

СМБ

СМБ

М.А. АЛЕКСИДЗЕ

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ
ФУНКЦИИ
В ПРИБЛИЖЕННЫХ
РЕШЕНИЯХ
ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

М.А. АЛЕКСИДЗЕ





СПРАВОЧНАЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

М. А. АЛЕКСИДЗЕ

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ
ФУНКЦИИ
В ПРИБЛИЖЕННЫХ
РЕШЕНИЯХ
ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1991

ББК 22.193
А48
УДК 519.624

Алексидзе М. А. **Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач.**— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.— 352 с.— (Спр. мат. б-ка.)— ISBN 5-02-014251-4.

Излагается метод численного решения граничных задач, позволяющий получить приближенные решения почти всех классических внутренних и внешних граничных задач математической физики. Метод основан на разложении функции в ряды по фундаментальным решениям (функциям) соответствующих дифференциальных операторов. Исследуются вопросы универсализации, автоматизации и устойчивости вычислительного процесса.

Для научных работников в области прикладной математики и математической физики, а также для аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Табл. 54. Ил. 16. Библиогр. 200 назв.

Рецензенты:

доктор физико-математических наук *В. А. Кузичанов*,
доктор физико-математических наук *А. А. Кордадзе*

А $\frac{1602120000-090}{053(02)-91}$ 29-91

© «Наука», Физматлит, 1991

ISBN 5-02-014251-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	7
Глава I. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям	26
§ 1.1. Разложение по фундаментальным решениям. Первый метод	26
§ 1.2. Разложение по фундаментальным решениям. Второй метод	32
§ 1.3. Нахождение коэффициентов разложения	34
§ 1.4. Устойчивость решения и метод регуляризации	40
§ 1.5. Решение линейных систем с неустойчивой обратной матрицей Грама	44
§ 1.6. Интегрированные фундаментальные решения	52
§ 1.7. Орто- и биортонормализация и решение систем линейных уравнений	58
§ 1.8. Оценки числа арифметических действий при решении граничных задач методом разложения по неортогональным функциям	81
§ 1.9. Один способ нахождения коэффициентов разложения	90
§ 1.10. О погрешности решения граничных задач методом разложения по неортогональным функциям	119
§ 1.11. Решение граничных задач для неоднородных уравнений, нелинейных граничных условий и правых частей и для разрывных граничных условий	122
§ 1.12. Решение граничных задач для кусочно-однородных областей	125
§ 1.13. Нахождение собственных значений оператора	136
§ 1.14. Решение линейных и нелинейных обратных граничных задач	154
Глава II. Фундаментальные и интегрированные фундаментальные решения некоторых дифференциальных уравнений	161
§ 2.1. Дифференциальное уравнение Лапласа	161
§ 2.2. Дифференциальное уравнение Лапласа в плоском случае	162
§ 2.3. Уравнение Гельмгольца (волновое уравнение)	164
§ 2.4. Уравнение Клейна — Гордона	164
§ 2.5. Уравнение теплопроводности	172
§ 2.6. Уравнение теплопроводности в плоском случае	174
§ 2.7. Уравнение теплопроводности в одномерном случае	174
§ 2.8. Уравнение диффузии неустойчивого газа	175
§ 2.9. Стационарные уравнения Навье — Стокса	175
§ 2.10. Бигармоническое уравнение	177
§ 2.11. Бигармоническое уравнение в плоском случае	178
§ 2.12. Уравнение распространения волн в пространстве	180
§ 2.13. Телеграфное уравнение	182
§ 2.14. Уравнение Максвелла	182
§ 2.15. Система уравнений плоской статической теории упругости	184
§ 2.16. Система уравнений пространственной статической теории упругости	185

§ 2.17. Уравнения установившихся упругих колебаний . . .	186
§ 2.18. Уравнения динамики изотропной упругой среды . . .	186
§ 2.19. Уравнения статики моментной теории упругости . . .	189
§ 2.20. Уравнения установившихся колебаний моментной теории упругости . . .	190
§ 2.21. Уравнения статики трансверсально-изотропной среды (гексагональной системы) . . .	191
§ 2.22. Уравнения одного частного случая однородной ортотропной среды . . .	192
§ 2.23. Уравнения термоупругоколебательного состояния среды . . .	194
§ 2.24. Уравнения статики теории термоупругости . . .	195
§ 2.25. Система установившихся колебаний термомоментной теории упругости . . .	197
§ 2.26. Система уравнений статики термомоментной теории упругости . . .	199
§ 2.27. Интегрированные фундаментальные решения уравнения Лапласа в плоском случае . . .	200
§ 2.28. Интегрированные фундаментальные решения уравнений плоской статической теории упругости . . .	206
§ 2.29. О тестовых задачах для универсальных программ решения граничных задач уравнений математической физики . . .	215
§ 2.30. Функции Грина в приближенных решениях граничных задач . . .	217
§ 2.31. Некоторые особенности проверки удовлетворения фундаментальными функциями соответствующих дифференциальных уравнений . . .	224
Глава III. Граничные задачи для уравнения Лапласа . . .	238
§ 3.1. Линейная независимость и полнота некоторых систем гармонических функций . . .	238
§ 3.2. Приближенный метод решения задачи Дирихле . . .	241
§ 3.3. О решении граничных задач с помощью неортогональных рядов . . .	253
§ 3.4. О приближенном решении одной смешанной граничной задачи теории гармонических функций . . .	258
§ 3.5. Приближенное решение задачи Римана — Гильберта . . .	265
§ 3.6. Приближенное построение конформно отображающих функций для односвязных областей . . .	276
§ 3.7. Об одной особенности решения плоских граничных задач . . .	281
§ 3.8. Разрешимость систем уравнений, соответствующих методу коллокации . . .	282
§ 3.9. Результаты численных экспериментов по решению граничных задач . . .	290
§ 3.10. Приближенное построение квазиконформных отображений многосвязных областей . . .	302
Глава IV. Граничные задачи статической теории упругости . . .	309
§ 4.1. Постановка граничных задач плоской статической теории упругости и соответствующие фундаментальные решения . . .	309
§ 4.2. Алгоритм решения плоских задач и результаты численных экспериментов . . .	318
§ 4.3. Постановка граничных задач для систем уравнений пространственной статической теории упругости . . .	326
§ 4.4. Алгоритм решения пространственных задач и результаты численных экспериментов . . .	332
Список литературы . . .	340
Предметный указатель . . .	349

ПРЕДИСЛОВИЕ

Нахождение аналитических выражений для фундаментальных функций (решений) почти для всех классических дифференциальных операторов математической физики следует считать одним из наиболее существенных достижений математики. Оно достигалось благодаря усилиям многих поколений математиков и объясняется в первую очередь возможностью представления с помощью фундаментальных функций решения дифференциальных уравнений в интегральной форме, которая дает возможность исследования существования и единственности решения граничных задач.

Особо следует отметить, что фундаментальные функции в настоящее время находят широкое применение и в приближенных решениях уравнений математической физики. Фундаментальные функции являются основой успешно развиваемого в последнее время метода граничных интегральных уравнений. В силу определенного физического смысла фундаментальных функций, решения граничных задач по системам из фундаментальных функций дают ответы на многие практически важные обратные задачи науки и техники.

Учитывая вышесказанное, следует признать, что отсутствие справочного пособия по фундаментальным функциям как в отечественной, так и в мировой литературе затрудняет исследование и решение многих актуальных задач.

Предлагаемая монография является расширенным изданием работы автора «Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям» (М., Наука, 1978), в которой были собраны фундаментальные функции и изложены новые методы решения граничных задач на их основе.

В книге изложены главным образом результаты, полученные в последние годы грузинскими математиками. Вычислительные аспекты излагаемого метода разработаны в Институте вычислительной математики им. Н. И. Мухелишвили под руководством В. Д. Купрадзе и в Институте геофизики АН Грузинской ССР.

В главе I дается общее описание методов приближенного решения граничных задач с помощью разложения по фундаментальным решениям. Здесь же изучена асимптотика детерминантов Грама определенным образом сгруппированных фундаментальных функций и рассмотрены трудности численной реализации

предлагаемых приближенных методов решения граничных задач. Идейно изложенные здесь методы близки к методам граничных интегральных уравнений, получивших в последнее время широкое применение при решении сложнейших практических задач. Однако в методе граничных интегральных уравнений последние рассматриваются, как правило, на основной поверхности граничной задачи. Это приводит к интегральным уравнениям 2-го рода, обладающим с точки зрения устойчивости расчетных схем существенными преимуществами перед интегральными уравнениями 1-го рода, но при этом ядро интегрального уравнения становится сингулярным. Последнее обстоятельство, со своей стороны, создает дополнительные трудности, в том числе и в деле анализа решения вблизи границы. Как показали результаты многочисленных вычислительных экспериментов, удачное приближение поверхности, на которой рассматриваются интегральные уравнения, к основной поверхности граничной задачи существенно определяет успех в деле практической реализации решения задач математической физики. Здесь существует аналогия с задачей оптимального выбора параметра регуляризации при решении некорректных задач.

В главе II собраны фундаментальные решения почти всех классических линейных уравнений математической физики, допускающие явное аналитическое представление.

Глава III посвящена граничным задачам для плоского и пространственного уравнения Лапласа, которые в математической литературе всегда рассматривались как модельные задачи математической физики. Поэтому и в настоящей публикации этим задачам уделено большое внимание. Желая поскорее ознакомиться с приближенным решением граничных задач теории потенциала могут после введения сразу перейти к главе III.

В главе IV излагаются приближенные методы решения граничных задач статической теории упругости.

В настоящей монографии впервые изложен приближенный метод решения граничных задач с помощью фундаментальных решений. Книга рассчитана на представителей прикладных наук и практиков-вычислителей, которым приходится решать граничные задачи. Автор стремился также акцентировать внимание на некоторых нерешенных вопросах. С этой точки зрения книга представляет интерес для математиков — аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

В работе по созданию соответствующих алгоритмов и программ принимали участие Д. В. Гогиашвили, М. С. Закрадзе, Н. Л. Лекишвили, К. В. Пертая, К. Н. Самсония и Г. С. Силагадзе.

М. А. Алексидзе

ВВЕДЕНИЕ

В общем виде граничную задачу для уравнений математической физики можно сформулировать следующим образом. Пусть в n -мерном евклидовом пространстве \mathbf{R}^n (координаты точек которого могут содержать временную переменную) многомерная многосвязная область G ограничена (гипер) поверхностью Γ . В области G определено некоторое дифференциальное уравнение в частных производных

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in G, \quad (1)$$

где $L = (L_1, \dots, L_m)$ — линейный векторный дифференциальный оператор, $u(x)$ и $f(x)$ — элементы некоторых векторных функциональных пространств $R_1(G)$ и $R_2(G)$ соответственно. Пусть на поверхности Γ определен оператор l соотношением

$$lu(x)|_{\Gamma} = \psi(y), \quad y \in \Gamma, \quad (2)$$

где $\psi(y)$ — элемент векторного функционального пространства $R_3(\Gamma)$.

Поверхность Γ может содержать отдельные незамкнутые поверхности, бесконечно удаленную точку (внешние граничные задачи), поверхности, являющиеся геометрическим местом внутренних точек области G — внутренними границами (контактные граничные задачи) и т. п. Поверхность Γ может не охватывать всю границу области (например, для некоторых случаев наличия переменных по времени).

Как правило, определить $u(x)$ из уравнений (1), (2) при заданных правых частях $f(x)$ и $\psi(y)$ в элементарных функциях не удастся, и для решения граничной задачи (1), (2) следует применять приближенные методы. Одним из таких методов является метод разложения по неортогональным функциям. Основная идея приближенного решения граничных задач (1), (2) методом разложения в конечный ряд по системе функций $\{\psi_k(x)_{k=1}^N$, $\psi_k \in R_1\}$ состоит в замене пространства $R_1(G)$ ¹⁾ его конечномерным подпространством $R^N(G)$ — линейной оболочкой системы

¹⁾ Часто в качестве функциональных пространств $R_1(G)$ и $R_2(G)$ для дифференциальных уравнений второго порядка берется пространство Соболева $W_2^1(G)$.

функций $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^N$. Приближенное решение $u^N(x)$ ищется в виде ряда

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^N a_k^{(N)} \psi_k(x); \quad (3)$$

коэффициенты разложения $a_k^{(N)}$ находятся путем минимизации функционала

$$\|Lu^N(x) - f(x)\|_{R_2(G)} + K_N \|lu^N(y) - \psi(y)\|_{R_3(\Gamma)}, \quad (4)$$

где постоянная K_N показывает, с каким «весом» должны удовлетворяться граничные условия. На практике она существенно влияет на приближенное решение. Если нас интересует решение вблизи границы Γ , то в этом случае надо стараться возможно лучше аппроксимировать граничное условие и, следовательно, взять для K_N большое значение. Если же нас интересует решение вдали от границы Γ или же производная решения (а не само значение решения), то в этом случае надо стараться как можно лучше аппроксимировать дифференциальное уравнение и, следовательно, взять для K_N малое значение (при тождественном операторе l оптимальное в некотором смысле значение для K_N довольно велико [44] и зависит от выбора и размерности подпространства $R^{(N)}(G)$). Выберем в функциональных пространствах $R_2(G)$ и $R_3(\Gamma)$ соответственно тотальные²⁾ линейные системы $\{\omega_j\}$ и $\{W_j\}$ ($j = 1, 2, \dots$) функционалов. Коэффициенты $a_k^{(N)}$ можно получить путем решения линейной системы

$$A_j \omega_j [Lu^N(x) - f(x)] + B_j W_j [lu^N(y) - \psi(y)] = 0, \quad (5)$$

или

$$\sum_{k=1}^N a_k^{(N)} \{A_j \omega_j [L\psi_k(x)] + B_j W_j [l\psi_k(y)]\} = \\ = A_j \omega_j [f(x)] + B_j W_j [\psi(y)], \quad j = 1, \dots, N_1, \quad N_1 \geq N, \quad (6)$$

где A_j и B_j — (неотрицательные) весовые множители.

При $R_2(G) = L_2(G)$ и $R_3(\Gamma) = L_2(\Gamma)$ этот метод приближенного решения граничных задач совпадает с методом наименьших квадратов [44].

Весьма важным преимуществом метода наименьших квадратов в виде (4) или (5) является то, что элементы $\psi_k(x)$ не обязаны удовлетворять граничным условиям (2). Существенным недостатком этого метода надо считать то обстоятельство, что матрица линейной системы для определения коэффициентов $a_k^{(N)}$ имеет числа обусловленности, равные приблизительно квадрату числа обусловленности соответствующей матрицы в методе Га-

²⁾ Система функционалов ω_j ($j = 1, 2, \dots$) называется *тотальной* в пространстве R , если для любого $\alpha \in R$ из условий $\omega_j(\alpha) = 0$ ($j = 1, 2, \dots$) следует $\alpha = 0$.

леркина. Менее существенно то обстоятельство, что элементы $\psi_k(x)$ в (4) или (5) должны быть элементами пространства Соболева $W_2^2(G)$, тогда как в методе Галеркина ³⁾ $\psi_k(x) \in \dot{W}_2^1(G)$, где \dot{W}_2^1 — совокупность функций $W_2^1(G)$, удовлетворяющих однородным граничным условиям (2) (при $\psi(y) \equiv 0$).

В общем случае при произвольном граничном операторе l встает очень трудный вопрос об оптимальном выборе в (4) постоянной K_N . Помимо того, и вычислительный процесс минимизации функционала (4), состоящего из двух слагаемых, значительно труднее, чем минимизация отдельно каждого из этих слагаемых.

Учитывая эти трудности и то обстоятельство, что неоднородная граничная задача (1), (2) легко сводится либо к граничной задаче с однородными граничными условиями и неоднородным уравнением

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in G, \quad lu(x)|_\Gamma = 0, \quad (7)$$

либо к граничной задаче с неоднородными граничными условиями и однородным уравнением

$$Lu(x) = 0, \quad x \in G, \quad lu(x)|_\Gamma = \psi(y), \quad (8)$$

вместо граничной задачи (1), (2) решают одну из граничных задач (7), (8).

Вариационные методы, как правило, излагаются для приближенного решения граничной задачи (7)⁴⁾. Решение здесь также ищется в виде

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^N b_k^{(N)} \psi_k(x), \quad (9)$$

³⁾ Заметим, что в [110] метод наименьших квадратов формулируется лишь для уравнения (1) предположительно, что однородные граничные условия (2) (при $\psi(y) \equiv 0$) выполняются автоматически для выбранной системы $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$. В этом случае линейная система для вычисления коэффициентов разложения имеет вид

$$\sum_{k=1}^N b_k^{(N)} (L\psi_k, L\psi_j) = (f, L\psi_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

⁴⁾ Более того, в том случае, когда естественная постановка задачи приводит к граничной задаче (8), стараются ее свести к задаче (7), что иногда приводит к изменению граничных условий. Так, например, растяжение прямоугольной пластины при растягивающем усилии сводится к граничной задаче для однородного бигармонического уравнения [46, с. 171; 69, с. 306] $\Delta\Delta u = 0$ при неоднородных граничных условиях, содержащих вторые производные искомой функции. Путем введения вспомогательной функции u_0 , удовлетворяющей граничным условиям, нахождение функции $u = u_0 + u_1$ сводится к нахождению новой функции u_1 , которая уже удовлетворяет неоднородному бигармоническому уравнению (с правой частью — $\Delta\Delta u_0$) с однородными граничными условиями, содержащими значения u_1 и ее нормальной производной.

где $\psi_k(x)$ — элементы линейной оболочки системы $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, каждая функция которой удовлетворяет граничному условию задачи (7)

$$l\psi_k(x)|_{\Gamma} = 0, \quad k = 1, \dots, N, \quad (10)$$

а коэффициенты $b_k^{(N)}$ находятся путем минимизации функционала

$$\|Lu^N(x) - f(x)\|_{R_2(G)}. \quad (11)$$

В случае, когда $R_2(G)$ является энергетическим пространством, для нахождения коэффициентов $b_k^{(N)}$ получаем систему

$$\sum_{k=1}^N b_k^{(N)} [\psi_k(x), \psi_j(x)] = (f(x), \psi_j(x)), \quad (12)$$

где справа стоит обычное скалярное произведение, а слева, в квадратных скобках скалярное произведение в соответствующем энергетическом пространстве.

В общем случае коэффициенты $b_k^{(N)}$ находятся из системы

$$\sum_{k=j}^N b_k^{(N)} \omega_j [\psi_k(x)] = \omega_j [f(x)]. \quad (13)$$

Встает естественный вопрос: почему большинство вариационных методов излагается для граничной задачи (7), а не граничной задачи (8)? Дело в том, что если в качестве системы $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ взять систему функций $\{\omega(x)\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, где $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — полная система в G , а функция $\omega(x)$ с непрерывными производными удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \omega(x) > 0, \quad x \in G, \\ l\omega(x)\varphi_k(x)|_{\Gamma} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

то можно показать для некоторых частных случаев, что система $\{\omega(x)\varphi_k(x)\}$ полна. При тождественном операторе $l(l\omega = \omega)$ функция ω для круга и выпуклого многоугольника выписывается явно, что дает возможность заботиться лишь об удовлетворении основного уравнения $Lu = f$, не учитывая граничных условий, которые удовлетворяются автоматически (следует заметить, что для произвольных областей подбор функции ω — трудная задача).

Идея поменять ролями основное уравнение и граничные условия, т. е. заботиться об удовлетворении граничных условий, не учитывая при этом основное уравнение, весьма заманчива по многим причинам (некоторые из них перечислены ниже во введении). Однако при этом надо иметь систему функций $\{\psi_k(x)\}$, обладающую следующими свойствами:

а) каждая функция $\psi_k(x)$ должна удовлетворять однородному уравнению $L\psi_k(x) = 0$;

б) система функций $\{\psi_k(y)\}$ должна быть линейно независима и полна в $R_3(\Gamma)$.

Насколько известно, только в плоской и трехмерной внутренней граничной задаче Дирихле для уравнения Лапласа система гармонических полиномов удовлетворяет перечисленным требованиям (для внешних граничных задач они уже непригодны, так как на бесконечности они не определены). Этим свойством гармонических полиномов широко пользовались как при решении граничных задач [69], так и при приближенном построении коэфформно отображающих функций. В работах [84, 85], по-видимому, впервые указаны такие системы для внутренних и внешних граничных задач уравнений Лапласа и статической теории упругости, созданные на основе определенным образом сконструированных фундаментальных решений. Основная идея этих работ переносится и на другие граничные задачи, приведенные во второй главе. При их решении изложенными в данной монографии методами надо стремиться удовлетворить лишь граничным условиям (не заботясь об удовлетворении основному уравнению). Это основная отличительная черта изложенных методов по сравнению с традиционными вариационными методами.

Приведем линейные системы алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложения $b_k^{(N)}$, соответствующих различным приближенным методам. По аналогии с ними будут получены линейные системы для решения задачи (8) с помощью разложения по фундаментальным решениям.

а) Метод Рунта. Система для нахождения коэффициентов имеет вид (12) и в силу определения энергетического скалярного произведения может быть записана следующим образом:

$$\sum_{k=1}^N b_k^{(N)} (L\psi_k, \psi_j) = (f, \psi_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (14)$$

б) Метод наименьших квадратов. Для граничной задачи (7) коэффициенты разложения находятся из системы (6).

в) Метод моментов [113]. Пусть B — линейный оператор, область определения которого $D(B)$ совпадает с областью определения $D(L)$ оператора L . Коэффициенты приближенного решения

$$u^N = \sum_{k=1}^N b_k^{(N)} \psi_k$$

находятся из линейной системы

$$(Lu^N, B\psi_j) = (f, B\psi_j),$$

или

$$\sum_{k=1}^N b_k^{(N)} (L\psi_k, B\psi_j) = (f, B\psi_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (15)$$

Для сходимости метода моментов, кроме обычных условий, от оператора B требуется, чтобы оператор B^{-1} был ограничен, а оператор $(L - B)B^{-1}$ — вполне непрерывен. Ясно, что если в качестве системы $\{\psi_k\}$ взять систему собственных функций оператора B , то, сокращая обе части (15) на собственные значения μ_j оператора $B(B\psi_j = \mu_j\psi_j)$, получаем систему (14), соответствующую методу Рунца.

г) Метод ортогональных проекций. Пусть $R_1(G)$ — гильбертово пространство решений уравнения

$$Lu = f. \quad (16)$$

Предположим, что решение u восстанавливается по решению вспомогательного уравнения (более простого вида)

$$Bv = f, \quad (17)$$

где $v \in H(G)$, $H(G)$ — другое гильбертово пространство, B — некоторый линейный оператор в H . Обозначим через $H_2(G)$ (линейное) множество решений однородного уравнения

$$Bv = 0, \quad (18)$$

расширенное его предельными элементами, а через $H_1(G)$ — ортогональное ему подпространство решений v уравнения (17). Пусть V — какое-либо решение уравнения (17). Тогда разность $\omega = V - v$ есть элемент пространства $H_2(G)$, ибо $B\omega = BV - Bv = 0$. Из равенства $V = v + \omega$ следует, что v есть ортогональная проекция элемента V на подпространство $H_1(G)$, а ω — ортогональная проекция V на $H_2(G)$. Поэтому, взяв в пространствах $H_1(G)$ и $H_2(G)$ полные системы $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$, можно найти

коэффициенты разложения $V = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k$, минимизируя выражение

$$\left\| V - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k \right\|, \quad (19)$$

или коэффициенты разложения $\omega = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k$, минимизируя выражение

$$\left\| \omega - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k \right\|, \quad (20)$$

а затем определить v из выражения

$$v = V - \omega = V - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k.$$

Известно, что нахождение элемента v равносильно следующей вариационной задаче: найти решение уравнения (17), имеющее наименьшую норму. Следовательно, для нахождения v можно воспользоваться минимизацией функционала

$$\|Bv - f\| + \alpha \|v\|, \quad (21)$$

(где α — так называемый параметр регуляризации [151]), которая приводит к устойчивым схемам счета. Представляет определенный интерес использование функционала (21) при численной реализации метода ортогональных проекций.

д) Метод Третьяка. В этом методе по существу решается граничная задача (8). На решениях однородного уравнения $Lu = 0$ строится функционал $\varphi(u)$, минимум которого достигается на решении рассматриваемой граничной задачи. Для уравнения Лапласа такой функционал имеет вид

$$\varphi(u) = \int_G (\text{grad } u)^2 dv, \quad (22)$$

и для нахождения коэффициентов разложения $c_k^{(N)}$ приближенного решения

$$u^N = \sum_{k=1}^N c_k^{(N)} \psi_k,$$

где $\{\psi_k\}$ — система гармонических функций, решается система уравнений

$$\sum_{k=1}^N c_k^{(N)} \left(\psi_k, \frac{\partial \psi_j}{\partial n} \right) = \left(\psi, \frac{\partial \psi_j}{\partial n} \right), \quad j = 1, \dots, N, \quad (23)$$

где $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали, а скалярные произведения в (23) определяются на поверхности Γ .

е) Метод коллокации. Линейная система для определения коэффициентов $b_k^{(N)}$ разложения в этом методе определяется из (13), если предположить, что функционалы ω_j выбраны из условия

$$\omega_j[f(x)] = f(x_j),$$

где $f(x)$ — произвольная функция из $R_2(G)$, а x_j — узлы коллокации. Ясно, что если они выбраны всюду плотно на G , то система $\{\omega_j\}_{k=1}^\infty$ тотальна в пространстве $C(G)$ всех непрерывных на G функций. Система (13) для этого случая примет вид

$$\sum_{k=1}^N b_k^{(N)} \psi_k(x_j) = f(x_j).$$

Получим аналоги приведенных выше линейных систем уравнений для случая граничной задачи (8). В первом способе

решение также ищется в виде ряда

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^N c_k^{(N)} \psi_k(x), \quad (24)$$

где $\psi_k(x)$ — элементы линейной оболочки системы $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^N$, каждая функция которой удовлетворяет основному однородному уравнению граничной задачи (8)

$$L\psi_k(x) = 0, \quad x \in G, \quad (25)$$

а коэффициенты $c_k^{(N)}$ минимизируют функционал

$$\|lu^N(y) - \psi(y)\|_{R_3(\Gamma)} \quad (26)$$

и находятся как решения линейной системы уравнений

$$\sum_{k=1}^N c_k^{(N)} W_j[l\psi_k(y)] = W_j[\psi(y)]. \quad (27)$$

Выпишем системы линейных уравнений для нахождения коэффициентов разложения приближенного решения (24) с помощью аналогов (мы их будем называть граничными аналогами) перечисленных выше известных вариационных методов.

а) Граничный аналог метода Ритца. Аналог системы (14) имеет вид

$$\sum_{k=1}^N c_k^{(N)} (l\psi_k, \psi_j) = (\psi, \psi_j), \quad j = 1, \dots, N \quad (28)$$

(здесь и всюду в дальнейшем скалярные произведения определены на поверхности Γ). Граничный оператор l в этом методе должен быть положителен, а система $\{\psi_k\}$ — линейно независима и полна по энергии, т. е. для любой функции ψ и $\varepsilon > 0$ найдутся такие коэффициенты α_k ($k = 1, \dots, N$), что норма по энергии разности будет меньше ε :

$$\sqrt{\left(l \left(\psi - \sum_{k=1}^N \alpha_k \psi_k \right), \psi - \sum_{k=1}^N \alpha_k \psi_k \right)} \leq \varepsilon.$$

При тождественном операторе l система (28) принимает вид

$$\sum_{k=1}^N c_k^{(N)} (\psi_k, \psi_j) = (\psi, \psi_j) \quad j = 1, \dots, N, \quad (29)$$

который дает обычные коэффициенты наилучшего в $L_2(\Gamma)$ разложения функции ψ по системе $\{\psi_k\}$.

б) Метод наименьших квадратов. Аналог системы (6) имеет вид

$$\sum_{k=1}^N c_k^{(N)} (l\psi_k, l\psi_j) = (\psi, l\psi_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (30)$$

Оператор l в этом методе должен иметь ограниченный обратный оператор l^{-1} , а система $\{\psi_k\}$ должна быть l -полной, т. е. для любой функции ψ и $\varepsilon > 0$ должны существовать такие постоянные α_k и такое число N , что

$$\left\| l\psi - \sum_{k=1}^N \alpha_k l\psi_k \right\|_{L_2(\Gamma)} < \varepsilon.$$

При тождественном операторе l (граничные задачи типа Дирихле) система (30) совпадает с системой (29).

в) Метод моментов. Аналог системы (15) имеет вид

$$\sum_{k=1}^N c_k^{(N)} (l\psi_k, B\psi_j) = (\psi, B\psi_j), \quad (31)$$

где вспомогательный оператор B должен удовлетворять следующим условиям: оператор B^{-1} ограничен, а оператор $(l - B)B^{-1}$ вполне непрерывен. В граничном аналоге метода моментов интересно выяснить для конкретных граничных задач, какие операторы обеспечивают сходимость и в чем преимущество использования вспомогательного оператора B по сравнению с другими вариационными методами.

г) Метод ортогональных проекций. Как правило, этот метод излагается для уравнения Лапласа $L = \Delta = \text{div grad}$ и в качестве оператора B берется div . Представляет интерес построение оператора B для граничного оператора l и выяснение вопроса, каков выигрыш от его введения.

д) Метод Третьяка. Как уже было сказано, метод Третьяка требует построения функционалов $\varphi(u)$ и решения однородного уравнения $Lu = 0$. Такие функционалы построены [110], кроме уравнения Лапласа, и для других уравнений (например, для бигармонического). Интересно было бы применить для них метод фундаментальных решений (для бигармонического уравнения они приведены в § 2.10 гл. II).

е) Метод коллокации. Система линейных уравнений для нахождения коэффициентов $c_k^{(N)}$ получается из (27):

$$\sum_{k=1}^N c_k^{(N)} l\psi_k(y_j) = \psi(y_j), \quad (32)$$

где y_i — узлы коллокации на поверхности Γ .

Численные эксперименты показали, что при одном и том же N матрица системы (32) при равномерном расположении на Γ узлов коллокации y_j значительно лучше обусловлена, чем матри-

ца A системы метода наименьших квадратов (30). Для детерминанта $|A|$ имеет место асимптотическое соотношение⁵⁾

$$0 < |A| \leq O(N^{-N}),$$

тогда как для детерминанта $|A'|$ матрицы (32) удается доказать лишь соотношение

$$|A'| \leq O(c^{N/2}),$$

где c — не зависящая от N постоянная (см. § 1.3 гл. I) и для некоторого расположения узлов коллокации может оказаться $|A'| = 0$.

Второй способ решения граничных задач с помощью разложения по фундаментальным решениям основан на интегральных тождествах для решения граничной задачи (8)

$$u(x) = F(x) + \int v(y) K(x, y) dS_y, \quad x \in G, \quad (33)$$

$$\int_{\Gamma} v(y) K(z, y) dS_y = F(z), \quad z \notin G, \quad (34)$$

где $F(x)$ и $K(x, y)$ — известные функции, а $v(y)$ — неизвестная функция, подлежащая определению из интегрального уравнения (34). После определения $v(y)$ решение задачи (8) находится из (33).

Идея получения приближенного решения (34) такова. Берется вспомогательная поверхность Γ_1 и всюду плотная на ней система точек $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$. Показывается, что система функций $\{K(z_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ является полной в подпространстве $L_2(\Gamma)$ функций из $R_3(\Gamma)$ ($v(y) \in R_3(\Gamma)$), которые обеспечивают существование и единственность решения уравнения (34). Система

$$\{K(z_k, y)\}_{k=1}^{\infty} \equiv \{\varphi_k(y)\}_{k=1}^{\infty} \quad (35)$$

состоит либо из фундаментальных решений $R(z_k, y)$ оператора L , либо из функций $\bar{l}R(z_k, y)$, где \bar{l} — некоторый оператор на Γ . Приближенное решение уравнения (34) ищется в виде разложения

$$v^N(y) = \sum_{k=1}^N c_k^{(N)} \varphi_k(y) \quad (36)$$

⁵⁾ Обычно ([34, п. 4.4—3]) определяют асимптотическое равенство $f(x) = O[g(x)]$, под которым понимают, что если отношение $f(x)/g(x)$ ограничено при $x \rightarrow a$, то существует окрестность точки a , в которой при $x \neq a$ функция $f(x)$ не нижего порядка малости, чем $g(x)$. Если воспользоваться этим определением, вместо асимптотических неравенств (как во введении, так и в § 13 гл. I) надо было писать асимптотические равенства $N^{-N} = O(|A|)$, что означало бы, что при $N \rightarrow \infty$ функция N^{-N} имеет порядок малости не ниже, чем модуль детерминанта A . Именно этот смысл заложен в асимптотическом неравенстве $|A| \leq O(N^{-N})$, которое заменяет асимптотическое равенство $N^{-N} = O(|A|)$, ввиду непривычности последнего (обычно независимая переменная N всегда стоит под знаком 0).

по произвольной полной в $R_2(\Gamma)$ системе

$$\{\varphi_k(y)\}_{k=1}^N, \quad (37)$$

причем коэффициенты разложения находятся из линейной системы

$$\sum_{k=1}^N c_k^{(N)} W_j[\varphi_k(y)] = W_j[v(y)], \quad j = 1, \dots, N. \quad (38)$$

Правая часть системы (38) может быть вычислена из (34), если функционалы W_j определить следующим образом:

$$W_j[v(y)] = (v(y), \psi_j(y)) = F(z_j), \quad (39)$$

где $F(z_j)$ — значение правой части уравнения (34) в точке z_j .

В первоначальных изложениях этого метода [84, 85] система (37) совпадала с (35), а коэффициенты $c_k^{(N)}$ являлись коэффициентами наилучшего в $L_2(\Gamma)$ приближения функции $v(y)$

рядом $\sum_{k=1}^N c_k^{(N)} \psi_k(y)$, т. е.

$$\sum_{k=1}^N c_k^{(N)} (\psi_k, \psi_j) = (v, \psi_j) = F(z_j).$$

Из формулы (39) видно, что такой выбор функций ψ_k не обязателен. Аналогично, в первоначальных изложениях первого способа [84, 85] система функционалов в (27) совпадала с (39), что также является лишь одним из возможных случаев.

Принципиально новым во втором способе решения граничных задач является получение из ядра $K(z, y)$ уравнения (34) полной системы функций (35). В теории ортонормированных и мультипликативных ортонормированных рядов [72] известна обратная операция — получение из системы (35) ядер $\varphi(y, k)$ функции двух переменных — переменного y и переменного k , пробегающего дискретное множество натуральных чисел $1, 2, \dots$. По существу этот прием — получение из ядра системы функций — можно применить [28] для решения любого интегрального уравнения первого рода.

Перепишем уравнение (34) в операторной форме:

$$Av(y) = F(z), \quad y \in \Gamma, \quad z \in \Gamma_1. \quad (40)$$

Следует отметить одну особенность оператора A . Он переводит пространство функций, определенных на Γ , в пространство функций, определенных на Γ_1 . Эта особенность оператора A накладывает определенные ограничения на применение приближенных методов а) — е). Так, например, метод Рунге в форме (28) для решения уравнения (40) нельзя применять, ибо $A\psi_k$ будет определено на Γ_1 , а ψ_j — на Γ , и их скалярное произведение нельзя будет вычислить.

Чтобы получить систему алгебраических уравнений для приближенного решения (36) уравнения (34), введем систему функционалов $\{\Phi_j\}_{j=1}^{\infty}$, определенных на вспомогательной поверхности Γ_1 , и потребуем, чтобы на разности $Av^N(y) - F(z)$ первые N функционалов Φ_j принимали нулевые значения

$$\Phi_j[Av^N(y) - F(z)] = 0,$$

или в развернутом виде

$$\sum_{k=1}^N c_k^{(N)} \Phi_j \left[\int_{\Gamma} \varphi_k(y) K(z, y) dS_y \right] = \Phi_j[F(z)]. \quad (41)$$

Если Φ_j — функционалы в гильбертовом пространстве функций, определенных на Γ_1 , то (41) принимает вид

$$\sum_{k=1}^N c_k^{(N)} \int_{\Gamma_1} \left[\int_{\Gamma} \varphi_k(y) K(z, y) dS_y \right] \bar{\varphi}_j(z) dS_z = \int_{\Gamma_1} F(z) \bar{\varphi}_j(z) dS_z,$$

где $\bar{\varphi}_j$ — функции, определяющие функционалы Φ_j :

$$\Phi_j(u) = (u, \bar{\varphi}_j).$$

Можно ввести еще одну вспомогательную поверхность Γ_2 и в качестве функций $\bar{\varphi}_j(z)$ взять функции

$$K(\gamma_j, z), \quad (42)$$

где $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty}$ — система точек, всюду плотно расположенных на Γ_2 . Если функционалы Φ_j определены формулами (метод коллокации)

$$\Phi_j(u) = u(z_j),$$

где z_j — узлы коллокации на Γ_1 , то из (41) получаем систему (38), в которой функционалы W_j определены из (39).

Метод наименьших квадратов для уравнения (40) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_1} \left[\int_{\Gamma} \varphi_k(y) K(z, y) dS_y \int_{\Gamma} \varphi_j(y) K(z, y) dS_y \right] dS_z = \\ = \int_{\Gamma_1} F(z) \int_{\Gamma} \varphi_j(y) K(z, y) dS_y dS_z, \end{aligned} \quad (43)$$

в которой функции системы (37) произвольны. В частном случае они могут быть равны функциям системы (35).

Представляя определенный интерес численные эксперименты по устойчивости решений приведенных здесь систем уравнений. В основном тексте книги приведены результаты таких экспериментов лишь для систем (29) и (38), для уравнений Лапласа и статической теории упругости.

Сравнивая с точки зрения объема вычислений вариационные методы решения граничной задачи (7) и описанные в настоящей монографии способы решения граничной задачи (8), следует отметить, что последние требуют значительно меньше арифметических действий, иногда в десятки и сотни раз (см. § 1.8 гл. I). Это объясняется тем, что функционалы W_j , в отличие от функционалов ω_j , определены в пространстве $R_3(\Gamma)$, носитель Γ которого имеет меньшую размерность, чем G . Заметим, что не всегда переход к многообразиям меньшей размерности упрощает вычисления. Так, например, часто делают неверные заключения о том, что методы, основанные на интегральных соотношениях вдоль границы области, менее трудоемки, чем разностные методы, которые предполагают аппроксимацию дифференциального оператора во всей области. Правда, при одном и том же шаге сетки число неизвестных в разностном методе получается больше, однако ввиду специфической особенности соответствующих матриц объем памяти и необходимое для решения число операций получается меньше, чем в приближенных методах, использующих интегральные соотношения на границе области (см. § 1.11 гл. I).

Прежде чем перейти к изложению основных трудностей на пути численной реализации описанных здесь способов решения граничных задач, укажем их положительные свойства.

1. Как первый, так и второй способы решения граничных задач можно применять для решения и внутренних, и внешних граничных задач.

2. Эти способы дают возможность апостериорной оценки погрешности, ибо в принципе единственным источником погрешности является не совсем точное удовлетворение граничных условий (основное однородное дифференциальное уравнение в частных производных удовлетворяется точно).

3. Эти способы дают возможность решать граничные задачи, которые, строго говоря, не являются вполне определенными; такие задачи часто возникают в геофизике (их не надо путать с классическими некорректными граничными задачами, которые также часто возникают в геофизике). Например, пересчет и трансформация потенциальных полей (редукция силы тяжести), когда граничные условия заданы не на всей границе области.

Это особый класс некорректных задач, в которых нет единственности решения из-за нехватки граничных условий на части границы. Замкнув границу области и доопределив граничные условия, они становятся корректными задачами. Такие ситуации возникают в гравиметрии и магнитометрии, когда аномальные поля известны лишь для некоторого региона Земли. Здесь описанные методы дают возможность решения таких задач без предварительного доопределения граничных условий.

4. При полной автоматизации решения граничных задач рассмотренными здесь способами встречается меньше трудностей, чем при полной автоматизации разностного метода.

5. Самое важное с вычислительной точки зрения преимущество рассматриваемых методов по сравнению с традиционными вариационными методами — то, что аппроксимация в нашем случае производится на поверхности Γ , а не в области G , и, следовательно, вычисление соответствующих скалярных произведений потребует значительно меньше машинного времени.

Трудности, возникающие при численной реализации описанных в настоящей монографии методов, аналогичны трудностям численной реализации вариационных методов. Основная из них связана с решением системы бесконечных уравнений, которую запишем в следующем виде:

$$c_i + \sum_{k=1}^{\infty} d_{ik}c_k = b_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (44)$$

Известные достаточные условия для разрешимости системы (44) весьма обременительны и, как правило, не выполняются для неортогональных рядов. Действительно, для регулярности системы (44) требуется, чтобы при всех i выполнялись условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} |d_{ik}| < 1,$$

а для вполне регулярности —

$$\sum_{k=1}^{\infty} |d_{ik}| < 1 - \theta < 1.$$

Системы фундаментальных решений приводят к линейным системам, матрицы которых этим условиям не удовлетворяют.

В теории бесконечных систем существенным является понятие нормального определителя бесконечной матрицы, т. е. определителя, для которого справедливо неравенство

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |d_{ik}| < \infty.$$

В самом деле, можно показать, что при выполнении этого неравенства определитель из n^2 элементов матрицы при $n \rightarrow \infty$ стремится к пределу; этот предел и называют нормальным определителем бесконечной матрицы. Системы линейных уравнений, к которым приводят фундаментальные решения, не имеют нормальных определителей, и соответствующая им билинейная форма

$\sum_{i,k=1}^{\infty} d_{ik}X_iX_k$ не является вполне непрерывной. Последнее свойство было использовано Гильбертом при построении теории интег-

ральных уравнений для обобщения некоторых свойств конечных систем на бесконечные системы.

Фундаментальные решения не образуют также и почти ортогональной системы, т. е. системы, для которой

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} d_{ik}^2 < \infty.$$

Таким образом, исследовать традиционными методами бесконечные системы, соответствующие фундаментальным решениям, не удается.

Основной особенностью систем фундаментальных решений является их свойство быть неминимальными или плотно полными, т. е. оставаться полными после выбрасывания любого числа функций, лишь бы после выбрасывания оставалось бесконечное число функций. Классическим примером неминимальной системы является система $\{x^{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\lambda_n > 0$ с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$.

Может показаться, что эту систему можно сделать минимальной путем выбрасывания стольких членов, чтобы этот ряд был сходящимся. Но в этом случае система $\{x^{\lambda_n}\}$ не только потеряет свойство полноты, но ее нельзя будет сделать полной в L_2 ни в каком интервале путем умножения на непрерывную функцию (теорема Р. Боаса и Г. Полларда [72]). Аналогично невозможно получить из системы фундаментальных решений полную и минимальную систему путем выбрасывания некоторых ее членов. Неминимальность любой системы приводит к большим вычислительным трудностям при нахождении коэффициентов наилучшего разложения. Поэтому, может быть, стоит отказаться от нахождения наилучшего разложения? Тем более, что система коэффициентов, сильно отличающаяся от наилучшей, может дать почти тот же порядок аппроксимации. Обоснование одного из способов нахождения коэффициентов разложения приводится в числе следующих вопросов, решение которых существенно способствовало бы численной реализации вариационных методов вообще, и описанных здесь методов, в частности.

1. Выбор системы функций $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Этот вопрос особенно важен для разобранных в данной монографии методов (см. § 1.6 гл. I). Функции этой системы должны быть подобраны так, чтобы уже первые несколько десятков функций обеспечивали желаемую точность. Большая надежда при этом возлагается на интегрированные фундаментальные решения, так как они во многих случаях больше подходят для приближенного решения, чем фундаментальные решения. Причем, как и фундаментальные решения, допускают физическое истолкование, что дает вычислителям возможность выбирать их более удачным образом, и, что

особенно важно, иногда эти решения выписываются в явном виде. При решении граничных задач (5) нормированные собственные функции оператора \bar{L} , родственного оператору L [113], при соответствующих граничных условиях образуют базис (ортонормированный в энергетическом пространстве $H_{\bar{L}}$ и почти ортонормированный в H_L). Однако в общем случае их нахождение с вычислительной точки зрения — задача значительно более сложная, чем решение граничной задачи (5), например, разностным методом. Фундаментальные решения такой базис в бесконечномерных пространствах не образуют. Утверждение (см. [87, с. 500]), что метод обобщенных рядов Фурье позволяет непосредственно из данных задачи конструировать необходимую базисную систему, по-видимому, относится к конечномерным подпространствам, для которых базисом является любая линейно независимая система. Однако важно, что для получения в явном виде системы фундаментальных решений дополнительные вычисления не требуются.

Заметим, что переход к интегрированным фундаментальным решениям явно противоречит традиционной тенденции, существующей в математической физике в деле применения специальных функций для интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных. Эта тенденция предполагает применение таких систем, каждая функция которых связана с производными (а не с интегралами) предыдущей функции. Операция дифференцирования улучшает конструктивные свойства (базисность, ортогональность и т. п.) соответствующих систем, делая их более «изрезанными», но на наш взгляд при этом ухудшаются их аппроксимационные свойства для гладких функций. Так, например, цилиндрическая функция порядка m $\omega_m(z)$, являющаяся решением линейного дифференциального уравнения Бесселя

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\omega}{dz} + \left(1 - \frac{m}{z^2}\right)\omega = 0,$$

и в комбинации $e^{kz}e^{\pm im\varphi}\omega(k\rho)$ дающая решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах ρ, φ, z , связана с цилиндрической функцией порядка $(m+1)$ соотношением

$$\omega_{m+1}(z) = -z^m \frac{d}{dz} [z^{-m}\omega_m(z)],$$

при $m=0$ получаем $\omega_1(z) = -\omega_0'(z)$.

Таким образом, в духе теории специальных функций был бы следующий подход в конструировании системы $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Взять одно фундаментальное решение (связанное с одной конкретной вспомогательной точкой z_1) в качестве первой функции $\psi_1(x)$ и организовать систему $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, где $\psi_k(x) = \psi_{k-1}'(x)$. Такая система будет обладать лучшими конструктивными свойствами, но

возможно при этом придется существенно увеличить количество функций для достижения желаемой точности.

2. Получение коэффициентов разложения $c_k^{(N)}$ путем решения системы (15). Последняя, как правило, имеет вид

$$\sum_{k=1}^N c_k^{(N)} (l\psi_k(y) - \psi(y), l\psi_j(y)) = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (45)$$

что означает ортогональность на Γ разности $lu^N(y) - \psi(y)$ ко всем функциям системы $\{l\psi_k(x)|_{\Gamma}\}_{k=1}^N$. Однако если выбор минимальной системы функций $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^N$ для приближенного решения $u^n(x)$ первым способом необходим, то в качестве системы функций, определяющей функционалы ω_j , можно взять произвольную систему $\{\varphi_j(y)\}_{j=1}^N$, даже ортогональную на Γ , если это улучшит обусловленность матрицы соответствующей системы

$$\sum_{k=1}^N c_k^{(N)} (l\psi_k(y) - \psi(y), \varphi_j(y)) = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (46)$$

Рассмотрим следующий пример. Пусть l — тождественный оператор, $N = 2$ и $\psi_2(y) = \psi_1(y) + \varepsilon(y)$, где $\varepsilon(y)$ — малая по модулю функция. Тогда для детерминанта системы (45) имеет место асимптотическое равенство

$$(\psi_1, \psi_1)(\psi_2, \psi_2) - (\psi_1, \psi_2)^2 = (\psi_1, \psi_1)(\varepsilon, \varepsilon) - (\psi_1, \varepsilon)^2 = O(h^2), \quad (47)$$

где

$$h = \max_y |\varepsilon(y)|,$$

а для детерминанта системы (46) — равенство

$$\begin{aligned} (\psi_1, \varphi_1)(\psi_2, \varphi_2) - (\psi_2, \varphi_1)(\psi_1, \varphi_2) = \\ = (\psi_1, \varphi_1)(\varepsilon, \varphi_2) - (\psi_1, \varphi_2)(\varphi_1, \varepsilon) = O(h). \end{aligned} \quad (48)$$

Надо, однако, помнить, что детерминант системы (45) всегда отличен от нуля для линейно независимой системы $\{\psi_k(y)\}_{k=1}^N$, тогда как при неудачном выборе функционалов ω_j детерминант системы (46) может оказаться равным нулю даже для линейно независимой системы $\{l\psi_k(y)\}_{k=1}^N$.

Приведем численный пример. Пусть

$$\psi(y) = a_1 \sin \omega_1 y + a_2 \sin \omega_2 y + a_3 \sin \omega_3(y),$$

где

$$\begin{aligned} a_1 = 100, \quad a_2 = 20, \quad a_3 = 10, \\ \omega_1 = 0,5, \quad \omega_2 = 0,5005, \quad \omega_3 = 0,501, \\ 0 \leq y \leq T. \end{aligned}$$

В табл. 1 даны значения коэффициентов a_1, a_2, a_3 , полученные с помощью метода наименьших квадратов для различных T .

При $T = 3$ произошел аварийный останов машины БЭСМ-6. В табл. 2 даны те же коэффициенты, полученные решением системы (46), когда функции $\varphi_j(y)$ выбраны следующим образом:

$$\varphi_1(y) = 1, \quad \varphi_2(y) = \sin \frac{2\pi}{T} y, \quad \varphi_3(y) = \sin \frac{4\pi}{T} y.$$

Этот пример показывает большие возможности такого подхода определения коэффициентов разложения. Однако, к сожалению,

Т а б л и ц а 1

T	a_i		
	a_1	a_2	a_3
18	100,2	19,5	10,2
14	101,1	17,7	11,1
10	97,4	25,2	7,4
6	84,8	50,4	-5,2
4	161,2	-102,2	71,1

Т а б л и ц а 2

T	a_i		
	a_1	a_2	a_3
18	100,0	20,2	10,0
14	100,0	20,0	10,0
10	100,0	20,0	10,0
6	100,3	19,4	10,3
4	99,8	20,4	9,8

сколько-нибудь значительные теоретические результаты в этом направлении нами не получены (см. § 1.4 гл. I).

В электродинамике соотношение

$$\sum_{k=1}^n c_k l \psi_k(y) = \psi(y),$$

где $\psi(y)$ — граничная функция в задаче (1), (2), называют сумматорным уравнением, для его решения (нахождения коэффициентов c_k) предлагается решать систему линейных алгебраических уравнений второго рода

$$c_k = D_k - \sum_{s=1}^n c_s R_{sk}, \quad (46_1)$$

где

$$R_{sk} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{si} u_i, v_k \right), \quad D_k = (\psi_1, v_k), \quad \alpha_{si} = (l\psi_s - v_s, u_i),$$

$\{v_k(y)\}$ и $\{u_k(y)\}$ — ортонормированные системы функций. Нетрудно проверить, что при $v_k(y) \equiv u_k(y)$ система (46₁) совпадает с системой (46). Действительно, в рассмотренном случае числа R_{sk} и α_{si} равны

$$\alpha_{si} = (l\psi_s, u_i) - \delta_{si}, \quad R_{sk} = (l\psi_s, u_k) - \delta_{sk},$$

где δ_{sk} — символ Кронекера. Подставляя последние соотношения

в (46₁), получаем систему

$$\sum_{s=1}^n c_s (l\psi_s, u_k) = (\psi_1, u_k),$$

которая совпадает с системой (46) при $u_k \equiv \varphi_k$.

Заметим также, что формулируемые при этом критерии выбора базиса $\{v_s\}$ (v_s должны быть близки к $l\psi_s$) кажутся нам внутренне противоречивыми. Действительно, при этом предполагается, что в ε -окрестности функций $l\psi_s$, образующих в совокупности неминимальную систему, существуют функции v_s , которые образуют ортонормированную систему.

3. Рекуррентное получение коэффициентов разложения по нормированной системе $\{l\psi_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$c_k = \left(\psi(y) - \sum_{i=1}^{k-1} c_i l\psi_i(y), l\psi_k(y) \right). \quad (49)$$

Вопрос этот подробно обсуждается в первой главе, в которой получены достаточные условия сходимости соответствующих рядов. Было бы желательно получить более легко проверяемые условия сходимости. В частности, интересно выяснить вопрос — сходится ли ряд с коэффициентами из (49)? Т. е. справедливо ли асимптотическое равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \psi(y) - \sum_{k=1}^N c_k l\psi_k(y) \right\|_{L_2(\Gamma)} = 0 \quad (50)$$

для всех плотно полных систем $\{l\psi_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$, функции которых не равны одновременно нулю в какой-либо точке \bar{y} . Пример плотно полной системы, для которой справедливо равенство $\sum_{k=1}^{\infty} |l\psi_k(\bar{y})|$ в некоторой точке \bar{y} и для которой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(y)$, где c_k вычисляются из (49), не сходится к разлагаемой функции $\psi(y)$, дается в § 1.9 гл. I. Так как для системы фундаментальных решений свойство быть плотно полной является основным недостатком при решении систем линейных уравнений для коэффициентов разложения, то при выполнении (50) для всех плотно полных систем это же свойство систем фундаментальных решений окажется основным достоинством, ибо для них коэффициенты разложения могут быть определены рекуррентно из (43) без решения линейной системы.

ГЛАВА I

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО НЕОРТОГОНАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

§ 1.1. Разложение по фундаментальным решениям. Первый метод

Настоящая глава является основной для данной книги. Здесь дается описание общей схемы двух способов решения граничных задач методом разложения по неортогональным функциям и вычислительных особенностей их реализации.

Пусть G — многомерная многосвязная область в \mathbf{R}^n , ограниченная (гипер)поверхностью Γ . Рассмотрим общую граничную задачу

$$Lu(x) = 0, \quad x \in G, \quad (1.1)$$

$$lu(x)|_{\Gamma} = \psi(y), \quad y \in \Gamma. \quad (1.2)$$

Метод разложения по неортогональным функциям решения граничной задачи (1.1), (1.2) заключается в следующем. Пусть $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — система вектор-функций ψ_k , удовлетворяющая следующим условиям.

1. Каждая функция $\psi_k(x)$ удовлетворяет в G уравнению (1.1).
2. Для каждой функции $\psi_k(x)$ на Γ определена новая функция $l\psi_k(y)$, где l — оператор, фигурирующий в граничном условии (1.2).

3. Система функций $\{l\psi_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ является линейно независимой и полной в пространстве $L_2(\Gamma)$ интегрируемых в квадрате вектор-функций на Γ .

Найдем коэффициенты a_k наилучшего (в смысле $L_2(\Gamma)$) разложения функции $\psi(y)$ по первым N функциям системы $\{l\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$\psi(y) \approx \sum_{k=1}^N a_k^{(N)} l\psi_k(y). \quad (1.3)$$

Тогда

$$u^{(N)}(x) = \sum_{k=1}^N a_k^{(N)} \psi_k(x) \quad (1.4)$$

можно считать приближенным решением задачи (1.1), (1.2), ко-

торое при $N \rightarrow \infty$ стремится к точному решению $u(x)$ при условии корректности задачи (1.1), (1.2).

В случае некорректных граничных задач (задача Неймана для уравнения Лапласа, вторая граничная задача теории упругости и т. п.) $u^{(N)}$ доставляет разумное приближение для решения задачи (1.1), (1.2). Действительно, пусть имеется некоторое интегральное представление решения задачи (1.1), (1.2):

$$u(x) = \int_{\Gamma} \psi(y) H(x, y) dS_y + F_1(x), \quad (1.5)$$

где $H(x, y) = [H_1(x, y), \dots, H_m(x, y)]$ — ядро (функция Грина, Неймана, матрица Сомилиана, Келвина и т. п.) удовлетворяет неравенству

$$\int_{\Gamma} [H_1(x, y)]^2 dS_y \leq \infty, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.6)$$

для любой точки $x \in G$, $F_1(x)$ — известная функция (в некотором смысле произвольная: для задачи Неймана F_1 — произвольная постоянная, для второй граничной задачи теории упругости F_1 — произвольное жесткое перемещение и т. д.). Ввиду того, что приближенное решение (1.4) удовлетворяет граничной задаче

$$\begin{aligned} Lu^{(N)}(x) &= 0, \quad x \in G, \\ lu^{(N)}(x)|_{\Gamma} &= \sum_{k=1}^N a_k^{(N)} l\psi_k(y), \end{aligned}$$

то, применяя для него интегральное представление (1.5), получаем

$$u^{(N)}(x) = \int_{\Gamma} \sum_{k=1}^N a_k^{(N)} l\psi_k(y) H(x, y) dS_y + F_2. \quad (1.7)$$

Вычитая последнее равенство из (1.5), получаем

$$u(x) - u^{(N)}(x) \leq \left| \int_{\Gamma} \left[\psi(y) - \sum_{k=1}^N a_k^{(N)} l\psi_k(y) \right] H(x, y) dS_y \right| + |F_1 - F_2|. \quad (1.8)$$

Применяя к первому слагаемому в правой части (1.8) неравенство Коши — Буняковского, получим, что точное решение $u(x)$ задачи (1.1), (1.2) отличается от приближенного решения $u^{(N)}(x)$ на $|F_1 - F_2|$ (что является естественным для соответствующих граничных задач) и на член, стремящийся к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Таким образом, основная трудность заключается в выборе системы функций $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям 1 — 3.

Отметим, что условие полноты в $L_2(\Gamma)$ можно заменить полнотой системы функций $\{l\psi_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ в подпространстве $\bar{L}_2(\Gamma)$ пространства $L_2(\Gamma)$, элементы которого обеспечивают хотя одно

решение задачи (1.1), (1.2). Так, в случае задачи Неймана для уравнения Лапласа $\bar{L}_2(\Gamma)$ совпадает с ортогональным дополнением постоянной до $L_2(\Gamma)$, что естественно для этой задачи, так как для разрешимости задачи (1.1), (1.2) в этом случае необходимо и достаточно выполнение условия $\int_{\Gamma} \psi(y) dS_y = 0$. Для задачи Дирихле $\bar{L}_2(\Gamma)$ совпадает с $L_2(\Gamma)$, ибо решение в этом случае существует для произвольной функции $\psi(y) \in L_2(\Gamma)$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать полноту в $\bar{L}_2(\Gamma)$.

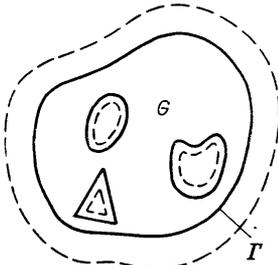


Рис. 1

Перечисленным выше условиям, как показано в работах [84, 85], удовлетворяет определенным образом построенная система фундаментальных решений уравнения (1.1). Рассмотрим в области $\mathbb{R}^n \setminus G$ замкнутую поверхность Γ_1 , целиком охватывающую G и не имеющую с ней общих точек, причем если G — многосвязна, т. е. Γ состоит из отдельных замкнутых поверхностей (рис. 1), то и Γ_1 состоит из такого же числа замкнутых поверхностей

(Γ_1 показана штриховой линией). Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Gamma_1$ всюду плотное множество точек, т. е. сколь угодно малый участок поверхности Γ_1 содержит по крайней мере одну точку множества $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Возьмем матрицу фундаментальных решений $H(z_k, y)$ уравнения (1.1), соответствующую этим точкам z_k , и рассмотрим систему вектор-функций

$$\{lH_i(z_k, y)\} = \{l\psi_{ki}(y)\}. \tag{1.9}$$

В дальнейшем при рассмотрении конкретных граничных задач будет конкретизирован аналитический вид фундаментального решения $H_i(z, x)$ и будут доказаны соответствующие теоремы линейной независимости и полноты.

Покажем, что при определенных условиях система (1.9) полна. Пусть решение граничной задачи (1.1), (1.2) можно продолжить на область G_1 , ограниченную поверхностью Γ_1 , так что оно будет удовлетворять граничной задаче

$$\begin{aligned} L\bar{u}(x) &= 0, & x \in G_1, \\ \bar{u}(x)|_{\Gamma_1} &= \bar{\psi}(z), \end{aligned} \tag{1.10}$$

где $\bar{\psi}(z)$ — произвольная ограниченная функция, обеспечивающая существование решения граничной задачи (1.10). Будем предполагать, что решение задачи (1.10) удовлетворяет на Γ условию

$$\|\tilde{\psi}(y) - \psi(y)\|_{L_2(\Gamma)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m \|\bar{\psi}^{(i)}(y) - \psi^{(i)}(y)\|_{L_2(\Gamma)} < \varepsilon, \tag{1.11}$$

где $\tilde{\psi}(y) = \bar{u}(x)|_{\Gamma}$, $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, и это решение представимо в виде потенциала простого слоя

$$\bar{u}(x) = \int_{\Gamma} H(z, x) \widehat{\psi}(z) dS_z, \tag{1.12}$$

где $\widehat{\psi}(z)$ — плотность простого слоя, а $H(z, x)$ — ядро (матрица) интегрального представления¹⁾.

Для того чтобы систему (1.9) можно было применять для решения граничной задачи (1.1), (1.2), достаточно доказать, что она дает возможность сколь угодно хорошей аппроксимации граничной функции $\psi(y)$. Рассмотрим функцию (1.12) на поверхности Γ ; применив к ней оператор l , получим

$$\tilde{\psi}(y) = \int_{\Gamma_1} [lH(z, y)] \widehat{\psi}(z) dS_z. \tag{1.13}$$

В развернутом виде это равенство принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^{(1)}(y) &= \int_{\Gamma_1} [l_1 H_{11}(z, y) \widehat{\psi}_1(z) + \\ &\quad + l_2 H_{12}(z, y) \widehat{\psi}_2(z) + \dots + l_m H_{1m}(z, y) \widehat{\psi}_m(z)] dS_z, \\ \tilde{\psi}^{(2)}(y) &= \int_{\Gamma_1} [l_1 H_{21}(z, y) \widehat{\psi}_1(z) + l_2 H_{22}(z, y) \widehat{\psi}_2(z) + \dots \\ &\quad + l_m H_{2m}(z, y) \widehat{\psi}_m(z)] dS_z, \end{aligned} \tag{1.13^1}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^m(y) &= \int_{\Gamma_1} [l_1 H_{m1}(z, y) \widehat{\psi}_1(z) + \\ &\quad + l_2 H_{2m}(z, y) \widehat{\psi}_2(z) + \dots + l_m H_{mm}(z, y) \widehat{\psi}_m(z)] dS_z, \end{aligned}$$

где $H_{ij}(x, y)$ — элементы матрицы $H(x, y)$. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такое N_0 и такая система коэффициентов $b_{ki}^{(N)}$ ($k = 1, \dots, N$), что при $N > N_0$ выполняется неравенство

$$\left\| \psi(y) - \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m b_{ki}^{(N)} lH_i(z_k, y) \right\|_{L_2(\Gamma)} \leq \varepsilon. \tag{1.14}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} &\left\| \psi(y) - \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m b_{ki}^{(N)} lH_i(z_k, y) \right\|_{L_2(\Gamma)} \leq \\ &\leq \left\| \psi(y) - \tilde{\psi}(y) \right\|_{L_2(\Gamma)} + \left\| \tilde{\psi}(y) - \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m b_{ki}^{(N)} lH_i(z_k, y) \right\|_{L_2(\Gamma)} \leq \\ &\leq \varepsilon_1 + \sum_{i=1}^m \left\| \tilde{\psi}^{(j)}(y) - \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m b_{ki}^{(N)} l_j H_{ij}(z_k, y) \right\|_{L_2(\Gamma)}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

¹⁾ По существу равенство (1.12) является [66] одним из возможных определений фундаментального решения.

где ε_1 сколь угодно мало. Последнее слагаемое в правой части можно оценить следующим образом. Заменяем интеграл в (1.13¹) какой-либо кубатурной формулой с узлами в точках z_k :

$$\tilde{\Psi}^{(i)}(y) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m A_k l_i H_{ji}(z_k, y) \tilde{\Psi}_i(z_k) + E_N^{(j)}(y),$$

где A_k — коэффициенты кубатурной формулы, а $E_N^{(j)}$ — ее остаточный член; при этом будем предполагать, что число узлов N столь велико, что неравенство

$$|E_N^{(j)}(y)| < \varepsilon_2 \quad (1.16)$$

выполняется для любого $y \in \Gamma$ и $j = 1, \dots, m$, где ε_2 произвольно мало. Тогда с учетом (1.11) и (1.16) из неравенства (1.15) получаем оценку

$$\left\| \Psi(y) - \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m b_{ki} l_i H_i(z_k, y) \right\| \leq \varepsilon_1 + \sqrt{|\Gamma|} \varepsilon_2 m, \quad (1.17)$$

где

$$b_{ki} = A_k \widehat{\Psi}_i(z_k), \quad (1.18)$$

$|\Gamma|$ — площадь поверхности Γ . Взяв для ε_1 и ε_2 значения

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2m \sqrt{|\Gamma|}},$$

из (1.17) непосредственно выводим искомое неравенство (1.14).

Таким образом, получили следующее предложение. Если существует равномерно ограниченная на Γ_1 функция $\bar{\psi}(z)$, которая обеспечивает для решения граничной задачи (1.10) выполнение неравенства (1.14), и решение граничной задачи (1.10) представимо в виде потенциала простого слоя (1.12), то функцию $\psi(y)$ можно разложить по системе (1.9) со сколь угодно высокой точностью; коэффициенты разложения находятся из (1.18).

Заметим, что в такой трактовке излагаемый здесь метод близок по идее к методу «фиктивных областей» — область G дополняется до области G_1 с границей Γ_1 , для нее решается задача (1.10), и это решение рассматривается как приближенное (слабое) решение задачи (1.1), (1.2).

При доказательстве последнего предложения было использовано соотношение (1.13), которое при заданном $\tilde{\Psi}(y)$ и искомым $\widehat{\Psi}(z)$ можно рассматривать как интегральное уравнение первого рода для случая, когда области определения независимых переменных $y \in \Gamma$ и $z \in \Gamma_1$ не совпадают. Это дает возможность иной трактовки первого метода.

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$\bar{v}(z) = \int_{\Gamma} [lH(z, y)] v(y) dS_y, \quad (1.19)$$

где переменная интегрирования y меняется на Γ , а заданная функция $\bar{v}(z)$ — на Γ_1 , и покажем, что при определенных условиях система (1.9) полна в некотором подпространстве, содержащем $v(y)$. Запишем (1.19) в операторном виде:

$$\bar{v} = Av, \quad (1.19^1)$$

где $A = (A_1, \dots, A_m)$ — линейный ограниченный оператор из гильбертова пространства R в банахово пространство E (R и E будем считать действительными). Предположим, что (1.19) имеет решение. Тогда можно показать, что в подпространстве $\overline{A^*E^*}$ решение уравнения (1.19¹) существует и единственно [28]²).

Предположим дополнительно, что в E существует счетная тотальная система $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$ линейно независимых функционалов. Не ограничивая общности, можно считать, что $\|l_k\| = 1$. Сначала мы докажем, что система $\{A_j^*l_k\}_{k=1, j=1}^{\infty, m}$ полна в $\overline{A^*E^*}$, а затем, путем надлежащего выбора функционалов l_k , докажем, что

$$A_j^*l_k = lH_j(z_k, y). \quad (1.20)$$

Пусть h — элемент гильбертова пространства R , ортогональный всем $A_j^*l_k$:

$$(h, A_j^*l_k) = 0, \quad j = 1, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots,$$

(скобки обозначают скалярное произведение в гильбертовом пространстве R).

Покажем, что $h \equiv 0$. Действительно, из последних равенств получаем

$$(h, A_j^*l_k) = l_k(A_j h) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, m,$$

откуда в силу тотальности системы $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеем $A_j h = 0$ и, следовательно, $h \in \ker A$. Но известно [68], что множество $\ker A$ ортогонально к A^*E^* , и поэтому $h = 0$. Для доказательства (1.20) конкретизируем применяемые пространства R и E . Будем предполагать, что $R = L_2(\Gamma)$ и $E = C(\Gamma_1)$, где $C(\Gamma_1)$ — пространство непрерывных вектор-функций на Γ_1 . Определим l_k следующим образом:

$$l_k(f) = f(z_k),$$

где f — произвольная функция из $C(\Gamma_1)$ и z_k — элемент множества $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$. Так определенная система функционалов тотальна в $C(\Gamma_1)$, ибо точки z_k расположены всюду плотно на Γ_1 и в силу непрерывности $f \in C(\Gamma_1)$ из равенств

$$l_k(f) = f(z_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

²) A^*E^* является множеством всех элементов A^*u , $u \in E^*$, $\overline{A^*E^*}$ — замыкание A^*E^* .

следует, что $f \equiv 0$. Кроме того, $\|l_k\| = 1$, и в силу определения сопряженного оператора A_j^* имеет место равенство $A_{jk}^* = lH_j(z_k, y)$.

Следует заметить, что система

$$\{A_{jk}^*\}_{k=1, j=1}^{\infty, m} = \{lH_j(z_k, y)\}_{k=1, j=1}^{\infty, m}$$

не является базисом в $\overline{A^*E^*}$. Более того, некоторые элементы системы могут быть линейно зависимы (если $\text{ker } A^* \neq 0$). Но так как решение $v(y)$ интегрального уравнения (1.18) содержится в $\overline{A^*E^*}$, то $v(y)$ можно с любой точностью аппроксимировать по норме R конечными линейными комбинациями элементов системы (1.9).

§ 1.2. Разложение по фундаментальным решениям. Второй метод

Второй способ приближенного решения граничной задачи (1.1), (1.2), судя по всему, при одном и том же числе членов разложения N должен обладать более высокой точностью, чем описанный выше приближенный метод. Будем предполагать, что решение u задачи (1.1), (1.2) удовлетворяет следующим интегральным соотношениям:

$$u(x) = \int_{\Gamma} [l^{(1)}u(y)] K_1(x, y) dS_y + \int_{\Gamma} [l^{(2)}u(y)] K_2(x, y) dS_y, \quad x \in G, \quad (1.21)$$

$$0 = \int_{\Gamma} [l^{(1)}u(y)] K_1(z, y) dS_y + \int_{\Gamma} [l^{(2)}u(y)] K_2(z, y) dS_y, \quad z \notin G, \quad (1.22)$$

где z — точка вне замкнутой области \overline{G}_1 , $l^{(1)}$ и $l^{(2)}$ — некоторые дифференциальные операторы, определенные на границе Γ , K_1 , K_2 — ядра (матрицы) интегральных представлений (1.21) и (1.22).

Практически для всех классических граничных задач соотношения типа (1.21), (1.22) известны. Для уравнений Лапласа они называются основными тождествами теории гармонических функций, для граничных задач теории упругости — формулами Сомилиана, для уравнений Максвелла — формулами Гюйгенса. Оператор l в граничном условии (1.2) обычно либо совпадает с $l^{(1)}$

$$\psi(y) = l^{(1)}u(x)|_{\Gamma}, \quad (1.23)$$

либо определяется следующим образом:

$$\psi(y) = l^{(1)}u(x)|_{\Gamma} - \alpha(y)l^{(2)}u(x)|_{\Gamma}, \quad (1.24)$$

где $\alpha(y)$ — некоторая вектор-функция на Γ . При $\alpha(y) \equiv 0$ $l^{(1)} \equiv l$ и (1.24) превращается в (1.23). Подставляя (1.24) в (1.22), по-

лучаем функциональное соотношение

$$\int_{\Gamma} v(y) K_3(z, y) dS_y = F(z), \quad (1.25)$$

где

$$\begin{aligned} v(y) &= l^{(2)}u(x)|_{\Gamma}, \quad K_3(z, y) = K_2(z, y) + \alpha(y) K_1(z, y) \\ F(z) &= - \int_{\Gamma} \psi(y) K_1(z, y) dS_y. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Учитывая, что для граничной задачи (1.1), (1.2) $F(z)$ — известная функция, соотношение (1.25) можно рассматривать как уравнение для определения неизвестной функции $v(y)$. Если из (1.25) удастся определить $v(y)$, то, подставив ее в (1.21) и вычислив необходимые кубатуры, получим решение граничной задачи (1.1), (1.2) в любой точке x области G . Для приближенного определения $v(y)$ из (1.25) можно воспользоваться представлением

$$v(y) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m a_{ki}^{(N)} K_{3i}(z_k, y), \quad (1.27)$$

где

$$K_{3i}(z_k, y) = K_{2i}(z_k, y) + \alpha_i(y) K_{1i}(z_k, y), \quad (1.28)$$

$K_{1i}(z_k, y)$ и $K_{2i}(z_k, y)$ — вектор-столбец матриц $K_1(z_k, y)$ и $K_2(z_k, y)$; точки z_k , как и в (1.9), образуют на вспомогательной поверхности Γ_1 всюду плотное множество, $a_{ki}^{(N)}$ — коэффициенты разложения. В отличие от описанного в § 1.1 метода решения граничной задачи (1.1), (1.2) способом разложения заданной функции $\psi(y)$ в ряд (1.3) (в дальнейшем этот метод будем называть первым методом) здесь разлагаемая функция $v(y)$ неизвестна; известны лишь ее моменты по функциям $K_{3i}(z_k, y)$, получаемые из равенства (1.25) (этот метод будем называть вторым методом). Отмеченное обстоятельство накладывает определенные ограничения во втором методе на способы нахождения коэффициентов разложения a_{ki} . Введем обозначение

$$\psi_j(y) = K_{3i}(z_k, y), \quad (1.29)$$

где

$$j = m(k-1) + i. \quad (1.30)$$

Аналогично перенумеруем и систему (1.9)

$$l\psi_j(y) = lH_i(z_k, y), \quad (1.31)$$

где индексы i, k, j связаны соотношением (1.30).

Таким образом, основная идея решения граничной задачи (1.1), (1.2) вторым способом заключается в определении вспомогательной функции $v(y)$ из функционального уравнения (1.25) в виде (1.27) и в последующем нахождении решения по формуле (1.21).

§ 1.3. Нахождение коэффициентов разложения

В первом методе решения граничных задач коэффициенты $a_k^{(N)}$ ($k = 1, \dots, N$) приближенного решения (1.4) можно находить из условия, что первые N линейных функционалов ($i = 1, \dots, N$) некоторой тотальной системы функционалов принимают нулевые значения на разности $\psi(y) - \sum_{j=1}^N a_j^{(N)} l\psi_j(y)$, где $l\psi_j(y)$ определены формулой (1.31). Это приводит нас к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^N a_j^{(N)} \omega_j [l\psi_i(y)] = \omega_j [\psi(y)], \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.32)$$

Выбор системы функционалов ω_j в этом методе не ограничен, ибо разлагаемая функция $\psi(y)$ известна и, следовательно, правая часть системы (1.32) вычисляется.

Во втором методе решения граничных задач разность $v(y) - \sum_{j=1}^N a_j^{(N)} \psi_j(y)$, где $\psi_j(y)$ определены формулой (1.29), минимизируется в $L_2(\Gamma)$, т. е. функционалы ω_j определяются следующим образом:

$$\omega_j [v(y)] = [\psi_j(y), v(y)] = \sum_{k=1}^m (\psi_{jk}(y), v_k(y)), \quad (1.33)$$

где $\psi_{jk}(y)$ и $v_k(y)$ — компоненты вектор-функции $\psi_j(y)$ и $v(y)$ соответственно, а скобки (\cdot, \cdot) обозначают скалярные произведения в $L_2(\Gamma)$. Для вычисления коэффициентов $a_j^{(N)}$ получаем систему

$$\sum_{i=1}^N a_i^{(N)} [\psi_i(y), \psi_j(y)] = [v(y), \psi_j(y)]. \quad (1.34)$$

Правая часть этой системы, согласно равенствам (1.25) и (1.29), определяется из соотношения

$$[v(y), \psi_j(y)] = F_i(z_k), \quad (1.35)$$

где индексы i, k, j связаны зависимостью (1.30).

В первом методе система $\{l\psi_j(y)\}_{j=1}^{\infty}$, по функциям которой разлагается заданная функция $\psi(y)$, строго зафиксирована; каждая из функций соответствующей ей системы $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ должна быть решением уравнения (1.1). Но имеется возможность произвольного выбора функционалов ω_j , что следует использовать для улучшения обусловленности матрицы системы (1.32). Ниже бу-

дет показано, что обычно используемая система функционалов³⁾

$$\omega_j[l\psi_i(y)] = [l\psi_j(y), l\psi_i(y)]$$

приводит в асимптотике ($N \rightarrow \infty$) к плохо обусловленным системам.

Во втором методе ситуация обратная. Здесь функционалы ω_j строго зафиксированы с помощью соотношения (1.33). Это обусловлено тем, что разлагаемая функция $v(y)$ неизвестна и заданы лишь ее моменты (1.35). Но в этом случае полная система $\{\varphi_j(y)\}_{j=1}^{\infty}$, по функциям которой разлагается неизвестная функция $v(y)$, вообще говоря, произвольна, что также следует использовать для улучшения обусловленности матрицы соответствующей системы. Действительно, пусть неизвестная функция $v(y)$

ищется в виде ряда $\sum_{j=1}^N a_j^{(N)} \varphi_j(y)$. Потребуем, чтобы N функционалов, определяемых формулой (1.33), принимали на разности $v(y) - \sum_{j=1}^N a_j^{(N)} \varphi_j(y)$ нулевые значения. Это приводит нас к системе

$$\sum_{j=1}^N a_j^{(N)} \omega_i[\varphi_j(y)] = \omega_i[v(y)], \quad (1.36)$$

правая часть и коэффициенты которой вычисляются. Это дает возможность в качестве системы $\{\varphi_j(y)\}_{j=1}^{\infty}$ взять произвольную полную ортонормированную на Γ систему, если при этом детерминант системы (1.36) будет достаточно большим.

Нахождение коэффициентов разложения по фундаментальным решениям с применением метода наименьших квадратов встречает значительные трудности, связанные с малостью соответствующих детерминантов Грама. Пусть R_1 — линейная оболочка в гильбертовом пространстве R произвольной системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$. Покажем, что:

1) если в R_1 существует элемент φ , наименее удаленный от некоторого элемента $\Phi \in R$, не принадлежащего R_1 , то элемент $\Phi - \varphi$ ортогонален каждому элементу $g \in R_1$, т. е.

$$(\Phi - \varphi, g) = 0, \quad g \in R_1,$$

³⁾ В общем виде функционал ω_j можно представить в виде соотношения

$$\omega_j(\alpha) = a_j(\alpha^{(K_j)}, \varphi_j) + b_j \alpha^{(S_j)}(x_{r_j}),$$

которое при $a_j \equiv 1$, $b_j \equiv 0$, $K_j \equiv 0$ превращается в обычный функционал гильбертова пространства; при $a_j \equiv 0$, $b_j \equiv 1$, $S_j \equiv 0$, $r_j = j$ — в функционал метода коллокации (a_j , b_j — произвольные числа, K_j , S_j — показатели порядка дифференцирования, r_j — номер «узла коллокации»). Представляют определенный интерес другие комбинации этих чисел; например, при $a_j \equiv 0$, $b_j \equiv 1$, $S_j \equiv j$, $r_j \equiv 0$.

2) в конечномерном подпространстве R_1 , порожденном линейно независимыми векторами $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$, для квадрата погрешности, с которой вектор

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i$$

аппроксимирует вектор Φ , имеем

$$\delta^2 = \min_{\alpha_k} \|\Phi - \alpha_1 \varphi_1 - \alpha_2 \varphi_2 - \dots - \alpha_n \varphi_n\|^2 = \frac{G(\Phi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)}{G(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)}, \quad (1.37)$$

где

$$G(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) = \begin{vmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_1) & \dots & (\varphi_N, \varphi_1) \\ (\varphi_1, \varphi_2) & (\varphi_2, \varphi_2) & \dots & (\varphi_N, \varphi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_1, \varphi_N) & (\varphi_2, \varphi_N) & \dots & (\varphi_N, \varphi_N) \end{vmatrix}$$

— детерминант Грама.

Предположим, что в R_1 существует вектор f , для которого

$$(\Phi - \varphi, f) = r \neq 0$$

и рассмотрим в R_1 вектор

$$F = \varphi + \frac{r}{(f, f)} f.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|\Phi - F\|^2 &= \left(\Phi - \varphi - \frac{r}{(f, f)} f, \Phi - \varphi - \frac{r}{(f, f)} f \right) = \\ &= \|\Phi - \varphi\|^2 - \frac{|r|^2}{(f, f)} < \|\Phi - \varphi\|^2. \end{aligned}$$

Но, по предположению, φ — наиболее близкий элемент к Φ ; полученное противоречие доказывает первую часть утверждения.

Для доказательства (1.37) используем уравнения

$$(\Phi - \varphi, \varphi_k) = 0, \quad k = 1, \dots, N \quad (1.38)$$

и выражение для φ :

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i (\varphi_i, \varphi_k) = (\Phi, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (1.39)$$

Учитывая (1.38), для δ^2 получаем

$$\begin{aligned} \delta^2 &= (\Phi - \varphi, \Phi - \varphi) = (\Phi - \varphi, \Phi) - (\Phi - \varphi, \varphi) = \\ &= (\Phi - \varphi, \Phi) = (\Phi, \Phi) - (\varphi, \Phi) \end{aligned}$$

или, используя выражение для Φ ,

$$(\Phi, \Phi) - \delta^2 = \sum_{i=1}^N \alpha_i (\varphi_i, \Phi).$$

Присоединяя это уравнение к системе (1.39), получаем систему $N + 1$ уравнений с неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$. Для разрешимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы равнялся рангу расширенной матрицы

$$A = \begin{vmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_N, \varphi_1) & (\Phi, \varphi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_1, \varphi_N) & \dots & (\varphi_N, \varphi_N) & (\Phi, \varphi_N) \\ (\varphi_1, \Phi) & \dots & (\varphi_N, \Phi) & (\Phi, \Phi) - \delta^2 \end{vmatrix}.$$

Отсюда получаем, что $A = 0$ и

$$\delta^2 = \frac{G(\Phi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)}{G(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)}. \quad (1.40)$$

Докажем, что

$$G(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) \leq G(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) G(\varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \dots, \varphi_N), \quad (1.41)$$

где $m < N$, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ — линейно независимые векторы. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} \| \varphi_k - \alpha_{k+1} \varphi_{k+1} - \dots - \alpha_k \varphi_N \| &\leq \\ &\leq \min_{\beta} \| \varphi_k - \beta_{k+1} \varphi_{k+1} - \dots - \beta_m \varphi_m \|. \end{aligned}$$

Учитывая эти неравенства, из (1.40) получаем

$$\begin{aligned} \frac{G(\varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_N)}{G(\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_N)} &\leq \frac{G(\varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_m)}{G(\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_m)}, \\ \frac{G(\varphi_m, \varphi_{m+1}, \dots, \varphi_N)}{G(\varphi_{m+1}, \dots, \varphi_N)} &\leq G(\varphi_m), \quad k = 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Так как $G(\varphi_j, \varphi_{j+1}, \dots, \varphi_i) > 0$ ($j > 1$), то (1.42) можно записать в виде

$$\frac{G(\varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_N)}{G(\varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_m)} \leq \frac{G(\varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}, \dots, \varphi_N)}{G(\varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}, \dots, \varphi_m)}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{G(\varphi_1, \dots, \varphi_N)}{G(\varphi_1, \dots, \varphi_m)} &\leq \frac{G(\varphi_2, \dots, \varphi_N)}{G(\varphi_2, \dots, \varphi_m)} \leq \dots \\ &\dots \leq \frac{G(\varphi_m, \dots, \varphi_N)}{G(\varphi_m)} \leq G(\varphi_{m+1}, \dots, \varphi_N). \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством (1.41), получим асимптотические оценки для детерминантов Грама систем (1.32) и (1.34).

Пусть точки z_k , определяющие функции $\psi_i(y)$, расположены на поверхности Γ_1 с площадью $|\Gamma_1|$ и перенумерованы таким образом, что $r(z_{2i}, z_{2i-1}) < h$, где $r(z_{2i}, z_{2i-1})$ — расстояние между точками z_{2i} и z_{2i-1} , $h \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Ясно, что в силу всюду плотного распределения точек z_k на Γ_1 это всегда возможно, если Γ_1 состоит из n замкнутых поверхностей и на каждой из этих поверхностей лежит четное число точек z_k . В силу (1.41) имеем

$$G_N(\varphi_1, \dots, \varphi_N) \leq \prod_{k=1}^{N/m-1} \prod_{i=1}^m G_2(\varphi_{m(k-1)+i}, \varphi_{mk+i}), \quad (1.43)$$

где $G_2(\varphi_{m(k-1)+i}, \varphi_{mk+i})$ — детерминант Грама второго порядка для функций $\varphi_{m(k-1)+i}$ и φ_{mk+i} :

$$G_2(\varphi_{m(k-1)+i}, \varphi_{mk+i}) = (\varphi_{m(k-1)+i}, \varphi_{m(k-1)+i})(\varphi_{mk+i}, \varphi_{mk+i}) - (\varphi_{m(k-1)+i}, \varphi_{mk+i})^2. \quad (1.44)$$

Учитывая индексацию (1.30), для системы (1.9) получаем

$$\varphi_{m(k-1)+i}(y) = LH_i(z_k, y), \quad \varphi_{mk+i}(y) = LH_i(z_{k+1}, y). \quad (1.45)$$

Предполагая непрерывность производных функций $LH(z, y)$ по переменным z^1, z^2, z^3 (координатам точки z) и используя разложение функции $LH(z, y)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_k (взяв только первый член), получаем

$$\varphi_{m(k-1)+i}(y) = \varphi_{mk+i}(y) + \varepsilon_{mk+i}(y), \quad (1.46)$$

где

$$\varepsilon_{mk+i}(y) = \left[(z_k^1 - z_{k+1}^1) \frac{\partial}{\partial z^1} + (z_k^2 - z_{k+1}^2) \frac{\partial}{\partial z^2} + (z_k^3 - z_{k+1}^3) \frac{\partial}{\partial z^3} \right] LH_i(\widehat{z}_k, y)$$

(точка \widehat{z}_k лежит между точками z_k и z_{k+1}). Используя разложение (1.46) и равенство (1.44), получаем

$$G_2(\varphi_{m(k-1)+i}, \varphi_{mk+i}) = (\varphi_{mk+i}, \varphi_{mk+i}) [(\varphi_{mk+i}, \varphi_{mk+i}) + 2(\varphi_{mk+i}, \varepsilon_{mk+i}) + (\varepsilon_{mk+i}, \varepsilon_{mk+i})] - (\varphi_{mk+i}, \varphi_{mk+i})^2 - 2(\varphi_{mk+i}, \varphi_{mk+i})(\varphi_{mk+i}, \varepsilon_{mk+i}) - (\varphi_{mk+i}, \varepsilon_{mk+i})^2 = (\varphi_{mk+i}, \varphi_{mk+i})(\varepsilon_{mk+i}, \varepsilon_{mk+i}) - (\varphi_{mk+i}, \varepsilon_{mk+i})^2. \quad (1.47)$$

Учитывая, что $G_2(\varphi_{m(k-1)+i}, \varphi_{mk+i})$ — положительная величина, можно членом $(\varphi_{mk+i}, \varepsilon_{mk+i})^2$ пренебречь; при этом будем иметь

$$G_2(\varphi_{m(k-1)+i}, \varphi_{mk+i}) \leq (\varphi_{mk+i}, \varphi_{mk+i})(\varepsilon_{mk+i}, \varepsilon_{mk+i}) \leq C_{mk+i} h^2, \quad (1.48)$$

где C_{mk+i} — не зависящая от N постоянная. Подставляя послед-

нее неравенство в (1.43), получаем

$$G_N(\varphi_1, \dots, \varphi_N) \leq (ch)^N, \quad (1.49)$$

где постоянная $c = \sqrt{\max_{m,k,i} C_{mk+i}}$ не зависит от N .

Заметим, что неравенство (1.48) дает возможность выбора для внутренних граничных задач в некотором смысле наилучшей поверхности Γ_1 — поверхности, для которой правая часть оценки (1.48) будет максимальной. Действительно, при удалении поверхности Γ_1 от Γ ее площадь и, следовательно, h увеличиваются. Однако при этом константа C_{mk+i} резко уменьшается (последнее станет понятным при рассмотрении конкретных фундаментальных решений). С другой стороны, при стягивании Γ_1 к Γ константа C_{mk+i} увеличивается, однако при этом площадь Γ_1 и, следовательно, h уменьшаются. Таким образом, следует ожидать, что существует такая поверхность, для которой правая часть неравенства (1.49) наибольшая. Учитывая, что $h \leq |\Gamma_1|m/N$ (равенство имеет место при равномерном расположении точек z_k на Γ_1), где Γ_1 — площадь поверхности Γ_1 , из неравенства (1.49) получаем

$$G_N(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) \leq (\bar{c}/N)^N, \quad (1.50)$$

где $\bar{c} = c|\Gamma_1|m$ — не зависящая от N постоянная.

Ввиду того, что метод наименьших квадратов, как в первом, так и во втором методе приводит к системам, для которых детерминант соответствующих матриц быстро стремится к нулю, естественно попытаться так выбрать систему функционалов ω_j в первом методе или систему функций φ_j во втором, чтобы детерминанты систем (1.32) и (1.36) были возможно большими.

Однако предположение, что для функционалов в гильбертовом пространстве $L_2(\Gamma)$ модули этих детерминантов ограничены снизу некоторым числом $\Omega > 0$ при любом $N \rightarrow \infty$, представляется маловероятным. Действительно, имеет место следующее предположение (см. [72]).

Для того чтобы в сопряженном к $L_p(\Gamma)$ пространстве $L_q(\Gamma)$ ($1/p + 1/q = 1$) для заданной системы функций $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ существовали элементы α_j , образующие с заданными ψ_j биортонормированную систему $\{\psi_j, \alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$, необходимо и достаточно, чтобы система $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ была минимальна.

Таким образом, если $\psi_j \in L_2(\Gamma)$, то в $L_2(\Gamma)$ не существуют ω_j , которые для $a_j^{(N)}$ обеспечивали бы равенства

$$a_j^{(N)} = a_j = \omega_j[\psi(y)].$$

Значительно лучше результаты по обусловленности матриц системы (1.32) следует ожидать для функционалов в банаховом пространстве. Действительно, определим функционалы ω_j

следующим образом:

$$\omega_j[\Phi(y)] = \Phi(y_j), \quad j = 1, \dots, N, \quad (1.51)$$

где i, j, k связаны соотношением (1.30); $\Phi(y)$ — произвольная функция, а y_i — узлы коллокации. Будем предполагать, что скалярные произведения в методе наименьших квадратов определяются формулами

$$[\psi_l(y), \psi_j(y)] = \int_{\Gamma} \psi_l(y) \psi_j(y) dS_y = \sum_{i=1}^N \frac{|\Gamma_i|}{N} \psi_l(y_i) \psi_j(y_i).$$

Рассмотрим матрицу A системы (1.32) для функционалов (1.51). Нетрудно проверить, что

$$\left(\frac{|\Gamma|}{N}\right)^N AA^* = G_N(\psi_1, \dots, \psi_N),$$

или

$$|A| = \sqrt{G_N(\psi_1, \dots, \psi_N) \left(\frac{N}{|\Gamma|}\right)^N} \leq \left(\frac{\bar{c}}{|\Gamma|}\right)^{N/2}. \quad (1.52)$$

Следует заметить, что в (1.50) и (1.52) G_N и $|A|$ оцениваются сверху, и если для детерминанта Грама G_N известно, что он отличен от нуля при любом конечном N , то для матрицы A это уже не так — ее детерминант может равняться нулю. Ниже будет показано, что для системы $\{\ln r(z_k, x)\}$ (система фундаментальных решений двумерного оператора Лапласа) детерминант матрицы A равен нулю для одного специального случая контуров Γ и Γ_1 .

§ 1.4. Устойчивость решения и метод регуляризации

В процессе решения граничных задач методом разложения по фундаментальным решениям, как ясно из предыдущих параграфов, приходится строить решение интегрального уравнения первого рода. В первом способе по существу решается уравнение (1.13), так как коэффициенты разложения b_{ki} связаны с решением интегрального уравнения (1.13) соотношениями (1.18). Во втором способе для нахождения функции $v(y)$ также решается интегральное уравнение первого рода (1.25). Поэтому возникает вопрос об устойчивости найденных решений. Можно показать, что решения интегральных и функциональных уравнений первого рода с суммируемым ядром неустойчивы в смысле метрики пространства C непрерывных функций, т. е. сколь угодно малое изменение максимума модуля заданной функции может вызывать сколь угодно большое изменение максимума модуля искомой функции. В самом деле, пусть $\psi(y)$ — решение инте-

грального уравнения первого рода

$$\int_{\Gamma} K(x, y) \psi(y) dS_y = F(x),$$

где $K(x, y)$ — суммируемая функция. Введем обозначение $\bar{\psi}(y) = \psi(y) + \psi_n(y)$, где $\psi_n(y)$ — элемент произвольной ортонормированной на Γ системы $\{\bar{\psi}_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда для $\bar{\psi}(y)$ получим уравнение

$$\int_{\Gamma} K(x, y) \bar{\psi}(y) dS_y = F(x) - \int_{\Gamma} K(x, y) \bar{\psi}_n(y) dS_y = f(x).$$

Известно (см. [29]), что если элементы ортонормированной системы $\{\bar{\psi}_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ ограничены в совокупности, т. е. $\bar{\psi}_n(y) \leq M$, $y \in S$ ($n = 1, 2, \dots$), где M — некоторая постоянная, то коэффициенты Фурье любой суммируемой функции по этой системе стремятся к нулю (теорема Мерсера). Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое N , что при $n \geq N$

$$\max_x |f(x) - F(x)| = \max_x \left| \int_{\Gamma} K(x, y) \bar{\psi}_n(y) dS_y \right| \leq \varepsilon, \quad (1.53)$$

тогда как

$$\max_y |\bar{\psi}(y) - \psi(y)| = \max_y |\bar{\psi}_n(y)| = M.$$

Если в качестве системы $\{\bar{\psi}_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ взять ортонормированную на окружности Γ тригонометрическую систему, то условия теоремы Мерсера будут выполнены; следовательно, выполняется неравенство (1.53), тогда как

$$\max_y |\bar{\psi}(y) - \psi(y)| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Однако в рассматриваемом методе разложения по фундаментальным решениям устойчивость окончательных решений обеспечена. Действительно, в первом способе решение находится из (1.12) путем замены интеграла в правой части кубатурной формулы. Поэтому $\bar{u}(x)$ устойчиво к любым сколь угодно большим (в смысле метрики C) изменениям $\delta[\widehat{\psi}(z)]$ функции $\widehat{\psi}(z)$ при условии малости интеграла

$$\int_{\Gamma_1} \delta[\psi(z)] H(z, x) dS_z.$$

Аналогично во втором способе окончательное решение граничной задачи, получаемое из (1.21), устойчиво к любым сколь угодно большим (в смысле метрики C) изменениям $\delta[v(y)]$ функции

$v(y)$ при условии малости интеграла

$$\int_{\Gamma} \delta [v(y)] K_2(x, y) dS_y.$$

Следует все же подчеркнуть, что, несмотря на устойчивость окончательных решений в этом методе, тот факт, что в процессе решения решается некорректная задача, может привести к обрыву вычислительного процесса (к аварийному останovu машины). Другими словами, для рассматриваемых здесь способов решения граничных задач опасно не то, что решение интегрального уравнения первого рода окажется неустойчивым, а то, что практически невозможно будет его получить на ЭВМ. Поэтому большое значение приобретает метод регуляризации А. Н. Тихонова [148]. Детально эти вопросы здесь не будут рассматриваться. Приведем лишь специальные линейные регуляризующие алгоритмы [28] для тройки $[R, A, E]$, где A — линейный ограниченный оператор из гильбертова пространства R в банахово пространство E :

$$Av = \bar{v}.$$

Рассмотрим регуляризующий алгоритм для задачи нахождения проекции v на пространство, натянутое на первые N элементов ψ_1 , или иначе задачу нахождения такого набора N чисел a_i , который реализует

$$\min_{\langle a_i \rangle_1^N} \left(v - \sum_{i=1}^N a_i \psi_i, v - \sum_{i=1}^N a_i \psi_i \right) = \Delta_N. \quad (1.54)$$

Для коэффициентов a_i получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^N a_i (\psi_i, \psi_j) = (v, \psi_j) = F_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (1.55)$$

или, в матричной форме,

$$Ba = F,$$

где $a = (a_1, \dots, a_N)$ и $F = (F_1, \dots, F_N)$ — искомый и заданный векторы соответственно, B — матрица системы (1.55), очевидно симметричная и положительная (матрица Грама). Но, вообще говоря, система (1.55) вырождена или плохо обусловлена. Поэтому для ее приближенного решения целесообразно применить какие-либо регуляризующие алгоритмы [148].

Пусть $\omega(\alpha, \lambda)$ — функция, заданная при $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ и такая, что

$$\sup_{\lambda} |\omega(\alpha, \lambda) \sqrt{\lambda}| = K_{\alpha} < \infty, \quad (1.56)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda \omega(\alpha, \lambda) = 1.$$

Во втором соотношении сходимость равномерная при $\lambda \geq r$ (r — любое положительное число). Можно образовать (при любом N) матрицу $W(\alpha, B)$ и вектор

$$a^{(\alpha)} = W(\alpha, B)F.$$

Оказывается, что при соответственно выбранных α и N элемент

$$V_{\alpha N} = \sum_{i=1}^N a_i^{(\alpha)} \psi_i = R_{\alpha N} \bar{v} \quad (1.57)$$

будет близок к v .

Семейство операторов $R_{\alpha N}$ образует регуляризующие алгоритмы в смысле А. Н. Тихонова для уравнения (1.19).

Действительно, пусть правая часть v уравнения (1.19) задана с погрешностью δ :

$$\|\bar{v} - \tilde{v}\|_{\mathbb{E}} < \delta,$$

где \tilde{v} — приближенное значение \bar{v} . Обозначим через $a_0 = (a_{10}, \dots, a_{N0})$ нормальное решение [147] системы (1.55) и $a^{(\alpha)} = \omega(\alpha, B)\tilde{v}$. Применяя очевидные неравенства, получим (учитывая (1.20))

$$\begin{aligned} \|v - R_{\alpha N} \tilde{v}\| &= \left\| v - \sum_{i=1}^N a_{0i} \psi_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^N (\tilde{a}_i^{(\alpha)} - a_{i0}) \psi_i \right\| \leq \\ &\leq \sqrt{\Delta_N} + \|A\| \sqrt{N} \left[\sum_{i=1}^N (\tilde{a}_i^{(\alpha)} - a_{i0})^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Из равенств (1.57) получаем

$$\left[\sum_{i=1}^N (\tilde{a}_i^{(\alpha)} - a_{i0})^2 \right]^{1/2} \leq \sqrt{N} K_{\alpha} \delta + \left[\sum_{i=1}^N (a_i^{(\alpha)} - a_{i0})^2 \right]^{1/2},$$

при $\alpha \rightarrow 0$ второе слагаемое в правой части стремится к нулю. Окончательно, объединяя (1.57) и последнее неравенство, приходим к неравенству

$$\|v - R_{\alpha N} \bar{v}\| \leq \sqrt{\Delta_N} + \|A\| N K_{\alpha} \delta + \|A\| \sqrt{N} \left[\sum_{i=1}^N (a_i^{(\alpha)} - a_{i0})^2 \right]^{1/2}. \quad (1.59)$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Взяв N достаточно большим, можем считать, что $\Delta_N \leq \varepsilon^2/4$ (в силу полноты системы $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$). Подбрав при фиксированном N значения для α и δ так, чтобы вторая часть суммы в правой части (1.59) была меньше $\varepsilon/2$, получим окончательно

$$\|v - R_{\alpha N} \bar{v}\| < \varepsilon.$$

Заметим, что вследствие описанной регуляризации приближенное решение уравнения (1.19) с приближенной правой частью

имеет вид

$$R_{\alpha N} \tilde{v} = \sum_{i=1}^N \tilde{a}_i^{(\alpha)} \psi_i$$

и стремится к точному решению v , хотя семейство операторов $R_{\alpha N}$ строится на основе матрицы B системы (1.55). Вообще говоря, поиск минимума в (1.54) на первый взгляд естественнее было бы вести иначе: ортонормировать систему $\{\psi_j\}$ и искать разложение функции v по этой ортонормированной системе. Коэффициенты разложения находятся по простым явным формулам (см. § 1.7). Однако такой способ не приводит в общем случае к регуляризирующим алгоритмам для решения уравнения (1.19), так как процесс ортонормализации не только неустойчив, но, что особенно важно, практически невыполним.

Заметим, что в описанном алгоритме регуляризации остаются свободные параметры и их рациональный выбор — весьма нетривиальная задача. Однако если N заранее фиксировано, то можно различными способами выбрать α , соответствующее заданному δ наилучшим (в определенном смысле) образом. Для некоторых методов регуляризации типа (1.56) это можно сделать машинным путем [148] или, если известно минимальное, отличное от нуля, собственное значение матрицы B , по формулам, приведенным в [28, 148].

§ 1.5. Решение линейных систем с неустойчивой обратной матрицей Грама

В описанных выше способах решения граничных задач методом разложения по неортогональным функциям, так же, как почти во всех методах решения линейных граничных задач, основная вычислительная трудность заключается в решении линейных алгебраических уравнений

$$Ax = F, \quad (1.60)$$

где A — заданная матрица, x и F — соответственно искомый и заданный вектор. Как правило, в рассматриваемых здесь случаях $|A| \neq 0$ и решение системы (1.60) дается формулой $x = A^{-1}F$. Однако если элементы матрицы A получены приближенно, то «вопрос о том, имеет ли матрица A отличный от нуля определитель или нет, лишен смысла» ([155, с. 139]). При решении граничных задач методом разложения по неортогональным функциям мы имеем именно тот случай, когда элементы матрицы A и вектор правых частей получаются приближенно; поэтому в настоящем параграфе мы применим некоторые известные [154] оценки для погрешности и обусловленности матриц для детерминантов Грама с учетом ранее полученной нами оценки (1.50).

Следуя [155], будем называть обратную матрицу A^{-1} устойчивой, если малым изменениям в элементах матрицы A соответствуют малые изменения в элементах обратной матрицы; матрица A будет плохо обусловленной, если соответствующая ей обратная матрица неустойчива. Для устойчивости обратной матрицы во всяком случае необходимо [155], чтобы определитель матрицы был не слишком мал. Из оценки (1.50) следует, что при больших N обратная матрица A^{-1} неустойчива и, следовательно, надо ожидать, что решение системы (1.60) либо невозможно будет получить, либо оно получится с большой погрешностью. Чтобы оценить эту погрешность, нам необходимо получить так называемые числа обусловленности, которые, со своей стороны, требуют оценок собственных значений матрицы A . Если A вырождается при увеличении N , то она должна иметь по крайней мере одно собственное значение, стремящееся к нулю, так как произведения собственных значений равно определителю матрицы. Ниже будут получены оценки для наименьшего λ_{\min} и наибольшего λ_{\max} собственных значений матрицы A , исходя из оценки (1.50).

Сначала получим оценку сверху λ_{\min} , предположив, что $\lambda_i = \lambda$ ($i = 1, \dots, N$). Учитывая равенство

$$\prod_{i=1}^N \lambda_i = |A| \quad (1.61)$$

и оценку (1.50) для $|A|$, получаем

$$\lambda = \lambda_{\max} = \lambda_{\min} = \sqrt[N]{|A|} \leq \bar{c}/N. \quad (1.62)$$

Оценка (1.62) для λ_{\min} слишком оптимистична. Другой крайний случай (случай наиболее пессимистичной оценки для λ_{\min}) получим, если будем предполагать, что для всех λ_i ($i = 2, \dots, N$) достигается оценка Гирша [121]

$$\lambda_i \leq NM, \quad i = 2, \dots, N, \quad (1.63)$$

где M — максимум модуля элементов матрицы A . Если система функций $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ нормирована, то $M = 1$ и из (1.63) (в случае равенства) следует

$$\lambda_i = N, \quad i = 2, \dots, N. \quad (1.64)$$

Подставляя эти равенства в (1.61), получаем

$$\prod_{i=1}^N \lambda_i = \lambda_{\min} \prod_{i=2}^N \lambda_i = \lambda_{\min} N^{N-1} \leq (\bar{c}/N)^N,$$

или

$$\lambda_{\min} \leq \bar{c}^N N^{-2N+1}. \quad (1.65)$$

4) A в нашем случае совпадает с матрицей Грама системы $\{\psi_k\}_{k=1}^N$.

Если оценку (1.62) следует считать слишком «оптимистичной», то оценка (1.65) слишком «пессимистична». Следует заметить, что известное равенство

$$\text{Sp } A = \sum_{i=1}^N a_{ii} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \quad (1.66)$$

не выполняется при достаточно больших N ни для спектра (1.62)

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = \bar{c} < \sum_{i=1}^N a_{ii} = N \quad (1.67)$$

(предполагаем нормированность функции $l\psi_i$), ни для спектра (1.64), (1.65)

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = (N-1)N + \bar{c}^N N^{-2N+1} > \sum_{i=1}^N a_{ii} = N. \quad (1.68)$$

Из неравенства (1.67) следует, что часть собственных значений имеет величину большую, чем дает асимптотическое неравенство (1.62) и, следовательно, минимальное собственное значение меньше, чем доставляемое оценкой (1.62). Аналогично из неравенства (1.68) следует, что некоторые собственные значения имеют величину меньшую, чем (1.64) и, следовательно, при выполнении равенства в неравенстве (1.50) получаем $\lambda_{\min} \geq \bar{c}^N N^{-2N+1}$. Заметим, что при анализе спектра собственных значений с помощью равенств типа (1.66) имеет смысл говорить, что (1.66) не выполняется лишь в том случае, если для правой и левой частей получаются разные асимптотики при $N \rightarrow \infty$.

Для того чтобы наряду с (1.66) для проверки спектра собственных значений воспользоваться неравенством Шура [121]

$$\sum_{i=1}^N |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{ij}|^2, \quad (1.69)$$

покажем, что для эрмитовых матриц неравенство (1.69) превращается в строгое равенство

$$\sum_{i=1}^N |\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{ij}|^2. \quad (1.70)$$

Действительно, матрица A^2 имеет в качестве характеристических чисел λ_i^2 ($i=1, \dots, N$), и в силу равенства (1.66) можно написать

$$\text{Sp } A^2 = \sum_{i=1}^N \lambda_i^2.$$

Непосредственное вычисление дает

$$\text{Sp } A^2 = \sum_{i=1}^N a_{ii}^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{ij}|^2.$$

Таким образом, равенство (1.70) доказано.

Обозначим через $a_{\text{ср}}$ среднее значение квадратов модулей элементов матрицы Грама фундаментальных решений:

$$a_{\text{ср}} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{ij}|^2.$$

При рассмотрении конкретных фундаментальных решений мы увидим, что

$$a_{\text{ср}} \geq \bar{a}, \quad (1.71)$$

где \bar{a} — не зависящая от N постоянная.

Анализируя спектры собственных значений (1.62) и (1.64), (1.65), с помощью равенства (1.70) получаем соответственно асимптотические неравенства

$$\bar{c}^2/N < N^2 a_{\text{ср}}, \quad N^3 - N^2 + \bar{c}^N N^{-2N+1} > N^2 \bar{a},$$

что также указывает на необоснованную оптимистичность и пессимистичность оценок (1.62) и (1.65).

Далее получим более правдоподобный спектр собственных значений для матрицы A . Покажем, что для матрицы A максимальное собственное значение имеет порядок оценки Гирша, т. е. справедлива оценка

$$\lambda_{\text{max}} \geq \bar{a}N.$$

Действительно, по определению [155]

$$\lambda_{\text{max}} = \max_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}.$$

Возьмем в качестве x вектор $x = (1, 1, \dots, 1)$. Тогда

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ij} x_i x_j / \sum_{i=1}^N x_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \geq N \bar{a}.$$

Будем предполагать, что A имеет попарно различные собственные значения: $\lambda_{\text{max}} = \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N = \lambda_{\text{min}}$ и

$$\lambda_k = \frac{N \bar{a}}{b^{k-1}}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.72)$$

где $b > 1$ — вещественное число. Из равенства (1.61) получаем

$$\prod_{k=1}^N \lambda_k = (N \bar{a})^N \prod_{k=1}^N \frac{1}{b^{k-1}} = (N \bar{a})^N b^{-\sum_{k=1}^{N-1} k} = (N \bar{a})^N b^{-\frac{N^2}{2}} = |A| = \left(\frac{\bar{c}}{N}\right)^N, \quad (1.73)$$

$$b = (\bar{a})^{2/N} (\bar{c})^{-2/N} N^{4/N}. \quad (1.74)$$

При выводе (1.73) мы предположили, что неравенство (1.50) превращается в равенство. Подставляя (1.74) в (1.72), находим

$$\lambda_N = \lambda_{\min} = a - \frac{2-N}{N} \frac{2(N-1)}{c} \frac{1}{N} - \frac{4(N-1)}{N} + 1,$$

или, при достаточно больших N ,

$$\lambda_N \approx \frac{\bar{c}^{-2}}{a} N^{-3}. \tag{1.75}$$

Легко проверить непосредственным вычислением, что для спектра (1.72) справедливы неравенства (при достаточно больших N)

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i > \sum_{i=1}^N a_{ii}, \quad \sum_{i=1}^N (\lambda_i)^2 > \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_{ij})^2,$$

так что спектр (1.72) также следует рассматривать как оптимистичный в смысле равенств (1.66) и (1.70). При этом числа обусловленности P и H для матрицы B со спектром собственных значений (1.72) получаются равными [155]

$$\mu(A) = \frac{\bar{a}^2}{c^2} N^4. \tag{1.76}$$

Поставим следующую задачу. С какой точностью ε надо вычислить скалярные произведения для элементов матрицы A , имеющей спектр собственных значений (1.72), чтобы возмущенная матрица также была неособенной? Для этого воспользуемся следующим предложением Островского [121].

Пусть $A = [a_{ij}]$ — неособенная квадратная матрица и пусть к a_{ij} прибавлены малые величины ε_{ij} , образующие квадратную матрицу $E = (\varepsilon_{ij})$ того же порядка. Для того чтобы матрица $A' = A + E$ была неособенной, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varepsilon_{ij}^2 < \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}^2 \right)^{-1}, \tag{1.77}$$

где α_{ij} — элементы матрицы A^{-1} , обратной к A . Применяя равенства (1.70), (1.72) для матрицы A^{-1} и учитывая, что собственные значения матрицы A^{-1} равны λ_k^{-1} , где λ_k — собственные значения симметричной матрицы A , получаем

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}^2 = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\lambda_k} \right)^2 = N^{-2} a^{-2} \frac{b^{2N} - 1}{b^2 - 1},$$

или, учитывая равенство (1.74), для достаточно больших N имеем

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}^2 \approx \frac{\bar{a}^2}{c^4} \frac{N^6}{N^{8/N} - 1}.$$

Учитывая в последнем равенстве первые два члена в правой части разложения

$$N^{8/N} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(8 \ln N)^k}{N^{k/k!}},$$

окончательно получаем

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}^2 \approx \frac{\bar{a}^2}{8\bar{c}^4} \frac{N^7}{\ln N}. \quad (1.78)$$

Подставляя равенство (1.78) в (1.77) и учитывая, что $\varepsilon_{ij} \equiv \varepsilon$ ($i, j = 1, \dots, N$), получаем для ε оценку

$$\varepsilon < \frac{2\sqrt{2c^2}}{\bar{a}} \frac{\sqrt{\ln N}}{9/2}. \quad (1.79)$$

Из (1.79) следует, что при $\bar{a} = \bar{c} = 1$ и $N = 123$ (такое количество членов разложения может быть реализовано в программе [136] для решения пространственных граничных задач теории упругости) интегралы в скалярных произведениях для элементов матрицы A должны быть вычислены с погрешностью $\varepsilon < 10^{-9}$, что сильно затягивает процесс вычисления, а для некоторых машин, имеющих $t < 29$ двоичных разрядов для мантиссы числа, такая точность вообще не выполнима без программного увеличения разрядности, что со своей стороны также сильно увеличивает время вычисления.

Пусть элементы b_k правой части линейной системы

$$Aa = b, \quad (1.80)$$

где $a = (a_1, \dots, a_N)$ — искомые коэффициенты разложения вычислены с точностью ε_{bk} . Тогда вместо системы (1.80) решаем приближенную систему

$$A(a + \varepsilon_a) = b + \varepsilon_b$$

и для оценки погрешности ε_a имеем

$$\|\varepsilon_a\| \leq \|A^{-1}\| \|\varepsilon_b\|, \quad (1.81)$$

или, с учетом согласованных норм [155],

$$\sum_{k=1}^N \varepsilon_{ak}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{bk}^2 = \frac{\bar{a}}{\bar{c}^2} N^3 \sum_{k=1}^N \varepsilon_{bk}^2.$$

При $\bar{a} = \bar{c} = 1$, $\varepsilon_{bk} = \bar{\varepsilon}_b$, $\varepsilon_{ak} = \bar{\varepsilon}_a$ получаем

$$\bar{\varepsilon}_a \leq N^{3/2} \bar{\varepsilon}_b. \quad (1.82)$$

В случае относительной ошибки, будет [154] выполняться неравенство

$$\frac{\|\varepsilon_a\|}{\|a\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\|, \quad \frac{\|\varepsilon_b\|}{\|b_b\|} \leq \frac{\bar{a}^2}{c^2} N^4 \frac{\|\varepsilon_b\|}{\|b\|}. \quad (1.83)$$

При $\bar{a} = \bar{c} = 1$, $N = 100$ и $\|\varepsilon_b\|/\|b\| = 10^{-8}$ из (1.83) получаем

$$\frac{\|\varepsilon_a\|}{\|a\|} \leq 1; \quad (1.84)$$

при этом всегда будут существовать такие ε_b и b , что в (1.84) будет достигаться равенство [154, с. 179]. Таким образом, если отношение норм погрешности вычисления правой части системы (1.34) и точного значения правой части будет равно 10^{-8} , то погрешность вычисления коэффициентов разложения может достигать 100 %.

