ABHANDLUNGEN UND VORTRAGE AUS DEM GEBIETE
DER MATHEMATIK, NATURWISSENSCHAFT UND TECHNIK

HEFT 6

DER KREISELKOMPASS

VON

DR. KURT HOCHMUTH

MIT 20 FIGUREN IM TEXT

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 1921

Abhandlungen und Vorträge

aus dem Gebiete der

Mathematik, Naturwissenschaft und Technik

1. Heft. **Die neue Mechanik.** Von H. Poincaré. 4. Aufl. M. 4.—

Die kleine Schrift behandelt die durch Einführung der relativistischen Anschauung bedingte grundlegende Umwandlung der physikalischen Begriffe Kraft und Masse und beleuchtet die daraus sich ergebenden Folgerungen nach vielen Seiten hin, insbesondere für astronomische Fragen. Die ungemein klare, alle Grundgedanken scharf hervorhebende Darstellung ermöglicht auch dem Fernerstehenden ein leichtes Eindringen in den so schwierigen Stoff.

2. Heft. **Physikalisches über Raum und Zeit.** Von Prof. Dr. E. Cohn. 4. Auflage. Geh. M. 4.—

In gemeinverständlicher Weise wird dargelegt, welche wissenschaftlichen Erfahrungen zur Aufstellung der Relativitätstheorie geführt haben, und welche Bedeutung dieses neue Prinzip für unsere physikalische Auffassung von Raum und Zeit hat. Die vorliegende Schrift ist ständig bemüht, scharf hervortreten zu lassen, was beobachtbare Tatsache, was willkürliche Festsetzung und was notwendige Folgerung ist.

3. Heft. **Das Relativitätsprinzip.** Eine Einführung in die Theorie. Von Prof. Dr. A. Brill. Mit 6 Figuren. 4. Auflage. M. 7.—

Das Büchlein beschränkt sich hauptsächlich auf den Teil der Theorie, der den Widerspruch zwischen der Maxwell-Hertzschen Lichttheorie und der Erfahrung zu überbrücken berufen ist. Die Grundgleichungen der Theorie erfahren eine eingehende Behandlung, und es wird an ihnen abgeleitet, wie an Stelle der dreidimensionalen Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik die vierdimensionale Impuls-Energiegleichung tritt, und welche Behandlung damit der Begriff „Masse" erfährt. Auch die neuerdings von A. Einstein aufgestellte Theorie der Gravitation wird in längerer Besprechung gewürdigt.

4. Heft. **Der Hohennersche Präzisionsdistanzmesser und seine Verbindung mit einem Theodolit** (D.R.P. No. 277000). Einrichtung und Gebrauch des Instrumentes für die verschiedenen Zwecke der Tachymetrie; mit Zahlenbeispielen sowie Genauigkeitsversuchen. Von Prof. Dr.-Ing. H. Hohenner. Mit 7 Abbildungen im Text und 1 Tafel. Geh. M. 8.—

Die Abhandlung gibt die Beschreibung eines neuen optischen Entfernungsmessers, der im Gegensatz zu der langwierigen und wenig genauen Messungsmethode mit Latte und Band und mit den bisherigen Distanzmessern ein schnelles und ungemein präzises Arbeiten ermöglicht. Nach theoretischer Behandlung des Instruments wird seine praktische Verwendungsmöglichkeit für die verschiedenen Zwecke der Tachymetrie erörtert und der Grad der mit dem Präzisionsdistanzmesser erreichbaren Genauigkeit an Hand zahlreicher Versuche abgeleitet.

5. Heft. **Raum, Zeit und Relativitätstheorie.** Gemeinverständl. Vorträge von Prof. Dr. L. Schlesinger. Mit 2 Taf. u. 5 Fig. M. 7.—

Die Abhandlung, aus einem Vortrag hervorgegangen, der sich an Gebildete aller Stände wendet, behandelt die allgemeine und spezielle Relativitätstheorie. Sie setzt nur ein Mindestmaß an mathematischen Kenntnissen voraus und bedient sich vorwiegend graphischer Methoden.

In Vorbereitung 1921 befinden sich:

Die Grundgleichungen der Mechanik, insbes. starrer Körper, neu entwickelt mit Grassmanns Punktrechnung. Von Studiendirektor Dr. A. Lotze.

Naturwissenschaft und Technik der Gegenwart. Von Prof. Dr. R. von Mises.

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN

Die in diesen Anzeigen angegebenen Preise sind die ab 1. VII. gültigen als freibleibend zu betrachtenden Ladenpreise, zu denen die meinen Verlag vorzugsweise führenden Sortimentsbuchhandlungen sie zu liefern in der Lage und verpflichtet sind, und die ich selbst berechne. Sollten betreffs der Berechnung eines Buches meines Verlages irgendwelche Zweifel bestehen, so erbitte ich direkte Mitteilung an mich.

ABHANDLUNGEN UND VORTRÄGE AUS DEM GEBIETE
DER MATHEMATIK, NATURWISSENSCHAFT UND TECHNIK

HEFT 6

DER KREISELKOMPASS

VON

DR. KURT HOCHMUTH

MIT 20 FIGUREN IM TEXT

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 1921

SCHUTZFORMEL FÜR DIE VEREINIGTEN STAATEN VON AMERIKA:

© SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN 1921
URSPRÜNGLICH ERSCHIENEN BEI B.G. TEUBNER LEIPZIG 1921

ISBN 978-3-663-15582-9 ISBN 978-3-663-16155-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-16155-4

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Wer sich mit der Theorie des Kreiselkompasses beschäftigen will, der muß entweder zu den in den Fachzeitschriften befindlichen Sonderabhandlungen greifen oder aber zu den zusammenfassenden Darstellungen, wie sie etwa in den Veröffentlichungen der Firma Anschütz oder in dem Lehrbuch von Maurer vorliegen. In allen den genannten Schriften aber wenden sich die Verfasser in erster Linie an den Fachmann; denn die Theorie und insbesondere die technischen Einzelheiten werden in einer Breite und Fülle gegeben, die dem Fernerstehenden das Studium einigermaßen erschweren.

Es fehlt demnach in der Literatur über den Kreiselkompaß an Darstellungen, die es auch dem Nichtfachmann ermöglichen, sich rasch einen Überblick über den Gegenstand zu verschaffen. Die vorliegende Schrift will dazu beitragen, diese Lücke auszufüllen. Die Theorie wird möglichst knapp und lückenlos gegeben. Von den technischen Einzelheiten sind nur diejenigen ausgewählt worden, die zum Verständnis des Apparates unbedingt erforderlich sind. Überall kommt es nur darauf an, das Grundprinzip klar und deutlich hervortreten zu lassen. Wer sich dann eingehender mit dem Gegenstande beschäftigen will, der mag zu der in der Einleitung angegebenen Literatur greifen.

Ich benutze auch diese Gelegenheit, um den Herren Professoren Geheimrat Dr. O. Wiener und Dr. Scholl, beide an der Universität Leipzig, gehorsamst zu danken für die Anregungen und für die Hilfe, die sie der Arbeit angedeihen ließen.

Meißen, Juni 1921.

Dr. Kurt Hochmuth.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

I. Einleitung 5
II. Vorbemerkungen 5
III. Grundprinzip des Kreiselkompasses 8
IV.[1]) Ableitung der Differentialgleichungen für die ungedämpfte Kreiselbewegung 9
V. Vereinfachung und Integration der obigen Differentialgleichungen . 14
VI. Beschreibung des Einkreiselkompasses.
1. Geschichtliches 19
2. Beschreibung des Apparates 20
VII. Dämpfungsvorrichtungen beim Einkreiselkompaß 21
VIII. Die Differentialgleichungen für die gedämpften Kreiselschwingungen. 23
IX. Systematische Kreiseldeviationen, Fehlerquellen und Korrekturen . 26
X. Der Dreikreiselkompaß 31
XI. Gegendreheinrichtung, Wendemotor und Tochterkompaß. 32
XII. Schluß 33

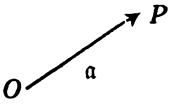
---

1) Wer an der eingehenderen Ableitung der Gleichungen nicht interessiert ist, der mag Absehnitt IV und ebenso Abschnitt V, 1, 2, 3, 4 überspringen und sogleich bei Abschnitt V, 5 (Seite 17) fortfahren.

I. Einleitung.

1. Literatur. Die grundlegenden Schriften über den Kreiselkompaß sind im wesentlichen die folgenden: Klein und Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, Bd. IV, Leipzig 1910. — Maurer, Der Anschützsche Kreiselkompaß (Referat), Zeitschrift für Instrumentenkunde, Bd. 31, 1911. — Maurer, Der Kreiselkompaß, Sonderabdruck aus dem Lehrbuch für den Unterricht in der Navigation an der Kaiserlichen Marineschule, Berlin 1918. — Martienssen, Die Verwendbarkeit des Rotationskompasses als Ersatz des Magnetkompasses, Physikalische Zeitschrift, 7. Jahrg., 1906. — Martienssen, Theorie des Kreiselkompasses, Zeitschrift für Instrumentenkunde, Bd. 32, 1912. — Martienssen, Ein neuer Kreiselkompaß, Zeitschrift für Instrumentenkunde, Bd. 39, 1919. — Lorenz, Technische Anwendungen der Kreiselbewegung, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1919 (Sonderabdruck). — Schuler, Beschreibung des Kreiselkompasses, Selbstverlag v. Anschütz u. Co. 1910.

2. Die mathematische Darstellung bedient sich sehr häufig der vektoriellen Schreibweise. Hierfür wird folgendes festgesetzt:
   a) Vektoren werden durch deutsche Buchstaben bezeichnet; zuweilen werden sie aber auch dargestellt als Differenz zweier Punkte. Also:



$$\mathfrak{a} = P - O.$$

   Einheitsvektoren werden durch kleine lateinische Buchstaben ($e_1\, e_2\, e_3$) bezeichnet.
   b) Das Zeichen für skalare Multiplikation ist $\times$; dasjenige für vektorielle Multiplikation ist $\wedge$.
   c) Rotationsvektoren werden folgendermaßen gezeichnet: Der Beobachter, der in Richtung des Rotationsvektors blickt, sieht die Rotation sich im Sinne des Uhrzeigers vollziehen. Ebenso werden Momentenvektoren so gezeichnet, daß die Kraft im Sinne des Uhrzeigers um den Momentenvektor dreht.
3. Die Lösungen der auftretenden einfachen Differentialgleichungen werden als bekannt vorausgesetzt.

II. Vorbemerkungen.

In diesem Abschnitte werden zwei Fragen erörtert, auf die die Rechnung erst später kommt, deren Behandlung an der betreffenden Stelle aber dann den Gang der Untersuchung stören würde.

1. Gegeben ist ein starrer Stab, der um einen festen Punkt S auf der Erdoberfläche drehbar ist. Welche Geschwindigkeit hat das Stabende P relativ zum Fixsternhimmel?

Zur Zeit $t = t_0$ befinde sich der Punkt S in der in Fig. 1 gezeichneten Lage; hierbei bedeutet φ die geographische Breite.

Vertikale und Tangenten am Breitenkreis und Meridian machen wir zu Achsen eines gegen den Fixsternhimmel festen Koordinatensystems $S'X'Y'Z'$. Zur Zeit $t = t_0$ fällt dieses System zusammen mit einem mit der Erde (und damit mit dem Punkte S) beweglichen System $SXYZ$.

Wir können unser Problem jetzt folgendermaßen aussprechen: Welche Bewegung führt das Stabende P aus bezüglich der durch $S'X'$ und $S'Y'$ bestimmten festen Horizontalebene und bezüglich einer durch $S'Z'$ gehenden festen Vertikalebene?

Wir denken uns nun den Stab, der in der X-Achse liegen soll, zunächst starr mit der Erdoberfläche verbunden, so daß er also keine Drehungen um S ausführt, sondern lediglich unter dem Einflusse der Erdrotation steht. Die Bewegung des Stabendes P ist dann ganz dieselbe wie die des Drehpunktes S, und die Bewegungsgleichungen beider Punkte sind gegeben durch: $\dot{P} = \dot{S} = \mathfrak{u} \wedge (S - O)$,

wobei $\mathfrak{u}$ den Vektor der Erdrotation bedeutet. Den Vektor $\mathfrak{u}$ zerlegen wir in Komponenten nach SY (Meridian) und SZ (Vertikale). Diese Komponenten sind $u \cdot \cos\varphi$ (nach SY) und $u \cdot \sin\varphi$ (nach SZ). Unter der Einwirkung der Komponente $u \cdot \sin\varphi$ rotiert die bewegliche Horizontalebene — und damit der Stab — um die im Raume feste Vertikale $S'Z'$. Unter dem Einflusse der Rotationskomponente nach dem Meridian ander-

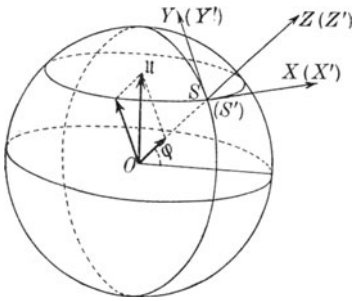


Fig. 1.

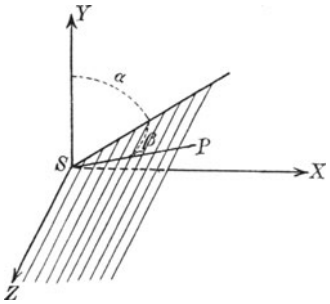


Fig. 2.

seits rotiert der Stab in der festen Vertikalebene — bestimmt durch $S'X'$ und $S'Z'$ — um die Achse $S'Y'$ mit einer Winkelgeschwindigkeit $u \cdot \cos\varphi$.

Nun soll aber der Stab nicht mehr die im Vorausgegangenen angenommene besondere Lage in der X-Achse haben, sondern er soll mit dem Meridian einen beliebigen Winkel α, mit der beweglichen Horizontal-

ebene aber einen — allerdings sehr kleinen — Winkel β bilden. Es sollen also Verhältnisse vorliegen, wie sie in Fig. 2 dargestellt sind.

In diesem Falle beträgt die Rotationsgeschwindigkeit in der durch Stab und $S'Z'$ bestimmten Vertikalebene $u \cdot \cos\varphi \cdot \sin\alpha$.

