)? Мы уже изучали эту проблему в главе VI, используя методы теоретико-множественной топологии. Мы получим более точные результаты, исследуя вновь эту проблему, на этот раз с точки зрения алгебраической топологии.

Сначала мы установим необходимое условие для возможности такого продолжения.

A) Пусть n — целое число, и h^f — гомоморфизм группы $\nabla^n(Y)$ в группу $\nabla^n(C)$, порожденный отображением f. Для того чтобы f было продолжаемо на X, необходимо, чтобы каждый элемент группы $\nabla^n(C)$, являющийся образом некоторого элемента группы $\nabla^n(Y)$ при гомоморфизме h^f, был продолжаем на X (см. определение VIII 15).

Доказательство. Предположим, что f можно продолжить на X до отображения F компакта X в Y. Пусть h — естественный гомоморфизм группы $\nabla^n(X)$ в группу $\nabla^n(C)$; вспомним, что h есть гомоморфизм, порожденный тождественным отображением множества C в X. Отображение f является теперь результатом последовательного применения двух отображений: тождественного отображения множества C в X и отображения F; формула $h^f = hh^F$ тогда показывает, что каждый элемент группы $\nabla^n(C)$, являющийся образом при гомоморфизме h^f, является также образом при гомоморфизме h.

B) Заметим, что необходимое условие предложения A) эквивалентно следующему условию в терминах Δ-гомологий: каждый элемент группы $\Delta^n(C)$, ограничивающий в X, отображается гомоморфизмом h_f в нуль группы $\Delta^n(Y)$.

Доказательство. Обозначим через h_f гомоморфизм группы $\Delta^n(C)$ в группу $\Delta^n(Y)$, порожденный отображением f, и через h^* — естественный гомоморфизм группы $\Delta^n(C)$ в группу $\Delta^n(X)$. Вспомним, что h_f и h^* являются гомоморфизмами, сопряженными с гомоморфизмами h^f и h. Образы $h^f\nabla^n(Y)$ и $h\nabla^n(X)$ групп $\nabla^n(Y)$ и $\nabla^n(X)$, соответственно при гомоморфизмах h^f и h, являются подгруппами группы $\nabla^n(C)$. Условие предложения A) требует, чтобы первая из этих подгрупп содержалась во второй. Это эквивалентно утверждению, что аннулятор первой подгруппы содержит аннулятор второй. Но в силу предложения 2 D), аннулятором подгруппы $h^f\nabla^n(Y)$ является ядро гомоморфизма h_f, т. е. множество элементов группы $\Delta^n(C)$, отображающихся гомоморфизмом h_f в нуль группы $\Delta^n(Y)$. Аналогично, аннулятором подгруппы $h\nabla^n(X)$ является ядро гомоморфизма h^*, т. е. множество элементов группы $\Delta^n(C)$, ограничивающих в X. Это показывает эквивалентность условий предложений A) и B).

В общем случае условие предложения A) не является достаточным.

Пример VIII 26. Пусть Y — плоское множество, состоящее из двух окружностей C_1 и C_2, касающихся друг друга в точке P; X — замкнутый круг, и окружность C — его граница, f — отображение множества C в Y, определенное следующим образом. Разобьем C на четыре части последовательно расположенными точками P_1, P_2, P_3, P_4. Каждая из точек P_1,P_2, P_3,P_4 переводится отображением f в точку P. Открытая дуга P_1P_2 топологически отображается на положительно ориентированную дугу $C_1 \setminus P$, открытая дуга P_2P_3 топологически отображается на положительно ориентированную дугу $C_2 \setminus P$, открытая дуга P_3P_4 топологически отображается на отрицательно ориентированную дугу $C_1 \setminus P$, и открытая дуга P_4P_1 топологически отображается на отрицательно ориентированную дугу $C_2 \setminus P$. Тогда можно показать, что f не гомотопно постоянному отображению, т. е. не может быть продолжено на X, несмотря на то, что гомоморфизм h^f отображает каждый одномерный ∇-цикл пространства Y в ограничивающий ∇-цикл.

Пример VIII 26. 1. Пусть X — замкнутая область $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leqslant 1$ в пространстве E_4, ограниченная сферой S_3.

Г. Хопф[1]) построил отображение сферы S_3 в сферу S_2, не гомотопное постоянному отображению, т. е. не продолжаемое на X, относительно S_2. Тем не менее, так как $\nabla^n(S_3)=0$ для $n \leqslant 2$ и $\nabla^n(S_2)=0$ для $n>2$, каждый гомоморфизм группы $\nabla^n(S_2)$ в группу $\nabla^n(S_3)$ является нулевым гомоморфизмом.

Теорема Хопфа о продолжении отображения утверждает, что условие предложения A) не только необходимо, но и достаточно в случае, когда X имеет размерность $\leqslant n+1$, а Y есть n-мерная сфера. Это значит, что топологическая проблема продолжения отображений сводится в этом случае к чисто алгебраической проблеме.

ПРОДОЛЖЕНИЕ СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В S_n

Прежде чем приступить к доказательству теоремы Хопфа о продолжении отображения, рассмотрим сначала симплициальные отображения полиэдров и докажем одновременной индукцией следующие два предложения (начиная с этого момента, n есть целое число $\geqslant 1$).

C_n) Пусть P — полиэдр размерности $\leqslant n$, а R — или элементарная n-мерная сфера[2]) R_n, или одно из ее последовательных барицентрических подразделений. Будем считать, что сфера R ориентирована. Пусть f — симплициальное отображение полиэдра P в R. Если степень отображения f есть нуль, то f гомотопно постоянному отображению.

D_n) Пусть P — полиэдр размерности $\leqslant n+1$, Q — его подполиэдр и f — симплициальное отображение полиэдра Q в ориентированную элементарную n-мерную сферу R_n. Пусть элемент e группы $\nabla^n(Q)$ является степенью отображения f, а элемент $\tilde{e} \in \nabla^n(P)$ — продолжением элемента e. Тогда f можно продолжить в отображение F полиэдра P в R_n, имеющее $\tilde{e}$ своей степенью.

Сначала мы докажем C_1), затем покажем, что из C_n) следует D_n), $n \geqslant 1$, и, наконец, докажем, что из D_n) вытекает

---

[1]) «Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche», *Math. Ann.* 104 (1931), стр. 637—665.

[2]) «Элементарная сфера» употребляется в этом параграфе для обозначения, как комплекса, определенного в примере VIII 11, так и его геометрической реализации. Далее, мы пишем симплекс полиэдра P, ∇-цикл полиэдра P и т. п., понимая под этим симплекс, ∇-цикл и т. п. комплекса остовов полиэдра P.

C_{n+1}), $n \geqslant 1$. Тогда C_n) и D_n) будут установлены для всех $n \geqslant 1$.

Доказательство предложения C_1). Пусть $\overset{1}{z_0} = (r_0, r_1)$ — положительно ориентированная одномерная клетка полигона R. Пусть φ — одномерный ∇-цикл полиэдра P, определенный следующим образом:

$$\varphi(s^1) = \pm 1, \quad \text{если} \quad f(s^1) = \pm \overset{1}{z_0},$$

$$\varphi(s^1) = \quad 0 \quad \text{в ином случае.}$$

Тогда φ представляет степень отображения f и, следовательно, по предположению является ∇-границей некоторого нульмерного ∇-цикла ψ. ψ есть целочисленная функция вершин полигона P, обладающая следующим свойством: пусть (p_0, p_1) — одномерный симплекс полигона P. Если $f(p_0, p_1)$ есть одномерный симплекс (r_0, r_1), то $\psi(p_1) - \psi(p_0) = 1$; если $f(p_0, p_1)$ не является ни симплексом (r_0, r_1), ни симплексом (r_1, r_0), то $\psi(p_1) - \psi(p_0) = 0$.

Отождествим теперь точки полигона R с элементами групп $\varkappa$ действительных чисел, приведенных по модулю 1. Очевидно, можно предположить, что отрезок $\overset{1}{z_0}$, направленный от r_0 к r_1, соответствует отрезку $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Если p — действительное число то обозначим через $\{p\}$ класс действительных чисел, сравнимых с p по модулю 1. Определим теперь на P действительную функцию $F(x)$, накладывая на нее два условия:

1° $$\{F(x)\} = f(x),$$

2°, если x принадлежит замкнутому симплексу (p_0, p_1), то

$$-\frac{1}{2} + \frac{\psi(p_0) + \psi(p_1)}{2} \leqslant F(x) < \frac{\psi(p_0) + \psi(p_1)}{2} + \frac{1}{2}.$$

Простые вычисления показывают, что $F(x)$ — однозначная непрерывная функция. Полагая для $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$f(x, t) = \{tF(x)\},$$

видим, что отображение f гомотопно постоянному отображению.

Доказательство того, что из C_n) следует D_n). Обозначим через $r_0, r_1, \ldots, r_n, r_{n+1}$, вершины элементарной n-мерной сферы R_n в порядке, соответствующем ориентации, и через

z_0^n n-мерный симплекс $(r_1, r_2, \ldots, r_{n+1})$. z_0^n положительно ориентирован. ∇-класс e представляется ∇-циклом φ полиэдра Q, определенным следующим образом: $\varphi(s^n)=1$, если $f(s^n)=z_0^n$; $\varphi(s^n)=-1$, если $f(s^n)=-z_0^n$; $\varphi(s^n)=0$ в иных случаях, а ∇-класс $\tilde{e}$ в силу 1Е) может быть представлин ∇-циклом Φ полиэдра P, являющимся продолжением ∇-цикла φ.