Пусть элементы матрицы A (скалярные произведения) вычисляются с погрешностью $F = \{\varepsilon_{ij}\}$. Тогда вместо системы (1.80) решаем систему

$$(A + F)(a + \varepsilon_a) = b,$$

при условии $\|A^{-1}\| \|F\| < 1$ получаем оценку для погрешности ε_a [154]:

$$\|\varepsilon_a\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \|F\| \|a\|}{1 - \|A^{-1}\| \|F\|};$$

при

$$\|F\| = 10^{-k} \ll \frac{\bar{a}}{c^2} N^3$$

имеем

$$\|\varepsilon_a\| \leq \frac{\bar{a}}{c^2} N^3 10^{-k} \|a\|. \quad (1.85)$$

Для вычисления относительной ошибки надо иметь оценку $\|\varepsilon_a\| \|a\|^{-1}$ через величину $\|F\| \|A\|^{-1}$ [154]:

$$\frac{\|\varepsilon_a\|}{\|a\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|F\|}{\|A\|} \left(1 - \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|F\|}{\|A\|}\right)^{-1}. \quad (1.86)$$

Для того чтобы правая часть (1.86) была мала, необходимо, чтобы

$$\frac{\|F\|}{\|A\|} < \|A\| \|A^{-1}\| = \frac{\bar{a}^2}{c^2} N^4.$$

В приведенных оценках мы предполагали, что все вычисления, необходимые в процессе решения систем, производились с бесконечным числом разрядов. Для ЭВМ с плавающей запятой, имеющей t двоичных разрядов для мантиссы числа, для погреш-

ности решения системы N -го порядка имеем оценку [154]

$$\frac{\|\varepsilon_a\|}{\|a\|} \leq \mu(A) \frac{1 + \sqrt{N}}{2^t - \sqrt{N} \mu(A)} = \frac{\bar{a}^2 N^{9/2} + N^4}{\bar{c}^2 2^t - \bar{a}^2 N^{9/2} / \bar{c}^2}.$$

При $\varepsilon_{aj} = 10^{-k} a_{ij}$, $\bar{a} = \bar{c} = 1$ получаем следующее соотношение:

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_{ai}^2 / \sum_{i=1}^N a_i^2 = 10^{-2k} \leq 2^{-t} N^{9/2},$$

или

$$2^t \leq 2^{6,6k} N^{9/2}. \quad (1.87)$$

При $N \approx 100$, $k = 2$ (ε_{ai} равно одному проценту от a_i) для необходимого числа разрядов получаем оценку

$$t \geq 44.$$

Это значит, что если ЭВМ содержит меньше чем 44 двоичных разрядов для мантиссы числа, то при решении на ней системы (1.80) при $N = 100$ погрешность решения может превосходить 1 %.

Регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова предполагает, что вместо решения системы (1.80) минимизируется функционал

$$M_\alpha = \|Aa - b\|^2 + \alpha \|a\|^2, \quad (1.88)$$

где α — параметр регуляризации. В зависимости от принятой нормы для α различают слабую регуляризацию, сильную и регуляризацию n -го порядка гладкости. На практике вместо системы (1.80) решают уравнение Эйлера для функционала (1.88):

$$\alpha a + A^* A a = A^* b, \quad (1.89)$$

где A^* — оператор, сопряженный с A . Таким образом, при регуляризации приходится вычислять произведение матриц $A^* A$ и произведение $A^* b$ матрицы на вектор. При проведении этих операций на ЭВМ с плавающей запятой с t -разрядными двоичными числами их приближенные значения могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} (A^* A)_{\text{пр}} &= A^* A + F, \\ (A^* b)_{\text{пр}} &= A^* b + \bar{F}, \end{aligned}$$

где $(A^* A)_{\text{пр}}$ и $(A^* b)_{\text{пр}}$ — приближенные значения $A^* A$ и $A^* b$ соответственно, а для матрицы F и вектора \bar{F} погрешностей справедливы оценки [154]

$$\begin{aligned} \|F\| &\leq N^4 2^{-t} \|A^*\| \|A\| \leq N^4 2^{-t} \bar{a}^2, \\ \|\bar{F}\| &= \sum_{i=1}^N \bar{F}_i^2 \leq \sum_{i=1}^N N 2^{-t} \|A_i\| \|b\| \leq N^4 2^{-t} b_{\max}^2 a_{\max}^2; \end{aligned} \quad (1.90)$$

A_i — i -я строка матрицы A ; b_{\max} — максимальная компонента вектора b ; a_{\max} — максимальный элемент матрицы A . Оценки

(1.90) показывают, что при переходе от матрицы A к матрице A^*A мы допускаем значительные погрешности. Учитывая при этом, что детерминант матрицы A^*A будет уже иметь порядок N^{-2N} , становится ясным, что практически A^*A будет вырожденной матрицей.

Это обстоятельство побудило воспользоваться при решении плохо обусловленных систем следующим итерационным процессом для решения системы (1.80):

$$(A + A_1)a^n = b + A_1a^{n-1}, \quad a_0 = 0, \quad (1.91)$$

где A_1 — диагональная матрица, элементы которой укрупняют диагональные элементы матрицы A , а a^n — n -е — приближенные решения системы (1.80). Во многих случаях при удачном выборе диагональной матрицы A_1 итерационный процесс (1.91) давал удовлетворительные результаты. Аналогично решались системы (1.80), когда из-за каких-либо (физических) соображений были известны приближенные значения коэффициентов разложения

$$(A + A_1)a = b + A_1\bar{a}, \quad (1.92)$$

где \bar{a} — вектор приближенных значений коэффициентов разложения. В том случае, когда A — плохо обусловленная матрица, но с отличным от нуля детерминантом, система (1.92) дает устойчивое решение при $\alpha \leq \alpha$, где α — модуль диагонального элемента матрицы A_1 , α — параметр регуляризации, участвующий в системе (1.89). Ясно, что при этом предполагается положительная определенность матрицы A . В противном случае может оказаться, что увеличение диагональных членов не только ухудшает обусловленность матрицы A , но может привести к вырождению матрицы A . Действительно, если λ_i — собственные значения матрицы A , то $(\lambda_i + \alpha)$ будут собственными значениями матрицы $(A + \alpha E)$, где E — единичная матрица, а $\alpha > 0$. Следовательно, если некоторые λ_i отрицательные, то модуль числа $(\lambda_i + \alpha)$ может оказаться равным нулю.

Формула (1.92) при $\bar{a} = 0$ соответствует замене уравнения близким ему (см. [148], гл. I, § 5).

§ 1.6. Интегрированные фундаментальные решения

Из предыдущих параграфов ясно, что если m -мерные вектор-функции $l\psi_k$ выбраны неудачно в n -мерной области G и, следовательно, число N этих функций, необходимых для достижения удовлетворительной точности, достаточно велико, то при решении системы (1.80) возникают значительные вычислительные трудности, связанные с малостью детерминанта соответствующих матриц.

Пусть

$$\min_{a_k} \left\| \psi(y) - \sum_{k=1}^N a_k l\psi_k(y) \right\| \leq c \left(\frac{N}{m^m} \right)^{-r/n}, \quad (1.93)$$

где c — не зависящая от N постоянная. Будем говорить, что система функций $\{l\psi_k(y)\}$ выбрана для функции ψ неудачно при $r < 1$, удовлетворительно при $r = 1$, хорошо при $r = 2$ и удачно при $r \geq 3$. Естественно стремиться при решении граничных задач удачно выбрать систему функций $\{l\psi_k(y)\}$, ибо слепое увеличение их числа N , как правило, не приводит к желаемым результатам как из-за малости соответствующего детерминанта Грама, так и из-за конечности числа разрядов ЭВМ, на которой решается задача. Однако удачный выбор системы $\{l\psi_k(y)\}$ при решении граничных задач — довольно сложная задача, требующая прежде всего глубокого проникновения в реальную задачу, которая сведена к граничной; кроме того, для граничных задач (1.1), (1.2) существует не очень много таких систем, которые удовлетворяли бы условиям, перечисленным в § 1.1.

В настоящем параграфе мы укажем новые системы функций $\{l\psi_k(y)\}$, которые могут оказаться для многих граничных задач более эффективными, чем система фундаментальных решений. Предварительно приведем соображения, почему система фундаментальных решений для некоторых граничных задач выбрана неудачно (в чем мы убедились при решении задач теории упругости с помощью универсальных программ [136]). Для этого придется рассмотреть физический смысл фундаментальных решений. Математически фундаментальное решение определяется следующим образом [69]. Пусть задан эллиптический дифференциальный оператор вида

$$Lu = \sum_{k=0}^m \sum_{i_1, \dots, i_k=1, \dots, n} A_{i_1, \dots, i_k}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_1 \dots \partial x_{i_k}}.$$

Функция $K(x, y) = K(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ называется *фундаментальным решением* оператора L , если для любой достаточно регулярной функции $f(x)$, которая обращается в нуль вне ограниченного множества,

$$L \left[\int K(x, y) f(y) dy \right] = f(x), \quad x, y \in \mathbf{R}^n. \quad (1.94)$$

В операторной записи (1.94) имеет вид

$$LK(x, y) = \delta(x - y),$$

где $\delta(x - y)$ — функция Дирака. Однако кроме такого формального определения, во многих случаях фундаментальное решение имеет вполне определенный физический смысл. Для конкретности в дальнейших рассуждениях этого параграфа мы будем рас-

сма­тривать граничную задачу для систем дифференциальных уравнений пространственной теории упругости и соответствующие фундаментальные решения $H(x, y)$. Пусть трехмерное евклидово пространство \mathbf{R}^3 заполнено телом с коэффициентами Ламе λ, μ и в точке x действует сосредоточенная сила в направлении оси Ox_i ($i = 1, 2, 3$). Тогда смещение любой точки $y \neq x$ описывается вектор-функцией $H_i(x, y)$ — фундаментальным решением системы однородных дифференциальных уравнений теории упругости. Пусть теперь с помощью первого способа решения граничных задач методом разложения по фундаментальным решениям решается следующая смешанная граничная задача.

Пусть на одной части поверхности $\Gamma^{(1)}$ заданы напряжения, а другая часть поверхности $\Gamma^{(2)}$ жестко закреплена, т. е. вектор смещения на $\Gamma^{(2)}$ равен нулю (в такой постановке решалась задача расчета статических напряжений в теле высотной арочной плотины Ингури-ГЭС). Если вектор напряжения, заданный на $\Gamma^{(1)}$, — достаточно гладкая функция, то 20—30 фундаментальных решений дают возможность достаточно хорошо его аппроксимировать. Но эти фундаментальные функции в силу их физической сущности не могут быть равны нулю на $\Gamma^{(2)}$ и поэтому нужны новые фундаментальные решения с точками приложения x_k вблизи точек $\Gamma^{(2)}$, которые сняли бы смещения у точек $\Gamma^{(2)}$. Однако так как каждая точка в $\Gamma^{(2)}$ жестко закреплена, то и число точек x_k следует взять достаточно большим. При этом возникает такая ситуация, что число точек x_k вблизи $\Gamma^{(2)}$ необходимо взять достаточно большим, хотя у всех соответствующих фундаментальных решений коэффициенты разложения a_k будут приблизительно равны. Поэтому целесообразно было бы в нашем случае разложение граничной функции производить не по фундаментальным решениям $H_i(x_k, y)$, а по группам фундаментальных

решений $\sum_{k=n_1}^{n_2} H_i(x_k, y)$. Такая замена координатной функции в принципе легко осуществима; однако учитывая, что количество функций в этих группах может быть значительным и что выражение для $H_i(x_k, y)$ — довольно громоздкое, легко понять, как сильно затянется при этом время вычислений. Поэтому естественно попытаться вместо суммы $\sum_k H_i(x_k, y)$ использовать непрерывное распределение точек приложения силы, т. е. интеграл

$$\int_{\Gamma_1^{(1)}} H_i(x, y) dS_x, \quad (1.95)$$

где $\Gamma_1^{(1)}$ — некоторая поверхность вне области G (здесь предполагается, что в каждой точке x поверхности $\Gamma_1^{(1)}$ действует одна и та же сила). В интегрированном фундаментальном решении

(1.95) всем точкам x (образующим фундаментальные решения) приписываются одни и те же веса, что на практике также может оказаться неэффективным. Поэтому дальнейшее обобщение выражения (1.95) получим, если в качестве функций возьмем

$$\psi_k(y) = \int_{\Gamma_1^{(j)}} P_{sj}(x) H_r(x, y) dS_x, \quad 1 \leq r \leq m, \quad (1.96)$$

где $\Gamma_1^{(j)}$ — поверхность вне области G ($1 \leq j \leq \bar{n}$) (рис. 2), $P_{sj}(x)$ — ортонормированные на $\Gamma_1^{(j)}$ полиномы s -го порядка ($0 \leq s \leq n$), т. е.

$$\int_{\Gamma_1^{(j)}} P_{s_1 j}(x) P_{s_2 j}(x) dS_x = \begin{cases} 0 & \text{при } s_1 \neq s_2, \\ 1 & \text{при } s_1 = s_2, \end{cases}$$

индекс k определяется ниже (см. формулы (1.98), (1.99)).

Компоненты вектор-функций (1.96) определяются соотношением

$$\psi_{ki}(y) = \int_{\Gamma_1^{(j)}} P_{sj}(x) H_{ri}(x, y) dS_x \quad (1.97)$$

где $\psi_{ki}(y)$ — i -я компонента вектор-функции $\psi_k(y)$ ($1 \leq i \leq m$). Формула (1.96) дает возможность получить счетное количество вектор-функций следующими двумя способами: 1) зафиксировать $n < \infty$, а \bar{n} устремить к бесконечности, или 2) зафиксировать $\bar{n} < \infty$, а n устремить к бесконечности. В первом случае связь между индексами в формуле (1.96) осуществляется с помощью формулы

$$k = (j - 1)nm + (r - 1)n + s, \quad (1.98)$$

а во втором случае — с помощью формулы

$$k = s\bar{n}m + (r - 1)\bar{n} + j. \quad (1.99)$$

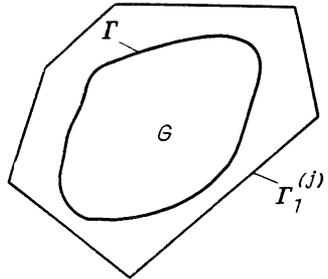


Рис. 2

Формула (1.98) предполагает, что номера функций $\psi_k(y)$ определяются в следующей последовательности:

$$k = 1 \quad (j = 1, r = 1, s = 1),$$

$$k = 2 \quad (j = 1, r = 1, s = 2), \dots, k = n \quad (j = 1, r = 1, s = n),$$

$$k = n + 1 \quad (j = 1, r = 2, s = 1), \dots,$$

$$k = 2n \quad (j = 1, r = 2, s = n), \dots, k = mn \quad (j = 1, r = m, s = n),$$

$$k = 2n + 1 \quad (j = 2, r = 1, s = 1), \dots$$

Формула (1.99) предполагает, что номера функции $\psi_k(y)$ определяются в следующей последовательности:

$$k=1 \quad (s=1, r=1, j=1),$$

$$k=2 \quad (s=1, r=1, j=2), \dots, k=\bar{n} \quad (s=1, r=1, j=\bar{n})$$

$$k=\bar{n}+1 \quad (s=1, r=2, j=1), \dots, k=2\bar{n} \quad (s=1, r=2, j=\bar{n}), \dots,$$

$$k=m\bar{n} \quad (s=1, r=m, j=\bar{n}), k=m\bar{n}+1 \quad (s=2, r=1, j=1), \dots$$

В случае формулы (1.98), когда $\bar{n} \rightarrow \infty$, поверхность $\Gamma_1^{(j)}$ превращается в точку (рис. 2); при этом функции ψ_k , определяемые из (1.96), для $s=0$ превращаются в обычные фундаментальные решения. Значительно больший интерес представляет счетная система функций при фиксированном \bar{n} и $n \rightarrow \infty$.

Пусть поверхности $\Gamma_1^{(j)}$ в совокупности определяют замкнутую поверхность Γ_1 , целиком охватывающую область G (рис. 2), и система $\{P_{sj}(x)\}_{s=0}^{\infty}$ — произвольная полная система функций на $\Gamma_1^{(j)}$. Тогда, если полна на Γ система функций $\{H_r(x_k, y)\}_{r=1, k=1}^m, \infty$, где точки x_k расположены всюду плотно на Γ_1 , то полна и система $\{\psi_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$, где номер k функции ψ определяется из (1.99), а сами функции $\psi_k(y)$ — из (1.96).

В самом деле, пусть $\alpha(y)$ — произвольная функция ортогональная на Γ всем функциям $\psi_k(y)$

$$\int_{\Gamma} \alpha(y) \psi_k(y) dS_y = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \alpha(y) \psi_k(y) dS_y &= \int_{\Gamma} \alpha(y) \left[\int_{\Gamma_1^{(j)}} P_{sj}(x) H_r(x, y) dS_x \right] dS_y = \\ &= \int_{\Gamma_1^{(j)}} P_{sj}(x) \left[\int_{\Gamma} \alpha(y) H_r(x, y) dS_y \right] dS_x = 0. \end{aligned}$$

В силу полноты $\{P_{sj}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ на $\Gamma_1^{(j)}$ для любой точки $\Gamma_1^{(j)}$, а значит и Γ_1 , получаем

$$\int_{\Gamma} \alpha(y) H_r(x, y) dS_y = 0,$$

что, со своей стороны, в силу полноты $\{H_r(x_k, y)\}_{r=1, k=1}^m, \infty$ дает $\alpha(y) = 0$. Таким образом, если произвольная функция $\alpha(y)$ ортогональна всем функциям (1.96), то она тождественно равна нулю. При этом от системы $\{P_{sj}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ требовалась лишь полнота на $\Gamma_1^{(j)}$. В качестве $P_{sj}(x)$ можно взять тригонометрические или алгебраические полиномы и т. п. В формуле (1.96) ортонормированная система полиномов была выбрана по следующим

соображениям. Во-первых, ортогональность значительно увеличивает угол между функциями (1.96), что имеет важное значение при приближенных вычислениях. Во-вторых, первые три степени полиномов (именно они и применялись в данном случае при решении граничных задач) имеют простой наглядный смысл, что сильно облегчает выбор поверхностей $\Gamma_1^{(j)}$. В качестве последних выбирались отрезки (для плоского случая) или же параллелограммы (в пространственном случае). Такой выбор был обусловлен стремлением получить интегралы (1.96) в элементарных функциях, хотя не исключено, что для некоторых граничных задач целесообразнее (даже с точки зрения необходимого машинного времени решения граничных задач) пользоваться функциями (1.96) для $\Gamma_1^{(j)}$ с более сложной геометрией.

Приведем явные выражения для полиномов P_{sj} в плоском ($\Gamma_1^{(j)}$ в этом случае — отрезки прямой) и в пространственном ($\Gamma_1^{(j)}$ — параллелограммы) случаях.

Обозначим через x_1^j, x_2^j и x_1^{-j}, x_2^{-j} координаты начальной и конечной точек отрезка $\Gamma_1^{(j)}$, уравнение которого запишем в параметрическом виде ($0 \leq t \leq 1$)

$$x_1 = a_{jt} + c_j, \quad x_2 = b_{jt} + d_j, \quad (1.100)$$

где

$$a_j = \bar{x}_1^j - x_1^j, \quad b_j = \bar{x}_2^j - x_2^j, \quad c_j = x_1^j, \quad d_j = x_2^j.$$

Учитывая формулы (1.100), получаем, что интегралы в правой части (1.96) с точностью до постоянного, отличного от нуля множителя, можно заменить интегралами от 0 до 1 по параметру t . Что касается полиномов $P_{sj}(x)$, то их вид на всех $\Gamma_1^{(j)}$ будет один и тот же — они будут ортогональными на отрезке $[0, 1]$ полиномами по параметру t

$$P_0 = 1, \quad P_1 = 2\sqrt{3}t - \sqrt{3}, \quad P_2 = 6\sqrt{5}t^2 - 6\sqrt{5}t + \sqrt{5}. \quad (1.101)$$

В пространственном случае координаты вершин параллелограмма $\Gamma_1^{(j)}$ обозначим следующим образом:

$$(x_1^j, x_2^j, x_3^j), \quad (\bar{x}_1^j, \bar{x}_2^j, \bar{x}_3^j), \quad (\bar{x}_1^j + \alpha_1^j, \bar{x}_2^j + \alpha_2^j, \bar{x}_3^j + \alpha_3^j), \\ (x_1^j + \alpha_1^j, x_2^j + \alpha_2^j, x_3^j + \alpha_3^j).$$

Уравнение $\Gamma_1^{(j)}$ запишем в параметрическом виде:

$$x_1 = (\bar{x}_1^j - x_1^j)t + \alpha_1^j \bar{t} + x_1^j, \\ x_2 = (\bar{x}_2^j - x_2^j)t + \alpha_2^j \bar{t} + x_2^j, \\ x_3 = (\bar{x}_3^j - x_3^j)t + \alpha_3^j \bar{t} + x_3^j, \quad (1.102)$$

где параметры t и \bar{t} меняются в пределах $0 \leq t, \bar{t} \leq 1$. Формулы (1.102) дают возможность проводить интегрирование в пра-

вой части формулы (1.96) в квадрате $[0 \leq t, \bar{t} \leq 1]$, а в качестве полиномов P_{sj} брать на всех параллелограммах $\Gamma_1^{(j)}$ ортогональные в квадрате $[0 \leq t, \bar{t} \leq 1]$ полиномы

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, & P_1 &= 2\sqrt{3}t - \sqrt{3}, & P_2 &= 2\sqrt{3}\bar{t} - \sqrt{3}, \\ P_3 &= 6\sqrt{5}t^2 - 6\sqrt{5}t + \sqrt{5}, & P_4 &= 6\sqrt{5}\bar{t}^2 - 6\sqrt{5}\bar{t} + \sqrt{5}, & (1.103) \\ P_5 &= 12t\bar{t} - 6t - 6\bar{t} + 3. \end{aligned}$$

Ясно, что функции $\psi_\alpha(y)$, определяемые из формулы (1.96), при $y \in \Gamma_1^{(j)}$ удовлетворяют тому же дифференциальному уравнению в частных производных, что и фундаментальное решение $H_r(x, y)$ при фиксированной точке x ($x \neq y$). Поэтому они могут быть применены при первом способе решения граничных задач с помощью неортогональных функций, описанном в § 1.1. Применение функции (1.96) в этом методе также может быть трактовано как решение интегрального уравнения первого рода (1.13). Однако в данном случае ищутся не значения искомой функции $\psi(z)$ в отдельных точках контура Γ_1 , а коэффициенты разложения искомой функции $\widehat{\psi}(z)$ по функциям P_{sj} . Удачный выбор параметрических семейств функции P_{sj} дает возможность использовать их малое количество и тем самым устранить трудности, связанные с плохой обусловленностью. Ввиду того, что в качестве функций P_{sj} выбираются полиномы, в нашем распоряжении остается выбор поверхностей (контуров) $\Gamma_1^{(j)}$. Именно их удачный выбор определяет точность решения с помощью функции (1.96). При втором способе решения граничных задач, как это уже было сказано в § 1.3, могут быть применены любые полные системы функций, а следовательно, и функции (1.96).

§ 1.7. Орто- и биортонормализация и решение систем линейных уравнений

Для получения коэффициентов разложения как при первом, так и при втором способе получали систему линейных алгебраических уравнений (1.34) или (1.36). Однако ясно, что для получения коэффициентов разложения можно предварительно орто- или биортонормировать соответствующие системы функций или системы функций и системы функционалов. Как мы увидим ниже, предварительная ортонормализация является одним из методов получения обратной матрицы системы (1.34), (1.36), и представляется нецелесообразным сопоставлять метод предварительной ортонормализации и решение соответствующей системы⁵⁾. Более того, как мы сейчас покажем, схемы счета различ-

⁵⁾ В работе: Михлин С. Г. Об устойчивости метода Рунге // ДАН СССР.— 1960.— Т. 135, № 1, указывается, что предварительная ортонормализация дает значительно более устойчивую схему счета, чем непосред-

ных способов ортонормализации обладают различной устойчивостью и могут дать значительно отличающиеся результаты.

Пусть имеется линейно независимая система функций $\{\omega_k(y)\}$ и требуется построить ортонормированную систему $\{\varphi_i(y)\}$, где

$$\varphi_i(y) = \sum_{k=1}^i A_{ik} \omega_k(y). \quad (1.104)$$

Для получения $\{\varphi_i(y)\}$ можно воспользоваться следующими двумя способами.

I. Систему $\varphi_i(y)$ построим последовательно (см., например, [77]). Так как система $\{\omega_i(y)\}$ линейно независима, то

$$\int_{\Gamma} \int \omega_i^2(y) dS > 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.105)$$

Поэтому положим

$$\varphi_1(y) = \frac{\omega_1(y)}{\sqrt{\int_{\Gamma} \int \omega_1^2 dS}}.$$

Ясно, что элемент $\varphi_1(y)$ нормирован. Построим элемент $\bar{\varphi}_2(y) = \omega_2(y) + \alpha_{21} \varphi_1(y)$, ортогональный к φ_1 :

$$\int_{\Gamma} \int \varphi_1 \bar{\varphi}_2 dS = \int_{\Gamma} \int \varphi_1 \omega_2 dS + \alpha_{21} = 0.$$

Для α_{21} получаем равенство

$$\alpha_{21} = - \int_{\Gamma} \int \varphi_1 \omega_2 dS.$$

Из линейной независимости системы $\{\omega_i(y)\}$ следует, что

$$\int_{\Gamma} \int \bar{\varphi}_2^2 dS > 0.$$

Поэтому положим

$$\varphi_2 = \frac{\bar{\varphi}_2}{\sqrt{\int_{\Gamma} \int \bar{\varphi}_2^2 dS}},$$

что обеспечивает как нормированность элемента φ_2 , так и ортогональность φ_1 и φ_2 .

венное решение системы Ритца. При этом автор предполагает, что при решении системы Ритца производится деление на определитель системы Ритца. По-видимому, имеются в виду формулы Крамера, которыми на практике не пользуются, особенно для симметричных матриц.

Пусть построены ортонормированные элементы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$. Следующий элемент будем искать в виде

$$\varphi_{k+1} = \frac{\bar{\varphi}_{k+1}}{\sqrt{\int_{\Gamma} \int \bar{\varphi}_{k+1}^2 dS}}, \tag{1.106}$$

где

$$\bar{\varphi}_{k+1} = \omega_{k+1} + \alpha_{k+1,1}\varphi_1 + \dots + \alpha_{k+1,k}\varphi_k. \tag{1.107}$$

Коэффициенты $\alpha_{k+1,i}$ ($i = 1, \dots, k$) определяются из условия ортогональности

$$\int_{\Gamma} \int \bar{\varphi}_{k+1} \varphi_i dS = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Получаем

$$\alpha_{k+1,i} = - \int_{\Gamma} \int \omega_{k+1} \varphi_i dS.$$

Из (1.107), если учесть, что $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ не содержат ω_{k+1} , следует, что знаменатель правой части (1.106) отличен от нуля. Таким образом, можно построить ортонормированную систему $\{\varphi_i(y)\}$.

Для получения (1.104) надо подставить в (1.106) значения $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$, выраженные через $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$.

Описанный выше алгоритм дает $\varphi_i(y)$ в следующем виде:

$$\varphi_i(y) = \sum_{k=1}^{i-1} \bar{A}_{ik} \varphi_k + \bar{A}_{ii} \omega_i. \tag{1.108}$$

Как будет показано в настоящем параграфе, для излагаемого приближенного метода надо иметь $\varphi_i(y)$ в виде (1.104), ибо A_{ik} непосредственно участвуют в алгоритме решения. Коэффициенты A_{ik} можно получить из (1.108). Действительно, легко видеть, что

$$A_{ii} = \bar{A}_{ii}, \quad A_{ik} = \sum_{j=k}^{i-1} \bar{A}_{ij}. \tag{1.109}$$

II. Алгоритм второго способа ортонормализации таков: A_{ik} вычисляются путем разложения по элементам последнего столбца выражения

$$\varphi_n = \frac{\begin{vmatrix} \int \int \omega_1^2 dS & \int \int \omega_1 \omega_2 dS & \dots & \int \int \omega_1 \omega_{n-1} dS & \omega_1 \\ \int \int \omega_2 \omega_1 dS & \int \int \omega_2^2 dS & \dots & \int \int \omega_2 \omega_{n-1} dS & \omega_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int \int \omega_n \omega_1 dS & \int \int \omega_n \omega_2 dS & \dots & \int \int \omega_n \omega_{n-1} dS & \omega_n \end{vmatrix}}{\sqrt{G_{n-1} G_n}}, \tag{1.110}$$

где G_n — определитель Грама функций ω_i :

$$G_n = \begin{vmatrix} \int \int \omega_1^2 dS & \int \int \omega_1 \omega_2 dS & \dots & \int \int \omega_1 \omega_n dS \\ \int \int \omega_1 \omega_2 dS & \int \int \omega_2^2 dS & \dots & \int \int \omega_2 \omega_n dS \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int \int \omega_n \omega_1 dS & \int \int \omega_n \omega_2 dS & \dots & \int \int \omega_n^2 dS \end{vmatrix}. \quad (1.111)$$

Интегралы в (1.110) и (1.111) берутся по поверхности S .

Так как в любом вычислительном центре имеются стандартные подпрограммы вычисления интегралов с любой заданной точностью и вычисления детерминанта, то с точки зрения простоты осуществления машинного счета этот алгоритм вычисления коэффициентов A_{ik} обладает некоторым преимуществом перед вышеописанным.

Таким образом, ортонормализацию можно осуществить как по формуле (1.106), так и по формуле (1.110). Ясно, что если бы вычисления по обеим формулам производились абсолютно точно (с бесконечным числом разрядов), то и результаты оказались бы одинаковыми. Результаты будут достаточно близки также и в том случае, когда ортонормируемая система надежна, т. е. значение G_n не слишком мало. Но, как было показано выше, система $\{\omega_i(y)\}$, как и любая потенциальная система, не является надежной, поэтому для практической реализации приближенного метода решения граничных задач крайне важно выбрать из двух способов ортонормализации тот, который дает более устойчивую схему счета (обеспечивает большое число верных знаков). Хотя вычисления по формуле (1.110) легко организовать на универсальных машинах, тем не менее, как будет показано ниже, ортонормализацию следует провести по формуле (1.106), так как соответствующий алгоритм значительно более устойчив относительно ошибок округления. Действительно, будем рассматривать нормированные функции $\omega_i(y)$ как векторы (с началом в 0) в пространстве L_2 и обозначим через α_k угол между вектором $\omega_k(y)$ и гиперплоскостью, проходящей через векторы $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k-1}$. Известно, что определитель (1.111) равен квадрату объема параллелепипеда, построенного на векторах $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$:

$$G_n = \prod_{i=1}^n \sin^2 \alpha_i. \quad (1.112)$$

Таким образом, для знаменателя формулы (1.110) получаем

$$d_n = \sqrt{G_{n-1} G_n} = \sin \alpha_n \prod_{i=1}^{n-1} \sin^2 \alpha_i. \quad (1.113)$$

Сумма

$$\sum_{k=1}^{n-1} (\omega_n, \varphi_k) \varphi_k \quad (1.114)$$

есть проекция элемента ω_n на подпространство, порожденное векторами $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ или (в силу эквивалентности подпространств, порожденных векторами $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ и $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$) проекция ω_n на подпространство, порожденное векторами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$. Отсюда следует, что знаменатель формулы (1.106) равен

$$\sqrt{\int_s \overline{\varphi_n^2} dS} = \sin \alpha_n. \quad (1.115)$$

При ортонормализации n элементов окажется необходимым делить на

$$\overline{d}_n = \prod_{i=1}^n \sin \alpha_i.$$

Для отношения d_n/\overline{d}_n получаем

$$\frac{d_n}{\overline{d}_n} = \prod_{i=1}^{n-1} \sin \alpha_i = \overline{d}_{n-1}. \quad (1.116)$$

Из последнего соотношения видно, что формула (1.106) дает значительно более устойчивую вычислительную схему, чем формула (1.110).

Приведем численный пример, подтверждающий полученные теоретические оценки. Пусть Γ — единичная окружность, Γ_1 и $\overline{\Gamma}_1$ — концентрические окружности радиусов 2 и 1,4 соответственно. Точки x_i расположены равномерно на окружностях Γ_1 и $\overline{\Gamma}_1$.

При расчете попытка ортонормировать систему $\{\ln r(x_i, y)\}$, $x \in \Gamma_1$ ($i = 1, \dots, 28$) с помощью формулы (1.106) привела к аварийному останovu машины. При этом оказалось, что это случилось при делении на $\int \overline{\varphi_{21}^2} dS$. Этот факт (учитывая, что все определения Грама десятого порядка были равны нулю) хорошо согласуется с формулой (1.116), из которой следует, что формула (1.106) дает возможность при фиксированном числе рядов, с которыми производятся вычисления, ортонормировать примерно вдвое больше функций, чем формула (1.110). Ясно, что если ортонормализацию достаточно ненадежной системы (значение G_n достаточно близко к нулю) можно произвести как по формуле (1.106), так и по формуле (1.110), то последняя дает значительно более грубый результат. Для подтверждения этого была произведена ортонормализация системы $\{\ln r(x_i, y)\}$,

$x \in \bar{\Gamma}_1$ ($i = 1, \dots, 24$). В приведенной табл. 1.1 даны коэффициенты ортонормализации $A_{22,23-i}^{(1)}$ для функции φ_{22} , полученные по формуле (1.110), и те же коэффициенты $A_{22,23-i}^{(2)}$, полученные по формуле (1.106).

В третьем и четвертом столбцах даются $\int \varphi_{22}^{(1)} \varphi_{23-i}^{(1)} dS = \alpha_{22,i}^{(1)}$ и $\alpha_{22,i}^{(2)} = \int \varphi_{22}^{(2)} \varphi_{23-i}^{(2)} dS$, где $\varphi_i^{(1)}$ и $\varphi_i^{(2)}$ — ортонормированные функции, полученные соответственно с помощью формул (1.110) и (1.106).

Видно, что формула (1.106) дает значительно более точную ортонормализацию, чем формула (1.110). Все вычисления проводились на машине БЭСМ-2.

Заметим, что нумерация функций, подлежащих ортонормализации, существенно сказывается на росте коэффициентов ортонормализации и, следовательно, на распределении погрешности

Таблица 1.1

i	$A_{22,23-i}^{(1)}$	$A_{22,23-i}^{(2)}$	$\alpha_{22,1}^{(1)}$	$\alpha_{22,1}^{(2)}$	i	$A_{22,23-i}^{(1)}$	$A_{22,23-i}^{(2)}$	$\alpha_{22,1}^{(1)}$	$\alpha_{22,1}^{(2)}$
1	1,5629	1,5747	1,37	0,9993	11	-0,9413	0,0471	-0,37	-0,0004
2	-1,7303	-1,7267	0,15	0,0080	12	0,6365	0,0469	-0,17	-0,0003
3	0,7977	0,7967	-0,02	-0,0030	13	0,1307	0,0470	0,06	-0,0003
4	-0,1783	-0,1772	-0,13	0,0009	14	-0,3814	0,0469	-0,19	-0,0003
5	0,1160	0,1195	-0,20	-0,0007	15	0,3762	0,0472	-0,07	-0,0003
6	0,0325	0,0258	-0,22	-0,0007	16	-0,0596	0,0465	-0,05	-0,0003
7	0,0264	0,0541	-0,25	-0,0005	17	0,0032	0,0492	-0,10	-0,0003
8	0,1276	0,0451	-0,20	-0,0005	18	0,3059	0,0412	0,05	-0,0006
9	-0,2284	0,0477	-0,36	-0,0005	19	-0,6559	0,0685	-0,31	-0,0040
10	0,7624	0,0468	0,13	-0,0004	20	1,0015	-0,0156	0,17	0,0020
					21	-0,4316	0,2664	0,00	0,0020
					22	-0,1754	-0,3722	0,00	-0,0009

вычисления. Табл. 1.1 соответствует тому случаю, когда функции системы $\{n r(x_i, y)\}_{i=1}^{24}$ занумерованы «естественным» образом — номера i точек x_i , определяющих фундаментальные решения, растут по часовой стрелке. Это приводит к тому, что наиболее «близкие» функции стоят рядом, и они встречаются уже в начале счета. Поэтому коэффициенты ортонормализации $A_{22,23-i}$ не обнаруживают тенденцию увеличения при увеличении i , а скалярные произведения $\alpha_{22,i}$ при $i \neq 1$ почти все равны. Если нумерацию точек x_i произвести таким образом, чтобы соседние номера имели бы диаметрально противоположные точки, в этом случае картина распределения коэффициентов ортонормализации A_{ij} и погрешностей ортонормализации (φ_i, φ_j) ($i \neq j$) имеет определенную тенденцию роста при увеличении i . Так как этот вопрос представляет определенный практический интерес (например, для метода регуляризации при суммировании прибли-

женно ортонормированных функций [148], когда вес функции с высоким номером уменьшается), то в табл. 1.2 даны коэффициенты ортонормализации A_{ij} и скалярные произведения (φ_i, φ_j) ,

Т а б л и ц а 1.2

i	j	A_{ij}	$(\varphi_i \varphi_j) \cdot 10^8$	i	j	A_{ij}	$(\varphi_i \varphi_j) \cdot 10^8$
1	1	+1,0406729	+99999993	9	4	-1,1260756	+1087,2023
2	1	+0,34624911	-10,545444	9	5	+6,6932927	-5001,1401
2	2	+1,0967628	+99999987	9	6	+33,378126	-7836,2678
3	1	-0,53648320	+5,2679679	9	7	-57,802630	-34629,283
3	2	-0,53648326	+9,3552147	9	8	+8,3625319	-50108,963
3	3	+0,62524139	+99999996	9	9	+167,58549	+99768841
4	1	-0,38528212	+1,9105709	10	1	+3,4180333	+257,26516
4	2	-0,38528204	+4,6030716	10	2	+2,5466632	+34,687610
4	3	-0,21079386	+6,9879207	10	3	+48,300287	+85,583489
4	4	+0,65981877	+100000000	10	4	-143,04046	-434,93972
5	1	+0,92264111	-3,8659621	10	5	+33,064980	+10039,998
5	2	-0,71532134	-14,744458	10	6	-4,6188189	-5834,6996
5	3	+0,96541176	+14,519004	10	7	+29,189493	+3026,5333
5	4	-4,0057429	-10,341002	10	8	-64,247550	+27933,044
5	5	+4,6118053	+100000010	10	9	-53,885359	-209322,34
6	1	-0,96540172	-27,169606	10	10	+177,78265	+100108810
6	2	+1,1276433	-29,079885	11	1	+0,94977884	-86582,001
6	3	-4,3657948	+27,216127	11	2	+5,2724456	-86920,886
6	4	+1,9865186	+22,170377	11	3	-14,265920	+1118,9831
6	5	-1,1420238	-37,608277	11	4	-226,53632	0,0
6	6	+4,7510957	+99999891	11	5	+43,029469	+16379,793
7	1	+0,91010546	-113,76967	11	6	+14,109446	-8185,8288
7	2	-0,05012857	-145,66538	11	7	+10,672832	-24521,175
7	3	-518312	+814,64348	11	8	-216,59758	+14544,041
7	4	+3,3488157	+104,80959	11	9	+6,5606727	-569544,36
7	5	+1,0675745	+102,90421	11	10	+374,16344	+13851,103
7	6	+9,5440065	-412,25938	11	11	+40,748655	+99487997
7	7	+10,881491	+100000020	12	1	+5,8947982	-1551,2810
8	1	+0,87974204	-134,74923	12	2	+2,8061870	-1112,1668
8	2	+1,2645393	-227,71168	12	3	-245,18670	+3376,1136
8	3	-11,021439	+138,19470	12	4	-93,330693	+2140,9504
8	4	-20,424368	+771,85751	12	5	+29,695770	-6405,9341
8	5	+13,685392	+612,17532	12	6	+50,256389	-19165,558
8	6	+9,8654950	-153,36560	12	7	-225,28228	-94825,017
8	7	+9,6225894	+923,39944	12	8	-63,197245	-121207,67
8	8	+14,525913	+100002600	12	9	+597,66516	-588046,02
9	1	+3,8939330	-899,95965	12	10	+135,59681	-495184,19
9	2	+4,5109049	-724,24863	12	11	+15,997492	-1383687,3
9	3	-135,18421	+1355,8118	12	12	+45,094307	+98582118

умноженные на 10^8 ($i = 1, 2, \dots, 12; j = 1, 2, \dots, n$) функций

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^i A_{ij} \ln r(x_j, y),$$

полученных по формуле (1.106), когда Γ является эллипсом с полуосями $a = 1$ и $b = 0,5$, а точки x_i взяты на конфокальном

эллипсе с полуосями $a = 2$, $b = 1$ и занумерованы следующим образом: $x_1(a, 0)$, $x_2(-a, 0)$, $x_3(0, b)$, $x_4(0, -b)$ и т. д. Из табл. 1.2 видно, что при увеличении индексов i, j увеличиваются модули коэффициентов ортонормализации A_{ij} и уменьшается точность ортонормализаций. Табл. 1.2 взята из работы [12].

Сейчас мы покажем, что предварительная ортонормализация является [10] одним из способов обращения симметричных матриц. Рассмотрим две задачи.

Задача А. Ищется решение системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = B,$$

или

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = b_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.117)$$

Задача Б. Задано функциональное уравнение

$$RC = F, \quad (1.118)$$

где R — положительно определенный оператор, а F — заданный элемент в некотором функциональном пространстве H . Коэффициенты d_k наилучшего приближения (в смысле энергетического пространства H_R) решения C уравнения (1.118) рядом $\sum_{k=1}^n d_k D_k$, где $\{D_k\}$ — система линейно независимых элементов пространства H , ищутся из системы Ритца

$$\sum_{j=1}^n (RD_j, D_j) d_j = (F, D_k). \quad (1.119)$$

Сравнивая системы (1.117) и (1.119), находим, что решения задач А и Б совпадают, если выполнены условия

$$(RD_k, D_j) = a_{kj}, \quad (F, D_k) = b_k. \quad (1.120)$$

Однако решение задачи Б (и, следовательно, задачи А) можно получить без решения системы (1.119), путем предварительной ортонормализации векторов системы $\{D_k\}$.

Пусть $\{R_k\}$ — ортонормированная в энергетическом пространстве H_R система векторов, полученная путем ортонормализации системы $\{D_k\}$

$$R_k = \sum_{i=1}^k \gamma_{ki} D_i. \quad (1.124)$$

Как будет ясно из дальнейшего, для вычисления коэффициентов ортонормализации γ_{ki} , явное выражение векторов D_k и оператора R не требуется. Они определяются при выполнении условий (1.119) только с помощью матрицы $\|a_{ij}\| = A$.

Коэффициенты l_k наилучшего приближения (в смысле H_R) элемента C рядом $\sum_{k=1}^n l_k R_k$ определяются из соотношений

$$l_k = (RC, R_k) = (F, R_k). \quad (1.122)$$

Подставляя (1.121) в (1.122), получаем

$$l_k = \sum_{i=1}^k \gamma_{ki} b_i. \quad (1.123)$$

Зная коэффициенты l_k , легко находим и коэффициенты d_k наилучшего приближения C рядом $\sum_{k=1}^n d_k D_k$.

Действительно,

$$\sum_{k=1}^n l_k R_k = \sum_{k=1}^n l_k \sum_{i=1}^k \gamma_{ki} D^i = \sum_{k=1}^n d_k D_k,$$

где

$$d_k = \sum_{j=1}^n c_{jk} b_j. \quad (1.124)$$

Подставляя (1.123) в (1.124), получаем соотношение для вычисления d_k с помощью коэффициентов, ортонормализации и правой части системы (1.119):

$$d_k = \sum_{j=1}^n c_{jk} b_j, \quad (1.125)$$

где

$$c_{jk} = \sum_{i=r}^n \gamma_{ij} \gamma_{ik}, \quad r = \max(k, j). \quad (1.126)$$

Из формулы (1.125) видно, что по существу нами получены элементы обратной к A матрицы A^{-1} .

Предполагая единственность наилучшего в смысле H_R разложения элемента C в ряд по системе $\{D_k\}$ (для этого достаточно, например, чтобы H_R было строго нормированным [71] пространством), получим, что (1.125) дает решение задачи Б и, следовательно, задачи А. Можно предположить, что R — тождественный оператор: $R = E$. Тогда энергетическое пространство H_R превращается в гильбертово пространство L_2 , которое строго нормировано.

Для вычисления коэффициентов ортонормализации γ_{kj} рассмотрим ортогональную систему $\{\psi_k\}$, где

$$\psi_k = D_k - \sum_{i=1}^{k-1} (RD_k, R_i) R_i, \quad (1.127)$$

R_i — элемент ортонормированной системы $\{R_i\}$,

$$R_i = \psi_k / \|\psi_k\|. \quad (1.128)$$

Учитывая (1.120) и (1.121), из (1.127) получаем

$$\psi_k = D_k - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} (RD_k, D_j) \sum_{s=1}^i \gamma_{is} D_s = - \sum_{i=1}^k \alpha_{ik} D_i, \quad (1.129)$$

где

$$a_{kh} = -1, \quad \alpha_{ki} = \sum_{s=i}^{k-1} \sum_{j=1}^s \gamma_{si} \gamma_{sj} a_{kj}, \quad i = 1, \dots, k-1. \quad (1.130)$$

По формуле (1.129) вычислим знаменатель формулы (1.128):

$$\begin{aligned} \|\psi_k\| &= [R\psi_k, \psi_k]^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_{ik} \alpha_{jk} (RD_i D_j) \right]^{1/2} = \\ &= \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_{ik} \alpha_{jk} a_{ij} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение и (1.129) в (1.128), получаем

$$\gamma_{ki} = \frac{\alpha_{ik}}{\left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_{ik} \alpha_{jk} a_{ij} \right]^{1/2}}. \quad (1.131)$$

Таким образом, алгоритм решения системы (1.117) таков: получаем из (1.131) $\gamma_{11} = 1/\sqrt{a_{11}}$, затем из (1.130) $\alpha_{12} = \gamma_{11}^2 a_{21} = a_{21}/a_{11}$, затем опять из (1.131) γ_{21} и γ_{22} и из (1.130) α_{32} и α_{31} и т. д. После получения всех γ_{ki} ($k = 1, 2, \dots, n; i = 1, \dots, k$) вычисляем элементы c_{jk} обратной матрицы по формуле (1.126). Решение системы (1.117) получаем из формулы (1.125).

Путем первой или второй трансформации Гаусса этот метод может быть перенесен и на произвольную неособенную матрицу A .

Покажем, что вычисление коэффициентов ортонормализации по существу совпадает с обращением некоторой треугольной матрицы.

Обозначим через S верхнюю треугольную матрицу, которая удовлетворяет условию

$$A = S'S, \quad (1.132)$$

где S' — транспонированная к S матрица. Решение системы (1.117) можно записать в виде

$$x = A^{-1}B = (S'S)^{-1}B = S^{-1}(S')^{-1}B = S^{-1}(S^{-1})'B,$$

или в развернутом виде

$$x_k = \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^n \bar{S}_{ji} \tilde{S}_{ik} = \sum_{i=1}^n b_j \sum_{i=r}^n \bar{S}_{ji} \bar{S}_{ki},$$

где $r = \max(k, j)$, \bar{S}_{ji} и \bar{S}_{ik} — элементы матриц S^{-1} и $(S^{-1})'$. Учтя, что $x_k = d_k$ ($k = 1, \dots, n$), и сравнивая последнее равенство с формулами (1.125) и (1.126), находим, что $\gamma_{ij} = \bar{S}_{ji}$ для всех i и j . Таким образом, нахождение коэффициентов ортонормализации эквивалентно обращению матрицы \bar{S} , удовлетворяющей равенству (1.132). Поэтому для получения \bar{S}_{ji} можно получить сначала элементы матрицы S (методом квадратных корней), а затем обратить ее.

Легко однако заметить, что приведенная выше схема счета будет отличаться от такого алгоритма, так как формулы (1.130) и (1.131) дают возможность получить S_{ji} без предварительного вычисления элементов матрицы S .

Сумма

$$\sum_{i=1}^{k-1} (D_k, R_i) R_i \quad (1.133)$$

есть проекция элемента D_k на подпространство, порожденное векторами R_1, R_2, \dots, R_{n-1} или (в силу эквивалентности подпространств, порожденных векторами D_1, D_2, \dots, D_{k-1} и R_1, R_2, \dots, R_{k-1}) проекция D_k на подпространство, порожденное векторами D_1, D_2, \dots, D_{k-1} .

Предполагая нормированность элементов системы $\{D_k\}$ для нормы разности в правой части выражения (1.127), получаем

$$\|\psi_k\| = \sin \alpha_k,$$

где α_k — угол между вектором D_k и гиперплоскостью, проходящей через векторы D_1, D_2, \dots, D_{k-1} . При ортонормализации окажется

необходимым делить n элементов на величину $\prod_{k=1}^n \sin \alpha_k$, которая

равна квадратному корню от определителя $|A|$ системы (1.117) (определитель Грама $|A|$ равен квадрату объема параллелепипеда, построенного на векторах D_1, D_2, \dots, D_n). Отсюда ясно, что при достаточно малом определителе системы (1.117) формулы Крамера, в знаменателе которых стоит определитель системы (1.117), дают менее устойчивую схему счета.

Легко видеть, что при ортогонализации столбцов и строк деление происходит на величину, меньшую чем $(|A|)^{1/2}$. Действительно, детерминант Грама для столбцов матрицы системы (1.117) равен AA' и, следовательно, значительно хуже обусловлен, чем детерминант Грама A для системы $\{D_k\}$.

Как будет показано в § 1.8 гл. I, осуществление описанного здесь процесса ортонормализации требует порядка n^4 арифметических действий. Такое затягивание вычислительного процесса обусловлено необходимостью вычисления $\|\psi_k\|$ по приведенной выше формуле. Другое выражение для $\|\psi_k\|$ может быть выведено

не с помощью (1.129), а с помощью (1.127):

$$\begin{aligned} \|\psi_k\| &= \sqrt{\left(R \left[D_k - \sum_{i=1}^{k-1} (D_k, R_i) R_i \right], D_k - \sum_{i=1}^{k-1} (D_k, R_i) R_i \right) =} \\ &= \sqrt{(RD_k, D_k) - 2 \sum_{i=1}^{k-1} (RD_k, R_i)^2 + \sum_{i=1}^{k-1} (RD_k, R_i)^2 =} \\ &= \sqrt{a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} \left[\sum_{j=1}^j \gamma_{ij} a_{kj} \right]^2}. \end{aligned} \quad (1.134)$$

В § 1.8 гл. I увидим, что формула (1.134) требует значительно меньше арифметических действий, чем знаменатель формулы (1.131). Вычисление α_{ik} по формуле (1.130) также требует значительно больше времени (точные оценки числа арифметических действий будут даны в следующем параграфе), чем вычисление по формуле

$$\begin{aligned} \alpha_{ik} &= \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} \sum_{s=0}^{k-1} \gamma_{si} \gamma_{sj}, \\ \theta &= \max(j, i), \quad i = 1, \dots, k-1. \end{aligned} \quad (1.135)$$

Заметим, что для того, чтобы формула (1.135) давала значительный выигрыш в числе арифметических действий по сравнению с формулой (1.130), следует запоминать величины

$$\sum_{s=0}^{k-1} \gamma_{si} \gamma_{sj}.$$

Алгоритм получения решения системы (1.117) будет тот же, что и описанный выше, однако α_{ij} будет вычисляться по формулам (1.135), а γ_{ki} будет вычисляться не по формуле (1.131), а по формуле

$$\gamma_{ki} = - \frac{\alpha_{ik}}{\sqrt{a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} \left[\sum_{j=1}^s \gamma_{sj} a_{kj} \right]^2}}. \quad (1.136)$$

Особо следует подчеркнуть, что, в отличие от формулы (1.131) в формуле (1.136) требуются при вычислении γ_{ki} ($i = 1, \dots, k$) только числа a_{kj} ($j = 1, \dots, k$). Это дает возможность полученные коэффициенты ортонормализации γ_{ki} засылать в ячейки для a_{kj} .

В § 1.3 настоящей главы было показано, что для нахождения коэффициентов разложения a_i приходится решать линейные системы, вообще говоря, с несимметричными матрицами (1.32) и (1.36). Поэтому приведем два метода решения общих линейных систем, основанные на идее биортонормализации.

Пусть заданы системы функций $\{\varphi_k\}$ и $\{\omega_k\}$ ($k = 1, \dots, n$) и требуется построить при помощи матрицы $\|a_{ij}\| = \|(\omega_i, \varphi_j)\|$ биортономмированную к $\{\varphi_k\}$ систему $\{\psi_k\}$, где

$$\psi_k = \sum_{i=1}^n A_{ki} \omega_i. \quad (1.137)$$

Для получения коэффициентов биортономмализации A_{ki} можно решить n систем уравнений

$$\sum_{i=1}^n A_{ki} a_{ij} = \delta_{kj}, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.138)$$

где δ_{kj} — символ Кронекера. Системы (1.138) определяют элементы матрицы, обратной к $\|a_{ij}\|$, и, следовательно, любой способ нахождения A_{ki} является методом обращения матрицы $\|a_{ij}\|$, и, наоборот, любой способ обращения матрицы можно рассматривать как метод биортономмализации. Поэтому можно ожидать, что вычислительные схемы некоторых методов обращения матриц и биортономмализации совпадут.

Так, например, с вычислительной схемой метода формул Крамера для обращения матриц совпадает вычислительная схема метода биортономмализации, описанного в [155]. Именно, алгоритм этого метода таков. Системы функций

$$\{\psi_1^{(1)}, \dots, \psi_n^{(1)}\}, \quad \{\psi_1^{(2)}, \dots, \psi_n^{(2)}\}, \dots, \{\psi_1^{(n)}, \dots, \psi_n^{(n)}\},$$

где

$$\psi_k^{(k)} = \frac{1}{(\psi_k^{(k-1)}, \varphi_k)} \psi_k^{(k-1)}, \quad \psi_k^{(0)} = \omega_k. \quad (1.139)$$

$$\psi_i^{(k)} = \psi_i^{(k-1)} - (\psi_i^{(k-1)}, \varphi_k) \psi_k^{(k)}, \quad k = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, k,$$

строятся последовательно так, чтобы k -я система удовлетворяла первым k группам условий биортономмализации

$$(\psi_i^{(k)}, \varphi_j) = \delta_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k.$$

Легко видеть, что

$$(\psi_{k+1}^{(k)}, \varphi_{k+1}) = \frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k},$$

где

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} (\omega_1, \varphi_1) & \dots & (\omega_1, \varphi_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\omega_k, \varphi_1) & \dots & (\omega_k, \varphi_k) \end{vmatrix}, \quad k = 1, \dots, n,$$

и, следовательно, из равенств (1.139) получаем

$$\psi_j^{(k)} = \frac{1}{\Delta_k} \sum_{i=1}^k \Delta_{ji}^{(k)} \omega_i, \quad k \geq j,$$

$$\psi_j^{(k)} = \frac{1}{\Delta_k} \sum_{i=1}^k \Delta_{j-k+1,i}^{(k+1)} \omega_i + \omega_j, \quad k < j,$$

где $\Delta_{ij}^{(k)}$ — алгебраическое дополнение элемента (ω_i, φ_j) в Δ_k . Учитывая, что систему, биортонормированную для системы $\{\varphi_k\}$, образуют элементы $\{\psi_1^{(n)}, \dots, \psi_n^{(n)}\}$, для которых справедливы формулы

$$\psi_j^{(n)} = \frac{1}{\Delta_n} \sum_{i=1}^n \Delta_{ji}^{(n)} \omega_i,$$

убеждаемся, что для коэффициентов биортонормализации A_{ki} в разложении (1.137) справедливы соотношения

$$A_{ki} = \frac{\Delta_{ki}^{(n)}}{\Delta_n}, \quad k = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, n,$$

которые совпадают⁶⁾ с формулами Крамера для системы (1.138).

Дадим изложение первого способа биортонормализации.

Рассмотрим функции

$$f_k = \omega_k + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{ki} F_i,$$

где

$$F_i = \frac{f_i}{(f_i, \varphi_i)},$$

и определим коэффициенты α_{ki} из условий

$$(f_k, \varphi_i) = 0, \quad i < k.$$

Тогда

$$\alpha_{ki} = -(\omega_k, \varphi_i) - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{kj} (F_j, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, k-1. \quad (1.140)$$

⁶⁾ Следует, однако, заметить некоторую условность приведенного доказательства совпадения описанной вычислительной схемы биортонормализации с формулами Крамера. В принципе, нами доказано не совпадение их вычислительных схем, а возможность получения одной схемы из другой путем тождественных преобразований, что естественно для любых обоснованных алгоритмов решения как системы линейных уравнений, так и для обращения матриц, так как они решают одну и ту же задачу. Просто в рассмотренном здесь случае эти тождественные преобразования весьма простые.

Запишем функции f_k и F_i в виде

$$f_k = \sum_{i=1}^k \beta_{ki} \omega_i, \quad F_i = \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} \omega_j, \quad (1.141)$$

где коэффициенты β_{ki} и γ_{ij} находятся из формул

$$\beta_{kk} = 1, \quad \beta_{ki} = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{kj} \gamma_{ji}, \quad (1.142)$$

$$\gamma_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{(f_i, \varphi_i)} = \frac{\alpha_{ij}}{\sum_{k=1}^i \beta_{ik}(\omega_k, \varphi_i)}.$$

Функции ψ_k ($k = n, n-1, \dots, 1$) будем искать в виде

$$\psi_k = F_k + \sum_{i=k+1}^n B_{ki} F_i, \quad (1.143)$$

а коэффициенты B_{ki} будем находить из условий

$$(\psi_k, \varphi_j) = 0, \quad j > k,$$

или

$$B_{kj} = -(F_k, \varphi_j) - \sum_{i=k+1}^{j-1} B_{ki} (F_i, \varphi_j), \quad j = k+1, k+2, \dots, n. \quad (1.144)$$

Из (1.143) для коэффициентов A_{ki} формулы (1.137) получаем

$$A_{ki} = \gamma_{ki} + \sum_{j=r}^n B_{kj} \gamma_{ji}, \quad r = \max(i, k+1), \quad (1.145)$$

$$\gamma_{ki} = 0 \quad \text{при} \quad k < i.$$

Подставляя значение F_k из (1.141) в формулы (1.140) и (1.144), получаем

$$B_{kj} = - \sum_{i=1}^k \gamma_{ki}(\omega_i, \varphi_j) - \sum_{i=k+1}^{j-1} B_{ki} \sum_{s=1}^i \gamma_{is}(\omega_s, \varphi_j) =$$

$$= - \sum_{i=1}^k \gamma_{ki} a_{ij} - \sum_{i=k+1}^{j-1} B_{ki} \sum_{s=1}^i \gamma_{is} a_{sj}; \quad (1.146)$$

$$\alpha_{ki} = - a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{kj} \sum_{s=1}^j \gamma_{is} a_{si} = - a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} r_{kj}^{(i)} a_{ji},$$

где

$$r_{kj}^{(i)} = \sum_{s=j}^{i-1} \alpha_{ks} \gamma_{sj}.$$

Алгоритм вычисления коэффициентов биортонормализации таков. Находятся и запоминаются элементы треугольных матриц $\|\gamma_{ij}\|$ и $\|\alpha_{ij}\|$ ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, i$). Затем с помощью первой из формул (1.146) находятся элементы треугольной матрицы $\|B_{ij}\|$ ($i = 1, \dots, n; j = i + 1, \dots, n$). Их можно записать в ячейках для матрицы $\|\alpha_{ij}\|$. Вычисление коэффициентов A_{kj} по формуле (1.145) удобно производить в такой последовательности. Вычисляются A_{j1} ($j = 1, \dots, n$) и засылаются в ячейки для γ_{j1} . Затем вычисляются A_{j2}, A_{j3} ($j = 1, \dots, n$) и т. д. При вычислении вектора A_{jk} ($j = 1, \dots, n$) коэффициенты A_{jk} при $j < k$ засылаются в ячейки для B_{jk} , а коэффициенты A_{jk} при $j \geq k$ — в ячейки для γ_{jk} .

В этом методе биортонормализации из двух систем $\{\varphi_k\}$ и $\{\omega_k\}$ лишь элементы второй участвовали в выражениях (1.137) для ψ_k , тогда как первая система не испытывала преобразования. Ниже приводится способ обращения матриц методом такой биортонормализации, при которой преобразуются обе системы. Пусть заданы системы функций $\{\varphi_k\}$ и $\{\omega_k\}$ ($k = 1, \dots, n$) и требуется построить биортонормированные системы $\{\Phi_k\}$ и $\{\psi_k\}$, где

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^k c_{ki} \varphi_i, \quad \psi_k = \sum_{i=1}^k A_{ki} \omega_i. \quad (1.147)$$

Построим вспомогательные функции $\bar{\Phi}_k$ и $\bar{\psi}_k$ в виде

$$\bar{\Phi}_k = \varphi_k + \sum_{i=1}^{k-1} \bar{c}_{ki} \varphi_i, \quad \bar{\psi}_k = \omega_k + \sum_{i=1}^{k-1} \bar{A}_{ki} \psi_i, \quad (1.148)$$

где

$$\bar{c}_{kj} = -(\varphi_k, \psi_j), \quad \bar{A}_{kj} = -(\omega_k, \Phi_j). \quad (1.149)$$

Тогда функции

$$\Phi_k = \frac{\bar{\Phi}_k}{(\bar{\Phi}_k, \psi_k)^{r_k}}, \quad \psi_k = \frac{\bar{\psi}_k}{(\bar{\Phi}_k, \psi_k)^{1-r_k}} \quad (1.150)$$

образуют биортонормированную систему для произвольной последовательности чисел r_k ($k = 1, \dots, n$).

Дадим алгоритмы решения линейных систем с несимметричной матрицей, основанные на приведенных способах биортонормализации.

Рассмотрим систему

$$\sum_{k=1}^n a_k (L\varphi_k, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.151)$$

используемую в методе Бубнова — Галёркина для решения функционального уравнения

$$Lu - f = 0 \quad (1.152)$$

в виде ряда $u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$. Ясно, что любой способ получения коэффициентов a_k из условия ортогональности разности $Lu_n - f$ всем функциям φ_j ($j = 1, \dots, n$) следует рассматривать как способ решения системы (1.151), а если для коэффициентов a_k удастся выписать формулы

$$a_k = \sum_{j=1}^n D_{jk}(f, \varphi_j), \quad k = 1, \dots, n,$$

то матрица $\|D_{jk}\|$ будет обратной к матрице $\|(L\varphi_k, \varphi_j)\|$.

Обозначая $L\varphi_n$ через ω_n , будем искать решение функционального уравнения (1.152) в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k = \sum_{k=1}^n b_k F_k,$$

где

$$F_k = \sum_{i=1}^k A_{ki} \varphi_i.$$

Нетрудно видеть, что

$$a_k = \sum_{j=k}^n A_{jk} b_j. \quad (1.153)$$

Потребуем, чтобы разность $Lu_n - f$ была ортогональна всем функциям φ_j (из первого из соотношений (1.147) ясно, что тогда $Lu_n - f$ будет ортогональна всем функциям φ_j):

$$(Lu_n - f, \varphi_j) = \sum_{k=1}^n b_k (L F_k, \varphi_j) - (f, \varphi_j) = \sum_{k=1}^n b_k (\psi_k, \varphi_j) - (f, \varphi_j) = 0,$$

или, в силу биортогональности систем $\{\psi_k\}$ и $\{\varphi_k\}$,

$$b_k = (f, \varphi_k). \quad (1.154)$$

Таким образом, мы получили новый алгоритм для вычисления коэффициентов a_k и тем самым получили решения системы (1.151). Но если этот алгоритм рассматривать как метод решения произвольной системы

$$\sum_{k=1}^n x_{kj} a_k = y_j, \quad (1.155)$$

предполагая, что

$$(\omega_k, \varphi_j) = x_{kj}, \quad (f, \varphi_j) = y_j, \quad (1.156)$$

то необходимо получить формулы для c_{ki} , A_{ki} и b_k , которые определяют a_k через элементы матрицы $\|x_{kj}\|$.

Подставляя формулы (1.147) в равенство (1.149), получим

$$\bar{c}_{kj} = - \left(\varphi_k, \sum_{i=1}^j A_{ji} \omega_i \right) = - \sum_{i=1}^j A_{ji} x_{ik}, \quad (1.157)$$

$$\bar{A}_{kj} = - \left(\omega_k, \sum_{i=1}^j c_{ji} \varphi_i \right) = - \sum_{i=1}^j c_{ji} x_{ki}, \quad k = 1, \dots, n, \quad j=1, \dots, k-1.$$

Из (1.148) для знаменателя формул (1.150) получаем

$$\begin{aligned} (\bar{\Phi}_k, \bar{\Psi}_k) &= \left(\varphi_k + \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} \sum_{j=1}^i c_{ij} \varphi_j, \omega_k + \sum_{i=1}^{k-1} \bar{A}_{ki} \sum_{j=1}^i A_{ij} \omega_j \right) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^k \alpha_{kj} \varphi_j, \sum_{s=1}^k \beta_{ks} \omega_s \right) = \sum_{j=1}^k \sum_{s=1}^k \alpha_{kj} \beta_{ks} x_{sj}, \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.158)$$

где

$$\alpha_{kk} = \beta_{kk} = 1, \quad \alpha_{kj} = \sum_{i=j}^{k-1} \bar{c}_{ki} c_{ij}, \quad \beta_{ks} = \sum_{i=s}^{k-1} \bar{A}_{ki} A_{is}. \quad (1.159)$$

Учитывая, что

$$\bar{\Phi}_k = \sum_{j=1}^k \alpha_{kj} \varphi_j, \quad \bar{\Psi}_k = \sum_{s=1}^k \beta_{ks} \omega_s,$$

из (1.150) получаем

$$\Phi_k = \frac{1}{(\bar{\Phi}_k, \bar{\Psi}_k)_k^r} \sum_{j=1}^k \alpha_{kj} \varphi_j, \quad \Psi_k = \frac{1}{(\bar{\Phi}_k, \bar{\Psi}_k)_k^{1-r}} \sum_{s=1}^k \beta_{ks} \omega_s,$$

или

$$c_{ki} = \frac{\alpha_{ki}}{(\bar{\Phi}_k, \bar{\Psi}_k)_k^r}, \quad A_{ki} = \frac{\beta_{ki}}{(\bar{\Phi}_k, \bar{\Psi}_k)_k^{1-r}}. \quad (1.160)$$

Для коэффициентов b_k из (1.154) и (1.156) получаем

$$b_k = \sum_{i=1}^k c_{ki} y_i,$$

и тогда можно записать (1.153) в виде

$$a_k = \sum_{j=k}^n A_{jk} \sum_{s=1}^j c_{js} y_s = \sum_{j=1}^n D_{jk} y_j, \quad (1.161)$$

где

$$D_{jk} = \sum_{s=r}^n A_{sk} c_{sj}, \quad r = \max(j, k). \quad (1.162)$$

Укажем последовательность вычисления элементов D_{jk} матрицы, обратной к $\|x_{kj}\|$. Сначала находим коэффициенты биортонormalизации c_{ki} и A_{ki} ($k = 1, \dots, n; i = 1, \dots, k$). Для этого, зафиксировав последовательность $\{r_k\}$ из (1.160), находим

$$c_{11} = \frac{1}{x_{11}^r}, \quad A_{11} = \frac{1}{x_{11}^{1-r_1}},$$

затем из (1.157) получаем \bar{c}_{21} и \bar{A}_{21} , а из (1.159) — α_{21} и β_{21} . Затем по формуле (1.158) определяем $(\bar{\Phi}_2, \bar{\Psi}_2)$, а из (1.160) c_{21} , c_{22} , A_{21} и A_{22} . Далее, опять из формулы (1.157) определяем c_{31} , c_{32} , A_{31} и A_{32} , а из (1.159) — α_{31} , α_{32} , β_{31} и β_{32} и по формулам (1.158) и (1.160) находим $(\bar{\Phi}_3, \bar{\Psi}_3)$ и c_{31} , c_{32} , c_{33} , A_{31} , A_{32} , A_{33} соответственно и т. д. После нахождения всех c_{ki} и A_{ki} ($k = 1, \dots, n; i = 1, \dots, k$) определяем D_{jk} по формулам (1.162), а при необходимости решения системы (1.155) из (1.164) находим a_k .

В том случае, когда $\varphi_k = \omega_k$ ($k = 1, \dots, n$) матрица $\{(\omega_k, \varphi_j)\}$ получается симметричной, и приведенный алгоритм совпадает с описанным выше методом обращения симметричных матриц.

Заметим, что числа D_{jk} ($j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, n$) являются коэффициентами биортонормированной к $\{\varphi_j\}$ системы $\{R_j\}$

$$R_j = \sum_{k=1}^n D_{jk} \omega_k.$$

Действительно, по определению биортонормированности D_{jk} должны удовлетворять системам

$$\sum_{k=1}^n D_{jk} (\omega_k, \varphi_i) = \delta_{ji}, \quad k = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

где δ_{ji} — символ Кронекера, которые определяют элементы обратной к $\|(\omega_k, \varphi_i)\|$ матрицы.

Заметим, что если все r_k в (1.160) равны 1/2, это приводит в формулах (1.150) к делению на одно и то же число $\sqrt{(\bar{\Phi}_k, \bar{\Psi}_k)}$. Однако при $(\bar{\Phi}_n, \bar{\Psi}_n) < 0$ может возникнуть необходимость оперирования с комплексными величинами, что усложняет и замедляет соответствующее вычисление. Поэтому целесообразно в качестве чисел r_k взять 0 или 1 в зависимости от значений

$$|(\bar{\Phi}_k, \bar{\Psi}_k)| = \eta_k, \quad \max_i |\bar{c}_{ki}| = \zeta_k, \quad \max_i |\bar{A}_{ki}| = \xi_k:$$

$$r_k = \begin{cases} 0 & \text{при } (\zeta_k > \xi_k, \eta_k < 1), \quad (\zeta_k < \xi_k, \eta_k > 1), \\ 1 & \text{при } (\zeta_k < \xi_k, \eta_k > 1), \quad (\zeta_k > \xi_k, \eta_k < 1). \end{cases}$$

Ниже на примере решения одной вариационной задачи сравниваются точности решения линейной системы с симметричной матрицей для метода квадратных корней, Гаусса и метода, опи-

санного в начале настоящего параграфа. Все вычисления проводились на машине БЭСМ-2.

Пусть методом Рунге решается задача

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{1+x}, \quad u(0) = u'(1) = 0,$$

и в качестве координатной системы используется система x^k ($k = 1, 2, \dots$).

Определяя скалярное произведение в энергетическом пространстве равенством

$$[uv] = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx,$$

для элементов c_{kj} матрицы и правой части системы Рунге получаем

$$c_{kj} = \frac{kj}{k+j-1}, \quad d_k = \int_0^1 \frac{x^k}{1+x} dx.$$

В табл. 1.3, заимствованной из [113], даны первые четыре верные цифры решения $a_j^{(n)}$ системы (1.165) при $n = 3, 4, \dots, 8$.

Т а б л и ц а 1.3

n	$a_1^{(n)}$	$a_2^{(n)}$	$a_3^{(n)}$	$a_4^{(n)}$	$a_5^{(n)}$	$a_6^{(n)}$	$a_7^{(n)}$	$a_8^{(n)}$
3	0,6869	-0,4579	0,0788					
4	0,6922	-0,4899	0,1312	-0,0267				
5	0,6930	-0,4977	0,1547	-0,0541	0,0110			
6	0,6931	-0,4995	0,1631	-0,0708	0,0260	-0,0050		
7	0,6931	-0,4999	0,1657	-0,0786	0,0318	-0,0136	0,0025	
8	0,6931	-0,5000	0,1664	-0,0817	0,0446	-0,0218	0,0075	-0,0013

В табл. 1.4 приводятся те же коэффициенты, полученные на машине БЭСМ-2 путем предварительной ортонормализации способом Шмидта.

В табл. 1.5 приводятся те же коэффициенты, полученные путем решения системы Рунге методом Гаусса. Все решения проводились на машине БЭСМ-2.

В табл. 1.6 приводятся те же коэффициенты, полученные путем решения системы Рунге методом квадратных корней.

Во всех случаях коэффициенты c_{kj} и d_k были заданы с восьмью значащими цифрами. В табл. 1.4—1.6 последние строки содержат погрешности в $a_j^{(8)}$ ($j-1 = 1, \dots, 8$). Евклидова норма погрешности коэффициентов $a_j^{(8)}$, определенных методом ортонормализации, равна 0,075, для метода Гаусса — 0,335 и для метода

квадратных корней — 0,336. Таким образом, для рассматриваемого примера метод предварительной ортогонализации дает значительно более точные результаты по сравнению с методом Гаусса и с методом квадратных корней.

Т а б л и ц а 1.4

n	$a_1^{(n)}$	$a_2^{(n)}$	$a_3^{(n)}$	$a_4^{(n)}$	$a_5^{(n)}$	$a_6^{(n)}$	$a_7^{(n)}$	$a_8^{(n)}$
3	0,6861	-0,4579	0,0718					
4	0,6922	-0,4899	0,1312	-0,0267				
5	0,6930	-0,4977	0,1546	-0,0340	0,0109			
6	0,6931	-0,4994	0,1624	-0,065	0,0249	-0,0546		
7	0,6931	-0,4990	0,1600	-0,0621	0,0137	0,0035	-0,0023	
8	0,6931	-0,4996	0,1616	-0,0868	-0,0204	0,0674	-0,0540	0,0155
	0,0000	0,0004	0,0048	0,0249	0,0242	0,0465	0,0465	0,0142

Т а б л и ц а 1.5

n	$a_1^{(n)}$	$a_2^{(n)}$	$a_3^{(n)}$	$a_4^{(n)}$	$a_5^{(n)}$	$a_6^{(n)}$	$a_7^{(n)}$	$a_8^{(n)}$
3	0,6869	-0,4578	0,0778					
4	0,6922	-0,4899	0,1312	-0,0267				
5	0,6930	-0,4977	0,1543	-0,0542	0,0110			
6	0,6932	-0,5000	0,1951	-0,0748	0,0296	-0,0062		
7	0,6933	-0,5034	0,1885	-0,1456	0,1363	-0,0848	0,0225	
8	0,6933	-0,5032	0,1921	-0,1783	0,2395	-0,2393	0,1339	-0,0311
	0,0002	0,0032	0,0257	0,0966	0,1949	0,2175	0,1264	0,0298

Т а б л и ц а 1.6

n	$a_1^{(n)}$	$a_2^{(n)}$	$a_3^{(n)}$	$a_4^{(n)}$	$a_5^{(n)}$	$a_6^{(n)}$	$a_7^{(n)}$	$a_8^{(n)}$
3	0,6869	-0,4579	0,0778					
4	0,6922	-0,4899	0,1312	-0,0267				
5	0,6930	-0,4977	0,1647	-0,0542	0,0110			
6	0,6932	-0,5000	0,1651	-0,0748	0,0296	-0,0062		
7	0,6931	-0,4985	0,1562	-0,0497	-0,0063	0,0191	-0,0070	
8	0,6933	-0,5033	0,1923	-0,1790	0,2406	-0,2401	0,1342	-0,0312
	0,0002	0,0033	0,0259	0,0973	0,1960	0,2183	0,0267	0,0299

Схема счета обращения симметричных матриц методом предварительной ортонормализации аналогична схеме счета обращения симметричных матриц методом окаймления [155], особенно в том случае, когда вычисление α_{ik} и γ_{ki} осуществляется по формулам (1.135) и (1.136). Напомним алгоритм обращения матрицы, основанный на идее окаймления.

Пусть следует обратить матрицу $A_n = \|a_{ij}\|$ n -го порядка

$$A_n = \begin{vmatrix} A_{n-1} & u_n \\ v_n & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где A_{n-1} — окаймленная матрица $n - 1$ -го порядка, состоящая из первых $n - 1$ строк и столбцов матрицы A_n , v_n и u_n — вектор-строка и вектор-столбец соответственно:

$$v_n = (a_{n1}, \dots, a_{n,n-1}), \quad u_n = (a_{1n}, \dots, a_{n-1,n}).$$

Тогда обратная матрица A_n^{-1} вычисляется по формуле:

$$A_n^{-1} = \begin{vmatrix} A_{n-1}^{-1} + \frac{A_{n-1}^{-1} u_n v_n A_{n-1}^{-1}}{\alpha_n} - A_{n-1}^{-1} u_n & \\ -\frac{v_n A_{n-1}^{-1}}{\alpha_n} & \frac{1}{\alpha_n} \end{vmatrix},$$

где $\alpha_n = a_{nn} - v_n A_{n-1}^{-1} u_n$, A_{n-1}^{-1} — матрица, обратная к A_{n-1} . Если последняя известна, то для нахождения A_n^{-1} нужно произвести следующие действия [155]:

- 1) вычислить столбец $(-A_{n-1}^{-1} u_n) = (\beta_{1n}, \dots, \beta_{n-1,n})$;
- 2) вычислить строку $-v_n A_{n-1}^{-1} = (\bar{\beta}_{n1}, \dots, \bar{\beta}_{n,n-1})$;
- 3) вычислить число

$$\alpha_n = a_{nn} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ni} \beta_{in} = a_{nn} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \bar{\beta}_{in},$$

- 4) найти элементы c_{ik} обратной матрицы A_n^{-1} по формулам

$$c_{ik} = c'_{ik} + \frac{\beta_{in} \bar{\beta}_{nk}}{\alpha_n}, \quad i, k \leq n - 1$$

$$c_{in} = \frac{\beta_{in}}{\alpha_n}, \quad c_{nk} = \frac{\bar{\beta}_{nk}}{\alpha_n}, \quad c_{nn} = \frac{1}{\alpha_n},$$

где c'_{ik} — элементы матрицы A_{n-1}^{-1} .

Учитывая, что $\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{ij} \gamma_{ik} = c'_{jk}$ — элементы матрицы A_{n-1}^{-1} (см. формулы (1.125), (1.146)), из формулы (1.135) получаем

$$(\alpha_{in}) = -(v_n A_{n-1}^{-1}),$$

или

$$\alpha_{in} = \beta_{in}.$$

Легко проследить также связь схемы счета метода обращения матриц методом биортонормализации (формулы (1.157) — (1.162)) и метода окаймления.

Следует, однако, отметить, что если нужно решить систему (1.117), то для этого нецелесообразно получить сначала элементы обратной матрицы c_{jk} и затем находить решение из (1.125). Более устойчивую схему счета дает такой алгоритм: сначала вычисляются γ_{ki} , затем по формуле (1.123) находятся величины l_k и по формуле (1.124) — окончательное решение. Действительно, причиной аварийного останова машины (из-за переполнения рядов) может служить деление на число $\|\psi_n\|$, которое в силу формулы (1.134) равно

$$\|\psi_n\| = \sqrt{a_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} (RD_n, R_i)^2} = \sqrt{\|D_n\|^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_i^2},$$

где Φ_i — коэффициенты Фурье элемента D_n по ортонормированной системе $\{R_i\}_{i=1}^{n-1}$. Пусть значение $\|D_n\|^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_i^2 = 2^{-t}$ достаточно мало (в силу неминимальности системы $\{D_k\}$). Тогда элемент c_{nn} обратной матрицы в силу формулы (1.126) равен

$$c_{nn} = \gamma_{nn}^2 = \frac{1}{\|D_n\|^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_i^2} = 2^t,$$

и если число 2^t не представимо в ЭВМ, произойдет аварийный останов. Что касается числа γ_{nn} , то оно равно $2^{t/2}$, и описанный выше алгоритм может дать решение, ибо после вычислений коэффициентов ортонормализации величины l_k и d_k уже зависят от правых частей b_j системы и, следовательно, они могут умещаться в разрядную сетку машины.

Метод предварительной орто- и биортонормализации, так же как и метод окаймления, имеет важное преимущество перед другими методами решения линейных систем в случае решения граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. Действительно, в процессе решения получаются коэффициенты ортогонализации γ_{ij} и, следовательно, получаются элементы обратных матриц

$$\sum_{i=r}^s \gamma_{ij} \gamma_{ik}, \quad r = \max(k, j)$$

для всех $s = 1, \dots, n$. Это дает возможность оборвать процесс разложения на том значении s , при котором норма разности $\left\| c - \sum_{k=1}^s l_k R_k \right\|$ мала. Для того чтобы такой контроль давал заметные результаты, следует проанализировать функции $\{D_k\}$ и выбрать их удачную нумерацию. Так, если заведомо известно, что D_{20} вместе с первыми s функциями D_i более подходит для c , чем D_5 , то ясно, что после перестановки их номеров может

оказаться, что D_5 (в старой нумерации) вообще не участвует в разложении, если $s < 20$. В качестве критерия малости остатка разложения удобно воспользоваться формулой

$$\left\| c - \sum_{k=1}^s l_k R_k \right\|_{L_2}^2 = \int_1^s \int_1^s \left[c(s) - \sum_{k=1}^s l_k R_k(s) \right]^2 ds = \|c\|_{L_2}^2 - \sum_{k=1}^s l_k^2.$$

§ 1.8. Оценки числа арифметических действий при решении граничных задач методом разложения по неортогональным функциям

При решении многомерных граничных задач возникают значительные трудности, связанные с необходимостью выполнения большого количества арифметических операций, а при реализации решения на цифровых машинах — с необходимостью большого объема памяти. В [42] даются ориентировочные оценки числа арифметических операций и объема памяти для метода конечных разностей. Если предположить, что для каждого пространственного переменного берется N узлов и что расчеты требуют, чтобы $N = 10^k$, то для числа N_1 ячеек в объеме памяти, необходимого для решения s -мерной граничной задачи, получаем выражение $N_1 = 10^{sk}$ (всюду дальше $k = 1$ для грубых расчетов, $k = 2$ для расчетов средней точности и $k = 3$ для высокоточных расчетов). Далее, предполагая, что решение сеточных уравнений требует N переборов и обработка каждого узла требует 10 машинных операций, получаем для числа N_2 арифметических операций выражение $N_2 = 10^{k(s+1)+1}$. При $k = s = 3$ числа N_1 и N_2 получаются очень большими. Надо, однако, заметить, что эти числа получаются большими и для других методов⁷⁾.

Оценим необходимое число N_3 машинных операций для вариационных методов. Пусть задано функциональное уравнение

$$Ax = B, \quad (1.163)$$

где A — положительно определенный оператор в пространстве H , B — заданный элемент H , x — искомый элемент H , и пусть решение ищется в виде

$$x = \sum_{k=1}^n a_k \psi_k, \quad (1.164)$$

где $\{\psi_k\}$ — линейно независимая система, a_k — искомые коэффициенты разложения, наилучшего в смысле энергетического пространства H_A .

⁷⁾ Предположение о том, что вариационный метод требует значительно меньшего числа действий [113, с. 10], слишком оптимистично.

Система Ритца для определения коэффициентов a_k имеет вид

$$\sum_{j=1}^n c_{kj} a_j = d_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.165)$$

где

$$c_{kj} = (A\psi_k, \psi_j), \quad d_k = (B, \psi_k). \quad (1.166)$$

Число машинных операций N_3 , необходимое для реализации вариационного метода, равно

$$N_3 = N_4 + N_5 + N_6, \quad (1.167)$$

где N_4 — число машинных операций для вычисления скалярных произведений по формулам (1.166), N_5 — число машинных операций для решения системы (1.165), N_6 — число машинных операций для вычисления x по формуле (1.164).

Если через N_7 обозначить число машинных операций, необходимое для вычисления значения функции ψ_k в одной точке, а через N_8 обозначить число точек, в которых требуется получение решения x функционального уравнения (1.163), то

$$N_6 = nN_7N_8. \quad (1.168)$$

Предполагая, что при вычислении скалярных произведений (1.166) интегралы заменяются кубатурными формулами с числом узлов N_9 по каждой переменной, для N_4 получим выражение

$$N_4 = \frac{n(n+3)}{2} N_9^5 N_7. \quad (1.169)$$

Систему (1.165) будем решать путем предварительной ортонормализации элементов системы $\{\psi_k\}$. Пусть при ортонормализации используются следующие формулы для получения коэффициентов a_k :

$$a_k = \sum_{i=k}^n \gamma_{ik} l_i, \quad l_i = \sum_{j=1}^i \gamma_{ji} d_j, \\ \gamma_{ki} = - \frac{\alpha_{ik}}{\sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_{ik} \alpha_{jk} a_{ij}}}, \quad (1.170)$$

$$\alpha_{ik} = \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{j=1}^s \gamma_{si} \gamma_{sj} a_{kj}, \quad a_{kk} = -1.$$

Оценим число арифметических действий для решения системы (1.165) по приведенным формулам. Для вычисления произведения

$r_{ks} = \sum_{j=1}^s \gamma_{sj} a_{kj}$ потребуются s умножений и $(s-1)$ сложений,

а для вычисления α_{ik} понадобится $\sum_{s=i}^{k-1} s = \frac{(k-1+i)(k-i)}{2}$ ум-

ножений и $\sum_{s=i}^{k-1} (s-1) = \frac{(k-1+i)(k-i)}{2} - k + i$ сложений.

Вычисление всех α_{ik} ($i = 1, \dots, k-1$) потребует

$$\sum_{i=1}^{k-1} \left[\frac{(k-1+i)(k-i)}{2} + k - i \right] = \frac{k^3}{6} + \frac{k^2}{4} - \frac{5k}{12}$$

умножений и

$$\sum_{i=1}^{k-1} \left[\frac{(k-1+i)(k-i)}{2} - 1 \right] = \frac{k^3}{6} + \frac{k^2}{4} - \frac{11k}{12} + 1$$

сложений.

Полный набор α_{ik} ($k = 1, \dots, n$), ($i = 1, \dots, k$) потребует

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{k^3}{6} + \frac{k^2}{4} - \frac{5k}{12} \right] = \frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{24} - \frac{n}{6}$$

умножений и

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{k^3}{6} - \frac{k^2}{4} - \frac{11k}{12} + 1 \right] = \frac{n^4}{24} - \frac{13n^2}{24} + \frac{n}{2}$$

сложений.

Вычисление одного числа (для одного значения k)

$$\|\psi_k\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_{ik} \alpha_{jk} a_{ij}}$$

потребуется $k^2 + k$ умножений и $(k-1)^2 + k - 1$ сложений, а вычисление всех чисел $\|\psi_k\|$ ($k = 1, \dots, n$) потребует $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$ умножений и $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$ сложений.

После нахождения α_{ik} и $\|\psi_k\|$ вычисление одного числа γ_{ki} требует одного деления и, следовательно, нахождение всех γ_{ki} ($k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, k$) потребует $\frac{n(n+1)}{2}$ делений.

Таким образом, полное число умножений, сложений и делений при указанном вычислении коэффициентов ортонормализации равно соответственно

$$\begin{aligned} & \frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{2} + \frac{23n^2}{24} + \frac{n}{2}, \\ & \frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{3} - \frac{13}{24}n^2 + \frac{n}{6}, \\ & \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}. \end{aligned} \quad (1.174)$$

Ввиду симметричности обратной к c_{kj} матрицы будем вычислять по формуле

$$f_{jk} = \sum_{i=k}^n \gamma_{ij} \gamma_{ik} \tag{1.172}$$

те элементы f_{jk} , для которых $k = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$. Тогда $a_k = \sum_{j=i}^n f_{jk} l_{jn}$ и вычисление всех коэффициентов f_{jk} потребует $\sum_{k=1}^n (n - k + 1) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ умножений и $\sum_{k=1}^n (n - k) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$ сложений. Учитывая, что вычисление всех a_k ($k = 1, \dots, n$) потребует еще n^2 умножений и $(n - 1)n$ сложений, для N_5 окончательно получаем

$$\frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{2} + \frac{61n^2}{24} + n$$

умножений,

$$\frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{3} + \frac{23}{24} n^2 - \frac{4}{3} n$$

сложений,

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

делений.

При $n = \sqrt[3]{20^{ks}}$, $N_7 = 100$, $N_8 = 10^{ks}$, $N_9 = 10^k$ получаем следующую табл. 1.7 (величины в ней округлены).

Приведенную таблицу трудно сопоставить с соответствующими данными [42] для метода конечных разностей, так как неизвестно, как зависит число верных знаков, гарантированных мето-

Т а б л и ц а 1.7

s	k = 1			k = 2			k = 3		
	N ₄	N ₅	N ₆	N ₄	N ₅	N ₆	N ₄	N ₅	N ₆
1	7 · 10 ³	2 · 10	2 · 10 ³	5 · 10 ²	3 · 10 ²	5 · 10 ⁴	4 · 10 ⁷	2 · 10 ⁵	3 · 10 ⁶
2	5 · 10 ⁵	3 · 10 ³	5 · 10 ⁴	4 · 10 ³	3 · 10 ⁵	4 · 10 ⁷	2 · 10 ¹³	2 · 10 ⁹	4 · 10 ¹⁰
3	4 · 10 ⁷	2 · 10 ⁵	2 · 10 ⁶	2 · 10 ¹³	2 · 10 ⁹	4 · 10 ¹⁰	6 · 10 ¹⁸	4 · 10 ¹⁴	8 · 10 ¹⁴

дом конечных разностей и вариационным методом, от числа узлов и от числа координатных функций. Все же надо отметить, что при сделанных предположениях вариационный метод для высокоточных ($k = 3$) решений трехмерных ($s = 3$) задач требует только для вычисления скалярных произведений в 6000 раз боль-

ше времени, чем все время решения задачи методом сеток (для машины, рассматриваемой в [42], оно составит $6 \cdot 10^5$ лет). Если при $k = s = 3$ вместо 8000 координатных функций применить только 1000 (что в миллион раз меньше числа узлов, рассмотренных в [42]), то для N_4 получаем значение $5 \cdot 10^{14}$, что в 50 раз больше числа арифметических операций, которые нужны для метода конечных разностей, и для машины, рассмотренной в [42], составляет 5000 лет.

Несколько лучшие оценки получаются для методов, описанных в первых двух параграфах, ибо скалярные произведения в этих методах содержат для s -мерных задач интегралы на $(s - 1)$ -мерных многообразиях, что сильно уменьшает N_4 (как видно из приведенной табл. 1.7, N_4 принимает наибольшие значения). Однако N_5 и N_6 для этих методов принимают те же значения, что и в вариационных методах⁸⁾.

Нетрудно видеть, что вариационный и конечноразностный методы требуют при высокоточном решении многомерных задач объема памяти, значительно превышающего объем памяти современных ЭВМ. Поэтому в настоящее время при решении этих задач точность будет лимитироваться размерами памяти, и при высокоточных расчетах память будет полностью загружена. В этом случае число узлов в методе сеток будет равно η , а число координатных функций будет порядка $\sqrt{\eta}$, где η — число ячеек в памяти машины. Тогда при решении трехмерных задач число арифметических действий в методе сеток в предположении работы [42] будет порядка $\eta^{4/3}$, а в вариационных методах только решение системы Рунге потребует порядка $\eta^{3/2}$ арифметических действий.

Следует отметить, что использование формул (1.170) привело к тому, что для N_5 получаем порядка n^4 арифметических действий, тогда как обычные методы решения систем n линейных уравнений требуют порядка n^3 арифметических действий. Дадим оценки N_5 для того случая, когда α_{ik} и γ_{ki} вычисляются из формул (1.135) и (1.136) соответственно:

$$\alpha_{ik} = \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} \sum_{s=0}^{k-1} \gamma_{si} \gamma_{sj}, \quad \theta = \max(j, i), \quad i = 1, \dots, k-1,$$

$$\gamma_{ki} = \frac{\alpha_{ik}}{\sqrt{a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} \left[\sum_{j=1}^i \gamma_{ij} a_{kj} \right]^2}}.$$

Вычисления α_{ik} следует осуществить в такой последовательности. Зафиксируем $i = 1$ и вычислим α_{ik} ($k > 1$). При переходе к вы-

⁸⁾ Поэтому трудно утверждать, что число арифметических операций в этих методах «явно несоизмеримо с фантастическими размерами из расчетов В. Вазова и Дж. Форсайта» [86, с. 472].

числению α_{ik+1} нам придется к ранее полученным суммам $\sum_{s=0}^{k-1} \gamma_{si} \gamma_{sj}$ добавить по одному составляющему $\gamma_{ki} \gamma_{kj}$ и умножить их на a_{jk} . Это потребует $2(k-1)$ умножений и $2(k-2)$ сложений, или всего при $k=2, 3, \dots, n$ необходимо $\sum_{k=1}^n 2(k-1) = n^2 - 3n$

умножений и $\sum_{k=2}^n 2(k-2) = n^2 - 5n$ сложений. При $i=2$ вычисление всех α_{ik} ($k > 2$) требует $\sum_{k=3}^n 2(k-1)$ умножений и $\sum_{k=3}^n 2(k-2)$ сложений. В общем случае вычисление всех α_{ik} ($i=1, \dots, k-1$) требует $\sum_{k=i}^n 2(k-1)$ умножений и $\sum_{k=i}^n 2(k-2)$ сложений. Таким образом, вычисление всех α_{ik} требует

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n 2(k-1) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n 2(k-1) - \sum_{s=1}^{i-1} 2(s-1) \right) = \frac{2}{3} n^3 - n^2 + \frac{5}{3} n$$

умножений и

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n 2(k-2) = \frac{2}{3} n^3 - \frac{3}{2} n^2 + 2 \frac{1}{6} n$$

сложений. Вычисление всех $\|\psi_k\|$ требует

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k (i+1) = \frac{1}{6} n^3 + n^2 - \frac{1}{6} n$$

умножений,

$$\sum_{k=i}^n \sum_{i=1}^k (i-1) = \frac{1}{6} n^3 + \frac{5}{6} n$$

сложений и n извлечений квадратного корня. Для вычисления всех коэффициентов ортонормализации необходимо n извлечений квадратного корня, $\frac{n(n+1)}{2}$ делений, $\frac{5}{6} n^3 + \frac{3}{2} n$ умножений и $\frac{5}{6} n^3 - \frac{3}{2} n^2 + 3n$ сложений.

В настоящее время существует метод решения линейной системы n -го порядка, который требует несколько меньшего порядка арифметических действий, а именно, $n^{\log_2 7}$ [198]. Однако в процессе решения системы методом предварительной ортонормализации, как и в методе окаймления, получают обратные матрицы $\sum_{i=r}^s \gamma_{ij} \gamma_{ik}$ ($r = \max(k, j)$, $k=1, \dots, s$; $j=1, \dots, k$) всех

порядков $s = 1, \dots, n$, — всего порядка n^3 различных, вообще говоря, чисел. Так как все они, как было сказано в конце предыдущего параграфа, используются в процессе решения граничных задач, то, по-видимому, порядок оценки $O(n^3)$ числа арифметических действий в этом алгоритме не улучшаем. Заметим, что согласно гипотезе 2 работы [30], должен существовать метод решения системы n -го порядка, при котором требуется p арифметических операций, причем число p логарифмически эквивалентно n^2

$$\ln p \sim \ln n^2 = 2 \ln n.$$

Выясним, в каких случаях рассматриваемые здесь методы решения граничных задач будут обладать свойствами сформулированных в работе [30] оптимальных методов решения задач математической физики. Для этого рассмотрим оценку (1.93)

$$\min_{ak} \left\| \psi - \sum_{k=1}^N a_k l \psi_k(y) \right\| \leq c \left(\frac{N}{m^m} \right)^{-r/n},$$

где m — размерность вектор-функций $\psi(y)$ и $\psi_k(y)$; n — размерность гиперповерхности Γ , на которой задана $\psi(y)$, r (как уже было сказано в начале § 1.6) характеризует приспособленность системы $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ для решения граничной задачи. Величина m^m в знаменателе отражает тот факт, что аппроксимация m -мерных вектор-функций требует большего количества функций, чем аппроксимация m скалярных функций (в этом случае в знаменателе стояло бы число m вместо m^m). Будем предполагать, что

Т а б л и ц а 1.8

m	n = 1			n = 2			n = 3		
	k								
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	3	5	10	5	32	10 ²	10	10 ²	10 ³
2	12	20	40	20	128	4 · 10 ²	40	4 · 10 ²	4 · 10 ³
3	27	45	90	45	288	9 · 10 ²	90	9 · 10 ²	9 · 10 ³

$c = 1$, и вычислим, сколько функций потребуется для того, чтобы

$$\left\| \psi(y) - \sum_{k=1}^N a_k l \psi_k(y) \right\| = 10^{-k}. \tag{1.173}$$

Учитывая оценку (1.93), получаем

$$N = m^m 10^{kn/r}. \tag{1.174}$$

В табл. 1.8—1.10 заглабулированы значения N при $r = 3$ (табл. 1.8), при $r = 2$ (табл. 1.9) и при $r = 1$ (табл. 1.10). Из этих таблиц видно, что только при удачном выборе системы функций $\{\psi_k\}$

($r = 3$) современные вычислительные машины дают возможность решать пространственные граничные задачи описанными методами (для этих методов $n = 2$ в случае пространственных граничных задач) со средней точностью ($k = 2$) для двумерных вектор-функций ($m = 2$). То же решение с помощью классических вариационных методов потребует уже 400 функций ($r = 3$, $m = 2$, $n = 3$).

Может показаться, что в вариационных методах можно выбрать такую систему $\{\psi_k\}$, которая в оценке (1.93) обеспечивала

Т а б л и ц а 1.9

m	$n = 1$			$n = 2$			$n = 3$		
	k								
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	4	10	32	10	10^1	10^3	32	10^3	10^4
2	16	40	128	40	$4 \cdot 10^2$	$4 \cdot 10^3$	128	$4 \cdot 10^3$	$12 \cdot 10^4$
3	36	90	288	90	$9 \cdot 10^2$	$9 \cdot 10^3$	288	$9 \cdot 10^3$	$27 \cdot 10^4$

бы значение $r > 3$, но опыт решения граничных задач с помощью неортогональных рядов показывает, что в реальных задачах для уравнений математической физики уже допущение $r = 3$ является довольно оптимистичным (поэтому и называли такие системы удачно выбранными).

Согласно гипотезе работы [30] минимальное число p арифметических операций, достаточное для решения задачи, логарифмически эквивалентно объему исходной информации h , т. е. $\ln p =$

Т а б л и ц а 1.10

m	$n = 1$			$n = 2$			$n = 3$		
	k								
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	10	100	1000	100	10^4	10^6	10^3	10^6	10^9
2	40	400	4000	$4 \cdot 10^2$	$4 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^9$
3	90	900	9000	$9 \cdot 10^2$	$9 \cdot 10^4$	$9 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^9$

$= \ln h$. Эту гипотезу следует понимать так, что существует оптимальный по порядку числа арифметических действий метод решения граничной задачи (1.1), (1.2), который требует число арифметических действий, логарифмически эквивалентное объему исходной информации. Естественно для граничной задачи (1.1), (1.2) в качестве объема исходной информации считать число N точек $y_k \in S$, в которых требуется знать значение граничной функции $\psi(y)$.

Будем предполагать, что каждая составляющая вектор-функции $\psi(y)$ входит в класс⁹⁾ $H(p, A, \lambda)$ [62]. Тогда для $l\psi_i(y) = lH_i(x_k, y)$ ($x_k \neq y$), компоненты скалярного произведения $(\psi(y), \psi_k(y))$ также будут входить в класс $H(p, A, \lambda)$. Следовательно [117], скалярные произведения $(\psi(y), \psi_k(y))$ могут быть вычислены с точностью $O(N^{-(p+\lambda)/n})$, где N — число узлов соответствующей кубатурной формулы, с помощью которой вычисляются интегралы в скалярных произведениях, n — размерность поверхности Γ . Если погрешность вычисления скалярных произведений должна быть порядка 10^{-k} , то получаем асимптотическое равенство

$$\bar{N}^{-(p+\lambda)/n} = 10^{-k},$$

или

$$\bar{N} = 10^{nk/(p+\lambda)}.$$

Число p арифметических действий, согласно гипотезе Бахвалова, в оптимальном по числу арифметических действий методе решения граничных задач должно быть логарифмически эквивалентно \bar{N} , то есть

$$\ln \bar{p} \sim \ln \bar{N} = \frac{nk}{p+\lambda} \ln 10. \quad (1.175)$$

При $p+\lambda=3$ из (1.175) получаем, что число арифметических действий в оптимальном методе логарифмически эквивалентно числу N координатных функций из формулы (1.174):

$$\ln \bar{p} \approx \ln N.$$

Но вариационный метод при равном N числе координатных функций требует вычисления $N(N+3)/2$ скалярных произведений и $O(N^3)$ арифметических действий для решения системы Рунге, так что число \bar{p} арифметических действий в вариационных методах имеет по крайней мере порядок N^3 , т. е.

$$\ln \bar{p} \sim 3 \ln N.$$

Последнее соотношение показывает, сколь далеко число арифметических действий в вариационных методах от оптимального по гипотезе Бахвалова числа арифметических действий. Иногда при сравнении машинного времени, необходимого для вычисления по разностному и вариационному методам решения граничных задач, предпочтение отдадут [86, 113] последнему. Это представляется тем более необоснованным, что для некоторых граничных задач разработаны схемы счета разностного аналога, которые требуют [30] оптимального числа арифметических операций. В настоящее время число операций в вариационных методах далеко от оптимального числа арифметических действий при ре-

⁹⁾ Класс функций, p -я производная которых входит в класс Гёльдера с показателем λ и константой A .

нении граничных задач. По-видимому, исследование по дальнейшему уменьшению числа арифметических действий для рассмотренных выше методов решения граничных задач с помощью неортогональных функций для вариационных методов следует проводить в направлении более удачного выбора системы функций $\{\psi_k\}$ и поиска таких способов ортонормализации, которые требуют порядка N^2 арифметических действий.

§ 1.9. Один способ нахождения коэффициентов разложения

Из предыдущих параграфов ясно, что для получения коэффициентов разложения по неортогональным системам функций приходится решать систему линейных уравнений или, что то же самое, предварительно ортонормировать системы функций. Многие задачи прикладной математики сводятся к разложению функций $\varphi(x) \in L_2(G)$ в ряд по функциям полной системы $\{\varphi_i(x)\}$. Для сходимости в $L_2(G)$ ряда

$$\sum_{i=1}^N a_i^{(N)} \varphi_i(x) \quad (1.176)$$

к $\varphi(x)$, достаточно получить из данной системы линейно независимую систему (исключив «лишние» функции), затем — ортонормированную систему $\{\omega_i(x)\}$, элементы которой имеют вид

$$\omega_i(x) = \sum_{k=1}^i A_{ki} \varphi_k(x),$$

и построить ряд Фурье функции $\varphi(x)$ по системе $\{\omega_i(x)\}$:

$$\sum_{i=1}^N b_i \omega_i(x), \quad b_i = \int_G \varphi(x) \omega_i(x) dx.$$

Для коэффициентов $a_i^{(N)}$ ряда (1.176) получим

$$a_i^{(N)} = \sum_{k=i}^N A_{ki} b_k.$$

Практическое осуществление ортонормализации большого ¹⁰⁾ числа линейно независимых функций встречает на своем пути значительные трудности. Во-первых, при ортонормализации n функций требуется вычислить с высокой точностью элементы детерминанта Грама, т. е. (учитывая симметричность этого де-

¹⁰⁾ На численных расчетах, проведенных с помощью стандартных программ, убедились, что в ряде случаев метод рядов Фурье при небольшой точности (2 знака) требует малого количества членов разложения. Однако дальнейшее увеличение точности значительно увеличивает необходимое число членов разложения, и поэтому приходится ортонормировать большое число функций.

терминанта) $n(n+1)/2$ интегралов вида $\int_G \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx$. Это требует большого машинного времени. Так, например, ортонормализация системы

$$\{\ln r(M_i, M)\}, \quad i = 1, 2, \dots, 28, \quad (1.177)$$

где $r(M_i, M)$ — расстояние между фиксированной точкой и переменной точкой M , $M_i \in S_1$, $M \in S$ (S и S_1 — концентрические окружности радиусов 1 и 1,05), требует около двух с половиной часов машинного времени БЭСМ-2 (точность вычисления интегралов 10^{-6}).

Вторая трудность, более существенная, заключается в малости детерминанта Грама для ненадежных линейно независимых систем (не являющихся базисом Бари [80]). Так, для ненадежной системы (1.177) в случае концентрических окружностей S и S_1 радиусов 1 и 2 (точки M_i были расположены равномерно на окружности S_1) не удалось из соответствующего детерминанта Грама получить отличный от машинного нуля детерминант десятого порядка, хотя (как будет показано в гл. III) система (1.177) линейно независима (вычисления проводились на машине БЭСМ-2). Таким образом, ортонормировать десять функций из системы (1.177) на машине БЭСМ-2 (39 разрядов, из них 32 для мантииссы) не удастся. Надо также иметь в виду, что обычное суммирование ряда Фурье неустойчиво, а задача о приближенном определении функции в некоторой точке по приближенным значениям коэффициентов Фурье в метрике l_2 является некорректной задачей [148].

Из сказанного становится ясной важность построения алгоритма для получения коэффициентов $a_i^{(N)}$ ряда (1.176) по неортогональным системам функций. Ясно, что выбор в качестве $a_i^{(N)}$ коэффициентов Фурье, вообще говоря, сходимости не обеспечивает. Так, если точки M_i расположены всюду плотно на S_1 , то система (1.177) полна в $L_2(S)$ [84]. Однако, разлагая постоянную c на S в ряд Фурье по системе (1.177), получим

$$c \sim \sum_{i=1}^N a_i^{(N)} \ln r(M_i, M) = a \sum_{i=1}^N \ln r(M_i, M),$$

где

$$a = c \int_S \ln r(M_i, M) dS_M$$

(интеграл не зависит от расположения точек M_i на S_1).

В настоящем параграфе излагается метод разложения функций в ряд по неортогональным системам функций, не требующий решения линейной системы. Теорема дает достаточные условия для сходимости соответствующих рядов. Как будет пока-

зано ниже, предлагаемые ряды обеспечивают несколько лучшее приближение по сравнению с рядами Фурье для приближенно ортонормированных функций.

Пусть ищется разложение $\sum_i a_i \varphi_i$ функции $\varphi(x)$ по системе $\{\varphi_i(x)\}$ ($i = 1, 2, \dots$), функции которой будем считать нормированными. Первый коэффициент a_1 совпадает с коэффициентом Фурье для функции φ

$$a_1 = \int_G \varphi \varphi_1 dx.$$

Разность $\varphi - a_1 \varphi_1$ назовем первым остатком. Второй коэффициент является коэффициентом Фурье для первого остатка

$$a_2 = \int_G (\varphi - a_1 \varphi_1) \varphi_2 dx.$$

Разность $\varphi - \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i$ назовем k -м остатком; $(k+1)$ -й коэффициент является коэффициентом Фурье для k -го остатка:

$$a_{k+1} = \int_G \left(\varphi - \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i \right) \varphi_{k+1} dx.$$

Обозначим

$$\varphi^{(N)}(x) = - \sum_{i=0}^N a_i \varphi_i(x), \quad \varphi_0(x) = \varphi(x), \quad a_0 = -1, \quad (1.178)$$

тогда коэффициенты разложения вычисляются по формулам

$$a_i = \int_G \varphi^{(i-1)}(x) \varphi_i(x) dx, \quad \varphi^{(0)}(x) = \varphi(x), \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.179)$$

Доказательство сходимости $\|\varphi^{(N)}(x)\|_{L_2} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ равносильно доказательству сходимости ряда (1.176) в смысле метрики $L_2(G)$.

Как видно из формул (1.178), (1.179), при увеличении числа членов разложения в ряду (1.176) предыдущие коэффициенты не меняются, и надо вычислить лишь коэффициенты для новых членов разложения. Это важное преимущество (с вычислительной точки зрения) является одновременно и существенным недостатком предлагаемого метода. Действительно, во многих случаях заведомо известно, что функция $\varphi(x)$ не представима в виде бесконечного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$, поэтому в таких случаях предлагаемый метод составления рядов не обеспечит схо-

димости (хотя $\varphi(x)$ сколь угодно точно может быть приближена в $L_2(G)$ рядом $\sum_{k=1}^N a_k^{(N)} \varphi_k(x)$ при $N \rightarrow \infty$).

Последовательность положительных чисел

$$\|\varphi^{(n)}(x)\|_{L_2} = \sqrt{\varphi^{(n)}(x), \varphi^{(n)}(x)}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

монотонно убывает, и, значит, имеет некоторый предел R . Действительно [26],

$$\begin{aligned} \|\varphi^{(n)}(x)\|_{L_2}^2 &= \min_{a_n} \|\varphi^{(n-1)}(x) - a_n \varphi_n(x)\|_{L_2}^2 = \frac{G(\varphi^{(n-1)}, \varphi_n)}{G(\varphi_n)} = \\ &= \|\varphi^{(n-1)}(x)\|_{L_2}^2 - \left[\int_S \varphi^{(n-1)}(x) \varphi_n(x) dx \right]^2, \end{aligned}$$

где $G(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ — детерминант Грама функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

Можно также показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N_0 , что

$$\sum_{k=N_0}^{\infty} (\varphi^{(k)}, \varphi_{k-1}) < \varepsilon.$$

Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N_0 , что

$$\varepsilon > \|\varphi^{(N_0)}(x)\|_{L_2}^2 - R = \sum_{k=N_0}^{\infty} (\varphi^{(k)}, \varphi_{k+1})^2. \quad (1.180)$$

В силу (1.178), (1.179), (1.180) и нормированности системы $\{\varphi_i(x)\}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N_0 , что при $\varepsilon > N_0$

$$\begin{aligned} \varepsilon > \left| \|\varphi^{(s)}(x)\|_{L_2}^2 - \|\varphi^{(s+1)}(x)\|_{L_2}^2 \right| &= \\ &= \left| \int_G \left[\sum_{i=0}^s a_i \varphi_i(x) \right]^2 dx - \int_G \left[\sum_{i=0}^{s+1} a_i \varphi_i(x) \right]^2 dx \right| = \\ &= \left| + 2a_{s+1} \int_G \varphi^{(s)}(x) \varphi_{s+1}(x) dx - a_{s+1}^2 \int_G \varphi_{s+1}^2(x) dx \right| = a_{s+1}^2. \end{aligned}$$

Из полученной формулы непосредственно следует, что для рассматриваемого метода нахождения коэффициентов разложения справедливо неравенство Бесселя (см. формулу (1.220)). Таким образом, для любого $\varepsilon_1 > 0$ и любого целого N найдется такое N_0 , что

$$\varphi^{(s)}(x) = \varphi^{(r)}(x) + \gamma_r^{(s)}(x), \quad N_0 \leq s, \quad r \leq N_0 + N, \quad (1.181)$$

где

$$\|\gamma_r^{(s)}(x)\|_{L_2} < \varepsilon_1. \quad (1.182)$$

Подставляя (1.181) в (1.180), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon > \sum_{k=N_0}^{\infty} (\varphi^{(k)}, \varphi_{k+1})^2 &\geq \sum_{k=N_0}^{N_0+N} (\varphi^{(k)}, \varphi_{k+1})^2 = \\ &= \sum_{k=N_0}^{N_0+N} (\varphi^{(r)}, \varphi_{k+1})^2 + \sum_{k=N_0}^{N_0+N} (\gamma_r^{(k)}, \varphi_{k+1})^2 + \\ &\quad + 2 \sum_{k=N_0}^{N_0+N} (\varphi^{(r)}, \varphi_{k+1})(\gamma_r^{(k)}, \varphi_{k+1}). \end{aligned} \quad (1.183)$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского и учитывая (1.182), можно второе и третье слагаемые в правой части выражения (1.183) при любом конечном N сделать сколь угодно малыми, и поэтому окончательно получаем, что для любого $\varepsilon_2 > 0$ и любого N найдется такое N_0 , что

$$\sum_{k=N_0}^{N_0+N} (\varphi^{(r)}, \varphi_{k+1})^2 < \varepsilon_2, \quad N_0 \leq r \leq N_0 + N. \quad (1.184)$$

Таким образом, разность между функцией $\varphi(x)$ и ее рядом $\sum_{i=1}^r a_i \varphi_i(x)$ «почти» ортогональна сколь угодно большому числу функций системы $\{\varphi_i(x)\}$.

Будем предполагать, что функция $\varphi(x)$ и система $\{\varphi_i(x)\}$ ($i = 1, 2, \dots$) удовлетворяют следующим условиям: для любых $\varepsilon > 0$ и N_0 найдутся такие коэффициенты b_k ($k = N_0, N_0 + 1, \dots, N_0 + N$), что

$$\left\| \varphi^{(r)}(x) - \sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_k \varphi_k(x) \right\|_{L_2} < \varepsilon, \quad (1.185)$$

$$\sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_k^2 < M, \quad (1.186)$$

где M — не зависящая от N_0 и N постоянная, а r — любое целое число, удовлетворяющее неравенствам $N_0 \leq r \leq N_0 + N$.

Согласно теореме Мюнца [26], условию (1.185) при фиксированном r удовлетворяет система $\{x^{k_i}\}$ ($i = 1, 2, \dots$) при

$$k_i > -\frac{1}{2}, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} k_i = \infty, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{k_i} = \infty,$$

где штрих означает возможный пропуск $k_i = 0$. Этому же условию при фиксированном r удовлетворяют так называемые потенциальные системы (системы фундаментальных решений).

Другими словами, как потенциальные системы, так и система $\{x^{ki}\}$ обладают тем свойством, что если выкинуть из них любое конечное число функций, они останутся полными в L_2 . Надо однако заметить, что в неравенстве (1.185) r зависит от N . Действительно, увеличив N , придется, как это следует из (1.184), увеличить N_0 .

Поэтому нельзя утверждать, что для указанных систем выполняется неравенство (1.185). Выполнение неравенства (1.185) зависит как от системы $\{\varphi_i(x)\}$, так и от разлагаемой функции $\varphi(x)$.

Условию (1.186) при $N_0 = 1$ удовлетворяют коэффициенты Фурье по полной ортонормированной системе (уравнение замкнутости). Однако рассмотренный выше ряд $\{x^{ki}\}_{i=1}^{\infty}$ условию (1.186) может уже не удовлетворять. Действительно, пусть $k_i > k_j$ при $i > j$ и N_0 в (1.186) выбрана так, что $k_{N_0} = 10$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_k x^{ki} \leq \sum_{k=N_0}^{N_0+N} |b_k| x^{ki} \leq x^{10} \sum_{k=N_0}^{N_0+N} |b_k| \leq x^{10} \sqrt{M}.$$

Таким образом, в интервале $0 \leq x \leq 1/N$ ряд $\sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_k x^{ki}$ при соблюдении условий (1.186) будет не больше числа $N^{-9}M$, и если разлагаемая функция $\varphi^{(r)}(x)$ на этом интервале больше этого числа, то условие (1.185) не будет соблюдаться. Именно на основе этих соображений построен отрицательный пример, приведенный после формулы (1.223).

Теорема. Ряд $\sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(x)$ функции $\varphi(x)$ по системе $\{\varphi_i(x)\}$, где φ и (φ_i) удовлетворяют условиям (1.185) и (1.186), а a_i вычисляются по формуле (1.179), сходится при $N \rightarrow \infty$ к функции φ в метрике $L_2(G)$.

Действительно, из (1.184), (1.186) и неравенства Коши Бунаковского получаем

$$\left| \sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_k (\varphi^{(r)}, \varphi_{k+1}) \right| < \sqrt{M} \varepsilon_2 < \varepsilon_3, \quad (1.187)$$

где b_k удовлетворяют условию

$$\left\| \varphi^{(r)}(x) - \sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_k \varphi_k(x) \right\| < \varepsilon_4, \quad (1.188)$$

ε_3 и ε_4 сколь угодно малы.