Ist ferner der Stab nicht mehr starr mit der Erdoberfläche verbunden, sondern hat er infolge einer Drehung um S die Relativgeschwindigkeit $\dot{\alpha}$ in der beweglichen Horizontalebene, so ist die absolute Geschwindigkeit des Stabendes P bezüglich der im Raume festen Achse $S'Z'$:

$$\dot{\psi} = \dot{\alpha} + u \cdot \sin\varphi. \tag{1 a}$$

Hat das Stabende P ebenso in der durch Stab und $S'Z'$ gehenden Vertikalebene die Relativgeschwindigkeit $\dot{\beta}$, so ist die absolute Geschwindigkeit $\dot{\beta}_0$ bezüglich der im Raume festen Achse $S'Y'$:

$$\dot{\beta}_0 = \dot{\beta} + u \cdot \cos\varphi \cdot \sin\alpha. \tag{1 b}$$

2. Entstehung und Sinn der Präzession bei der Kreiselbewegung. Besonders übersichtlich werden die in Frage stehenden Verhältnisse, wenn die folgende Versuchsanordnung (Fig. 3) vorliegt:

O ist ein fester Punkt der Kreiselachse (Aufhängepunkt). Der Kreisel K rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die in der Y'-Achse gelegene Figurenachse. Ist C das Trägheitsmoment des Kreisels um diese Achse, so ist der absolute Betrag des Drallvektors $\mathfrak{D}$ gegeben durch:

$$|\mathfrak{D}| = C\omega.$$

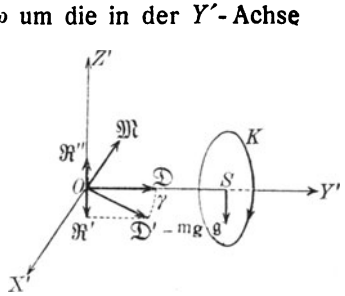


Fig. 3.

Der Vektor $\mathfrak{M}$ ist das nach der negativen X'-Achse zeigende Moment der Erdschwere ($-$ mg $\mathfrak{g}$), die im Schwerpunkte S des Kreisels angreift. Da nun um die Achse OZ' kein äußeres Kraftmoment wirkt, so muß die Komponente des Drallvektors nach dieser Richtung konstant, in unserm Falle also 0 sein. Ist demnach $\mathfrak{g}$ ein in der positiven Z'-Achse liegender Einheitsvektor, so muß dauernd folgende Gleichung gelten:

$$\mathfrak{D} \times \mathfrak{g} = C\omega \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Unter der Einwirkung der Erdschwere wird sich aber die Kreiselachse (und damit auch der Drallvektor) tatsächlich um den Winkel γ senken, wird also in die Lage $O\mathfrak{D}'$ kommen. Das bedeutet aber das Auftreten einer Drallkomponente $\mathfrak{R}'$ in der negativen Z'-Achse. Für diese Komponente $\mathfrak{R}'$ gilt folgende Gleichung:

$$|\mathfrak{R}'| = \mathfrak{D}' \times \mathfrak{g} = -C\omega \sin\gamma.$$

Da indessen die Drallkomponente nach der Z'-Achse dauernd 0 sein soll, so muß ein Drallvektor $\mathfrak{R}''$ in der positiven Z'-Achse von demselben absoluten Betrage wie $\mathfrak{R}'$ auftreten. Dann ist in der Tat immer:

$$\mathfrak{D} \times \mathfrak{g} = |\mathfrak{R}'| + |\mathfrak{R}''| = 0.$$

Dieses Auftreten des Vektors $\mathfrak{R}''$ bedeutet aber eine Rotation im Uhrzeigersinn um die Z'-Achse; d. h. der Kreisel führt eine Präzessionsbewegung senkrecht zur wirkenden äußeren Kraft aus. Zugleich erkennen wir aus Fig. 3 auch die Richtung dieser Präzessionsbewegung: Stellt man Kreiseldrall und äußeres Kraftmoment durch Vektoren dar, so präzessiert die Kreiselachse in dem Sinne, daß der Drallvektor auf kürzestem Wege parallel dem Vektor des äußern Kraftmomentes zu liegen kommt.

III. Grundprinzip des Kreiselkompasses.

Der Hauptbestandteil des Kreiselkompasses ist ein sehr rasch rotierender Kreisel mit zwei Freiheitsgraden. Der dritte Freiheitsgrad ist zwar nicht völlig aufgehoben, aber doch dadurch beschränkt, daß der Schwerpunkt des Kreisels tiefer liegt als sein Aufhängepunkt, daß also das Kreiselgewicht die Achse stets horizontal zu stellen sucht. Im wesentlichen liegt demnach eine Versuchsanordnung vor, wie sie in Fig. 4 angedeutet ist.

Die Achse eines so aufgehängten Kreisels erleidet unter der vereinigten Wirkung ihres Beharrungsvermögens, der Erdschwere und der Erddrehung ein Drehmoment, dessen Richtung sich aus folgender Betrachtung ergibt:

Angenommen, der Kreisel befinde sich am Äquator, und seine Achse zeige genau von West nach Ost. Infolge des Beharrungsvermögens der Kreiselachse, die sich im Raume parallel zu bleiben sucht, wird nun bei der Erddrehung von West nach Ost das nach Osten weisende Ende der Achse über die bewegliche Horizontalebene hinausgehoben. Hierdurch aber wird ein Drehmoment der Schwerkraft wirksam, unter dessen Einfluß sich die Kreiselachse so zu stellen sucht, daß sie (und damit der Drallvektor) parallel dem Moment der Erdschwere zu liegen kommt; oder anders ausgedrückt: die Kreiselachse sucht sich dem Rotationsvektor der Erde parallel zu stellen. Der Drallvektor, und mit ihm die Achse, dreht sich also nach dem Meridian, nach Norden.

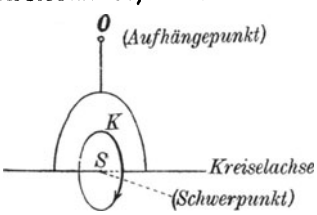


Fig. 4.

Sobald die Kreiselachse in der Tangente des Meridians liegt, befindet sich der Kreisel im Gleichgewicht; denn in dieser Lage bleibt die Achse

während der Erddrehung sowohl sich selbst parallel, wie es ihr Beharrungsvermögen erfordert, als auch horizontal, wie es die Schwerkraft verlangt.

Nicht ganz so einfach liegen die Verhältnisse auf der nördlichen oder südlichen Halbkugel ($\varphi \neq 0$). Auch hier wirkt wieder die Erddrehung in dem Sinne, daß sich der Rotationsvektor des Kreisels demjenigen der Erde parallel zu stellen sucht. Andererseits aber versucht die Schwerkraft, die Kreiselachse horizontal zu stellen. Erddrehung und Schwerkraft verlangen demnach die in der Figur 5 mit I und II bezeichneten Lagen der Achse:

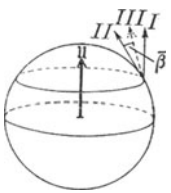


Fig. 5.

Lage I ist die durch die Erddrehung geforderte, Lage II die durch die Schwerkraft bedingte Stellung. Unter beiden Einwirkungen kommt eine Mittellage III in der Meridianebene zustande:

Die Kreiselachse zeigt nach Norden; aber das Nordende ist um einen solchen Winkel β über die Horizontalebene hinausgehoben, daß die infolgedessen wirksam werdende Schwerkraft eine Präzessionsbewegung erzeugt, die gerade hinreicht, um die Achse stets in der sich im Raume drehenden Meridianebene zu erhalten.

Befindet sich die Achse nicht in dieser Gleichgewichtslage, so führt sie Schwingungen um dieselbe aus, die wir sogleich näher kennen lernen werden. – Eine eingehendere Beschreibung des Apparates erfolgt erst, nachdem wir die Differentialgleichungen der eben skizzierten Kreiselbewegung abgeleitet haben.

IV. Ableitung der Differentialgleichungen für die ungedämpfte Kreiselbewegung.

$OX'Y'Z'$ ist ein im Raume festes Koordinatensystem. K ist ein um seine Figurenachse rotierender Körper, dessen Schwerpunkt S ist; e_1, e_2 und e_3 sind Einheitsvektoren, die in den Achsen eines mit dem beweglichen Körper K fest verbundenen Koordinatensystems liegen.

Das allgemeine Bewegungsgesetz lautet:

$$\dot{\mathfrak{D}} = \frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \mathfrak{M}, \tag{2}$$

wobei $\mathfrak{D}$ der Drallvektor, $\mathfrak{M}$ der Momentenvektor der äußeren Kräfte ist. In Worten besagt diese Gleichung folgendes: Die zeitliche Änderung des Drallvektors ist nach

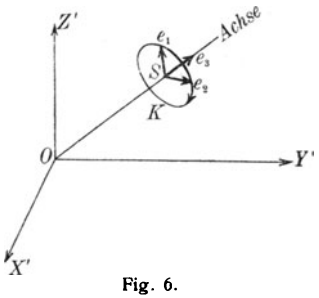


Fig. 6.

Größe und Richtung gleich dem Momentenvektor der äußeren Kräfte.

Sind nun P, Q und R die Komponenten des Drallvektors nach den beweglichen Achsen e_1, e_2 und e_3, so ist

$$\mathfrak{D} = Pe_1 + Qe_2 + Re_3.$$

Also:
$$\dot{\mathfrak{D}} = \dot{P}e_1 + \dot{Q}e_2 + \dot{R}e_3 + P\dot{e}_1 + Q\dot{e}_2 + R\dot{e}_3.$$

Sind dann ferner p, q und r die Komponenten des Rotationsvektors $\mathfrak{Q}$ nach den Achsen e_1, e_2 und e_3, so liefern die Poisson-Eulerschen Formeln:

$$\dot{e}_1 = re_2 - qe_3$$
$$\dot{e}_2 = pe_3 - re_1$$
$$\dot{e}_3 = qe_1 - pe_2.$$

Demnach kommt:

$$\dot{\mathfrak{D}} = (\dot{P} + Rq - Qr)e_1 + (\dot{Q} + Pr - Rp)e_2 + (\dot{R} + Qp - Pq)e_3 = \mathfrak{M}$$

oder aufgelöst in Komponentengleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{P} + Rq - Qr &= M_x \\ \dot{Q} + Pr - Rp &= M_y \\ \dot{R} + Qp - Pq &= M_z, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei M_x, M_y und M_z die auf e_1, e_2 und e_3 bezogenen Komponenten des äußeren Kraftmomentes $\mathfrak{M}$ sind. Zu einer einzigen Gleichung zusammengefaßt lauten die Gleichungen (3):

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{D}}{\mathrm{d}t} + \mathfrak{Q} \wedge \mathfrak{D} = \mathfrak{M},$$

wobei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ die Differentiation nach der Zeit innerhalb des Körpers andeutet und $\mathfrak{Q}$ der Rotationsvektor ist.

Wählen wir die im Körper festen Achsen – und damit die Einheitsvektoren e_1, e_2 und e_3 – parallel den Hauptachsen des Trägheitsellipsoides für den Kreiselkörper K bezüglich des festen Punktes O, und sind ferner A, B und C die Trägheitsmomente für diese Hauptachsen, so lautet der Ausdruck für die kinetische Energie T:

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

Hieraus ergeben sich die Drallkomponenten:

$$P = \frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial p} = Ap; \quad Q = \frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial q} = Bq; \quad R = \frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial r} = Cr.$$

Damit gehen die Gleichungen (3) über in die bekannten Eulerschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= M_x \\ B\dot{q} + (A - C)rp &= M_y \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= M_z. \end{aligned} \tag{4}$$

Endlich legen wir ein neues Koordinatensystem $e_1' e' e_3'$ (Fig. 7) zugrunde:

Die neue Achse e_3 bleibt also zwar der Achse e_3 (Kreiselachse) parallel; aber die beiden anderen Achsen — e_2' und e_1' — ruhen nicht mehr relativ zum Körper (wie die e_1 und e_2), sondern sie rotieren innerhalb des Körpers mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit r'' um die Achse. Die Komponenten des Rotationsvektors Ω nach diesen neuen Achsen sind mit denjenigen nach den alten Achsen (e_1, e_2, e_3) durch folgende Beziehungen verbunden:

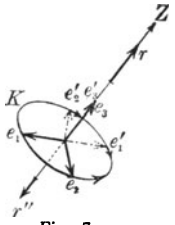


Fig. 7.

$$p' = p; \qquad q' = q; \qquad r' = r - r''.$$

Führen wir die Komponenten p', q' und r' in die Gleichungen (3) ein, so lauten diese:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (Cr - Br')q &= M_{x'} \\ B\dot{q} + (Ar' - Cr)p &= M_{y'} \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= M_{z'}, \end{aligned} \tag{5}$$

wobei die $M_{x'}$, $M_{y'}$ und $M_{z'}$ die auf die Achsen $e_1' e_2' e_3'$ bezogenen Komponenten des äußeren Kraftmomentes sind.

Wir machen an dieser Stelle eine erste vereinfachende Annahme. Wir werden weiter unten sehen, daß bei dem Kreiselkompaß folgende Verhältnisse vorliegen: Die Eigenrotation ω des Kreisels um seine Achse ist so groß, daß ihr gegenüber alle anderen etwa noch auftretenden Rotationen um die Achse vernachlässigt werden können.

Die Rotationskomponente r kann demnach dauernd gleich ω gesetzt werden. Dieser Größe ω gegenüber sind auch die beiden anderen Komponenten p und q sehr klein. Da ferner die Trägheitsmomente A und B nicht allzusehr voneinander verschieden sind, so kann das Glied $(B - A)pq$ der dritten Gleichung (5) vernachlässigt werden. Da ein Drehmoment der Erdschwere um die Kreiselachse nicht vorhanden ist, so lautet die erwähnte dritte Gleichung einfach:

$$C\dot{\omega} = 0,$$

d. h.

$$C\omega = \text{const.}$$

In der Tat sorgt die elektrische Antriebsvorrichtung des Kreisels für eine konstante Rotation um die Figurenachse. Diese Eigenrotation ω ist zudem so groß (20 000—25 000 Umdrehungen in der Minute), daß ihr gegenüber gewisse minimale Veränderungen vernachlässigt werden können.