Пусть теперь P_n и Q_n — полиэдры, состоящие из всех клеток размерности $\leqslant n$ полиэдров P и Q. Пусть $P_n^{(m)}$ — m-кратное барицентрическое подразделение полиэдра $P_n \bmod Q_n$, где m настолько велико, что можно осуществить следующую конструкцию: обозначим через $s_1^n, s_2^n, \ldots, s_q^n$ все те n-мерные симплексы полиэдра P_n, которые удовлетворяют условию $\Phi(s_i^n)>0$, $i=1, \ldots, q$, и не принадлежат Q. Для каждого s_i^n выберем $\Phi(s_i^n)$ n-мерных симплексов в $P_n^{(m)}$:

$$s_{ik}^n=(p_1^{ik}, p_2^{ik}, \ldots, p_{n+1}^{ik}), \qquad k=1, \ldots, \Phi(s_i^n),$$

причем каждый симплекс s_{ik}^n является ориентированным подсимплексом симплекса s_i^n, не имеющим ни одной общей вершины как с симплексом s_i^n, так и с любым отличным от него симплексом s_{ik}^n. Продолжим теперь симплициальное отображение f в симплициальное отображение F_1 полиэдра $P_n^{(m)} \cup Q$ в R_n, полагая:

$$F_1(p_l^{ik})=r_l, \quad i=1, 2, \ldots; r; \quad k=1, 2, \ldots, \Phi(s_i^n);$$
$$l=1, 2, \ldots, (n+1),$$

$F_1(p)=r_0$ для остальных вершин p, принадлежащих $P_n^{(m)} \setminus Q$.

Помимо симплексов полиэдра Q симплексами, отображающимися при F_1 на z_0^n, являются только симплексы s_{ik}^n, и степень отображения F_1 представляется цепью Φ^*, которая, очевидно, связана с Φ формулой (5), стр. 167, и, следовательно, представляет тот же самый ∇-класс полиэдра P, рассматриваемого как топологическое пространство. Таким образом, имеем:

а) степень отображения F_1 есть элемент группы $\nabla^n(P_n^{(m)}) = \nabla^n(P_n)$, соответствующий элементу $\tilde{e}$ при естественном гомоморфизме группы $\nabla^n(P)$, в группу $\nabla^n(P_n)$.

Нам нужно теперь показать, что отображение F_1 может быть продолжено на P. Пусть U — некоторая $(n+1)$-мерная клетка, принадлежащая $P \setminus Q$. Отображение $F_1 \mid \overline{U} \setminus U$ является симплициальным отображением n-мерного полиэдра в R_n. Пусть $e^* \in \nabla^n(\overline{U} \setminus U)$ — степень отображения $F_1 \mid \overline{U} \setminus U$. Тогда степень отображения F_1 является продолжением элемента e^* на P_n и, следовательно, в силу а), e^* продолжаемо даже на P. Тем более, e^* продолжаемо на $\overline{U}$. Но $\nabla^n(\overline{U}) = 0$ (в силу примера VIII 10), и, следовательно, $e^* = 0$. Пользуясь теперь предложением C_n), получаем, что отображение $F_1 \mid \overline{U} \setminus U$ гомотопно постоянному отображению, или, что в точности то же самое, отображение $F_1 \mid \overline{U} \setminus U$ продолжаемо на $\overline{U}$. Ясно, что, применяя эти рассуждения к каждой $(n+1)$-мерной клетке, принадлежащей $P \setminus Q$, получим продолжение F отображения F_1 на P.

Степенью отображения F является $\tilde{e}$, так как естественный гомоморфизм группы $\nabla^n(P)$ в группу $\nabla^n(P_n)$ является изоморфизмом, а образ степени отображения F при этом изоморфизме является степенью отображения F_1, которая, в силу а), является также образом элемента $\tilde{e}$.

Доказательство того, что из D_n) следует C_{n+1}). P обозначает теперь полиэдр размерности $\leqslant n+1$, а R — или элементарную $(n+1)$-мерную сферу, или одно из ее последовательных барицентрических подразделений. Пусть z_0^{n+1} — положительно ориентированный симплекс R, и V — полиэдр, определенный $(n+1)$-мерными симплексами полиэдра P, переходящими в z_0^{n+1} при отображении f. Можно предположить, что никакие два из этих симплексов не имеют общей вершины, ибо, в противном случае, можно было бы заменить P и R их двукратными барицентрическими подразделениями P'' и R'' и взять в качестве z_0^{n+1} $(n+1)$-мерный симплекс полиэдра R'', ни одна из вершин которого не является вершиной R (такой симплекс, очевидно, существует и удовлетворяет нашему требованию). Гомоморфизм h^f группы $L^n(R, \mathfrak{J})$ в группу $L^n(P, \mathfrak{J})$ отображает элементарную цепь $1 \cdot z_0^{n+1}$ в $(n+1)$-мерную цепь φ полиэдра P, представляющую степень отображения f и, следовательно, в силу предположения, что степень отображения f есть нуль, существует n-мерная цепь ψ такая, что

$$\varphi = \nabla\psi. \tag{1}$$

Пусть $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ — цепи $h_V\varphi$ и $h_V\psi$ полиэдра V, соответствующие цепям φ и ψ при естественном гомоморфизме. Из равенства (1) получаем

$$\tilde{\varphi} = \nabla\tilde{\psi}. \tag{2}$$

Пусть z_0^n — ориентированная грань симплекса z_0^{n+1}, пусть n-мерная цепь ψ_1 полиэдра V есть образ элементарной цепи $1 \cdot z_0^n$ при гомоморфизме, порожденном отображением $f|V$. Так как $1 \cdot z_0^{n+1}$ является ∇-границей цепи $1 \cdot z_0^n$ в комплексе, состоящем из неориентированного симплекса z_0^{n+1} и его граней, а $\tilde{\varphi}$ — образом цепи $1 \cdot z_0^{n+1}$, при гомоморфизме, порожденном отображением $f|V$, то мы имеем

$$\tilde{\varphi} = \nabla\psi_1,$$

и это вместе с (2) показывает, что цепь $\psi_1 - \tilde{\psi}$ полиэдра V является ∇-циклом в V и, следовательно [1]) (см. примеры VIII 6 и VIII 10), гомологична нулю в V. Пусть теперь T — полиэдр, состоящий из всех клеток полиэдра V размерности $\leqslant n$. Рассмотрим отображение $f|T$ как отображение полиэдра T в элементарную n-мерную сферу R_n, образованную гранями симплекса z_0^{n+1}. ψ_1 можно рассматривать как ∇-цикл полиэдра T, представляющий степень отображения $f|T$. Так как ∇-цикл $\psi_1 - \tilde{\psi}$, как показано выше, ограничивает, то степень отображения $f|T$ представляется также цепью $\tilde{\psi}$. Заметим, что, в силу (1), $\nabla\tilde{\psi}(s^{n+1}) = 0$ для любого $(n+1)$-мерного симплекса, не принадлежащего V. Это означает, что цепь $h_{(P\setminus V)\cup T}\,\tilde{\psi}$ является n-мерным ∇-циклом полиэдра $(P\setminus V)\cup T$. Так как этот ∇-цикл является продолжением ∇-цикла $\tilde{\psi}$, то, используя D_n), получаем, что отображение $f|T$ может быть продолжено в отображение F полиэдра $(P\setminus V)\cup T$ в R_n.

Положим $g(x) = f(x)$, если $x \in V$, и $g(x) = F(x)$ в противном случае; g есть отображение полиэдра P в R. Введем, далее, в R сферическую метрику таким образом, чтобы клетка,

---

[1]) Для того чтобы применить здесь пример VIII 6, мы должны взять $n > 0$. Отсюда видно, почему мы не могли начать индукцию с $n = 0$.

определенная симплексом z_0^{n+1} совпадала с полусферой. Ясно, что в этой метрике $f(x)$ и $g(x)$ никогда не бывают диаметрально противоположными точками и, следовательно (пример VI 8), f и g гомотопны. Так как образ полиэдра P при отображении g является собственной частью $(n+1)$-мерной сферы, именно, замкнутой клеткой, определенной симплексом z_0^{n+1}, то g гомотопно постоянному отображению (см. пример VI 8), а значит, это верно и для f.

Таким образом, доказательство того, что из D_n) следует C_{n+1}), закончено. Следовательно, предложения C_n) и D_n) полностью доказаны.

ОТОБРАЖЕНИЯ КОМПАКТОВ В S_n.

Теорема VIII 1. *Пусть X — компакт размерности $\leqslant n+1$, C — его замкнутое подмножество, и f — отображение множества C в (ориентированную)* [1] *n-мерную сферу S_n. Пусть $e \in \nabla^n(C)$ есть степень отображения f. Тогда для того чтобы f было продолжаемо на X, необходимо и достаточно, чтобы e было продолжаемо на X. Кроме того, если $\tilde{e} \in \nabla^n(X)$ есть продолжение e на X, то существует продолжение F отображения f на X, имеющее $\tilde{e}$ своей степенью.*

Следующая теорема двойственна предыдущей.

Теорема VIII 1′. **Теорема Хопфа о продолжении отображения.** *Пусть X — компакт размерности $\leqslant n+1$, C — его замкнутое подмножество, и f — отображение множества C в S_n. Для того чтобы f было продолжаемо на X, необходимо и достаточно, чтобы каждый элемент* [2] *группы $\Delta^n(C)$, ограничивающий в X, отображался в нуль группы $\Delta^n(S_n)$ гомоморфизмом h_f группы $\Delta^n(C)$ в группу $\Delta^n(S_n)$.*

Эквивалентность теорем VIII 1 и 1′ была установлена в предложении B). Таким образом, достаточно доказать лишь первую из них.

Доказательство теоремы VIII 1. Необходимость условия уже была проверена (предложение A)).