Из (1.187) и (1.188) получаем

$$\begin{aligned} \|\varphi^{(r)}\|_{L_2} &= \sqrt{(\varphi^{(r)}, \varphi^{(r)})} = \sqrt{\left(\varphi^{(r)}, \sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_k \varphi_k + \varphi^{(r)} - \sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_k \varphi_k\right)} \leq \\ &\leq \sqrt{\left|\sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_k (\varphi^{(r)}, \varphi_k)\right| + \left|\varphi^{(r)}, \varphi^{(r)} - \sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_k \varphi_k\right|} \leq \\ &\leq \sqrt{\varepsilon_3 + \|\varphi^{(r)}\|_{L_2}^2} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

где ε сколь угодно мало.

Условие (1.185), которому удовлетворяют функции в доказанной теореме, содержит функцию $\varphi^{(r)}(x)$ и, следовательно, трудно проверяемо. Поэтому представляет интерес следующее предложение.

Пусть функция $\varphi(x)$ и система $\{\varphi_i(x)\}$ ($i = 1, 2, \dots$) удовлетворяют условиям:

а) для любого целого N_0 и любой функции $u(x) \in L_2$ найдутся такие b_k ($k = N_0, N_0 + 1, \dots$), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| u(x) - \sum_{k=N_0}^n b_k \varphi_k(x) \right\|_{L_2} = 0, \quad (1.189)$$

$$\sum_{k=N_0}^{\infty} b_k^2 < M, \quad (1.190)$$

где M — не зависящая от N_0 постоянная;

б) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0 , что

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} A_k < \varepsilon, \quad (1.191)$$

где

$$A_k = \sum_{i=n_0+1}^k a_i (\varphi_i, \varphi_{k+1}) \left(2\varphi^{(n_0)} + \sum_{j=n_0+1}^k a_j \varphi_j \varphi_{k+1} \right).$$

Тогда ряд $\sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(x)$, где a_j вычисляются по формулам (1.179), сходится в среднем при $n \rightarrow \infty$ к функции $\varphi(x)$.

Действительно, из (1.180) находим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0 , что

$$\begin{aligned} \varepsilon > \sum_{k=n_0}^{\infty} (\varphi^{(k)}, \varphi_{k+1})^2 &= \sum_{k=n_0}^{\infty} (\varphi^{(n_0)}, \varphi_{k+1})^2 + \\ &+ \sum_{k=n_0}^{\infty} (\psi^{(k)} - \varphi^{(n_0)}, \varphi_{k+1})^2 + 2 \sum_{k=n_0}^{\infty} (\varphi^{(n_0)}, \varphi_{k+1}) (\varphi^{(k)} - \varphi^{(n_0)}, \varphi_{k+1}) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=n_0}^{\infty} (\varphi^{(n_0)}, \varphi_{k+1})^2 + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \left(\sum_{i=n_0+1}^k a_i (\varphi_i, \varphi_{k+1})^2 + \right. \\ \left. + 2 \sum_{k=n_0+1}^{\infty} (\varphi^{(n_0)}, \varphi_{k+1}) \left(\sum_{i=n_0+1}^k a_i \varphi_i \varphi_{k+1} \right) \right).$$

Из (1.191) и последнего неравенства получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0 , что

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} (\varphi^{(n_0)}, \varphi_{k+1}) < \varepsilon.$$

Применяя (1.189), (1.190) для функции $\psi^{(n_0)} \in L_2$, при $N_0 = n_0$ получаем

$$\lim \left\| \psi^{(n_0)}(x) - \sum_{k=n_0}^n b_k \varphi_k(x) \right\|_{L_2} = 0, \\ \sum_{k=n_0}^{\infty} b_k^2 < M,$$

или, применяя неравенство Коши — Бунаковского и теорему¹¹⁾ о непрерывности скалярного произведения, получаем

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k (\varphi^{(n_0)}, \varphi_{k+1}) = (\varphi^{(n_0)}, \varphi^{(n_0)}) = \|\varphi^{(n_0)}\|_{L_2}^2 < \sqrt{M\varepsilon} < \bar{\varepsilon},$$

где $\bar{\varepsilon}$ сколь угодно мало.

Условие (1.189), в отличие от условия (1.185), имеет простой смысл: система $\{\varphi_i(x)\}$ ($i = N_0, N_0 + 1, \dots$), где N_0 — любое конечное целое число, должна оставаться полной в L_2 .

Докажем, что система $\{\ln r(M_i, M)\}$, $M, M_i \in S$, разрывных потенциальных функций [7] удовлетворяет условиям (1.189), (1.190) для пространства $L_2(S)$. Пусть функция $\gamma(M_1) \in L(S)$ ортогональна всем функциям этой системы. Надо доказать, что $\gamma(M) = 0$. Рассмотрим интегральный оператор [70]

$$\int_S \ln r(M_1, M) \gamma(M_1) dS_{M_1} = \Phi(M),$$

переводящий пространство $L_2(S)$ ($\gamma(M_i) \in L_2(S)$) в пространство $\text{Lip } \alpha$ ($\alpha < 1/2$), ($\Phi(M) \in \text{Lip } \alpha$). Непрерывная функция $\Phi(M)$ принимает на всюду плотном на S множестве точек нулевые значения (ввиду ортогональности $\gamma(M_1)$ всем функциям рассматриваемой системы), и, следовательно, она тождественно рав-

¹¹⁾ Имеется в виду известная теорема о том, что если $\varphi_n \rightarrow \varphi$ и $\psi_n \rightarrow \psi$, то $(\varphi_n, \psi_n) \rightarrow (\varphi, \psi)$.

на нулю на S и, в силу ее гармоничности, всюду вне S . Но тогда потенциал простого слоя $\int_S \ln r(M_1, M) \gamma(M_i) dS_{M_1}$ тождественно равен нулю, если плотность $\gamma(M_1)$ тождественно равна нулю.

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$, любой функции $u(M) \in L_2(S)$ и любого N_0 найдутся такие коэффициенты b_k ($k = N_0, N_0 + 1, \dots, N_0 + N$), что

$$\left\| u(M) - \sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_k \ln r(M_k, M) \right\|_{L_2(S)} < \varepsilon.$$

В силу доказанной полноты рассматриваемой системы найдутся такие коэффициенты c_k ($k = 1, \dots, N_1$), что

$$\left\| u(M) - \sum_{j=1}^{N_1} c_j \ln r(M_j, M) \right\|_{L_2(S)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как точки M_k расположены всюду плотно на S , то для любой точки M_j ($j = 1, \dots, N_1$) найдется такая точка M_{r_j} , что $r_j > N_0$ и

$$\left\| \ln r(M_j, M) - \ln r(M_{r_j}, M) \right\|_{L_2(S)} < \frac{\varepsilon}{2N_1c},$$

где $c = \max_j |c_j|$. Учитывая последнее неравенство и неравенство Минковского, получаем,

$$\begin{aligned} \left\| u(M) - \sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_k \ln r(M_k, M) \right\|_{L_2(S)} &\leq \\ &\leq \left\| u(M) - \sum_{j=1}^{N_1} c_j \ln r(M_j, M) \right\|_{L_2(S)} + \\ &+ \left\| \sum_{j=1}^{N_1} c_j \ln r \left(M_j, M - \sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_k \ln r(M_k, M) \right) \right\|_{L_2(S)}. \end{aligned}$$

Взяв для N и b_k ($k = N_0, N_1, \dots, N_0 + N$) значения

$$N = \max_j r_j - N_0, \quad b_k = \begin{cases} c_j & \text{при } M_k = M_{r_j}, \\ 0 & \text{при } M_k \neq M_{r_j}, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{aligned} \left\| u(M) - \sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_k \ln r(M_k, M) \right\| &< \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \sum_{j=1}^{N_1} c_j [\ln r(M_j, M) - \ln r(M_{r_j}, M)] \right\|_{L_2(S)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Докажем теперь, что система $\{\ln r(M_k, M)\}$ удовлетворяет (1.190). Для нее удастся доказать значительно более сильное предложение.

Для любой функции $u(M) \in L_2(G)$, любого N_0 и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие коэффициенты b_k ($k = N_0, N_0 + 1, \dots, N_0 + N$), что

$$\left\| u(M) - \sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_k \ln r(M_k, M) \right\|_{L_2(S)} < \varepsilon, \quad (1.192)$$

$$\sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_k^2 < \varepsilon. \quad (1.193)$$

Представим $u(M)$ в виде потенциала простого слоя

$$u(M) = \int_{\bar{S}} v(\bar{M}) \ln r(M, M) dS_{\bar{M}},$$

заменяем интеграл в правой части римановой суммой и докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что

$$\Delta = \int_{\bar{S}} \left[\int_{\bar{S}} v(\bar{M}) \ln r(M, \bar{M}) dS_{\bar{M}} - \sum_{k=1}^N h_k v(M_k) \ln r(M, M_k) \right]^2 dS_M < \varepsilon,$$

где h_k — длина k -го отрезка разбиения контура S , в котором берется точка M_k . Учитывая, что точки M_k расположены всюду плотно на S , а $v(S)$ — непрерывная функция, получаем

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_{\bar{S}} \left[\int_{\bar{S}} v(\bar{M}) \ln r(M, \bar{M}) dS_{\bar{M}} \right]^2 dS_M - \\ &- 2 \sum_{k=1}^N h_k v(M_k) \int_{\bar{S}} \ln r(M, M_k) \int_{\bar{S}} v(\bar{M}) \ln r(M, \bar{M}) dS_M dS_{\bar{M}} + \\ &+ \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N h_k v(M_k) h_j v(M_j) \int_{\bar{S}} \ln r(M_1, M_k) \ln r(M_1, M_j) dS_M = \\ &= \int_{\bar{S}} \left[\int_{\bar{S}} v(\bar{M}) \ln r(M, \bar{M}) dS_{\bar{M}} \right]^2 dS_M - \\ &- 2 \int_{\bar{S}} v(\bar{M}) \int_{\bar{S}} \ln r(M, \bar{M}) \int_{\bar{S}} v(\bar{M}) \ln r(M, \bar{M}) dS_M dS_{\bar{M}} dS_{\bar{M}} + \\ &+ \varepsilon_1 + \int_{\bar{S}} v(\bar{M}) v(\bar{M}) \int_{\bar{S}} \ln r(M, \bar{M}) \ln r(M, \bar{M}) dS_M dS_{\bar{M}} dS_{\bar{M}} + \\ &+ \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \end{aligned}$$

где ε_1 и ε_2 — сколь угодно малые числа. Таким образом, в качестве коэффициентов b_k можно взять числа $h_k v(M_k)$, поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=N_0}^{N_0+N} b^2 &= \sum_{k=N_0}^{N_0+N} h_k^2 v^2(M_k) \leq h^{(N)} \sum_{k=N_0}^{N_0+N} h_k v^2(M_k) = \\ &= h^{(N)} \left[\int_{\bar{S}} v^2(M) dS_M + \varepsilon_3 \right], \end{aligned}$$

где ε_3 — сколь угодно малое число, а $h^{(N)} = \max_{k \leq N} h_k$. Так как $h^{(N)} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, то из последнего соотношения непосредственно следует (1.193).

Выполнение условий (1.192), (1.193) дает возможность доказать для системы $\{\ln r(M_k, M)\}$ следующее предложение.

Если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что

$$h^{(N)} \sum_{k=N_0+1}^N a_k < \varepsilon. \quad (1.194)$$

то ряд

$$\sum_{j=1}^n a_j \ln r(M_j, M),$$

где a_j вычисляются по формулам (1.179), сходится в среднем при $n \rightarrow \infty$ к функции $\varphi(x)$.

Действительно, из условий (1.194) получаем

$$\bar{c} \sqrt{\varepsilon} > \bar{c} h^{(N)} \sum_{k=n_0+1}^N a_k \geq \sum_{k=n_0+1}^N b_k (\varphi^{(n_0)}, \varphi_{k+1}) = \|\varphi^{(n_0)}\|_{L_2} + \varepsilon_4,$$

где ε_4 — сколь угодно мало и

$$\bar{c} = \sqrt{\int_{\bar{S}} v^2(s) dS}.$$

Таким образом, норму функции $\varphi^{(n_0)}$ можно сделать сколь угодно малой (за счет увеличения n_0).

Условия (1.185), (1.186) являются достаточными, но не необходимыми для сходимости введенных рядов. Так, для полных ортонормированных систем не выполняется условие (1.185), однако для них эти ряды сходятся (в этом случае они совпадают с рядом Фурье). Заметим также, что затруднения с ортонормализацией возникают именно для систем, удовлетворяющих условию (1.185), поэтому для таких систем эти ряды имеют преимущество перед рядом Фурье (в смысле практического осуществления).

Тривиальный пример системы, удовлетворяющей условиям (1.185), (1.186), можно построить следующим образом. Пусть

p_1, p_2, \dots — произвольная бесконечная последовательность возрастающих целых положительных чисел, $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = \infty$. Из ортонормированной полной системы $\{\varphi_i(x)\}$ составляем нормированную систему $\{\psi_i(x)\}$, где $\psi_i(x) = \varphi_i(x)$, $j = i - \sum_{k=1}^r p_k$, r — наибольшее целое число, при котором $\sum_{k=1}^r p_k < i$.

Система $\{\psi_i(x)\}$ имеет вид

$$\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{p_1}, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{p_2}, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{p_3}, \dots\}. \quad (1.195)$$

Легко видеть, что при $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = \infty$ она удовлетворяет условиям (1.185), (1.186). Рассмотрим систему

$$\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{p_1}, \Phi_{n_1}, \Phi_{n_1+1}, \dots, \Phi_{p_2}, \Phi_{n_2}, \Phi_{n_2+1}, \dots, \Phi_{p_3}, \dots\}, \quad (1.196)$$

где n_i, p_i — целые числа, а система $\{\varphi_i\}$ ортонормирована, и обозначим ее s -й член через Φ_s . Покажем, что коэффициент ряда, вычисленный по формуле (1.179) для s -й функции (s — произвольное целое число) ряда (1.196), совпадает с коэффициентом Фурье для этой функции, если она встретилась впервые в ряду (1.196), и равен нулю, если она до этого уже встречалась в ряду (1.196).

Действительно, из (1.179) для первого случая имеем

$$a_s = \int_G \left(\varphi - \sum_{k=1}^{s-1} a_k \varphi_k \right) \Phi_s dx = \int_G \varphi \Phi_s dx,$$

а для второго случая ($\Phi_s \equiv \Phi_r$, где r — целое число $r < s$)

$$a_s = \int_G \left(\varphi - \sum_{k=1}^{s-1} a_k \Phi_k \right) \Phi_s dx = \int_s \varphi \Phi_s dx - a_r \int_s \Phi_r \Phi_s dx = 0.$$

Таким образом, способ (1.179) вычисления коэффициентов автоматически отбраковывает для систем (1.196), следовательно, и для систем (1.195) те функции, которые раньше уже участвовали в разложении. Поэтому предложенные ряды для систем (1.195) и (1.196) совпадают с рядом Фурье для ортонормированной системы $\{\varphi_i\}$. Пусть система (1.195) имеет вид

$$\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{p_1}, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{p_2}, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_{p_1-1}, \dots\},$$

т. е. последовательность p_i конечна: $p_1, p_2, \dots, p_l, p_l < \infty$.

Тогда эта система не будет удовлетворять условию (1.185), и тем не менее для нее введенный ряд будет сходиться к функции $\varphi(x)$, так как он будет совпадать с ее рядом Фурье по полной ортонормированной системе $\{\varphi_i\}$. Таким образом, как уже

отмечалось, условия доказанной выше теоремы не являются необходимыми для сходимости этих рядов.

К описанному алгоритму построения рядов по неортогональным функциям можно прийти путем следующих соображений. Если в некотором подпространстве G гильбертова пространства H существует точка y , наименее удаленная от $\varphi \in H$, то вектор $(\varphi - y)$ ортогонален каждому вектору из G . Если G — линейная оболочка множества нормированных функций $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, то $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k$, и для нахождения коэффициентов λ_k наилучшего (в смысле метрики H) приближения получаем систему

$$(\varphi - y, \varphi_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

или, в развернутом виде

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2(\varphi_2, \varphi_1) + \dots + \lambda_n(\varphi_n, \varphi_1) &= (\varphi, \varphi_1), \\ \lambda_1(\varphi_1, \varphi_2) + \lambda_2 + \dots + \lambda_n(\varphi_n, \varphi_2) &= (\varphi, \varphi_2), \\ \dots & \\ \lambda_1(\varphi_1, \varphi_n) + \lambda_2(\varphi_2, \varphi_n) + \dots + \lambda_n &= (\varphi, \varphi_n). \end{aligned} \tag{1.197}$$

Эту систему можно решать итерационными методами. Вычисление коэффициентов ряда Фурье по системе $\{\varphi_i\}$ соответствует одной простой итерации для системы (1.197), когда в качестве начального приближения для вектора $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ берется нулевой вектор $\lambda^{(0)} = (0, \dots, 0)$, т. е.

$$a_1^{(\Phi)} = \lambda^{(1)} + B\lambda^{(0)} + R, \tag{1.198}$$

где $a_1^{(\Phi)}$ — вектор, компонентами которого являются коэффициенты Фурье, B — матрица, соответствующая системе (1.197), записанной в виде $\lambda = B\lambda + R$,

$$\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_n^{(1)}), \quad \lambda^{(0)} = (0, \dots, 0), \quad R = ((\varphi, \varphi_1), \dots, (\varphi, \varphi_n)).$$

Запишем (1.198) в виде

$$\lambda = (B_1 + B_2)\lambda + R,$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -(\varphi_1, \varphi_2) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(\varphi_1, \varphi_n) & -(\varphi_2, \varphi_n) & \dots & -(\varphi_{n-1}, \varphi_n) & 0 \end{array} \right\|, \\ B_2 &= \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & -(\varphi_2, \varphi_1) & -(\varphi_3, \varphi_1) & \dots & -(\varphi_n, \varphi_1) \\ 0 & 0 & -(\varphi_3, \varphi_2) & \dots & -(\varphi_n, \varphi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Вычисление коэффициентов (1.179) по системе $\{\varphi_i\}$ соответствует одной итерации по методу Зейделя для системы (1.198) или

одной простой итерации для системы

$$\lambda = (I - B_1)^{-1} B_2 \lambda + (I - B_1)^{-1} R, \quad (1.199)$$

где I — единичная матрица, когда в качестве начального приближения берется нулевой вектор $\lambda^{(0)} = (0, \dots, 0)$, т. е.

$$a^{(A)} = \bar{\lambda}_1^{(1)} = (I - B_1)^{-1} B_2 \lambda^{(0)} + (I - B_1)^{-1} R,$$

где $a^{(A)}$ — вектор, компонентами которого являются коэффициенты введенных рядов. Заметим, что все собственные значения матрицы $(I - B_1)^{-1} B_2$ меньше единицы. Действительно, так как квадратичная форма, соответствующая матрице Грама, положительно определенная, то метод Зейделя для системы (1.198) или, что то же самое, метод простой итерации для системы (1.199) сходится¹²⁾ при любом начальном приближении и любой правой части. При таком подходе доказанная выше теорема равносильна следующему утверждению.

Для приближенного решения системы (1.197) при достаточно большом n достаточно одной итерации по методу Зейделя (предполагается, что система $\{\varphi_i\}$ и функция $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям (1.185) и (1.186)).

Так как вычисление элементов матрицы Грама (скалярные произведения) и собственно процесс ортонормализации осуществляются с конечным числом разрядов, то ясно, что матрица, соответствующая системе (1.197), не будет единичной. Она будет некоторым образом «возмущена». Коэффициенты наилучшего приближения при этом находятся из системы

$$(1 - \varepsilon_{ij}) \lambda_j + \sum_{\substack{k=i \\ k \neq j}}^n \varepsilon_{kj} \lambda_k = (\varphi_i, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.200)$$

где ε_{ij} — малые возмущения, вызванные ошибками округления и погрешностью вычисления скалярных произведений (в случае пространства L_2 — погрешностью интегрирования). Естественно

при этом предположить, что $\max_k \sum_{j=1}^n |\varepsilon_{kj}| < 1$. Интересен вопрос, каким рядом целесообразнее пользоваться в таких случаях — рядом Фурье или предложенным рядом. Точнее, какое соотношение существует между числами $\|\lambda - a^{(\varphi)}\|$ и $\|\lambda - a^{(A)}\|$, где вектор λ — точное решение системы (1.200). Так как в рассмотрен-

¹²⁾ Так как диагональные элементы матрицы Грама линейно независимой системы положительны, то положительная определенность соответствующей квадратичной формы является не только достаточным, но и необходимым условием для сходимости итерационного процесса Зейделя.

ном случае итерационный процесс Зейделя сходится быстрее [155], чем простой итерационный процесс, и норма матрицы $\max_k \sum_{j=1}^n \|\varepsilon_{kj}\|$ подчинена первой норме вектора, то ясно, что первая норма вектора $(\lambda - a^{(\Phi)})$ будет не менее первой нормы вектора $(\lambda - a^{(A)})$, т. е.

$$\max_i |\lambda_i - a_i^{(\Phi)}| = \|\lambda - a^{(\Phi)}\|_I \geq \|\lambda - a^{(A)}\|_I = \max_i |\lambda_i - a_i^{(A)}|.$$

Заметим, что как метод рядов Фурье, так и метод введенных рядов требуют произвести для вычисления коэффициента каждого нового члена разложения одно приближенное интегрирование

$$a_k^{(\Phi)} = \int_G \varphi \varphi_k dx, \quad a_k^{(A)} = \int_G \varphi^{(k-1)} \varphi_k dx.$$

В вычислении $a_k^{(A)}$ участвует элемент $\varphi^{(k-1)}$, поэтому естественно его значения в отдельных точках следует применять для контроля точности разложения, так как

$$\varphi^{(k-1)}(x) = \varphi(x) - \sum_{i=1}^{k-1} a_i^{(A)} \varphi_i(x).$$

Предложенный здесь метод решения системы (1.197) может быть применен в вариационных методах. По существу, разложение функции $\varphi(x)$ в ряд по функциям системы $\{\varphi_i(x)\}$ можно рассматривать как метод Ритца решения функционального уравнения $E\varphi(x) = \varphi(x)$, где E — тождественный оператор, с координатными функциями $\{\varphi_i(x)\}$.

Вариационные методы определения коэффициентов a_i разложения решения функциональных уравнений по некоторой системе φ_i приводят к следующей бесконечной системе уравнений:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (A_1 \varphi_j, A_2 \varphi_k) a_j = (A_3 \varphi_k, A_4 \varphi), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.201)$$

где A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — положительные или положительно определенные операторы, а φ — некоторая известная функция. Если последовательности $\{A_i \varphi_i\}$ и $\{A_2 \varphi_j\}$ биортонормированы или при $A_1 = A_2$ последовательность $\{A_1 \varphi_j\}$ ортонормирована, то для коэффициентов a_j получаем

$$a_j = (A_3 \varphi, A_4 \varphi_j). \quad (1.202)$$

В некоторых случаях, однако, система $\{A_1 \varphi_j\}$ не сильно минимальна, и ее предварительная ортонормализация встречает большие трудности. Поэтому встает вопрос о приближенном решении системы (1.201). Под приближенным решением систе-

мы (1.201) будем подразумевать вектор $\bar{a}^{(N)} (\bar{a}_1^{(N)}, \dots, \bar{a}_N^{(N)})$, удовлетворяющий системе

$$A^{(N)} \bar{a}^{(N)} = B^{(N)} + \varepsilon, \quad (1.203)$$

или

$$\sum_{j=1}^N (A_1 \varphi_j, A_2 \varphi_k) \bar{a}_j^{(N)} = (A_3 \varphi, A_4 \varphi_k) + \varepsilon_k, \quad k = 1, \dots, N,$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$ — вектор невязок. Для малости вектора $(a^{(N)} - \bar{a}^{(N)})$ достаточно, чтобы было мало выражение $\|(A^{(N)})^{-1} \varepsilon\|$ (здесь $a^{(N)}$ — решение системы (1.203) при $\varepsilon \equiv 0$, $a_j^{(N)}$ — коэффициенты наилучшего, в некотором смысле, разложения решения функционального уравнения по системе $\{\varphi_j\}$). Однако в случае ненадежных систем норма вектора $(a^{(N)} - \bar{a}^{(N)})$ может быть сколь угодно большой; тем не менее разность между разлагаемой функцией ψ и ее приближением $\sum_{i=1}^N a_i^{(N)} \varphi_i$ может быть в некоторой метрике меньше сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$:

$$\left\| \psi - \sum_{i=1}^N a_i^{(N)} \varphi_i \right\| < \varepsilon. \quad (1.204)$$

В последнем случае соответствующая матрица плохо обусловлена, и в ее окрестности имеется вырожденная матрица. Как показано в [147], при этом без регуляризации можно получить сильно различающиеся решения, отличные от нормального решения.

Будем называть ε -приближенным решением системы (1.201) вектор $\bar{a}^{(N)}$, удовлетворяющий неравенству (1.204).

Приведем обобщение изложенного в этом параграфе метода вычисления коэффициентов разложения для вариационных методов. Преимущество этого метода заключается в том, что в случае некоторых систем $\{\varphi_i\}$ (соответствующие условия для систем будут сформулированы ниже) для получения приближенного решения системы (1.201) при большом N достаточно проделать одну итерацию Зейделя, принимая в качестве начального приближения нулевой вектор.

Пусть в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением

$$[u, v] = (A_1 u, A_2 v) = (A_1 v, A_2 u)$$

ищется наилучшее в смысле метрики H приближение функции ψ обобщенным полиномом $\sum_{j=1}^n a_j \varphi_j$. Из ортогональности разности $\left(\psi - \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j \right)$ любой функции φ_j получаем для определения

разности $\left(\psi - \sum_{j=1}^{k-1} \bar{a}_j \varphi_j\right) = \varphi^{(k-1)}$ функций $c_k \varphi_k$ [26]:

$$\min_{c_k} \left\| \psi - \sum_{j=1}^{k-1} a_j \varphi_j - c_k \varphi_k \right\| = \left\| \varphi - \sum_{j=1}^k a_j \varphi_j \right\| = \frac{G(\varphi^{(k-1)}, \varphi_k)}{G(\varphi_k)}, \quad (1.205)$$

где $G(u_1, \dots, u_n)$ — детерминант Грама функций u_1, \dots, u_n . Так как

$$\frac{G(\varphi^{(k-1)}, \varphi_k)}{G(\varphi_k)} = \|\varphi^{(k-1)}\|^2 - \frac{(A_1 \varphi^{(k-1)}, A_2 \varphi_k^2)^2}{\|\varphi_k\|^2},$$

то из (1.205) получаем

$$\|\varphi^{(k)}\|^2 = \|\varphi^{(k-1)}\|^2 - \frac{(A_1 \varphi^{(k-1)}, A_2 \varphi_k)^2}{\|\varphi_k\|^2}. \quad (1.206)$$

Таким образом, последовательность положительных чисел $\{\|\varphi^{(k)}\|\}$ монотонно убывает и, следовательно, имеет предел. Предполагая, что нормы функций φ_1 ограничены в совокупности как сверху, так и снизу строго положительным числом, из (1.206) получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N_0 , что

$$\sum_{k=N_0}^{\infty} (A_1 \varphi^{(k-1)}, A_2 \varphi_k)^2 < \varepsilon. \quad (1.207)$$

Но тогда при $s > N_0$

$$\begin{aligned} \varepsilon > |(\|\varphi^{(s)}\|)^2 - (\|\varphi^{(s+1)}\|)^2| &= \left| \left(A_1 \left(\psi - \sum_{j=1}^s a_j \varphi_j \right), A_2 \left(\psi - \sum_{j=1}^s a_j \varphi_j \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(A_1 \left(\psi - \sum_{j=1}^{s+1} a_j \varphi_j \right), A_2 \left(\psi - \sum_{j=1}^{s+1} a_j \varphi_j \right) \right) \right| = \\ &= \left| \left(A_1 \left(\psi - \sum_{j=1}^s a_j \varphi_j \right), A_2 \left(\psi - \sum_{j=1}^s a_j \varphi_j \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2a_{s+1} \left(A_1 \varphi_{s+1}, A_2 \left(\psi - \sum_{j=1}^s a_j \varphi_j \right) \right) - a_{s+1}^2 (A_1 \varphi_{s+1}, A_2 \varphi_{s+1}) - \right. \\ &\quad \left. - \left(A_1 \left(\psi - \sum_{j=1}^s a_j \varphi_j \right), A_2 \left(\psi - \sum_{j=1}^s a_j \varphi_j \right) \right) \right| = |-a_{s+1}^2 (A_1 \varphi_{s+1}, A_2 \varphi_{s+1})|, \end{aligned}$$

и в силу ограниченности снизу нормы функций φ_j имеем

$$|a_{s+1}| < \varepsilon.$$

Отсюда получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого целого N найдется такое N_0 , что

$$\varphi^{(s)} = \varphi^{(r)} + \gamma_r^{(s)}, \quad N \leq s, \quad r \leq N_0 + N, \quad (1.208)$$

где

$$\|\gamma_r^{(s)}\| < \varepsilon. \tag{1.209}$$

Подставляя (1.208) в (1.209), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon > \sum_{k=N_0}^{\infty} (A_1\varphi^{(k-1)}, A_2\varphi_k) &\geq \sum_{k=N_0}^{N_0+N} (A_1\varphi^{(k)}, A_2\varphi_{k-1})^2 = \\ &= \sum_{k=N_0}^{N_0+N} (A_1\varphi^{(r)}, A_2\varphi_{k-1})^2 + \sum_{k=N_0}^{N_0+N} (A_1\gamma_1^{(k)}, A_2x_{k-1})^2 + \\ &\quad + 2 \sum_{k=N_0}^{N_0+N} (A_1\varphi^{(r)}, A_2\varphi_{k-1})(A_1\gamma_1^{(k)}, A_2\varphi_{k-1}). \end{aligned}$$

Отсюда находим, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого целого N найдется такое N_0 , что

$$\sum_{k=N_0}^{N_0+N} (A_1\varphi^{(r)}, A_2\varphi_{k-1})^2 < \varepsilon, \quad N_0 \leq r \leq N_0 + N. \tag{1.210}$$

Будем предполагать, что система $\{\varphi_i\}$ удовлетворяет следующему условию: для любого $\varepsilon > 0$, любого целого N и $\psi \in H$ найдутся такие коэффициенты b_k ($k = N_0, \dots, N_0 + N$), что хотя бы для одного значения r

$$\left\| \varphi^{(r)} - \sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_k \varphi_k \right\| < \varepsilon, \quad N_0 \leq r \leq N_0 + N, \tag{1.211}$$

$$\sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_k^2 < M, \tag{1.212}$$

где M — не зависящая от N_0 и N постоянная.

В силу (1.210), (1.211), (1.212) и неравенства Коши — Бунаковского получаем

$$\left| \sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_{k-1} (A_1\varphi^{(r)}, A_2\varphi_{k-1}) \right| \leq \varepsilon.$$

Учитывая последние два неравенства и неравенство $\|\varphi^{(r)}\| \leq \|\psi\|$ ($r = 1, 2, \dots$) получаем

$$\begin{aligned} \left\| \psi - \sum_{j=1}^r \bar{a}_j \varphi_j \right\|^2 &= \|\varphi^{(r)}\|^2 = \left(A_1\varphi^{(r)}, A_2 \sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_k \varphi_k \right) = \\ &= \left(A_1\varphi^{(r)}, A_2 \left(\sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_k \psi_k - \varphi^{(r)} \right) \right) \leq \varepsilon_1 + \|\varphi^{(r)}\| \left\| \varphi^{(r)} - \sum_{k=N_0}^{N_0+N} b_k \varphi_k \right\| \leq \\ &\leq \varepsilon_1 + \|\psi\| \varepsilon \leq \varepsilon_2, \end{aligned}$$

где ε_2 — сколь угодно малое число.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Если нормы функций φ_j в гильбертовом пространстве H ограничены в совокупности как сверху, так и снизу строго положительным числом, а система $\{\varphi_j\}$ и функции ψ удовлетворяют условиям (1.211) и (1.212), то для получения ε -приближенного решения системы (1.201) достаточно провести единственную итерацию Зейделя для системы:

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} (A_1\varphi_j, A_2\varphi_k) a_j = (A_3\varphi_k, A_4\varphi), \quad k = 1, \dots, N(\varepsilon),$$

принимая в качестве начального приближения нулевой вектор $a^0 = (0, 0, \dots, 0)$.

Прежде чем перейти к численным примерам разложения функций по приведенным в настоящем параграфе рядам, сделаем несколько замечаний [43] общего характера.

Пусть заданы вещественное гильбертово пространство H , в нем самосопряженный положительно определенный оператор $A = A^* > 0$ и элемент $f \in H$. Рассмотрим задачу нахождения элемента u , удовлетворяющего уравнению

$$Au = f. \quad (1.213)$$

Известно, что метод Рунда в случае системы координатных функций

$$\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset D(A), \quad (1.214)$$

являющихся линейно независимыми функциями, приводит к системе линейных невырожденных алгебраических уравнений

$$A_n v_n = f_n, \quad (1.215)$$

где A_n — матрица $\{(\varphi_i, \varphi_j)\}_{j=1}^n$ ($(u, v) \equiv (Au, v)$), f_n — вектор $(f, \varphi_1), \dots, (f, \varphi_n)$, v_n — искомый вектор (b_1, \dots, b_n) коэффициентов Рунда b_i .

Метод Рунда сходится в энергетическом пространстве H_A (с нормой $\|\cdot\|_A$), если система (1.214) полна в H_A . Кроме того, метод устойчив, если система (1.214) сильно минимальна в H_A . Если (1.214) лишь минимальна, то свойства устойчивости уже уходятся.

В случае фундаментальных решений система (1.214) даже не минимальна: решение системы (1.215) уже при небольшом n приводит к аварийному останову ЭВМ. Предварительная ортонормализация (1.214) также приводит к аварийному останову ЭВМ (из-за деления на нуль).

Предполагая, что система нормирована, $\|\varphi_i\|_A = 1$, можно написать

$$A_n = I_n + B_n + B_n^*,$$

где I_n — единичная матрица,

$$B_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ [\varphi_i, \varphi_j] & 0 \end{vmatrix}.$$

В описанном в настоящем параграфе методе получения коэффициентов разложения вместо (1.215) решается следующая система уравнений для $\omega_n = (a_1, \dots, a_n)$:

$$T_n \omega_n = f_n, \quad (1.216)$$

где $T_n = I_n + B_n$ — нижняя треугольная матрица.

Практические вычисления показали, что этот метод очень удобен и часто дает хорошие приближения.

Вернемся к исследованию некоторых свойств этого метода.

Пусть $u_0 \in H$ — точное решение (1.213), $|\omega_n|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$ — норма в E_n ,

$$\|T_n\| = \|T_n\|_{E_n \rightarrow E_n}, \quad U_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$$

приближенное решение, $u^{(n)} = u_0 - u_n$ — погрешность приближенного решения.

Очевидно, что обратные операторы T_n^{-1} равномерно ограничены:

$$\|T_n^{-1}\| \leq 2. \quad (1.217)$$

Действительно, для любых $x \in E_n$ имеем

$$0 \leq (A_n x, x) = (x, x) + (B_n x, x) + (B_n^* x, x) = |x|^2 \left(1 + 2 \frac{(B_n x, x)}{|x|^2} \right).$$

Следовательно,

$$(B_n x, x) \geq -\frac{1}{2} |x|^2,$$

$$|T_n x| |x| \geq (T_n x, x) = ((I_n + B_n) x, x) \geq +\frac{1}{2} |x|^2,$$

т. е.

$$|T_n x| \geq \frac{1}{2} |x|,$$

значит, T_n^{-1} существует и $\|T_n^{-1}\| \leq 2$. На практике вместо системы (1.216) решается система

$$\tilde{T}_n \tilde{\omega}_n = \tilde{f}_n, \quad (1.218)$$

где $\tilde{T}_n = T_n + \Gamma_n$, $\tilde{f}_n = f_n + \delta_n$, т. е. допускаем возмущения Γ_n и δ_n матрицы T_n и правой части f_n соответственно.

Справедливо следующее предложение.

Существуют такие положительные постоянные p, q, r , что при $\|\Gamma_n\| \leq r$ справедлива оценка

$$|\tilde{\omega}_n - \omega^n| \leq p\|\Gamma_n\| + q\|\delta_n\|. \quad (1.219)$$

Действительно, возьмем $r = \beta/2$ ($0 \leq \beta < 1$), так что $(T_n + \Gamma_n)^{-1}$ существуют и

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_n &= (T_n + \Gamma_n)^{-1}(f_n + \delta_n) = [T_n(I_n + T_n^{-1}\Gamma_n)]^{-1}\tilde{f}_n = \\ &= (\Gamma_n + T_n^{-1}\Gamma_n)^{-1}T_n^{-1}\tilde{f}_n, \end{aligned}$$

где

$$\|T_n\Gamma_n\| \leq \|T^{-1}\| \|\Gamma_n\| \beta < 1.$$

Следовательно,

$$\|(I_n + T_n^{-1}\Gamma_n)^{-1}\| \leq 1 + \|T_n^{-1}\Gamma_n\| + \dots + \|(T_n^{-1}\Gamma_n)^m\| + \dots \leq \frac{1}{1-\beta}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_n - \omega_n &= [(I_n + T_n^{-1}\Gamma_n)^{-1} - I_n] T_n^{-1}f_n + (I_n + T_n^{-1}\Gamma_n)^{-1} T_n^{-1}\delta_n, \\ |\tilde{\omega}_n - \omega_n| &\leq \|(I_n + T_n^{-1}\Gamma_n)^{-1} - I_n\| |T_n^{-1}f_n| + \\ &+ \|(I_n + T_n^{-1}\Gamma_n)^{-1}\| |T_n^{-1}\delta_n| \leq \frac{\|T_n^{-1}\Gamma_n\|}{1 - \|T_n^{-1}\Gamma_n\|} |\omega_n| + \frac{1}{1-\beta} |T_n^{-1}\delta_n| \leq \\ &\leq \frac{2}{1-\beta} (\|u_0\|_A \|\Gamma_n\| + |\delta_n|). \end{aligned}$$

При доказательстве последнего неравенства мы воспользовались соотношением $|\omega_n| \leq \|u_0\|_A$, которое доказывается ниже (см. (1.221)). Здесь имеем

$$p = \frac{2\|u_0\|_A}{1-\beta}, \quad q = \frac{2}{1-\beta}.$$

Покажем, что для погрешности $u^{(n)}$ рассматриваемого метода справедливо равенство

$$\|u^{(n)}\|_A^2 = \|u_0\|_A^2 - \sum_{j=1}^n g_j^2, \quad (1.220)$$

т. е. на этот метод распространяется неравенство Бесселя

$$|\omega_n|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \leq \|u_0\|_A^2. \quad (1.221)$$

Действительно, в методе (1.216) коэффициенты a_i могут быть определены рекуррентно. Итак, можно написать

$$a_{i+1} = [u^{(i)}, \varphi_{i+1}], \quad u^{(i+1)} = u^{(i)} - a_{i+1}\varphi_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad u^{(0)} = u_0. \quad (1.222)$$

Поэтому имеем

$$[u^{(i+1)}, \varphi_{i+1}] = [u^{(i)}, \varphi_{i+1}] - a_{i+1} [\varphi_{i+1}, \varphi_{i+1}] = a_{i+1} - a_{i+1} = 0,$$

$$u^{(i)} = u^{(i+1)} + a_{i+1} \varphi_{i+1}, \quad \|u^{(i)}\|_A^2 = \|u^{(i+1)}\|^2 + a_{i+1}^2,$$

и, следовательно,

$$\|u^{(i+1)}\|_A^2 = \|u^{(i)}\|_A - a_{i+1}^2 = \dots = \|u_0\|_A^2 - \sum_{j=1}^{i+1} a_j^2,$$

что и требовалось доказать.

Если известна верхняя оценка для $\|u_0\|_A$, то (1.220) дает возможность оценить погрешность $u^{(n)}$ апостериорно. Это условие тривиально выполняется при тождественном операторе $A = 1$:

$$\|u^{(n)}\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (1.223)$$

Несмотря на то, что метод (1.216) в ряде примеров дал хорошие приближения, вопрос о сходимости окончательно еще не выяснен (не существуют априорные оценки погрешности).

Приведем *отрицательный пример*. Пусть $H = L_2(0, 1)$, $A = 1$. Разложим функцию

$$f_k(t) = \begin{cases} 1 - kt & \text{для } 0 \leq t \leq 1/k, \\ 0 & \text{для } 1/k \leq t \leq 1, \end{cases} \quad k \geq 1 \text{ фиксировано}$$

по системе $\varphi_i(t) = \sqrt{2i+1} t^i$ ($i = 1, 2, \dots$, $\|\varphi_i\| = 1$). Эта система полна в H , как и любая система $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$ при произвольном $t_0 > 0$.

Легко вычисляются и оцениваются величины

$$\|f_k\|^2 = \frac{1}{3k}, \quad (f_k, \varphi_i)^2 = \frac{2i+1}{(i+1)^2(i+2)^2} \left(\frac{1}{k}\right)^{2i+2} < \frac{2}{k^2} \left(\frac{1}{k^2}\right)^i,$$

$$|f_{kn}|^2 = \sum_{i=1}^n (f_k, \varphi_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} (f_k, \varphi_i)^2 < \frac{2}{k^4} \frac{1}{1-k^{-2}}.$$

Поэтому

$$|\omega_{kn}|^2 < \|T_n^{-1}\|^2 |f_{kn}|^2 \leq 4 |f_{kn}|^2 < \frac{8}{k^4} \frac{1}{1-k^{-2}}$$

и погрешность допускает оценку

$$\|u_k^{(n)}\| = \|f_k\|^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 > \frac{1}{3k} - 8k^{-4} (1 - k^{-2})^{-1}.$$

При $k = 3$ имеем $\|u_3^{(n)}\|^2 > \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = 0$ для каждого n , так что для $k \geq 3$ сходимости $u_{kn} \rightarrow f_k$ не будет.

Проанализируем этот отрицательный пример. Разлагаемая функция отлична от нуля лишь в интервале $0 \leq t \leq 1/3$. Тогда как функции $\varphi_i(t) = \sqrt{2i+1}t^i$ сколь угодно малы на этом интервале, начиная с достаточно большого $i = i_0$. Поэтому коэффициенты быстро уменьшаются с увеличением i и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ оказывается меньше чем $\|f_h\|^2$. Заметим, что конечность погрешности обусловлена равенством $\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(0)| = 0$, что не выполняется для систем фундаментальных решений.

Численный пример. В ряде случаев для некоторых областей G коэффициенты ортонормализации известны, а разложение функции $\varphi(x)$ требуется произвести в области G' , в некотором смысле близкой к G . Так, например, в [49] имеются таблицы коэффициентов ортонормализации для гармонических полиномов, ортонормальных на эллипсе. В [49] рассмотрены 230 эллипсов с различными отношениями полуосей $p = b/a$. Таблицы предназначены для решения внутренней задачи Дирихле для рассмотренных эллипсов. Пусть требуется решить задачу Дирихле для такого эллипса, который не рассмотрен в [49]. В этом случае естественно воспользоваться ортонормированными гармоническими полиномами для рассмотренного в [49] эллипса со значением $p = b/a$, наиболее близким к данному эллипсу. При этом возникает вопрос — какими рядами пользоваться?

При достаточной близости G и G' этот вопрос аналогичен вопросу, рассмотренному выше (при приближенной ортонормализации). Здесь мы приведем один численный пример. Рассмотрим систему (1.177) для эллипсов S и S' с полуосями 1, 0,5 и 2, 1 соответственно:

$$\left\{ \frac{1}{2} \ln \left[(2 \cos \alpha_i - \cos \alpha)^2 + \left(\sin \alpha_i - \frac{1}{2} \sin \alpha \right)^2 \right] \right\}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где

$$\alpha_1 = 90^\circ, \alpha_2 = 270^\circ, \alpha_3 = 0^\circ, \alpha_4 = 180^\circ, \alpha_5 = 225^\circ, \alpha_6 = 45^\circ, \\ \alpha_7 = 315^\circ, \alpha_8 = 135^\circ, \alpha_9 = 330^\circ, \alpha_{10} = 150^\circ, \alpha_{11} = 120^\circ, \alpha_{12} = 300^\circ.$$

В табл. 1.11 выписаны коэффициенты ортонормализации A_{ki} , этой системы для интервала $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Пусть ищется решение внутренней задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad u \Big|_S = \operatorname{arctg} \frac{u-2}{x-2} = \psi(\alpha)$$

для эллипса S_1 с полуосями 1 и 0,45. Коэффициенты ортонормализации системы (1.177) на этом эллипсе уже не будут

совпадать с полученными выше, так как она принимает вид

$$\{1 \ln [(2 \cos \alpha_i - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha_i - 0,45 \sin \alpha)^2]\} = \{\psi_i\}.$$

Однако функции

$$\{\psi_i\} = \left\{ \sum_{k=1}^i A_{ki} \varphi_k \right\}$$

будут грубо ортонормированными, что и показывает табл. 1.12, в которой дана матрица Грама $\|(\psi_i, \psi_j)\|$ для системы $\{\psi_i\}$.

Т а б л и ц а 1.11

<i>i</i>	<i>j</i>	<i>A_{ij}</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>A_{ij}</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>A_{ij}</i>
1	1	1,0407	7	6	9,5446	10	8	-64,2106
2	1	0,3462	7	7	10,8845	10	9	-58,6615
2	2	1,0968	8	1	0,8797	10	10	177,6990
3	1	-0,5365	8	2	1,2645	11	1	0,9583
3	2	-0,5365	8	3	-11,0209	11	2	5,2864
3	3	0,6252	8	4	-20,4241	11	3	-14,7569
4	1	-0,3853	8	5	13,6851	11	4	-227,4796
4	2	-0,3853	8	6	9,8651	11	5	43,0299
4	3	-0,2103	8	7	9,6222	11	6	14,2266
4	4	0,6598	8	8	14,5257	11	7	10,4574
5	1	0,9226	9	1	3,8971	11	8	-216,6044
5	2	-0,7153	9	2	4,3145	11	9	7,1679
5	3	0,9654	9	3	-135,2959	11	10	374,1380
5	4	-4,0057	9	4	-1,1330	11	11	40,7688
5	5	4,6118	9	5	6,7030	12	1	5,9396
6	1	-0,9654	9	6	33,4046	12	2	2,8762
6	2	1,1276	9	7	-57,8352	12	3	-246,1864
6	3	-4,3658	9	8	8,3734	12	4	-95,7584
6	4	1,9865	9	9	167,6996	12	5	30,2315
6	5	-1,1420	10	1	3,4206	12	6	50,5909
6	6	4,7511	10	2	2,5505	12	7	-225,8198
7	1	0,9191	10	3	46,1256	12	8	-65,1761
7	2	-0,0561	10	4	-142,9701	12	9	398,9135
7	3	-17,5184	10	5	33,0538	12	10	139,3438
7	4	3,3486	10	6	-4,5184	12	11	14,3462
7	5	1,0670	10	7	29,1042	12	12	43,1996

В табл. 1.13 даны коэффициенты Фурье $a_k^{(\Phi)}$ функции $\psi(S)$ по системе $\{\psi_k\}$, коэффициенты a_k (см. (1.179)) введенных рядов функции $\psi(S)$ по системе $\{\psi_k\}$ и коэффициенты λ_k наилучшего приближения в смысле метрики L_2 функции $\psi(S)$ функциями системы $\{\psi_k\}$. Коэффициент λ_i можно находить либо из

$$\sum_{i=1}^j (\psi_i, \psi_j) \lambda_i = (\psi, \psi_j), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1.224)$$

Т а б л и ц а 1.12

i	j	(Ψ_i, Ψ_j)	i	j	(Ψ_i, Ψ_j)	i	j	(Ψ_i, Ψ_j)
1	1	0,8607	7	6	0,0240	10	8	0,0328
2	1	0,0905	7	7	0,8804	10	9	-0,0126
2	2	0,9209	8	1	0,0702	10	10	0,7923
3	1	0,0260	8	2	0,0878	11	1	0,0026
3	2	0,0360	8	3	-0,0031	11	2	-0,0031
3	3	0,9422	8	4	-0,0450	11	3	-0,0147
4	1	0,0186	8	5	0,0119	11	4	0,0201
4	2	0,0259	8	6	-0,0074	11	5	-0,0313
4	3	-0,0463	8	7	-0,0041	11	6	-0,0150
4	4	0,9735	8	8	0,8732	11	7	0,0315
5	1	-0,0129	9	1	-0,0536	11	8	-0,0186
5	2	0,0227	9	2	-0,0016	11	9	0,0418
5	3	0,0085	9	3	0,0003	11	10	0,0536
5	4	-0,0166	9	4	0,0073	11	11	0,7044
5	5	0,8166	9	5	-0,0077	12	1	-0,0306
6	1	0,0295	9	6	-0,0666	12	2	0,0014
6	2	-0,0108	9	7	0,0373	12	3	0,1002
6	3	-0,0155	9	8	0,0113	12	4	-0,0146
6	4	0,0178	9	9	0,7831	12	5	-0,0036
6	5	0,0109	10	1	0,0020	12	6	-0,0307
6	6	0,8112	10	2	-0,0054	12	7	0,0054
7	1	0,0196	10	3	0,0074	12	8	0,0054
7	2	0,0483	10	4	-0,0047	12	9	0,0564
7	3	0,0555	10	5	-0,0678	12	10	0,0047
7	4	0,0551	10	6	0,0323	12	11	-0,0169
7	5	-0,0163	10	7	-0,0304	12	12	0,6917

Т а б л и ц а 1.13

k	$a_k^{(\varphi)}$	a_k	λ_k	$\psi(M^{(k)})$
1	0,558600	0,423157	0,632909	0,603749
2	0,532666	0,681348	0,792195	0,620249
3	-0,855595	-0,134128	-0,485213	0,637549
4	-2,638250	-3,828113	-3,946620	0,655696
5	1,971488	2,004124	1,801310	0,674741
6	2,131344	1,013516	1,163211	0,694738
7	4,621686	4,511926	4,613214	0,715944
8	0,494495	0,915716	1,121345	0,737815
9	-3,767565	-3,811601	-4,267911	0,761013
10	2,022020	2,561700	2,881903	0,785398
11	2,383068	0,981601	1,146823	0,811034
12	-0,428553	-0,410116	-0,495131	0,837981

либо получить ортонормированную на S систему функции

$$\omega_i = \sum_{k=1}^i c_{ki} \varphi_i,$$

Т а б л и ц а 1.13 (продолжение)

k	$\overline{\Psi}_1(M^{(k)})$	$\overline{\Psi}_2(M^{(k)})$	$\overline{\Psi}_3(M^{(k)})$	\overline{a}_k
1	0,518301	0,543001	0,598301	0,632311
2	0,562604	0,584391	0,613430	0,792186
3	0,597411	0,601432	0,630724	-0,485224
4	0,604510	0,621368	0,648858	-3,946624
5	0,624014	0,641498	0,667883	1,801316
6	0,655201	0,664653	0,687857	1,463217
7	0,710185	0,709261	0,708842	4,613221
8	0,711613	0,713405	0,730897	1,121351
9	0,724653	0,734501	0,754085	-4,267920
10	0,734623	0,751008	0,778466	2,881911
11	0,754218	0,791423	0,804104	1,146831
12	0,800146	0,814609	5,831062	-0,495140

взять ряд Фурье функции ψ по системе $\sum_{j=1} b_j \omega_j$ и затем воспользоваться равенствами

$$\lambda_i = \sum_{k=1} c_{kj} b_k. \quad (1.225)$$

Ясно, что оба метода должны давать коэффициенты наилучшего приближения, а в силу единственности обобщенного полинома наилучшего приближения для строго нормированного пространства L_2 полученные этими разными методами две системы коэффициентов должны совпадать. В табл. 1.14 приведены коэффициенты λ_i , вычисленные вторым методом (из (1.225)). Нескольких слов следует сказать о вычислении коэффициентов a_i . Известно [155], что метод Зейделя дает наибольший выигрыш в скорости сходимости по сравнению с обычной итерацией в том случае, когда уравнения расположены в порядке возрастания $\sum_j a_{ij}$, если принимать за первое то уравнение, в котором эта сумма наименьшая. Поэтому (см. табл. 1.12, в которой даны коэффициенты системы (1.224)) коэффициенты a_i определялись в следующей последовательности:

$$a_9, a_1, a_4, a_8, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_1, a_2, a_5, a_3, a_6.$$

Из таблицы видно, что как первая, так и вторая и третья нормы [155] вектора $\lambda - a$ меньше соответствующих норм векторов $\lambda - a^{(\Phi)}$:

$$\begin{aligned} \|\lambda - a\|_I &= \max_k |\lambda_k - a_k| = 0,45 < 1,31 = \max_k |\lambda_k - a_k^{(\Phi)}| = \\ &= \|\lambda - a^{(\Phi)}\|_I, \\ \|\lambda - a\|_{II} &= \sum_{k=1}^{12} |\lambda_k - a_k| = 2,3 < 5,9 = \sum_{k=1}^{12} |\lambda_k - a_k^{(\Phi)}| = \|\lambda - a^{(\Phi)}\|_{II}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\lambda - a\|_{\text{III}} &= \sum_{k=1}^{12} (\lambda_k - a_k)^2 = 0,63 < 5,6 = \\ &= \sum_{k=1}^{12} (\lambda_k - a_k^{(\Phi)})^2 = \|\lambda - a^{(\Phi)}\|_{\text{III}}. \end{aligned}$$

В следующих четырех столбцах табл. 1.13 даны значения функции $\psi(M) = \arctg \frac{y-2}{x-2}$:

$$\bar{\psi}_1(M) = \sum_{k=1}^{12} \lambda_k \ln r(M_i, M),$$

$$\bar{\psi}_2(M) = \sum_{k=1}^{12} a_k \ln r(M_i, M),$$

$$\bar{\psi}_3(M) = \sum_{k=1}^{12} a_k^{(\Phi)} \ln r(M_i, M),$$

где M_i — точка с координатами $x_i = \cos \alpha_i$, $y_i = \sin \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, 12$) в двенадцати внутренних точках $M^{(k)}$ эллипса S с координатами

$$M^{(1)}(0, -0,9), M^{(2)}(0, -0,8), M^{(3)}(0, -0,7), M^{(4)}(0, -0,6),$$

$$M^{(5)}(0, -0,5), M^{(6)}(0, -0,4), M^{(7)}(0, -0,3), M^{(8)}(0, -0,2),$$

$$M^{(9)}(0, -0,1), M^{(10)}(0, 0), M^{(11)}(0, 0,1), M^{(12)}(0, 0,2).$$

Из табл. 1.13 видно, что приближенное решение задачи Дирихле по методу рассмотренных здесь рядов $\bar{\psi}_2(M)$ дает более точные значения, чем приближенное решение этой же задачи методом рядов Фурье $\bar{\psi}_3(M)$. Отметим, что $\psi(M)$ — точное решение этой задачи, а $\bar{\psi}_1(M)$ — ее приближенное решение, полученное с помощью наилучшего приближения в смысле метрики L_2 граничной функции $\psi(s)$.

Как уже было отмечено выше, нахождение коэффициентов (1.179) соответствует одной итерации по методу Зейделя для системы (1.224). При этом важно то, что не приходится вычислять коэффициенты этой системы — скалярные произведения (φ_i, φ_j) . Это обстоятельство в некоторых случаях может сильно уменьшить число необходимых квадратур при нахождении коэффициентов наилучшего приближения, т. е. при решении системы (1.224). Действительно, пусть требуется найти первые n коэффициентов λ_i наилучшего приближения функции ψ по системе $\{\varphi_i\}$. Возьмем новую систему ψ_i ($i = 1, \dots, N$; $N > n$), где $\psi_k = \varphi_j$, $k = j \pmod{n}$, и найдем коэффициенты приближенного ряда по этой системе. Нетрудно видеть, что это будет соответствовать итерационному процессу Зейделя для системы (1.224). При этом количество итераций будет равно N/n , при $N = mn$, где m — не-

которое целое число. Нецелое значение величины N/n показывает, что последняя итерация по Зейделю не доведена до конца. Так как вычисление коэффициентов системы (1.224) требует $(n^2 + n)/2$ квадратур, а вычисление N коэффициентов (1.179) требует N квадратур, то может оказаться, что методом предложенного в этой книге ряда выгоднее пользоваться, чем вычислением коэффициентов системы (1.224) и дальнейшим его решением (собственно решение системы (1.224) одним из модификаций метода Гаусса потребует еще порядка n^3 арифметических действий). В последнем столбце табл. 12 даны значения коэффициентов \bar{a}_k , полученные при $N = 36$, т. е. были проделаны три итерации для системы (1.224) методом рассмотренных рядов. Коэффициенты вычислялись из формулы $\bar{a}_k = a_k + a_{12+k} + a_{24+k}$. Коэффициенты λ_k и \bar{a}_k совпадают между собой пятью десятичными разрядами. Дальнейшее увеличение числа итераций не имело смысла, так как скалярные произведения вычислялись с шестью верными десятичными знаками. Вычисление коэффициентов \bar{a}_k потребовало 36 квадратур, тогда как вычисление коэффициентов системы (1.224) потребовало бы 78 квадратур.

Обозначим спектральную норму оператора $(I - B_1)^{-1}B_2$ через \bar{b} . Тогда число итераций по методу Зейделя, необходимых для уменьшения погрешностей нулевого приближения в 10^k раз для системы (1.224) (или, что то же самое, число простых итераций для системы (1.199), будет равно $k/\log_{10}\bar{b}$, и если это число меньше n , то итерационный процесс с помощью метода предложенных рядов потребует меньшего числа квадратур, чем вычисление коэффициентов системы (1.224) и дальнейшее ее решение.

В работе [49] приближенное решение внутренней задачи Дирихле в плоской эллиптической области G с границей Γ

$$\Delta u = 0 \text{ в } G, \quad u|_{\Gamma} = \psi(S), \quad (1.226)$$

где $\psi(S)$ — заданная функция, ищется в виде ряда

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k p_k, \quad (1.227)$$

а коэффициенты a_k предлагается вычислять по формуле

$$a_k = \sum_{i=k}^n A_{ik} c_i, \quad (1.228)$$

где A_{ik} — коэффициенты ортонормализаций,

$$c_i = \int_{\Gamma} \psi p_i dS, \quad p_0 = 1, \quad p_{2s-1} = r^s \cos s\varphi, \quad p_{2s} = r^s \sin s\varphi.$$

Нетрудно заметить, что формула (1.228) неверна. Действительно, если искать решение в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^n b_k \psi_k, \quad \text{где} \quad \psi_k = \sum_{i=1}^k A_{ki} p_i, \quad (1.229)$$

то коэффициенты b_k следует вычислять по формуле

$$b_k = \int_{\Gamma} \psi \psi_k dS, \quad \text{или} \quad b_k = \sum_{j=1}^n A_{kj} c_j. \quad (1.230)$$

Для получения решения в виде (1.227) подставим в (1.229) выражение для ψ_k

$$u_n = \sum_{k=1}^n b_k \sum_{i=1}^k A_{ki} p_i = \sum_{k=1}^n a_k p_k, \quad \text{где} \quad a_k = \sum_{j=k}^n b_j A_{jk}. \quad (1.231)$$

Таким образом, для приближенного решения задачи (1.126) с помощью таблиц коэффициентов ортонормализации, приведенных в [49], следует после вычисления коэффициентов Фурье c_i вычислить b_k по (1.230), а затем a_k по (1.231).

Пример решения граничной задачи с помощью коэффициентов ортонормализации, который сразу обнаружил бы ошибочность формулы (1.228), в [49] отсутствует.

Заметим, что если вместо коэффициентов ортонормализации A_{ki} табулировать выражение

$$d_{jk} = \sum_{i=r}^n A_{ij} A_{ik},$$

где $r = \max(k, j)$, то a_k можно вычислить по формуле

$$a_k = \sum_{j=k}^n b_k A_{jk} = \sum_{i=k}^n \sum_{j=1}^i A_{ji} c_i = \sum_{j=1}^n d_{jk} c_j.$$

Этот курьезный случай убеждает в ненужности изданий такого рода таблиц: по-видимому, ими никто не пользуется. Значительно полезнее издание готовых универсальных программ на алгоритмических языках.

§ 1.10. О погрешности решения граничных задач методом разложения по неортогональным функциям

Основные задачи теории приближенных методов рассматриваются в следующей последовательности: 1) построение алгоритма; 2) установление сходимости; 3) оценка погрешности.

Как показано в предыдущих параграфах, первые две задачи для обоих излагаемых методов решены. Что касается оценки погрешности приближенного решения граничной задачи, то она сводится к оценке разности между разлагаемой функцией $\psi(y)$

и ее рядом Фурье $\psi^{(N)} = \sum_{k=1}^N a_k^{(N)} \psi_k$. Оценка разности $\|\psi(y) - \psi^{(N)}(y)\|$ есть задача общего гармонического анализа, и для ее решения надо обобщить соответствующие теоремы Д. Джексона (см., например [102], обобщенную теорему Стоуна — Вейерштрасса). Но в этом случае получим лишь оценку скорости сходимости, т. е. как зависит погрешность от N . Известно, что реальную априорную оценку можно получить лишь в весьма ограниченном числе задач, и поэтому не меньшее значение приобретают апостериорные оценки, тем более, что такую оценку можно получить машинными средствами и она может быть использована для автоматического изменения дальнейшего плана вычислений. Одним из важных достоинств излагаемых здесь методов приближенного решения граничных задач следует считать то обстоятельство, что они дают возможность получения эффективных апостериорных оценок погрешности.

В отличие от метода конечных разностей, в изложенных выше методах решения граничной задачи (1.1), (1.2) дифференциальное уравнение (1.1) удовлетворяется точно, а граничное условие (1.2) — приближенно. Таким образом, единственным источником погрешности является погрешность аппроксимации правой части (1.2). Реальная погрешность $\|\psi(y) - lu^{(N)}(y)\|$, где $u^{(N)}(y)$ — приближенное значение решения граничной задачи (1.1), (1.2) в точке $y \in \Gamma$, легко может быть вычислена после приближенного решения соответствующей граничной задачи. При малой погрешности $[\psi(y) - lu^{(N)}(y)]$ можно утверждать, что и погрешность $[u(x) - u^{(N)}(x)]$ будет достаточно мала для любой точки $x \in G$. Последнее непосредственно следует из предположения корректности задачи (1.1), (1.2) или из теорем типа принципа максимума в теории гармонических функций. В том случае, когда разность $\|\psi(y) - lu^{(N)}(y)\|$ больше допустимых значений, следует проанализировать причины больших значений погрешности $\psi(y) - \psi^{(N)}(y)$. При таком анализе мы пользовались следующими соображениями. При больших значениях $\psi(y) - \sum_{k=1}^N a_k^{(N)} \psi_k(y)$ либо функции $\psi_k(y)$ ($k = 1, \dots, N$) не приспособлены хорошо к разложению функции $\psi(y)$, либо коэффициенты разложения $a_k^{(N)}$ получаются с большой погрешностью. Обозначим через E_1 погрешность аппроксимации (погрешность $\psi - \psi^{(N)}$ при абсолютно точных значениях $a_k^{(N)}$), а через E_2 — погрешность вычисления коэффициентов $a_k^{(N)}$:

$$E_1 = \psi(y) - \sum_{k=1}^N a_k^{(N)} \psi_k(y),$$

$$E_2 = E_2 [a_1^{(N)} - \bar{a}_1^{(N)}, a_2^{(N)} - \bar{a}_2^{(N)}, \dots, a_N^{(N)} - \bar{a}_N^{(N)}],$$

где $a_k^{(N)}$ и $\bar{a}_k^{(N)}$ — истинные и приближенные значения коэффициентов разложения. Для контроля E_2 можно воспользоваться следующим приемом. Ввиду того, что обусловленность матрицы (1.32) зависит от геометрии контура Γ и выбора вспомогательных точек z_k , определяющих фундаментальные решения, и не зависит от граничной функции $\psi(y)$, можно в качестве граничной функции взять линейную комбинацию $\psi(y) = \sum_{k=1}^N c_k \psi_k(y)$, где c_k — произвольные фиксированные числа. Ясно, что для такой граничной задачи

$$E_1 = 0, \quad E_2 = [c_1 - \bar{a}_1^{(N)}, \dots, c_N - a_N^{(N)}].$$

Получив приближенные значения $\bar{a}_N^{(N)}$ и сравнив с c_k , мы будем иметь представление о погрешности получения коэффициентов.

Правда, при этом может случайно оказаться, что погрешность получения коэффициентов разложения может зависеть от граничной функции, что слишком маловероятно, и при описанных ниже численных экспериментах не наблюдалось. При одной и той же геометрии границы Γ и системы вспомогательных точек $\{z_k\}_{k=1}^N$ погрешность E_1 практически не зависела от набора чисел c_k ($k = 1, \dots, N$), определяющих граничное значение задачи (1.1), (1.2), т. е.

$$\psi(y) = \sum_{k=1}^N c_k \psi_k(y).$$

Что касается погрешности E_1 , то для ее уменьшения следует знать, как меняются функции ψ_k при изменении вспомогательных точек z_k . Вопросы удачного выбора функции ψ_k затрагивались в § 1.6.

Равенство (1.37), которое в нашем случае запишется в виде

$$\|E_1\| = \min_{a_k} \left\| \psi - \sum_{k=1}^N a_k \psi_k \right\| = \frac{G(\psi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)}{G(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)}, \quad (1.232)$$

можно рассматривать как априорную оценку погрешности аппроксимации, тем более, что элементы детерминанта Грама необходимо вычислять для реализации метода, так что перед окончательным выбором числа членов разложения N следует вычислить правую часть равенства (1.232).

Если для вычисления коэффициентов разложения a_k сначала находятся коэффициенты ортонормализации γ_{ki} , а затем коэффициенты Фурье l_k по формуле (1.123), то для оценки погрешности можно воспользоваться равенством [26]

$$\|E_1\|^2 = \|\psi\|^2 - \sum_{k=1}^N c_k^2,$$

которым можно воспользоваться также для выбора числа членов разложения N . И, наконец, если коэффициенты разложения вычисляются по алгоритму, изложенному в § 1.9, т. е. по формуле

$a_{k+1} = \left(\psi - \sum_{i=1}^k a_i \psi_i, \psi_{k+1} \right)$, то, как это показано выше, и в этом случае справедливо неравенство Бесселя

$$\|E_1\|^2 = \|\psi\|^2 - \sum_{k=1}^N a_k^2, \quad (1.233)$$

которое для полных систем превращается [26] в равенство Парсеваля.

§ 1.11. Решение граничных задач для неоднородных уравнений, нелинейных граничных условий и правых частей и для разрывных граничных условий

Описанные в первых двух параграфах методы решения граничных задач приспособлены для интегрирования однородных дифференциальных уравнений с неоднородными граничными условиями. Кроме того, предполагается, что граничная функция — достаточно гладкая. В этом параграфе будут приведены известные способы сведения решения граничных задач с неоднородными уравнениями к решению граничных задач с однородными дифференциальными уравнениями, итерационные способы решения нелинейных граничных задач, когда на каждом шаге итерации решается линейная граничная задача, и способы сглаживания граничных значений.

1. В том случае, когда граничная функция $\psi(y)$ задачи (1.1), (1.2) терпит разрывы, вообще говоря, могут быть применены описанные выше методы решения, и они при надлежащих условиях дадут приближенные решения $u^{(N)}$ со сколь угодно малой погрешностью. Однако при практических вычислениях достижимое для современного состояния вычислительной техники число членов разложения N при разрывных граничных значениях может дать довольно грубые результаты. Объясняется это гладкостью фундаментальных решений. Вообще говоря, при решении граничной задачи (1.1), (1.2) методом разложения по неортогональным функциям можно так выбрать координатные функции ψ_k , что при разрывных граничных значениях они дадут лучшие результаты, чем при гладких граничных значениях. Очевидно, для этого необходимо, чтобы и функции ψ_k имели разрывы. Этим метод представления решения граничной задачи в виде ряда выгодно отличается от метода конечных разностей, так как погрешность последнего существенно зависит от дифференциальных свойств решения и, следовательно, от дифференциальных свойств решения граничной функции $\psi(y)$. Однако в том случае, когда

в качестве функции ψ_h выбираются фундаментальные решения дифференциального уравнения (1.1), желательно сгладить граничную функцию, так как, когда точки z_h , определяющие фундаментальные решения, лежат вне области G , в которой ищется решение задачи (1.1), (1.2), фундаментальные решения на достаточно гладких границах Γ имеют высокую степень гладкости. Поэтому такие гладкие функции мало приспособлены для разложения разрывных функций, хотя в смысле метрики $L_2(S)$ они образуют полную систему.

Если граничная функция $\psi(y)$ в некоторой точке $y_0 \in \Gamma$ принимает очень большое значение и при этом увеличение $\psi(y)$ при $y \rightarrow y_0$ достаточно плавное, то для таких граничных функций применение фундаментальных решений может дать очень хорошие результаты. Для этого достаточно одну из точек z_h взять достаточно близко от точки y_0 . Эта близость зависит от $\psi(y_0)$ и вида конкретных фундаментальных решений. Эти соображения проясняются при рассмотрении конкретных граничных задач.

Значительно сложнее обстоит дело в том случае, когда граничная функция $\psi(y)$ в какой-либо точке y_0 терпит конечный разрыв. Для аппроксимации таких граничных функций фундаментальные решения малоприспособны. Можно конечно вблизи точки y_0 поместить две точки из множества z_h , соответствующие фундаментальные решения которых будут иметь в разложении коэффициенты противоположных знаков, но это несколько усложняет алгоритм. Более целесообразным является, если это возможно, предварительное сглаживание граничной функции $\psi(y)$. Для этого достаточно иметь такую функцию $\Phi(x)$, которая была бы решением уравнения (1.1) и в точке y_0 имела конечный разрыв. В случае плоского уравнения Лапласа, например, известно

[69], что функция $\arctg \frac{x_2 - y_2^{(0)}}{x_1 - y_1^{(0)}}$, где $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}$ — координаты

точки y_0 , удовлетворяет вышеприведенным условиям. Если первая производная по дуге граничной функции $\psi(y)$ терпит конечный разрыв, то в этом случае для двумерного уравнения Лапласа можно воспользоваться функцией

$$[x_1 - y_1^{(0)}] \left(\ln \sqrt{[x_1 - y_1^{(0)}]^2 + [x_2 - y_2^{(0)}]^2} - 1 \right) - [x_2 - y_2^{(0)}] \arctg \frac{x_2 - y_2^{(0)}}{x_1 - y_1^{(0)}},$$

первая производная которой по дуге в точке y_0 терпит конечный разрыв.

2. При решении граничной задачи с неоднородным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} Lu(x) &= f(x), & x \in G, \\ lu(x)|_{\Gamma} &= \psi(y), \end{aligned} \tag{1.234}$$

решение ищется в виде суммы

$$u(x) = v(x) + \omega(x),$$

где $\omega(x)$ — какое-либо частное решение уравнения (1.234), а $v(x)$ является решением граничной задачи с однородным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} Lv(x) &= 0, \\ lv(x)|_{\Gamma} &= \psi(y) - l\omega(x)|_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (1.235)$$

В качестве частного решения $\omega(x)$ можно воспользоваться выражением

$$\omega(x) = \int_G K(x, \bar{x}) f(\bar{x}) d\bar{x}, \quad (1.236)$$

которое в силу определения фундаментального решения $K(x, \bar{x})$ (см. § 1.6) является частным решением дифференциального уравнения (1.234). Однако интеграл в правой части формулы (1.236), как правило, не выражается в элементарных функциях, что сильно затягивает время решения граничной задачи (1.235).

3. Особенно сильно замедляет вычислительный процесс использование частного решения (1.236) при решении нелинейной граничной задачи

$$\begin{aligned} Lu(x) &= f(x, u), \quad x \in G, \\ lu(x)|_{\Gamma} &= \psi(s, u), \end{aligned}$$

методом последовательных приближений

$$[u(x)]^n = [v(x)]^n + [\omega(x)]^{(n)},$$

где $[\omega(x)]^n$ — какое-либо частное решение уравнения

$$L[\omega(x)]^{(n)} = f(x, [u]^{(n-1)}),$$

для которого выражение $l[u(x)]^{(n)}$ конечно, а $[v(x)]^n$ является решением граничной задачи для однородного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} L[v(x)]^{(n)} &= 0, \\ l[v(x)]^{(n)}|_{\Gamma} &= \psi(s, [u]^{(n-1)}) - l[u(x)]^{(n)}|_{\Gamma}. \end{aligned}$$

Сходимость $[u(x)]^{(n)} \rightarrow u(x)$ при $n \rightarrow \infty$ зависит от вида функции f и ψ и исследуется хорошо известными способами теории сжатых отображений.

Некоторые частные решения $\omega(x)$ для двумерного уравнения Лапласа будут даны в гл. III.

§ 1.12. Решение граничных задач для кусочно-однородных областей

Во многих практических задачах область G , для которой решается граничная задача (1.1), (1.2), содержит так называемые внутренние границы — границы внутри G , вдоль которых скачкообразно меняются характеристики среды. При постановке граничных задач для таких составных тел на внутренних границах $\Gamma_{\text{вн}}$ задаются «условия сопряжения»

$$c_{i1}l_i u(x)|_{\Gamma_{\text{вн}}} = c_{i2}l_i u(x)|_{\Gamma_{\text{вн}}} + \psi_i(y), \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.237)$$

где c_{i1} и c_{i2} — константы, l_i — некоторые операторы. Для дифференциальных операторов L второго порядка число m равно двум. Условия (1.237) совместно с граничной задачей (1.1), (1.2) дают возможность получить решение соответствующих задач, которые в литературе иногда называют контактными граничными задачами. Излагаемые здесь приближенные методы решения граничных задач могут быть использованы и для решения контактных граничных задач. Укажем лишь общую идею такого обобщения этих методов.

Пусть область G является суммой \bar{n} подобластей G_k с границами Γ_k . Рассмотрим граничную задачу

$$L_k u(x) = 0, \quad x \in G_k, \quad (1.238)$$

$$c_{ki1}l_i u(x)|_{\Gamma_k} = c_{ki2}l_i u(x)|_{\Gamma_k} + \psi_{ik}(y), \quad (1.239)$$

где c_{ki1} и c_{ki2} — константы, индекс k у оператора L_k означает, что операторы могут быть различного вида в различных областях, ψ_{ik} — заданные функции. Очевидно, что при представлении приближенного решения граничной задачи (1.238), (1.239) в виде ряда

$$u^{(N)}(x) = \sum_{k=1}^N a_k K(z_k, x),$$

где $K(z_k, x)$ — фундаментальные решения уравнения (1.238) не может удовлетворять заданным «скачкам» (1.239), и, следовательно, решение рассматриваемой граничной задачи нельзя искать в виде одного и того же ряда во всех областях G_k .

Кроме того, в том случае, когда сам оператор L_k содержит характеристики среды в k -й подобласти G_k , аналитическое выражение для фундаментальных решений будет зависеть от этих характеристик и, следовательно, фундаментальное решение $K(z_j, x)$ для k -й подобласти не будет удовлетворять уравнению (1.238) в подобласти G_s при $s \neq k$. Такая ситуация возникает в

граничных задачах теории упругости, в которых L зависит от упругих констант k -й среды. Обозначим через $u^{(k)}(x)$ решение задачи (1.238), (1.239) при $x \in G_k$. Пусть S_k — замкнутая поверхность, целиком включающая в себя G_k , не имеющая с Γ_k общих точек и не содержащая целиком ни одну из областей G_i , $i \neq k$. В случае внутренних граничных задач исключение составляет кривая S_0 , целиком охватывающая всю область G , а значит, и все подобласти G_k . Пусть $\{z_{ki}\}_{k=1}^\infty$ — всюду плотное множество точек на поверхности S_i . Приближенное решение рассматриваемой граничной задачи в области G будем искать в виде

$$u^{k, N_k}(x) = \sum_{j=1}^{N_k} a_j^{(N_k)} K(z_{kj}, x), \tag{1.240}$$

где N_k — натуральные числа, $a_j^{(N_k)}$ — искомые коэффициенты разложения. Ясно, что ввиду сделанных предположений относительно поверхностей S_i формула (1.240) дает точное решение уравнения (1.238) в любой точке $x \in G_k$. Заметим, что если некоторые области G_k вложены друг в друга (область G_4 на рис. 3 вложена в область G_3), то некоторые области получают многосвязными, и для них, как это было отмечено в § 1.1, соответствующие вспомогательные поверхности S_k будут содержать несколько замкнутых поверхностей. Так, например, для двухсвязной области G_3 на рис. 3 вспомогательная поверхность S_3 будет

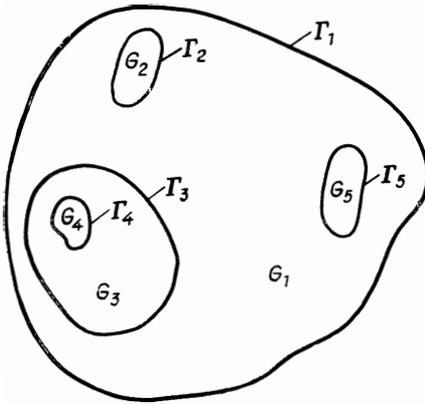


Рис. 3

содержать две замкнутые поверхности — $S_3^1 \in G_1$ (целиком охватывающая область G_3) и $S_3^2 \in G_4$ (целиком охватываемая G_4). Для получения коэффициентов разложения $a_j^{N_k}$ рассмотрим систему определенных на $\bigcup_{k=1}^m \Gamma_k = \Gamma$ функционалов ω_{si} ($s = 1, \dots, N_k$, $i = 1, \dots, m$) и потребуем, чтобы они принимали нулевые значения на разности

$$c_{k_1 i} l_i u^{k_1 N_{k_1}} - c_{k_2 i} l_i u^{k_2 N_{k_2}} - \varphi_{ik}(y),$$

где k_1 и k_2 — номера тех областей, на границе которых рассматриваются условия сопряжений.

Нетрудно видеть, что это приводит нас к системе линейных алгебраических уравнений

$$c_{ki1} \sum_{j=1}^{N_k} a_j^{(N_{k_1})} \omega_{si} [l_k(z_{k_1j}, y)] - c_{ki1} \sum_{i=1}^{N_k} a_j^{(N_{k_2})} \omega_{si} [l_k(z_{k_2j}, y)] = \\ = \omega_{si} [\psi_{ik}(y)], \quad k = 1, \dots, \bar{n},$$

решение которых дает нам искомые коэффициенты $a_j^{(N_k)}$ ($j = 1, \dots, N_k; k = 1, \dots, \bar{n}$).

При достаточно больших \bar{n} система линейных уравнений получается весьма громоздкой (порядок $\prod_{k=1}^{\bar{n}} N_k$), поэтому для получения коэффициентов $a_j^{(N_k)}$ можно воспользоваться методом последовательных приближений.

Для дифференциальных операторов L , содержащих частные производные искомой функции не выше второго порядка, число m равно 2, l_1 , как правило, — тождественный оператор, а l_2 — оператор, для которого граничная задача $Lu = 0$, $l_2u|_{\Gamma} = \psi(y)$ разрешима. Предполагая, что на внешней границе Γ_1 (см. рис. 3) заданы обычные граничные условия, решаем граничную задачу в G_1 :

$$Lu^{(1,1)} = 0, \\ l_1u^{(1,1)}|_{\Gamma_1} = \psi(y), \quad (1.241) \\ l_1u^{(1,1)}|_{\Gamma_k} = \frac{1}{c_{k11}} [c_{k12}l_1u^{(k,0)} + \psi_{1k}], \quad k = 2, \dots, \bar{n},$$

где $u^{(k,0)}$ — произвольные нулевые приближения для u^k . Решив задачу (1.241), можно получить первые приближения для $u^{(k,1)}$ из решения граничных задач

$$L_ku^{(k,1)} = 0, \quad l_2u^{(k,1)}|_{\Gamma_k} = \frac{1}{c_{k22}} [c_{k21}l_2u^{(1,1)} - \psi_{2k}], \quad (1.242)$$

которые разрешимы в силу сделанного выше предположения относительно оператора l_2 . Окончательно, в том случае, когда G — ограниченная область (внутренняя граничная задача) и нет вложенных неоднородностей, можно воспользоваться следующим методом последовательных решений граничных задач

$$Lu^{(1,j)} = 0 \text{ в } G_1, \\ l_1u^{(1,j)}|_{\Gamma_1} = \psi(y), \\ l_1u^{(1,j)}|_{\Gamma_k} = \frac{1}{c_{k11}} [c_{k12} l_1u^{(k,i-1)} + \psi_{1k}], \\ Lu^{(k,j)} = 0 \text{ в } G_k, \\ l_2u^{(k,j)}|_{\Gamma_k} = \frac{1}{c_{k22}} [c_{k21} l_2u^{(1,j)} - \psi_{2k}]_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.243)$$

Нетрудно видеть, что в случае сходимости $u^{(k,j)} \rightarrow v^{(k)}$ при $j \rightarrow \infty$ все $v^{(k)}$ будут удовлетворять условиям граничной задачи (1.238), (1.239).

До сих пор излагали применение первого способа решения граничных задач для случая кусочно-однородных областей. Заметим, однако, что для решения граничных задач (1.242), (1.243) на каждом шаге последовательных приближений можно воспользоваться вторым способом решения граничных задач.

Прежде чем перейти к изложению применения второго способа решения граничных задач для случая одной граничной задачи, сделаем следующее предположение. Пусть S и S_1 — простые замкнутые поверхности, причем S целиком содержится в G , а S_1 охватывает G с границей Γ . Рассмотрим систему $2m$ -мерных векторов $\{K_{1,j}(x_k, x); K_{2,j}(x_k, x)_{k=1, j=1}^m\}$, где $K_{1j}(x_k, x)$ и $K_{2j}(x_k, x)$ — m -мерные вектор-строки матриц $K_1(x, y)$ и $K_2(x, y)$ в формулах (1.21) и (1.22), $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ — множество всюду плотных на $(S + S_1)$ точек. Перенумеруем элементы рассматриваемой системы $2m$ -мерных векторов так, чтобы каждому элементу соответствовал один индекс, и обозначим полученное множество через $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$. Будем предполагать, что система $\{\psi_k(y)\}_{k=1}^\infty$ линейно независима и полна в пространстве с метрикой L_2 всех шестимерных вектор-функций, определенных на Γ .

Рассмотрим внешнюю контактную граничную задачу

$$\begin{aligned} L_1 u^{(1)}(x) &= 0, & x \in G_2 \\ L_2 u^{(2)}(x) &= 0, & x \in E_m \setminus G, \\ l^{(1)} u^{(1)}(x)|_\Gamma &= l^{(1)} u^{(2)}(x)|_\Gamma + \psi^{(1)}(y), \\ l^{(2)} u^{(1)}(x)|_\Gamma &= l^{(2)} u^{(2)}(x)|_\Gamma + \psi^{(2)}(y), \end{aligned} \quad (1.244)$$

где E_m — m -мерное пространство, $\psi^1(y)$ и $\psi^2(y)$ — m -мерные вектор-функции, определенные на Γ , $l^{(1)}$ и $l^{(2)}$ — операторы, участвующие в формулах (1.21), (1.22). Пусть регулярное на бесконечности решение граничной задачи существует и единственно, и пусть

$$l^{(1)} u^{(1)}(x)|_\Gamma = \varphi_1(y), \quad l u^{(1)}(x)|_\Gamma = \varphi_2(y).$$

Запишем формулу (1.22) для области G . В наших обозначениях она примет вид

$$\int_\Gamma \psi_k(y) \varphi(y) dS_y = 0, \quad (1.245)$$

где $\varphi(y)$ — $2m$ -мерный вектор $\{\varphi_1(y), \varphi_2(y)\}$, а точки z_k , определяющие вектор ψ_k , лежат на S . Учитывая условия сопряжения, из формулы (1.22), записанной для E_m/G , получаем

$$\int \psi_k(y) \varphi(y) dS_y = \int \psi_k(y) \psi(y) dS_y, \quad (1.246)$$

где $\psi(y)$ — $2m$ -мерный вектор $(\psi^{(1)}(y), \psi^{(2)}(y))$, а точки z_k , определяющие функции ψ_k , лежат на S_1 . Таким образом, из (1.245) и (1.246) получаем, что известны моменты искомой функции $\varphi(y)$ по полной линейно независимой системе $\{\psi_k(y)\}_{k=1}^\infty$. Это, как было показано в § 1.2, 1.3, дает возможность получить приближенные значения неизвестной функции $\varphi(y)$; подставив ее в (1.21), получим приближенное решение граничной задачи в любой точке области G . Решение в $E_m \setminus G$ получаем из $\varphi(y)$, используя условия сопряжения и формулу (1.21), записанную для области $E_n \setminus G$.

Рассмотрим более подробно метод последовательных приближений (1.243), который легко переносится и на второй способ решения граничных задач для кусочно-однородных сред. Будем предполагать, что число условий сопряжений в формуле (1.237) равно двум ($m = 2$), l_1 — тождественный оператор, $c_{11} = c_{12}$ и область G содержит две подобласти G_1 и G_2 с общей границей Γ_{12} между ними. Перенумеруем подобласти таким образом, чтобы G_1 содержала часть внешней границы Γ_1 (рис. 3). Выберем на внутренней границе Γ_{12} нулевое приближение u^0 и введем обозначения

$$\begin{aligned} \delta_{1j} &= u^{(1,j)}|_{\Gamma_{12}} - u^{(2,j)}|_{\Gamma_{12}} - \psi_1, \\ \delta_{2j} &= c_{21}l_2^{(1,j)} - c_{22}l_2u^{(2,j)} - \psi_2, \end{aligned}$$

где $u^{(1,j)}$ и $u^{(2,j)}$ являются решениями граничных задач соответственно

$$\begin{aligned} L_1u^{(1,j)}(x) &= 0, \quad x \in G_1, \\ u^{(1,j)}|_{\Gamma_1^1} &= \psi(y), \quad u^{(1,j)}|_{\Gamma_{12}} = u^{(1,i-1)} + \bar{\alpha}_{j-1}\delta_{1,j-1}, \\ L_2u^{(2,j)}(x) &= 0, \quad x \in G_2, \\ u^{(2,j)}|_{\Gamma_1^2} &= \psi(y), \quad u^{(2,j)}|_{\Gamma_{12}} = u^{(2,j-1)} + \alpha_{j-1}\delta_{1,j-1}, \end{aligned} \tag{1.243_1}$$

при четном $j = 2n$ и

$$\begin{aligned} L_1u^{(1,j)}(x) &= 0, \quad x \in G_1, \\ u^{(1,j)}|_{\Gamma_1^1} &= \psi(y), \quad l_2u^{(1,j)}|_{\Gamma_{12}} = l_2u^{(1,j-1)}|_{\Gamma_{12}} + \bar{\mu}_{j-1}\delta_{2,j-1}, \\ L_2u^{(2,j)}(x) &= 0, \quad x \in G_2, \\ u^{(2,j)}|_{\Gamma_1^2} &= \psi(y), \quad l_2u^{(2,j)}|_{\Gamma_{12}} = l_2u^{(2,j-1)}|_{\Gamma_{12}} + \mu_{j-1}\delta_{2,j-1}, \end{aligned} \tag{1.243_2}$$

при нечетном $j = 2n + 1$, Γ_1^1 и Γ_1^2 — внешние границы областей G_1 и G_2 соответственно (в алгоритме допускаются вложенные области, когда Γ_1^2 — пустое множество точек. Алгоритмические

особенности для этого случая будут рассмотрены ниже в примере 2). α_j , μ_j , $\bar{\alpha}_j$ и $\bar{\mu}_j$ — веса невязок условий сопряжения (1.237), значения которых следует определять из условий минимизации функционала [110], связанного с вариационным методом решения граничной задачи (1.1), (1.2), (1.237). Так определенные оптимальные значения параметров управления итерационным процессом обеспечивают сходимость, однако соответствующий вычислительный процесс может оказаться довольно громоздким из-за сложности определения указанных оптимальных значений параметров a_j , μ_j , $\bar{\alpha}_j$ и $\bar{\mu}_j$. Поэтому представляет определенный интерес проведение численных экспериментов по сходимости рассматриваемого метода последовательных приближений, когда параметры итерационного процесса не зависят от номера итерации $\alpha_j \equiv \alpha$, $\mu_j \equiv \mu$, $\bar{\alpha}_j \equiv \bar{\alpha}$, $\bar{\mu}_j \equiv \bar{\mu}$. Ясно, что в этом случае для сходимости процесса должны выполняться условия

$$\alpha - \bar{\alpha} = 1,$$

$$1 + \bar{\mu}c_{21} = \mu c_{22},$$

что означает стремление соблюдения условий сопряжения на каждой итерации j с применением полученных решений на предыдущей итерации $j - 1$.

Действительно α и $\bar{\alpha}$ должны быть выбраны из условия

$$u^{(1,j)} + \bar{\alpha}\delta_{1j} = u^{(2,j)} + \alpha\delta_{1j} + \psi_1,$$

что дает $\alpha - \bar{\alpha} = 1$. Аналогично, μ и $\bar{\mu}$ должны определяться из равенства

$$c_{21}[l_2u^{(1,j)} + \bar{\mu}\delta_{2j}] = c_{22}[l_2u^{(2,j)} + \mu\delta_{2j}] + \psi_2,$$

что дает условие $1 + \bar{\mu}c_{21} = \mu c_{22}$.

Рассматриваемый итерационный процесс, в отличие от итерационного процесса (1.243), является двухшаговым, и его осуществление связано с необходимостью решения в каждой из областей G_1 и G_2 двух разных граничных задач. Это обстоятельство приводит к дополнительным вычислительным трудностям по сравнению с итерационным процессом (1.243), который в нашем случае принимает вид

$$L_1u^{(1,j)}(x) = 0, \quad x \in G_1,$$

$$lu^{(1,j)} \Big|_{\Gamma_1^1} = \psi(y), \quad u^{(1,j)} \Big|_{\Gamma_{12}} = u^{(2,j-1)} + \psi_1,$$

$$L_2u^{(2,j)}(x) = 0, \quad x \in G_2,$$

$$lu^{(2,j)} \Big|_{\Gamma_2^1} = \psi(y), \quad l_2u^{(2,j)} \Big|_{\Gamma_{12}} = \alpha l_2u^{(1,j)} \Big|_{\Gamma_{12}} + \psi_2$$

($\alpha = c_{21}/c_{22}$), и следовательно, в каждой области в ходе итерационного процесса решается одна и та же граничная задача.

Численные расчеты по схемам (1.243) и (1.243₁) приведем для оператора Лапласа $L_1 \equiv L_2 \equiv \Delta$, когда область G является суммой прямоугольных подобластей G_2 с угловыми точками

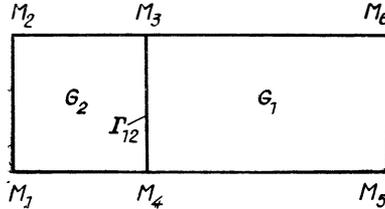


Рис. 4

$M_1(-2; 0)$, $M_2(-2; 1)$, $M_3(0; 1)$, $M_4(0; 0)$ и G_1 с угловыми точками M_3 , M_4 , $M_5(1; 0)$, $M_6(1; 1)$ (рис. 4). Условия сопряжения на отрезке M_3M_4 имеют вид

$$(c_{12} = 1, c_{22} = 2),$$

$$u^{(1)}|_{M_3M_4} = u^{(2)}|_{M_3M_4}, \quad \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}|_{M_3M_4} = 2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n}|_{M_3M_4},$$

а граничные значения ψ на внешней границе равны

$$\begin{aligned} \psi|_{M_1M_2} &= -4x^2, & \psi|_{M_2M_3} &= 2x^1, & \psi|_{M_1M_4} &= 0, \\ \psi|_{M_3M_6} &= x^1, & \psi|_{M_5M_6} &= x^2, & \psi|_{M_4M_5} &= 0. \end{aligned}$$

Напомним, что через x^1 , x^2 обозначены независимые переменные.

Нетрудно проверить, что решением рассматриваемой контактной граничной задачи в области G_k ($k = 1, 2$) является функция $u = kx^1x^2$. В качестве нулевого приближения на границе M_3M_4 было взято выражение $(1 - x^2)x^2$, которое обеспечивает условие согласования с граничными значениями. В табл. 1.14 даны умноженные на 10^5 первые тринадцать приближений $u^{(1,j)}$ (первое число в каждом столбце) и $\left(\frac{\partial u^{(2,j)}}{\partial n} - 2x^2\right)$ — второе число в каждом столбце, полученные по схеме (1.243) в точках внутренней границы M_3M_4 с координатой x^2

$$\begin{aligned} \Delta u^{(1,j)}(x) &= 0, & x &\in G_1, \\ u^{(1,j)}|_{M_4M_5M_6M_3} &= \psi, & u^{(1,j)}|_{M_3M_4} &= u^{(2,j-1)}|_{M_3M_4}, \\ \Delta u^{(2,j)}(x) &= 0, & x &\in G_2, \\ u^{(2,j)}|_{M_4M_1M_2M_3} &= \psi, & \frac{\partial u^{(2,j)}}{\partial n}|_{M_3M_4} &= \frac{1}{2} \frac{\partial u^{(1,j)}}{\partial n}|_{M_3M_4}. \end{aligned}$$

Т а б л и ц а 1.14

α^2	j																									
	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12		13	
0,1	3780	10851	1642	4549	724	1972	322	869	144	386	64	172	29	76	13	34	6	15	3	6	1	3	1	1	0	0
0,2	6987	19332	3084	8405	1370	3701	611	1642	273	731	122	326	55	145	25	65	11	28	5	12	3	5	1	2	1	0
0,3	9381	25216	4191	11250	1873	5022	838	2243	375	1002	168	448	75	200	34	89	15	39	7	17	3	7	2	2	1	0
0,4	10851	28653	4882	12976	2191	5843	932	2622	440	1175	197	525	89	235	40	104	18	46	8	20	4	8	2	3	1	0
0,5	11346	29782	5117	13553	2300	6120	1032	2752	462	1234	207	552	93	247	42	110	19	48	9	21	4	9	2	3	1	0
0,6	10851	28653	4882	12977	2191	5843	932	2622	440	1175	197	526	89	235	40	105	18	46	8	20	4	8	2	3	1	1
0,7	9381	25217	4191	11251	1873	5022	838	2243	375	1003	168	448	75	200	34	89	15	39	7	17	3	7	2	3	1	1
0,8	6987	19333	3084	8405	1370	3701	611	1642	273	731	122	326	55	146	25	65	11	29	5	13	2	5	1	2	1	1
0,9	3780	10852	1642	4550	724	1973	322	869	144	386	64	172	29	77	13	35	6	16	3	7	1	3	1	2	0	0

Т а б л и ц а 1.15

α^2	j																			
	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
0,1	2420	-6917	678	-1872	194	-525	56	-149	16	-42	5	-12	2	-3	1	0	0	0	0	1
0,2	4490	-12434	1278	-3483	367	-990	106	-283	31	-80	9	-22	3	-5	1	-1	1	1	0	1
0,3	6047	-16328	1842	-4693	502	-1349	145	-388	42	-110	13	-31	4	-8	2	-1	1	1	1	1
0,4	7008	-18628	2033	-5436	589	-1575	170	-454	50	-130	15	-36	5	-9	2	-1	1	1	1	1
0,5	7332	-19387	2133	-5686	618	-1652	179	-477	52	-136	15	-38	5	-9	2	-1	1	1	1	1
0,6	7008	-18627	2033	-5436	589	-1576	170	-454	50	-130	15	-36	5	-9	2	-1	1	1	1	1
0,7	6047	-16327	1742	-4693	502	-1350	145	-388	42	-111	12	-31	4	-8	1	-1	1	1	1	1
0,8	4490	-12433	1278	-3483	367	-990	106	-283	31	-81	9	-22	3	-6	1	-1	1	0	0	1
0,9	2420	-6916	678	-1872	193	-525	56	-149	16	-42	5	-12	1	-3	1	0	0	0	0	1

Из последней схемы видно, что на каждом шаге итерации решаются две задачи — задача Дирихле для области G_1 и смешанная граничная задача для области G_2 . В табл. 1.15 в тех же точках внутренней границы даны умноженные на 10^5 первые десять приближений $u^{(2,j)}$ (первое число в каждом столбце) и $\left(\frac{\partial u^{(1,i)}}{\partial n} - x^2\right)$ (второе число в каждом столбце), полученные по схеме

$$\begin{aligned} \Delta u^{(2,j)}(x) &= 0, & x \in G_2, \\ u^{(2,j)}|_{M_4 M_1 M_2 M_3} &= \psi, & u^{(2,j)}|_{M_3 M_4} = u^{(1,j-1)}|_{M_3 M_4}, \\ \Delta u^{(1,j)}(x) &= 0, & x \in G_1, \\ u^{(1,j)}|_{M_4 M_5 M_6 M_3} &= \psi, & \frac{\partial u^{(N,j)}}{\partial n}\bigg|_{M_3 M_4} = 2 \frac{\partial u^{(2,j)}}{\partial n}\bigg|_{M_3 M_4}, \end{aligned}$$

когда в области G_2 решается задача Дирихле, а в области G_1 — смешанная граничная задача. Сравнение табл. 1.14 и 1.15 показывает, что простая перестановка граничных задач может существенно повлиять на скорость сходимости последовательных

Т а б л и ц а 1.16

α^2	j							
	1	2	3	4	1	2	3	4
0,1	38 83517	-1 -48	0 -1	0 -1	13 27772	-1 -14	0 -1	0 -1
0,2	71 136379	-1 -91	0 -2	0 -2	25 45332	-2 -28	-1 -2	-1 -1
0,3	98 169746	-2 -125	0 -3	0 -3	34 56406	-2 -38	-1 -3	-1 -2
0,4	115 188400	-2 -148	0 -3	0 -3	40 62593	-2 -45	-1 -3	-1 -2
0,5	121 194418	-2 -155	0 -3	0 -3	42 64589	-2 -48	-1 -3	-1 -2
0,6	115 188399	-2 -148	0 -3	0 -3	40 62593	-2 -46	-1 -3	-1 -2
0,7	98 169745	-2 -126	0 -2	0 -2	34 56406	-2 -39	-1 -2	-1 -1
0,8	71 136378	-1 -92	0 -2	0 -2	24 45332	-1 -28	-1 -1	-1 -1
0,9	37 83517	-1 -48	0 -1	0 -1	13 23773	-1 -14	0 0	0 0

приближений. В более короткой области целесообразнее оказалось решение смешанной граничной задачи.

В первых четырех столбцах табл. 1.16 даны умноженные на 10^5 первые четыре приближения δ_{1j} (первое число в каждом столбце) и δ_{2j} (второе число в каждом столбце), полученные в тех же точках внутренней границы области (рис. 4) по схеме

$$\begin{aligned} \Delta u^{(1,j)}(x) &= 0, & x \in G_1, \\ u^{(1,j)}|_{M_4 M_5 M_6 M_3} &= \psi_1, & u^{(1,j)}|_{M_3 M_4} = u^{(1,j-1)} + \frac{1}{2} \delta_{1,j-1}, \\ \Delta u^{(2,j)}(x) &= 0, & x \in G_2, \\ u^{(2,j)}|_{M_4 M_1 M_2 M_3} &= \psi, & u^{(2,j)}|_{M_3 M_4} = u^{(2,j-1)} - \frac{1}{2} \delta_{1,j-1}, \end{aligned}$$

для четного $j = 2n$ и по схеме

$$\begin{aligned} \Delta u^{(1,j)}(x) &= 0, \quad x \in G_1, \\ u^{(1,j)}|_{M_4 M_5 M_6 M_3} &= \psi, \quad \frac{\partial u^{(1,j)}}{\partial n} \Big|_{M_3 M_4} = \frac{\partial u^{(1,j-1)}}{\partial n} \Big|_{M_3 M_4} - \frac{1}{c_{21} + c_{22}} \delta_{2,j-1}, \\ \Delta u^{(2,j)}(x) &= 0, \quad x \in G_2, \\ u^{(2,j)}|_{M_4 M_1 M_2 M_3} &= \psi, \quad \frac{\partial u^{(2,j)}}{\partial n} \Big|_{M_3 M_4} = \frac{\partial u^{(2,j-1)}}{\partial n} \Big|_{M_3 M_4} + \frac{1}{c_{21} + c_{22}} \delta_{2,j-1}, \end{aligned}$$

для нечетного $j = 2n + 1$. Последняя схема соответствует схеме (1.243₁) при $\bar{\alpha}_{j-1} = -\alpha_{j-1} = \frac{1}{2}$, $\bar{\mu}_{j-1} = -\mu_{j-1} = -\frac{1}{c_{21} + c_{22}}$. Эти

значения удовлетворяют приведенным выше условиям, но было бы интересно указать априорный путь их более рационального выбора. В следующих четырех столбцах табл. 1.16 даны умноженные на 10^5 первые приближения $u^{(1,j)}$ (первое число в каждом столбце) и $\left(\frac{\partial u^{(2,j)}}{\partial n} - 2x^2\right)$ (второе число в каждом столбце), полученные в тех же точках внутренней границы $M_3 M_4$. Сравнение невязок сопряжения δ_{1j} и δ_{2j} с погрешностями $u^{(1,j)}$ (точное решение на $M_3 M_4$ равно нулю) и $\left(\frac{\partial u^{(2,j)}}{\partial n} - 2x^2\right)$ в решении и в производной от решения показывает, что они имеют один и тот же порядок при итерациях $j > 2$. Это можно было ожидать при такой быстрой сходимости, так как оператор, с помощью которого

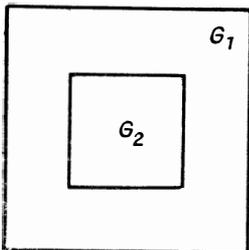


Рис. 5

осуществляется итерация, по-видимому, имеет довольно малую норму и, следовательно, соответствующий обратный оператор (который устанавливает соотношение между невязкой и погрешностью) имеет норму, близкую к единице.

В качестве второго примера рассмотрим случай вложенных областей — единичный квадрат G_2 помещен в центре квадрата G_1 со стороной 2 (рис. 5). Краевые условия на внешней границе области G_1 равны $\psi = x^1 x^2$. Условия сопряжения на границе области G_2 те же, что и в предыдущем примере (характеристика второй среды c_{22} вдвое больше характеристики первой среды c_{21}). В качестве нулевого приближения на границе области был взят тождественный нуль. Точное решение такой контактной задачи в элементарных функциях не выписывается. Поэтому в табл. 1.17 даны умноженные на 10^5 первые 26 значений для

$$r_{1j} = \max |u^{(1,j)} - u^{(1,j-1)}|_{\Gamma_{12}} \quad \text{и} \quad r_{2j} = \max \left\| \frac{\partial u^{(2,j)}}{\partial n} - \frac{\partial u^{(2,j-1)}}{\partial n} \right\|_{\Gamma_{12}},$$

полученные по одношаговой схеме. В табл. 1.18 даны для рассматриваемого примера умноженные на 10^5 первые 29 значений для величин

$$\bar{\delta}_{1j} = \max |\delta_{1j}|, \quad \bar{\delta}_{2j} = \max |\delta_{2j}|,$$

$$r_{1j} = \max |u^{(1,j)} - u^{(1,j-1)}|_{\Gamma_{21}}, \quad r_{2j} = \max \left| \frac{\partial u^{(2,j)}}{\partial n} - \frac{\partial u^{(2,j-1)}}{\partial n} \right|_{\Gamma_{12}},$$

полученных по двухшаговой схеме при тех же значениях параметров

$$\bar{\alpha}_{j-1} = -\alpha_{j-1} = 1/2, \quad \bar{\mu}_{j-1} = -\mu_{j-1} = -1/3.$$

Следует сказать несколько слов о решении чистой задачи Неймана в области G_2 , необходимым при реализации двухшаговой

Т а б л и ц а 1.17

<i>j</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9						
$r_{1j} \cdot 10^5$	41646	22276	12180	6746	3773	2129	1211	694	401						
$r_{2j} \cdot 10^5$	1809241	80961	43564	23855	13211	7383	4160	2363	1353						
<i>j</i>	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$r_{1j} \cdot 10^5$	233	136	80	48	29	17	10	6	4	2	1	1	0	0	0
$r_{2j} \cdot 10$	781	454	265	156	92	55	33	20	12	7	4	3	2	1	0

метода в этом примере. Так как задача Неймана решается с точностью до произвольной постоянной слагаемой, то последняя после решения подбиралась таким образом, чтобы среднее квадратическое отклонение между граничными значениями на Γ_{12} , полученными при решении задачи Неймана в области G_2 и смешанной граничной задачи для области G_1 , было бы минимальным. Ясно, что такой подбор постоянной слагаемой не менял значения производных на общей границе.

Таким образом, рассматриваемые итерационные процессы не зависят от того приближенного метода, каким решаются граничные задачи на каждом этапе. Лишь бы соответствующая погрешность была бы достаточно малой. Мы для решения граничных задач применяли как первый способ решения граничных задач, описанный в данной монографии, так и конечно-разностный метод. В последнем случае для решения задачи Неймана закреплялось значение искомого функции в одном внутреннем (центральном) узле. Число итераций для решения контактной граничной задачи по вышеуказанным одношаговой и двухшаговой схемам для обоих этих методов было одно и то же.

Заметим, что разнообразные итерационные процессы можно рассматривать не только для кусочно-однородных тел, но и для просто однородных тел (когда характеристики сред в областях G_1 и G_2 совпадают). В этом случае итерационные процессы (1.243)

Т а б л и ц а 1.18

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
$\bar{\delta}_{1j} \cdot 10^5$	154283	25609	16112	11068	7632	5263	3630	2504	1727		
$\bar{\delta}_{2j} \cdot 10^5$	985238	432866	297048	204110	140110	96959	66864	49120	31810		
$r_{1j} \cdot 10^5$	2,69206	46172	31739	21731	14957	10310	7109	4903	3382		
$r_{2j} \cdot 10^5$	985238	403769	53629	33749	22910	15718	10823	7460	5145		
j	10	11	12	13	14	15	16	17	18		
$\bar{\delta}_{1j} \cdot 10^5$	1191	821	567	391	269	186	128	88	61		
$\bar{\delta}_{2j} \cdot 10^5$	21941	15134	10440	7202	4968	3429	2367	1635	1129		
$r_{1j} \cdot 10^5$	2332	1609	1109	765	528	364	251	173	119		
$r_{2j} \cdot 10^5$	3548	2447	1687	1163	802	552	380	262	180		
j	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$\bar{\delta}_{1j} \cdot 10^5$	42	29	20	14	10	7	5	3	2	1	1
$\bar{\delta}_{2j} \cdot 10^5$	781	542	376	262	183	129	92	66	48	35	25
$r_{1j} \cdot 10^5$	82	57	39	27	19	13	9	6	4	3	2
$r_{2j} \cdot 10^5$	123	84	57	39	27	19	13	10	7	5	3

и (1.243₁) можно рассматривать как разновидности альтернирующего метода Шварца [111, 162], а в качестве оператора l_2 , осуществляющего сопряжение производных, следует применять конормальную производную.

§ 1.13. Нахождение собственных значений оператора

Рассмотрим однородную граничную задачу в G :

$$\bar{L}u = Lu + cu = 0, \tag{1.247}$$

$$lu|_{\Gamma} = 0. \tag{1.248}$$

Если существует нетривиальное решение рассматриваемой однородной граничной задачи, то u называется собственной функ-

цией, а α — собственным значением оператора L при граничных условиях (1.248) (иногда в литературе α называют также собственным значением граничной задачи (1.247), (1.248)). Обозначим фундаментальные решения оператора $\bar{L} = L + \alpha E$, где E — единичный оператор, через $K_i(z, x, \alpha)$. Будем предполагать, что система

$$\{K_i(z_k, x, \alpha)\}_{i=1, k=1}^m, \quad (1.249)$$

где точки z_k лежат всюду плотно на поверхности Γ_1 (см. рис. 1), линейно независима и полна в $L_2(\Gamma)$. Приближенное решение граничной задачи (1.247), (1.248) будем искать в виде

$$u^{(N)}(x) = \sum_{k=1}^N a_k \psi_k(x, \alpha), \quad (1.250)$$

где $\psi_k(x, \alpha)$ — перенумерованные с помощью одного индекса функции из (1.249). Подставляя (1.250) в (1.248) и используя, как и в § 1.3, первые N линейных функционалов ω_i ($i = 1, \dots, N$) некоторой тотальной системы функционалов, получаем для вычисления коэффициентов a_k систему линейных однородных уравнений N -го порядка:

$$\sum_{k=1}^N a_k \omega_i [l\psi_k(y, \alpha)] = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

Для того чтобы последняя система имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы детерминант системы равнялся нулю:

$$\det \|\omega_i [l\psi_k(y, \alpha)]\| = 0. \quad (1.251)$$

Корни последнего трансцендентного уравнения и будут приближенно определять собственные значения α оператора L .

Обоснование рассматриваемого способа нахождения приближенных собственных значений оператора L опирается на предположение, что функции $l\psi_k(y, \alpha)$, где $\psi_k(y, \alpha)$ — фундаментальные решения оператора \bar{L} , образуют линейно независимую систему при α , отличным от собственного значения оператора L . Следовательно, если функционалы ω_i определены с помощью скалярного произведения в гильбертовом пространстве $L_2(\Gamma)$, то левая часть (1.251) будет детерминантом Грама линейно независимой системы $\{l\psi_k(y, \alpha)\}$ (при α , отличным от собственных значений оператора L) и не может равняться нулю. Таким образом, все корни уравнения (1.251) будут собственными значениями оператора L .

Численная реализация этого метода нахождения собственных значений оператора L встречает значительные вычислительные трудности, связанные с малостью детерминанта Грама (см. § 1.3, гл. I) и с трансцендентностью уравнения (1.251), корни которого дают собственные значения. Поэтому заманчивой кажется идея

сведения решения задачи о собственных значениях к многократному решению прямой граничной задачи, успешно реализованной для некоторых задач электродинамики грузинскими радиофизиками [63, 125, 126]. Рассмотрим этот прием подробно.

Рассмотрим граничную задачу для однородного уравнения с неоднородными граничными условиями

$$\begin{aligned} Lu + \alpha u &= 0, \\ lu|_{\Gamma} &= \psi(S), \end{aligned}$$

где $\psi(S)$ является граничным значением любого конкретного частного решения $f(x, \alpha)$ уравнения (1.247)

$$\psi(S) = lf(x, \alpha)|_{\Gamma}.$$

Очевидно, что решением поставленной граничной задачи является функция $f(x, \alpha)$. Будем искать это решение в виде (1.250)

$$u^{(N)}(x) = \sum_{k=1}^N a_k(x) \psi_k(x, \alpha).$$

Для определения коэффициентов $a_k(\alpha)$ имеем систему

$$\sum_{k=1}^N a_k \omega_i [l\psi_k(y, \alpha)] = \omega_i [\psi(S)]. \quad (1.251^1)$$

Решая последнюю систему при $\alpha \neq \bar{\alpha}$, где $\bar{\alpha}$ — собственное значение граничной задачи (1.247) — (1.248), мы получаем систему коэффициентов $a_k(\alpha)$, которые обеспечивают для приближенного решения как удовлетворение граничных условий, так и малость выражения

$$\Phi(x, \alpha) = \sum_{k=1}^N a_k(\alpha) \psi_k(x, \alpha) - f(x, \alpha)$$

для любой внутренней точки x области G (последнее утверждение обусловлено единственностью поставленной для $f(x, \alpha)$ граничной задачи). При стремлении α к собственному значению следует ожидать, что значение $\Phi(x, \alpha)$ во внутренних точках не будет уже мало, к нему добавится собственная функция оператора L , тогда как на границе Γ ввиду равенств (1.251¹) граничные значения этой функции $l\Phi(y, \alpha)$ будут малы. Следовательно, $\Phi(x, \alpha)$ следует считать приближенным значением собственной функции, α — собственным значением. Авторы этого алгоритма [63, 125, 126] считают, что в качестве собственного значения α следует взять то значение, при котором достигает максимума норма $\Phi(x, \alpha)$.

В пользу рассматриваемого метода нахождения собственных значений оператора L можно привести следующие соображения. Пусть ставится граничная задача типа (1.247) — (1.248) для

функции $f(x, \alpha) + ci$, где $f(x, \alpha)$ — частное решение уравнения (1.247), c — произвольная постоянная, α — собственное значение оператора L , i — собственная функция (которая определяется с точностью до произвольного множителя). Тогда граничные значения (1.248) для этой функции не будут отличаться от граничных значений $lf(x, \alpha)$ функции $f(x, \alpha)$. Поэтому в приближенном решении этой задачи вновь придется решать систему (1.251₁).

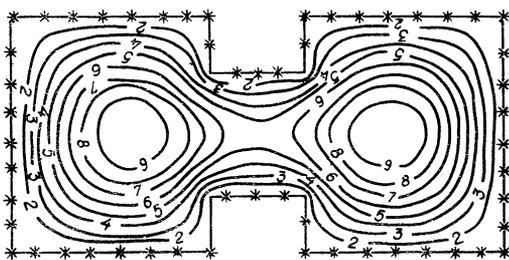
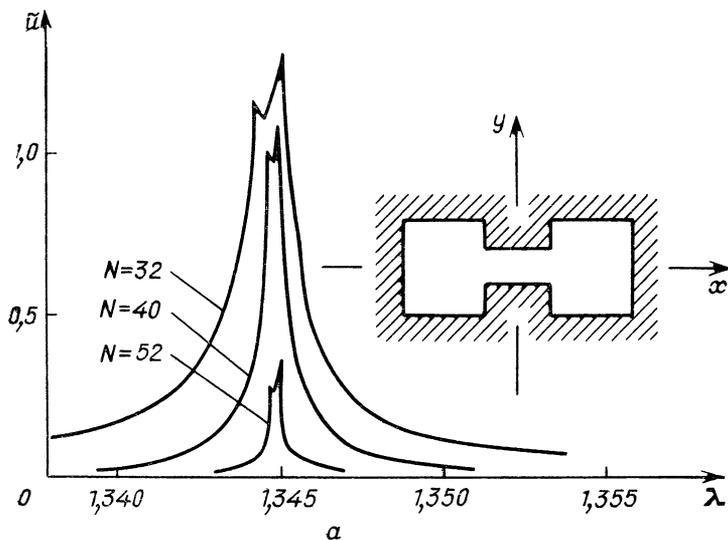
Вероятность того, что приближенное решение $\sum_{k=1}^N a_k \psi_k$ будет аппроксимировать функцию $f(x, \alpha) + ci$ при $c = 0$ довольно мала. Конкретное значение c зависит от выбора вспомогательных точек, определяющих функции ψ_k , и от выбора функционалов ω_i . Аналогичная ситуация возникает при решении внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа или при решении статических граничных задач теории упругости, когда на границе области заданы напряжения. В первом случае задача определяется с точностью постоянного слагаемого, во втором случае — с точностью жесткого перемещения. При решении этих задач мы неоднократно наблюдали, что в ходе решения вырабатываются конкретные, отличные от тождественного нуля постоянные или жесткие смещения. Это отнюдь не означает, что соответствующие системы фундаментальных решений $\{\psi_k\}_{k=1}^N$ являются линейно зависимыми. Просто они не могут аппроксимировать постоянную в первом случае или жесткое перемещение во втором случае, т. е. они не являются полными системами в тех функциональных пространствах, где допускаются отличные от нуля постоянные или жесткие смещения (естественно, что при постановке соответствующих граничных задач они равны нулю). Проследить, как при конкретных фундаментальных решениях ψ_k и функционалах ω_i вырабатывается то значение c , для которого справедливо приближенное равенство $\sum_{k=1}^N a_k \psi_k \approx f + ci$, не представляется возможным. Но, как остроумно заметил Хевисайд (в его известной книге «Операционное исчисление»), «неразумно отказываться от пудинга только лишь потому, что мы не полностью понимаем процесс пищеварения».