Wir behandeln also weiterhin streng nur noch die beiden ersten Gleichungen (5):

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C\omega - Br')q &= M_{x'}, \\ B\dot{q} + (Ar' - C\omega)p &= M_{y'}. \end{aligned} \tag{5a}$$

Wir führen nun die bekannten Eulerschen Winkel φ, ψ und ϑ ein. Eine Verwechslung mit der früher eingeführten geographischen Breite φ wird nicht stattfinden, da es uns gelingen wird, den Eulerschen Winkel φ wieder zu eliminieren.

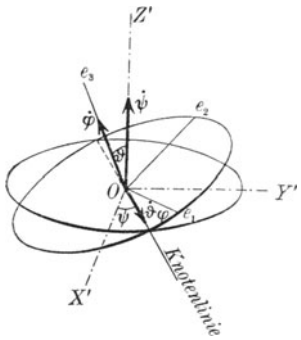


Fig. 8.

Figur 8 zeigt den Zusammenhang der Eulerschen Winkel mit dem im Körper ruhenden Koordinatensystem $(e_1 e_2 e_3)$. Die Vektoren $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ und $\dot{\vartheta}$ sind hierbei die den Eulerschen Winkeln entsprechenden Rotationsvektoren.

Der Zusammenhang zwischen den Rotationskomponenten p, q und r (nach e_1, e_2, e_3) und den neuen Rotationsvektoren $\dot{\varphi}$ $\dot{\psi}$ und $\dot{\vartheta}$ ergibt sich aus der unmittelbaren geometrischen Anschauung:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin\vartheta \sin\varphi + \dot{\vartheta} \cos\varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin\vartheta \cos\varphi - \dot{\vartheta} \sin\varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos\vartheta \qquad\quad + \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Führen wir das in Fig. 7 gezeichnete System e_1', e_2', e_3' ein, so brauchen wir in den obigen Gleichungen linker Hand nur p', q', $r' + r''$ zu schreiben.

Es steht uns nun noch vollkommen frei, in

$$r' = r - r''$$

über die Größe r'' — also über die Rotationsgeschwindigkeit der Achsen e_1' und e_2' innerhalb des Körpers — zu verfügen. Machen wir sie gleich $\dot{\varphi}$, so kommt:

$$r' = r - r'' = \dot{\psi} \cos\vartheta.$$

Durch die Festsetzung $r'' = \dot{\varphi}$ erreichen wir, daß die Achsen e_1' und e_2' mit der Knotenlinie dauernd einen konstanten Winkel bilden. Die Rotationskomponenten p', q', r' aber lauten jetzt:

$$\begin{aligned} p' &= \dot{\psi} \sin\vartheta \sin\varphi + \dot{\vartheta} \cos\varphi, \\ q' &= \dot{\psi} \sin\vartheta \cos\varphi - \dot{\vartheta} \sin\varphi, \\ r' &= \dot{\psi} \cos\vartheta. \end{aligned}$$

Die Größe $\dot{\varphi}$ tritt also überhaupt nicht mehr auf, und wir können für den Winkel φ einen beliebigen Anfangswert wählen; insbesondere können wir $\varphi = 0$ annehmen. Damit erreichen wir, daß die Achse e_1' unseres Koordinatensystems dauernd mit der Knotenlinie zusammenfällt. Mit der Annahme $\varphi = 0$ kommt aber für die Rotationskomponenten:

$$\begin{aligned} p' &= p = \dot{\vartheta}, \\ q' &= q = \dot{\psi} \sin\vartheta, \\ r' &= \qquad\quad \dot{\psi} \cos\vartheta. \end{aligned}$$

Das Moment der Schwerkraft ($\mathfrak{M}$) fällt in die Knotenlinie. Ist a die Entfernung des Aufhängepunktes vom Schwerpunkte, so lauten die Komponenten dieses Momentes:

$$M_{x'} = \mathrm{mg} \cdot a \cdot \sin\vartheta,$$
$$M_{y'} = 0,$$
$$M_{z'} = 0.$$

Damit gehen endlich die Gleichungen (5a) über in:

$$(6) \qquad \begin{aligned} &A\ddot{\vartheta} + C\omega\dot{\psi}\sin\vartheta - B\dot{\psi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta = \mathrm{mg}\,a\sin\vartheta, \\ &B(\ddot{\psi}\sin\vartheta + \dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta) + A\dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta - C\omega\dot{\vartheta} = 0. \end{aligned}$$

Es ist gut, an dieser Stelle nochmals die Bedeutung der Größen A, B und C klarzustellen: A ist das Trägheitsmoment um die horizontale Knotenlinie; C ist das Trägheitsmoment um die Figurenachse, die beim Kreiselkompaß ebenfalls annähernd horizontal liegt; B ist demnach das Trägheitsmoment um die Schwerelinie (Aufhänge- — Schwerpunkt).

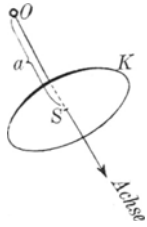


Fig. 9a.

Bis hierher haben wir eine Versuchsanordnung zugrunde gelegt, wie sie in Fig. 9a angedeutet ist. In Wirklichkeit liegt aber beim Kreiselkompaß eine andere Anordnung (Fig. 9b) vor. Die Kreiselachse ist also hier um 90° gedreht. Nennen wir den Winkel, den sie mit der im Raume festen Vertikalen bildet, wieder ϑ, so ändert sich in den Gleichungen (6) nur der Ausdruck für das Moment der Schwerkraft. Der Wert $M_{x'} = \mathrm{mg}\,a\sin\vartheta$ geht über in $M_{x'} = \mathrm{mg}\,a\sin(90-\vartheta) = \mathrm{mg}\,a\cos\vartheta$. Setzen wir jetzt $(90-\vartheta) = \beta_0$, so bezeichnet β_0 die Erhebung der Kreiselachse über die im Raume feste Horizontalebene (bestimmt durch die X'- und Y'-Achse).

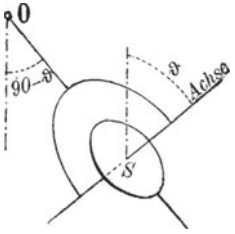


Fig. 9b.

Führen wir jetzt wieder das mit der Erde bewegliche Koordinatensystem XYZ ein, so ändert sich der Wert für das Moment der Schwerkraft abermals; denn dieser Wert hängt nicht ab von dem Erhebungswinkel β_0 der Kreiselachse über die feste, sondern von dem Erhebungswinkel β über die mit der Erde bewegliche Horizontalebene. Infolgedessen müssen wir für das Moment der Schwerkraft den Wert $\mathrm{mg}\,a\sin\beta$ einführen.

Damit gehen die Gleichungen (6) endlich über in:

$$(7) \qquad \begin{aligned} &-A\ddot{\beta}_0 + C\omega\dot{\psi}\cos\beta_0 - B\dot{\psi}^2\sin\beta_0\cos\beta_0 = \mathrm{mg}\,a\sin\beta, \\ &B(\ddot{\psi}\cos\beta_0 - \dot{\psi}\dot{\beta}_0\sin\beta_0) - A\dot{\psi}\dot{\beta}_0\sin\beta_0 + C\omega\dot{\beta}_0 = 0. \end{aligned}$$

V. Vereinfachung und Integration der obigen Differentialgleichungen.

Bis hierher sind die Gleichungen streng behandelt worden. Sollen sie nun weiterhin für die besonderen Zwecke des Kreiselkompasses nutzbar gemacht werden, so müssen gewisse Vernachlässigungen von Gliedern höherer Ordnung eintreten.

1. Es können z. B. vernachlässigt werden solche Glieder, die Produkte sehr kleiner Größen sind. Da beim Kreiselkompaß die Erhebung β_0 der Kreiselachse über die Horizontalebene sehr klein ist, da ferner die Präzessionsgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ ebenfalls sehr gering ist, so können die Glieder $\dot{\psi}^2 \sin\beta_0$ und $\dot{\psi}\dot{\beta}_0 \sin\beta_0$ weggelassen werden, und mit $\sin\beta_0 = \beta_0$ und $\cos\beta_0 = 1$ ergeben sich dann folgende Gleichungen:

$$\text{(7a)} \qquad \begin{aligned} mg\,a\,\beta + A\ddot{\beta}_0 - C\omega\dot{\psi} &= 0, \\ B\ddot{\psi} + C\omega\dot{\beta}_0 \qquad &= 0. \end{aligned}$$

2. Noch radikaler ist die folgende Behandlung der Gleichungen (7): Auf der linken Seite der Gleichungen (7) werden alle diejenigen Glieder vernachlässigt, die nicht den Faktor $C\omega$ enthalten. In der Tat ist ja infolge des sehr großen ω (20000 Umdrehungen!) das Glied $C\omega$ ausschlaggebend. Bei dieser Behandlung der Gleichungen (7) kommt:

$$\text{(7b)} \qquad \begin{aligned} C\omega\dot{\psi} &= mg\,a\,\beta, \\ C\omega\dot{\beta}_0 &= 0. \end{aligned}$$

Diese letzte Form der Kreiselgleichungen ist besonders wichtig. Wir werden weiter unten darlegen, daß wir die Gleichungen (7 b) direkt anschreiben können, ohne den Umweg über die Eulerschen Gleichungen zu machen.

Wir schreiten nun zur Integration der Gleichungen (7a) und (7b).

3. Die in (7a) auftretenden Größen $\dot{\psi}$ und $\dot{\beta}_0$ sind bezogen auf das im Raume feste Koordinatensystem $X'Y'Z'$ (Fig. 8). Wollen wir das in Abschnitt II, 1 erwähnte System XYZ, das mit der Erde beweglich ist, wieder einführen, so ist nach den Gleichungen (1 a) und (1 b) zu setzen:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \dot{\alpha} + u \sin\varphi, \\ \dot{\beta}_0 &= \dot{\beta} + u \cos\varphi \cdot \sin\alpha. \end{aligned}$$

Hierin bedeutet also α den Winkel, den die Kreiselachse mit dem Meridian bildet, β aber ihren Erhebungswinkel über die bewegliche Horizontalebene. Führen wir diese Werte ein, so kommt mit $C\omega = J$ und $\sin\alpha = \alpha$ (kleine Winkel α!):

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} mg\,a\,\beta + A\ddot{\beta} - J(\dot{\alpha} + u \sin\varphi) &= 0, \\ B\ddot{\alpha} + J(\dot{\beta} + u \cos\varphi \cdot \alpha) \qquad &= 0. \end{aligned}$$

Elimination der Größe β und ihrer Ableitungen liefert die folgende Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$(8^*)\quad AB\frac{d^4\alpha}{dt^4} + (J^2 + B\,\mathrm{mg}\,a + JAu\cos\varphi)\frac{d^2\alpha}{dt^2} + J\,\mathrm{mg}\,au\cos\varphi\cdot\alpha = 0,$$

oder mit leicht ersichtlicher Abkürzung:

$$l\frac{d^4\alpha}{dt^4} + m\frac{d^2\alpha}{dt^2} + n\alpha = 0.$$

Mit dem Ansatze $\alpha = \alpha_0 e^{\varkappa t}$ folgt hieraus für $\varkappa$ die Gleichung:

$$l\varkappa^4 + m\varkappa^2 + n = 0.$$

Weiter kommt:

$$\varkappa^2 = -\frac{m}{2l} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4l^2} - \frac{n}{l}}$$

$$= -\frac{m}{2l} \pm \frac{m}{2l}\sqrt{1 - \frac{4nl}{m^2}}.$$

Entwickeln wir die Wurzel in eine Reihe, so kommt:

$$\varkappa^2 = -\frac{m}{2l}\left[1 \mp \left(1 - \frac{2nl}{m^2} + \cdots\right)\right].$$

Demnach:

$$\varkappa_1^2 = -\frac{n}{m} \quad \text{und} \quad \varkappa_2^2 = -\frac{m}{l}.$$

Ersetzen wir die l, m, n wieder durch die ursprünglichen Größen, so ergibt sich:

$$(9)\quad \begin{aligned} \varkappa_1^2 &= -\frac{J\cdot\mathrm{mg}\,au\cos\varphi}{J^2 + B\,\mathrm{mg}\,a + JAu\cos\varphi}, \\ \varkappa_2^2 &= -\frac{J^2 + B\,\mathrm{mg}\,a + JAu\cos\varphi}{AB}. \end{aligned}$$

Nachdem wir $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ kennen, können wir das allgemeine Integral der Differentialgleichung (8*) anschreiben. Es ist von der Form:

$$(8\,\mathrm{a})\quad \alpha = \alpha_1 \sin(i\varkappa_1 t + \gamma_1) + \alpha_2 \sin(i\varkappa_2 t + \gamma_2).$$

Diese Gleichung stellt nichts anderes dar als zwei sich überlagernde Schwingungen, deren Schwingungsdauern gegeben sind durch folgende Ausdrücke:

$$(8\,\mathrm{b})\quad \begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{i\varkappa_1} = 2\pi\sqrt{\frac{J^2 + B\,\mathrm{mg}\,a + JAu\cos\varphi}{J\,\mathrm{mg}\,au\cos\varphi}}, \\ T_2 &= \frac{2\pi}{i\varkappa_2} = 2\pi\sqrt{\frac{AB}{J^2 + B\,\mathrm{mg}\,a + JAu\cos\varphi}}. \end{aligned}$$

Da in den Gleichungen (8 b) das Glied $J^2 = C^2\omega^2$ ausschlaggebend ist, so sehen wir, daß die erste Schwingung eine außerordentlich lange, die zweite aber eine sehr kurze Schwingungsdauer hat. Im übrigen mußten ja die Gleichungen (8) auf zwei sich überlagernde Schwingungen führen; denn jene Gleichungen stellen nichts anders dar als ein System

von gekoppelten Schwingungen, wobei die Koppelungsglieder gegeben sind durch $\dot{\alpha}$ und $\dot{\beta}$. Natürlich können wir die Gleichung (8a) auch deuten als die langsam verlaufende Präzession ($\dot{\alpha}$) des Kreisels, die überlagert ist von einer sehr raschen Nutation. Die Kreiselachse pendelt also unter schwachen Erzitterungen, die von der raschen Nutationsschwingung herrühren, langsam um ihre Ruhelage in der Meridianebene. Bei den in Gebrauch befindlichen Kreiselkompassen liegen die Verhältnisse so, daß die Schwingungsdauer T_1 ungefähr 45 Minuten beträgt, während die kurze Schwingungsdauer T_2 den Betrag von $^1/_{100}$ Sekunde kaum überschreitet.

