



Die „Sammlung Vieweg“ hat sich die Aufgabe gestellt, Wissens- und Forschungsgebiete, Theorien, chemisch-technische Verfahren usw., die im Stadium der Entwicklung stehen, durch zusammenfassende Behandlung unter Beifügung der wichtigsten Literaturangaben weiteren Kreisen bekanntzumachen und ihren **augenblicklichen Entwicklungsstand zu beleuchten**. Sie will dadurch die Orientierung erleichtern und die Richtung zu zeigen suchen, welche die weitere Forschung einzuschlagen hat.

Als Herausgeber der einzelnen Gebiete, auf welche sich die Sammlung Vieweg zunächst erstreckt, sind tätig, und zwar für:

- Physik** (theoretische und praktische, und mathematische Probleme):  
Herr Geh. Reg.-Rat Prof. Dr., Dr.-Ing. E. h. **Karl Scheel**, Physikal.-Techn. Reichsanstalt, Charlottenburg;
- Chemie** (Allgemeine, Organische und Anorganische Chemie, Physikal. Chemie, Elektrochemie, Technische Chemie, Chemie in ihrer Anwendung auf Künste und Gewerbe, Photochemie, Metallurgie, Bergbau):  
Herr Prof. Dr. **Bernhard Neumann**, Techn. Hochschule Breslau;
- Technik** (Wasser-, Straßen- und Brückenbau, Maschinen- und Elektrotechnik, Schiffsbau, mechanische, physikalische und wirtschaftliche Probleme der Technik):  
Herr Prof. Dr.-Ing. E. h. **Fritz Emde**, Techn. Hochschule Stuttgart.

### *Neuere und neueste Hefte der „Sammlung Vieweg“*

- Heft 31. Dr. Heinrich Faßbender: *Die technischen Grundlagen der Elektromedizin*. Mit 77 Abbildungen. M. 4,—.
- Heft 32/33. Prof. Rudolf Richter: *Elektrische Maschinen mit Wicklungen aus Aluminium, Zink und Eisen*. Mit 51 Abbildungen. M. 6,—.
- Heft 34. Obering. Carl Beckmann: *Haus- und Geschäfts-Telephonanlagen*. Mit 78 Abbildungen. M. 3,—.
- Heft 35. Dr. Aloys Müller: *Theorie der Gezeitenkräfte*. Mit 17 Abb. M. 3,—.
- Heft 36. Prof. Dr. W. Kummer: *Die Wahl der Stromart für größere elektrische Bahnen*. Mit 7 Abbildungen. M. 2,50.
- Heft 37. Dr. Reinhold Rieke: *Die Arbeitsmethoden der Silikatchemie*. 2. Aufl. Mit 4 Abbildungen. M. 3,50.
- Heft 38. Prof. Dr. Albert Einstein: *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. (Gemeinverständlich.)* 14. Auflage. (61. bis 65. Tausend.) Mit 4 Figuren. M. 3,—.
- Heft 39/40. Dr. Richard Grammel: *Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges*. Mit 83 Abbildungen. M. 5,—.
- Heft 41/42. Ingenieur Georg Duffing: *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*. Mit 23 Abb. M. 4,75.
- Heft 43. Dr. Robert Schwarz: *Feuerfeste und hochfeuerfeste Stoffe*. 2. vermehrte Auflage. Mit 10 Abbildungen. M. 2,—.
- Heft 44. Dr. Iwan Döry: *Einphasenbahnmotoren*. Mit 75 Abbildungen. M. 3,—.
- Heft 45. Prof. Dr. K. Fajans: *Radioaktivität und die neueste Entwicklung der Lehre von den chemischen Elementen*. Durchgesehener Abdruck der 4. Auflage. Mit 11 Abbildungen und 14 Tabellen.

Fortsetzung siehe 3. und 4. Umschlagseite.

# Automobilschwingungslehre

Von

**Ernst August Wedemeyer**

Dipl.-Ing.



Mit 89 Abbildungen

---

Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges.  
Braunschweig 1930

ISBN 978-3-663-06187-8      ISBN 978-3-663-07100-6 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-663-07100-6

---

---

**Herausgeber dieses Heftes:**  
**Professor Dr.-Ing. h. c. Fritz Emde in Stuttgart**

---

---

**Alle Rechte vorbehalten**

## Vorwort

Die Schwingungsliteratur ist in den letzten Jahren erheblich angewachsen. In den verschiedensten Zeitschriften zerstreut finden sich Angaben, auch ist eine ganze Reihe von Lehrbüchern veröffentlicht worden. Diese Lehrbücher behandeln die Schwingungsprobleme entweder von einem ganz allgemeinen Standpunkt oder Spezialgebiete. Das vorliegende Büchlein will nun den Sonderwünschen des Automobil- und Motorkonstruktors Rechnung tragen und ihm die Möglichkeit geben, nicht nur die Fragen, die an ihn herantreten, zu beantworten, sondern, auf den vorgelegten Ergebnissen aufbauend, weiter zu forschen.

Das Büchlein soll nicht nur den Mathematiker oder Theoretiker interessieren, sondern auch dem weniger theoretisch geschulten Praktiker etwas bieten. Um das erreichen zu können, sind die Grundlagen in strenger, oft verwickelter mathematischer Form gegeben, so daß dem Bedürfnis des Theoretikers genügt sein mag; alle für den Praktiker wichtigen Dinge sind aber gleichzeitig durch Beschreibung oder in einfachen Gleichungen nochmals zusammengefaßt, so daß er ohne Gefahr die zu schwierigen Ableitungen überschlagen mag.

Die Sichtung des Schrifttums ergab, daß außerordentlich viel Material vorliegt. Es sind aber nicht alle Unterlagen einwandfrei oder nach einheitlichen Gesichtspunkten geordnet. Zur Erleichterung der noch erforderlichen Forschungsarbeit ist ein ausführliches Quellenverzeichnis angehängt und, soweit erforderlich, im Text darauf verwiesen.

Den Firmen und Herren, die mich durch Überlassung von Material unterstützten, sage ich an dieser Stelle meinen besten Dank.

Altona-Othmarschen, im September 1930.

**E. A. Wedemeyer**

# Inhaltsübersicht

	Seite
Vorwort . . . . .	III
Inhaltsübersicht . . . . .	V
<b>§ 1. Schwingungstheorie</b> . . . . .	<b>1</b>
Grundlagen . . . . .	2
Begriffe . . . . .	2
Grundgleichung . . . . .	3
Gekoppelter Schwinger . . . . .	4
Massenänderung . . . . .	7
Federänderung . . . . .	7
Übersetzung . . . . .	8
Sonderfälle . . . . .	12
Erregung . . . . .	14
Erzwungene Schwingung . . . . .	16
Gedämpfte Schwingungen . . . . .	18
<b>§ 2. Das Triebwerk</b> . . . . .	<b>20</b>
Die Kurbelwelle . . . . .	20
1. Massenbestimmung . . . . .	21
2. Federbestimmung . . . . .	34
3. Übersetzungen . . . . .	38
4. Beispiel . . . . .	39
5. Berechnungsprüfung . . . . .	50
6. Erregung . . . . .	54
7. Ausschlag . . . . .	58
8. Steuerung des Motors . . . . .	65
9. Wirkung der Schwingungen . . . . .	67
10. Dämpfung . . . . .	69
11. Die Kardanwelle . . . . .	71
<b>§ 3. Die Zündung</b> . . . . .	<b>78</b>
<b>§ 4. Die Wärme</b> . . . . .	<b>79</b>
<b>§ 5. Chassisschwingungen</b> . . . . .	<b>80</b>
Nicken, Wanken, Wogen . . . . .	80
Torsionsschwingung . . . . .	89
Längsschwingung . . . . .	89
Querschwingung . . . . .	90
Drehschwingung des Wagens . . . . .	90

	Seite
Fahrbequemlichkeit . . . . .	93
Fahrbahnerregung . . . . .	95
Stoß . . . . .	95
Triebwerkserregung . . . . .	98
Hochfrequente Chassisschwingungen . . . . .	99
Motorerregung . . . . .	101
Unbalancen . . . . .	107
Federung . . . . .	112
Schwingachsen . . . . .	115
Rahmenlose Bauart . . . . .	117
Pseudoharmonische Federn . . . . .	118
<b>§ 6. Dämpfung . . . . .</b>	<b>123</b>
Reibungsdämpfung . . . . .	124
Geschwindigkeitsdämpfung . . . . .	128
Exponentialdämpfung . . . . .	130
Luftdämpfung . . . . .	130
Pseudoharmonische gedämpfte Feder . . . . .	131
Rasche Schwingungen . . . . .	132
<b>§ 7. Geräusche . . . . .</b>	<b>134</b>
Zahnräder . . . . .	135
Resonanzräume . . . . .	138
Trennfugen . . . . .	139
Triebwerk . . . . .	141
Klopfen . . . . .	142
Auspuff . . . . .	144
Schneidentöne . . . . .	149
Reibschwingungen . . . . .	149
<b>§ 8. Radflattern . . . . .</b>	<b>150</b>
Gegenmittel . . . . .	162
<b>§ 9. Fahrzeug und Fahrbahn . . . . .</b>	<b>165</b>
<b>Quellenangaben . . . . .</b>	<b>171</b>

## § 1. Schwingungstheorie

Die Schwingungserscheinungen beim Automobil sind mannigfacher Art. Sie können als Singen der Zahnräder, Klappern von Teilen der Karosserie, Dröhnen und Knallen des Auspuffes, Schluchzen des Vergasers und Prasseln der Ventile erscheinen, oder sich in raschem Verschleiß einzelner Teile, Auslaufen von Lagern, Brechen von Stützen und Wellen, ungleicher Motorleistung bei verschiedenen Drehzahlen, unregelmäßigem Arbeiten der Maschine und schließlich Rütteln der Lenkung, Schleudern des Wagens und anderen Belästigungen für die Fahrer bemerkbar machen.

So mannigfach die Art sein kann, in der die Schwingungen auftreten können, so mannigfach kann auch ihr „Mechanismus“ sein und die Ursache, die sie erzeugte. Einzelne Erscheinungen werden durch periodische Kräfte und Momente des Motors hervorgerufen, die durch besondere Umstände geschwächt oder verstärkt sein können, andere wieder entstehen nur durch die Wechselwirkung zwischen Fahrbahn und Fahrzeug. Oft wird auch die Wirkung erst an einer weit vom Ausgangspunkt ihrer Erregung entfernten Stelle eintreten und dort dem Auge oder Ohr wahrnehmbar sein.

Die Schwingungserscheinungen des Automobils werden aber noch dadurch wesentlich vermehrt und ihre Behandlung erschwert, daß nicht nur periodische Kräfte und Momente vorliegen, deren Periode bestimmt ist, sondern daß auch solche Erregungen vorkommen, deren Periode sich in weiten Grenzen ändern kann, sogenannte Pseudo- oder Quasiharmonische, und daß sich weiterhin Stöße einstellen, die eine eigene Gruppe von Erregern darstellen.

Der Konstrukteur muß all diesen Umständen Rechnung tragen und versuchen, aus ihrer Vielheit das Zweckmäßigste herauszusuchen. Dazu ist erforderlich, daß er die Eigenart der verschiedenen Materialien kennt, die sie bei Schwingungsbeanspruchung zeigen. Er muß ihre Dämpfungseigenschaften berücksichtigen, da

nur sie gestatten, Energie zu verzehren und damit unschädlich zu machen.

Die Untersuchung geht von dem am meisten erforschten und bearbeiteten Gebiet, dem Motor bzw. dem Triebwerk des Automobils aus und zeigt dabei, wie die einzelnen Grundlagen erfaßt werden und sich daraus der weitere Aufbau der Berechnung entwickelt. Der Rechnungsgang selbst wird in ein einfaches Schema gebracht und kann von jedem benutzt werden, der den Rechenschieber zu handhaben weiß.

Bei der weiter folgenden Behandlung der anderen Schwingungserscheinungen, insbesondere beim Federungsproblem, läßt sich derselbe Ansatz erfolgreich als Näherung anwenden, solange die Kennlinien der elastischen Bindeglieder nicht zu sehr von der Geraden abweichen.

Mit der Möglichkeit, die Schwingungszahlen der Bauteile berechnen zu können und die Amplituden (Höchstauschläge) der einzelnen Punkte zu erfassen, sowie die Änderung dieser Größen mit der Änderung der Arbeitsbedingungen zu bestimmen, ist auch die Möglichkeit gegeben, den schädlichen Wirkungen der Erscheinungen entgegenzutreten.

**Grundlagen.** Vor dem Eindringen in die einzelnen Probleme sollen kurz die Grundlagen gestreift werden. Der Überblick ermöglicht, später manche Rechnung zu unterlassen, die sonst an mehreren Stellen auftreten müßte.

**Begriffe.** Die schwingungsfähigen Systeme bestehen stets aus Trägheiten, die als träge Massen  $m = \frac{G}{g}$  oder  $J$  bzw.  $\frac{Gd^2}{4}$  (Schwungmoment) erscheinen können, und elastischen Rückstellkräften, gekennzeichnet durch die „Weichheit“ der Federn  $f$  oder deren „Steifheit“  $c = \frac{1}{f}$ , wobei die „Feder“ eine Torsions-, Dehnungs- oder Biegefeder sein kann, deren Form beliebig ist [in den Ausdrücken bedeutet  $m$  die Masse,  $G$  das Gewicht,  $g$  die Erdbeschleunigung,  $J$  das polare Massenträgheitsmoment,  $d$  den Trägheitsradius,  $f$  die Auslenkung des Endpunktes der Feder aus der Ruhelage unter Einwirkung der Einheitslast (1 kg bei Biegung oder Zug)].

Der einfachste Fall eines Schwingers ist in Abb. 1 gegeben. Er besteht aus einer Masse  $M$  (auf reibungsfreier Unterlage) und einer Feder  $C$ , die an einem Fixpunkt befestigt ist. Die gestrichelte Linie geht durch den Schwerpunkt der Masse und kennzeichnet ihre Ruhelage. Beim Zusammendrücken oder Dehnen der Feder nimmt ihre Spannung mit dem Wege zu. Es entsteht das Bild der Federkennlinie Abb. 2. Der Abbildung liegt eine Feder gerader Kennung zugrunde, da die Auslenkung der Belastung verhältig ist. Das Auslenken der Masse aus der Ruhelage bedeutet ein Speichern von Energie in der Feder. Der gespeicherte Arbeitsbetrag ist bei der Kennung  $c$  der Feder ( $\text{tg } \gamma = c/1$ ) und der Auslenkung  $a$  gegeben zu

$$A = \frac{c \cdot a}{2}.$$

Lassen wir einen solchen ausgelenkten Schwinger frei, so wird die Masse  $M$  der Ruhelage zustreben, wobei sich ihre potentielle Energie in kinetische umsetzt. Der Vorgang ist vollendet, sobald die Ruhelage durchschritten wird. Jetzt geht das Spiel in umgekehrter Reihenfolge weiter. Ein idealer Schwinger wird nach einmaliger Auslenkung daher nie wieder zur Ruhe kommen.

**Grundgleichung.** Zur mathematischen Bestimmung der Schwingung genannten Bewegung bietet sich die Möglichkeit des Gleichsetzens von potentieller und kinetischer Energie oder nach d'Alembert die des Gleichgewichtes der Kräfte in einem beliebigen Augenblick. Ist die Auslenkung der Masse  $M$  durch die Koordinate  $x$  gegeben, ihre Trägheit durch  $m = G/g$ , so übt sie bei der Bewegung im betrachteten Punkt die Kraft aus  $m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$ , während die Spannung der Feder in diesem Augenblick  $c \cdot x$  ist. Die Kräfte sind gleich, aber einander entgegengesetzt gerichtet.

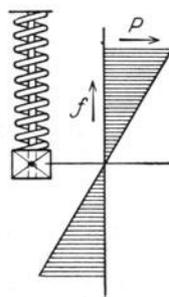


Abb. 1\*) und 2.  
Einfacher Schwinger  
und  
Kraft ( $p$ )—Weg ( $f$ )  
—Diagramm

\*) Die Abb. 1, 2, 10, 11, 12, 68 sind mit freundl. Erlaubnis des Verlages Julius Springer, Berlin dem Werke „Geiger, Mechanische Schwingungen“ entnommen worden.

Folgende Gleichung<sup>14)</sup> gilt:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + c \cdot x = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Durch Einführen des partikulären Integrals

$$x = A \cdot e^{i\omega t}$$

mit der zweiten Ableitung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 A \cdot e^{i\omega t}$$

geht die Gleichung über in

$$-m\omega^2 + c = 0.$$

Die Kreisfrequenz der Bewegung ist

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

und damit die minutliche Eigenschwingungszahl

$$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{c}{m}} \dots \dots \dots (2)$$

**Gekoppelter Schwinger.** Bei einem gekoppelten System nach Abb. 3, bei dem mehrere Massen  $M_1 \dots M_n$  und eine entsprechende Zahl von Federn  $C_1 \dots C_{n-1}$  mit den entsprechenden Größen  $m_1 \dots m_n$  und  $c_1 \dots c_{n-1}$ , die gleich oder voneinander verschieden sein können, aufeinander einwirken, sind die simultanen Differentialgleichungen anzuschreiben:

$$\left. \begin{array}{l} m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c_1(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2 \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} + c_1(x_2 - x_1) - c_2(x_2 - x_3) = 0 \\ m_3 \cdot \frac{d^2 x_3}{dt^2} + c_2(x_3 - x_2) + c_3(x_3 - x_4) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ m_{n-1} \cdot \frac{d^2 x_{n-1}}{dt^2} + c_{n-2}(x_{n-1} - x_{n-2}) + c_{n-1}(x_{n-1} - x_n) = 0 \\ m_n \cdot \frac{d^2 x_n}{dt^2} + c_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = 0 \end{array} \right\} (3)$$

Nach Einführen der partikulären Integrale wird

$$\left. \begin{aligned} -m_1 \omega^2 A_1 - c_1 A_2 + c_1 A_1 &= 0 \\ -m_2 \omega^2 A_2 + c_1 A_2 - c_1 A_1 + c_2 A_2 - c_2 A_3 &= 0 \\ -m_3 \omega^2 A_3 + c_2 A_3 - c_2 A_2 + c_3 A_3 - c_3 A_4 &= 0 \\ \dots &\dots \\ -m_{n-1} \omega^2 A_{n-1} + c_{n-2} A_{n-1} - c_{n-2} A_{n-2} + c_{n-1} A_{n-1} - c_{n-1} A_n &= 0 \\ -m_n \omega^2 A_n + c_{n-1} A_n - c_{n-1} A_{n-1} &= 0 \end{aligned} \right\} (4)$$

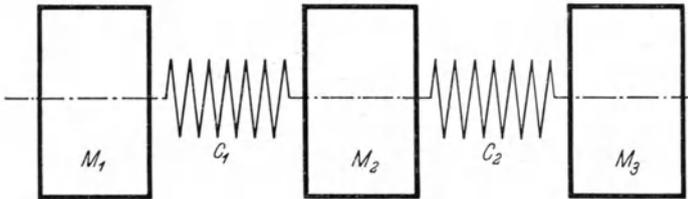


Abb. 3. Gekoppelter Schwinger

Diese Gleichungen werden meist in Determinantenform angeschrieben:

$$\begin{vmatrix} c_1 - m_1 \omega^2 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 - m_2 \omega^2 & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 - m_3 \omega^2 & -c_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -c_{n-2} & c_{n-2} + c_{n-1} - m_{n-1} \omega^2 & -c_{n-1} \\ 0 & 0 & -c_{n-1} & c_{n-1} - m_n \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

Holzer<sup>18)</sup> und Wydler<sup>20)</sup> lösen die Determinante durch eine biquadratische Gleichung höherer Ordnung für  $\omega^2$ . Bei ihrem Aufbau werden leicht die in den Grundwerten enthaltenen Fehler vergrößert, so daß die Bestimmung höherer Eigenschwingungszahlen mit vielstelligen Rechenmaschinen ausgeführt werden muß. Zur Vermeidung dieser Fehler und zur bequemeren Auswertung der Determinante entwickelte v. Brauchitsch<sup>3)</sup> seinen Kettenbruch.

Die Gleichungssysteme (4) werden in der Weise aufgelöst, daß der Ausschlag der  $n$ -ten Masse aus der  $n$ -ten Gleichung bestimmt und in die vorhergehende eingeführt wird. Die entstehende Gleichung ist ein Kettenbruch:

$$(0) = \alpha_1 = c_1 - m_1 \omega^2 - \frac{c_1^2}{c_1 + c_2 - m_2 \omega^2 - \frac{c_2^2}{c_2 + c_3 - m_3 \omega^2 - \dots}} \left. \begin{aligned} \dots \\ - \frac{c_{n-2}^2}{c_{n-2} + c_{n-1} - m_{n-1} \omega^2 - \frac{c_{n-1}^2}{c_{n-1} - m_n \omega^2}} \end{aligned} \right\} (6)$$

Mit dem Einklammern der Null und dem Anschreiben des Wertes  $\alpha$  für den Bruch wird angedeutet, daß bei der Wahl eines beliebigen Wertes für  $\omega$  die Gleichung nicht erfüllt wird, daß vielmehr ein von Null verschiedener Wert erscheinen wird, der sich zeichnerisch als Kurve  $\alpha(\omega)$  darstellt (Abb. 4). Berechnungen dieser Art führen rasch zum Ziel, da sich die Kurvenschnittpunkte mit der Abszisse leicht schätzen lassen\*).

Erhalten die aufeinanderfolgenden Teilbrüche die Bezeichnung  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ , so daß dem Nenner mit  $m_2$  der Wert  $\alpha_2$  zugeordnet ist, so entspricht einer Nullstelle von  $\alpha_n$  eine Asymptote von  $\alpha_{n+1}$ . Für die Zeichnung bedeutet das eine Erleichterung.

Zur weiteren Abkürzung werden die Bezeichnungen gewählt:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= c_1 - m_1 \omega^2, \\ \delta_2 &= c_2 + c_1 - m_2 \omega^2, \\ \delta_3 &= c_3 + c_2 - m_3 \omega^2, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_{n-1} &= c_{n-2} + c_{n-1} - m_{n-1} \omega^2, \\ \delta_n &= c_{n-1} - m_n \omega^2, \\ \alpha_1 &= \delta_1 - \frac{c_1^2}{\delta_2} - \frac{c_2^2}{\delta_3} - \frac{c_3^2}{\delta_4} - \dots - \frac{c_{n-1}^2}{\delta_n}, \\ \alpha_m &= \delta_m - \frac{c_m^2}{\delta_{m+1}} - \frac{c_{m+1}^2}{\delta_{m+2}} - \dots - \frac{c_{n-1}^2}{\delta_n}, \\ \beta_n &= \delta_n - \frac{c_{n-1}^2}{\delta_{n-1}} - \frac{c_{n-2}^2}{\delta_{n-2}} - \dots - \frac{c_1^2}{\delta_1}, \\ \gamma_m &= \frac{c_m^2}{\delta_{m+1}} - \frac{c_{m+1}^2}{\delta_{m+2}} - \dots - \frac{c_{n-1}^2}{\delta_n}, \\ \eta_m &= \frac{c_m^2}{\delta_m} - \frac{c_{m-1}^2}{\delta_{m-1}} - \frac{c_{m-2}^2}{\delta_{m-2}} - \dots - \frac{c_1^2}{\delta_1}. \end{aligned}$$

\*) An sich muß  $\alpha$  negativ gewählt werden, doch bietet diese Vernachlässigung eine Erleichterung für die Zeichnung.

Die Auflösung durch den  $\alpha$ -Bruch bildet nicht die einzige Lösungsmöglichkeit der Determinante. Je nachdem, von welcher Gleichung des Systems (4) bei der Auflösung ausgegangen wird, entsteht ein anderer Kettenbruch<sup>3)</sup> mit den gleichen Wurzeln. Sie haben die Form bei Auflösung ausgehend von der  $m$ -ten Masse:

$$(0) = \xi_m = \alpha_{m+1} - \eta_m^* \dots \dots \dots (7)$$

**Massenänderung.** Die Gleichung (7) und auch Gleichung (6) bieten den Vorteil, daß ohne weiteres angegeben werden kann, welchen Einfluß die Änderung der  $m$ -ten Masse<sup>3)</sup> hat. Für eine Massenvergrößerung derselben um  $\Delta_m$  gilt

$$(0) = \xi'_m = \xi_m - \Delta_m \omega^2 \dots \dots \dots (8)$$

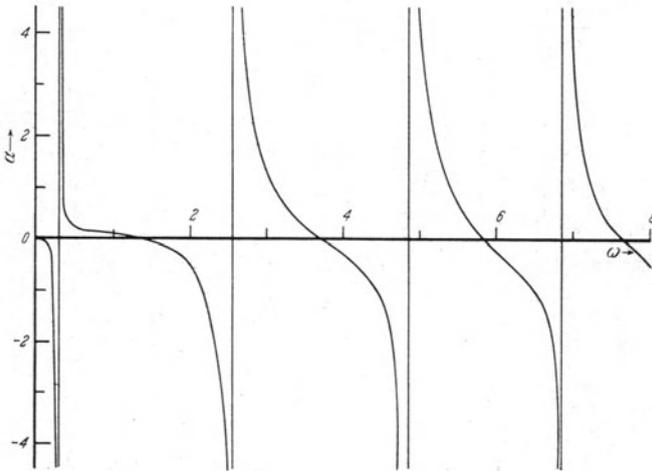


Abb. 4. Ergebnis der Schwingungsrechnung

wobei  $\xi'_m$  den neuen Wert  $\xi$  der geänderten Anlage bezeichnet. Zeichnerisch ist die Eigenschwingungszahl der geänderten Anlage durch Schnitt der Kurve  $\xi_m$  mit der Parabel  $+\Delta_m \omega^2$  gegeben.

**Federänderung.** Der Einfluß einer Änderung, die an einer Feder<sup>27)</sup> vorgenommen wird, läßt sich leicht angeben. Es ist

$$\xi_m = \alpha_{m+1} - \frac{c_m^2}{\beta_m}$$

\*) Zu beachten ist, daß in  $\alpha_{m+1}$  die Werte  $c_{m+1}$  und  $c_{m+2}$  enthalten sind.

Wird  $c_m$  um  $\Delta c_m$  vergrößert, so ist

$$\xi'_m = \alpha_{m+1} + \Delta c_m - \frac{(c_m + \Delta c_m)^2}{\beta_m + \Delta c_m}.$$

Sobald eine Eigenschwingung vorliegt, muß

$$\xi'_m = 0.$$

Aus dem Nullsetzen der Gleichung wird  $\Delta c$  gefunden zu

$$\Delta c_m = \frac{c_m^2 - \alpha_{m+1} \cdot \beta_m}{\alpha_{m+1} + \beta_m - 2 c_m} \dots \dots \dots (9)$$

Die Änderung aller Massen auf den  $u$ -fachen Wert und aller Federn auf die  $v$ -fache Rückstellkraft, wobei  $u$  und  $v$  auch den Wert 1 annehmen können, drückt sich im Kettenbruch folgendermaßen aus:

$$\alpha'_1 = v \cdot \left[ c_1 - m_1 \frac{u}{v} \omega^2 - \frac{c_1^2}{c_1 + c_2 - m_2 - m_2 \frac{u}{v} \omega^2 - \frac{u}{v} \omega^2 - \dots} \right] (10)$$

Mit

$$\omega^2 = \frac{u}{v} \omega'^2$$

geht die Gleichung in Gleichung (6) über. An Stelle von  $\omega^2$  erscheint der Wert  $\omega'^2$ . Diese Maßnahmen bedeuten lediglich eine Maßstabsänderung. Die Werte der Abszisse<sup>28)</sup> sind nicht mehr durch  $\omega$ , sondern durch  $\omega'$  bestimmt, wobei

$$\omega' = \sqrt{\frac{u}{v}} \cdot \omega. (11)$$

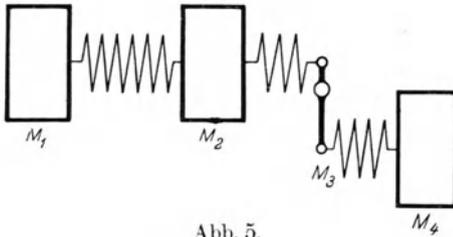


Abb. 5.

Längsschwinger mit Hebelübersetzung

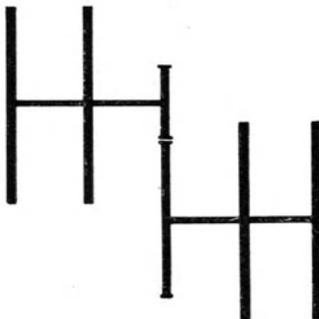


Abb. 6.

Drillschwinger mit Zahnradübersetzung

häufig werden in der Praxis aber auch solche mit Übersetzungen in den bewegten Teilen verwendet. In Abb. 5 ist ein solches

System wiedergegeben, bei dem die Übersetzung durch einen um einen Fixpunkt drehbaren Hebel bewirkt wird, während Abb. 6 denselben Fall für ein drehschwingungsfähiges Gebilde zeigt. Die Übersetzung ist dabei durch ein Zahnrad bewirkt.

Eine Betrachtung der Bewegungsverhältnisse lehrt, daß die durch die Übersetzung angekoppelten Teile einen im Verhältnis der Übersetzung ( $\ddot{u}$ ) größeren Weg bei einer Schwingung zurücklegen müssen. Die Kraft, die sie auf das ursprüngliche System ausüben bzw. das Moment, mit dem sie zurückwirken, ist seinerseits  $\ddot{u}$ -mal so groß. Die angekoppelten Teile verhalten sich also so, als wenn sie Teile des ursprünglichen Systems wären, die im Maßstab  $\ddot{u}^2$  vergrößert sind. Daraus wird als Lösung der Kettenbruch gefunden:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1'' &= c_1 - m_1 \omega^2 - \frac{c_1^2}{c_1 + c_2 - m_2 \omega^2} - \dots \\ \frac{c_n^2}{c_n + c_{n+1} \cdot \ddot{u}^2 - \ddot{u}^2 m_{n+1} \omega^2} - \frac{(\ddot{u}^2 c_{n+1})^2}{\ddot{u}^2 c_{n+1} + \ddot{u}^2 c_{n+2} - \ddot{u}^2 m_{n+2} \omega^2} - \dots \end{aligned} \right\} (12)$$

Sind mehrere Übersetzungen in einem System vorhanden, so ist jede für sich in der angegebenen Weise zu behandeln. Zu beachten bleibt, daß das vorangehende System bereits durch eine Übersetzung mit dem ihm vorgeordneten gekoppelt ist. Ist beispielsweise an die Endmasse der Abb. 5 ein weiteres System durch die Übersetzung  $\ddot{u}_2$  angekoppelt, so würden alle seine Teile in der Vergrößerung  $\ddot{u}_1^2 \cdot \ddot{u}_2^2$  erscheinen.

Von Interesse sind häufig die Ausschläge der einzelnen Massen gegeneinander. v. Brauchitsch<sup>3)</sup> bestimmt sie zu

$$\frac{A_m}{A_{m+1}} = \frac{c_m}{\beta_m} \quad \text{oder} \quad = \frac{\alpha_{m+1}}{c_m} \dots \dots \dots (13)$$

was aus der Auflösung der Gleichung (4) abgeleitet werden kann. Da das Verhältnis  $\frac{A_m}{A_{m+1}}$  positiv oder negativ sein kann, so muß es Schwingungen geben, bei denen die Massen in derselben Richtung oder einander entgegen schwingen. Pendeln sie gegeneinander, so bleibt ein Punkt der zwischenliegenden Feder in Ruhe. In ihm schneidet die „Schwingsform“ die Abszisse (Abb. 7).

Er wird mit Knotenpunkt bezeichnet (die Schwingungsform ist das Seileck, das die Punkte der einzelnen Massenausschläge verbindet).

Für jede Frequenz liegt der Knoten in einem anderen Punkte. Die Bedingung

$$\frac{A_m}{A_{m+1}} = \frac{c_m}{\beta_m} = \frac{\alpha_{m+1}}{c_m}$$

gilt nur für die Eigenfrequenz der Anlage. Für alle anderen werden die beiden Ausdrücke verschiedene Werte liefern. Sie führen zum Entwurf der Knotenwanderungslinien, die dem Konstrukteur ein Gefühl dafür geben, wie sich die Anlage im Betriebe verhalten wird. Zeichnerisch werden sie ermittelt, indem über dem Schema der Anlage, die durch die reduzierten Längen der Federn dargestellt ist, über der Masse  $m_m$  die Werte  $-\alpha_{m+1}$  (von einem beliebigen Punkte über der Abszisse ausgehend) und über der

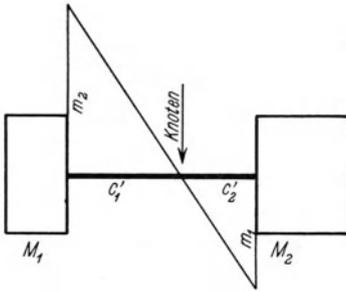


Abb. 7. „Schwingungsform“  
(bei Drillschwinger)

Masse  $m_{m+1}$  in entgegengesetzter Richtung der Wert  $c_m$  aufgetragen werden. Der Schnittpunkt der Verbindungslinie der Fußpunkte mit der Verbindungslinie dieser Endpunkte wird zur (für den betrachteten Punkt gehörigen) Frequenz  $\omega$  hinauf- oder herabprojiziert. Entsprechendes gilt für die Werte  $\beta_m$  und  $c_m$ .

Ein gutes Hilfsmittel ist dabei, daß über der Masse  $m_m$   $\alpha_m = \infty$  ist und  $\alpha_{m+1} = 0$ . Beide hier aneinanderstoßende Kurvenzweige haben eine gemeinsame Tangente<sup>3)</sup> (Abb. 8).

Die ( $\alpha$ )- und ( $\beta$ )-Knotenwanderungslinien schneiden sich mit steigender Frequenz in einer zunehmenden Anzahl von Knotenpunkten. Zusammengehörige Schnittpunkte liegen dabei auf einer gemeinsamen Geraden, die die Eigenschwingungszahl für die vorgelegte Schwingungsform angibt. Der steile Anstieg einer Wanderungslinie deutet auf eine stabile Lage des jeweiligen Knotens hin, während ein schleichendes Ansteigen besagt, daß schon geringe Systemänderungen große Änderungen der Eigenschwingungszahlen

verursachen. Solche Stellen sind bei notwendigen Änderungen besonders zu beachten.

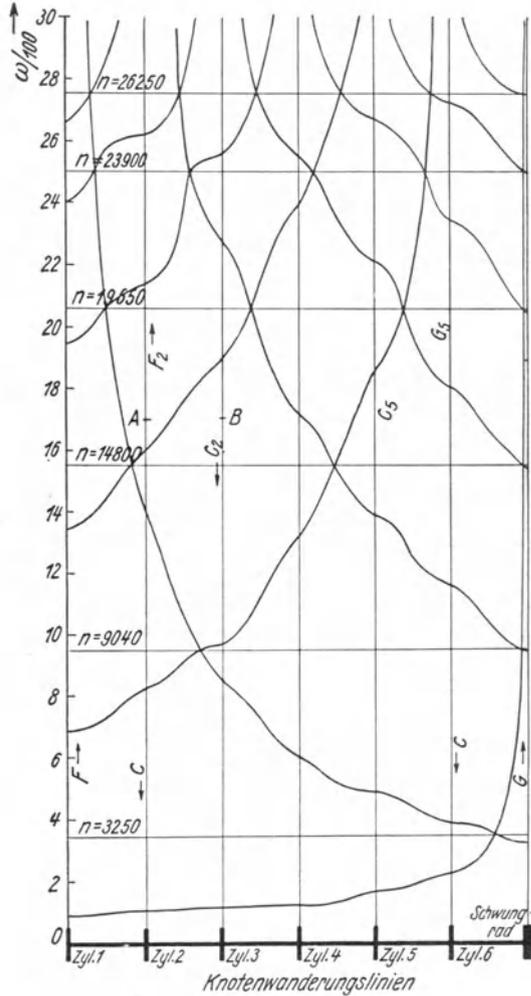


Abb. 8\*)

Das Zeichnen der  $\alpha$ - und  $\beta$ -Systeme liefert gleichzeitig eine zeichnerische Kontrolle der Rechnung, da alle Schnittpunkte bei

\*) Aus Zeitschr. f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt 1929, mit freundl. Erlaubnis des Verleges R. Oldenbourg, München.

denselben Eigenfrequenzen liegen müssen. Diese Forderung, die schon bei geringen Fehlern in Rechnung und Zeichnung nicht mehr erfüllbar ist, läßt alle Fehler scharf hervortreten.

Schließlich sei noch erwähnt, daß auch die Größe der Ausschläge einzelner Massen unter Einwirkung der an anderen angreifenden Erregungen (periodische Störungen) berechnet werden kann. Dazu ist die Auswertung der Formel

$$(A_n)_m = \frac{E_m}{\alpha_m} \cdot \frac{c_m}{\alpha_{m-1}} \cdot \frac{c_{m+1}}{\alpha_{m+1}} \dots \frac{c_{n-1}}{\alpha_n} \dots \dots (14)$$

und

$$(A_n)_m = (A_m)_n$$

nötig. Hierin bedeutet  $(A_n)_m$  den Ausschlag der Masse  $n$  unter Einwirkung der Erregung  $E_m$  an der Masse  $m$ . Die Formel läßt sich aus Gleichung (13) entwickeln. Grundsätzlich besteht kein Unterschied, ob der Ausschlag  $E_m$  durch einmalige Auslenkung und weitere Eigenschwingungen oder durch eine Erregung zustande kommt. Bei der Rechnung interessieren nur die Verhältnisse der einzelnen Ausschläge. Ist nun eine Auslenkung zu  $E_m$  festgesetzt, so sind auf Grund des Ausschlagverhältnisses [Gleichung (13)] auch die anderen im Absolutmaß bekannt.

**Sonderfälle.** Häufig ist die Schwingung eines Drillschwingers anzugeben, der aus einer Feder und zwei Endmassen besteht (Abb. 7). Aus dem Begriff der Schwingung folgt, daß beide Massen mit der gleichen Schwingungszahl pendeln. Ihre Ausschläge sind dabei einander entgegengesetzt gerichtet, wenn keine Rotation eintritt. Nach dem d'Alembertschen Prinzip werden folgende Differentialgleichungen aufgestellt:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c(x_1 + x_2) &= 0 \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + c(x_1 + x_2) &= 0 \\ m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

Danach ist

$$m_1 x_1 = m_2 x_2$$

und entsprechend

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c \left( \frac{m_1 + m_2}{m_2} \right) x_1 = 0.$$

Die Federkonstante  $c$  der Gleichung (1) ist hier verändert worden in

$$c \left( \frac{m_1 + m_2}{m_2} \right).$$

Wird die erste Gleichung im Gleichungssystem (15) bei der Auflösung gewählt, so enthält der Nenner die Größe  $m_1$ .