---

[1] См. пример VIII 25.

[2] Напомним, что областью коэффициентов ∇-групп является группа $\mathfrak{Z}$ целых чисел, а областью коэффициентов Δ-групп — группа Π действительных чисел, приведенных по модулю 1.

Для того чтобы доказать достаточность, отождествим сначала S_n с элементарной n-мерной сферой R_n (см. предложение D_n)). Мы утверждаем, что существует покрытие τ компакта X, обладающее следующими свойствами:

(a) $\tilde{e}$ имеет представителя, $\tilde{e}_\tau$, в группе $\nabla^n(N(\tau))$;

(b) если $U_1, \ldots, U_k$ — элементы покрытия τ, то образ при отображении f множества $U_i \cap C$ содержится в звезде некоторой вершины комплекса R_n;

(c) Порядок покрытия τ не больше $n+1$.

Чтобы показать это, найдем сначала покрытие τ_1 компакта X, удовлетворяющее условию (a), и покрытие τ_2 (существование которого вытекает из компактности X), удовлетворяющее условию (b). Тогда в качестве τ можно взять любое покрытие порядка $\leqslant n+1$, вписанное и в τ_1, и в τ_2; существование такого покрытия следует из теоремы V 1.

Обозначим через $\tau \mid C$ покрытие множества C, состоящее из пересечений элементов покрытия τ с множеством C. $\dim N(\tau) \leqslant n+1$, и $N(\tau \mid C)$ является подкомплексом нерва $N(\tau)$. Рассмотрим *симплициальное отображение g_τ комплекса $N(\tau \mid C)$ в R_n, полученное тем, что каждому элементу $U_i \cap C$ покрытия $\tau \mid C$ ставится в соответствие некоторая вершина комплекса R_n, звезда которой содержит $f(U_i \cap C)$.* Тогда из определения гомоморфизмов ∇-групп, порожденных отображением, легко следует, что степенью e_τ отображения g_τ является представитель элемента e в группе $\nabla^n(N(\tau \mid C))$. Рассмотрим геометрические реализации $P(\tau)$ и $P(\tau \mid C)$ нервов $N(\tau)$ и $N(\tau \mid C)$, и будем рассматривать g_τ как симплициальное отображение полиэдра $P(\tau \mid C)$, а не только его вершин, в R_n. Можно предположить[1]), что $\tilde{e}_\tau$ является продолжением элемента e_τ. В силу D_n), существует продолжение G_τ отображения g_τ на $P(\tau)$, имеющее $\tilde{e}_\tau$ своей степенью. Возьмем теперь барицентрическое τ-отображение b_τ пространства X в полиэдр $P(\tau)$ (см. определение V 9). Частичное отображение $b_\tau \mid C$ является, очевидно, отображением множества C в полиэдр $P(\tau \mid C)$. Рас-

[1]) Если e'_τ есть элемент группы $\Delta^n(N(\tau \mid C))$, продолжением которого является $\tilde{e}_\tau$, то e'_τ и e_τ представляют один и тот же элемент группы $\nabla^n(C)$, т. е. они имеют одну и ту же проекцию в группу $\nabla^n(N(\tau_1 \mid C))$, где τ_1 — подходящим образом выбранное, вписанное в τ покрытие. Заменяя τ покрытием τ_1 и g_τ произведением g_τ и проекции комплекса $N(\tau_1 \mid C)$ в комплекс $N(\tau \mid C)$, можем предположить, что $e'_\tau = e_\tau$.

смотрим отображение

$$g(x) = g_\tau(b_\tau(x)), \qquad x \in C$$

множества C в R_n и его продолжение

$$G(x) = G_\tau(b_\tau(x)), \qquad x \in X,$$

являющееся отображением пространства X в R_n. Степень отображения g есть образ элемента e_τ в группе $\nabla^n(X)$ при гомоморфизме, порожденном отображением h_τ и, в силу примера VIII 24, это будет элемент e. По тем же соображениям, степенью отображения G является элемент $\tilde{e}$.

Отображение g обладает тем свойством, что если $U_{i_0}, \ldots, U_{i_m}$ — все элементы покрытия τ, содержащие данную точку $x \in C$, то $g(x)$ содержится в клетке полиэдра R_n, определенной симплексом $(p_{i_0}, \ldots, p_{i_m})$, вершины которого соответствуют при отображении g_τ множествам $U_{i_0}, \ldots, U_{i_m}$. Из определения отображения g_τ вытекает, что $f(x)$ содержится в звезде каждой вершины $p_{i_0}, \ldots, p_{i_m}$, т. е. $f(x)$ содержится в клетке полиэдра R_n, имеющей симплекс $(p_{i_0}, \ldots, p_{i_m})$ своей гранью; следовательно, $g(x)$ и $f(x)$ содержатся в одной и той же замкнутой клетке полиэдра R_n. Следовательно, f и g гомотопны друг другу, ибо можно точки $g(x)$ и $f(x)$ соединить прямолинейным отрезком и передвигать $f(x)$ к $g(x)$ по этому отрезку.

Теперь g допускает продолжение на X, а именно в G. Следовательно (теорема Борсука, теорема VI 5), f также допускает некоторое продолжение F на X, гомотопное отображение G. Но G имеет степень $\tilde{e}$; следовательно (предложение 5 E)), F также имеет степень $\tilde{e}$. Теорема VIII 1 доказана.

Следствие 1. *Если X — компакт размерности $\leqslant n+1$, то каждому элементу e группы $\nabla^n(X)$ соответствует отображение компакта X в ориентированную n-мерную сферу S_n степени e.*

Следствие 2. *Пусть X — компакт размерности $\leqslant n+1$, и C — его замкнутое подмножество. Для того чтобы каждое отображение множества C в S_n было продолжаемо на X, необходимо и достаточно, чтобы каждый элемент группы $\nabla^n(C)$ был продолжаем, другими словами, чтобы естественный гомоморфизм группы $\nabla^n(X)$ в группу $\nabla^n(C)$ был гомоморфизмом группы $\nabla^n(X)$ на группу $\nabla^n(C)$.*

Доказательство. *Необходимость*: пусть e — непродолжаемый элемент группы $\nabla^n(C)$. В силу следствия 1, существует отображение f множества C в сферу S_n степени e. В силу предложения А), f не может быть продолжено на X. Достаточность следует непосредственно из теоремы VIII 1.

Следствие 3. *Пусть X — компакт размерности $\leqslant n+1$ и C — его замкнутое подмножество. Для того чтобы каждое отображение множества C в S_n было продолжаемо на X, необходимо и достаточно, чтобы только нулевой элемент группы $\Delta^n(C)$ ограничивал в X, другими словами, чтобы естественный гомоморфизм группы $\Delta^n(C)$ в группу $\Delta^n(X)$ был изоморфизмом группы $\Delta^n(C)$ в группу $\Delta^n(X)$.*

Доказательство. Следствие 3 вытекает из следствия 2 и предложения 2 F).

Теорема VIII 2. *Пусть X — компакт размерности*[1] $\leqslant n$. *Два отображения компакта X в ориентированную n-мерную сферу S_n гомотопны в том и только в том случае, если они имеют одну и ту же степень. Кроме того, гомотопические классы отображений компакта X в ориентированную сферу S_n находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы $\nabla^n(X)$.*

Доказательство. Мы уже доказали, что два гомотопные отображения имеют одну и ту же степень (предложение 5 E)). Докажем теперь обратное. Рассмотрим топологическое произведение $X \times I$ компакта X на отрезок I. В силу теоремы III 4, $\dim X \times I \leqslant n+1$. Пусть p — отображение произведения $X \times I$ в X, задаваемое формулой: $p(x, t) = x$, $x \in X$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и q — отображение пространства X в произведение $X \times I$, задаваемое формулой: $q(x) = (x, 0)$. Отображение p порождает гомоморфизм h^p группы $\nabla^n(X)$ в группу $\nabla^n(X \times I)$, а отображение q порождает гомоморфизм h^q группы $\nabla^n(X \times I)$ в группу $\nabla^n(X)$. Так как pq есть тождественное отображение компакта X на себя, то гомоморфизм $h^q h^p$, порождаемый этим отображением, является тождественным автоморфизмом группы $\nabla^n(X)$: для любого элемента $e \in \nabla^n(X)$

$$h^q h^p(e) = e. \tag{3}$$

Пусть X_0 — множество точек вида $(x, 0)$, и X_1 — множество точек вида $(x, 1)$. Если $n > 0$, то, в силу примера VIII 22. 1,

---

[1] Следует обратить внимание на то, что теперь мы берем $\dim X \leqslant n$ вместо $\dim X \leqslant n+1$, как в теореме VIII 1.

группа $\nabla^n(X_0 \cup X_1)$ является прямой суммой групп $\nabla^n(X_0)$ и $\nabla^n(X_1)$. Следовательно, элементы группы $\nabla^n(X_0 \cup X_1)$ могут быть представлены парами (e, e'), где e и e' — произвольные элементы группы $\nabla^n(X)$. Из соотношения (3) легко следует, что для любого элемента $e \in \nabla^n(X)$ элемент (e, e) группы $\nabla^n(X_0 \cup X_1)$ является образом элемента $h^p(e)$ при естественном гомоморфизме группы $\nabla^n(X \times I)$ в группу $\nabla^n(X_0 \cup X_1)$, ибо гомоморфизм h^q, очевидно, можно интерпретировать как естественный гомоморфизм группы $\nabla^n(X \times I)$ в группу $\nabla^n(X_0)$ (или в группу $\nabla^n(X_1)$). Это показывает, что каждый элемент группы $\nabla^n(X_0 \cup X_1)$ вида (e, e) продолжаем на $X \times I$.