4. Wir können die Vereinfachung der Gleichungen (8) noch dadurch weiter treiben, daß wir das Glied mit $\ddot{\beta}$ vernachlässigen. Der Winkel β — der Erhebungswinkel der Kreiselachse über die Horizontalebene — ist so klein, daß $\ddot{\beta}$ nur durch sehr schnelle Änderungen von $\dot{\beta}$, also nur durch sehr schnelle Nutationsbeschleunigungen größere Werte annehmen kann. Da aber derartige Beschleunigungsdrücke den Kompaß in kurzer Zeit zerstören würden, so ist es ganz klar, daß die Konstruktion des Apparates diese Beschleunigungen auf ein Minimum beschränken muß, so daß in der Tat in den Gleichungen (8) das Glied mit $\ddot{\beta}$ vernachlässigt werden kann.

Damit gehen die Gleichungen (8) in die folgenden über:

$$\text{(10)} \qquad \begin{aligned} mg\,a\beta - J(\dot{\alpha} + u\sin\varphi) &= 0, \\ B\ddot{\alpha} + J(\dot{\beta} + u\cos\varphi\cdot\dot{\alpha}) &= 0. \end{aligned}$$

Elimination von β und $\dot{\beta}$ liefert:

$$\begin{vmatrix} mg\,a & -J\ddot{\alpha} \\ J & B\ddot{\alpha} + Ju\cos\varphi\cdot\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Ausgeführt:

$$\text{(10*)} \qquad \left(\frac{J^2}{mg\,a} + B\right)\ddot{\alpha} = -J\,u\cos\varphi\cdot\alpha.$$

Das ist aber die bekannte Differentialgleichung für die harmonischen Schwingungen. Ihr Integral ist von der Form:

$$\text{(10a)} \qquad \alpha = \alpha_0 \sin(\varkappa t),$$

wobei

$$\varkappa = \sqrt{\frac{Ju\cos\varphi}{\frac{J^2}{mg\,a} + B}}.$$

Die Schwingungszeit ist demnach gegeben durch:

$$\text{(10b)} \qquad T = \frac{2\pi}{\varkappa} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{J^2}{mg\,a} + B}{J\,u\cos\varphi}}.$$

Der Ausdruck $B' = \frac{J^2}{mg\,a} + B$ ist hiernach das scheinbare Trägheitsmoment unsers Kreisels.

Das natürliche Trägheitsmoment B ist vergrößert um einen Betrag, der vom Drall des Kreisels abhängt. Solange aber a — die Entfernung zwischen Aufhänge- und Schwerpunkt — nicht allzu groß wird, ist der Wert B demjenigen von $\frac{J^2}{mg\,a} = \frac{C^2\omega^2}{mg\,a}$ gegenüber vollkommen zu vernachlässigen.

Unter dieser Annahme lautet dann die Schwingungsperiode:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J^2}{mg\,a \cdot J u \cos\varphi}}.$$

Zu demselben Werte würden wir gelangt sein, wenn wir von den Gleichungen (7 b) ausgegangen wären.

Damit sind wir auf die radikalste Art der Behandlung der Differentialgleichungen (7) gekommen, jene Art, die darin besteht, auf den linken Seiten der genannten Differentialgleichungen überhaupt nur Ausdrücke stehen zu lassen, die den Faktor $J = C\omega$ enthalten.

In diesem Falle ergeben sich eben die bereits angeschriebenen Gleichungen (7 b). Die zweite dieser Gleichungen liefert:

$$\dot{\beta}_0 = 0,$$

d. h.

$$\beta_0 = \text{const.}$$

Legen wir also der weiteren Rechnung die Gleichungen (7 b) zugrunde, so ist das gleichbedeutend mit der Annahme, daß beim Kreiselkompaß eine nutationsfreie Bewegung stattfindet.

5. Machen wir die obige Annahme von vornherein, so können wir allerdings auch die Gleichungen (7 b) sofort anschreiben, ohne erst den langen Umweg über die Eulerschen Gleichungen machen zu müssen. Wir schreiben dann nämlich erstens das wohlbekannte Grundgesetz der Kreiselbewegung an: Der Kreiselwiderstand ist gleich dem äußeren Kraftmoment. In Formeln:

$$C\omega\dot{\psi} = mg\,a\beta.$$

Und zweitens drücken wir aus, daß die Bewegung nutationsfrei sein soll:

$$\dot{\beta}_0 = 0.$$

Führen wir das in Abschnitt II, 1 erwähnte Koordinatensystem XYZ, das mit der Erde beweglich ist, ein, so kommt unter Benützung der Formeln (1 a) und (1 b) für kleine Winkel α:

$$(11) \qquad \begin{aligned} J(\dot{\alpha} + u\sin\varphi) &= mg\,a\beta, \\ \dot{\beta} + u\cos\varphi \cdot \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Elimination von β und $\dot{\beta}$ liefert:

$$\frac{J}{\mathrm{mg}\,a}\,\ddot{\alpha} + u\cos\varphi\cdot\alpha = 0. \tag{11*}$$

Die Lösung dieser wohlbekannten Differentialgleichung lautet:

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\varkappa t), \tag{11a}$$

wobei:

$$\varkappa = \sqrt{\frac{u\cos\varphi}{J/\mathrm{mg}\,a}} = \sqrt{\frac{J\,u\cos\varphi}{J^2/\mathrm{mg}\,a}} = \sqrt{\frac{R}{M}}. \tag{11b}$$

Wir haben also folgende Ausdrücke eingeführt:

$$R = J\,u\cos\varphi = \text{Richtkraft des Kreisels},$$

$$M = \frac{J^2}{\mathrm{mg}\,a} \quad = \text{scheinbare Masse des Kreisels.}$$

Die Periode der durch (11*) dargestellten Schwingung ist:

$$T = \frac{2\pi}{\varkappa} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{R}} = \frac{2\pi}{\sqrt{u\cos\varphi}}\cdot\sqrt{\frac{J}{\mathrm{mg}\,a}}.$$

Führen wir diese Schwingungszeit T ein, so können wir das Integral von (11*) schreiben:

$$\alpha = \alpha_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

Differentiation und Einsetzen der so gewonnenen Größe $\dot{\alpha}$ in die erste Gleichung (11) liefert sofort:

$$\beta = \frac{J}{\mathrm{mg}\,a}\left(\alpha_0\frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t + u\sin\varphi\right).$$

Als Lösungssystem der Gleichungen (11) erhalten wir somit:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 \sin\frac{2\pi}{T}t, \\ \beta &= \frac{J}{\mathrm{mg}\,a}\left(\alpha_0\frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t + u\sin\varphi\right). \end{aligned} \tag{11c}$$

Aus diesen Gleichungen ziehen wir einige Folgerungen:

a) Das graphische Bild der Gleichungen (11c) erhalten wir, indem wir die Größen α als Abszissen x und die β als Ordinaten y auftragen. Setzen wir ferner noch $\frac{J}{\mathrm{mg}\,a}\,u\sin\varphi = \bar{\beta}$, so liefert Elimination des Winkels $\frac{2\pi}{T}t$ folgende Gleichung:

$$\left(\frac{x}{\alpha_0}\right)^2 + \left[\frac{\mathrm{mg}\,a\,T}{2\pi J\alpha_0}(y-\bar{\beta})\right]^2 = 1.$$

Das ist aber eine Ellipse, deren Halbachsen α_0 und $\frac{2\pi J\alpha_0}{\mathrm{mg}\,a\,T}$ sind und deren Mittelpunkt N vom Koordinatenanfang O um $\bar{\beta} = \frac{J}{\mathrm{mg}\,a}\,u\sin\varphi$ auf der

positiven y-Achse entfernt ist. Das zeichnerische Bild ist demnach folgendes: siehe Fig. 10.

Das Nordende der Kreiselachse schwingt in der gezeichneten Ellipse um die Mittellage N herum.

b) Beginnt die Schwingung mit der Anfangsamplitude α_0, so bleibt die Schwingung dauernd erhalten. Einer Ruhelage im Punkte N entspricht also nur eine Anfangsamplitude $\alpha_0 = 0$; d. h. die Kreiselachse muß sich von Anfang an im Meridian befinden. Für $\alpha_0 = 0$ ergibt sich aber für den Winkel β der Wert:

$$\beta = \frac{J}{mg\,a}\, u \sin\varphi = \overline{\beta}.$$

In der Ruhelage bildet also die Kreiselachse den schon in Abschnitt III erwähnten Winkel $\overline{\beta}$ mit der Horizontalebene. Dieser Winkel ist 0 nur am Äquator (wegen $\varphi = 0$).

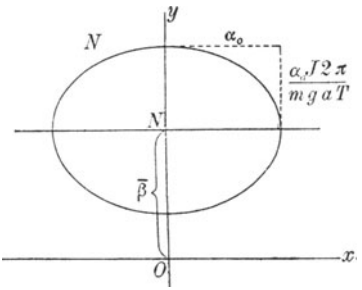


Fig. 10.

c) Es ist selbstverständlich, daß solche ungedämpfte Schwingungen den praktischen Bedürfnissen nicht entsprechen, und die Notwendigkeit geeigneter Dämpfungsvorrichtungen tritt klar zutage.

d) Eine weitere theoretische Behandlung unseres Gegenstandes ohne ein Eingehen auf gewisse technische Einzelheiten ist darum unmöglich, und wir schalten deshalb einen Abschnitt über die geschichtliche Entwicklung und über die wesentlichen Bestandteile des Einkreiselkompasses ein.

VI. Beschreibung des Einkreiselkompasses.

1. Geschichtliches. Bereits Foucault hatte aus seinen bekannten Pendelversuchen gefolgert, daß ein Kreisel mit drei Freiheitsgraden genau so wie das Pendel die Rotation der Erde anzeigen müsse, da seine Achse ihre Lage im Weltenraume beibehält. Er konnte jedoch den experimentellen Beweis für diese Annahme nicht führen, da er nicht die Mittel hatte, einen Kreisel stundenlang mit gleichmäßiger Geschwindigkeit in Betrieb zu halten. Ferner wies Foucault darauf hin, daß ein Kreisel mit zwei Freiheitsgraden sich selbsttätig in den Meridian einstellen muß, falls er nur in der Horizontalebene beweglich ist, daß also ein solcher Kreisel sehr wohl zur Orientierung auf der Erde zu benutzen sei.

Im Anschlusse an diese Gedanken wurden dann um das Jahr 1880 herum durch die Kriegsmarinen von Frankreich, England und Holland eingehende Versuche mit dem Rotationskompaß angestellt. Über ihr Ergebnis ist wenig an die Öffentlichkeit gekommen; jedenfalls haben sie nicht zur Einführung des Rotationskompasses geführt.

Nachdem dann auch in Deutschland um das Jahr 1890 herum Versuche unter der Leitung von Werner v. Siemens stattgefunden hatten, wurden die Foucaultschen Ideen um das Jahr 1900 von Herrn Dr. Anschütz in Kiel wieder energisch aufgegriffen. Die immer größer werdenden Eisenmassen an Bord der Kriegsschiffe, später dann vor allem die hochgespannten elektrischen Ströme im Innern der U-Boote machten den Gebrauch des Magnetkompasses fast unmöglich. Herr Dr. Anschütz konstruierte darum zunächst seinen Azimutkreisel. Das ist ein Kreisel mit drei Freiheitsgraden. Aufhänge- und Schwerpunkt fallen also zusammen. Wird ein solcher Kreisel im Hafen in Betrieb gesetzt, wird dann ferner die Lage der Kreiselachse nach Richtpunkten am Ufer bestimmt, so muß man allerdings einen festen Richtungsweiser für die Fahrt des Schiffes auf hoher See haben, da ja die Kreiselachse ihre Lage beibehält. Im Jahre 1904 wurden auf S. M. S. Undine die ersten Versuche mit diesem Azimutkreisel angestellt. Sie führten jedoch aus folgenden Gründen zu keinem befriedigenden Ergebnis:

a) Es ist sehr schwierig, den Kreisel im vollkommen indifferenten Gleichgewicht aufzuhängen. Daß das überhaupt möglich ist, wird immer noch von Praktikern bestritten.

b) Man war nie sicher, ob die Kreiselachse nicht doch durch gewaltsame äußere Einflüsse ihre Lage geändert hatte.

c) Wenn auf hoher See die Antriebsvorrichtung des Kreisels auch nur auf kurze Zeit außer Betrieb kam, so hatte man kein Mittel, die Lage der Achse nach Wiederantrieb aufs neue zu bestimmen; es sei denn, daß man hierzu den Magnetkompaß benutzte; aber den wollte man ja gerade ausschalten.

Infolgedessen konstruierte Dr. Anschütz den Meridiankreisel. Das ist ein Kreisel mit zwei vollen Freiheitsgraden.

Der dritte Freiheitsgrad wird durch die Schwerkraft dadurch annähernd beseitigt, daß Aufhänge- und Schwerpunkt nicht zusammenfallen, sondern um einen gewissen, allerdings nur ganz geringen Betrag auseinander liegen.

Welche Faktoren dann endlich die weitere Entwicklung von diesem Meridian- oder Einkreiselkompaß zum Dreikreiselkompaß bedingten, davon wird in Abschnitt IX die Rede sein.