Ясно, что этот способ нахождения собственных функций и собственных значений требует строгого обоснования, тем более что при $\alpha = \bar{\alpha}$ детерминант системы (1.251₁) равен нулю. Пока же остается привести численные примеры, иллюстрирующие его довольно высокую эффективность.

Пусть в H -образной области (на рис. 6, а справа дается область) ищется собственное значение α и собственная функция u оператора Лапласа при граничных условиях Дирихле $u|_{\Gamma} = 0$ (l — тождественный оператор в (1.248)). На рис. 6, а дается зависимость $|\tilde{u}| = |\Phi(x, \alpha)|$ от параметра $\lambda = \sqrt{4\pi^2/\alpha}$, из которой

видно, что при всех значениях количества точек N величина $|\tilde{u}|$ имеет довольно резкий максимум в точке $\lambda = 1,345$. На рис. 6, б для этой точки даются линии равных амплитуд для собственной функции.

В качестве второго примера рассмотрим задачу нахождения собственных значений для прямоугольной области $0 \leq x^1 \leq 2$,



б

Рис. 6

$0 \leq x^2 \leq 1$ в случае граничных условий Неймана для уравнения Лапласа ($l = \partial/\partial n$ в (1.248)). На рис. 7, а дается зависимость $|\tilde{u}| = \Phi|(x, \alpha)|$ от того же параметра $\lambda = \sqrt{4\pi^2/\alpha}$. На рис. 7, б даны линии равных амплитуд собственной функции при различных значениях параметра λ .

В третьем примере область G ограничена овалом Кассини

$$\rho = c^2 \cos 2\varphi + \sqrt{c^4 \cos 2\varphi - (a^4 - c^4)},$$

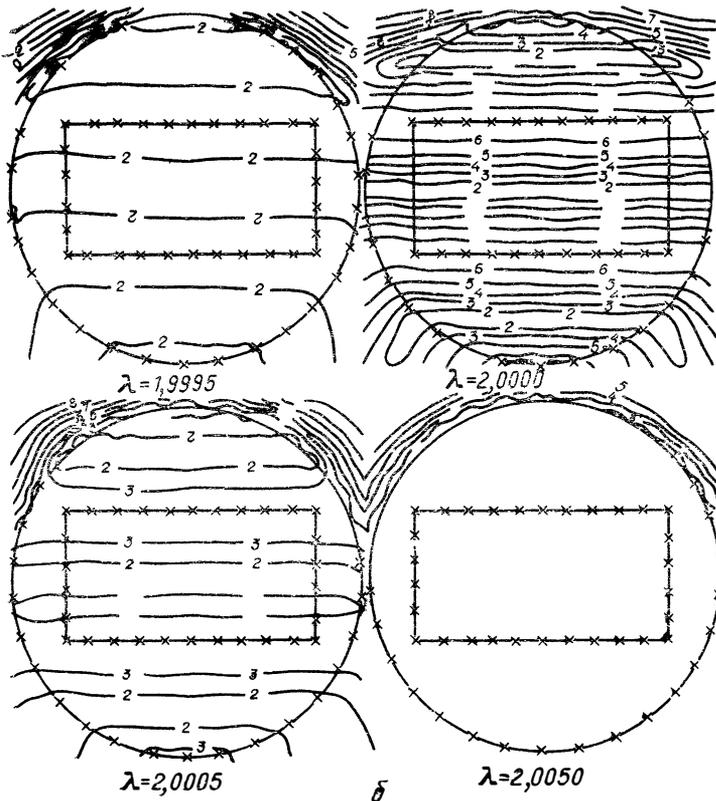
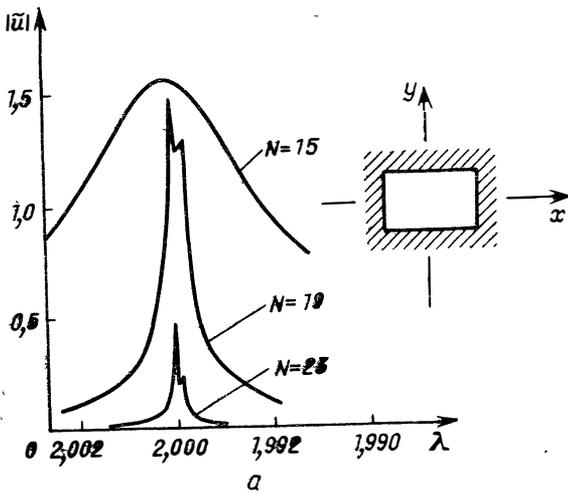


Рис. 7.

где $c = 0,68$; $a = \sqrt[4]{c^4 + 2c^2 - 1}$ (это значение a обеспечивает $\rho_{\max} = 1$), оператор $l = \partial u / \partial n$, $L = \Delta$. На рис. 8, а, б, в, г даны зависимости модуля от параметра $\lambda = 2\pi / \sqrt{\alpha}$; при различных значениях параметра $gd = \sqrt{\alpha}d$, где d — расстояние от вспомогательных точек до овала Кассини.

Приведенные выше три примера заимствованы из работ [63, 125, 126] и касаются плоского случая. Были проведены аналогичные численные эксперименты по нахождению собственных

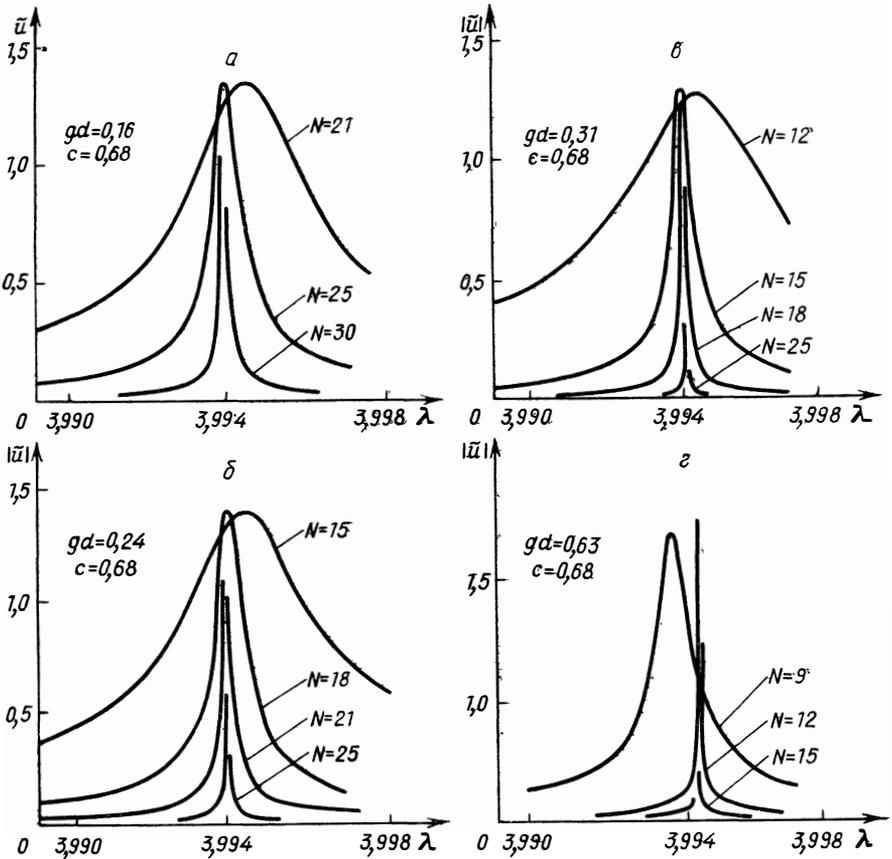


Рис. 8

значений указанным способом для трехмерного случая. Приведем результаты этих вычислений.

Пусть

$$L = \Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2}, \quad \psi_i = \frac{e^{-iR_i}}{R_i},$$

R_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) — расстояние между переменной точкой (x^1, x^2, x^3) и одной из шести фиксированных точек $(-3, 0, 0)$, $(0, -3, 0)$, $(0, 0, -3)$, $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ и $(0, 0, 3)$. G — единичный куб с центром в точке $(1/2, 1/2, 1/2)$ и сторонами, параллельными координатным плоскостям. Выбор шести фундаментальных решений оператора Гельмгольца $\bar{l} = \Delta + \alpha^2$ связан с желанием получить все ортогональные собственные функции этого оператора.

Описанным методом ищались собственные значения и собственные функции для граничных задач Дирихле

$$\begin{aligned} \Delta u + \alpha^2 u &= 0 \quad \text{в } G, \\ u|_s &= 0 \end{aligned}$$

и Неймана

$$\begin{aligned} \Delta u + \alpha^2 u &= 0 \quad \text{в } G, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_s &= 0. \end{aligned}$$

Для этого решались методом неортогональных рядов граничные задачи с неоднородными краевыми условиями

$$\begin{aligned} \Delta u_i + \alpha^2 u_i &= 0, \\ u_i|_s &= \psi_i|_s, \\ \Delta u_i + \alpha^2 u_i &= 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_s &= \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \Big|_s, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{aligned}$$

Собственные значения задачи Дирихле ищались в интервале $3,299797 \leq \alpha \leq 9,524776$, который содержит первые три собственные значения $\alpha^2 = 3\pi^2$ ($\alpha \approx 5,441389$), $\alpha^2 = 6\pi^2$ ($\alpha \approx 7,695296$) и $\alpha^2 = 9\pi^2$ ($\alpha \approx 9,424776$). Всего были проверены 36 значений α . Собственные значения задачи Неймана ищались в интервале $1 \leq \alpha \leq 5,541389$, который также содержит первые три собственные значения $\alpha^2 = \pi^2$ ($\alpha \approx 3,141591$), $\alpha^2 = 2\pi^2$ ($\alpha \approx 4,442867$) и $\alpha^2 = 3\pi^2$ ($\alpha \approx 5,441389$). Для задачи Неймана также были проверены 36 значений α . Каждая граничная задача решалась при $6j^2$ ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) фундаментальных решениях (при $j = 6$ в приближенном решении участвовали 216 функций). Решения получались с помощью пакета прикладных программ [138]. Во всех вычислениях в качестве вспомогательной поверхности была взята поверхность куба со стороной 3, в центре которого находился основной единичный куб G .

В табл. 1.19 и 1.20 даны числа

$$\begin{aligned} R(j, \alpha) &\equiv \|u^{(j)} - \psi_1\| \equiv \\ &\equiv \frac{1}{15} \sum_{s=0}^4 \sum_{m=0}^4 \sum_{h=0}^4 |u^{(j)}(0,1 + 0,2s; 0,1 + 0,2m; 0,1 + 0,2n) - \\ &\quad - \psi_1(0,1 + 0,2s; 0,1 + 0,2m; 0,1 + 0,2n)|, \end{aligned}$$

Таблица 1.19

α	j					
	1	2	3	4	5	6
3,299797	$43 \cdot 10^{-3}$	$10 \cdot 10^{-3}$	$13 \cdot 10^{-5}$	$44 \cdot 10^{-7}$	$90 \cdot 10^{-7}$	
5,341390	$19 \cdot 10^{-2}$	$31 \cdot 10^{-2}$	$30 \cdot 10^{-4}$	$52 \cdot 10^{-5}$	$18 \cdot 10^{-6}$	
5,431390	$20 \cdot 10^{-2}$	$22 \cdot 10^{-2}$	$16 \cdot 10^{-3}$	$58 \cdot 10^{-4}$	$94 \cdot 10^{-6}$	
5,440390	$21 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-2}$	$22 \cdot 10^{-2}$	$81 \cdot 10^{-3}$	$15 \cdot 10^{-4}$	
5,441290	$21 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-2}$	$52 \cdot 10^{-2}$	$22 \cdot 10^{-2}$	$83 \cdot 10^{-4}$	
5,441380	$21 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-2}$	$42 \cdot 10^{-2}$	$17 \cdot 10^{-2}$	$39 \cdot 10^{-3}$	$21 \cdot 10^{-2}$
5,441389	$21 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-2}$	$41 \cdot 10^{-2}$	$17 \cdot 10^{-2}$	$76 \cdot 10^{-3}$	$48 \cdot 10^{-3}$
5,441400	$21 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-2}$	$40 \cdot 10^{-2}$	$16 \cdot 10^{-2}$	$16 \cdot 10^{-2}$	$39 \cdot 10^{-2}$
5,441489	$21 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-2}$	$33 \cdot 10^{-2}$	$13 \cdot 10^{-2}$	$14 \cdot 10^{-3}$	
5,442389	$21 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-2}$	$24 \cdot 10^{-2}$	$12 \cdot 10^{-2}$	$43 \cdot 10^{-3}$	
5,451389	$21 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-2}$	$15 \cdot 10^{-3}$	$56 \cdot 10^{-4}$	$99 \cdot 10^{-6}$	
5,541389	$22 \cdot 10^{-2}$	$17 \cdot 10^{-2}$	$38 \cdot 10^{-4}$	$65 \cdot 10^{-5}$	$15 \cdot 10^{-6}$	
5,553704		$17 \cdot 10^{-2}$	$38 \cdot 10^{-3}$	$58 \cdot 10^{-5}$	$16 \cdot 10^{-6}$	$20 \cdot 10^{-6}$
7,283184	$20 \cdot 10^{-2}$	$42 \cdot 10^{-2}$	$34 \cdot 10^{-2}$	$17 \cdot 10^{-4}$	$53 \cdot 10^{-6}$	
7,595296		$30 \cdot 10^{-2}$	$19 \cdot 10^{-2}$	$68 \cdot 10^{-4}$	$27 \cdot 10^{-5}$	
7,685296		$87 \cdot 10^{-2}$	$68 \cdot 10^{-2}$	$57 \cdot 10^{-3}$	$30 \cdot 10^{-4}$	
7,694296		$88 \cdot 10^{-2}$	$49 \cdot 10^{-2}$	$16 \cdot 10^{-2}$	$30 \cdot 10^{-3}$	
7,695196		$88 \cdot 10^{-2}$	$48 \cdot 10^{-2}$	$19 \cdot 10^{-2}$	$36 \cdot 10^{-2}$	
7,695286		$88 \cdot 10^{-2}$	$47 \cdot 10^{-2}$	$19 \cdot 10^{-2}$	$30 \cdot 10^{-1}$	
7,695296		$88 \cdot 10^{-2}$	$47 \cdot 10^{-2}$	$19 \cdot 10^{-2}$	$16 \cdot 10^{-1}$	
7,695306		$88 \cdot 10^{-2}$	$47 \cdot 10^{-2}$	$19 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^{-1}$	
7,695395		$88 \cdot 10^{-2}$	$47 \cdot 10^{-2}$	$20 \cdot 10^{-2}$	$26 \cdot 10^{-2}$	
7,696296		$88 \cdot 10^{-2}$	$46 \cdot 10^{-2}$	$23 \cdot 10^{-2}$	$30 \cdot 10^{-3}$	
7,705296	88	$88 \cdot 10^{-2}$	$36 \cdot 10^{-2}$	$93 \cdot 10^{-3}$	$31 \cdot 10^{-4}$	
7,795296		$85 \cdot 10^{-2}$	$27 \cdot 10^{-2}$	$87 \cdot 10^{-4}$	$36 \cdot 10^{-5}$	
9,324777	$19 \cdot 10^{-2}$	$89 \cdot 10^{-2}$	$28 \cdot 10^{-2}$	$16 \cdot 10^{-3}$	$49 \cdot 10^{-4}$	
9,414777	$19 \cdot 10^{-2}$	$91 \cdot 10^{-2}$	$22 \cdot 10^{-2}$	$13 \cdot 10^{-2}$	$60 \cdot 10^{-3}$	
9,423777	$19 \cdot 10^{-2}$	$92 \cdot 10^{-2}$	$22 \cdot 10^{-2}$	$43 \cdot 10^{-3}$	$39 \cdot 10^{-2}$	
9,424677	$19 \cdot 10^{-2}$	$92 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-2}$	$36 \cdot 10^{-2}$	$28 \cdot 10^{-2}$	
9,424767	$19 \cdot 10^{-2}$	$92 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-2}$	$36 \cdot 10^{-2}$	$27 \cdot 10^{-2}$	$32 \cdot 10^{-2}$
9,424776	$19 \cdot 10^{-2}$	$92 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-2}$	$36 \cdot 10^{-2}$	$27 \cdot 10^{-2}$	$10 \cdot 10^{-2}$
9,424787	$19 \cdot 10^{-2}$	$92 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-2}$	$36 \cdot 10^{-2}$	$26 \cdot 11^{-2}$	$17 \cdot 10^{-2}$
9,424876	$19 \cdot 10^{-2}$	$92 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-2}$	$35 \cdot 10^{-2}$	$25 \cdot 10^{-2}$	
9,425776	$19 \cdot 10^{-2}$	$92 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-2}$	$29 \cdot 10^{-2}$	$18 \cdot 10^{-2}$	
9,434776	$19 \cdot 10^{-2}$	$92 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-2}$	$94 \cdot 10^{-3}$	$45 \cdot 10^{-3}$	
9,524776	$19 \cdot 10^{-2}$	$94 \cdot 10^{-2}$	$18 \cdot 10^{-2}$	$19 \cdot 10^{-3}$	$56 \cdot 10^{-4}$	

Таблица 1.20

α	j					
	1	2	3	4	5	6
1	$38 \cdot 10^{-3}$	$27 \cdot 10^{-4}$	$64 \cdot 10^{-6}$	$19 \cdot 10^{-6}$	$69 \cdot 10^{-7}$	
2,301275	$59 \cdot 10^{-3}$	$84 \cdot 10^{-4}$	$21 \cdot 10^{-5}$	$11 \cdot 10^{-6}$	$11 \cdot 10^{-6}$	
3,041592	$15 \cdot 10^{-2}$	$17 \cdot 10^{-2}$	$45 \cdot 10^{-4}$	$14 \cdot 10^{-5}$	$97 \cdot 10^{-7}$	
3,131592	$16 \cdot 10^{-2}$	$23 \cdot 10^{-2}$	$65 \cdot 10^{-3}$	$16 \cdot 10^{-4}$	$56 \cdot 10^{-6}$	
3,140592	$16 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-2}$	$36 \cdot 10^{-2}$	$15 \cdot 10^{-3}$	$57 \cdot 10^{-5}$	
3,141492	$16 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-2}$	$22 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^{-2}$	$64 \cdot 10^{-4}$	
3,141582	$16 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-2}$	$28 \cdot 10^{-2}$	$41 \cdot 10^{-3}$	$85 \cdot 10^{-3}$

Т а б л и ц а 1.20 (продолжение)

α	j					
	1	2	3	4	5	6
3,141591	16.10 ⁻²	21.10 ⁻²	21.10 ⁻²	34.10 ⁻²	10.10 ⁻²	13.10 ⁻¹
3,141602	16.10 ⁻²	21.10 ⁻²	21.10 ⁻²	44.10 ⁻²	19.10 ⁻²	13.10 ⁻²
3,141691	16.10 ⁻²	21.10 ⁻²	20.10 ⁻²	28.10 ⁻²	76.10 ⁻⁴	
3,142591	16.10 ⁻²	21.10 ⁻²	15.10 ⁻²	16.10 ⁻³	83.10 ⁻⁵	
3,151591	16.10 ⁻²	20.10 ⁻²	42.10 ⁻³	16.10 ⁻⁴	97.10 ⁻⁶	
3,241591	17.10 ⁻²	11.10 ⁻²	58.10 ⁻⁴	18.10 ⁻⁵	83.10 ⁻⁷	
3,299795	17.10 ⁻²	87.10 ⁻³	41.10 ⁻⁴	12.10 ⁻⁵	12.10 ⁻⁶	
4,342868	11.10 ⁻²	84.10 ⁻²	25.10 ⁻³	26.10 ⁻⁵	72.10 ⁻⁶	
4,432867	10.10 ⁻²	14.10 ⁻²	89.10 ⁻³	22.10 ⁻⁴	78.10 ⁻⁵	
4,441868	10.10 ⁻²	16.10 ⁻²	11.10 ⁻²	22.10 ⁻³	72.10 ⁻⁴	
4,442767	10.10 ⁻²	16.10 ⁻²	12.10 ⁻²	16.10 ⁻²	36.10 ⁻³	
4,443858	10.10 ⁻²	16.10 ⁻²	12.10 ⁻²	44.10 ⁻²	61.10 ⁻³	75.10 ⁻³
4,442867	10.10 ⁻²	16.10 ⁻²	12.10 ⁻²	53.10 ⁻²	67.10 ⁻³	61.10 ⁻²
4,442878	10.10 ⁻²	16.10 ⁻²	12.10 ⁻²	70.10 ⁻²	74.10 ⁻³	
4,442967	10.10 ⁻²	16.10 ⁻²	12.10 ⁻²	39.10 ⁻²	32.10 ⁻²	
4,443868	10.10 ⁻²	16.10 ⁻²	12.10 ⁻²	24.10 ⁻³	94.10 ⁻⁴	
4,452868	10.10 ⁻²	18.10 ⁻²	17.10 ⁻²	23.10 ⁻⁴		
4,542868	10.10 ⁻²	24.10 ⁻²	53.10 ⁻³	36.10 ⁻⁵		
5,341390	98.10 ⁻³	10.10 ⁻²	17.10 ⁻³	10.10 ⁻⁴	13.10 ⁻⁵	
5,431390	99.10 ⁻³	11.10 ⁻²	29.10 ⁻³	29.10 ⁻⁴	12.10 ⁻⁴	
5,440390	99.10 ⁻³	12.10 ⁻²	31.10 ⁻³	21.10 ⁻³	98.10 ⁻⁴	
5,441290	99.10 ⁻³	12.10 ⁻²	32.10 ⁻³	16.10 ⁻²	35.10 ⁻³	
5,441380	99.10 ⁻³	12.10 ⁻²	32.10 ⁻³	38.10 ⁻²	44.10 ⁻³	34.10 ⁻²
5,441389	99.10 ⁻³	12.10 ⁻²	32.10 ⁻³	44.10 ⁻²	45.10 ⁻³	15.10 ⁻²
5,441400	99.10 ⁻³	12.10 ⁻²	32.10 ⁻³	49.10 ⁻²	46.10 ⁻³	54.10 ⁻²
5,441489	99.10 ⁻³	12.10 ⁻²	32.10 ⁻³	33.10 ⁻²	73.10 ⁻³	
5,442389	99.10 ⁻³	12.10 ⁻²	32.10 ⁻³	23.10 ⁻³	16.10 ⁻³	
5,451389	99.10 ⁻³	12.10 ⁻²	36.10 ⁻³	29.10 ⁻⁴	13.10 ⁻⁴	
5,541389	10.10 ⁻²	14.10 ⁻²	36.10 ⁻³	15.10 ⁻⁴	18.10 ⁻⁵	

Т а б л и ц а 1.21

α	j					
	1	2	3	4	5	6
3,299797	43.10 ⁻³	72.10 ⁻⁴	13.10 ⁻⁵	34.10 ⁻⁷	79.10 ⁻⁷	
5,341390	18.10 ⁻²	46.10 ⁻³	24.10 ⁻⁴	77.10 ⁻⁶	79.10 ⁻⁷	
5,431390	20.10 ⁻²	46.10 ⁻³	27.10 ⁻⁴	90.10 ⁻⁶	11.10 ⁻⁶	
5,440390	20.10 ⁻²	47.10 ⁻³	27.10 ⁻⁴	11.10 ⁻⁵	76.10 ⁻⁷	
5,441290	20.10 ⁻²	47.10 ⁻³	27.10 ⁻⁴	67.10 ⁻⁶	72.10 ⁻⁷	
5,441380	20.10 ⁻²	47.10 ⁻³	27.10 ⁻⁴	61.10 ⁻⁶	82.10 ⁻⁷	10.10 ⁻⁵
5,441389	20.10 ⁻²	47.10 ⁻³	27.10 ⁻⁴	61.10 ⁻⁶	70.10 ⁻⁷	39.10 ⁻⁶
5,441400	20.10 ⁻²	47.10 ⁻³	27.10 ⁻⁴	61.10 ⁻⁶	85.10 ⁻⁷	52.10 ⁻⁶
5,441489	20.10 ⁻²	47.10 ⁻³	27.10 ⁻⁴	63.10 ⁻⁶	99.10 ⁻⁷	
5,442389	20.10 ⁻²	47.10 ⁻³	27.10 ⁻⁶	79.10 ⁻⁶	72.10 ⁻⁷	
5,451389	20.10 ⁻²	48.10 ⁻³	27.10 ⁻⁴	90.10 ⁻⁶	66.10 ⁻⁷	
5,541389	22.10 ⁻²	53.10 ⁻³	30.10 ⁻⁴	11.10 ⁻⁵	89.10 ⁻⁷	
5,553704		23.10 ⁻²	44.10 ⁻⁴	87.10 ⁻⁵	24.10 ⁻⁶	22.10 ⁻⁵
7,283184	27.10 ⁻²	62.10 ⁻²	46.10 ⁻³	20.10 ⁻⁴	65.10 ⁻⁶	
7,595296		22.10 ⁻²	25.10 ⁻³	18.10 ⁻⁴	49.10 ⁻⁶	

Т а б л и ц а 1.21(продолжение)

α	j					
	1	2	3	4	5	6
7,685296		$21 \cdot 10^{-2}$	$24 \cdot 10^{-3}$	$18 \cdot 10^{-4}$	$58 \cdot 10^{-6}$	
7,694296		$21 \cdot 10^{-2}$	$23 \cdot 10^{-3}$	$17 \cdot 10^{-4}$	$59 \cdot 10^{-6}$	
7,695196		$21 \cdot 10^{-2}$	$23 \cdot 10^{-3}$	$17 \cdot 10^{-4}$	$60 \cdot 10^{-6}$	
7,695286		$21 \cdot 10^{-2}$	$23 \cdot 10^{-3}$	$17 \cdot 10^{-4}$	$72 \cdot 10^{-6}$	$11 \cdot 10^{-6}$
7,695296		$21 \cdot 10^{-2}$	$23 \cdot 10^{-3}$	$17 \cdot 10^{-4}$	$64 \cdot 10^{-6}$	$12 \cdot 10^{-6}$
7,695306		$21 \cdot 10^{-2}$	$23 \cdot 10^{-3}$	$17 \cdot 10^{-4}$	$61 \cdot 10^{-6}$	
7,695395		$21 \cdot 10^{-2}$	$23 \cdot 10^{-3}$	$17 \cdot 10^{-4}$	$58 \cdot 10^{-6}$	
7,696296		$21 \cdot 10^{-2}$	$23 \cdot 10^{-2}$	$17 \cdot 10^{-4}$	$58 \cdot 10^{-6}$	
7,705296		$21 \cdot 10^{-2}$	$24 \cdot 10^{-3}$	$21 \cdot 10^{-4}$	$60 \cdot 10^{-6}$	
7,795296		$21 \cdot 10^{-2}$	$27 \cdot 10^{-2}$	$22 \cdot 10^{-4}$	$69 \cdot 10^{-6}$	
9,324777	$22 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^{-1}$	$95 \cdot 10^{-3}$	$11 \cdot 10^{-3}$	$42 \cdot 10^{-5}$	
9,414777	$22 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^{-1}$	$10 \cdot 10^{-2}$	$13 \cdot 10^{-3}$	$48 \cdot 10^{-5}$	
9,423777	$22 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^{-1}$	$10 \cdot 10^{-2}$	$14 \cdot 10^{-3}$	$43 \cdot 10^{-5}$	
9,424677	$22 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^{-1}$	$10 \cdot 10^{-2}$	$14 \cdot 10^{-3}$	$43 \cdot 10^{-5}$	
9,424767	$22 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^{-1}$	$10 \cdot 10^{-2}$	$14 \cdot 10^{-3}$	$43 \cdot 10^{-5}$	$21 \cdot 10^{-6}$
9,424776	$22 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^{-1}$	$10 \cdot 10^{-2}$	$14 \cdot 10^{-3}$	$43 \cdot 10^{-5}$	$31 \cdot 10^{-6}$
9,424787	$22 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^{-1}$	$10 \cdot 10^{-2}$	$14 \cdot 10^{-3}$	$43 \cdot 10^{-5}$	$23 \cdot 10^{-6}$
9,424876	$22 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^{-1}$	$10 \cdot 10^{-2}$	$14 \cdot 10^{-3}$	$43 \cdot 10^{-5}$	
9,425776	$22 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^{-1}$	$10 \cdot 10^{-2}$	$14 \cdot 10^{-3}$	$44 \cdot 10^{-5}$	
9,434776	$22 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^{-1}$	$10 \cdot 10^{-2}$	$13 \cdot 10^{-3}$	$47 \cdot 10^{-5}$	
9,524776	$22 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^{-1}$	$11 \cdot 10^{-2}$	$15 \cdot 10^{-3}$	$53 \cdot 10^{-5}$	

Т а б л и ц а 1.22

α	j					
	1	2	3	4	5	6
1	$52 \cdot 10^{-2}$	$39 \cdot 10^{-4}$	$89 \cdot 10^{-6}$	$25 \cdot 10^{-6}$	$86 \cdot 10^{-7}$	
2,301275	$74 \cdot 10^{-3}$	$12 \cdot 10^{-3}$	$42 \cdot 10^{-5}$	$19 \cdot 10^{-6}$	$13 \cdot 10^{-6}$	
3,041592	$48 \cdot 10^{-3}$	$32 \cdot 10^{-3}$	$48 \cdot 10^{-5}$	$20 \cdot 10^{-6}$	$86 \cdot 10^{-7}$	
3,131592	$49 \cdot 10^{-3}$	$23 \cdot 10^{-3}$	$58 \cdot 10^{-5}$	$24 \cdot 10^{-6}$	$98 \cdot 10^{-7}$	
3,140592	$49 \cdot 10^{-3}$	$23 \cdot 10^{-3}$	$55 \cdot 10^{-5}$	$23 \cdot 10^{-6}$	$12 \cdot 10^{-6}$	
3,141492	$49 \cdot 10^{-3}$	$23 \cdot 10^{-3}$	$56 \cdot 10^{-5}$	$23 \cdot 10^{-6}$	$11 \cdot 10^{-6}$	
3,141582	$49 \cdot 10^{-3}$	$23 \cdot 10^{-3}$	$56 \cdot 10^{-5}$	$22 \cdot 10^{-6}$	$90 \cdot 10^{-7}$	$25 \cdot 10^{-6}$
3,141591	$49 \cdot 10^{-3}$	$23 \cdot 10^{-3}$	$56 \cdot 10^{-5}$	$21 \cdot 10^{-6}$	$73 \cdot 10^{-7}$	$51 \cdot 10^{-6}$
3,141602	$49 \cdot 10^{-3}$	$23 \cdot 10^{-3}$	$56 \cdot 10^{-5}$	$21 \cdot 10^{-6}$	$78 \cdot 10^{-7}$	$22 \cdot 10^{-6}$
3,141691	$49 \cdot 10^{-3}$	$23 \cdot 10^{-3}$	$56 \cdot 10^{-5}$	$24 \cdot 10^{-6}$	$14 \cdot 10^{-6}$	
3,142591	$49 \cdot 10^{-3}$	$23 \cdot 10^{-3}$	$56 \cdot 10^{-5}$	$23 \cdot 10^{-6}$	$10 \cdot 10^{-6}$	
3,151591	$49 \cdot 10^{-3}$	$24 \cdot 10^{-3}$	$59 \cdot 10^{-5}$	$22 \cdot 10^{-6}$	$11 \cdot 10^{-6}$	
3,241591	$51 \cdot 10^{-3}$	$30 \cdot 10^{-3}$	$72 \cdot 10^{-5}$	$26 \cdot 10^{-6}$	$83 \cdot 10^{-7}$	
3,299797	$22 \cdot 10^{-2}$	$86 \cdot 10^{-3}$	$41 \cdot 10^{-4}$	$12 \cdot 10^{-5}$	$14 \cdot 10^{-6}$	
4,342868	$16 \cdot 10^{-2}$	$77 \cdot 10^{-3}$	$64 \cdot 10^{-4}$	$25 \cdot 10^{-5}$	$17 \cdot 10^{-6}$	
4,432867	$15 \cdot 10^{-2}$	$82 \cdot 10^{-3}$	$56 \cdot 10^{-4}$	$30 \cdot 10^{-5}$	$14 \cdot 10^{-6}$	
4,441868	$15 \cdot 10^{-2}$	$82 \cdot 10^{-3}$	$52 \cdot 10^{-4}$	$31 \cdot 10^{-5}$	$14 \cdot 10^{-6}$	
4,442767	$15 \cdot 10^{-2}$	$82 \cdot 10^{-3}$	$51 \cdot 10^{-4}$	$31 \cdot 10^{-5}$	$13 \cdot 10^{-6}$	
4,442858	$15 \cdot 10^{-2}$	$82 \cdot 10^{-3}$	$51 \cdot 10^{-4}$	$31 \cdot 10^{-5}$	$98 \cdot 10^{-7}$	$19 \cdot 10^{-6}$
4,442867	$15 \cdot 10^{-2}$	$82 \cdot 10^{-3}$	$51 \cdot 10^{-4}$	$32 \cdot 10^{-5}$	$12 \cdot 10^{-6}$	$83 \cdot 10^{-6}$
4,442878	$15 \cdot 10^{-2}$	$82 \cdot 10^{-3}$	$51 \cdot 10^{-4}$	$32 \cdot 10^{-5}$	$10 \cdot 10^{-6}$	$68 \cdot 10^{-6}$
4,442967	$15 \cdot 10^{-2}$	$82 \cdot 10^{-3}$	$51 \cdot 10^{-4}$	$31 \cdot 10^{-5}$	$33 \cdot 10^{-6}$	
4,443868	$15 \cdot 10^{-2}$	$82 \cdot 10^{-3}$	$51 \cdot 10^{-4}$	$31 \cdot 10^{-5}$	$16 \cdot 10^{-6}$	

Т а б л и ц а 1.22 (продолжение)

α	j					
	1	2	3	4	5	6
4,452868	$15 \cdot 10^{-2}$	$82 \cdot 10^{-3}$	$56 \cdot 10^{-4}$	$32 \cdot 10^{-5}$		
4,542868	$15 \cdot 10^{-2}$	$93 \cdot 10^{-3}$	$11 \cdot 10^{-3}$	$38 \cdot 10^{-5}$		
5,341390	$13 \cdot 10^{-2}$	$15 \cdot 10^{-2}$	$19 \cdot 10^{-3}$	$21 \cdot 10^{-4}$	$77 \cdot 10^{-6}$	
5,431390	$14 \cdot 10^{-2}$	$17 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-3}$	$25 \cdot 10^{-4}$	$90 \cdot 10^{-6}$	
5,440390	$14 \cdot 10^{-2}$	$17 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-3}$	$26 \cdot 10^{-4}$	$90 \cdot 10^{-6}$	
5,441290	$14 \cdot 10^{-2}$	$17 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-3}$	$26 \cdot 10^{-4}$	$83 \cdot 10^{-6}$	
5,441380	$14 \cdot 10^{-2}$	$17 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-3}$	$26 \cdot 10^{-4}$	$79 \cdot 10^{-6}$	$15 \cdot 10^{-6}$
5,441389	$14 \cdot 10^{-2}$	$17 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-3}$	$26 \cdot 10^{-4}$	$80 \cdot 10^{-6}$	$36 \cdot 10^{-6}$
5,441400	$14 \cdot 10^{-2}$	$17 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-3}$	$26 \cdot 10^{-4}$	$79 \cdot 10^{-6}$	$55 \cdot 10^{-6}$
5,441489	$14 \cdot 10^{-2}$	$17 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-3}$	$26 \cdot 10^{-4}$	$76 \cdot 10^{-6}$	
5,442389	$14 \cdot 10^{-2}$	$17 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-3}$	$26 \cdot 10^{-4}$	$99 \cdot 10^{-6}$	
5,451389	$14 \cdot 10^{-2}$	$17 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-3}$	$26 \cdot 10^{-4}$	$94 \cdot 10^{-6}$	
5,541389	$14 \cdot 10^{-2}$	$17 \cdot 10^{-2}$	$21 \cdot 10^{-3}$	$31 \cdot 10^{-4}$	$11 \cdot 10^{-5}$	

полученные при решении граничной задачи Дирихле и Неймана соответственно. Заметим, что в этой же норме $\|\psi_1\| = 0,28$ (из последней формулы видно, что $\|\psi_1\|$ не зависит от α). Для других функций ψ_i ($i = 2, 3, 4, 5, 6$) получены аналогичные результаты. Анализ табл. 1.19 и 1.20 показывает, что если точность приближенного решения достаточно высока, что со своей стороны зависит от числа координатных функций $6j^2$, то при приближении к собственному значению числа $R(j, \alpha)$ резко возрастают. При этом может показаться, что увеличение $R(j, \alpha)$ связано с вырождением соответствующей матрицы, и разность $u^{(j)} - \psi_1$ не несет дополнительную информацию. Оказалось, что это не так, и разность $u^{(j)} - \psi_1$ с точностью до постоянного множителя хорошо аппроксимирует соответствующую собственную функцию. В табл. 1.21 и 1.22 для граничных задач Дирихле и Неймана даны указанные выше нормы для чисел

$$\bar{D}(j, \alpha) = u^{(j)} - \psi_1 - \sum_{k=1}^N c_k v_k,$$

где c_k — числа, а v_k — собственные функции соответствующих граничных задач, N — их количество. Следует сказать несколько слов о вычислении чисел c_k . Собственные функции задачи Дирихле, соответствующие собственному значению $\pi^2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$ ($k_1, k_2, k_3 = 1, \dots$) равны

$$\sin k_1 \pi x^1 \sin k_2 \pi x^2 \sin k_3 \pi x^3,$$

а собственные функции задачи Неймана, соответствующие собственному значению $\pi^2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$ ($k_1, k_2, k_3 = 0, 1, \dots$), равны

$$\cos k_1 \pi x^1 \cos k_2 \pi x^2 \cos k_3 \pi x^3.$$

Для получения коэффициентов c_k точки (x_i^1, x_i^2, x_i^3) выбирались так, чтобы одна из указанных собственных функций (в случае кратных собственных функций) равнялась единице, а остальные — нулю. Тогда разность $u^j - \psi_1$ даст комплексный коэффициент для соответствующей собственной функции.

Анализ табл. 1.21 и 1.22 показывает, что при надлежащей точности решения граничных задач последнее слагаемое в правой части выражения для $D(j, \alpha)$ дает хорошую аппроксимацию собственной функции, даже при таком грубом определении коэффициентов c_k .

В табл. 1.23, 1.24 даны модули детерминант соответствующих матриц для граничных задач Дирихле и Неймана. Если они меньше 10^{-78} , в таблице записаны машинные нули 0, 0. При получении модулей детерминантов отдельно получались их вещественные и мнимые части, и модуль вычислялся вручную (это делалось для избежания в процессе вычисления получения машинного нуля 10^{-78}).

В табл. 1.25, 1.26 даны среднеквадратичные значения модулей и коэффициентов разложения функции u^j по фундаментальным решениям для задачи Дирихле и Неймана.

Из табл. 1.19, 1.20 видно, что при фиксированном числе координатных функций $6j^2$ с увеличением α^2 увеличивается погрешность приближенного решения неоднородных граничных задач Дирихле и Неймана. Это увеличение монотонное (естественно, исключая окрестности собственных значений). Так, например, при $j = 5$ для задачи Дирихле при $\alpha = 3,299797$ погрешность равна $9 \cdot 10^{-6}$, при $\alpha = 5,553704 - 16 \cdot 10^{-6}$, а при $\alpha = 9,524776 - 56 \cdot 10^{-4}$. Аналогичная картина наблюдается и для задачи Неймана. Это следовало ожидать, так как при увеличении α точное решение ψ этих задач становится более изрезанным. Однако при этом обнаруживается замечательное свойство систем из фундаментальных решений — соответствующий этим системам детерминант увеличивается при увеличении α . Это дает возможность при больших α взять большее число координатных функций, не опасаясь при этом трудностей, связанных с малостью соответствующего детерминанта. Так для приведенных выше значений α детерминанты равны соответственно 0,0 (машинный нуль), $37 \cdot 10^{-76}$ и $2 \cdot 10^{38}$. Что касается поведения детерминанта вблизи собственных значений, то анализ табл. 1.23, 1.24 показывает, что модуль детерминанта существенно не воспринимает переход через собственное значение. Это обстоятельство заставляет более детально проанализировать алгоритм нахождения собственных значений, изложенный в начале настоящего параграфа.

Анализ среднеквадратических значений модулей коэффициентов разложения, собранных в табл. 1.25, 1.26, показывает, что несмотря на малость детерминантов систем, решения которых дают коэффициенты разложения, последние принимают умерен-

Т а б л и ц а 1.23

α	j					
	1	2	3	4	5	6
3,299797	$26 \cdot 10^{-1}$	$64 \cdot 10^{-6}$	$84 \cdot 10^{-51}$	0,0	0,0	
5,341390	$57 \cdot 10^{-2}$	$30 \cdot 10^{+2}$	$57 \cdot 10^{-11}$	0,0	0,0	
5,431390	$47 \cdot 10^{-2}$	$72 \cdot 10^{+2}$	$98 \cdot 10^{-11}$	0,0	0,0	
5,440390	$47 \cdot 10^{-2}$	$77 \cdot 10^{+2}$	$93 \cdot 10^{-12}$	0,0	0,0	
5,441290	$47 \cdot 10^{-2}$	$79 \cdot 10^{+2}$	$50 \cdot 10^{-13}$	0,0	0,0	
5,441380	$47 \cdot 10^{-2}$	$79 \cdot 10^{+2}$	$22 \cdot 10^{-13}$	0,0	0,0	0,0
5,441389	$47 \cdot 10^{-2}$	$79 \cdot 10^{+2}$	$32 \cdot 10^{-13}$	0,0	0,0	0,0
5,441400	$47 \cdot 10^{-2}$	$79 \cdot 10^2$	$38 \cdot 10^{-13}$	0,0	0,0	0,0
5,441489	$47 \cdot 10^{-2}$	$79 \cdot 10^2$	$64 \cdot 10^{-12}$	0,0	0,0	
5,442389	$47 \cdot 10^{-2}$	$79 \cdot 10^2$	$65 \cdot 10^{-18}$	0,0	0,0	
5,451389	$46 \cdot 10^{-2}$	$86 \cdot 10^2$	$19 \cdot 10^{-10}$	0,0	0,0	
5,541389	$37 \cdot 10^{-2}$	$17 \cdot 10^3$	$30 \cdot 10^{-8}$	$78 \cdot 10^{-6}$	0,0	
5,553704		$18 \cdot 10^3$	$47 \cdot 10^{-8}$	$37 \cdot 10^{-70}$	0,0	
7,283184	$76 \cdot 10^{-2}$	$51 \cdot 10^3$	$15 \cdot 10^{-9}$	$77 \cdot 10^{-23}$	0,0	
7,595296		$78 \cdot 10^2$	$11 \cdot 10^9$	$28 \cdot 10^{-17}$	0,0	
7,685296		$65 \cdot 10^2$	$10 \cdot 10^8$	$63 \cdot 10^{-18}$	0,0	
7,694296		$67 \cdot 10^2$	$31 \cdot 10^8$	$38 \cdot 10^{-20}$	0,0	
7,695196		$66 \cdot 10^2$	$24 \cdot 10^8$	$27 \cdot 10^{-19}$	0,0	
7,695286		$66 \cdot 10^2$	$35 \cdot 10^8$	$27 \cdot 10^{-19}$	0,0	0,0
7,695296		$66 \cdot 10^2$	$35 \cdot 10^8$	$27 \cdot 10^{-19}$	0,0	0,0
7,695306		$66 \cdot 10^2$	$35 \cdot 10^8$	$27 \cdot 10^{-19}$	0,0	
7,695395		$66 \cdot 10^2$	$35 \cdot 10^8$	$27 \cdot 10^{-19}$	0,0	
7,696296		$66 \cdot 10^2$	$39 \cdot 10^9$	$18 \cdot 10^{-19}$	0,0	
7,705296		$66 \cdot 10^2$	$90 \cdot 10^8$	$43 \cdot 10^{+18}$	0,0	
7,795296		$78 \cdot 10^2$	$86 \cdot 10^{10}$	$20 \cdot 10^{-43}$		
9,324777	$20 \cdot 10^{-1}$	$43 \cdot 10^2$	$68 \cdot 10^{+16}$	$48 \cdot 10^{-44}$	$12 \cdot 10^{-45}$	
9,414777	$18 \cdot 10^{-1}$	$37 \cdot 10^2$	$22 \cdot 10^{17}$	$44 \cdot 10^2$	$57 \cdot 10^{-46}$	
9,423777	$18 \cdot 10^{-1}$	$37 \cdot 10^2$	$27 \cdot 10^{+17}$	$16 \cdot 10^{11}$	$12 \cdot 10^{-47}$	
9,424677	$18 \cdot 10^{-1}$	$37 \cdot 10^2$	$27 \cdot 10^{+17}$	$31 \cdot 10^{11}$	$37 \cdot 10^{-46}$	
9,424767	$18 \cdot 10^{-1}$	$37 \cdot 10^2$	$27 \cdot 10^{+17}$	$33 \cdot 10^{11}$	$42 \cdot 10^{-46}$	0,0
9,424776	$18 \cdot 10^{-1}$	$37 \cdot 10^2$	$27 \cdot 10^{+17}$	$23 \cdot 10^{11}$	$42 \cdot 10^{-46}$	0,0
9,424787	$18 \cdot 10^{-1}$	$37 \cdot 10^2$	$27 \cdot 10^{+17}$	$33 \cdot 10^{11}$	$42 \cdot 10^{-46}$	
9,424876	$18 \cdot 10^{-1}$	$37 \cdot 10^2$	$27 \cdot 10^{17}$	$35 \cdot 10^{11}$	$47 \cdot 10^{-46}$	
9,425776	$18 \cdot 10^{-1}$	$37 \cdot 10^2$	$26 \cdot 10^{17}$	$64 \cdot 10^{+11}$	$11 \cdot 10^{-45}$	
9,434776	$18 \cdot 10^{-1}$	$37 \cdot 10^2$	$30 \cdot 10^{17}$	$25 \cdot 10^{13}$	$20 \cdot 10^{-43}$	
9,524776	$15 \cdot 10^{-1}$	$32 \cdot 10^2$	$66 \cdot 10^{17}$	$18 \cdot 10^{17}$	$20 \cdot 10^{37}$	

Т а б л и ц а 1.24

α	j					
	1	2	3	4	5	6
1						
2,301275	$46 \cdot 10^{-2}$	$75 \cdot 10^{-17}$	$11 \cdot 10^{-75}$	0,0	0,0	
3,041592	$32 \cdot 10^0$	$28 \cdot 10^{-2}$	$63 \cdot 10^{-41}$	0,0	0,0	
3,131592	$30 \cdot 10^0$	$45 \cdot 10^1$	$24 \cdot 10^{-22}$	0,0	0,0	
3,140592	$30 \cdot 10^0$	$10 \cdot 10^2$	$25 \cdot 10^{-23}$	0,0	0,0	
3,141492	$31 \cdot 10^0$	$13 \cdot 10^2$	$28 \cdot 10^{-25}$	0,0	0,0	
3,141492	$31 \cdot 10^0$	$14 \cdot 10^2$	$11 \cdot 10^{-24}$	0,0	0,0	
3,141582	$31 \cdot 10^0$	$14 \cdot 10^2$	$12 \cdot 10^{-24}$	0,0	0,0	0,0
3,141591	$31 \cdot 10^0$	$14 \cdot 10^2$	$12 \cdot 10^{-24}$	0,0	0,0	0,0

Т а б л и ц а 1.24 (продолжение)

α	j					
	1	2	3	4	5	6
3,141602	31.10 ⁰	14.10 ²	12.10 ⁻²⁴	0,0	0,0	0,0
3,141691	31.10 ⁰	14.10 ²	14.10 ⁻²⁴	0,0	0,0	
3,142591	31.10 ⁰	14.10 ²	43.10 ⁻²⁴	0,0	0,0	
3,151591	31.10 ⁰	23.10 ²	35.10 ⁻²²	0,0	0,0	
3,241591	36.10 ⁰	69.10 ³	38.10 ⁻¹⁷	0,0	0,0	
3,299797	40.10 ⁰	38.10 ⁺⁴	40.10 ⁻¹⁵	0,0	0,0	
4,342868	14.10 ²	59.10 ⁹	66.10 ⁷	77.10 ⁻⁵²	0,0	
4,432867	16.10 ²	14.10 ⁹	34.10 ⁷	60.10 ⁻⁵⁰	0,0	
4,441868	17.10 ²	13.10 ⁹	58.10 ⁷	20.10 ⁻⁵²	0,0	
4,442767	17.10 ²	13.10 ⁹	56.10 ⁷	50.10 ⁻⁵⁵	0,0	
4,442858	17.10 ²	13.10 ⁹	56.10 ⁷	96.10 ⁻⁵⁷	0,0	0,0
4,442867	17.10 ²	13.10 ⁹	56.10 ⁷	50.10 ⁻⁵⁷	0,0	0,0
4,442878	17.10 ²	13.10 ⁹	56.10 ⁷	58.10 ⁻⁵⁷	0,0	0,0
4,442967	17.10 ²	12.10 ⁹	55.10 ⁷	37.10 ⁻⁵⁶	0,0	
4,443868	17.10 ²	12.10 ⁹	53.10 ⁷	61.10 ⁻⁵³	0,0	
4,452868	18.10 ²	11.10 ⁹	30.10 ⁷	54.10 ⁻⁴⁹	0,0	
4,542868	22.10 ²	11.10 ⁹	50.10 ¹⁰	75.10 ⁻⁴²	0,0	
5,341390	36.10 ²	50.10 ¹⁴	67.10 ²⁴	37.10 ⁻⁷	0,0	
5,431390	33.10 ²	68.10 ¹⁴	40.10 ²⁵	75.10 ⁻⁵	0,0	
5,440390	32.10 ²	68.10 ¹⁴	47.10 ²⁵	15.10 ⁻⁵	0,0	
5,441290	32.10 ²	69.10 ¹⁴	47.10 ²⁵	25.10 ⁻⁶	0,0	
5,441380	32.10 ²	69.10 ¹⁴	47.10 ²⁵	99.10 ⁻⁷	0,0	0,0
5,441389	32.10 ²	69.10 ¹⁴	47.10 ²⁵	90.10 ⁻⁷	0,0	0,0
5,441400	32.10 ²	69.10 ¹⁴	47.10 ²⁵	78.10 ⁻⁷	0,0	0,0
5,441489	32.10 ²	69.10 ¹⁴	47.10 ²⁵	12.10 ⁻⁶	0,0	
5,442389	32.10 ²	72.10 ¹⁴	47.10 ²⁵	18.10 ⁻⁵	0,0	
5,451389	33.10 ²	71.10 ¹⁴	51.10 ²⁵	40.10 ⁻⁴	0,0	
5,541389	29.10 ²	70.10 ¹⁴	68.10 ²⁶	61.10 ⁰	0,0	

Т а б л и ц а 1.25

α	j					
	1	2	3	4	5	6
3,299797	22.10 ⁻²	15.10 ⁻²	88.10 ⁻³	72.10 ⁻³	24.10 ⁻²	
5,341390	27.10 ⁻²	20.10 ⁻²	88.10 ⁻³	77.10 ⁻³	21.10 ⁻²	
5,431390	27.10 ⁻²	19.10 ⁻²	88.10 ⁻³	77.10 ⁻³	41.10 ⁻²	
5,440390	27.10 ⁻²	19.10 ⁻²	11.10 ⁻²	80.10 ⁻³	19.10 ⁻²	
5,441290	27.10 ⁻²	19.10 ⁻²	19.10 ⁻²	94.10 ⁻³	11.10 ⁻²	
5,441380	27.10 ⁻²	19.10 ⁻²	17.10 ⁻²	87.10 ⁻³	23.10 ⁻²	19.10 ⁻¹
5,441389	27.10 ⁻²	19.10 ⁻²	16.10 ⁻²	87.10 ⁻³	11.10 ⁻²	78.10 ⁻²
5,441400	27.10 ⁻²	19.10 ⁻²	16.10 ⁻²	87.10 ⁻³	15.10 ⁻²	11.10 ⁻¹
5,441489	28.10 ⁻²	19.10 ⁻²	14.10 ⁻²	84.10 ⁻³	19.10 ⁻²	
5,442389	28.10 ⁻²	19.10 ⁻²	97.10 ⁻³	78.10 ⁻³	12.10 ⁻²	
5,451389	28.10 ⁻²	19.10 ⁻²	88.10 ⁻³	77.10 ⁻³	12.10 ⁻²	
5,541389	28.10 ⁻²	18.10 ⁻²	88.10 ⁻³	77.10 ⁻³	10.10 ⁻²	
5,553704		18.10 ⁻²	88.10 ⁻³	77.10 ⁻³	91.10 ⁻³	50.10 ⁻²
7,283184	27.10 ⁻²	20.10 ⁻²	90.10 ⁻³	79.10 ⁻³	73.10 ⁻³	
7,595296		45.10 ⁻²	11.10 ⁻²	79.10 ⁻³	73.10 ⁻³	

Т а б л и ц а 1.25 (продолжение)

α	j					
	1	2	3	4	5	6
7,685296		53.10 ⁻²	28.10 ⁻²	83.10 ⁻³	73.10 ⁻³	
7,694296		54.10 ⁻²	22.10 ⁻²	11.10 ⁻²	74.10 ⁻³	
7,695196		54.10 ⁻²	21.10 ⁻²	12.10 ⁻²	13.10 ⁻²	
7,695286		54.10 ⁻²	21.10 ⁻²	12.10 ⁻²	83.10 ⁻²	76.10 ⁻³
7,695296		54.10 ⁻²	21.10 ⁻²	12.10 ⁻²	44.10 ⁻²	20.10 ⁻²
7,695306		54.10 ⁻²	21.10 ⁻²	12.10 ⁻²	30.10 ⁻²	
7,695395		54.10 ⁻²	21.10 ⁻²	12.10 ⁻²	99.10 ⁻³	
7,696296		54.10 ⁻²	21.10 ⁻²	13.10 ⁻²		
7,705296		54.10 ⁻²	18.10 ⁻²	90.10 ⁻³		
7,795296		56.10 ⁻²	11.10 ⁻²	79.10 ⁻³		
9,324777	25.10 ⁻²	64.10 ⁻²	13.10 ⁻²	81.10 ⁻³	74.10 ⁻³	
9,44777	25.10 ⁻²	64.10 ⁻²	12.10 ⁻²	11.10 ⁻²	76.10 ⁻³	
9,423777	25.10 ⁻²	64.10 ⁻²	12.10 ⁻²	23.10 ⁻²	13.10 ⁻²	
9,424677	25.10 ⁻²	64.10 ⁻²	12.10 ⁻²	20.10 ⁻²	10.10 ⁻²	
9,424767	25.10 ⁻²	64.10 ⁻²	12.10 ⁻²	20.10 ⁻²	10.10 ⁻²	
9,424767	25.10 ⁻²	64.10 ⁻²	12.10 ⁻²	20.10 ⁻²	10.10 ⁻²	88.10 ⁻³
9,424776	25.10 ⁻²	64.10 ⁻²	12.10 ⁻²	20.10 ⁻²	10.10 ⁻²	27.10 ⁻³
9,424787	25.10 ⁻²	64.10 ⁻²	12.10 ⁻²	20.10 ⁻²	10.10 ⁻²	97.10 ⁻³
9,424876	25.10 ⁻²	64.10 ⁻²	12.10 ⁻²	19.10 ⁻²	10.10 ⁻²	
9,425776	25.10 ⁻²	64.10 ⁻²	12.10 ⁻²	16.10 ⁻²	89.10 ⁻³	
9,434776	25.10 ⁻²	64.10 ⁻²	12.10 ⁻²	90.10 ⁻²	75.10 ⁻³	
9,524776	25.10 ⁻²	63.10 ⁻²	11.10 ⁻²	80.10 ⁻³	74.10 ⁻³	

Т а б л и ц а 1.26

α	j					
	1	2	3	4	5	6
1	18.10 ⁻²	11.10 ⁻²	55.10 ⁻³	28.10 ⁻³	16.10 ⁻²	
2,301275	20.10 ⁻²	14.10 ⁻²	87.10 ⁻³	59.10 ⁻³	22.10 ⁻²	
3,041592	20.10 ⁻²	15.10 ⁻²	88.10 ⁻³	70.10 ⁻³	24.10 ⁻²	
3,131592	20.10 ⁻²	12.10 ⁻²	94.10 ⁻³	70.10 ⁻³	12.10 ⁻²	
3,140592	20.10 ⁻²	12.10 ⁻²	14.10 ⁻²	70.10 ⁻³	20.10 ⁻²	
3,141492	20.10 ⁻²	12.10 ⁻²	11.10 ⁻²	71.10 ⁻³	24.10 ⁻²	
3,141582	20.10 ⁻²	12.10 ⁻²	11.10 ⁻²	90.10 ⁻³	14.10 ⁻²	32.10 ⁻²
3,141591	20.10 ⁻²	12.10 ⁻²	11.10 ⁻²	10.10 ⁻²	33.10 ⁻²	11.10 ⁻¹
3,141602	20.10 ⁻²	12.10 ⁻²	11.10 ⁻²	12.10 ⁻²	33.10 ⁻²	31.10 ⁻²
3,141691	20.10 ⁻²	12.10 ⁻²	10.10 ⁻²	11.10 ⁻²	21.10 ⁻²	
3,142591	20.10 ⁻²	12.10 ⁻²	95.10 ⁻³	71.10 ⁻³	17.10 ⁻²	
3,151591	20.10 ⁻²	12.10 ⁻²	87.10 ⁻³	71.10 ⁻³	23.10 ⁻²	
3,241591	20.10 ⁻²	14.10 ⁻²	88.10 ⁻³	72.10 ⁻³	22.10 ⁻²	
3,299797	20.10 ⁻²	14.10 ⁻²	88.10 ⁻³	72.10 ⁻³	30.10 ⁻²	
4,342868	21.10 ⁻²	16.10 ⁻²	89.10 ⁻³	76.10 ⁻³	29.10 ⁻²	
4,432867	21.10 ⁻²	19.10 ⁻²	95.10 ⁻³	76.10 ⁻³	20.10 ⁻²	
4,441868	21.10 ⁻²	20.10 ⁻²	99.10 ⁻³	77.10 ⁻³	12.10 ⁻²	
4,442767	21.10 ⁻²	20.10 ⁻²	10.10 ⁻²	87.10 ⁻³	24.10 ⁻²	
4,442858	21.10 ⁻²	20.10 ⁻²	10.10 ⁻²	13.10 ⁻²	13.10 ⁻²	52.10 ⁻³
4,442867	21.10 ⁻²	20.10 ⁻²	10.10 ⁻²	16.10 ⁻²	15.10 ⁻²	26.10 ⁻¹
4,442878	21.10 ⁻²	20.10 ⁻²	10.10 ⁻²	20.10 ⁻²	11.10 ⁻²	92.10 ⁻²

Т а б л и ц а 1.26 (продолжение)

α	j					
	1	2	3	4	5	6
4,442967	21.10 ⁻²	20.10 ⁻²	10.10 ⁻²	12.10 ⁻²	15.10 ⁻²	
4,443868	21.10 ⁻²	20.10 ⁻²	10.10 ⁻²	76.10 ⁻³	16.10 ⁻²	
4,452868	21.10 ⁻²	21.10 ⁻²	11.10 ⁻²	76.10 ⁻³	18.10 ⁻²	
5,341390	21.10 ⁻²	16.10 ⁻²	90.10 ⁻³	77.10 ⁻³	11.10 ⁻²	
5,431390	21.10 ⁻²	16.10 ⁻²	90.10 ⁻³	77.10 ⁻³	72.10 ⁻³	
5,440390	21.10 ⁻²	16.10 ⁻²	90.10 ⁻³	78.10 ⁻³	11.10 ⁻²	
5,441290	21.10 ⁻²	16.10 ⁻²	90.10 ⁻³	88.10 ⁻³	91.10 ⁻³	
5,441380	21.10 ⁻²	16.10 ⁻²	90.10 ⁻³	13.10 ⁻²	98.10 ⁻³	22.10 ⁻²
5,441389	21.10 ⁻²	16.10 ⁻²	90.10 ⁻³	14.10 ⁻²	11.10 ⁻²	72.10 ⁻²
5,441400	21.10 ⁻²	16.10 ⁻²	90.10 ⁻³	16.10 ⁻²	16.10 ⁻²	15.10 ⁻²
5,441489	21.10 ⁻²	16.10 ⁻²	90.10 ⁻³	12.10 ⁻²	10.10 ⁻²	
5,442389	21.10 ⁻²	16.10 ⁻²	90.10 ⁻³	78.10 ⁻³	86.10 ⁻³	
5,451389	21.10 ⁻²	16.10 ⁻²	90.10 ⁻³	77.10 ⁻³	13.10 ⁻²	
5,541389	21.10 ⁻²	16.10 ⁻²	91.10 ⁻³	77.10 ⁻³	77.10 ⁻²	

ные значения и не обнаруживают характерные для вырожденных систем «пилообразные» решения.

Как уже было сказано, при решении неоднородных граничных задач Дирихле и Неймана были использованы шесть различных частных решений этих задач ψ_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Это давало возможность проследить, какие коэффициенты c_k перед собственными функциями v_k получались при различных i . Анализируя значения этих коэффициентов, нам не удалось обнаружить какую-либо закономерность их получения. Так, $i = 1$ и $6j^2 = 150$ ($j = 5$) коэффициенты c_k ($k = 1, 2, 3$) у собственных функций задачи Неймана

$$v_1 = \cos \pi x^1, \quad v_2 = \cos \pi x^2, \quad v_3 = \cos \pi x^3$$

при $\alpha = 3,141591$ получились равными $c_1 = 0,04873 + i \cdot 0,05706$; $c_2 = 0,07542 + i \cdot 0,02810$; $c_3 = -0,15376 + i \cdot 0,26125$, а при $\alpha = 3,141602$ $c_1 = 0,28816 + i \cdot 0,04491$; $c_2 = -0,05939 \cdot i \cdot 0,01903$; $c_3 = 0,29494 \cdot i \cdot 0,09663$.

Рассмотрим, к чему привело бы непосредственное применение алгоритма, описанного в начале настоящего параграфа. Для задачи Дирихле при $j = 3$ число $\alpha = 3,299797$ дает для детерминанта значение $84 \cdot 10^{-51}$, а число $\alpha = 5,441389$ — значение $32 \cdot 10^{-13}$. Таким образом, получаем, что детерминант при собственном значении получается значительно больше, чем при α , довольно отстоящем от собственного значения.

В заключение рассмотрим алгоритм нахождения собственных значений, описанный в начале настоящего алгоритма. Может показаться, что численные результаты ставят под сомнение его обоснованность. Так, например, для задачи Дирихле при $6j^2 = 96$ функции и $\alpha = 9,424776$ модуль детерминанта (1.251) равен $33 \cdot 10^{11}$, хотя последнее слагаемое в выражении для $\bar{D}(j, \alpha)$ дает

хорошую аппроксимацию (погрешность $14 \cdot 10^{-3}$) соответствующей собственной функции. Рассмотрим более подробно поведение модуля детерминанта (1.251). В § 1.3 гл. I показано, что при фиксированном α модуль детерминанта асимптотически уменьшается при увеличении его порядка (т. е. числа $6j^2$ фундаментальных решений, участвовавших в разложении). Это хорошо подтверждается результатами счета, приведенными в табл. 1.23, 1.24. Так, для задачи Неймана при $\alpha = 1$ и $\alpha = 2,301275$ уменьшение модуля детерминанта начинается уже при $j = 1$. Для других значений α спад модуля детерминанта начинается позже. Что касается поведения модуля детерминанта при фиксированном его порядке, то, как уже было сказано, с увеличением α модуль растет, исключая окрестности собственных значений. Тщательное рассмотрение в этой области показывает, что при $j \geq 3$ модуль детерминанта (1.251) для собственного значения α меньше, чем для меньшего значения $\alpha < \bar{\alpha}$, что явно противоречит указанной выше тенденции роста модуля детерминанта с увеличением α . Так, для задачи Дирихле и $j = 3$ модуль детерминанта (1.251) равен $98 \cdot 10^{-11}$ при $\alpha = 5,431390$ и $32 \cdot 10^{-13}$ при собственном значении $\alpha = 5,441389$. Аналогично, при $\alpha = 7,283184$ имеем $15 \cdot 10^9$, а для собственного значения $\bar{\alpha} = 7,695296$ получаем $35 \cdot 10^8$ и т. д.

Таким образом, при реализации алгоритма нахождения собственных значений, описанного в начале данного параграфа, следует ожидать, что уменьшение детерминанта с увеличением его порядка, его общее увеличение с ростом α (исключая окрестность собственных значений) и его уменьшение вблизи собственных значений даст довольно сложную картину и плохую локализацию собственных значений. Этот алгоритм опирается на представление (1.250), где коэффициенты a_k не равны тождественно нулю. Для его опровержения потребуется предложить, что $a_k = 0$, т. е. что все собственные значения ортогональны ко всем фундаментальным решениям. Неверность этого предположения следует из малости (порядка 10^{-7}) величины $\bar{D}(j, \alpha)$, которую можно рассматривать как погрешность аппроксимации собственной функции $\sum_{k=1}^N c_k v_k$ линейной комбинацией фундаментальных решений $u^j - \psi_1$ (напомним, что ψ_1 также является фундаментальным решением).

Успех проведенных в настоящем параграфе численных экспериментов определил то обстоятельство, что уменьшение модуля детерминанта, связанное с приближением к собственному значению, для рассмотренных чисел $6j^2$ фундаментальных решений, во-первых, довольно незначительно и, во-вторых, не сказывается существенно на точности решения соответствующей граничной задачи. Следует однако заметить, что при этом применялись

функционалы ω_i банахова пространства (метода коллокации) не трудно предположить, каковы будут эти тенденции изменения модуля детерминанта (1.251) для функционалов гильбертова пространства. Для этого следует провести аналогичные численные эксперименты.

Представляет интерес выяснение вопроса о том, какие коэффициенты c_k вырабатываются в процессе вычисления.

§ 1.14. Решение линейных и нелинейных обратных граничных задач

При решении многих практических задач возникает необходимость решения следующей задачи: по известному решению граничной задачи

$$\begin{aligned} Lu(x) &= f(x), & x \in G, \\ lu|_{\Gamma} &= \psi(y), \end{aligned} \quad (1.252)$$

требуется найти некоторые характеристики неизвестной объемной силы $f(x)$. Эту задачу, в отличие от задачи (1.1), (1.2), будем называть обратной граничной задачей. Задачи такого рода особенно часто возникают в геофизике, когда известны следствия $u(x)$ (геофизические поля) и надо определить причину $f(x)$ (источники геофизических полей). Заметим, что поставленная здесь задача не является единственной обратной задачей, рассматриваемой для задачи (1.252). Часто под обратной задачей для оператора L понимается нахождение по решению $u(x)$ некоторых параметров самого оператора L .

Задача нахождения $f(x)$ только на основе $u(x)$ является некорректной в смысле Адамара задачей. Может существовать множество (часто бесконечное) таких функций $f(x)$, которые с точностью до произвольного $\epsilon > 0$ дают одно и то же решение $u(x)$. Теория решения таких задач особенно интенсивно разрабатывалась в трудах академика А. Н. Тихонова и его школы [148]. Эти вопросы не будем здесь рассматривать. Приведем лишь некоторые алгоритмы по применению описанных выше способов решения граничных задач для решения обратных задач в линейной и нелинейной постановке.

Пусть объемная сила $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} c_k & \text{при } x \in \{x_k\}, \\ 0 & \text{при } x \notin \{x_k\}, \end{cases} \quad k = 1, \dots, \bar{N}, \quad (1.253)$$

где x_k — определенные точки области G , c_k — неизвестные m -мерные векторы (напомним, что m -размерность вектор-функции $u(x)$). Обратную задачу будем называть линейной, если по известному решению $u(x)$ и координатам точек x_k надо определить векторы c_k , определяющие интенсивность объемных сил $f(x)$. Координаты точек x_k при этом предварительно определяют из

других предпосылок или наблюдений (например, по времени «первых вступлений» действий силы $f(x)$ в точках x_k , как это делается в сейсмологии). Если по заданному решению $u(x)$ одновременно с вектором c_k следует определить и координаты точек x_k при фиксированном их числе \bar{N} , то такую задачу мы будем называть слабой нелинейной обратной задачей, в отличие от сильной нелинейной обратной задачи, когда наряду с c_k и x_k требуется определить и \bar{N} . Обратную задачу будем называть параметризованной, если $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = f(x, c_1, c_2, \dots, c_{\bar{N}}),$$

где $f(x, c_1, \dots, c_{\bar{N}})$ — известная функция своих аргументов, а c_k ($k = 1, \dots, \bar{N}$) — подлежащие определению вектор-параметры. Параметризованную задачу будем называть линейной (нелинейной), если функция $f(x, c_1, \dots, c_{\bar{N}})$ зависит от параметров c_k ($k = 1, \dots, \bar{N}$) линейно (нелинейно).

Рассмотрим обратную задачу в линейной постановке. Подставляя (1.253) в правую часть дифференциального уравнения задачи (1.252), получаем граничную задачу

$$\begin{aligned} Lu(x) &= c_k \quad \text{при} \quad x \in \{x_k\}, \quad x \in G, \\ Lu(x) &= 0 \quad \text{при} \quad x \notin \{x_k\}, \\ lu(x)|_{\Gamma} &= \psi(y). \end{aligned} \tag{1.254}$$

Для определения параметров c_k рассмотрим $m\bar{N} + 1$ граничных задач:

$$\begin{aligned} Lu_{ki}(x) &= 0, \quad x \in G, \\ Lu_{ki}(x_k) &= R_i, \end{aligned} \tag{1.255}$$

$$\begin{aligned} lu_{ki}(x)|_{\Gamma} &= 0, \quad k = 1, \dots, \bar{N}, \quad i = 1, \dots, m; \\ Lu_1(x) &= 0, \quad x \in G, \\ lu_1(x)|_{\Gamma} &= \psi(y), \end{aligned} \tag{1.256}$$

где R_i — вектор, i -я составляющая которого равна единице, а остальные $m - 1$ составляющих равны нулю. Очевидно, имеет место следующее равенство:

$$u(x) = u_1(x) + \sum_{k=1}^{\bar{N}} \sum_{i=1}^m c_{ki} u_{ki}(x), \tag{1.257}$$

где c_{ki} — i -я составляющая вектора c_k . Если получим $(m\bar{N} + 1)$ функций в правой части (1.257), то в силу постановки линейной обратной задачи (решение $u(x)$ известно) из (1.257) получаем обычную линейную задачу аппроксимации: найти такие

коэффициенты, чтобы норма разности

$$\left\| u(x) - u_1(x) - \sum_{k=1}^{\bar{N}} \sum_{i=1}^m c_{ki} u_{ki}(x) \right\|$$

достигала минимального значения. Коэффициенты разложения c_{ki} функции $u(x) - u_1(x)$ по функциям $u_{ki}(x)$ можно находить из линейной системы

$$\sum_{k=1}^{\bar{N}} \sum_{i=1}^m c_{ki} \omega_i [u_{ki}(x)] = \omega_j [u(x) - u_1(x)], \quad j = 1, \dots, m\bar{N}, \quad (1.258)$$

где ω_j — первые $m\bar{N}$ функционалов из некоторой тотальной системы линейных функционалов. Выбор этих функционалов зависит от задания решения $u(x)$. Дело в том, что в практических задачах $u(x)$ заданы в конечном числе \bar{N} точек \bar{x} , (в точках, в которых стоят датчики — осциллографы, геофоны и т. п. приборы). Поэтому выбор функционалов ω_j ограничен такими функционалами, которые требуют знания функции в точках $\bar{x} \in G$ (функционалы метода коллокации, функционалы в конечномерном векторном пространстве и т. д.). Таким образом, решение линейной обратной задачи сводится к решению линейной системы (1.258) и, следовательно, нахождению решения граничных задач (1.255), (1.256). Последняя ничем не отличается от граничной задачи (1.1), (1.2), и поэтому для ее приближенного решения можно воспользоваться способами из § 1.2, 1.3. Что касается решения граничных задач (1.255), то их будем искать в виде

$$u_{ki}(x) = K_i(x_k, x) + v_{ki}(x), \quad (1.259)$$

где $K_i(x_k, x)$ — i -я вектор-строка матрицы фундаментальных решений $K(x_k, x)$ оператора L , а $v_{ki}(x)$ является решением следующей граничной задачи с однородным дифференциальным уравнением:

$$Lv_{ki}(x) = 0, \quad x \in G, \quad lv_{ki}(x)|_{\Gamma} = lK_i(x_k, x)|_{\Gamma}. \quad (1.260)$$

Эта граничная задача также совпадает с граничной задачей (1.1), (1.2) и, следовательно, для ее решения могут быть использованы методы, описанные в § 1.2, 1.3. Таким образом, получаем следующий алгоритм решения линейной обратной задачи: решаем граничные задачи (1.260) и (1.256); с помощью $v_{ki}(x)$ из (1.259) находим $u_{ki}(x)$, с помощью последних вычисляем элементы матрицы и правые части системы (1.258), решение которой даст искомые векторы c_k .

Рассмотрим теперь линейную параметризованную обратную задачу. В этом случае мы имеем граничную задачу

$$\begin{aligned} Lu(x) &= f(x, c_1, \dots, c_N), \quad x \in G, \\ lu(x)|_{\Gamma} &= \psi(y). \end{aligned} \quad (1.261)$$

Для определения вектор-параметров c_k рассмотрим граничные задачи

$$Lu_{ki}(x) = f\left(x, \underbrace{\bar{I}, \dots, \bar{I}}_{k-1}, R_i, \underbrace{\bar{I}, \dots, \bar{I}}_{N-k}\right), \quad x \in G, \quad k = 1, \dots, N,$$

$$lu_{ki}(x)|_{\Gamma} = 0, \quad k = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.262)$$

$$Lu_1(x) = 0, \quad (1.263)$$

$$lu_1(x)|_{\Gamma} = \psi(y),$$

где через \bar{I} обозначен m -мерный вектор с нулевыми составляющими, а R_i имеет тот же смысл, что и в (1.255). Для решения граничных задач (1.262) также воспользуемся представлением

$$u_{ki} = \omega_{ki}(x) + v_{ki}(x),$$

где $\omega_{ki}(x)$ — какое-либо частное решение уравнения

$$Lu_{ki} = f\left(x, \underbrace{\bar{I}, \dots, \bar{I}}_{k-1}, R_i, \underbrace{\bar{I}, \dots, \bar{I}}_{N-k}\right), \quad x \in G, \quad k = 1, \dots, N,$$

а $v_{ki}(x)$ — решение граничной задачи

$$Lv_{ki}(x) = 0, \quad x \in G,$$

$$lv_{ki}(x)|_{\Gamma} = l\omega_{ki}(x)|_{\Gamma}.$$

Дальнейший ход вычисления вектор-параметров c_k аналогичен рассматриваемому выше случаю решения линейной обратной задачи. Для получения $\omega_{ki}(x)$ можно использовать фундаментальные решения оператора L (см. (1.94)).

В случае слабой нелинейной граничной задачи вместо системы (1.258) получаем довольно сложный нелинейный функционал, который следует минимизировать как по c_k , так и по координатам точек x_k . Найдем этот нелинейный функционал. Для ясности изложения будем предполагать, что G — конечная область (внутренняя обратная задача) с границей Γ . Через S обозначим поверхность, целиком включающую область G , а через $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ — множество точек, расположенных всюду плотно на S . Решение граничной задачи (1.254), в которой координаты точек x_k в данном случае неизвестны, опять представим в виде выражения (1.257), где $u_{ki}(x)$ выражаются через (1.259), а v_{ki} являются решениями граничных задач (1.260). Решения последних представим в виде ряда

$$v_{ki}(x) = \sum_{s=1}^N a_s(x_{ki}) \psi_s(x), \quad (1.264)$$

где $\psi_s(x)$ — занумерованные с помощью одного индекса фундаментальные решения $K_i(z_k, x)$ оператора L , $a_s(x_k, i)$ — коэффициенты разложения функции $lK_i(x_k, y)|_{\Gamma}$ в виде ряда $l\psi_s(x)|_{\Gamma}$. Они, как

уже было сказано в § 1.3, получаются при решении системы

$$\sum_{s=1}^N a_s(x_k, i) \omega_j[l\psi_s(y)] = \omega_j[lR_i(x_k, y)], \quad j = 1, \dots, N, \quad (1.265)$$

где ω_j — линейные функционалы. Запишем (1.265) в матричной форме

$$Aa(x_k, i) = b,$$

где A — матрица системы (1.265), $a(x_k, i)$ и b — искомый и заданный векторы. Обозначив элементы обратной к A матрицы A^{-1} через α_{sj} (они не зависят от координат точек x_k), получим

$$a_s(x_k, i) = \sum_{j=1}^N \alpha_{sj} \omega_j[lK_i(x_k, y)]. \quad (1.266)$$

Весьма важно с точки зрения численной реализации излагаемого алгоритма, что элементы матрицы A^{-1} могут быть использованы для представления решения всех задач (1.254). Используя формулы (1.259) — (1.266), из (1.257) получаем

$$u(x) = u_1(x) + \sum_{k=1}^{\bar{N}} \sum_{i=1}^m c_{ki} \left[K_i(x_k, x) + \sum_{s=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^N \alpha_{sj} \omega_j[lK_i(x_k, y)] \right\} \psi_s(x) \right]$$

Выбрав какую-либо из классических норм функционального пространства (например, норму в $L_2(G)$), получаем, что коэффициенты c_{ki} и координаты точек x_k получаются при минимизации функционалов

$$\left\| u(x) - u_1(x) - \sum_{k=1}^{\bar{N}} \sum_{i=1}^m c_{ki} \left[K_i(x_k, x) + \sum_{s=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^N \alpha_{sj} \omega_j[lK_i(x_k, y)] \right\} \psi_s(x) \right] \right\|. \quad (1.267)$$

В (1.267) $u(x)$ — заданная функция (согласно постановке обратной задачи), $u_1(x)$ — решение прямой задачи (1.256), которое может быть эффективно вычислено, α_{sj} — не зависящие от c_{ki} и x_k числа, $\psi_s(x)$ — также не зависящие от c_{ki} и x_k функции. Таким образом, если выбрать функционалы ω_j и норму $\| \cdot \|$, выражение (1.267) превращается в обычный нелинейный функционал, для минимизации которого могут быть использованы хорошо известные методы минимизации.

Ниже приводим решения обратных задач для уравнения Пуассона $\Delta u(x) = f(x)$ и внешней граничной задачи Неймана $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S \equiv \frac{\partial u}{\partial x^3} \Big|_S = \psi(y)$ для полупространства. Обратная задача

8,6	-8,3	-3,27	0,1	0,0	0,0	11,5	-9,6	-44,2	0,2	0,0	0,0
-5,8	-4,2	-27,3	0,1	0,0	0,0	-6,5	-2,2	-34,4	0,1	0,0	0,0
-25,0	-26,7	-44,0	0,1	0,0	0,0	-33,9	-34,1	-58,9	0,1	0,0	0,0
0,1	0,1	0,1	0,1	0,0	0,0	0,2	0,1	0,1	0,1	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$a(x_1^3 = -0,01) 10^5$						$b(x_1^3 = -0,1) 10^5$					
15,47	7,11	-40,4	1,95	-0,60	0,26	0,20	0,32	-0,20	-2,08	2,27	-0,88
7,95	15,70	-4,72	0,60	-0,40	0,13	0,31	-0,48	0,31	2,52	-2,76	0,84
-30,99	-9,26	-45,96	0,74	-0,27	0,19	0,29	0,29	-0,19	-4,31	4,60	-1,58
1,86	0,61	0,49	-0,95	-0,12	-0,15	-0,39	-1,04	-0,23	-11,05	-3,71	-4,79
-0,58	-0,36	-0,17	-0,10	-0,07	0,0	0,28	1,19	0,12	8,80	4,65	4,22
0,27	0,1	0,03	0,19	-0,03	0,03	-0,07	-0,59	-0,04	-5,30	-0,07	-3,14
$c(x_1^3 = -1,0) 10^4$						$d(x_1^3 = -3)$					
			14,73	24,08	2,51	∞	∞	∞			
			16,40	-28,86	-14,21	∞	∞	∞			
			-1,06	4,76	15,76	∞	∞	∞			

заключается в следующем. На плоскости $x^3 = 0$ задана вертикальная производная $\psi(y)$ потенциала масс $f(x)$, заключенных в бесконечной полосе, ограниченной плоскостями $x^3 = -x_1^3$ и $x^3 = -x_2^3$. Покроем интерпретируемую полосу (слой) параллелепипедами G_k высотой $x_2^3 - x_1^3$ ($x_2^3 > x_1^3$) и горизонтальными размерами D . Параметризованная (но бесконечномерная) обратная задача заключается в следующем: по известным значениям $\psi(y)$ определить кусочно-постоянную плотность масс f_k в параллелепипедах G_k . Линейная система (1.258), из которой в этом случае следует определять постоянные f_k , принимает вид:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \omega_j [u_k(y)] = \omega_j [\psi(y)], \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1.268)$$

где аналитический вид функций $u_k(y)$ дается в § 2.27 гл. II (интегриродифференцированные фундаментальные решения; в частности, u_k совпадает с интегриродифференцированным фундаментальным решением ψ_{2001}). При определенных соотношениях между вертикальными размерами $x_2 - x_1^3$, горизонтальными размерами D параллелепипедов и расстоянием x_1^3 от плоскости $x^3 = 0$ граничных значений до верхней границы исследуемого слоя бесконечная система (1.268) линейных уравнений становится вполне регулярной [69] и ее можно решать методом редукции (об этом и физическом смысле этих обратных задач можно узнать из монографии автора. Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиметрии.— М.: Наука, 1987). В нижеприводимой табл. 1.27 даются погрешности определения кусочно-постоянных плотностей f_k для следующей физической модели. В одном-единственном параллелепипеде задается единичная плотность, во всех остальных параллелепипедах плотность равна нулю. Гравитирующий параллелепипед соответствует первому числу первой строки каждого из пяти случаев табл. 1.27. Каждый случай содержит погрешности определения постоянных плотностей в гравитирующем и в 35 ближайших параллелепипедах. Во всех пяти случаях $D = 1$ и $x_2^3 - x_1^3 = 2$, а x_1^3 менялся от $-0,01$ (случай *a*) до -5 (случай *e*). Погрешности умножались на 10^5 (случаи *a* и *b*), на 10^4 (случай *c*). Для случаев *d* и *e* даны значения погрешностей без изменения. Анализ табл. 1.27 показывает, что чем выше от исследуемого слоя находятся интерпретируемые значения $\psi(y)$, тем хуже решается соответствующая параметризованная линейная обратная задача. В тех случаях, когда погрешности были больше 100, в табл. 1.27 пишется символ ∞ .

ГЛАВА II
**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ
И ИНТЕГРИРОВАННЫЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ
НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

§ 2.1. Дифференциальное уравнение Лапласа

Дифференциальный оператор Лапласа имеет вид

$$L = \Delta \equiv \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2}.$$

Оператор l в граничных условиях задачи (1.1), (1.2) для дифференциального уравнения Лапласа в общем случае имеет вид

$$l \equiv \alpha_1(y) + \alpha_2(y) \frac{\partial}{\partial y^1} + \alpha_3(y) \frac{\partial}{\partial y^2} + \alpha_4(y) \frac{\partial}{\partial y^3}, \quad (2.1)$$

где $\alpha_i(y)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — функции, заданные на границе Γ . В этом случае искомая функция в граничной задаче (1.1), (1.2) скалярна.

Фундаментальные решения $\psi_k(x)$ даются формулой

$$\psi_k(x) = \frac{1}{r(z_k, x)}, \quad (2.2)$$

где $z_k = (z_k^1, z_k^2, z_k^3)$ — точки, расположенные всюду плотно на Γ_1 (рис. 1), а

$$r(z_k, x) = \sqrt{(z_k^1 - x^1)^2 + (z_k^2 - x^2)^2 + (z_k^3 - x^3)^2}$$

(здесь и всюду в дальнейшем) — расстояние между фиксированной точкой z_k и переменной точкой $x = (x^1, x^2, x^3)$.

Формулы (1.21) и (1.22), существенно использующиеся во втором способе решения граничных задач методом разложения по фундаментальным решениям, представимы соответственно в виде

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \iint_r \left[\frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{r(x, y)} u(y) - \frac{1}{r(x, y)} \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) \right] dS_y, \quad x \in G, \quad (2.3)$$

$$0 = \iint_r \left[\frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{r(z, y)} u(y) - \frac{1}{r(z, y)} \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) \right] dS_y, \quad z \notin G, \quad (2.4)$$

где $\partial/\partial n_y$ означает производную по внешней нормали к поверхности G в точке $y \in \Gamma$. В дальнейшем индекс y будем опускать. Формулы (2.3) и (2.4) известны под названием основных формул теории гармонических функций. Иногда (например, [88]) равенства (2.3), (2.4) называют третьими равенствами Грина. Вообще говоря, в правой части формулы (2.2) может еще стоять произвольная гармоническая по x функция $\varphi(z, x)$, непрерывная вместе со своими первыми производными. Ясно, что функции $\frac{1}{r(z, x)}$ и $\left[\frac{1}{r(z, x)} + \varphi(z, x) \right]$ одновременно будут удовлетворять формуле (1.94).

Условия сопряжения для внутренних границ имеют вид

$$u'(x)|_{\Gamma_{\text{вн}}} = u''(x)|_{\Gamma_{\text{вн}}}, \quad c_1 \frac{\partial}{\partial n} u'(x)|_{\Gamma_{\text{вн}}} = c_2 \frac{\partial}{\partial n} u''(x)|_{\Gamma_{\text{вн}}}, \quad (2.5)$$

где c_1 и c_2 — константы, характеризующие две различные среды по обе стороны внутренней границы $\Gamma_{\text{вн}}$.

§ 2.2. Дифференциальное уравнение Лапласа в плоском случае

Оператор Лапласа в плоском случае имеет вид

$$L = \Delta \equiv \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2}.$$

Оператор граничных условий в общем случае — вид

$$l \equiv \alpha_1(y) + \alpha_2(y) \frac{\partial}{\partial y^1} + \alpha_3(y) \frac{\partial}{\partial y^2}.$$

Фундаментальные решения даются формулой

$$\psi_k(x) = \ln r(z_k, x),$$

или

$$- \psi_k(x) = \ln \frac{1}{r(z_k, x)}.$$

Формулы (2.3), (2.4) принимают соответственно вид

$$u(x) = - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial n_y} \ln r(x, y) u(y) - \ln r(x, y) \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) \right] dS_y, \quad x \in G;$$

$$0 = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial n_y} \ln r(z, y) u(y) - \ln r(z, y) \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) \right] dS_y, \quad z \notin G.$$

Условия сопряжения на внутренних границах выражаются теми же формулами (2.5).

Частное решение плоского неоднородного уравнения Лапласа (уравнение Пуассона) с полиномиальной правой частью

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} (x^1)^i (x^2)^j$$

дается формулой

$$\omega(x) = \frac{1}{a+b} \left[a \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} \frac{(-1)^{[j/2]}}{(i+2)(i+1)c_{i+j+2}^j} P_{i+j+2,j}(x) + \right. \\ \left. + b \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} \frac{(-1)^{[i/2]}}{(i+2)(j+1)c_{i+j+2}^i} \bar{P}_{i+j+2,i}(x) \right]$$

где

$$P_{i+j+2,j}(x) = \sum_{k=0}^{[j/2]} (-1)^k c_{i+j+2}^{2k+\{i/2\}} (x^1)^{i+j+2-2k-\{j/2\}} (x^2)^{2k+\{j/2\}}, \\ \bar{P}_{i+j+2,i}(x) = \sum_{k=0}^{[i/2]} (-1)^k c_{i+j+2}^{2k+\{i/2\}} (x^1)^{2k+\{i/2\}} (x^2)^{i+j-2k-\{i/2\}+2},$$

символ $\{i/2\}$ обозначает остаток деления i на 2, т. е. 1 при нечетном i и 0 при четном i , $[k]$ обозначает целую часть числа k , a и b — произвольные конечные числа, не равные одновременно нулю.

Частное решение для уравнения с правой частью

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} \sin(b_i x^1 + c_i) \sin(d_j x^2 + e_j)$$

равно

$$\omega(x) = - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} (b_i^2 + d_j^2)^{-1} \sin(b_i x^1 + c_i) \sin(d_j x^2 + e_j),$$

а для уравнения с правой частью

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^k a_{ij} e^{b_j x^1 + c_j x^2},$$

равно

$$\omega(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^k \frac{a_{ij}}{(b_i^2 + c_j^2)} e^{b_j x^1 + c_j x^2},$$

где a_{ij} , b_i , c_i , d_j и e_j — заданные числа.

§ 2.3. Уравнение Гельмгольца (волновое уравнение)

Оператор Гельмгольца имеет вид

$$L = \Delta + k^2 = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2} + k^2, \quad k^2 > 0.$$

Оператор l граничных условий в задаче (1.1), (1.2) дается формулой (2.2). Фундаментальные решения $\psi_k(x)$ имеют вид

$$\psi_k(x) = \frac{e^{-ikr(z_k, x)}}{r(z_k, x)},$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Формулы (1.21), (1.22), которые в этом случае часто называют формулами Кирхгофа или принципом Гюйгенса, представляемы соответственно в виде

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikr(x, y)}}{r(x, y)} - \frac{e^{-ikr(x, y)}}{r(x, y)} \frac{\partial}{\partial n} u(y) \right] dS_y,$$

$$0 = \int_{\Gamma} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikr(z, y)}}{r(z, y)} - \frac{e^{-ikr(z, y)}}{r(z, y)} \frac{\partial}{\partial n} u(y) \right] dS_y, \quad z \notin G.$$

§ 2.4. Уравнение Клейна — Гордона

Оператор L имеет вид

$$L = \Delta - k^2 = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2} - k^2, \quad k^2 > 0.$$

Оператор l в граничных условиях (1.2) дается формулой (2.1) Фундаментальные решения $\psi_k(x)$ имеют вид

$$\psi_k(x) = \frac{e^{-kr(z_k, x)}}{r(z_k, x)}.$$

Формулы (1.21), (1.22) записываются соответственно

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-kr(x, y)}}{r(x, y)} - \frac{e^{-kr(x, y)}}{r(x, y)} \frac{\partial}{\partial n} u(y) \right] dS_y,$$

$$0 = \int_{\Gamma} \left[u(y) - \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-kr(z, y)}}{r(z, y)} - \frac{e^{-kr(z, y)}}{r(z, y)} \frac{\partial}{\partial n} u(y) \right] dS_y, \quad z \notin G.$$

Фундаментальные решения для уравнения

$$\Delta u - u = 0$$

в плоском случае получены Пикаром (см. [39]) и имеют вид

$$\psi_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{r(z_k, x)t}}{\sqrt{t^2 - 1}} dt.$$

Получим из уравнения распространения волн в пространстве (§ 1.12)

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \Delta u(x, t) + F(x, t),$$

где $F(x, t)$ — плотность действующей силы, $a^2 = k/\rho$, k — модуль Юнга, ρ — плотность, x — точка рассматриваемого тела, t — время, одно общее уравнение, частными случаями которого являются уравнения Гельмгольца и Клейна — Гордона.

Пусть $F(x, t) = F(x)e^{i\tau t}$, где $\tau = \alpha + i\omega$. Если решение уравнения распространения волн будем искать в виде $u(x, t) = u(x)e^{i\tau t}$, получим для функций $u(x)$ уравнение

$$\tau^2 e^{i\tau t} u(x) = a^2 e^{i\tau t} \Delta u(x) + F(x) e^{i\tau t},$$

или, сокращая на $e^{i\tau t}$,

$$a^2 \Delta u(x) - \tau^2 u(x) + F(x) = 0.$$

Из последнего уравнения при $\tau = i\omega$ получаем неоднородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta u(x) + \frac{\omega^2}{a^2} u(x) + F(x) = 0,$$

а при $\tau = \alpha$ — неоднородное уравнение Клейна — Гордона

$$\Delta u(x) - \frac{\alpha^2}{a^2} u(x) + F(x) = 0.$$

Заметим, что уравнение Клейна — Гордона является реальным, и его решение также реально. Уравнение Гельмгольца является реальным, но его решение уже комплексно. Однородное общее уравнение

$$\Delta u(x) - \frac{\tau^2}{a^2} u(x) = 0$$

является комплексным:

$$\Delta u_1(x) - \frac{\alpha^2 - \omega^2}{a^2} u_1(x) + 2 \frac{\omega\alpha}{a^2} u_2(x) = 0,$$

$$\Delta u_2(x) - \frac{\alpha^2 - \omega^2}{a^2} u_2(x) - 2 \frac{\omega\alpha}{a^2} u_1(x) = 0,$$

и его решение $u(x) = u_1(x) + iu_2(x)$ также комплексно. Можно непосредственно проверить, что фундаментальное решение

общего уравнения имеет вид

$$\psi(x, y) = \frac{e^{-\frac{\tau}{a}r(x,y)}}{r(x, y)}.$$

Приведем результаты решения двух граничных задач для уравнения Клейна — Гордона. В первом случае G является однородной единичной сферой и граничные условия имеют вид

$$u|_r = \exp\left\{\lambda \frac{2}{\sqrt{6}} \sin Q \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos Q\right\},$$

при $\lambda = 0, 1$. Нетрудно проверить, что точное решение рассматриваемой граничной задачи имеет вид

$$u = e^{\frac{0,1}{\sqrt{3}}(x^1 + x^2 + x^3)}.$$

Для решения этой граничной задачи применялись 50 фундаментальных решений, равномерно расположенных на вспомогательной сфере радиуса $r = 2,5$. Для аппроксимации граничных условий применялся метод коллокации. Узлы коллокации также равномерно расположены на поверхности основной единичной сферы. Решение u получалось с помощью Пакета прикладных программ. Погрешность решения линейной системы уравнений (невязки в узлах коллокации) не превосходит величины

10^{-5} (табл. 2.1). Отклонения приближенного решения $\sum_{k=1}^{50} a_k \psi_k$ от точного u , вычисленные (табл. 2.2) в 50 граничных точках (посередине узлов коллокации) и в 100 внутренних точках (табл. 2.3 и 2.4) области G , не превышали 10^{-4} .

Вторая граничная задача относится к кусочно-однородной среде. Здесь точное решение неизвестно, и погрешность контролировалась лишь проверкой граничных условий. Эта задача также решалась с помощью Пакета прикладных программ (точнее, расширением Пакета прикладных программ для решения трехмерной контактной граничной задачи, описанного для уравнения Лапласа. В настоящее время такое расширение работает и для уравнения Клейна — Гордона). Конечная кусочно-однородная область, для которой ищется решение задачи Дирихле для уравнения Клейна — Гордона, ограничена (рис. 9) поверхностью Γ_0 двусосного эллипсоида с полуосями 10,5 и 5 с центром в начале координат. Внутри эллипсоида расположено сферическое кольцо с центром в точке $(-4, 0, 0)$ и внешним радиусом (поверхность Γ_1) $R_1 = 3$ и внутренним радиусом (поверхность Γ_2) $R_2 = 1$. Кроме этого тела внутри основного эллипсоида имеется еще одно включение в виде сферы радиуса $R_3 = 3$ (поверхность Γ_3) с центром в точке $(4, 0, 0)$. Такое

Т а б л и ц а 2.1

N	x^1	x^2	x^3	u	\bar{u}
1	0,2930	0,0955	0,9512	1,0805	1,0805
2	0,1816	0,2500	0,9512	1,0831	1,0831
3	-0,0000	0,3090	0,9512	1,0755	1,0755
4	-0,1816	0,2500	0,9512	1,0606	1,0606
5	-0,2939	0,0955	0,9512	1,0444	1,0444
6	-0,2939	-0,0955	0,9512	1,0330	1,0330
7	-0,1816	-0,2500	0,9512	1,0304	1,0304
8	0,0000	-0,3090	0,9512	1,0378	1,0378
9	0,1816	-0,2500	0,9512	1,0523	1,0523
10	0,2939	-0,0955	0,9512	1,0686	1,0686
11	0,7694	0,2500	0,5878	1,0972	1,0972
12	0,4755	0,6545	0,5878	1,1043	1,1043
13	-0,0000	0,8090	0,5878	1,0840	1,0840
14	-0,4755	0,6545	0,5878	1,0453	1,0453
15	-0,7694	0,2500	0,5878	1,0040	1,0040
16	-0,7694	-0,2500	0,5878	0,9754	0,9754
17	-0,4755	-0,6545	0,5878	0,9692	0,9692
18	0,0000	-0,8090	0,5878	0,9873	0,9873
19	0,4755	-0,6545	0,5878	1,0239	1,0239
20	0,7694	-0,2500	0,5878	1,0660	1,0660
21	0,9511	0,3090	0,0000	1,0755	1,0755
22	0,5878	0,8090	-0,0000	1,0840	1,0840
23	-0,0000	1,0000	-0,0000	1,0594	1,0594
24	-0,5878	0,8090	-0,0000	1,0128	1,0129
25	-0,9511	0,3090	-0,0000	0,9636	0,9636
26	-0,9511	-0,3090	-0,0000	0,9298	0,9298
27	-0,5878	-0,8090	-0,0000	0,9225	0,9225
28	0,0000	-1,0000	-0,0000	0,9439	0,9439
29	0,5878	-0,8090	-0,0000	0,9873	0,9873
30	0,9511	-0,3090	-0,0000	1,0378	1,0378
31	0,7694	0,2500	-0,5878	1,0252	1,0252
32	0,4755	0,6545	-0,5878	1,0318	1,0318
33	-0,0000	0,8090	-0,5878	1,0128	1,0129
34	-0,4755	0,6545	-0,5878	0,9767	0,9767
35	-0,7694	0,2500	-0,5878	0,9381	0,9381
36	-0,7694	-0,2500	-0,5878	0,9114	0,9114
37	-0,4755	-0,6545	-0,5878	0,9056	0,9056
38	0,0000	-0,8090	-0,5878	0,9225	0,9225
39	0,4755	-0,6545	-0,5878	0,9567	0,9567
40	0,7694	-0,2500	-0,5878	0,9961	0,9961
41	0,2939	0,0955	-0,9512	0,9681	0,9681
42	0,1816	0,2500	-0,9512	0,9704	0,9704
43	-0,0000	0,3090	-0,9512	0,9636	0,9636
44	-0,1816	0,2500	-0,9512	0,9503	0,9503
45	-0,2939	0,0955	-0,9512	0,9358	0,9358
46	-0,2939	-0,0955	-0,9512	0,9255	0,9255
47	-0,1816	-0,2500	-0,9512	0,9233	0,9233
48	0,0000	-0,3090	-0,9512	0,9298	0,9298
49	0,1816	-0,2500	-0,9512	0,9428	0,9428
50	0,2939	-0,0955	-0,9512	0,9575	0,9575

Т а б л и ц а 2.2

N	x^1	x^2	x^3	u	\bar{u}
1	0,3090	0,0	0,9512	1,0755	1,0755
2	0,2500	0,1816	0,9512	1,0331	1,0331
3	0,0955	0,2939	0,9512	1,0805	1,0805
4	-0,0955	0,2939	0,9512	1,0686	1,0686
5	-0,2500	0,1816	0,9512	1,0523	1,0523
6	-0,3090	-0,0000	0,9512	1,0378	1,0378
7	-0,2500	-0,1816	0,9512	1,0304	1,0304
8	-0,0955	-0,2939	0,9512	1,0330	1,0330
9	0,0955	-0,2939	0,9512	1,0444	1,0444
10	0,2500	-0,1816	0,9512	1,0606	1,0606
11	0,0090	0,0	0,5878	1,0840	1,0840
12	0,6545	0,4755	0,5878	1,1042	1,1043
13	0,2500	0,7694	0,5878	1,0972	1,0972
14	-0,2500	0,7694	0,5878	1,0606	1,0606
15	-0,6545	0,4755	0,5878	1,0239	1,0239
16	-0,8090	-0,0000	0,5878	0,9873	0,9873
17	-0,6545	-0,4755	0,5878	0,9692	0,9692
18	-0,2500	-0,7694	0,5878	0,9754	0,9754
19	0,2500	-0,7694	0,5878	1,0039	1,0040
20	0,6545	-0,4755	0,5878	1,0453	1,0453
21	1,0000	0,0	-0,0000	1,0594	1,0594
22	0,8090	0,5857	-0,0000	1,0839	1,0840
23	0,3090	0,9511	-0,0000	1,0754	1,0755
24	-0,3090	0,9511	-0,0000	1,0377	1,0378
25	-0,8090	0,5378	-0,0000	0,9873	0,9873
26	-1,0000	-0,0000	-0,0000	0,9439	0,9439
27	-0,8090	-0,5878	-0,0000	0,9225	0,9225
28	-0,3090	-0,9511	-0,0000	0,9298	0,9298
29	0,3090	-0,9511	-0,0000	0,9636	0,9636
30	0,8090	-0,5878	-0,0000	1,0128	1,0129
31	0,8090	0,0	-0,5878	1,0128	1,0129
32	0,6545	0,4755	-0,5878	1,0318	1,0318
33	0,2500	0,7694	-0,5878	1,0252	1,0252
34	-0,2500	0,7694	-0,5878	0,9960	0,9961
35	-0,6545	0,4755	-0,5878	0,9567	0,9567
36	-0,8090	-0,0000	-0,5878	0,9225	0,9225
37	-0,6545	-0,4755	-0,5878	0,9056	0,9056
38	-0,2500	-0,7694	-0,5878	0,9114	0,9114
39	0,2500	-0,7694	-0,5878	0,9381	0,9381
40	0,6545	-0,4755	-0,5878	0,9767	0,9767
41	0,3090	0,0	-0,9512	0,9636	0,9636
42	0,2500	0,1816	-0,9512	0,9704	0,9704
43	0,0955	0,2939	-0,9512	0,9681	0,9681
44	-0,0955	0,2939	-0,9512	0,9575	0,9575
45	-0,2500	0,1816	-0,9512	0,9428	0,9428
46	-0,3090	-0,0000	-0,9512	0,9278	0,9298
47	-0,2500	-0,1816	-0,9512	0,9233	0,9233
48	-0,0955	-0,2939	-0,9512	0,9255	0,9255
49	0,0955	-0,2939	-0,9512	0,9358	0,9358
50	0,2500	-0,1816	-0,9512	0,9503	0,9503

Т а б л и ц а 2.3

N	x^1	x^2	x^3	u	\bar{u}
1	-0,1469	-0,0477	0,4758	1,0394	1,0395
2	0,0908	0,1250	0,4758	1,0407	1,0407
3	-0,0000	0,1545	0,4758	1,0370	1,0371
4	-0,0908	0,1250	0,4758	1,0298	1,0299
5	-0,1469	0,0477	0,4758	1,0219	1,0220
6	-0,1469	-0,0477	0,4758	1,0163	1,0164
7	-0,0908	-0,1250	0,4758	1,0151	1,0151
8	0,0000	-0,1545	0,4758	1,0186	1,0187
9	0,0908	-0,1250	0,4758	1,0257	1,0258
10	0,1469	-0,0477	0,4758	1,0337	1,0338
11	0,3847	0,1250	0,2941	1,0474	1,0475
12	0,2378	0,3273	0,2941	1,0508	1,0509
13	-0,0000	0,4045	0,2941	1,0411	1,0412
14	-0,2378	0,3273	0,2941	1,0223	1,0224
15	-0,3847	0,1250	0,2941	1,0019	1,0020
16	-0,3847	-0,1250	0,2941	0,9876	0,9876
17	-0,2378	-0,3273	0,2941	0,9844	0,9845
18	0,0000	-0,4045	0,2941	0,9936	0,9936
19	0,2378	-0,3273	0,2941	1,0118	1,0119
20	0,3847	-0,1250	0,2941	1,0324	1,0325
21	0,4755	0,1545	-0,0000	1,0370	1,0370
22	0,2939	0,4045	-0,0000	1,0411	1,0411
23	-0,0000	0,5000	-0,0000	1,0292	1,0293
24	-0,2939	0,4045	-0,0000	1,0064	1,0064
25	-0,4750	0,1545	-0,0000	0,9816	0,9816
26	-0,4755	-0,1545	-0,0000	0,9642	0,9643
27	-0,2939	-0,4045	-0,0000	0,9604	0,9605
28	0,0000	-0,5000	-0,0000	0,9715	0,9715
29	0,2939	-0,4045	-0,0000	0,9936	0,9936
30	0,4755	-0,1545	-0,0000	1,0187	1,0187
31	0,3847	0,1250	-0,2941	1,0125	1,0125
32	0,2378	0,3273	-0,2941	1,0157	1,0158
33	-0,0000	0,4045	-0,2941	1,0063	1,0064
34	-0,2378	0,3273	-0,2941	1,9882	1,9883
35	-0,3847	0,1250	-0,2941	0,9685	0,9685
36	-0,3847	-0,1250	-0,2941	0,9546	0,9547
37	-0,2378	-0,3273	-0,2941	0,9516	0,9516
38	0,0000	-0,4045	-0,2941	0,9604	0,9605
39	0,2378	-0,3273	-0,2941	0,9781	0,9781
40	0,3847	-0,1250	-0,2941	0,9980	0,9980
41	0,1469	0,0477	-0,4758	0,9839	0,9839
42	0,0908	0,1250	-0,4758	0,9851	0,9851
43	-0,0000	0,1545	-0,4758	0,9816	0,9816
44	-0,0908	0,1250	-0,4758	0,9748	0,9748
45	-0,1469	0,0477	-0,4758	0,9673	0,9673
46	-0,1469	-0,0477	-0,4758	0,9620	0,9620
47	-0,0908	-0,1250	-0,4758	0,9608	0,9609
48	0,0000	-0,1545	-0,4758	0,9642	0,9643
49	0,0908	-0,1250	-0,4758	0,0709	0,9710
50	0,1469	-0,0477	-0,4758	0,9784	0,9785

Т а б л и ц а 2.4

N	x^1	x^2	x^3	u	\bar{u}
1	0,1545	0,0	0,4758	1,0370	1,0371
2	0,1250	0,0908	0,4758	1,0407	1,0407
3	0,0477	0,1469	0,4758	1,0394	1,0395
4	-0,0477	0,1469	0,4758	1,0337	1,0338
5	-0,1250	0,0908	0,4758	1,0257	1,0258
6	-0,1545	-0,0000	0,4758	1,0186	1,0187
7	-0,1250	-0,0908	0,4758	1,0150	1,0151
8	-0,0477	-0,1469	0,4758	1,0163	1,0164
9	0,0477	-0,1469	0,4758	1,0219	1,0220
10	0,1250	-0,0908	0,4758	1,0298	1,0299
11	0,4045	0,0	0,2941	1,0411	1,0412
12	0,3273	0,2378	0,2941	1,0508	1,0509
13	0,1250	0,3847	0,2941	1,0474	1,0475
14	-0,1250	0,3847	0,2941	1,0324	1,0325
15	-0,3273	0,2378	0,2941	1,0118	1,0119
16	-0,4045	-0,0000	0,2941	0,9936	0,9936
17	-0,3273	-0,2378	0,2941	0,9844	0,9845
18	-0,1250	-0,3846	0,2914	0,9876	0,9876
19	0,1250	-0,3847	0,2941	1,0019	1,0020
20	0,3273	-0,2378	0,2941	1,0223	1,0224
21	0,5000	0,0	-0,0000	1,0292	1,0293
22	0,4045	0,2939	-0,0000	1,0411	1,0411
23	0,1545	0,4755	-0,0000	1,0370	1,0370
24	-0,1545	0,4755	-0,0000	1,0187	1,0187
25	-0,4045	0,2939	-0,0000	0,9936	0,9936
26	-0,5000	-0,0000	-0,0000	0,9715	0,9715
27	-0,4045	-0,2939	-0,0000	0,9604	0,9605
28	-0,1545	-0,4755	-0,0000	0,9642	0,9643
29	0,1545	-0,4755	-0,0000	0,9816	0,9816
30	0,4045	-0,2939	-0,0000	1,0064	1,0064
31	0,4045	0,0	-0,2941	1,0063	1,0064
32	0,3273	0,2379	-0,2941	1,0157	1,0158
33	0,1250	0,3847	-0,2941	1,0125	1,0125
34	-0,1250	0,3847	-0,2941	0,9980	1,9980
35	-0,3273	0,2378	-0,2941	0,9781	0,9781
36	-0,4045	-0,0000	-0,2941	0,9004	0,9005
37	-0,3273	-0,2378	-0,2941	0,8516	0,9516
38	-0,1250	-0,3847	-0,2941	0,9546	0,9547
39	0,1250	-0,3847	-0,2941	0,9685	0,9685
40	0,3273	-0,2378	-0,2941	0,9882	0,9883
41	0,1545	0,0	-0,4758	0,9816	0,9816
42	0,1250	0,0908	-0,4758	0,9851	0,9851
43	0,0477	0,1469	-0,4758	0,9839	0,9839
44	-0,0477	0,1469	-0,4758	0,9784	0,9785
45	-0,1250	0,0908	-0,4758	0,9709	0,9710
46	-0,1545	-0,0000	-0,4758	0,9642	0,9643
47	-0,1250	-0,0908	-0,4758	0,9608	0,9609
48	-0,0477	-0,1409	-0,4758	0,9620	0,9620
49	0,0477	-0,1469	-0,4758	0,9673	0,9673
50	0,1250	-0,0908	-0,4758	0,9748	0,9748

многосвязанное кусочно-однородное тело было выбрано для иллюстрации богатых возможностей Пакета прикладных программ. На рис. 9 дано меридиональное сечение рассматриваемого тела.

Граничные условия имеют вид

$$u|_{\Gamma_0} = 1, \quad u|_{\Gamma_2} = 0,5.$$

Условия сопряжения заданы на поверхностях Γ_1 и Γ_3

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma_1^+} &= u|_{\Gamma_1^-}, & \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1^+} &= 2 \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1^-}, \\ u|_{\Gamma_3^+} &= u|_{\Gamma_3^-}, & \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_3^+} &= 3 \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_3^-}. \end{aligned}$$

Согласно алгоритму § 1.12 решение в каждой из трех однородных областей G_0 (ограниченной поверхностями Γ_0 , Γ_1 и Γ_3),

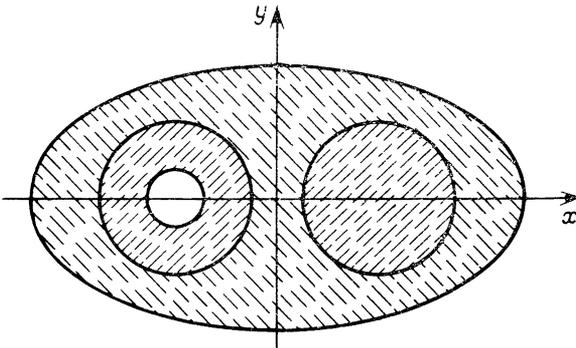


Рис. 9

G_1 (ограниченной поверхностями Γ_1 и Γ_2) и G_2 (ограниченной поверхностью Γ_3) представлено отдельными рядами

$$u_0 = \sum_{k=1}^{N_0} a_k^{(0)} \psi_{k0}, \quad u_1 = \sum_{k=1}^{N_1} a_k^{(1)} \psi_{k1}, \quad u_2 = \sum_{k=1}^{N_2} a_k^{(2)} \psi_{k2}.$$

Вспомогательные точки p_{ji} ($i=0, 1, 2$), определяющие фундаментальные решения ψ_{ki} , брались на поверхности S_0 эллипсоида с центром в начале координат и полуосями $(20, 10, 10)$, на поверхности S_1 сферы с центром в точке $(-4, 0, 0)$ радиуса $R_1=2$, на поверхности S_2 сферы с центром в точке $(4, 0, 0)$ радиуса $R_5=2$ для области G_0 , на поверхности сферы S_3 с центром в точке $(-4, 0, 0)$ радиуса $R_6=4$, на поверхности сферы S_4 с центром в точке $(-4, 0, 0)$ радиуса $R_7=0,5$ для области G_1 , на поверхности сферы S_5 с центром в точке $(4, 0, 0)$ радиуса $R_8=4$ для области G_2 . Пакет прикладных программ полу-

чают коэффициенты разложения, состоящие из трех групп $a_k^{(0)}$, $a_k^{(1)}$, $a_k^{(2)}$, представляющие решение u в области G , u_1 — в области G_1 и u_2 — в области G_2 . Во всех приведенных ниже случаях $N_0 = 18$, $N_1 = 32$ и $N_2 = 16$. При фиксированных вспомогательных поверхностях и числе членов разложения точность найденного решения (которая контролировалась путем проверки граничных условий и условий сопряжения) существенно зависит от коэффициента $k^2 = \lambda$, стоящего в уравнении Клейна — Гордона перед функцией u . Рассматривались значения $\lambda = 10^{-4}$;

Т а б л и ц а 2.5

λ	G_0			G_2			G_1			G_3		
10^{-4}	10^{-5}	0,02	0,001	0,003	0,04	0,04	0,08	0,1	10^{-4}	0,08	10^{-4}	0,07
0,1	10^{-5}	0,03	0,003	0,007	0,05	0,06	0,08	0,06	10^{-3}	0,12	$6 \cdot 10^{-4}$	0,03
0,3	10^{-5}	0,07	0,02	0,08	0,07	0,09	0,05	0,08	$3 \cdot 10^{-3}$	0,18	$2 \cdot 10^{-3}$	0,14
0,9	$4 \cdot 10^{-5}$	0,04	0,07	0,09	0,02	0,02	0,06	0,05	$4 \cdot 10^{-2}$	0,21	$8 \cdot 10^{-3}$	0,37
1,1	$6 \cdot 10^{-5}$	0,06	0,09	0,1	0,03	0,03	0,04	0,04	$9 \cdot 10^{-2}$	0,35	$2 \cdot 10^{-1}$	0,41

10^{-1} ; 0,3; 0,9; 1,1; 2. При увеличении λ результаты ухудшаются. При $\lambda = 2$ результаты были явно неудовлетворительными и они не приводятся в табл. 2.5. В первом столбце последней даны значения λ , во втором и третьем — максимальные отклонения решения от 1 на поверхности Γ в точках коллокации и посередине их, в четвертом и пятом — ($\max u_1 |_{\Gamma_2} - 0,5$) в узлах коллокации и посередине их, в шестом и седьмом — модули разностей сопряжения для самих функций $(u_0 - u_2)_{\Gamma_1}$, в следующих двух столбцах даны в узлах коллокации и посередине их модули разностей сопряжения нормальных производных на поверхности Γ_1 $\max \left| \frac{\partial u_0}{\partial n} - \frac{\partial u_1}{\partial n} \right|_{\Gamma_1}$ и в последних двух столбцах — модули разностей сопряжения в нормальных производных на поверхности Γ_3 .