Пусть f_0 и f_1 — отображения компакта X в S_n, имеющие одну и ту же степень e. Рассмотрим отображение множества $X_0 \cup X_1$ в S_n, равное отображению f_0 на X_0 и отображению f_1 на X_1. Его степень есть (e, e), а элемент (e, e) продолжаем на $X \times I$. Следовательно, по теореме Хопфа о продолжении, отображение множества $X_0 \cup X_1$, определенное выше, может быть продолжено на $X \times I$; это означает, что отображение f_0 и f_1 гомотопны.

Доказательство того, что гомотопические классы находятся во взаимно однозначном соответствии с ∇-классами, вытекает теперь непосредственно из следствия 1 теоремы VIII 1.

С л е д с т в и е. *Пусть X — компакт размерности $\leqslant n$. Тогда X допускает существенные отображения в S_n в том и только в том случае, если $\nabla^n(X) \neq 0$, или (двойственно) в том и только в том случае, если $\Delta^n(X) \neq 0$.*

З а м е ч а н и е. Если X — компактное подмножество $(n+1)$-мерного эвклидова пространства, то предположение $\dim X \leqslant n$ в следствии может быть опущено, ибо, в силу следствия 1 теоремы VIII 1, из того, что $\nabla^n(X) \neq 0$, вытекает существование существенного отображения пространства X в S_n С другой стороны, из того, что $\nabla^n(X) = 0$, следует (см. теорему VIII 1), что каждое отображение пространства X в S_n может быть продолжено на содержащий пространство X $(n+1)$-мерный куб и, следовательно, является несущественным (см. пример VI 7). Это позволяет дать алгебраическую интерпретацию теоремы VI 13: *компакт $X \subset E_{n+1}$ разбивает E_{n+1} в том и только в том случае, если $\nabla^n(X) \neq 0$, или двойственно, если $\Delta^n(X) \neq 0$.*

Это, конечно, частный случай знаменитого закона двойственности Александера.

7. Теория гомологий и размерность

Теперь мы переходим к главному результату главы VIII, Теорема VIII 3. *Пусть X — компакт конечной размерности. Для того чтобы размерность X была не больше n, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого подмножества $C \subset X$ каждый элемент группы $\nabla^n(C)$ был продолжаем на X. Это значит, что естественный гомоморфизм группы $\nabla^n(X)$ в группу $\nabla^n(C)$ должен быть гомоморфизмом группы $\nabla^n(X)$ на всю группу $\nabla^n(C)$.*

Или в двойственной формулировке:

Теорема VIII 3'. *Пусть X—компакт конечной размерности. Для того чтобы размерность X была не больше n, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого подмножества $C \subset X$ только нулевой элемент группы $\Delta^n(C)$ ограничивал в X. Это значит, что естественный гомоморфизм группы $\Delta^n(C)$ в группу $\Delta^n(X)$ должен быть изоморфизмом группы $\Delta^n(C)$ в группу $\Delta^n(X)$.*

Так как естественный гомоморфизм группы $\Delta^n(C)$ в группу $\Delta^n(X)$ является сопряженным гомоморфизмом с естественным гомоморфизмом группы $\nabla^n(X)$ в группу $\nabla^n(C)$ (предложение 5 F) и определение VIII 15)), то условия обеих теорем эквивалентны (предложение 2 F)). Следовательно, достаточно дать доказательство лишь одной из них.

Доказательство теоремы VIII 3. *Необходимость* можно было бы немедленно получить из теоремы VI 4 и следствия 2 теоремы VIII 1. Можно, однако, дать значительно более элементарное доказательство. Заметим сначала, что если K — комплекс размерности $\leqslant n$ и L — подкомплекс комплекса K, то каждый элемент группы $\nabla^n(L)$ продолжаем на K, ибо в комплексе K нет никакой разницы между n-мерными цепями и n-мерными ∇-циклами, а каждая n-мерная цепь подкомплекса L, конечно, может быть продолжена в n-мерную цепь комплекса K.

Пусть e — некоторый элемент группы $\nabla^n(C)$, и σ — покрытие множества C такое, что e имеет представителя в группе $\nabla^n(N(\sigma))$. Рассмотрим теперь покрытие τ пространства X, обладающее тем свойством, что элементы покрытия τ являются пересечениями множества C с элементами покрытия τ. По теореме V 1 существует покрытие τ' порядка $\leqslant n$, вписанное в τ. Пусть σ'—покрытие множества C, состоящее из пересечений множества C с элементами покрытия τ' Так как σ' вписано в σ, то e имеет представителя $e_{\sigma'}$ в группе $\nabla^n(N(\sigma'))$. Так как $\dim N(\tau') \leqslant n$, то, как замечено выше, существует элемент $e_{\tau'}$ группы $\nabla^n(N(\tau'))$, являющийся продолжением элемента $e_{\sigma'}$. Элемент группы $\nabla^n(X)$, определяемый этим элементом $e_{\tau'}$, является продолжением элемента e.

Достаточность. Пусть $\dim X > n$. Тогда, в силу предложения III 1 D), X содержит замкнутое множество X_1 размерности $n+1$. По теореме VI 4 существуют замкнутое подмножество $C \subset X_1$ и отображение f множества C в S_n, которое не может быть продолжено на X_1. Следовательно, согласно теореме VIII 1, существует элемент группы $\nabla^n(C)$, не продолжаемый на X_1, а значит, и подавно не продолжаемый на X.

Замечание. Неизвестно, имеет ли теорема VIII 3 место, если не делать предположения, что пространство X имеет конечную размерность.

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ГОМОЛОГИИ

В заключение мы кратко рассмотрим так называемые «относительные» Δ- и ∇-гомологии, с помощью которых связь между размерностью и гомологией может быть выражена в более ясной форме.

Если дан компакт X и его замкнутое подмножество C, то можно определить Δ- и ∇-группы компакта $X \bmod C$. Для каждого покрытия τ компакта X пусть $\tau | C$—покрытие множества C, состоящее из пересечений C с элементами покрытия τ. Тогда система групп $\{\nabla^n(N(\tau) \bmod N(\tau | C), G)\}$ (см. стр. 158) с гомоморфизмами, порождаемыми симплициальными отображениями нервов, является прямым спектром. Аналогично, $\{\Delta^n(N(\tau) \bmod N(\tau | C), G)\}$ является обратным спектром. Предельные группы этих спектров называются, соответственно, n-мерными ∇- и Δ-группами компакта $X \bmod C$ по области коэффициентов G. Предложения 1G) и 2H), доказанные для комплексов, могут быть без всяких затруднений перенесены на общие компакты.

(a) Если $\nabla^{n+1}(X \bmod C, G)$ — нулевая группа, то естественный гомоморфизм отображает группу $\nabla^n(X, G)$ на всю группу $\nabla^n(C, G)$, т. е. каждый элемент группы $\nabla^n(C, G)$ продолжаем.

(b) Если G — счетная дискретная группа и G^* — ее группа характеров, то $\Delta^n(X \bmod C, G^*)$ является группой характеров группы $\nabla^n(X \bmod C, G)$.

Возьмем теперь снова в качестве области коэффициентов ∇-групп группу $\mathfrak{J}$, а в качестве области коэффициентов Δ-групп группу Π.

Теорема VIII 4. *Пусть X — компакт конечной размерности. Для того чтобы размерность X была не больше n, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого подмножества C компакта X группа $\nabla^{n+1}(X \operatorname{mod} C)$, или, что то же, группа $\Delta^{n+1}(X \operatorname{mod} C)$, была нулевой группой.*

Доказательство. Необходимость вытекает из рассуждений предложения 4 F), а достаточность — из теоремы VIII 3 и (a).

Можно показать, что группы $\nabla^{m}(X \operatorname{mod} C)$ и $\Delta^{m}(X \operatorname{mod} C)$ являются топологическими инвариантами открытого множества $X \setminus C$. Таким образом, теорема VIII 4 утверждает, что $\dim X \geqslant n$ в том и только в том случае, если X содержит открытое множество, несущее на себе существенные n-мерные гомологии.

ПРИБАВЛЕНИЕ

В этой книге мы рассматривали исключительно метрические пространства со счетным базисом, хотя пространства более общей природы играют очень важную роль в современных топологических исследованиях. Мы решили рассматривать только метрические пространства со счетным базисом не из-за соображений вкуса, так как действительная теория размерности, приложимая к общим пространствам, была бы чрезвычайно интересна.

Мы ограничились рассмотрением метрических пространств со счетным базисом также и не потому, что не существует определений размерности, приложимых к общим пространствам. Причина этого заключается скорее в следующем: хотя можно — в действительности, даже несколькими способами — дать определение размерности для пространств очень общей природы, нельзя (по крайней мере, исходя из существующих понятий размерности) построить *теорию* размерности для таких общих пространств. Цель Прибавления состоит в пояснении этого утверждения.

Любая теория размерности исходит из «размерностной функции» $d(X)$, и представляется ясным, что, для того чтобы оправдать свое название, размерностная функция должна быть целочисленным топологическим инвариантом пространств, отличающим n-мерное эвклидово пространство от m-мерного; причем инвариантам *монотонным*, т. е. если $X' \subset X$, то должно быть $d(X') \leqslant d(X)$.