In beiden Fällen ist aber die Eigenfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{c \cdot m_1 m_2}{m_1 + m_2}}.$$

Die Deutung dieses Ergebnisses führt zu der Erkenntnis, daß die Feder als aus zwei einseitig eingespannten Teilen bestehend angesehen werden darf, die an ihren Enden die Massen  $m_1$  bzw.  $m_2$  tragen. Beide Teilsysteme haben dieselbe Eigenschwingungszahl. Die Trennstelle ist durch den „Knotenpunkt“ gegeben, d. h. durch den Punkt der Feder, der nicht an der Bewegung beteiligt ist. Seine Ermittlung ist graphisch leicht durchgeführt. Bei der Masse  $M_2$  wird senkrecht zur „Federlänge“, der Abszisse, der Wert  $m_1$  der Masse  $M_1$  aufgetragen. Entsprechend ist bei  $M_2$  zu verfahren. (Beweis nach dem Ähnlichkeitssatz der Geometrie.) Die Verbindungslinie  $m_1 \div m_2$  liefert im Schnitt mit der Abszisse den Schwingungsknoten.

Bei Mehrmassensystemen gilt gleiches. Die Gleichgewichtsbedingungen erfordern, daß die Massenkräfte rechts und links vom Knoten einander gleich sind. Daraus folgt die Bedingung

$$\sum m_R A \omega^2 = \sum m_L A \omega^2 \dots \dots \dots (16)$$

Diese Gleichung stellt die Lösung der Differentialgleichungen in algebraischer Form dar. Mit  $L$  bzw.  $R$  ist die Lage der Massen zum Knoten gekennzeichnet.

Gleichung (16) stellt das Gumbelsche Verfahren<sup>12)</sup> dar, das zur raschen graphischen Ermittlung von Eigenfrequenzen niedriger Ordnungszahl und zu Überschlagsrechnungen gut zu verwenden ist. Sowohl das Gumbelsche wie auch das Kutzbachsche Verfahren<sup>15)16)</sup> sind lediglich Rechenverfahren zur Bestimmung der Eigenschwingungszahlen, ohne weitere Schlüsse auf das Verhalten der Anlage im Betriebe zu ermöglichen.

Bei dem erstgenannten Verfahren wird zunächst die Anlage schematisch dargestellt unter Verwendung einheitlichen Maßstabes

für Federn und Massen (Abb. 9). Nach Festsetzung des Maßstabes für den Horizontalzug (bei Drehschwingungen  $G \cdot J$ , mit  $G =$  Gleitmodul,  $J =$  polares Trägheitsmoment der Welle) wird das Poldiagramm gezeichnet, dessen Ordinaten das Produkt  $m_x A \omega^2 / H$  darstellen. Die Polstrahlen werden nun als Seileck in das Anlagen-

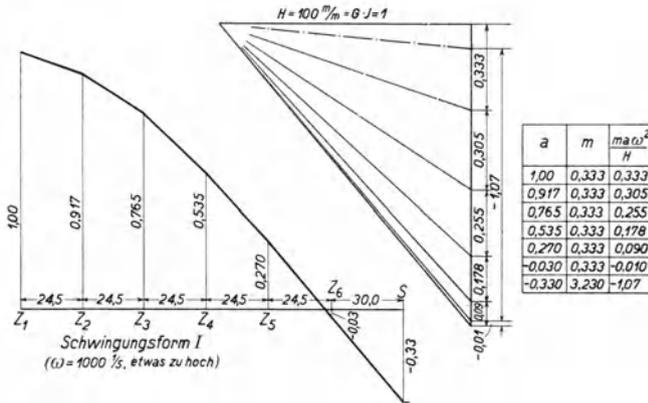


Abb. 9. Gümbelsches Berechnungsverfahren

schema übertragen. Bei richtiger Wahl von  $\omega$  verläuft die Schlußlinie horizontal.

**Erregung.** Schwingungsfähige Systeme können auf verschiedene Art zum Pendeln angeregt werden. Es ist nur nötig, daß die einwirkende Kraft nicht konstant ist. Von besonderem Interesse sind vor allem die periodischen Kräfte, deren einfachste die harmonischen oder sinusförmigen sind. Für diese Erregungsarten sind die Ansätze einfach und weitgehend behandelt<sup>14)</sup>.

Die meisten in der Praxis vorkommenden Belastungen weichen von dieser Idealform ab. Sie lassen sich aber, solange es sich um periodische Zeitfunktionen handelt, auf Sinuswellen zurückführen, da Fourier nachwies, daß jede periodische Funktion als Summe einer Reihe von Sinuswellen aufgefaßt werden kann. Durch harmonische Analyse<sup>22) 27)</sup> entstehen aus einer solchen Funktion eine größere Anzahl von Sinuswellen, von denen jede so zu behandeln ist, als ob sie nur allein wirksam wäre. Im Endergebnis ist die Summe aller Einzelwellen zu bilden, da für die fraglichen Vorgänge die Gesetze der ungestörten Überlagerung gelten.

Die Zerlegung periodischer Funktionen in Sinuswellen kann auf verschiedene Weise erfolgen. Hier sei nur auf die vielleicht einfachste und schnellste hingewiesen.

Die Funktion wird im Bereiche der Periode, meist  $\alpha \div \alpha + 2\pi$  oder  $\alpha \div \alpha + 4\pi$ , in  $k$  gleiche Teile<sup>21)</sup> geteilt, wobei  $\alpha$  ein beliebiger, willkürlich wählbarer Winkel ist. Die Ordinaten in den einzelnen Teilstrecken sind  $y_1, y_2 \dots y_k$ . Nach Fourier ist

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^{\mu=k} y_{\mu} &= \sum_1^k p_m + \sum_1^k p_1 \sin 1 \cdot \left[ \alpha + \varphi_1 + \frac{2\pi}{k} (\mu - 1) \right] \\ &+ \sum_1^k p_2 \sin 2 \left[ \alpha + \varphi_2 + \frac{2\pi}{k} (\mu - 1) \right] \dots \\ &+ \sum_1^k p_n \sin n \left[ \alpha + \varphi_n + \frac{2\pi}{k} (\mu - 1) \right], \end{aligned}$$

wenn  $n$  Harmonische in der Funktion enthalten waren. Alle Glieder mit  $n = \alpha \cdot k$ , wobei  $\alpha$  eine ganze Zahl ist, erscheinen im  $k$ -fachen Betrage, während die anderen verschwinden. Daher ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{\mu=1}^{\mu=k} y_{\mu} &= p_m + p_k \sin k(\alpha + \varphi_k) + p_{2k} \sin 2k(\alpha + \varphi_{2k}) \dots \\ &\dots p_{nk} \sin nk(\alpha + \varphi_{nk}). \end{aligned}$$

Wird bei der Zerlegung mit der höchsten Harmonischen begonnen, so ist  $k = n$  und daher

$$\frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} y_{\mu} = p_m + p_n \sin n(\alpha + \varphi_n).$$

Mit  $\alpha = 0$  bzw.  $\alpha = 2\pi/2n$

$$\frac{1}{n} \sum_{(0)} y_n = p_m + p_n \sin n \varphi_n$$

bzw.

$$\frac{1}{n} \sum_{\left(\frac{\pi}{2n}\right)} y_n = p_m + p_n \cos n \varphi_n.$$

Damit ist

$$p_n = \sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{(0)} y_{\mu} - p_m\right)^2 + \left(\frac{1}{n} \sum_{\left(\frac{\pi}{2n}\right)} y_{\mu} - p_m\right)^2}$$

und

$$n \varphi_n = \text{arc tg} \frac{\frac{1}{n} \sum_{(0)} y_{\mu} - p_m}{\frac{1}{n} \sum_{\left(\frac{\pi}{2n}\right)} y_{\mu} - p_m}.$$

Die mittlere Höhe ( $p_m$ ) der Funktion wird zweckmäßig als Abszisse gewählt, da sich dann die Gleichungen vereinfachen:

$$p_n = \sqrt{\frac{1}{n}} \sqrt{\sum_{(0)} y'_u{}^2 + \sum_{\left(\frac{\pi}{2n}\right)} y'_u{}^2 \dots \dots \dots} \quad (17)$$

bzw.

$$\varphi_n = \frac{1}{n} \arctg \frac{\sum_{(0)} y'_u}{\sum_{\left(\frac{\pi}{2n}\right)} y'_u} \dots \dots \dots \quad (18)$$

so daß leicht Amplitude ( $p_n$ ) und Phasenverschiebung ( $\varphi_n$ ) zu ermitteln sind.

Die Reihe erscheint in doppelter Form:

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_1^n y'_u &= p_n \cdot \sin n \varphi_n + p_{2n} \cdot \sin 2n \varphi_n + \dots \\ \frac{1}{n} \sum_1^n \left(\frac{\pi}{2n}\right) y'_u &= p_n \cdot \cos n \varphi_n + p_{2n} \cdot \cos 2n \varphi_n + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (19)$$

**Erzwungene Schwingung.** Bisher wurden die Eigenschwingungen behandelt. Sie können meist erst dadurch zur Bedeutung gelangen, daß sie angeregt (erregt oder erzwungen) werden, da ihre Amplitude nur im Resonanzfalle große Werte annimmt.

Die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung nimmt im einfachsten Falle die Form an:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + c \cdot x = E \sin(\kappa t).$$

Hier hat nicht die Summe von Massen- und Federkraft den Wert Null, sondern sie ist gleich der erregenden Kraft, deren Größe sich mit der Zeit ändert. Dabei ist  $E$  die Amplitude der Erregung,  $\kappa$  ihre Kreisfrequenz und  $t$  die Zeit.

Die Lösung der Gleichung ist, wenn man von der Ruhelage ausgeht:

$$x = \frac{E \cdot \kappa}{m(\omega^2 - \kappa^2)} \cdot \left( \frac{\sin \kappa t}{\kappa} - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right).$$

Der Schwinger führt also seine Eigenschwingung<sup>24)</sup> aus und die Schwingung mit der Frequenz der Erregung. Die Höchstwerte von  $x$  liegen zwischen den Grenzen

$$\pm \frac{E}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \kappa^2} \left( \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\omega} \right) = \pm \frac{E}{m \omega (\omega - \kappa)}.$$

Sonderfälle sind  $\kappa < \omega$  mit der Lösung

$$x = \frac{E}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2} \sin \kappa t,$$

d. h. der Schwinger kopiert die Erregung. Ferner  $\kappa > \omega$  mit

$$x = \frac{E}{m} \frac{1}{\omega \cdot \kappa} \cdot \sin \omega t.$$

Sie hat die Periode der Eigenschwingung, aber kleine Amplitude. Schließlich ist für  $\kappa \sim \omega$  (so daß  $\kappa = \Omega + \varepsilon$  und  $\omega = \Omega - \varepsilon$ )

$$x = \frac{E}{2 \Omega \cdot \varepsilon} \sin \varepsilon t \cdot \cos \Omega t,$$

womit eine Schwebung gegeben ist. Für  $\varepsilon = 0$  geht sie über in die Divergenz. Der Ausschlag wird unbestimmt groß. Er ist für einen einfachen Schwinger in Abb. 10 gezeichnet. Die Kurve zeigt zunächst langsames Anwachsen, dann Divergenz für das Zusammentreffen von Erregung und Eigenschwingung und später ein asymptotisches Abfallen zur Abszisse.

Für Systeme, die aus mehreren einfachen Schwingern zusammengesetzt sind und durch verschiedene Erregungen beeinflusst werden, lassen sich die Gleichungen ähnlich anschreiben. Sie bieten nichts Neues. Lediglich die Zahl der Divergenzen (Resonanzen) wächst mit der Zahl der Eigenfrequenzen und ist dieser gleich.

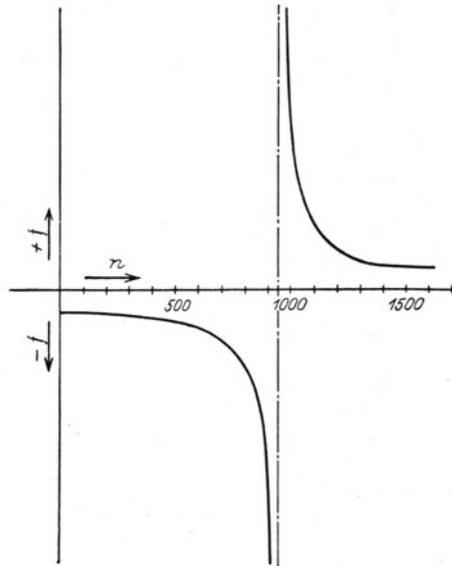


Abb. 10.

Ausschlagkurve für ungedämpften Schwinger

Divergenz (Resonanz) liegt immer dann vor, wenn irgendeine Sinuswelle in ihrer Periode mit einer Eigenfrequenz des Systems

zusammenfällt<sup>14)</sup>. Das gilt nicht nur für die Sinuswelle selbst, sondern auch für die Harmonischen einer andersartigen Erregung.

Wir können daher Resonanzschwingungen verschiedener Art feststellen<sup>15)</sup>. Sie werden nach der Ordnungszahl ( $p$ ) der Harmonischen und der Gradzahl ( $q$ ) der Schwingungsform genannt, z. B. Schwingung  $p$ -ter Ordnung und  $q$ -ten Grades. Bei  $s$  Harmonischen einer Erregung und  $r$  Eigenfrequenzen des Systems kann es, wie leicht nachzuweisen,  $r \cdot s$  Divergenzen (Resonanzen) geben.

**Gedämpfte Schwingungen.** Die bisher besprochenen Schwingungen berücksichtigten nur zwei Elemente der Schwinger, die Feder und die Masse. Zwischen ihnen würde die Energie unendlich oft hin und her pendeln. In der Wirklichkeit machen sich aber passive Kräfte geltend in Form von Reibung, Zähigkeit und anderen Verlustquellen, so daß jede Bewegung nach gegebener Zeit abgeklungen ist. Diese Kräfte werden als Dämpfung bezeichnet.

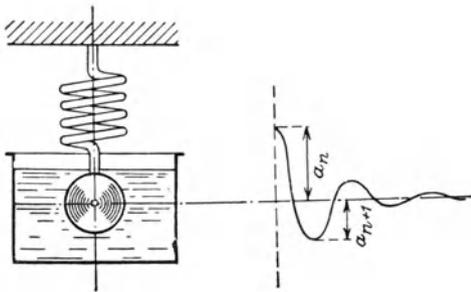


Abb. 11 und 12. Gedämpfter Schwinger (im Ölbad) und Ausschlagkurve

Der einfachste Fall ist in Abb. 11 dargestellt. Sie weist gegen Abb. 1 nur den Unterschied auf, daß die Masse sich in einer Flüssigkeit befindet. Ein solcher Schwinger führt eine abklingende Schwingung nach Abb. 12 aus, die sich um so rascher der Ruhe nähert, je größer die Dämpfung ist. Meist ist die Dämpfung der Geschwindigkeit verhältniß, so daß die Differentialgleichung lautet:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0.$$

Die charakteristische Gleichung ist

$$+ m \eta^2 + \eta \cdot b + c = 0$$

mit den Wurzeln

$$\eta = \frac{-b}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{b^2 - 4mc}.$$

Setzen wir noch, was für schwache Dämpfung ( $b^2 < 4mc$ ) zulässig ist,

$$\eta = \beta \pm i\varpi,$$

so ist

$$\varpi = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}.$$

Die Frequenz der gedämpften Schwingungen  $\varpi$  ist also geringer als die der ungedämpften  $\omega$ . Sie unterscheidet sich um so weniger von der der ungedämpften, je geringer die Dämpfung ist. Bei der Berechnung von Systemen mit geringer Dämpfung kann ohne merklichen Fehler die Berechnung so durchgeführt werden, als ob sie ungedämpft wären, was manchen Vorteil bietet und später benutzt wird.

Die gedämpfte Schwingung hat eine abnehmende Amplitude, d. h. eine ursprünglich erteilte Auslenkung aus der Ruhelage wird bei dem nächsten Rückschwingen nicht wieder erreicht, die Umkehr erfolgt schon früher. Es gilt für die Amplitude:

$$x = A \cdot e^{\beta t} \sin(\alpha + \omega t).$$

Die Abnahme erfolgt nach einem logarithmischen Gesetz ( $e^{\beta t}$ ). Kennzeichnend ist dabei das logarithmische Dekrement

$$\ln y_n - \ln y_{n+2} = \beta \tau$$

oder 
$$\log x_n - \log x_{n+2} = \frac{\beta}{\log e} \cdot (t_n - t_{n-2}),$$

das aus dem Verhältnis je zweier nach der gleichen Seite erfolgender Ausschläge ermittelt wird.

Für gekoppelte, gedämpfte Systeme lassen sich die Differentialgleichungen ebenfalls anschreiben und in der Art rechnerisch bestimmen, wie es durch den Kettenbruch für ungedämpfte Systeme geschah. Da aber beim Triebwerk nur geringe Dämpfungen vorliegen, die die Frequenzen und Ausschläge nur wenig verändern, soll hier von einem Anschreiben dieser Gleichungen abgesehen werden.

Zur Bestimmung des Ausschlages der Massen unter der Einwirkung der verschiedenen Erregungen bedienen wir uns des Näherungsverfahrens von Wydler<sup>29</sup>).

Er geht davon aus, daß im Beharrungszustand die in das System eingeführte, aus den Erregungen stammende Energie gleich

der durch die Dämpfungen verbrauchten bzw. abgeführten sein muß. Nennen wir die an der Masse  $M_n$  angreifende Harmonische der periodischen Kraft  $H_n$ , wobei diese Harmonische mit der Frequenz der Eigenschwingung veränderlich sein soll,  $A_n$  den Ausschlag der Masse, der aus der „Schwungsform“ entnommen werden kann,  $D_n$  die wirksame Dämpfung und  $\omega$  die Kreisfrequenz der Schwingung, so muß offenbar gelten

$$\sum H_n A_n x = \sum D_n A_n^2 x^2 \omega.$$

Statt des Wertes 1 für den Ausschlag der zu betrachtenden Masse ist der wirkliche durch die Dämpfung bestimmte Wert  $x$  gesetzt.

Für Motoren mit ihren gleich großen Zylindern kann man die Harmonischen und die Dämpfungen als untereinander gleich ansehen. Sie können daher vor die Summenzeichen gesetzt werden. Lösen wir gleichzeitig nach  $x$  auf, so ist

$$x = \frac{H_n \cdot \sum A_n}{D_n \sum A_n^2 \cdot \omega} \dots \dots \dots (20)$$

## § 2. Das Triebwerk

Das Triebwerk des Automobils setzt sich zusammen aus dem Motor, dem Getriebe, der Kardanwelle und ihren Gelenken, dem Differential, den Differentialwellen und den Hinterrädern mit Bereifung. Alle diese Teile können verschiedenartige Schwingungen ausführen, die wir der Reihe nach untersuchen werden. Entsprechend der Hauptaufgabe des Triebwerkes, Drehmomente zu übertragen, gehen wir von den Drillschwingungen aus und beginnen dabei bei dem Motor.

**Die Kurbelwelle.** Die Kurbelwelle soll bei ihrem Umlaufen im Motor die durch Verbrennung frei gewordene Energie des Kraftstoffes aus der oszillierenden Form in eine rotierende überführen, damit ihre Weiterleitung und Verwendung zweckmäßig erfolgen kann.

Die Kolben und die damit verbundenen Teile bewegen sich auf und ab mit wechselnder Geschwindigkeit. Sie müssen beschleunigt und verzögert werden. Die dafür erforderlichen Kräfte und Momente werden der Kurbelwelle entnommen. Der Arbeitshub

führt der Welle Energie zu, alle anderen entnehmen wieder einen Teil. Energiezu- und -abführung geschehen also als periodische Funktion der Zeit.

Könnte man stets, was nur bei langsam laufenden Maschinen gestattet ist, die Kurbelwelle als starr ansehen, so würde sich die Berechnung auf die Ermittlung des Ungleichförmigkeitsgrades bei gegebener Schwungmasse erstrecken<sup>62</sup>). Verschiedene Brüche und Geräuschbelästigungen bei bestimmten Drehzahlen haben aber gezeigt, daß diese einfache Betrachtungsweise für Schnellläufer nicht zulässig ist.

In den Motoren sind eine ganze Reihe träger Massen (Pleuel, Kolben, Schwungrad, Steuerungsantrieb...) durch elastische Zwischenglieder verbunden. Die Welle stellt nämlich einen Torsionsstab mit gekrümmter Achse dar und erleidet bei Drillbeanspruchungen elastische Formänderungen. Das Triebwerk des Motors ist wegen dieser Verbindung von Massen und elastischen Kräften als schwingungsfähiges Gebilde anzusehen. Seine Untersuchung und Betriebsweise muß daher dynamischen Bedingungen genügen. Als Grundlage solcher Betrachtungen ist die Untersuchung und Festlegung der Eigenschwingungen anzusehen.

Bei der Berechnung eines schwingungsfähigen Systems ist die Verteilung der Massen zu beachten, da die abgeleiteten Beziehungen Punktmassen zur Voraussetzung hatten. Bei der üblichen Bauart der Motoren ist diese Bedingung erfüllt, so daß die Ansätze gefahrlos übernommen werden dürfen.

1. Massenbestimmung. Die Massen sind im Motor, wie bereits angedeutet, in den verschiedenartigsten Formen vertreten. Für die Berechnung empfiehlt sich daher eine Reduktion auf eine gemeinsame Basis, als welche der Rotationskörper mit dem Trägheitsradius 1 (1 cm) oder, was dasselbe ist, die Masse an diesem Hebelarm anzusehen ist.

Bei der Reduktion denken wir uns die zu reduzierende Masse (z. B. das Schwungrad) als aus Zylinder- und Kegelstücken bestehend, deren Trägheit einzeln berechnet wird. Das Trägheitsmoment des Zylinderstückes ist

$$J_z = \frac{7,85}{10^7} (D_a^4 - D_i^4) h \text{ cmkgs}^2,$$

das des Kegels

$$J_K = \frac{1,57}{10^7} \left( \frac{D_a^5 - D_i^5}{D_a - D_i} \right) h \text{ cmkgs}^2.$$

Als Material wird hier Stahl vorausgesetzt mit dem spezifischen Gewicht  $\gamma = 7,85 \text{ g/cm}^3$  und dem Elastizitätsmodul  $220\,000 \text{ kgcm}^{-2}$ . In den Formeln ist  $D_a$  der Außendurchmesser,  $D_i$  der Innendurchmesser eines Ringes von einer Breite  $h$ . Das Gesamtträgheitsmoment ist dann

$$J = \sum J_Z + \sum J_K.$$

Für weniger deutlich bestimmte Körper ist zu bilden

$$J = \mu \int R^2 \cdot dv \quad \text{oder} \quad J = \mu \iiint r^3 dr d\varphi db,$$

worin  $\mu$  die spezifische Masse,  $R$  der Radius des Volumenelements  $dv$  von der Bogenlänge  $r d\varphi$ , der Höhe  $dr$  und der Breite  $db$  ist. Bei Massen, wie sie durch die Kurbelarme dargestellt werden, geht das Integral in das Summenzeichen über

$$J = \sum m R^2,$$

wobei unter  $m$  die Masse eines Streifens mit der Schwerlinie in Abstand  $R$  verstanden wird.

Bei Dynamomaschinen und ähnlichen Aggregaten, die gelegentlich mit dem Motor gekuppelt werden, ist das Schwungmoment ( $GD^2$ ) bekannt. Seine Umrechnung erfolgt gemäß

$$J = \frac{GD^2}{4 \cdot 981} \text{ cmkgs}^2.$$

Zur Nachprüfung der Rechnung oder bei fertig vorgelegten Teilen wird vorteilhaft der Versuch zur Bestimmung der Massenträgheit herangezogen. Es kann das einmal durch einen Drillschwingungsversuch geschehen, in dem an eine Drillfeder  $C$  zunächst eine bekannte Masse  $M_e$  gehängt und die Schwingungszahl der vollen Periode  $n_e$  ermittelt wird. Nach Ersatz von  $M_e$  durch die unbekannte Masse  $M_u$  wird unter denselben Einspannbedingungen die neue Schwingungszahl zu  $n_u$  bestimmt. Es ist dann

$$n_e = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{C}{M_e}}$$

und

$$n_u = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{C}{M_u}},$$

daraus wird

$$M_u = \left(\frac{n_e}{n_u}\right)^2 M_e.$$

Sobald der Körper außerhalb der Drehachse unterstützt werden kann, läßt sich das Moment durch Auspendeln bestimmen. Die Masse wird auf eine Schneide gehängt, so daß der Schwerpunkt unter dem Aufhängepunkt liegt und das Ganze als Pendel betrachtet werden darf. Die Schwingungszahl wird beobachtet und daraus

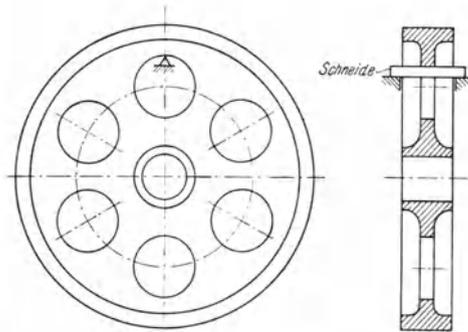


Abb. 13. Pendelaufhängung des Schwungrades

nach den für das physikalische Pendel<sup>14)</sup> geltenden Gesetzen (die Masse ist ja in dieser Form nichts anderes als ein physikalisches Pendel) die auf den Schwerpunkt bezogene Masse errechnet zu

$$J = \left(\frac{30}{\pi \cdot n}\right)^2 \cdot G \cdot s - \frac{G \cdot s^2}{g},$$

worin  $n$  die Zahl voller Perioden bedeutet, in denen der Körper pendelte,  $G$  sein Gewicht,  $s$  den Schwerpunktsabstand vom Aufhängepunkt,  $g$  die Erdbeschleunigung.

Die Reduktion der Pleuelstangen und Kolben ist schwieriger. Sie laufen nicht gleichmäßig mit der Welle um, üben vielmehr periodisch wechselnde Kräfte auf die Kurbelwelle aus. Bei der Zurückführung dieser Massen auf mit der Welle umlaufende müssen deshalb die Bewegungsverhältnisse der einzelnen Massenpunkte untersucht werden. Sie ändern sich je nach der Art des Motors,

ob er eine Einfach- oder Mehrfachreihenmaschine oder gar Umlaufmaschine ist.

Da die Bewegung jedes Elementes der Pleuelstange anders ist, erfolgt zweckmäßig die Reduktion der Stange auf charakteristische Punkte mit bekannter und konstanter Bewegung. Das sind Kolbenbolzen und Kurbelzapfen. Bei der Reduktion darf die Lage des Schwerpunktes, die Masse der Stange und ihr Trägheitsmoment um den Schwerpunkt nicht verändert werden. Die Ersatzmassen seien  $m_k$  im Kolbenbolzen,  $m_z$  im Kurbelzapfen und  $m_i$  am Radius 1 die durch  $m_k$  und  $m_z$  nicht erfaßte träge Masse um den Schwerpunkt.

Für die Größe der Massen gilt die Beziehung

$$m_z + m_k = m,$$

und mit  $L_z$  bzw.  $L_k$  als Schwerpunktsabständen von Zapfen bzw. Kolbenbolzen

$$m_z L_z = m_k L_k,$$

und bei dem Trägheitsmoment der Stange um den Schwerpunkt  $J$

$$J = m_i + m_z L_z^2 + m_k L_k^2,$$

da  $m_z L_z^2$  bzw.  $m_k L_k^2$  die Trägheitsmomente der Ersatzmassen um den Schwerpunkt sind.

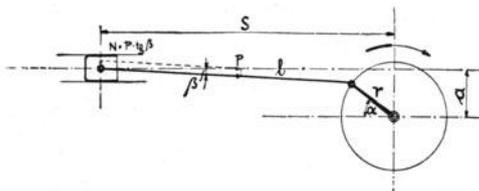


Abb. 14\*). Geschränkter Kurbeltrieb

Das Trägheitsmoment kann sich nur bei Drehungen der Stange äußern. Sie sind durch Änderung des Winkels  $\beta$  (Abb. 14) bestimmt. Das Reaktionsmoment ist also durch das Drehmoment

$$D_i = -m_i \frac{d^2 \beta}{dt^2}$$

\*) Die Abb. 14, 15, 49 sind mit freundl. Erlaubnis des Verlages Julius Springer, Berlin dem Werke „Kölsch, Gleichgang und Massenkräfte bei Fahr- und Flugzeugmaschinen, 1911“ entnommen worden.

gegeben, das auf das Maschinengehäuse bzw. die Welle einwirkt. Wird die Pleuelstangenlänge mit  $L$  bezeichnet, so werden in den Stangenenden senkrecht zur Zylinderachse Kräfte  $P_i$  geweckt gemäß

$$D_i = PL \cos \beta.$$

Die Kraft  $P$  im Kurbelzapfen weckt eine weitere  $P'$  im Wellenlager und übt auf die Welle das Moment  $P r \cos \alpha$  aus. Das Maschinengehäuse wird demgemäß durch das Moment  $P(r \cos \alpha + L \cos \beta)$  beansprucht. Durch Umformung geht der Ausdruck über in

$$P(r \cos \alpha + L \cos \beta) = D_i + \frac{D_i \cdot r \cos \alpha}{L \cos \beta}.$$

Da ferner

$$\frac{r \cos \alpha}{L \cos \beta} = \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{d\beta}{dt} \cdot \frac{1}{\omega},$$

worin  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Kurbelwelle ist.

Das auf die Welle ausgeübte Moment ist also

$$D_{wi} = m_i \frac{d^2 \beta}{dt^2} \cdot \frac{d\beta}{dt} \cdot \frac{1}{\omega}$$

und das auf das Gehäuse wirkende

$$-D_{gi} = m_i \frac{d^2 \beta}{dt^2} + m_i \frac{d^2 \beta}{dt^2} \cdot \frac{d\beta}{dt} \cdot \frac{1}{\omega}.$$

Eine Untersuchung der Winkelfunktionen lieferte weiterhin wegen der Beziehung aus der geometrischen Anordnung des Kurbeltriebes

$$r \sin \alpha = L \sin \beta + a$$

die Reihe

$$D_{wi} = -m_i \omega^2 (a_2 \sin 2\alpha + 2a_4 \sin 4\alpha + \dots \\ - 0,5 b_1 \cos \alpha - 1,5 b_3 \cos 3\alpha - \dots)$$

und

$$D_{gi} = m_i^2 (a_2 \sin 2\alpha + 2a_4 \sin 4\alpha + \dots \\ - 0,5 b_1 \cos \alpha - 1,5 b_3 \cos 3\alpha - \dots \\ + c_1 \sin \alpha + 3c_3 \sin 3\alpha + \dots - 2d_2 \cos 2\alpha - 4d_4 \cos 4\alpha - \dots).$$

Aus diesen Ableitungen folgt, daß bei Beachtung der Kurbelversetzung sich alle Kräfte und Momente ausgleichen bis auf die, die ganzzahlige Vielfache der Zylinderzahl sind. (Selbst 6- und 8-Zylindermotoren können daher nicht vollkommen ausgeglichen sein.)

Meist ist aber die Masse  $m_i$  sehr klein und gewöhnlich sogar negativ, so daß ihr nicht übertriebenes Gewicht zuzulegen ist. Für einen Hispano-Suiza-Motor mit einer Pleuellänge von  $L = 223$  mm, der Masse  $m_k = 376$  g, der Masse  $m_z = 970$  g beträgt sie nur  $38 \text{ cmgs}^2$ . Mit  $\alpha = 0$  wird die Grundwelle bei  $n = 1800$  U/min  $D_{gi} = -38 \cdot 188,3^2 \cdot 0,252 \sin \alpha = -340 \cdot \sin \alpha \text{ cmkg}$  und die zweite Welle  $-42 \sin 2\alpha$ .

Bei Maschinen ohne Schränkung sind die Koeffizienten der Sinusglieder etwas kleiner als bei den geschränkten. Die Cosinusglieder verschwinden ganz. Sie werden errechnet aus

$$a_2 = \frac{1}{2} \lambda^2 - \frac{1}{32} \lambda^6 - \frac{1}{32} \lambda^8 - \dots,$$

$$a_4 = -\frac{1}{8} \lambda^4 - \frac{1}{16} \lambda^6 - \frac{1}{32} \lambda^8 - \dots,$$

$$a_6 = \frac{1}{32} \lambda^6 + \frac{1}{32} \lambda^8 + \dots,$$

.....

$$c_1 = \lambda + \frac{1}{8} \lambda^3 + \frac{3}{64} \lambda^5 + \dots,$$

$$c_3 = -\frac{1}{8} \lambda^3 - \frac{9}{128} \lambda^5 - \dots,$$

$$c_5 = \frac{3}{128} \lambda^5 + \frac{25}{1024} \lambda^7 + \dots$$

Für die gangbaren Werte von  $\lambda$  ( $\lambda = \frac{r}{L}$ ) können die Koeffizienten der Tabelle entnommen werden:

$\lambda$	$a_2$	$a_4$	$c_1$	$c_3$
$\frac{1}{3}$	0,0556	- 0,0015	0,3379	- 0,0046
$\frac{1}{4}$	0,0312	- 0,0009	0,2520	- 0,0020
$\frac{1}{5}$	0,0200	- 0,0002	0,2010	- 0,0010

Die Masse  $m_z$  der Pleuelstange befindet sich im Mittelpunkt des Zapfens. Sie nimmt daher an allen Bewegungen dieses Punktes teil. Da der Zapfen nur rotiert, so ist sie gezwungen, ebenfalls zu rotieren und vermehrt dadurch die rotierenden Massen der Welle.

Die hin und her gehende Masse der Pleuelstange, die sich im Kolbenbolzen befindet, kann als Teil dieses Elementes betrachtet werden, da sie seiner Bewegung zwangsläufig folgt. Die Trägheitskräfte dieser Teile wirken ihrerseits in gleicher Richtung wie die Gaskräfte und können daher als Belastungen des dann masselos zu denkenden Kurbeltriebes aufgefaßt werden.

Die Wucht der hin und her gehenden Masse ist

$$W_H = \frac{1}{2} M_H \cdot c^2,$$

die der reduzierten Masse an der Kurbel

$$W_Z = \frac{1}{2} M_{HR} \cdot v^2.$$

Beide sind einander gleich, so daß

$$M_{HR} = M_H \cdot \left(\frac{c}{v}\right)^2 \cdot \dots \dots \dots (21)$$

Das Verhältnis  $\frac{c}{v}$  muß aus dem Kurbeltrieb bestimmt werden.

Die Geschwindigkeit  $c$  des Kolbenbolzens ist das Differential des Weges nach der Zeit

$$c = \frac{ds}{dt}.$$

Unter Berücksichtigung des Kurbeldrehwinkels  $\alpha$  kann geschrieben werden:

$$c = \frac{ds}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt}.$$

Für  $s$  läßt sich aus Abb. 15 die Gleichung anschreiben<sup>54</sup>):

$$s = r \cdot \cos \alpha + l - \frac{1}{2l} (a - r \cdot \sin \alpha)^2.$$

Mit  $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$  wird nach Ausführung der Differentiation<sup>73</sup>)

$$c = -r \cdot \omega \left( \sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin 2\alpha - \frac{a\lambda}{r} \cos \alpha \right),$$

worin  $r$  den Kurbelradius,  $l$  die Schubstangenlänge,  $\frac{r}{l} = \lambda$  das Schubstangenverhältnis,  $a$  die Schränkung und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit bedeutet.

Wegen Gl. (21) und  $r \cdot \omega = v$  wird die reduzierte Masse

$$M_{HR} = M_H \left( \sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \sin 2\alpha - \frac{a\lambda}{r} \cos \alpha \right)^2.$$

Die Auflösung der Klammer würde eine Reihe von Sinus- und Cosinuswellen und Produkten aus beiden Größen ergeben. Es ist zweckmäßig, bei allen Schwingungsuntersuchungen nur die reinen Wellen zu verwenden. Das bietet eine leichte Übersicht, weil die Sinuswellen einander überlagert werden können.

Um diese Funktionen auf eine Cosinuswelle zurückzuführen, können zwei Wege eingeschlagen werden. Die einzelnen Ausdrücke können direkt nach den aus der Trigonometrie bekannten Formeln zerlegt werden, die sich auf Produkte und Mehrfachwinkel bei Sinusfunktionen beziehen, oder es wird eine Analyse nach Fourier durchgeführt.

Die Fouriersche Analyse geht davon aus, daß sich eine Reihe von Sinuswellen  $B_k \sin k\alpha$  und Cosinuswellen  $A_k \cos k\alpha$  einem konstanten Wert  $\frac{1}{2} A_0$  überlagern und die vorgelegten Funktionen  $f(\alpha)$  bilden. Es gilt also

$$f(\alpha) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_k A_k \cos k\alpha + \sum_k B_k \sin k\alpha \quad \dots \quad (22)$$

Die Konstante der Gleichung läßt sich bestimmen als Mittelwert der Funktion

$$\frac{1}{2} A_0 = \frac{1}{\alpha} \int f(\alpha) d\alpha.$$

Zur Ermittlung der beiden anderen Glieder wird die Gleichung 22 mit  $\sin(n\alpha) d\alpha$  bzw.  $\cos(n\alpha) d\alpha$  multipliziert und integriert. Es ist dann

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\alpha f(\alpha) \cos(n\alpha) d\alpha &= \frac{1}{2} A_0 \int_0^\alpha \cos(n\alpha) d\alpha \\ + \sum_k A_k \int_0^\alpha \cos(n\alpha) \cos(k\alpha) d\alpha &+ \sum_k B_k \int_0^\alpha \cos(n\alpha) \sin(k\alpha) d\alpha \end{aligned} \right\} (23)$$

Da positiver und negativer Teil der Sinuswellen einander gleich sind, wird

$$\cos(n\alpha) d\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \sin(k\alpha) \cos(n\alpha) d\alpha = 0.$$

In der Gleichung verschwinden alle Glieder bis auf  $A_k$ , so daß

$$A_k = \frac{2}{\alpha} \int f(\alpha) \cos(k\alpha) d\alpha$$

und entsprechend nach Multiplikation von (23) mit  $\sin(n\alpha)$

$$B_k = \frac{2}{\alpha} \int f(\alpha) \sin(k\alpha) d\alpha.$$

Die Analyse führt, wenn statt der Massen die Gewichte gesetzt werden, zu

$$G_{HR} = G_H \left[ \begin{array}{l} + \frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{8} + \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 \frac{\lambda^2}{2} \\ + \frac{\lambda}{2} \left[ \cos \alpha - \left(\frac{\alpha}{r}\right) \lambda \sin \alpha \right] \\ - \left[ \frac{1}{2} - \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 \cdot \frac{\lambda^2}{2} \right] \cos 2\alpha - \left(\frac{\alpha}{r}\right) \lambda \sin 2\alpha \\ - \frac{\lambda}{2} \left[ \cos 3\alpha - \left(\frac{\alpha}{r}\right) \lambda \sin 3\alpha \right] \\ - \frac{\lambda^2}{8} \cos 4\alpha \end{array} \right] \dots (24)$$

In der Literatur sind eine Reihe von verschiedenen Werten für  $\frac{\alpha}{r}$  angegeben, die zwischen 0,1 und 0,25 liegen. Wegen dieser Verschiedenartigkeit läßt sich die Formel nicht weiter ausgestalten und muß bei jeder Schwingungsrechnung entsprechend ausgewertet werden.