§ 2.5. Уравнение теплопроводности

Оператор L имеет вид

$$L = a^2 \Delta - \frac{\partial}{\partial t} = a^2 \left[\frac{\partial}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2} \right] - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Если искомая функция $u(x)$ в уравнении (1.1) есть температура в точке $M(x^1 x^2 x^3)$ в момент времени t , то в этом случае $a^2 = k/(c\rho)$, где ρ — плотность, c — коэффициент удельной теплоемкости, $k = \text{const}$ — коэффициент теплопроводности и a^2 — коэффициент температуропроводности. Оператор L допускает следующее истолкование. Если искомая функция $u(x)$ в урав-

нении (1.1) есть концентрация диффундирующего вещества, то $a^2 = D$ — коэффициент диффузии.

Фундаментальные решения $\psi_k(x, t)$ имеют вид

$$\psi_k(x, t) = \left(\frac{1}{2 \sqrt{\pi a^2 (t - \tau_k)}} \right)^3 \exp \left\{ -\frac{r^2(z_k, x)}{4a^2(t - \tau_k)} \right\}.$$

До сих пор мы рассматривали эллиптические дифференциальные уравнения, которые требовали лишь граничных условий. Для параболических и гиперболических уравнений основным являются так называемые смешанные граничные задачи — задачи с начальными условиями. Нетрудно обобщить методы § 1.1, 1.2 для решения и таких задач с использованием тепловых потенциалов.

Пусть $E = \Gamma \times [0, T]$ и $E_1 = \Gamma_1 \times [0, T]$. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция

$$u(x, t; y, \tau) = \left(\frac{1}{2 \sqrt{\pi a^2 (t - \tau)}} \right)^3 \exp \left\{ -\frac{r^2(x, y)}{4a^2(t - \tau)} \right\}$$

удовлетворяет уравнениям

$$a^2 \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad a^2 \Delta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0.$$

Ясно, что эта функция обладает свойством симметрии (принцип взаимности) $u(x, t; y, \tau) = u(y, t; x, \tau)$, относительно переменных t и τ симметрия не имеет места, что обусловлено необратимостью тепловых процессов во времени.

Фундаментальные решения $\psi_k(x, t)$ имеют вид

$$\psi_k(x, t) = \left(\frac{1}{2 \sqrt{\pi a^2 (t - \tau_i)}} \right) \exp \left\{ -\frac{r^2(z_j, x)}{4a^2(t - \tau_i)} \right\}, \quad t > \tau, \quad t \leq \tau_i,$$

где $\{z_j, \tau_i\}$ ($j = 1, 2, \dots$) (здесь и далее) — счетное, всюду плотно распределенное на E_1 множество точек четырехмерного пространства, индекс k связан с индексами i и j путем некоторого их упорядочения. Несколько необычное определение фундаментальных решений объясняется тем, что $\psi_k(x, t)$ есть функция температурного влияния мгновенного источника тепла, включенного при $t = \tau_i$. Заметим, что при непрерывно действующем источнике, начиная с $t = \tau_i$ функция температурного влияния имеет вид

$$q \frac{1}{4\pi k} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r(z_j, x)} \int_0^\infty \frac{e^{-a^2 \alpha}}{2 \sqrt{a^2(t - \tau_i)}} d\alpha,$$

что может оказаться более подходящим при решении некоторых граничных задач методом разложения по неортогональным функциям.

Формулы (1.21), (1.22) для уравнений теплопроводности принимают соответственно вид

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= - \int_0^t \left[\int_S \frac{\partial u(y, \tau)}{\partial n} u(x, t; y, \tau) dS_y \right] d\tau + \\
 &+ \int_0^t \left[\int_S \frac{\partial u(x, t; y, \tau)}{\partial n} u(y, \tau) dS_y \right] d\tau - \int_G \int u(x, t; z, 0) u(z, 0) dv_z, \\
 & \qquad \qquad \qquad x \in G, \\
 0 &= - \int_0^t \left[\int_S \frac{\partial u(y, \tau)}{\partial n} u(z, t; y, \tau) dS_y \right] d\tau + \\
 &+ \int_0^t \left[\int_S \frac{\partial u(z, t; y, \tau)}{\partial n} u(y, \tau) dS_y \right] d\tau - \int_G \int u(x, t; z, 0) u(z, 0) dv_z, \\
 & \qquad \qquad \qquad z \in G.
 \end{aligned}$$

Более подробно о решении граничных задач для уравнения теплопроводности см. в [82].

§ 2.6. Уравнение теплопроводности в плоском случае

Оператор L имеет вид

$$L = a^2 \Delta - \frac{\partial}{\partial t} = a^2 \left[\frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} \right] - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Для этого случая дадим лишь фундаментальные решения

$$\psi_k(x, t) = \left\{ \left(\frac{1}{2 \sqrt{\pi a^2 (t - \tau_i)}} \right)^2 \exp \left\{ - \frac{r^2(z_j, x)}{4a^2 (t - \tau_i)} \right\}, \quad t > \tau_i, \quad t \leq \tau_i. \right.$$

§ 2.7. Уравнение теплопроводности в одномерном случае

Оператор L имеет вид

$$L = a^2 \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Для этого случая также дадим лишь фундаментальные решения

$$\psi_k(x, t) = \left\{ \frac{1}{2 \sqrt{\pi a^2 (t - \tau_i)}} \exp \left\{ - \frac{r^2(z_j, x)}{4a^2 (t - \tau_i)} \right\}, \quad t > \tau_i, \quad t \leq \tau_i. \right.$$

§ 2.8. Уравнение диффузии неустойчивого газа [149]

Оператор L имеет вид

$$L = a^2 \Delta + \beta - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Легко видеть, что после подстановки $u(x, t) = v(x, t)e^{\beta t}$ уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + \beta u$$

переходит в уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \Delta v.$$

Поэтому при решении граничной задачи для рассматриваемого уравнения можно непосредственно применить описанные способы решения, используя в качестве фундаментальных решений функции $\psi_k(x, t)e^{\beta t}$, где $\psi_k(x, t)$ — решения уравнения теплопроводности, либо свести решение с помощью указанной подстановки к решению граничной задачи для уравнения теплопроводности.

§ 2.9. Стационарные уравнения Навье — Стокса

Поле скоростей $u = (u_1, u_2, u_3)$ и давление p при движении несжимаемой жидкости в инерциальной декартовой системе описываются нелинейными уравнениями Навье — Стокса и уравнением несжимаемости

$$\nu \Delta u_i - \rho \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0,$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости, ρ — плотность. Существуют [92] различные способы линеаризации этих уравнений (Стокса, Озина и т. д.). Приведем гидродинамические потенциалы, соответствующие линеаризации Стокса [193, 194]

$$\nu \Delta u_i = \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0.$$

Матрица фундаментальных решений для этого случая имеет вид

$$H(z_k, x) = \begin{pmatrix} H_{11}(z_k, x) & H_{12}(z_k, x) & H_{13}(z_k, x) \\ H_{21}(z_k, x) & H_{22}(z_k, x) & H_{23}(z_k, x) \\ H_{31}(z_k, x) & H_{32}(z_k, x) & H_{33}(z_k, x) \end{pmatrix},$$

где

$$H_{ij}(z_k, x) = -\frac{1}{8\pi\nu} \left[\frac{\delta_{ij}}{r(z_k, x)} + \frac{(z^i - x^i)(z^j - x^j)}{[r(z_k, x)]^3} \right],$$

δ_{ij} — символ Кронекера. Заметим, что в линеаризованных уравнениях Навье — Стокса имеются четыре неизвестные функции: u_i ($i = 1, 2, 3$) и p . Однако граничные условия обычно задаются относительно вектора $u = (u_1, u_2, u_3)$ (аналогичный случай встречается и для уравнений Максвелла). Поэтому при реализации приближенных способов решения граничных задач, описанных в первых двух параграфах первой главы, следует аппроксимировать граничные условия для u с помощью вектор-строк $H_i(z_k, x)$ матрицы $H(z_k, x)$, занумерованных с помощью одного индекса (или вектор-столбцов, что одно и то же ввиду очевидной симметрии матрицы фундаментальных решений)

$$\psi_j(x) = H_i(z_k, x), \quad i = 1, 2, \dots; \quad z = 1, 2, \dots,$$

где индексы i, k и j связаны соотношением $i = 3(k - 1) + j$.

Вычислив коэффициенты разложения a_j для вектора скоростей

$$u = \sum_{j=1}^N a_j \psi_j(x),$$

давление находим по формуле

$$p = \sum_{j=1}^N a_j \omega_j(x),$$

где $\omega_j(x)$ — скалярные функции

$$\omega_j(x) = -\frac{z^i - x^i}{4\pi [r(z_k, x)]^2},$$

а индексы i, k и j связаны тем же соотношением $j = 3(k - 1) + i$ ($i = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots$). Учитывая, что $H_i(z, x)$ является решением линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса

$$\nu \Delta H_i(z, x) - \text{grad} \left[\frac{z^i - x^i}{4\pi [r(z, x)]^3} \right] = \delta(z - x) e^i, \quad \text{div} H_i(z, x) = 0,$$

где $\delta(z - x)$ — дельта-функция Дирака, e^i — единичный вектор, направленный вдоль i -й координатной оси, можно получить [92] частное решение неоднородной линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса

$$\begin{aligned} \nu \Delta u - \text{grad} p &= f(x), \\ \text{div} u &= 0. \end{aligned}$$

§ 2.10. Бигармоническое уравнение

Оператор L имеет вид

$$L = \Delta \Delta = \frac{\partial^4}{(\partial x^1)^4} + \frac{\partial^4}{(\partial x^2)^4} + \frac{\partial^4}{(\partial x^3)^4} + 2 \frac{\partial^4}{(\partial x^1)^2 (\partial x^2)^2} + \\ + 2 \frac{\partial^4}{(\partial x^1)^2 (\partial x^3)^2} + 2 \frac{\partial^4}{(\partial x^2)^2 (\partial x^3)^2}.$$

Уравнения Навье — Стокса и уравнение несжимаемости содержат четыре неизвестные функции и четыре уравнения, а на границе задавались лишь три произвольные функции. Для бигармонического уравнения ситуация обратная: уравнение содержит одну неизвестную функцию, а граничные условия дают две произвольные функции

$$l_1 u|_{\Gamma} = \psi^{(1)}, \quad l_2 u|_{\Gamma} = \psi^{(2)},$$

где l_1 и l_2 — дифференциальные операторы, определенные на Γ . Это объясняется четвертым порядком бигармонического дифференциального уравнения.

Фундаментальные решения бигармонического уравнения имеют вид

$$\psi_j(x) = [r(z_k, x)]^{i(i-5)+5}, \quad i = 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots,$$

где индексы i, k, j связаны соотношением $j = 2(k-1) + i$. При $i = 2$ получаем функцию

$$\psi_j(x) = [r(z_k, x)]^{-1},$$

которая, как легко видеть, бигармонична (ввиду ее гармоничности). При $i = 1$ фундаментальное решение принимает вид

$$\psi_j(x) = r(z_k, x).$$

Непосредственно проверяется бигармоничность функции r

$$\Delta [\Delta r(z_k, x)] = \Delta \left[\sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{r(z_k, x)} - \frac{(x^i - z^i)^2}{[r(z_k, x)]^3} \right] \right] = \Delta \frac{2}{r(z_k, x)} = 0.$$

Формулы (1.21) и (1.22) записываются соответственно в виде

$$u(x) = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Gamma} \left[u(y) \frac{\partial \Delta r(x, y)}{\partial n} - \Delta r(x, y) \frac{\partial u}{\partial n} + \Delta u \frac{\partial r(x, y)}{\partial n} - \right. \\ \left. - r(x, y) \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \right] dS_y, \quad x \in G,$$

$$0 = \iint_{\Gamma} \left[u(y) \frac{\partial \Delta r(z, y)}{\partial n} + \Delta r(z, y) \frac{\partial u}{\partial n} + \Delta u \frac{\partial r(z, y)}{\partial n} - r(z, y) \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \right] dS_y,$$

$z \notin G.$

Для реализации второго способа решения граничных задач методом разложения по неортогональным функциям к последним уравнениям надо прибавить формулы Грина для гармонической функции $\Delta u(x)$:

$$\Delta u(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \Delta u \left[\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r(x, y)} - \frac{1}{r(x, y)} - \frac{1}{r(x, y)} \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \right] dS_y, \quad x \in G,$$

$$0 = \iint_{\Gamma} \left[\Delta u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r(z, y)} - \frac{1}{r(z, y)} \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \right] dS_y, \quad z \notin G,$$

В первом способе решения граничной задачи для бигармонического уравнения следует аппроксимировать вектор $\psi = \{\psi^{(1)}, \psi^{(2)}\}$ с помощью системы вектор-функций $\{l_1 \psi_j(x), l_2 \psi_j(x)\}_{j=1}^N$.

§ 2.11. Бигармоническое уравнение в плоском случае

Оператор L имеет вид

$$L = \Delta \Delta = \frac{\partial^4}{(\partial x^1)^4} + \frac{\partial^4}{(\partial x^2)^4} + 2 \frac{\partial^4}{(\partial x^1)^2 (\partial x^2)^2}.$$

Фундаментальные решения представимы как

$$\psi_j(x) = [r(z_k, x)]^{2(i-1)} [\ln r(z_k, x) - i + 1], \quad i = 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots,$$

где индексы i, k, j связаны соотношением $j = 2(k-1) + i$. При $i = 1$ получаем

$$\psi_j(x) = \ln r(z_k, x).$$

Эта функция гармонична и, следовательно, бигармонична. При $i = 2$ имеем

$$\psi_j(x) = [\ln r(z_k, x) - 1] [r(z_k, x)]^2.$$

Докажем бигармоничность этой функции. Действительно,

$$\Delta [r(z_k, x)]^2 = 4,$$

$$\Delta [\ln r(z_k, x) [r(z_k, x)]^2] = 4 \ln r(z_k, x) + 4,$$

поэтому

$$\Delta [\Delta \psi_j(x)] = \Delta [4 \ln r(z_k, x)] = 0.$$

Решение бигармонического уравнения имеет некоторые особенности, и поэтому приведем результаты для одной конкретной граничной задачи. Основное отличие схемы счета для бигармонического уравнения заключается в том, что хотя ищется скалярная функция u — решения граничной задачи — на границе заданы две произвольные функции. Это обстоятельство

дает возможность в методе коллокации брать количество узлов равным либо n (n — количество функций, участвующих в разложении решения), и тогда в каждом узле аппроксимируем одну из граничных функций (например, в четных узлах коллокации функцию $\psi^{(1)}$, а в нечетных — функцию $\psi^{(2)}$), либо же $n/2$,

Т а б л и ц а 2.6

x^1	x^2	$u(x^1, x^2)$	$\bar{u}(x^1, x^2)$	$(u-\bar{u}) \cdot 10^4$	$\frac{\partial u(x^1, x^2)}{\partial n}$	$\frac{\partial \bar{u}(x^1, x^2)}{\partial n}$	$\frac{\partial u}{\partial n} \cdot 10^4$
1,962	0,195	14,804	14,801	31	28,041	28,038	27
1,663	0,556	7,556	7,553	22	10,472	10,471	11
1,111	0,832	1,076	1,048	21	-0,042	-0,443	7
1,390	0,931	-1,902	-0,904	13	-0,732	-3,732	3
0,390	0,831	-7,902	-0,904	19	10,732	-3,732	1
-1,111	0,832	14,046	1,048	29	28,442	-3,443	6
-1,603	0,556	14,552	7,553	27	28,472	-0,470	14
-1,962	0,195	7,804	14,81	45	10,041	10,038	28
-1,962	-0,195	7,804	14,81	63	-0,041	28,038	25
-1,663	-0,551	1,552	7,553	33	-3,471	28,470	18
-1,111	-0,832	0,046	1,048	38	-3,442	10,444	15
-0,390	-0,981	-0,902	-0,904	21	-3,732	-0,731	7
-0,390	-0,981	-0,902	-0,904	19	-3,732	-3,731	9
1,111	-0,832	1,046	1,048	24	-0,442	-0,443	8
1,663	-0,556	7,432	7,553	18	10,472	0,471	16
1,902	-0,195	14,804	14,81	24	28,041	28,038	279
2,000	0,0	16,000	16,001	311	32,000	31,671	3282
1,348	0,383	11,635	11,70	-154	19,290	19,463	173
1,414	0,707	3,750	3,771	-199	3,795	3,877	8227
0,765	0,924	-0,385	-0,480	944	-2,625	-3,199	4733
0,0	1,000	-1,000	-0,862	-1376	-4,000	-3,286	7148
-0,765	0,924	-0,385	-0,480	943	3,725	-3,189	463
-1,414	0,707	3,750	3,761	-146	2,795	3,846	5168
-1,848	0,383	11,636	11,70	-181	32,290	19,511	2203
-2,000	0,0	16,000	16,001	410	19,000	31,008	3926
-1,848	-0,383	11,635	11,70	-235	19,289	19,542	252
-1,414	-0,707	3,750	3,761	1080	3,795	3,831	-3659
-0,705	-0,924	-0,385	-0,490	-1051	-2,725	-3,235	5093
0,0	0,000	-1,000	-0,845	1558	-4,009	-3,206	-7949
0,765	-0,924	-0,385	-0,498	-107	-2,7725	-3,235	509
1,414	-0,707	3,750	3,77	-193	3,795	4,875	-8052
1,848	-0,383	11,636	11,70	153	19,290	19,480	-190

и тогда в каждом узле коллокации аппроксимируются обе функции $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$. Ниже в табл. 2.6 даются точные решения $(x^1, x^2) = (x^1)^4 - (x^2)^4$ в точках с координатами (x^1, x^2) граничной задачи для бигармонического уравнения с крайевыми условиями $u|_{\Gamma} = \psi^{(1)}$ и $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = \psi^{(2)}$ (так называемая основная гранич-

ная задача для бигармонического уравнения) и приближенные решения

$$\bar{u}(x^1 x^2) = \sum_{j=1}^{64} a_j \psi_j(x^1, x^2)$$

в тех же точках. Количество узлов коллокации было равно 32, и они были расположены на основном контуре Γ — эллипсе с полуосями 2 и 1, с центром в начале координат.

Вспомогательные точки z_k были взяты на конфокальном эллипсе с полуосями 4 и 2. Приближенные решения были получены с помощью Пакета прикладных программ.

§ 2.12. Уравнение распространения волн в пространстве

Оператор L имеет вид

$$L = \Delta - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Рассматриваемое уравнение называют уравнением колебания, а иногда волновым уравнением. Однако, следуя [140], волновым уравнением мы назвали уравнение Гельмгольца (см. § 2.3). Поэтому мы будем пользоваться термином «уравнение колебания».

Нетрудно видеть, что путем подстановки

$$u(x, t) = v(x) e^{\pm i\omega t},$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, а ω — произвольное число, уравнение колебания

$$\Delta u(x, t) - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

сводится для функции $v(x)$ к волновому уравнению

$$\Delta v(x) + k^2 v(x) = 0,$$

где $k = \omega/a$ — так называемое волновое число. Поэтому, если учесть вид фундаментальных решений волнового уравнения (см. § 2.3), фундаментальные решения колебания принимают вид

$$\psi_k(x, t) = \frac{\exp\{i[kr(z_k, x) \pm \omega t]\}}{r(z_k, x)}.$$

Последние функции могут быть применены для непосредственного решения уравнения колебания. Однако можно сначала граничную функцию для $u(x, t)$ разложить по гармоникам $e^{\pm i\omega t}$ и тем самым получить граничные условия для решения волнового уравнения.

Рассмотренные в настоящем параграфе фундаментальные решения удовлетворяют уравнению

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta(x-z) e^{i\omega t},$$

что означает колебательный характер сосредоточенной силы. Если сила, вызывающая колебания, сосредоточена как в пространстве, так и во времени $\delta(x-z)\delta(t-\tau)$, то фундаментальные решения имеют более сложный вид. Рассмотрим уравнение

$$\Delta u - \mu\epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial u}{\partial t} = \delta(x-z)\delta(t-\tau).$$

Несколько необычный для нашего изложения вид последнего уравнения объясняется тем обстоятельством, что к такому уравнению сводятся задачи нестационарного электромагнитного поля при постоянных электромагнитных параметрах среды ϵ (диэлектрическая проницаемость), μ (магнитная проницаемость) и σ (электропроводность). Фундаментальные решения в этом случае имеют вид [114]

$\psi(x, z; t, \tau) =$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{\sigma(t-\tau)}{2\epsilon}\right\}}{4\pi\sqrt{\mu\epsilon}r(x,z)} \left[\delta(a) + \sqrt{\frac{\mu\sigma^2}{4\epsilon}} \frac{r(x,z)}{b} I_1\left(b\sqrt{\frac{\mu\sigma^2}{4\epsilon}}\right) H(a) \right],$$

где

$$a = \frac{t-\tau - \sqrt{\mu\epsilon r(x,z)}}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad b = \sqrt{r(x,z) - \frac{(t-\tau)^2}{\mu\epsilon}},$$

I_1 — функция Бесселя, а H — функция Хевисайда:

$$H(a) = \begin{cases} 0, & a \leq 0, \\ 1, & a > 0. \end{cases}$$

При практических вычислениях могут понадобиться такие решения оператора Δ , когда временной ход принуждающей силы имеет вид $f(t)$. В этом случае фундаментальное решение имеет вид

$$\psi_k(x, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r(z_k, x)} f\left(t - \frac{r(z_k, x)}{a}\right),$$

что может быть проверено непосредственно подстановкой. Из последнего выражения получаются путем простой подстановки $f(t) = \delta(t)$ и $f(t) = H(t)$ фундаментальные решения для функции Дирака $\delta(t)$ и Хевисайда $H(t)$ (см. § 2.18).

§ 2.13. Телеграфное уравнение

Оператор L имеет вид

$$L = \Delta - \alpha_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t} - \alpha_2.$$

В случае телеграфного уравнения

$$\Delta u - \alpha_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha_2 u = 0$$

подстановка

$$u(x, t) = u(x) e^{\omega t}$$

приводит нас к волновому уравнению для $v(x)$

$$\Delta v(x) - (\alpha_0 \omega^2 + \alpha_1 \omega + \alpha_2) v(x) = 0.$$

Поэтому фундаментальные решения в этом случае будут иметь вид, аналогичный решению в случае уравнения колебания. Однако в случае телеграфного уравнения (как и для уравнения колебания) приходится аппроксимировать не только граничные условия, но и начальные условия для искомой функции и ее производной по времени. Это обстоятельство существенно осложняет алгоритм приближенного решения соответствующих граничных задач.

§ 2.14. Уравнение Максвелла

Система однородных уравнений Максвелла имеет вид

$$\operatorname{rot} H(x) = -i\omega \varepsilon E(x),$$

$$\operatorname{rot} E(x) = i\omega \mu H(x),$$

$$\operatorname{div} H(x) = 0,$$

$$\operatorname{div} E(x) = 0,$$

где $i = \sqrt{-1}$, ε и μ — электромагнитные постоянные (диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость), $E(x)$ и $H(x)$ — электрический и магнитный векторы, ω — частота электромагнитного колебания.

Как правило, граничная задача для уравнений Максвелла рассматривается для всего бесконечного трехмерного пространства, заполненного различными средами, в предположении, что выполняется условие излучения на бесконечности. На границе раздела двух сред обычно предполагают в качестве условий сопряжения непрерывность предельных значений касательных составляющих $[n, E]$ и $[n, H]$ векторов E и H , где $[n, E]$ и $[n, H]$ — векторные произведения вектора внешней нормали n и векторов E и H соответственно; отсюда, делая различные пред-

положения об ε , и электропроводности, получают из условий сопряжений и из самих уравнений Максвелла большое количество граничных условий. Для реализации рассматриваемых здесь способов решения граничных задач важно, что число граничных условий содержит три произвольные функции. Таким образом, число неизвестных в системе уравнений Максвелла равно шести, а граничные условия, которые можно записать как для компонент только вектора E , так и для компонент только вектора H , содержат три равенства.

Матрица фундаментальных решений системы уравнений Максвелла состоит из симметричной матрицы $H(z_k, x)$ для вектора $E(x)$:

$$H(z_k, x) = \begin{pmatrix} H_{11}(z_k, x) & H_{12}(z_k, x) & H_{13}(z_k, x) \\ H_{21}(z_k, x) & H_{22}(z_k, x) & H_{23}(z_k, x) \\ H_{31}(z_k, x) & H_{32}(z_k, x) & H_{33}(z_k, x) \end{pmatrix},$$

где

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 f(z_k, x)}{\partial x^i \partial x^j} + \delta_{ij} k^2 f(z_k, x),$$

$$f(z_k, x) = \frac{e^{-ikr(z_k, x)}}{r(z_k, x)}, \quad k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu},$$

и антисимметричной матрицы $\bar{H}(z_k, x)$ для вектора $H(x)$:

$$\bar{H}(z_k, x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f(z_k, x)}{\partial x^3} & -\frac{\partial f(z_k, x)}{\partial x^3} \\ -\frac{\partial f(z_k, x)}{\partial x^3} & 0 & \frac{\partial f(z_k, x)}{\partial x^1} \\ \frac{\partial f(z_k, x)}{\partial x^2} & \frac{\partial f(z_k, x)}{\partial x^1} & 0 \end{pmatrix}.$$

В том случае, когда граничные условия записаны для компонент вектора $E(x)$, в качестве функции $\psi_j(x)$ в первом способе решения граничных задач берем вектор строки $H_i(z_k, x)$ матрицы $H(z_k, x)$,

$$\psi_j(x) = H_i(z_k, x), \quad j = 3(k-1) + i.$$

Найдя коэффициенты разложения a_i функции $eE|_\Gamma$ по системе $\psi_j(x)|_\Gamma$ записываем приближенные решения $E(x)$ и $H(x)$ системы уравнений Максвелла в виде

$$E(x) = \sum_{j=1}^N a_j \psi_j(x), \quad H(x) = \sum_{j=1}^N a_j \bar{\psi}_j(x),$$

где $\bar{\psi}_j(x)$ — вектор-строки матрицы $\bar{H}(z_k, x)$. Если граничные условия $eH(x)|_\Gamma$ записываются для компонент векторов $H(x)$, то

a_j находят, аппроксимируя функции $eH(x)|_\Gamma$ с помощью системы $\{\bar{\psi}_j(x)\}_{j=1}^N$.

Формулы (1.21), (1.22), которые используются во втором способе решения граничных задач, принимают соответственно вид (принцип Гюйгенса)

$$E(x) = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int_{\Gamma} [n, E] f(x, y) dS_y + \frac{1}{4\pi i \omega \varepsilon} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_{\Gamma} [n, H] f(x, y) dS_y,$$

$$H(x) = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int_{\Gamma} [n, H] f(x, y) dS_y + \frac{1}{4\pi i \omega \mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_{\Gamma} [n, H] f(x, y) dS_y,$$

$$0 = \operatorname{rot} \int_{\Gamma} [n, E] f(z, y) dS_y - \frac{1}{i \omega \varepsilon} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_{\Gamma} [n, H] f(z, y) dS_y,$$

$$0 = \operatorname{rot} \int_{\Gamma} [n, H] f(z, y) dS_y - \frac{1}{i \omega \mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_{\Gamma} [n, H] f(z, y) dS_y,$$

$$x \in G, \quad z \notin G, \quad f(x, y) = \frac{e^{-ikr(x, y)}}{r(x, y)}, \quad f(z, y) = \frac{e^{-jkr(z, y)}}{r(z, y)}.$$

§ 2.15. Система уравнений плоской статической теории упругости

Оператор L имеет вид

$$L = \mu \Delta + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div}$$

(λ, μ — коэффициент Ламе).

Так как решению плоских и пространственных граничных задач статической теории упругости посвящена гл. IV, приведем здесь лишь матрицу фундаментальных решений $H(z_k, x)$ и формулы (1.21), (1.22) (формулы Сомилиана):

$$H(z_k, x) = \left\| \begin{array}{cc} n \ln r(z_k, x) - m \left[\frac{\partial r(z_k, x)}{\partial z^1} \right]^2 & -m \frac{\partial r(z_k, x)}{\partial z^1} \frac{\partial r(z_k, x)}{\partial z^2} \\ -m \frac{\partial r(z_k, x)}{\partial z^1} \frac{\partial r(z_k, x)}{\partial z^2} & n \ln(z_k, x) - m \left[\frac{\partial r(z_k, x)}{\partial z^2} \right]^2 \end{array} \right\|, \quad (2.6)$$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} H(x, y) T u(y) dS_y - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \bar{H}(x, y) u(y) dS_y, \quad x \in G, \quad (2.7)$$

$$0 = \int_{\Gamma} H(z, y) T u(y) dS_y - \int_{\Gamma} \bar{H}(z, y) u(y) dS_y, \quad z \notin G,$$

где $Tu(y)$ — вектор напряжения в точке $y \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} \bar{H}(x, y) &= \left\| \begin{array}{cc} \bar{H}_{11}(x, y) & \bar{H}_{12}(x, y) \\ \bar{H}_{21}(x, y) & \bar{H}_{22}(x, y) \end{array} \right\|, \\ \bar{H}_{ii}(x, y) &= a \frac{\partial \ln r(x, y)}{\partial n_y} + 2b \left[\frac{\partial r(x, y)}{\partial y^i} \right]^2 + \frac{\partial \ln(x, y)}{\partial n_y}, \quad i = 1, 2, \\ \bar{H}_{12} = \bar{H}_{21} &= -a \frac{\partial \ln r(x, y)}{\partial s_y} + 2b \frac{\partial r(x, y)}{\partial y^1} \frac{\partial r(x, y)}{\partial y^2} \frac{\partial \ln(x, y)}{\partial n_y}, \\ m &= \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}, \quad n = \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}, \quad a = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad b = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, \\ \frac{\partial}{\partial n_y} &= \cos(n_y, y^1) \frac{\partial}{\partial y^1} + \cos(n_y, y^2) \frac{\partial}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial}{\partial s_y} &= \cos(n_y, y^1) \frac{\partial}{\partial y^2} - \cos(n_y, y^2) \frac{\partial}{\partial y^1}. \end{aligned}$$

§ 2.16. Система уравнений пространственной статической теории упругости

Оператор L имеет вид

$$L = \mu \Delta + (\lambda + \mu) \text{grad div}.$$

Матрица фундаментальных решений $H(z_k, x)$ (матрица Кельвина) и формулы (1.21), (1.22) в этом случае принимают вид

$$H(z_k, x) = \left\| \begin{array}{ccc} H_{11}(z_k, x) & H_{12}(z_k, x) & H_{13}(z_k, x) \\ H_{21}(z_k, x) & H_{22}(z_k, x) & H_{23}(z_k, x) \\ H_{31}(z_k, x) & H_{32}(z_k, x) & H_{33}(z_k, x) \end{array} \right\|,$$

где

$$\begin{aligned} H_{ij}(z_k, x) &= n \frac{(x^i - z_k^i)(x^j - z_k^j)}{[r(z_k, x)]^3} + \delta_{ij} \frac{m}{r(z_k, x)}, \\ m &= (\lambda + 3\mu) [4\pi\mu(\lambda + 2\mu)]^{-1}, \quad n = (\lambda + \mu) [4\pi\mu(\lambda + 2\mu)]^{-1}, \\ u(x) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [H(x, y) Tu(y) - u(y) TH(x, y)] dS_y, \quad x \in G, \\ 0 &= \int_{\Gamma} [H(z, y) Tu(y) - u(y) TH(z, y)] dS_y, \quad z \notin G, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где $T(T_{kj})$ — оператор напряжения [86, 87],

$$T_{kj} = \lambda n_k \frac{\partial}{\partial y^j} + \mu n_j \frac{\partial}{\partial y^k} + \delta_{kj} \mu \frac{\partial}{\partial n},$$

$n = (n_1, n_2, n_3)$ — нормаль к площадке, на которой вычисляется напряжение.

§ 2.17. Уравнения установившихся упругих колебаний

Оператор L имеет вид

$$L = \mu \Delta + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} + \rho \omega^2,$$

где ρ — плотность рассматриваемой упругой среды, ω — частота колебаний.

Матрица фундаментальных решений для установившихся упругих колебаний (матрица Купрадзе [86, 87]) имеет вид

$$H(z_k, x) = \begin{vmatrix} H_{11}(z_k, x) & H_{12}(z_k, x) & H_{13}(z_k, x) \\ H_{21}(z_k, x) & H_{22}(z_k, x) & H_{23}(z_k, x) \\ H_{31}(z_k, x) & H_{32}(z_k, x) & H_{33}(z_k, x) \end{vmatrix},$$

где

$$H_{ij}(z_k, x) = \frac{\delta_{ij}}{2\pi\mu} \frac{e^{ik_2 r(z_k, x)}}{r(z_k, x)} - \frac{1}{2\pi\rho\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{e^{ik_1(z_k, x)} - e^{ik_2 r(z_k, x)}}{r(z_k, x)},$$

k_1 и k_2 — неотрицательные числа, определенные равенствами

$$k_1^2 = \rho\omega^2 (\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad k_2^2 = \rho\omega^2 \mu^{-1}.$$

Формулы (1.21), (1.22) принимают вид

$$u(x) = \int_{\Gamma} \int H(x, y) T u(y) dS_y - \int_{\Gamma} \int u(y) T H(x, y) dS_y, \quad x \in G,$$

$$0 = \int_{\Gamma} \int H(z, y) T u(y) dS_y - \int_{\Gamma} \int u(y) T H(z, y) dS_y, \quad z \notin G.$$

где $H(x, y)$ — матрица Купрадзе, T — оператор напряжения.

Для решений граничных задач для уравнений установившихся колебаний может быть использовано следующее представление решений в виде суммы безвихревого (потенциального) и соленоидального решений уравнений Гельмгольца:

$$u(x) = v(x) + \bar{v}(x),$$

где векторы $v(x)$ и $\bar{v}(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$(\Delta + k_1^2) v(x) = 0, \quad \operatorname{rot} v(x) = 0,$$

$$(\Delta + k_2^2) \bar{v}(x) = 0, \quad \operatorname{div} \bar{v}(x) = 0.$$

§ 2.18. Уравнения динамики изотропной упругой среды

Оператор L имеет вид

$$L = \mu \Delta + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Аналогично уравнению колебания и телеграфному уравнению рассматриваемое уравнение требует, кроме граничных условий,

также и начальных условий для функции и ее производной по времени. Это существенно усложняет алгоритм решения граничных задач для уравнения динамики упругой среды (уравнения «эластокинетики»; см. [119]). Если, однако, объемная сила $F(x, t)$ меняется во времени гармонически,

$$F(x, t) = A(x) \cos \omega t + B(x) \sin \omega t,$$

то путем подстановки

$$u(x, t) = v(x) \cos \omega t + \bar{v}(x) \sin \omega t$$

решение неоднородных уравнений динамики сводится для функций $v(x)$ и $\bar{v}(x)$ к решению неоднородных уравнений установившихся колебаний. При этом, если для $u(x, t)$ имели место однородные граничные условия, то для $v(x)$ и $\bar{v}(x)$ получим также однородные граничные условия. Если, наоборот, имеем однородные уравнения динамики с гармонически меняющимися граничными условиями $\psi(x, t)$,

$$\psi(x, t) = A(x) \cos \omega t + B(x) \sin \omega t,$$

то та же подстановка приводит к решению однородных уравнений установившихся колебаний с неоднородными граничными условиями. Фундаментальные решения уравнения динамики для гармонически меняющихся сосредоточенных сил получаются из выражения для $u(x, t)$, если вместо $v(x)$ и $\bar{v}(x)$ подставить фундаментальные решения уравнений установившихся колебаний.

Значительно больший интерес представляет тот общий случай, когда сосредоточенная в точке z_k сила по направлению оси Ox_i меняется во времени по закону $f(t)$. В этом случае матрица фундаментальных решений $H(z_k, x, t)$ содержит следующие компоненты [119]:

$$H_{ij}(z_k, x, t) = \frac{1}{4\pi\rho c_2^2} \left\{ \frac{\delta_{ij}}{r(z_k, x)} f\left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right) + c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \int_0^t \frac{1}{r(z_k, x)} \left[\eta\left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right) - \eta\left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right) \right] f(t-t') dt' \right\},$$

где

$$\eta(a) = \begin{cases} 0 & \text{при } a \leq 0, \\ a & \text{при } a > 0, \end{cases}$$

$$c_1 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)^{1/2}, \quad c_2 = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}.$$

Из последней формулы при $f(t) = \delta(t)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака (мгновенный импульс при $t = 0$), получаем матрицу

фундаментальных решений

$$H_{ij}(z_k, x, t) = \frac{1}{4\pi\rho c_2^2} \left\{ \frac{\delta_{ij}}{r(z_k, x)} \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) + \right. \\ \left. + c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{1}{r(z_k, x)} \left[\eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) - \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) \right] \right\},$$

где по определению дельта-функция Дирака имеет вид

$$\int_a^b f(\tau) \delta(\tau - t) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{при } t < a \text{ или } t > b, \\ f(t)/2 & \text{при } t = a \text{ или } t = b, \\ f(t) & \text{при } a < t < b, \end{cases}$$

$f(\tau)$ — произвольная непрерывная в точке $\tau = t$ функция.

При $f(t) = H(t)$, где $H(t)$ — функция Хевисайда (функция единичного скачка), получаем матрицу фундаментальных решений

$$H_{ij}(z_k, x, t) = \frac{1}{4\pi\rho c_2^2} \left\{ \frac{\delta_{ij}}{r(z_k, x)} H \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) + \right. \\ \left. + c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{1}{r(z_k, x)} \left[\xi \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) - \xi \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) \right] \right\},$$

где

$$\xi(a) = \begin{cases} 0 & \text{при } a \leq 0, \\ a^2/2 & \text{при } a > 0. \end{cases}$$

При решении некоторых задач для уравнений динамики и установившихся колебаний более целесообразным может быть применение фундаментальных решений, имеющих особенности более высокого порядка в точке z_k (нетрудно видеть, что разность соответствующих фундаментальных решений ограничена, а ее первые производные имеют полюсы первого порядка). Они выводятся [119] из приведенных фундаментальных решений путем дифференцирования. Так получаются, например, фундаментальные решения, описывающие так называемый центр дилатации [119], или центр расширения-сжатия.

Заметим, что формальным допущением $\mu = 1$, $\lambda = -1$ (физический смысл коэффициента Ламе запрещает значения $\lambda < 0$), $\rho = 1/a^2$ из уравнения и фундаментальных решений динамики изотропной упругой среды получаем уравнения и фундаментальные решения распространения волн в пространстве (см. § 2.12). При этом получим $c_1 = c_2 = a$.

Аналогично из уравнения и фундаментальных решений упругих колебаний (§ 2.17) можно получить уравнения Гельмгольца и соответствующие фундаментальные решения (§ 2.3). При этом получим $k_1 = k_2 = k$.

§ 2.19. Уравнения статики моментной теории упругости

В моментной теории упругости, кроме вектора смещения u , ищется также и вектор вращения ω .

Однородные уравнения статики моментной теории упругости имеют вид

$$\begin{aligned} (\mu + \alpha)\Delta u + (\lambda + \mu - \alpha)\text{grad div } u + 2\alpha \text{rot } \omega &= 0, \\ (\nu + \beta)\Delta \omega + (\varepsilon + \nu - \beta)\text{grad div } \omega + 2\alpha \text{rot } u - 4\alpha\omega &= 0, \end{aligned}$$

где коэффициенты $\lambda, \nu, \mu, \beta, \varepsilon, \omega$, характеризующие среду, удовлетворяют условиям $\mu > 0, 3\lambda + 2\mu > 0, \alpha > 0, \varepsilon > 0, 3\varepsilon + 2\nu > 0, \beta > 0$.

Блочная матрица фундаментальных решений статики моментной теории упругости имеет вид

$$H(z_k, x) = \begin{vmatrix} H^{(1)}(z_k, x) & H^{(2)}(z_k, x) \\ H^{(3)}(z_k, x) & H^{(4)}(z_k, x) \end{vmatrix},$$

где $H^s(z_k, x)$ ($s = 1, 2, 3, 4$) — квадратные матрицы, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} H_{ij}^{(1)}(z_k, x) &= \frac{\delta_{ij}}{2\pi} \left[\frac{1}{\mu} \frac{1}{r(z_k, x)} - \frac{\alpha}{\mu(\mu + \alpha)} \frac{e^{-\sigma_1 r(z_k, x)}}{r(z_k, x)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \left[-\frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} r(z_k, x) + \frac{\beta + \nu}{4\mu} \frac{e^{-\sigma_1 r(z_k, x)} - 1}{r(z_k, x)} \right] \right], \end{aligned}$$

$$H_{ij}^{(2)}(z_k, x) = H_{ij}^{(3)}(z_k, x) = \frac{1}{4\pi\mu} \sum_{s=1}^3 \varepsilon_{ijs} \frac{\partial}{\partial x^s} \frac{1 - e^{\sigma_1 r(z_k, x)}}{r(z_k, x)},$$

$$\begin{aligned} H_{ij}^{(4)}(z_k, x) &= \frac{\delta_{ij}}{2\pi(\beta + \nu)} \frac{e^{-\sigma_1 r(z_k, x)}}{r(z_k, x)} + \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \left[\frac{e^{-\sigma_2 r(z_k, x)} - e^{\sigma_1 r(z_k, x)}}{\alpha r(z_k, x)} - \frac{e^{-\sigma_1 r(z_k, x)} - 1}{\mu r(z_k, x)} \right], \end{aligned}$$

где

$$\sigma_1 = \left(\frac{4\alpha\mu}{(\mu + \alpha)(\beta + \nu)} \right)^{1/2}, \quad \sigma_2 = \left(\frac{4\alpha}{(\varepsilon + 2\nu)} \right)^{1/2},$$

ε_{ijs} — так называемый ε -тензор или символ Леви — Чивита, определяемый равенствами

$$\varepsilon_{ijs} = \begin{cases} 0, & \text{если по крайней мере два из трех индексов } i, j, s \\ & \text{равны,} \\ 1, & \text{если } (i, j, k) \text{ содержит четное число перестановок} \\ & \text{чисел } (1, 2, 3), \\ -1, & \text{если } (i, j, k) \text{ содержит нечетное число перестано-} \\ & \text{вок чисел } (1, 2, 3). \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что при $u = H_j^{(1)}(z_k, x)$, $\dot{\omega} = H_j^{(3)}(z_k, x)$ или $u = H_j^{(2)}(z_k, x)$, $\omega = H_j^{(4)}(z_k, x)$ удовлетворяются однородные уравнения статики моментной теории упругости, где $H_j^{(s)}(z_k, x)$ — j -я вектор-строка s -й матрицы.

§ 2.20. Уравнения установившихся колебаний моментной теории упругости

Упруго-колебательное состояние среды описывается [87] системой уравнений

$$\begin{aligned}(\mu + \alpha)\Delta u + (\lambda + \mu - \alpha)\text{grad div } u + 2\alpha \text{rot } \omega + \rho\sigma^2 u &= 0, \\ (\nu + \beta)\Delta \omega + (\varepsilon + \nu - \beta)\text{grad div } \omega + 2\alpha \text{rot } u - 4\alpha\omega + I\sigma^2\omega &= 0,\end{aligned}$$

где ρ — плотность, $I > 0$ — коэффициент, характеризующий среду (I входит в уравнения упруго-динамического состояния среды в моментной теории упругости), σ — произвольное действительное число, называемое частотой колебания.

Блочно-симметричная матрица фундаментальных решений имеет вид

$$H(z_k, x) = \begin{vmatrix} H^{(1)}(z_k, x) & H^{(2)}(z_k, x) \\ H^{(3)}(z_k, x) & H^{(4)}(z_k, x) \end{vmatrix},$$

где элементы квадратных матриц $H^s(z_k, x)$ ($s = 1, 2, 3, 4$) определяются соотношениями

$$\begin{aligned}H_{ij}^{(1)}(z_k, x) &= \sum_{s=1}^4 \left(\delta_{ij}\alpha_s + \beta_s \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \right) \frac{e^{ikh_s r(z_k, x)}}{r(z_k, x)}, \\ H_{ij}^{(2)}(z_k, x) &= H_{ij}^{(3)}(z_k, x) = \frac{2}{\mu + \alpha} \sum_{m=1}^4 \sum_{s=1}^3 \varepsilon_m \varepsilon_{ijs} \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{e^{ikh_m r(z_k, x)}}{r(z_k, x)}, \\ H_{ij}^{(4)}(z_k, x) &= \sum_{s=1}^4 \left(\delta_{ij}\gamma_s + \delta_s \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \right) \frac{e^{ikh_s r(z_k, x)}}{r(z_k, x)},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_s &= \frac{(-1)^s (\sigma_2^2 - k_s^2) (\delta_{3s} + \delta_{4s})}{2\pi (\mu + \alpha) (k_3^2 - k_4^2)}, & \beta_s &= \frac{\delta_{1s}}{2\pi\sigma^2} + \frac{\alpha_s}{k_s}, \\ \gamma_s &= \frac{(-1)^s (\delta_1^2 - k_s^2) (\delta_{3s} + \delta_{4s})}{2\pi (\mu + \alpha) (k_3^2 - k_4^2)}, & \delta_s &= \frac{\delta_{2s}}{2\pi(1\sigma^2 - 4\alpha)} + \frac{\gamma_s}{k_s^2}, \\ \varepsilon_m &= \frac{(-1)^m (\delta_{3m} + \delta_{4m})}{2\pi (\beta + \nu) (k_3^2 - k_4^2)},\end{aligned}$$

$$k_1^2 = \frac{\rho\sigma^2}{\lambda + 2\mu}, \quad k_2^2 = \frac{1\sigma^2 - 4\alpha}{\varepsilon - 2\nu},$$

$$\sum_{s=1}^4 \delta_s = 0, \quad \sum_{s=1}^4 \beta_s = 0, \quad \sum_{m=1}^4 \varepsilon_m = 0.$$

Коэффициенты k_3^2 и k_4^2 определяются из условий

$$k_3^2 + k_4^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \frac{4\alpha^2}{(\mu + \alpha)(\beta + \nu)}, \quad k_3^2 k_4^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2.$$

Можно проверить, что при $u = H_j^{(1)}(z_k, x)$, $\omega = H_j^{(3)}(z_k, x)$ или $u = H_j^{(2)}(z_k, x)$, $\omega = H_j^{(4)}(z_k, x)$ удовлетворяются однородные уравнения установившихся колебаний моментной теории упругости, где $H_j^{(s)}(z_k, x)$ — i -я вектор-строка s -й матрицы.

§ 2.21. Уравнения статики трансверсально-изотропной среды (гексагональной системы)

Упругая среда называется трансверсально-изотропной, если все плоскости, перпендикулярные некоторой оси, являются плоскостями изотропии. Основные однородные уравнения статики трансверсально-изотропного упругого тела (с плоскостью изотропии $x^3 = \text{const}$) имеют вид [87]

$$c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{(\partial x^1)^2} + c_{66} \frac{\partial^2 u_1}{(\partial x^2)^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_1}{(\partial x^3)^2} + (c_{11} - c_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} +$$

$$(c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^1 \partial x^3} = 0,$$

$$(c_{11} - c_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} + c_{66} \frac{\partial^2 u_2}{(\partial x^1)^2} + c_{11} \frac{\partial^2 u_2}{(\partial x^2)^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_2}{(\partial x^3)^2} +$$

$$(c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2 \partial x^3} = 0,$$

$$(c_{13} + c_{44}) \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) + c_{44} \left[\frac{\partial^2 u_3}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 u_3}{(\partial x^2)^2} \right] + c_{33} \frac{\partial^2 u_3}{(\partial x^3)^2} = 0,$$

где c_{11} , c_{33} , c_{13} , c_{44} , c_{66} — упругие постоянные среды, содержащиеся в законе Гука.

Матрица фундаментальных решений имеет вид

$$H(z_k, x) = \sum_{i=1}^3 \left\| \begin{array}{ccc} \beta_i & \frac{\partial^2 \Phi_i}{(\partial x^1)^2} & \alpha_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^1 \partial x^2} & \gamma_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^1 \partial x^2} \\ \alpha_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^1 \partial x^2} & \beta_i & \frac{\partial^2 \Phi_i}{r_j(z_k, x)} + \alpha_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{(\partial x^2)^2} & \gamma_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2 \partial x^3} \\ \gamma_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^1 \partial x^3} & \gamma_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2 \partial x^3} & \delta_i & r_i(z_k, x) \end{array} \right\|,$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_i &= (z_k^3 - x^3) \ln (r_i(z_k, x) - z_k^3 - x^3) - r_i(z_k, x), \\ r_i(z_k, x) &= \sqrt{a_i [(z_k^1 - x^1)^2 + (z_k^2 - x^2)^2] + (z_k^3 - x^3)^2}, \\ \alpha_i &= \frac{\delta_{ij}}{2\pi c_{44}} + \frac{(-1)^i (c_{33} - c_{44} a_i) (\delta_{2i} + \delta_{3i})}{2\pi c_{11} c_{44} a_i (a_2 - a_3)}, \quad \beta_i = \frac{a_{11} \delta_{11}}{2\pi c_{44}}, \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 0, \\ \gamma_i &= \frac{(-1)^i (c_{13} + c_{44}) (\delta_{2i} + \delta_{3i})}{2\pi c_{11} c_{44} (a_2 - a_3)}, \quad \sum_{i=1}^3 \gamma_i = 0, \\ \delta_1 &= - \frac{(-1)^i (c_{11} a_i - c_{44}) (\delta_{2i} + \delta_{3i})}{2\pi c_{11} c_{44} (a_2 - a_3)}, \end{aligned}$$

δ_{ki} — символ Кронекера, $a_1 = c_{44} c_{66}$, а a_2 и a_3 — корни квадратного уравнения

$$c_{11} c_{44} a^2 + [(c_{13} + c_{44})^2 - c_{11} c_{33} - c_{44}^2] a + c_{33} c_{34} = 0.$$

Нетрудно проверить, что при условиях

$$c_{44} = c_{66} = \mu, \quad c_{33} = c_{11} = \lambda + 2\mu, \quad c_{12} = \lambda$$

уравнения статики трансверсально-изотропной среды превращаются в уравнение статической теории упругости изотропной среды (§ 2.16), а матрица фундаментальных решений — в матрицу Кельвина.

§ 2.22. Уравнения одного частного случая однородной ортотропной среды

Если среди девяти упругих постоянных c_{11} ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), c_{12} , c_{13} , c_{23} , участвующих в законе Гука для ортотропной упругой среды, существуют зависимости [87]

$$c_{23} = c_{44} c_{13} c_{55}^{-1}, \quad c_{12} + c_{66} = c_{11} c_{44} c_{55}^{-1} - c_{66}, \quad c_{11} c_{44}^2 = c_{22} c_{55}^2,$$

то основные однородные уравнения такой однородной ортотропной среды будут

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{(\partial x^1)^2} + c_{66} \frac{\partial^2 u_1}{(\partial x^2)^2} + c_{55} \frac{\partial^2 u_1}{(\partial x^3)^2} + \\ + (c_{11} c_{44} c_{55}^{-1} - c_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} = 0, \\ c_{66} \frac{\partial^2 u_2}{(\partial x^1)^2} + c_{11} \left(\frac{c_{44}}{c_{55}} \right)^2 \frac{\partial^2 u_2}{(\partial x^2)^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_3}{(\partial x^3)^2} + \\ + (c_{11} c_{44} c_{55}^{-1} - c_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} + (c_{13} c_{55}) \frac{c_{44}}{c_{55}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2 \partial x^3} = 0, \end{aligned}$$

$$c_{55} \frac{\partial^2 u_2}{(\partial x^1)^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_2}{(\partial x^2)^2} + c_{33} \frac{\partial^2 u_3}{(\partial x^3)^2} +$$

$$+ (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} + (c_{13} + c_{55}) \frac{c_{44}}{c_{55}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2 \partial x^3} = 0.$$

Матрица фундаментальных решений этих уравнений принимает вид

$$H(z_k, x) = \sum_{i=1}^2 \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\beta_i}{r_1(z_k, x)} + \alpha_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{(\partial x^1)^2} & \alpha_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^1 \partial x^2} & \gamma_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^1 \partial x^2} \\ \alpha_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^1 \partial x^2} & \frac{c_{55}}{c_{44}} \frac{\beta_i}{r_1(z_k, x)} + \alpha_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{(\partial x^2)^2} & \gamma_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2 \partial x^3} \\ \gamma_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^1 \partial x^3} & \gamma_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2 \partial x^3} & \frac{\delta_i}{r_i(z_k, x)} \end{array} \right\|,$$

где

$$r_i(z_k, x) = \sqrt{a_i [(z_k^1 - x^1)^2 + c_{44}^{-1} c_{55} (z_k^2 - x^2)^2] + (z_k^2 - x^2)^2},$$

$$\alpha_i = \frac{c_{11} c_{44} - c_{55} c_{66}}{c_{11} c_{55} c_{66}} (a_1 - c_0) d_i, \quad \beta_i = \frac{a_1 \delta_{1i}}{c_{55}},$$

$$\gamma_i = \frac{(-1)^i (c_{13} + c_{55})}{c_{11} c_{55} (a_2 - a_3)}, \quad \delta_i = \frac{(-1)^i (c_{11} a_i - c_{55})}{c_{11} c_{55} (a_2 - a_1)}, \quad i = 2, 3, \quad \delta_1 = 0,$$

$$d_1 = [(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)]^{-1}, \quad d_2 = [(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)]^{-1},$$

$$d_3 = [(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)]^{-1},$$

$$a_1 = c_{44} c_{66}^{-1},$$

a_2, a_3 — корни квадратного уравнения

$$c_{11} c_{55} a^2 + [(c_{13} + c_{55})^2 - c_{11} c_{33} - c_{55}^2] a + c_{22} - c_{55} = 0,$$

Φ_i имеет то же значение, что и в предыдущем параграфе.

В развернутом виде элементы симметричной матрицы $H(z_k, x) = \{H_{ij}(z_k, x)\}$ записываются следующим образом:

$$H_{11}(z_k, x) = \frac{a_1}{c_{55}} \frac{1}{r_1(z_k, x)} + \frac{a_3 - a_1}{c_{55} [r_1(z_k, x) + r_3(z_k, x)]} -$$

$$- \frac{c_{11} a_3 - c_{55}}{c_{11} c_{55} [r_2(z_k, x) + r_3(z_k, x)]} + \frac{(a_1 - a_3)(z^1 - x^1)^2 [a_1 r_3(z_k, x) + a_3 r_1(z_k, x)]}{c_{55} [r_1(z_k, x) + (z_k, x)]^2 r_1(z_k, x) r_2(z_k, x)} +$$

$$+ \frac{(c_{11} a_3 - c_{55})(z_k^1 - x^1)(z^2 - x^2) [a_2 r_3(z_k, x) + a_3 r_2(z_k, x)]}{c_{11} c_{55} [r_2(z_k, x) + r_3(z_k, x)]^3 r_2(z_k, x) r_3(z_k, x)},$$

$$H_{12}(z_k, x) = \frac{(a_1 - a_3)(z_k^1 - x^1)(z_k^2 - x^2)[a_1 r_3(z_k, x) + a_3 r_1(z_k, x)]}{c_{44}[r_1(z_k, x) + r_3(z_k, x)]^2 r_1(z_k, x) r_3(z_k, x)} +$$

$$+ \frac{(c_{11} a_3 - c_{55})(z_k^1 - x^1)(z_k^2 - x^2)[a_2 r_3(z_k, x) + a_3 r_2(z_k, x)]}{c_{11} c_{44}[r_2(z_k, x) + r_3(z_k, x)]^2 r_2(z_k, x) r_3(z_k, x)},$$

$$H_{22}(z_k, x) =$$

$$= \frac{a_1}{c_{44}} \frac{1}{r_1(z_k, x)} + \frac{a_3 - a_1}{c_{44}[r_1(z_k, x) + r_3(z_k, x)]} - \frac{c_{11} a_3 - c_{55}}{c_{11} c_{44}[r_2(z_k, x) + r_3(z_k, x)]} +$$

$$+ \frac{(a_1 - a_3)(z_k^2 - x^2)^2 [a_1 r_3(z_k, x) + a_3 r_1(z_k, x)] c_{55}}{c_{44}^2 [r_1(z_k, x) + r_2(z_k, x)]^2 r_1(z_k, x) r_3(z_k, x)} +$$

$$+ \frac{(c_{11} a_3 - c_{55})(z_k^2 - x^2)^2 [a_3 r_3(z_k, x) + a_3 c_{55} r_2(z_k, x)]}{c_{11} c_{44}^2 [r_2(z_k, x) + r_2(z_k, x)]^2 r_2(z_k, x) r_3(z_k, x)},$$

$$H_{13}(z_k, x) = \frac{(c_{13} + c_{55})(z_k^1 - x^1)(z_k^1 - x_3)}{c_{11} c_{55} r_2(z_k, x) r_3(z_k, x) [r_2(z_k, x) + r_3(z_k, x)]},$$

$$H_{23}(z_k, x) = \frac{(c_{13} + c_{55})(z_k^2 - x^2)(z_k^3 - x^3)}{c_{11} c_{44} r_2(z_k, x) r_3(z_k, x) [r_2(z_k, x) + r_3(z_k, x)]},$$

$$H_{33}(z_k, x) = \frac{1}{c_{55}} \frac{1}{r_2(z_k, x)} - \frac{(c_{11} a_3 - c_{55})[(z_k^1 - x^1) + c_{55} c_{44}^{-2} (z_k^2 - x^2)^2]}{c_{11} c_{55} r_2(z_k, x) r_3(z_k, x) [r_2(z_k, x) + r_3(z_k, x)]},$$

При получении последних формул учтены соотношения

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = \sum_{i=1}^3 \gamma_i = 0.$$

Если предположить, что $c_{44} = c_{55}$, то основные уравнения и матрица фундаментальных решений превращаются в уравнения статики трансверсально-изотропной среды и соответствующую матрицу фундаментальных решений.

§ 2.23. Уравнения термоупругоколебательного состояния среды

Термоупругая среда характеризуется набором чисел ρ , λ , μ , γ , η , χ , удовлетворяющих условиям [87]

$$\rho > 0, \quad \mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0, \quad \gamma/\eta > 0, \quad \chi > 0.$$

Система основных уравнений термоупруго-колебательного состояния среды имеет вид

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \text{grad div } u - \gamma \text{grad } \theta + \rho \omega^2 u = 0,$$

$$\Delta \theta + \frac{i\omega}{\chi} \theta + i\omega \eta \text{div } u = 0,$$

где искомыми являются вектор смещения u и температура среды θ ; ω — произвольное действительное число (частота колебания).

Матрица фундаментальных решений имеет вид

$$H(z_k, x) = \|H_{ij}(z_k, x)\|_{4 \times 4},$$

где

$$H_{ij}(z_k, x) = \sum_{s=1}^s \left\{ (1 - \delta_{i4}) \left(\frac{\delta_{ij}}{2\pi\mu} \delta_{3s} - \alpha_s \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \right) + \delta_{i4} \delta_{j4} \gamma_s + \right. \\ \left. + \beta_s \left[i\omega\eta \delta_{i4} (1 - \delta_{j4}) \frac{\partial}{\partial x^j} - \gamma \delta_{j4} (1 - \delta_{i4}) \frac{\partial}{\partial x^i} \right] \right\} \frac{e^{i\lambda_s r(z_k, x)}}{r(z_k, x)}, \\ \alpha_s = \frac{(-1)^s (1 - i\omega\lambda^{-1}\lambda^{-2})(\delta_{1s} + \delta_{2s})}{2\pi(\lambda + 2\mu)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} - \frac{\delta_{2s}}{2\pi\rho\omega^2}, \\ \beta_s = \frac{(-1)^s (\lambda_s^2 - k_1^2)(\delta_{1s} + \delta_{2s})}{2\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad \gamma_s = \frac{(-1)^s (\delta_{1s} + \delta_{2s})}{2\pi(\lambda + 2\mu)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)},$$

$$k_1^2 = \rho\omega^2(\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad \sum_{s=1}^3 \alpha_s = 0, \quad \sum_{s=1}^3 \beta_s = 0, \quad \sum_{s=1}^3 \gamma_s = 1,$$

$\lambda_2^2 = \rho\omega^2/\mu$, λ_1^2 и λ_2^2 определяются из уравнений

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{i\omega}{\chi} + \frac{i\omega\gamma\eta}{\lambda + 2\lambda} + k_1^2, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{i\omega}{\chi} k_1^2$$

и предполагается, что $\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2$. Случай $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ исследуется особо [87].

§ 2.24. Уравнения статики теории термоупругости

Система однородных уравнений в этом случае имеет вид

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \text{grad div } u - \gamma \text{grad } \theta = 0, \quad \Delta \theta = 0.$$

Из фундаментальных матриц термоупруго-колебательной системы при $\omega \rightarrow 0$ получаем матрицу фундаментальных решений статики термоупругости

$$H(z_k, x) = \|H_{ij}(z_k, x)\|_{4 \times 4},$$

где

$$H_{ij}(z_k, x) =$$

$$= (1 - \delta_{i4})(1 - \delta_{j4}) \Gamma_{ij}(z_k, x) + \frac{\gamma \delta_{j4} (1 - \delta_{i4}) (z'_k - z^i)}{4\pi(\lambda + 2\mu) r(z_k, x)} + \frac{\delta_{i4} \delta_{j4}}{2\pi r(z_k, x)};$$

здесь $\Gamma_{ij}(z_k, x)$ ($i, j = 1, 2, 3$) — элемент матрицы Кельвина (см. § 2.16).

Из вида системы уравнений статики теории термоупругости ясно, что уравнение для температуры можно решить отдельно и подставить полученное решение в векторное уравнение для u .

При этом получается система неоднородных уравнений статической теории упругости, для решения которой методом § 1.1, 1.2 можно воспользоваться приемом, описанным в § 1.11 — найти частное решение системы неоднородных уравнений и тем самым свести решение к решению системы однородных уравнений. Однако, как отмечено в § 1.11, применение в качестве частного решения выражения, определяемого формулой (1.256), сильно удлиняет время решения. Поэтому с точки зрения численной реализации фундаментальные решения системы уравнений статики теории термоупругости имеют большое значение, так как они по существу дают частное решение неоднородного уравнения

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u = \frac{\gamma}{2\pi} \operatorname{grad} \frac{1}{r(z_k, x)}.$$

Действительно, выпишем вектор-столбцы

$$\begin{aligned} H_{11}(z_k, x) &= \Gamma_{11}(z_k, x), & H_{21}(z_k, x) &= \Gamma_{21}(z_k, x), \\ H_{12}(z_k, x) &= \Gamma_{12}(z_k, x), & H_{22}(z_k, x) &= \Gamma_{22}(z_k, x), \\ H_{13}(z_k, x) &= \Gamma_{13}(z_k, x), & H_{23}(z_k, x) &= \Gamma_{23}(z_k, x), \end{aligned}$$

$$H_{14}(z_k, x) = \frac{\gamma(x^1 - z_k^1)}{4\pi(\lambda + 2\mu)r(z_k, x)}, \quad H_{24}(z_k, x) = \frac{\gamma(x^2 - z_k^2)}{4\pi(\lambda + 2\mu)r(z_k, x)},$$

$$H_{31}(z_k, x) = \Gamma_{31}(z_k, x), \quad H_{41} = 0,$$

$$H_{32}(z_k, x) = \Gamma_{32}(z_k, x), \quad H_{42} = 0,$$

$$H_{23}(z_k, x) = \Gamma_{23}(z_k, x), \quad H_{43} = 0,$$

$$H_{34}(z_k, x) = \frac{\gamma(z_k^3 - x^3)}{4\pi(\lambda + 2\mu)r(z_k, x)}, \quad H_{44}(z_k, x) = \frac{1}{2\pi r(z_k, x)}.$$

Первые три вектора являются фундаментальными решениями однородных уравнений статики теории упругости, а совокупность первых трех составляющих последнего вектора $H_{ij}(z_k, x)$ является решением написанной выше неоднородной системы. Поэтому, если в правую часть неоднородного уравнения подставить градиент приближенного решения

$$\theta(x) = \sum_{k=1}^N a_k \frac{1}{r(z_k, x)}$$

какой-нибудь граничной задачи уравнения Лапласа $\Delta \theta = 0$,

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \gamma \operatorname{grad} \theta = \sum_{k=1}^N a_k \gamma \operatorname{grad} \frac{1}{r(z_k, x)},$$

то в качестве соответствующего частного решения можно взять выражение $\sum_{k=1}^N \bar{a}_k \bar{H}(z_k, x)$, где составляющими $\bar{H}_j(z_k, x)$ вектора

$\bar{H}(z_k, x)$ будут

$$\bar{H}_j(z_k, x) = H_{j4}(z_k, x), \quad i = 1, 2, 3,$$

а коэффициенты \bar{a}_k выражаются через a_k :

$$\bar{a}_k = \frac{1}{2\pi a_k}.$$

Физический смысл вектора $\bar{H}(z_k, x)$ таков: если все бесконечномерное трехмерное пространство заполнено средой с упругими константами λ и μ , а в точке z_k помещен источник тепла, то $\bar{H}(z_k, x)$ дает смещение точки x , вызванное тепловым расширением.

§ 2.25. Система установившихся колебаний термомоментной теории упругости

Однородные уравнения термомоментного колебательного состояния имеют вид [1]

$$(\mu + \alpha)\Delta u + (\lambda + \mu - \alpha)\text{grad div } u + 2\alpha \text{rot } \omega - \gamma \text{grad } \theta + \rho\sigma^2 u = 0,$$

$$(\gamma + \varepsilon)\Delta \omega + (\beta + \gamma - \varepsilon)\text{grad div } \omega - 4\alpha\omega + 2 \text{rot } u + I\sigma^2 \omega = 0,$$

$$\Delta \theta + \frac{i\sigma}{\chi} \theta + i\sigma\eta \text{div } u = 0,$$

где обозначения те же, что и в § 2.20, 2.23. Матрицу фундаментальных решений запишем в блочном виде:

$$H(z_k, x) = \begin{vmatrix} H^{(1,1)}(z_k, x) & H^{(1,2)}(z_k, x) & H^{(1,3)}(z_k, x) \\ H^{(2,1)}(z_k, x) & H^{(2,2)}(z_k, x) & H^{(2,3)}(z_k, x) \\ H^{(3,1)}(z_k, x) & H^{(3,2)}(z_k, x) & H^{(3,3)}(z_k, x) \end{vmatrix},$$

где $H^{(s,m)}(z_k, x)$ ($s, m = 1, 2$) — матрицы третьего порядка, $H^{(s,3)}(z_k, x)$ ($s = 1, 2$) — вектор-столбец из трех строк, $H^{(3,s)}(z_k, x)$ — вектор-строка из трех столбцов и $H^{(3,3)}(z_k, x)$ — число. Компоненты этих матриц определяются соотношениями

$$H_{ij}^{(1,1)}(z_k, x) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)(\mu + \alpha)} \sum_{s=1}^4 \sum_{m=1}^1 \frac{\lambda_5^2 - \lambda_2^2}{\lambda_2^2 - \lambda_{s+m}^2} \left[(\alpha - \lambda - \mu)(k_2^2 - \lambda_5^2)(k_3^2 - \lambda_5^2) + \right. \\ &+ \left. \frac{4\alpha^2}{\gamma + \varepsilon} (k_s^2 - \lambda_2^2) - i\sigma\eta\nu(k_2^2 - \lambda_5^2) \right] \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{e^{i\lambda_s r(z_k, x)}}{r(z_k, x)} + \\ &+ \frac{\delta_{ij}}{2\pi(\mu + \alpha)} \left[\frac{k_2^2 - \lambda_3^2}{\lambda_4^2 - \lambda_3^2} \frac{e^{i\lambda_3 r(z_k, x)}}{r(z_k, x)} - \frac{k_2^2 - \lambda_4^2}{\lambda_4^2 - \lambda_5^2} \frac{e^{i\lambda_4 r(z_k, x)}}{r(z_k, x)} \right]. \end{aligned}$$

$$i, j = 1, 2, 3,$$

$$H_{ij}^{(1,2)}(z_k, x) =$$

$$= \frac{2\alpha}{2\pi(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)} \sum_{s=1}^3 \varepsilon_{ijs} \frac{\partial}{\partial \chi^s} \frac{e^{i\lambda_s r(z_k, x)} - e^{i\lambda_4 r(z_k, x)}}{r(z_k, x)},$$

$$j = 4, 5, 6, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$H_{ij}^{(1,3)}(z_k, x) = \frac{\nu}{2\pi(\lambda + 3\mu)(\mu_2^2 - \lambda_1^2)} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{e^{i\lambda_1 r(z_k, x)} - e^{i\lambda_2 r(z_k, x)}}{r(z_k, x)},$$

$$i = 1, 2, 3,$$

$$H_{ij}^{(2,1)}(z_k, x) =$$

$$= \frac{2\alpha}{2\pi(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)} \sum_{s=1}^3 \varepsilon_{ijs} \frac{\partial}{\partial x^s} \frac{e^{i\lambda_3 r(z_k, x)} - e^{i\lambda_4 r(z_k, x)}}{r(z_k, x)},$$

$$i = 4, 5, 6, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$H_{ij}^{(2,2)}(z_k, x) = \frac{1}{2\pi(\gamma + \varepsilon)(\beta + 2\gamma)} \sum_{s=3}^5 \sum_{m=1}^4 \frac{(\lambda_5^2 - \lambda_1^2)(\lambda_5^2 - \lambda_2^2)}{\lambda_s^2 - \lambda_{s+m}^2} \times$$

$$\times \left[(\beta + \gamma - \varepsilon)(k_4^2 - \lambda_5^2) - \frac{4\alpha^2}{\mu + \alpha} \right] \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{e^{i\lambda_s r(z_k, x)}}{r(z_k, x)} +$$

$$+ \frac{\delta_{ij}}{2\pi(\gamma + \varepsilon)} \left[\frac{k_4^2 + \lambda_3^2 e^{i\lambda_3 r(z_k, x)}}{\lambda_4^2 - \lambda_3^2} \frac{1}{r(z_k, x)} - \frac{k_4^2 - \lambda_4^2 e^{i\lambda_4 r(z_k, x)}}{\lambda_4^2 - \lambda_3^2} \frac{1}{r(z_k, x)} \right],$$

$$i, j = 4, 5, 6,$$

$$H_{7j}^{(3,1)}(z_k, x) = \frac{i\sigma\eta}{2\pi(\lambda + 2\mu)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{e^{i\lambda_2 r(z_k, x)} - e^{i\lambda_1 r(z_k, x)}}{r(z_k, x)},$$

$$j = 1, 2, 3,$$

$$H_{77}^{(3,3)}(z_k, x) = \frac{k_1^3 - \lambda_1^2 e^{i\lambda r(z_k, x)}}{2\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) r(z_k, x)} - \frac{k_2^2 - \lambda_2^2 e^{i\lambda_2 r(z_k, x)}}{2\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) r(z_k, x)},$$

$H^{(2,3)}(z_k, x)$ и $H^{(3,2)}(z_k, x)$ — нулевые матрицы,

$$k_1^2 = \frac{\rho\sigma^2}{\lambda + 2\mu}, \quad k_2^2 = \frac{1\sigma^2 - 4\alpha}{\lambda + \varepsilon}, \quad k_3^2 = \frac{i\sigma}{x}, \quad k_4^2 = \frac{\rho\sigma^2}{\mu + \alpha},$$

λ_1^2 и λ_2^2 удовлетворяют условиям

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = k_1^2 + k_3^2 + \frac{i\sigma\eta\gamma}{\lambda + 2\mu}, \quad \lambda_1^2 \lambda_2^2 = k_1^2 k_3^2,$$

λ_3^2 и λ_4^2 удовлетворяют условиям

$$\lambda_3^2 + \lambda_4^2 = k_2^2 + k_4^2 + \frac{4\alpha^2}{(\mu + \alpha)(\gamma + s)}, \quad \lambda_3^2 \lambda_4^2 = k_1^2 k_4^2,$$

$$\lambda_5^2 = \frac{1\sigma - 4\alpha}{\mu + 2\gamma}, \quad \gamma_{5+s}^2 = \gamma_5^2, \quad s = 1, 2, 3, 4.$$

Каждый столбец этой матрицы, рассмотренный как семикомпонентный вектор, является решением уравнений установившихся колебаний термомоментной теории упругости. Первые три компоненты этого вектора дают вектор смещения u , следующие три компоненты — вектор вращения ω , а седьмая компонента — температура среды θ .

§ 2.26. Система уравнений статики термомоментной теории упругости

Матрица фундаментальных решений и система уравнений термомоментной теории упругости получаются из матрицы фундаментальных решений и системы уравнений установившихся колебаний термомоментной теории упругости путем предельного перехода при $\sigma \rightarrow 0$. Они имеют соответственно вид

$$\begin{aligned}(\mu + \alpha)\Delta u + (\lambda + \mu - \alpha)\text{grad div } u + 2\alpha \text{rot } \omega - \nu \text{grad } \theta &= 0, \\(\gamma + \varepsilon)\Delta \omega + (\beta + \gamma - \varepsilon)\text{grad div } u - 4\alpha\omega + 2\alpha \text{rot } u &= 0, \\ \Delta \theta &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_{ij}^{(1,1)}(z_k, x) &= \frac{\delta_{ij}}{2\pi} \left[\frac{1}{\mu} \frac{1}{r(z_k, x)} - \frac{\alpha}{\mu(\mu + \alpha)} \frac{e^{-\lambda_1 r(z_k, x)}}{r(z_k, x)} \right] + \\ &+ \frac{1}{2\pi\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \left[-\frac{\lambda + \mu}{2(\mu + 2\mu)} r(z_k, x) + \frac{\gamma + \varepsilon}{4\mu} \frac{e^{-\lambda_1 r(z_k, x)} - 1}{r(z_k, x)} \right],\end{aligned}$$

$$H_{ij}^{(1,2)}(z_k, x) = \frac{1}{4\pi\mu} \sum_{s=1}^2 \varepsilon_{ijs} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-\lambda_2 r(z_k, x)} - 1}{r(z_k, x)},$$

$$H_{ij}^{(1,3)}(z_k, x) = \frac{\nu}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial r(z_k, x)}{\partial x^i}, \quad H_{ij}^{(2,1)}(z_k, x) = H_{ij}^{(1,2)}(z_k, x),$$

$$\begin{aligned}H_{ij}^{(2,2)}(z_k, x) &= \frac{\delta_{ij}}{4\pi(\nu + \varepsilon)} \frac{e^{-\lambda_1 r(z_k, x)}}{r(z_k, x)} + \\ &+ \frac{1}{8\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \left[\frac{e^{-\lambda_2 r(z_k, x)} - e^{-\lambda_1 r(z_k, x)}}{\alpha r(z_k, x)} - \frac{e^{-\lambda_1 r(z_k, x)} - 1}{\mu r(z_k, x)} \right],\end{aligned}$$

$$H_{77}^{(3,3)}(z_k, x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r(z_k, x)},$$

$H^{(2,3)}(z_k, x)$ и $H^{(3,2)}(z_k, x)$ — нулевые матрицы, λ_1 и λ_2 определяются соотношениями

$$\lambda_1 = \left[\frac{4\alpha\mu}{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)} \right]^{1/2}, \quad \lambda_2 = \left(\frac{4\alpha}{\beta + 2\gamma} \right)^{1/2}.$$

Фундаментальные матрицы систем уравнений статики термомоментной теории упругости можно рассматривать как частное решение системы неоднородных уравнений статики моментной теории упругости точно так же, как это было сделано в § 2.24.

§ 2.27. Интегрированные фундаментальные решения уравнения Лапласа в плоском случае

Согласно изложению § 1.7 во многих случаях интегрированные фундаментальные решения обладают существенными преимуществами перед фундаментальными решениями при использовании их в качестве функций, по которым разлагается решение.

Рассмотрим отрезок $\Gamma_1^{(j)}$, параметрическое уравнение которого имеет вид

$$z^1 = a_j t + c_j, \quad z^2 = b_j t + d_j, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где

$$a_j = \bar{z}_j^1 - z_j^1, \quad b_j = \bar{z}_j^2, \quad c_j = z_j^1, \quad d_j = z_j^2.$$

И пусть (z_j^1, z_j^2) и $(\bar{z}_j^1, \bar{z}_j^2)$ — координаты начальной и конечной точек рассматриваемого отрезка $\Gamma_1^{(j)}$. Интегрированные фундаментальные решения плоского уравнения Лапласа вычисляются по формулам

$$\psi_k(x) = \int_{\Gamma_1^{(j)}} p_s(z) \ln r(z, x) dS_z$$

где $p_s(z)$ — ортонормированные на $\Gamma_1^{(j)}$ полиномы s -го порядка. Как уже было сказано в § 1.6, будем рассматривать случаи, когда $s = 0, 1, 2$, для которых p_s принимают вид

$$P_0 = 1, \quad P_1 = 2\sqrt{3}t - \sqrt{3}, \quad P_2 = 6\sqrt{5}t^2 - 6\sqrt{5}t + \sqrt{5}.$$

Таким образом, с каждым вспомогательным отрезком $\Gamma_1^{(j)}$ будут связаны три функции

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \int_{\Gamma_1^{(j)}} \ln r(z, x) dr_z, \\ \psi_2(x) &= \int_{\Gamma_1^{(j)}} p_1 \ln r(z, x) dr_z, \\ \psi_3(x) &= \int_{\Gamma_1^{(j)}} p_2 \ln r(z, x) dr_z. \end{aligned}$$

Подставляя уравнения для z^1 и z^2 и учитывая, что

$$dS_z = \sqrt{[z_1'(t)]^2 + [z_2'(t)]^2} dt = \sqrt{[a_j^2 + b_j^2]} dt,$$

для $\psi_1(x)$ получаем

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1^{(j)}} \ln [r(z, x)]^2 dS_z = \\ &= \frac{\sqrt{A_j}}{2} \int_0^1 \ln [(ajt + c_j - x^1)^2 + (bjt + d_j + x^2)^2] dt,\end{aligned}$$

где $A_j = a_j^2 + b_j^2$. Интегрируя по частям ($\ln r^2 = u$, $dt = dv$), получаем

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \frac{\sqrt{A_j}}{2} \ln [(\bar{z}_j^1 - x^1)^2 + (\bar{z}_j^2 - x^2)^2] - \sqrt{A_j} + \\ &+ \frac{B_j}{2\sqrt{A_j}} \ln \frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} + \frac{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}}{A_j} \times \\ &\times \left[\operatorname{arctg} \frac{A_j + B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} - \operatorname{arctg} \frac{B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right],\end{aligned}$$

где

$$B_j = a_j(z_j^1 - x^1) + b_j(z_j^2 - x^2), \quad C_j = (z_j^1 - x^1)^2 + (z_j^2 - x^2)^2.$$

Нетрудно проверить, что квадратный двучлен $A_j C_j - B_j^2$ под корнем — неотрицательная величина.

Для вычисления $\psi_2(x)$ воспользуемся выражением

$$\psi_2(x) = \sqrt{3} \bar{\psi}_2(x) - \sqrt{3} \psi_1,$$

где

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_2(x) &= \sqrt{A_j} \int_0^1 t \ln [(ajt + c_j - x^1)^2 + (bjt + d_j - x^2)^2] dt = \\ &= \frac{\sqrt{A_j}}{2} \ln [(\bar{z}_j^1 - x^1)^2 + (\bar{z}_j^2 - x^2)^2] - \frac{\sqrt{A_j}}{2} + \frac{B_j}{\sqrt{A_j}} + \\ &+ \frac{A_j C_j - 2B_j^2}{2A_j \sqrt{A_j}} \ln \frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} - \frac{2B_j \sqrt{A_j C_j - B_j^2}}{A_j \sqrt{A_j}} \times \\ &\times \left[\operatorname{arctg} \frac{A_j + B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} - \operatorname{arctg} \frac{B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right].\end{aligned}$$

Для вычисления $\psi_3(x)$ воспользуемся выражением

$$\psi_3(x) = 3\sqrt{5} \bar{\psi}_3(x) - 6\sqrt{5} \bar{\psi}_2(x) + 7\sqrt{5} \psi_1(x),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_3(x) &= \sqrt{A_j} \int_0^1 t^2 \ln [(a_j t + c_j - x^1)^2 + (b_j t + d_j - x^2)^2] dt = \\ &= \frac{\sqrt{A_j}}{3} \ln [(\bar{z}_j^1 - x^1)^2 + (\bar{z}_j^2 - x^2)^2] - \frac{2\sqrt{A_j}}{9} + \frac{B_j}{3\sqrt{A_j}} + \\ &\quad + \frac{2(A_j C_j - 2B_j^2)}{3A_j \sqrt{A_j}} - \frac{3A_j B_j C_j - 4B_j^2}{3A_j^2 \sqrt{A_j}} \ln \frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} - \\ &\quad - \frac{2(A_j^2 C_j^2 - 5A_j C_j B_j^2 + 4B_j^4)}{3A_j^2 \sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{A_j + B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \operatorname{arctg} \frac{B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right]. \end{aligned}$$

Учитывая значения для $\bar{\Psi}_2(x)$ и $\bar{\Psi}_3(x)$, окончательно получаем

$$\begin{aligned} \Psi_2(x) &= \frac{\sqrt{5}}{A_j \sqrt{A_j}} \left[-A_j^2 - 2A_j B_j + (A_j B_j - A_j C_j + 2B_j^2) \times \right. \\ &\quad \times \ln \frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} + 2(A_j + 2B_j) \sqrt{A_j C_j - B_j^2} \times \\ &\quad \left. \times \left[\operatorname{arctg} \frac{A_j + B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} - \operatorname{arctg} \frac{B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right] \right], \\ \Psi_3(x) &= \frac{\sqrt{5}}{A_j^2 \sqrt{A_j}} \left[-\frac{A_j^2}{3} - 4A_j^2 B_j + 4A_j (A_j C_j - 2A_j^2) \right] + \\ &\quad + (A_j^2 B_j - 3A_j^2 C_j + 6A_j B_j^2 - 6A_j B_j C_j + 8B_j^2) \ln \frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} + \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \left[A_j (A_j C_j - B_j^2) (A_j + 6B_j) - 2(A_j C_j^2 - 5A_j C_j B_j^2) + \right. \\ &\quad \left. + 4B_j^4 \left[\operatorname{arctg} \frac{A_j + B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} - \operatorname{arctg} \frac{B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right] \right]. \end{aligned}$$

Некоторые интегрированные фундаментальные решения для трехмерных уравнений Лапласа в теории упругости даны в работе [48].

В § 1.6, в котором дается обоснование перехода от фундаментальных решений к интегрированным фундаментальным решениям, последние рассматриваются для отрезка прямой в плоском случае и для параллелограммов в пространственном случае. Однако, во многих случаях, с физической точки зрения, может оказаться желательным рассмотрение двухкратно-интегрированных фундаментальных решений в плоском случае

$$\Psi(y) = \iint_D p(x) H(x, y) dS_x$$

и трехкратно-интегрированных фундаментальных решений в трехмерном случае

$$\psi(y) = \int \int \int_V p(x) H(x, y) dV_x,$$

где обозначения те же (кроме индексов), что и в формулах (1.96). Нахождение коэффициентов разложения по таким функциям может представлять самостоятельный физический смысл, и его следует рассматривать скорее как решение обратной задачи, а не прямой граничной задачи. По существу описанные в настоящей монографии методы решения прямых граничных задач во всех случаях осуществляют решение обратной задачи (нахождение источников поля), однако при обычных фундаментальных решениях (при точечном источнике поля) такое решение обратной задачи может оказаться физически бессодержательным. Особенно важны указанные двух- и трехкратно интегрированные фундаментальные решения для геофизики, в частности для задач гравиметрии и геомагнетизма. Для последних представляют интерес не только интегрированные фундаментальные решения (ньютонов потенциал), но и их производные

$$\frac{\partial^k \psi(y)}{(\partial y^1)^{k_1} (\partial y^2)^{k_2} (\partial y^3)^{k_3}}, \quad k_1 + k_2 + k_3 = k,$$

которые будем называть интегродифференцированными фундаментальными решениями. Ниже для вертикального параллелепипеда и полиномов

$$p_1(x) = 1, \quad p_2 = x^1 - x_0^1, \quad p_3 = x^2 - x_0^2, \quad p_4 = x^3 - x_0^3$$

даются интегродифференцированные фундаментальные решения уравнения Лапласа при $k=0$, $k=1$ и $k=2$ (x_0^1, x_0^2, x_0^3 — координаты центра параллелепипеда V ; символ тройной подстановки $|||\alpha|||$ определяется формулой

$$|||\alpha(x^1, x^2, x^3)||| = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+j+k} \alpha(x_i^1, x_j^2, x_k^3),$$

уравнения $x^s = x_m^s$ ($s=1, 2, 3$; $m=1, 2$) определяют границы параллелепипедов; первый индекс в этих формулах ψ_{ijk} обозначает номер полинома $p_i(x)$, а второй, третий и четвертый индексы дают производные по соответствующим направлениям)

$$\begin{aligned} \psi_{1000} &= |||R_7|||, \\ \psi_{2000} &= ||| (x^1 - x_0^1) \left\{ R_7 + \frac{(y^2 - x^2)(y^3 - x^3)}{3} R + \right. \\ &+ \frac{(y^3 - x^3)[(y^3 - x^3) + 3(y^1 - x^1)^2]}{6} R_2 + \frac{(y^2 - x^2)[(y^2 - x^2)^2 + 3(y^1 - x^1)^2]}{6} R_3 - \\ &\left. - \frac{(y^1 - x^1)^3}{3} R_4 \right\} |||, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{3000} &= \\
&= \left\| \left\| (x^2 - x_0^2) \left\{ R_7 + \frac{(y^1 - x^1)(y^3 - x^3)}{3} R + \frac{(y^3 - x^3)[(y^3 - x^3)^2 + 3(y^2 - x^2)^2]}{6} R_1 + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(y^1 - x^1)[(y^1 - x^1)^2 + 3(y^2 - x^2)^2]}{6} R_3 - \frac{(y^2 - x^2)^3}{3} R_6 \right\} \right\|, \\
\psi_{4000} &= \\
&= \left\| \left\| (x^3 - x_0^3) \left\{ R_7 + \frac{(y^1 - x^1)(y^2 - x^2)}{3} R + \frac{(y^2 - x^2)[(y^2 - x^2)^2 + 3(y^3 - x^3)^3]}{6} R_1 + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(y^1 - x^1)[(y^1 - x^1)^2 + 3(y^3 - x^3)^2]}{6} R_2 + \frac{(y^3 - x^3)^3}{3} R_6 \right\} \right\|, \\
\psi_{1100} &= - \left\| \left\| R_8 \right\| \right\|, \\
\psi_{1100} &= - \left\| \left\| (x^1 - x_0^1) \left\{ R_8 - (y^2 - x^2)(y^3 - x^3) R_1 + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(y^1 - x^1)^2}{2} R_4 - \frac{(y^2 - x^2)^2}{2} R_5 - \frac{(y^3 - x^3)^2}{2} R_6 \right\} \right\|, \\
\psi_{3010} &= - \left\| \left\| (x^2 - x_0^2) \left\{ R_8 + \frac{y^3 - x^3}{2} R + \frac{(y^1 - x^1)^2 + (y^2 - x^2)^2}{2} R_3 \right\} \right\| \right\|, \\
\psi_{4100} &= - \left\| \left\| (x^3 - x_0^3) \left\{ R_8 + \frac{y^2 - x^2}{2} R + \frac{(y^1 - x^1)^2 + (y^2 - x^2)^2}{2} R_2 \right\} \right\| \right\|, \\
\psi_{1010} &= \left\| \left\| R_9 \right\| \right\|, \\
\psi_{2010} &= \left\| \left\| (x^1 - x_0^1) \left[R_9 - \frac{(y^1 - x^1)^2 + (y^2 - x^2)^2}{2} R_3 - \frac{y^3 - x^3}{2} R \right] \right\| \right\|, \\
\psi_{3001} &= \left\| \left\| (x^2 - x_0^2) \left[R_9 + (y^1 - x^1)(y^3 - x^3) R_2 - \frac{(y^1 - x^1)^2}{2} R_4 + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(y^2 - x^2)^2}{2} R_5 - \frac{(y^3 - x^3)^2}{2} R_6 \right] \right\| \right\|, \\
\psi_{4010} &= \left\| \left\| (x^3 - x_0^3) \left[R_9 - \frac{(y^2 - x^2)^2 + (y^3 - x^3)^2}{2} R_1 - \frac{y^1 - x^1}{2} R \right] \right\| \right\|, \\
\psi_{1001} &= \left\| \left\| R_{10} \right\| \right\|, \\
\psi_{2001} &= \left\| \left\| (x^1 - x_0^1) \left[R_{10} + \frac{y^2 - x^2}{2} R + \frac{(y^1 - x^1)^2 + (y^3 - x^3)^2}{2} R \right] \right\| \right\|, \\
\psi_{3001} &= - \left\| \left\| (x^2 - x_0^2) \left[R_{10} + \frac{y^1 - x^1}{2} R + \frac{(y^2 - x^2) + (y^3 - x^3)^2}{2} R_1 \right] \right\| \right\|, \\
\psi_{4001} &= - \left\| \left\| (x^3 - x_0^3) \left[R_{10} - (y^1 - x^1)(y^3 - x^3) R_3 - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(y^1 - x^1)^2}{2} R_4 - \frac{(y^2 - x^2)^2}{2} R_5 - \frac{(y^3 - x^3)^2}{2} R_6 \right] \right\| \right\|, \\
\psi_{1200} &= - \left\| \left\| R_4 \right\| \right\|, \\
\psi_{2200} &= - \left\| \left\| (x^1 - x_0^1) [R_4 - (y^1 - x^1) R_2] \right\| \right\|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{3200} &= - \left\| \left\| (x^2 - x_0^2) [R_4 - (y^1 - x^1) R_3] \right\| \right\|, \\
\psi_{4200} &= - \left\| \left\| (x^2 - x_0^2) [R_4 + (y^2 - x^2) R_3 + (y^3 - x^3) R_2] \right\| \right\|, \\
\psi_{1110} &= - \left\| \left\| R_3 \right\| \right\|, \\
\psi_{2110} &= \left\| \left\| (x^1 - x_0^1) [R_3 - (y^3 - x^3) R_1 - (y^2 - x^2) R_5] \right\| \right\|, \\
\psi_{3110} &= \left\| \left\| (x^2 - x_0^2) [R_3 - (y^3 - x^3) R_2 + (y^1 - x^1) R_4] \right\| \right\|, \\
\psi_{4110} &= \left\| \left\| (x^3 - x_0^3) (R_2 + R) \right\| \right\|, \\
\psi_{1101} &= \left\| \left\| R_2 \right\| \right\|, \\
\psi_{2101} &= \left\| \left\| (x^3 - x_0^3) [R_4 - (y^2 - x^2) R_1 + (y^3 - x^3) R_6] \right\| \right\|, \\
\psi_{3101} &= \left\| \left\| (x^2 - x_0^2) (R_2 + R) \right\| \right\|, \\
\psi_{4101} &= \left\| \left\| (x^3 - x_0^3) [R_2 - (y^2 - x^2) R_3 + (y^1 - x^1) R_4] \right\| \right\|, \\
\psi_{1020} &= - \left\| \left\| R_5 \right\| \right\|, \\
\psi_{2020} &= - \left\| \left\| (x^1 - x_0^1) [R_5 - (y^2 - x^2) R_1] \right\| \right\|, \\
\psi_{3020} &= - \left\| \left\| (x^2 - x_0^2) [R_5 - (y^2 - x^2) R_3] \right\| \right\|, \\
\psi_{4020} &= - \left\| \left\| (x^3 - x_0^3) [R_5 + (y^1 - x^1) R_3 + (y^3 - x^3) R_1] \right\| \right\|, \\
\psi_{1011} &= \left\| \left\| R_1 \right\| \right\|, \\
\psi_{2011} &= \left\| \left\| (x^2 - x_0^2) (R_1 + R) \right\| \right\|, \\
\psi_{3011} &= \left\| \left\| (x^2 - x_0^2) [R_1 - (y^1 - x^1) R_2 + (y^3 - x^3) R_6] \right\| \right\|, \\
\psi_{4011} &= \left\| \left\| (x^3 - x_0^3) [R_1 - (y^1 - x^1) R_3 + (y^2 - x^2) R_5] \right\| \right\|, \\
\psi_{1002} &= - \left\| \left\| R_6 \right\| \right\|, \\
\psi_{2002} &= - \left\| \left\| (x^1 - x_0^1) [R_6 - (y^3 - x^3) R_2] \right\| \right\|, \\
\psi_{3002} &= - \left\| \left\| (x^2 - x_0^2) [R_6 - (y^3 - x^3) R_1] \right\| \right\|, \\
\psi_{4002} &= - \left\| \left\| (x^3 - x_0^3) [R_6 + (y^2 - x^2) R_1 + (y^1 - x^1) R_2] \right\| \right\|,
\end{aligned}$$

где

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (y^i - x^i)^2}.$$

$$R_k = \ln(y^k - x^k + R), \quad k = 1, 2, 3,$$

$$R_4 = \operatorname{arctg} \frac{(y^2 - x^2)(y^3 - x^3)}{(y^1 - x^1) R},$$

$$R_5 = \operatorname{arctg} \frac{(y^1 - x^1)(y^3 - x^3)}{(y^2 - x^2) R},$$

$$R_6 = \operatorname{arctg} \frac{(y^1 - x^1)(y^2 - x^2)}{(y^3 - x^3) R},$$

$$\begin{aligned}
 R_7 &= (y^2 - x^2)(y^3 - x^3) R_1 + (y^1 + x^1)(y^3 - x^3) R_2 + \\
 &+ (y^3 - x^1)(y^2 - x^2) R_3 - \frac{1}{2} [(y^1 - x^1)^2 R_4 + (y^2 - x^2)^2 R_5 + (y^3 - x^3) R_6], \\
 R_8 &= (y^2 - x^2) R_3 - (y^1 - x^1) R_4 - (y^3 - x^3) R_2, \\
 R_9 &= (y^2 - x^2) R_5 - (y^1 - x^1) R_2 - (y^3 - x^3) R_1, \\
 R_{10} &= (y^2 - x^2) R_1 - (y^1 - x^1) R_2 - (y^3 - x^3) R_6.
 \end{aligned}$$

§ 2.28. Интегрированные фундаментальные решения уравнений плоской статической теории упругости

Учитывая выражения для фундаментальных решений уравнений плоской статической теории упругости (см. § 2.15) и обозначения предыдущего пункта для элементов матрицы интегрированных фундаментальных решений, получаем выражения

$$\begin{aligned}
 \psi_1^{(1)}(x) &= \int_{\Gamma_1^{(j)}} \left[n \ln r(z, x) - m \left(\frac{\partial r(z, x)}{\partial z^1} \right)^2 \right] dS_z = \\
 &= \frac{nA_j}{2} \int_0^1 \ln [(a_j t + c_j - x^1)^2 + (b_j t + d_j - x^2)^2] dt - \\
 &\quad - mA_j \int_0^1 \frac{(a_j t + c_j - x^1)^2 dt}{(a_j t + c_j - x^1)^2 + (b_j t + d_j - x^2)^2} = \\
 &= n\omega_1(x) - m \left[a_j^2 + \frac{M_j}{2} \ln \frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2(A_j N_j - B_j M_j)}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{5(A_j + B_j)}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} - \operatorname{arctg} \frac{2B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right] \right], \\
 \psi_1^{(2)}(x) &= \int_{\Gamma_1^{(j)}} m \frac{\partial r(z, x)}{\partial z^1} \frac{\partial r(z, x)}{\partial z^2} dS_z = \\
 &= -mA_j \int_0^1 \frac{(a_j t + c_j - x^1)(b_j t + d_j - x^2)}{(a_j t + c_j - x^1)^2 + (b_j t + d_j - x^2)^2} dt = \\
 &= -m \left[a_j^2 + \frac{\bar{M}_j}{2} \ln \frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} + \frac{2A_j \bar{N}_j - B_j \bar{M}_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[\operatorname{arctg} \frac{2(A_j + B_j)}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} - \operatorname{arctg} \frac{2B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right] \right],
 \end{aligned}$$

$$\psi_2^{(1)}(x) = \psi_1^{(2)}(x),$$

$$\begin{aligned} \psi_2^{(2)}(x) &= \int_{\Gamma_1^{(j)}} \left[n \ln r(z, x) m \left(\frac{\partial r(z, x)}{\partial z^2} \right)^2 \right] dS_z = \\ &= n\omega_1(x) - m \left[b_j^2 + \frac{R_j}{2} \ln \frac{A_j + 2R_j + C_j}{C_j} + \right. \\ &\left. + \frac{2(A_j \bar{R}_j - B_j R_j)}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{2(A_j + B_j)}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} - \operatorname{arctg} \frac{2B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right] \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_3^{(1)}(x) &= \int_{\Gamma_1^{(j)}} p_1 \left[n \ln r(z, x) - m \left(\frac{\partial r(z, x)}{\partial z^1} \right)^2 \right] dS_z = n\omega_2(x) + \\ &+ \sqrt{3} m \bar{\omega}_1(x) - 2 \sqrt{3} m A_j \int_0^1 \frac{(a_j t - c_j - x^1)^2 t dt}{(a_j + c_j - x^1)^2 + (b_j t + d_j - x^2)^2} = \\ &= n\omega_2(x) - 2 \sqrt{3} m \left[\frac{a_j^2}{2} - \frac{2a_j B_j}{A_j} + 2a_j(c_j - x^1) + \right. \\ &\left. + \frac{F_j}{2} \ln \left(\frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} \right) \right] + \frac{2(A_j \bar{F}_j - B_j F_j)}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{2(A_j + B_j)}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} - \right. \\ &\left. - \operatorname{arctg} \frac{2B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right] + \sqrt{3} m \bar{\omega}_1(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_3^{(2)}(x) &= -m \int_{\Gamma_1^{(j)}} p_1 \frac{\partial r(z, x)}{\partial z^1} \frac{\partial r(z, x)}{\partial z^2} dS_z = \\ &= -2 \sqrt{3} m A_j \int_0^1 \frac{(a_j t + c_j - x^1)(b_j t + d_j - x^2)}{(a_j t + c_j - x^1)^2 + (b_j t + d_j - x^2)^2} t dt + \sqrt{3} \varphi_1^2(x) = \\ &= -2 \sqrt{3} m \left[\frac{\bar{A}_j}{2} + \bar{B}_j - \frac{2\bar{A}_j B_j}{A_j} + \frac{E_j}{2} \ln \left(\frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{2(A_j \bar{E}_j - B E_j)}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{2(A_j + B_j)}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} - \operatorname{arctg} \frac{2B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right] \right] + \\ &\quad + \sqrt{3} \psi_1^{(2)}(x), \end{aligned}$$

$$\psi_4^{(1)}(x) = \psi_3^{(2)}(x),$$

$$\begin{aligned} \psi_4^{(2)}(x) &= \int_{\Gamma_1^{(j)}} p_1 \left[n \ln r(z, x) - m \left(\frac{\partial r(z, x)}{\partial z^2} \right)^2 \right] dS_z = \\ &= n\omega_2(x) + \sqrt{3} \omega_2(x) - 2 \sqrt{3} m A_j \int_0^1 \frac{(b_j t + d_j - x^2)^2 t dt}{(a_j t + c_j - x^1)^2 + (b_j t + d_j - x^2)^2} = \end{aligned}$$

$$= n\omega_2(x) + \sqrt{3}\omega_2(x) + 2\sqrt{3}m \left[\frac{b_j^2}{2} - \frac{2b_jB_j}{A_j} + 2b_j(d_j - x^2) + \right. \\ \left. + \frac{G_j}{2} \ln \left(\frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} \right) + \frac{2(A_jC_j - B_jC_j)}{\sqrt{A_jC_j - B_j^2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{2(A_j + B_j)}{\sqrt{A_jC_j - B_j^2}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{arctg} \frac{2B_j}{\sqrt{A_jC_j - B_j^2}} \right] \right],$$

$$\psi_5^{(1)}(x) = \int_{\Gamma_1^{(j)}} p_2 \left[n \ln r(z, x) - m \left(\frac{\partial r(z, x)}{\partial z^1} \right)^2 \right] dS_z = \\ = n\omega_3(x) + 6\sqrt{5}\omega_3(x) - \sqrt{5}\omega_1(x) - \\ - 6\sqrt{5}mA_j \int_0^1 \frac{(a_jt + c_j - x^1)t^2 dt}{(a_jt + c_j - x^1) + (b_jt + d_j - x^2)^2} = \\ = n\omega_3(x) + 6\sqrt{5}\omega_3(x) - \sqrt{5}m\bar{\omega}_1(x) - \\ - 6\sqrt{5}m \left[\frac{a_j^2}{3} + a_j(c_j - x^1) - \frac{a_j^2B_j}{A_j} + (c_j - x^1)^2 - \right. \\ \left. - \frac{a_jc_j + 4a_jB_j(c_j - x^1)}{A_j} + \frac{4a_j^2B_j^2}{A_j^2} + \frac{H_j}{2} \ln \left(\frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2(A_j\bar{H}_j - B_jH_j)}{\sqrt{A_jC_j - B_j^2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{2(A_j + B_j)}{\sqrt{A_jC_j - B_j^2}} - \operatorname{arctg} \frac{2B_j}{\sqrt{A_jC_j - B_j^2}} \right] \right].$$

$$\psi_5^{(2)}(x) = - \int_{\Gamma_1^{(j)}} m p_2 \frac{\partial r(z, x)}{\partial z^1} \frac{\partial r(z, x)}{\partial z^2} dS_z = \\ = - \sqrt{5}\psi_1^{(2)}(x) + 6\sqrt{5}\omega_4(x) - 6\sqrt{5}mA_j \int_0^1 \frac{(a_jt + c_j - x^1)(b_jt + d_j - x^2)t^2 dt}{(a_jt + c_j - x^1)^2 + (b_jt + d_j - x^2)^2} = \\ = - \sqrt{5}\psi_1^{(2)}(x) + 6\sqrt{5}\omega_4(x) - 6\sqrt{5}m \left[\frac{\bar{A}_j}{3} + \frac{\bar{B}_j}{2} - \frac{\bar{A}_jB_j}{A_j} + \right. \\ \left. + A_j\bar{C}_j + \frac{4\bar{A}_jB_j^2}{A_j} - \bar{A}_jC_j - 2B_j\bar{B}_j + \right. \\ \left. + \frac{D_j}{2} \ln \left(\frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} \right) + \frac{2(A_j\bar{D}_j - B_jD_j)}{\sqrt{A_jC_j - B_j^2}} \times \right. \\ \left. \times \left[\operatorname{arctg} \frac{2(A_j + B_j)}{\sqrt{A_jC_j - B_j^2}} - \operatorname{arctg} \frac{2B_j}{\sqrt{A_jC_j - B_j^2}} \right] \right],$$

$$\begin{aligned}
\psi_6^{(1)}(x) &= \psi_5^{(2)}(x), \\
\psi_6^{(2)}(x) &= \int_{\Gamma_1^{(j)}} p_2 \left[n \ln r(z, x) - m \left(\frac{\partial r(z, x)}{\partial z^2} \right)^2 \right] dS_z = \\
&= n\omega_3(x) + 6\sqrt{5}\omega_5(x) - \sqrt{5}\omega_2(x) - \\
&- 6\sqrt{5}mA_j \int_0^1 \frac{(b_j t + d_j - x^2)^2 t^2 dt}{(a_j t + c_j - x^1)^2 + (b_j t + d_j - x^2)^2} = \\
&= n\omega_3(x) + 6\sqrt{5}\omega_5(x) - \sqrt{5}\omega_2(x) - 6\sqrt{5}m \left[\frac{b_j^2}{3} - \frac{b_j B_j}{A_j} + \right. \\
&+ b_j(d_j - x^2) + (d_j - x^2)^2 - \frac{b_j^2 C_j + 4b_j B_j (d_j - x^2)}{A_j} + \frac{4b_j B_j}{A_j^2} + \\
&+ \frac{I_j}{2} \ln \left(\frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} \right) + \frac{2(A_j \bar{I}_j - B_j I_j)}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \times \\
&\quad \left. \times \left[\operatorname{arctg} \frac{2(A_j + B_j)}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} - \operatorname{arctg} \frac{2B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right] \right],
\end{aligned}$$

где A_j, B_j, C_j определены в предыдущем параграфе, $\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)$ — интегрированные фундаментальные решения уравнения Лапласа в плоском случае (определенные в предыдущем параграфе, где они обозначались через $\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)$ соответственно),

$$\begin{aligned}
M_j &= 2a_j(c_j - x^1) - \frac{2a_j^2 B_j}{A_j}, \quad N_j = (c_j - x^1)^2 - a_j \frac{C_j}{A_j}, \\
\bar{M}_j &= \bar{B}_j - \frac{2A_j B_j}{A_j}, \quad \bar{N}_j = \bar{C}_j - \frac{\bar{A}_j C_j}{A_j}, \quad \bar{A}_j = a_j b_j, \\
\bar{B}_j &= a_j d_j + b_j c_j - a_j x^2 - b_j x^1, \quad \bar{C}_j = c_j d_j - c_j x^2 - d_j x^1 + x^1 x^2, \\
R_j &= 2b_j(d_j - x^2) - \frac{2b_j B_j}{A_j}, \quad \bar{R}_j = (d_j - x^2)^2 - \frac{b_j c_j}{A_j}, \\
F_j &= (c_j - x^1)^2 - \frac{a_j^2 c_j + 4a_j B_j (c_j - x^2)}{A_j}, \quad \bar{F}_j = c_j \left[\frac{2a_j^2 B_j}{A_j} - \frac{2a_j (c_j - x^1)}{A_j} \right], \\
E_j &= \bar{c}_j + \frac{4\bar{A}_j B_j^2}{A_j^2} - \frac{\bar{A}_j C_j + 2B_j B_j^2}{A_j}, \quad \bar{E}_j = C_j \left(\frac{2\bar{A}_j B_j}{A_j^2} - \frac{\bar{B}_j}{A_j} \right), \\
C_j &= (d_j - x^2)^2 - \frac{b_j^2 c_j + 4b_j B_j (d_j - x^2)}{A_j}, \\
\bar{C}_j &= C_j \left[\frac{2b_j^2 B_j}{A_j} - \frac{2b_j (d_j - x^2)}{A_j} \right],
\end{aligned}$$

$$H_j = \bar{F}_j = 2B_j \left[\frac{a_j^2 c_j + 4a_j B_j (c_j - x^1)}{A_j^2} - \frac{(c_j - x^1)^2}{A_j} - \frac{4a_j^2 B_j}{A_j^3} \right],$$

$$\bar{H}_j = C_j \left[\frac{a_j^2 c_j + 4a_j B_j (c_j - x^1)}{A_j^2} - \frac{(c_j - x^1)^2}{A_j} - \frac{4a_j^2 B_j}{A_j^3} \right],$$

$$D_j = C_j \left(\frac{2\bar{A}_j B_j}{A_j^2} - \frac{\bar{B}_j}{A_j} \right) + 2B_j \left(\frac{\bar{A}_j c_j + 2\bar{B}_j}{A_j} - \bar{C}_j - \frac{4\bar{A}_j B_j^2}{A_j^2} \right),$$

$$\bar{D}_j = C_j \left(\frac{\bar{A}_j C_j - 2B_j \bar{B}_j}{A_j^2} - \bar{C}_j - \frac{4\bar{A}_j B_j^2}{A_j^2} \right),$$

$$I_j = \bar{G}_j + 2B_j \left[\frac{b_j^2 c_j + 4b_j B_j (d_j - x^2)}{A_j^2} - \frac{(d_j - x^2)^2}{A_j} - \frac{4b_j^2 B_j}{A_j^3} \right],$$

$$\bar{I}_j = C_j \left(\frac{b_j^2 c_j + 4B_j (d_j - x^2)}{A_j^2} - \frac{(d_j - x^2)^2}{A_j} - \frac{4b_j^2 B_j}{A_j^3} \right),$$

$$\bar{\omega}_1(x) = \psi_1^{(1)}(x) - n\omega_1(x), \quad \bar{\omega}_2(x) = \psi_2^{(2)}(x) - n\omega_1(x),$$

$$\bar{\omega}_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}} [\psi_3^{(1)}(x) - n\omega_2(x) - \sqrt{3}\omega_1(x)],$$

$$\bar{\omega}_4(x) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} [\psi_3^{(2)}(x) - \sqrt{3}\psi_1^{(2)}(x)],$$

$$\bar{\omega}_5(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}} [n\omega_2(x) + \sqrt{3}\omega_2(x) - \psi_4^{(2)}(x)].$$

Таким образом, с каждым вспомогательным отрезком $\Gamma_1^{(j)}$ связаны шесть двухкомпонентных вектор-функций, которые при учете значений интегрированных функций оператора Лапласа окончательно принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_1^{(1)}(x) = & \frac{n}{2} \sqrt{A_j} \ln [(\bar{z}_j^1 - x^1)^2 + (\bar{z}_j^2 - x^2)^2] - n \sqrt{A_j} - \frac{ma_j^2}{A_j} + \\ & + \left\{ \frac{nB_j}{2\sqrt{A_j}} - \frac{m[A_j a_j (z_j^1 - x^1) - a_j^2 B_j]}{A_j^2} \right\} \ln \frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} + \\ & + \left\{ \frac{n\sqrt{A_j C_j - B_j^2}}{\sqrt{A_j}} - \frac{m \left[A_j (z_j^1 - x^1)^2 - a_j c_j + 2a_j B_j \left(\frac{a_j B_j}{A_j} - z_j^1 + x^1 \right) \right]}{A_j \sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right\} \times \\ & \times \left[\operatorname{arctg} \frac{A_j + B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} - \operatorname{arctg} \frac{B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_1^{(2)}(x) = & -m \left\{ \frac{\bar{A}_j}{A_j} + \left(\frac{\bar{B}_j}{2A_j} - \frac{\bar{A}_j B_j}{A_j} \right) \ln \frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} + \right. \\ & + \frac{A_j^2 \bar{C}_j - A_j \bar{A}_j C_j - A_j B_j \bar{B}_j + 2\bar{A}_j B_j^2}{A_j^2 \sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{A_j + B_j}{\sqrt{A_j C_j B_j^2}} - \right. \\ & \left. \left. - \operatorname{arctg} \frac{B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_2^{(2)}(x) = & \frac{n}{2} \sqrt{\bar{A}_j} \ln \left[(\bar{z}_j^1 - x^1)^2 + (\bar{z}^2 - x^2)^2 \right] - n \sqrt{\bar{A}_j} - \\ & - \frac{m b_j^2}{A_j} + \left\{ \frac{n B_j}{2 \sqrt{\bar{A}_j}} - \frac{m [A_j b_j (z_j^2 - x^2) - b_j B_j]}{A_j^2} \right\} \ln \frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} + \\ & + \left\{ \frac{n \sqrt{A_j C_j - B_j^2}}{\sqrt{\bar{A}_j}} - \frac{m \left[A_j (z_j^2 - x^2)^2 - b_j c_j - 2b_j B_j \left(z_j^2 - x^2 - \frac{b_j B_j}{A_j} \right) \right]}{A_j \sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right\} \times \\ & \times \left[\operatorname{arctg} \frac{A_j + B}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} - \operatorname{arctg} \frac{B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_3^{(1)}(x) = & \sqrt{3} \left\{ \frac{n(A_j + 2B_j)}{2 \sqrt{\bar{A}_j}} + \frac{4ma_j [a_j B_j - A_j (z_j^1 - x^1)]}{A_j^2} + \right. \\ & + \left[\frac{n(A_j C_j - A_j B_j - 2B_j^2)}{2A_j \sqrt{\bar{A}_j}} - \frac{ma_j [(A_j + 4B_j)(z_j^1 - x^1) + a_j(C_j - B_j)]}{A_j^2} - \right. \\ & \left. - \frac{m(z_j^1 - x^1)^2}{A_j} - \frac{4ma_j^2 B_j^2}{A_j^3} \right] \ln \frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} + \\ & + \left[\frac{m}{A_j \sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \left[(A_j + 2B_j)(z_j^1 - x^1)^2 + 2a_j B_j \left(\frac{a_j B_j}{A_j} - z_j^1 + x^1 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{8a_j^2 B_j^3}{A_j^2} - a_j^2 c_j - 4a_j (z_j^1 - x^1) \left(\frac{2B_j^2}{A_j} - 1 \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{n(A_j + 2B_j) \sqrt{A_j C_j - B_j^2}}{A_j \sqrt{\bar{A}_j}} - \frac{6a_j^2 B_j C_j}{A_j} \right] \right] \left[\operatorname{arctg} \frac{A_j + B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} - \right. \\ & \left. - \operatorname{arctg} \frac{B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_3^{(2)}(x) = & -m \sqrt{3} \left\{ \frac{2(A_j \bar{B}_j - 2\bar{A}_j B_j)}{A_j^2} + \right. \\ & + \left[\frac{2\bar{C}_j - \bar{B}_j}{2A_j} + \frac{\bar{A}_j(B_j - C_j) - 2B_j \bar{B}_j}{A_j^2} + \frac{4\bar{A}_j B_j^2}{A_j^3} \right] \ln \frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} + \\ & + \frac{1}{A_j \sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \left[B_j \bar{B}_j + \bar{A}_j C_j - A_j C_j - 2\bar{B}_j C_j - 2B_j \bar{C}_j + \right. \\ & \left. + \frac{6A_j \bar{B}_j C_j + 4B_j^2 \bar{B}_j - 2A_j B_j^2}{A_j} - \frac{8\bar{A}_j B_j^2}{A_j^2} \right] \times \\ & \left. \times \left[\operatorname{arctg} \frac{A_j + B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} - \operatorname{arctg} \frac{B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_4^{(2)}(x) = & \sqrt{3} \left\{ \frac{n(A_j + 2B_j)}{2\sqrt{A_j}} + \frac{4mb_j [b_j B_j - A_j(z_j^2 - x^2)]}{A_j^2} + \right. \\ & + \left[\frac{n(A_j C_j - 2B_j^2 - A_j B_j)}{2A_j \sqrt{A_j}} + \frac{mb_j [(A_j + 4b_j)(z_j^2 - x^2) + b_j(C_j - B_j)]}{A_j^2} - \right. \\ & \left. - \frac{m(z_j^2 - x^2)^2}{A_j} - \frac{4mb_j^2 B_j^2}{A_j^3} \right] \ln \frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} + \\ & + \left[\frac{m}{A_j \sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \left[(A_j + 2B_j)(z_j^2 - x^2)^2 - 2b_j B_j \left(\frac{b_j B_j}{A_j} - z_j^2 \right) + x \right] + \right. \\ & \left. + \frac{8b_j^2 B_j^3}{A_j^2} - b_j^2 c_j - 4b_j(z_j^2 - x^2) \left(\frac{2B_j^2}{A_j} - 1 \right) - \frac{6b_j^2 B_j C_j}{A_j} \right] - \\ & \left. - \frac{n(A_j + 2B_j) \sqrt{A_j C_j - B_j^2}}{A_j \sqrt{A_j}} \right] \left[\operatorname{arctg} \frac{A_j + B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} - \operatorname{arctg} \frac{B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_5^{(1)}(x) = & \sqrt{5} \left\{ \frac{12n(A_j C_j - A_j B_j - 2B_j^2) - nA_j^2}{6A_j \sqrt{A_j}} + \right. \\ & + 6m \left[\frac{a_j(z_j^1 - x^1) - (z_j^1 - x^1)^2}{A_j} + \frac{a_j^2(C_j - B_j) + 4a_j B_j(z_j^1 - x^1)}{A_j^2} - \right. \\ & \left. - \frac{4a_j^2 B_j^2}{A_j^3} \right] + \left[n \left[\frac{B_j(4B_j^2 - 3A_j C_j)}{A_j^2 \sqrt{A_j}} + \frac{3(2B_j^2 - A_j C_j)}{2A_j \sqrt{A_j}} + \frac{B_j}{2\sqrt{A_j}} \right] + \right. \\ & \left. + m \left[\frac{24a_j^2 B_j^3}{A_j^4} + \frac{12a_j B_j [a_j(B_j - C_j) - 2B_j(c_j^1 - x^1)]}{A_j^3} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6B_j(z_j^1 - x^1)^2 + 6a_j(C_j - 2B_j)(z_j^1 - x^1) + a_j^2(B_j - 3C_j)}{A_j^2} + \\
& + \frac{3(z_j^1 - x^1)^2 - a_j(z_j^1 - x^1)}{A_j} \left. \right] \ln \frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} + \\
& + \left[n \left[\frac{2(5A_j C_j B_j^2 - A_j^2 C_j^2 - 4B_j^2)}{A_j^2 \sqrt{A_j} \sqrt{A_j C_j - B_j^2}} + \frac{(A_j + 6B_j) \sqrt{A_j C_j - B_j^2}}{A_j \sqrt{A_j}} \right] + \right. \\
& + \frac{m}{A_j \sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \left[a_j^2 c_j + \frac{2a_j^2}{A_j} (9B_j C_j - B_j^2 - 3C_j^2) - \frac{24a_j^2 B_j^3}{A_j^2} + \right. \\
& + (z_j^2 - x^1)^2 \left(6C_j - 6B_j - A_j \right) - \frac{12B_j^2}{A_j} \left. \right] + (z_j^1 - x^1) 2a_j B_j - 12a_j + \\
& + \frac{24a_j B_j^2}{A_j} + \frac{36a_j B_j C_j}{A_j} + \frac{48a_j B_j^3}{A_j^2} + \frac{36a_j^2 B_j^2 C_j}{A_j^2} - \frac{48a_j^2 B_j^4}{A_j^3} \left. \right] \times \\
& \quad \times \left[\operatorname{arctg} \frac{A_j + B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} - \operatorname{arctg} \frac{B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right] \Bigg\}, \\
\psi_5^{(2)}(x) = & -m \sqrt{5} \left[\frac{3(2\bar{C}_j - B_j)}{A_j} + \frac{6\bar{A}_j(B_j - C_j) - 12B_j\bar{B}_j}{A_j^2} + \right. \\
& + \frac{24\bar{A}_j B_j^2}{A_j^3} + \left[\frac{\bar{B}_j - 6\bar{C}_j}{2A_j} + \frac{3C_j(\bar{A}_j - \bar{B}_j) + 6B_j(\bar{B}_j - \bar{C}_j) - \bar{A}_j B_j}{A_j^2} + \right. \\
& + \frac{12B_j(\bar{A}_j C_j + B_j \bar{B}_j - \bar{A}_j B_j^3)}{A_j^3} - \frac{24\bar{A}_j B_j^3}{A_j^4} \left. \right] \ln \frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} + \\
& + \frac{1}{A_j \sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \left[6(\bar{B}_j C_j + B_j \bar{C}_j - C_j \bar{C}_j) + A_j \bar{C}_j - \bar{A}_j C_j - B_j \bar{B}_j + \right. \\
& + \frac{2\bar{A}_j(3C_j^2 + B_j^2) + 18B_j C_j(\bar{B}_j - \bar{A}_j) + 12B_j^2(\bar{C}_j - \bar{B}_j)}{A_j} + \\
& + \frac{24B_j^2[B_j(\bar{A}_j - \bar{B}_j) - 2\bar{A}_j C_j]}{A_j^2} - \frac{48\bar{A}_j B_j^4}{A_j^3} \left. \right] \times \\
& \quad \times \left[\operatorname{arctg} \frac{A_j + B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} - \operatorname{arctg} \frac{B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right] \Bigg\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_6^{(2)}(x) = & \sqrt{5} \left\{ \frac{12n(A_j C_j - A_j B_j - 3B_j^2) - A_j^2 n}{6A_j \sqrt{A_j}} + \right. \\
& + 6m \left[\frac{b_j(z_j^2 - x^2) - (z_j^2 - x^2)^2}{A_j} + \frac{b_j^2(C_j - B_j) + 4b_j B_j(z_j^2 - x^2)}{A_j^2} - \right. \\
& - \left. \frac{4b_j^2 B_j^2}{A_j^3} \right] + \left[n \left[\frac{B_j(4B_j^2 - 3A_j C_j)}{A_j^2 \sqrt{A_j}} + \frac{3(2B_j^2 - A_j C_j)}{2A_j \sqrt{A_j}} + \frac{B_j}{2\sqrt{A_j}} \right] + \right. \\
& + m \left[\frac{24b_j^2 B_j^3}{A_j^4} + \frac{12b_j B_j [b_j B_j - b_j C_j - 2B_j(z_j^2 - x^2)]}{A_j^3} + \right. \\
& + \frac{6B_j(z_j^2 - x^2) + 6b_j(C_j - 2B_j)(z_j^2 - x^2) + b_j^2(B_j - 3C_j)}{A_j^2} + \\
& \left. \left. + \frac{3(z_j^2 - x^2)^2 - b_j(z_j^2 - x^2)}{A_j} \right] \right] \ln \frac{A_j + 2B_j + C_j}{C_j} + \\
& + \left[n \left[\frac{2(5A_j C_j - B_j^2 - A_j^2 C_j^2 - 4B_j^4)}{A_j^2 \sqrt{A_j} \sqrt{A_j C_j - B_j^2}} - \frac{(A_j + 6B_j) \sqrt{A_j C_j - B_j^2}}{A_j \sqrt{A_j}} \right] + \right. \\
& + \frac{m}{A_j \sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \left[b_j^2 C_j + \frac{2b_j^2}{A_j} (9B_j C_j - B_j^2 - 3C_j^2) - \frac{24b_j^2 B_j^3}{A_j^3} + \right. \\
& + (z_j^2 - x^2)^2 \left(6C_j - 6B_j - A_j - \frac{12B_j^3}{A_j} \right) + (z_j^2 - x^2) \left(2b_j B_j - 12b_j + \right. \\
& + \frac{24b_j B_j^2}{A_j} - \frac{36b_j B_j C_j}{A_j} + \frac{48b_j B_j^3}{A_j^2} \left. \right) + \frac{36b_j^2 B_j^2 C_j}{A_j^2} - \\
& \left. \left. - \frac{48a_j^2 B_j^4}{A_j^3} \right] \right] \left[\operatorname{arctg} \frac{A_j + B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} - \operatorname{arctg} \frac{B_j}{\sqrt{A_j C_j - B_j^2}} \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
a_j = \bar{z}_j^1 - z_j^1, \quad b_j = \bar{z}_j^2 - z_j^2, \quad A_j = a_j^2 + b_j^2, \\
B_j = a_j(z_j^1 - x^1) + b_j(z_j^2 - x^2), \quad C_j = (z_j^1 - x^1)^2 + (z_j^2 - x^2)^2, \\
\bar{A}_j = a_j b_j, \quad \bar{B}_j = a_j(z_j^2 - x^2) + b_j(z_j^1 - x^1), \\
\bar{C}_j = (z_j^1 - x^1)(z_j^2 - x^2).
\end{aligned}$$

§ 2.29. О тестовых задачах для универсальных программ решения граничных задач уравнений математической физики

В настоящее время создается множество более или менее универсальных программ для решения граничных задач, основанных на различных методах решения. Часто авторы таких программ проверяют созданные программы на таких граничных задачах, которые хорошо приспособлены к реализуемому в программе методу решения граничных задач. Это обстоятельство затрудняет объективное сравнение различных универсальных программ по основным характеристикам (точность, необходимое машинное время, объем памяти и т. п.). На 3-й Всесоюзной конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности (г. Кишинев, 1973 г.) была отмечена важность создания набора тестовых задач, по решению которых можно судить о сравнительной эффективности различных численных методов и соответствующих программ, и создана комиссия по тестовым задачам, которая признала целесообразным создание тестовых задач двух типов:

- 1) задачи, имеющие точное решение;
- 2) задачи, не имеющие точных решений и представляющие интерес с теоретической или прикладной точки зрения.