В этой книге мы познакомились с тремя размерностными функциями метрических пространств со счетным базисом, а именно ($d_1(X)$, конечно, есть $\dim X$):

(1) $d_1(X) = -1$, если X пусто; $d_1(X) \leqslant n$, если для каждой точки $p \in X$ и открытого множества U, содержащего p,

существует открытое множество V такое, что

$$p \in V \subset U,$$

$$d_1(Fr\ V) \leqslant n-1.$$

(2) $d_2(X) = -1$, если X пусто; $d_2(X) \leqslant n$, если для каждого замкнутого множества $F \subset X$ и открытого множества U, содержащего F, существует открытое множество V такое, что

$$F \subset V \subset U,$$

$$d_2(Fr\ V) \leqslant n-1.$$

(3) $d_3(X) = -1$, если X пусто; $d_3(X) \leqslant n$, если в каждое покрытие [1]) пространства X можно вписать покрытие порядка $\leqslant n$.

Мы доказали (предложение III 5 A) и теорема V 8)), что, если X — метрическое пространство со счетным базисом, утверждения $d_1(X) \leqslant n$, $d_2(X) \leqslant n$, $d_3(X) \leqslant n$ эквивалентны [2]). И с помощью этих размерностных функций были получены наиболее интересные геометрические теоремы.

Определения (1), (2) и (3) без малейших затруднений могут быть перенесены на топологические пространства наиболее общего вида. Но немедленно вслед за этим возникают осложнения, ибо, как будет показано на примерах,

(a) d_1 не удовлетворяет элементарному требованию, чтобы, если X счетно, $d_1(X) = 0$;

(b) $d_1(X)$ не обязательно равно $d_2(X)$ или $d_3(X)$ [3]);

(c) ни d_2 ни d_3 не монотонны.

d_1, как легко видеть, монотонно, что можно показать методами, которыми мы пользовались при доказательстве теоремы III 1. Однако существует пример Урысона [4]) хаусдорфова пространства U счетного и тем не менее связного. Очевидно, $d_1(U) > 0$; ибо пространство X, для которого $d_1(X) = 0$, содержат собственные подмножества, одновременно открытые

[1]) Напоминаем, что слово «покрытие» означает «конечное покрытие открытыми множествами».

[2]) Здесь уместно вспомнить, что эта эквивалентность играла важную роль в доказательстве основных теорем теории размерности; следует обратить внимание на то, что мы пользовались функцией d_2 при доказательстве теоремы сложения для нульмерных множеств (теорема II 2) и функцией d_3 при доказательстве теоремы о включении (теорема V 3).

[3]) См. сноску [2]).

[4]) «Ueber die Mächtigkeit zusammenhängender Mengen», *Math. Ann.*, 94 (1925), стр. 262—295. Пространство U имеет счетный базис, но не метризуемо.

и замкнутые (в действительности произвольно малые, одновременно открытые и замкнутые подмножества) и, следовательно, не связно. Таким образом, пример Урысона показывает, что функция d_1 не обязательно равна нулю для счетного пространства.

Теперь мы докажем, используя пример Тихонова [1]), что ни d_2, ни d_3 не монотонны. Пример Тихонова строится следующим образом: пусть ω — первое порядковое число второго класса и $[0, \omega]$ — пространство порядковых чисел n, $0 \leqslant n \leqslant \omega$, топология в котором определяется так: для любого $n \in [0, \omega]$ произвольная окрестность n определяется парой порядковых чисел m, p таких, что $m < n < p$, именно, она состоит из всех порядковых чисел x таких, что $m < x < p$. Аналогично, пусть Ω — первое порядковое число третьего класса и $[0, \Omega]$ — пространство всех порядковых чисел α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \Omega$, топология в котором определяется в точности так же, как в $[0, \omega]$. Рассмотрим теперь топологическое произведение $S = [0, \omega] \times [0, \Omega]$, так что точками пространства S являются пары (n, α), $0 \leqslant n \leqslant \omega$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \Omega$. Обозначим через T дополнение в S точки (ω, Ω).

Каждое из пространств $[0, \omega]$ и $[0, \Omega]$ является бикомпактным хаусдорфовым пространством. Поэтому [2]) их произведение S также является бикомпактным хаусдорфовым пространством и, следовательно)[3], оно нормально. С другой стороны, T не нормально: пусть F — множество $\{(n, \omega);\ 0 \leqslant n < \Omega\}$ и K — множество $\{(\omega, \alpha);\ 0 \leqslant \alpha < \Omega\}$. Тогда множества F и K замкнуты в T и не пересекаются; следовательно, $U = T \setminus K$ есть открытое множество, содержащее F. Пусть теперь V — любое другое открытое в T множество, содержащее F; каждая точка (n, Ω) множества F имеет тогда окрестность, содержащуюся в V: это значит, что для каждого n существует порядковое число $\alpha_n < \Omega$ такое, что из $x > \alpha_n$ следует, что $(n, x) \in V$. Но счетная последовательность порядковых чисел второго класса имеет верхнюю границу, принадлежащую второму классу. Следовательно, существует порядковое число $\alpha_0 < \Omega$ такое, что для

---

[1]) «Über die topologische Erweiterung von Räumen, *Math. Ann.* 102 (1930), стр. 544—561. Когда настоящие заметки были уже написаны, этот же самый пример Тихонова был использован для той же цели Н. Веденисовым: «Замечания о размерности топологических пространств», *Ученые записки МГУ*, **30** (1939), стр. 131—140.

[2]) АН, стр. 86.

[3]) АН, стр. 89.

каждого $n=0, 1, 2, \ldots$ точки (n, α_0) принадлежат V; таким образом, $\overline{V}$ должно содержать точку (ω, α_0). Но (ω, α_0) принадлежит K. Тем самым показано, что не существует никакого открытого множества, удовлетворяющего условию:

$$F \subset V \subset \overline{V} \subset U,$$

т. е. T не нормально.

Легко видеть, что $d_1(S)=0$. Из бикомпактности S следует (см. доказательство предложения 2 B)), что $d_2(S)=0$. Но $d_2(T)>0$, так как T не нормально, а пространство X, для которого $d_2(x)=0$, должно быть нормальным. Действительно, пусть F — замкнутое множество в X, и U — открытое множество, содержащее F. Так как $d_2(X)=0$, существует открытое множество V, $F \subset V \subset U$, с пустой границей, т. е. являющееся также замкнутым. Следовательно, $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$, и X нормально.

Соотношения $d_2(S)=0$ и $d_2(T)>0$ показывают, что d_2 не моногонна.

Пусть X — произвольное пространство. *Тогда из* $d_2(X)=0$ *следует, что* $d_3(X)=0$. Нам надо показать, что в каждое покрытие α пространства X можно вписать покрытие, состоящее из попарно непересекающихся множеств. Допустим сначала, что α состоит лишь из двух элементов U_1 и U_2. В этом случае $X \setminus U_1$ есть замкнутое множество, содержащееся в U_2. Так как $d_2(X)=0$, можно найти одновременно открытое и замкнутое множество V, удовлетворяющее условию: $X \setminus U_1 \subset V \subset U_2$. Тогда, очевидно, $X \setminus V$ и V образуют нужное нам покрытие, вписанное в α. Предположим теперь, что число элементов покрытия α равно $r>2$; тогда применяем метод предложения V 1 B), полагая в этом предложении $M=X$.

Наоборот, допустим, что $d_3(X)=0$; *тогда* $d_2(X)=0$. Действительно, пусть F — замкнутое множество пространства X, и $U_1 \subset X$ — открытое множество, содержащее F. Тогда U_1 и U_2 образуют покрытие α пространства X. Из предположения $d_3(X)=0$ вытекает, что в α можно вписать покрытие β, состоящее из попарно непересекающихся открытых множеств. Так как элементы покрытия β попарно не пересекаются, то каждый из них является не только открытым, но и замкнутым множеством; так как β вписано в α, каждый элемент покрытия β, пересекающийся с F, содержится в U_1. Пусть V — сумма элементов покрытия β, пересекающихся с F. Тогда V одновременно открыто и замкнуто и $F \subset V \subset U_1$; таким образом, $d_2(X)=0$.

Используя доказанную нами эквивалентность условий $d_2(X)=0$ и $d_3(X)=0$, видим, что $d_3(S)=0$ и $d_3(T)>0$, так что d_3 также не монотонна. Итак, в теории размерности, опирающейся на d_2 или d_3, может случиться даже для таких «хороших» пространств, как бикомпактные хаусдорфовы пространства, что подмножество имеет бóльшую «размерность», чем все пространство.

Соотношения $d_1(T)=0$, $d_2(T)>0$, $d_3(T)>0$ доказывают утверждение (b).

В заключение упомянем об очень интересной нерешенной проблеме, поставленной Менгером[1]: дать аксиоматическую характеристику размерности. Менгер решил эту проблему в частном случае подмножеств плоскости, показав, что если $f(x)$ — действительная функция, определенная для произвольных подмножеств X плоскости, которая

1) Монотонна: если $X' \subset X$, то $f(X') \leqslant f(X)$;
2) F_σ-постоянна: если X сумма счетного числа замкнутых множеств X_i, то $f(X) \leqslant \max f(X_i)$;
3) топологически инвариантна: если X гомеоморфно X', то $f(X)=f(X')$;
4) компактифицируема: каждое множество X гомеоморфно подмножеству компакта X', для которого $f(X)=f(X')$;
5) нормирована: f (точки) $=0$, f (прямой) $=1$, f (плоскости) $=2$;

тогда $f(X)=\dim X$. Эта общая проблема, повидимому, чрезвычайно трудна.

---

[1]) Zur Begründung einer axiomatischen Theorie der Dimension *Monatsh. f. Math. u Phys.*, **36** (1929), стр. 193—218. См. также Kuratowski et Menger, Remarques sur la théorie axiomatique de la dimension, *Monatsh. f. Math. u Phys.*, 37 (1930), стр. 169—174 и Nöbeling, Die neuesten Ergebnisse der Dimensionstheorie, *Jahresbericht d. deutschen Math. Vereinigung*, **41** (1932), стр. 1—16, в частности, стр. 15.