Wird in der Gleichung (24) die Schränkung  $\alpha = 0$ , so entsteht der normale, ungeschränkte Kurbeltrieb. Seine Reduktionsformel ist

$$G_{HR} = G_H \left[ \begin{array}{l} + \frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{8} + \frac{\lambda}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \cos 2\alpha \\ - \frac{\lambda}{2} \cos 3\alpha - \frac{\lambda^2}{8} \cos 4\alpha \end{array} \right] \dots (25)$$

Zur Verdeutlichung der Größe der einzelnen Wellen ist in Abb. 15 eine graphische Darstellung der Funktion gegeben<sup>62</sup>). Die vierte Harmonische  $\left[ -\frac{\lambda^2}{8} \cos(4\alpha) \right]$  ist bereits so klein, daß sie sich nicht mehr zeichnen läßt.

Die experimentelle Bestimmung der Massen  $m_Z$  und  $m_K$  geschieht durch gleichzeitiges Wägen beider Stangenenden, die auf Schneiden gelagert sind. Das Gewicht des Pleuelauges ist rotierend und das des Kolbenbolzenauges hin und her gehend.

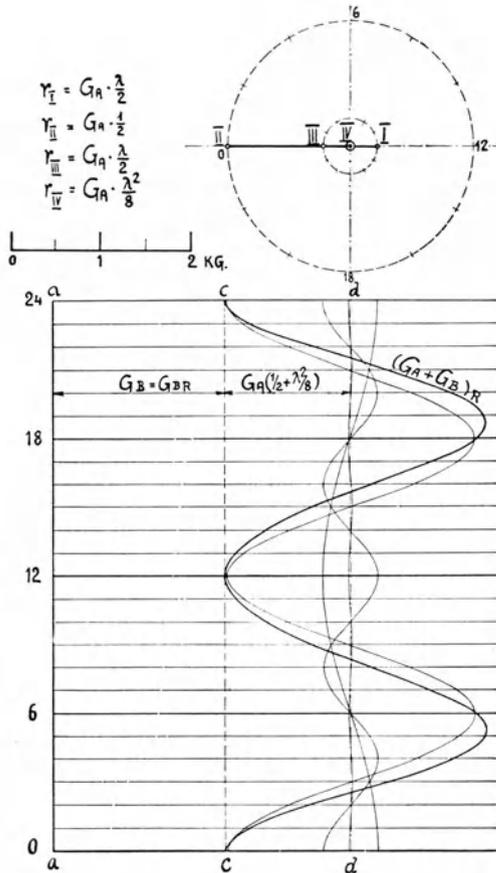


Abb. 15. Massenkraftkurven

Die auf den Kurbelzapfen reduzierte Masse besteht nun aus einem konstanten Teile und einem, der sich periodisch mit der Zeit ändert. Zunächst interessiert nur der Teil von gleichbleibender Größe, während der veränderliche Teil später betrachtet werden

soll. In der Mitte jedes Kurbelzapfens wird die Masse des Zapfens, die reduzierte der Wangen und Ausgleichgewichte, der rotierende Teil der Pleuelstange und der konstante Anteil der hin und her gehenden Massen vereinigt angenommen.

Bei Voraussrechnungen ist es erwünscht, ungefähr die Größe der in Frage stehenden Massen zu kennen. Für die Kolben und

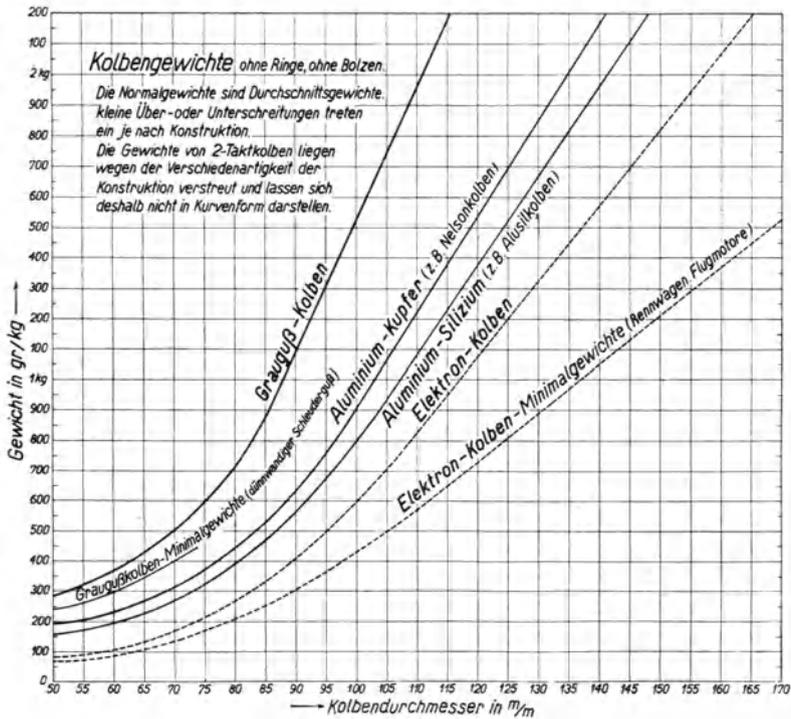


Abb. 16

Kolbenbolzen läßt sich das verhältnismäßig leicht angeben, da sie Funktionen des Durchmessers sind. Aus Abb. 16 entnehmen wir, daß das Kolbengewicht

$$G_K = a \cdot D^{2,8},$$

worin  $a$  eine Konstante und  $D$  den Kolbendurchmesser bedeuten. Die Größe von  $a$  ist näherungsweise für Elektron  $1,81 \cdot 10^{-3}$ , für Aluminium  $2,86 \cdot 10^{-3}$ , für Guß  $4,15 \cdot 10^{-3}$ .

\*) Von Herrn Dipl.-Ing. W. Mahle, Cannstadt, freundlichst überlassen.

Die Schubstangengewichte sind nicht nur abhängig vom Durchmesser des Zylinders, sondern gleichzeitig von  $\lambda$ , so daß zwar geschrieben werden kann:

$$G_P = b \cdot D^\alpha \cdot \lambda^\beta,$$

jedoch lassen sich die unbekanntenen Konstanten nur schwer ermitteln. Für gleichbleibendes  $\lambda$  darf aber beim Vergleich ähnlicher Typen  $\alpha$  näherungsweise zu 2,8 gewählt werden.

An die Kurbelwelle und die Wellenleitung sind durch Zahnräder, Riemen oder Ketten eine Reihe anderer Elemente angekuppelt. Während man in der Regel die Ankupplung des Ventilators durch den Riemen vernachlässigen kann, da er sehr elastisch ist und bei raschen Belastungswechseln rutscht, kann bei den anderen Kupplungselementen nicht dasselbe vorausgesetzt werden. Insbesondere sind die Zahnräder als starre Kupplungen anzusehen.

Bei der Reduktion solcher angekuppelter Massen wird die Abb. 17 benutzt, die die Umwandlung sinnfällig darstellt. Die Masse des

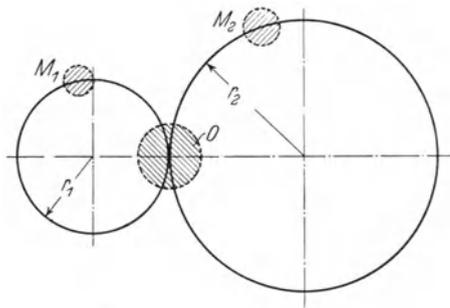


Abb. 17. Übersetzungsreduktion

kleinen Rades sei  $M_1$  und befinde sich als Punktmasse auf dem Teilkreis des Zahnrades. Auf dem Teilkreis des großen Rades befinde sich die Masse  $M_2$ . Die übrigen Teile der Zahnräder seien starr und masselos. Wird nun das kleine Rad gedreht, so muß seine Masse  $M_1$  beschleunigt werden und gleichzeitig  $M_2$ , da das kleine mit dem großen Rade gekuppelt ist. Die scheinbare Vermehrung der Masse des kleinen Rades wird deutlich, wenn die Massen  $M_1$  und  $M_2$  auf dem Umfang ihrer Teilkreise so weit verschoben werden, daß sie in  $O$  aufeinanderliegen.

In 0 ist es gleichgültig, ob beide Massen sich auf dem Teilkreise des kleinen oder großen Rades befinden, da offenbar bei der Beschleunigung beide Massen (weil sie in dem selben Punkt vereinigt sind) die selbe Beschleunigung erfahren müssen. Die reduzierte Masse ist folglich

$$M_R = M_1 + M_2.$$

Meist wird aus der Berechnung und auch beim experimentellen Bestimmen der Massen nicht die auf den Teilkreis bezogene Masse gegeben sein, sondern das polare Massenträgheitsmoment. Dieses berechnet sich aus der Punktmasse in bekannter Art zu

$$M_p = M \cdot r^2,$$

wenn  $r$  der Drehpunktsabstand ist,  $M$  die Punktmasse und  $M_p$  das polare Massenträgheitsmoment. Sind in Abb. 21 die Radien der Teilkreise mit  $r_1$  bzw.  $r_2$  bezeichnet, so haben die Räder die polaren Massenträgheitsmomente

$$M_{p_1} = M_1 \cdot r_1^2 \quad \text{bzw.} \quad M_{p_2} = M_2 \cdot r_2^2.$$

Die reduzierte Masse  $M_R$  befand sich auf dem Umfange des Kreises mit  $r_1$  und stellt daher das Trägheitsmoment

$$M_{p_R} = M_R \cdot r_1^2 \quad \text{oder} \quad M_{p_R} = M_1 r_1^2 + M_2 r_1^2$$

dar. Werden die polaren Trägheitsmomente für die Massen gesetzt, so nimmt die Gleichung die Form an:

$$M_{p_R} = M_{p_1} + M_{p_2} \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = M_p + M_{p_2} \cdot \dot{u}^2.$$

Die Reduktion geschieht also dadurch, daß die angekuppelte Masse mit dem Quadrat des Übersetzungsverhältnisses ( $\dot{u}$ ) multipliziert wird, so daß die Masse des langsamer laufenden Rades verkleinert erscheint.

Statt durch starren Eingriff der Zähne können die Räder auch durch eine Kette miteinander verbunden sein. In der beschriebenen Weise wird auch hier die Masse der Kette in einem Punkt vereinigt gedacht, der sich zweckmäßig auf dem Umfange des Rades befindet, auf das reduziert wird. Hat er den Mittelpunktsabstand  $R$ , so ist  $MR^2$  das Massenträgheitsmoment. Eine Kette kann also so aufgefaßt werden, als ob ihre gesamte Masse

mit dem Bezugssystem direkt verbunden und auf dem Umfange des Teilkreises des kleinen Rades befestigt wäre\*).

2. Federbestimmung. Zwischen den Massen, die in ihren Schwerebenen verdichtet angenommen werden, befinden sich elastische Glieder mannigfacher Art. Sie üben die Rückstellkräfte aus. Am einfachsten ist die Bestimmung der Rückstellkraft\*\*) für ein zylindrisches Wellenstück. Sie hat die Größe

$$R = \frac{G \cdot J}{L} \quad \text{oder} \quad R = \frac{G}{L/J} \text{ cmkg,}$$

wenn  $G$  den Gleitmodul ( $\text{kgcm}^{-2}$ ),  $J$  das polare Trägheitsmoment des Wellenquerschnittes ( $\text{cm}^4$ ) und  $L$  seine Länge ( $\text{cm}$ ) bedeutet.

Handelt es sich um ein Wellenstück, das mehrfach abgesetzt ist oder andere Schwächungen aufweist, so ist der Wert  $L/J$  abschnittsweise veränderlich. Die Rückstellkraft ergibt sich hier aus der Überlegung, daß der Wert  $L/J$  als eine Reduktion des vorgelegten Wellenstückes auf eine Einheitswelle (Welle mit dem Trägheitsmoment 1) bei gleichen sonstigen Eigenschaften betrachtet werden kann. Sind alle Wellenstücke auf die Einheitswelle zurückgeführt, so kann daraus die Länge der Einheitswelle bestimmt werden. Sie ist gegeben durch  $L_R = \sum L/J$  und damit ist

$$R = \frac{G}{\sum L/J} \cdot \dots \dots \dots (26)$$

Liegt ein Konus vor, so muß statt der Summe das Integral über seine Länge gebildet werden<sup>78)</sup>, da sich der Querschnitt stetig ändert. Die Reduktion auf die Einheitswelle geschieht durch

$$L_R = \int_{L_1}^{L_2} \frac{dL}{J} \text{ cm,}$$

---

\*) Die Reduktion ist nicht ganz richtig, da genau genommen die besonderen Bewegungsverhältnisse der Kette zu berücksichtigen sind. Durch das an sich geringe Durchhängen und „Schlackern“ der Kette ist die Übertragung nicht als ganz starr anzusehen, doch ist die gegebene Rechenvorschrift für die meisten Rechnungen ausreichend. Bei schweren Ketten (Zahnketten) muß ferner beachtet werden, daß die Schwerlinie nicht immer mit dem Teilkreis, wie hier angenommen, identisch ist, sondern darüberliegt. Ihr Abstand vom Drehpunkt ist dann sinngemäß als Bezugsradius zu wählen.

\*\*) Die Rückstellkraft wird auch vielfach als Steifheit einer Welle und ihr reziproker Wert als Weichheit bezeichnet.

dabei ist  $J = f(L)$ . Mit den Bezeichnungen der Abb. 18 kann geschrieben werden:

$$\frac{J_2}{J} = \frac{d_2^4}{d^4}$$

oder wegen der geometrischen Beziehung zwischen  $d$  und  $L$ :

$$J = \frac{L^4}{L_2^4} \cdot J_2.$$

Die reduzierte Länge ist entsprechend:

$$L_R = \frac{1}{3} \cdot \frac{L_2}{J_2} \left[ \left( \frac{L_2}{L_1} \right)^3 - 1 \right] \dots \dots \dots (27)$$

Für hohle Konuswellen läßt sich die Rechnung in gleicher Weise oder graphisch durchführen.

Wellen mit Keilnut können durch solche ersetzt gedacht werden, deren Kreisquerschnitt sich zwischen Keilnutgrund und die Gegenseite schmiegt<sup>10)</sup>.

Für die Abrundungen, mit denen Flansche in die Welle übergehen, ist mit guter Näherung ein Schmiegunskonus zu verwenden. Flanschverbindungen selbst können als starr angesehen werden. Bei aufgedrehten Naben ist die Art des Sitzes maßgebend. Während bei Schiebeseitz die Welle durch den Flansch nicht beeinflusst wird, muß sie bei Schrumpfsitz als auf Sitzlänge starr betrachtet werden, wobei allerdings zu den reduzierten Längen der benachbarten Teile ein geringer Zuschlag zu machen ist, wie bei der Reduktion der Kurbelwelle näher erläutert wird.

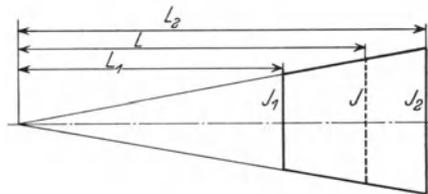


Abb. 18. Wellenkonusberechnung

Die Reduktion der Kurbelwelle stößt auf größere Schwierigkeiten als die der bisher besprochenen Stücke. Die Kurbelwelle ist ein Träger mit gekrümmter Achse, der auf einen solchen von gerader zurückgeführt werden soll. Diese Reduktion kann nicht restlos befriedigen, doch ist es stets möglich, sie innerhalb der zulässigen Fehlergrenzen auszuführen. Aufgabe der Forschung bleibt es dabei, zu untersuchen, wie weit Rechnung und Wirklichkeit

auseinandergehen und eventuell die Rechnungsgrundlagen zu schaffen. Während diese Aufgabe im Großmaschinenbau<sup>75)</sup>, besonders dem Schiffsmaschinenbau seit langem erkannt ist, wird sie im Auto- und Flugzeugbau erst in neuester Zeit beachtet<sup>43) 68)</sup>.

Geiger gibt auf Grund von Versuchen an, daß die Reduktion einer Kröpfung in der Art durchzuführen ist, daß die zylindrischen Teile in bereits besprochener Weise behandelt werden. Ihre Länge

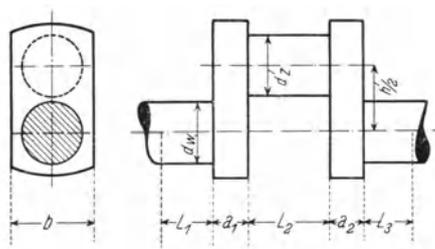


Abb. 19. Wellenkröpfung

ist aber um den fünften Teil jeder angrenzenden Wange zu vergrößern, da sich das Material der Wangen in der näheren Umgebung der Welle so verhält, als ob es nur Wellenstärke hätte.

Für eine Welle nach Abb. 19: Lagerlängen  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ; Hub der Maschine  $h$ ; Wangenabmessungen  $a_1$ ,  $b_1$  und  $a_2$ ,  $b_2$ , würde sein

$$L_R = \left. \begin{aligned} & \left( \frac{L_1}{2} + 0,2 \cdot a_1 \right) + \left( \frac{d_z}{d_w} \right)^4 (L_2 + 0,2 \cdot a_1 + 0,2 \cdot a_2) \\ & + \left( \frac{L_3}{2} + 0,2 \cdot a_2 \right) + 0,773 \left( \frac{h}{2} - z \cdot d \right) \cdot \frac{J}{\theta_1} \\ & + 0,773 \left( \frac{h}{2} - z \cdot d \right) \cdot \frac{J}{\theta_2} \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

wobei  $d$  den Wellendurchmesser,  $\theta_1$  und  $\theta_2$  die äquatorialen Trägheitsmomente der Schenkel,  $J$  das polare Trägheitsmoment der Welle darstellen und  $z$  einen Faktor. Er hat den Wert

$$\begin{aligned} z = 0 \text{ für } \frac{b}{d} = 1,6 \div 1,63 \quad \text{und} \quad \frac{h}{2 \cdot d} = 1,2 \div 0,92, \\ z = 0,4 \text{ für } \frac{b}{d} = 1,49 \quad \text{und} \quad \frac{h}{2 \cdot d} = 0,84. \end{aligned}$$

In der Formel für  $L_R$  bedeuten die beiden letzten Ausdrücke den Anteil der Wangen an der reduzierten Länge. Die Formel ist

der leichteren Benutzbarkeit wegen ausführlich angeschrieben worden.

Nicht berücksichtigt wurde durch die Versuche und Formeln von Holzer ein Schenkel, der sich zwischen zwei Kurbelzapfen befindet und diese freifliegend verbindet. Versuche von W. Stinson und A. Normann<sup>69)</sup> sollten hier die Lücke schließen. Sie kamen zu dem Ergebnis, daß auch solche Schenkel sich in der Weise berechnen lassen, wie die einfachen Wangen und stellten die Formel auf, die in Umformung wiedergeben wird:

$$L/J = \frac{5}{d^3} + 1,02 \cdot \frac{L^2 G}{h \cdot \theta \cdot E} \cos \alpha$$

oder indem man noch für  $L$  den aus  $h$  und  $\alpha$  bestimmten Wert setzt:

$$L/J = \frac{5}{d^3} + 1,02 \cdot \cos^3 \alpha \cdot \frac{h}{\theta} \frac{h \cdot G}{\theta \cdot E} \cdot \cdot \cdot \cdot (29)$$

Es ist wieder  $d$  = Wellendurchmesser,  $h$  = Hub,  $\theta$  = äquatoriales Trägheitsmoment des Schenkels,  $\alpha$  der Winkel zwischen Wange und Schenkel.

Der Summand  $\frac{5}{d^3}$  ist auf eine Verdrehung der Welle im Zapfen zurückzuführen. Damit ist abweichend von Geiger die Länge des Wellenstückes, das als in den Schenkel frei hineinragend zu denken ist (auf einen Zapfen bezogen),

$$L_z = 0,25 \cdot d \text{ cm.}$$

Beide Formeln widersprechen aber einander nicht, da meist die Dicke der Schenkel abhängig vom Wellendurchmesser ist.

In beiden Berechnungsarten ist die Verdrehung des Schenkels in einer Ebene senkrecht zu Abb. 19 nicht berücksichtigt. Sie liefern daher Werte, die etwa 3 bis 5% zu klein sind. Diese Verdrehung kann aber meist vernachlässigt werden. Sobald jedoch ungewöhnlich schmale Schenkel Verwendung finden, empfiehlt es sich, eine Kontrolle durchzuführen.

Eine etwas andere Formel hat C. Cartner<sup>43)</sup> für die reduzierte Länge aufgestellt. Sie lautet:

$$l = \left[ \frac{L_1 + L_3}{2} + 0,4 (a_1 + a_2) \right] + \frac{3}{4} \frac{J_W}{J_Z} \cdot L_2 + \frac{1}{8} h \frac{J_W}{\theta_1 + \theta_2} \cdot \cdot (30)$$

mit  $J_W =$  polares Trägheitsmoment der Welle,  $J_Z =$  Trägheitsmoment des Zapfens und  $\theta_1$  bzw.  $\theta_2 =$  Wangenträgheitsmoment  $\left(\frac{a \cdot b^3}{12}\right)$ . Sie gilt für Wellen, die neben jeder Kröpfung ein Lager aufweisen. Es fehlt leider noch an Versuchen von anderer Seite, die diese Ergebnisse bestätigen. Eigene Versuche des Verfassers schlossen sich den von Geiger durchgeführten gut an.

3. Übersetzungen. Die Antriebskraft des Motors gelangt im allgemeinen nicht durch glatte Wellenleitungen an die Hinterräder. Sie sind vielmehr meist durch Übersetzungen unterbrochen, die sich ständig oder zeitweise in Eingriff befinden. Die „Gänge“ im Getriebe bilden die willkürlich veränderliche und die Kegelräder in der Hinterachse die konstante Übersetzung.

Vom Schwungrad aus gesehen bedeutet jeder Gang und das Differential eine Verlangsamung der Drehbewegung. Die in den Teilen hinter dem Getriebe befindlichen Wellen und Massen erscheinen als im Maße des Quadrats der Übersetzung verkleinert. Die Wellen sind aber wegen der Vergrößerung des Drehmomentes durch die Übersetzung im Maße des Drehzahlverhältnisses verstärkt, um es mit Sicherheit durchleiten zu können. Ihre Steifigkeit wächst konstruktiv mit der Übersetzung. Bei der Reduktion ergibt sich nun (wegen Division durch das Übersetzungsquadrat), daß sie für Drillschwingungen um so weicher werden, je näher sie sich an den Antriebsrädern befinden.

Die Massenverkleinerung durch Reduktion geschieht in derselben Weise und führt zu dem Ergebnis, daß in weitaus den meisten Fällen die Hinterräder als leichtere Schwungmassen erscheinen als das Schwungrad.

Das Differential stellt eine Verzweigung dar, die sich auch in der vorgelegten Art behandeln läßt. Die Differentialgleichungen lassen sich in bekannter Weise anschreiben, nur muß beachtet werden, daß im Differential zwei Massen- und Federreaktionen wirksam sind. Die Reaktionen können in derselben Richtung oder einander entgegen wirken. Im ersteren Falle addiert sich ihre Wirkung, so daß bei der Reduktion die Summe aus den Elastizitäten und Massen einzusetzen ist. Im zweiten Falle heben sie sich gegenseitig auf. (Dabei ist Gleichheit der Teile Voraus-

setzung, wie es im Autobau üblich ist.) Die Einzelteile schwingen gegeneinander und bilden im Differential einen Schwingungsknoten. Daher kann die Schwingung der Differentialteile für sich betrachtet werden. Der Motor kann sie nicht erregen, auch kann sie ihrerseits das übrige Triebwerk nicht beeinflussen. Sie bleibt auf die Achse beschränkt.

4. Beispiel. Eine kurze Durchrechnung einer fertigen Anlage wird die Rechnungsmethoden leicht anschaulich machen. Für die Durchrechnung wird ein Vierzylindermotor von 95 mm Bohrung und 116 mm Hub, 14 mm Schränkung und einem  $\lambda = 4,25$  zu-

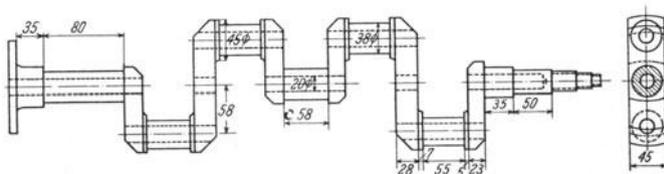


Abb. 20. 4-Zylinder-Kurbelwelle

grunde gelegt. Die Abmessungen der Kurbelwelle, die für die Rechnung erforderlich sind, können aus Abb. 20 entnommen werden.

Die gewogenen Gewichte waren:

Kolben komplett (Elektron) . . . . . 845 g

Aus der Abb. 16 können die Gewichte der Kolben ohne Ringe und Bolzen ermittelt werden. Für komplette Kolben ist je nach der Art des Bolzens ein Zuschlag zu wählen (meist 30 %).

Pleuelstangengewicht . . . . . 1366 g

Pleuelstange im Kolbenbolzenauge gewogen . . . 466 g

Pleuelstange im Kurbelauge gewogen . . . . . 900 g

Hin und her gehende Gewichte  $845 + 466$  . . . 1311 g

Nach Gleichung (24) ist der konstante Anteil der hin und her gehenden Masse, der zur rotierenden hinzugefügt werden muß:

$$H = G_H \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \lambda^2 + 2 \left( \frac{a}{h} \right)^2 \cdot \lambda^2 \right]$$

$$= 1311 (0,5 + 0,007 + 0,00016) = 665 \text{ g.}$$

Nach S. 27 ist die rotierende Masse der Pleuelstange bestimmt durch das beim Wägen des Kurbelauges der Stange gefundene Gewicht. Es beträgt

$$G_z = 900 \text{ g.}$$

Das Gewicht des Kurbelzapfens wird errechnet zu

$$G_z = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \cdot \gamma \cdot L = \frac{\pi}{4} (3,8^2 - 2,0^2) \cdot 7,8 \cdot 5,5 = 353 \text{ g.}$$

Das Gewicht des Wellenbundes wird in gleicher Weise ermittelt:

$$G_w = \frac{\pi}{4} (4,5^2 - 2,0^2) \cdot 7,8 \cdot 0,7 = 69,5 \text{ g.}$$

Bei der Bestimmung des in der rotierenden Masse enthaltenen Anteils der Wangen betrachten wir zweckmäßig diese Teile als Prismen mit einer Höhe, die von der Mitte einer Abschrägung zur Mitte der anderen reicht. Das Trägheitsmoment der Wange, bezogen auf ihren Schwerpunkt, ist

$$\theta'_1 = \frac{1}{12} m_1 (b^2 + c^2),$$

mit  $m_1$ , der Masse der Wange, ihrer Breite  $c$  und Länge  $b$ . Daher wird

$$\theta'_1 = \frac{1}{12} m_1 (7,8^2 + 4,5^2) = \frac{81,09}{12} m_1.$$

Für den halben Schenkel ist entsprechend:

$$\theta'_2 = \frac{1}{12} m_2 (7,0^2 + 4,5^2) = \frac{69,25}{12} m_2.$$

Da sich die besprochenen Teile nicht um die Schwerachse drehen, sondern um die Wellenmitte, die sich um rund  $h/4$  entfernt befindet, muß nach Steiner ein Zuschlag gewählt werden, der das Trägheitsmoment vergrößert. Zur Umrechnung der Masse auf das Gewicht muß mit  $g$  multipliziert und zur Bestimmung des Ersatzgewichtes in der Zapfenmitte durch  $\left(\frac{h}{2}\right)^2$  dividiert werden. Dann ist

$$G_{r1} = G_1 \left[ \frac{81,09}{12} \left(\frac{2}{h}\right)^2 + \frac{1}{4} \right] = 280 \text{ g}$$

und

$$G_{r2} = G_2 \left[ \frac{69,25}{12} \left(\frac{2}{h}\right)^2 + 0,25 \right] = 290 \text{ g.}$$

Das rotierende Gewicht einer Kurbelkröpfung ist durch die Summe der einzelnen Posten gegeben:

$$G_R = H + G_Z + G_z + G_w + G_{r1} + G_{r2} = 2557,5 \text{ g.}$$

Das entspricht einem Massenträgheitsmoment  $mr^2$  von

$$m_z = \frac{2557,5 \cdot 5,8^2}{981 \cdot 1000} = 0,0877 \text{ cmkgs}^2.$$

Die Masse ist wegen der Gleichheit der Teile für alle Zylinder dieselbe.

Die Schwungradmasse läßt sich durch Berechnung der Masse einzelner Scheiben, in die das Rad unterteilt sein mag, bestimmen (siehe S. 21). Hier soll ein bereits fertiges Rad angebaut werden. Sein Massenträgheitsmoment wird durch Auspendeln (siehe S. 23) bestimmt.

Schwunradgewicht . . . . .  $G = 27 \text{ kg}$   
 Abstand der Auflageschneide vom Schwerpunkt  $s = 15,5 \text{ cm}$   
 Schwingungszahl . . . . .  $n = 54 \text{ volle Perioden/Min.}$

Mit diesen Werten wird

$$m_s = \left( \frac{30}{\pi \cdot 54} \right)^2 27 \cdot 15,5^2 - \frac{27}{981} 15,5^2 = 6,4 \text{ cmkgs}^2.$$

Weiter wird ermittelt:

Zahnrad auf der Nockenwelle . . . . .  $0,0590 \text{ cmkgs}^2$   
 Zahnrad auf der Kurbelwelle . . . . .  $0,0260 \text{ „}$   
 Zahnrad am Magneten . . . . .  $0,0355 \text{ „}$   
 Rotor des Magneten . . . . .  $0,0130 \text{ „}$

Da sich das Zahnrad auf der Nockenwelle nur halb so rasch dreht wie die Kurbelwelle, so ist es auf diese durch Multiplikation mit  $\left(\frac{1}{2}\right)^2$  zu beziehen.

Zahnrad auf der Nockenwelle (reduziert)  $0,0148 \text{ cmkgs}^2$ . Die Masse am vorderen Wellenende ist damit

$$m_v = 0,0893 \text{ cmkgs}^2.$$

Nach der Massenbestimmung wird die Federberechnung ausgeführt. Auf dem vorderen Absatz der Kurbelwelle befindet sich der Antrieb der Steuerung. Das Ritzel ist mit einer Feder befestigt, über deren ganze Länge die Massenkraft als nahezu dreieckförmig verteilt angesehen werden darf. Die Basis des Belastungsdreiecks wäre an der Zapfenwurzel zu suchen. (Eine gleichförmige Verteilung kann nicht als bestehend angesehen werden, da sich der Zapfen stark verdreht und sich damit eine Mehrbelastung seiner

Wurzel einstellen muß.) Der Schwerpunkt der Belastungsfläche liegt in  $\frac{1}{3}$  der Zapfenlänge von der Basis. In diesem Punkte können wir uns die Masse 1 vereinfacht denken.

Der Berührungskreis am Nutgrund hat 28 mm Durchmesser und die Bohrung einen solchen von 20 mm. Der Zapfen hat daher das polare Trägheitsmoment von  $4,546 \text{ cm}^4$ . Für die reduzierte Länge ist wegen des Querschnittsprunges an seiner Basis der Zuschlag  $0,2 \cdot d$  zu der bereits ermittelten Länge zu geben. Sie ist  $\frac{5,0}{3} + 0,2 \cdot 3,0 = 2,26 \text{ cm}$ .

Damit

$$(L/J)_1 = 0,498 \text{ cm}^{-3}.$$

In gleicher Weise wird weiter ermittelt:

$$(L/J)_2 = \frac{3,5 + 0,2 \cdot 2,3}{19,25} = 0,205 \text{ cm}^{-3},$$

$$(L/J)_4 = \frac{2,8 + 0,2 \cdot 2,3}{19,25} = 0,169 \text{ cm}^{-3},$$

$$(L/J)_3 = \frac{0,773 (5,8 - 0 \cdot d.) 12}{4,83 \cdot 2,3} = 0,211 \text{ cm}^{-3}.$$

Die Reduktion ergibt ein gesamtes  $L/J$  von  $1,083 \text{ cm}^{-3}$ . Entsprechend wird gefunden:

$$c_1 = \frac{G}{1,083} = 764\,000 \text{ cmkg},$$

$$c_2 = \frac{G}{0,531} = 1\,560\,000 \text{ cmkg},$$

$$c_3 = \frac{G}{1,116} = 744\,000 \text{ cmkg},$$

$$c_4 = c_2,$$

$$c_5 = \frac{G}{0,840} = 988\,000 \text{ cmkg}.$$

Der Motor ist nunmehr auf ein Drehschwingungssystem reduziert, das aus 6 Massen ( $m_1$  bis  $6$ ) und 5 Federn ( $c_1$  bis  $5$ ) besteht. Es ist schematisch in Abb. 21 dargestellt. Die Massen haben im einzelnen die Größen

$$m_1 = m_v, \quad m_2 \text{ bis } 5 = m_z, \quad m_6 = m_s.$$

Die Schwingungsrechnung wird in Tabellenform durchgeführt (Tabelle am Schluß dieses Buches), da soviel Arbeit erspart und die Rechnung übersichtlich gestaltet werden kann. Zur bequemen Aus-

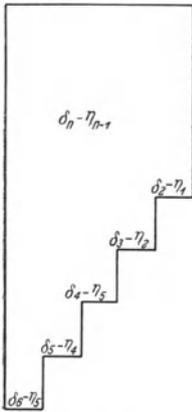


Abb. 22

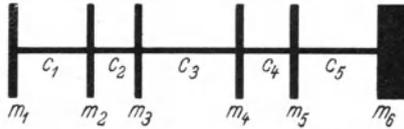


Abb. 21. Massenschema eines Motors

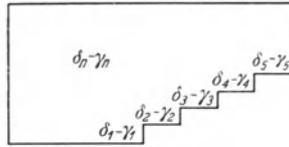


Abb. 23

Abdeckschablonen

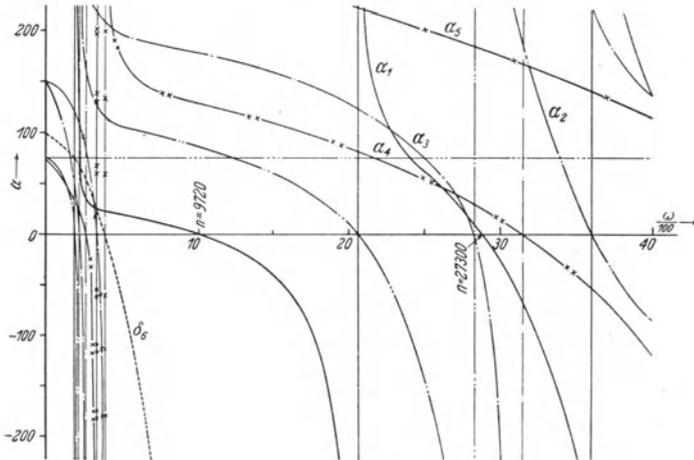


Abb. 24.  $\alpha$ -Kurven

führung der mehrfachen Subtraktionen, bei denen die Zahlen weit auseinanderstehen, werden Schablonen aus weißem Papier gemäß Abb. 22 und 23 benutzt. Die Multiplikationen und Divisionen lassen sich genügend genau mit dem Rechenschieber ausführen.

Zur Kontrolle der Rechnung und genauen Ermittlung der Schwingungszahlen werden die  $\alpha$ -Linien in Abb. 24 und die  $\beta$ -Linien in Abb. 25 aufgetragen. In den erwähnten Abbildungen sind alle Kurven eingezeichnet, trotzdem es genügt, die Kurven  $\alpha_2$  und  $\beta_5$  in der Nähe ihrer Nullstellen zu zeichnen, um die Asymptoten

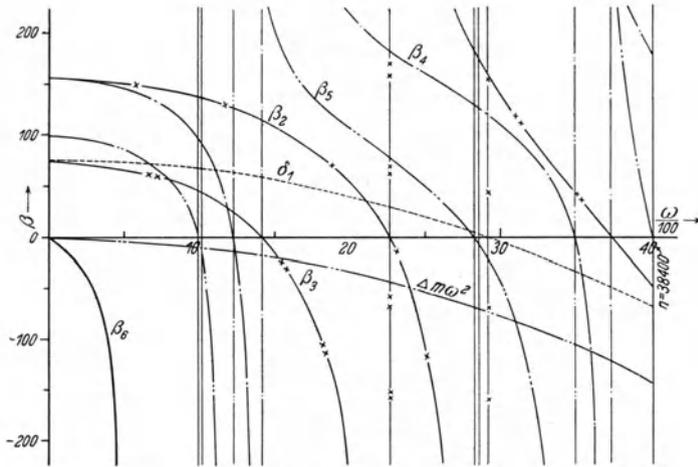


Abb. 25.  $\beta$ -Kurven

der  $\alpha_1$ - und  $\beta_6$ -Kurven zu gewinnen, die selber ganz darzustellen sind. Die Auftragung aller Kurven gestattet aber ein leichteres Einarbeiten.

Abb. 24 zeigt gegenüber Abb. 25 verhältnismäßig flache Schnitte mit der Abszisse. Das ist ein Zeichen dafür, daß die Masse  $m_1$  einen geringen, die Masse  $m_3$  aber wegen des sehr steilen Kurvenverlaufes einen außerordentlichen Einfluß auf die Schwingung hat. Bei einer Verringerung der Masse des Schwungrades (solange es sich nicht um übermäßige Erleichterungen handelt) würden die ermittelten Eigenfrequenzen bestehen bleiben. Wird nämlich eine Massenänderungslinie (bekanntlich Parabel, s. S. 7) (z. B. durch die Parabel  $\delta_1$  dargestellt) in Abb. 25 eingezeichnet mit dem Nullpunkt als Scheitel, so liegen die neuen Schnittpunkte praktisch senkrecht unter den Nullpunkten der  $\beta$ -Kurven. Eine Änderung der Masse  $m_1$  (Steuerung und ihr Antrieb) würde hingegen sehr wirksam sein.