2. Beschreibung des Einkreiselkompasses. Die folgende Figur zeigt die wichtigsten Teile des Einkreiselkompasses.

B ist das Kreiselgehäuse, das den Kreisel *Kr* einschließt. Es wird von einem Schwimmkörper *S* getragen, der in einem mit Quecksilber gefüllten Kessel *Ke* schwimmt. Hierdurch werden die in Fig. 4 angedeuteten Versuchsbedingungen verwirklicht; denn der Schwerpunkt des Kreisels liegt in der Tat tiefer als der Auftriebsmittelpunkt, der in diesem Falle als Aufhängepunkt des ganzen Systems anzusehen ist. Fest verbunden

mit dem schwimmenden System ist die Kompaßrose R, die also alle Bewegungen der Kreiselachse mitmacht. G ist ein Glasdeckel, durch den hindurch man Rose und Steuerstrich beobachten kann. L sind zwei Libellen auf der Rose, die so aufgemacht sind, daß sie bei dem früher erwähnten Winkel β in der Mittellage sind. [Ist nämlich $\beta = \bar{\beta}$, so ist nach (11 c) $\dot{\alpha} = 0$; d. h. die Kreiselachse hat sich eingeschwungen, ist zur Ruhe gekommen.] Durch den Glasdeckel geht eine Zentrierstange St, die mit ihrer Spitze in einen mit Quecksilber gefüllten Kessel taucht und das seitliche Wegschwimmen des Systems verhindert. Durch diese Zentrierstange wird dem Kreiselmotor Phase I des Drehstromes zugeführt. Die zweite Phase wird durch das konzentrische Rohr F zugeführt, während die dritte Phase direkt an das Kreiselgehäuse B angeschlossen ist. D ist eine Dämpfungsvorrichtung, die wir sogleich näher kennen lernen werden. Das ganze System ist an Spiralfedern Sp kardanisch aufgehängt. Der Kreisel macht 20 000–25 000 Umdrehungen in der Minute. Damit der Schwerpunkt des Kreisels in die Rotationsachse zu liegen kommt, verwendet man flexible Achsen. Von Nachdrehmotor und Tochterkompaß werden wir in Abschnitt XI zu sprechen haben.

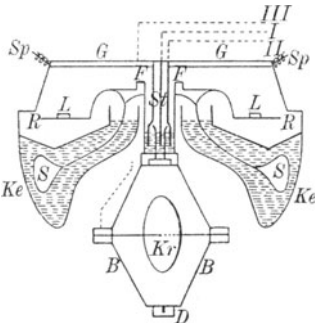


Fig. 11.

VII. Dämpfungsvorrichtungen beim Einkreiselkompaß.

Die Betrachtung der Differentialgleichungen eines Kreisels mit zwei Freiheitsgraden hatte das Auftreten ungedämpfter Schwingungen gezeigt, und wir hatten darum die Notwendigkeit geeigneter Dämpfungsvorrichtungen erkannt.

Aus den Gleichungen (11 c) leiten wir die folgenden ab:

$$\dot{\alpha} = \alpha_0 \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

(11 d)

$$\beta = \frac{J}{\mathrm{m}\,g\,a} \dot{\alpha} + \bar{\beta}.$$

Hieraus folgt: Ist $\beta = \beta = \frac{J u \sin \varphi}{\mathrm{m}\,g\,a}$, so ist $\dot{\alpha} = 0$. Solange aber $\beta \lessgtr \bar{\beta}$, ist $\dot{\alpha} \neq 0$. Daraus geht aber das Grundprinzip aller Dämpfungsvorrichtungen klar hervor: Wenn es gelingt, die Schwankungen des Winkels β – das sind die Schwankungen um die $O-W$-Linie – zu dämpfen, dann wird damit automatisch auch die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha}$ gedämpft.

Eine gewisse unmittelbare Dämpfung der Bewegung $\dot{\alpha}$ bietet natürlich bereits die Reibung des Schwimmkörpers S im Quecksilber. Doch

reicht diese Dämpfung infolge der großen Schwingungsdauer (45 Minuten) bei weitem nicht aus.

Eine viel energischere Dämpfung erreicht man durch folgende Anordnung: Am Kreiselgehäuse schwingt ein Pendel *d*, das unten eine Platte *c* trägt, die in der Mittellage des Systems vor einer Düsenöffnung hängt und zu beiden Seiten gleiche Öffnungen *a* und *b* freiläßt. Der rotierende Kreisel wirkt als Zentrifugalpumpe, indem er bei *G* die Luft einsaugt und durch die Düsenöffnungen wieder herauspreßt. Die folgende Figur zeigt diese Einrichtung von Westen her gesehen.

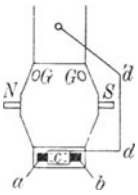


Fig. 12.

Die bei *a* und *b* austretenden Luftströme bewirken infolge ihrer Reaktionskräfte so lange kein Drehmoment um die Vertikale (Schwerelinie), als die Öffnungen *a* und *b* gleich sind. Wird aber das System aus der Horizontalebene herausgehoben, indem es Schwingungen um die $O-W$-Linie ausführt, so bleibt die Platte *c* senkrecht hängen, während sich die Düse verschiebt. Hierdurch werden die Öffnungen *a* und *b* ungleich groß, infolgedessen auch die austretenden Luftströme mit ihren Reaktionskräften. Es wird also ein Drehmoment um die Vertikale auftreten, dessen Wirkung sich aus folgender Betrachtung ergibt:

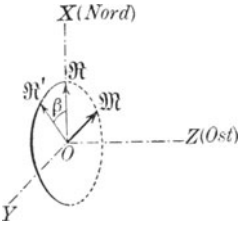


Fig. 13.

OX ist die Nord-, OZ die Ostrichtung, OY ist die Vertikale, aus der Papierebene heraus gegen den Leser gerichtet. $O\mathfrak{R}$ ist der Drallvektor des Kreisels (Kreiselachse). Es sei nun die Achse einer kleinen Schwankung um die $O-W$-Richtung unterworfen, sei also in die Lage $O\mathfrak{R}'$ gekommen. Sie liegt also jetzt immer noch in der XY-Ebene, bildet aber mit der X-Achse den Winkel β. Das Nordende der Kreiselachse ist also über die Horizontalebene emporgehoben. Da hierdurch die Düsenöffnung *a* vergrößert wird, entsteht ein Drehmoment um die Vertikale, und zwar zeigt der Momentenvektor $\mathfrak{M}$ dieser Drehung nach der negativen Y-Achse, zeigt also vom Leser weg. Nach den in Abschnitt II, 2 angestellten Erörterungen sucht sich nun die Kreiselachse dem Momentenvektor $\mathfrak{M}$ auf kürzestem Wege parallel zu stellen. Sie tut das, indem sie sich in die XZ-Ebene (Horizontalebene) zurückdreht.

Das Düsendrehmoment hat also folgende Eigenschaften: Es wirkt nur um die Schwerelinie, also um die Y-Achse. Es ist ferner proportional dem Winkel β, und es wirkt einer Vergrößerung dieses Winkels entgegen. Es kann infolgedessen in folgender Form angesetzt werden:

$$\text{Düsendrehmoment} = -D \cdot \beta,$$

wobei D ein experimentell zu bestimmender Zahlenfaktor ist.

Weit mehr als die eben beschriebene Art der Luftdämpfung kommt neuerdings eine andere Art der Dämpfung zur Anwendung, die Öldämpfung. Die folgende Figur zeigt diese Dämpfung beim Einkreiselkompaß.

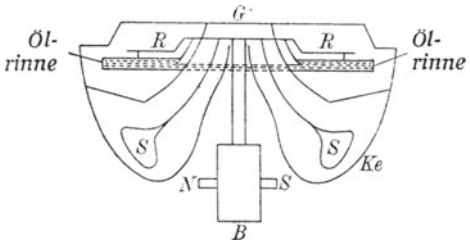


Fig. 14a.

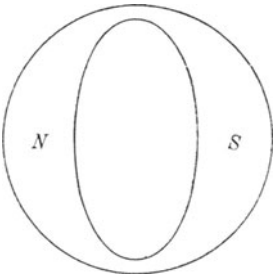


Fig. 14b.

Unter der Rose ist eine Ölrinne angebracht, die in Richtung der Kreiselachse erweitert ist, während sie sich in der dazu senkrechten Richtung beträchtlich verengt, so daß das Öl aus einer Erweiterung in die andere nur durch die Verengungen, also nur unter erheblicher Reibung, fließen kann.

Die Öldämpfung wirkt folgendermaßen: Wenn die Kreiselachse die Ruhelage $\overline{\beta}$ verläßt, indem durch Schwankungen um die $O-W$-Linie z. B. das untere (Süd-)Ende aus der Horizontalebene herausgehoben wird, so fließt das Öl nach der Erweiterung unter der Nordseite der Rose. Will nun das Nordende sich wieder heben, so wirkt dem das Übergewicht von Öl in dem Kessel unter der Nordseite entgegen. Die Schwingungen werden also verzögert und damit gedämpft.

Auch hier bei dieser Öldämpfung kann das Dämpfungsglied in der Form $-D\beta$ angesetzt und in die zweite Gleichung (11) eingeführt werden.

VIII. Die Differentialgleichungen für die gedämpften Schwingungen.

Nach Einführung des Dämpfungsgliedes $-D\beta$ lauten die Gleichungen (11):

$$(12)\qquad \begin{aligned} J(\dot{\alpha} + u \sin\varphi) &= \mathrm{mg}\, a\beta, \\ J(\dot{\beta} + u \cos\varphi \sin\alpha) &= -D\beta. \end{aligned}$$

Elimination von β liefert

$$\begin{vmatrix} J(\dot{\alpha} + u \sin\varphi) - \mathrm{mg}\, a & 0 \\ J\ddot{\alpha} & 0 \quad -\mathrm{mg}\, a \\ Ju \cos\varphi \sin\alpha & D \quad J \end{vmatrix} = 0.$$

Ausgeführt:

$$(12^*) \qquad \frac{J^2}{mg\,a}\ddot{\alpha} + Ju\cos\varphi\sin\alpha + \frac{J}{mg\,a}D(\dot{\alpha} + u\sin\varphi) = 0.$$

In dieser Gleichung sind aus früheren Gleichungen her die folgenden Ausdrücke bekannt:

$$\frac{J^2}{mg\,a} = M = \text{scheinbare Masse des Kreisels;}$$

$$Ju\cos\varphi = R = \text{Richtkraft des Kreisels.}$$

Das neu auftretende Glied $\frac{JD}{mg\,a}\dot{\alpha}$ ist das Dämpfungsglied.

Die Größe $\frac{J}{mg\,a}Du\sin\varphi$ ist infolge des nie verschwindenden Wertes $u\sin\varphi(\varphi \neq 0)$ ein stets vorhandenes Drehmoment, das außerdem ganz unabhängig ist vom Winkel α.

Ist dieses Düsendrehmoment gleich der Richtkraft, aber von entgegengesetztem Vorzeichen, so ist eine Gleichgewichtslage α_0 gegeben, die durch folgende Gleichung gekennzeichnet ist:

$$(13) \qquad \begin{aligned} Ju\cos\varphi\sin\alpha_0 &= -\frac{J}{mg\,a}Du\sin\varphi, \\ \sin\alpha_0 &= -\frac{D}{mg\,a}\operatorname{tg}\varphi. \end{aligned}$$

In dieser Gleichgewichtslage zeigt also die Kreiselachse nicht mehr genau nach Norden, sondern sie ist um einen gewissen Winkel α_0 vom Meridian abgedrängt. Dieser Abdrängungswinkel ist abhängig von der geographischen Breite; er beträgt in unseren Breiten weniger als 2^0 und kann im übrigen aus Tabellen jederzeit entnommen werden. Durch ein am Nordende der Kreiselachse angebrachtes Übergewicht – das sogenannte Nordgewicht – kann diese Abdrängung beseitigt werden. Das Nordgewicht ruft nämlich eine neue Präzessionsbewegung hervor, die gerade hinreicht, um die Achse bis in den Meridian zu bringen. Natürlich hängt die Größe des Übergewichtes ab von der geographischen Breite. Führen wir nun $\frac{J}{mg\,a}Du\sin\varphi = -Ju\cos\varphi\sin\alpha_0$ in (12*) ein, so kommt:

$$\frac{J^2}{mg\,a}\ddot{\alpha} + Ju\cos\varphi(\sin\alpha - \sin\alpha_0) + \frac{J}{mg\,a}D\dot{\alpha} = 0.$$

Setzen wir weiter $\frac{J^2}{mg\,a} = M$, $Ju\cos\varphi = R$ und $\frac{JD}{mg\,a} = \varkappa$, so kommt für kleine Winkel α:

$$(12\text{a}) \qquad M\ddot{\alpha} + R(\alpha - \alpha_0) + \varkappa\dot{\alpha} = 0.$$

Mit $\alpha_1 = \alpha - \alpha_0$ kommt dann endlich:

(12b) $$M\ddot{\alpha}_1 + R\alpha_1 + \varkappa\dot{\alpha}_1 = 0.$$

Die Lösung dieser wohlbekannten Differentialgleichung ist von der Form

$$\alpha_1 = Ae^{-\frac{\varkappa}{2M}t} \sin\frac{2\pi}{T_d}t,$$

wobei T_d die Periode der gedämpften Schwingung ist; ihr Wert ist gegeben durch

$$T_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{R}{M} - \frac{\varkappa^2}{4M^2}}}.$$

Setzen wir endlich wieder $\alpha_1 = \alpha - \alpha_0$ und führen auch für M, R und $\varkappa$ ihre alten Werte wieder ein, so ergibt sich als Lösung der Gleichung (12*):

(12c) $$\alpha = \alpha_0 + Ae^{-\frac{D}{2J}t} \sin\frac{2\pi}{T_d}t,$$

wobei $$T_d = 2\pi\sqrt{\frac{J^2}{\mathrm{mg}\,a} \cdot \frac{1}{Ju\cos\varphi - D^2/4\mathrm{mg}\,a}}.$$

Differentiation liefert:

$$\dot{\alpha} = Ae^{-\frac{D}{2J}t}\left(-\frac{D}{2J}\sin\frac{2\pi}{T_d}t + \frac{2\pi}{T_d}\cos\frac{2\pi}{T_d}t\right).$$

Setzen wir nun:

$$\frac{2\pi}{T_d} = \cos\xi \cdot \lambda,$$
$$\frac{D}{2J} = \sin\xi \cdot \lambda,$$

wobei λ ein noch unbekannter Faktor ist, so liefert Quadrieren und Addieren nach leichter Rechnung:

$$\lambda = \sqrt{\frac{R}{M}} = \frac{2\pi}{T_s},$$

wobei T_s die Periode der früher betrachteten ungedämpften Schwingung ist.