14 Зак. 597. В. Гуревич

ПРИБАВЛЕНИЕ К ПЕРЕВОДУ

Л. Понтрягин и Л. Шнирельман

Об одном метрическом свойстве размерности [1]).

Целью настоящей заметки является получение размерности компакта с помощью приема покрытия «эталонами меры», число которых позволяет определить размерность. Этот метод аналогичен методу измерения, употребляемому в элементарной геометрии. При определениях размерности всегда пользуются понятиями чисто топологическими и оставляют в стороне метрические свойства. Между тем, как мы увидим, существует весьма поразительная связь между метрическими свойствами компакта и его размерностью.

Мы пользуемся следующей формой определения размерности (в хорошо известном смысле Брауэра, Урысона и Менгера):

Компакт F имеет размерность n, если n есть наименьшее целое число такое, что для произвольного положительного числа ε существует конечная система замкнутых множеств, покрывающих компакт F, с диаметрами, не превосходящими ε, никакие $n+2$ из которых не имеют общей точки.

Пусть дан компакт F. Покроем его конечной системой замкнутых множеств с диаметрами, не превышающими ε. Это возможно, в силу теоремы Гейне-Бореля. Можно определить минимальное число $N(\varepsilon)$ таких множеств, необходимое для того, чтобы они покрывали F. $N(\varepsilon)$ принимает целые положительные значения для всех положительных значений ε и неограниченно возрастает, когда ε стремится к нулю (если только множество F не состоит из конечного числа точек). Эта функция зависит, очевидно, от метрики компакта F. Мы назовем ее функцией объема компакта F относительно данной метрики и обозначим ее через $N_F(\varepsilon)$.

---

[1]) Статья напечатана в *Annals of Mathematics* **33** (1932 г.), стр. 156—162.

Пусть r — произвольное действительное число; мы говорим, что r принадлежит к первому классу, если существует положительное число c такое, что имеет место неравенство $N_F(\varepsilon) \geqslant \frac{c}{\varepsilon^r}$ (каково бы ни было $\varepsilon > 0$); в противном случае r принадлежит ко второму классу. Полученное таким образом дедекиндово сечение определяет неотрицательное число $k \, (\leqslant +\infty)$, которое мы назовем *метрическим порядком компакта* F. Нетрудно видеть, что

$$k = \liminf \left(-\frac{\log N_F(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \right).$$

Для различных метрик компакта F мы получаем различные функции объема и различные метрические порядки. Например, простая жорданова дуга с эвклидовой метрикой имеет функцию объема (асимптотически) $\frac{c}{\varepsilon}$, где c — некоторая константа. Метрический порядок такой дуги равен, следовательно, *единице*. С другой стороны, можно определить иную метрику простой дуги следующим образом: возьмем совершенное вполне несвязное множество в k-мерном эвклидовом пространстве R^k, имеющее положительную меру. Через такое множество можно провести дугу. Эта дуга, автоматически, обладает метрикой эвклидова пространства R^k, ее функция объема есть асимтотически $\frac{c}{\varepsilon^k}$, и ее метрический порядок равен k.

Таким образом, метрический порядок не является инвариантом компакта F. Однако, очевидно, получаем топологический инвариант компакта F, рассматривая нижнюю границу метрических порядков, соответствующих различным метрикам, которые можно ввести в F, не изменяя его топологии.

Главной целью настоящей работы является определение этого топологического инварианта и *доказательство того, что он равен брауэровской размерности компакта* F. Итак, имеем:

Основная теорема. *Нижняя граница метрических порядков*

$$k = \liminf \left(-\frac{\log N_F(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \right)$$

для всех метрик компакта F *равна его размерности.*

Следствие. *Если рассматриваемая нижняя граница конечна, то она обязательно является целым числом.*

Доказательство.

1. Пусть K — r-мерный эвклидов куб. Очевидно, что для его обычной метрики имеем (при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и подходящим образом выбранных константах c и c'):

$$\frac{c'}{\varepsilon^r} > N_k(\varepsilon) > \frac{c}{\varepsilon^r}.$$

2. Мы говорим, что отображение φ метрического пространства F на метрическое пространство F' является отображением без растяжения, если расстояние каждой пары точек пространства F не возрастет при этом отображении, т. е. если

$$\rho[\varphi(a), \varphi(b)] \leqslant \rho(a, b)\,^{1)}.$$

Все отображения без растяжения, очевидно, непрерывны.

Легко видеть, что если метрическое пространство F можно отобразить без растяжения на метрическое пространство F', то

$$N_{F'}(\varepsilon) \leqslant N_F(\varepsilon).$$

3. Покажем, что для компакта размерности $\geqslant r$, конечной или бесконечной, имеем:

$$N_F(\varepsilon) > \frac{c}{\varepsilon^r}$$

(ε достаточно мало, c — положительная константа, зависящая от F). Докажем сначала следующее предложение:

Вспомогательная теорема. *Компакт F размерности $\geqslant r$, конечной или бесконечной, может быть отображен без растяжения на r-мерное подмножество r-мерного эвклидова пространства.*

Доказательство вспомогательной теоремы. Пусть

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{1}$$

— произвольная конечная система точек компакта F. Каждой точке $x \in F$ соответствует система чисел

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \tag{2}$$

где $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ суть расстояния $\rho(a_i, x) = \rho_i$ между точкой x и точками выбранной системы. Поставим точке x в соответствие

1) Отображения этого вида впервые были изучены Колмогоровым в его исследованиях по теории меры.

точку $\varphi'(x)$ n-мерного эвклидова пространства, имеющую декартовы координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где

$$x_i = \frac{\rho_i}{\sqrt{n}}. \tag{3}$$

Докажем, что определенное таким образом отображение φ' является отображением без растяжения. В самом деле, если p' и p'' — две произвольные точки компакта F и $r_1', r_2', \ldots, r_n'$; $r_1'', r_2'', \ldots, r_n''$ — координаты соответствующих им при отображении точек $\varphi'(p')$ и $\varphi'(p'')$, то мы имеем:

$$\rho\,[\varphi'(p'), \varphi'(p'')] =$$
$$= \sqrt{(r_1''-r_1')^2+(r_2''-r_2')^2+\ldots+(r_n''-r_n')^2}.$$

Пусть j — индекс такой, что

$$|r_j''-r_j'| \geqslant |r''_i-r_i'|, \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Имеем:

$$\rho\,[\varphi'(p'), \varphi'(p'')] \leqslant |r_j''-r_j'|\sqrt{n} = |\rho_j''-\rho_j'|.$$

Но, в силу аксиомы треугольника,

$$|\rho_j''-\rho_j'| \leqslant \rho\,(p', p'').$$

Следовательно,

$$\rho\,[\varphi'(p'), \varphi'(p'')] \leqslant \rho\,(p', p'')^{1}).$$

Докажем теперь, что при подходящем выборе системы (1) размерность множества $F' = \varphi'(F)$ будет не меньше, чем r. Выберем сначала систему (1) таким образом, чтобы каждой точке $x \in F$ соответствовала некоторая точка a_j системы (1) такая, что $\rho\,(a_j, x) < \frac{d}{2}$, где d — r-й поперечник Урысона [2]) компакта F (он обязательно положителен, так как размерность компакта F не меньше r) [3]).

Покажем прежде всего, что существует положительное число δ, удовлетворяющее условию:

[1]) Эта часть доказательства представляет собой лишь незначительное видоизменение одного рассуждения Урысона (Comptes rendus, Paris **178** (1924), стр. 65.

[2]) Fund. Math. **8** (1926), стр. 353.

[3]) Выбрать систему (1), обладающую этими свойствами, всегда возможно, так как d положительно и F компактно.

Если
$$\rho\,[\varphi'(p),\ \varphi'(q)] < \delta, \text{ то } \rho\,(p,\ q) < d.$$

В самом деле, допустим, что, напротив, в F существуют две бесконечные сходящиеся последовательности точек
$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m,\ \ldots \tag{4}$$
и
$$q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m,\ \ldots \tag{5}$$
такие, что
$$\rho\,(p_m,\ q_m) \geqslant d \text{ и } \rho\,[\varphi'(p_m),\ \varphi'(q_m)] \to 0\ \ (m \to \infty).$$

Обозначая через p и q предельные точки последовательностей (4) и (5), имеем:
$$\rho\,[\varphi'(p),\ \varphi'(q)] = 0, \quad \rho\,(p,\ q) \geqslant d,$$
т. е.
$$\left.\begin{aligned} \varphi'(p) &= \varphi'(q), \\ \rho\,(p,\ q) &\geqslant d. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

По предположению, существует точка a_j системы (1), для которой $\rho\,(a_j,\ p) < \frac{d}{2}$. Для этой точки $\rho\,(a_j,\ q) > \frac{d}{2}$ (потому что в противном случае мы имели бы
$$\rho\,(p,\ q) \leqslant \rho\,(a_j,\ p) + \rho\,(a_j,\ q) < d.$$

Следовательно, j-е декартовы координаты точек $\varphi'(p)$ и $\varphi'(q)$ отличны друг от друга, что противоречит условию (6).

Предположим, что размерность множества F' меньше, чем r. Тогда существует покрытие множества F' системой замкнутых множеств $f'_1,\ f'_2,\ \ldots,\ f'_k$ с диаметрами, меньшими δ, кратность которого (т. е. максимальное число множеств этого покрытия, имеющих общую точку) не превосходит r.

Обозначая через f_i полный прообраз множества f'_i при отображении φ', получаем покрытие компакта F множествами f_i диаметра $< d$; кратность этого покрытия не превосходит r. Но этого быть не может, так как r-й поперечник Урысона компакта F равен d.