Im modernen Motorenbau hat sich der hinten liegende, vom Schwungradende aus erfolgende Nockenwellenantrieb durchgesetzt. An Hand der Abb. 24 ist leicht festzustellen, welchen Einfluß die bauliche Maßnahme auf die Schwingungseigenschaften hat. Für die gekürzte Anlage hätte der Kettenbruch den Wert

$$\alpha_1' = c_2 - m_2 \omega^2 - \frac{c_2^2}{\dots}$$

Er unterscheidet sich von  $\alpha_2$  nur durch das Fehlen des Gliedes  $c_1$ . Daher ist zu schreiben  $\alpha_1' = \alpha_2 - c_1$ . Zeichnerisch muß eine Verschiebung der Abszisse nach dem Punkt  $c_1$  vorgenommen werden, um die Gleichung zu erfüllen. Die Schnitte der neuen Nulllinie mit der Kurve  $\alpha_2$  liefern die gewünschten Schwingungszahlen.

Die Grundschiwingung ändert sich nur wenig (von 9720 auf 10700), während die höheren Eigenfrequenzen wesentlich verschoben werden. Die nächste wandert von 27300 auf 32350.

Soll aus dem 4-Zylindermotor einer mit 6 oder 8 Zylindern entwickelt werden, so würde der vordere Wellenteil ähnlich der Wellenmitte, wie sie in Abb. 20 vorliegt, auszugestalten sein. Daran schließen sich dann die anderen Kröpfungen an. Diese bauliche Maßnahme bedeutet eine Änderung der Feder  $c_1$  und außerdem die Ankopplung eines neuen Systems<sup>27</sup>). Gemäß S. 7 ist der Wert  $\xi_n$  zu bilden. Der Teilwert  $\alpha_{n+1}$  ist bereits durch  $\alpha_2' = \alpha_2 - c_1 + c_5'$  gegeben (siehe oben). Die Veränderliche  $\eta_n$  entspricht dem Wert  $\eta_5'$ , wobei das Zeichen (') andeutet, daß die Änderung der Feder  $c_5$  bei der Bestimmung des Wertes  $\beta_5$  und  $\eta_5$  berücksichtigt wurde. Die Schnittpunkte der  $\eta_5'$ - mit der  $\alpha_2'$ -Kurve liefern die neuen Eigenschwingungszahlen, die tiefer liegen als bei der ursprünglichen.

Abb. 26 ist unter der Annahme gezeichnet, daß  $c_5' = c_5$  ist. Statt der einen Schwingung bei  $n = 9720$  entstehen deren zwei bei  $n = 4375$  und 16300, während die höchste, noch auf dem Kurvenblatt verzeichnete, lediglich etwas herabrückt. Sie liegt bei  $n = 33900$ .

Erscheint die Eigenschwingungszahl des Motors als zu niedrig, so kann (siehe S. 8) eine Veränderung der ganzen Anlage vorgenommen werden, dadurch, daß gleichzeitig oder für sich die

Massen und Federn geändert werden. Eine Verlegung der Eigenschwingungszahl erscheint stets dann erstrebenswert, wenn sie bei solchen Motordrehzahlen zu Resonanzerscheinungen Anlaß gibt, die häufig benutzt werden. Die Verlegung wird daher so einzurichten sein, daß die Schwingungshöchstwerte in weniger benutzten Drehzahl-

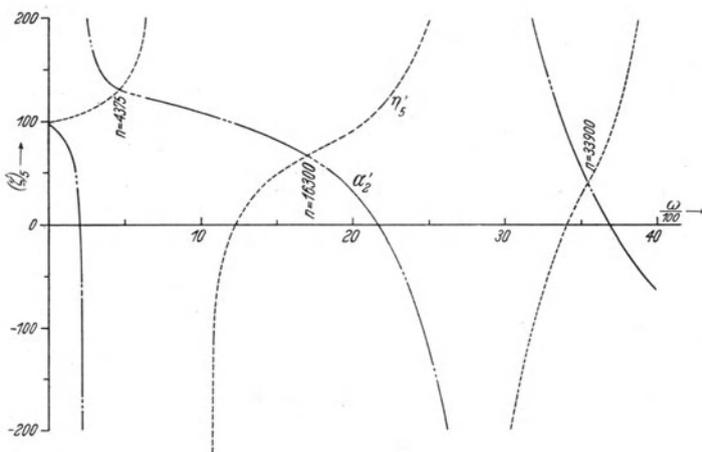


Abb. 26. Zukoppeln einer Anlage

bereichen auftreten. Damit ist die Lage der Eigenschwingungszahl vorgeschrieben. Das Verhältnis der Massen zur Federung ( $\sqrt{\frac{u}{v}}$  s. S. 8) muß jetzt so lange variiert werden, bis die gestellte Forderung erfüllt ist.

Welche Teile dabei besonders zu berücksichtigen sind, kann leicht an Hand der bereits ausgeführten  $m$ - und  $c$ -Berechnung festgestellt werden. Der Anteil der hin und her gehenden Masse an der Masse  $m_z$  betrug nur 665 g gegenüber 900 g des Pleuelstangenauges. Eine Ersparnis an Kolben- und Pleuelschaftgewicht vermindert daher die schwingende Masse nur wenig. Die rotierende Masse ist in der Hauptsache durch das Pleuelauge und die Kurbelteile bestimmt. Hier ist die Möglichkeit zu starken Veränderungen gegeben. Ausbohren der Welle und Verkleinern des Kopfes bedeuten wesentliche Masseänderungen.

Zur Verstärkung der Feder ist eine Verbreiterung der Wangen über das übliche Maß hinaus günstig und ein nicht zu schroffer

Übergang vom Zapfen zur Wange, da dieser bestimmend ist für die rechnermäßige Länge des Zapfens in diesen Teilen. Die Vergrößerung des Durchmessers der Wellenzapfen bietet eine weitere Möglichkeit zur Versteifung. Das Trägheitsmoment wächst dabei mit der vierten Potenz des Durchmessers. Ohne Vergrößerung der Wellenausbohrung wächst aber die Masse gleichzeitig mit dem Quadrat des Durchmessers. Die Schwingungszahlveränderung wird unter diesen Verhältnissen proportional dem Durchmesser verlaufen,

da sie durch den Ausdruck  $\sqrt{\frac{c}{m}}$  gekennzeichnet ist. Berücksichtigt man, daß die Masse des Pleuelkopfes bei der Veränderung des Wellendurchmessers ebenfalls zu- bzw. abnimmt, und daß diese Änderung nicht mit der ersten oder zweiten Potenz des Durchmessers erfolgt, sondern mit einem Zwischenwert, ähnlich, wie es für hohlgebohrte Wellen der Fall ist, so darf allgemein gesagt werden, daß sich die Schwingungszahl mit einer Potenz des Durchmessers ändert, die nicht wesentlich größer als 1 ist.

Die Steilheit der  $\beta$ -Kurven und die geringe Veränderung der Eigenschwingungszahl mit einer Änderung der Masse des Schwungrades legt die Vermutung nahe, daß sich das Schwungrad in der Nähe des Knotens befindet. Eine Masse im Schwingungsknoten würde beliebig groß sein können, ohne die Schwingung zu beeinflussen, da sie in Ruhe bleibt.

Die Darstellung der Knotenwanderungslinien (Abb. 27) bestätigt die Annahme. In der Nähe der Schwungradmasse bildet sich der erste Knoten aus, der später immer dichter an diese heranwandert, so daß das Schwungrad näherungsweise als Einspannung betrachtet werden kann. Bei der zweiten Eigenschwingungszahl hat sich in der Feder  $c_2$  ein weiterer Knoten stabilisiert, der sich bei Wachsen der Drehzahl in zwei andere aufteilt.

Die Lage des Knotenpunktes ist, wie bereits früher ausgeführt wurde (s. S. 10), maßgebend für die Höhe der Schwingungszahlen. Eine Verlegung dieses Punktes bedeutet entsprechend eine Änderung dieser Zahl. Bei Abänderung einer vorgelegten Anlage läßt sich von dieser Betrachtung erfolgreich Gebrauch machen, indem zunächst die Wellenteile, die Knotenpunkte enthalten, verstärkt oder geschwächt werden.

In dem durchgerechneten Beispiel wird eine Verstärkung der Feder  $c_5$  den Knoten von der Masse  $m_6$  fortücken und dadurch die Schwingungszahl erhöhen. Eine Verlegung der zweiten Eigenschwingung (bei  $n = 27\,300/\text{min}$ ) ist durch diese Maßnahme kaum möglich. Sie wird wesentlich nur durch Veränderungen der Feder  $c_2$  bewirkt.

Wellenleitung. Wird die Kupplung eingerückt, so ist an das System des Motors das Getriebe, die Kardanwelle ... angekoppelt,

also Teile, die ihrerseits schwingungsfähig sind. Damit wird das Schwingungssystem um einige Glieder erweitert. Die Berechnung der Eigenfrequenzen kann mit einem ähnlichen Schema ausgeführt werden, wie das der Tabelle 1. Die Zahl der Rechenoperationen wäre lediglich zu vermehren.

Eine solche Berechnung ist aber zeitraubend und wird zweckmäßig durch eine kleine Vernachlässigung abgekürzt. Bei der Grundschiwingung schwingen alle Massen nach einer Seite, das Schwungrad nach der anderen. Das gilt auch im geringeren

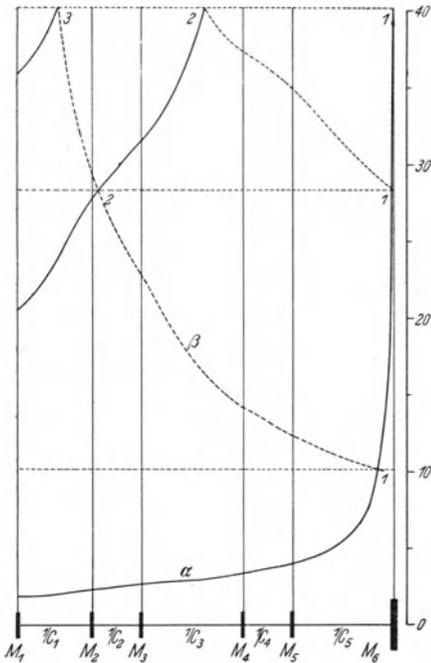


Abb. 27. Knotenwanderungslinien

Maße für die zweite Eigenschwingungszahl. Die Bewegung des Rades selbst wird nur sehr wenig durch das Pendeln der Kurbelmassen beeinflusst, wie aus der Knotenlage zu ersehen ist (Abb. 27). Eine Schwingung, an der das Schwungrad erheblichen Anteil hat, kann demnach durch die anderen Massen des Motors nicht merklich beeinflusst sein.

Bei der Berechnung wird der zwischen Motor und Boden befindliche Triebwerksteil einschließlich des Schwungrades als

Schwingungssystem für sich betrachtet. Nur wenn die Schwingungszahl dieses Systems in der unmittelbaren Nähe einer Motoreigen-schwingung liegt, ist eine Kontrolle nötig, bei der die Schnitte des  $\beta$ -Systems des Motors mit dem  $\eta$ -System des angekoppelten Teiles ermittelt werden. Bei Beachtung der Steilheit der  $\beta$ -Kurven wird ebenfalls klar, daß eine Verschiebung der Eigenfrequenzen durch die Ankopplung nicht wahrscheinlich ist, da sich die Schnitte nur in den seltensten Fällen merklich entfernt von den Nullstellen der  $\beta$ -Kurven finden werden.

Trotz der geringen Wirkung, die das Ankoppeln hat, muß aber doch darauf aufmerksam gemacht werden, daß die Motorschwingungen

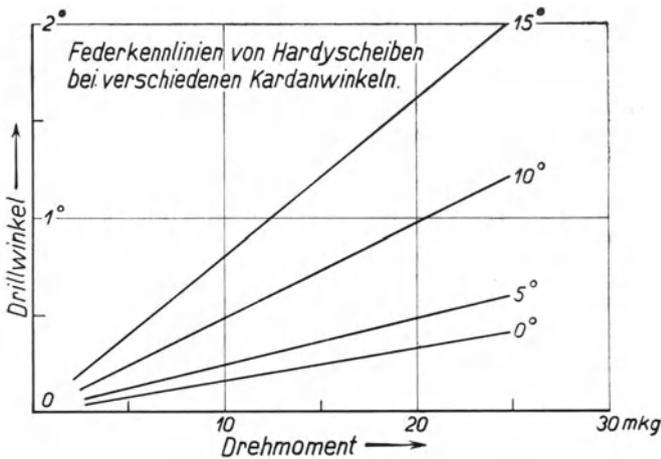


Abb. 28. Kennlinien der Hardyscheiben \*)

sich bis an die Hinterräder fortpflanzen und umgekehrt die Schwingungen der angekoppelten Teile bis zur vordersten Motormasse.

In der Wellenleitung werden häufig Hardy- oder Walex-Scheiben oder Gelenklaschen eingebaut, die gleichzeitig mit der Drehmomentübertragung auch den Winkelausgleich zwischen Kurbelwelle und Kardanwelle übernehmen, also als Kardangelenke wirken. Sie sind ein sehr weiches Glied in der Wellenleitung. Der Verdrehungs-

\*) Die Versuchsergebnisse entstammen dem Aufsatz „Versuche mit Gummigewebescheibengelenken“ in Mitteilungen des Instituts für Kraftfahrwesen der Techn. Hochschule Dresden, VI. Sammelband, S. 79.

versuch zeigt, daß (Abb. 28) die Kennlinien gerade sind und ihre Steilheit durch die Größe des Kardanwinkels bestimmt ist. Die Kennlinien können leider noch nicht tabellenmäßig oder kurvenartig für verschiedene Abmessungen der Scheiben angegeben werden, da die Industrie in diesen Teilen noch weit von jeder Normung entfernt ist. Der Berechnung muß deshalb der Verdrehungsversuch vorangehen.

5. Berechnungsprüfung. Die Bestimmung der Massen wird bei einer Neukonstruktion durch Rechnung erfolgen, die aber stets kleine Vernachlässigungen enthält. Daher ist eine Nachprüfung der Daten erstrebenswert. Sie ermöglicht gleichzeitig die Auffindung von Rechen- und Herstellungsfehlern.

Wird von dem überschläglichen Vergleich abgesehen zwischen den Werten, die für eine ältere Konstruktion ermittelt sind und denen, die jetzt ermittelt werden sollen, so bietet sich bei der Ausführung des neuen Modelles Gelegenheit, die Massen durch Auspendeln, wie bereits behandelt, festzustellen oder durch Wägen zu ermitteln. Bei einer Kurbelkröpfung ist die einzelne herausgelöste Kröpfung mit den Gehäuselagerstellen auf parallele Lineale zu legen und durch Wägung zu bestimmen, wieviel Gewicht im Abstände des Kurbelradius ( $h/2$ ) der Kröpfung entspricht.

Die Federung wird durch den Verdrehungsversuch geprüft. Bei den Hardyscheiben z. B. läßt sich vorteilhaft eine Torsionsprüfmaschine entsprechender Abmessungen verwenden. Auch bei der Untersuchung abgesetzter Wellen ist sie von Vorteil.

Anders liegen die Verhältnisse bei der Untersuchung von ganzen Kurbelwellen, die für gewöhnlich nicht in der Torsionsmaschine eingespannt werden können. Hier kann durch Gewichtsbelastung eines Hebels das Moment erzeugt werden. Das eine Ende der Welle wird fest eingespannt, während das andere durch einen doppelarmigen Hebel ein Drehmoment empfängt, oder, wie in Abb. 29 gezeigt<sup>84)</sup>, es werden beide Wellenenden mit derselben Apparatur ausgerüstet, um genaue Kontrollen zu haben. Die Ablesung der Verdrehungswerte der einzelnen interessierenden Meßpunkte kann mit Fernrohren erfolgen. Sie blicken über einen in der Meßebeane angebrachten und sich mit der Welle drehenden Spiegel nach Skalen<sup>10)</sup>. Die Fadenkreuze der Fernrohre gestatten

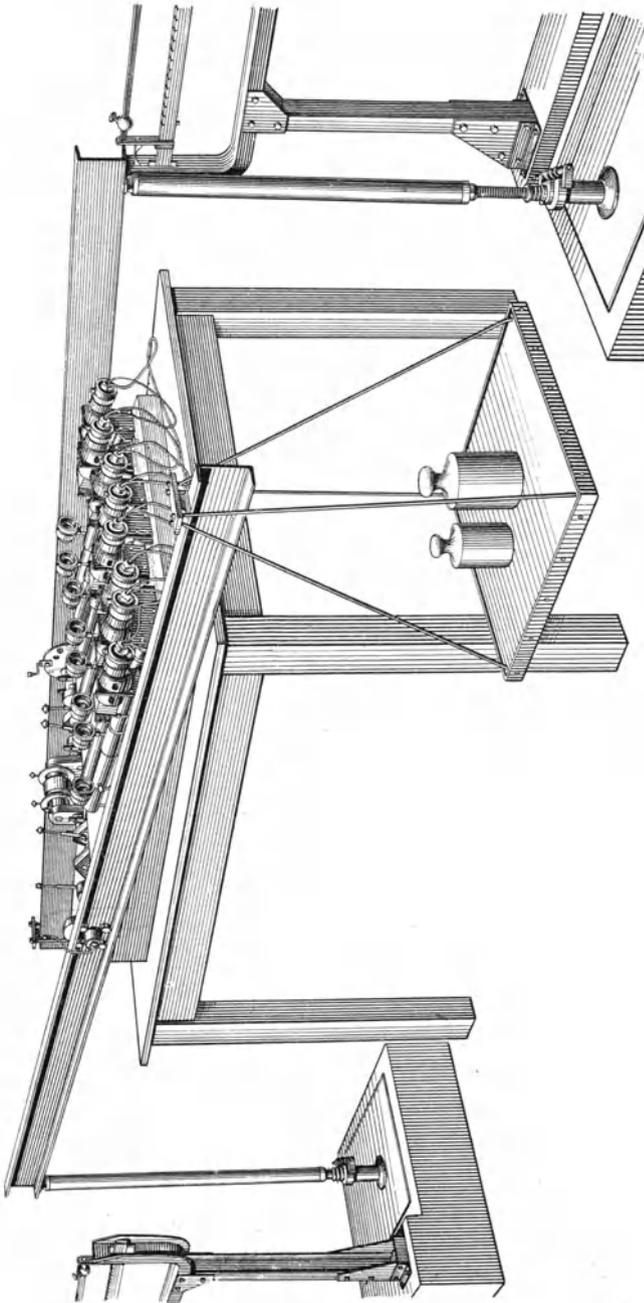


Abb. 29. Aufbau zum Drillversuch bei der Prüfung einer Automobilmotorkurbelwelle im Institut für Kraftfabrwesen der Technischen Hochschule Dresden

die Bestimmung der jeweiligen Lage der Spiegel und damit der Wellenquerschnitte zur Skala. Die Differenz aufeinanderfolgender Ablesungen ist dann ein Maß für die Verdrehung. Vorteilhafter ist, genügend Platz vorausgesetzt, das von Sass<sup>76)</sup> angegebene Verfahren. Er wirft durch eine geeignete Linsenordnung einen Lichtpunkt über den auf der Welle befestigten Spiegel auf die Skala. Dieses Verfahren<sup>84)</sup> bietet die Möglichkeit der gleichzeitigen Beobachtungen aller Meßpunkte ohne besondere Mühe und die Möglichkeit eines beliebigen Abstandes der Skala vom Gerät.

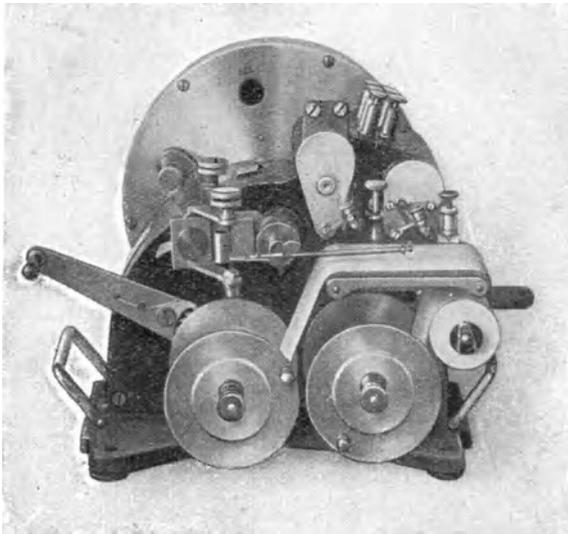


Abb. 30. Drehschwingungsanzeiger (nach Geiger)

Die Nachprüfungen zeigen, daß bei der Bestimmung von Massen und Federn mit einem durchschnittlichen Fehler (der in der etwas vereinfachten Rechnungsmethode begründet ist) von etwa 4 bis 5 % zu rechnen ist. Die Fehlerhaftigkeit des Ergebnisses darf daher zu etwa 3 % erwartet werden, wie es im Maschinenbau üblich ist.

Die letzte Kontrolle bietet die direkte Untersuchung der Maschine im Betriebe mit besonderen Instrumenten, sogenannten Drehschwingungsmessern. Das Prinzip der Instrumente besteht darin, die gegenseitige Verdrehung zweier Querschnitte zu messen oder

die Bewegung der Welle gegenüber einer als mit gleichbleibender Geschwindigkeit umlaufenden Masse zu ermitteln. Die Geräte geben bisher für Langsamläufer zufriedenstellende Ergebnisse, während sie bei Schnellläufern nur bedingt brauchbar sind. Der bekannteste Drehschwingungsindikator<sup>10)</sup> dürfte wohl der von Geiger (Abb. 30) sein, der noch bis 6000 Schwg./Min. brauchbar ist. Sein Meßbereich reicht für die meisten technischen Aufgaben aus.

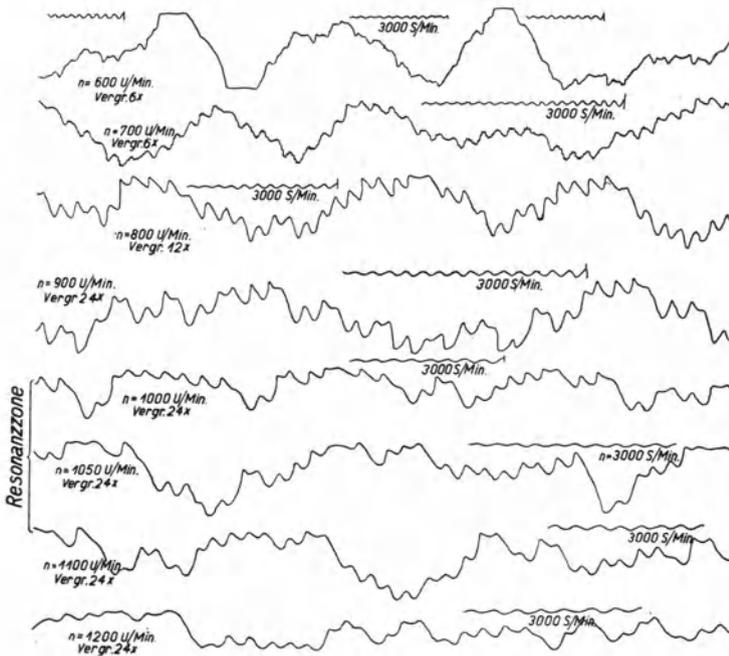


Abb. 31. Drehschwingungsmeßreihe

Bei der Auswertung von Schwingungsbildern, die mit Geräten gewonnen werden, deren Prinzip die Aufzeichnung einer Bewegung gegen eine relative Ruhe ist, muß zur Vorsicht geraten werden. Die Abb. 31 stellt die Ergebnisse einer Meßreihe an der Stirnseite eines 6-Zylinder-Triebwagenmotors dar. Bei niedrigen Drehzahlen zeigen sich große Ausschläge der Schreibfeder. Sie sind keine eigentlichen Schwingungen, sondern vielmehr durch den Ungleichförmigkeitsgrad bestimmt. Nur die kleineren Zacken und die

Wellen bei höherer Drehzahl sind als Schwingungsauslässe zu betrachten. Eine gleichzeitige Indizierung beider Motorseiten ist angebracht, um Irrtümer zu vermeiden.

Eine weitere Prüfmöglichkeit bilden die Zahnradgeräusche, die in den kritischen Drehzahlen durch wechselseitige Belastung der Zahnflanken entstehen. Sie lassen leicht und sicher das gefährliche Gebiet erkennen.

Aus der Abb. 28 ist zu ersehen, daß die Federung der Hardygelenke und ähnlicher Gummistoffscheiben vom Kardanwinkel abhängt. Die Schwingungszahl muß sich entsprechend ändern, so daß mit wachsender Belastung des Fahrzeuges sich die Drehzahl verschiebt, bei der die Räder des Getriebes singen, da der Kardanwinkel von der Lage des Chassis zum Boden abhängt.

6. Die Erregung. Die Schwingungen der Kurbelwelle und der anschließenden Triebwerksteile können durch verschiedene Ursachen angeregt werden. Die kräftigste Erregung bildet die Drehkraft, die durch die Verbrennung des Gemisches im Zylinder und durch die Wirkung der Massen entsteht.

Massenkraft und Gaskraft wirken am Kolbenbolzen und werden durch die Pleuelstange als Tangentialkraft der Kurbelwelle mitgeteilt. Die genannten Kräfte sind von der Kolbenstellung bzw. dem Arbeitsspiel abhängig und somit zeitlich veränderlich. Dasselbe muß daher auch von der Tangential- oder Drehkraft gelten.

Die zeitliche Änderung der Kräfte geschieht periodisch. Es wiederholt sich nach bestimmten Zeiten stets dasselbe Kräftespiel. Beim Zweitakter ist die Periode durch eine Umdrehung der Kurbelwelle, beim Viertakter durch zwei Umdrehungen gegeben.

Bereits auf S. 14 wurde gezeigt, daß sich solche periodischen Zeitfunktionen in Sinuswellen zerlegen lassen, deren Summe sie wiederum sind. Die Frequenz dieser Wellen oder Drehkraftharmonischen, wie sie bezeichnet werden, ist dabei stets ein ganzzahliges Vielfaches der Grundperiode. Die Drehkraftzerlegung liefert also Harmonische mit derselben, der doppelten, dreifachen usw. Frequenz der Periode der vorgelegten Funktion. Um Irrtümer zu vermeiden, sei deshalb gesagt, daß beim Zweitakter die Harmonischen die Frequenz  $n$ ,  $2n$ ,  $3n$ ,  $4n$  ... haben, beim Viertakter aber  $0,5n$ ,  $n$ ,  $1,5n$ ,  $2n$ ,  $2,5n$  ..., wenn  $n$  die Kurbelwellendrehzahl bedeutet.

Hier sei der Hinweis gestattet, daß, dem angegebenen Zusammenhang entsprechend, der Begriff kritische Drehzahl für die Resonanzgebiete geprägt wurde. Sie liegen bei  $\frac{n_e}{1}, \frac{n_e}{2} \dots$  beim Zweitakter und bei  $\frac{n_e}{0,5}, \frac{n_e}{1}, \frac{n_e}{1,5} \dots$  beim Viertakter, wenn  $n_e$  die Eigenfrequenz der Maschine bedeutet.

Bei der Betrachtung der Kolbenkraftdiagramme und ihrer Zerlegung bieten sich zwei Wege. Die Kolbenkraft setzt sich aus der Gaskraft und der Massenkraft der hin und her gehenden Teile zusammen. Die Gaskraft hängt lediglich von der Art des Verbrennungsvorganges und der Stärke des arbeitenden Gemisches ab, während die Massenkraft sich mit dem Quadrat der Drehzahl ändert. Vorteilhaft erscheint eine getrennte Behandlung beider Größen, da sie leichter eine Umrechnung und einen Vergleich<sup>46)</sup> von Maschinen gestattet.

Die Größe der Massenkraft ist leicht angegeben, da die Bewegungsgesetze der Massen hinreichend bekannt sind. Für eine Einzylindermaschine mit geschränktem Kurbeltrieb ist bereits auf S. 25 das Nötige abgeleitet worden, so daß sofort geschrieben wird:

$$P_m = H_{m_1} + H_{m_2} + H_{m_3} \dots,$$

worin  $H_m$  jeweils eine Massenkraftharmonische darstellt und der Index ihre Ordnungsziffer bedeutet. Es ist

$$\left. \begin{aligned} H_{m_1} &= -m_h \cdot \omega^2 \cdot \left[ \frac{\lambda}{2} \cos \alpha - \left( \frac{a}{r} \right) \lambda \sin \alpha \right], \\ H_{m_2} &= -m_h \cdot \omega^2 \left[ -\frac{1}{2} + \left( \frac{a}{r} \right)^2 \frac{\lambda^2}{2} \cos 2\alpha - \left( \frac{a}{r} \right) \lambda \sin 2\alpha \right], \\ H_{m_3} &= +m_h \cdot \omega^2 \cdot \frac{\lambda}{2} \left[ \cos 3\alpha + \left( \frac{a}{r} \right) \lambda \sin 3\alpha \right], \\ H_{m_4} &= +m_h \cdot \omega^2 \cdot \frac{\lambda^2}{8} \cos 4\alpha. \end{aligned} \right\} (31)$$

Die höheren Harmonischen sind so klein, daß sie vernachlässigt werden.

Die Analyse der Gaskräfte gestaltet sich schwieriger. Bisher ist es noch nicht gelungen, einwandfreie Indikatorgramme rasch laufender Maschinen zu bekommen. Die Eigenschwingungszahl der

meisten Indikatorsysteme liegt so niedrig, daß sie die Gasdrücke verzerrt wiedergeben. Bei den Indikatoren, die das Diagramm aus einer Reihe von Punkten mehrerer Diagramme zusammensetzen, verschwinden andererseits die Feinheiten der Aufzeichnungen wegen der unvermeidlichen Punktgröße. Wie verschieden bei gleichbleibender Maschineneinstellung und Belastung aber Diagramme der Automotoren ausfallen können, zeigt Abb. 32. Hier sind mit einem optischen Indikator mehrere Diagramme kurz nacheinander aufgenommen worden.

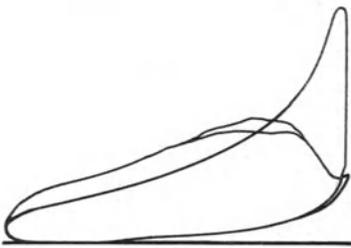


Abb. 32. Indikatordiagramme

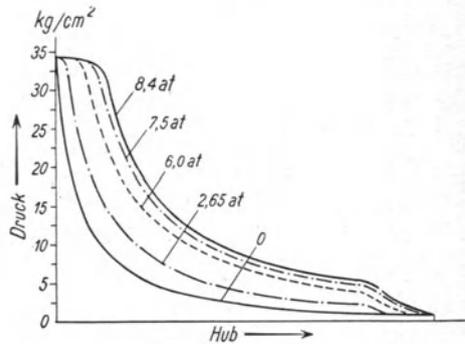


Abb. 33. Dieseldiagramm

In der Literatur ist daher wenig über die Analyse solcher Diagramme bekannt geworden. Nur Plünzke<sup>21)</sup> versucht sie einmal, schließt aber die Massenkräfte mit ein.

Anders liegen die Verhältnisse bei Dieselmotoren. Wydler<sup>20)</sup> und Schröder<sup>21)</sup> haben eingehende Arbeiten veröffentlicht. Der Schröderschen Arbeit lag das Diagramm Abb. 33 einer Zweitaktmaschine zugrunde. Die Analyse liefert unter Berücksichtigung verschiedener Belastungsstufen die Amplituden der ersten 9 Harmonischen und den konstanten Drehkraftanteil (Abb. 34).

Die Zerlegung kann in verschiedener Weise durchgeführt werden. Einmal kann das Indikatordiagramm für sich analysiert werden, um dann die Umrechnung auf die Drehkraft vorzunehmen, oder es wird das Indikatordiagramm zunächst graphisch in ein Drehkraftdiagramm verwandelt und dann analysiert. Da die Schubstangenlänge nur einen geringen Einfluß hat, andererseits die Umrechnung Schwierigkeiten bietet, wird meist der zuletzt genannte

Weg beschrieben. Die Umrechnung der direkt analysierten Diagramme erfordert nach P. Cormac<sup>46)</sup> die Anwendung von Exponentialfunktionen, ist dafür aber übersichtlicher, rascher und universeller.

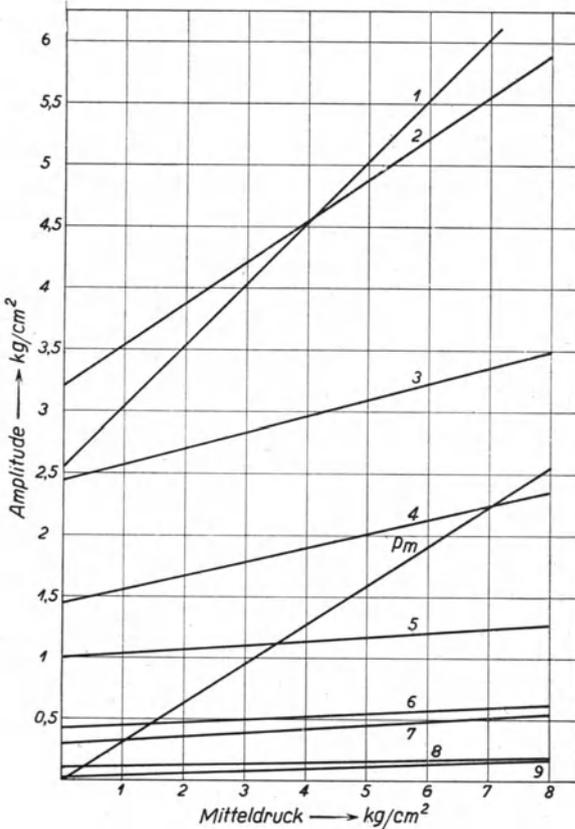


Abb. 34. Amplituden der Harmonischen bei verschiedener Belastung

Aus dem Vergleich der Zahlen von Cormac, Plünzke einerseits und Wydler, Schröder andererseits folgt, was auch wegen des geringen Höchstdruckes der Vergasermaschinen mit geringer Verdichtung vorauszusehen war, daß die Harmonischen der Automotoren kleiner sind als die der Dieselmotoren. Für Näherungsrechnungen, um die es sich bei dem Stande der Untersuchungen nur handeln kann, dürfen für Vergasermaschinen die Drehkräfte zu 70 % der in Abb. 34 verzeichneten Werte angenommen werden.

7. Der Ausschlag. Um einen Überblick zu erlangen, wie groß der Verdrehungswinkel werden kann, welche Beanspruchungen die Welle erfährt, wird Abb. 35 entworfen, die die Ausschlagverhältnisse der einzelnen Massen zeigt. (Die Berechnung erfolgte nach S. 12.)

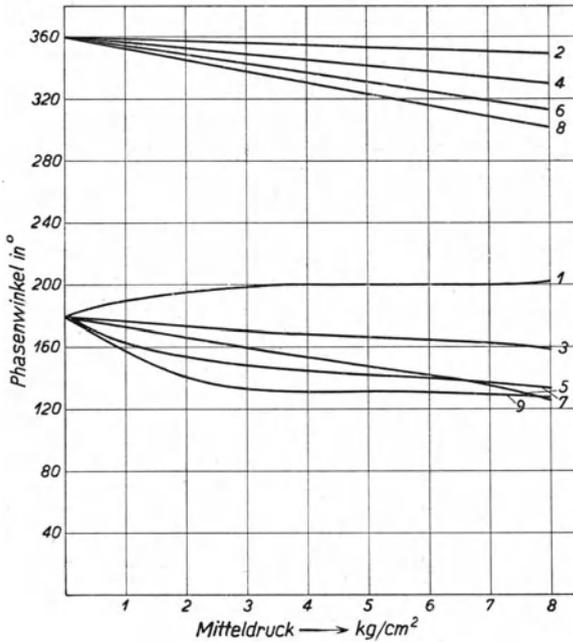


Abb. 35. Phasenverschiebung, abhängig von der Belastung

Nach der Wydlerschen Gleichung

$$x = \frac{H_n \sum a_n}{D_n \sum a_n^2 \omega} \dots \dots \dots (32)$$

(s. S. 20) kann der wirkliche Ausschlag der interessierenden ersten Masse bestimmt werden. Dabei ist auf die Versetzung der Kurbeln zu achten, da die zugehörigen Harmonischen entsprechend gegeneinander verschoben sind. Bei der vorliegenden Maschine beträgt die Versetzung zwischen erstem und zweitem und zwischen erstem und drittem Zylinder je 180°, während die letzte Kurbel mit der ersten in Phase ist.

Die Berechnung wird nur für den Resonanzfall durchgeführt, da für Zwischenstufen die Ausschläge bekanntlich erheblich kleiner sind. Läuft die Maschine mit 3240 U/min, und weist das Diagramm einen mittleren Druck von  $7 \text{ kg/cm}^2$  auf, so hat die in Resonanz tretende dritte Harmonische beim Zweitakter den Wert  $h = 3,3 \cdot 0,7 \text{ kg/cm}^2$ . Bei einem Viertakter wäre entsprechend die sechste Harmonische zu wählen, da sie die dreifache Frequenz der Drehzahl hat.