Ввиду все усложняющихся алгоритмов и соответствующих программ решения граничных задач набор тестовых задач должен давать возможность по их решению судить об эффективности программ, не вдаваясь при этом в рассмотрение алгоритма, в ней заложенного (по существу рассматривать программу как «черный ящик»). Поэтому в наборе тестовых задач должны быть предусмотрены такие задачи, которые выявляют возможности тестируемых программ в отношении решения граничных задач со сложной геометрией области (многосвязные области, области с угловыми точками), плохими дифференциальными свойствами решения и т. п.

Приведенные в этой главе фундаментальные решения дифференциальных уравнений могут быть применены как тестовые задачи для программ, реализующих решение соответствующих граничных задач. Граничные условия при этом могут быть совершенно произвольные (даже такие, для которых в общем случае не доказаны теоремы существования и единственности). Для этого достаточно в качестве граничных функций $\psi(y)$ в условии (1.2) взять функцию $\sum_R b_R l \Psi_R(x)|_\Gamma$, где b_R — произвольные фиксированные числа, l — произвольный оператор в граничном условии. Что касается геометрии области G , то область может быть совершенно произвольной и многосвязной. Требуется лишь, чтобы вспомогательные точки z_k (или вспомогательные поверхности $\Gamma_1^{(k)}$ для интегрированных фундаментальных решений) не ле-

жали в ней. Следует особо отметить, что соответствующим выбором точек z_k правой части граничных условий (1.2) можно придать любой вид, особенно для полных систем фундаментальных решений. Заметим также, что приблизив точку z_k к любой (в том числе и угловой) точке границы Γ , мы тем самым придаем решению соответствующей тестовой задачи довольно резкий максимум в этой точке.

В заключение приведем фундаментальные решения [66] для некоторых многомерных уравнений, которые также могут быть использованы в соответствующих тестовых задачах.

Для n -мерного уравнения Лапласа имеем

$$\psi_k(x) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} [r(z_k, x)]^{2-n}, \quad n > 2;$$

для итерированного лапласиана $(\Delta)^m$ фундаментальное решение при всех четных n и при нечетных $n > 2m$ задается выражением

$$\psi_k(x) = \frac{(-1)^m \Gamma\left(\frac{n}{2} - m\right)}{2^{2m} \pi^{n/2} \Gamma(m)} [r(z_k, x)]^{2m-n},$$

а при нечетных $n \leq 2m$ — выражением

$$\psi_k(x) = \frac{(-1)^{(n-2)^2}}{2^{2m-1} \pi^{n/2} (m-1)!} [r(z_k, x)]^{2m-n} \ln r(z_k, x),$$

где n — размерность пространства, ω_n — площадь сферической поверхности единичного радиуса в n -мерном пространстве, $\Gamma(m)$ — значение гамма-функции для аргумента m . Заметим, что для наших целей стоящие в начале приведенных выражений постоянные множители можно опустить.

Для уравнения $(\Delta + \lambda^2)u = 0$, где λ — постоянная, фундаментальное решение выражается формулой

$$\psi_k(x) = \frac{1}{4} \left[\frac{\lambda}{2\pi r(z_k, x)} \right]^{(n-2)/2} N_{(n-2)/2} [\lambda r(z_k, x)],$$

где N_ν — функция Неймана или функция Бесселя второго рода.

Для гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^1 \dots \partial x^n} = 0$$

фундаментальное решение определяется произведением функций Хевисайда

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0, \end{cases}$$

$$\psi_k(x) = \prod_{s=1}^n H(x^s - z_k^s).$$

Фундаментальные решения определяются и для одномерных уравнений. Так, например, для уравнений Лапласа $\frac{d^2 u}{d(x^1)^2} = 0$ фундаментальное решение имеет вид

$$\psi_k(x^1) = - (x^1 - z_k^1) H(x^1 - z_k^1) + c_1(x^1 - z_k^1) + c_2,$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, для уравнения Гельмгольца

$$\frac{d^1 u}{d(x^1)^2} + k^2 u = 0, \quad \psi_k(x^1) = \frac{\sin k(x^1 - z_k^1)}{k} H(x^1 - z_k^1).$$

§ 2.30. Функции Грина в приближенных решениях граничных задач

Рассмотренные в настоящей монографии фундаментальные решения (функции) $K(x, y)$ удовлетворяют лишь основному уравнению граничной задачи (см. формулу (1.94))

$$LK(x, z) = \delta(x - z),$$

совершенно не заботясь об удовлетворении граничных условий. Для некоторых канонических областей удается получить такие решения, которые кроме основного уравнения удовлетворяют однородным граничным условиям

$$LG(x, z) = \delta(x - z), \quad lG(x, z)|_{\Gamma} = 0. \quad (2.9)$$

Такую функцию $G(x, y)$ называют функцией Грина для граничной задачи

$$\begin{aligned} Lu &= f(x), & x \in G, \\ lu|_{\Gamma} &= 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

решение которой выражается через функцию Грина

$$u(x) = \int G(x, z) f(z) dz. \quad (2.11)$$

Аналогично для динамических граничных задач

$$\begin{aligned} Lu &= f(x, t), & x \in G, \\ lu|_{\Gamma} &= 0, & t > t_0, \\ Tu &= 0, & t = t_0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

Функция Грина $C(x, z, t, \tau)$ удовлетворяет граничной задаче (2.12) при $f(x, t) = \delta(x - z) \delta(t - \tau)$ и ее решение представляется интегральной формулой:

$$u(x, t) = \int_{t_0}^t \int_G G(x, z, t, \tau) f(z, \tau) dz d\tau, \quad (2.13)$$

где T — оператор начальных условий.

Прежде чем привести аналитические выражения для функции Грина некоторых канонических областей, собранных в работе [41], дадим метод применения функции Грина для областей, отличных от тех, для которых они выведены.

Пусть для некоторой области G с границей $\Gamma = \sum_{k=0}^n \Gamma_k$ поставлена граничная задача

$$\begin{aligned} Lu(x) &= 0, & x \in G, \\ lu(x)|_{\Gamma^{(1)}} &= 0, & lu(x)|_{\Gamma^{(2)}} = \psi(y), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\Gamma^{(1)} = \sum_{k=1}^m \Gamma_k$, $\Gamma^{(2)} = \sum_{k=m+1}^n \Gamma_k$ ($m \leq n$). Обозначим через $G(x, z)$ функцию Грина граничной задачи

$$\begin{aligned} Lu(x) &= f(x), & x \in G, \\ lu(x)|_{\Gamma^{(1)}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Выберем точки z_i так, чтобы они не принадлежали области G и будем искать приближенное решение граничной задачи (2.14) в виде:

$$u^{(N)}(x) = \sum_{i=1}^N c_i G(x, z_i). \quad (2.16)$$

В силу определения функции Грина и выбора точек z_i приближенное решение (2.16) строго удовлетворяет первые два равенства граничной задачи (2.14), а для приближенного удовлетворения неоднородных условий в (2.14) подбираем коэффициенты c_i разложения (2.16) из условия минимизации равенства на границе $\Gamma^{(2)}$

$$\psi(y) - \sum_{i=1}^N c_i \psi_i(y), \quad (2.17)$$

где

$$\psi_i(y) = lG(x, z_i)|_{\Gamma^{(2)}}.$$

Задачу нахождения чисел c_i неоднократно рассматривали в данной монографии.

Таким образом получаем, что алгоритм нахождения приближенного решения граничной задачи (2.14) с помощью функций Грина принципиально не отличается от решения этой же задачи с помощью фундаментальных решений, а с вычислительной точки зрения значительно удобнее, так как в ходе решения можно не заботиться об удовлетворении не только основного уравнения задачи, но и части граничных условий на $\Gamma^{(1)}$. Это дает возможность существенно сократить число N вспомогательных точек z_i .

Для более ясного понимания тех выгод, которые достигаются заменой фундаментальных решений функциями Грина, рассмотрим конкретную задачу.

Пусть в полупространстве G ($0 \leq x^3 \leq \infty$) имеем трехмерную выемку $G^{(1)}$, на границе Γ_1 которой поддерживается температура

$$u(x)|_{\Gamma_1} = \psi(y).$$

Ищется распределение температуры $u(x)$ в области $G - G^{(1)}$, в которой отсутствуют источники тепла, если граница Γ ($z = 0$) полупространства G имеет нулевую температуру. Соответствующая этой физической задаче граничная задача имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0, & x \in G - G^{(1)}, \\ u(x)|_{\Gamma} &= 0, \\ u(x)|_{\Gamma_1} &= \psi(y). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Для решения граничной задачи (2.18) описанными в первой главе методами вспомогательные точки z_i , определяющие фундаментальные решения $\frac{1}{r(x, z_i)}$, следует брать как внутри выемки $G^{(1)}$, так и вне полупространства G , а коэффициенты c_i приближенного решения $\sum_{i=1}^N c_i \frac{1}{r(x, z_i)}$ находить из удовлетворения равенств

$$\sum_{i=1}^N c_i \frac{1}{r(x, z_i)} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \sum_{i=1}^N c_i \frac{1}{r(x, z_i)} \Big|_{\Gamma_1} = \psi(y).$$

Учитывая, что функция Грина $G(x, z)$ граничной задачи

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= f(x), & x \in G, \\ u(x)|_{\Gamma} &= 0 \end{aligned}$$

имеет вид $\frac{1}{r(x, z)} - \frac{1}{r(x, \bar{z})}$, где $\bar{z}(z^1, z^2, -z^3)$ — точка, симметричная относительно плоскости $x^3 = 0$ для точки $z(z^1, z^2, z^3)$, получаем для нахождения коэффициентов приближенного решения

$$\sum_{i=1}^N c_i \left[\frac{1}{r(x, z_i)} - \frac{1}{r(x, \bar{z}_i)} \right] \text{ условия}$$

$$\sum_{i=1}^N c_i \left[\frac{1}{r(x, z_i)} - \frac{1}{r(x, \bar{z}_i)} \right] \Big|_{\Gamma_1} = \psi(y).$$

Заметим, однако, что функции Грина могут обладать более плохими конструктивными свойствами (например, более малым детерминантом Грина), чем фундаментальные решения (особенно для выпуклых областей).

Функции Грина для большого количества одномерных граничных уравнений собраны в [41]. Там же дается способ сведения граничных задач с неоднородными граничными условиями к граничным задачам с однородными условиями.

Приводим здесь функции Грина для тех граничных задач, которые по описанному выше методу могут быть использованы для приближенного решения граничных задач с неканоническими областями. При этом функции Грина, выражающиеся в виде бесконечных рядов или через явно невыписываемые конформно отображающие функции, не приводим, так как в соответствии с § 1.11 вычислительный процесс сильно замедляется, когда явный вид координатных функций (фундаментальных функций или функций Грина) неизвестен.

В плоском случае иногда более удобно записывать функции Грина через комплексные переменные $\xi = x^1 + ix^2$, $\eta = z^1 + iz^2$.

1. G — круг радиуса R , Γ — окружность, $\Delta u = f$, $u|_{\Gamma} = 0$; (Δ — оператор Лапласа)

$$G(x, z) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|R^2 - \xi \bar{\eta}|}{R|\xi - \eta|}.$$

2. G — бесконечный слой: $-\infty \leq x^1 \leq \infty$, $0 \leq x^2 \leq \pi$; Γ состоит из двух прямых $x^2 = 0$ и $x^2 = \pi$; $\Delta u = f$; $u|_{\Gamma} = 0$;

$$G(x, z) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\exp \xi - \exp \bar{\eta}|}{|\exp \xi - \exp \eta|}.$$

3. G — полубесконечная полоса, $0 \leq x^1 \leq \infty$, $0 \leq x^2 \leq \pi$; Γ состоит из трех прямых $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, $x^2 = \pi$; $\Delta u = f$; $u|_{\Gamma} = 0$;

$$G(x, z) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{[\operatorname{ch}(x^1 + z^1) - \cos(x^2 - z^2)] [\operatorname{ch}(x^1 - z^1) - \cos(x^2 + z^2)]}{[\operatorname{ch}(x^1 + z^1) - \cos(x^2 + z^2)] [\operatorname{ch}(x^1 - z^1) - \cos(x^2 - z^2)]}.$$

4. G — полукруг, $(x^1)^2 + (x^2)^2 \leq R^2$, $x^2 \geq 0$; Γ — полуокружность $(x^1)^2 + (x^2)^2 = R^2$ и часть прямой; $u|_{\Gamma} = 0$; $\Delta u = f$;

$$G(x, z) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\xi - \bar{\eta}| |R^2 - \xi \bar{\eta}|}{|\xi - \eta| |R^2 - \xi \eta|}.$$

5. G — четверть круга, $(x^1)^2 + (x^2)^2 \leq R^2$, $x_1 \geq 0$, $x^2 \geq 0$; Γ — четверть окружности $(x^1)^2 + (x^2)^2 = R^2$ и части прямых $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, $u|_{\Gamma} = 0$; $\Delta u = f$;

$$G(x, z) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\xi^2 - \bar{\eta}^2| |R^4 - (\xi \bar{\eta})^2|}{|\xi - \eta|^2 |R^4 - (\xi \eta)^2|}.$$

6. G — четверть (первая) плоскости, $0 \leq x^1 \leq \infty$, $0 \leq x^2 \leq \infty$; Γ состоит из положительных частей прямых $x^1 = 0$, $x^2 = 0$; $\Delta u = f$; $u|_{\Gamma} = 0$;

$$G(x, z) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\xi^2 - \bar{\eta}^2|}{|\xi^2 - \eta^2|}.$$

7. G — полупространство, $-\infty \leq x^1 < \infty$, $0 \leq x^2 < \infty$; Γ — прямая $x^2 = 0$; $\Delta u = f$; $u|_{\Gamma} = 0$;

$$G(x, z) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(x^1 - z^1)^2 + (x^2 + z^2)^2}}{\sqrt{(x^1 - z^1)^2 + (x^2 - z^2)^2}}$$

8. G — круговой сектор, $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi/n$, $n = 1, 2, \dots$; Γ состоит из части окружности $r = R$, из частей лучей $\theta = 0$, $\theta = \pi/n$ и из точки $r = 0$; $\Delta u = f(r, \theta)$ (оператор Лапласа рассматривается в полярной плоской системе координат (r, θ)); $u|_{\Gamma} = 0$, a в начале координат u ограничена;

$$G(x, z) = \sum_{k=1}^{n-3} \left[G_0 \left(r, \theta, \rho, \frac{2k\pi}{n} + \sigma \right) - G_0 \left(r, \theta, \rho, \frac{2k\pi}{n} - \sigma \right) \right],$$

где (r, θ) — полярные координаты точки x , (ρ, σ) — полярные координаты точки z ,

$$G(r, \theta, \rho, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho r_0^*}{r_0 R} \quad r_0 = \sqrt{r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \sigma) + \rho^2}$$

— расстояние между точками x и z ,

$$r_0^* = \sqrt{r^2 - 2r \frac{R^2}{\rho} \cos(\theta - \sigma) + \frac{R^4}{\rho^2}}$$

— расстояние между $x(r, \theta)$ и точкой $z^*(R^r/\rho, \sigma)$, симметричной к точке $z(\rho, \sigma)$ относительно окружности $r = R$.

9. G — четверть (первая) плоскости $x^1 \geq 0$; $x^2 \geq 0$; Γ состоит из положительных частей прямых $x^1 = 0$, $x^2 = 0$;

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, t)$$

$$u(x, t)|_{\Gamma} = 0, \quad u(x, 0) = 0;$$

$$G(x, z, t) = \frac{1}{4a^2 \pi t} \exp \left\{ -\frac{(x^1 - r^1)^2 + (x^2 - z^2)^2}{4a^2 t} \right\} - \\ - \exp \left\{ -\frac{(x^1 + z^1)^2 + (x^2 - z^2)^2}{4a^2 t} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(x^1 + z^1)^2 + (x^2 + z^2)^2}{4a^2 t} \right\} - \\ - \exp \left\{ -\frac{(x^1 - z^1)^2 + (x^2 + z^2)^2}{4a^2 t} \right\}.$$

10. G — полупространство, $-\infty < x^1 < \infty$, $-\infty < x^2 < \infty$, $0 \leq x^3 < \infty$; Γ — плоскость $x^3 = 0$; $\Delta u = f(x)$ (Δ — трехмерный оператор Лапласа); $u|_{\Gamma} = 0$;

$$G(x, z) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x^1 - z^1)^2 + (x^2 - z^2)^2 + (x^3 - z^3)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x^1 - z^1)^2 + (x^2 - z^2)^2 + (x^3 + z^3)^2}} \right];$$

11. G — двугранный угол, $-\infty < x^1 < \infty$, $0 \leq x^2 < \infty$, $0 \leq x^3 < \infty$; Γ состоит из положительных частей плоскостей $x^2 = 0$ и $x^3 = 0$; $\Delta u = f(x)$; $u(x)|_{\Gamma} = 0$,

$$G(x, z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^1 \frac{(-1)^{n+k}}{|x - z_{mnk}|},$$

где z_{mnk} — точки с координатами $((-1)^m z^1, (-1)^n z^2, (-1)^k z^3)$.

12. G — октант, $0 \leq x^1 \leq \infty$, $0 \leq x^2 < \infty$, $0 \leq x^3 < \infty$; Γ состоит из положительных частей плоскости $x^1 = 0$, $x^2 = 0$ и $x^3 = 0$; $\Delta u = f(x)$; $u(x)|_{\Gamma} = 0$

$$G(x, z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^1 \sum_{n=0}^2 \sum_{k=0}^1 \frac{(-1)^{m+n+k}}{|x - z_{mnk}|}.$$

13. G — восьмая часть шара радиуса R , $|x| \leq R$, $x^1 \geq 0$, $x^2 \geq 0$; $x^3 \geq 0$; G состоит из части сферической поверхности $|x| = R$ и частей плоскостей $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, $x^3 = 0$; $\Delta u = f(x)$; $u(x)|_{\Gamma} = 0$;

$$G(x, z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^1 \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^1 (-1)^{m+n+k} \left(\frac{1}{|x - z_{mnk}|} - \frac{R}{|z| \left| x - \frac{R^2}{|z|^2} z_{mnk} \right|} \right).$$

14. G — полушар, $|x| \leq R$, $0 \leq x^3 < \infty$, Γ — состоит из полу-сферы $|x| = R$ и части плоскости $x^3 = 0$; $\Delta u = f(x)$; $u(x)|_{\Gamma} = 0$;

$$G(x, z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^1 (-1)^{n+k} \left(\frac{1}{|x - z_{00k}|} - \frac{1}{|z| \left| x - \frac{R^2}{|z|^2} z_{00k} \right|} \right).$$

15. G — четверть шара, $|x| \leq R$, $x^2 \geq 0$, $x^3 \geq 0$, Γ — состоит из части сферы $|x| = R$ и частей плоскостей $x^2 = 0$; $x^3 = 0$; $\Delta u = f(x)$; $u(x)|_{\Gamma} = 0$;

$$G(x, z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^1 \sum_{k=0}^1 (-1)^{n+k} \left(\frac{1}{|x - z_{0nk}|} - \frac{1}{|z| \left| x - \frac{R^2}{|z|^2} z_{0nk} \right|} \right).$$

16. G — пространство вне сферы, $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \geq R^2$; Γ — сфера, $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = R^2$; $\Delta u = f(x)$; $u(x)|_{\Gamma} = 0$;

$$G(x, z) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r(x, z^*)} - \frac{R}{r(0, z^*)} \cdot \frac{1}{r(x, z)} \right],$$

где точка z^* — сопряженная к точке z относительно сферы $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = R^2$, т. е. z^* лежит на луче Oz , $r(x, z) \times r(x, z^*) = R^2$.

17. G — шар, $|x| \leq R$; Γ — сфера $|x| = R$; $\Delta u = f(x)$; $u|_{\Gamma} = 0$;

$$G(x, z) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{|x-z|} + \frac{R}{|z||x-z^*|} + \frac{1}{R} \ln \frac{2}{1-|x^*|/(|z^*|)+|x-x^*|/(|x^*|)} - \frac{2}{R} \right],$$

где x^* , z^* — точки, сопряженные к точкам x , z относительно рассматриваемой сферы.

18. G — полупространство; $-\infty < x^1 < \infty$, $-\infty < x^2 < \infty$, $x^3 \geq 0$; Γ — плоскость $x^3 = 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, t), \quad t \geq 0, \quad a > 0, \quad u(x, t)|_{\Gamma} = 0; \quad u(x, 0) = 0;$$

$$G(x, z) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \left[\exp \left\{ -\frac{R_1^2}{4a^2 t} \right\} + \exp \left\{ -\frac{R_2^2}{4a^2 t} \right\} \right],$$

где $R_1^2 = (x^1 - z^1)^2 + (x^2 - z^2)^2 + (x^3 - z^3)^2$; $R_2^2 = (x^1 - z^1)^2 + (x^2 - z^2)^2 + (x^3 + z^3)^2$.

19. G — все трехмерное пространство:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t), \quad i = \sqrt{-1}; \quad u(x, 0) = 0;$$

$$G(x, z) = -i \left(\frac{1}{2\pi i t} \right)^{3/2} \exp \left\{ i \frac{(x^1 - z^1)^2 + (x^2 - z^2)^2 + (x^3 - z^3)^2}{2t} \right\}.$$

20. В заключение приведем аналитическое выражение тензора Грина $G(z_k, x)$ [190] для системы уравнений пространственной статистической теории упругости (см. § 2.16) в случае однородного изотропного полупространства со свободной внешней поверхностью $x^3 = 0$

$$\begin{aligned} G_{ij}(z_k, x) = & \frac{B}{2} H_{ij}(z_k, x) + \frac{Bn}{2} \left\{ \left[\frac{\delta_{ij}}{r_1} + \frac{2x^3 z_k^3}{r_1^3} + \frac{1 - \delta_{i3}}{2\pi n(\lambda + \mu)r_2} \right] + \right. \\ & + (x^i - z_k^i)(x^j - z_k^j) \left[\frac{3 - 4\sigma}{r_1^3} - (1 - \delta_{i3})(1 - \delta_{j3}) \left(\frac{6x^3 z_k^3}{r_1^5} + \frac{1}{2\pi n(\lambda + \mu)r_1 r_2^2} \right) \right] + \\ & + \delta_{i3} \delta_{j3} \left[\frac{1}{2\pi n(\lambda + \mu)r_1} + \frac{8x^3 z_k^3}{(\lambda + \mu)r_1^3} + \frac{6x^3 z_k^3 (x^3 + z_k^3)^2}{r_1^5} \right] + \\ & \left. + [\delta_{i3}(x^j - z_k^j) - \delta_{j3}(x^i - z_k^i)] \left[\frac{1}{2\pi n(\lambda + \mu)r_1 r_2} - \frac{6x^3 z_k^3 (x^3 + z_k^3)}{r_1^5} \right] \right\}, \end{aligned}$$

где σ — коэффициент Пуассона, $H_{ij}(z_k, x)$ — фундаментальное ре-

шение теории упругости (см. § 2.16), B — интенсивность силы, действующей в точке z_k по направлению оси Ox^i ,

$$r_1 = \sqrt{(x^1 - z_k^1)^2 + (x^2 - z_k^2)^2 + (x^3 + z_k^3)^2}, \quad r_2 = r_1 + x^3 + z_k^3,$$

$$n = \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)}.$$

§ 2.31. Некоторые особенности проверки удовлетворения фундаментальными функциями соответствующих дифференциальных уравнений

Приведенные в этой главе фундаментальные функции по определению должны удовлетворять соответствующим однородным дифференциальным уравнениям во всем пространстве, кроме точки z (полюса фундаментальной функции). Проверка удовлетворения в точке x , не совпадающей с полюсом z , фундаментальной функцией однородного дифференциального уравнения, не представляет большого труда, если в этой точке фундаментальная функция довольно гладкая. Однако в том случае, когда в точке x в некоторый момент времени t либо фундаментальные функции, либо их производные до порядка m (m — порядок максимальной производной в дифференциальном уравнении) терпят разрывы, то проверка удовлетворения фундаментальными функциями соответствующих дифференциальных уравнений имеет некоторые особенности, что покажем на примере уравнения динамики изотропной упругой среды (§ 2.18).

Рассмотрим систему уравнений Ламе в развернутом виде

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right) + \mu \left[\frac{\partial^2 u_1}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 u_1}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 u_1}{(\partial x^3)^2} \right] - \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0, \quad (2.19)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right) + \mu \left[\frac{\partial^2 u_2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 u_2}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2 u_2}{(\partial x^3)^2} \right] - \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right) + \mu \left[\frac{\partial^2 u_3}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 u_3}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 u_3}{(\partial x^3)^2} \right] - \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0.$$

Покажем, что матрица фундаментальных решений

$$H_{ij}(z_k, x, t) = \frac{1}{4\pi\rho c_2^2} \left\{ \frac{\delta_{ij}}{r(z_k, x)} \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) + c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \left[\eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) \right] \right] \right\}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.20)$$

удовлетворяет системе (2.19) при $z_k \neq x$ в любой момент време-

ни t , даже в моментах прихода поперечной $\left(t = \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right)$ и продольной $\left(t = \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right)$ волны, когда фундаментальные функции (2.20) и их производные терпят разрыв.

Согласно правилам дифференцирования обобщенных функций имеем формулы

$$\delta'(a) = -\frac{\delta(a)}{a}, \quad \delta''(a) = \frac{2\delta(a)}{a^2}; \quad H(a) = \frac{\eta(a)}{a}, \quad H'(a) = \delta(a), \quad (2.21)$$

где $H(a)$ — функция Хевисайда, а

$$\eta(a) = \begin{cases} 0, & a \leq 0, \\ a, & a > 0. \end{cases}$$

Из формул (2.21) легко получаются необходимые нам в дальнейшем соотношения

$$\eta'(a) = a\delta(a) + H(a) = a\delta(a) + \frac{\eta(a)}{a}, \quad \eta''(a) = \delta(a). \quad (2.22)$$

Рассмотрим для произвольной точки $x \neq z_k$ следующие пять моментов времени:

$$\begin{aligned} 1) \quad & 0 < t < \frac{r(z_k, x)}{c_1}; \quad 2) \quad t = \frac{r(z_k, x)}{c_1}; \quad 3) \quad \frac{r(z_k, x)}{c_1} < t < \frac{r(z_k, x)}{c_2}; \\ 4) \quad & t = \frac{r(z_k, x)}{c_2}; \quad 5) \quad t > \frac{r(z_k, x)}{c_2}; \end{aligned}$$

и выпишем для этих моментов первую вектор-строку ($i = 1$) матрицы (2.20):

$$\begin{aligned} 1) \quad & H_{11} = H_{12} = H_{13} \equiv 0; \\ 2) \quad & H_{11} = \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) \right], \\ & H_{12} = \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) \right], \\ & H_{13} = \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^3} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) \right]; \\ 3) \quad & H_{11} = \frac{t}{4\pi\rho} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \frac{1}{r(z_k, x)}, \\ & H_{12} = \frac{t}{4\pi\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2} \frac{1}{r(z_k, x)}, \\ & H_{13} = \frac{t}{4\pi\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^3} \frac{1}{r(z_k, x)}; \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad H_{11} &= \frac{1}{4\pi\rho c_2^2} \left\{ \frac{\delta(t - r(z_k, x)/c_2)}{r(z_k, x)} + c_2^2 \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \left[t - \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - \frac{r(z_k, x)}{c_1} - \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) \right] \right] \right\}, \\
 H_{12} &= \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \left[t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} - \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) \right] \right], \\
 H_{13} &= \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^3} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \left[t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} - \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) \right] \right]; \\
 5) \quad H_{11} &= H_{12} = H_{13} \equiv 0.
 \end{aligned}$$

Покажем, что формулы (2.23) удовлетворяют первому из уравнений (2.19).

Для первого $\left(t < \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right)$ и пятого $\left(t > \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right)$ моментов

времени фундаментальная вектор-функция равна тождественному нулю и, следовательно, удовлетворяет любому из однородных уравнений (2.19). Легко показывается справедливость первого из уравнений (2.19) и для третьего $\left(\frac{r(z_k, x)}{c_1} < t < \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right)$ момента времени. Действительно, из соответствующих формул и (2.23) имеем

$$\rho \frac{\partial^2 H_{1i}}{\partial t} \equiv 0,$$

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\partial H_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial H_{13}}{\partial x^3} \right) + \mu \Delta H_{11} &= \\
 = \frac{(\lambda + \mu)t}{4\pi\rho} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \Delta \frac{1}{r(z_k, x)} + \frac{\lambda t}{4\alpha\rho} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \Delta \frac{1}{r(z_k, x)} &\equiv 0.
 \end{aligned}$$

При выводе последнего равенства меняем порядок дифференцирования, справедливость которого обусловлена достаточной гладкостью компонент фундаментальной функции в этом интервале времени при $z_k \neq x$.

Рассмотрим сейчас второй момент времени $\left(t = \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right)$.

Из соответствующей формулы для H_{11} (2.23) и второго равенства из (2.22) получаем

$$\rho \frac{\partial^2 H_{11}}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) \right]. \quad (2.24)$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\partial H_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial H_{13}}{\partial x^3} \right) + \mu \Delta H_{11} = \\ = \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi\rho} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \Delta \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) \right] \end{aligned}$$

и, следовательно, для левой части первого из уравнений (2.19) имеем выражение

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left\{ (\lambda + 2\mu) \Delta \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{\rho}{r(z_k, x)} \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) \right\}. \quad (2.25) \end{aligned}$$

Для равенства нулю соотношения (2.25) достаточно показать, что выражение в фигурных скобках равно нулю. Для этого вычислим первый член в (2.25), обозначив его через \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\lambda + 2\mu) \Delta \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) \right] = \\ &= (\lambda + 2\mu) \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) \Delta \frac{1}{r(z_k, x)} - \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\eta^3(z_k, x)} \left[(x^1 - z_k^1) \frac{\partial}{\partial x^1} + \right. \\ &+ \left. (x^2 - z_k^2) \frac{\partial}{\partial x^2} + (x^3 - z_k^3) \frac{\partial}{\partial x^3} \right] \eta' \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) + \frac{\lambda + 2\mu}{r(z_k, x)} \Delta \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) = \\ &= - \frac{2}{r(z_k, x)} \frac{\partial}{\partial r} \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) + \frac{1}{r(z_k, x)} \Delta \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) = \\ &= \frac{2(\lambda + 2\mu)}{c_1 r^3(z_k, x)} \eta' \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) + \frac{\lambda + 2\mu}{r(z_k, x)} \Delta \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right), \quad (2.26) \end{aligned}$$

где η' — производная η по всему аргументу.

Для получения окончательного выражения для \mathcal{L} вычислим $\Delta \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right)$. Согласно второй из формул (2.22) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^1} \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) &= - \frac{x_1 - z_k^1}{r(z_k, x) c_1} - \eta' \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right), \\ \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) &= \\ &= \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) \frac{(x^1 - z_k^1)^2}{r_2(z_k, x) c_1^2} - \eta' \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) \frac{r_2(z_k, x) - (x^1 - z_k^1)^2}{c_1 r^3(z_k, x)}, \quad (2.27) \end{aligned}$$

$$\Delta \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) = \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) \frac{1}{c_1^2} \eta' \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) \frac{2}{c_1 r(z_k, x)}.$$

Подставляем последнее равенство в выражение для \mathcal{L} , получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{2(\lambda + 2\mu)}{c_1 r^2(z_k, x)} \eta' \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) + \frac{\lambda + 2\mu}{c_1^2 r(z_k, x)} \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) - \\ &- \frac{2(\lambda + 2\mu)}{c_1 r^2(z_k, x)} \eta' \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) = \frac{\rho}{r(z_k, x)} \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right). \end{aligned}$$

Последнее значение для \mathcal{L} аннулирует выражение в фигурных скобках формулы (2.25) и, следовательно, первое из уравнений (2.19) удовлетворяется для второго момента времени $\left(t = \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right)$.

Осталось показать выполнение первого из уравнений (2.19) для четвертого момента времени $\left(t = \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right)$.

Из соответствующей формулы для H_{11} (2.23) и формул (2.21) и (2.22) получаем

$$\rho \frac{\partial H_{11}}{\partial t^2} = \frac{\delta(t - r(z_k, x)/c_2)}{2\pi r(z_k, x) [tc_2 - r(z_k, x)]^2} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) \right]. \quad (2.28)$$

Первое слагаемое в первом из уравнений (2.19), обозначаемое через \mathcal{L}_1 , в рассматриваемый момент времени будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\partial H_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial H_{13}}{\partial x^3} \right) = \\ &= \frac{\lambda + \mu}{4\pi \rho c_2^2} \left\{ \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) \right] + \right. \\ &+ \left. c_2^2 \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \Delta \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} - \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{\lambda + \mu}{4\pi \rho c_2^2} \left\{ \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) \right] - c_2^2 \frac{\partial^3}{(\partial x^2)^2} \Delta \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая последовательно (2.26) и (2.27) (заменой c_1 на c_2), из последнего равенства получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \frac{\lambda + \mu}{4\pi \rho c_2^2} \left\{ \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) \right] - \right. \\ &- \left. c_2^2 \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{2}{c_2 r^2(z_k, x)} \eta' \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) + \frac{1}{r(z_k, x)} \Delta \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) \right] \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda + \mu}{4\pi\rho c_2^2} \left\{ \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) - \right. \right. \\
&- c_2^2 \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{2}{c_2 r^2(z_k, x)} \eta' \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) \right] - c_2^2 \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \times \right. \\
&\quad \left. \left. \times \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) \frac{1}{c_2^2} - \eta' \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) \frac{2}{c_2 r(z_k, x)} \right] \right\} \equiv 0.
\end{aligned}$$

В дальнейшем понадобится следующее выражение:

$$\begin{aligned}
\Delta \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) \right] &= \Delta \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) \right] + \\
&+ \frac{1}{r(z_k, x)} \Delta \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) - \frac{2}{r^2(z_k, x)} \frac{\partial}{\partial r} \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) = \\
&= \frac{1}{r(z_k, x)} \frac{2c_2 t}{r(z_k, x) [c_2 t - r(z_k, x)]^2} \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) - \\
&- \frac{2\delta(t - r(z_k, x)/c_2)}{r^2(z_k, x) c_2^2 [t - r(z_k, x)/c_2]} = \frac{2}{r(z_k, x) [c_2 t - r(z_k, x)]^2} \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Рассмотрим второе слагаемое в первом из уравнений (2.19):

$$\begin{aligned}
\mu \Delta H_{11} &= - \frac{\mu}{4\pi\rho c_2^2} \Delta \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) \right] = \\
&= \frac{\mu}{4\pi\rho} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \Delta \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Учитывая равенство (2.29) и формулу

$$\Delta \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \eta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) \right] = \frac{1}{r(z_k, x)} \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) \frac{1}{c_2^2},$$

для второго члена в первом из уравнений (2.19) получаем выражение

$$\begin{aligned}
\mu \Delta H_{11} &= \\
&= \frac{\delta(t - r(z_k, x)/c_2)}{2\pi r(z_k, x) [tc_2 - r(z_k, x)]^2} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \delta \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) \right],
\end{aligned}$$

которое совместно с формулой (2.28) и равенством $\mathcal{L} = 0$ обеспечивает выполнение первого из уравнений (2.19) и для рассматриваемого четвертого момента времени.

Мы показали, что первая вектор-строка матрицы (2.20) удовлетворяет первому из уравнений (2.19) при $z_k \neq x$ в любой момент времени. Аналогично эта же вектор-строка удовлетворяет и

двум последним уравнениям (2.19), вторая и третья вектор-строки удовлетворяют уравнениям Ламе (2.19).

Рассмотрим сейчас тот общий случай, когда сосредоточенная в точке z_k сила по направлению оси Ox^i меняется во времени по закону $f(t)$, причем $f(t) \equiv 0$ при $t \leq 0$. В этом случае матрица фундаментальных решений $H(z_k, x, t)$ принимает вид (см. § 2.18)

$$H_{ij}(z_k, x, t) = \frac{1}{4\pi\rho c_2^2} \left\{ \frac{\delta_{ij}}{r(z_k, x)} f\left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right) + c_2^2 \frac{\partial}{\partial x^i \partial x^j} \int_0^1 \frac{1}{r(z_k, x)} \left[\eta\left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right) - \eta\left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right) \right] f(t-t') dt' \right\}. \quad (2.30)$$

Покажем, что первая вектор-строка (H_{11}, H_{12}, H_{13}) матрицы (2.30) удовлетворяет первому из уравнений Ламе (2.19). Согласно формулам (2.30) при $t < r(z_k, x)/c_1$ компоненты этого вектора равны нулю $H_{11} = H_{12} = H_{13} = 0$ и, следовательно, они удовлетворяют однородной системе (2.19). В этом случае рассмотрим два интервала времени:

1. $\frac{r(z_k, x)}{c_1} < t < \frac{r(z_k, x)}{c_2}$;
2. $t > \frac{r(z_k, x)}{c_2}$.

Для первого интервала времени из формул (2.30) получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} H_{11} &= \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \int_{r(z_k, x)/c_1}^t \left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right) f(t-t') dt' \right], \\ H_{12} &= \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^3} \left[\frac{\partial}{r(z_k, x)} \int_{r(z_k, x)/c_1}^t \left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right) f(t-t') dt' \right], \\ H_{13} &= \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^3} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \int_{r(z_k, x)/c_1}^t \left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right) f(t-t') dt' \right]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Для дальнейшего нам понадобится формула дифференцирования интеграла по параметру

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \psi(t, t') dt' = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial \psi(t, t')}{\partial t} dt' + \beta'(t) \psi(\beta(t), t) - \alpha'(t) \psi(\alpha(t), t), \quad (2.32)$$

согласно которой легко получаем нужные выражения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{r(z_k, x)/c_1}^t \left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) f(t-t') dt' \right] &= \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) f(0) + \\ &+ \int_{r(z_k, x)/c_1}^t \left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) f'_t(t-t') dt' = \\ &= \int_{r(z_k, x)/c_1}^t \left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) f'_t(t-t') dt', \quad (2.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_{r(z_k, x)/c_1}^t \left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) f(t-t') dt' \right] &= \\ &= \int_{r(z_k, x)/c_1}^t \left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) f''_{tt}(t-t') dt'. \end{aligned}$$

Согласно второй из формул (2.33) получаем

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 H_{11}}{\partial t^2} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{r(z_k, x)/c_1}^t \left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) f(t-t') dt \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \int_{r(z_k, x)/c_1}^t \left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) f''_{tt}(t-t') dt \right]. \quad (2.34) \end{aligned}$$

Используя правило интегрирования по частям

$$\int_a^b \psi(t) dt = \int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du,$$

при $u = t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1}$ ($du = dt'$) и $dv = f''_{tt}(t-t') dt$ ($v = f'_t(t-t')$) получаем из (2.34)

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 H_{11}}{\partial t^2} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) f'_t(t-t') \Big|_{r(z_k, x)/c_1}^t \right] - \\ &- \int_{r(z_k, x)/c_1}^t f'_t(t-t') dt' = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \int_{r(z_k, x)/c_1}^t f'_t(t-t') dt' \right]. \end{aligned}$$

Вновь применяя к последнему выражению правило интегрирования по частям при $u = 1$ ($du = 0$) и $dv = f'_t(t-t') dt'$ ($v = f(t-t')$) окончательно получаем

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 H_{11}}{\partial t^2} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial'}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} f(t-t') \Big|_{r(z_k, x)/c_1} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} f \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Вычислим выражение в левой части первой из формул (2.19) без члена $\rho \frac{\partial^2 H_{11}}{\partial t^2}$, для которого мы получили формулу (2.35)

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\partial H_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial H_{13}}{\partial x^3} \right) + \mu \Delta H_{11} &= \\ = \frac{1}{4\pi\rho} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\Delta \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \int_{r(z_k, x)/c_1}^t \left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) f(t-t') dt' \right] \right] &= \\ = \frac{1}{4\pi\rho} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left\{ \Delta \int_{r(z_k, x)/c_1}^t \left[\frac{t'}{r(z_k, x)} - \frac{1}{c_1} \right] f(t-t') dt' \right\}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Для вычисления выражения в фигурных скобках последнего равенства воспользуемся формулой дифференцирования интеграла по параметру (2.32):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^1} \int_{r(z_k, x)/c_1}^t \left[\frac{t'}{r(z_k, x)} - \frac{1}{c_1} \right] f(t-t') dt' &= \frac{z_k^1 - x^1}{r^3(z_k, x)} \int_{r(z_k, x)/c_1}^t t' f(t-t') dt - \\ &- \frac{1}{c_1} \frac{\partial r(z_k, x)}{\partial x^1} \left[\frac{r(z_k, x)/c_1}{r(z_k, x)} - \frac{1}{c_1} \right] f \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) = \\ &= -\frac{z_k^1 - x^1}{r^3(z_k, x)} \int_{r(z_k, x)/c_1}^t t' f(t-t') dt'. \end{aligned}$$

Используя вновь формулу дифференцирования интеграла по параметру, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \int_{r(z_k, x)/c_1}^t \left[\frac{t'}{r(z_k, x)} - \frac{1}{c_1} \right] f(t-t') dt' &= \\ = -\frac{r^2(z_k, x) - 3(z_k^1 - x^1)^2}{r^5(z_k, x)} \int_{r(z_k, x)/c_1}^t t' f(t-t') dt' + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{z_k^1 - x^1}{r^2(z_k, x)} \frac{z_k^1 - x^1}{c_1 r(z_k, x)} \frac{r(z_k, x)}{c_1} f\left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right) = \\
 = & - \frac{r^2(z_k, x) - 3(z_k^1 - x^1)^2}{r^5(z_k, x)} \int_{r(z_k, x)/c_1}^t t' f(t-t') dt' + \frac{(z_k^1 - x^1)^2}{c_1^2 r^3(z_k, x)} f\left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right).
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Совершенно аналогично получаются вторые производные по другим переменным

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} \int_{r(z_k, x)/c_1}^t \left[\frac{t'}{r(z_k, x)} - \frac{1}{c_1} \right] f(t-t') dt' & = \frac{(z_k^2 - x^2)^2}{c_1^2 r^2(z_k, x)} f\left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right) - \\
 - \frac{r^3(z_k, x) - 3(z_k^2 - x^2)^2}{r^5(z_k, x)} \int_{r(z_k, x)/c_1}^t t' f(t-t') dt',
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2} \int_{r(z_k, x)/c_1}^t \left[\frac{t'}{r(z_k, x)} - \frac{1}{c_1} \right] f(t-t') dt' & = \frac{(z_k^3 - x^3)^2}{c_1^2 r^3(z_k, x)} f\left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right) - \\
 - \frac{r^2(z_k, x) - 3(z_k^3 - x^3)^2}{r^5(z_k, x)} \int_{r(z_k, x)/c_1}^t t' f(t-t') dt'.
 \end{aligned}$$

Используя формулы (2.37) и (2.38) из (2.36), получаем

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\partial H_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial H_{13}}{\partial x^3} \right) + \mu \Delta H_{11} & = \\
 = \frac{1}{4\pi\rho} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{c_1^2 r(z_k, x)} f\left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right) \right] & = \\
 = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} f\left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right) \right].
 \end{aligned}$$

Последнее выражение совпадает с правой частью равенства (2.35) и, следовательно, первое из уравнений Ламе (2.19) удовлетворяется для рассматриваемого интервала времени.

Для второго интервала времени $\left(t < \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right)$ первая вектор-строка матрицы фундаментальных функций (2.30) имеет

следующий вид

$$\begin{aligned}
 H_{11} &= \frac{1}{4\pi\rho c_2^2} \left\{ \frac{1}{r(z_k, x)} f\left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right) + \right. \\
 &+ c_2^2 \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \int_0^t \eta\left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right) - \eta\left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right) \right] f(t-t') dt \Big\}, \\
 H_{12} &= \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \int_0^t \left[\eta\left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \eta\left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right) \right] f(t-t') dt \right], \\
 H_{13} &= \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^3} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \int_0^t \eta\left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right) - \eta\left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right) \right] f(t-t') dt'.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим интегральный член в последних выражениях:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \int_0^t \left[\eta\left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right) - \eta\left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right) \right] f(t-t') dt = \\
 &= \int_0^{r(z_k, x)/c_1} \left[\eta\left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right) - \eta\left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right) \right] f(t-t') dt' + \\
 &+ \int_{r(z_k, x)/c_1}^{r(z_k, x)/c_2} \left[\eta\left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right) - \eta\left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right) \right] f(t-t') dt' + \\
 &+ \int_{r(z_k, x)/c_2}^t \left[\eta\left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right) - \eta\left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right) \right] f(t-t') dt' = \\
 &= \int_{r(z_k, x)/c_1}^{r(z_k, x)/c_2} \left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right) f(t-t') dt' + \frac{r(z_k, x)(c_1 - c_2)}{c_1 c_2} \int_{r(z_k, x)/c_2}^t f(t-t') dt'.
 \end{aligned}$$

Учитывая выражение для \mathcal{L} и формулу (2.32), легко находим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= \int_{r(z_k, x)/c_1}^{r(z_k, x)/c_2} \left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right) f'_t(t-t') dt + \\
 &+ \frac{r(z_k, x)(c_1 - c_2)}{c_1 c_2} \left[f(0) + \int_{r(z_k, x)/c_1}^t f'_t(t-t') dt' \right] =
 \end{aligned}$$

$$= \int_{r(z_k, x)/c_1}^{r(z_k, x)/c_2} \left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) f'_t(t-t') dt' + \frac{r(z_k, x)(c_1 - c_2)}{c_1 c_2} \int_{r(z_k, x)/c_2}^t f'_t(t-t') dt'.$$

Интегрируя по частям последнее выражение, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} &= - \left(t' - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) f(t-t') \Big|_{r(z_k, x)/c_1}^{r(z_k, x)/c_2} + \\ &+ \int_{r(z_k, x)/c_1}^{r(z_k, x)/c_2} f(t-t') dt' + \frac{r(z_k, x)(c_1 - c_2)}{c_1 c_2} f \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) = \\ &= \int_{r(z_k, x)/c_1}^{r(z_k, x)/c_2} f(t-t') dt'. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно получается нужная формула:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = f \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) - f \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right). \quad (2.39)$$

Используя формулу дифференцирования интеграла по параметру, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^1} \left[\frac{J}{r(z_k, x)} \right] &= - \frac{z_k^1 - x^1}{r^3(z_k, x)} \int_{r(z_k, x)/c_1}^{r(z_k, x)/c_2} t' f(t-t') dt', \\ \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{J}{r(z_k, x)} \right] &= - \frac{r^2(z_k, x) - 3(z_k^1 - x^1)^2}{r^5(z_k, x)} \int_{r(z_k, x)/c_1}^{r(z_k, x)/c_2} t' f(t-t') dt' - \\ &- \frac{(z_k^1 - x^1)^2}{r^3(z_k, x)} \left[\frac{1}{c_2^2} f \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) - \frac{1}{c_1^2} f \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Аналогично, для производных по другим переменным имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} \left[\frac{J}{r(z_k, x)} \right] &= - \frac{r^2(z_k, x) - 3(z_k^2 - x^2)^2}{r^5(z_k, x)} \int_{r(z_k, x)/c_1}^{r(z_k, x)/c_2} t' f(t-t') dt' - \\ &- \frac{(z_k^2 - x^2)^2}{r^3(z_k, x)} \left[\frac{1}{c_2^2} f \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) - \frac{1}{c_1^2} f \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) \right], \\ \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2} \left[\frac{J}{r(z_k, x)} \right] &= - \frac{r^2(z_k, x) - 3(z_k^3 - x^3)^2}{r^5(z_k, x)} \int_{r(z_k, x)/c_1}^{r(z_k, x)/c_2} t' f(t-t') dt' = \\ &= \frac{(z_k^3 - x^3)^2}{r^3(z_k, x)} \left[\frac{1}{c_2^2} f \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2} \right) - \frac{1}{c_1^2} f \left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1} \right) \right] \end{aligned}$$

и, следовательно, для $\Delta \left[\frac{J}{r(z_h, x)} \right]$ получаем выражение

$$\Delta \left[\frac{J}{r(z_h, x)} \right] = \frac{1}{r(z_h, x)} \left[\frac{1}{c_1^2} f \left(t - \frac{r(z_h, x)}{c_1} \right) - \frac{1}{c_2^2} f \left(t - \frac{r(z_h, x)}{c_2} \right) \right]. \quad (2.40)$$

Вычислим выражение $\Delta \frac{f(t - r(z_h, x)/c_2)}{r(z_h, x)}$. Для этого воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^1} \left[\frac{f \left(t - \frac{r(z_h, x)}{c_2} \right)}{r(z_h, x)} \right] &= \\ &= - \frac{z_h^1 - x^1}{r^3(z_h, x)} f \left(t - \frac{r(z_h, x)}{c_2} \right) - \frac{z_h^1 - x^1}{c_2^2 r^2(z_h, x)} f' \left(t - \frac{r(z_h, x)}{c_2} \right), \\ \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{f \left(t - \frac{r(z_h, x)}{c_2} \right)}{r(z_h, x)} \right] &= \frac{(z_h^1 - x^1)^2}{c_2^2 r^3(z_h, x)} f'' \left(t - \frac{r(z_h, x)}{c_2} \right) - \\ - \frac{r^2(z_h, x) - 3(z_h^1 - x^1)^2}{r^5(z_h, x)} \left[f' \left(t - \frac{r(z_h, x)}{c_2} \right) + \frac{r(z_h, x)}{c_2} f' \left(t - \frac{r(z_h, x)}{c_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

По аналогии с последним равенством можно написать

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} \left[\frac{f(t - r(z_h, x)/c^2)}{r(z_h, x)} \right] &= \frac{(z_h^2 - x^2)^2}{c_2^2 r^3(z_h, x)} f'' \left(t - \frac{r(z_h, x)}{c_2} \right) - \\ - \frac{r^2(z_h, x) - 3(z_h^2 - x^2)^2}{r^5(z_h, x)} \left[f \left(t - \frac{r(z_h, x)}{c_2} \right) + \frac{r(z_h, x)}{c_2} f' \left(t - \frac{r(z_h, x)}{c_2} \right) \right], \\ \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2} \left[\frac{f(t - r(z_h, x)/c_2)}{r(z_h, x)} \right] &= \frac{(z_h^3 - x^3)^2}{c_2^2 r^3(z_h, x)} f'' \left(t - \frac{r(z_h, x)}{c_2} \right) - \\ - \frac{r^2(z_h, x) - 3(z_h^3 - x^3)^2}{r^5(z_h, x)} \left[f \left(t - \frac{r(z_h, x)}{c_2} \right) + \frac{r(z_h, x)}{c_2} f' \left(t - \frac{r(z_h, x)}{c_2} \right) \right] \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\Delta \left[\frac{f(t - r(z_h, x)/c_2)}{r(z_h, x)} \right] = \frac{1}{c_2^2 r(z_h, x)} f'' \left(t - \frac{r(z_h, x)}{c_2} \right). \quad (2.41)$$

Имея полученные вспомогательные формулы, можно приступить к вычислению левой части первого из уравнений Ламе:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\partial H_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial H_{13}}{\partial x^3} \right) + \mu \Delta H_{11} &= \\ = \frac{\lambda + \mu}{4\pi\rho c_2^2} \frac{\partial}{(\partial x^1)^2} f \frac{(t - r(z_h, x)/c_2)}{r(z_h, x)} + \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu\rho} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \Delta \frac{J}{r(z_h, x)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\pi} \frac{f\left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right)}{r(z_k, x)} = \frac{1}{4\pi c_2^2 r(z_k, x)} f''\left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right) + \\
& + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \left[f\left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right) - f\left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right) \right] \right]. \quad (2.42)
\end{aligned}$$

Для того чтобы удовлетворялось первое из уравнений Ламе, достаточно, чтобы правая часть формулы (2.42) была бы равна $\rho \frac{\partial H}{\partial t^2}$. Действительно,

$$\begin{aligned}
\partial \frac{\partial^2 H_{11}}{\partial t^2} &= \frac{1}{4\pi c_2^2 r(z_k, x)} f''\left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \frac{1}{r(z_k, x)} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t^2} = \\
&= \frac{1}{4\pi c_2^2 r(z_k, x)} f''\left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right) + \\
&+ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left[\frac{1}{r(z_k, x)} \left[f\left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right) - f\left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right) \right] \right]. \quad (2.43)
\end{aligned}$$

Некоторые из полученных в настоящем параграфе формул имеют вполне определенный физический смысл. Так, например, формула (2.43) показывает, что первая компонента вектора силы инерции в момент времени t зависит лишь от функции f в момент времени $\left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_1}\right)$ и $\left(t - \frac{r(z_k, x)}{c_2}\right)$.

Таким образом, получили, что вектор смещения (H_{11}, H_{12}, H_{13}) удовлетворяет первому из уравнений (2.19). Аналогично показывается, что этот вектор, так же как два других вектора (H_{21}, H_{22}, H_{23}) и (H_{31}, H_{32}, H_{33}) удовлетворяют полной системе уравнений Ламе.

ГЛАВА III

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

§ 3.1. Линейная независимость и полнота некоторых систем гармонических функций

Доказательство сходимости приближенного метода решения граничной задачи

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0, \quad (3.1)$$

$$u|_S = \psi(S), \quad (3.2)$$

который будет изложен ниже, основывается на линейной независимости и полноте некоторой системы гармонических функций (фундаментальных решений). Поэтому дадим еще два доказательства полноты этой системы, отличных от доказательств § 1.1.

Пусть G_1 — область с достаточно гладкой границей S_1 (например S_1 может быть поверхностью Ляпунова), целиком включающая область G с границей S , и минимальное расстояние от S до S_1 больше нуля, т. е. поверхность S_1 не имеет общих точек с поверхностью S .

Введем обозначения для фундаментальных решений пространственного оператора Лапласа:

$$\frac{1}{r(M_i, M)} = \omega_i(M), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

где $M_i \in S_1$ — элементы счетного множества точек, расположенных всюду плотно на поверхности S_1 .

Теорема 1. Система функций $\{\omega_i(M)\}$ линейно независима на поверхности S , т. е. для любого N из равенства

$$\sum_{i=1}^N c_i \omega_{k_i}(M) \equiv 0 \quad (3.4)$$

следует

$$\sum_{i=1}^N |c_i| = 0,$$

где k_i — целые числа.

Допустим, что найдутся такие ограниченные, не все равные нулю числа c_i , что для некоторого N выполняется соотношение (3.4), и пусть некоторое $c_r \neq 0$ ($r \leq N$). Из (3.4) и теоремы единственности для задачи Дирихле следует, что для $\bar{G} = G + S$

$$\sum_{i=1}^N c_i \omega_{k_i}(M) \equiv 0, \quad M \in \bar{G}, \quad (3.5)$$

из аналитичности левой части (3.5) следует соотношение

$$\sum_{i=1}^N c_i \omega_{k_i}(M) \equiv 0, \quad M \in G_1. \quad (3.6)$$

Устремим M к M_{k_r} . Тогда $|c_r \omega_{k_r}| \rightarrow \infty$, а все остальные слагаемые в (3.6) остаются ограниченными, что противоречит равенству (3.6) и, следовательно, допущению $c_r \neq 0$.

Из теоремы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Можно построить такую ортонормированную на S систему функций $\{\varphi_i(M)\}$, что*

$$\varphi_i(M) = \sum_{k=1}^i A_{ik} \omega_k(M). \quad (3.7)$$

где A_{ik} — коэффициенты ортонормализации.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Ортонормированная система функций $\{\varphi_i(M)\}$ замкнута в пространстве $L^2(S)$ интегрируемых с квадратом функций, заданных на контуре S .*

Докажем сначала полноту системы функций $\{\varphi_i(M)\}$ в пространстве $L^2(S)$. Пусть $\gamma(M) \in L^2(S)$. Рассмотрим функцию

$$\iint_S \gamma(M) \frac{1}{r(M, N)} dS_M, \quad N \in S_1,$$

непрерывную на S_1 ; она принимает на всюду плотном множестве точек $N_i \in S_1$ нулевые значения, поэтому

$$\iint_S \gamma(M) \frac{1}{r(M, N)} dS_M \equiv 0, \quad N \in S_1. \quad (3.8)$$

Но (3.8) является потенциалом простого слоя, и так как на замкнутой поверхности Ляпунова S_1 и в бесконечности он равен нулю, то в силу единственности решения внешней задачи Дирихле (с однородными условиями на бесконечности) он равен нулю всюду в V_e . Это возможно только в том случае [71], если плотность потенциала равна нулю. Таким образом, полнота системы $\{\varphi_i(M)\}$ в пространстве $L^2(S)$ доказана. Но в силу известной теоремы о том, что всякая полная в L^2 система является также замкнутой, получаем доказательство теоремы 3.

Из доказанной теоремы и определения полноты непосредственно следует, что система $\{\varphi_i(M)\}$ полна в \mathbf{C} и $L^q(S)$, где $q > 2$. Что касается замкнутости, то из известной теоремы функционального анализа [68] следует, что система $\{\varphi_i(M)\}$ замкнута в пространствах $L^q(S)$, где $q > 2$. Из теоремы 3 не следует, что система $\{\varphi_i(M)\}$ замкнута в \mathbf{C} или $L^q(S)$ при $q > 2$. Докажем, что система замкнута в \mathbf{C} , а значит, в $L^q(S)$ при $1 \leq q < \infty$.

Теорема 4. Система $\{\varphi_i(M)\}$ замкнута в пространстве $\mathbf{C}(S)$ всех непрерывных функций, т. е. для любой функции $\gamma(M) \in \mathbf{C}(S)$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N_0(\varepsilon)$ и такая система коэффициентов a_i ($i = 1, \dots, n$), что если $n \geq N_0(\varepsilon)$, то

$$\max_{M \in S} \left| \gamma(M) - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(M) \right| < \varepsilon.$$

При доказательстве этой теоремы воспользуемся следующим утверждением: любую непрерывную функцию на поверхности S можно равномерно приблизить гармоническими полиномами, если область V с границей S обладает устойчивостью решения задачи Дирихле в отношении деформации области¹⁾.

Пусть $P_m(M)$ — такой гармонический полином порядка m для функции $\gamma(M) \in C(S)$, что

$$\max_{M \in S} |\gamma(M) - P_m(M)| < \varepsilon/2.$$

Рассмотрим в области G_1 с границей S_1 внутреннюю задачу Дирихле

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \\ u|_{S_1} &= P_m|_{S_1} \end{aligned} \quad (3.9)$$

и представим решение в виде потенциала простого слоя:

$$u(M) = \int \int_{S_1} \Omega(x) \ln \frac{1}{r(x, M)} dS_x, \quad (3.10)$$

где плотность $\Omega(M)$ выражается через нормальные производные решений внутренней и внешней задач Дирихле. Достаточная гладкость S_1 порождает гладкие граничные значения для задачи (3.9), и поэтому обеспечивает существование этих производных. Рассмотрим выражение (3.10) для точек $M_i \in S_1$. Подынтегральное выражение будет ограничено и непрерывно (если плотность непрерывна), и поэтому интеграл можно заменить римановой

¹⁾ В плоском случае, когда S является кривой, аналогичное утверждение непосредственно следует из теорем, соответствующих теоремам Вейерштрасса и комплексной области (см., например, теорему Рунге [61] о равномерном приближении функции комплексного переменного комплексными полиномами).

суммой с числом слагаемых m_i (или какой-либо кубатурной формулой с узлами в точках $x_i \in S_1$) так, чтобы

$$\max_{M \in S} \left| \int \int_{S_1} \Omega(M) \ln \frac{1}{r(x_1, M)} dS_x - \sum_{i=1}^m a_i \ln \frac{1}{r(x_1, M)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $n \geq \max(m, m_1) = N_0(\varepsilon)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \max_{M \in S} \left| \gamma(M) - \sum_{i=1}^n a_i \omega_i(M) \right| \leq \\ & \leq \max_{M \in S} |\gamma(M) - P_m(M)| + \max_{M \in S} \left| P_m(M) - \sum_{i=1}^n a_i \omega_i(M) \right| < \\ & < \frac{\delta}{2} + \max_{M \in S} \left| \int \int_{S_1} \Omega(M) \ln \frac{1}{r(x, M)} dS_x - \sum_{i=1}^n a_i \ln \frac{1}{r(x_i, M)} \right| < \varepsilon, \end{aligned}$$

и замкнутость системы $\{\omega_i(M)\}$ и, следовательно, системы $\{\varphi_i(M)\}$ доказана.

§ 3.2. Приближенный метод решения задачи Дирихле

Рассмотрим задачу (3.1), (3.2) и выпишем основную формулу теории гармонических функций для точек $x \in V$ и $x \in V_e$ соответственно:

$$\begin{aligned} u(x) = \frac{1}{4\pi} \int \int_S \frac{d}{dn} \frac{1}{r(x, M)} \psi(M) dS_M - \\ - \frac{1}{4\pi} \int \int_S \frac{1}{r(x, M)} \varphi(M) dS_M, \quad x \in V, \quad (3.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{4\pi} \int \int_S \frac{d}{dn} \frac{1}{r(x, M)} \psi(M) dS_M - \\ - \frac{1}{4\pi} \int \int_S \frac{1}{r(x, M)} \varphi(M) dS_M, \quad x \in V_e, \quad (3.12) \end{aligned}$$

где

$$\psi(M) = u|_S, \quad \varphi(M) = \frac{du}{dn} \Big|_S.$$

Так как в случае задачи Дирихле функция $\psi(M)$ задана, то (3.12) можно записать в виде

$$\int \int_S \frac{1}{r(x, M)} \varphi(M) dS_M = F(x), \quad (3.13)$$

где $F(x)$ — известная функция:

$$F(x) = \int_S \int \psi(M) \frac{d}{dn} \frac{1}{r(x, M)} dS_M.$$

В этом параграфе будет показано, что из условия (3.13) можно определить неизвестную функцию $\varphi(M)$ для задачи Дирихле следующим образом. Построим коэффициенты разложения неизвестной функции $\varphi(M)$ в ряд Фурье по полной системе $\{\varphi_i(M)\}$, полученной путем ортонормализации системы (3.3). Подставив найденные приближенные значения функции $\varphi(M)$ в формулу (3.11) и выполнив необходимые кубатуры, находим приближенное значение решения задачи Дирихле (3.1), (3.2) в любой точке области V .

Решением уравнения (3.13) будем называть функцию, определенную на S и удовлетворяющую (3.13) для произвольной точки x , лежащей вне замкнутой области V . Рассматривая нормальную производную обеих частей (3.13), переходим к пределу при $x \rightarrow M_0 \in S$ и, учитывая соотношения

$$\begin{aligned} \frac{du(\xi)}{dn_e} &= \frac{du(\xi)}{dn_0} - 2\pi\varrho(\xi), \\ \frac{du(\xi)}{dn_i} &= \frac{du(\xi)}{dn_0} + 2\pi\rho(\xi), \end{aligned} \quad (3.14)$$

получаем

$$\varphi(M_0) + \frac{1}{2\pi} \int_S \int \varphi(M) \frac{d}{dn} \frac{1}{r(M_0, M)} dS_M = \lim_{dn_x} \frac{d}{dn_x} \left[\frac{1}{2\pi} F(x) \right]. \quad (3.15)$$

Для существования предела в правой части (3.15) достаточно потребовать непрерывность $\psi'(M)$ (как это следует из примера Ляпунова [62], выполнения условия Гельдера для функции $\psi(M)$ недостаточно для существования нормальных производных потенциала двойного слоя). Уравнение (3.15) есть интегральное уравнение для внешней задачи Неймана; оно, как известно, однозначно разрешимо. Покажем, что решение уравнения (3.15) удовлетворяет также функциональному уравнению (3.13). Подставив решение уравнения (3.15) в (3.13), получим функцию

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \int \frac{d}{dn} \left[\frac{1}{r(x, M)} \right] \psi(M) dS_M - \frac{1}{4\pi} \int_S \int \frac{1}{r(x, M)} \varphi(M) dS_M. \quad (3.16)$$

Надо показать, что $u(x) \equiv 0$ при $x \in V_e$. В правой части равенства (3.16) стоит сумма потенциалов простого и двойного слоя, и поэтому $u(x)$ — гармоническая функция. В (3.16) сле-

дует, что на границе S области V функция $u(x)$ принимает нулевые значения. Если, кроме того, будет показано, что

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0, \tag{3.17}$$

то из единственности решений внешней задачи Неймана получим $u(x) \equiv 0$. Для пространственного случая равенство (3.17) следует из самого вида правой части (3.16). Что касается плоского случая, то уравнения (3.15) и (3.16) принимают вид

$$\begin{aligned} \varphi(M_0) + \frac{1}{2\pi} \int_S \varphi(M) \frac{d}{dn} \ln \frac{1}{r(M_0, M)} dS_M = \\ = \lim_{x \rightarrow M_0} \frac{d}{dn} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_S \psi(M) \frac{d}{dn} \ln \frac{1}{r(x, M)} dS_M \right\}, \\ u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{d}{dn} \left[\ln \frac{1}{r(x, M)} \right] \psi(M) dS_M - \frac{1}{2\pi} \int_S \ln \frac{1}{r(x, M)} \varphi(M) dS_M, \end{aligned}$$

и в силу известных свойств гармонических потенциалов

$$\int_S \varphi(M) dS_M = 0. \tag{3.18}$$

Отсюда, как известно, следует доказываемое свойство (3.17) для $u(x)$ и в плоском случае, так как условие (3.18) является достаточным для равенства нулю второго интеграла (потенциала простого слоя) в выражении для $u(x)$.

Остается показать, что функциональное уравнение (3.13) имеет единственное решение. Для этого рассмотрим однородное функциональное уравнение

$$\int_S \int_S \varphi(M) \frac{1}{r(x, M)} dS = 0, \quad x \in V_e, \tag{3.19}$$

и покажем, что оно имеет только тривиальное решение. Дифференцируя (3.19) по нормали, переходим к пределу при $x \rightarrow M_0 \in S$ и, учитывая соотношения (3.14), получаем

$$\varphi(M_0) + \frac{1}{2\pi} \int_S \int_S \varphi(M) \frac{1}{r(M_0, M)} dS_M = 0.$$

Это уравнение для внешней задачи Неймана с однородными граничными значениями, как известно, имеет только нулевое решение.

Переходим к описанию алгоритма приближенного метода решения граничной задачи Дирихле (3.1), (3.2).

Обозначим через Φ_i координаты Фурье разложения функции $\varphi(M)$ в ряд по функциям $\varphi_i(M)$:

$$\Phi_i = \iint_S \varphi(M) \varphi_i(M) dS,$$

где $\varphi_i(M)$ определяется из (3.7),

$$\varphi_i(M) = \sum_{k=1}^i A_{ik} \omega_k(M).$$

Запишем (3.13) для точек $M_k \in S_1$ в виде

$$\iint_S \varphi(M) \omega_k(M) dS = F_k, \quad (3.20)$$

где

$$F_k = \iint_S \psi(M) \frac{d}{dn} \omega_k(M) dS,$$

а ω_k определяются из (3.3).

Умножая первые i уравнений на коэффициенты A_{ki} ($k = 1, \dots, i$) и складывая их, получим

$$\iint_S \varphi(M) \sum_{k=1}^i A_{ki} \omega_k(M) dS = \iint_S \varphi(M) \varphi_i(M) dS = \Phi_i = \sum_{k=1}^i A_{ki} F_k.$$

Так как в случае задачи Дирихле F_k известны, а A_{ki} получается в процессе ортонормализации системы $\{\omega_i(M)\}$, то коэффициенты Фурье неизвестной функции $\varphi(M)$ вычислены. Введем обозначения:

$$\varphi^{(N)}(M) = \sum_{i=1}^N \Phi_i \varphi_i(M),$$

$$u^{(N)}(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{r(x, M)} \varphi^{(N)}(M) dS_M + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{d}{dn} \left[\frac{1}{r(x, M)} \right] \psi(M) dS_M, \quad x \in V.$$

Из теоремы 4 непосредственно следует асимптотическое равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \varphi(M) - \sum_{i=1}^N \Phi_i \varphi_i(M) \right\|_{L_2} = 0. \quad (3.21)$$

Кроме того, легко доказывается, что для любой внутренней точки x области V и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N_0 , что если

$N > N_0$, то $|u(x) - u^{(N)}(x)| < \varepsilon$. Действительно, ясно, что

$$\begin{aligned} |u(x) - u^{(N)}(x)| &= \frac{1}{4\pi} \left| \int_S \frac{1}{r(x, M)} [\varphi(M) - \varphi^{(N)}(M)] dS \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \int_S \int_S \left| \frac{1}{r(x, M)} [\varphi(M) - \varphi^{(N)}(M)] \right| dS. \end{aligned} \quad (3.22)$$

В силу соотношения (3.21) можно выбрать N так, что будет выполняться неравенство

$$\left\{ \int_S \int_S [\varphi(M) - \varphi^{(N)}(M)]^2 dS \right\}^{1/2} < \frac{4\pi\varepsilon\sigma}{\sqrt{|S|}}, \quad (3.23)$$

где σ — минимальное расстояние от точки x до границы S , $|S|$ — площадь поверхности S . Подставляя (3.23) и (3.22) и применяя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} |u(x) - u^{(N)}(x)| &\leq \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_S \int_S \left[\frac{1}{r(x, M)} \right]^2 dS \right\} \int_S \int_S [\varphi(M) - \varphi^{(N)}(M)]^2 dS \Bigg\}^{1/2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Этот метод приближенного решения граничных задач будем называть вторым способом решения задачи Дирихле.

Полнота системы функций $\{\varphi_i(M)\}$ дает возможность воспользоваться следующим алгоритмом для приближенного решения задачи Дирихле (3.1), (3.2) (первый способ). Для заданной функции $\psi(M)$ (граничное значение искомой гармонической функции $u(x)$) составим ряд Фурье по базису $\{\varphi_i(M)\}$:

$$\psi(M) = \sum_{k=1}^N f_k \varphi_k(M), \quad f_k = \int_S \int_S \psi(M) \varphi_k(M) dS.$$

Тогда в силу полноты системы $\{\varphi_i(M)\}$ в смысле метрики пространства L_2

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_S \int_S \left[\psi(M) - \sum_{k=1}^N f_k \varphi_k(M) \right]^2 dS = 0.$$

Ряд

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x)$$

для любой $x \in V$ сходится и представляет решение задачи (3.1), (3.2). В самом деле, пусть $G(x, M)$ — функция Грина задачи Дирихле для области V . Тогда из теоремы существования

вытекает, что решение может быть представлено в виде

$$u(x) = \iint_S \psi(M) \frac{\partial G}{\partial n} dS.$$

Введем обозначение

$$u^{(N)}(x) = \sum_{k=1}^N f_k \varphi_k(x), \quad x \in V,$$

и рассмотрим разность $|u(x) - u^{(N)}(x)|$. Применяя неравенство Коши — Буяковского и учитывая конечность интеграла $\iint_S \left[\frac{\partial G}{\partial u} \right]^2 dS$ при $x \in V$, находим, как и выше, что

$$u(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} u^{(N)}(x).$$

Заметим, что в отличие от первого способа второй способ позволяет найти решение задачи Дирихле с помощью граничных значений нормальной производной искомой функции, которые получаются при решении функционального уравнения (3.13). В связи с этим следует иметь в виду, что на практике часто встречаются задачи, в которых представляет интерес нахождение именно граничных значений нормальной производной. Этим и объясняется составление специальных таблиц для вычисления граничных значений нормальной производной. Для таких задач второй способ имеет преимущество перед первым способом.

Систему линейно независимых функций будем называть *ненадежной*, если

$$\lim G_n = G > 0, \quad G_n = G(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n);$$

при $G = 0$ систему назовем *ненадежной*.

Теорема 5. Система функций $\{\omega_i(M)\}$ *ненадежна*, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что при всех $n > N$ будет

$$G_n < \varepsilon.$$

Будем предполагать, что точки x_i ($i = 1, \dots, n$) перенумерованы таким образом, что $r(x_i, x_{i+1}) < h$, где $h \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (это всегда возможно в силу всюду плотного распределения точек x_i). Из (1.42) при четном $n = 2k$ получаем

$$G_n \leq \prod_{j=1}^k G_2(\omega_{2j-1}, \omega_{2j}),$$

а при нечетном $n = 2k + 1$ получаем

$$G_n \leq \iint_S \omega_n^2 dS \prod_{j=1}^k G_2(\omega_{2j-1}, \omega_{2j}).$$

Для $G_2(\omega_{2i-1}, \omega_{2i})$ имеем

$$G_2(\omega_{2i-1}, \omega_{2i}) = \int_S \int \omega_{2i-1}^2 dS \int_S \int \omega_{2i}^2 dS - \left(\int_S \int \omega_{2i-1} \omega_{2i} dS \right)^2.$$

Учитывая, что

$$\omega_{2i-1} = \frac{1}{r(x_{2i-1}, M)} = \frac{1}{r(x_{2i}, M) + \xi(M)}, \quad (3.24)$$

где

$$|\xi(M)| = r(x_{2i-1}, M) - r(x_{2i}, M) \leq r(x_{2i-1}, x_{2i}) < h,$$

для $G_i(\omega_{2i-1}, \omega_{2i})$ имеем

$$G_2(\omega_{2i-1}, \omega_{2i}) = O(h^2). \quad (3.25)$$

Получим асимптотическое равенство (3.25). Из (3.24) имеем

$$\frac{1}{r(x_{2i-1}, M)} = \frac{1}{r(x_{2i}, M)} \left[1 - \frac{\xi(M)}{r(x_{2i}, M)} \right] + O(h^2).$$

Подставим последнее равенство в выражения для $G_2(\omega_{2i-1}, \omega_{2i})$:

$$\begin{aligned} & \int \int \frac{1}{r^2(x_{2i}, M)} \left[1 - \frac{\xi(M)}{r(x_{2i}, M)} \right] dS \int \int \frac{1}{r^2(x_{2i}, M)} dS - \\ & - \left\{ \int \int \frac{1}{r^2(x_{2i}, M)} \left[1 - \frac{\xi(M)}{r(x_{2i}, M)} \right] dS \right\}^2 + O(h^2) = \\ & = \int \int \frac{1}{r^2(x_{2i}, M)} \left[1 - \frac{2\xi(M)}{r(x_{2i}, M)} \right] dS \int \int \frac{1}{r^2(x_{2i}, M)} dS - \\ & - \left[\int \int \frac{1}{r^2(x_{2i}, M)} dS \right]^2 - \int \int \frac{2\xi M}{r^2(x_{2i}, M)} dS \int \int \frac{1}{r^2(x_{2i}, M)} dS + \\ & + O(h^2) = O(h^2). \end{aligned}$$

Для G_n будем иметь

$$G_n = O(h^{2k}).$$

Отсюда следует ненадежность системы $\{\omega_i(M)\}$ (так как $h \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$).

Это рассуждение непосредственно переносится на случай любой потенциальной системы. Таким образом, можно будет доказать, что если S и S_1 не имеют общих точек, то всякая потенциальная система не является надежной.

Для проверки скорости стремления к нулю детерминанта Грама были проведены следующие численные эксперименты для плоского случая. Пусть имеется окружность S радиуса 1, на которой требуется ортонормировать систему функций $\{\ln r(x_i, M)\}$ ($i = 1, \dots, 28$), где $x_i \in S_1^{(1)}$, $S_1^{(1)}$ — концентрическая окружность радиуса 2. Точки x_i распределены на $S_1^{(1)}$ равномерно с

шагом $\pi/14$. Были вычислены элементы детерминанта Грама этой системы. Интегрирование производилось с погрешностью, не превышающей 10^{-6} . Ранг определителя с точностью до 10^{-9} оказался равным 9, т. е. в результате перебора всевозможных определителей десятого и выше порядков не удалось обнаружить среди них отличный от машинного нуля (вычисления проводились на машине БЭСМ-2).

Приведем максимальные значения G_i определителей i -го порядка для $i = 1, \dots, 9$:

$$G_1 = 3,8; G_2 = 9,7; G_3 = 9,5; G_4 = 5,9; G_5 = 0,4; \\ G_6 = 2,7 \cdot 10^{-2}; G_7 = 9,2 \cdot 10^{-4}; G_8 = 2,8 \cdot 10^{-5}; G_9 = 3,7 \cdot 10^{-8}.$$

Затем точки x_i были взяты равномерно по концентрической окружности $S_2^{(2)}$ радиуса 1,1 с шагом $\pi/12$. Количество точек было равно 24.

Соответствующие значения определителей Грама G_i ($i = 1, \dots, 24$) для этого случая:

$$\begin{array}{llll} G_1 = 3,6; & G_7 = 184; & G_{13} = 1,8; & G_{19} = 5,1 \cdot 10^{-4}; \\ G_2 = 8,4; & G_8 = 236; & G_{14} = 0,7; & G_{20} = 8,6 \cdot 10^{-5}; \\ G_3 = 28; & G_9 = 95; & G_{15} = 0,2; & G_{21} = 1,5 \cdot 10^{-5}; \\ G_4 = 48; & G_{10} = 38; & G_{16} = 8,9 \cdot 10^{-2}; & G_{22} = 2,9 \cdot 10^{-6}; \\ G_5 = 80; & G_{11} = 13; & G_{17} = 1,6 \cdot 10^{-2}; & G_{23} = 4,9 \cdot 10^{-7}; \\ G_6 = 130; & G_{12} = 4,7; & G_{18} = 3 \cdot 10^{-3}; & G_{24} = 4,9 \cdot 10^{-8}. \end{array}$$

Из сравнения соответствующих значений определителей Грама видно, что во втором случае значения определителей гораздо больше, что, как будет показано ниже, дает возможность ортонормировать соответствующую систему более точно.

Наконец, точки x_i были взяты равномерно распределенными на концентрической окружности $S_1^{(3)}$ радиуса 1,05 с тем же шагом $\pi/12$. Количество точек равно 24. Приведем соответствующие значения определителей Грама G_i ($i = 1, \dots, 24$):

$$\begin{array}{llll} G_1 = 4,1; & G_7 = 4,7; & G_{13} = 2,9; & G_{19} = 0,5; \\ G_2 = 4,7; & G_8 = 4,6; & G_{14} = 2,5; & G_{20} = 0,3; \\ G_3 = 4,8; & G_9 = 4,3; & G_{15} = 2,0; & G_{21} = 0,2; \\ G_4 = 4,9; & G_{10} = 4,0; & G_{16} = 1,6; & G_{22} = 0,1; \\ G_5 = 3,9; & G_{11} = 3,7; & G_{17} = 1,2; & G_{23} = 0,08; \\ G_6 = 4,8; & G_{12} = 3,3; & G_{18} = 0,8; & G_{24} = 0,03. \end{array}$$

Результаты численных экспериментов показывают, что при приближении вспомогательного контура S_1 к основному контуру S соответствующий определитель Грама увеличивается. Заметим, что приведенное доказательство ненадежности систем потенциальных функций существенно опирается на постоянство вспомогательного контура S_1 . В противном случае из неравенства (3.24) нельзя получить (3.25), так как для некоторых точек $M \in S$

функции $r(x_{2i}, M)$ и $\xi(M)$ могут иметь один и тот же порядок малости.

В [113] исследовалось явление «неустойчивости» систем функций и указан класс систем (надежные системы), для которых метод Ритца остается устойчивым. В дальнейшем был указан значительно более широкий класс (сильно минимальные системы), для которого метод Ритца сохраняет устойчивость. Система функций $\{\omega_i\}$ сильно минимальна в H_A , если наименьшее собственное число матрицы Ритца n -го порядка ограничено снизу положительной постоянной, одной и той же для всех n . Так как рассматриваемые потенциальные системы могут применяться в качестве координатной системы в методе Ритца, то представляет интерес вопрос о том, являются ли они сильно минимальными. Пусть S и S_1 — концентрические окружности и точки x_i ($i = 1, \dots, 2n$), где n четно, расположены равномерно на S_1 . Справедливо следующее предложение.

Системы $\{\ln r(x_i, M)\}$ и $\left\{ \frac{\partial}{\partial n} \ln r(x_i, M) \right\}$ не сильно минимальны в H_E , где E — тождественный оператор.

Поскольку H_E совпадает с L_2 , матрица Ритца совпадает с определителем Грама, и значит утверждается, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n , что наименьшее по модулю собственное число определителя Грама $2n$ -го порядка будет меньше ε . Достаточно привести доказательство для системы $\{\ln r(x_i, M)\}$. Надо доказать, что наименьшее собственное значение матрицы (1.111) сколь угодно близко к нулю.

Нетрудно проверить, что для данного случая (S_i и S — концентрические окружности, x_i ($i = 1, \dots, 2n$) расположены равномерно на S_1) выполняются равенства

$$\int \omega_i \omega_{i+k} dS = \int \omega_i \omega_{i-k} dS, \quad \int \omega_j \omega_r dS = \int \omega_\xi \omega_\eta dS$$

при

$$|j - r| = |\xi - \eta|, \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1,$$

$$i, j, r, \eta = 1, \dots, N, \quad k < i, \quad i + k = i + k \text{ mod } (n - 1),$$

поэтому матрица (1.111) имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix},$$

где

$$a_s = a_{n+2-s} \quad (s = 2, 3, \dots, n),$$

$$a_s = \int \ln r(x_i, M) \ln r(x_{j+s-1}, M) dS_M. \quad (3.26)$$

получаем асимптотические равенства

$$\lambda_n = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.30)$$

Покажем, что при четном $n/2$ модуль характеристического числа $\lambda_{n/2}$ будет сколь угодно мал. Действительно,

$$\lambda_{n/2} = \sum_{k=1}^n (i)^k a_k = \sum_{k=1}^{n/2} [(ia_{4k-3} - a_{4k-1}) - (a_{4k} - a_{4k-1})].$$

Действительная часть комплексного числа $\lambda_{n/2}$ равна нулю в силу четности $n/2$ и очевидных равенств

$$a_{4k-2} = a_{4[(n/2)+1-k]}, \quad a_{4k} = a_{4[(n/2)+i-k]-2}, \quad k = 1, \dots, n/2,$$

а мнимая часть равна

$$\operatorname{Im}(\lambda_{n/2}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{2k-1}.$$

Доказательство асимптотического равенства ²⁾

$$\operatorname{Im}(\lambda_{n/2}) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

аналогично доказательству (3.30).

Потенциальные системы будем называть *разрывными*, если S_1 совпадает с S , т. е. если точки x_i расположены на основном контуре S . Справедливы следующие предложения.

Система функций $\{\ln r(x_i, M)\}$, где точки x_i расположены всюду плотно на S , линейно независима и полна в пространстве $L^2(S)$.

Система функций $\{\omega_i(M)\}$, где ω_0 — отличная от нуля постоянная,

$$\omega_i(M) = \frac{\partial}{\partial n_M} \ln r(x_i, M), \quad i = 1, 2, \dots,$$

x_i расположены всюду плотно на S , линейно независима и полна в $L^2(S)$.

Линейная независимость этих систем очевидна и доказывается аналогично линейной независимости потенциальных систем. Достаточно доказать, что операторы

$$\int_S \varphi(M) \ln r(x, M) dS_M, \quad \int_S \varphi(M) \frac{\partial}{\partial n} \ln r(x, M) dS_M \quad (3.31)$$

переводят пространство $L^2(S)$ в \mathbb{C} .

²⁾ Из конструкции потенциальных систем ясно, что они не являются минимальными и, тем более, сильно минимальными. Доказанное предложение интересно тем, что дает асимптотику наименьшего собственного числа матрицы Грама.

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству полноты потенциальных систем (см. теорему 3). Рассмотрим интегральную операцию

$$y(t) = \int_S \varphi(M) K(x, M) dS_M, \quad (3.32)$$

и будем предполагать, что все особенности ядра $K(x, M)$ сосредоточены на диагонали, т. е. при $x = M$. Известно [68], что если ядро операции (3.32) удовлетворяет условиям

$$\left\{ \int \|\text{grad}_M K(x, M) | [r(x, M)]^{1-\mu} \|^p dS_M \right\}^{1/p} \leq E, \quad (3.33)$$

$$\left\{ \int_S \left[\frac{|K(x, M)|}{[r(x, M)]^\mu} \right]^p dS_M \right\}^{1/p} \leq F, \quad (3.34)$$

где через grad обозначен градиент, вычисленный по переменной x , то интегральная операция (3.32) отображает пространство $L^{p'}$ (и любое L^q при $q \geq p'$) в пространство $\text{Lip } \mu$ Липшица с показателем μ , где p' — сопряженный показатель ($1/p + 1/p' = 1$).

Нетрудно видеть, что для ядер интегральных операций (3.31) условия (3.33), (3.34) выполняются в случае кусочно-гладких контуров при $p = p' = 2$ и $\mu < 1/2$.

Система функций $\left\{ \frac{\partial}{\partial n} \ln r(x_i, M) \right\}$ применяется для решения задачи Неймана в G

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S &= \psi(y). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Приближенное решение задачи (3.35) можно получить из разложения функции

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y \psi(y) dS_y$$

по системе $\{\ln r(x_i, y)\}$:

$$\varphi(y) \approx \sum_{k=1}^N a_k \ln r(x_k, y).$$

Действительно, приближенное решение задачи (3.35) имеет вид

$$u \approx \sum_{k=1}^N a_k \text{Arg}(z - z_k),$$

где $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$ и $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ — координаты точек x_k и y соответственно

$$z = y^{(1)} + iy^{(2)}, \quad z_k = x_k^{(1)} + ix_k^{(2)}.$$

Рассмотрим систему пространственных функций

$$\left\{ \frac{1}{r(x_i, M)} \right\}, \quad (3.36)$$

где x_i расположены на поверхности S . Справедливо следующее предложение.

Система функций (3.36) полна в $L^{p'}$ при $p' = (2 - \alpha)(1 - \alpha)$ при любом $\alpha > 0$ и замкнута в L^p ($p = 2 - \alpha$).

Для доказательства заметим, что условия (3.33), (3.34) выполняются для $K(x, M) = \frac{1}{r}(x, M)$ при $p = 2 - \alpha$, $\mu < \alpha/(2 - \alpha)$ и любом $\alpha > 0$. Поэтому интегральная операция

$$\int \frac{1}{r(x, M)} \varphi(M) dS_M \quad (3.37)$$

переводит пространство $L^{p'}$, $p' = (2 - \alpha)(1 - \alpha)$ при любом $\alpha > 0$ в пространство Липшица $\text{Lip } \mu$, $\mu < \alpha/(2 - \alpha)$.

Пусть функция $\varphi(M) \in L^{p'}$ ортогональна всем функциям системы (3.36). Докажем, что $\varphi(M) = 0$. Непрерывная функция (3.37) на всюду плотном множестве точек x_i на S принимает нулевые значения, поэтому тождественно равна нулю на S , а значит (в силу гармоничности) и во всем трехмерном пространстве. Но из работы [71] следует, что тогда плотность простого слоя $\varphi(N)$ равна нулю и, следовательно, система (3.36) замкнута в L_p при $p = 2 - \alpha$.

§ 3.3. О решении граничных задач с помощью неортогональных рядов

В гл. I был изложен метод определения коэффициентов разложения по схеме неортогональных функций. Идея этого метода заключается в следующем. Пусть имеется разложение $\sum l_k g_k(s)$ функции $F(s)$ по нормированной системе $\{g_k(s)\}$ ($k = 1, 2, \dots$). Введем обозначения:

$$F_n(s) = - \sum_{i=0}^n l_i g_i(s), \quad F_0(s) = g_0(s) = F(s), \quad l_0 = -1. \quad (3.38)$$

Для вычисления l_k были предложены формулы

$$l_k = \int_S F_{k-1}(s) g_k(s) ds. \quad (3.39)$$

Этот способ вычисления коэффициентов разложения непосредственно может быть применен в первом методе решения граничных задач, так как в этом случае разлагаемая функция известна. Численные эксперименты показали однако значительно мень-

шую точность первого метода по сравнению со вторым методом решения граничных задач.

В настоящем параграфе будет указана такая модификация второго способа решения граничных задач на основе формул (3.38), (3.39), реализация которой не будет встречать указанных в гл. I трудностей.

Рассмотрим для конкретности метод функциональных уравнений для плоской внутренней граничной задачи Дирихле в G :

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \\ u|_S &= f(s), \end{aligned} \quad (3.40)$$

где S — граница области G , $f(s)$ — заданная функция. Сущность второго способа заключается в следующем. Строится наилучшее (в смысле метрики $L_2(S)$) разложение нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}|_S = \varphi(s)$ искомой функции по функциям полной линейно независимой системы $\{\ln r(x_k, s)\} = \{\omega_k(s)\}$, где $r(x_k, s)$ — расстояние между точками x_k и граничной точкой s , $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — множество точек, расположенных всюду плотно на вспомогательном контуре S_1 , который целиком содержит область G . Имея такое разложение, решение задачи (3.40) можно найти из основного интегрального равенства теории гармонических функций:

$$u(x) = \int_S \varphi(s) \ln r(x, s) ds + \int_S f(s) \frac{\partial}{\partial n} \ln r(x, s) ds, \quad x \in G. \quad (3.41)$$

Для минимальности выражения $\left\| \varphi(s) - \sum_{k=1}^n a_k \omega_k(s) \right\|$ по коэффициентам a_k необходимо и достаточно, чтобы a_k были решениями системы

$$\sum_{k=1}^n a_k \int_S \omega_k(s) \omega_i(s) ds = \int_S \varphi(s) \omega_i(s) ds, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.42)$$

Но в силу тождества Грина

$$\int_S \varphi(s) \omega_i(s) ds = \int_S f(s) \frac{\partial}{\partial n} \omega_i(s) ds \quad (3.43)$$

и система (3.42) принимает вид

$$\sum_{k=1}^n a_k \int_S \omega_k(s) \omega_i(s) ds = \int_S f(s) \frac{\partial}{\partial n} \omega_i(s) ds. \quad (3.44)$$

Если предварительно получить ортонормированную систему

$$\{\varphi_k(s)\} = \left\{ \sum_{i=1}^k A_{ki} \omega_i(s) \right\},$$

где A_{ki} — коэффициенты ортонормализации, то наилучшим (в смысле L_2) разложением функции $\varphi(s)$ будет, как известно, разложение в ряд Фурье

$$\sum_{k=1}^n b_k \varphi_k(s) = \sum_{k=1}^n b_k \sum_{i=1}^n A_{ki} \omega_i(s) = \sum_{k=1}^n c_k \omega_k(s),$$

где b_k — коэффициенты Фурье функции $\varphi(s)$, а

$$c_k = \sum_{i=1}^k A_{ik} b_i. \quad (3.45)$$

В силу строгой нормированности пространства L_2 и, следовательно, единственности обобщенного полинома наилучшего приближения, решения a_k системы (3.44) и c_k из (3.45) должны быть тождественны:

$$a_k = c_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Таким образом, второй способ решения граничных задач можно рассматривать как соединение вариационного метода (для нормальной производной искомой функции) с применением формулы Грина (3.41).

Ясно, что если найти разложение $\sum_{k=1}^n d_k \omega_k(s)$ не для нормальной производной искомой функции, а для ее граничного значения $f(s)$, то приближенное решение в любой точке M области G можно найти непосредственно из выражения

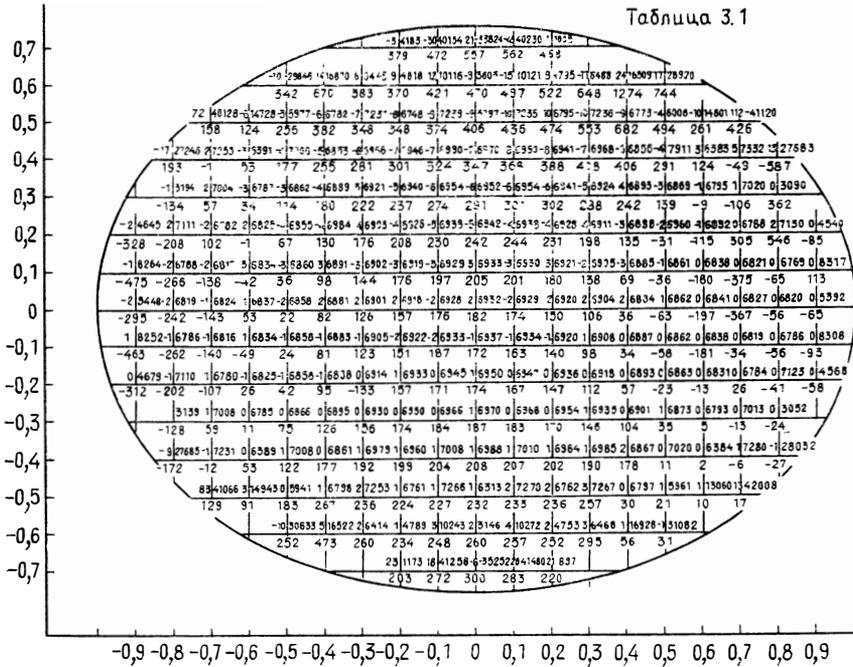
$$u(M) = \sum_{k=1}^n d_k \ln r(x_k, M)$$

и отпадает необходимость проведения квадратур, связанных с применением формулы (3.41).

Однако, как показали многочисленные машинные эксперименты³⁾, для одного и того же числа функций, участвующих в разложении, первый способ дает значительно менее точные результаты, чем второй. Поэтому дополнительные вычисления, связанные с применением формулы Грина, вполне оправданы. Для иллюстрации ниже приведены погрешности решения задачи Дирихле для функции $u = \arctg \frac{x^2 - 2}{x^2 - 2}$ в случае эллипса с полуосями $a = 1$, $b = 0,75$. В табл. 3.1 даны эти погрешности для $x_k \in S_1^{(2)}$ и $n = 24$ в узлах сетки с шагом $h = 0,1$. Верхнее левое число в каждом узле соответствует погрешности второго метода. Затем идет погрешность первого метода и ниже — погрешность

³⁾ Численные эксперименты проводились с помощью стандартных программ, составленных в ВЦ АН ГССР.

Таблица 3.1



метода конечных разностей, полученная при помощи стандартной программы (простейшая аппроксимация оператора Лапласа и снос по Коллатцу) с шагом $h = 0,1$ (числа умножены на 10^7).

Однако при увеличении числа ортонормируемых функций или при удалении вспомогательного контура S_1 от основного контура S соответствующий детерминант Грама для ненадежной системы $\{\omega_i(s)\}$ стремится к нулю, что делает практически невозможным проведение ортонормализаций. Как уже было отмечено в гл. I, для концентрических окружностей S и S_1 радиусов $r = 1$ и $r_1 = 2$ соответственно, матричным методом ортонормализации не удалось ортонормировать 10 из 28 функций $\ln r(x_i, s)$ ($i = 1, \dots, 28$), где x_i — равностоящие точки S_1 . Метод ортонормализации Шмидта позволил ортонормировать только 20 функций. Еще труднее оказалось ортонормировать эти же функции для окружности радиуса $r_1 = 5$. В этом случае метод Шмидта дает возможность ортонормировать 9 функций, а матричный метод — 5 функций (все вычисления проводились на машине БЭСМ-2).

На первый взгляд может показаться, что формулу (3.39) невозможно применить при втором методе, так как в этом случае коэффициенты l_k будут зависеть от неизвестной функции $\varphi(s)$ (нормальной производной решения задачи (3.40)). Однако сим-

Из табл. 3.2 видно, что второй метод решения граничных задач дает более точные результаты, чем первый метод. Таким образом, если вспомогательный контур S_1 по каким-либо соображениям необходимо взять достаточно далеко от основного контура S (например, при необходимости гармонически продолжить решение задачи (3.10) достаточно далеко от S), то в этом случае целесообразнее воспользоваться модифицированным вторым методом решения граничных задач. Аналогичным образом можно модифицировать второй метод и для других граничных задач.

Укажем на одну из возможных причин более высокой точности первого метода по сравнению со вторым. Погрешность $\varepsilon(x)$ приближенного решения задачи (3.40) в точке x в первом методе решения граничных задач дается формулой

$$\varepsilon(x) = \int_S \left(f(s) - \sum_{k=1}^n d_k \omega_k(s) \right) \frac{\partial G(x, s)}{\partial n} ds,$$

где $G(x, s)$ — функция Грина; применяя для ее оценки неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$|\varepsilon(x)| \leq \left\{ \int_S \left[f(s) - \sum_{k=1}^n d_k \omega_k(s) \right]^2 ds \right\}^{1/2} \left\{ \int_S \left[\frac{\partial G(x, s)}{\partial n} \right]^2 ds \right\}^{1/2}. \quad (3.46)$$

Для оценки погрешности $\varepsilon_1(x)$ второго метода решения граничных задач имеем

$$|\varepsilon_1(x)| \leq \left\{ \int_S \left[\varphi(r) - \sum_{k=1}^n a_k \omega_k(s) \right]^2 ds \right\}^{1/2} \left\{ \int_S [\ln r(x, s)]^2 ds \right\}^{1/2}. \quad (3.47)$$

Известно, что функция Грина $G(x, s)$ имеет логарифмическую особенность, и поэтому при равенстве

$$\left\| f(s) - \sum_{k=1}^n d_k \omega_k(s) \right\|_{L_2} = \left\| \varphi(s) - \sum_{k=1}^n a_k \omega_k(s) \right\|_{L_2}$$

оценка (3.46) может принимать большее значение, чем оценка (3.47).

§ 3.4. О приближенном решении одной смешанной граничной задачи теории гармонических функций

Рассмотрим граничную задачу в многосвязной плоской (трехмерной) области (рис. 10), ограниченной контуром (поверхностью):

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{в } G, \\ u|_{\Gamma_i} &= \omega(s) + c_i, \\ \int_{\Gamma_i} \frac{\partial u}{\partial n} ds &= 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.48)$$

где c_i — постоянные, не фиксированные заранее.

Если для голоморфной функции $g(z) = u + iv$ соотношение Коши — Римана

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial n} \tag{3.49}$$

справедливо и на границе области G , то рассматриваемая задача (3.48) в плоском случае совпадает с так называемой видоизменной задачей Дирихле [115]: найти функцию $u(x, y)$, гармоническую в G , непрерывную $G + \Gamma$ и удовлетворяющую следующим условиям: 1) $u(x, y)$ является действительной частью функции $g(z)$, голоморфной в G ; 2) $u(x, y)$ удовлетворяет граничному условию $u(s) = \omega(s) + c_i$, где $\omega(s)$ — непрерывная функция, а c_i — действительные постоянные, подлежащие определению⁴⁾.

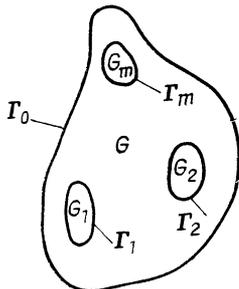


Рис. 10

К этой задаче сводятся многие прикладные проблемы: она встречается при приближенном решении граничных задач теории аналитических функций [115], при конформном отображении многосвязных областей [115], при расчете поля заряженных нитей, расположенных вблизи проводящих цилиндров [149] и др.

Видоизменная задача Дирихле в случае, когда одно из c_i фиксировано, имеет единственное решение [115], которое можно представить в виде потенциала двойного слоя⁵⁾. При этом интегральному уравнению для плотности можно придать такой вид, что соответствующее однородное уравнение не будет иметь отличных от нуля решений. Однако практическое решение этих интегральных уравнений, несмотря на их фредгольмов характер (в случае областей, ограниченных кривыми Ляпунова), затруднено, так как ядро имеет подвижную неопределенность вида $0/0$, и это ограничивает точность вычисления коэффициентов линейной системы, которой заменяется интегральное уравнение при приближенном решении.

⁴⁾ Для того чтобы задача (3.48) совпадала с видоизменной задачей Дирихле [115], вместо условия (3.49) достаточно потребовать выполнения условия

$$\int_{\Gamma_i} \frac{\partial v}{\partial s} dS = \int_{\Gamma_i} \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

⁵⁾ Это решение удовлетворяет условию (3.49) в замкнутой области $\bar{G} = G + S$, откуда вследствие однозначности сопряженной функции $v(x, y)$ имеем $\int_{\Gamma_i} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$. В силу теоремы единственности для задачи (3.48)

это означает, что в плоском случае задача (3.48) эквивалентна видоизменной задаче Дирихле.

Для приближенного решения задачи (3.48) (при $c_m = 0$) в [73] предлагается применить метод конечных разностей. Интегральные условия на границе заменяются конечно-разностной аппроксимацией, причем вместо контуров Γ_i рассматриваются прямоугольные контуры Γ'_i (рис. 11) и условия

$$\int_{\Gamma'_i} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

Отсюда и из гармоничности u следуют интегральные условия (3.48). Такая замена контуров представляет определенные удобства с точки зрения программирования решения соответствующей конечно-разностной системы. Надо, однако, заметить, что матрица этой системы может оказаться особенной (в [73] не исследуется вопрос о разрешимости и единственности решения полученной конечно-разностной системы). Поэтому целесообразнее упомянутые интегральные условия рассматривать именно в виде (3.48), т. е. на Γ_i . Для этого из всех внутренних узлов области, расстояния от которых до границы Γ_i меньше νh , где h — шаг сетки, а ν — некоторая постоянная (например, $\nu \leq \sqrt{2}$) надо провести нормаль к Γ_i , и точки пересечения этой нормали с Γ_i рассматривать в качестве узлов квадратурной формулы для интегралов⁶⁾. Нетрудно

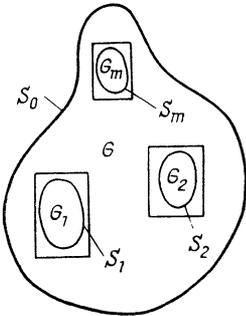


Рис. 11

проверить, что матрица полученной таким образом конечно-разностной системы в силу ее неразложимости (при достаточно малом h) будет удовлетворять условиям известной теоремы Гаусси (см. [121]) о неособенности матриц (предполагается, что во внутренних и граничных узлах применяются регулярные конечно-разностные аппроксимации), а именно, диагональный член в каждой строке будет по модулю не меньше, чем сумма модулей всех недиагональных членов, причем в некоторых строках (для узлов вблизи контура Γ_m) диагональный член будет по модулю строго больше суммы модулей всех недиагональных членов.

Для практического решения этой системы необходимо указать (если это возможно) сходящийся итерационный процесс, так как эллиптические конечно-разностные системы, как правило, решаются итерационными методами. В [151] дается алго-

⁶⁾ Остаточные члены этих формул будут на один порядок грубее формул из работы [74]. Однако отсюда не следует, что погрешность решения предлагаемой системы будет больше погрешности решения системы, используемой в [74].

ритм решения задачи (3.48) при $m=2$ и $c_2=0$ (двусвязная область), который предполагает знание бесконечнолистной функции $\Omega(z)$, конформно отображающей данную двусвязную область на полосу. Этот алгоритм достаточно сложен, и им целесообразно пользоваться лишь в тех случаях, когда $\Omega(z)$ выписывается явно (например, когда двусвязная область является кольцом).

Приближенное решение задачи (3.48) можно сравнительно просто построить рассмотренными выше методами.

Пусть u_i ($i=1, \dots, m$) — решения следующих граничных задач:

$$\begin{aligned} \Delta u_i &= 0, \quad \Delta u_{m+1} = 0, \\ u_i|_{\Gamma_j} &= \delta_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad u_{m+1}|_{\Gamma} = \omega(s), \end{aligned} \tag{3.50}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Решение задачи (3.48) будем искать в виде

$$u = \sum_{i=1}^{m+1} c_i u_i.$$

где $c_{m+1} = 1$. Тогда для определения постоянных c_i ($i=1, \dots, m$) из интегральных условий (3.48) получим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^m c_i r_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u_{m+1}}{\partial n} \quad j = 1, \dots, m, \tag{3.51}$$

где r_{ij} элементы матрицы

$$\begin{vmatrix} - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} ds & - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_2}{\partial n} ds & \dots & - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_m}{\partial n} ds \\ - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u_1}{\partial n} ds & - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u_2}{\partial n} ds & \dots & - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u_m}{\partial n} ds \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ - \int_{\Gamma_m} \frac{\partial u_1}{\partial n} ds & - \int_{\Gamma_m} \frac{\partial u_2}{\partial n} ds & \dots & - \int_{\Gamma_m} \frac{\partial u_m}{\partial n} ds \end{vmatrix},$$

т. е.

$$r_{ij} = - \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u_i}{\partial n} ds.$$

Из принципа максимума следует, что для внутренней нормали

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i} \leq 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_{\Gamma_j} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, m. \tag{3.51^1}$$

Известно (см. [40, с. 20]), что при достаточно гладких контурах (поверхностях) $\text{grad } u_i|_{\Gamma_j} \neq 0$ ($i, j = 1, \dots, m$). Но так как

$$u_i|_{\Gamma_j} = 0, \quad i \neq j,$$

то

$$\text{grad } u_i|_{\Gamma_j} = \frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_{\Gamma_j} > 0, \quad i \neq j.$$

Из неравенств (3.51¹) и из соотношений

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u_i}{\partial n} ds = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

получаем

$$r_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |r_{ij}| = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m r_{ij},$$

что указывает на особенность матрицы $|r_{ij}|$. Однако, зафиксировав одну из постоянных c_i и исключив из системы (3.51) соответствующее уравнение, нетрудно убедиться, что полученная матрица R будет удовлетворять известному условию Адамара относительно неособенности матриц (диагональный член в любом столбце больше по модулю суммы модулей всех остальных членов [121]). Так как для матрицы R типа Адамара справедливы также условия $r_{ii} > 0$ ($i = 1, \dots, m$), то определитель матрицы положителен (см. [121, с. 26]).