Допустим теперь, что система (1) выбрана таким образом, что размерность множества F' не меньше r. Осуществим при этом предположении следующую конструкцию: пусть $R_1, R_2, \ldots, R_e$ — множество всех r-мерных координатных плоскостей пространства R^n. Обозначим через $\varphi_i(F')$ ортогональную проекцию множества F' на R_i (для сокращения мы пишем F_i^* вместо $\varphi_i(F')$). Покажем, что, по крайней мере, одно из множеств F_i^* имеет размерность r.

Пусть Q — лебегово[1]) покрытие пространства R^n кубами, грани которых параллельны координатным плоскостям. Пусть

$$p_1, p_2, \ldots, p_t, \ldots \tag{7}$$

— всевозможные непустые пересечения по $r+1$ кубу покрытия Q. Система (7) содержит не более конечного числа элементов, пересекающихся с F'; пусть p_s — один из этих элементов. Докажем, что если размерность всех проекций F_i^* меньше, чем r, то существует произвольно малый параллельный сдвиг ψ пространства R^n такой, что $\psi(p_s)$ не пересекается с F'.

Пусть, в самом деле, R^{n-r} — $(n-r)$-мерное линейное пространство, содержащее p_s. Так как R^{n-r} параллельно одной из координатных плоскостей, R^{n-r} перпендикулярно одной из плоскостей R_i, например, R_t, и пересекается с R_t в одной точке. Из предположения, что размерность множества F_t^* меньше, чем r, заключаем, что F_t^* не содержит никакой точки, внутренней относительно R_t, т. е. что можно выбрать произвольно малый параллельный сдвиг ψ такой, что пересечение множества $\psi(R^{n-r})$ с F_t^*, а следовательно, пересечение множества $\psi(R^{n-r})$ с F' и $\psi(p_s)$ с F' будет пусто.

Можно предположить, что сдвиг ψ настолько мал, что если пересечение множества p_i с F' пусто, то и пересечение множества $\psi(p_i)$ с F' также пусто. Повторяя операцию параллельного сдвига конечное число раз, получаем параллельный сдвиг $\bar{\psi}$ такой, что пересечения всех множеств $\bar{\psi}(p_i)$ с F' пусты ($i = 1, 2, \ldots$). Обозначим через

$$q_1, q_2, \ldots, q_s \tag{8}$$

всевозможные кубы покрытия $\bar{\psi}(Q)$, пересечения которых с F' не пусты, и через f_i — пересечение куба q_i с F'. Каждое из пересечений по $(r+1)$-у кубу системы (8) не имеет с F'

---

1) Fund. Math. **2** (1921), стр. 266.

общих точек. Система $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \ldots, \overline{f_s}$ образует, следовательно, покрытие множества F' кратности, не превосходящей r.

Так как покрытие Q (и следовательно, $\overline{\psi}(Q)$) произвольно мало, то отсюда следует, что размерность множества F' меньше r, что невозможно.

Мы можем, таким образом, заключить, что среди проекций F_i^* множества F', по крайней мере одна, например F_j^*, имеет размерность r. Так как проекция является отображением без растяжения, то отображение $\varphi(F) = \varphi_j[\varphi'(F)]$ также является отображением без растяжения, и оно отображает F на r-мерное множество F_i^*, расположенное в r-мерном эвклидовом пространстве. Итак, вспомогательная теорема доказана.

Множество, которое мы только что получили, должно содержать внутреннюю точку относительно пространства R^r, откуда легко следует, что, если ε достаточно мало,

$$N_F(\varepsilon) \geqslant N_{F_j^*}(\varepsilon) \geqslant \frac{c}{\varepsilon^r}. \tag{9}$$

4. Докажем, что r есть в точности нижняя граница всех показателей степени:

$$\lim\inf\left[-\frac{\log N_F(\varepsilon)}{\log(\varepsilon)}\right].$$

Для этой цели достаточно получить метрику компакта F, в которой $N_F(\varepsilon)$ оценивается сверху функцией $\frac{c}{\varepsilon^{r+\delta(\varepsilon)}}$, где $\delta(\varepsilon) \to 0$, когда $\varepsilon \to 0$. Начнем с аппроксимации множеств в эвклидовом пространстве [1]). Если дан r-мерный компакт F, то в эвклидовом $(2r+1)$-мерном пространстве R^{2r+1} можно найти последовательность $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ r-мерных полиэдров, обладающих следующими свойствами:

1. Последовательность имеет топологический предел F', гомеоморфный компакту F.

2. Последовательность можно строить таким образом, что если первые n членов $C_1, C_2, \ldots, C_n$ уже построены, то $(n+1)$-й член C_{n+1} можно расположить в произвольной окрестности полиэдра C_n.

[1]) Для доказательства см. статью Л. Понтрягина и Г. Толстовой: *Math. Ann* **105** (1931), стр. 734—745. См. также. Lefschetz *Annals of Mathematics* **32, 3** (1931).

Можно предположить, что все полиэдры последовательности $C_1, C_2, \ldots$, расположены в конечной части G пространства R^{2r+1}. Так как C_n суть полиэдры, и так как комбинаторная структура полиэдра C_i заранее определена, то для каждого индекса i и каждого положительного члена δ_i можно выбрать положительное число ε_i такое, что $N_{C_i}(\varepsilon) < \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{r+\delta_i}$ (для $\varepsilon \leqslant \varepsilon_i$). Можно еще предположить, что $\varepsilon_i = \tau^{p_i}$, где $0 < \tau < 1$ и p_i — целое положительное число, причем $p_{i+1} > p_i$; $\delta_1, \delta_2, \ldots$, — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел, каждое из которых меньше единицы.

Допустим, что C_1 некоторым определенным образом расположен в G. Обозначим через φ_j, $j = p_1, p_1 + 1, \ldots, p_2 - 1$, покрытие полиэдра C_1 множествами диаметра, меньшего τ^j, такое, что число этих множеств не превосходит $\left(\frac{1}{\tau^i}\right)^{r+\delta_1}$. Увеличив все множества этого покрытия таким образом, чтобы диаметры увеличенных множеств также были меньше τ^j, получим покрытие φ'_j некоторой окрестности G'_j, полиэдра C_1. Число элементов покрытия φ'_j равно числу элементов покрытия φ_j, т. е. не превосходит $\left(\frac{1}{\tau^j}\right)^{r+\delta_1}$.

Обозначая через G_1 пересечение окрестностей

$$G'_p,\ G'_{p_1+1},\ \ldots,\ G'_{p_2-1},$$

получаем:

$$N_{\overline{G}_1}(\varepsilon) \leqslant \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{r+\delta_1} \quad (\text{для } \varepsilon = \tau^j;\ j = p_1,\ p_1 + 1, \ldots, p_2 - 1).$$

Построим полиэдр C_2 внутри окрестности G_1. Повторяя предыдущую конструкцию, получаем последовательность полиэдров $C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots$ и их окрестностей

$$G_1,\ G_2,\ \ldots,\ G_i,\ \ldots,$$

удовлетворяющую следующим условиям:

1. Замыкание $\overline{G}_i$ окрестности G_i содержится в G_{i-1};
2. Для каждого индекса j, $p_{i-1} \leqslant j \leqslant p_i - 1$,

имеем:

$$N_{G_{i-1}}(\tau^j) \leqslant \left(\frac{1}{\tau^j}\right)^{r+\delta_{i-1}}.$$

Но топологический предел F' последовательности C_1, $C_2, \ldots$, $C_n, \ldots$ расположен в пересечении всех замыканий $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2, \ldots$, $\bar{G}_n, \ldots$

Следовательно,

$$1 > \delta'(j) > 0, \quad N_{F'}(\tau^j) \leqslant \left(\frac{1}{\tau^j}\right)^{r+\delta'(j)}$$

($j > 0$, и $\delta'(j)$ стремится к нулю, когда j неограниченно возрастает.)

Пусть $\varepsilon < \tau$ — произвольное положительное число. Мы можем представить его в форме

$$\varepsilon = s \cdot \tau^j, \quad \tau < s \leqslant 1,$$

получаем:

$$_{F'}(s\tau^j) \leqslant N_{F'}(\tau^{j+1}) < \left(\frac{1}{\tau^{j+1}}\right)^{r+\delta'(j+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{s\tau^j}\right)^{r+\delta'(j+1)+(r+1)} \frac{\log s - \log \tau}{\log (s\tau^j)},$$

т. е.

$$N_{F'}(\varepsilon) < \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{r+\delta(\varepsilon)}.$$

Таким образом, наша основная теорема о размерности полностью доказана.

Москва, май 1931 года

УКАЗАТЕЛЬ

А

Б

В

Г

Д

Е

Ж

З

И

К

Л

М

Н

О

П

Р

С

Т

15 Зак. 597. В. Гуревич

У

Ф

Х

Ц

Ч

Э

Я

* * *

Теорема Бэра. *Пересечение последовательности открытых плотных в полном пространстве X множеств плотно в X.*

Доказательство. Пусть $D_1, D_2, \ldots$ — открытые плотные в X множества, и $D = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$. Нужно показать, что каждое открытое множество $U \subset X$ пересекается с D.