Aus der Anordnung der Zylinder ergibt sich, daß die Harmonischen des ersten und letzten Zylinders in Phase, die des zweiten und dritten dagegen zu den erstgenannten in Gegenphase sind. Es ist nämlich  $\sin \alpha = -\sin(180 + \alpha)$  und  $\sin \alpha = \sin(360 + \alpha)$ . Das ist bei der Addition der Amplituden zu berücksichtigen, so daß folgendes Bild entsteht:

Zylinder	Amplitude	Amplitudenquadrat
1	+ 0,96	0,9216
2	- 0,9	0,81
3	- 0,766	0,5868
4	+ 0,466	0,2172
Summe	- 0,24	2,5356

Der Schwingungsausschlag ist folglich

$$x_1 = \frac{-2,31 \cdot 0,24}{D_n \cdot 2,5356 \cdot 1020} = -\frac{2,145 \cdot 10^{-4}}{D_n} \text{ cm.}$$

Zu diesem Ausschlag ist noch der durch die Massenkräfte verursachte hinzuzuschlagen (s. S. 55). Da die Massenkräfte unabhängig von der Maschinengattung sind, so kommt nur ihre dritte Harmonische in Frage mit dem Werte

$$H_{m_3} = m_h \omega^2 \cdot \frac{\lambda}{2} \left[ \cos 3 \alpha + \left( \frac{2a}{h} \right) \lambda \sin 3 \alpha \right] \cdot \frac{4}{\pi D^2}$$

oder mit den gegebenen Werten

$$H_{m_3} = 4,63 \cos 3 \alpha + 4,75 \sin 3 \alpha \text{ kg/cm}^2.$$

Der Ausschlag der Massenkraft besteht aus zwei Teilen mit den Werten

$$x_2 = - \frac{4,31 \cdot 10^{-4}}{D_n}$$

und

$$x_3 = - \frac{4,42 \cdot 10^{-4}}{D_n}$$

In diesen Ausdrücken ist zunächst noch der Faktor  $D_n$  unbekannt. Er stellt die Dämpfung dar, wobei der Index  $n$  bedeutet, daß der Dämpfungswert für die vorgelegte Drehzahl zu entnehmen ist. Der Dämpfungsfaktor kann nicht als konstant angesehen werden, wie es nach Versuchen mit Großmaschinen, die besonders Wydler<sup>29)</sup> ausführte, den Anschein haben könnte. Die Großmaschinen haben geringe Drehzahlen, so daß der Einfluß der Drehzahl auf die

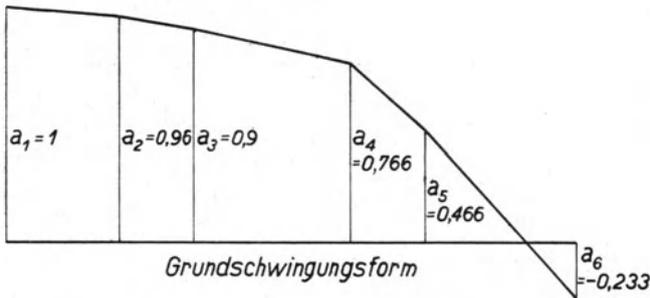


Abb. 36

Dämpfung nicht klar zutage tritt. Anders ist es aber bei Vergasermaschinen mit ihren hohen Drehzahlen. Hier hat die Dämpfung scheinbar einen kurvenförmigen Verlauf, wenn sie als Funktion der Drehzahl dargestellt wird. Die Versuche sind jedoch nicht abgeschlossen, so daß endgültige Zahlen nicht anzugeben sind.

Der Dämpfungsfaktor wird für die gewünschte Drehzahl 3240 U/min zu  $0,006 \text{ kg/cm}^2$  geschätzt. [Für Großmaschinen liegt er zwischen  $0,005$  und  $0,006 \text{ kg/cm}^2$ <sup>29)</sup>. Er ändert sich mit dem mechanischen Wirkungsgrad.] Mit dieser Größe werden die Ausschläge

$$x_1 = 0,03575 \text{ cm}, \quad x_2 = 0,07185 \text{ cm}, \quad x_3 = 0,07367 \text{ cm}.$$

Die Ausschläge sind vektoriell zu addieren, da sie mit einer Phasenverschiebung aufeinanderfolgen. Sie beträgt zwischen den Massenkraften  $90^\circ$  und kann für die Gaskraftharmonische aus Abb. 36

zu  $162^\circ$  entnommen werden. In Abb. 37 ist die Addition ausgeführt und liefert den größten Amplitudenwert

$$X = 0,0925 \text{ cm.}$$

Gas- und Massenkräfte, sowie die Dämpfung greifen am Kurbelradius  $h/2$  an. Dieser schwingt also um das berechnete Stück  $X$  aus der Ruhelage aus. Dabei verdreht sich die Welle um

$$\psi = \frac{0,0925}{5,8} = 0,01593 \text{ oder } 55'.$$

Die Rechnung zeigt, daß sich nicht nur ein verhältnismäßig großer Drillwinkel einstellt, der eine außerordentliche Dauerbeanspruchung der Kurbelwelle darstellt, sondern auch, daß die Massenkraft für sich größer ist als die Gaskraft. Das ist in der hohen Drehzahl begründet. Der Einfluß der Massenkraft auf den Ausschlag ist recht fühlbar und kann keineswegs vernachlässigt werden, wie oft vorgeschlagen wird <sup>21)</sup>.

Die Beanspruchung der Welle läßt sich aus Abb. 36 ermitteln. Für sie ist der Verdrehungswinkel maßgebend. Der Höchstwert ist augenscheinlich im Knoten erreicht, da hier die Ausschlagkurve am steilsten gegen die Achse verläuft. Die anderen Wellenstücke

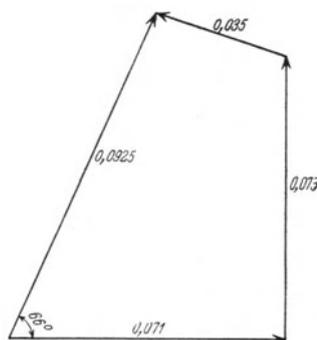


Abb. 37. Schwingungsausschlag

geben geringere Zuschläge. Das Schwungrad verdreht sich um  $-0,233 \psi$  und der letzte Zylinder 4 um  $0,466 \psi$ , so daß die Verdrehung des Wellenstückes 5 einen Betrag von  $\Phi = 0,699 \psi^\circ$  erreicht. Bei  $c_s = 988000 \text{ cmkg}$  entspricht die Drillung einem Moment von  $11000 \text{ cmkg}$ , da  $M_d = \Phi \cdot c$ . Die Beanspruchung ist wegen

$$M_d = W_d \cdot \sigma_d$$

bestimmt durch

$$\sigma_d = \Phi \cdot \frac{c}{W_d} = 1195 \text{ kg/cm}^2.$$

Weitere Erreger sind die Nocken. Bei der Drehung der Nockenwelle heben sie die Ventile oder deren Stößel. Bei jedem Hub ist Energie aus der Welle zu entnehmen, die beim Schließen der

Ventile teilweise wiedergewonnen wird. Ist das Beschleunigungsdiagramm der Ventile bekannt, so kann daraus das zugehörige Drehkraftdiagramm entwickelt werden. Diese auftretenden Kräfte sind aber so klein, daß sie vernachlässigt werden dürfen<sup>97)</sup>.

Ferner kann eine Störungsquelle in den Zahnrädern selbst liegen. Sie können exzentrisch auf ihren Wellen sitzen, so daß sich während der Drehung der Hebelarm, d. h. der Berührungspunkt der Zähne in radialer Richtung ständig ändert. Während einer Umdrehung wird er dabei ein Maximum und ein Minimum durchlaufen. Bei der heute üblichen Präzision der Herstellung sind solche Fehler nur sehr klein und entsprechend auch die dadurch verursachten Drehmomentschwankungen in der Übertragung.

Schließlich muß noch erwähnt werden, daß bei den meisten Zahnrädern, durch ungenaue Herstellung bedingt oder durch die Konstruktion gegeben, der Teilkreis beim Eingriff kleinen Schwankungen unterliegt. Das ergibt eine Erregung, die proportional zur Zähnezahl wechselt und bei der Beurteilung von Geräuschen zu beachten ist. Hierher gehören auch Herstellungsfehler in der Zahnform, die unleidliche schrille Pfeiftöne zu erzeugen vermögen<sup>346)</sup>.

An Stelle von Zahnrädern oder Kardanen wird häufig eine Kette oder ein Riementrieb zur Kraftübertragung verwendet. Solche Maschinenelemente zeigen im unbelasteten Zustand einen gewissen Durchhang, der bei der Kraftübertragung aus dem Zugtrumm verschwindet. Die Kette streckt sich. Nach Erreichen der Gleichgewichtslage wohnt ihr eine kinetische Energie inne, die sie nunmehr veranlaßt, über diese Lage hinauszuschwingen usw. Bei periodischen Drehmomenten kann das dazu führen, daß dieses Pendeln nicht abklingt, sondern sich dadurch verstärkt, daß es seinerseits andere Teile anregt. Gelegentlich führt dieser Umstand zum Reißen der Ketten oder Abspringen der Riemen. Die Riemen sind dabei an sich günstiger, da sie dehnbar sind und eine gewisse Eigendämpfung aufweisen.

Bei Wagen wird fast ausnahmslos das Drehmoment des Motors durch eine Kardanwelle den Hinterrädern zugeleitet. Sie kann bei unsachgemäßer Ausführung recht kräftige Erregungen geben. Die Übertragung von der Getriebewelle auf die eigentliche Kardanwelle geschieht mit wechselnder Winkelgeschwindigkeit, die zwei

Maxima und Minima pro Umdrehung aufweist. (Das Bewegungsgesetz lautet  $\text{tg } \beta = \text{tg } \gamma / \cos \alpha$  mit  $\beta$  und  $\gamma$  als Wellenstellung und  $\alpha$  als Kardanwinkel.) Die Höchstwerte sind gegeben durch  $\frac{\omega}{\cos \alpha}$  und  $\omega \cos \alpha$ , worin  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit und  $\alpha$  den Winkel zwischen Kardan- und Getriebewelle darstellt. Das Drehmoment schwankt entsprechend.

Wird nur ein Gelenk verwendet, müssen diese Schwankungen stets auftreten, während sie bei zweien vermieden werden können.

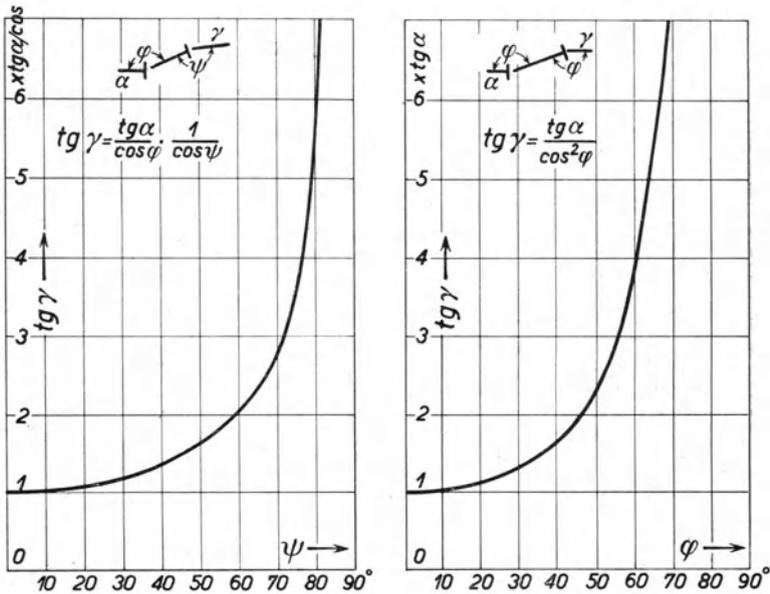


Abb. 38. Kardanfehler

Sind nämlich die an die Kardanwelle anschließenden Wellen einander parallel und liegen die Kardanzapfen der Kardanwelle in derselben Ebene, so wird der geschilderte Vorgang am anderen Ende in umgekehrter Reihenfolge wiederholt, so daß die Gesamtwirkung verschwindet. Liegen aber die genannten Zapfen nicht in derselben Ebene, so wiederholt sich der Vorgang. Die Wirkungen addieren sich.

Zur Veranschaulichung, um welche Winkelwerte es sich hier handelt, ist die Abb. 38 entworfen. Sie stellt den Fall dar, bei

dem die Zapfen der Kardanwelle selbst falsch angeordnet sind und die anschließenden Wellenstücke nicht miteinander fluchten. Das wird bei Wagen mit Doppelgelenk stets der Fall sein, da die in der Achsbrücke sitzende Welle ihre Lage mit der Belastung und Federbeanspruchung ändert. Dabei zeigt sich, daß für kleine Winkel  $\psi$ , wie sie üblicherweise verwendet werden, die Kurve so flach verläuft, daß kaum ein Unterschied zwischen  $\gamma$  und  $\beta$  besteht, also den jeweiligen Winkeln, die die Lage der Endwellen der Ausgangsstellung gegenüber kennzeichnen.

Die Fahrbahn bildet eine weitere Erregungsquelle. Jede Unebenheit bewirkt beim Überfahren ein Schwanken des Drehmomentes. Beim Hinauffahren wächst das Moment und nimmt hernach wieder ab. Das Durchfahren eines Loches bedingt umgekehrt, daß zunächst das Moment mit der Verringerung des Haftens des Rades am Boden abnimmt. Oft ist dabei ein Achsende nur mit der Trägheitskraft des Rades behaftet, das, in der Luft schwebend, von dem Motor beschleunigt wird. Beim Aufsetzen auf den anderen Lochrand wird stoßartig eine Erhöhung des Momentes eintreten. Ein Bild von der Heftigkeit des Vorganges gibt das Torsiogramm Abb. 39, das beim Überfahren einer

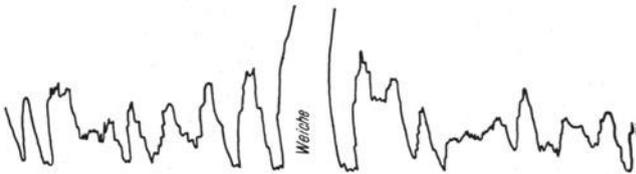


Abb. 39. Weichenstoß (Drehmomentänderung)

Weiche mit einem Triebwagen gewonnen wurde. (Der Vorgang ist dem Durchfahren eines Loches sehr ähnlich.) Der Stoß war so heftig, daß die Feder des Indikators weit über das Papier hinausgelangte.

Solche Stöße ergeben sehr hohe augenblickliche Beanspruchungen der Triebwerksteile und Wellen. Sie sind um so größer, je größer die Masse (besonders des Schwungrades) ist, die dabei beschleunigt werden muß, und können die Anlage gefährden. Der zeitliche Abstand und die Stärke der Stöße ist aber großen

Schwankungen unterworfen, so daß sich keine Resonanz und damit kein Aufschaukeln ihrer Wirkungen ausbilden kann.

8. Die Steuerung des Motors. Die Steuerung geschieht bei Viertaktmaschinen durch Ventile oder Schieber. Ihr Arbeitsgang wird ihnen durch die Nockenwelle diktiert. Lediglich die Behandlung der Ventile bietet Interesse, da für die Steuerwelle der Schiebermotoren sinngemäß dasselbe gilt wie für Kurbelwellen, denen sie schon äußerlich ähneln.

Die Ventile bestehen aus einer Masse, die sich aus dem Gestänge und dem Ventil selbst zusammensetzt und aus einer Federung, die auch in mehrere Teile aufgelöst sein kann, d. h. sich aus mehreren, an verschiedenen Gestängepunkten angreifenden Federn zusammensetzt. Bei der Berechnung ist die eventuell in den Schwinghebeln vorliegende Übersetzung zu beachten (Reduktion durch Quadrat des Hebelverhältnisses). Zweckmäßig wird bei der Reduktion das Ventil selbst als Bezugssystem gewählt.

Die Massenbestimmung muß die der Feder berücksichtigen. Sie hat bei gut konstruierten Ventilsteuerungen sogar einen recht großen Anteil an der Gesamtmasse. Die Reduktion der Feder auf eine Punktmasse bietet gewisse Schwierigkeiten. Alle Windungen bewegen sich mit dem Federteller auf und ab. Die in dieser Bewegung enthaltene Energie kann näherungsweise als linear über ihre Länge verteilt angesehen werden. Damit entspräche die reduzierte Federmasse der halben wirklichen Masse der ganzen Feder.

Aus der Masse und der Federung läßt sich die Eigenschwingungszahl des Ventils bestimmen. Der Betriebszustand wird unsicher, sobald die Drehzahl der Maschine so hoch wird, daß dabei der Takt der Eigenschwingung nahezu erreicht wird. Hier beginnt das Ventil sich vom Nocken zu lösen und eine freie Schwingung auszuführen. Sie führt zu einem harten Aufsetzen auf den Sitz oder den Nocken, sobald diese Teile wieder erreicht werden, da die aufgespeicherte Energie schlagartig zur Wirkung kommt und beim Zusammenprall vernichtet werden muß. Dadurch entsteht das bekannte Prasseln der Ventile.

Diese Erscheinung tritt aber nicht nur bei der errechneten Drehzahl auf, sondern kann gelegentlich schon früher, wenn auch

in geringer Stärke wahrgenommen werden. Die Ursache ist in der Nockenform zu suchen. Der Nockenherstellung wird eine theoretische Kurve (Abb. 71), die möglichst einfach sein soll, zugrunde gelegt. Die Berechnung weist bereits Näherungen auf, die durch Ungenauigkeiten in der Herstellung noch vergrößert werden und gelegentlich erhebliche Änderungen der Beschleunigung verursachen, die die Federkraft übersteigen können. Dabei tritt, wie auch Beobachtungen mit dem Stroboskop zeigten<sup>103</sup>), ein Lösen des Stößels vom Nocken ein und führt zu Geräuschbelästigung.

Das Stroboskop zeigt gleichzeitig noch eine weitere Erscheinung. Die Feder schwingt nicht so, daß die Windungen ihren Abstand gleichmäßig verringern. Vielmehr kann eine deutliche wellenförmige Bewegung dieser Teile beobachtet werden<sup>103</sup>). Sie führt erzwungene Schwingungen aus, die gelegentlich bis zu 25 % der Federkraft aufzehren. Dieser Umstand ist bei der Berechnung zu beachten.

Die Federschwingung läßt sich unschwer errechnen. Denkt man sich ihre Masse und Elastizität in einem Ersatzzylinder gleichmäßig verteilt, so liegt die Längsschwingung eines homogenen Stabes gleicher Dicke vor. Die Schwingung dieses Stabes entspricht mit guter Näherung der Federschwingung. Die Idealisierung liefert die Schwingungszahl

$$n = 0,328 \cdot \frac{d \cdot a}{R^2 \cdot L} \sqrt{c'} \text{ 1/min.}$$

Hierin ist  $n$  die minutliche Schwingungszahl, die nach Versuchen meist zwischen 8000 und 12000 1/min liegt,  $d$  die Drahtstärke,  $a$  der Mittenabstand zweier Windungen,  $R$  der mittlere Windungsradius,  $L$  die wirksame Länge der Feder (ohne tote Enden) und  $c'$  ihre Federkonstante, die aus der Kennung entnommen wird. Alle Größen sind in Millimetern einzusetzen.

Die berechnete Schwingung ist die Grundwelle. Gleichzeitig treten aber auch Oberwellen auf, deren Frequenz ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz sind. Auch eine Art Doppelwelle ist beobachtet worden. Sie liegt in der Mitte zwischen zwei Resonanzen der Grundschwingung und hat kleinere Amplituden.

Die Beschleunigung durch den Nocken stellt eine periodische Erregung der Federschwingung dar, da sie zeitlich stets in dem-

selben Abstand wiederholt wird. Eine Zerlegung solcher Diagramme zeigt, daß sie alle Harmonische enthalten. Zu jedem ganzzahligen Vielfachen der Drehzahl gehört daher eine Resonanz der Erregung mit der Federschwingung. Eine genaue Berechnung der Resonanzausschläge ist kaum möglich, da die Harmonischen der Erregung von der genauen Nockenform abhängen, die aber unvermeidlichen Abweichungen in der Herstellung ständig unterliegt. Sie setzt auch eine weitgehende Kenntnis der Eigendämpfung voraus, die erst erforscht wird<sup>106</sup>). Die Anwendung von Fremddämpfung ist noch nicht gelungen. Die Ausschläge sind nicht übermäßig groß, da die Erregung der höheren Harmonischen, die in Frage kommen, gering ist. Sie müssen aber bei Beurteilung der Geräuschbildung beachtet werden.

9. Wirkung der Schwingungen. Kurz zusammenfassend sei auf die Wirkung der Schwingungen aufmerksam gemacht. Sie bieten meist erst das Mittel zum Wahrnehmen der Ursache, der Schwingung.

Die Drehschwingungen der Kurbelwelle bleiben nicht auf diese allein beschränkt, sondern teilen sich (besonders in dem angeführten Beispiel mit dem Nockentrieb von der Stirnseite aus) der Nockenwelle im Maße der zwischen beiden liegenden Übersetzung mit. Die Nockenwelle erfährt daher zusätzlich zu der gleichförmigen Drehung, die verlangt wird, noch eine periodische mit der Schwingungsfrequenz der Kurbelwelle. Das bedeutet eine Veränderung aller Berechnungsgrundlagen der Steuerung und ändert die Beschleunigungen.

Im Abschnitt über die Ventile war auf die Bedeutung der Beschleunigung aufmerksam gemacht worden. Es darf daher geschlossen werden, was auch der Versuch rasch bestätigt, daß sich ein lebhaftes Prasseln der Ventile einstellt, da sie zeitweilig ohne Berührung mit den Nocken sind.

Bei vornliegendem Nockenwellentrieb kann die Störung der Steuerung sogar so weit gehen (auch die Zündung wird dadurch etwas beeinflußt), daß einzelne Zylinder nicht mehr die normale Füllung erhalten. Deutlich ist das Aussetzen jeweils der dritten Zündung im Diagramm Abb. 31 zu sehen bei etwa 1000 U/min. Bei hintenliegendem Nockentrieb sind die Ausschläge gemäß

Abb. 35 entsprechend kleiner und die Wirkungen kaum feststellbar.

Die mit der Schwingung der Kurbelwelle zusammenhängende Spannungserhöhung hat gelegentlich zu Kurbelwellenbrüchen geführt, die nicht selten falsch gedeutet wurden<sup>116)</sup>, da die Brüche an solchen Stellen in der Nähe des Schwungrades liegen werden, die an sich eine Spannungserhöhung durch plötzliche Querschnittsübergänge aufweisen (Kerbe, Ausrundungen, Bohrungen). Auch das Auslaufen der vorderen Pleuellager wird oft beobachtet.

Durch das Pendeln der Kurbelwelle wechselt die Anlagefläche der Zähne des Steuerungsgetriebes. Bald berühren sich die eigentlichen Arbeitsflanken, bald die rückwärtigen, da die Räder in der Rotation beharren, das Kurbelwellenrad aber seine Geschwindigkeit ändert. Der Wechsel der Belastung führt ein Zusammen schlagen der Zähne herbei, was bei dem üblichen Zahnspiel zur Bildung von Geräusch Anlaß gibt, das als Singen und Klappern der Räder wahrgenommen wird.

Das wechselnde Drehmoment an der Nockenwelle hat in geringem Maße dieselbe Wirkung. Beim Öffnen eines Ventiles liegen die im Drehsinn vorn befindlichen Flanken des Kurbelwellenzahnrades gegen das nächste Rad, beim Schließen aber meist die entgegengesetzten. Die Folge ist das bekannte und bei allen Drehzahlen vernehmbare Klappern der Räder.

Das Abheben der Stößel von den Nocken und das damit verbundene spätere Wiederaufsetzen bewirkt nicht nur das Prasseln oder Prellen der Ventile, das sich durch Brummen der Karosserie noch weiter verstärken kann, sondern auch eine Verhämmerung der Nocken und Ventile. Wird ein Motor häufig in solchen Drehzahlbereichen gefahren, so sind die Aufprallstellen deutlich als Verhämmerungen der Stößel und Nocken zu erkennen.

Die Ventilteller sind meist glühend während des Volleistungsbetriebes. Das Auslaßventil weist dabei Temperaturen<sup>177) 185)</sup> von 700 bis 800° auf und hat eine entsprechend geringe Festigkeit. Seine Elastizität ist in den meisten Fällen wesentlich geringer, als aus den Festigkeitswerten geschlossen werden könnte. Die hohen Beanspruchungen beim Aufsetzen auf den Sitz nach vorherigem

freien Fluge bewirken ein Verziehen des Ventiltellers oder sein vollständiges Abreißen.

Die Folge der Federschwingungen sind Federbrüche. Sie können schon nach verhältnismäßig kurzer Zeit erfolgen, da das Material ermüdet. Der Zeitraum, in dem der Bruch eintritt, ist verschieden und richtet sich außer nach der Materialeigenschaft<sup>110)</sup> nach der Oberflächenbeschaffenheit. Da der Stahl der Federn auf Drillung beansprucht wird, kommt es darauf an, wie sich die höchstbeanspruchten Fasern, die Randfasern der Oberfläche, verhalten<sup>106)</sup>. Geglühtes Material ist an sich günstiger für Dauerbeanspruchungen, doch kann wohl kaum die Verwendung solchen Materials empfohlen werden, wenn sie auch gelegentlich angeregt wird<sup>113)</sup>. Besser erscheint es, die Stahlwerke zur Lieferung gleichmäßigeren Materials zu veranlassen.

10. Dämpfung. Den schädlichen Wirkungen der Schwingungen, zu denen auch die Ungleichförmigkeit des Drehmomentes hinzugezählt werden muß, ist durch entsprechende Maßnahmen zu begegnen. Das kann, wenn der Ungleichförmigkeitsgrad in Frage kommt, einmal durch eine entsprechende Bemessung des Schwungrades geschehen. Je größer es ist, desto geringer werden bei gleicher Schwankung des Antriebsmomentes die Änderungen seiner Winkelgeschwindigkeit sein. Es wirkt als Energiespeicher.

Bei Motorrädern macht sich die Ungleichförmigkeit durch Rucken der Kette und ihr eventuelles Zerreißen bemerkbar. Als Abhilfe wird eine elastische Kupplung\*) verwendet, die die Energie zeitweise aufnimmt, um sie später ihrem Zweck, dem Antrieb des Hinterrades, nutzbar zu machen. Die eigentlichen Schwingungen lassen sich leider nicht in dieser einfachen Weise beseitigen. Sie stellen Störungen dar, die Energie in sich selbst speichern und dadurch schädlich wirken. Hier müssen energievernichtende Stoß- oder Schwingungsdämpfer Verwendung finden. Bei den Kurbelwellen werden am vorderen Ende Schwungmassen angebracht, die durch Lamellenkupplungen mit der Welle gekuppelt sind.

Erreicht der Schwingungsausschlag eine bestimmte Größe, die sich nach der Stärke der Kupplung richtet, so wird die Schwung-

---

\*) Z. B. Viktoriarad.

masse zurückbleiben und durch Reibung Energie in Wärme umsetzen, die damit der Schwingung entzogen ist. Die Ausschläge können dadurch ein bestimmtes Maß nicht übersteigen und werden unschädlich. Die Anbringung des Dämpfers an der Stirnseite ist vorteilhaft, da hier die größten Ausschläge der Schwingungen vorliegen (Abb. 35) und ihre Wirkung vom Reibungsweg abhängt.

Bei der praktischen Anwendung solcher Dämpfer stellen sich gewisse Schwierigkeiten heraus. Die Bewegung des Schwungrades erfolgt an sich ungleichförmig. Der Dämpfer stellt aber, wenn vom Rutschen der Lamellen einen Augenblick abgesehen wird, ein kleines, an der Stirnseite angebrachtes Schwungrad dar. Er muß diese Schwankungen also mitmachen. Rutscht er dabei bereits, so wird der ungleichförmigen Drehung der Welle Energie entzogen und vernichtet. Die Leistung des Motors wird also geschwächt. Ist der Verlust auch an sich vielleicht gering, so bedeutet er doch eine ständige Erhitzung des Dämpfers, die ihrerseits zu einem Festklemmen oder raschen Verschleiß dieses Elementes führt.

Wird der Dämpfer zu fest angespannt, so ist er blockiert. Er tritt zu spät oder gar nicht in Wirksamkeit. Die Schwingung kann dann ihre Schädigungen ausführen. Ein blockierter Dämpfer bedeutet aber auch weiterhin eine Gefährdung der Welle, da bei rascher Änderung der Drehzahl des Motors (beispielsweise durch Bremsen ohne Auskuppeln) die Energie der Dämpfermasse durch die Kurbelwelle abgeleitet werden muß. Sie ist für solche oft recht hohen Beanspruchungen aber durch ihre Form ungeeignet.

Gleichzeitig mit dem Festsetzen des Dämpfers tritt eine Änderung der Eigenschwingung der Welle ein. Sie wird niedriger. Die zweite Eigenfrequenz rückt bedeutend herab und weist einen Knoten in der Nähe des Dämpfers auf<sup>71</sup>). Die entstehende Schwingungsform zeigt steile Anstiege gegen die Abszisse und entsprechend hohe Materialbeanspruchungen. Ein zu fester Dämpfer muß daher als schädlich angesprochen werden.

Zu lose und zu feste Dämpfer sind unbrauchbar. Es gibt nur einen verhältnismäßig engen Bereich günstiger Wirkung. Für jede Motorart liegen die Verhältnisse anders, so daß allgemeine Regeln sich zurzeit noch nicht angeben lassen. Die Bestimmung

der Dämpfer muß wesentlich als Sache des Versuches angesehen werden. Zu massenreiche Dämpfer dürfen als ungünstiger bezeichnet werden, als leichte, da sie eher bei niederen Drehzahlen und ihren unvermeidlichen Ungleichförmigkeiten rutschen. Das Prüfen geschieht zweckmäßig bei Resonanzdrehzahl unter Kontrolle des Ausschlages mit dem Torsiographen (Abb. 30) oder Torsionsindikator und zur Gegenprobe bei niedriger Drehzahl und ungleichförmigem Gang.

Bei dem Entwurf eines Dämpfers und seiner Anbringung am Motor ist zu beachten, daß die in ihm erzeugte Wärme ungehindert abgeleitet werden kann, da sie sonst seine Eigenschaften schädigt. Gleichzeitig muß er zugänglich sein, damit er zum Ausgleichen der Abnutzung nachgestellt werden kann.

Das Schwingen der Ventildfedern läßt sich nicht in derselben Weise beheben. Die Schwierigkeit ist, die Federelemente für sich zu dämpfen, ohne das Ventil selbst merklich zu beeinflussen. Bislang sind keine Lösungen dieser schwierigen Aufgabe bekannt geworden.

11. Kardanwelle. Die Kardanwelle ist eine lange und oft recht dünne Welle. Sie ist entweder zweigelenkig und beiderseits in den Gelenken gestützt, oder eingelenkig und dann in der Hinterachse gelagert. Sie soll das Drehmoment des Motors auf die Räder übertragen und gibt dabei durch Formänderungen Stößen und Ungleichförmigkeiten dieses Momentes nach. Ein Versagen kommt trotz der oft ungünstigen Beanspruchung kaum vor. Gefährlich sind ihr aber die Biegungsschwingungen.

Wegen ihrer Lagerung in zwei Kugeln an den Enden der Kardanwelle oder in einer Kugel und einem verhältnismäßig kurzen Endlager kann die Kardanwelle als Träger auf zwei Stützen aufgefaßt werden. Sie zeigt einen gewissen Durchhang unter Belastung durch ihr Eigengewicht und hat daher eine leicht gewölbte Mittellinie, um die die Drehung vor sich gehen soll. Sie weicht im Scheitel um den Betrag  $f$  von der ideellen geraden Drehachse  $A-A$  ab (Abb. 40).

Träger auf zwei Stützen stellen erfahrungsgemäß Schwinger dar. Sie sind nichts anderes als mit Masse belegte Federn. Ist solch ein Träger ausgelenkt, so wird die Federwirkung ihn in die

Ruhelage zurückführen wollen, dabei setzt sich die potentielle Federenergie in Massenwucht um. Er gelangt über die Gleichgewichtslage hinaus, und dasselbe Spiel wiederholt sich in umgekehrter Reihenfolge. Als Unterschied gegen frühere Betrachtungen liegt hier einmal eine über die ganze Längenausdehnung



Abb. 40. Schema der Kardanwelle

der Feder gleichmäßig verteilte Masse vor, zum anderen ist die Feder bereits durch die Schwerkraft vorgespannt. (Die Anfangsauslenkung ist  $f$ .)

Wird die vertikale Richtung<sup>24)</sup> zur  $Z$ -Achse, die Stablänge als  $X$ -Achse gewählt und der Querschnitt zu  $F$  angenommen, der konstant oder variabel sein kann, so ist das Kräftespiel durch die Differentialgleichung bestimmt:

$$-\mu F dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{d}{dx} \left( -E\theta \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \right) dx + g\mu F dx = 0 \quad . \quad (33)$$

Hierin bedeutet  $\mu$  die spezifische Masse,  $g$  die Erdbeschleunigung,  $E$  den Elastizitätsmodul,  $\theta$  das äquatoriale Trägheitsmoment des Stabes. Die Massenwucht ist durch den Ausdruck  $\mu F \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ , die elastische Rückstellkraft durch  $\frac{d}{dx} \left( -E \cdot \theta \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \right) dx$  und das Gewicht des Elements durch  $g\mu \cdot F \cdot dx$  bestimmt.

Nach Ausführung der Differentiation und Division der Gleichung durch  $-\mu \cdot F \cdot dx$  ist

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{E \cdot \theta}{\mu \cdot F} \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = g.$$

Die Differentialgleichung besitzt das konstante Störungsglied  $g$ . Ihre Lösung wird nicht beeinflusst durch Nullsetzen dieses Summanden. Er bedeutet physikalisch nur eine bestimmte vom Nullpunkt abweichende Ausgangslage für die Messung der eintretenden Bewegung.

Ist die Ausgangslage der einzelnen Elemente unter Belastung des Trägers durch sein Eigengewicht durch  $z_1$  gekennzeichnet ( $z_{1\max} = f$ ), so ist die jeweilige Entfernung eines Massenpunktes zur Zeit  $t$  bestimmt durch

$$y = z - z_1 \dots \dots \dots (34)$$

Nach Einsetzen der Lösung in die Differentialgleichung geht sie über in

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{E \cdot \theta}{\mu \cdot F} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \dots \dots \dots (35)$$

Soll die Gleichung als Lösung eine Schwingung aufweisen, so muß sich die Auslenkung  $y$  darstellen lassen durch

$$y = \Phi(x) \cdot \sin(\omega t + \psi) \dots \dots \dots (36)$$

woraus abgeleitet werden kann

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 \Phi \cdot \sin(\omega t + \psi)$$

und

$$\frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = \Phi'''' \cdot \sin(\omega t + \psi).$$

Für einen zylindrischen Stab, bei dem also  $\frac{E \cdot \theta}{\mu \cdot F}$  konstant ist, wird gefunden:

$$y = \left( A \sin \frac{\sqrt{\omega} x}{\lambda} + B \cos \frac{\sqrt{\omega} x}{\lambda} + C \sin \frac{\sqrt{\omega} x}{\lambda} + D \cos \frac{\sqrt{\omega} x}{\lambda} \right) \sin(\omega t + \psi), (37)$$

worin

$$\lambda^4 = \frac{E \cdot \theta}{\mu \cdot F} \cdot b \dots \dots \dots (38)$$

Die Bewegung ist also eine Schwingung, die jedoch nur in seltenen Fällen Sinusearakter hat.

Für das Aufliegen auf zwei Stützen an den Enden des Stabes, wie in Abb. 40 dargestellt, ist in den Punkten  $x = 0$  und  $x = L$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Wird dieser Wert in die Schwingungsgleichung (37) eingeführt, so ist

$$A = B = D = 0 \quad \text{und} \quad \sin \frac{\sqrt{\omega} L}{\lambda} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \omega = \frac{n^2 \pi^2 \lambda^2}{L^2} (39)$$

Der Träger führt Schwingungen aus von der Form

$$y = C_n \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \cdot \sin \left( \frac{n^2 \pi^2 \lambda^2 t}{L^2} + \psi_n \right) \dots \dots \dots (40)$$

Unter den vielen möglichen Schwingungen ist die Grundschiwingung die niedrigste und diejenige, die hier am meisten interessiert. Für sie ist  $L$  eine halbe Wellenlänge. Die erste Oberschiwingung hätte die doppelte Frequenz und  $L$  als ganze Wellenlänge. Es würde sich in der Mitte des Stabes ein Knoten ausbilden.

Die Grundschiwingung hat die Ordnungszahl 1. Berücksichtigt man gleichzeitig Gleichung (38) und benutzt zur Bestimmung der Eigenfrequenz der Welle Gleichung (39), so ist

$$\omega_{e_1} = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{E \cdot \theta \cdot b}{\mu \cdot F}}$$

oder die minutliche Schwingungszahl

$$n_{e_1} = \frac{30 \cdot \pi}{L^2} \sqrt{\frac{E \cdot \theta \cdot b}{\mu \cdot F}} \dots \dots \dots (41)$$

Der Ausdruck läßt sich noch umformen, um auf bekanntere Werte zu kommen. Es ist  $L \cdot \mu \cdot F$  nichts anderes als die Masse des Stabes, so daß

$$\frac{G}{g} = \mu \cdot L \cdot F.$$

Wird der Wert eingesetzt, so hat die Gleichung (41) die Form

$$30 \cdot \pi \sqrt{\frac{E \cdot \theta \cdot b \cdot g}{G \cdot L^3}} = n_{e_1}.$$

Der Wurzel Ausdruck entspricht der Durchbiegung des Trägers unter seinem Eigengewicht, da

$$\frac{384}{5} \cdot f = \frac{G \cdot L^3}{E \cdot \theta}.$$

Die Untersuchung führt zu dem Ergebnis

$$n_{e_1} = 30 \cdot \pi \cdot \sqrt{g} \cdot \sqrt{\frac{1}{f}}.$$

Üblicherweise wird sie genähert zu

$$n_e = 300 \sqrt{\frac{1}{f}} \dots \dots \dots (42)$$

angegeben.

Versuche haben nun gezeigt, daß die Auflager nicht als vollkommen starr anzusehen sind, vielmehr etwas nachgeben und dadurch die Länge des Stabes vergrößern. Die Schwingungszahl sinkt hierbei etwas herab.

Wird ein solcher Stab, wie er durch die Kardanwelle dargestellt ist, gedreht, so müssen seine einzelnen Querschnitte ständig gegenseitige Verschiebungen erfahren. Um dem zu entgehen, wird er versuchen, sich zu strecken und bei unendlich hoher Drehzahl gerade zu werden.

Praktisch läßt sich das aber niemals erreichen, da unvermeidliche Ungenauigkeiten in der Herstellung der Welle zu einer Verlagerung des Schwerpunktes aus der Drehachse herausführen. In übertriebenem Maße ist die Sachlage in Abb. 41 dargestellt. Der Schwerpunkt liegt bei als gerade angenommener Achse um das Stück  $e$  unter ihr.



Abb. 41. Entmittete Wellenmasse

Durch die Rotation entsteht eine Fliehkraft, die im Schwerpunkt angreift. Sie ist bestimmt durch die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Drehung, das Gewicht  $G$  der Welle, die Erdbeschleunigung  $g$  und die Entmittung  $e$  zu

$$Z = \frac{G}{g} \cdot e \cdot \omega^2 \dots \dots \dots (43)$$

Sie behält ihre Lage im Raume nicht unverändert bei, kreist vielmehr mit der Welle. Während sie im gezeichneten Falle zunächst nach unten wirkt, hat sie nach einer halben Umdrehung ihre Richtung geändert und weist aufwärts. Sie versucht die Welle durchzubiegen und wechselt in einer betrachteten Ebene ständig das Vorzeichen. Sie bildet daher eine periodische Erregung für den Stab, der bereits als schwingungsfähig erkannt wurde.