Führen wir diesen Hilfswinkel ξ $\left(\xi = \operatorname{arctg}\frac{T_d D}{4\pi J}\right)$ ein, so ergibt sich für $\dot{\alpha}$ der Wert:

$$\dot{\alpha} = \frac{2\pi}{T_s}Ae^{-\frac{D}{2J}t}\cos\left(\frac{2\pi t}{T_d} + \xi\right).$$

Aus den Gleichungen (12) folgt aber für β:

$$\beta = \frac{J}{\mathrm{mg}\,a}(\dot{\alpha} + u\sin\varphi) = \frac{J\dot{\alpha}}{\mathrm{mg}\,a} + \bar{\beta}.$$

Setzen wir hierin den eben gefundenen Wert für $\dot{\alpha}$ ein, so kommt:

$$\beta = \bar{\beta} + \frac{J}{\mathrm{m}g\,a}\,\frac{2\pi}{T_s}\,A\,e^{-\frac{D}{2J}t}\cos\left(\frac{2\pi t}{T_d} + \xi\right).$$

Als endgültiges Lösungssystem der Gleichungen (12) finden wir also:

$$(14)\qquad \begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + A e^{-\frac{D}{2J}t}\sin\frac{2\pi}{T_d}t, \\ \beta &= \bar{\beta} + \frac{J}{\mathrm{m}g\,a}\cdot\frac{2\pi}{T_s}\,A\,e^{-\frac{D}{2J}t}\cos\left(\frac{2\pi}{T_d}t + \xi\right). \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, daß nach genügend langer Zeit eine Ruhelage ($\alpha = \alpha_0$, $\beta = \bar{\beta}$) erreicht wird.

Wir wollen zusammenfassend die gedämpften Schwingungen der Kreiselachse noch einmal kurz charakterisieren:

a) Die Kreiselachse zeigt in der Ruhelage nicht mehr nach Norden, sondern ist um einen Winkel α_0 vom Meridian abgedrängt.

b) Es tritt der mit der Zeit abnehmende Faktor $e^{-\frac{D}{2J}t}$ auf.

c) Die Vertikalschwingung $\beta - \bar{\beta}$ erleidet eine Phasenverschiebung ξ.

IX. Systematische Kreiseldeviationen, Fehlerquellen und Korrekturen.

1. Eine erste Korrektur ist nötig bei Änderung der geographischen Breite. Das Über- oder Nordgewicht, das die Kreiselachse um den Winkel α_0 in den Meridian zurückdreht, erzeugt natürlich bei Annäherung an den Äquator ein größeres Drehmoment und demzufolge eine stärkere Präzessionsbewegung, d. h. die Achse bekommt nunmehr eine westliche Abdrängung. Die hierdurch notwendigen Korrekturen sind einer Tabelle jederzeit zu entnehmen.

2. Fahrtfehler. Eine zweite Korrektur macht sich notwendig infolge des Einflusses der Eigengeschwindigkeit des Schiffes. Das Schiff befinde sich im Punkte P und habe eine Geschwindigkeit, die nach Größe und Richtung dargestellt sei durch den Vektor $\mathfrak{K}$.

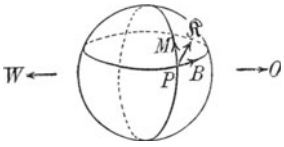


Fig. 15.

Diesen Vektor $\mathfrak{K}$ zerlegen wir in die Komponenten $M - P$ nach dem Meridian und $B - P$ nach dem Breitenkreis. Der Geschwindigkeitskomponente $M - P$ entspricht aber eine Rotation um die $O - W$-Linie. Der Vektor dieser Rotation sei $\mathfrak{M}'$. Er muß in unserer Figur vom Punkte P aus nach links zeigen.

Der Geschwindigkeitskomponente $B - P$ andererseits entspricht ein Rotationsvektor $\mathfrak{B}'$, der in der Erdachse liegt. $\mathfrak{B}'$ addiert sich also algebraisch zum Vektor $\mathfrak{u}$ der Erdrotation, kann also infolge seines geringen Betrages im wesentlichen vernachlässigt werden. Der Vektor $\mathfrak{M}'$ aber addiert sich graphisch zum Rotationsvektor der Erde.

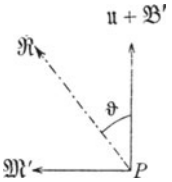


Fig. 16.

Es ergibt sich also ein resultierender Rotationsvektor $\mathfrak{R}$, und dieser Vektor $\mathfrak{R}$ ist es, dem sich nach den Ausführungen in Abschnitt II, 2 die Kreiselachse parallel zu stellen sucht.

Er weicht vom Meridian um den Winkel ϑ ab. Aus unserer Figur ergibt sich auch, daß dieser Winkel ϑ westlich ist bei S—N-Kurs und östlich bei N—S-Kurs. Er ist ferner unabhängig von den Konstanten des Kreisels und ergibt sich aus rein geometrischen Beziehungen zwischen Schiffsgeschwindigkeit und Erddrehung.

3. Ballistische Fehler. Ballistische Ausschläge sind Abdrängungen, die die Kreiselachse erfährt infolge plötzlicher Geschwindigkeitsänderungen des Schiffes. Alle Beschleunigungsdrücke werden nämlich auf den Aufhängepunkt übertragen, während die Trägheitskräfte im Schwerpunkte des schwimmenden Systems angreifen. Ein solcher Beschleunigungsdruck wird sich also immer im Sinne eines Drehmomentes äußern. Weist nun die Kreiselachse nach Norden und wirkt ein Beschleunigungsdruck in der O—W-Richtung, so hat das offenbar ein Kanten des Systems um die N—S-Linie zur Folge. Die Richtung der Achse wird aber dadurch nicht beeinflußt. Erhält dagegen das System einen solchen Beschleunigungsdruck in der Richtung des Meridians, so wird die Achse momentan aus ihrer Lage herausgedrängt, kantet um die O—W-Linie und antwortet darum mit einer Präzessionsbewegung $\dot{\alpha}$. Ist g' der Beschleunigungsdruck in der N—S-Richtung, so gilt die folgende Gleichung:

$$J\dot{\alpha} = mag'.$$

Also:

$$\alpha = \frac{ma}{J}\int_0^t g'\,dt.$$

Das Integral $\int_0^t g'\,dt$ bedeutet für $t = 0$ einen Impuls, dessen Größe gegeben ist durch $(v_2 - v_1)$, also durch die Änderung der Schiffsgeschwindigkeit in Richtung des Meridians. Demnach kommt:

$$\alpha = \frac{ma}{J}(v_2 - v_1).$$

Dieser Abdrängungswinkel α ist also außer von der Schiffsgeschwindigkeit nur noch abhängig von den Konstanten des Apparates, und er läßt

sich darum auf ein Minimum herabdrücken. Er ist übrigens immer gleichgerichtet mit dem im vorigen Abschnitt erwähnten Winkel ϑ.

4. Überaus wichtig für die Entwickelung des Kreiselkompasses ist eine vierte Fehlerquelle gewesen, die ihre Ursachen in den Schlingerbewegungen des Schiffes hat. Gerade diese aus den Schlingerbewegungen entstehenden Fehler und Mißweisungen veranlaßten die Firma Anschütz, vom Einkreiselkompaß überzugehen zur modernsten Form des Kreiselkompasses, zum Dreikreiselkompaß. Es soll deshalb der Einfluß der Schlingerbewegungen etwas eingehender behandelt werden. Wir schließen uns hierbei an Martienssen an (Theorie d. Kreiselk., Zeitschr. f. Instrumentenkunde, Bd. 32, 1912, S. 319), vereinfachen aber dessen Rechnungen, indem wir gleich von Anfang an das Dämpfungsglied $\varkappa$ unterdrücken.

Es handelt sich im weiteren um Schwingungen des Kreisels um seine Achse, also um Schwingungen, die wir bis jetzt völlig unbeachtet gelassen haben, da sie im allgemeinen eine Mißweisung der Kreiselachse nicht herbeiführen können. Es zeigt sich nun aber, daß diese Schwingungen um die Achse doch Anlaß geben können zu einer Abdrängung, falls nämlich rhythmisch wiederholte Anstöße vorhanden sind, also Impulse, wie sie gerade durch die Schlingerbewegungen des Schiffes bedingt sind.

Wir nehmen nun an, das Schiff schlingere um eine Achse (Schlingerachse), die natürlich in der Längsrichtung des Schiffes liegt und die vom Aufhängepunkt um die Länge b entfernt sei. Die Schwingungen um die Schlingerachse werden auf den Aufhängepunkt einen gewissen Beschleunigungsdruck g' übertragen, der seinerseits wieder Anlaß gibt zu einem Drehmoment $M = g'a$, vorausgesetzt, daß Schlinger- und Kreiselachse gleichgerichtet sind, z. B. beide nach Norden gerichtet sind.

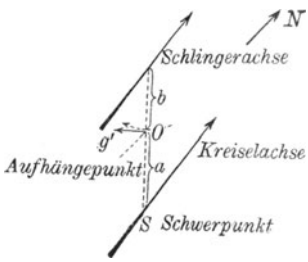


Fig. 17.

Wir setzen nun weiter voraus, daß die Schlingerbewegungen durch folgende Gleichung darzustellen sind:

$$\vartheta = \vartheta_0 \sin pt. \tag{15}$$

Hierbei ist ϑ der Winkel, um den das Schiff schlingert, ϑ_0 der größte Ausschlag. Der Beschleunigungsdruck im Aufhängepunkt wird demnach:

$$g' = b\ddot{\vartheta} = -bp^2\vartheta_0 \sin pt.$$

Ist m die Masse des Kreiselsystems, so ist dann der absolute Betrag des Drehmomentes M um die Kreiselachse gegeben durch:

(16) $$M = mabp^2\vartheta_0 \sin pt = M_0 \sin pt$$

wobei $$M_0 = mabp^2\vartheta_0.$$

Schließen die nach Norden zeigende Kreiselachse und die Schlingerachse einen Winkel ψ ein, ist also ψ der Kurs des Schiffes, so fällt in die Kreiselachse von dem eben erwähnten Moment M nur eine Komponente M' vom Betrage:

(16a) $$M' = M \cos\psi = M_0 \cos\psi \sin pt.$$

Unter dem Einflusse dieser Komponente M' wird also das System um die Kreiselachse schwingen. Der Schwingungswinkel sei γ. Diese Schwingung γ wird hervorgerufen durch das Moment M'. Ihm entgegen wirkt aber das Moment der Schwerkraft $\mathrm{mg}\,a\gamma$. Infolgedessen lautet die Differentialgleichung für die Schwingung γ:

(17) $$\Theta\ddot{\gamma} + \mathrm{mg}\,a\gamma - M_0 \cos\psi \sin pt = 0.$$

Hierbei ist Θ das Trägheitsmoment des ganzen Systems um die Kreiselachse.

Wäre das Glied $M_0 \cos\psi \sin pt$ nicht vorhanden, so würde Gleichung (17) eine einfache harmonische Schwingung mit der Periode

(17a) $$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{\mathrm{mg}\,a}}$$ darstellen.

Das Integral der Gleichung (17) ist von der Form:

(17b) $$\gamma = \frac{M_0 \cos\psi}{\mathrm{mg}\,a - \Theta p^2} \sin pt.$$

Da $M \cos\psi$ das Drehmoment um die horizontal gedachte Kreiselachse ist, so ist $M'' = M \sin\psi$ das Moment um eine zur Kreiselachse senkrechte Horizontale.

Um die Dinge anschaulich zu machen, führen wir unser altes Koordinatensystem von Fig. 13 wieder ein. $SXYZ$ ist ein festes System. In SX liegt die Kreiselachse, die dauernd nach Norden zeigt. Zur Zeit $t = 0$ fällt dieses System zusammen mit einem um SX schwingenden System $SXY'Z'$. SY ist die Vertikale, SY' die schwingende Schwerelinie (Aufhänge- — Schwerpunkt). SY und SY' und ebenso SZ und SZ' bilden miteinander den Schwingungswinkel γ.

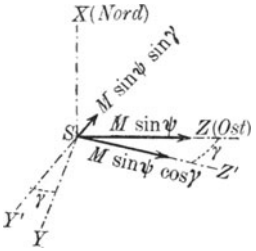


Fig. 18.

In SZ liegt der Momentenvektor $\mathfrak{M}''$ vom Betrage $M \sin\psi$. Ihn zerlegen wir in eine Komponente $M \sin\psi \cos\gamma$ nach SZ' und in eine andere $M \sin\psi \sin\gamma$ nach SY', also nach der Schwerelinie. Diese letztere Komponente nun ist es, die Anlaß gibt zu einer konstanten Ab-

drängung der Kreiselachse. Der Betrag der in Frage stehenden Komponente ist:

$$M \sin\psi \sin\gamma = M_0 \sin pt \cdot \sin\psi \cdot \sin\gamma.$$

Unter Benutzung von (17 b) formen wir diesen Wert für kleine γ folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} M_0 \sin pt \sin\psi \cdot \gamma &= M_0 \sin pt \cdot \sin\psi \cdot \frac{M_0 \cos\psi \cdot \sin pt}{\mathrm{mg}\, a - \Theta p^2} \\ &= \frac{1}{2} M_0^2 \sin 2\psi \cdot \frac{1}{\mathrm{mg}\, a - \Theta p^2} \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 2pt) \qquad (18) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{M_0^2 \sin 2\psi}{\mathrm{mg}\, a - \Theta p^2} - \frac{1}{4} \frac{M_0^2 \sin 2\psi \cos 2pt}{\mathrm{mg}\, a - \Theta p^2}. \end{aligned}$$

Wir haben demnach um die Schwerelinie ein konstantes und ein periodisches Drehmoment. Das letztere kann unberücksichtigt bleiben, da bei der langen Schwingungsdauer des Systems (45—60 Minuten) Resonanzerscheinungen nicht auftreten. Wohl aber bewirkt das Glied $\frac{1}{4} \frac{M_0^2 \sin 2\psi}{\mathrm{mg}\, a - \Theta p^2}$ eine konstante Abdrängung der Kreiselachse um einen gewissen Winkel ζ. Für diesen Winkel muß das erwähnte konstante Drehmoment gleich sein der Richtkraft der Erde, und wir haben demnach die folgende Gleichung:

$$Ju \cos\varphi \sin\zeta = \frac{1}{4} \frac{M_0^2 \sin 2\psi}{\mathrm{mg}\, a - \Theta p^2}. \qquad (19)$$

Setzen wir wieder $M_0 = m\, a\, b p^2 \vartheta_0$, so kommt:

$$Ju \cos\varphi \sin\zeta = \frac{1}{4} \frac{m^2 a^2 b^2 p^4 \vartheta_0^2 \sin 2\psi}{\mathrm{mg}\, a - \Theta p^2}. \qquad (20)$$

Führen wir nun noch die folgenden Größen ein:

$$p = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n,$$

$$p_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi n_0 = \sqrt{\frac{\mathrm{mg}\, a}{\Theta}} \quad \text{(nach 17 a)},$$

so kommt endlich:

$$\sin\zeta = \frac{4\pi^4 m a b^2 \vartheta_0^2 n^4 n_0^2 \sin 2\psi}{g \cdot J \cdot u \cos\varphi\, (n_0^2 - n^2)}. \qquad (21)$$

Erinnern wir uns, daß n_0 die Eigenschwingungszahl des Systems um die Kreiselachse, n aber diejenige der Schlingerbewegung ist, so erkennen wir aus (21), daß der Abdrängungswinkel beliebig groß werden kann, sobald nur die beiden Schwingungszahlen n und n_0 von derselben Größenordnung sind.