Так как D_1 всюду плотно, существует точка $p_1 \in U \cap D_1$, и так как $U \cap D_1$ открыто, найдется сферическая окрестность S_1 точки p_1 диаметра $\delta(S_1) < 1$, замыкание которой содержится в $U \cap D_1$. Заменив U окрестностью S_1 и D_1 — множеством D_2, получим новую точку p_2 и сферическую окрестность S_2 этой точки диаметра $\delta(S_2) < \frac{1}{2}$ такую, что $\overline{S}_2 \subset S_1 \cap D_2$. Продолжая этот процесс, получим последовательность точек

$$p_1, p_2, \ldots, \tag{1}$$

таких, что

$$p_n \in S_n, \ \delta(S_n) < \frac{1}{n} \tag{2}$$

и

$$\overline{S}_n \subset S_{n-1} \cap D_n, \ \overline{S}_1 \subset U \cap D_1. \tag{3}$$

Таким образом, (1) есть фундаментальная последовательность, и следовательно, имеет предел p. Из (3) вытекает, что $p \in U \cap D$, и теорема Бэра доказана.

Любое открытое множество, конечно, является G_δ-множеством. Поэтому теорему Бэра можно сформулировать также и таким образом: *Пересечение последовательности плотных в полном пространстве X G_δ-множеств плотно в X.*

Теорема Брауэра. *Пусть $\{K_\gamma\}$ — семейство замкнутых множеств пространства со счетной базой X, обладающее тем свой-*

ством,** что для любой убывающей последовательности* $K_1 \supset K_2 \supset$ $\supset K_3 \supset \ldots$ ***множеств, принадлежащих $\{K_\lambda\}$, ***пересечение*** $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} K_i$ ***также принадлежит*** $\{K_\lambda\}$. ***Тогда в*** $\{K_\lambda\}$ ***существует неприводимое множество, т. е. множество*** $K \in \{K_\lambda\}$, ***никакое собственное множество которого не принадлежит*** $\{K_\lambda\}$.

Доказательство. Пусть

$$U_1, U_2, \ldots$$

— счетный базис пространства X. Пусть K_0 — произвольное множество совокупности $\{K_\lambda\}$. По индукции определяем множества K_n, $n = 1$, $2, \ldots$, следующим образом:

$$K_n \in \{K_\lambda\} \tag{1}$$

и

$$K_n \subset K_{n-1} \cap (X \setminus U_n), \tag{2}$$

если такое множество существует; в противном случае $K_n = K_{n-1}$. Рассмотрим

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n. \tag{3}$$

Тогда K неприводимо; в противном случае существовало бы собственное подмножество $K' \subset K$ такое, что $K' \in \{K_\lambda\}$, и, следовательно, открытое множество U_n такое, что

$$K \cap U_n \neq 0, \tag{4}$$

в то время как $K' \cap U_n = 0$. Но тогда, по построению K_n, имело бы место (2). Однако из (2) следует

$$K \cap U_n \neq 0,$$

в силу (3), что противоречит (4).

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathcal{C}$	Канторово множество; $\dim \mathcal{C} = 0$, 31
E_n	Эвклидово n-мерное пространство; $\dim E_n = n$, 66
F_ω	Гильбертово пространство, 34
$f \mid A$	Если f — отображение пространства X и $A \subset X$, то $f \mid A$ обозначает частичное отображение, получающееся, если f рассматривать только на A, 107
F_σ-множество	Счетная сумма замкнутых множеств, 41
G_δ-множество	Пересечение счетного числа открытых множеств, 84
h_K	Естественный гомоморфизм группы $\Delta^n(L, G)$ в группу $\Delta^n(K, G)$, 157
h_K	Естественный гомоморфизм группы $\nabla^n(K \bmod L, G)$ в группу $\nabla^n(K, G)$, 159
$h_{K \setminus L}$	Естественный гомоморфизм группы $\Delta^n(K, G)$ в группу $\Delta^n(K \bmod L, G)$, 159
h_L	Естественный гомоморфизм группы $\nabla^n(K, G)$ в группу $\nabla^n(L, G)$, 157
$H^n_\Delta(K, G)$	Группа n-мерных ограничивающих Δ-циклов комплекса K по области коэффициентов G, 152
$H^n_\nabla(K, G)$	Группа n-мерных ограничивающих ∇-циклов комплекса K по области коэффициентов G, 152
I	Единичный отрезок $0 \leqslant x \leqslant 1$ числовой прямой, 119
I_n	Куб в E_n, например, множество точек, каждая из n координат, x_i которых удовлетворяет неравенству $\lvert x_i \rvert \leqslant 1$; $\dim I_n = n$, 66
I_ω	Гильбертов параллелепипед, 32
$\mathcal{J}$	Множество иррациональных действительных чисел; $\dim \mathcal{J} = 0$, 31
$\mathcal{J}_n$	Множество точек пространства E_n, все координаты которых иррациональны; $\dim \mathcal{J}_n = 0$, 32
$\mathcal{J}'_\omega$	Множество точек в I_ω, все координаты которых иррациональны; $\dim \mathcal{J}'_\omega = 0$, 35

$\mathfrak{Z}$	Аддитивная группа целых чисел, 148
K_n	Замкнутая шаровая область в E_n, например, множество точек в E_n, расстояние которых от начала координат $\leqslant 1$, 64
$L^n(K, G)$	Группа n-мерных цепей комплекса K по области коэффициентов G, 150
$\mathcal{L}_n^m$	Множество точек в E_n, имеющих не менее m рациональных координат; $\dim \mathcal{L}_n^m = n - m$, 51
$m_p(X)$	p-мерная мера множества X, 141
$\mathcal{M}_n^m$	Множество точек в E_n, имеющих не более m рациональных координат; $\dim \mathcal{M}_n^m = m$, 51
$\mathcal{M}_\omega^m$	Множество точек в I_ω, имеющих не более m рациональных координат; $\dim \mathcal{M}_\omega^m = m$, 52
$N(\alpha)$	Нерв покрытия α, 99
$P(\alpha)$	Геометрическая реализация нерва $N(\alpha)$, 99
$\mathfrak{R}$	Множество рациональных действительных чисел, $\dim \mathfrak{R} = 0$, 31
$\mathfrak{R}_n$	Множество точек в E_n, все координаты которых рациональны; $\dim \mathfrak{R}_n = 0$, 32
$\mathfrak{R}_n^m$	Множество точек в E_n, имеющих в точности m рациональных координат; $\dim \mathfrak{R}_n^m = 0$, 32
$\mathfrak{R}_\omega$	Множество точек в E_ω, все координаты которых рациональны; $\dim \mathfrak{R}_\omega = 1$, 34
$\mathfrak{R}'_\omega$	Множество точек в I_ω, все координаты которых рациональны; $\dim \mathfrak{R}'_\omega = 0$, 32
$\mathfrak{R}_\omega^m$	Множество точек в I_ω, имеющих в точности m рациональных координат; $\dim \mathfrak{R}_\omega^m = 0$, 41
s^n	n-мерный симплекс, 98
s^n	Ориентированный n-мерный симплекс, 148
S_n	n-мерная сфера, например, множество точек в E_{n+1}, находящихся на расстоянии 1 от начала координат, 60
$\mathcal{X}_n$	Универсальное n-мерное пространство Нобелинга — $\mathcal{M}_{2n+1}^n \cap I_{2n+1}$ — множество точек куба I_{2n+1}, имеющих не более m рациональных координат, 94
Y^X	Пространство отображений пространства X в пространство Y, 83

$Z^n_\Delta(K, G)$	Группа n-мерных Δ-циклов комплекса K по области коэффициентов G, 152
$Z^n_\nabla(K, G)$	Группа n-мерных ∇-циклов комплекса K по области коэффициентов G, 152
α-отображение	89
$\Delta\varphi$	Δ-граница (граница) цепи φ, 151
$\nabla\varphi$	∇-граница (верхняя граница) цепи φ, 151
$\Delta^n(K, G)$	n-мерная Δ-группа Бетти комплекса K по области коэффициентов G, 152
$\nabla^n(K, G)$	n-мерная ∇-группа Бетти комплекса K по области коэффициентов G, 153
$\Delta^n(K \bmod L, G)$	n-мерная Δ-группа Бетти $K \bmod L$ по области коэффициентов G, 158
$\nabla^n(K \bmod L, G)$	n-мерная ∇-группа Бетти $K \bmod L$ по области коэффициентов G, 158
$\Delta^n(X, G)$	n-мерная Δ-группа Бетти компакта X по области коэффициентов G, 182
$\nabla^n(X, G)$	n-мерная ∇-группа Бетти компакта X по области коэффициентов G, 182
$\delta(X)$	Диаметр множества X
ε-отображение	85
Π	Аддитивная группа действительных чисел, приведенных по модулю 1, 148
π	Оператор, ставящий каждой цепи барицентрического подразделения комплекса K в соответствие цепь комплекса K, 163
π'	Оператор, ставящий каждой цепи комплекса K в соответствие цепь барицентрического подразделения комплекса K, 165
$\rho(p, X)$	Расстояние между точкой p и множеством X
$\rho(x, y)$	Расстояние между точками x и y
$\rho(X, Y)$	Расстояние между множествами X и Y
χ	Характер группы, 167
$\prec, \succ$	Мы пишем $s_n \prec s_{n+1}$ или $s_{n+1} \succ s_n$, если s_n есть ориентированная грань ориентированного симплекса s_{n+1}, 149
$<$	Пусть K' — барицентрическое подразделение комплекса K; если $s'_m \in K'$ есть ориентированный подсимплекс ориентированного симплекса $s_m \in K$, то мы пишем $s'_m < s_m$, 163

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор М. Р. Шура-Бура
Технический редактор А. П. Дронов *Корректор М. М. Шулименко*

Сдано в производство 23/V 1947. Подписано к печати 6/XI 1947.
А-10487. Печ. л. 14½. Уч.-изд. л. 14,1. Формат 60×92 1/16. Изд. № 1/43. Заказ 597.
Цена 15 р. 50 к.

*

4-я типография им. Евг. Соколовой треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при Совете Министров СССР. Ленинград, Измайловский пр., 29.

8