Die Zentrifugalkraft stellt die Erregung des Schwingers dar. Ihre Periode ist durch die Drehzahl der Welle bestimmt. Bei Gleichheit von Drehzahl und Eigenfrequenz liegt daher Resonanz vor. Sie ist für den Bestand der Welle sehr gefährlich, da die Dämpfung nur gering ist. Sie wird lediglich durch die Eigendämpfung des Wellenmaterials bestimmt. Die Ausschläge können

in der Resonanz so groß werden, daß sie nicht nur eine starke Erschütterung aller mit der Welle verbundenen Teile bewirken, sondern können selbst den Bruch der Welle herbeiführen. Die Durchbiegung der Welle unterstützt den eingeleiteten Vorgang noch ihrerseits, da die Drehung bei wachsendem Ausschlag nicht mehr um die gebogene Mittelfaser erfolgen wird, sondern um eine weniger gekrümmte Achse, wodurch die Erregung ihrerseits verstärkt wird.

Biegungsschwingungen der Kardanwelle müssen unter allen Umständen vermieden werden, oder so gering sein, daß sie unbemerkt bleiben. Das geschieht einmal durch Verlegung der Eigenfrequenz in unbenutzte Gebiete, d. h. über die höchste erreichbare Wellendrehzahl, zum anderen durch Verringerung der Erregung.

Die Veränderung der Eigenschwingungszahl ist leicht aus der Formel für die Eigenschwingung abzulesen. In ihr ist  $f$  variabel. Formel (41) bietet die Möglichkeit, nach Zusammenfassung der konstanten Teile zu  $\alpha$  das Gewicht, die Stützlänge und das äquatoriale Trägheitsmoment zu verändern.

Die Änderung des Trägheitsmoments kann durch Vergrößerung des Durchmessers geschehen, da es aus ihm zu

$$\theta = \frac{\pi}{64} d^4$$

berechnet wird. Mit dem Durchmesser wächst aber auch das Gewicht, so daß die Größe  $G$  mit in Rechnung zu stellen ist. Die Veränderung von  $f$  geschieht im Maße

$$f = \alpha_1 \cdot \frac{G}{\theta} = \alpha'_1 \cdot \frac{1}{d^2} \cdot \dots \dots \dots (44)$$

Die Änderung der Eigenschwingungszahl ist  $d$  verhältig.

Für die Länge  $L$  läßt sich eine ähnliche Betrachtung anstellen. Auch sie ist in  $G$  enthalten; daher ändert sich die Durchbiegung  $f$  mit  $L^4$  und die Eigenschwingungszahl mit  $L^2$ . Die Längenänderung ist das wirksamste Mittel zur Erhöhung der Schwingungszahl.

Wird die Welle fischbauchig gedreht, so ist die Durchbiegung näherungsweise dieselbe, wie für eine Welle mit vergrößertem Durchmesser. Sie bedeutet neben einer schwierigen Herstellung nur eine Drehzahländerung mit dem Durchmesser.

Das Ausbohren der Wellen, bzw. ihre Herstellung aus Rohren, ist in doppelter Weise ein Gewinn. Die Welle wird leichter als

eine entsprechende massive gleicher Länge. Ihre Eigenschwingung liegt höher als die einer massiven Welle gleichen Durchmessers. Allerdings dürfen die Hohlwellen nicht zu dünnwandig sein, da sie sonst unstabil werden. Die Änderung von  $f$  geht in Masse ( $D^2 + d^2$ ) vor sich, wenn  $D$  den Außen- und  $d$  den Innendurchmesser des Rohres bezeichnet.

Je kleiner die Erregung ist, desto kleiner wird unter entsprechenden Verhältnissen auch der Ausschlag sein. Das Streben muß dahin gehen (da die Wellendrehzahl und ihr Gewicht praktisch Konstante sind), die Entmiltung so klein wie möglich zu machen. Hierfür sind besondere Maschinentypen entwickelt worden, da die Werkstatt nicht von vornherein für ein Kleinstmaß garantieren kann. Sie sind unter dem Namen Auswuchtmaschinen bekannt. Ihre Bauart ist verschieden, je nach dem angestrebten Zweck.

Bei den Kardanwellen liegt wegen ihrer im Verhältnis zum Durchmesser großen Länge stets statische und dynamische Unbalance und elastische Verformung vor. Zur Auswuchtung sind also Maschinen zu benutzen, die beide Fehler zu beseitigen gestatten.

Vielfach werden Kardanwellen beiderseits zwischen Hardy-scheiben gehängt. Auf ihre Auswuchtung wird viel Wert gelegt und die Welle selbst als Rohr ausgebildet. In diesem Falle liegen die Schwingungsverhältnisse anders, als bisher besprochen. Die Scheiben sind gegenüber der Welle als weich anzusehen, die Welle selbst, wegen ihres meist großen Durchmessers, als starr. Bei der Montage können Entmittungen der ganzen Welle nicht vermieden werden und nehmen hohe Werte an.

Die Achse ist in diesem Falle eine stabförmige, starre Masse, die an den Enden durch Federn gestützt wird und entsprechend schwingen kann. Ihre Schwingungseigenschaften entsprechen denen der Vorderachse, wie sie später besprochen werden. Solche fehlerhafte Konstruktionen mit tiefliedender Eigenfrequenz (wegen der Weichheit der „Federn“) geben oft zu Anständen Anlaß. Ein seitlicher Beobachter nimmt die schwingende Bewegung der Wellen mit bloßem Auge wahr und kann die Änderung des Schwingungsausschlags mit der Drehzahl mühelos verfolgen.

### § 3. Zündung

Die Zündung geschieht im Motorzylinder durch einen Funken, der im Magnetapparat als Strom seinen Ursprung nimmt. Schwingungstechnisch stellt das Zündkabel und die Kerze eine Kapazität dar, die gelegentlich noch durch Zuschalten von Lepel-Verstärkern verändert wird. Die Sekundärspule ist mit dem Kabel einerseits, andererseits mit der Masse, der Rückleitung des Stromes, verbunden. Sie stellt für sich Kapazität und Induktion dar. Zur Verstärkung des Feldes in der Spule dient ein Weicheisenkern, der die Schwingung unharmonisch macht. Durch Transformatorwirkung ist sie außerdem mit der Primärwicklung gekoppelt, die ihrerseits einen Schwingungskreis darstellt und die Behandlung erschwert.

Das Zündsystem ist also ein gekoppelter Schwingungskreis. Seine Eigenschwingungen lassen sich aus den elektrischen Größen aber nur näherungsweise berechnen, da die kapazitiven Nebenschlüsse eine Reihe von weiteren Frequenzen ergeben. Die Schwingungskreise sind etwas gedämpft, da sie eine Eisenspule enthalten, die bei jedem Stromwechsel ummagnetisiert werden muß und daher Hysteresisverluste ergibt.

Die kapazitiven Nebenschlüsse können den Schwingungskreis der Hochfrequenz stark beeinflussen, wenn, wie bei älteren Motoren vielfach angewendet, zur Führung der Kabel Blechhülsen benutzt werden. Sind die Kabel nur wenig schadhaf, so macht sich der Nebenschluß nicht nur durch Bindung von Energie im Kondensator—Kabel÷Hülse, sondern schließlich durch Funkenübergänge störend bemerkbar. Die Kerze zündet nicht mehr.

Der Schwingungskreis wird durch elektrische Stöße erregt. In der Primärspule wird ein Strom erzeugt und bei seinem Höchstwert unterbrochen. Das Feld setzt sich in Hochspannungsstrom der Sekundärspule um. Je rascher die Unterbrechung erfolgte, und je stärker der Primärstrom war, desto höher ist die sekundäre Spannung. Die Frequenz des entstehenden Stromes ist durch die Eigenschwingung des Magneten bestimmt, da diese angeregt wird, wie später (Chassisschwingungen) gezeigt wird.

Die verhältnismäßig starken Zündströme stellen Schwingungen hoher und niederer Frequenz dar, die sich gegenseitig überlagern

und modulieren. Der Frequenzbereich ist nach Messungen zwischen wenigen Metern (etwa 4 m) und über 1000 m Wellenlänge zu suchen. Da sie in Leitern ziemlicher Ausdehnung fließen, sind sie geeignet, auch den Äther zum Schwingen anzuregen und den Empfang und das Senden von Funknachrichten zu stören. Versuche, die Störung durch Kettenleiter aus Kondensatorenketten zu beseitigen oder nur durch Abschirmung der Kabel, sind erfolglos, wenn nicht gleichzeitig für eine Abschirmung des Magneten selbst gesorgt wird.

Da das Gebiet etwas abseits des Bekannten liegt, soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden.

#### § 4. Wärme

Ein anderes Nebengebiet ist die Wärme. Bei jeder Verbrennung im Zylinder wird eine bestimmte Wärmemenge frei, von der ein Teil durch Strahlung und Leitung in die Wandungen, Ventile und Kolben gelangt. Bei den Untersuchungen wird meist unterschieden zwischen der Wärmeleitfähigkeit und der Wärmeaufnahmefähigkeit, die besonders mit Wärmereflexionsvermögen zu bezeichnen wäre. Sie ist der Leitfähigkeit direkt verhältig.

Sobald eine Wärmewelle an die Wandungen gelangt, wird sie reflektiert. Ein Teil gelangt jedoch, da die Reflexion nicht vollständig ist, in die Wandung, die sie weiterleitet. An jeder Trennfuge wiederholt sich das Spiel und ist dort deutlich wahrnehmbar, wo Materialien erheblich verschiedener Leitfähigkeit zusammenstoßen.

Bisher hat man sich meist begnügt, die Wärmeaufnahme als eine gegebene und konstante Erscheinung zu betrachten. Selbst die Einführung der Leichtmetallkolben mit ihren thermisch günstigen Eigenschaften und ihrer geringeren Wärmeaufnahmefähigkeit vermochte nicht diese Ansicht zu erschüttern. Wenige Versuche, die Reflexion zu verstärken durch Verwendung besonderer hochglanzpolierter Teile aus Nickel oder Eisen, mißlingen. Bei den Versuchen war nur die Beschaffenheit der Oberfläche, nicht aber die des Materials selbst bedacht worden. Eisen und Nickel unterscheiden sich nur wenig in der Wärmeleitfähigkeit und entsprechend im Reflexionsvermögen, das nur etwa den fünften Teil desjenigen von Kupfer beträgt.

Soll die Wärmeaufnahme vermindert werden, so ist eine Folge von Reflexionsschichten auf die zu schützenden Stellen aufzubringen, bei denen sich gut und schlecht leitende Schichten abzuwechseln hätten, wie es bei Isolierstoffen bereits versucht wird und zu guten Erfolgen führte.

Leider liegt noch zu wenig Material vor, um das Gebiet weiter zu behandeln.

## § 5. Chassisschwingungen

Das Chassis stellt eine träge Masse dar, die durch Federn gegen den Boden abgestützt ist. Sie kann sich auf und ab, gegen den Boden, vor und zurück gegen eine mittlere Lage und quer gegen die Längsachse verschieben, sowie Drehungen um die drei Raumachsen ausführen. Alle Schwingungen sind miteinander mehr oder minder stark gekoppelt, da dieselbe Masse und die gleichen Federn an ihnen beteiligt sind. Das Anschreiben aller simultanen Differentialgleichungen für alle gleichzeitig stattfindenden Bewegungen erscheint schwierig und nicht lohnend, da ein solches Vorgehen an Übersicht einbüßt. Hier sollen daher die Hauptprobleme herausgegriffen und für sich analysiert werden.

Nicken, Wanken, Wogen. Die Bewegungen in Wagenlängsrichtung und quer dazu, sowie die Drehung in einer horizontalen Ebene sind, verglichen mit den anderen Schwingungen, klein. Sie können daher auch nur in untergeordnetem Maße auf letztere einwirken und sollen zunächst vernachlässigt werden. Mit den Koordinaten<sup>14)</sup> der Abb. 42 läßt sich unter Zuhilfenahme des be-

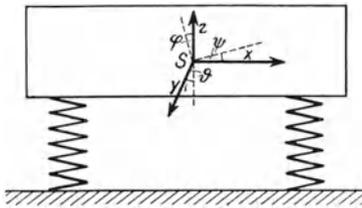


Abb. 42. Chassisschema

kannten Satzes der Bewegung  $E = \frac{1}{2} m v^2$  ihr Potential berechnen. Es ist

$$E = \frac{1}{2} \left[ m \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \theta_1 \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + \theta_2 \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right].$$

Wird das statische Potential zu  $P$  angenommen, so gelten die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \frac{dz}{dt}} \right) &= - \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \frac{d\vartheta}{dt}} \right) &= - \frac{\partial P}{\partial \vartheta} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \frac{d\psi}{dt}} \right) &= - \frac{\partial P}{\partial \psi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (45)$$

An den Fahrzeugen sind je nach der Bauart zwei oder drei Federpaare vorhanden, deren Federkonstanten mit  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$  bezeichnet seien. Bei den meisten Fahrzeugen, besonders Personenzugmaschinen, finden sich nur zwei Federpaare. Die Belastung der einzelnen Federn in der Ruhelage des Wagens sei  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$ . Die Koordinaten der einzelnen Federn sind entsprechend  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  bzw.  $y_1$ ,  $y_2$  und  $y_3$ . Wegen der Symmetrie in der Befestigung der Federn zur Wagenlängsachse können die  $y$ -Werte einander gleich und gleich  $b$  gesetzt werden.

Erfolgt eine Bewegung des Fahrzeuges unter den gemachten Voraussetzungen, so ändert sich nur die  $z$ -Koordinate, während  $x$  und  $y$  unverändert bleiben. Die Änderung erfolgt an den einzelnen Punkten gemäß der Hebung oder Senkung um den Betrag  $z$  in Richtung der  $Z$ -Achse, dem Nicken (Drehung um die  $Y$ -Achse) um den Winkel  $\psi$  mit dem Betrage  $x_n \psi$  und dem Wanken um den Winkel  $\vartheta$  mit dem Heben um  $b \cdot \vartheta$ . Die Arbeit der  $n$ -ten Feder ändert sich dabei um den Betrag (Abb. 43)

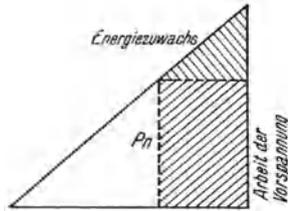


Abb. 43. Energiezuwachs beim Schwingen

$$\Delta E = p_n (z + b \vartheta - x_n \psi) + \frac{1}{2} c_n (z + b \vartheta - x_n \psi)^2.$$

Die Summe dieser Energieanteile liefert die Gesamtenergie  $E$ :

$$E = \sum_1^n \left\{ p_n (z + b \vartheta - x_n \psi) + \frac{1}{2} c_n (z + b \vartheta - x_n \psi)^2 \right\}.$$

Werden die Differentiationen durchgeführt, so ist

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = - \sum p_n - z \sum c_n + \psi \sum x_n c_n \dots \dots (46)$$

$$\theta_1 \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = - \vartheta \sum c_n b \dots \dots \dots (47)$$

$$\theta_2 \frac{d^2 \psi}{dt^2} = - \psi \sum c_n x_n^2 + z \sum c_n x_n \dots \dots \dots (48)$$

In diesen simultanen Differentialgleichungen ist  $m$  die Gesamtmasse des Wagens,  $\theta_1$  das Trägheitsmoment um die Längsachse,  $\theta_2$  um die Querachse,  $c_n$  die Federkonstante der  $n$ -ten Feder,  $x_n$  ihr Abstand in Wagenlängsrichtung vom Koordinatenursprung,  $z$  die Höhe des Koordinatenursprunges über der Ruhelage,  $\vartheta$  der Winkel des Wankens,  $\psi$  der des Nickens,  $\sum p_n = G$  bedeutet die Ruhelage des Wagens, die er unter statischen Bedingungen einnimmt,  $t$  die Zeit und  $b$  den halben Abstand der Federn in Richtung quer zum Wagen voneinander.

Die Gleichungen zeigen, daß die Wankschwingungen unabhängig von denen des Nickens und der Auf- und Abbewegung (Wogen) sind. Ihre Frequenz kann daher gesondert ermittelt werden. Aus Gleichung (47) folgt

$$n_w = \sqrt{\frac{\sum c_n b}{\theta_1}} \dots \dots \dots (49)$$

Die Gleichungen (46) und (48) stellen jedoch gekoppelte Schwingungen dar. Nach Einführung der bekannten Exponentialfunktionen nehmen sie die Form an:

$$- A m \omega^2 + A \sum c_n - B \sum x_n c_n = 0 \dots \dots (50)$$

$$- B \theta_2 \omega^2 + B \sum c_n x_n^2 - A \sum c_n x_n = 0 \dots \dots (51)$$

Die Determinante läßt sich leicht anschreiben:

$$\begin{vmatrix} - m \omega^2 + \sum c_n - \sum x_n c_n & \\ - \sum c_n x_n & - \theta_2 \omega^2 + \sum x_n^2 c_n \end{vmatrix} = 0 \dots \dots (52)$$

Sie liefert die Periodengleichung:

$$0 = \sum c_n - m \omega^2 - \frac{(\sum x_n c_n)^2}{\sum x_n^2 c_n - \theta_2 \omega^2} \dots \dots \dots (53)$$

oder in anderer Form:

$$\omega = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}\right)^2 + \frac{(\sum c_n x_n)^2}{m \cdot \theta_2}}} \dots (54)$$

worin

$$\omega_1^2 = \frac{\sum c_n}{m} \quad \text{und} \quad \omega_2^2 = \frac{\sum c_n x_n}{\theta_2}$$

die Eigenfrequenzen der ungekoppelten Bewegungen darstellen.

Für diese Schwingung gilt, was bereits früher erwähnt wurde, daß bei sehr verschiedenen Werten von  $\omega_1$  und  $\omega_2$  die Kopplung nur wenig Einfluß hat, daß aber für den Fall eines geringen Unterschiedes in der Schwingungszahl näherungsweise gesetzt werden kann:

$$\omega = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \frac{\sum c_n x_n}{\sqrt{m \theta_2}}} \dots (55)$$

Die Näherungsgleichung (55) gestattet, einiges über das Verhalten der Fahrzeuge auszusagen. Liegen die Parallelschwingung ( $\omega_1$ ) und die Nickschwingung ( $\omega_2$ ) für sich genommen dicht beieinander, so werden auch die kritischen Schwingungen des gekoppelten Systems nicht weit voneinander entfernt sein. Die Schwingungsgebiete gehen ineinander über, ohne daß die Ausschläge inzwischen wieder abgeklungen wären, was bei weit auseinanderliegenden Eigenfrequenzen der Teilsysteme der Fall ist.

Aus der Ableitung ist bekannt, daß die gekoppelte Schwingung sich aus der Parallelschwingung und einer überlagerten Kippschwingung zusammensetzt. Da zur Kippschwingung weniger Energie erforderlich ist, als zur Parallelschwingung, wird sie stets höher liegen. Dasselbe gilt auch für die gekoppelten Schwingungen. Hier wird diejenige Schwingung niedriger liegen, die den größten Anteil an der Parallelschwingung hat. Ist ein solches System erregt durch irgendeine beliebige periodische oder Stoßfunktion der Zeit, so wird sich stets die Schwingungsform ausbilden, für die Erregungsfrequenz und Eigenfrequenz am dichtesten beieinanderliegen. Ist z. B. die niedrigere Schwingung angeregt, so wird das Chassis wesentlich sich selbst parallel auf und ab schwingen. Gleichzeitig kann es aber auch kleine Nickschwingungen ausführen, die durch höhere Harmonische der Erregung unterhalten werden.

Liegen die Eigenschwingungen des gekoppelten Systems weit auseinander, so wird sich deutlich zeigen, daß einmal die niedere, ein andermal die höhere Eigenfrequenz angeregt wurde.

Liegen sie aber, wie oben erwähnt, dicht beieinander, so ist ein merklicher Unterschied nicht feststellbar. Ändert sich aber die Erregerfrequenz, so kann die eine Form in die andere übergehen, wobei die bereits gespeicherte Schwingungsenergie größtenteils erhalten bleibt.

Ein solcher Übergang der Schwingungsformen ineinander wird häufig beobachtet. Er findet vor allem statt beim Übergang von niederer zu höherer Schwingungszahl. Aus der Elektrotechnik, wo man es leichter als bei mechanischen Schwingern beobachten kann, ist auch bekannt, daß solche Übergänge meist sehr plötzlich vor sich gehen. Es treten Zieherscheinungen auf, die sich darin äußern, daß die bereits vorhandene Schwingungsform noch in einem Gebiet beibehalten wird, in dem schon die andere vorherrschen sollte. Erst bei weiterer Steigerung der Erregerfrequenz findet dann der Übergang sprunghaft statt.

Auf den Wagen angewendet, bedeutet das, daß die Parallelschwingung sprunghaft in die Nickschwingung übergehen kann.

Beide Schwingungserscheinungen sind physiologisch sehr verschieden. Die Parallelschwingung hebt und senkt die Fahrer rhythmisch. Das wird, wenn es nicht zu rasch erfolgt, als Wiegen empfunden und stört nicht. Als Grenze für die Höhe dieser Schwingungszahl wurde der Wert 120 S/min gefunden. Neuere Fahrzeuge haben sehr viel niedrigere Werte; so weist der N. A. G.-Wagen nur etwa 70 S/min auf.

Die Nickschwingung kippt den Körper der Fahrer um eine horizontale Achse. Alle Beschleunigungen der Personen, die von dieser Schwingung ausgehen, müssen durch die Nackenmuskeln ausgeglichen werden, soll nicht der Kopf ständig seine Lage zum Fahrzeug ändern. Eine ständige Änderung der Lage des Kopfes zur Umgebung hätte aber ein Flimmern der Augen zur Folge, die sich stets den neuen Verhältnissen anzupassen hätten. Weder die erste noch die zweite Bedingung sind angenehm. Sie führen auf die Dauer zur Ermüdung und werden als Belästigung empfunden.

Die Nickschwingung kann schließlich stark werden, so daß die auftretenden Beschleunigungen die Körper der Fahrer von den Polstern abheben. Sie fallen dann frei gegen die entsprechenden Polsterteile und schlagen auf sie auf. Damit erleidet die Person einen Stoß, der unbedingt zu vermeiden wäre.

Bei der Nickschwingung sind nicht alle Plätze im Wagen einander gleich, wie sie es für die Parallelschwingungen sind, vielmehr zeigt sich, daß die Plätze an der Rückseite des Wagens am ungünstigsten, die des Lenkers meist am günstigsten sind. Die Erklärung findet sich leicht in der Tatsache, daß der Wagen bei dieser Schwingung als starrer Radius eines Kreises angesehen werden darf. Bei ihm muß also die Zentrifugalkraft mit dem Abstand vom Drehpunkt, dargestellt durch den Schwerpunkt (Koordinatenanfang bei den Untersuchungen), wachsen. Da sich der Schwerpunkt meist in der Nähe des Lenkers befindet, ist sein Abstand von diesem und entsprechend die auftretenden Kräfte sehr klein. Der Abstand zu den Rücksitzen dagegen groß.

Ist nun schon die Nickschwingung physiologisch an sich nicht angenehm, so muß sie um so unangenehmer empfunden werden, je plötzlicher und je stärker sie einsetzt. Plötzliches Einsetzen mit großer Amplitude liegt aber stets vor, wenn die Parallelschwingung in sie übergeht. Ein solcher Zustand muß vermieden werden.

Das Überspringen einer Schwingungsform in die andere war nach dem Vorhergehenden an die Bedingung gebunden:

$$\omega_1 \sim \omega_2.$$

Soll ein Überspringen verhindert werden, müssen diese Schwingungszahlen möglichst weit auseinandergelegt werden.

Nach Einsetzen der Maschinenkonstanten lautet die Ungleichung:

$$\frac{\sum c_n}{m} \neq \frac{\sum c_n x_n}{\theta_2}.$$

Die Vergrößerung der Masse  $m$  erniedrigt  $\omega_1$ , eine Verkleinerung des Trägheitsmomentes  $\theta_2$  des Wagens (um seine horizontale Achse durch den Schwerpunkt) erhöht  $\omega_2$ . Im gleichen Sinne wirkt auch eine Vergrößerung von  $x_n$ , d. h. des Abstandes der Federn bzw. Achsen vom Schwerpunkt. Eine Veränderung der Federn selbst kommt nicht in Frage, da sie in beiden Ausdrücken enthalten

sind. Die Federkonstanten bestimmen nur die absolute Höhe der Schwingungszahlen.

Die Vermehrung der Wagenmasse, also eine Gewichtsvermehrung, wird sich meist nicht durchführen lassen, da es aus anderen Gründen sinnlos wäre, totes Gewicht herumzufahren. Die Verkleinerung des Trägheitsmomentes ist möglich durch Verwendung leichter Aufbauten, Verlegung aller schweren Teile dicht an den Schwerpunkt und (unter Beibehaltung des Gewichtes) geringer Baulänge des Aufbaues.

Was die Änderung des Trägheitsmomentes ausmacht, ist leicht zu erkennen, wenn dasselbe Chassis einmal mit einem Phaethon-Aufbau, ein andermal mit einem offenen Aufbau versehen wird. Die Schwingungseigenschaften der Fahrzeuge sind sehr verschieden. Noch größer wird aber der Unterschied, wenn Sonderkarosserien verwendet werden mit weit ausladenden Teilen. Vielfach wird die Verschiedenheit in der Lage des Schwerpunktes vermutet, der aber nur eine verhältnismäßig wenig verschiedene Lage für die genannten Fahrzeuge hat, wie Messungen zeigen<sup>223</sup>), während sich das Trägheitsmoment stark ändert. In den Gleichungen kam auch, wie es hierbei nebenbei bemerkt sei, die Lage des Schwerpunktes selbst nicht vor.

Eine Änderung des Wertes  $\sum c_n x_n$  bedeutet eine Änderung des Achsstandes. Vor allem hat die Lage der Vorderachse einen großen Einfluß auf die genannte Summe, da sie meist dichter am Schwerpunkt liegt als die Hinterachse. Die Summe wird um so größer, je größer der Radstand ist.

Die Bedeutung des Radstandes ist aus einem Vergleich zwischen dem Hanomag-Einzylinder und einem Lancia-Wagen (z. B.) zu ersehen. Der Achsstand des Hanomag ist so gering, daß bei ihm Nickschwingung und Parallelschwingung fast zusammenfallen. Daher rührt sein heftiges Kippen auf der Straße. Der Lancia-Wagen hingegen liegt wegen seines außerordentlich großen Achsstandes stets ruhig. Er kennt kein Überspringen einer Schwingungsart in die andere.

Bei der bisherigen Ableitung wurde von der Abb. 43 Gebrauch gemacht. In ihr wurde der Wagen als mit Federn direkt auf den Boden gestützt betrachtet. In Wirklichkeit stützen sich aber

die Wagenfedern erst auf die Achsen und diese durch Reifen verschiedener Art auf den Boden (Abb. 44). Das erschwert die Untersuchungen etwas, ohne ihr Wesen zu ändern. Die bisherigen Ausführungen gelten daher in vollem Umfange und sind nur in den Feinheiten etwas zu ändern.

Die Federn bleiben nicht dieselben, und entsprechend treten weitere kritische Gebiete auf. Sie sollen der Vollständigkeit halber hier angeführt werden.

Das wirkliche Fahrzeug besteht aus dem eigentlichen Wagen von der Masse  $m$  und dem Trägheitsmoment  $\theta$  um die horizontale Achse durch den Schwerpunkt, den Federpaaren

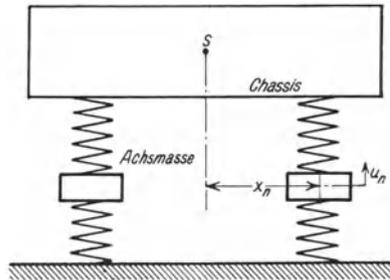


Abb. 44.  
(Chassisschema (Reifen berücksichtigt))

den Trägheitsmoment  $\theta$  um die horizontale Achse durch den Schwerpunkt, den Federpaaren  $c_1$  und  $c_2$ , bzw. bei mehreren Achsen aus den Paaren  $c_n$ , deren Abstand vom Schwerpunkt  $x_n$  ist, den Achsen mit den Massen  $a_n$  und den Reifen mit den Konstanten  $C_n$ .

Die Masse der Achsen soll sich nur in vertikaler Richtung parallel zu sich selbst verschieben können, von ihren Kipp-schwingungen sei abgesehen. Im gegebenen Augenblick sei die Achse um den Wert  $u_n$  gehoben, der über ihr liegende Chassis-punkt um  $z$  durch die Parallelschwingung gesenkt und um  $x_n \psi$  gehoben durch die Kipp-schwingung. Die Differentialgleichungen lauten dann:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + z \sum c_n - \sum c_n u_n + \psi \sum x_n c_n + \text{const} = 0 \quad (56)$$

$$a_n \frac{d^2 u}{dt^2} + C_n u_n - c_n (z + \psi x_n - u_n) = 0 \quad \dots \dots \dots (57)$$

.....

$$\theta \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \psi \sum c_n x_n^2 + z \sum c_n x_n - \sum c_n u_n = 0 \quad \dots (58)$$

Die Punkte bedeuten eine Anzahl Differentialgleichungen der Bauart der Gleichung (57). Die Zahl der Gleichungen ist dabei durch die Zahl der Achsen gegeben, mit denen sich der Wagen gegen den Boden abstützt.

Die Aufstellung der Gleichungen zeigt den verwickelten Charakter der Erscheinung. Die Gleichungen lassen auch erkennen, daß bei kleinen  $u_n$ -Werten der Einfluß der Summen in den Gleichungen (56) und (58) vernachlässigt wird, so daß sich die neuen Frequenzen nicht merklich von denen unterscheiden, die aus den einfacheren Gleichungssystemen ermittelt wurden. Diese Summen werden aber auch dann um so kleiner, je mehr Achsen Verwendung finden, da nicht alle Achsen in derselben Richtung schwingen, sondern vielmehr so, daß sich ein Teil ihrer Einflüsse gegenseitig aufheben wird.

Die Ausschläge  $u_n$  sind stets dann klein, wenn die erregenden Ursachen andere Wechselzahlen aufweisen als die Eigenfrequenz der mit dem Chassis gekoppelten Achsfedersysteme. Wegen der gegenüber den Achsen im Resonanzfall kleinen Bewegung des Chassis kann näherungsweise die Resonanzfrequenz der Achsen so berechnet werden, als ob das Chassis ruhte.

Die Achsschwingung, bei der sich die Achse ohne Drehung verschiebt, ist bestimmt durch

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + u(c + C) + \text{const} = 0,$$

so daß ist

$$\omega_a = \sqrt{\frac{c + C}{m}}.$$

Sollen die Schwingungen jedoch in ihrer Gesamtheit betrachtet werden, so ist aus dem Gleichungssystem die Determinante zu entwickeln:

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + \sum c_n & + \sum c_n x_n & - \sum c_n \\ + \sum c_n x_n & -\theta\omega^2 + \sum c_n x_n^2 & - \sum c_n \\ - \sum c_n & - \sum x_n c_n & -a_n\omega^2 + \sum C_n + \sum c_n \\ - \sum c_{n-1} & - \sum x_{n-1} c_{n-1} & 0 \\ & - \sum c_{n-1} & - \sum c_{n-2} \\ & - \sum c_{n-1} & - \sum c_{n-2} \\ & 0 & 0 \\ -a_{n-1}\omega^2 + \sum C_n + \sum c_n & 0 \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Die Punkte bedeuten wieder, daß für weitere Achsen das System entsprechend den beiden letzten Zeilen der Determinante zu ergänzen ist. Die Determinante selbst weist die eigenartige Form auf, daß nur die beiden Randzeilen und die Diagonale von 0 verschieden sind. Das ist eine Folge der gemeinsamen Kopplung mehrerer Schwinger durch eine starre Verbindung, als welche das Chassis angesehen wird.

Zu den Ableitungen ist zu bemerken, daß das Chassis als starr betrachtet wurde. Das ist aber nur ein Ideal. In der Praxis weist ein solches Gebilde stets eine mehr oder minder große Nachgiebigkeit auf. Sie wirkt als zusätzliche Federung und beeinflusst dadurch die Größen  $c_n$  in den Gleichungen. Für die meisten Fälle genügt aber die gemachte Annahme. Die Folge der Nachgiebigkeit des Chassis ist eine Verkleinerung von  $c$  und damit ein Senken der Schwingungszahlen. Die meßbaren Schwingungen werden daher stets mehr oder minder tief unter den errechneten liegen. Die errechneten Werte gelten als gute Näherung.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß alle drei bisher behandelten Schwingungsarten gleichzeitig auftreten können und sich gegenseitig überlagern. Betrachtet man die Lage des Scheinlotes auf die Chassisebene, so läßt sich feststellen, daß es nach zwei getrennten Richtungen, die senkrecht aufeinanderstehen, gleichzeitig schwankt. Sein Endpunkt beschreibt Lissajousche Klangfiguren. Nur bei Gleichheit der Schwingungszahlen gehen sie in Ellipsen oder Kreise über. Für die Praxis ist dieser Umstand aber bedeutungslos.

**Torsionsschwingung.** Die Torsionsschwingung besteht in einem Tordieren des Chassis um seine Längsachse. Sie wird bei der Untersuchung des Vorderradflatterns behandelt werden. Auch hier gilt, daß sich die Masse, die in jedem Querschnitt beteiligt ist, nur schwer ermitteln läßt. Die Federung aber ist praktisch unberechenbar. Sie kann nur durch den Versuch bestimmt werden. In dieser Richtung scheinen aber noch nirgends Arbeiten unternommen zu sein.

**Längsschwingung.** Die Schwingung eines Fahrzeuges in der Längsrichtung ist eine wenig bekannte Tatsache. Die Federn sind zwar einseitig durch einen Bolzen fest mit dem Chassis ver-

bunden, doch kann das Stück der Feder zwischen der Befestigung und der Achse nachgeben und damit eine Verschiebung des Chassis gegen die Achsen zulassen. Die Größe der Verschiebung ist jedoch auf ein geringes Maß beschränkt, da die Feder in dieser Richtung sich nur wenig dehnen kann. Bei schweren Fahrzeugen ist sie jedoch oftmals nachweisbar, wenn sehr langsam angefahren wird, so daß Motorimpulse und Eigenschwingungszahl übereinstimmen. Besonders bei Eisenbahntriebwagen tritt sie in Erscheinung. Ihre Berechnung ist schwierig, da die Federkonstante schwer zu bestimmen ist und oft eine Abhängigkeit vom Ausschlag selbst aufweist. Tritt eine solche Schwingung auf, so ist das wirksamste Gegenmittel, mit möglichster Geschwindigkeit das kritische Gebiet zu durchfahren.

**Querschwingung.** Die Querschwingung besteht in einem periodischen seitlichen Verschieben des Aufbaues gegen die Achsen. Wie bei der Längsschwingung ist an ihr die Masse des ganzen Wagens beteiligt. Die Federung ist gegeben durch den Widerstand der Federn und Pneumatiks gegen seitliche Kräfte. Sie kann zwei kritische Gebiete aufweisen, da sich das Chassis mit den Federn gegen die Achsen und diese wieder durch die Bereifung gegen den Boden abstützen. Dabei können Chassis und Achsen gegeneinanderschwingen.

Als Erregung für diese Schwingungsart sind nur zufällige Stöße anzusehen, so daß sie keine Bedeutung erlangen kann, da sie sich nicht zu großen Amplituden aufzuschaukeln vermag. Eine nähere Untersuchung ist hier nicht am Platze.

**Drehschwingung des Wagens.** Der ganze Wagen kann nun noch eine Schwingung um die vertikale Achse ( $z$ ) ausführen. Das Chassis und sein Aufbau drehen sich in einer horizontalen Ebene und werden von den Federn zurückgedrückt. Die Rückstellkräfte der Federung sind wie auch bei der Querschwingung durch ihre Widerstände gegen seitliche Verschiebungen unter Beachtung der Hebelarme, an denen sie wirken, gegeben. Die beteiligte Masse ist das Trägheitsmoment des Wagens um die  $z$ -Achse. Es ist

$$\omega_z = \sqrt{\frac{\sum c_n x_n}{\theta_z}}.$$

Aus der Formel folgt, daß, je länger der Wagen ist, desto tiefer liegt die Schwingungszahl, da der Zähler  $\sum c_n x_n$  nur linear mit der Länge, der Nenner  $\theta_z$  aber mit ihrem Quadrat wächst.

Eine genaue Untersuchung der Schwingung müßte auch den Einfluß der Achsmassen berücksichtigen. Sie können sich gegenüber dem Chassis verschieben und dadurch Kraftkomponenten auf dieses ausüben, so daß weitere Schwingungszahlen hinzukommen. Der Weg zu diesem Ziel wurde bereits bei den Nickschwingungen besprochen, so daß hier seine Wiederholung unterbleiben kann. Eine solche Untersuchung würde auch nichts zu dem Grundsätzlichen hinzufügen.

Die Erregung dieser Schwingung kann auf zweierlei Weisen geschehen. Fährt ein Wagen um eine Kurve herum, so wird, Niederdruckbereifung vorausgesetzt, sich leicht durch einen Beobachter feststellen lassen, daß er zunächst vorn weiter zurückbleibt, als dem Radeinschlag und der Bewegung dieser Achse entspricht, daß er dann rasch nachfolgt und über die eigentliche Ruhelage hinausgeht. Bei Hochdruckreifen ist die Rückstellkraft größer, so daß die Bewegung rascher erfolgt und weniger stark wird. Sie ist daher nur bei den Niederdruckreifen deutlich sichtbar. Wegen der Zufälligkeit des Kurvenfahrens, bei dem die Zentrifugalkraft den Wagen auslenkt, kann diese Erregung außer Betracht bleiben, denn die Amplituden der Schwingung müssen früher oder später abklingen.

Eine weitere Erregung kann aber oft in dem Triebwerk des Fahrzeuges gefunden werden. Dreht sich nämlich das Chassis gegen die Achsen, so muß ein Kardanrohr, das in ihm mit einer Schubkugel gelagert sei und zur Aufnahme des Schubes diene, die Drehung mitmachen. Es verdreht sich also um einen kleinen Winkel  $\varphi$  gegen die Wagenlängsachse. Sobald Längsachse und Richtung des Kardanrohres nicht mehr übereinstimmen, muß aber ein seitlicher Schub auftreten, eine Kraft quer zum Wagen. Da der Kardankugelmittelpunkt nicht mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, vielmehr einen Abstand  $a$  von ihm hat, so entsteht ein Moment um den Schwerpunkt, das eine Auslenkung, die bereits entstanden ist, zu vergrößern sucht. Schematisch ist in Abb. 45 die Sachlage dargestellt.

Ist der Schub des Triebwerkes im betrachteten Augenblick an der Hinterachse  $S$ , so ist die Querkraft

$$Q = S \cdot \sin \varphi$$

oder, da  $\varphi$  klein ist,

$$Q = S \cdot \varphi.$$

Das erregende Moment ist

$$E = Q \cdot a = a \cdot S \cdot \varphi.$$

Die Querkraft tritt stets auf, sobald eine Verdrehung vorhanden ist, und ist von der Richtung der Verdrehung unabhängig.