Nun haben allerdings die Schlingerbewegungen im allgemeinen eine Schwingungszeit von 8—12 Sekunden, während diejenige der Schwankung um die Kreiselachse nur 1—2 Sekunden beträgt. Immerhin be-

steht aber die Möglichkeit, daß Oberschwingungen der Schlingerbewegung der Zweisekundenschwingung nahe genug kommen können, um merkliche Resonanzerscheinungen hervorzurufen.

Ganz besonders groß ist diese Gefahr bei den U-Booten, deren Schlingerperiode nur 4 Sekunden beträgt.

Es lag also sehr nahe, auf Konstruktionen zu sinnen, die die Eigenschwingung des Systems um die Kreiselachse so groß machen, daß Resonanzerscheinungen mit den Schlingerbewegungen nicht mehr zu befürchten sind.

Diese Aufgabe hat ein Mitarbeiter der Firma Anschütz — Herr Schuler — gelöst, indem er den Dreikreiselkompaß konstruierte.

X. Der Dreikreiselkompaß.

Die gewünschte Erhöhung der Schwingungszeit um die Kreiselachse erreichte Schuler durch eine Konstruktion, deren Grundprinzip sehr einfach ist:

Durch eine Schwingung um die N-S-Linie löst man Präzessionsbewegungen ($\dot{\varepsilon}$) von zwei Hilfskreiseln aus, deren gyroskopischer Widerstand ($P\omega\varepsilon$) das Trägheitsmoment des Systems um die Kreiselachse ganz bedeutend erhöht.

Die folgende Figur zeigt in schematischer Weise die Anordnung dieser Hilfskreisel. Die ersten Versuche mit dieser neuesten Form des Kreiselkompasses fanden ums Jahr 1910 an Bord deutscher Kriegsschiffe statt.

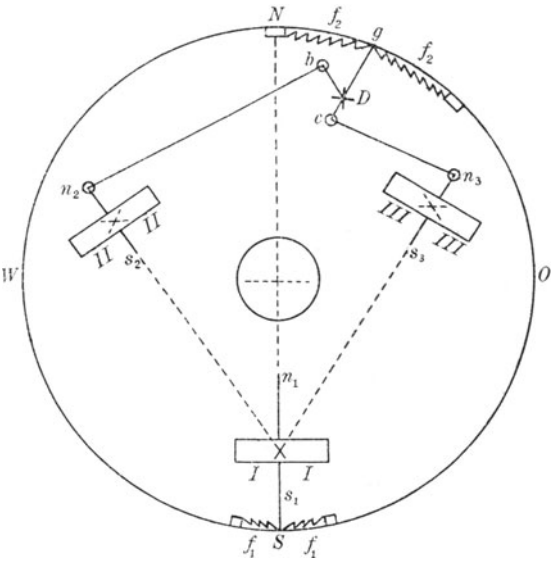


Fig. 19.

Ein Kreisel I, der N-S-Kreisel, ist so angebracht, daß seine Achse genau unter der N-S-Linie der Rose liegt. Die Achse steht durch geeignete Hebel in Verbindung mit den Spiralfedern f_1, die unmittelbar an der Kompaßrose befestigt sind und durch die demnach alle Bewegungen des Kreisels I auf die Rose übertragen werden. Zwei weitere Kreisel,

die Hilfskreisel II und III, sind je um 30° versetzt. Ihre Nordenden n_2 und n_3 sind durch ein Winkelgestänge $n_2 b D c n_3$ starr miteinander verbunden. Dieses Winkelgestänge hat in D seinen Drehpunkt, der fest mit der Rose verbunden ist, und außerdem steht es durch einen Zeiger Dg mit den Spiralfedern f_2 in Verbindung, die ebenfalls an der Rose befestigt sind. Gegen den Widerstand dieser Federn f_2 können die Hilfskreisel Schwingungen bis zu 20° nach jeder Seite ausführen.

Denken wir uns nun eine Schwankung des Systems um die N-S-Linie etwa derart, daß der Ostpunkt der Rose gesenkt, der Westpunkt aber gehoben wird. Hierdurch wird das Nordende n_3 gesenkt, während n_2 gehoben wird. Da aber die Nordenden n_2 und n_3 weiter von der Schwingungsachse entfernt sind als die Südenden s_2 und s_3, liegen nunmehr die Achsen der Hilfskreisel nicht mehr horizontal. Sie antworten darum beide mit einer Präzessionsbewegung gegen den Nordpunkt der Rose. Diese Präzession kommt anfangs auch tatsächlich zustande, damit aber auch ein gyroskopischer (Kreisel-)Widerstand, der dann seinerseits die gewünschte Erhöhung des Trägheitsmomentes um die N-S-Linie bedingt. Sehr bald aber verzehrt sich diese Präzessionsbewegung durch den Widerstand der elastischen Federn f_2, und die Hilfskreisel werden in die Mittellage zurückgebracht.

Damit ist das Grundprinzip des Dreikreiselkompasses bereits erledigt, und es bleibt uns nur noch übrig, aus den vielen technischen Einzelheiten einige Dinge herauszugreifen, die für den Gebrauch des Kreiselkompasses an Bord der Schiffe wichtig sind.

XI. Gegendreheinrichtung, Wendemotor und Tochterkompaß.

Die folgende, stark schematische Figur zeigt, wie man es erreicht, daß der Quecksilberkessel und das schwimmende System stets ihre Lage zueinander beibehalten.

Um den Quecksilberkessel Ke läuft ein metallischer Kontaktring H, der an der Stelle I—II eine Lücke hat. In dieser Lücke befindet sich eine Kontaktperle P, die die Verbindung herstellt zum Gegendrehmotor G. Sobald nun das Schiff seinen Kurs ändert, teilt es die entsprechende Drehung auch dem Quecksilberkessel Ke mit, und dieser ändert infolgedessen seine Lage zum schwimmenden Kreisel system. Zugleich aber wird sich die Perle P, die mit dem schwimmenden System verbunden ist, an eines der beiden Enden I oder II anlegen und damit den Strom zum Gegendrehmotor G schließen. Dieser ist so eingerichtet, daß durch ihn der Quecksilberkessel Ke im entgegen-

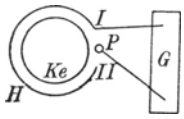


Fig. 20.

gesetzten Sinne der Schiffsdrehung so lange zurückgedreht wird, bis die Perle *P* wieder frei in der Lücke I—II spielt. In diesem Augenblick ist der Strom zur Gegendreheinrichtung wieder unterbrochen, und der Kessel und das schwimmende System haben wieder ihre ursprüngliche Lage zueinander.

Richtet man es nun so ein, daß gleichzeitig mit der Gegendreheinrichtung ein andrer Motor, der Wendemotor, in Betrieb gesetzt wird, so kann man diesen Wendemotor dann seinerseits dazu benutzen, um alle Drehungen des Schiffes, also alle Kursänderungen, vom Mutterkompaß zu übertragen an andre Stellen des Schiffes, also z. B. ins Steuerhaus, auf die Kommandobrücke oder in die Geschütztürme. An allen diesen Orten stellt man sogenannte Tochterkompasse auf; das sind Kompasse, deren Rose durch den Wendemotor in demselben Sinne und Maße gedreht wird wie der Quecksilberkessel durch die Gegendreheinrichtung. Auf diese Weise werden alle Kursänderungen des Schiffes ablesbar, und hat man erst einmal dafür gesorgt, daß die *N*-*S*-Linie des Tochterkompasses mit derjenigen des Mutterkompasses übereinstimmt, so kann der Tochterkompaß natürlich weiterhin nicht nur als Steuer-, sondern auch als Navigationskompaß verwendet werden.

XII. Schluß.

Die im Vorangehenden skizzierte theoretische und technische Entwickelung des Kreiselkompasses reicht zwar in ihren Anfängen bis Foucault zurück. Die wirkliche Umsetzung der Theorie in die Praxis aber ist erst in den letzten zwei Jahrzehnten vollzogen worden. Noch im Jahre 1906 äußerte der technische Berater der Firma Anschütz, Herr Martienssen, daß er nicht glaube, daß der Rotationskompaß jemals an Bord der Schiffe würde Verwendung finden können.

Wenige Jahre später, um das Jahr 1912, war bereits der Einkreiselkompaß überholt, und die Versuche mit dem Wunderwerke neuzeitlicher Technik, mit dem Dreikreiselkompaß, standen nahe vor ihrer Vollendung.

Fürwahr ein packendes Beispiel für die geradezu sprunghafte Entwickelung unserer modernen technischen Mechanik!

Über die Theorie des Kreisels. Von Geh. Reg.-Rat Dr. F. Klein, Prof. an der Univ. Göttingen u. Dr. A. Sommerfeld, Prof. an der Univ. München. 4 Teile. [VIII u. 966 S.] I. Teil. 1914. Geh. M. 20.—, geb. M. 26.50. II. u. III. Teil [In Vorb. 21.] IV. Teil. 1910. Geh. M. 20.—, geb. M. 22.50

Drehkreisel. Von Prof. Dr. J. Perry, F. R. S. Deutsche Ausgabe von A. Walzel. 2. Aufl. Mit 62 Figuren u. 1 Titelbild. [VIII u. 130 S.] 8. 1913. Geb. . . . . M. 6.—

Mechanik. Redigiert von F. Klein in Göttingen und C. H. Müller in Hannover. In 2 Teilen (4 Teilbänden) und 1 Registerband [dieser in Vorbereitung]. (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. 4. Band.)

I. Teil, Abteilung 1 (1. Teilband). 1901/8. Geh. M. 51.—. — Abteilung 2 (2. Teilband). Heft 1. 1904. Geh. M. 11.—. Heft 2. 1911. Geh. M. 16.—. Heft 3. 1914. Geh. M. 11.50
II. Teil, Abteilung 1 (3. Teilband). 1907/8. Geh. M. 44.—. Abteilung 2 (4. Teilband). 1907/14. Geh. . . . . M. 66.50

Die elementare Mechanik. Eine Begründung der allgemeinen Mechanik; die Mech. d. Systeme starrer Körper; d. synthet. u. d. Elemente d. analyt. Methoden sowie eine Einführ. i. d. Prinz. d. Mech. deformierbarer Systeme. Von Dr. G. Hamel, Prof. a. d. Techn. Hochsch., Charlottenburg. Mit 265 Fig. [XVII u. 634 S.] gr. 8. 1912. Geh. M. 60.—, geb. M. 70.—

Vorlesungen über technische Mechanik. Von Geh. Hofrat Dr. A. Föppl, Professor an der Techn. Hochschule München. gr. 8.

I. Bd.: Einführung in die Mechanik. 7. Aufl. Mit 104 Fig. 1921.
II. Bd.: Graphische Statik. 5. Auflage. Mit 209 Abb. [XII u. 404 S.] 1920. Geh. M. 50.—, geb. . . . . M. 60.—
III. Bd.: Festigkeitslehre. 8. Auflage. Mit 114 Abb. [XVIII u. 446 S.] 1920. Geh. M. 53.—, geb. . . . . M. 63.—
IV. Bd.: Dynamik. 6. Aufl. Mit 86 Fig. [X u. 417 S.] 1921. Geh. M. 50.—, geb. M. 60.—
V. Bd.: Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie. 3. unver. Auflage. Mit 44 Fig. [XII u. 391 S.] 1920. Geh. M. 50.—, geb. . . . . M. 60.—
VI. Bd.: Die wichtigsten Lehren der höheren Dynamik. 3. unv. Abdr. Mit 30 Abb. im Text. [XII u. 484 S.] 1920. Geh. M. 58.—, geb. . . . . M. 70.—

Höhere Mathematik für Ingenieure. Von Prof. Dr. J. Perry, F. R. S. Autor. deutsche Bearbeit. von Geh. Hofrat Prof. Dr. R. Fricke, Braunschweig, u. F. Süchting, Prof. an der Bergakad. in Clausthal a. Harz. 3. Aufl. Mit 106 Fig. [XVI u. 450 S.] gr. 8. 1919. Geh. M. 50.—, geb. M. 55.—

Lehrbuch der Physik. Von Prof. E. Grimsehl, weil. Direktor der Oberrealschule a. d. Uhlenhorst in Hamburg. Zum Gebrauch beim Unterricht, bei akademischen Vorlesungen u. zum Selbststudium. 2 Bände, hrsg. v. Prof. Dr. W. Hillers in Hamburg u. Prof. Dr. H. Starke in Aachen.