Приведенные рассуждения доказывают единственность решения задачи (3.48) при одной произвольным образом фиксированной постоянной c_k ($1 \leq k \leq m$). Обозначим элементы обратной матрицы R^{-1} через α_{ij} . В силу неособенности R имеем

$$\sum_{i,j} |\alpha_{ij}| = \sigma < \infty.$$

Из результатов Островского (см. [121, с. 42]) следует, что матрица системы (3.51) также будет неособенной для таких приближенных решений \bar{u}_i задач (3.50), которые удовлетворяют условию

$$|\varepsilon_{ij}| = \max_{i,j} \left| \int_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n} (u_i - \bar{u}_i) ds \right| = \varepsilon < \frac{1}{\sigma} \leq \frac{1}{(m-1)^3 \alpha},$$

где $\alpha = \max_{i,j} |\alpha_{ij}|$. Заметим также, что матрица R зависит только от геометрии данной области и не зависит от граничных условий. Поэтому для конкретной области достаточно один раз вычислить α .

Таким образом, для получения приближенного решения задачи (3.48) следует зафиксировать одну из постоянных c_i , решить приближенно задачи (3.50) и воспользоваться системой, получаемой из (3.51) путем отбрасывания одного уравнения. При этом приближенные решения задач (3.50) должны удовлетворять следующим условиям:

1) для любого $\varepsilon > 0$ можно построить приближенное решение, удовлетворяющее условию

$$\max_{i,j} \left| \int_{\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial n} (u_i - \bar{u}_i) ds \right| < \varepsilon$$

(очевидно, для этого достаточно, чтобы нормальная производная $\partial \bar{u}_i / \partial n$ приближенного решения аппроксимировала $\partial \bar{u}_i / \partial n$ в смысле метрики L_2);

2) желательно, кроме того, чтобы приближенный метод решения задач (3.50) был таким, что после нахождения решения одной из задач (3.50) решения остальных задач получались автоматически, без больших вычислений.

Этим требованиям удовлетворяет метод решения граничных задач, описанный выше. Рассмотрим на Γ линейно независимую полную в L_2 систему функций

$$\{\ln r(x_i, y)\}, \tag{3.52}$$

где x_i — элементы счетного множества точек, расположенных всюду плотно на вспомогательном контуре $\Gamma = \bigcup_{i=0}^m \Gamma_i$ (см. рис. 3). В дальнейшем рассматривается задача (3.18) для плоского случая, хотя все рассуждения, очевидно, справедливы и для случая трех измерений; при этом систему (3.52) надо заменить системой $[r(x_i, y)]^{-1}$, где x_i расположены на некоторой поверхности Γ_1 .

Рассмотрим ортонормированную систему $\{\varphi^{(i)}(y)\}$

$$\varphi^{(i)}(y) = \sum_{j=1}^i A_{ji} \ln r(x_j, y),$$

где A_{ji} — коэффициенты ортонормализации системы (3.52).

Применяя для u_{m+1} формулу Грина в точках x_i , получаем

$$\int_{\Gamma} \ln r(x_i, y) \varphi_{m+1}(y) ds_y = F_i = \int_{\Gamma} u_{m+1}(s) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln r(x_i, y) dS_y, \tag{3.53}$$

где

$$\varphi_{m+1}(y) = \frac{\partial u_{m+1}}{\partial n} \Big|_{\Gamma}.$$

Умножив первые i уравнений (3.53) на A_{ji} ($j = 1, \dots, i$)

и суммируя, получаем

$$\int_{\Gamma} \varphi_{m+1}(y) \varphi^{(i)}(y) ds_y = \Phi_i^{(m+1)} = \sum_{j=1}^i A_{ji} F_j, \quad (3.54)$$

где $\Phi_i^{(m+1)}$ — коэффициенты Фурье неизвестной функции $\varphi_{m+1}(y)$. Предполагая, что $\varphi_{m+1}(y) \in L_2$, и учитывая полноту системы $\{\varphi^{(i)}(y)\}$, имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \varphi_{m+1}(y) - \sum_{i=1}^N \Phi_i^{(m+1)} \varphi^{(i)}(y) \right|_{L_2} = 0$$

(заметим, что приближенные значения правых частей системы (3.54) получены еще до того, как была решена задача (3.50) для u_{m+1}).

Рассмотрим m классов W_i ($i = 1, \dots, m$) чисел по модулю m . Будем предполагать, что точки x_k расположены так, что если $k \in W_i$, то $x_k \in \Gamma_i$.

Применим формулу Грина для u_i ($i = 1, \dots, m$) в точках x_k :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \ln r(x_k, y) \varphi_i(y) ds_y &= 2\pi \quad \text{при } k \in W_i, \\ \int_{\Gamma} \ln r(x_k, y) \varphi_i(y) ds_y &= 0 \quad \text{при } k \in W_j, \quad j \neq i, \end{aligned}$$

где

$$\varphi_i(y) = \frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_{\Gamma}.$$

Для коэффициентов обобщенного ряда Фурье функции $\varphi_i(y)$ получим

$$\Phi_h^i = 2\pi \sum_{j=1}^r A_{jm+i, h}, \quad (3.55)$$

где r — наибольшее целое число, удовлетворяющее условию $rm + i \leq k$.

Формулы (3.54) и (3.55) дают возможность вычислить правые части и коэффициенты системы (3.51), решения c_i которой (при одном фиксированном постоянном), внесенные в формулу Грина для решения задачи (3.48)

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} [\omega(s) + c_k] \frac{\partial}{\partial n} \ln r(x, y) ds_y - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln r(x, y) \varphi(y) ds_y, \quad x \in G, \quad (3.56)$$

где

$$\varphi(y) = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \sum_{i=1}^{m+1} c_i \sum_{j=1}^i \Phi_j^{(i)} \varphi^{(j)}, \quad c_{m+1} = 1,$$

дают значения решения задачи (3.48) в произвольной точке $x \in G$.

В плоском случае часто [73, 74, 115] требуется после вычисления $u(x, y)$ вычислить также мнимую часть $v(x, y)$ голоморфной функции $g(z) = u + iv$. Для этого можно воспользоваться алгоритмом работы [73], который предполагает вычисление значений v в граничных узлах путем рекуррентных соотношений (разностного аналога соотношений Коши — Римана), а во внутренних узлах — решением системы разностных уравнений. Однако знание функций $u|_{\Gamma}$ и $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma}$ дает возможность вычислить функции

$$v(y)|_{\Gamma} = v_0 + \int_0^y \frac{\partial v}{\partial s} ds = v_0 + \int_0^y \frac{\partial u}{\partial n} ds, \quad \frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial s} = \omega'_s(s),$$

а затем для вычисления $v(x)$ ($x \in G$) воспользоваться формулой Грина (3.56).

§ 3.5. Приближенное решение задачи Римана — Гильберта

Задача Римана — Гильберта для многосвязной области заключается в следующем. Внутри области G (рис. 10), ограниченной контуром $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \dots + \Gamma_m$, ищется голоморфная функция $F(s) = u + iv$, удовлетворяющая на границе Γ условию $\alpha(s)u + \beta(s)v = \gamma(s)$.

Если предположить, что $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$ — непрерывные по Гёльдеру функции длины дуги s на контуре Γ и $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, а функция $F(z)$ непрерывна по Гёльдеру в замкнутой области G (т. е. $F(z)$ является H_0 -голоморфной), то решение сформулированной задачи при $n + 1 > m$, где n — индекс задачи, сводится к решению следующих граничных задач⁷⁾.

Ищется H_0 -голоморфная функция $g(z)$ со следующими условиями на границе:

$$\operatorname{Re} g(z)|_{\Gamma_0} = \omega(s), \quad \operatorname{Re} g(z)|_{\Gamma_k} = \omega(s) + c_k, \quad k = 1, \dots, m,$$

где $\omega(s)$ — известная функция, а c_k — произвольные постоянные, причем, не ограничивая общности, будем предполагать, что первые p ($p \leq m$) из них равны нулю. Эта задача, как уже было отмечено выше, встречается [46] также при конформном отображении многосвязных областей и расчете [151] поля заряженных нитей, расположенных вблизи проводящих цилиндров.

⁷⁾ Случай $n + 1 \leq m$ можно свести к задаче при $n \neq m$: при $n + 1 > m$ рассматриваемая задача всегда разрешима и соответствующая однородная задача имеет $2n + 1 - m$ линейно независимых решений [46].

II. Ищется гармоническая внутри G функция u со следующими граничными значениями:

$$u(s)|_{\Gamma_k} = \psi(s), \quad k = 0, 1, \dots, p,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \gamma_k \frac{\partial u}{\partial s} \right) \Big|_{\Gamma_k} = \varphi(s), \quad k = p+1, \dots, m,$$

где $\psi(s)$ и $\varphi(s) = \frac{\partial \psi}{\partial s}$ — известные функции, а γ_k — отличные от нуля постоянные.

III. Ищется гармоническая внутри G функция u со следующими граничными значениями:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_k} = -\varphi(s), \quad k = 0, 1, \dots, p;$$

$$\left(\gamma_k \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial s} \right) \Big|_{\Gamma_k} = -\varphi(s), \quad k = p+1, p+2, \dots$$

Общее решение задачи Римана — Гильберта с $(2n+1-m)$ произвольными коэффициентами (их число не может быть равным нулю для областей нечетной связности) строится из решений рассмотренных граничных задач. Для получения какого-либо частного решения необходима дополнительная информация относительно искомой функции (см. [46, гл. 4, § 6]).

Применим к задачам I—III разработанные в гл. I приближенные методы.

Задача I. Она была рассмотрена в § 3.4, поэтому мы не будем здесь касаться деталей приведенного алгоритма. Известно [115], что для однозначности H_0 -голоморфной функции $g(z) = u + iv$, где

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } G_i, \quad u|_{\Gamma_0} = \omega(s), \quad (3.57)$$

$$u|_{\Gamma_k} = \omega(s) + c_k, \quad k = 1, \dots, m,$$

необходимо и достаточно, чтобы постоянные c_k были выбраны так, чтобы

$$\int_{\Gamma_k} \frac{\partial v}{\partial s} ds = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Учитывая соотношение Коши — Римана, получаем для определения c_k следующие условия:

$$\int_{\Gamma_k} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (3.58)$$

Если (3.58) выполняется при $k = 1, \dots, m$, то в силу гармоничности оно верно и для $k = 0$.

В § 3.4 для решения задачи (3.48) решались m граничных задач (3.50). В настоящем параграфе будут предложены формулы для решения задачи (3.57), (3.58), не требующие предварительного решения всех задач (3.50). Методы, разработанные выше, хорошо приспособлены для решения задачи (3.57), (3.58), так как в этом случае функция $\partial u/\partial n$ вычисляется автоматически.

Применяя для решения задачи (3.57) формулу Грина, получаем (в обозначениях предыдущего параграфа)

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m \int_{\Gamma_k} [\omega(s) + c_k] \frac{\partial}{\partial n_y} \ln r(x, y) ds_y - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln r(x, y) \varphi(y) ds_y$$

$x \in G_i,$

(3.59)

$$0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m \int_{\Gamma_k} [\omega(s) + c_k] \frac{\partial}{\partial n_y} \ln r(x, y) ds_y - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln r(x, y) \varphi(y) ds_y,$$

$x \in G_e,$

(3.60)

где (рис. 10):

$$G_e = \sum_{k=0}^m G_k \quad \varphi(y) = \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma}, \quad c_0 = 0.$$

(3.61)

Принимая во внимание формулу

$$\int_{\Gamma} \omega(s) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln r(x, y) ds_y = F(x)$$

и равенство

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} \ln r(x, y) ds_y = \begin{cases} 2\pi & \text{при } x \in G_k, \\ 0 & \text{при } x \in G_e - G_k, \end{cases}$$

запишем уравнение (3.60) в виде

$$\int_{\Gamma} \ln(x, y) \varphi(y) ds_y = F(x) + 2\pi G, \quad x \in G_k. \quad (3.62)$$

Рассмотрим систему $\{\varphi_i(y)\}$, полученную путем ортонормализации линейно независимой полной⁸⁾ системы $\{\ln r(x, y)\}$, где x_i — элементы счетного множества, расположенные всюду плотно на вспомогательном контуре $S = S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_m$ (рис. 11):

$$\varphi_i(y) = \sum_{j=1}^i A_{ji} \ln r(x_i, y),$$

где A_{ji} — коэффициенты ортонормализации.

⁸⁾ Доказательство линейной независимости и полноты рассматриваемой системы аналогично случаю односвязной области.

Запишем (3.62) для точек x_i :

$$\int_{\Gamma} \ln r(x_i, y) \varphi(y) ds_y = F_i + 2\pi c^{(i)}, \quad x_i \in G, \quad (3.63)$$

где $F_i = F(x_i)$, $c^{(i)} = c_k$, если $x_i \in S_k$. Умножая первые i уравнений на A_{ji} ($j = 1, \dots, i$) и суммируя их, получим

$$\int_{\Gamma} \varphi(y) \varphi_i(y) ds_y = \Phi_i = \sum_{j=1}^i A_{ji} F_j + 2\pi \sum_{j=1}^i c^{(i)} A_{ji} = \bar{\Phi}_i + \pi \sum_{j=1}^i c^{(i)} A_{ji}, \quad (3.64)$$

где Φ_i — коэффициенты Фурье неизвестной функции $\varphi(y)$,

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^i A_{ji} F_j.$$

Для любого ε найдется такое N_0 , что при $N \geq N_0$ для любого $k \leq m$ будет выполняться неравенство

$$\int_{\Gamma_k} \left| \varphi(y) - \sum_{i=1}^N \Phi_i \varphi_i(y) \right|^2 ds_y < \varepsilon, \quad k = 1, \dots, m,$$

и, тем более, приближенное равенство

$$\int_{\Gamma_k} \varphi(y) ds_y = \int_{\Gamma_k} \sum_{i=1}^N \Phi_i \varphi_i(y) ds_y, \quad k = 1, \dots, m.$$

Поэтому, учитывая (3.48) и (3.64), получаем для определения постоянных $c^{(j)}$ систему

$$B_k = \sum_{i=1}^N \bar{\Phi}_i f_{ik} = \sum_{i=1}^N 2\pi \sum_{j=1}^i c^{(j)} A_{ji} f_{ik}, \quad k = 1, \dots, m, \quad (3.65)$$

где

$$\int_{\Gamma_k} \varphi_i(y) ds_y = f_{ik}.$$

Группируя в правой части k -го уравнения ($k = 1, \dots, m$) слагаемые с одинаковым коэффициентом $c^{(s)}$ ($s = 1, \dots, m$) и обозначая их сумму через \bar{A}_{ks} , получаем систему

$$B_k = \sum_{s=1}^m \bar{A}_{ks} c^{(s)} \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.66)$$

Далее, определяя из (3.66) коэффициенты $c^{(k)}$ ($k = 1, \dots, m$) и подставляя их в (3.64), получим коэффициенты Фурье искомой функции $\varphi(y)$. Применяя в (3.59) вместо $\varphi(y)$ соответ-

ствующий обобщенный ряд Фурье

$$\varphi^{(N)}(y) = \sum_{i=1}^N \Phi_i \varphi_i(y),$$

получим приближенное значение $u^{(N)}(x)$ решения задачи I в произвольной точке x внутри области G . Из сходимости $\varphi^{(N)}(y)$ к $\varphi(y)$ (в смысле метрики L_2) непосредственно следует равномерная сходимость $u^{(N)}(x)$ к $u(x)$.

Заменяя в (3.62) интеграл какой-либо квадратурной формулой и придавая параметру x различные значения на вспомогательном контуре S , получим систему

$$\sum_{i=1}^N a_{ij} \varphi_i = \sum_{i=1}^N \alpha_i \ln r(x_j, y_i) \varphi_i = F_j + 2\pi c^{(j)}, \quad (3.67)$$

где $c^{(j)} = c_k$, если $x_j \in S_k$. Запишем (3.67) в векторном виде

$$A\varphi = F + 2\pi c. \quad (3.68)$$

Для рассматриваемой системы можно доказать теоремы, аналогичные теоремам 5—7 работы [85]⁹⁾. Так, например, рассуждениями, аналогичными проведенным в [85], можно доказать, что для любого N найдутся такие N значений x_k параметра x , что система (3.68) будет разрешима и решение может быть найдено методом последовательных приближений, начиная с произвольного вектора $\varphi^{(0)}$. При этом норму в смысле пространства m_N обратного оператора A^{-1} можно сделать сколь угодно близкой к 1. Из (3.68) получаем

$$\varphi = A^{-1}F + 2\pi A^{-1}c. \quad (3.69)$$

Заменяя интеграл в (3.58) квадратурной формулой и используя (3.69), получаем систему m уравнений для определения коэффициентов c_k ($k = 1, \dots, m$). Полученные значения c_k подставляем в (3.68) и определяем вектор φ , который дает возможность найти решение задачи из уравнения (3.59), заменив предварительно в нем интегралы квадратурными суммами.

Для вычисления мнимой части v H_0 -голоморфной функции можно пользоваться алгоритмом работы [73], который предполагает необходимость вычисления значений v в приграничных узлах путем рекуррентных соотношений (разностного аналога соотношений Коши — Римана), а во внутренних узлах — с помощью решения системы разностных уравнений. Однако знание

⁹⁾ В работе [85] в формулировке теоремы 7 опечатка: вместо асимптотических равенств (46), (47), (52) и (53) должны быть асимптотические соотношения

$$\lambda_1 = O(N^{-1/2}), \lambda_1 = O(N^{-1}), \mu_1 = O(N^{-1}), N^{-1/2} \|L^{-1}\|_{\mathbb{R}^N} \rightarrow \infty \text{ при } N \rightarrow \infty$$

соответственно.

функций $u|_{\Gamma}$, $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}$ дает возможность пользоваться для вычисления v формулой Грина

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} v(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln r(x, y) ds_y - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln r(x, y) \frac{\partial v}{\partial n} ds_y,$$

где

$$v(y) = v_0 + \int_0^y \frac{\partial v}{\partial s} ds = v_0 + \int_0^y \frac{\partial u}{\partial n} ds = v_0 + \int_0^y \varphi(t) dt,$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial s} = \omega'_s(s).$$

Для решения задач II и III можно пользоваться методом конечных разностей, как это описано в работе [73]¹⁰⁾, либо же применять методы, излагаемые в настоящей книге. Для этих методов мы приведем формулы без доказательства сходимости вычислительных алгоритмов.

Задача II. Из ее граничных значений определяем

$$\frac{\partial u}{\partial n_k} \Big|_{\Gamma_k} = \varphi(s) - \gamma_k \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_{\Gamma_k}, \quad k = p+1, \dots, m. \quad (3.70)$$

Применяя формулы Грина и используя (3.70), получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \\ = & \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^p \int_{\Gamma_i} \psi(s) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln r(x, y) ds_y - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=p+1}^m \int_{\Gamma_k} \ln r(x, y) \left[\varphi(s) - \gamma_k \frac{\partial u}{\partial s} \right] ds_y + \\ + & \frac{1}{2\pi} \sum_{k=p+1}^m \int_{\Gamma_k} \bar{\psi}(s) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln r(x, y) ds_y - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^p \int_{\Gamma_i} \ln r(x, y) \bar{\varphi}(s) ds_y, \quad x \in G_i, \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{i=0}^p \int_{\Gamma_i} \psi(s) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln r(x, y) ds_y - \sum_{k=p+1}^m \int_{\Gamma_k} \ln r(x, y) \left[\varphi(s) - \gamma_k \frac{\partial u}{\partial s} \right] ds_y + \\ + & \sum_{k=p+1}^m \int_{\Gamma_k} \bar{\psi}(s) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln r(x, y) ds_y - \sum_{i=0}^p \int_{\Gamma_i} \ln r(x, y) \bar{\varphi}(s) ds_y, \quad x \in G_{e_i} \end{aligned} \quad (3.72)$$

¹⁰⁾ Надо, однако, заметить, что точность формул работы [73] для точек контуров Γ_k ($k = 1, \dots, m$) в случае задачи II и для точек границы Γ в случае задачи III на целый порядок уступает формулам работы [52]. Доказательства сходимости метода сеток для задач II и III в [73] нестрогие, а окончательные оценки довольно грубые (ср. с оценками работы [53]).

где

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(s) &= \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i}, & i = 0, 1, \dots, p, \\ \bar{\psi}(s) &= u \Big|_{\Gamma_k}, & k = p+1, \dots, m.\end{aligned}$$

Рассмотрим выражение

$$\int_{\Gamma_k} \ln r(x, y) \frac{\partial u}{\partial s} ds, \quad k = p+1, \dots, m.$$

Применяя к нему формулу интегрирования по частям и учитывая периодичность функции $\ln r(x, y)$ по переменному y , получаем

$$\int_{\Gamma_k} \ln r(x, y) \frac{\partial u}{\partial s} ds_y = - \int_{\Gamma_k} \bar{\psi}(s) \frac{\partial}{\partial s_y} \ln r(x, y) ds_y.$$

Таким образом, (3.71) и (3.72) принимают вид

$$\begin{aligned}u(x) &= \bar{F}(x) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=p+1}^m \int_{\Gamma_k} \bar{\psi}(s) \left[\frac{\partial}{\partial n_y} \ln r(x, y) - \gamma_k \frac{\partial}{\partial s_y} \ln r(x, y) \right] ds_y - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^p \int_{\Gamma_i} \ln r(x, y) \bar{\varphi}(s) ds_{y_i}, \quad x \in G_i; \quad (3.73)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= 2\pi \bar{F}(x) + \sum_{k=p+1}^m \int_{\Gamma_k} \bar{\psi}(s) \left[\frac{\partial}{\partial n_y} \ln r(x, y) - \gamma_k \frac{\partial}{\partial s_y} \ln r(x, y) \right] ds_y - \\ &\quad - \sum_{i=0}^p \int_{\Gamma_i} \ln r(x, y) \bar{\varphi}(s) ds_{y_i} \quad x \in G_{e_1} \quad (3.74)\end{aligned}$$

где

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^p \int_{\Gamma_i} \psi(s) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln r(x, y) ds_y - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=p+1}^m \int_{\Gamma_k} \ln r(x, y) \varphi(s) ds_y$$

— известная функция.

Задача III. Из граничных условий определяем

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_k} = \frac{1}{\gamma_k} \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_{\Gamma_k} - \frac{\Phi}{\gamma_k}, \quad k = p+1, \dots, m. \quad (3.75)$$

Применяя к решению задачи III формулу Грина и используя

(3.75), получаем

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \psi(s) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln r(x, y) ds_y + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^p \int_{\Gamma_k} \ln r(x, y) \varphi(y) ds_y - \\ - \frac{1}{2\pi\gamma_k} \sum_{k=p+1}^m \int_{\Gamma_k} \left[\frac{\partial u}{\partial s} - \varphi(y) \right] r(x, y) ds_y, \quad x \in G_i, \quad (3.76)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \psi(s) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln r(x, y) ds_y + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^p \int_{\Gamma_k} \ln r(x, y) \varphi(y) ds_y - \\ - \frac{1}{2\pi\gamma_k} \sum_{k=p+1}^m \int_{\Gamma_k} \left[\frac{\partial u}{\partial s} - \varphi(y) \right] r(x, y) ds_y, \quad x \in G_e, \quad (3.77)$$

где

$$\psi(s) = u|_{\Gamma}.$$

После интегрирования по частям выражения (3.76) и (3.77) принимают следующий вид:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^p \int_{\Gamma_k} \psi(s) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln r(x, y) ds_y + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln r(x, y) \varphi(y) ds_y + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=p+1}^m \int_{\Gamma_k} \psi(y) \left[\frac{\partial}{\partial n_y} \ln r(x, y) - \frac{1}{\gamma_k} \frac{\partial}{\partial s_y} \ln r(x, y) \right] ds_y, \quad x \in G_i, \quad (3.78)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^p \int_{\Gamma_k} \psi(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln r(x, y) ds_y + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln r(x, y) \varphi(y) ds_y + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=p+1}^m \int_{\Gamma_k} \psi(y) \left[\frac{\partial}{\partial n_y} \ln r(x, y) - \frac{1}{\gamma_k} \frac{\partial}{\partial s_y} \ln r(x, y) \right] ds_y, \quad x \in G_e. \quad (3.79)$$

Формулы (3.73), (3.74) и (3.78), (3.79) дают возможность применить для решения задач II и III описанные выше методы.

Укажем еще один метод решения видоизмененной задачи Дирихле.

Пусть $\{\varphi_i(x)\}$ — ортонормированная система гармонических функций внутри плоской области G . Будем, кроме того, предполагать, что система $\{\varphi_i(x)\}$ является полной на Γ в смысле метрики $L_2(\Gamma)$, т. е. для любой функции $\gamma(y) \in L_2(\Gamma)$ ($y \in \Gamma$) и для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие N коэффициентов b_i , что будет

выполняться неравенство

$$\left\{ \int_{\Gamma} \left[\gamma(y) - \sum_{i=1}^N b_i \varphi_i(y) \right]^2 ds_y \right\}^{1/2} \leq \varepsilon.$$

Рассмотрим граничную задачу (рис. 10)

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{в } G_i, \\ u|_{\Gamma} &= \gamma(y). \end{aligned}$$

С помощью неравенства Коши — Буняковского (а в случае полноты в смысле метрики S — с помощью принципа максимума) нетрудно показать, что в любой внутренней точке области G и равномерно в любой области, целиком лежащей в открытой области G , можно сделать выражение $\left| u(x) - \sum_{i=1}^N b_i \varphi_i(x) \right|$ сколь угодно малым. Этот метод решения граничных задач (первый способ) может оказаться весьма эффективным при удачном выборе системы $\{\varphi(x)\}$.

Рассмотрим следующие задачи:

$$\begin{aligned} \Delta u_0 &= 0 \quad \text{в } G, \\ u_0|_{\Gamma} &= \omega(s), \\ \Delta u_i &= 0 \quad \text{в } G_i, \\ u_i|_{\Gamma - \Gamma_i} &= 0, \quad k = 1, \dots, m, \\ u_i|_{\Gamma_i} &= 1. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Пусть приближенные решения \bar{u}_i этих задач представлены в виде

$$\bar{u}_i = \sum_{j=1}^{N_i} A_{ji} \varphi_j, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Введем обозначения

$$\int_{\Gamma_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial n} ds = e_{ki}, \quad i = 0, 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, m.$$

Для определения коэффициентов c_i ($i = 1, \dots, m$) задачи (3.57), (3.58) получаем систему

$$\sum_{i=1}^m c_i e_{ki} = e_{k0}, \quad k = 1, \dots, m. \tag{3.81}$$

Определяя из нее c_i , получаем приближенное решение \bar{u} задачи (3.57), (3.58) в виде

$$\bar{u} = \sum_{i=0}^N c_i \bar{u}_i,$$

где $c_0 = 1$.

Обычно в случае односвязной области в качестве такой системы берется система $\{P_i(x)\}$ гармонических полиномов, относительно которой известно, что она является полной в $L_2(\Gamma)$, где Γ — контур, ограничивающий односвязную область (если эта область обладает устойчивостью решения задачи Дирихле в отношении деформации области, тогда система гармонических полиномов полна на Γ в смысле метрики S).

В случае многосвязной области система $\{P_i(x)\}$ не может быть полной ни в смысле метрики S , ни в смысле метрики L_2 . Действительно, пусть для любой непрерывной функции $\gamma(y)$

$$\max_{y \in \Gamma} \left| \gamma(y) - \sum_{i=1}^N b_i P_i(y) \right| < \varepsilon, \quad y \in \Gamma.$$

Из принципа максимума непосредственно следует, что если для функции $\gamma(y)$ выполняется неравенство

$$\max_{y \in \Gamma} |\gamma(y)| > \max_{y \in \Gamma_0} |\gamma(y)|,$$

то такую функцию аппроксимировать достаточно хорошо гармоническими полиномами невозможно. Однако для функции $\gamma(y)$ может и не выполняться последнее неравенство, и тем не менее гармоническими полиномами ее невозможно будет аппроксимировать. В самом деле, возьмем две функции $\gamma_1(y)$ и $\gamma_2(y)$, для которых выполняются следующие равенства (рис. 10):

$$\begin{aligned} \gamma_1(y) &= \gamma_2(y) \quad \text{на } \Gamma_0, \\ \max_{y \in \Gamma/\Gamma_0} |\gamma_1(y) - \gamma_2(y)| &= 1. \end{aligned} \quad (3.82)$$

В силу предположения о полноте для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие коэффициенты $b_i^{(1)}$ и $b_i^{(2)}$, что

$$\max_{y \in \Gamma} \left| \gamma_1 - \sum_{i=1}^{N_1} b_i^{(1)} P_i(y) \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \max_{y \in \Gamma} \left| \gamma_2 - \sum_{i=1}^{N_2} b_i^{(2)} P_i(y) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Из принципа максимума и первого равенства (3.82) получаем, что в любой точке области G , ограниченной контуром Γ_0 , справедливо неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{N_1} b_i^{(1)} P_i(y) - \sum_{i=1}^{N_2} b_i^{(2)} P_i(y) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \max_{y \in \Gamma \setminus \Gamma_0} |\gamma_1(y) - \gamma_2(y)| &\leq \\ &\leq \max_{y \in \Gamma \setminus \Gamma_0} \left| \gamma_1(y) - \sum_{i=1}^{N_1} b_i^{(1)} P_i(y) + \sum_{i=1}^{N_2} b_i^{(2)} P_i(y) - \gamma_2(y) \right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

что противоречит второму равенству (3.82).

Система $\{P_i(x)\}$ не может быть полной и в смысле $L_2(\Gamma)$. Рассмотрим задачу в области G' , ограниченной Γ_0 :

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, \\ u|_{\Gamma_0} &= \gamma_1(y)\end{aligned}$$

и функцию $\gamma(y)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned}\gamma(y) &= \gamma_1(y) \quad \text{на } \Gamma_0, \\ \gamma(y) &= u(y) + c_k \quad \text{на } \Gamma_k, \quad k = 1, \dots, m,\end{aligned}$$

где $u(y) = u(x_k)$ и хотя бы одна из постоянных c_k , отлична от нуля.

Из представления решения задачи Дирихле для области G с помощью функции Грина и из неравенства Коши — Буняковского становится ясным, что функцию $\gamma(y)$ аппроксимировать достаточно хорошо в смысле метрики L_2 гармоническими полиномами невозможно. Из приведенных рассуждений следует, что функции из полной либо в смысле метрики $L_2(\Gamma)$, либо в смысле метрики $C(\Gamma)$ системы не могут быть одновременно все гармоничны во всех точках области G' .

Насколько известно, единственная полная в смысле метрики $L_2(\Gamma)$ система гармонических функций впервые указана в работе [84]:

$$\{\ln r(x_i, x)\}, \quad (3.83)$$

где точки x_i расположены всюду плотно на $S = S_0 + S_1 + \dots + S_m$ (рис. 5).

Надо также заметить, что эта система сильно облегчает вычисление коэффициентов e_{ki} ($k = 1, \dots, m$; $i = 0, 1, \dots, m$) системы, из которой определяются c_i ($i = 1, \dots, m$).

Действительно, нетрудно заметить, что

$$e_{ki} = 2\pi \sum_{j=1}^{N_i} r_j A_{ji},$$

где

$$u_i = \sum_{j=1}^{N_i} A_{ji} \ln r(x_j, x), \quad r_i = \begin{cases} 1, & x_j \in G_{k_i} \\ 0, & x_j \in G_e \setminus G_k. \end{cases}$$

Аналогично упрощается вычисление коэффициентов, если вместо системы (3.83) рассматривать соответствующую ортонормированную систему.

В заключение докажем разрешимость систем (3.66) и (3.81). Нетрудно заметить, что \bar{A}_{ks} и \bar{B}_k ($k, s = 1, \dots, m$) в (3.66) стремятся при $N \rightarrow \infty$ соответственно к выражениям $\int_{\Gamma_k} \frac{\partial u_s}{\partial n} ds$, $\int_{\Gamma_k} \frac{\partial u_0}{\partial n} ds$,

где u_s определены в (3.80).

К этим же выражениям стремятся e_{ki} и e_{k0} (3.81) при условии

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \frac{\partial}{\partial n} (u_i - \bar{u}_i) \right\|_{L_2} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

так что пределы элементов матриц систем (3.66) и (3.81) совпадают. Поэтому дальнейшие рассуждения относительно разрешимости этих систем аналогичны приведенным в § 3.4.

§ 3.6. Приближенное построение конформно отображающих функций для односвязных областей

В настоящем параграфе излагается применение первого метода решения граничных задач с помощью разложения по фундаментальным решениям к задаче построения функций, конформно отображающих односвязные (конечные или бесконечные) области на круг.

Пусть G — конечная односвязная область (комплексной плоскости $x = x^1 + ix^2$) с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \sum_{k=1}^n \Gamma^k$, где каждая кривая Γ^k имеет с соседней кривой только одну общую точку, а D — единичный круг в плоскости $y = y^1 + iy^2$ с границей Γ . Требуется построить голоморфную функцию $y = f(x)$, конформно отображающую область G на область D , и наоборот. Точное аналитическое выражение (в элементарных функциях) конформно отображающих функций известно лишь для узкого семейства областей, поэтому прибегают к приближенным методам. Не будем касаться вопросов существования (на этот вопрос положительно отвечает теорема Римана) и единственности (что зависит от условий нормировки) конформно отображающих функций. Последнюю будем искать в виде

$$y = f(x) = (x - x_0) e^{u(x^1, x^2) + iv(x^1, x^2)}, \quad (3.84)$$

где x_0 — фиксированная точка области G , которая переходит в центр единичного круга D , $u(x^1, x^2)$ — решение граничной задачи Дирихле для области G :

$$\Delta u(x^1, x^2) = 0,$$

$$u|_{\Gamma} = -\ln |x - x_0| = -\ln r(x, x_0),$$

$v(x^1, x^2)$ — функция, гармонически сопряженная с $u(x^1, x^2)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x^1} = \frac{\partial v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x^2} = -\frac{\partial v}{\partial x^1}.$$

Из соотношений Коши — Римана $v(x^1, x^2)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого, которое вызывает лишь поворот плоскости X по отношению к Y . Поэтому, зафиксировав

две точки $x_1 \in X$, $y_1 \in Y$, которые переходят друг в друга при искомом конформном отображении, мы тем самым обеспечим единственность функции $f(x)$.

Таким образом, задача построения конформно отображающей функции сводится к решению граничной задачи для функции $u(x^1, x^2)$, приближенное решение которой, согласно алгоритму первого метода решения граничных задач, будем искать в виде

$$u(x) = \sum_{k=1}^N a_k \ln r(z_k, x).$$

Здесь a_k — коэффициенты разложения граничной функции $\ln r(x, x_0)$ в ряд по первым N функциям системы $\{\ln r(z_k, x)\}_{k=1}^{\infty}$, где z_k образуют всюду плотное множество точек на вспомогательном контуре Γ_1 (см. § 1.1). Прямой проверкой можно показать, что гармонически сопряженная с $u^{(N)}(x)$ функция $v^{(N)}(x)$ будет иметь вид

$$v^{(N)}(x) = \sum_{k=1}^N a_k \arg(z_k - x) + c_1$$

где c_1 — произвольная постоянная, a_k — те же коэффициенты. Это обстоятельство (нахождение комплексно-сопряженной функции) существенно облегчает нахождение конформно отображающей функции.

Нетрудно показать, что если граничная задача для $u(x)$ решена с точностью ε , т. е. $|u(x) - u^{(N)}(x)| < \varepsilon$, то для модуля функции

$$f_n(x) = (x - x_0) e^{u^{(N)}(x) + iv(x)}$$

справедлива оценка

$$1 - \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} < |f_n(x)| < 1 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

На основе изложенного алгоритма составлена универсальная программа¹¹⁾ построения конформно отображающей функции для любой односвязной области. Приведем численные расчеты, выполненные с помощью этой программы.

1. Отображаемая область является эллиптической с центром в начале координат и полуосями 2 и 1. Результаты по приближенному построению конформно отображающей функции даны в табл. 3.3. Во всех примерах данного параграфа коэффициенты a_k находились методом коллокации с использованием следующих обозначений: ε_1 — максимальная погрешность решения граничной задачи Дирихле для функции u , ε_2 — среднеквадратичная погрешность решения, ε_3 — максимальное отклонение

¹¹⁾ Программа составлена сотрудником ВЦ АН ГССР М. Закрадце.

кривой $f_n(x)$, $x \in \Gamma$, от единичной окружности $\bar{\Gamma}$, ε_4 — среднеквадратичное отклонение кривой $f_n(x)$, $x \in \Gamma$, от $\bar{\Gamma}$. В качестве x_0 взято начало координат. Во всех примерах максимальная и среднеквадратичная погрешности находились с помощью четырехсот равномерно расположенных на Γ точек.

Т а б л и ц а 3.3

N	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
25	$3,4 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$
50	$2,3 \cdot 10^{-6}$	$8,1 \cdot 10^{-7}$	$2,3 \cdot 10^{-6}$	$8,1 \cdot 10^{-7}$
100	$1,8 \cdot 10^{-7}$	$5,2 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^{-7}$	$5,2 \cdot 10^{-8}$

2. Отображаемая область является единичным квадратом. Вспомогательный контур Γ_1 является также квадратом со стороной 4. Результаты расчетов даны в табл. 3.4. Заметим, что с увеличением N от 40 до 80 результаты ухудшаются, что объясняется увеличением погрешности E_2 получения коэффициентов

Т а б л и ц а 3.4

N	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
20	$8,0 \cdot 10^{-4}$	$4,7 \cdot 10^{-4}$	$7,9 \cdot 10^{-4}$	$4,6 \cdot 10^{-4}$
40	$2,9 \cdot 10^{-5}$	$9,8 \cdot 10^{-6}$	$2,9 \cdot 10^{-5}$	$9,8 \cdot 10^{-6}$
80	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$4,1 \cdot 10^{-4}$

(см. § 1.10). В качестве x_0 взята точка пересечения диагоналей квадрата.

3. Отображаемая область дана на рис. 12: Γ^1 — эллипс, Γ^2 — окружность, Γ^3 и Γ^4 — отрезки прямой. Вспомогательный контур

Т а б л и ц а 3.5

N	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
20	$3,9 \cdot 10^{-1}$	$9,1 \cdot 10^{-2}$	$3,8 \cdot 10^{-2}$	$9,0 \cdot 10^{-2}$
40	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$2,0 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$
79	$5,6 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-4}$	$5,6 \cdot 10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-4}$

также изображен на рис. 12. Результаты вычислений приведены в табл. 3.5. В качестве x_0 взято начало координат.

4. Отображаемая область и вспомогательный контур даны на рис. 13. В качестве точки x_0 , которая переходит в центр круга,

взята точка $(\sqrt{2}-1; 0)$. Точное выражение конформно отображающей функции выписывается явно:

$$f(x) = i \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x - 1}.$$

При этом точка $(0; 1) \in \Gamma$ переходит в точку $(1; 0) \in \Gamma'$. Результаты вычислений даны в табл. 3.6. Максимальное и среднеквадратичное значения разности $f_{100}(x) - f(x)$ по 400 граничным

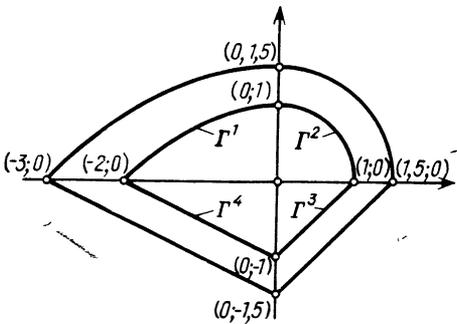


Рис. 12

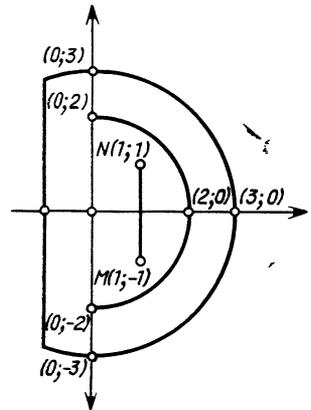


Рис. 13

точкам равны соответственно $2,2 \cdot 10^{-5}$ и $1,5 \cdot 10^{-5}$, а по 400 точкам отрезка MN (рис. 10) получаются значения $1,7 \cdot 10^{-5}$ и $8,9 \cdot 10^{-6}$, что хорошо согласуется с принципом максимума.

5. В качестве последнего примера рассмотрим задачу конформного отображения бесконечной области на единичный круг.

Т а б л и ц а 3.6

N	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4
25	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$3,8 \cdot 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$3,8 \cdot 10^{-4}$
50	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$3,2 \cdot 10^{-5}$	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$3,2 \cdot 10^{-5}$
100	$3,1 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-8}$	$3,1 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-8}$

Алгоритм, заложенный в указанную выше универсальную программу, сначала отображает внешность круга радиуса R на круг с помощью элементарного конформного отображения

$$x^* = x_0 + \frac{R^2}{x - x_0},$$

или, в координатах,

$$(x^1)^* = x_0^1 + \frac{(x^1 - x_0^1) R^2}{(x_0^1 - x^1)^2 + (x_0^2 - x^2)^2},$$

$$(x^2)^* = x_0^2 - \frac{(x^2 - x_0^2) R^2}{(x_0^1 - x^1)^2 + (x_0^2 - x^2)^2}.$$

Затем находится отображающая функция

$$f(x^*) = (x^* - x_0) e^{u(x^*) - iv(x^*)}.$$

Подставляя вместо x^* его значение, получаем

$$f(x) = \frac{R^2}{x - x_0} e^{u(x) + iv(x)},$$

для регулярной в бесконечности функции $u(x)$ получаем граничную задачу

$$\Delta u = 0,$$

$$u|_{\Gamma} = -\ln \left| \frac{R^2}{x - x_0} \right|.$$

Решение этой задачи ищется в виде ряда

$$u_N(x) = \sum_{k=1}^N a_k \ln \left| \frac{R^2 (x - z_k)}{(x - x_0)(z_k - x_0)} \right|;$$

комплексно-сопряженная функция $v(x)$ принимает вид

$$v_N(x) = \sum_{k=1}^N a_k \arg \left[\frac{R^2 (x - z_k)}{(x - x_0)(z_k - x_0)} \right],$$

где z_k — вспомогательные точки, не принадлежащие отображаемой области.

В табл. 3.7 даны результаты вычислений при конформном отображении внешности эллипса с полуосями 2 и 1 на единич-

Т а б л и ц а 3.7

N	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
25	$7,0 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$7,1 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$
50	$9,9 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	$9,9 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$
100	$1,6 \cdot 10^{-9}$	0	$1,7 \cdot 10^{-10}$	0

ный круг. В качестве вспомогательного контура взят также эллипс с полуосями 1,8 и 0,5. Точка x_0 совпадает с началом координат, а свободный параметр R (радиус промежуточного круга), который участвует в граничных условиях, равен 1.

§ 3.7. Об одной особенности решения плоских граничных задач

Особенности обоснования рассмотренных здесь методов решения плоских граничных условий, требующие для доказательства формулы (3.17) дополнительного условия (3.18), сказываются и на численной реализации этих методов¹²⁾.

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода, соответствующее второму способу решения плоской задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\int_{\Gamma} \ln r(y, z) v(y) ds_y = F(z), \quad z \notin G, \quad (3.85)$$

где $v(y)$ — неизвестная функция, равная нормальной производной решения задачи Дирихле. Когда в соответствии с алгоритмом второго метода решения граничных задач от условия $z \notin G$ переходим к условию $z \in \Gamma_1$, т. е. правая часть интегрального уравнения рассматривается лишь на вспомогательном контуре Γ_1 , то может оказаться, что рассматриваемое интегральное уравнение имеет более чем одно решение. Покажем это на примере концентрических окружностей Γ и Γ_1 ; применение теории конформных отображений позволяет перенести это свойство на более сложные контуры Γ и Γ_1 .

Будем предполагать, что Γ является окружностью диаметра $d < 1$. Покажем, что существует такая окружность Γ_1 , что

$$\int_{\Gamma} \ln r(y, z) ds_y \equiv 0 \quad (3.86)$$

при произвольном $z \in \Gamma_1$. Действительно, пусть диаметр \bar{d} некоторой концентрической окружности $\bar{\Gamma}_1$ удовлетворяет условию $d < \bar{d} < 1$. Тогда в силу того, что $\ln r(y, z) < 0$ ($y \in \Gamma$, $z \in \bar{\Gamma}_1$), получаем

$$\int_{\Gamma} \ln r(y, z) ds_y < \int_{\Gamma} \ln \frac{d + \bar{d}}{2} ds = \left(\ln \frac{d + \bar{d}}{2} \right) \pi d < 0.$$

Заметим, что поскольку Γ и $\bar{\Gamma}_1$ являются концентрическими окружностями, интеграл

$$\int_{\Gamma} \ln r(y, z) ds_y \quad (3.87)$$

не зависит от расположения точки z на окружности $\bar{\Gamma}_1$. Возьмем теперь новую концентрическую с Γ окружность $\tilde{\Gamma}_1$ диаметра

¹²⁾ На это было обращено внимание в работе [174], в которой показано, что для некоторых «критических» вспомогательных контуров плотность простого слоя определяется неоднозначно.

$\tilde{d} = 3$. В этом случае $\ln r(y, z) > 0$ ($y \in \Gamma$, $z \in \tilde{\Gamma}_1$), и поэтому

$$\int_{\Gamma} \ln r(y, z) ds_y > \int_{\tilde{\Gamma}} \ln \frac{\tilde{d} - d}{2} ds = \left(\ln \frac{\tilde{d} - d}{2} \right) \pi d > 0.$$

Таким образом, интеграл (3.87) имеет постоянное отрицательное значение при $z \in \bar{\Gamma}_1$ и постоянное положительное значение при $z \in \tilde{\Gamma}_1$. Ввиду непрерывной зависимости интеграла от диаметра окружности Γ_1 , обязательно найдется такая окружность Γ_1^* с диаметром d_1^* , удовлетворяющая условию $\bar{d} < d_1^* < \tilde{d}$, для которой будет выполняться тождество (3.86). Следовательно, когда функция $v(y)$ является решением интегрального уравнения (3.85), функция $v_1(y) = v(y) + c$, где c — произвольная постоянная, также будет удовлетворять рассматриваемому интегральному уравнению первого рода (3.85), если в качестве вспомогательного контура взять окружность Γ_1^* . Последнее обстоятельство приводит к определенным вычислительным трудностям при решении интегрального уравнения (3.85). Так, например, заменяя левую часть (3.85) квадратурной формулой прямоугольников с равноотстоящими узлами, получаем линейную систему уравнений N -го порядка

$$A\psi = F$$

матрица которой вырождена. Поэтому одновременно с интегральным уравнением первого рода (3.85) можно рассматривать условие (см. (3.18))

$$\int_{\Gamma} v(y) ds_y = 0, \quad (3.88)$$

которое автоматически выполняется для точного значения функции $v(y) = \frac{\partial u(y)}{\partial n}$, где $u(y)$ — граничное значение решения задачи Дирихле. Численные примеры, иллюстрирующие целесообразность одновременного рассмотрения уравнений (3.85) и (3.88), приведены в [174].

§ 3.8. Разрешимость систем уравнений, соответствующих методу коллокации

В § 1.3 было показано, что функционалы в банаховом пространстве, соответствующие методу коллокации (см. (1.51)), обеспечивают схему счета, более устойчивую по сравнению с методом наименьших квадратов. Поэтому в данном параграфе на примере решения вторым способом пространственной граничной задачи Дирихле будут рассмотрены вопросы разрешимости соответствующих линейных систем уравнений.

Заметим, что, как было показано в первых двух параграфах гл. I, как в первом, так и во втором методе приходится строить решение интегральных уравнений первого рода

$$\int \int K(x, y) \varphi(y) dy = F(x). \quad (3.89)$$

Однако последнее уравнение для случая граничных задач отличается тем, что точка x может принимать произвольные значения вне области G . Это дает возможность получить ряд предложений о разрешимости линейных систем, полученных из (3.89) применением кубатурных формул. Для конкретности будем предполагать, что

$$K(x, y) = [r(x, y)]^{-1}.$$

Метод коллокации предполагает, что равенство (3.89) соблюдается в определенных точках x_k (в узлах коллокации). Поэтому, если дать параметру x в уравнении (3.89) N различных значений x_k , заменяя в (3.89) интеграл с неизвестной функцией $\varphi(y)$ какой-либо кубатурной суммой с N узлами y_k и отбрасывая остаточные члены $R(x_k, N, \varphi)$, получаем систему

$$L\varphi = \sum_{i=1}^N d_i \frac{1}{r(x_k, y_i)} \varphi_i = F_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (3.90)$$

где d_i — коэффициенты кубатурной формулы, φ_i — приближенное значение неизвестной функции φ в узле y_i и

$$F_k = \iint_S \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{r(x_k, y)} \psi(y) dS_y.$$

Прежде всего следует рассмотреть вопрос о разрешимости системы (3.90). Обозначим минимальное расстояние между узлами через h . Для любого N и $h > 0$ найдутся такие N значения x_k параметра x , что система (3.90) будет разрешима, и решение может быть найдено методом последовательных приближений, начиная с произвольного вектора φ^0 .

Запишем систему (3.90) в векторной форме $\varphi - H\varphi = E$, где матрица H состоит из элементов

$$H_{ik} = - \frac{d_k}{d_i} \frac{r(x_i, y_i)}{r(x_k, y_i)}, \quad i \neq k, \quad H_{ii} = 0,$$

а вектор E — из элементов

$$E_i = \frac{F_i r(x_i, y_i)}{d_i}, \quad i, k = 1, \dots, N.$$

Будем рассматривать H как оператор, переводящий пространство

m_N конечномерных векторов в себя (см. [68]). Тогда

$$\|H\|_{m_N} = \max \left| \frac{r(x_i, y_i)}{d_i} \right| \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{d_k}{r(x_k, y_i)} \right|. \quad (3.91)$$

Ясно, что величину $r(x_i, y_i)$ можно сделать сколь угодно малой, тогда как сумма в правой части равенства (3.91) при условии $h > 0$ остается ограниченной числом $\frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N |d_k|$. Поэтому можно

выбрать точки x_i так, чтобы

$$\|H\|_{m_N} \leq q < 1. \quad (3.92)$$

Известно, что пространство m_N является полным и поэтому для окончательного доказательства теоремы $\bar{5}$ надо воспользоваться следующим утверждением.

Теорема Банаха. Если оператор H переводит полное пространство в себя и $\|H\| = q < 1$, где $\|H\|$ — норма оператора в рассматриваемом пространстве, то уравнение $\varphi - H\varphi = E$ имеет при всякой правой части E единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений, начиная с произвольного вектора φ^0 .

Для нормы обратного оператора $(I - H)^{-1}$, где I — единичная матрица, при условии (3.92) получается оценка

$$\|(I - H)^{-1}\|_{m_N} \leq 1/(1 - q). \quad (3.93)$$

Так как при приближенном решении уравнения (3.89) вторым способом погрешность δ , обусловленная отбрасыванием остаточных членов в системе (3.90), удовлетворяет той же системе уравнений с остаточными членами в правой части

$$\delta - H\delta = R,$$

где

$$R_i = \frac{r(x_i, y_i)}{d_i} R(x_i, N, \varphi), \quad i = 1, \dots, N,$$

то, учитывая (3.93), получаем

$$\|\delta\|_{m_N} = \max_i |\delta_i| = (I - H)^{-1} R \leq \frac{1}{1 - q} \max_i R_i, \quad (3.94)$$

где $\delta_i = \varphi(y_i) - \varphi_i$. Заметим, однако, что оценка (3.94) не дает возможности доказать сходимость приближенного решения уравнения (3.89) этим способом, т. е. доказать, что $\|\delta\|_{m_N} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Дело в том, что при $N \rightarrow \infty$ точки x_k стремятся к узлам y_k , и поэтому подынтегральная функция $\varphi(y) [r(x, y)]^{-1}$ и ее производные, входящие в остаточные члены $R(x_k, N, \varphi)$,

стремятся к бесконечности. Численные примеры показали, что на практике более целесообразно брать значения параметра x не очень близко от границы S . Поэтому представляет интерес следующее предложение.

В любых окрестностях $\varepsilon(x_k)$ произвольно выбранных точек x_k найдутся такие новые точки \bar{x}_k (в частности, они могут совпадать с x_k), что детерминант системы (3.90) будет отличен от нуля для любой кубатурной формулы.

Обозначим через $H_k(x_1, \dots, x_k)$ детерминант из первых k строк и k столбцов системы (3.90). Ясно, что

$$H_1(x_1) = \frac{d}{r(x_1, y_1)} \neq 0,$$

так как $d_1 \neq 0$ вследствие того, что y_1 является узлом применяемой кубатурной формулы, а $r(x_k, y_i) < \infty$ при всех $k, i = 1, 2, \dots, N$. Докажем, что если $H_k(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k) \neq 0$, то в любой окрестности $\varepsilon(x_{k+1})$ точки x_{k+1} найдется такая точка \bar{x}_{k+1} , что $H_{k+1}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k+1}) \neq 0$. Этим предложение будет доказано, поскольку H_N совпадает с детерминантом системы (3.90). Разложим $H_{k+1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k, \bar{x}_{k+1})$ по элементам $(k+1)$ -й строки:

$$H_{k+1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}) = H_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k) d_{k+1} \frac{1}{r(x_{k+1}, y_{k+1})} + \omega, \quad (3.95)$$

где $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ — точки, для которых $H_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k) \neq 0$, x_{k+1} — пока произвольная точка из $\varepsilon(x_{k+1})$,

$$\omega = \sum_{i=1}^k d_i \frac{1}{r(x_{k+1}, y_i)} H_{k+1,i},$$

$H_{k+1,i}$ — алгебраические дополнения элементов $(k+1)$ -й строки. Пусть L_{k+1} — замкнутая поверхность, целиком лежащая в $\varepsilon(x_{k+1})$, а B_{k+1} — объем, ограниченный этой поверхностью. Покажем, что существует такая точка $\bar{x}_{k+1} \in L_{k+1}$, что $H_{k+1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{k+1}) \neq 0$. Допустим противное, т. е. что $H_{k+1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k, x_{k+1}) = 0$ для любой точки $x_{k+1} \in L_{k+1}$. В силу гармоничности функции $H_{k+1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k, \bar{x}_{k+1})$ по переменному \bar{x}_{k+1} имеем $H_{k+1} = 0$ для любой точки $x_{k+1} \in B_{k+1}$. Но тогда $H_{k+1} = 0$ всюду в области аналитичности. Устремим x_{k+1} к y_{k+1} . Тогда $1/r(x_{k+1}, y_{k+1}) \rightarrow \infty$, и так как $d_{k+1}H_k = 0$, то первое слагаемое (3.95) стремится к бесконечности, а второе слагаемое ω остается ограниченным. Полученное противоречие доказывает предложение.

Заметим, что при доказательстве был существенно использован тот факт, что значения x могут быть взяты произвольно в области B_ε . При фиксированных же значениях $x_k \det(I - H)$ будет функцией N переменных y (узлов кубатурной формулы), принимающих на поверхности S , вообще говоря, любые значе-

ния. При этом учитывается, что детерминант системы (3.90) зависит от узлов как непосредственно (члены $1/r(x_k, y_i)$), так и косвенно, через d_i , так как значениями узлов кубатурной формулы в некоторой степени определяются коэффициенты этой формулы. Рассмотрим $2N$ -мерное евклидово пространство \mathbf{R}^{2N} , и пусть $y = (y_1, \dots, y_{2N})$ — точка этого пространства, где y_{2k-1} и y_{2k} определяют k -й узел применяемой кубатурной формулы. Очевидно, что $2N$ -мерная мера множества точек $y = (y_1, \dots, y_{2N})$ евклидова пространства \mathbf{R}^{2N} , для которых $\det(I - H) = 0$, равна нулю. Действительно, уравнение $\det(I - H) = 0$ определяет (гипер) поверхность в пространстве \mathbf{R}^{2N} , и $2N$ -мерная мера точек этой поверхности равна нулю. Поэтому при выборе случайных значений узлов с вероятностью, почти равной единице, детерминант системы (3.90) будет отличен от нуля. Аналогично при фиксированных значениях узлов y_k детерминант системы (3.90) будет функцией N переменных x , принимающих вне области B_i произвольные значения. Пусть $x = (x_1, \dots, x_{3N})$ — точка $3N$ -мерного евклидова пространства \mathbf{R}^{3N} , где x_{3k-2} , x_{3k-1} и x_{3k} определяют k -е значение параметра x . Очевидно также, что $3N$ -мерная мера множества точек $x = (x_1, \dots, x_{3N})$, для которых $\det(I - H) = 0$, равна нулю; иными словами, при выборе случайных значений параметра x с вероятностью почти единица имеем $\det(I - H) \neq 0$.

Кубатурный процесс

$$\int_S f(y) ds_y \approx \sum_{i=1}^N d_i^{(N)} f(y_i^{(N)}), \quad N \rightarrow \infty,$$

будем называть *общим усложненным кубатурным процессом*, если справедливы соотношения

$$d_i^{(N)} = O(1/N), \quad N \rightarrow \infty, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.96)$$

По-видимому, все наиболее часто применяемые на практике кубатурные процессы являются общими усложненными кубатурными процессами. Нетрудно заметить, что в случае общего усложненного кубатурного процесса не обязательно, чтобы все линейные функционалы [117] $L(\alpha, \mu, f)$ были подобны. Докажем следующее предложение.

Если

$$0 < \alpha \leq [r(x_k^{(N)}, y_i^{(N)})]^{-1} \leq \mu < \infty, \quad k, i = 1, \dots, N; \quad N \rightarrow \infty, \quad (3.97)$$

где α и μ — постоянные, и для решения уравнений (3.89) применяется общий усложненный кубатурный процесс, то для наименьшего собственного значения λ_1 матрицы L системы (3.90) справедливо асимптотическое соотношение

$$\lambda_1 = O(N^{-1/2}). \quad (3.98)$$

Если матрица L — положительно определенная, то

$$\lambda_1 = O(N^{-1}). \quad (3.99)$$

Докажем (3.98). Рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \left(d_i^{(N)} \frac{1}{r(x_k^{(N)}, y_i^{(N)})} \right)^2.$$

По определению общего усложненного кубатурного процесса, учитывая (3.96), получаем

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \left(d_i^{(N)} \frac{1}{r(x_k^{(N)}, y_i^{(N)})} \right)^2 \leq M, \quad (3.100)$$

где M — не зависящая от N постоянная. Применяя для системы (3.90) неравенство Шура и учитывая (3.100), получаем

$$\sum_{i=1}^N |\lambda_i|^2 \leq M, \quad (3.101)$$

где $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ — спектр собственных значений матрицы L . Из (3.101) непосредственно следует, что $N(\lambda_1)^2 \leq M$, или $\lambda_1 = O(N^{-1/2})$.

Докажем теперь (3.99). Рассмотрим след матрицы L системы (3.90):

$$\text{Sp } L = \sum_{j=1}^N d_j \frac{1}{r(x_j, y_j)}.$$

Для общего усложненного кубатурного процесса, учитывая (3.96), получаем

$$\text{Sp } L \leq M_1, \quad (3.102)$$

где M_1 — не зависящая от N постоянная. Учитывая равенство

$$\text{Sp } L = \sum_{i=1}^N \lambda_i \quad (3.103)$$

и положительную определенность матрицы L , из (3.102) получаем

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = \sum_{i=1}^N |\lambda_i| \leq M_1, \quad \text{или } \lambda_1 = O(N^{-1}).$$

Из доказанного предложения непосредственно следует, что если L — произвольная матрица, то для любого ε

$$N^{-1/2+\varepsilon} \|L^{-1}\|_{\mathbb{R}^N} \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty,$$

а если L — симметрическая положительно определенная

матрица, то

$$N^{-1+\varepsilon} \|L^{-1}\|_{\mathbb{R}^N} \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty,$$

Последнее утверждение основывается на том, что если L — симметрическая матрица, то и L^{-1} — симметрическая матрица, и на том, что собственные значения матрицы L^{-1} равны λ_i^{-1} , где λ_i — собственные значения матрицы L .

Известно, что для евклидовой нормы произвольной матрицы справедливо равенство $\|L^{-1}\|_{\mathbb{R}^N} = \sqrt{\lambda_n}$; здесь λ_n — наибольшее собственное значение матрицы $L^{-1}(L^{-1})^*$. Элементы матрицы L^*L имеют вид (обозначим их $(L^*L)_{ik}$)

$$(L^*L)_{ik} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{r(x_i^{(N)}, y_i^{(N)})} d_j \frac{1}{r(x_j^{(N)}, y_k^{(N)})}.$$

Поэтому для них справедливо асимптотическое равенство

$$(L^*L)_{ik} = O(N^{-1}),$$

а следовательно, и неравенства

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N [(L^*L)_{ik}]^2 \leq M_2, \quad \text{Sp } L^*L < M_3,$$

где M_2, M_3 — не зависящие от N постоянные. Учитывая, что матрица L^*L всегда положительно определенная, и применяя к ней равенство (3.103), получим

$$\mu_1 = O(N^{-1}), \quad (3.104)$$

где μ_1 — наименьшее собственное значение матрицы L^*L .

Так как $L^{-1}(L^{-1})^* = L^{-1}(L^*)^{-1} = (L^*L)^{-1}$, то из (3.104) следует, что $N^{-1+\varepsilon}\lambda_n \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

Окончательно можно сформулировать следующее предложение: для произвольной матрицы L

$$N^{-1/2+\varepsilon} \|L^{-1}\|_{\mathbb{R}^N} \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty, \quad (3.105)$$

если L — симметрическая положительно определенная матрица, то

$$N^{-1+\varepsilon} \|L^{-1}\|_{\mathbb{R}^N} \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty.$$

Аналогично доказываются соответствующие предложения для плоского случая.

Нами изложен способ решения уравнения (3.89) для внутренней задачи Дирихле. Очевидно, что идея этого способа непосредственно переносится на все рассмотренные выше граничные задачи, для которых нетрудно доказать аналогичные предложения.

Когда граничная задача имеет не единственное решение, необходимо зафиксировать значения искомой функции в нескольких точках (в зависимости от числа линейно независимых решений однородной задачи) и рассматривать полученные системы. Так, например, в случае внутренней граничной задачи Неймана нужно зафиксировать значение искомой функции в одном узле кубатурной формулы, в случае второй граничной задачи теории упругости — в трех точках в плоском случае и в шести точках в пространственном случае.

Сравним этот способ решения с конечно-разностным методом; простейшая сеточная аппроксимация уравнения Лапласа в случае задачи Дирихле имеет, независимо от размерности области B_i , наименьшее собственное значение порядка h^2 , где h — шаг сетки. Действительно, пусть G_i и G_e — прямоугольные параллелепипеды, соответственно наибольший заключенный в B_i и наименьший заключающий в себя B_i , а $\lambda(B_i)$, $\lambda(G_i)$ и $\lambda(G_e)$ — наименьшие собственные значения разностного оператора Лапласа для областей B_i , G_i и G_e . Справедливы асимптотические соотношения

$$\lambda(G_i) = O(h^2), \quad \lambda(G_e) = O(h^2) \quad (3.106)$$

и для доказательства равенства $\lambda(B_i) = O(h^2)$ нужно применить теорему из [103] о том, что

$$\lambda(G_i) \leq \lambda(B_i) \leq \lambda(G_e). \quad (3.107)$$

Отсюда следует, что в пространственном случае матрица L положительно определена и ее наименьшее собственное значение не превосходит по порядку нижней границы спектра разностного оператора Лапласа. Если решать задачу Дирихле с одним и тем же шагом h методом сеток и методом, рассмотренным здесь, то для плоского случая необходимый объем памяти машины в обоих случаях будет порядка h^{-2} , для пространственного случая метод сеток займет количество ячеек порядка h^{-3} , а рассмотренный метод — порядка h^{-4} . Число операций при решении системы (3.90) по одному из вариантов метода Гаусса (схема исключения, компактная схема, схемы типа единственного деления и т. д.) будет порядка N^3 или же для плоского случая h^{-3} , а для пространственного случая — порядка h^{-6} . Число операций для решения плоского простейшего разностного аналога задачи Дирихле с помощью итерационного метода Либмана и Ричардсона будет порядка $h^{-4} \log \epsilon$, где ϵ — погрешность приближенного решения разностных уравнений; ее следует довести до порядка h^2 (дальнейшее увеличение точности решения разностных уравнений не имеет смысла, так как точность будет лимитироваться погрешностью замены дифференциального оператора Лапласа разностным, а эта погрешность имеет порядок h^2), и тогда для числа операций получим порядок $h^{-4} \log h$. Для пространствен-

ного случая в аналогичных условиях для числа операций получим порядок $h^{-5} \log h$. Если известны точные верхние границы спектра разностного оператора Лапласа (эти границы удается установить точно только для прямоугольных областей), то можно применить для решения разностного аналога задачи Дирихле итерационный процесс свёрхрелаксации (экстраполированный метод Либмана), и число операций в плоском и пространственном случаях будет иметь порядки $O(h^{-3} \log h)$ и $O(h^{-4} \log h)$ соответственно.

Таким образом, необходимое число арифметических операций даже для простейших итерационных процессов разностного метода решения задачи Дирихле получается меньше, чем для метода, разобранный в этом параграфе. Часто делают неверное заключение о том, что методы, основанные на интегральных соотношениях вдоль границы области, менее трудоемки, чем разностные методы, которые предполагают аппроксимацию дифференциального оператора во всей области. Действительно, при этом число неизвестных в разностном методе получается больше, но объём памяти и необходимое для решения число операций ввиду специфической особенности соответствующих матриц получается меньше, чем в приближенных методах, использующих интегральные соотношения на границе области. Необходимо, однако, заметить, что сравнение указанных двух методов условно, так как один и тот же шаг может давать для различных методов различные оценки погрешности.

§ 3.9. Результаты численных экспериментов по решению граничных задач

Алгоритмы многих программ для решения граничных задач настолько сложны и насыщены многими вычислительными нюансами, что рядовому потребителю этих программ порой невозможно разобраться во всех тонкостях алгоритмов. Поэтому большое значение приобретают численные эксперименты, проведенные с помощью этих программ. Как правило, в результатах таких численных экспериментов несложно разобраться и тем самым получить определенное представление о достоинствах тех или иных программ. Вопрос о наборе соответствующих тестовых задач рассматривался в § 2.29. В настоящем параграфе будут даны приближенные решения некоторых граничных задач для гармонических функций, полученные описанными в настоящей монографии методами.

Приближенное решение $\bar{u}(x)$ в первом методе решения граничных задач получается в виде

$$\bar{u}(x) = \sum_{j=1}^N a_j^{(N)} \psi_j(x), \quad (3.108)$$

где $a_j^{(N)}$ — коэффициенты разложения. Если в качестве тестовых задач возьмем граничную задачу, в которой решение имеет вид

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N_1} b_j \psi_j(x), \quad (3.109)$$

где b_k — произвольные конечные числа, а $N_1 \leq N$, то в качестве критерия точности решения можно воспользоваться выражением

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{N_i} (a_j^{(N)} - b_j)^2}. \quad (3.110)$$

В табл. 3.8—3.10 даны результаты численных экспериментов, проведенных с помощью описанной программы.

Т а б л и ц а 3.8

 $k = 2$

$\psi(y)$	$N=20$	$N=40$	$N=60$	$N=80$
4	$1 \cdot 10^{-5}$ $5 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-5}$ $4 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-5}$ $4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$ $7 \cdot 10^{-5}$
$\cos(T)$	$1 \cdot 10^{-6}$ $3 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-6}$ $3 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-6}$ $3 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$ $2 \cdot 10^{-5}$
$7\psi_7 - 5\psi_5$	$2 \cdot 10^{-5}$ $2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-6}$ $2 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-5}$ $6 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-4}$ $2 \cdot 10^{-4}$
T^2	$1 \cdot 10^{-4}$ $4 \cdot 10^0$	$3 \cdot 10^{-3}$ $3 \cdot 10^0$	$7 \cdot 10^{-1}$ $2 \cdot 10^0$	$4 \cdot 10^0$ $5 \cdot 10^0$

Решалась граничная задача

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad x \in G, \quad (3.111)$$

$$u|_{\Gamma} = \psi(y), \quad (3.112)$$

где Γ — эллипс с полуосями 2 и 1. В качестве граничной функции $\psi(y)$ выбирались следующие функции: а) $\cos t$ (t — центральный угол); б) t^2 ; в) 4 и г) $7\psi_7 - 5\psi_5$. В качестве системы $\{\psi_k(x)\}$ взята система $\{\ln r^2(p_k, x)\}_{k=1}$, где точки p_k распределены равномерно по параметру t на эллипсе с полуосями $2\left(1 + \frac{k}{10}\right)$ и $\left(1 + \frac{k}{10}\right)$, k принимает значение 2 (табл. 3.8) и 10 (табл. 3.9). Количество функций N принимает значения 20, 40, 60 и 80. Коэффициенты разложения находились методом коллокации.

Т а б л и ц а 3.9

$k = 10$				
$\psi(y)$	$N=20$	$N=40$	$N=60$	$N=80$
4	$1 \cdot 10^{-5}$ $4 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$ $1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$ $1 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-4}$ $5 \cdot 10^{-4}$
$\cos(T)$	$8 \cdot 10^{-6}$ $1 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-6}$ $8 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-5}$ $2 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-5}$ $7 \cdot 10^{-5}$
$7\psi_7 - 5\psi_5$	$1 \cdot 10^{-5}$ $1 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$ $4 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-4}$ $2 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$ $8 \cdot 10^{-4}$
T^2	$4 \cdot 10^{-1}$ $4 \cdot 10^0$	$5 \cdot 10^1$ $5 \cdot 10^1$	$1 \cdot 10^1$ $1 \cdot 10^1$	$4 \cdot 10^2$ $4 \cdot 10^2$

Т а б л и ц а 3.10

N	$a_5^{(N)}$	$a_7^{(N)}$	$\max_k a_k^{(N)} , k \neq 5, 7$
20	-5 -5	$7 - 3 \cdot 10^{-6}$ $7 + 3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-5}$ $4 \cdot 10^{-2}$
40	$-(5 + 6 \cdot 10^{-6})$ -5,8	$7 - 5 \cdot 10^{-6}$ 6,97	$1 \cdot 10^{-3}$ 16
60	-5,2 10	6,98 -7,5	1,7 23
80	-2,2 -6	7,2 -2,8	18 38

В табл. 3.8—3.10 даны следующие величины:

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[\psi(y_k) - \sum_{j=1}^N a_j^{(N)} \psi_j(y_k) \right]^2} \quad (3.113)$$

— первое число,

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[\psi\left(\frac{y_k + y_{k+1}}{2}\right) - \sum_{j=1}^N a_j^{(N)} \psi_j\left(\frac{y_k + y_{k+1}}{2}\right) \right]^2} \quad (3.114)$$

— второе число,

где y_k — узлы коллокации, которые расположены равномерно по параметру t на границе Γ . Следует отметить некоторое ухудшение точности решения при $N=80$ по сравнению с $N=60$, что, по-видимому, объясняется плохой обусловленностью матриц соответствующих систем. Неудовлетворительная точность для гра-

ничной функции $\psi(y) = t^2$ объясняется тем, что она терпит в точке $t = 0$ ($t = 2\pi$) разрыв первого рода. Эксперименты с граничной функцией $\psi = 7\psi_7 - 5\psi_5$ были проведены по следующим соображениям. Ввиду неминимальности системы $\{\ln r^2(p_k, x)\}$ может получиться, что различные группы коэффициентов $a_k^{(N)}$ одинаково хорошо будут удовлетворять системе алгебраических уравнений (3.109). В табл. 3.10 приведены следующие значения: первый столбец дает коэффициент пятой функции $a_5^{(N)}$ (верхнее число в каждой графе соответствует значению $k = 2$), второй — коэффициент седьмой функции $a_7^{(N)}$, последний столбец — наибольшее число $\max_k a_k^{(N)}$ ($k \neq 5, 7$). Из табл. 3.10 видно, что при больших N^k точность определения коэффициентов $a_k^{(N)}$ очень низкая, тогда как из табл. 3.8, 3.9 видно, что граничная функция при этом аппроксимируется с довольно высокой точностью. Особенно проявляется это при $k = 10$, т. е. при более удаленном вспомогательном эллипсе.

Приведенные выше в этом параграфе результаты были получены на машине ЕС-1020 для первого метода. В заключение приведем численное решение одной граничной задачи с помощью второго метода, полученное на машине М-222.

Речь будет идти о нахождении гармонической функции внутри эллипса S :

$$x_1 = a \cos t, \quad x_2 = b \sin t \quad (3.115)$$

при граничном условии

$$u(x) = f(x), \quad x \in S. \quad (3.116)$$

Для того чтобы получить численный результат, который можно было бы сравнить с точным решением, возьмем

$$a = 1, \quad b = 0,5, \quad f(x) = 0,5(x_1^2 + x_2^2). \quad (3.117)$$

Как легко проверить, точное решение задачи имеет вид

$$u(x_1, x_2) = 0,2 + 0,3(x_1^2 - x_2^2). \quad (3.118)$$

Теперь найдем приближенное решение. Применяя рассуждения, многократно встречавшиеся в предыдущем изложении, находим, что задача сводится к системе функциональных уравнений

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S f(y) \frac{\cos(xy, n_y)}{r(x, y)} ds_y + \frac{1}{\pi} \int_S \varphi(y) \ln r(x, y) ds_y, \quad x \in B_i, \quad (3.119)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_S f(y) \frac{\cos(xy, n_y)}{r(x, y)} ds_y + \frac{1}{\pi} \int_S \varphi(y) \ln r(x, y) ds_y, \quad x \in B_e. \quad (3.120)$$

Для приближенного решения уравнения (3.120) используем формулу Гаусса для интервала $(-1, +1)$ с 16 координатами. Коэффициенты и узлы в этом случае имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} A_1^{(16)} = A_{16}^{(16)} &= 0,027152459, & A_2^{(16)} = A_{15}^{(16)} &= 0,062253524, \\ A_3^{(16)} = A_{14}^{(16)} &= 0,097158512, & A_4^{(16)} = A_{13}^{(16)} &= 0,12462897, \\ A_5^{(16)} = A_{12}^{(16)} &= 0,14959599, & A_6^{(16)} = A_{11}^{(16)} &= 0,16915622, \\ A_7^{(16)} = A_{10}^{(16)} &= 0,18260342, & A_8^{(16)} = A_9^{(16)} &= 0,18945061, \\ \alpha_1^{(16)} = -\alpha_{16}^{(16)} &= 0,98940093, & \alpha_2^{(16)} = -\alpha_{15}^{(16)} &= 0,94457502, \\ \alpha_3^{(16)} = -\alpha_{14}^{(16)} &= 0,86563120, & \alpha_4^{(16)} = -\alpha_{13}^{(16)} &= 0,75540444, \\ \alpha_5^{(16)} = -\alpha_{12}^{(16)} &= 0,61784624, & \alpha_6^{(16)} = -\alpha_{11}^{(16)} &= 0,45801678, \\ \alpha_7^{(16)} = -\alpha_{10}^{(16)} &= 0,28160355, & \alpha_8^{(16)} = -\alpha_9^{(16)} &= 0,09501251. \end{aligned}$$

Положение точки y на S в уравнении (3.120) определяется параметром t , который изменяется в интервале $(0; 2\pi)$; введя новую переменную $t = (1 + \alpha)\pi$, перейдем к интервалу $(-1; +1)$, и уравнение (3.120) примет вид

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi(\alpha) \ln \sqrt{[a \cos(1 + \alpha)\pi - x_1]^2 + [b \sin(1 + \alpha)\pi - x_2]^2} d\alpha = \\ = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(\alpha) \left[\frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{b \sin t - x_2}{a \cos t - x_1} \right] d\alpha. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Произвольно выберем точки $x_k \in B$ для упрощения вычислений; в данном случае удобно расположить точки $x^{(k)}$ ($k = 1, \dots, 16$) в B_e на конфокальном эллипсе

$$x_1 = a_1 \cos \tau, \quad x_2 = b_1 \sin \tau \quad (3.122)$$

так, чтобы значения узлов Гаусса, соответствующие этим точкам, совпадали с узлами $y^{(k)}$ ($k = 1, \dots, 16$) на основном эллипсе; сделав это и учтя, что

$$\begin{aligned} \frac{\cos(xy, n_y)}{r(x, y)} dS &= \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{b \sin t - b_1 \sin \tau}{a \cos t - a_1 \cos \tau} dt = \\ &= \frac{ab - a_1 b \cos t \cos \tau - ab_1 \sin t \sin \tau}{r^2(x, y)} dt, \end{aligned}$$

из выражения (3.121) после применения формулы квадратур

Гаусса получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{16} A_i^{(16)} \varphi(\alpha_i) \ln ([a \cos(1 + \alpha_i) \pi - a_1 \cos(1 + \alpha_j) \pi]^2 + \\ & \quad + [b \sin(1 + \alpha_i) \pi - b_1 \sin(1 + \alpha_j) \pi]^2)^{1/2} = \\ & = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{16} A_i^{(16)} [a^2 \cos^2(1 + \alpha_i) \pi + b^2 \sin^2(1 + \alpha_i) \pi] \times \\ & \quad \times [ab - a_1 b \cos(1 + \alpha_i) \pi] \cos(1 + \alpha_j) \pi - \\ & \quad - ab_1 \sin(1 + \alpha_j) \pi \sin(1 + \alpha_j) \pi] / r^2(x_j, y_j), \\ & \quad j = 1, \dots, 16. \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала случай, когда вспомогательный эллипс (3.122) расположен близко от основного. Пусть, например, $a_1 = 2$, $b_1 = 1$. Тогда, подставив $a = 1$, $b = 1/2$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{16} A_i^{(16)} \varphi(\alpha_i) \ln \{[\cos(1 + \alpha_i) \pi - 2 \cos(1 + \alpha_j) \pi]^2 + \\ & \quad + [0,5 \sin(1 + \alpha_i) \pi - \sin(1 + \alpha_j) \pi]^2\}^{1/2} = \\ & = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{16} A_i^{(16)} [\cos^2(1 + \alpha_i) \pi + \\ & \quad + 0,25 \sin^2(1 + \alpha_j) \pi] \frac{0,5 - \cos[(1 + \alpha_i) \pi - (1 + \alpha_j) \pi]}{r^2(x_j, y_j)}, \quad (3.123) \\ & \quad j = 1, \dots, 16. \end{aligned}$$

Вследствие специального выбора точек $x^{(k)}$ имеем $r(x_i, y_j) = r(x_j, y_i)$ и

$$\varphi(y_i) = \varphi(y_{17-i}), \quad i = 1, \dots, 16. \quad (3.124)$$

Тогда (3.123) превращается в систему восьми уравнений. В табл. 3.11 выписаны коэффициенты¹³⁾ при $\varphi(y_i)$ ($i = 1, \dots$

¹³⁾ Мы приводим полностью соответствующие матрицы, так как они могут быть применены для решения задач с другими граничными значениями. Так, например, приведенной выше матрицей можно пользоваться для решения задачи Дирихле для рассматриваемого эллипса при произвольных граничных значениях. Значения элементов детерминанта систем при фиксированных значениях параметра x зависят только от геометрии области, а правые части — от граничных значений. Это обстоятельство дает возможность для конкретных областей составить таблицы (типа таблиц из [49]) уже обращенных матриц, облегчающие многократное решение граничных задач для этих областей. Об отношении автора к составлению таблиц такого рода без конкретного предполагаемого пользователя см. § 1.9, 1.10.

..., 16) и правые части b . Решение системы:

$$\varphi(y_1) = 20,0201504, \quad \varphi(y_5) = 0,40868940,$$

$$\varphi(y_2) = 12,7255234, \quad \varphi(y_6) = 0,070016210,$$

$$\varphi(y_3) = 3,33231100, \quad \varphi(y_7) = 0,05396402,$$

$$\varphi(y_4) = 1,01333008, \quad \varphi(y_8) = -0,13162008.$$

Значения $\varphi(y_9), \dots, \varphi(y_{16})$ получаются по формуле (3.124).

Т а б л и ц а 3.11

$$a_1 = 2, \quad b_1 = 1$$

$\varphi(y_1)$	$\varphi(y_2)$	$\varphi(y_3)$
0,7056690 · 10 ⁻¹	0,225080 · 10 ⁻¹	0,192227 · 10 ⁻¹
-0,777287 · 10 ⁻¹	0,437733 · 10 ⁻¹	0,164132 · 10 ⁻¹
-0,445645 · 10 ⁻¹	-0,814582 · 10 ⁻¹	0,266067 · 10 ⁻¹
-0,106619 · 10 ⁻¹	-0,235192 · 10 ⁻¹	-0,274808 · 10 ⁻¹
0,154312 · 10 ⁻¹	-0,446667 · 10 ⁻¹	-0,136913 · 10 ⁻¹
0,2569901 · 10 ⁻¹	0,580715 · 10 ⁻¹	0,821648 · 10 ⁻¹
0,4742860 · 10 ⁻¹	0,1080855	0,1601319
0,5830134	0,1331035	0,1990737
$\varphi(y_4)$	$\varphi(y_5)$	$\varphi(y_6)$
0,704409 · 10 ⁻¹	0,159167	0,2648224
0,669288 · 10 ⁻¹	0,155506	0,2613435
0,5915418 · 10 ⁻¹	0,136775	0,2435480
0,140368 · 10 ⁻¹	0,830037 · 10 ⁻¹	0,1923034
0,361374 · 10 ⁻¹	0,238976 · 10 ⁻¹	-0,176667 · 10 ⁻¹
0,386139 · 10 ⁻¹	0,386139 · 10 ⁻¹	-0,452015 · 10 ⁻¹
0,1910762	0,1827931	0,116503
0,2447090	0,2540837	0,211360
$\varphi(y_7)$	$\varphi(y_8)$	$\varphi(y_9)$
0,3574148	0,4109894	0,0129680
0,3541655	0,4078786	0,0130195
0,3375693	0,3920035	0,0130689
0,2899972	0,3466244	0,1025823
0,185959	0,2479454	-0,0141866
0,213925 · 10 ⁻¹	0,710876 · 10 ⁻¹	-0,0314054
-0,340888 · 10 ⁻¹	0,730354 · 10 ⁻¹	0,0063592
0,112886	0,3371127 · 10 ⁻¹	0,0130801

Функцию $u(x)$, задаваемую равенством (3.119), представим с помощью формулы Гаусса с 16 ординатами. Воспользуемся для этого найденными значениями $\varphi(y_i)$. Тогда для приближенных значений $\tilde{u}(x)$ в произвольной точке внутри эллипса

получим

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) = & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{16} A_i^{(16)} [\cos^2(1 + \alpha_i)\pi + 0,25 \sin^2(1 + \alpha_i)\pi] \times \\ & \times \frac{0,5 - 0,5x_1 \cos(1 + \alpha_i)\pi - x_2 \sin(1 + \alpha_i)\pi}{r^2(x, y^{(i)})} + \\ & + \sum_{i=1}^{16} A_i^{(16)} \varphi(\alpha_i) \ln r(x, y^{(i)}). \quad (3.125) \end{aligned}$$

Подставив сюда координаты точки x из B_i и произведя простые вычисления, получим приближенное значение решения задачи в точке x . В табл. 3.12 указаны для четырех различных точек внутри эллипса приближенные значения $\tilde{u}(x)$, вычисленные

Т а б л и ц а 3.12

x	$\tilde{u}(x)$	$u(x)$	$ \tilde{u}(x) - u(x) $
(0,01; 0)	0,19993	0,20003	0,00010
(0,1; 0)	0,199247	0,20300	0,00371
(0,5; 0)	0,28309	0,27500	0,00809
(0,9; 0)	0,405242	0,44200	0,03775

по формуле (3.125), и точные значения, найденные по формуле (3.118); кроме того, указаны модули отклонения приближенного значения от точного.

Рассмотрим теперь случай более удаленного контура вспомогательных точек. Пусть, например, в качестве этого контура взят эллипс

$$x_1 = 5 \cos t, \quad x_2 = 3 \sin t.$$

Тогда вместо формулы (3.123) будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{16} A_i^{(16)} \varphi(\alpha_i) \ln \{[\cos(1 + \alpha_i)\pi - \\ & - 5 \cos(1 + \alpha_j)\pi]^2 + [0,5 \sin(1 + \alpha_i)\pi - 3 \sin(1 + \alpha_j)\pi]^2\}^{1/2} = \\ & = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{16} A_i^{(16)} [\cos^2(1 + \alpha_i)\pi + 0,25 \sin^2(1 + \alpha_j)\pi] \times \\ & \times \frac{0,5 - 2,5 \cos(1 + \alpha_i)\pi \cos(1 + \alpha_j)\pi - 3 \sin(1 + \alpha_i)\pi \sin(1 + \alpha_j)\pi}{r^2(x_j, y_i)}, \\ & j = 1, \dots, 16. \end{aligned}$$

Вследствие симметрии эта система сводится к системе 8 уравнений. В табл. 3.13 приводятся значения коэффициентов при $\varphi(y_i)$ и правых частей этой системы. Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(y_1) &= -0,1428199, & \varphi(y_2) &= -0,3384742, \\ \varphi(y_3) &= -0,0327377, & \varphi(y_4) &= -0,0282381, \\ \varphi(y_5) &= -0,1189288, & \varphi(y_6) &= 0,14184350, \\ \varphi(y_7) &= 0,03063215, & \varphi(y_8) &= -0,1243106. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Ясно, что в формулу (3.125) для приближенных значений $\tilde{u}(x)$ в произвольной точке x внутри эллипса теперь следует внести значение $\varphi(y_i)$ из (3.126) и считать $x_1 = 5 \cos t$, $x_2 = 3 \sin t$.

Т а б л и ц а 3.13

$$a_1 = 5, \quad b_1 = 3$$

$\varphi(y_1)$	$\varphi(y_2)$	$\varphi(y_3)$	$\varphi(y_4)$	$\varphi(y_5)$
0,0752699	0,1703547	0,2681332	0,3631916	0,4604444
0,0747264	0,1718091	0,26623310	0,3607252	0,4575569
0,0720349	0,1656363	0,2567916	0,3484000	0,4430299
0,06583164	0,1501869	0,2328661	0,3163336	0,4040258
0,0580352	0,1331898	0,2046733	0,2727523	0,3413289
0,0665271	0,1522498	0,2306135	0,2949523	0,3401015
0,0848429	0,1942006	0,2943952	0,3767454	0,4318289
0,0958832	0,2195407	0,3333182	0,4284564	0,4953056
$\varphi(y_6)$	$\varphi(y_7)$	$\varphi(y_8)$	b	
0,5547294	0,6320834	0,6760895	-0,0019034	
0,5516019	0,6288618	0,6728463	-0,0018967	
0,5357863	0,6125266	0,6563853	-0,0018337	
0,4923138	0,5670684	0,6103583	-0,0013162	
0,4132172	0,4788839	0,5188633	-0,0018202	
0,3696079	0,3949311	0,4144059	-0,00445297	
0,4543481	0,4510483	0,4414421	-0,00085351	
0,5274618	0,5287958	0,5182002	-0,00187779	

В табл. 3.14 указаны для семи различных точек внутри эллипса приближенные значения $\tilde{u}(x)$, полученные по формуле (3.125) и точные значения, вычисленные по формуле точных решений (3.118); кроме того, указаны модули отклонений приближенных значений от точных.

Эта таблица показывает существенное улучшение точности приближения даже при незначительном удалении эллипса вспомогательных точек от основного эллипса. Как уже было отмечено, вспомогательные точки можно выбрать по любому закону;

по-видимому, можно добиться и большей точности при данном числе узлов и при выбранной формуле квадратур.

Для выявления этой закономерности были взяты еще значения: $a_1 = 3$, $b_1 = 1,5$; $a_1 = 4$, $b_1 = 2$; $a_1 = 7$, $b_1 = 3,5$.

Т а б л и ц а 3.14

x	$\tilde{u}(x)$	$u(x)$	$\tilde{u}(x) - u(x)$
(0,01 0)	0,19993	0,20003	0,00010
(0,1 0)	0,20290	0,20300	0,00010
(0,5 0)	0,27486	0,27500	0,00014
(0,9 0)	0,44282	0,44300	0,00017
(0,2 -0,2)	0,20010	0,20000	0,00010
(0,0 0,3)	0,17257	0,17300	0,00043
(0,8 0,1)	0,38860	0,38900	0,00039

Т а б л и ц а 3.15

$$a_1 = 3, b_1 = 1,5$$

$\varphi(y_1)$	$\varphi(y_2)$	$\varphi(y_3)$	$\varphi(y_4)$
$0,7526011 \cdot 10^{-1}$	0,1745802	0,2818152	0,4165566
$0,7377617 \cdot 10^{-1}$	0,1711861	0,2766964	0,4101329
$0,6638950 \cdot 10^{-1}$	0,1542674	0,2510312	0,3776186
$0,4814593 \cdot 10^{-1}$	0,1121586	0,1850473	0,2894817
$0,3661240 \cdot 10^{-1}$	0,83661170 $\cdot 10^{-1}$	0,1265848	0,1709528
$0,7733745 \cdot 10^{-1}$	0,1760815	0,2596753	0,3064286
0,1237079	0,2826170	0,4241774	0,5272195
0,147896	0,3375149	0,5092041	0,6426415

$\varphi(y_5)$	$\varphi(y_6)$	$\varphi(y_7)$	$\varphi(y_8)$	b
0,5893938	0,7804797	0,9462359	1,0423776	$-0,2175468 \cdot 10^{-1}$
0,5823205	0,7733356	0,9392726	1,0355696	$-0,2188336 \cdot 10^{-1}$
0,5462728	0,7368488	0,9037093	1,0008112	$-0,2228166 \cdot 10^{-1}$
0,4447045	0,6326348	0,8019363	1,9013891	$-0,1963791 \cdot 10^{-1}$
0,2569628	0,4151936	0,5836528	0,6870789	$-0,2031618 \cdot 10^{-1}$
0,2928396	0,2430581	0,2755580	0,3486804	$0,6273127 \cdot 10^{-1}$
0,5643688	0,5148092	0,3974565	0,3047832	$-0,1531830 \cdot 10^{-1}$
0,7128290	0,699807	0,6106538	0,5125636	$-0,2209416 \cdot 10^{-1}$

В табл. 3.15—3.17 приводятся соответствующие детерминанты и правые части.

В табл. 3.18 даны точные значения искомого решения в точках (0,1; 0), (0,9; 0), (0,5; 0), (0,01; 0), (0; 0,3), (0,2; 0,2) (первая строка) и получающиеся приближения, соответствующие разным значениям a_1 и b_1 .

Т а б л и ц а 3.16

$$a_1 = 4, b_1 = 2$$

$\varphi(y_1)$	$\varphi(y_2)$	$\varphi(y_3)$	$\varphi(y_4)$	$\varphi(y_5)$
0,1192883	0,2748023	0,4297982	0,5948556	0,7773952
0,1178791	0,2715788	0,4249299	0,5886897	0,7704471
0,1107854	0,2553446	0,4003544	0,5574234	0,7350634
0,9211774	0,2124976	0,3346410	0,4717101	0,6356957
0,7070599 · 10 ⁻¹	0,1623435	0,2503948	0,3404511	0,4534192
0,9958654 · 10 ⁻¹	0,2274045	0,3405744	0,4217119	0,4551168
0,1465274	0,3353572	0,5062894	0,6403666	0,7148042
0,1716788	0,3929098	0,5951590	0,7599801	0,8569264
$\varphi(y_6)$	$\varphi(y_7)$	$\varphi(y_8)$	b	
0,9644514	1,1222204	1,2129659	-0,1200486 · 10 ⁻¹	
0,9572263	1,1150097	1,2058270	-0,1208226 · 10 ⁻¹	
0,9203521	1,0781916	1,1693772	-0,1235026 · 10 ⁻¹	
0,8154628	0,9730379	1,0652039	-0,1123376 · 10 ⁻¹	
0,6024533	0,7513576	0,8432376	0,1018639 · 10 ⁻¹	
0,4570063	0,4869380	0,4869380	0,3671170 · 10 ⁻¹	
0,7148036	0,6567247	0,6010951	-0,9140302 · 10 ⁻¹	
0,8978073	0,8642387	0,8147520	-0,1221528 · 10 ⁻¹	

Т а б л и ц а 3.17

$$a_1 = 7, b_1 = 3,5$$

$\varphi(y_1)$	$\varphi(y_2)$	$\varphi(y_3)$	$\varphi(y_4)$	$\varphi(y_5)$
0,1945633	0,4467118	0,6875733	0,9165759	1,1438488
0,1942516	0,4437088	0,6830180	0,9107906	1,1270636
0,1865981	0,4284742	0,6598843	0,8809577	1,0925119
0,1683188	0,3865892	0,5960635	0,7982160	1,9954875
0,1392820	0,3197231	0,4917547	0,6555539	0,8157245
0,1496218	0,3425712	0,5200706	0,6691179	0,7791161
0,1958901	0,4486045	0,6817290	0,8787012	1,0221028
0,2225185	0,5097276	0,7757032	1,0036874	1,1763909
$\varphi(y_6)$	$\varphi(y_7)$	$\varphi(y_8)$	b	
1,3305995	1,4852525	1,5714454	-0,3857165 · 10 ⁻¹	
1,3232816	1,4777089	1,5638384	-0,3883625 · 10 ⁻¹	
1,2859653	1,4392146	1,5250124	-0,3981773 · 10 ⁻¹	
1,1803082	1,3297231	1,4143866	-0,3710540 · 10 ⁻¹	
0,9721584	1,1061113	1,1850845	-0,2929478 · 10 ⁻¹	
0,8528505	0,9066793	0,9420934	0,1242199 · 10 ⁻¹	
1,1017112	0,1260646	1,1343579	-0,3114384 · 10 ⁻¹	
1,2826390	1,3273836	1,3457654	-0,3930370 · 10 ⁻¹	

В табл. 3.19 даются погрешности $\varepsilon_i(x^{(1)}, x^{(2)})$ при решении рассмотренной задачи.

Погрешность ε этого способа приближенного решения функционального уравнения (3.89) оценивается по формуле $\| \varepsilon \| \leq \|L^{-1}\| \|R\|$, где L — оператор соответствующей системы, а R — вектор остаточных членов (нормы рассматриваются в том пространстве, где требуется оценить ε). Нетрудно заметить, что

Т а б л и ц а 3.18

(a_1, b_1)	$(x^{(1)}, x^{(2)})$			$(x^{(1)}, x^{(2)})$		
	$(0,1; 0)$	$(0,9; 0)$	$(0,5; 0)$	$(0,01; 0)$	$(0; 0,3)$	$(0,2; 0,2)$
(2; 1)	0,20300	0,44300	0,27500	0,20003	0,17300	0,20000
(3; 1,5)	0,19925	0,40524	0,28309	0,19711	0,17257	0,20010
(4; 2)	0,20433	0,45700	0,27287	0,20072	0,12715	0,15780
(5; 3)	0,20347	0,44096	0,27427	0,20028	0,12720	0,15298
(7; 3,5)	0,20290	0,44282	0,27486	0,19993	0,17257	0,20000
	0,18188	-0,02032	0,23679	0,19274	0,15417	0,06980

Т а б л и ц а 3.19

(a_1, b_1)	$\varepsilon_1(0,1; 0)$	$\varepsilon_2(0,9; 0)$	$\varepsilon_3(0,01; 0)$	$\varepsilon_4(0; 0,3)$
(2; 1)	0,00375	0,03776	0,00292	0,00043
(3; 1,5)	0,00133	0,01400	0,00069	0,04585
(4; 2)	0,00047	0,00204	0,00025	0,04580
(5; 3)	0,00010	0,00018	0,00010	0,00043
(7; 3,5)	0,02112	0,42268	0,00729	0,01883
(a_1, b_1)	$\varepsilon_5(0,2; 0,2)$	$\varepsilon_6(0,5; 0)$	$\sum_{i=1}^6 \varepsilon_i$	$\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \varepsilon_i$
(2; 1)	0,00010	0,00809	0,05305	0,00884
(3; 1,5)	0,04220	0,00213	0,10620	0,017700
(4; 2)	0,04702	0,00073	0,09631	0,016052
(5; 3)	0,00010	0,00014	0,00105	0,00017
(7; 3,5)	0,13020	0,03821	0,63833	0,10638

путем удаления точек от основной границы S можно сделать R сколь угодно малым, однако при этом ухудшается обусловленность матрицы L ; и, наоборот, при стремлении точек x_k к S ухудшается обусловленность матрицы L , но $\|R\| \rightarrow \infty$. Поэтому естественно предполагать некоторое оптимальное расположение точек x_k . Обозначим через $\varepsilon^{(j)}$ вектор погрешности, когда значения параметра взяты на кривой S_j . Будем говорить, что кривая

S_k является оптимальной в смысле метрики R среди семейств кривых S_j ($j = 1, \dots, \theta$), если $\| \varepsilon^{(k)} \|_R = \min_j \| \varepsilon^{(j)} \|_R$.

Из табл. 3.19 видно, что оптимальной кривой для нашего случая ($\theta = 6$) как в смысле евклидовой метрики, так и в смысле метрики пространства \mathbf{C} будет эллипс со значениями $a_1 = 5$, $b_1 = 3$.

§ 3.10. Приближенное построение квазиконформных отображений многосвязных областей

В § 3.4 была рассмотрена граничная задача (видоизмененная задача Дирихле) для многосвязных областей, возникающая при конформном отображении многосвязных областей. При квазиконформном отображении возникает аналогичная граничная задача, в которой вместо уравнения Лапласа фигурирует общее эллиптическое дифференциальное уравнение второго порядка. Основным при приближенном решении видоизмененной задачи Дирихле было доказательство невырожденности матрицы систем (3.51) для коэффициентов c_i , дающей искомое решение в виде линейной комбинации решений обычных граничных задач (3.50). В работе [135] дано обобщение этого доказательства для систем, возникающих при общем квазиконформном отображении многосвязных областей. В настоящем параграфе, следуя работе [135], приводим это обобщение.

Пусть в комплексной плоскости задана конечная n -связная область G , которая содержит начало координат $z = 0$ и ограничена простыми замкнутыми кривыми $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ ($n \geq 2$), одна из которых Γ_n охватывает все остальные. Под Γ будем подразумевать совокупность этих контуров. Положительным направлением на Γ будем считать то, которое оставляет G слева. Предположим также, что граница области G достаточно гладкая, а именно, что все $\Gamma_i \in \mathbf{C}^3$.

Рассмотрим задачу квазиконформного отображения области на круг с концентрическими разрезами, осуществляемого системой Бельтрами дифференциальных уравнений первого порядка

$$-\frac{\partial v}{\partial x^1} = \beta \frac{\partial u}{\partial x^1} + \gamma \frac{\partial u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x^1} + \beta \frac{\partial u}{\partial x^2}, \quad \alpha > 0, \quad \alpha\gamma - \beta^2 = 1, \quad (3.127)$$

где α, β, γ обладают непрерывными в смысле Гёльдера частными производными в \bar{G} .

Систему (3.127) представим в равносильной комплексной форме

$$W_{\bar{z}} = qW_z, \quad (3.128)$$

где $W = u + iv$, $W_{\bar{z}}$, W_z — обычные формальные производные $W(z)$ по \bar{z} и z соответственно, а $q(z) = \frac{\gamma - \alpha - 2i\beta}{\alpha + \gamma + 2}$, $q(z) \in C_0^1(\bar{G})$ ($0 < \delta < 1$), $|q(z)| \leq q_0 < 1$. Рассматриваемая задача сводится к нахождению такого решения $\xi = f(z)$ ($f(0) = 0$) уравнения (3.128), которое однолистно отображает G на круг $|\xi| < r$ с разрезами вдоль дуг окружностей с центром в $\xi = 0$ и радиусами r_i ($i = 1, \dots, n-1$). Числа r_i заранее не задаются и определяются в ходе решения задачи.

Отображающую функцию будем искать в виде

$$f(z) = [W_0(z) - W_0(0)] e^{W(z)}, \quad (3.129)$$

где $W_0(z)$ — произвольный гомеоморфизм уравнения (3.128), обладающий в замкнутой области \bar{G} непрерывными в смысле Гёльдера частными производными, $W(z)$ — подлежащая определению функция. Для нахождения функций $u(x^1, x^2) = \operatorname{Re} W(z)$ воспользуемся граничной задачей для вытекающей из (3.127) эллиптического уравнения второго порядка

$$L[u] = \alpha \frac{\partial^2 u}{(\partial x^1)^2} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 u}{(\partial x^2)^2} + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x^1} + \frac{\partial \mu}{\partial x^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial x^1} + \frac{\partial \gamma}{\partial x^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x^2} = 0, \quad (3.130)$$

$$u|_{y \in \Gamma_i} = -\ln |W_0(y) - W_0(0)| + \ln r_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad r_n = r.$$

$$\int_{\Gamma_i} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial y^1} + \beta \frac{\partial u}{\partial y^2} \right) dy^2 - \left(\beta \frac{\partial u}{\partial y^1} + \gamma \frac{\partial u}{\partial y^2} \right) dy^1 = 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Под $\frac{\partial u}{\partial y^1}$ и $\frac{\partial u}{\partial y^2}$ на Γ_i ($y \in \Gamma_i$) понимаются предельные значения производных $\frac{\partial u}{\partial x^1}$ и $\frac{\partial u}{\partial x^2}$ изнутри области. Аналогично решению видоизмененной задачи Дирихле (3.48), решение граничной задачи (3.130) будем искать в виде

$$u(x^1, x^2) = \sum_{i=1}^{n+1} c_i u_i(x^1, x^2), \quad (3.131)$$

где $c_{n+1} = 1$, а $u_i(x^1, x^2)$ — решения обычных граничных задач Дирихле

$$L[u_i] = 0, \quad \text{в } G, \quad (3.132)$$

$$u_i|_{\Gamma_j} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$L[u_{n+1}] = 0, \quad \text{в } G, \quad (3.133)$$

$$u_{n+1}|_{\Gamma} = -\ln |W_0(y) - W_0(0)|,$$

δ_{ij} — символ Кронекера. Заметим, что из n граничных задач (3.132) решение можно проводить только для $(n-1)$ граничных

задач, так как для любого решения u_s ($s \leq n$) справедливо тождество

$$u_s = 1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n u_i.$$

Для определения коэффициентов $c_i \equiv \ln r_i$ разложения (1.131) из интегральных граничных условий получаем линейную систему уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j = -a_{i,n+1}, \quad (3.134)$$

где

$$a_{ij} = - \int_{\Gamma_i} \left(\alpha \frac{\partial u_i}{\partial y^1} + \beta \frac{\partial u_j}{\partial y^2} \right) dy^2 + \left(\beta \frac{\partial u_j}{\partial y^1} + \gamma \frac{\partial u_j}{\partial y^2} \right) dy^1, \\ i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n + 1.$$

Детерминант матрицы $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ системы (3.134) равен нулю, что означает неединственность квазиконформно отображающей функции области G на круг C заранее не зафиксированными концентрическими разрезами, и радиусом круга. Однако зафиксировав произвольно один из радиусов r_s (и, следовательно, $c_s = \ln r_s$) получаем систему (для $s = n$)

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} c_j = -a_{i,n+1} - a_{in} \ln r_n, \quad (3.135)$$

для детерминанта которой докажем невырожденность

$$\det \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n-1} \neq 0. \quad (3.136)$$

Согласно интегральной формуле Грина, для диагональных членов этого определителя имеем неравенство

$$c_{ii} = \iint_G \left[\alpha \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^1} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x^1} \frac{\partial u_i}{\partial x^2} + \gamma \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx dy > 0. \quad (3.137)$$

Покажем, что недиагональные члены определителя отрицательны.

Представим интегральные условия в (3.130) в производных по направлениям касательной и нормали от функции $u(x^1, x^2)$ в граничных точках. С этой целью проведем касательную через граничную точку $y(y^1, y^2)$ в положительном направлении, внутреннюю нормаль и обозначим через $\theta(y)$ угол наклона касательной с положительным направлением оси абсцисс. После неслож-

ных преобразований интегральные условия в (3.130) примут вид:

$$\int_{\Gamma_i} \left\{ \left[\beta \cos 2\theta + \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) \sin 2\theta \right] \frac{\partial u}{\partial s} + \right. \\ \left. + [\alpha \sin^2 \theta + \gamma \cos^2 \theta - \beta \sin 2\theta] \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds = 0, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (3.138)$$

Заметим, что при $\alpha \equiv \gamma$ и $\mu \equiv 0$ из (3.138) получаем интегральные граничные условия в (3.48) для конформно отображающей функции. Граничные кривые Γ_i являются линиями уровня для любой функции u_i ($i = 1, \dots, n$) и поэтому

$$\frac{\partial u_j}{\partial s} \Big|_{\Gamma_i} \equiv 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

В силу принципа Зарембы — Жиро (см., например [39, § 3 гл. 2]) имеем

$$\frac{\partial u_j}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i} > 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

но поскольку $\alpha \sin^2 \theta + \gamma \cos^2 \theta - \beta \sin 2\theta > 0$, то из (3.138) получаем искомые неравенства

$$c_{ij} = - \int_{\Gamma_i} (\alpha \sin^2 \theta + \gamma \cos^2 \theta - \beta \sin 2\theta) \frac{\partial u_j}{\partial n} ds < 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n-1. \quad (3.139)$$

Согласно равенству (аналогу теоремы Коши для гармонических функций в n -связной области)

$$\int_{\Gamma_n} \left(\alpha \frac{\partial u_i}{\partial y^1} + \beta \frac{\partial u_i}{\partial y^2} \right) dy^2 - \left(\beta \frac{\partial u_i}{\partial y^1} + \gamma \frac{\partial u_i}{\partial y^2} \right) dy^1 = \\ = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\Gamma_i} \left(\alpha \frac{\partial u_i}{\partial y^1} + \beta \frac{\partial u_i}{\partial y^2} \right) dy^2 - \left(\beta \frac{\partial u_i}{\partial y^1} + \gamma \frac{\partial u_i}{\partial y^2} \right) dy^1, \quad (3.140)$$

верному для любой функции $u_i(x^1, x^2)$ ($i = 1, \dots, n+1$), приходим к выводу, что интегральные условия в (3.130) выполняются и на внешнем контуре Γ_n области. Интегрирование в (3.140) производится в положительном направлении на Γ_n , а на остальных контурах — в отрицательном направлении.

Учитывая (3.137), (3.139) и (3.140), нетрудно убедиться в том, что в каждом столбце определителя системы (3.135) диагональные члены по модулю превосходят сумму модулей остальных членов этого столбца. Это означает, что выполняется условие неособенности матриц Адамара.

Таким образом, имеем следующий алгоритм решения граничной задачи (3.130). Сперва решаются обычные граничные задачи Дирихле (3.132) и (3.133). При этом могут быть применены любые методы решения внутренних граничных задач (в том числе и описанные в настоящей монографии), если будут известны фундаментальные решения (функции) оператора L , то для их нахождения могут быть применены известные методы. После нахождения u_i решением систем (3.135) определяем коэффициенты $c_i = \ln r_i$, которые при подстановке в (3.131), дают окончательное решение граничной задачи (3.130).

Для нахождения отображающей функции следует определять сопряженную с $u(x^1, x^2)$ в смысле (3.127) функцию $v(x^1, x^2)$, для которой из соотношений (3.127) и (3.140) имеем

$$\int_{\Gamma^*} dv = 0, \quad (3.141)$$

где $\Gamma^* \in G$ — любой замкнутый контур. Из (3.141) получаем, что сопряженная функция $v(x, y)$ восстанавливается в любой точке с точностью до действительного слагаемого криволинейным интегралом

$$v(y^1, y^2) = \int_{(y_0^1, y_0^2)}^{(y^1, y^2)} -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y^1} + \gamma \frac{\partial u}{\partial y^2} \right) dy^1 + \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial y^1} + \beta \frac{\partial u}{\partial y^2} \right) dy^2 + c, \quad (3.142)$$

где (y_0^1, y_0^2) и c — соответственно произвольные точка и число.

Покажем, что построенное формулами (3.129), (3.131), (3.142) решение уравнения (3.128) осуществляет однолистное отображение (с точностью до поворота) области G на упомянутую каноническую область. Это нетрудно показать, учитывая специфику построения функции $f(z)$ в (3.129). Действительно, из граничных условий в (3.130) видно, что $|f(z)|$ постоянно на каждом контуре Γ_i и, в частности, r равна постоянной на Γ_n . Так как аргумент функции $f(z)$ не изменяется, когда z описывает любой контур Γ_i ($i = 1, \dots, n-1$), образом каждого такого контура будет дуга окружности на некоторой римановой поверхности, расположенной над плоскостью ξ . Это не верно для образа контура Γ_n , так как, когда z описывает Γ_n ее образ $f(z)$ в точности один раз описывает окружность радиуса r , поскольку аргумент $f(z)$ при этом возрастает на 2π .

Из поведения функции $f(z)$ на границе области G в силу принципа сохранения области заключаем, что все ее значения лежат внутри круга $|\xi| < r$ и что каждое значение ξ ($|\xi_0| < r$), не подлежащее исключенным дугам окружностей, она принимает в области G ровно один раз.

В самом деле, рассмотрим функцию

$$\xi^* = f(z) - \xi_0.$$

Она является решением уравнения (3.128) и для нее применим принцип аргумента, согласно которому выражение

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d \arg [f(z) - \xi_0]$$

будет давать число точек области G , в которых функция $f(z)$ принимает значение ξ_0 . Из граничных свойств $f(z)$ следует, что величина $\frac{1}{2\pi} \arg [f(z) - \xi_0]$ не изменится, если точка z пробегает любой контур Γ_i ($i = 1, \dots, n-1$), и изменится на 1, если z описывает контур Γ_n . Следовательно, $N = 1$ и тем самым однолистность $\xi = f(z)$ доказана.

Отображающая функция (3.129) содержит произвольный гомеоморфизм $W_0(z)$. Несмотря на то, что в выборе $W_0(z)$ ничем не ограничены, его эффективное построение связано с определенными затруднениями. Поэтому обычный прием выхода на плоскость гомеоморфизма с целью дальнейшего построения конформного отображения области $W_0(G)$ на круг практически не выгоден, поскольку сразу возникают характерные и порою довольно труднопреодолимые затруднения способа суперпозиции:

1) определение вида области $W_0(G)$;

2) нахождение прообразов $z = W_0^{-1}(\xi)$ точек области $W_0(G)$. Вообще в ситуациях, когда ни одна из функций, составляющих композицию, не представляется в явном виде через элементарные функции, метод суперпозиции считается плохим средством для проведения вычислений.

Рассмотрим задачу построения такого решения уравнения (3.128) $W = f(z)$, которое однолистно отображает область G на круговое кольцо $\rho < |W| < R$ с разрезами внутри вдоль окружностей с центром в $W = 0$ и радиусами r_i ($i = 1, \dots, n-2$). Среди всех радиусов заранее задается лишь один (пусть это будет R).

В этом случае можно конструировать искомое квазиконформное отображение уже без использования гомеоморфизма $W_0(z)$.

Обозначим через G_1, \dots, G_{n-1} конечные односвязные области с границами $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$ соответственно, и допустим, что $z^* \in G_n$.

Заметим, что если $W(z)$ есть решение неоднородного уравнения Бельтрами

$$W_z = qW_z + \frac{q}{z-z^*}, \quad (3.143)$$

то функция

$$W_1 = (z - z^*)e^W = (z - z^*)e^{u+iv} \quad (3.144)$$

является решением однородного уравнения (3.128).

Так как уравнение (3.143) не содержит искомым функций (содержит только производные), то оно имеет смысл для аддитивно многозначных функций. Класс аддитивно многозначных решений уравнений (3.143), рассматриваемых как однозначные на универсально накрывающей римановой поверхности \widehat{G} области G обозначим через $B(\widehat{G})$, а класс однозначных в G решений (3.143) — через $B(G)$. Очевидно, что $W^* = -\ln(z - z^*) \in B(\widehat{G})$ и $\frac{q(z)}{z - z^*} \in C_\delta^1(G)$.

Учитывая эти замечания, нетрудно построить $W = \varphi(z)$. Для этого следует поступить следующим образом: комплексное уравнение (3.143) представить в виде системы; предположив $W = u + iv$, соответствующим образом видоизменить уравнение $L[u] = 0$ в (3.130); заменить (3.129) функцией вида (3.144); для определения входящих в (3.144) функций $u(x^1, x^2)$ и $v(x^1, x^2)$ воспользоваться формулами (3.131) и (3.142), учитывая в них, что

$$u_{n+1} = -\ln|z - z^*|, \quad r_k = \rho, \quad r_n = R.$$

Построенная таким путем функция $W = u + iv \in B(G)$. Так, например, при $n = 2$ приходим к довольно простой схеме построения отображающей функции области G на круговое кольцо $\rho < |W| < R$

$$\begin{aligned} W_1 &= (z - z_0) e^{w(z)}, \\ \operatorname{Re} W(z) &= \ln \rho u_1(x^1, x^2) + \ln R [1 - u_1(x^1, x^2)] - \ln |z - z_0|, \\ \ln \rho &= \ln R - \frac{2\pi}{\int_{\Gamma_1} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial y^1} + \gamma \frac{\partial u_1}{\partial y^2} \right) dy' - \left(\alpha \frac{\partial u_1}{\partial y^1} + \beta \frac{\partial u_1}{\partial y^2} \right) dy^2}. \end{aligned} \quad (3.145)$$

$\operatorname{Im} W(z)$ однозначно в G и восстанавливается из (3.143) криволинейным интегралом с точностью до аддитивной постоянной, а входящая в формулы (3.145) функция $u_1(x^1, x^2)$ представляет решение граничной задачи

$$L(u_1) = 0, \quad u_1|_{\Gamma_1} = 1, \quad u_1|_{\Gamma_2} = 0.$$

ГЛАВА IV
ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ СТАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ

§ 4.1. Постановка граничных задач плоской
статической теории упругости и соответствующие
фундаментальные решения

Следуя Н. И. Мухелишвили [115], будем говорить, что тело подвержено плоской деформации (параллельной плоскости Ox^1x^2), если третья компонента u_3 вектора смещения u равна нулю, а компоненты u_1 и u_2 зависят только от x^1 и x^2 ; в этом случае основные однородные уравнения теории упругости принимают вид

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x^1} + \mu \Delta u_1 = 0, \quad (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x^2} + \mu \Delta u_2 = 0, \quad (4.1)$$

где Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2},$$

λ и μ — постоянные Ламе:

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2}.$$

Заметим, что в случае обобщенного плоского напряженного состояния ([115, с. 93]) уравнения (4.1) остаются в силе, лишь вместо компонент смещения u_1 и u_2 следует понимать их средние значения. Описанный ниже алгоритм может быть использован также для расчета состояния равновесия упругого тела для случая обобщенного плоского напряженного состояния.