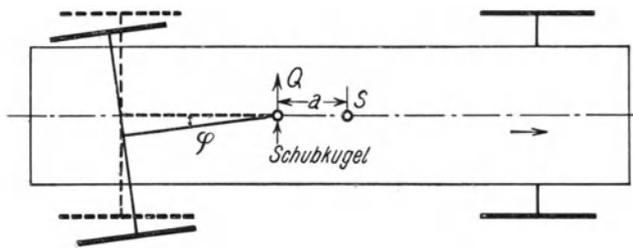


Abb. 45. Fahrzeugschema

Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden. Liegt die Schubkugel vor dem Schwerpunkt, so ist bei Rechtsdrehung des Chassis das Moment linksdrehend, liegt sie dagegen hinter dem Drehpunkt, so dreht es nach rechts, also im Sinne der ursprünglichen Auslenkung.

In ersterem Falle wird aus einer zufälligen Drehung des Chassis eine kurze Parallelschwingung, die rasch abklingt, da die Querkraft ihr Vorhandensein nur einer zufälligen Drehung verdankt. Die Größe der Querkraft ist zudem schon dadurch beschränkt, daß die Achse in der gleichen Richtung durch das Kardanrohr gedreht wird, in der sich der Wagen bereits drehte, nur ist das Maß der Achsdrehung kleiner.

Im zweiten Falle liegt aber eine tatsächliche Schwingungserregung vor. Einer Rechtsdrehung des Chassis entspricht eine Linksdrehung der Achse, so daß der Ausschlag beliebig weit wachsen kann. Da der Wechsel der Kraft- bzw. Momentenrichtung mit der Drehrichtung des Chassis erfolgt, sind Erregung und Schwingung stets im Gleichtakt. Die Schwingung klingt nicht ab

schaukelt sich vielmehr selbst auf, bis der Ausschlag so groß wird, daß die Seitenkraft, die gleichzeitig auch an den Bereifungen angreift (als Gegenkraft), die Räder zum Gleiten bringt. Jede Zufälligkeit startet sie aber wieder. Ein solches Fahrzeug wird stets unruhig auf der Straße liegen. Die Federlaschen sind raschem Verschleiß ausgesetzt\*).

Die Differentialgleichung der Bewegung lautet:

$$\theta_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \varphi \sum c_n x_n = (t \omega_z) \cdot a \cdot (S),$$

worin  $\theta_z$  das Trägheitsmoment des Wagens um die vertikale Achse durch den Schwerpunkt bedeutet,  $\varphi$  den Drehwinkel des Wagens,  $t$  die Zeit,  $c_n$  die Federkonstante gegen seitliche Kräfte der  $n$ ten Feder,  $x_n$  ihren Abstand vom Schwerpunkt,  $a$  den Abstand der Schubkugel vom Schwerpunkt,  $S$  den Schub der Hinterachse.

Beachtlich bei dieser Schwingung ist, daß Kraft bzw. Moment und Ausschlag gleichzeitig auftreten und zwischen ihnen keine Phasenverschiebung durch die Kinematik der Bewegung eintreten kann.

In der Gleichung ist der Faktor ( $S$ ) enthalten. Er steht statt des Buchstaben  $S$ , um anzudeuten, daß dieser Wert eine Funktion der Zeit ist. Ein konstantes  $S$  deutet auf eine selbsttätige Erniedrigung der Frequenz mit der Schwingungsweite hin. Bei dem Wechsel des Winkels  $\varphi$  wird aber in gleichem Takte auch der Bewegungswiderstand des Fahrzeuges geändert, so daß der Schub eine periodische Funktion der Zeit wird und im Takte der Schwingung ( $\omega_z$ ) schwankt.

**Fahrbequemlichkeit.** Die Forderung der Reisenden geht nach einer möglichst großen Fahrbequemlichkeit. Darunter ist zu verstehen, daß die Bewegung der Personen (abgesehen von der erwünschten Fortbewegung) ein Minimum sein soll. Das Wanken, Wogen und Nicken, sowie die Drehschwingungen sind demnach auf ein Minimum herabzudrücken. Über die Drehschwingung wurde bereits Genügendes gesagt. Die übrigen hier nicht mehr erwähnten Schwingungen wurden als unwesentlich erkannt. Die Forderung nach einem Minimum an Schwingungen stellt zunächst die Auf-

\*) Beobachtung aus dem Omnibusbetrieb.

gabe, die Größe der Schwingungen und ihre Erregungen zu kennen.

An dieser Stelle sei noch eine Kleinigkeit nachgeholt. In den vorhergehenden Abschnitten wurden nur die Bewegungen des Wagens selbst behandelt. Sie sind aber nicht immer identisch mit denen der Mitfahrenden. Die Personen sitzen vielmehr auf Polstern. Die Polster, gleich welcher Art, weisen eine gewisse Elastizität und die Personen eine gewisse Masse und eine bestimmte Massenträgheit auf. Damit sind schwingungsfähige Systeme gegeben.

Bei der Berechnung der Fahrzeugschwingungen müßten sie, genau genommen, berücksichtigt werden. Hier gilt aber der Satz der Schwingungslehre, daß, wenn zwei Systeme verschiedener Abmessungen gekoppelt sind, nur dann eine merkliche gegenseitige Beeinflussung stattfindet, wenn die Eigenfrequenzen beider Systeme nahezu gleich sind. Zudem muß die Rückwirkung des angekoppelten Systems groß sein gegenüber der im Hauptschwinger gespeicherten Energie.

Im vorliegenden Falle ist aber die Masse des Chassis so groß, daß eine merkliche Rückwirkung nicht eintritt. Es kann daher das System Person–Feder für sich betrachtet werden. Versuche zeigen, daß ein solches System nahezu für alle Personen die gleiche Schwingungszahl besitzt, da der schwereren Person meist eine größere Sitzfläche und damit die Benutzung einer größeren Zahl von Polsterfedern zukommt.

Unter den gegebenen Umständen kann das Chassis als Erreger für die Polsterschwingung angesehen werden. Daraus folgt, daß seine Eigenschwingungen nicht mit denen des Polsters zusammenfallen dürfen, da dann Resonanz vorliegen würde, sobald das Chassis zu einer Eigenschwingung angeregt wird. Zu fordern ist, daß die Polsterschwingung unter der Chassiseigenschwingung liegt, da dann bei Chassisschwingungen beide Teile gegeneinander schwingen werden und dadurch die Bewegung der Person gegenüber dem Boden ein Minimum sein wird.

Die Erregung der Chassisschwingungen kann durch die Fahrbahn oder durch das Triebwerk, insbesondere durch den Motor erfolgen.

**Fahrbahnerregung.** Die Fahrbahn weist selbst im neuen Zustande stets kleine unvermeidliche Unebenheiten auf. Sie folgen einander in unregelmäßigen Abständen. Die Erregung ist daher im allgemeinsten Falle eine willkürliche Funktion der Zeit. Bei genauer Untersuchung einer solchen Fahrbahn wird sich aber zeigen, daß diese Funktionen stellenweise als periodisch oder quasi-periodisch anzusprechen sind. Auf vielgefahrenen Straßen und vor allem solchen, deren Decke weich ist, bilden sich mit der Zeit sogar Wellen aus, die einen ausgesprochenen periodischen Charakter haben (Avus, Berlin).

Die Erregung kann also stets in der Form geschrieben werden:

$$E = P(t).$$

Bereits in der Untersuchung der Kurbelwellen und im allgemeinen Teil wurde untersucht, was die Folge einer periodischen Erregung ist. Es wurden die Ausschlagkurven gefunden, die so viele Maxima aufweisen, als der Schwinger Resonanzen besitzt. Ein nochmaliges Eingehen auf diese Verhältnisse erübrigt sich daher. Es kann nur gesagt werden, daß die Fahrgeschwindigkeit, die die Funktion  $P(t)$  direkt beeinflusst, zweckmäßig so gewählt wird, daß die Resonanzonen vermieden werden. Eine Aufgabe, die für jede Straße anders und gefühlsmäßig zu lösen ist.

Wird die Fahrgeschwindigkeit niedrig gehalten, so wird die Federung die meiste Arbeit aufnehmen, da die niedere Eigenfrequenz meist angeregt wird. Wird sie hingegen hoch gewählt, so muß die Bereifung den Ausgleich der Unebenheiten bewirken. Die Schwingungen spielen sich wesentlich nur zwischen Achse und Fahrbahn ab. Der Wagen beginnt zu schwimmen. Die Personen haben nicht mehr das Empfinden, über Unebenheiten zu gleiten, vielmehr sich in einem Schiff zu befinden.

**Stoß.** Interessanter sind schwingungstechnisch einzelne Stöße, die von auf der Fahrbahn liegenden oder über sie hinausragenden Gegenständen (z. B. Gullydeckeln) oder Löchern in der Fahrbahn ausgehen. Hier kann das Hindernis als periodische Funktion der Zeit angesehen und die harmonische Analyse dieser Funktion durchgeführt<sup>24</sup>) werden. Alle Betrachtungen gelten dann aber nur für die erste Phase der Schwingung und mangeln der Anschaulichkeit.

Ähnlich wie ein Stoß eines Hindernisses gegen ein Rad wirkt das Aufprallen eines Gewichtes auf einen Schwinger (Abb. 46). Das Bild ist für den Fall des Rades nur auf den Kopf zu stellen. Hierfür lassen sich die Differentialgleichungen anschreiben:

Die Schwingungszahl ist vor dem Auftreten des Gewichtes bestimmt durch:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \cdot x = 0,$$

worin  $m$  die Masse des Schwingers,  $x$  seine Auslenkung,  $t$  die Zeit,  $c$  die Federkonstante ist.

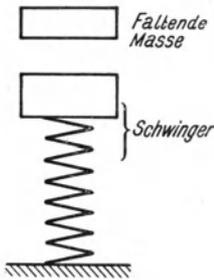


Abb. 46. Versuchsanordnung

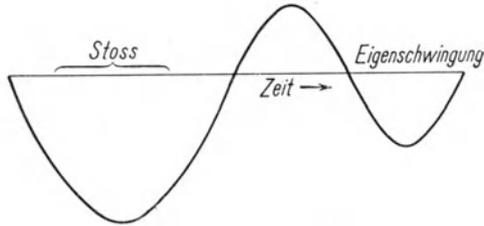


Abb. 47. Ausschlagkurve

Nach dem Zusammentreffen des Gewichtes von der Masse  $M$  mit dem Schwinger gilt:

$$(M + m) \frac{d^2 x}{dt^2} + c \cdot x = 0,$$

da die Masse vermehrt wurde.

Die Eigenschwingungszahl des Schwingers war vor dem Zusammenprall:

$$\omega_e = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

und ist nach der Vereinigung der Massen:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{M + m}}.$$

Die Auslenkung der Masse eines Schwingers läßt sich allgemein darstellen durch:

$$x = A \sin \omega t + B \cdot \cos \omega t,$$

worin

$$A = x_0 \quad \text{und} \quad B = \frac{v_0}{\omega}.$$

$A$  entspricht also der Auslenkung, die im Augenblick herrscht, in dem die Schwingung beginnt und  $\frac{v_0}{\omega}$  das zugehörige Geschwindigkeitspotential ist.

Da die Masse  $M$  auf den ruhenden Schwinger trifft, ist die Anfangsauslenkung  $A = x_0 = 0$ . Die Geschwindigkeit des zusammengesetzten Schwingers ermittelt sich nach dem Impulssatze zu:

$$v_0 = \frac{MV}{M+m},$$

so daß der Ausschlag  $x$  dargestellt wird durch:

$$x = \frac{v_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t.$$

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß die Periode des Schwingers

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_1} = \sqrt{\frac{M+m}{m}} \cdot \frac{2\pi}{\omega_e}.$$

Die Amplitude hat den Wert:

$$A = \frac{v_0}{\omega_1} = \frac{1}{\omega_e} \cdot \frac{M}{m} \sqrt{\frac{1}{\frac{M+m}{m}}}.$$

Nach der Zeit  $\frac{\tau}{2}$  ist der Schwinger wieder in seiner Ruhelage angelangt und hat eine halbe Sinuswelle beschrieben. Da kein Energieverlust eingetreten ist, muß die Geschwindigkeit wieder  $v_0$  sein. Beim weiteren Verlauf der Bewegung wirkt auf die Masse  $m$  die Rückstellkraft der Feder ein und verzögert ihre Bewegung, während die Masse  $M$  sich ungehemmt weiterbewegt. Sie trennt sich von der Masse  $m$ .

Die fallende Masse hat bei dem Vorgang dem Schwinger Energie mitgeteilt entsprechend dem Unterschied der Geschwindigkeiten vor und nach dem Zusammenprall. Diese Energie bestimmt sich aus der Energiegleichung:

$$W = M (V^2 - v_0^2) = MV^2 \left[ 1 - \left( \frac{M}{M+m} \right)^2 \right].$$

Mit diesem Energiebetrage wird also der Schwinger weiter schwingen. Er führt nun Eigenschwingungen von der Kreisfrequenz

$\omega_e$  aus, da keinerlei weiterer kraftschlüssiger Zusammenhang mit anderen Dingen besteht. Die Amplitude ist:

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

oder zur Zeit:  $\frac{\tau_e}{4}$

$$A_e = \frac{v_0}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot v_0.$$

Die Ausschlagkurve der Schwingung ist in Abb. 47 wiedergegeben. Sie zeigt deutlich den Ausschlag beim Zusammenprall und die späteren Eigenschwingungen.

Aus den Ableitungen kann gefolgert werden, daß ein einmaliger Stoß stets die Eigenschwingungen des Fahrzeuges anregen wird. Die Form der Stoßkurve und die Stoßdauer werden dabei maßgebend sein für die erregte Frequenz. Da jeder willkürliche Stoß aber als eine Reihe von Sinuswellen jeder Frequenz (nach der Lehre der Fourier-Integrale) aufgefaßt werden kann, so ist zu erwarten, daß stets alle Eigenfrequenzen mehr oder minder stark angeregt werden.

Besonders hervorgehoben werden müssen sehr rasche und starke Stöße. Sie würden wesentlich Erregerfrequenzen entsprechen, die über der Eigenschwingungszahl der Schwinger liegen. Die Schwinger werden durch sie nicht mehr merklich in Bewegung gesetzt. Der Vorgang bleibt vielmehr auf die Oberfläche beschränkt, die elastisch genug sein muß, die Stöße aufzufangen, da sonst bleibende, plastische Verformungen eintreten. Darin ist die außerordentliche Wichtigkeit der Bereifung zu erkennen, die sie auffangen muß.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß zur Schaffung einer gewissen Fahrbequemlichkeit vermieden werden muß, daß Nick- und Wogschwingungen zusammenfallen. Sie sollen zudem kleine Schwingungszahlen aufweisen. Die Schwingungszahl der Polsterung muß unter den der genannten Schwingungen liegen. Die Fahrbahn bildet eine periodische Erregung dieser Schwingungen; auch Stöße sind als solche aufzufassen.

**Triebwerkserregung.** Sobald der Motor eingekuppelt wird, um das Fahrzeug anzufahren, wirkt dem Antriebsmoment der Hinterräder an der Schubkugel des Kardanrohres ein Reaktionsmoment

entgegen. Es ist bestrebt, die Federung zu entlasten und muß als Stoß gewertet werden. Je heftiger der Vorgang erfolgte, je schwerer das Schwungrad ist und je höher die augenblickliche Drehzahl des Motors beim Einkuppeln war, desto stärker ist der Stoß. Bei Lastwagen ist leicht zu beobachten, wie sie in einem solchen Falle in vertikaler Richtung schwingen.

Das Einkuppeln stellt einen einmaligen Vorgang dar, so daß die eingeleitete Schwingung bald wieder abklingt, ohne bedrohliche Werte angenommen zu haben.

**Hochfrequente Chassisschwingungen.** Die bisherigen Untersuchungen der Chassisschwingungen beschränkten sich auf solche niederer Frequenz. Ihre Schwingungszahlen lagen zwischen etwa 70 und 150 *S/min*. Das Chassis kann aber noch eine Reihe weiterer Schwingungen ausführen, da es aus einer großen Zahl elastischer Teile zusammengesetzt ist. Sie äußern sich als Erschütterungen oder als Geräusche wie später gezeigt wird.

Die Frequenz dieser Erschütterungen ist unbestimmt. Das Chassis kann fast mit jeder Schwingungszahl vibrieren. Es verhält sich wie eine nicht vollkommen homogene elastische Platte. Bei solchen Schwingungen treten Knotenpunkte und Knotenlinien auf, die durch Aufstreuen von Sand oder durch Abtasten des Chassis mit einem Vibrometer<sup>240)</sup> gefunden werden können (Abb. 48).

Bei der Verwendung von Sand tritt die beim Wuchtförderer nutzbar gemachte Erscheinung auf. Der Sand bewegt sich von den Schwingungsbäuchen fort und sammelt sich an den ruhenden Stellen, den Knotenlinien. Zur Messung der Ausschläge selbst genügen oft Geräte, die das Erkennen von 0,5 Hundertstel Millimeter gestatten. Die Grenze der Empfindung liegt etwa bei 0,2 Hundertstel Millimetern.

Die Lage der Knotenpunkte ist mit der Frequenz der Erscheinung veränderlich. In gleichem Maße auch die Amplituden, die in einigen Schwingungsbereichen einen Höchstwert annehmen. Theoretisch lassen sich die Erscheinungen selbst vorläufig nicht erfassen. Da aber ihre Ursache bekannt ist, sie besteht in Erschütterungen des Motors und Stößen der Fahrbahn, lassen sie sich vermindern.

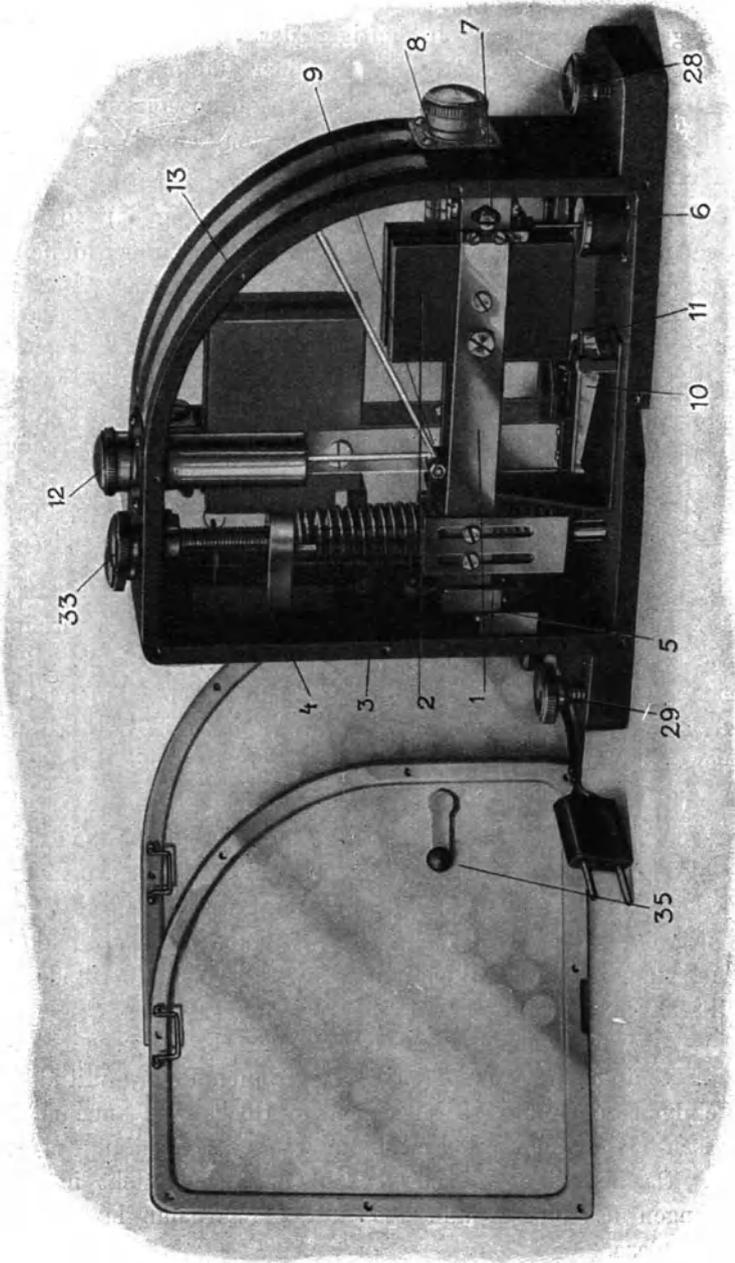


Abb. 48. Vibrometer (nach Schenck)

**Motorerregung.** Der Motor enthält in seinem Triebwerk eine große Zahl hin und her gehender Massen. Der Kolben und ein Teil der Pleuelstange bewegen sich in ihm in Richtung der zugehörigen Zylinderachsen. Zu ihrer Beschleunigung gehören Kräfte, die der Gaskraft oder dem Triebwerk selbst entnommen werden. Da es sich um innere Kräfte handelt, so wirken sie gleichzeitig als Reaktionen auf die Zylinder. Diese leiten sie nach teilweisem Ausgleich an das Chassis weiter.

Ist z. B. ein Einzylinder gegeben, dessen Masse (Zylinder, Gehäuse, Kurbel, rotierende Massen . . .) mit  $M$  bezeichnet sei, bei dem die hin und her gehende Masse die Größe  $m$  hat und sich mit der Momentangeschwindigkeit  $v$  bewegt, so gilt die Impulsgleichung

$$M \cdot V = m \cdot v,$$

worin  $V$  die Geschwindigkeit der Maschine ist; während sich der Kolben abwärts bewegt, macht die Maschine eine Aufwärtsbewegung.

Durch Umformung geht die Gleichung über in:

$$V = \frac{m}{M} \cdot v.$$

Sie besagt, daß die Bewegung der Maschine selbst, gleiche Kolbengeschwindigkeit vorausgesetzt, um so kleiner sein wird, je größer ihre Masse ist. Dabei ist Voraussetzung, daß die Masse  $M$  als starre Masse betrachtet werden darf. Eine Verringerung der Triebwerksmasse wirkt in gleichem Sinne.

Als Vergrößerung der Masse  $M$  wirkt eine starre Befestigung des Motors am Chassis bzw. Motorradrahmen. Diese Teile sind dann gezwungen, soweit sie nicht elastische Verformungen erleiden, den Impulsen zu folgen. Bei Motorrädern kann das oft zu schweren Störungen führen, da die Rahmen in vertikaler Richtung, in der auch meist die Zylinder stehen, sehr nachgiebig sind.

Die Massenkraft ändert sich wie auch die Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Weg periodisch mit der Zeit. Sie ist bestimmt durch:

$$p_m = M \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

mit  $M_h$  als hin und her bewegendende Masse,  $s$  dem Kolbenweg,  $t$  der Zeit. Der Kolbenweg als Funktion der Zeit ist (s. S. 24):

$$s = r \cdot \cos \alpha + l - \frac{1}{2l} (a - r \cdot \sin \alpha)^2,$$

worin  $r$  der Kurbelradius,  $\alpha$  die Kurbelstellung,  $a$  die Schränkung,  $l$  die Pleuelstangenlänge ist.

Die zweimalige Differentiation liefert:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = r \omega^2 \left[ -\cos \alpha - \lambda \cos 2\alpha + \frac{a}{l} \cdot \sin \alpha \right].$$

Dabei ist  $\lambda = \frac{r}{l}$ . Die Beschleunigungsfunktion enthält Sinuswellen, die mit der Kurbeldrehung, und solche, die rascher umlaufen. Sie werden als Wellen höherer Ordnung bezeichnet. Für einen besonderen Fall hat Kölsch<sup>62)</sup> die Massenkräfte an einer Reihe von Maschinen untersucht und dabei die in Abb. 49 dargestellten Ergebnisse erhalten.

Der Einzylinder läßt nur freie Kräfte erkennen. Sie entsprechen der bisherigen Ableitung. Ähnlich liegen die Verhältnisse beim Zweizylinder mit parallelen Kurbeln. Wird hier aber die übliche 180°-Versetzung angewendet, so wirken die Kräfte der Zylinder nicht mehr gleichphasig und arbeiten an gemeinsamem Hebel, so daß auch ein Moment entsteht, daß die Maschine in ihrer Längsrichtung zu kippen bestrebt ist. Ein Teil der Massenkräfte (1. Ordnung) gleichen sich jedoch im Gehäuse aus. Das Gehäuse ist dabei, wie auch bei den übrigen Maschinen, zunächst als starr vorausgesetzt.

In gleicher Weise werden die Untersuchungen für Mehrzylindermaschinen durchgeführt, wobei die jeweilige Kurbelstellung bzw. Versetzung zu berücksichtigen ist. Maschinen mit mehr als 6 Zylindern weisen nur kleine Massenkräfte auf. Bei ihnen gleichen sich alle merklichen Kräfte und Momente im Motorgehäuse aus.

Die Voraussetzung vollkommener Starrheit der Motorgehäuse läßt sich praktisch, besonders bei langen Reihenmaschinen, nicht erfüllen. Sie sind vielmehr als elastisch anzusehen und werden durch die Massenkräfte periodisch verwunden. Die Schwingungen in vertikaler Richtung sind dabei meist klein gegenüber denen

REIHEN-MASCHINEN.

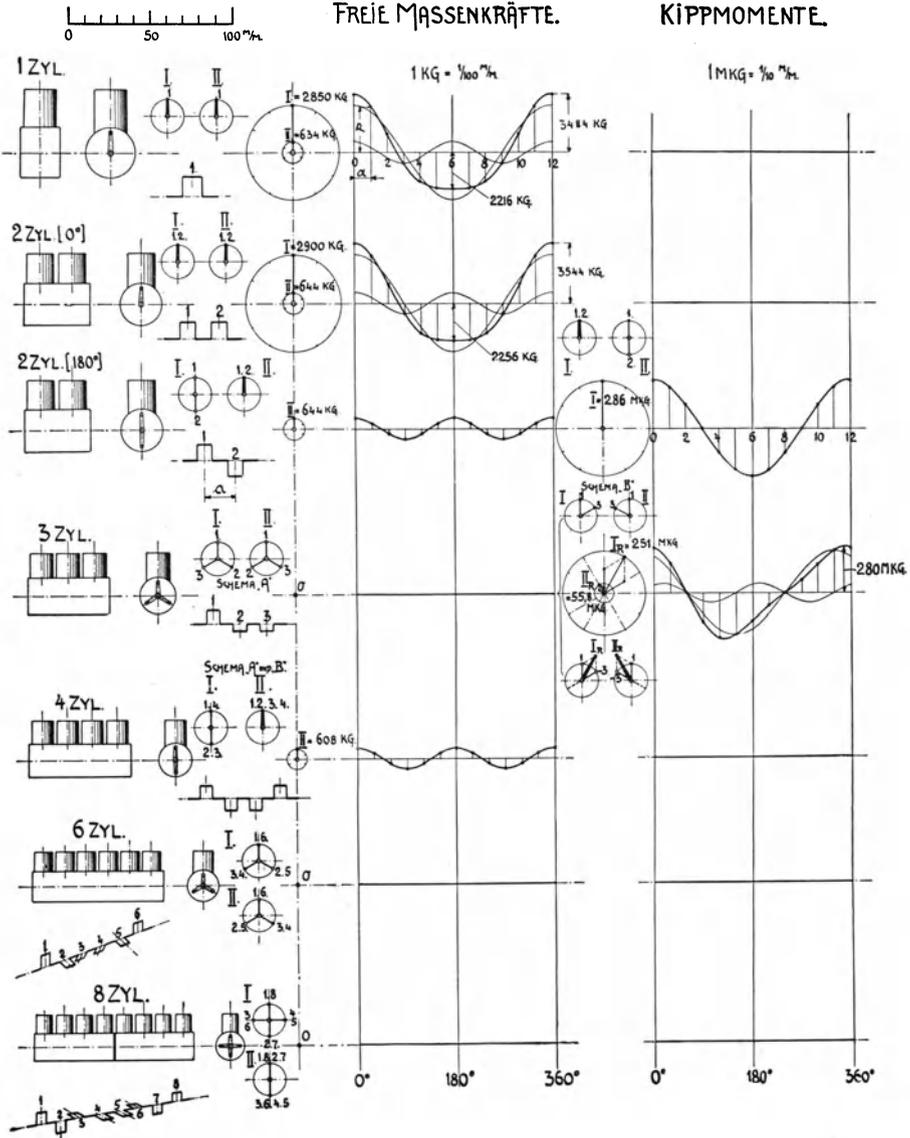


Abb. 49. Freie Massenkräfte und Momente von Melzylindermotoren

in horizontaler bei gleicher Erregung, da die Blockkonstruktion für große Steifigkeit in vertikaler Richtung sorgt.

Der Ausgleich der Massenkräfte, sowohl der hin und her gehenden als auch der rotierenden, kann daher nicht vollkommen sein. Es werden störende Restglieder übrigbleiben.

Hier sei noch der Hinweis gestattet, daß auch die rotierenden Kräfte bei Ein- und Mehrzylindermaschinen nach außen in Erscheinung treten können. Die rotierende Masse eines Einzylinders sitzt z. B. als Einzelmasse am Hebelarm des Kurbelradius und übt entsprechend der Drehzahl Fliehkräfte aus, die mit der Welle umlaufen.

Die Beanspruchungsrichtung der Massenkräfte ist die vertikale Ebene, also die des größten Biege widerstandes des Motors. Die der rotierenden Massen dagegen rotiert mit der Welle und kann demnach auch horizontal liegen, so daß das Gehäuse in der ungünstigsten Richtung beansprucht wird. Ihnen ist große Aufmerksamkeit zu widmen.

Ein Sonderfall von Stoßerregung liegt vor beim Aussetzen von Zündkerzen. Bei Leerlauf ist oft zu beobachten, daß bei Mehrzylindermaschinen nur ein Zylinder zündet. Er bekommt reichliches Gemisch, so daß ein verhältnismäßig großer Impuls entsteht, der

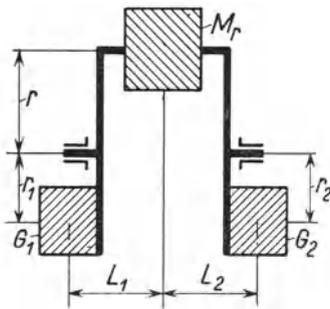


Abb. 50. Einzylinder mit Massenausgleich

den Motor rasch auf Touren bringt. Die Massenreaktion ist entsprechend groß. Als Folge tritt ein Erschüttern des ganzen Wagens von oft großer Schwingungsweite ein. Da es sich aber auch hierbei um eine Stoßerregung und einen anomalen Betrieb des Motors handelt, kann die Erscheinung unberücksichtigt bleiben.

Die Forderung nach einer möglichst weitgehenden Erschütterungsfreiheit des Wagens schließt die Aufgabe ein, die Ursachen, wenn möglich, klein zu halten. Für den Fall der Erregung durch den Motor läßt sie sich weitgehend lösen.

Die rotierenden Massen waren als die gefährlichsten Schwingungserreger erkannt worden, da sie auch in der horizontalen Ebene wirken können. Ihr Ausgleich ist leicht durch Anbringung von Gegengewichten bewirkt. Wird bei einem Einzylinder, dessen rotierende Masse durch  $m_r$  in Abb. 50 dargestellt ist, ein Gegengewichtspaar  $G_1$  und  $G_2$  so an den Wagen befestigt, daß die Gleichung erfüllt ist:

$$M_r \cdot r = \frac{1}{g} (G_1 \cdot r_1 + G_2 \cdot r_2)$$

(wobei  $r$  der Kurbelradius,  $g$  die Erdbeschleunigung,  $r_1$  bzw.  $r_2$  die Abstände der Gegengewichte von der Drehachse sind), so ist die resultierende Zentrifugalkraft 0 und damit die rotierende Masse ausgeglichen.

Bei dem Massenausgleich ist aber gleichzeitig die weitere Bedingung zu erfüllen, daß:

$$G_1 \cdot r_1 \cdot L_1 = G_2 \cdot r_2 \cdot L_2$$

mit  $L_1$  bzw.  $L_2$  als Abständen der Massen  $G_1$  bzw.  $G_2$  von der Mitte der Masse  $M_r$ , da sonst Kippmomente geweckt werden.

In der Weise, wie es hier für den Einzylinder berechnet wurde, lassen sich die Gegengewichte der Mehrzylindermaschinen bestimmen, wobei jeder Zylinder für sich zu betrachten ist und das resultierende Gegengewicht als vektorielle Summe benachbarter Zylinder unter Berücksichtigung der Kurbelversetzung gefunden wird.

Außer dem Vorteil größerer Freiheit von Erschütterungen bietet diese Konstruktion geringere Wellen- und Gehäusebeanspruchungen. Sie hat den Nachteil, die Drehschwingungseigenfrequenzen zu erniedrigen, da eine Verdopplung der rotierenden Massen stattgefunden hat.

Der Ausgleich der hin und her gehenden Massen ist schwieriger. In Abb. 49 zeigte sich, daß durch die endliche Pleuelstanglänge bedingt, selbst bei starrem Gehäuse eine Massenkraft zweiter Ordnung beim Vierzylinder übrigbleibt. (Höhere Harmonische sind wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt.) Diese kann durch das Lanchester-Getriebe ausgeglichen werden, das unter dem Mittelager der Maschine angeordnet wird, um nicht Kippmomente zu verursachen.

Das Lanchester-Getriebe besteht aus zwei mit der doppelten Drehzahl der Kurbelwelle umlaufenden entmitteten Massen, die gemäß Abb. 51 angeordnet sind. Ihre Größe bestimmt sich zu:

$$H_2 = \frac{GR}{2}$$

mit  $H_2$  als Massenkraft zweiter Ordnung,  $G$  als der Masse mit dem Schwerpunktsabstand  $R$ . Beide Massen drehen sich in entgegen-

gesetzter Richtung, damit nur in vertikaler Richtung ihre Wirkung zur Geltung kommt, sie sich aber in horizontaler ausgleicht.

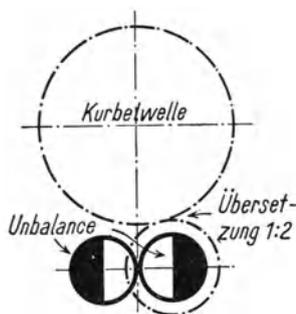


Abb. 51. Lanchestergetriebe

Wird bei einem Einzylinder, der der Einfachheit halber betrachtet sei, die Masse des Gegengewichtes an der Kurbelwelle gesteigert über das Maß hinaus, das zum Ausgleich der rotierenden Massen diene, so entsteht eine Fliehkraft, die mit der Welle umläuft und sich der in vertikaler Richtung

wirkenden Massenkraft überlagert. Es entsteht eine elliptische Massenkraft mit der großen Achse in vertikaler Richtung. Ist das Übergewicht so groß, daß die halbe hin und her gehende Masse ausgeglichen wird, so liegt der Sonderfall des Kreises vor. Die resultierende Massenkraft wirkt jetzt wie eine rotierende Masse. Sie läßt sich aber nicht durch Gegengewichte ausgleichen. Der Grenzfall des Massenausgleiches ist gegeben, wenn das Übergewicht gleich der hin und her gehenden Masse ist. Jetzt ist die vertikale Ebene schwingungsfrei. Die Kraft pulsiert in der horizontalen.

Ein solcher Massenausgleich ist oftmals erforderlich bei Fahrzeugen, deren Bauart dazu neigt, Schwingungen nach einer Richtung hin Vorschub zu leisten. Vor allem neigen Motorräder dazu, in vertikaler Richtung zu schwingen. Ein teilweiser Ausgleich der hin und her gehenden Massen in der geschilderten Weise verringert die Erregung in vertikaler Richtung und verlegt sie in die horizontale, die meist stabiler ist, so daß die Schwingungen den schädlichen Charakter verlieren.

Wird ein vollständiger Ausgleich auch der hin und her gehenden Masse verlangt, so ist ein dem Lanchester-ähnliches Getriebe zu verwenden. Es würde aus zwei an den Enden der Welle angebrachten entmitteten Gewichten bestehen, die sich in umgekehrter Richtung, aber mit der gleichen Drehzahl der Kurbelwelle drehen. Die Summe ihrer Komponenten  $m \cdot R$  muß der Fliehkraft des für die Massenkraft erforderlichen Gegengewichtes gleich sein, das seinerseits durch seine Zentrifugalkraft die Wirkung der hin und her gehenden Massen zur Hälfte ausgleicht. (Ausgleich der ersten Harmonischen. Für die zweite ist entsprechend zu verfahren.)

Ein weiterer Weg ist die Verringerung der hin und her gehenden Massen. Das kann einmal durch Verwendung leichter Triebwerke geschehen, andererseits auch durch besondere Bauweisen. Die Pleuelstange beteiligte sich sowohl an der rotierenden als auch an der hin und her gehenden Masse. Die Verteilung ihrer Masse auf beide Größen geschah, wie bereits auf S. 24 behandelt, gemäß der Lage des Schwerpunktes. Je näher er an die Mitte des Kurbelzapfens heranrückt, desto größer ist der rotierende Anteil. Fällt ihr Schwerpunkt in die Zapfenmitte, so ist sie nur als rotierend anzusehen.

Das kann dadurch erreicht werden, daß sie über den Zapfen hinaus verlängert und mit einem Gewicht am Ende<sup>258) 259)</sup> versehen wird (Abb. 52), das so bemessen ist, daß der Schwerpunkt die gewünschte Lage einnimmt. Da die rotierenden Massen ausgeglichen werden können, so ist die unausgeglichene Masse nicht unerheblich vermindert.

**Unbalancen.** Die Untersuchungen setzen voraus, daß alle Teile gleiches Gewicht und gleiche Gewichtsverteilung hatten, sowie, daß Trägheitsachse und Drehachse zusammenfallen.

Zur Einhaltung der ersten Bedingung werden die einzelnen Massen gewogen. Es sind zwei Systeme in Verwendung, die direkte Wägung, bei der das tatsächliche Gewicht ermittelt wird, und die

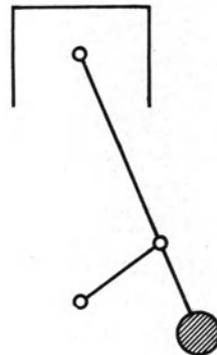


Abb. 52. Verwandlung von hin und her gehender Masse in rotierende

Differenzwägung, bei der nur der Unterschied gegenüber normalen Teilen festgestellt wird. Sowohl die kompletten Kolben als auch die Pleuelstangen werden so gewertet und in die Fahrzeuge nur Teile gleichen Gewichts eingebaut. Rotierende und hin und her gehende Masse sind getrennt zu wägen.