I. Band: Mechanik, Wärmelehre, Akustik u. Optik. 5., verm. u. verb. Aufl. Mit 1049 Fig. im Text. 10 Fig. auf 2 farb. Tafeln und 1 Titelbild. [XVI u. 1029 S.] gr. 8. 1921. Geh. M. 80.—, geb. . . . . M. 95.—
II. Band: Magnetismus und Elektrizität. 4., verm. u. verb. Aufl. Mit 548 Fig. [VIII u. 634 S.] gr. 8. 1920. Geh. M. 55.—, geb. . . . . M. 65.—

Kleiner Leitfaden der praktischen Physik. Von Professor Dr. Fr. Kohlrausch, weil. Präsident der physikal.-techn. Reichsanstalt zu Berlin. 4. Aufl. bearb. von Dr. H. Scholl, Prof. an der Univ. Leipzig. Mit 165 Abb. im Text. [XX u. 332 S.] gr. 8. 1921. Geh. M. 30.—, geb. M. 35.—

Physik und Kulturentwicklung durch techn. u. wissenschaftl. Erweiter. d. menschl. Naturanlagen. V. Geh. Hofrat Dr. O. Wiener, Prof. a. d. Univ. Leipzig. 2. Aufl. Mit 72 Abb. Geh. M. 15.—, geb. M. 22.—

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Die in diesen Anzeigen angegebenen Preise sind die ab 1. VII. gültigen als freibleibend zu betrachtenden Ladenpreise, zu denen die meinen Verlag vorzugsweise führenden Sortimentsbuchhandlungen sie zu liefern in der Lage und verpflichtet sind, und die ich selbst berechne. Sollten betreffs der Berechnung eines Buches meines Verlages irgendwelche Zweifel bestehen, so erbitte ich direkte Mitteilung an mich.

ASTRONOMIE

(Die Kultur d. Gegenwart. Ihre Entwickl. u. ihre Ziele. Hrsg. v. Prof. P. Hinneberg.)
T. III, Abt. III, Bd. 3. Unt. Red. v. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. J. Hartmann, Göttingen.

Bearbeitet von Prof. Dr. L. Ambronn, Geh. Hofrat Prof. Dr. Fr. Boll, Prof. Dr. A. v. Flotow, Prof. F. K. Ginzel, Prof. Dr. K. Graff, Prof. Dr. P. Guthnick, Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. J. Hartmann, Prof. Dr. J. v. Hepperger, Prof. Dr. H. Kobold Prof. Dr. S. Oppenheim, Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. E. Pringsheim

Geheftet M. 95.—, gebunden M. 115.—

Das Werk bietet aus der Feder namhafter Vertreter der Astronomie eine durch eine Reihe von Tafeln nach neuzeitlichen photographischen Aufnahmen belebte, für den Laien durchaus verständliche, aber auch für den Fachmann bedeutungsvolle Darstellung dieser Wissenschaft unter Betonung ihrer Beziehungen zur heutigen Gesamtkultur.

Einer Darstellung der Uranfänge der astronomischen Vorstellungen bei den verschiedenen Völkern, ihrer Zusammenhänge mit Religion, Volksgebräuchen und Astrologie (Fr. Boll) folgt, der Entwicklung des Zeitbegriffes und der Einteilung der Zeit aus den ersten astronomischen Beobachtungen entsprechend, die des gesamten Kalenderwesens (F. K. Ginzel) und der Zeitmessung (J. Hartmann) von ihren primitiven Anfängen bis zur modernen Zonenzeit und den funkentelegraphischen Zeitsignalen. Da sich ebenso der Raumbegriff an astronomischen Vorgängen entwickelt, sind sodann die durch astronomische Messungen ermöglichte Ortsbestimmung auf der Erde und am Himmel (L. Ambronn), sowie die stetige Ausdehnung und Vertiefung unserer räumlichen Vorstellungen (A. v. Flotow) behandelt. Dem folgt die Darstellung der Bewegungen der Körper unseres Planetensystems (J. v. Hepperger) und der physikalischen Verhältnisse dieser Körper, der Planeten, Monde, Kometen (K. Graff) und der Sonne (E. Pringsheim). Die physikalischen Verhältnisse der Fixsternwelt (P. Guthnick) finden sodann, der Bedeutung der modernen astrophysikalischen Forschungsmethoden entsprechend, ausführliche Behandlung; hier, sowie in dem folgenden Abschnitt über den Bau der Fixsternwelt (H. Kobold) werden die Errungenschaften und die Probleme der heutigen astronomischen Forschung vorgeführt. Nach einer Besprechung der astronomischen Beobachtungsinstrumente und ihres Einflusses auf die Entwicklung der Feinmechanik und Optik (L. Ambronn) schließt den Band ein Kapitel (S. Oppenheim) über die Gravitation und ihre Erklärungsversuche bis zur Einsteinschen Relativitätstheorie, in deren nur durch allerfeinste astronomische Messungen zu erbringenden Beweisen sich wiederum der innige Zusammenhang der Astronomie mit der Physik bekundet.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Preise freibleibend

Mathematisch-Physikalische Bibliothek

Gemeinverständliche Darstellungen aus der Mathematik u. Physik. Unter Mitwirkung von Fachgenossen hrsg. von

Dr. W. Lietzmann und **Dr. A. Witting**

Direktor der Oberrealschule zu Göttingen — Oberstudienr., Gymnasialpr. i. Dresden

Fast alle Bändchen enthalten zahlreiche Figuren. kl. 8. Kart. je M. 5.—

Die Sammlung bezweckt, allen denen, die Interesse an den mathematisch-physikalischen Wissenschaften haben, es in angenehmer Form zu ermöglichen, sich über das gemeinhin in den Schulen Gebotene hinaus zu belehren. Die Bändchen geben also teils eine Vertiefung solcher elementarer Probleme, die allgemeinere kulturelle Bedeutung oder besonderes wissenschaftliches Gewicht haben, teils sollen sie Dinge behandeln, die den Leser, ohne zu große Anforderungen an seine Kenntnisse zu stellen, in neue Gebiete der Mathematik und Physik einführen.

Bisher sind erschienen (1912/21)

Der Begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung. Von H. Wieleitner. 2., durchgeseh. Aufl. (Bd. 2.)
Ziffern und Ziffernsysteme. Von E. Löffler. 2., neubearb. Aufl. I: Die Zahlzeichen der alten Kulturvölker. (Bd. 1.) II: Die Z. im Mittelalter und in der Neuzeit. (Bd. 34.)
Die 7 Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Von H. Wieleitner. 2. Aufl. (Bd. 7.)
Einführung in die Infinitesimalrechnung. Von A. Witting. 2. Aufl. I: Die Differential-, II: Die Integralrechnung. (Bd. 9 u. 41.)
Wahrscheinlichkeitsrechnung. V. O. Meißner. 2. Auflage. I: Grundlehren. (Bd. 4.) II: Anwendungen. (Bd. 33.)
Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie. Von A. Leman. (Bd. 19.)
Der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. Von W. Lietzmann. 2. Aufl. (Bd. 3.)
Darstellende Geometrie d. Geländes u. verw. Anwend. d. Methode d. kotiert. Projektionen. Von R. Rothe. 2., verb. Aufl. (Bd. 35/36.)
Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben. Von B. Kerst. (Bd. 26.)
Einführung in die projektive Geometrie. Von M. Zacharias. (Bd. 6.)
Konstruktionen in begrenzter Ebene. Von P. Zühlke. (Bd. 11.)
Nichteuklidische Geometrie in der Kugelebene. Von W. Dieck. (Bd. 31.)
Einführung in die Trigonometrie. Von A. Witting (Bd. 43)
Einführung i. d. Nomographie. V. P. Luckey. I. Die Funktionsleiter. (28.) II. Die Zeichnung als Rechenmaschine. (37.)
Abgekürzte Rechnung nebst einer Einführ. i. d. Rechnung m. Funktionstaf. insb. i. d. Rechng. mit Logarithmen. Von A. Witting. (Bd. 42.)
Theorie und Praxis des logarithm. Rechenschiebers. Von A. Rohrberg. 2. Aufl. (Bd. 23.)
Die Anfertigung mathemat. Modelle. (Für Schüler mittl. Kl.) Von K. Giebel. (Bd. 16.)
Karte und Krokl. Von H. Wolff. (Bd. 27.)
Die Grundlagen unserer Zeitrechnung. Von A. Baruch. (Bd. 29.)
Die mathemat. Grundlagen d. Variations- u. Vererbungslehre. Von P. Riebesell. (24.)
Mathematik und Malerei. 2 Teile in 1 Bande. Von G. Wolff. (Bd. 20/21.)
Der Goldene Schnitt. Von H. E. Timerding. (Bd. 32.)
Beispiele zur Geschichte der Mathematik. Von A. Witting und M. Gebhard. (Bd. 15.)
Mathematiker-Anekdoten. Von W. Ahrens. 2. Aufl. (Bd. 18.)
Die Quadratur d. Kreises. Von E. Beutel. 2. Aufl. (Bd. 12.)
Wo steckt der Fehler? Von W. Lietzmann und V. Trier. 2. Aufl. (Bd. 10.)
Geheimnisse der Rechenkünstler. Von Ph. Maennchen. 2. Aufl. (Bd. 13.)
Riesen und Zwerge im Zahlenreiche. Von W. Lietzmann. 2. Aufl. (Bd. 25.)
Was ist Geld? Von W. Lietzmann. (Bd. 30.)
Die Fallgesetze. Von H. E. Timerding. 2. Aufl. (Bd. 5.)
Ionentheorie. Von P. Bräuer. (Bd. 38.)
Das Relativitätsprinzip. Leichtfaßlich entwickelt von A. Angersbach. (Bd. 39.)
Dreht sich die Erde? Von W. Brunner. (17.)
Theorie der Planetenbewegung. Von P. Meth. (Bd. 8.)
Beobachtung d. Himmels mit einfach. Instrumenten. Von Fr. Rusch. 2. Aufl. (Bd. 14.)
Mathem. Streifzüge durch die Geschichte der Astronomie. Von P. Kirchberger. (Bd. 40.)

In Vorbereitung: Doehlemann, Mathem. u. Architektur. Schips, Mathem. u. Biologie. Winkelmann, Der Kreisel. Wolff, Feldmessen u. Höhenmessen.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Preise freibleibend

EINFÜHRUNG IN DIE RELATIVITÄTSLEHRE

Raum, Zeit und Relativitätstheorie. Gemeinverständliche Vorträge von Prof. Dr. L. Schlesinger. Mit 2 Tafeln u. 5 Fig. (Abh. u. Vortr. a. d. Geb. d. Math., Naturw. u. Techn. Heft 5.) . . . M. 4.—
Näheres siehe Umschlag Seite 2

Physikalisches über Raum und Zeit. Von Prof. Dr. E. Cohn. 4. Auflage. (Abhandlungen und Vorträge aus dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaft und Technik. Heft 2.) Geh. . . . . M. 4.—
Näheres siehe Umschlag Seite 2.

Einführung in die Relativitätstheorie. Von Dr. W. Bloch. 3., verb. Aufl. Mit 18 Fig. (ANuG Bd. 618.) Kart. M. 6.80, geb. M. 8.80
Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, dem Laien die der Relativitätstheorie zugrundeliegenden Gedanken, die heute auf das wissenschaftliche Weltbild umgestaltend einwirken, in ihrer geschichtlichen Entwicklung verständlich zu machen.

Das Relativitätsprinzip. Leichtfaßlich entwickelt von Prof. A. Angersbach. (Math.-phys. Bibl. 39.) Kart. . . . . M. 5.—
Ausgehend von der klassischen Mechanik, behandelt das Büchlein zunächst den schon in dieser auftretenden Begriff der Relativität, geht auf die Grundfrage „Ruhender oder bewegter Aether" ein und erörtert dann die hierauf fußenden Einsteinschen Sätze, ihre Begründung und ihre Folgerungen.

Das Relativitätsprinzip. Eine Einführung in die Theorie von Prof. Dr. A. von Brill. 4. Aufl. Mit 6 Figuren. Abhandlungen u. Vorträge aus dem Gebiete der Math., Naturwissenschaften und Technik. (Heft 3.) . . . . . M. 7.—
Näheres siehe Umschlag Seite 2.

Das Relativitätsprinzip. Drei Vorlesungen gehalten in Teylers Stiftung zu Haarlem. Von Prof. Dr. H. A. Lorentz. Bearbeitet von Prof. Dr. W. H. Keesom. Geh. . . . . M. 5.—
Behandelt nach einer kurzen histor. Einleitung das Einsteinsche Relativitätsprinzip, die darauf fußende Relativitätsmechanik sowie das Einsteinsche Äquivalenzprinzip. In einem Nachtrage werden einige spezielle Fragen mathematisch weiter ausgearbeitet.

Das Relativitätsprinzip. Eine Sammlung von Abhandlungen. Von Prof. Dr. H. A. Lorentz, Prof. Dr. A. Einstein, Prof. Dr. H. Minkowski. Mit Anmerkg. v. Prof. Dr. A. Sommerfeld, u. Vorwort v. Prof. Dr. O. Blumenthal. 3., verb. Aufl. (Fortschr. d. mathemat. Wissenschaften in Monographien. Heft 2.) Geh. . . . . M. 25.—, geb. M. 30.—
Führt die historische Entwicklung der Theorie an Hand der Originalarbeiten vor Augen. Dank dem Entgegenkommen Prof. Einsteins konnten in der neuen Auflage die wichtigsten seiner Arbeiten über die Relativitätstheorie im Zusammenhang zum Abdruck gebracht werden, so daß die Schrift nunmehr zu einem für das Verständnis der Theorie und ihrer Bedeutung grundlegenden Quellenwerk geworden ist.

Nichteuklidische Geometrie in der Kugelebene. Von Studienrat Dr. W. Dieck. (Math.-phys. Bibl. 31.) Kart. . . . . M. 5.—
Das Büchlein ist 1915 im Felde geschrieben. Es bietet die erste und bis jetzt einzige Sonderdarstellung der Geometrie des endlichen kugelförmigen Raumes. Diese Raumform ist in der Folge von Einstein als die wahrscheinliche Gestalt unseres Raumes angesprochen worden. – Die Schrift erfordert nur ganz bescheidene mathematische Vorkenntnisse und ist leicht verständlich.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Preise freibleibend