Пусть в двумерной многосвязной области G (область G может быть не ограничена) ищется регулярное решение системы уравнений (4.1), которое удовлетворяло бы на границе Γ области G соотношениям

$$l_j \mu = \sum_{i=1}^2 (\alpha_{ij} \sigma_{ni} + \beta_{ij} u_i) = \psi^j, \quad (4.2)$$

где α_{ij} , β_{ij} , ψ^j — известные функции точки $y \in \Gamma$, σ_{ni} ($i = 1, 2$) — компоненты вектора напряжения:

$$\sigma_{ni} = \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} \cos(n, x^j), \quad \sigma_{ii} = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2;$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right),$$

$\cos(n, x^j)$ ($j = 1, 2$) — направляющие косинусы внешней нормали к границе Γ в точке $y \in \Gamma$.

Частными случаями граничной задачи (4.1), (4.2) являются классические первая и вторая граничные задачи теории упругости, когда на границе Γ заданы либо напряжения ($\beta_{ij} = 0$, $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера), либо смещения ($\alpha_{ij} = 0$, $\beta_{ij} = \delta_{ij}$), а также смешанная задача, когда на части контура Γ заданы напряжения, а на остальной части — смещения, и другие граничные задачи.

Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система точек, расположенных всюду плотно на вспомогательном контуре S , не имеющем общих точек с замкнутой областью $\bar{G} = G + \Gamma$.

Рассмотрим систему вектор-функций

$$\{\psi_j(y)\}_{j=1}^{\infty}, \quad (4.3)$$

где

$$\psi_{2k-1}^{(1)}(y) = n \ln r(z_k, y) - m \left[\frac{\partial r(z_k, y)}{\partial z_k^1} \right]^2, \quad \psi_{2k-1}^{(2)}(y) = -m \frac{\partial r(z_k, y)}{\partial z_k^1} \frac{\partial r(z_k, y)}{\partial z_k^2}, \quad (4.4)$$

$$\psi_{2k}^{(1)}(y) = \psi_{2k-1}^{(2)}(y), \quad \psi_{2k}^{(2)}(y) = n \ln r(z_k, y) - m \left[\frac{\partial r(z_k, y)}{\partial z_k^2} \right]^2,$$

где $r(z_k, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (z_k^i - y^i)^2}$ — расстояния между точками $z_k \in S$

и $y \in \Gamma$, $m = (\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)$, $n = (\lambda + 3\mu)(\lambda + 2\mu)$.

Полнота системы (4.3) (доказательство которой приводится ниже) дает возможность решать граничную задачу (4.1), (4.2) лишь при $\alpha_{ij} = 0$ как первым, так и вторым методами решения граничных задач разложением по неортогональным функциям. Эти два метода для случая плоской теории упругости можно изложить следующим образом.

Первый метод решения граничной задачи (4.1), (4.2) основан на нахождении коэффициентов разложения вектор-функции $\psi = (\psi^1, \psi^2)$ по первым N функциям системы $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$, где l — оператор, определенный с помощью формул (4.2), а ψ_j — вектор-

функция системы (4.3). Если норма

$$\left\| \psi - \sum_{j=1}^N a_j l \psi_j \right\|_{L_2(\Gamma)} \quad (4.5)$$

мала, то в качестве приближенного решения задачи (4.1), (4.2) можно принять

$$u^{(N)}(x) = \sum_{j=1}^N a_j \psi_j(x), \quad (4.6)$$

$\psi_j(x)$ определяются из (4.4) заменой точки $y \in \Gamma$ точкой $x \in G$.

Для изложения второго способа решения граничной задачи (4.1), (4.2) рассмотрим уравнения

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \Gamma(x, y) \tilde{\psi}(y) ds_y - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \bar{\Gamma}(x, y) \bar{\psi}(y) ds_y, \quad x \in G, \quad (4.7)$$

$$0 = \int_{\Gamma} \Gamma(z, y) \tilde{\psi}(y) ds_y - \int_{\Gamma} \bar{\Gamma}(z, y) \bar{\psi}(y) ds_y, \quad z \in G, \quad (4.8)$$

где $\tilde{\psi}(y)$ и $\bar{\psi}(y)$ — векторы смещений и напряжений на площадке с нормалью n_y , матрицы $\Gamma(x, y)$ и $\bar{\Gamma}(x, y)$ определяются формулами

$$\Gamma(x, y) = \begin{vmatrix} n \ln r(x, y) - m \left[\frac{\partial r(x, y)}{\partial x^1} \right]^2 & -m \frac{\partial r(x, y)}{\partial x^1} \frac{\partial r(x, y)}{\partial x^2} \\ -m \frac{\partial r(x, y)}{\partial x^1} \frac{\partial r(x, y)}{\partial x^2} & n \ln r(x, y) - m \left[\frac{\partial r(x, y)}{\partial x^2} \right]^2 \end{vmatrix},$$

$$\bar{\Gamma}(x, y) = \begin{vmatrix} a \frac{\partial}{\partial n_y} \ln r + 2b \left(\frac{\partial r}{\partial y^1} \right)^2 \frac{\partial}{\partial n_y} \ln r & -a \frac{\partial}{\partial s_y} \ln r + 2b \frac{\partial r}{\partial y^1} \frac{\partial r}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial n_y} \ln r \\ -a \frac{\partial}{\partial s_y} \ln r + 2b \frac{\partial r}{\partial y^1} \frac{\partial r}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial n_y} \ln r & a \frac{\partial}{\partial n_y} \ln r + 2b \left(\frac{\partial r}{\partial y^2} \right)^2 \frac{\partial}{\partial n_y} \ln r \end{vmatrix},$$

$a = \mu/(\lambda + 2\mu)$, $b = (\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu)$, производные вдоль нормали $\partial/\partial n_y$ и вдоль контура $\partial/\partial s_y$ определяются соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial n_y} = \frac{\partial}{\partial y^1} \cos(n_y, i_1) + \frac{\partial}{\partial y^2} \cos(n_y, i_2),$$

$$\frac{\partial}{\partial s_y} = \frac{\partial}{\partial y^2} \cos(n_y, i_1) + \frac{\partial}{\partial y^1} \cos(n_y, i_2);$$

n_y — нормаль в точке $y \in \Gamma$, i_1 и i_2 — координатные орты.

Матрицы $\Gamma(z, y)$ и $\bar{\Gamma}(z, y)$ получаются из приведенных выше формул для матриц $\Gamma(x, y)$ и $\bar{\Gamma}(x, y)$ путем замены x на z . Представляет определенный интерес физический смысл матриц $\Gamma(z, y)$ и $\bar{\Gamma}(z, y)$. Пусть все бесконечное трехмерное пространство заполнено упругой средой с коэффициентами Ламе λ , μ ; рас-

смотрим прямую R , проходящую через произвольную точку z этого пространства и направленную параллельно оси Ox^3 . Будем предполагать, что в каждой точке прямой R действует одна и та же сила, направленная вдоль оси Ox^1 . Тогда из физических соображений ясно, что третья компонента вектора смещения u , обусловленного этой силой, будет равна нулю, а компоненты u_1 и u_2 будут зависеть только от z_1 и z_2 . Первая вектор-строка (или первый вектор-столбец) матрицы $\Gamma(z, y)$ дает с точностью до постоянного множителя (который определяется по величине силы, действующей в точках прямой R) первые две компоненты вектора смещения u . Если в каждой точке прямой R действует сила, направленная вдоль оси Ox^2 , то соответствующее смещение определяется из второй вектор-строки матрицы $\Gamma(z, y)$. Что касается матрицы $\bar{\Gamma}(z, y)$, то она, в отличие от матрицы, которая определена в любой точке $y \neq z$ плоскости Oz^1z^2 , определена лишь на границе Γ области G . Первая вектор-строка матрицы $\bar{\Gamma}(z, y)$ дает составляющие силы, действующей на единичную площадку с нормалью n_y , когда в каждой точке прямой R действует сила, направленная вдоль оси Ox^1 . Аналогично вторая вектор-строка матрицы $\bar{\Gamma}(z, y)$ дает составляющие напряженности на площадку с нормалью n_y , когда в каждой точке прямой R действует сила, направленная вдоль оси Ox^2 .

Перейдем к изложению второго способа решения граничной задачи (4.1), (4.2). Будем предполагать, что одна из матриц

$$\|\alpha_{ij}(y)\| = \begin{vmatrix} \alpha_{11}(y) & \alpha_{21}(y) \\ \alpha_{12}(y) & \alpha_{22}(y) \end{vmatrix}, \quad \|\beta_{ij}(y)\| = \begin{vmatrix} \beta_{11}(y) & \beta_{21}(y) \\ \beta_{12}(y) & \beta_{22}(y) \end{vmatrix}$$

неособенная. Тогда из (4.2) получаем либо соотношения (при $\det \|\alpha_{ij}(y)\| \neq 0$)

$$\begin{aligned} \sigma_{n_1} &= a_{11}\psi^1 + a_{12}\psi^2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2, \\ \sigma_{n_2} &= a_{21}\psi^1 + a_{22}\psi^2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2, \end{aligned} \quad (4.9)$$

либо (при $\det \|\beta_{ij}(y)\| \neq 0$)

$$\begin{aligned} u_1 &= c_{11}\psi^1 + c_{12}\psi^2 + d_{11}\sigma_{n_1} + d_{12}\sigma_{n_2}, \\ u_2 &= c_{21}\psi^1 + c_{22}\psi^2 + d_{21}\sigma_{n_1} + d_{22}\sigma_{n_2}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}, & a_{12} &= \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \\ a_{21} &= \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{12}\alpha_{21} - \alpha_{21}\alpha_{22}}, & a_{22} &= \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}\alpha_{21} - \alpha_{21}\alpha_{22}}, \\ b_{11} &= \frac{\alpha_{21}\beta_{12} - \alpha_{22}\beta_{11}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}, & b_{12} &= \frac{\alpha_{21}\beta_{22} - \alpha_{22}\beta_{21}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \\ b_{21} &= \frac{\alpha_{11}\beta_{12} - \alpha_{12}\beta_{11}}{\alpha_{12}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{22}}, & b_{22} &= \frac{\alpha_{11}\beta_{22} - \alpha_{12}\beta_{21}}{\alpha_{12}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{22}}. \end{aligned}$$

Аналогично определяются c_{ij} , d_{ij} с помощью функций α_{ij} и β_{ij} . Пусть $\det \|\alpha_{ij}(y)\| \neq 0$; запишем (4.9) в матричной форме

$$\sigma_n = A\psi + Bu, \quad (4.11)$$

где A , B — матрицы с элементами a_{ij} , b_{ij} соответственно. Подставляя (4.11) в (4.8) и учитывая, что

$$\sigma_n = \tilde{\psi}(y), \quad u = \bar{\psi}(y),$$

получаем следующее интегральное уравнение первого рода:

$$\int_{\Gamma} K(z, y) \bar{\psi}(y) ds_y = F(z), \quad (4.12)$$

где

$$K(z, y) = F_1(z, y) - B(y) \Gamma(z, y), \quad F(z) = \int_{\Gamma} \Gamma(z, y) A(y) \psi(y) ds_y. \quad (4.13)$$

В том случае, когда на границе Γ области G заданы внешние напряжения, получаем $A \equiv 1$, $B \equiv 0$, и интегральное уравнение (4.12) превращается в уравнение

$$\int_{\Gamma} \bar{\Gamma}(z, y) \bar{\psi}(y) ds_y = F(z), \quad (4.14)$$

где

$$F(z) = \int_{\Gamma} \Gamma(z, y) \psi(y) ds_y.$$

Обоснование второго способа решения соответствующей граничной задачи, сводящегося к решению интегрального уравнения (4.14), будет приведено ниже.

Что касается разрешимости интегрального уравнения (4.12), соответствующего общему случаю, то для обоснования второго способа приближенного решения граничных задач воспользуемся утверждением § 1.1, которое для данного случая означает, что система функций

$$\{K_i(z_k, y)\}_{k=1}^{\infty}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4.15)$$

где $K_i(z_k, y)$ совпадает с i -й вектор-строкой матрицы $K(z_k, y)$, дает возможность сколь угодно хорошей аппроксимации искомой функции $\bar{\psi}(y)$. Определяя $\bar{\psi}(y)$ из (4.12), получаем $\bar{\psi}(y) = \sigma_n(y)$ из (4.11), и для нахождения приближенного решения граничной задачи (4.1), (4.2) в любой точке можно воспользоваться формулой (4.7).

Лемма работы [28], доказательство которой было дано в § 1.1, утверждает лишь, что система (4.15) полна в пространстве A^*E^* (обозначения те же, что и в § 1.1), элементом которой и

является решение $\bar{\psi}(y)$ интегрального уравнения (4.12), если это решение существует. Однако выяснение вопроса, из каких функций состоит пространство A^*E^* в общем случае, — довольно сложная задача, и ее вряд ли можно считать задачей вычислительной математики. Поэтому представляет интерес полнота системы (4.15) в функциональном пространстве $L_2(\Gamma)$ в двух частных, но наиболее распространенных случаях — когда на границе Γ заданы смещения ($A \equiv 0, B \equiv 1$) и внешние напряжения ($A \equiv 1, B \equiv 0$).

В первом случае система (4.15) принимает вид

$$\{\Gamma_i(z_k, y)\}_{k=1}^{\infty}, \quad i = 1, 2, \quad (4.16)$$

где $\Gamma_i(z_k, y)$ — i -я вектор-строка матрицы $\Gamma(z_k, y)$, а во втором —

$$\{\bar{\Gamma}_i(z_k, y)\}_{k=1}^{\infty}, \quad i = 1, 2, \quad (4.17)$$

где $\bar{\Gamma}_i(z_k, y)$ — i -я вектор-строка матрицы $\bar{\Gamma}(z_k, y)$.

Система векторов (4.16) при счетном множестве точек z_k , всюду плотно расположенных на вспомогательном контуре S , линейно независима и полна в пространстве $L_2(\Gamma)$ всех интегрируемых с квадратом вектор-функций, определенных на Γ .

Это предположение утверждает, что для любого вектора $\gamma(y) \in L_2(\Gamma)$, заданного на Γ , и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число N_0 и такую систему коэффициентов b_{ik} ($i = 1, 2; k = 1, \dots, N$), что если $N > N_0$, то

$$\left\{ \int_{\Gamma} \left[\gamma(y) - \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^N b_{ik} \omega_{ik}(y) \right]^2 ds_y \right\}^{1/2} < \varepsilon,$$

где

$$\omega_{ik}(y) = \Gamma_i(z_k, y).$$

Область, ограниченную вспомогательным контуром S , обозначим через B .

Предположим, что система $\{\omega_{ik}(y)\}$ линейно зависима. Тогда найдутся такие постоянные c_{ik} ($i = 1, 2; k = 1, \dots, n$), среди которых по крайней мере одна, например c_{ir} ($r \leq n$) не равна нулю, что

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{s=1}^n c_{is} \omega_{ik_s}(y) \equiv 0$$

для всех $y \in S$ и хотя бы для одного конечного n . Но в этом случае регулярное в B_i решение уравнений теории упругости

$$v(x) = \sum_{i=1}^2 \sum_{s=1}^n c_{is} \omega_{ik_s}(x)$$

будет тождественным нулем в B_i . Из аналитичности следует, что

$v(x) \equiv 0$ в области $B \setminus G$. Запишем предыдущее равенство в проекциях на оси координат:

$$v_1(x) = \sum_{s=1}^n \{c_{1s}(\omega_{1k_s}(x))_1 + c_{2s}(\omega_{2k_s}(x))_1\},$$

$$v_2(x) = \sum_{s=1}^n \{c_{1s}(\omega_{1k_s}(x))_2 + c_{2s}(\omega_{2k_s}(x))_2\},$$

где $\{c_{is}(\omega_{jk_s}(x))\}_p$ ($p=1, 2$) — проекция вектора $c_{is}\omega_{jk_s}(x)$ на ось x_p . Если приблизить точку x достаточно близко к x_{k_r} из $B \setminus G$, то слагаемые $c_{1r}(\omega_{1k_r}(x))_1$ и $c_{2r}(\omega_{2k_r}(x))_2$ станут сколь угодно большими по модулю, а другие слагаемые останутся ограниченными. Это противоречит доказанному выше равенству нулю вектора $v(x)$ в $B \setminus G$, и линейная независимость системы $\{\omega_{ik}(y)\}$ ($i=1, 2$; $k=1, 2, \dots$) доказана.

Обращаясь к доказательству полноты в L_2 , заметим, что для этого достаточно доказать замкнутость в пространстве $C(S)$. Пусть $\alpha(y)$ — произвольный (непрерывный) вектор на S , и пусть равны нулю следующие скалярные произведения:

$$\int_s (\alpha, \omega_{ik}) ds = 0, \quad i=1, 2, \quad k=1, 2, \dots$$

Покажем, что тогда $\alpha(y) \equiv 0$, $y \in S$. Рассмотрим упругий потенциал простого слоя

$$v(z) = \int_s \alpha(y) \Gamma(z, y) ds_y.$$

Согласно условиям ортогональности, проекции векторов $v(x_k)$ на ось x^i ($i=1, 2$) равны

$$v_i(x_k) = \int_s (\alpha(y), \omega_{ik}(y)) ds_y = 0,$$

и эти равенства выполняются почти всюду на S . Отсюда, ввиду непрерывности $v(x)$ на S , следует, что $v(x) \equiv 0$, $x \in S$. Теперь покажем, что потенциал простого слоя $v(x)$ обращается в нуль на бесконечности. Как известно, для этого достаточно, чтобы

$$\int_s \alpha(y) ds_y = 0.$$

Это условие есть следствие наложенного выше на вектор $\alpha(y)$ условия ортогональности системе $\{\omega_{ik}(y)\}$. В самом деле, рассмотрим потенциал простого слоя

$$v(y) = \int_s \psi(z) \Gamma(z, y) ds_z$$

с неизвестной плотностью $\psi(z)$ и определим ее так, чтобы

$$\lim_{y \rightarrow x_0} Tv(y) = 0, \quad y \in B, \quad x_0 \in S.$$

Можно показать, что это приводит к однородному сингулярному интегральному уравнению, допускающему три линейно независимых решения (в пространственном случае число линейно независимых решений равно шести) и соответствующие потенциалы простого слоя представляют в G векторы жесткого перемещения. Таким образом, можно, в частности, выбрать указанные решения так, чтобы два вектора жесткого перемещения E_1 (1, 0) и E_2 (0, 1) выражались при помощи потенциала простого слоя:

$$E_1 = \int_s \psi_1(z) \Gamma(z, y) ds_z, \quad E_2 = \int_s \psi_2(z) \Gamma(z, y) ds_z. \quad y \in B.$$

Заменим интегралы в правых частях этих равенств при помощи какой-либо формулы механических квадратур, взяв за узлы точки z_k на S ; тогда

$$E_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Gamma(z_k, y), \quad E_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \Gamma(z_k, y),$$

где a_k и b_k — постоянные векторы, вычисляемые по известным формулам, и ряды равномерно сходятся. С другой стороны, имеем

$$v(z_k) = \int_s \alpha(y) \Gamma(z_k, y) ds_y = 0, \quad k = 1, 2, \dots, x_k \in s.$$

Умножив k -е равенство на a_k и сложив полученные соотношения, приходим к формуле

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_s \alpha(y) a_k \Gamma(z_k, y) ds_y = 0;$$

аналогично после умножения k -го равенства на b_k и сложения получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_s \alpha(y) b_k \Gamma(z_k, y) ds_y = 0.$$

Ввиду равномерной сходимости рядов полученные выражения переписываются также в виде

$$\int_s \alpha(y) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Gamma(z_k, y) ds_y = \int_s \alpha(y) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \Gamma(z_k, y) ds_y = 0,$$

или, согласно доказанному выше

$$\int_s (\alpha, E_1) ds = \int_s (\alpha, E_2) ds = 0$$

и, следовательно,

$$\int_s \alpha(y) ds = 0.$$

Это и есть доказываемое свойство вектора $\alpha(y)$.

Последнее условие обеспечивает обращение в нуль плоского упругого потенциала простого слоя на бесконечности, и вместе с равенством $v(z) \equiv 0$, $x \in S$, которое было установлено выше, доказывает в силу теоремы единственности, что $v(z) \equiv 0$, $x \in G_e \setminus B$. Заметим, что пространственная задача оказывается более простой, так как обращение в нуль на бесконечности пространственного потенциала простого слоя выполняется автоматически и необходимость приведенного выше построения отпадает. Из условия $v(z) \equiv 0$, $z \in B_e \setminus B$, вследствие непрерывности потенциала $v(z)$ и всех его производных вплоть до точек кривой Γ , вытекает равенство $v(z) \equiv 0$, $z \in B_e$; отсюда в силу непрерывности потенциала простого слоя на S и единственности решения внутренней задачи получаем $v(z) \equiv 0$, $z \in G$, и, наконец, $\alpha(y) \equiv 0$, $y \in S$, что и нужно было доказать.

В случае решения внешней задачи, а также в случае многосвязной области не возникает новых принципиальных трудностей в доказательстве полноты соответствующим образом (см. § 1.1) сконструированной системы фундаментальных решений. Если же на внешних границах заданы напряжения, то в этом случае систему (4.17) расширим тремя линейно независимыми векторами $\Omega_1(y)$, $\Omega_2(y)$, $\Omega_3(y)$ жесткого перемещения. Тогда система

$$\{\Omega_1(Y), \Omega_2(Y), \Omega_3(Y), \bar{\Gamma}_i(z_k, y)\}_{k=1}^{\infty}, \quad i = 1, 2,$$

линейно независима и полна в $L_2(\Gamma)$. Линейная независимость доказывается аналогично случаю системы (4.16). Полноту докажем ниже для трехмерных задач. В отличие от задач, когда на границе заданы смещения, доказательства полноты для задач с напряжениями на границе в случаях двух или трех измерений идентичны.

Сделаем еще одно замечание. Решения системы уравнений теории упругости, написанной в смещениях, давали приближенные значения вектора смещения. Но, как известно, наибольший практический интерес представляют значения напряжений. Нетрудно заметить, что описанные здесь методы решения граничных задач теории упругости обеспечивают сходимость приближенного значения вектора напряжений (при фиксированной ориентации площади, для которой вычисляются напряжения) к точному значению в смысле метрики пространства \mathcal{S} . Покажем, что,

например, для второго способа решения в случае задачи, когда на границе заданы смещения, приближенное значение вектора напряжений во внутренних точках $x \in G$ будет иметь вид

$$Tu^{(N)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \bar{\psi}^{(N)}(y) \bar{\Gamma}(x, y) ds_y - \frac{1}{\pi} TF(x),$$

где T — оператор напряжения, $\bar{\psi}^{(N)}(y)$ — приближенное значение вектора $\psi(y)$. Точное значение того же вектора равно

$$Tu(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \psi(y) \bar{\Gamma}(x, y) ds_y - \frac{1}{\pi} TF(x).$$

Составив разность и применив неравенство Коши — Буняковского, можно показать, что

$$Tu(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} Tu^{(N)}(x).$$

§ 4.2. Алгоритм решения плоских задач и результаты численных экспериментов

Введем обозначения $\omega_{1k}(y) = \psi^{(2k-1)}(y)$, $\omega_{2k}(y) = \psi^{(2k)}(y)$. Систему $\{\psi^i(y)\}$ заменим эквивалентной системой, полученной из нее ортонормированием:

$$\varphi^i(y) = \frac{1}{|\chi^{(i)}|} \chi^{(i)}(y),$$

где

$$\begin{aligned} \chi^{(1)}(y) &= \psi^{(1)}(y), & \chi^{(2)}(y) &= (\psi^{(2)}, \varphi^{(1)}) \varphi^{(1)}(y), \\ \chi^{(3)}(y) &= \psi^{(3)}(y) - (\psi^{(3)}, \varphi^{(1)}) \varphi^{(1)}(y) - (\psi^{(3)}, \varphi^{(2)}) \varphi^{(2)}(y) \dots \end{aligned}$$

Имеем

$$\varphi^{(s)}(y) = \sum_{k=1}^s A_{sk} \psi^{(k)}(y), \quad s = 1, 2, \dots,$$

где A_{sk} — заданные постоянные. Из функционального уравнения (4.8), которое теперь запишем в виде

$$\int_S \Gamma(x, y) \varphi(y) ds_y = F(x), \quad x \in B_e, \quad (4.18)$$

где

$$F(x) = \int_{\Gamma} \bar{\Gamma}(x, y) f(y) ds_y,$$

можно найти коэффициенты Фурье

$$\Phi_s = (\varphi, \varphi^{(s)}).$$

Придавая x значения x_1, x_2, \dots, x_i , перепишем (4.18) в про-

екциях:

$$\int_S \{ [\varphi_1(y) \psi_1^{(1)}(y) + \varphi_2(y) \psi_2^{(1)}(y)] i_1 + [\varphi_1(y) \psi_1^{(2)}(y) + \varphi_2(y) \psi_2^{(2)}(y)] i_2 \} ds_y = F(x_1),$$

$$\int_S \{ [\varphi_1(y) \psi_1^{(3)}(y) + \varphi_2(y) \psi_2^{(3)}(y)] i_1 + [\varphi_1(y) \psi_1^{(4)}(y) + \varphi_2(y) \psi_2^{(4)}(y)] i_2 \} ds_y = F(x_2),$$

.

$$\int_S \{ [\varphi_1(y) \psi_1^{(2i-1)}(y) + \varphi_2(y) \psi_2^{(2i-1)}(y)] i_1 + [\varphi_1(y) \psi_1^{(2i)}(y) + \varphi_2(y) \psi_2^{(2i)}(y)] i_2 \} ds_y = F(x_i).$$

Чтобы найти s -й коэффициент Фурье, где $s = 2i - 1$ или $s = 2i$, умножим первое равенство на вектор $A_{s_1} = A_{s_1 i_1} + A_{s_2 i_2}$, второе — на $A_{s_2} = A_{s_3 i_1} + A_{s_4 i_2}$ и т. д., i -е равенство — на $A_{ss} = A_{s-1, s i_1}$ при s нечетном и на $A_{ss} = A_{s-1, s i_1} + A_{s s i_2}$ при s четном. Сложив полученные i равенств и приняв во внимание значение $\varphi^{(s)}(y)$, находим

$$\int_S \left[\varphi_1(y) \sum_{k=1}^s A_{sk} \psi^{(k)}(y) + \varphi_2(y) \sum_{k=1}^s A_{sk} \psi_2^{(k)}(y) \right] ds_y = \int_S (\varphi(y), \varphi^{(s)}(y)) ds_y = \Phi_s = \sum_{k=1}^i (A_{sk} F(x_k)).$$

Таким образом, ряд Фурье для $\varphi(y)$, сходящийся в среднем к $\varphi(y)$, имеет вид

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i (A_{sk} F(x_k)) \varphi^{(s)}(y), \quad i = \left[\frac{s+1}{2} \right],$$

где $[(s+1)/2]$ — целая часть числа $(s+1)/2$.

Введем обозначение

$$u^{(N)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left(\sum_{s=1}^N \Phi_s \varphi^{(s)}(y) \right) \Gamma(x, y) ds_y - \frac{1}{2\pi} F(x), \quad x \in B_i, \tag{4.19}$$

Очевидно, что $u^{(N)}(x)$ — регулярное в B_i решение системы уравнений теории упругости. При $N \rightarrow \infty$ оно имеет своим пределом точное решение рассматриваемой задачи. В самом деле, составим

разность $u(x) - u^{(N)}(x)$, $x \in B_i$, и рассмотрим проекции на оси:

$$|u_j(x) - u_j^{(N)}(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_S \left| \varphi_1(y) - \sum_{s=1}^N \Phi_s \varphi_1^{(s)}(y) \right| |\Gamma_j^{(1)}(x, y)| ds_y + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_S \left| \varphi_2(y) - \sum_{s=1}^N \Phi_s \varphi_2^{(s)}(y) \right| |\Gamma_j^{(2)}(x, y)| ds_y, \quad j = 1, 2, \quad (4.20)$$

где $\Gamma_j^{(1)}$ и $\Gamma_j^{(2)}$ — j -е составляющие первой и второй вектор-строк матрицы Γ . Применив неравенство Коши — Буняковского, будем иметь

$$|u_j(x) - u_j^{(N)}(x)| \leq \\ \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_S \left(\varphi_1(y) - \sum_{s=1}^N \Phi_s \varphi_1^{(s)}(y) \right)^2 ds_y} \sqrt{\int_S |\Gamma_j^{(1)}(x, y)|^2 ds_y} + \\ + \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_S \left(\varphi_2(y) - \sum_{s=1}^N \Phi_s \varphi_2^{(s)}(y) \right)^2 ds_y} \sqrt{\int_S |\Gamma_j^{(2)}(x, y)|^2 ds_y},$$

откуда, в силу установленной выше сходимости в среднем, следует доказываемое свойство. Окончательно имеем

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_S \sum_{s=1}^N \Phi_s \varphi^{(s)}(y) \Gamma(x, y) ds_y - \frac{1}{2\pi} F(x), \quad x \in B_i. \quad (4.21)$$

Опишем работу универсальной программы¹⁾ решения задачи (4.1), (4.2) с помощью первого метода и метода коллокации. Для решения задачи этим способом составлена программа на языке Фортран IV для ЕС ЭВМ, которая включена в дисковую операционную систему.

Программа оформлена в виде основной программы и подпрограмм. Основная программа выполняет роль управляющей программы и управляет прохождением всей задачи. Подпрограмма ME формирует матрицу и решает систему линейных алгебраических уравнений, т. е. находит коэффициенты a_j . Подпрограмма RESUL считает и выдает результаты на границе Γ или в любой точке области B_i .

Результаты работы программы выводятся в виде таблиц.

Шапка таблицы имеет вид:

x_1	x_2	v_1	v_2	T_1	T_2
-------	-------	-------	-------	-------	-------

¹⁾ Созданной сотрудником ВЦ АН ГССР Д. Гогиашвили.

x_1 и x_2 — абсцисса и ордината точек, в которых ищется решение, v_1 и v_2 — составляющие вектора перемещения, а T_1 и T_2 — составляющие вектора напряжения.

В виде подтабличных данных печатаются также среднее квадратическое отклонение и максимальное отклонение приближенных решений от точных на границе Γ .

Т а б л и ц а 4.1

Количество точек коллокации	Характеристика по-грешности	Расстояние между границей и внешним контуром (в см)						
		1	5	10	20	30	50	100
16	δ_1	0,04345	0,03921	0,01159	0,00018	0,00006	0,00010	0,00008
	δ_2	0,17782	0,03431	0,01098	0,00018	0,00007	0,00008	0,00009
	$\delta_{1\max}$	0,24785	0,16568	0,03625	0,00079	0,00024	0,00044	0,00054
	$\delta_{2\max}$	0,69315	0,15224	0,03973	0,00071	0,00025	0,00026	0,00043
28	δ_1	0,73984	0,00395	0,03317	0,00001	0,00008	0,00010	0,00039
	δ_2	0,76678	0,00391	0,03388	0,00003	0,00019	0,00015	0,00035
	$\delta_{1\max}$	2,65852	0,02657	0,26057	0,00008	0,00031	0,00041	0,00192
	$\delta_{2\max}$	4,26924	0,02274	0,27853	0,00014	0,00062	0,00078	0,00147
52	δ_1	7,26084	0,00006	0,00099	0,00086	0,00012	0,00016	0,00008
	δ_2	7,35937	0,00007	0,00103	0,00116	0,00013	0,00014	0,00007
	$\delta_{1\max}$	35,75543	0,00091	0,00301	0,00270	0,00027	0,00063	0,00043
	$\delta_{2\max}$	47,55717	0,00060	0,00353	0,00325	0,00035	0,00069	0,00036
72	δ_1	18,54213	0,00018	0,00017	0,00130	0,00008	0,00034	0,00015
	δ_2	23,73896	0,00011	0,00020	0,00117	0,00058	0,00043	0,00019
	$\delta_{1\max}$	94,10251	0,00072	0,00081	0,00343	0,00026	0,00161	0,00066
	$\delta_{2\max}$	99,98722	0,00052	0,00074	0,00315	0,00131	0,00197	0,00068

Кроме того, при необходимости перед выдачей результатов могут быть напечатаны: количество точек коллокации, координаты точек коллокации, координаты точек внешнего контура, значения граничных условий в точках коллокации, элементы полуценной матрицы, ранг матрицы и решение системы линейных алгебраических уравнений. Описанный метод решения опробован на следующих примерах.

Пример 1. Область G — квадрат со стороной 12 см, $\lambda = 500\,000$ кг/см², $\mu = 800\,000$ кг/см²,

$$\beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{22} = 0, \quad \alpha_{11} = 1, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0, \quad \alpha_{22} = 1,$$

$$l_1 u|_{AB} = l_1 u|_{BC} = l_1 u|_{CD} = l_1 u|_{DA} = 0, \quad l_2 u|_{AB} = 1,$$

$$l_2 u|_{BC} = l_2 u|_{DA} = 0, \quad l_2 u|_{CD} = -1.$$

Результаты численных экспериментов приведены в табл. 4.1.

δ_1 и δ_2 — средние квадратичные отклонения приближенных решений от точных на границе.

$\delta_{1\max}$ и $\delta_{2\max}$ — максимальные отклонения от точных граничных условий на границе.

Характеристики погрешности (максимальные и среднеквадратичные отклонения) вычислены в пяти точках между двумя последовательными точками коллокации.

Пример 2. Область G — прямоугольник со сторонами 6 и 12 см, $\lambda = 500\,000$ кг/см², $\mu = 800\,000$ кг/см².

Граничные условия те же, что и в примере 1. Результаты численных экспериментов приведены в табл. 4.2.

Т а б л и ц а 4.2

Количество точек коллокации	Характеристика погрешности	Расстояние между границей Γ и внешним контуром (в см)						
		1	5	10	20	30	50	100
16	δ_1	0,06068	0,02051	0,00518	0,00027	0,00002	0,00001	0,00072
	δ_2	0,17285	0,01965	0,00618	0,00027	0,00001	0,00002	0,00111
	$\delta_{1\max}$	0,25952	0,12017	0,02591	0,00129	0,00006	0,00005	0,00270
	$\delta_{2\max}$	0,66415	0,10929	0,03858	0,00152	0,00006	0,00006	0,00827
28	δ_1	0,10291	0,00350	0,00010	0,00013	0,00003	0,00006	0,00004
	δ_2	0,11773	0,00327	0,00009	0,00004	0,00004	0,00002	0,00004
	$\delta_{1\max}$	0,64234	0,02907	0,00042	0,00051	0,00010	0,00017	0,00020
	$\delta_{2\max}$	0,65357	0,02305	0,00053	0,00019	0,00014	0,00016	0,00018
52	δ_1	0,02868	0,00024	0,00005	0,00025	0,00006	0,00006	0,00014
	δ_2	0,03202	0,00016	0,00004	0,00017	0,00006	0,00007	0,00011
	$\delta_{1\max}$	0,17914	0,00089	0,00014	0,00077	0,00027	0,00026	0,00076
	$\delta_{2\max}$	0,21012	0,00102	0,00015	0,00047	0,00026	0,00047	0,00063

Характеристики погрешностей вычислены в четырех точках между двумя последовательными точками коллокации.

В заключение этого параграфа приведем приближенное решение граничной задачи для изотропного упругого круга, когда на границе задан вектор смещения. Этот пример рассчитан на машине М-220.

Пусть в точках y окружности Γ заданы значения составляющих смещений $f(y)$

$$\begin{aligned} u_1(y) &= -1 + 4y_1^2 + 6y_1y_2 = f_1(y), \\ u_2(y) &= 2 - 2y_1^2 + 2y_1y_2 = f_2(y). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Считая радиус равным единице и обозначая через (ρ, ψ) поляр-

ные координаты точек y , можно написать:

$$\begin{aligned} u_1(1, \psi) &= 1 + 2 \cos 2\psi + 3 \sin 2\psi = f_1(\psi), \\ u_2(1, \psi) &= 1 - \cos 2\psi + \sin 2\psi = f_2(\psi). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ищется регулярное внутри круга решение двумерных уравнений статической теории упругости, которое удовлетворяет граничным условиям (4.23). Точное решение этой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{2(2\lambda + 3\mu)}{\lambda + 3\mu} - \frac{(3\mu - \lambda)}{\lambda + 3\mu} (x^1)^2 - \frac{5\lambda + 9\mu}{\lambda + 3\mu} (x^2)^2 + 6x^1x^2, \\ u_2(x) &= \frac{5\lambda + 7\mu}{\lambda + 3\mu} - \frac{5\lambda + 7\mu}{\lambda + 3\mu} (x^1)^2 - \frac{3\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} (x^2)^2 + 2x^1x^2. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Найдем приближенное решение и сравним его с точным. Пусть $\lambda = 2$, $\mu = 1$; тогда формулы (4.24) принимают вид

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 2,8 + 0,2(x^1)^2 - 3,8(x^2)^2 + 6x^1x^2, \\ u_2(x) &= 3,4 - 3,4(x^1)^2 - 1,4(x^2)^2 + 2x^1x^2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Приближенное решение находится из системы функциональных уравнений (4.7), (4.8), которые теперь принимают вид

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \Gamma(x, y) \tilde{\psi}(y) ds_y - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \bar{\Gamma}(x, y) \bar{\psi}(y) ds_y, \quad x \in G, \quad (4.26)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \Gamma(x, y) \tilde{\psi}(y) ds_y - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \bar{\Gamma}(x, y) \bar{\psi}(y) ds_y, \quad x \notin G. \quad (4.27)$$

Подставляя в (4.27) вместо граничной функции $\bar{\psi}(y)$ значения $f_1(\psi)$ и $f_2(\psi)$ из (4.23), найдем

$$\omega(x, f) = \frac{1}{2\pi} \int_S \bar{\Gamma}(x, y) \bar{\psi}(y) ds_y, \quad x \in G,$$

где ψ и ρ — полярные координаты,

$$\begin{aligned} \omega_1(\rho, \psi) &= \\ &= - \left[\frac{(2\lambda + 3\mu) \cos 2\psi + (3\lambda + 5\mu) \sin 2\psi}{2\rho^2(\lambda + 3\mu)} + \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{(\rho^2 - 1)(\cos 4\psi + 2\sin 4\psi)}{\rho^4} \right], \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\omega_2(\rho, \psi) = - \left[\frac{(\mu - \lambda) \cos 2\psi + \lambda \sin 2\psi}{2\rho^2(\lambda + 2\mu)} + \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{(\rho^2 - 1)(\sin 4\psi - 2 \cos 4\psi)}{\rho^4} \right],$$

и функциональное уравнение для определения $\psi(y)$ может быть

записано в виде системы

$$\int_0^{2\pi} [\bar{\Gamma}_1^{(1)}(x, y) \bar{\psi}^{(1)}(y) + \bar{\Gamma}_1^{(2)}(x, y) \psi^{(2)}(y)] d\psi = \pi\omega_1(x, f),$$

$$\int_0^{2\pi} [\bar{\Gamma}_2^{(1)}(x, y) \bar{\psi}^{(1)}(y) + \bar{\Gamma}_2^{(2)}(x, y) \bar{\psi}^{(2)}(y)] d\psi = \pi\omega_2(x, f). \quad (4.29)$$

Для приближенного решения этой системы используем формулу Гаусса с 12 ординатами. Соответствующие значения коэффициентов и узлов равны

$$\begin{aligned} -x_1^{(12)} = x_{12}^{(12)} &= 0,9815606, & A_1^{(12)} = A_{12}^{(12)} &= 0,471753, \\ -x_2^{(12)} = x_{11}^{(12)} &= 0,9041172, & A_2^{(12)} = A_{11}^{(12)} &= 0,1069393, \\ -x_3^{(12)} = x_{10}^{(12)} &= 0,7699027, & A_3^{(12)} = A_{10}^{(12)} &= 0,1600783, \\ -x_4^{(12)} = x_9^{(12)} &= 0,5873179, & A_4^{(12)} = A_9^{(12)} &= 0,2031674, \\ -x_5^{(12)} = x_8^{(12)} &= 0,3678315, & A_5^{(12)} = A_8^{(12)} &= 0,2334925, \\ -x_6^{(12)} = x_7^{(12)} &= 0,1252334, & A_6^{(12)} = A_7^{(12)} &= 0,2491471. \end{aligned}$$

Из (4.29) получаем

$$\sum_{i=1}^{12} A_i^{(12)} [\bar{\Gamma}_1^{(1)}(x, y_i) \bar{\psi}^{(1)}(y_i) + \bar{\Gamma}_1^{(2)}(x, y_i) \bar{\psi}^{(2)}(y_i)] = \pi\omega_1(x, f),$$

$$\sum_{i=1}^{12} A_i^{(12)} [\bar{\Gamma}_2^{(1)}(x, y_i) \bar{\psi}^{(1)}(y_i) + \bar{\Gamma}_2^{(2)}(x, y_i) \bar{\psi}^{(2)}(y_i)] = \pi\omega_2(x, f), \quad (4.30)$$

$$x \notin G.$$

Вспомогательные точки $x_k(\rho_k, \psi_k)$ ($k = 1, \dots, 12$) возьмем на концентрической окружности с радиусом 6 так, чтобы точка x_k лежала на радиусе, проходящем через точку y_i ; при этом получается система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{12} A_i^{(12)} [\bar{\Gamma}_1^{(1)}(x_k, y_i) \bar{\psi}^{(1)}(y_i) + \bar{\Gamma}_1^{(2)}(x_k, y_i) \bar{\psi}^{(2)}(y_i)] = \pi\omega_1(x_k, f),$$

$$\sum_{i=1}^{12} A_i^{(12)} [\bar{\Gamma}_2^{(1)}(x_k, y_i) \bar{\psi}^{(1)}(y_i) + \bar{\Gamma}_2^{(2)}(x_k, y_i) \bar{\psi}^{(2)}(y_i)] = \pi\omega_2(x_k, f) \quad (4.31)$$

Значения коэффициентов этой системы и ее правые части находятся при помощи выбранных коэффициентов и узлов из выражения для элементов матрицы $\bar{\Gamma}(x, y)$ и по формулам (4.28).

Решая систему (4.31), находим

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}^{(1)}(y_1) &= -3,2898639, & \bar{\psi}^{(2)}(y_1) &= 0,3048392, \\
 \bar{\psi}^{(1)}(y_2) &= -4,8003739, & \bar{\psi}^{(2)}(y_2) &= -0,1237495, \\
 \bar{\psi}^{(1)}(y_3) &= -4,7148752, & \bar{\psi}^{(2)}(y_3) &= -0,7438623, \\
 \bar{\psi}^{(1)}(y_4) &= 0,0943634, & \bar{\psi}^{(2)}(y_4) &= 0,7585132, \\
 \bar{\psi}^{(1)}(y_5) &= 5,1369436, & \bar{\psi}^{(2)}(y_5) &= 0,3207615, \\
 \bar{\psi}^{(1)}(y_6) &= 1,13883609, & \bar{\psi}^{(2)}(y_6) &= 0,8489420, \\
 \bar{\psi}^{(1)}(y_7) &= -5,0928226, & \bar{\psi}^{(2)}(y_7) &= -0,2840868, \\
 \bar{\psi}^{(1)}(y_8) &= -1,35945721, & \bar{\psi}^{(2)}(y_8) &= -0,86040278, \\
 \bar{\psi}^{(1)}(y_9) &= 4,6837652, & \bar{\psi}^{(2)}(y_9) &= 0,07592343, \\
 \bar{\psi}^{(1)}(y_{10}) &= 4,0164068, & \bar{\psi}^{(2)}(y_{10}) &= 0,84364352, \\
 \bar{\psi}^{(1)}(y_{11}) &= 0,18625221, & \bar{\psi}^{(2)}(y_{11}) &= 0,7829098, \\
 \bar{\psi}^{(1)}(y_{12}) &= 2,2725934, & \bar{\psi}^{(2)}(y_{12}) &= 0,4897975.
 \end{aligned}$$

Эти значения $\bar{\psi}(y_i)$ можно получить в данном случае и не решая систему (4.31). Используя равенство $(Tu)_i = 2\psi$, где T — оператор напряжения, u — вектор смещения, строим вектор напряжения $Tu(x)$ при $\rho = 1$, имея поле смещений (4.25). Вычислив для этого компоненты тензора напряжения

$$\begin{aligned}
 \tau_{11} &= \frac{4\mu}{\lambda + 3\mu} [(2\lambda + 3\mu)x^1 + (7\lambda + 9\mu)x^2], \\
 \tau_{12} &= \frac{4\mu}{\lambda + 3\mu} [(\mu - \lambda)x^1 - (2\lambda + 3\mu)x^2], \\
 \tau_{22} &= \frac{4\mu}{\lambda + 3\mu} [(4\lambda + 3\mu)x^1 + (\lambda - \mu)x^2],
 \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned}
 T_1 u(y) &= \frac{4\mu}{\lambda + 3\mu} [(2\lambda + 3\mu) \cos 2\psi + (3\lambda + 5\mu) \sin 2\psi] = 2\psi^{(1)}(y), \\
 T_2 u(y) &= \frac{4\mu}{\lambda + 3\mu} [(\mu - \lambda) \cos 2\psi + \lambda \sin 2\psi] = 2\bar{\psi}^{(2)}(y).
 \end{aligned}$$

Подставив сюда значения узлов y_{2i} , совпадающие с узлами Гаусса, находим значения $\bar{\psi}^{(1)}(y_i)$ и $\bar{\psi}^{(2)}(y_i)$, совпадающие с выписанными выше до четырех десятичных знаков.

Остается подставить найденные значения $\bar{\psi}^{(1)}(y_i)$ и $\bar{\psi}^{(2)}(y_i)$ в (4.7), и тогда приближенные значения $u(x)$ в произвольной точке внутри круга будут определяться равенством

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{12} A_i^{(12)} \bar{\Gamma}(x, y_i) \bar{\psi}(y_i) - \omega(x, f), \quad x \in B_i. \quad (4.32)$$

В табл. 4.3 для трех различных точек внутри круга даны: а) приближенные значения компонент вектора u , вычисленные по формуле (4.32); б) точные значения тех же величин, вычисленные по формуле (4.25); в) модули отклонений приближенных значений от точных.

Некоторое снижение точности приближения по сравнению с решениями задач, рассмотренных в предыдущем случае, следует

Т а б л и ц а 4.3

ψ	Координаты точки x	Приближенные значения u_1 и u_2	Точные значения u_1 и u_2	Модули погрешности
$\psi^{(1)}(x)$	(0; 1,1)	2,763	2,762	0,001
$\psi^{(2)}(x)$	(0; 0,1)	3,385	3,386	0,001
$\psi^{(1)}(x)$	(0,5; 0,5)	3,450	3,40	0,050
$\psi^{(2)}(x)$	(0,5; 0,5)	2,730	2,70	0,030
$\psi^{(1)}(x)$	(0,5; 0)	2,851	2,850	0,001
$\psi^{(2)}(x)$	(0,5; 0)	2,549	2,550	0,001

отнести за счет того, что здесь ограничились формулой Гаусса с меньшим числом ординат; кроме того, сама задача в данном случае с вычислительной точки зрения значительно сложнее простой задачи Дирихле, и в связи с этим естественно возрастает влияние разного рода погрешностей. Однако достигнутая здесь уже для 12 ординат точность должна быть признана вполне удовлетворительной, по крайней мере с точки зрения прикладной теории упругости.

§ 4.3. Постановка граничных задач для систем уравнений пространственной статической теории упругости

Рассмотрим однородные уравнения статики упругого тела в компонентах смещения:

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x^1} + \mu \Delta u_1 &= 0, \\
 (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x^2} + \mu \Delta u_2 &= 0, \\
 (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x^3} + \mu \Delta u_3 &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

где (u_1, u_2, u_3) — компоненты вектора смещения u , Δ — оператор

Лапласа:
$$\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2}, \quad \lambda \text{ и } \mu - \text{ постоянные Ламе,}$$

$$\theta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x^i}.$$

Пусть в трехмерной многосвязной области G (которая может содержать бесконечно удаленную точку) ищется регулярное решение системы уравнений (4.33), удовлетворяющее на границе Γ области G соотношениям

$$(lu)_j = \sum_{i=1}^3 (\alpha_{ij}\sigma_{ni} + \beta_{ij}\mu_i) = f_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.34)$$

где α_{ij} , β_{ij} , f_j ($i, j = 1, 2, 3$) — известные функции точки $y \in \Gamma$, σ_{ni} ($i = 1, 2, 3$) — компоненты вектора напряжения,

$$\sigma_{ni} = \sum_{j=1}^3 (\sigma_{ij} \cos(n, x^j)),$$

$$\sigma_{ii} = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right), \quad i \neq j,$$

$\cos(n, x^j)$ ($j = 1, 2, 3$) — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности Γ в точке $y \in \Gamma$. В развернутом виде компоненты напряжения на поверхности Γ принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{n1} &= \left[(\lambda + 2\mu) \cos(n, x^1) \frac{\partial}{\partial x^1} + \mu \cos(n, x^2) \frac{\partial}{\partial x^2} + \mu \cos(n, x^3) \frac{\partial}{\partial x^3} \right] u_1 + \\ &+ \left[\lambda \cos(n, x^1) \frac{\partial}{\partial x^2} + \mu \cos(n, x^2) \frac{\partial}{\partial x^1} \right] u_2 + \left[\lambda \cos(n, x^1) \frac{\partial}{\partial x^3} + \mu \cos(n, x^3) \frac{\partial}{\partial x^1} \right] u_3, \\ \sigma_{n2} &= \left[\lambda \cos(n, x^2) \frac{\partial}{\partial x^1} + \mu \cos(n, x^1) \frac{\partial}{\partial x^2} \right] u_1 + \\ &+ \left[(\lambda + 2\mu) \cos(n, x^2) \frac{\partial}{\partial x^2} + \mu \cos(n, x^1) \frac{\partial}{\partial x^1} + \mu \cos(n, x^3) \frac{\partial}{\partial x^3} \right] u_2 + \\ &+ \left[\lambda \cos(n, x^2) \frac{\partial}{\partial x^3} + \mu \cos(n, x^3) \frac{\partial}{\partial x^2} \right] u_3, \\ \sigma_{n3} &= \left[\lambda \cos(n, x^3) \frac{\partial}{\partial x^1} + \mu \cos(n, x^1) \frac{\partial}{\partial x^3} \right] u_1 + \\ &+ \left[\lambda \cos(n, x^3) \frac{\partial}{\partial x^2} + \mu \cos(n, x^2) \frac{\partial}{\partial x^3} \right] u_2 + \\ &+ \left[(\lambda + 2\mu) \cos(n, x^3) \frac{\partial}{\partial x^3} + \mu \cos(n, x^1) \frac{\partial}{\partial x^1} + \mu \cos(n, x^2) \frac{\partial}{\partial x^2} \right] u_3. \end{aligned}$$

Задача (4.33), (4.34) охватывает следующие классические граничные задачи теории упругости.

I. *Первая основная внутренняя и внешняя граничные задачи* [115] — ищется упругое равновесие тела, если заданы внешние напряжения, действующие на поверхность тела (в [86] эти задачи названы вторыми основными граничными задачами). Для этого случая $\beta_{ij} \equiv 0$, $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера).

II. *Вторая основная внутренняя и внешняя граничные задачи* — ищется упругое равновесие тела, если заданы смещения точек его поверхности. Для этого случая $\alpha_{ij} \equiv 0$, $\beta_{ij} = \delta_{ij}$.

III. *Основная смешанная внутренняя и внешняя граничные задачи* [115] — ищется упругое равновесие тела, когда на одной части $\Gamma^{(1)}$ поверхности заданы смещения, на остальной — $\Gamma^{(2)}$ — внешние напряжения. Для этого случая

$$\alpha_{ij}(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \in \Gamma^{(1)}, \\ \delta_{ij} & \text{при } y \in \Gamma^{(2)}, \end{cases}$$

$$\beta_{ij}(y) = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{при } y \in \Gamma^{(1)}, \\ 0 & \text{при } y \in \Gamma^{(2)}. \end{cases}$$

Нетрудно получить из граничного условия (4.34) условия других граничных задач (задач III—V в [86]).

В следующем параграфе будут приведены результаты численных экспериментов, проведенных на машине М-220 с помощью универсальной программы [136], основанной на первом методе решения граничных задач. Как было показано в гл. I, и первый, и второй методы решения граничных задач основываются на полноте определенным образом построенной системы фундаментальных решений.

В этом параграфе будут доказаны линейная независимость и полнота систем фундаментальных решений. Изложение следует работе [87].

Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ — счетная совокупность точек вспомогательной поверхности Γ_1 , распределенная на ней всюду плотно, и G' — область, ограниченная поверхностью Γ . Пусть задана система фундаментальных решений систем уравнений пространственной статической теории упругости (см. § 2.16):

$$H_i(z_k, y), \quad i = 1, 2, 3; \quad k = 1, \dots, N, \quad (4.35)$$

где N — произвольное конечное число, а составляющие $H_{ij}(z_k, y)$ вектора $H_i(z_k, y)$ определяются из формул (2.8). Докажем, что эта система линейно независима в пространстве $L_2(\Gamma)$. Допустим обратное, т. е.

$$v(y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^N c_{ik} H_i(z_k, y) \equiv 0, \quad y \in \Gamma, \quad (4.36)$$

где c_{ik} не равны одновременно нулю. Рассмотрим вектор $v(x)$, получающийся из $v(y)$ заменой $y \in \Gamma$ на $x \in G$. По определению фундаментального решения $v(x)$ является регулярным решением системы (4.33), и по теореме единственности граничной задачи (4.33), (4.34) при $\alpha_{ij} \equiv 0$, $\beta_{ij} = \delta_{ij}$ из (4.36) получаем, что $v(x) \equiv 0$ в G . Из аналитичности $v(x)$ в G' следует, что $v(x) \equiv 0$ в G' или, для составляющих вектора $v(x)$,

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^N c_{ik} H_{ij}(z_k, x) \equiv 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad x \in G'. \quad (4.37)$$

Пусть коэффициент $c_{i\bar{k}}$ ($1 \leq \bar{i} \leq 3$; $1 \leq \bar{k} \leq N$) отличен от нуля. Тогда, устремляя точку x к $z_{\bar{k}}$ так, чтобы $x^{\bar{i}} = z_{\bar{k}}^{\bar{i}}$, из (4.37) получаем равенство

$$\frac{c_{i\bar{k}}}{r(z_{\bar{k}}, x)} = \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \bar{k}}}^N c_{ik} H_{ij}.$$

Но левая часть последнего равенства неограниченно возрастает по модулю при $x \rightarrow z_{\bar{k}}$, в то время как правая часть остается ограниченной. Это возможно лишь при условии $c_{i\bar{k}} = 0$, что противоречит допущению.

Докажем, что система векторов (4.35) полна в $L_2(\Gamma)$. Требуется доказать, что из условий

$$\int_{\Gamma} \lambda(y) H_i(z_k, y) ds_y = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\lambda(y) \in L_2(\Gamma)$ — произвольный элемент пространства $L_2(\Gamma)$, вытекает равенство $\lambda(y) = 0$ почти всюду на Γ . Действительно, в силу последних равенств потенциал простого слоя

$$v(z) = \int_{\Gamma} \lambda(y) H(z, y) ds_y$$

равен нулю на вспомогательном контуре Γ_1 . В области $E_3 \setminus G'$ (E_3 — трехмерное пространство) $v(z)$ есть регулярное решение однородной граничной задачи пространственной теории упругости (4.33), (4.34) при $f_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$) и по теореме единственности $v(z) = 0$ при $z \in E_3 \setminus G'$. Отсюда вследствие аналитичности имеем $v(z) = 0$, $z \in E_3 \setminus G$ и, следовательно, $Tv = 0$, где T — оператор напряжения. Но тогда на Γ получаем интегральное уравнение

$$\lambda(z) - \int_{\Gamma} TH(z, y) \lambda(y) ds_y = 0, \quad z \in \Gamma,$$

и в силу теоремы вложения всякое его решение класса $L_2(\Gamma)$ есть элемент класса $G^{0,\alpha}(S)$. Ввиду непрерывности потенциала

простого слоя с плотностью из класса $G^{0,\alpha}(S)$ получаем, что $v(z)$ — решение однородной граничной задачи в области G , и по теореме единственности $v(x) = 0$ при $x \in G$. Поэтому плотность простого слоя $\lambda(y)$ равна нулю, что и требовалось доказать.

Рассмотрим систему функций, используемых при решении граничных задач с краевыми условиями, содержащими только напряжения. Докажем, что система вектор-функций

$$\{lH_i(z_k, y), \Omega_j(y)\}_{k=1}^{\infty}, \quad j = 1, \dots, 6; \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.38)$$

где оператор граничных условий l совпадает с оператором напряжения T , а $\Omega_j(y)$ — линейно независимые векторы жесткого смещения, линейно независима на поверхности Γ . Допустим обратное, т. е.

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^N c_{ik} TH_i(z_k, y) + \sum_{j=1}^6 c_j \Omega_j(y) \equiv 0, \quad y \in \Gamma, \quad (4.39)$$

где c_{ik} , c_j — произвольные постоянные и N — произвольное натуральное число. Учитывая (4.38), получаем, что вектор-функция

$$v(x) = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^N c_{ik} H_i(z_k, x), \quad x \in G \quad (4.40)$$

удовлетворяет граничной задаче (4.33), (4.34) при $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$, $\beta_{ij} \equiv 0$ и

$$Tv|_{\Gamma} = f_j = - \sum_{k=1}^6 c_k \Omega_k^j(y), \quad (4.41)$$

где $\Omega_k^j(y)$ — j -я составляющая вектор-функции $\Omega(y)$. Но в силу необходимых и достаточных условий разрешимости рассматриваемой граничной задачи имеем

$$0 = \int_{\Gamma} Tv \Omega_s(y) ds_y = - \sum_{k=1}^6 c_k (\Omega_k(y), \Omega_s(y)), \quad s = 1, \dots, 6. \quad (4.42)$$

Матрица полученной системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов c_k неособенная, так как она является матрицей Грама линейно независимой системы $\{\Omega_k(y)\}_{k=1}^6$. Следовательно, однородная система (4.42) имеет только тривиальное решение $c_k = 0$ ($k = 1, \dots, 6$). Таким образом, получаем, что $v(x)$ является решением однородной граничной задачи пространственной теории упругости с заданными (нулевыми) напряжениями на границе, и, следовательно, $v(x)$ — вектор жесткого смещения:

$$v(x) = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^N c_{ik} H_i(z_k, x) = \sum_{j=1}^6 \bar{c}_j \Omega_j(x), \quad (4.43)$$

где \bar{c}_j — определенные постоянные. Дальнейшее доказательство

линейной независимости системы (4.38) совпадает с доказательством линейной независимости системы (4.35). Действительно, если устремить точку x определенным образом к z_k , то одно из слагаемых в двойной сумме в средней части (4.43) устремится к бесконечности, а все остальные и вся правая часть останутся ограниченными. Полученное противоречие доказывает линейную независимость.

Докажем также, что система (4.38) является полной в $L_2(\Gamma)$, т. е. что из условий

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \lambda(y) TH_i(z_k, y) ds_y &= 0, & k = 1, 2, 3, \dots \\ \int_{\Gamma} \lambda(y) \Omega_j(y) ds_y &= 0, & i = 1, 2, 3; \quad j = 1, \dots, 6; \end{aligned} \quad (4.44)$$

вытекает равенство нулю почти всюду произвольного элемента $\lambda(y)$ пространства $L_2(\Gamma)$. В силу условий (4.44) и всюду плотного расположения точек z_k на вспомогательном контуре Γ_1 потенциал двойного слоя

$$v(z) = \int_{\Gamma} \lambda(y) TH(z, y) ds^y$$

равен нулю при $z \in \Gamma_1$. Отсюда в силу соответствующих теорем единственности получаем

$$v(z) = 0, \quad z \in E_3 \setminus G'$$

и, следовательно (см. доказательство полноты системы $H_i(z_k, y)$),

$$v(z) = 0, \quad z \in E_3 \setminus G.$$

Эти условия достаточны для того, чтобы вектор напряжения на Γ , соответствующий вектору смещения v , равнялся нулю:

$$Tv|_{\Gamma} = 0,$$

и чтобы $v(x)$ ($x \in G$) был вектором жесткого смещения:

$$v(x) = \sum_{k=1}^6 \beta_k \Omega_k(x),$$

где β_k — определенные числа. Составляя разность предельных значений изнутри и извне для функции v и учитывая представление v , получаем

$$\lambda(y) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \beta_k \Omega_k(y). \quad (4.45)$$

Но в силу условий (4.44) имеем

$$0 = \int_{\Gamma} \lambda(y) \Omega_j(y) ds = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \beta_k (\Omega_k(y), \Omega_j(y)), \quad j = 1, \dots, 6,$$

или

$$\sum_{k=1}^6 \beta_k (\Omega(y), \Omega_j(y)) = 0, \quad j = 1, \dots, 6.$$

Следовательно, $\beta_k = 0$ ($k = 1, \dots, 6$), что со своей стороны с учетом (4.45) обеспечивает равенство $\lambda(y) = 0$ почти для всех $y \in \Gamma$.

§ 4.4. Алгоритм решения пространственных задач и результаты численных экспериментов

В настоящем параграфе приводятся результаты численных экспериментов по решению граничных задач первым методом. Они получены с помощью универсальной программы [136], составленной для машины М-220. Решение граничной задачи (4.33), (4.34) представляется в виде ряда

$$u = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^N a_{ik} H_i(z_k, x),$$

где коэффициенты разложения a_{ik} находятся путем решения линейной системы

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^N a_{ik} [lH_i(z_k, y) lH_j(z_k, y)] = [f, lH_j(z_s, y)], \quad (4.46)$$

$$j = 1, 2, 3, \quad s = 1, \dots, N;$$

скалярное произведение $[f, \varphi]$ двух векторов $f = (f_1, f_2, f_3)$ и $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ вычисляется по формуле

$$[f, \varphi] = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{N_i} f_j [y_i] \varphi_j [y_i],$$

y_i — точки на поверхности Γ , N_i — их число ($N_i \geq N$).

Такая замена скалярного произведения функционального пространства $L_2(\Gamma)$ скалярным произведением векторного пространства существенно уменьшает машинное время и облегчает автоматизацию решения.

Отметим, что кроме перечисленных в предыдущем параграфе граничных задач теории упругости созданная универсальная программа решает некоторые граничные задачи теории гармонических функций, которые находят применение при решении многих задач механики. Действительно, при $\mu = -\lambda = 1$ уравнения (4.33) принимают вид

$$\Delta u_1 = 0, \quad \Delta u_2 = 0, \quad \Delta u_3 = 0. \quad (4.47)$$

Подставляя в граничные условия (4.34) значения $\alpha_{ij} \equiv 0$, $\beta_{ij} = \delta_{ij}$, получаем для каждой функции u_i граничные условия Дирихле

$$u_1|_{\Gamma} = f_1, \quad u_2|_{\Gamma} = f_2, \quad u_3|_{\Gamma} = f_3. \quad (4.48)$$

Покажем, что вычислительная схема первого способа решения граничных задач и система функций (4.35) дают возможность решить одновременно все три граничные задачи Дирихле (4.47), (4.48).

Функции $H_i(z_k, y)$ при $\lambda = -\mu$ имеют следующие составляющие:

$$\begin{aligned} H_{11}(z_k, y) &= \frac{1}{r(z_k, y)}, & H_{12}(z_k, y) &= H_{13}(z_k, y) = 0, \\ H_{21}(z_k, y) &= 0, & H_{22}(z_k, y) &= \frac{1}{r(z_k, y)}, & H_{23}(z_k, y) &= 0, \\ H_{31}(z_k, y) &= H_{32}(z_k, y) = 0, & H_{33}(z_k, y) &= \frac{1}{r(z_k, y)}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Следовательно, функции $H_i(z_k, y)$ и $H_s(z_k, y)$ ортогональны при любых $i \neq s$ и k . Согласно вычислительной схеме первого способа, для каждой составляющей вектора правой части $f = (f_1, f_2, f_3)$ получаем ряд

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^N a_{ik} H_{i1}(z_k, y), \\ f_2 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^N a_{ik} H_{i2}(z_k, y), \\ f_3 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^N a_{ik} H_{i3}(z_k, y), \end{aligned}$$

или, учитывая формулы (4.49),

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{k=1}^N a_{1k} H_{11}(z_k, y), \\ f_2 &= \sum_{k=1}^N a_{2k} H_{22}(z_k, y), \\ f_3 &= \sum_{k=1}^N a_{3k} H_{33}(z_k, y). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что решения каждой из граничных задач (4.47), (4.48) представляются рядами

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \sum_{k=1}^N a_{1k} H_{11}(z_k, x), \\ u_2(x) &= \sum_{k=1}^N a_{2k} H_{22}(z_k, x), \end{aligned}$$

$$u_3(x) = \sum_{k=1}^N a_{3k} H_{33}(z_k, x),$$

где x — любая точка области G .

Таким образом, с помощью универсальной программы решения пространственных граничных задач теории упругости могут быть одновременно решены три граничные задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Перейдем к изложению численных экспериментов. Погрешность реализованного метода для конкретной граничной задачи состоит из погрешности нахождения коэффициентов a_k (т. е. погрешности решения системы (4.46)) и погрешности аппроксимации заданной конкретной граничной функции f конечным рядом $\sum_{k=1}^N a_k^{(n)} l\psi_k$. Целью приводимых ниже численных экспериментов была оценка этих погрешностей для ряда конкретных задач, которые для краткости будем называть погрешностью счета и погрешностью аппроксимации соответственно.

Особое внимание было уделено погрешности счета, так как в гл. I показано, что система функций $\{l\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, как и всякая потенциальная система, не является минимальной для $L_2(\Gamma)$, поскольку при достаточно больших n матрица $[l\psi_k, l\psi_j]$ системы (4.46) будет плохо обусловленной. Для оценки погрешности счета в качестве граничной функции f бралась одна из вектор-функций $l\psi_s$ ($s \leq n$). Ясно, что решением системы (4.46) должны быть коэффициенты $a_k \equiv 0$ ($k \neq s$), $a_s = 1$. Отклонение от этих значений будет давать представление о погрешности счета, которая со своей стороны будет обусловлена неточным вычислением скалярных произведений и неточным решением системы (4.46).

Для получения оценок погрешности счета были решены следующие задачи.

1. G является единичным кубом. Вспомогательные точки, определяющие функции ψ_k , взяты относительно равномерно на поверхности куба со стороной 1,1 (решалась внутренняя задача). Количество вспомогательных точек равно 41, т. е. количество функций равно 123 (это максимальное число функций для составленной универсальной программы; оно лимитировалось памятью машины М-220М). Оператор l равен тождественному оператору, т. е. на границе Γ заданы смещения. В качестве граничной функции была взята первая функция ψ_1 .

Количество N_1 точек $y \in \Gamma$, где заданы граничные значения, было равно 602. Решение системы (4.36) в этом случае получилось следующим:

$$a_1^{(123)} = 0,999999999, \quad |a_k^{(123)}| < 1,6 \cdot 10^{-10}, \quad k = 2, 3, \dots, 123.$$

2. Во втором случае все параметры были те же, что и в первом; $l = T$, и, следовательно, в качестве граничной функции была взята $T\psi_1$. Решение системы (4.46) в этом случае получилось следующим:

$$a_1^{(123)} = 0,999999999, \quad |a_k^{(123)}| < 1,9 \cdot 10^{-10}, \quad k = 2, 3, \dots, 123.$$

3. Третий случай совпадает со вторым, однако вспомогательные точки, определяющие функции ψ_k , взяты на поверхности куба со стороны 2,2. Решение системы (4.46) получилось следующим:

$$a_1^{(123)} = 1,000000002, \quad |a_k^{(123)}| < 4,1 \cdot 10^{-8}, \quad k = 2, 3, \dots, 123.$$

4. Четвертый случай совпадает с третьим, с той лишь разницей, что вспомогательные точки еще больше удалены от границы области G — они взяты на поверхности куба со стороны 4. Решение системы (4.46) получилось следующим:

$$a_1^{(123)} = 1,00000377, \quad |a_k^{(123)}| < 7,4 \cdot 10^{-6}, \quad k = 2, 3, \dots, 123.$$

Из гл. I видно, что расположение вспомогательных точек существенно сказывается на обусловленности соответствующей матрицы Грама. При удалении их от поверхности Γ обусловленность матрицы Грама ухудшается. Результаты случаев 2—4 подтверждают это.

5. Параметры в пятом случае те же, что и во втором, однако здесь были взяты всего 18 вспомогательных точек, т. е. 54 функции, а в качестве граничных значений взяты функции $T\psi_{52}$. Решение системы (4.46) получилось следующим:

$$a_{52}^{(54)} = 0,999999999, \quad |a_k^{(54)}| < 4,01 \cdot 10^{-12}, \quad k = 1, 2, \dots, 54.$$

6. В шестом случае параметры те же, что и во втором, но в качестве граничной функции взята $T\psi_{60}$. Решение системы (4.46) получилось следующим:

$$a_{60}^{(123)} = 1,00000000, \quad |a_k^{(123)}| < 6,27 \cdot 10^{-9}, \quad k = 1, \dots, 59, 61, \dots, 123.$$

7. Параметры этого случая таковы: G является двусвязной областью — в середине куба со стороны 4 вырезан куб со стороной 2. Вспомогательные точки взяты как на «внешнем» кубе со стороной 5 (37 точек, 111 функций), так и во «внутреннем» кубе со стороной 1,5 (4 точки, 12 функций).

Количество N_1 точек $y \in \Gamma$, где заданы граничные значения, было равно 1204 — на внешней поверхности рассматриваемой двусвязной области 602 и столько же на внутренней поверхности. В качестве граничной функции была взята функция $T\psi_1$. Решение системы (4.46) получилось следующим:

$$a_1^{(123)} = 0,999999999, \quad |a_k^{(123)}| < 8,06 \cdot 10^{-10}, \quad k = 2, 3, \dots, 123.$$

Следует заметить, что результаты приведенных выше численных экспериментов оказались для автора несколько неожиданными. Они показали довольно хорошую обусловленность матриц системы (4.46) при $n \leq 123$. Однако при дальнейшем увеличении числа функций следует ожидать увеличения погрешности счета.

Погрешность аппроксимации обусловлена конечностью числа n функций ψ_n , так как при $n = \infty$ доказана полнота соответствующих систем. Для получения оценок погрешности аппроксимации рассмотрены следующие случаи.

8. G является шаром единичного радиуса. Граничные значения на сфере Γ имеют вид

$$f_1 = 2 + 3 \cos 2\theta, \quad f_2 = 2 + 3 \cos 2\theta, \quad f_3 = -1 + 3 \cos 2\theta, \quad (4.50)$$

где θ — полярный угол. Точное решение граничной задачи (4.33), (4.34) имеет вид

$$\begin{aligned} u_1 &= 5(x^3)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2, \\ u_2 &= 5(x^3)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2, \\ u_3 &= 2(x^3)^2 - 4[(x^1)^2 + (x^2)^2]^2. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Действительно, общее решение системы дифференциальных уравнений (4.33) в виде однородного полинома второго порядка имеет вид

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} (a_2 + a_3)(x^1)^2 + a_2(x^2)^2 + a_3(x^3)^2, \\ u_2 &= b_1(x^1)^2 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} (b_1 + b_3)(x^2)^2 + b_3(x^3)^2, \\ u_3 &= c_1(x^1)^2 + c_2(x^2)^2 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} (c_1 + c_2)(x^3)^2, \end{aligned} \quad (4.52)$$

где $a_2, a_3, b_1, b_3, c_1, c_2$ — любые числа. Формулы (4.51) получены из (4.52) путем подстановки

$$a_2 = b_1 = -1, \quad a_3 = b_3 = 5, \quad c_1 = c_2 = -4, \quad \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = 0,25.$$

Выражая правые части (4.51) через полярные координаты и учитывая, что Γ является сферой, получаем граничные условия (4.50).

Вспомогательные точки были взяты на концентрической сфере радиуса $r = 10$, число их было равно 18 (54 функции).

Количество N_1 точек $y \in \Gamma$ было равно 502. Значения составляющих приближенного решения (4.46) сравнивались со значениями составляющих точного решения на границе Γ . Максимальное обнаруженное отклонение было равно $9 \cdot 10^{-2}$, что составило менее двух процентов от максимального значения точного решения. Следует заметить, что внутри области G эти отклонения значительно меньше.

9. Параметры этого случая те же, что и в предыдущем, однако число вспомогательных точек было равно 40 (120 функций). Наибольшее отклонение в этом случае было равно $2 \cdot 10^{-2}$, что составляло менее полпроцента от максимального значения точного решения. Во внутренних точках области G это отклонение было равно в среднем $6 \cdot 10^{-4}$.

10. G является единичным кубом с центром в начале координат; граничные значения в этом случае имеют следующий вид: при $x^2 = 0,5$ функция f имеет составляющие $0, \cos \pi x^1 \cos \pi x^3, 0$; при $x^2 = -0,5$ эти составляющие равны $0, -\cos \pi x^1 \cos \pi x^3, 0$; на других сторонах вектор правых частей равен нулю. Оператор l равен оператору напряжения T . (Эта задача известна под названием задачи М. М. Филоненко — Бородича.) Вспомогательные точки брались на поверхности куба со стороной 1,4.

Число этих точек было равно 22 (66 функций). В отличие от предыдущего случая, точное решение рассматриваемой задачи неизвестно. Поэтому проверялось выполнение граничных условий.

Наибольшее отклонение составляющих приближенного и точного решения достигало $9 \cdot 10^{-2}$, что составляет девять процентов от максимального напряжения на границе, хотя следует отметить, что составляющие вектора напряжения для приближенного решения достигали значения $8 \cdot 10^{-2}$ там, где они должны были равняться нулю.

11. Параметры в этом случае те же, что и в предыдущем, однако число вспомогательных точек равно 38 (114 функций); наибольшее отклонение составляющих приближенного и точного решения достигало $4,5 \cdot 10^{-2}$.

Более подробно результаты этих экспериментов приведены в [136].

Рассмотрим трехмерную граничную задачу теории упругости при неоднородных дифференциальных уравнениях, для решения которой воспользуемся приемом, описанным в § 1.11.

Пусть однородная упругая полусфера лежит на абсолютно жестком основании. Требуется вычислить напряженное состояние полусферы, вызванное объемной силой тяжести, если сферическая поверхность свободна от напряжения. Сформулированная задача механики сводится к следующей граничной задаче. Ищется решение неоднородных уравнений статики упругого тела

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x^1} + \mu \Delta u_1 &= 0, \\(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x^2} + \mu \Delta u_2 &= 0, \\(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x^3} + \mu \Delta u_3 &= g_0\end{aligned}\tag{4.53}$$

в области G , с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \sigma_{n_1} = x_n |_{s_1} = 0, \quad \sigma_{n_2} = y_n |_{s_1} = 0, \quad \sigma_{n_3} = z_n |_{s_1} = 0, \\ u_1 |_{s_2} = 0, \quad u_2 |_{s_2} = 0, \quad u_3 |_{s_2} = 0, \end{aligned}$$

где S_1 — сферическая поверхность полусферы, а S_2 — экваториальное сечение, $g = 9,8$ м/сек² — ускорение силы тяжести, ρ — плотность, равная 10^3 кг/м³ = г/см³, λ , μ — коэффициенты Ламе, которые вычислялись из известных соотношений с помощью модуля $E = 10^6$ кг/см² и коэффициента Пуассона $\sigma = 0,3$. Радиус полусферы был равным 1 м.

Так как описанный в монографии алгоритм решает граничную задачу для однородных уравнений статики упругого тела, найдем частное решение $v(v_1, v_2, v_3)$ приведенных выше неоднородных уравнений, а решение $u(u_1, u_2, u_3)$ рассматриваемой граничной задачи представим в виде суммы

$$u(u_1, u_2, u_3) = v(v_1, v_2, v_3) + \omega(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad (4.55)$$

где для функции ω получаем граничную задачу

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x^1} + \mu \Delta \omega_1 &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x^2} + \mu \Delta \omega_2 &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x^3} + \mu \Delta \omega_3 &= 0, \\ x_n^{(\omega)} |_{s_1} = -x_n^{(v)} |_{s_1}, \quad \omega_1 |_{s_2} = -v_1 |_{s_2}, \\ y_n^{(\omega)} |_{s_1} = -y_n^{(v)} |_{s_1}, \quad \omega_2 |_{s_2} = -v_2 |_{s_2}, \\ z_n^{(\omega)} |_{s_1} = -z_n^{(v)} |_{s_1}, \quad \omega_3 |_{s_2} = -v_3 |_{s_2}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

где $\theta_\omega = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}$, $x_n^{(\omega)}$, $y_n^{(\omega)}$, $z_n^{(\omega)}$ — напряжения на сферической поверхности S_1 , полученные для вектора перемещений ω . В качестве частного решения $v(v_1, v_2, v_3)$ можно взять один из следующих векторов:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} \rho g x^1 x^3, \\ v_2 &= 0, \\ v_3 &= \frac{\lambda + 2\mu}{8\mu(\lambda + \mu)} \rho g (x^3)^2 + \frac{\lambda}{8\mu(\lambda + \mu)} \rho g (x^1)^2. \end{aligned} \quad (4.58)$$

или же

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{\lambda}{8\mu(\lambda + \mu)} \rho g x^1 x^3, \\ v_2 &= \frac{\lambda}{8\mu(\lambda + \mu)} \rho g x^2 x^3, \\ v_3 &= \frac{\lambda + 2\mu}{8\mu(\lambda + \mu)} \rho g (x^3)^2 + \frac{\lambda \rho g}{16\mu(\lambda + \mu)} [(x^1)^2 + (x^2)^2]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Формулы (4.59) имеют определенные удобства перед формулами (4.58) с точки зрения подготовки исходной информации, и поэтому окончательно в качестве вектора $v(v_1, v_2, v_3)$ в формуле (4.55) взят вектор с составляющими, определенными из формулы (4.59). Тогда нетрудно видеть, что

$$x_n^{(v)} = -\frac{\lambda \rho x^1 x^3}{4(\lambda + \mu)}, \quad y_n^{(v)} = -\frac{\lambda \rho g x^2 x^3}{4(\lambda + \mu)}, \quad z_n^{(v)} = -\rho g (x^3)^2, \quad (4.60)$$

а на границе S_2 перемещения равны

$$v_1|_{S_2} = v_2|_{S_2} = 0, \quad v_3|_{S_2} = -\frac{\lambda \rho g}{16\mu(\lambda + \mu)} [(x^1)^2 + (x^2)^2]. \quad (4.61)$$

Подставляя значения (4.60)–(4.61) в граничные условия (4.57), получаем ту конкретную задачу, которую можно решать с помощью описанного алгоритма.

Вспомогательные точки M_k ($k = 1, \dots, 29$) были взяты на конфокальной сферической поверхности радиуса 4 (21 точка) и на плоскости $x^3 = -2$ (8 точек).

Наибольший интерес в рассматриваемой граничной задаче представляют напряжения на поверхности S_2 . Они приводятся в

Т а б л и ц а 4.4

x	x_x	x_z	y_y	z_z	x	x_x	x_z	y_y	z_z
0,1	94,7	0	94,7	-721,3	0,6	77,0	28,9	92,1	-684,4
0,2	94,1	6,3	94,6	-719,9	0,7	68,8	33,2	91,5	-668,1
0,3	92,0	12,5	94,2	-715,5	0,8	58,8	36,5	91,5	-648,7
0,4	88,5	18,4	93,6	-708,1	0,9	46,6	38,6	92,5	-626,3
0,5	83,5	23,9	92,8	-697,7	1	31,9	39,3	94,9	-600,0

табл. 4.4. В первом столбце таблицы дается координата x^1 той точки поверхности S_2 , где вычисляются напряжения. Две другие координаты x^2 и x^3 для всех точек равны нулю. В таблице даны величины x_x , x_z , y_y и z_z . Значения x_y и y_z во всех девяти точках с точностью 10^{-3} равны нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агниашвили М. Р. Некоторые краевые задачи термомоментной теории упругости.— Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1976.
2. Александров А. Я. Об одном приближенном методе решения плоских контактных задач теории упругости // Тр. НИИЖТ. Вып. XI.— М.: Трансжелдориздат, 1955.
3. Александров А. Я. Решение основных задач теории упругости путем численной реализации метода интегральных уравнений // Успехи механики деформируемых сред.— М.: Наука, 1975.— С. 3—24.
4. Александров А. Я., Зиновьев Б. И. Приближенный метод решения плоских и пространственных задач теории упругости для тел с армирующими элементами и разрезами // Механика деформируемых тел и конструкций.— М.: Машиностроение, 1975.— С. 15—25.
5. Алексидзе М. А. К вопросу о практическом применении одного нового приближенного метода // Дифференц. уравнения.— 1966.— Т. 12, № 2.— С. 1625—1629.
6. Алексидзе М. А. Замечания об одном приближенном методе решения граничных задач // ДАН СССР.— 1967.— Т. 173, № 1.— С. 9—11.
7. Алексидзе М. А. О полноте некоторых систем функций // Дифференц. уравнения.— 1967.— Т. 3, № 10.— С. 1045—1048.
8. Алексидзе М. А. О рядах по неортогональным системам функций // ЖВМ и МФ.— 1968.— Т. 8, № 5.— С. 965—987.
9. Алексидзе М. А. О приближенном решении некоторых бесконечных систем уравнений // ДАН СССР.— 1968.— Т. 179, № 5.— С. 1019—1022.
10. Алексидзе М. А. Об одном методе обращения симметричных матриц // ДАН СССР.— 1970.— Т. 191, № 3.— С. 507—510.
11. Алексидзе М. А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям.— М.: Наука, 1978.— С. 351.
12. Алексидзе М. А., Арвеладзе Н. М. Вычисление коэффициентов ортонормализации методом Шмидта.— Тбилиси: Мецниереба, 1971.— С. 40.
13. Алексидзе М. А., Арвеладзе Н. М., Лекишвили Н. Л. Численная реализация одного нового приближенного метода решения граничных задач.— Тбилиси: Изд-во АН ГССР, 1969.
14. Алексидзе М. А., Арвеладзе Н. М., Лекишвили Н. Л. Решение некоторых пространственных граничных задач теории потенциала // Тр. ВЦ АН ГССР.— 1973.— Т. XII, вып. 1.— С. 62—69.
15. Алексидзе М. А., Арвеладзе Н. М., Лекишвили Н. Л. О приближенных решениях граничных задач // Тр. Ин-та прикл. мат. Тбил. ун-та.— 1969.— Т. II.— С. 122—130.
16. Алексидзе М. А., Арвеладзе Н. М., Лекишвили Н. Л., Пертая К. В. О разложении функции по приближенно ортонормированным системам // ДАН СССР.— 1969.— Т. 185, № 6.— С. 1207—1210.
17. Алексидзе М. А., Арвеладзе Н. М., Лекишвили Н. Л., Пертая К. В. О решении граничных задач с помощью неортогональных рядов // Сообщ. АН ГССР.— 1968.— Т. XIX, № 2.— С. 281—286.

18. Алексидзе М. А., Арвеладзе Н. М., Лекишвили Н. Л., Самсония К. Н. Об автоматизации вариационных методов решения граничных задач // Тр. ВЦ АН ГССР.— 1971.— Т. X, № 4.— С. 16—25.
19. Алексидзе М. А., Закрадзе М. В. Об устойчивости определения параметров сил в сейсмическом очаге // ДАН СССР.— 1981.— Т. 259, № 3.— С. 57—60.
20. Алексидзе М. А., Лекишвили Н. Л. Вычисление коэффициентов ортонормализации.— М.: Изд-во «Гипротис», 1967.
21. Алексидзе М. А., Лекишвили Н. Л. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом обобщенных рядов Фурье.— М.: Изд-во «Гипротис», 1967.
22. Алексидзе М. А., Самсония К. Н. Автоматизация одного метода решения пространственных задач статики теории упругости // Числ. методы механики сплошной среды.— 1973.— Т. 4, № 5.— С. 177—182.
23. Алексидзе М. А., Самсония К. Н. Об одном алгоритме решения пространственных граничных задач теории упругости // Аннот. докл. семинара Ин-та прикл. мат.— Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1972.— Вып. 6.
24. Альтиерио Н. Дж., Сикарски Д. Л. Применение метода интегральных уравнений к задачам механики горных пород о внедрении инструмента // Метод граничных интегральных уравнений.— М.: Мир, 1978.
25. Аптекман Ж. Я., Богданов В. И. Определение тензора сейсмического момента из наблюдений // Изв. АН СССР. Физика Земли.— 1981.— № 10.— С. 14—24.
26. Ахнезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации.— М.: Наука, 1965.
27. Баренблатт Г. И. Подобие, автомоделность, промежуточная асимптотика.— Л.: Гидрометеоиздат, 1978.— 207 с.
28. Бакушинский А. Б. Замечания о методе Купрадзе — Алексидзе // Дифференц. уравнения.— 1970.— Т. 6, № 7.— С. 1298—1301.
29. Бари Н. К. Тригонометрические ряды.— М.: Физматгиз, 1961.
30. Бахвалов Н. С. О свойствах оптимальных методов решения задач математической физики // ЖВМ и МФ.— 1970.— Т. 10, № 3.— С. 555—568.
31. Безунер Ф. М., Сноу Д. У. Применение двумерного метода граничных интегральных уравнений для решения инженерных задач.— Метод граничных интегральных уравнений.— М.: Мир, 1978.
32. Бейтмен Г. Математическая теория распространения электромагнитных волн.— М.: Физматгиз, 1958.— 180 с.
33. Белоцерковский С. М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа.— М.: Наука, 1965.
34. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. П. Крыло в нестационарном потоке газа.— М.: Наука, 1971.
35. Белянков А. Я. Две конструкции независимых и устойчивых внутренних граничных условий // Задачи механики и математической физики.— М.: Наука, 1976.— С. 31—42.
36. Березин Н. С., Жидков Н. П. Методы вычисления. Т. I, II.— М.: Физматгиз, 1962.
37. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными.— М.: Мир, 1966.— 351 с.
38. Билби Б., Эшелби Дж. Дислокации и теория разрушения. Разрушение (ред. Г. Либовиц). Т. I.— М.: Мир, 1973.— С. 112—203.
39. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка.— М.: Наука, 1966.
40. Брело. Основы классической теории потенциала.— М.: Мир, 1964.
41. Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами.— М.: Наука, 1979.

42. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных.— М.: ИЛ, 1963.
43. Вейнелът В. Замечания об одном методе разложения функций по неортогональным системам функций // Тр. ВЦ АН ГССР.— 1973.— Т. 12, № 1.— С. 106—107.
44. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе.— М.: Мир, 1974.
45. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции.— М.: Физматгиз, 1959.
46. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. 2-е изд.— М.: Физматгиз, 1970.
47. Верюжский Ю. В. Применение метода потенциала для решения задач теории упругости.— Киев: Киевский инж.-строит. ин-т, 1975.
48. Верюжский Ю. В. Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики.— Киев: Виша школа, 1978.— 181 с.
49. Взорова А. Н. Таблицы для решения уравнения Лапласа.— М.: Изд-во АН СССР, 1957.
50. Витт Р. Д. Континуальная теория стационарных дислокаций // Дж. Эшелби. Континуальная теория дислокаций.— М.: ИЛ, 1963.— С. 175—229.
51. Владимиров В. С. Уравнения математической физики.— 4-е изд.— М.: Наука, 1981.— 512 с.
52. Волков Е. А. К решению методом сеток уравнений эмпирического типа с краевыми условиями, содержащими производные // ДАН СССР.— 1955.— Т. 102, № 3.— С. 502—511.
53. Волков Е. А. О методе сеток для краевых задач с косою и нормальной производной // ЖВМ и МФ.— 1961.— Т. 1, № 4.— С. 607—621.
54. Галик Л. А. Контактные задачи теории упругости.— М.: Гостехиздат, 1953.
55. Годунов С. К. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1971.— 416 с.
56. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы.— М.: Наука, 1973.
57. Гольдштейн Р. В. К вопросу о применении метода граничных интегральных уравнений для решения задач механики сплошных сред. Метод граничных интегральных уравнений.— М.: Мир, 1978.
58. Гольдштейн Р. В., Ентов В. М., Зазовский А. Ф. Решение смешанных краевых задач прямым вариационным методом // Численные методы механики сплошной среды.— 1976.— Т. 7, № 5.— С. 5—13.
59. Гольдштейн Р. В., Клейн И. С., Эскин Г. И. Вариационно-разностный метод решения некоторых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений трехмерных задач теории упругости.— Препринт/Ин-т пробл. мех. АН СССР.— М., 1973.— № 33.
60. Гольдштейн Р. В., Салганик Р. Л. Плоская задача о криволинейных трещинах в упругом теле // Изв. АН СССР. МТТ.— 1970.— № 3.— С. 69—82.
61. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций.— М.: Гостехиздат, 1954.
62. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным граничным задачам математической физики.— М.: Гостехиздат, 1953.
63. Зарипдзе Р. С., Каркашадзе Д. Д., Хаташвили Дж. Ш., Ахвледиани Г. З. Приближенный метод расчета диэлектрических волноводов со сложным контуром поперечного сечения // Сообщ. АН ГССР.— 1981.— Т. 102, № 1.— С. 29—33.
64. Зиновьев Б. М. Один приближенный метод расчета тел с разрезами // Тр. НИИЖТ, 1972.— Вып. 137.— С. 105—125.
65. Зоммерфельд А. Электродинамика.— М.: ИЛ, 1958.— 501 с.
66. Ион Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными.— М.: ИЛ, 1958.

67. Каландия А. И. Математические задачи двумерной упругости.— М.: Наука, 1973.
68. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— 3-е изд.— М.: Наука, 1984.
69. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа.— М.: Физматгиз, 1962.
70. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел.— М.: Физматгиз, 1964.
71. Карцивадзе И. Н. О функциях, представленных в виде потенциала // Тр. ВЦ АН ГССР.— 1953.— Т. 4.— С. 43—49.
72. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов.— М.: Физматгиз, 1958.
73. Клабукова Л. С. О приближенном методе решения задачи Римана — Гильберта в многосвязной области // ВЦ АН СССР. Вычисл. матем.— 1961.— № 7.— С. 59—71.
74. Клабукова Л. С. Приближенный метод решения задачи Пуанкаре // ВЦ АН СССР. Вычисл. матем.— 1958.— № 3.— С. 34—48.
75. Коган С. Я., Поликарпов А. М. О динамических параметрах сейсмического очага // Изв. АН СССР. Физика Земли.— 1977.— № 12.— С. 42—59.
76. Копейкин Ю. Д. Применение бигармонических потенциалов в плоских краевых задачах теории упругости // Упругость и неупругость. Вып. 1.— Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1971.— С. 21—26.
77. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике.— М.: Наука, 1977.— С. 831—832.
78. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики.— М.: Физматгиз, 1962.
79. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики.— М.: Высш. шк., 1970.— С. 710.
80. Крейн М. Г. О базисах Бари пространства Гильберта // УМН.— 1957.— Т. 12, № 3.— С. 116—122.
81. Круз Т. Метод граничных интегральных уравнений в механике разрушения. Метод граничных интегральных уравнений.— М.: Мир, 1978.
82. Купрадзе В. Д. О приближенном решении задач математической физики // УМН.— 1967.— Т. 22, № 2.— С. 59—107.
83. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости.— М.: Физматгиз, 1963.
84. Купрадзе В. Д., Алексидзе М. А. Об одном приближенном методе решения граничных задач // Сообщ. АН ГССР.— 1963.— Т. 30, № 5.— С. 529—536.
85. Купрадзе В. Д., Алексидзе М. А. Метод функциональных уравнений для приближенного решения некоторых граничных задач // ЖВМиМФ.— 1964.— Т. 4, № 4.— С. 683—715.
86. Купрадзе В. Д., Гегелия Т. Г., Башалейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости.— Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1968.
87. Купрадзе В. Д., Гегелия Т. Г., Башалейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости.— М.: Наука, 1976.
88. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики.— М.: Гостехиздат, 1951.
89. Курант Р. Уравнения с частными производными.— М.: Мир, 1964.— 830 с.
90. Куртиков Л. М. О структуре матриц, обратных корреляционным матрицам векторных случайных процессов // ЖВМ и МФ.— 1967.— № 7.— С. 764—773.

91. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— 4-е изд.— М.: Наука, 1973.— 736 с.
92. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.— М.: Наука, 1970.
93. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости.— М.: Наука, 1965.
94. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения.— М.: Мир, 1970.
95. Лаша Ж. К., Уотсон Дж. О. Усовершенствованная программа для решения трехмерных задач теории упругости методом граничных интегральных уравнений. Метод граничных интегральных уравнений.— М.: Мир, 1978.
96. Леви Е. Е. О линейных эллиптических уравнениях в частных производных // УМН.— 1940.— Вып. 8.— С. 249—292.
97. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М.: Мир, 1972.
98. Лионс Ж.-Л., Мадженес Е. Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М.: Мир, 1970.— С. 282.
99. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости.— М.: Гостехиздат, 1955.— 492 с.
100. Лурье А. И. Теория упругости.— М.: Наука, 1970.
101. Лурье А. И. Обобщение решения акад. Б. Г. Галеркина на случай динамических уравнений теории упругости // Тез. докл. к Всесоюзн. конф. по стрит. мех.— М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1938.— С. 60—61.
102. Люмис Л. Введение в абстрактный гармонический анализ.— М.: ИЛ, 1956.
103. Люстерник Л. А. О разностных аппроксимациях оператора Лапласа // УМН.— 1954.— Т. 9, № 2.
104. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа.— М.: Наука, 1965.
105. Ляв А. Математическая теория упругости.— М.: ОНТИ, 1935.
106. Маслов В. П. Операторные методы.— М.: Наука, 1973.
107. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ. Вып. 1. Пакет научных подпрограмм.— Минск: ИМ АН БССР, 1973.
108. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа.— М.: ИЛ, 1957.
109. Михайленко Б. Е., Ковалев С. И. Конструирование форм современных архитектурных сооружений.— Киев: Будивельник, 1980.
110. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике.— М.: Физматгиз, 1957.
111. Михлин С. Г. Об алгоритме Шварца // ДАН СССР.— 1951.— Т. 77, № 4.
112. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.— М.: Физматгиз, 1962.
113. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов.— М.: Наука, 1966.
114. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики.— М.: ИЛ, 1958.— 930 с.
115. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.— 3-е изд.— М.: Физматгиз, 1968.
116. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.
117. Никольский С. М. Квадратурные формулы.— 3-е изд.— М.: Наука, 1979.
118. Никольский А. А., Серебрянский М. М., Сычев В. В. Аэродинамика установившегося обтекания тел при дозвуковых скоростях.— Механика в СССР за 50 лет. Т. 2.— М.: Наука, 1970.— С. 85—102.
119. Новацкий В. Теория упругости.— М.: Мир, 1975.
120. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами.— Киев: Наук. думка, 1968.

121. Пароди М. Локализация характеристических чисел матриц и ее применение.— М.: ИЛ, 1960.
122. Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости.— М.: Наука, 1977.— 311 с.
123. Перлин П. И. Численное решение сингулярных интегральных уравнений основных задач теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ.— 1975.— № 3.— С. 109—111.
124. Перлин П. И. Применение регулярных представлений сингулярных интегралов к решению уравнений второй основной задачи теории упругости.— ПММ, 1975, 40, с. 366—374.
125. Поповиди Р. С., Каркашадзе Д. Д., Ахвледiani Г. З., Хатиашвили Дж. Ш. Исследование возможностей метода вспомогательных источников при решении двумерных задач электродинамики // РЭ.— 1984.— Т. 26, № 2.
126. Поповиди Р. С., Каркашадзе Д. Д., Цверикмазашвили З. С. Численное решение задачи дифракции на бесконечной многослойной решетке // Сообщ. АН ГССР.— 1976.— Т. 82, № 2.
127. Рейс Дж. Математические методы в механике разрушения. Разрушение: Пер. с англ./Под ред. Г. Либовиц.— Т. II.— М.: Мир, 1975.— С. 204—335.
128. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач.— М.: Мир, 1972.
129. Ригдо Ф. Метод граничных интегральных уравнений — современный вычислительный метод прикладной механики. Метод граничных интегральных уравнений.— М.: Мир, 1978.
130. Роговой А. А. Математическое обоснование метода источников в теории упругости // Автореферат канд. дисс.— М.: МНЭМ, 1976.
131. Рябенский В. С. Метод внутренних граничных условий в теории разностных краевых задач // УМН.— 1971.— Т. 26, № 3.— С. 106—160.
132. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий.— Киев: Наук. думка, 1968.
133. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем.— М.: Наука, 1971.
134. Самарский А. А. Теория разностных схем.— 2-е изд.— М.: Наука, 1983.
135. Самсония З. В. О квазиконформном отображении многосвязных областей // Сообщ. АН ГССР.— 1985.— Т. 117, № 3.— С. 481—484.
136. Самсония К. Н. Численные решения некоторых пространственных задач теории упругости // Автореф. канд. дисс.— М.: Изд-во. МГУ, 1973.
137. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике.— М.— Л.: Наука, 1972.— 440 с.
138. Силагадзе Г. С. и др. Пакет прикладных программ решения граничных задач для уравнений Лапласа и Пуассона методом разложения по фундаментальным решениям // Тр. ВЦ АН ГССР.— 1979.— Т. XIX, № 1.— С. 43—61.
139. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2.— М.: Наука, 1967.
140. Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка.— М.: Наука, 1964.— 206 с.
141. Соболев С. Л. Алгоритм Шварца в теории упругости // ДАН СССР.— 1936 — Т. 4(13), № 6.— С. 521—524.
142. Соболев С. Л. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1966.— 443 с.
143. Сретенский Л. Н. Теория ньютоновского потенциала.— М.: Гостехиздат, 1948.
144. Степанов Г. Ю. Гидродинамическая теория решеток. Механика в СССР за 50 лет. Т. 2.— М.: Наука, 1970.— С. 103—152.
145. Стокер Дж. Дж. Волны на воде.— М.: ИЛ, 1959.
146. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости.— М.: Наука, 1975.

147. Тихонов А. Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивым методам их решения // ДАН СССР.— 1965.— Т. 163, № 6.— С. 914—916.
148. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— 2-е изд.— М.: Наука, 1979.
149. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.— 5-е изд.— М.: Наука, 1977.
150. Тихонов А. Н., Иванов В. К., Лаврентьев М. М. Некорректно поставленные задачи // Дифференциальные уравнения с частными производными.— М.: Наука, 1970, с. 224—238.
151. Тозони О. В. Математические модели для расчета электрических и магнитных полей.— Киев: Наук. думка, 1964.
152. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости.— М.: Наука, 1963.
153. Угодчиков А. Г., Длугач М. И., Степанов А. Е. Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах.— М.: Высш. шк., 1970.— 527 с.
154. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений.— М.: Наука, 1970.
155. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры.— М.: Физматгиз, 1960.
156. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре.— М.: Физматгиз, 1961.
157. Фильчиков П. Ф. Приближенные методы конформных отображений.— Киев: Наукова думка, 1964.— 530 с.
158. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Т. I.— М.: Наука, 1968.— 440 с.
159. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.— М.: Мир, 1976.
160. Харди Г. Х., Рогозинский Д. А. Ряды Фурье.— М.: Физматгиз, 1959.
161. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными.— М.: Мир, 1965.— 379 с.
162. Цвик Л. Б. Принцип поочередной непрерывности при решении задач теории поля по частям // ДАН СССР.— 1978.— Т. 243, № 1.— С. 38—41.
163. Шерман Д. И. Метод интегральных уравнений в плоских и пространственных задачах статической теории упругости // Тр. III Всесоюз. съезда по теоретической и прикладной механике.— М., 1962.
164. Шиппи Д. Дж. Применение метода граничных интегральных уравнений к изучению нестационарных явлений в твердых телах. Метод граничных интегральных уравнений.— М.: Мир, 1978.
165. Шоу Р. П. Применение метода граничных интегральных уравнений к теории волн на поверхности воды. Метод граничных интегральных уравнений.— М.: Мир, 1978.
166. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1973.
167. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.— Новосибирск: Наука, 1967.
168. Altiero N. J., Sikarskie D. L. An Integral Equation Method Applied to Penetration Problems in Rock Mechanics // Boundary-Integral Equation Method: Computational Applications in Applied Mechanics/eds. T. A. Cruse, F. J. Rizzo,— ASMP, 1975. (См. [24].)
169. Van augh R. P., Goldsmith W. Diffraction of Steady Acoustic Waves by Surfaces of Arbitrary Shape // J. Acoust. Soc. Amer.— 1963.— V. 35.— P. 1590—1601.
170. B a z a n t Z. Three-dimensional Harmonic Function Near Termination or Intersection of Gradient Singularity Lines: a General Numerical Method. Internat // J. Enging. Sci.— 1974.— V. 12.— P. 221—243.

171. Benjumea R., Sikarskie D. L. On the Solution of Plane, Orthotropic Elasticity Problems by an Integral Method // *J. Appl. Mech.*— 1972.— V. 39, Ser. E, № 3.— P. 801—808. [Рус. пер.: Прикладная механика. Сер. Е.— 1972.— № 3.— С. 165—173.]
172. Brace W. F. Behavior of Rock Salt, Limestone and Anhydrite During Indentation // *J. Geophys. Res.*— 1960.— V. 65, № 6.— P. 1773—1788.
173. Chang Y. P., Kang C. S., Chen D. I. The Use of Fundamental Green's Functions for the Solution of Problems of Heat Conduction in Anisotropic Media // *J. Heat and Mass Transfer.*— 1973.— V. 16.— P. 1905—1918.
174. Christiansen S. On Kupradze's Functional Equations for Plane Harmonic Problems // *Z. Angew. Math. Mech.*— 1971.— V. 51.— P. 69—78.
175. Crus T. A. An Improved Boundary-integral Equation Method for Three Dimensional Elastic Stress Analysis // *Computers and Structures.*— 1974.— V. 4.— P. 741—754.
176. Crus T. A. Application of the Boundary — integral Equation Method to Three Dimensional Stress Analysis // *Computers and Structures.*— 1973.— V. 3.— P. 509—527.
177. Crus T. A., Rizzo F. J. A. Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I // *J. Math. Analysis and Appl.*— 1968.— V. 22.— P. 244—259.
178. Douglas Y. Approximate Continuation of Harmonic and Parabolic Functions Numer. Sol of Part Diff. Eq.— N. Y. Acad. Press, 1966.
179. Friedman M. B., Shaw R. P. Diffraction of a Plane Shock Wave by an Arbitrary Rigid Cylindrical Obstacle // *J. Appl. Mech.*— 1962.— V. 29.— P. 40—46 [Рус. пер.: Прикладная механика. Сер. Е.— 1962.— № 1.— С. 47—54].
180. Green A. E., Sneddon I. N. The Stress Distribution in the Neighborhood of a Flat Elliptical Crack in an Elastic Solid. *Proc. // Cambridge Philos. Soc.*— 1950.— V. 46.— P. 159—163.
181. Hess J. L., Smith A. M. O. Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies // *Progress in Aeronautical Sciences. Vol. 8. N. Y.: Pergamon, 1966.*— P. 1—138.
182. Hess J. L. Review of Integral — equation Techniques for Solving Potential flow Problems with Emphasis on the Surface — source Method // *Comp. Mech. Appl. Mech. Eng.*— 1975.— V. 5.— P. 145—196.
183. Hess J. L. Higher — order Numerical Solution of the Integral Equation for the Two — dimensional Neumann Problem // *Comp. Math. Appl. Mech. Eng.*— 1973.— V. 2.— P. 1—15.
184. Huth J. H. A Note on Plastic Torsion // *J. Appl. Mech.*— 1955.— V. 22.— P. 432—434.
185. Orwin J. R. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate // *J. Appl. Mech.*— 1957.— V. 24.— P. 361—364.
186. Janson M. A. Integral Equation Methods in Potential Theory // *J. Proc. Roy. Soc.*— 1963.— V. 275.— P. 23—32.
187. Kassier M. K., Sih G. C. Three Dimensional Stress Distribution Around an Elliptical Crack Under Arbitrary Loadings // *J. Appl. Mech.*— 1966.— V. 35.— P. 601—611. [Рус. пер.: Прикладная механика.— Сер. Е.— 1966.— № 3.— С. 141—152.]
188. Keldysch M., Lavrentiev M. Sur les Suites. Convergences des Polynomes Harmoniques // *Тр. Тбилис. мат. Ин-та.*— 1937.— № 1.— С. 62—74.
189. Kellogg O. D. Foundations of Potential Theory.— Ist. ed. Dover, N. Y., 1953.
190. Mindlin R. D. Force at a Point in the Interior of a Semiinfinite // *Solid. Physics.*— 1936.— V. 7, № 2.— P. 195—202.
191. Nedelec J. C. Curved Finite Element Methods for the Solution of Singular Integral Equation of Surfaces in R^3 // *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*— 1976.— V. 8.— P. 61—80.

192. Obert L. Brittle Fracture of Rocks // Fracture (Liebowitz H., ed.)— N. Y.: Academic Press.— 1972.— V. 7.— P. 93—155. [Рус. пер.: Разрушение. Т. 7.— М.: Мир.— С. 59—128.]
193. Odqvist F. Uber die Randwertaufgaben der Hydrodynamik Zaher Flussigkeiten // Math. Zeit.— 1930.— № 32.— P. 69—86.
194. Odqvist F. Beitrage zur Theorie der Nichtstationaren Zahen Flussigkeitsbewegungen // Arkiv fur Mathematik. Astronomi och Fysik.— 1932.— 22 A.— № 28.— P. 27—43.
195. Rizzo F. J., Shippy D. J. A Method of Solution for Certain Problems of Transient Heat Conduction, AIAA, Journal. 1970.— V. 8.— P. 2004—2009. [Рус. пер. Ракетная техника и космонавтика.— 1970.— Т. 8, № 11.— С. 104—112.]
196. Shaw R. P. Outer Boundary Integral Equation Applied to Transient Wave Scattering in a Inhomogeneous Medium // J. Appl. Mech.— 1975.— V. 42.— P. 147—152.
197. Shaw R. P. Boundary Integral Equation Methods Applied to Water Waves. Boundary — Integral Equation Method: Computational Applications in Applied Mechanics, ed. T. A. Cruse, F. J. Rizzo, ASME, 1975. [Рус. пер. см. [165].]
198. Snyder M. D., Cruse T. A. Boundary — Integral Equation Analysis of Cracked Anisotropic Plates // Intern. J. Fracture.— 1975.— V. 11.— P. 315—328.
199. Strassen V. Caussian Elimination is not Optimal // Numer. Math.— 1969.— V. 13.— № 14.— P. 354—356.
200. Watson J. The Analysis of Three Dimensional Problems of Elasticity by Integral Representation of Displacement // Variational Methods in Engineering.— V. 11.— Southampton: Univ. Press.— 1973.— P. 9/51—9/56.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгоритм регуляризирующий 43
- Базис Бари 91
— пространства 32
- Биогармоническое уравнение 177
- Биортонормализация 58
- Биортонормированная система 39
- Вектор вращения 199
— напряжения 310
— смещения 199
- Векторные произведения 182
- Видоизмененная задача Дирихле 259
- Волновое уравнение 164
- Вполне регулярность бесконечной системы 20
- Гамма-функция 216
- Гексагональная система 191
- Голоморфная функция 264
- Граничная задача 7
- Граничный аналог метода коллокации 14
— — — — моментов 15
— — — — наименьших квадратов 15
— — — — Ритца 14
- Детерминант Грама 36
- Диэлектрическая постоянная 182
- Задача Дирихле 10
— Неймана 27
— — Римана — Гильберта 265
- Закон Гука 191
- Интегральное уравнение первого рода 40
- Интегрированное фундаментальное решение уравнений стохастической теории упругости 206
- Интегрированное фундаментальное решение уравнения Лапласа 199
- Интегрированные фундаментальные решения 52
- Итерированный лапласиан 216
- Итерация Зейделя 102
- Компактная схема 289
- Контактная граничная задача 125
- Конформно отображающая функция 275
- Коэффициент диффузии 173
— температуропроводности 173
— теплопроводности 173
— удельной теплоемкости 173
- Коэффициенты Ламе 309
— ортонормализации 67
- Кривая Ляпунова 259
- Кубатурная формула 30
- Кусочно-однородные области 125
- Линеаризация Озина 175
— Стокса 176
- Линейная оболочка 14
— обратная граничная задача 155
- Линейно-независимая система 26
- Магнитная проницаемость 182
- Матрица Кельвина 185
— Купрадзе 186
— Соммиана 184
— типа Адамара 262
- Мгновенный источник тепла 174
- Метод Бубнова — Галеркина 73
— Гаусса 76
— квадратных корней 68
— коллокации 282
— конечных разностей 85
— моментов 11
— наименьших квадратов 11
— окаймленная 79
— ортогональных проекций 11
— регуляризации 40
— Ритца 11
— Треффта 13

- Метод Шмидта 256
- Надежная система 246
 Некорректная задача 92
 Нелинейные граничные условия 122
 Неортогональные системы 90
 Непрерывность скалярного произведения 97
 Неравенство Бесселя 111
 — Коши — Буяковского 94
 — Минковского 98
 — Шура 46
 Нормальное решение системы 43
 Нормальный определитель бесконечной матрицы 20
- Обобщенное плоское напряженное состояние 309
 Обратные граничные задачи 154
 Обусловленность матрицы 44
 Оператор вполне непрерывный 11
 — дифференциальный 7
 — линейный 11
 — напряжения 185
 — ограниченный 15
 — положительно определенный 104
 — положительный 104
 Оптимальное число арифметических операций 90
 Ортонормализация 58
 Основная формула гармонических функций 161
 Оценка Гирша 45
- Параметр регуляризации 52
 Плоскость изотропия 191
 Плотность простого слоя 28
 Полнота по энергии 14
 Потенциальные системы 94
 Принцип Гюйгенса 164
 Пространство Банаха 31
 — Гильберта 31
 — Соболева 8
 — сопряженное 39
 — энергетическое 10
- Разрывные граничные условия 122
 — потенциальные системы 98
 Регулярное на бесконечности решение 128
 Регулярность бесконечной системы 20
 Родственный оператор 22
- Сильно минимальные системы 249
 Символ Кронекера 261
 Система неминимальная 21
 — плотно-полная 21
 — почти ортогональная 21
 Скалярное произведение 50
 След матрицы 287
 Собственные значения 137
 — функции 137
 Согласованная норма 50
 Соотношение Коши — Римана 259
 Строго нормированное пространство 66
- Телеграфное уравнение 182
 Тензор Леви — Чивита 189
 Теорема Банаха 284
 — вложения 329
 — Мерсера 41
 — — Мюнца 94
 — Таусски 260
 Тепловые потенциалы 173
 Тестовая задача 214
 Тождественный оператор 66
 Тотальная система функционалов 8
 Трансформация Гаусса 67
- Узлы коллокации 16
 Универсальная программа 215
 Упругие константы 197
 Уравнение Гельмгольца 164
 — Клейна — Гордона 165
 — колебания 180
 — Лапласа 238
 — Максвелла 182
 — Навье — Стокса 176
 — Пуассона 163
 — теплопроводности 173
 Уравнения динамики упругой среды 187
 — статика моментной теории упругости 188
 — теории термоупругости 195
 — термомomentной теории упругости 197
 — термоупругоколебательного состояния среды 194
 — трансверсально-изотропной среды 191
 — упругих колебаний 186
 — установившихся колебаний моментной теории упругости 190
 — эластокинетики 187
 Условие Адамара о неособенности матрицы 262
 Условия сопряжения 125
 Устойчивость обратной матрицы 44

- | | |
|----------------------------------|--|
| Формула Гаусса 294 | Центр дилатации 188 |
| — Грина 162 | Частота колебаний 186 |
| — Гюйгенса 32 | Число обусловленности 48 |
| Формулы Кирхгофа 165 | |
| — Крамера 68 | |
| Фундаментальные решения 161 | |
| Функции Бесселя второго рода 216 | Эллиптический дифференциальный оператор 53 |
| — Грина 27 | Эрмитова матрица 46 |
| — Дирака 53 | |
| — Неймана 27 | |
| — температурного влияния 174 | |
| — Хевисайда 187 | Ядро оператора 31 |

Справочное издание

АЛЕКСИДЗЕ Мераб Александрович

**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ
В ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЯХ
ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ**

Серия «Справочная математическая библиотека»

Заведующий редакцией *Е. Ю. Ходан*. Редакторы *М. В. Самсонова, Т. В. Шароватова*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*. Технический редактор *С. Я. Шкляр*
Корректоры *Л. И. Назарова, Н. Д. Дорохова*

ИБ № 32875

Сдано в набор 18.07.90. Подписано к печати 17.07.91. Формат 60×90/16. Бумага книжно-журнальная. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. 22. Усл. кр.-отт. 22. Уч.-изд. л. 24,65. Тираж 5200 экз. Заказ № 315. Цена 2 р. 70 к.

Издательско-производственное и книготорговое объединение «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства «Наука»
630077 Новосибирск, 77, Станиславского, 25

3-46

M. A. ALEXIDZE

FUNDAMENTAL FUNCTIONS IN APPROXIMATE SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS

1. Information about the author. Merab Alexandrovich Alexidze, D. Sc (Phys. Math.), Professor, Academician of the Academy of Sciences of the Georgian SSR, Director of the Institute of Geophysics, a prominent specialist in the field of computing mathematics and geophysics.

2. Annotation. The present book is the third edition of the first monographic publication dealing with the approximate method of boundary value problem solutions with reliance based on fundamental solutions. The first edition was published in 1978 (Main Editorial Board for Literature on Physics and Mathematics) under the title «Solution of Boundary Value Problems by Means of Expansion into Non-Orthogonal Functions». The second edition appeared in 1989 (Publishing House of the Tbilisi State University) «Fundamental Functions of Mathematical Physics Equations in Approximate Solutions of Boundary Value Problems».

3. Contents.

Chapter 1. Boundary value problem solution by means of expansion into non-orthogonal functions.

Chapter 2. Fundamental and integrated fundamental solutions of some differential equations.

Chapter 3. Boundary value problems for Laplace equation.

Chapter 4. Boundary value problems of static elasticity theory.

The first chapter gives a general account of the methods of the approximate solution of boundary value problems with reliance placed on expansion into non-orthogonal functions and fundamental solutions and studies the difficulties of numerical realization of the approximation method.

The second chapter contains fundamental solutions of almost all the classic linear equations of mathematical physics permitting evident analytical description.

The third chapter is given to boundary value problems for Laplace plane and spatial equations which in scientific literature have always been regarded as model problems of mathematical physics. Therefore the author places special emphasis on such problems.

The fourth chapter sets up approximate methods of solution of boundary value problems of static elasticity theory.