Trotz dieser Vorsichtsmaßnahmen erweist sich aber der Motor nicht immer störungsfrei. Auch bei der genauesten Bearbeitung läßt sich nämlich nicht vermeiden, daß einzelne Abmessungen der Kurbelwelle stärker sind als andere. Das hat die Entstehung von Fliehkräften und Fliehkraftmomenten (Unbalancen) zur Folge.

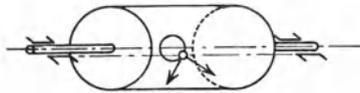
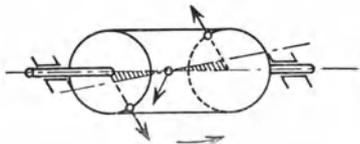
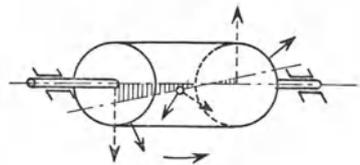


Abb. 53. Statische Unbalance

Abb. 54  
Dynamische UnbalanceAbb. 55\*)  
Allgemeine oder überlagerte Unbalance

In Abb. 53 ist die statische Unbalance dargestellt. Die Trägheitsachse liegt parallel zur Drehachse. Abb. 54 zeigt die dynamische Unbalance. Hier schneidet die Trägheitsachse die Drehachse im Schwerpunkt. Der allgemeine, stets in der Praxis vorliegende Fall, ist dagegen in Abb. 55 angegeben\*). Der Einfachheit halber sind die Körper als Trommeln gezeichnet, da ihre Form keine Rolle spielt. Als letzter Fall muß erwähnt werden, daß die Welle selbst

elastisch ist und sich bei der Drehung durchbiegt. Dadurch verlagert sie ihren Schwerpunkt und weckt Fliehkräfte.

Die statische Unbalance äußert sich bei ruhendem Körper, der bestrebt ist, so liegen zu bleiben, daß sich der Schwerpunkt unter dem Aufhängepunkt befindet und, genügend kleine Reibung vorausgesetzt, um diese Lage pendelt. Auf Rollen oder Linealen kann die Lage des Schwerpunktes bestimmt und der Massenausgleich

\*) Krupp Monh. 1923.

durch Abschleifen oder Anschweißen dahin gebracht werden, daß der Körper indifferent wird. Hindernd wirkt dabei die Reibung ein.

Genauer ist es, die Schwerpunktsentmittung zu wägen. Das geschieht auf besonders gebauten Waagen, den Schwerpunktswaagen. Die Entmittung läßt sich rasch und sicher auf 0,005mm herabsetzen und damit die Wirkung der Fliehkraft fast aufheben. Ein solches Verfahren ist da angebracht, wo es sich um scheibenförmige

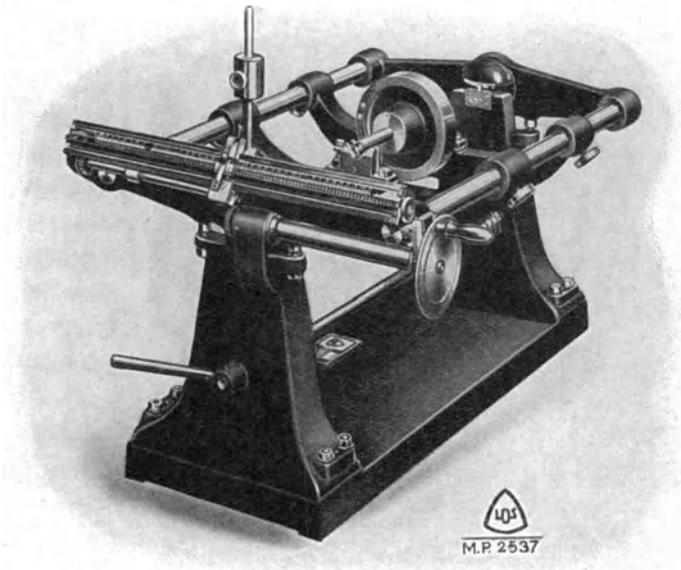


Abb. 56. Kruppsche Schwerpunktswaage

Körper [Schwungrad]<sup>262)268)</sup> handelt, da bei ihnen die dynamische Unbalance klein ist (Abb. 56).

Der dynamische Fehler hat seinen Namen daher, daß er nur bei rotierendem Körper bemerkt wird. Es bildet sich durch Teilunbalancen ein Fliehkraftpaar aus. Wird der Körper so gelagert, daß er als Pendel schwingen kann, so wird die Zentrifugalkraft, ausgehend von einer Teilunbalance, ihn zu erzwungenen Schwingungen anregen. Im Resonanzgebiet wird der Ausschlag am größten und eilt der Ursache [nach den Lehren der Schwingungsmechanik]<sup>14)</sup> um 90° nach.

Solange starre Körper auszuwuchten sind, eignet sich die Wuchtung bei geringer Drehzahl, da sie eine einfache Lagerung gestattet. Sobald elastische Teile in Frage kommen (Kurbelwelle),

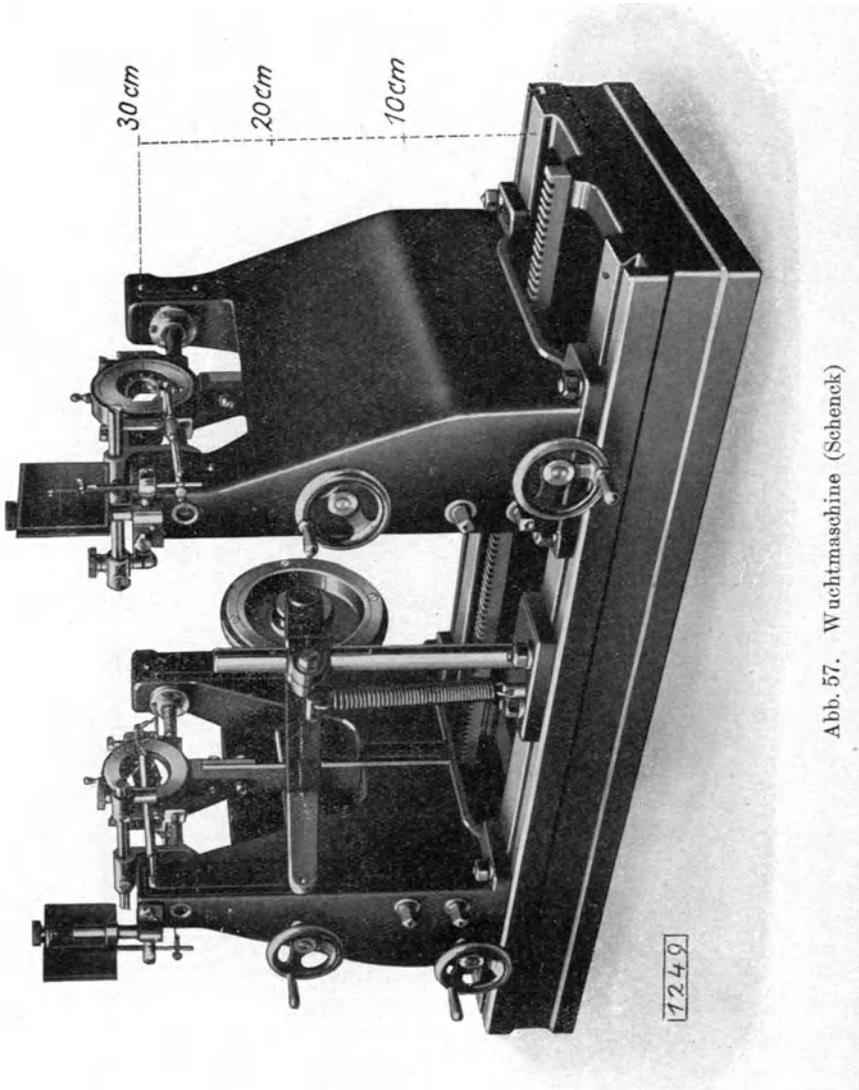


Abb. 57. Wuchtmaschine (Schenck)

sind sie unbrauchbar, da die Verformung der Körper nicht beobachtet werden kann.

Im Gebrauch ist das Verfahren des statischen Vor- und dynamischen Nachwuchtens<sup>269) 270)</sup>, das zwei Maschinen erfordert, und rein dynamische Wuchtung, bei der jeweils ein Ende der Maschine als Pendel wirkt. Der Pendelpunkt kann entweder dadurch geschaffen werden, daß das betreffende Lager arretiert wird, so daß es nur pendeln, aber sich nicht verschieben kann<sup>264)</sup> (Abb. 57), oder dadurch, daß die Federn, deren Rückstellkraft an

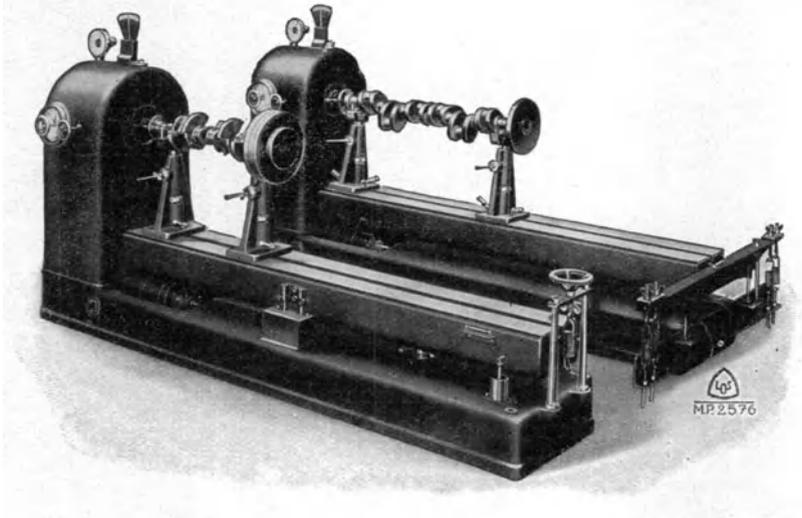


Abb. 58. Wuchtmaschine (Krupp)

den Enden benutzt wird, so weit verschieden stark gewählt werden, daß die Resonanzen der beiden Seiten weit genug auseinander liegen<sup>270)</sup>. Auf den beiden zuletzt genannten Maschinengattungen kann der statische und der dynamische Fehler gleichzeitig beseitigt werden durch Anbringung entsprechender Gegenwichte an den Enden der Körper.

Ist die Welle selbst elastisch (Kurbelwelle), d. h. liegt ihre Eigenschwingungszahl auf Biegung so tief, daß sie durchfahren werden muß, oder daß man sich ihr auf etwa 30% nähert, so wird die Welle dazu neigen, Biegungsschwingungen auszuführen. Sie beginnt, wenn sie in den Endlagern aufliegt, sich in der Mitte

zu werfen. Als Ursache muß eine Teilunbalance der Welle angesehen werden, die sich nach außen hin nicht äußert, wie es bei der Unbalance starrer Körper der Fall wäre. Sie bewirkt vielmehr zunächst die Durchbiegung und muß an ihrem Ursprungsort, der Wellenmitte, beseitigt werden. Hier sind die Ausgleichsgewichte\*) anzubringen. Sie sind so lange zu variieren, bis die Welle einwandfrei rund läuft. Bei der Wuchtung ist Vorsicht am Platze, da die Schwingung unstabil ist. Die Erregung wächst mit dem Schwingungsaus Schlag, da die Zentrifugalkraft proportional der Entmittung ist.

Über die praktische Handhabung der Maschinen kann gesagt werden, daß sie umso schwieriger wird, je niedriger die gewählte Auswuchtungs drehzahl liegt, da die Breite des Resonanzgebietes gering ist und die gewünschte Wellendrehzahl nur schwer einstellbar ist. Oft wird sie dabei auch, besonders wenn fremde Massen mitbewegt werden, durch deren Eigenfrequenzen verdeckt oder verwischt. Kurbelwellen sind zweckmäßig in der Nähe ihrer Biegeungseigen schwingungszahl auszuwuchten.

Trotz aller Sorgfalt werden aber stets kleine Ungenauigkeiten vorkommen, die Erzitterungen des Wagens zur Folge haben. Sie können, wie bei der Federaufhängung besprochen werden wird, durch besondere Maßnahmen ausgeglichen und auf ein Mindestmaß beschränkt werden.

**Federung.** Das Chassis konnte mannigfache Schwingungen von verschiedener Form vollführen. Mit zu den wichtigsten elastischen

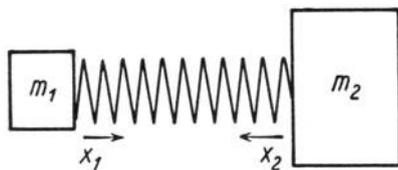


Abb. 59. 2-Massenschwinger

Gliedern, die berücksichtigt werden mußten, gehörte die Feder. Sie sei in ihrer Verbindung mit Achse und Chassis einer besonderen Betrachtung unterzogen. Um sie möglichst einfach zu gestalten, wird zunächst von der Verbindung

der Räder mit dem Boden abgesehen und Chassis und Achse als freies System aus zwei Massen und einer Feder betrachtet. Die

\*) Angaben der Firma C. Schenck.

Ergebnisse sind qualitativ dieselben, wie bei Untersuchung des ganzen Systems (Abb. 59).

Wird eine ideale Feder vorausgesetzt, d. h. eine solche, die keinerlei Dämpfung besitzt, so gilt die Differentialgleichung:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c(x_1 - x_2) = 0,$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + c(x_1 - x_2) = 0,$$

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}.$$

Eine Gleichung, die nur erfüllt ist, wenn sich die Ausschläge der Massen umgekehrt wie diese verhalten.

In den Gleichungen bedeutet  $m_1$  die Masse des Rades und eines Teiles der Achse,  $x_1$  ihre Auslenkung,  $c$  die Kennung der Feder,  $m_2$  den Anteil der Chassismasse, die auf eine Feder entfällt, und  $x_2$  ihre Amplitude.

Nach Einführen der partikulären Integrale wird

$$m_1 A_1 = m_2 A_2$$

oder, wie bereits erwähnt:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{A_2}{A_1}.$$

Die Gleichung sagt nun, daß mit Wachsen der Chassismasse bei gleichbleibender Achse die Amplitude der dem Fahrer wahrnehmbaren Schwingungen (Chassisschwingungen) abnehmen wird, ebenso mit der Abnahme der ungefederten Masse. Dieser Weg wird bereits im Fahrzeugbau in weitem Maße besprochen.

Die Schwingungszahl eines solchen Systems ist gegeben zu

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m_1 + m_2}}.$$

Sie liegt um so höher, je kleiner die Massen und je steifer die Federn sind. Fahrtechnisch ist das von außerordentlich großer Bedeutung.

Bereits die Bezeichnung harte und weiche Federn für solche mit steiler bzw. flacher Kennlinie deutet auf ein verschiedenartiges Empfinden der durch die Federn übertragenen Schwingungen hin.

Nicht die Amplitude der Schwingung ist maßgebend für die ausgelöste Empfindung, sondern die Beschleunigung<sup>10)</sup> und möglicherweise, hierüber fehlen leider eingehende Untersuchungen, auch die erste Ableitung der Beschleunigung<sup>114)</sup> nach der Zeit, die zeitliche Änderung der Beschleunigung.

Ist die Schwingung selbst durch die Gleichung dargestellt:

$$x = A \cdot \sin \omega t,$$

so ist die Beschleunigung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -A \omega^2 \sin \omega t$$

und deren Ableitung

$$\frac{d^3 x}{dt^3} = -A \omega^3 \cos \omega t.$$

Hierin ist  $x$  der momentane Ausschlag,  $A$  der Höchstausschlag,  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $t$  die Zeit. Die Gleichungen zeigen, daß die Beschleunigung nur der Amplitude, aber dem Quadrat der Frequenz verhältig ist, und daß ihre Ableitung sogar mit der dritten Potenz dieser Größe wächst.

Soll die Beschleunigung und möglichst auch ihre Änderung klein sein, so muß die Frequenz der Schwingungen klein gehalten werden. Das erklärt auch, warum geringe Änderungen der Federung oft die Reisebequemlichkeit wesentlich beeinflussen.

Die Frage nach einer ausreichenden Federung wird um so wichtiger, je kleiner die Achsmasse wird. Beeinflusste diese Masse die Amplitude günstig, indem ihrer Verringerung eine Ausschlagsverminderung des Chassis entsprach, so kann das Fahren weniger angenehm werden, wenn die Federung dieselbe bleibt, da die Summe der schwingenden Massen geringer wird und sich damit die Schwingungszahl erhöht. Auf Grund von Fahrversuchen kann gesagt werden, daß die Schwingungszahl stets unter 120/min bleiben sollte. Nur nebenbei sei erwähnt, daß vielfach der Formgebung der Feder große Aufmerksamkeit gewidmet wird. Sie ist aber auf das vorgelegte Problem ohne Einfluß, da in den Gleichungen nur die Kennung  $c$  der Federn vorkommt. Versuche bestätigen das.

Bei der Untersuchung wurde offengelassen, ob es sich um freie oder erzwungene Schwingungen handelt. Das hat hier keine

Bedeutung, da nur die Wirkung von Frequenz und Amplitude in ihrem gegenseitigen Verhalten betrachtet wurde.

**Schwingachsen.** Je kleiner die Achsmasse ist, desto geringeren Einfluß hat sie auf die Schwingungen des Wagens. Die Fahrzeugschwingungen sind dann praktisch ausreichend dadurch zu ermitteln, daß die Gesamtfederung (Federn und Bereifung) als Stützen des Wagens angesehen werden. Wie Versuche gezeigt haben (vgl. den Abschnitt über Fahrzeug und Fahrbahn), ist auch die Beanspruchung von Fahrbahn und Bereifung wesentlich durch diese Masse bestimmt.

Im Bestreben, sie klein zu halten, sind nicht nur die Gewichte der Einzelteile weitgehend verringert, sondern es ist auch die

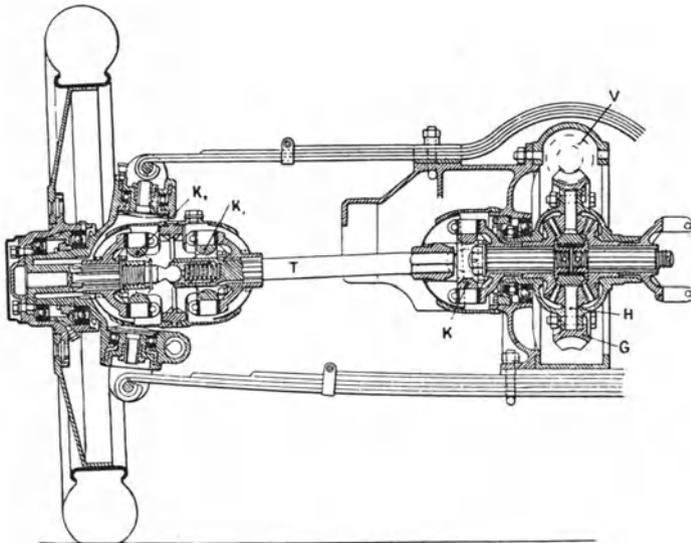


Abb. 60. Schwingachse

Schwingachse in mancherlei Ausführungen (Abb. 60) eingeführt worden. Wird bei einer solchen Achse ein Rad durch eine Unebenheit gehoben oder gesenkt, so wird die darüberliegende Feder in entsprechendem Maße belastet und das Fahrzeug beeinflusst.

Die Achse knickt dabei ein, so daß das Differential den Drehpunkt bildet und seine Lage gegenüber dem Fahrzeug nicht

ändert. Die große Masse des Differentialgehäuses ist somit in Ruhe und wird nicht beschleunigt. Sie ist nicht mehr Teil der Achsmasse, sondern vergrößert die des Wagens, was einen doppelten Vorteil bedeutet.

In Verbindung mit einer Querfeder (Abb. 61) ist diese Bauart besonders vorteilhaft, da hier der Angriffspunkt der Feder am

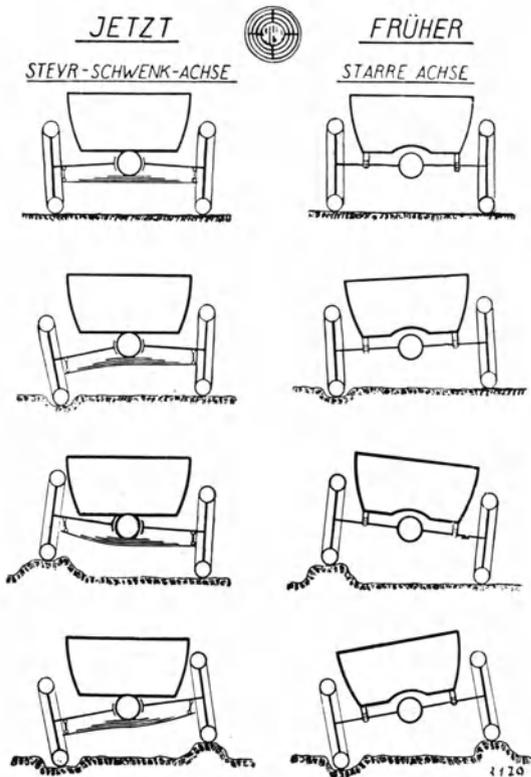


Abb. 61. Schematischer Vergleich der normalen mit der Schwenkachse

Chassis dicht bei der Wagenmitte liegt. Alle Kräfte und Momente können nur mit kleinem Hebelarm angreifen, wobei die Bewegungen selbst klein sind.

Die Auflösung der Vorderachse in Parallelführungen der Räder, die sich gegen das Chassis durch Spiralfedern (z. B. Lancia) oder durch eine Querfeder abstützen (Ford), liegt in derselben

Richtung. Auch hier wird das Gewicht der Achse selbst vermieden und durch Verstärkung des Rahmens dem Chassis zugefügt (Abb. 62).

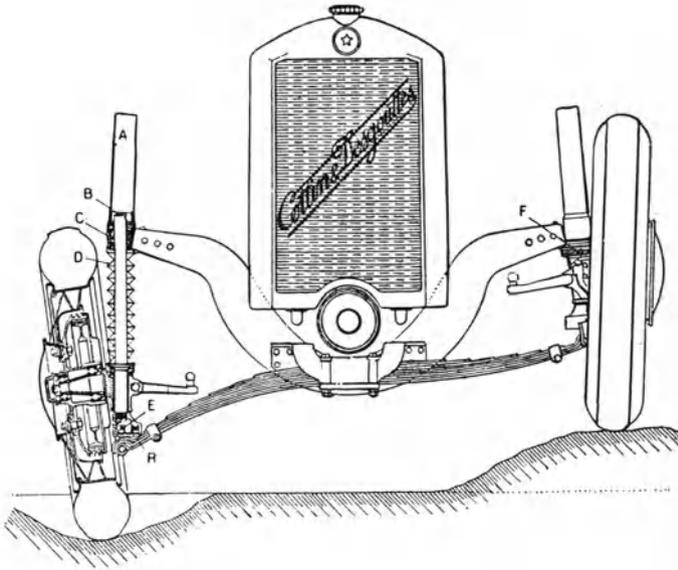


Abb. 62. Elastische Vorderachse

**Rahmenlose Bauart.** Der letzte Schritt der Entwicklung ist die rahmenlose Bauart (Abb. 63). Die Abbildung läßt erkennen, daß das Chassis nur noch aus einem starken Rohr (Tatrawagen), gegen das sich die Räder durch Quer- oder Spiralfedern stützen, besteht. Das Rohr enthält den gesamten Antrieb und dient gleichzeitig als Träger für den Aufbau. In seiner Eigenschaft als Träger muß es stark gehalten sein, damit die Durchbiegungen klein werden. Es ist aber verhältnismäßig leicht und erreicht kaum das Gewicht üblicher Chassiskonstruktionen.

Der normale Rahmen, der aus Längs- und Querträgern besteht, ist gegen Torsionsbeanspruchung sehr weich. Vielfach läßt er sich schon durch Kräfte, die mit der Hand ohne Werkzeug ausgeübt werden, merklich verwinden. Seinen Verwindungen muß der Aufbau folgen und leidet darunter. Der Rohrträger ist dagegen bei Torsionsbeanspruchungen außerordentlich steif. Auch

große Drehmomente haben keinen nennenswerten Einfluß. Die Federung des Chassis selbst ist somit gering und kann vernachlässigt werden. Es ist der Forderung nach einem starren Chassis, die früher aufgestellt wurde, und für die die Untersuchungen streng nur gelten, weitgehend entgegengekommen.

Die theoretisch günstigen Eigenschaften solcher Bauweisen lassen sich auf schlechten Straßen leicht nachprüfen und zeigen volle Übereinstimmung mit der Praxis. Die Fahreigenschaften

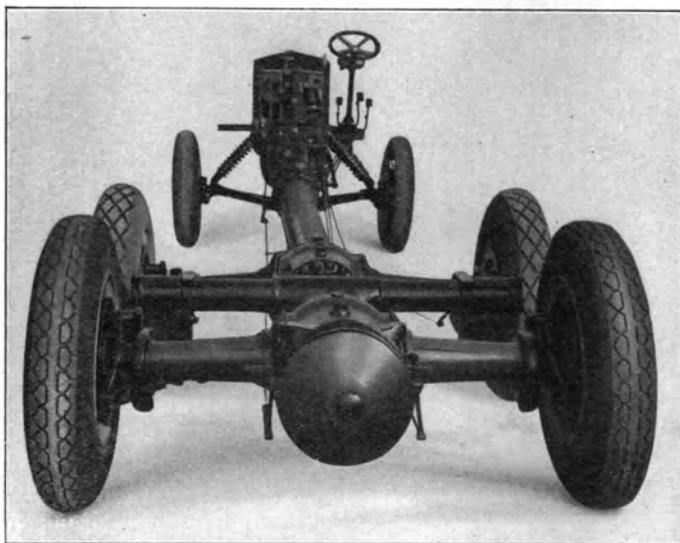


Abb. 63. Tatrswagen mit Rohrrahmen

sind gleichzeitig verbessert, da die Rückwirkungen des Chassis auf die Räder und die damit schwankende Belastung derselben auf einen Kleinstwert vermindert ist.

**Pseudoharmonische Federn.** In den bisherigen Abhandlungen war nur von Federn mit gerader Kennung die Rede. Alle Schwinger waren als mit solchen ausgerüstet gedacht. Die üblichen Federn entsprechen auch der Bedingung weitgehend, so daß die Untersuchungen als mit der Praxis in Übereinstimmung betrachtet werden können.

Zu verschiedenen Zwecken werden in neuerer Zeit aber Abwälzfedern verwendet, deren Länge sich mit der Belastung ändert

und deren Kennung nicht gerade ist, sondern eine beliebige Krümmung aufweist. Der Unterschied beider Kennungsarten ist aus Abb. 64 zu entnehmen. Federn dieser Art sind auch die Reifen, deren Kennungen bei Belastung auf gerader Fläche nach Becker<sup>277)</sup> in Abb. 65 wiedergegeben sind. Auch die Luftfederung (Vaudi) ist hier zu erwähnen.

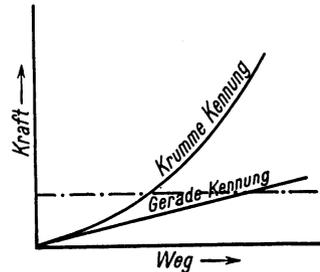


Abb. 64. Kennungsarten

Der Grundgedanke bei dem Entwurf der Abwälzfedern war, die Länge der Blätter mit der Belastung zu vermindern, die Federn dadurch härter zu machen und ihre Beanspruchung in zulässigen Grenzen zu

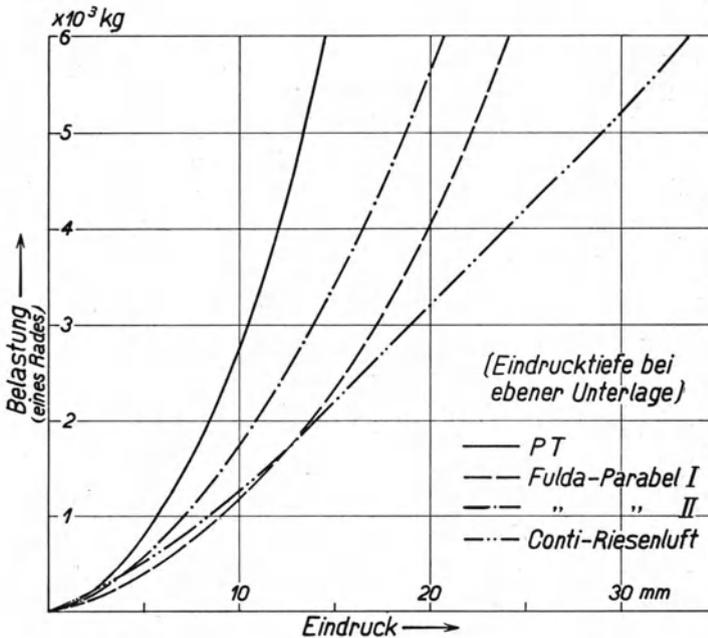


Abb. 65. Reifenkennlinien<sup>277)</sup>

halten. Neuerdings werden sie aber auch als aperiodische Federn<sup>295)</sup> empfohlen. Diese Eigenschaft haben sie allerdings nach dem Einbau nicht.

Die Rückstellkraft ist bei den pseudoharmonischen Federn nicht mehr der Auslenkung selbst verhältig, sondern vielmehr einer Potenz derselben. Die Schwingungsgleichung kann geschrieben werden:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + \sum c x^a = 0 \dots \dots \dots (59)$$

für den ungedämpften Schwinger. Darin ist  $m$  die Masse des Schwingers,  $x$  ihre Auslenkung aus der Ruhelage,  $t$  die Zeit,  $c$  eine Konstante und  $a$  ein beliebiger, von der Kennung bestimmter Exponent.

Schwinger dieser Art führen nicht mehr harmonische Schwingungen aus. Die Bedingung

$$x = A \cdot \sin \omega t + B \cdot \cos \omega t$$

kann nicht mehr angeschrieben werden, um die zeitliche Veränderung des Ausschlages zu kennzeichnen. Die Schwingungsform weicht um so mehr von der Sinuslinie ab, je größer  $a$ , d. h. die Krümmung der Kennung ist.

Für eine gegebene Amplitude  $A$  muß jedoch eine periodische Bewegung<sup>191)</sup> eintreten, da stets auch in diesem Falle kinetische und potentielle Energie ineinander übergehen und zu bestimmten Zeiten die Nulllage durchschritten werden muß. Nach Fourier läßt sich jede periodische Funktion als Summe von Sinuswellen darstellen, so daß hier geschrieben werden darf:

$$x = \sum B_n \cdot \sin (n \omega t) + \sum C_n \cdot \cos (n \omega t),$$

mit  $n$  als beliebiger ganzer Zahl.

Durch Einführung dieser Lösung in die Schwingungsgleichung und Bestimmung der Unbekannten  $B_n$  und  $C_n$  ließe sich die Gleichung in der gleichen Art umformen wie die gewöhnliche des Sonderfalles  $a = 1$  (gerader Schwinger). Die Untersuchungen liegen aber noch nicht in brauchbarer Form vor, so daß der Weg als rein theoretisch angesehen werden darf und hier nicht mehr verfolgt wird.

Das Problem läßt sich aber auch auf graphischem Wege lösen<sup>212)</sup>. Die Gleichung (59) läßt sich schreiben:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 \cdot f(x) = 0.$$

Die Funktion  $f(x)$  ist beliebig und durch die Kennlinie gegeben.  $\omega$  ist die Eigenfrequenz des geraden Schwingers, für den  $f(x) = x$  ist. Nach Erweiterung mit  $\frac{dx}{dt}$  ist

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} + \omega^2 \cdot f(x) \frac{dx}{dt} = 0.$$

Die Integration gibt

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \omega^2 \cdot \int f(x) \cdot dx = 0$$

oder

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{-2\omega^2 \cdot \int f(x) dx}.$$

Das Integral stellt die Fläche unter der Kennung dar und kann leicht als Kurve ermittelt werden. Bei der Bildung der Integralkurve ist von der Auslenkung  $A$  auszugehen, die von Null verschieden ist. Die Integration selbst hat in Richtung der negativen  $X$ -Achse zu erfolgen.

Die nochmalige Integration läßt die Zeit für die Periode  $t$  bestimmen. Sie ist

$$t = \frac{1}{\omega} \int \frac{dx}{\sqrt{-2 \int f(x) dx}}.$$

Aus der Kennlinie ist also bei der Berechnung zunächst die Integralkurve zu bilden, diese zu radizieren, dann die reziproke Kurve zu entwerfen und nochmals zu integrieren. Als Ergebnis wird die Zeit einer Periode gefunden. Für einen einfachen Schwinger sind die Operationen in Abb. 66 ausgeführt.

Die Schwingungsdauer ist, wie die Ableitung zeigt, eine Funktion des Integrals  $f(x) dx$  und daher abhängig von der Amplitude  $A$ . Mit dem Höchstausschlag ändert sich also die Schwingungszahl. Damit ist die Möglichkeit der Resonanz im üblichen Sinne ausgeschaltet, es sei denn, daß sich die Erregung in gleichem Maße wie die Frequenz ändert. Der einer bestimmten Erregung entsprechende Ausschlag kann zwar bedeutende Werte annehmen, wird aber nicht über ein bestimmtes Maß hinausgelangen, da der Schwinger, der zunächst in Resonanz sein mag, seine Eigen-

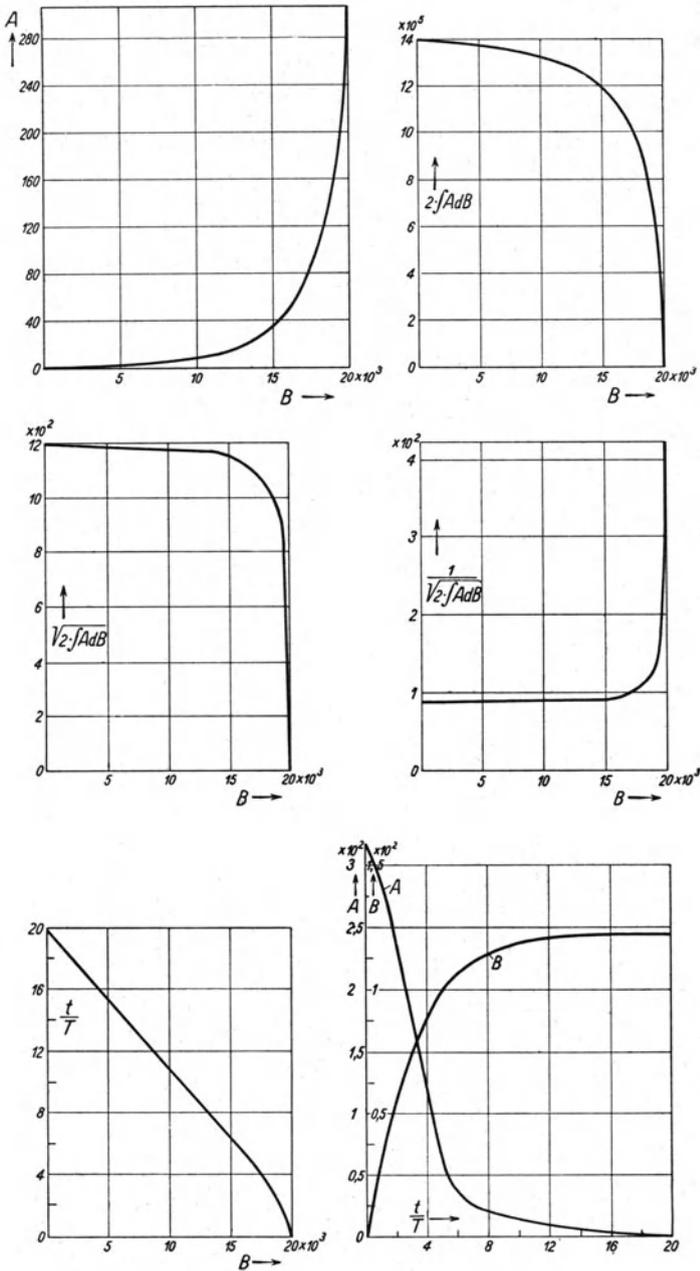


Abb. 66. Halbgraphische Berechnung unharmonischer Schwingung

schwingungszahl ändert und damit nicht mehr in Resonanz bleibt. Er führt eine erzwungene Schwingung außerhalb der Resonanz aus.

Wenn die Kennung nicht wesentlich von einer Geraden abweicht, ist auch eine größere Veränderung der Eigenfrequenz mit der Amplitude nicht zu erwarten. Tritt nun einmal Resonanz ein so wird sie auch fast unverändert bestehen bleiben, da bei leicht gedämpften Schwingern die Ausschlagskurve ein breites Maximum zeigt. Der krummlinige Schwinger verhält sich dann kaum anders als der gerade.

Sollen die Ergebnisse der theoretischen Untersuchung auf die Wälzfedern angewendet werden, so sind ihre Arbeitsbedingungen zu betrachten. Sie sind mit einer bestimmten, durch die Ladung des Fahrzeuges und sein Eigengewicht gegebenen Vorspannung belastet. Die auftretenden Schwingungen können gelegentlich als Stoß große Werte annehmen, die den statischen Belastungen gleichkommen; solche Stöße sind aber selten. Für eine Untersuchung kommen nur die normalen kleinen Schwingungen in Frage, deren Amplituden etwa halb so groß sind wie die Zusammendrückung der Feder durch die Vorspannung.

Legen wir die Abb. 64 zugrunde, so ist leicht zu erkennen, daß im angegebenen Bereich die krumme Kennlinie nur unwesentlich von der geraden abweicht, die als Mittelwert hindurchgelegt wurde. Damit besteht für Schwingungen kleiner Amplituden Resonanzmöglichkeit in fast demselben Maße wie für die Feder geradliniger Kennung.

Federn mit krummer Kennung erscheinen nur dann von Vorteil, wenn im Arbeitsbereich der Feder die Krümmung scharf ist. Weicht die Kennlinie dagegen nicht erheblich von der Geraden ab, so dürfte sich der Aufwand zum Zwecke der Resonanzfreiheit nicht lohnen, da sie nur für ungewöhnliche große Amplituden besteht.

## § 6. Dämpfung

Zur Verringerung der Amplitude ist die Dämpfung heranzuziehen, die teils in den Federn selbst, teils in besonderen Mechanismen, den Dämpfern, vorhanden ist. Sie kann als Reibung erscheinen, die konstant ist und in keiner Weise von der Geschwin-

digkeit abhängt, oder als Geschwindigkeitsdämpfung, d. h. einer solchen, die sich mit der Geschwindigkeit der Schwingungsbewegung ändert. Beide Dämpfungsarten zeigen ein sehr verschiedenartiges Verhalten und sollen deshalb besprochen werden.

**Reibungsdämpfung.** Der Einfachheit halber sei wieder das vorige Zweimassensystem vorausgesetzt. Die Feder sei zunächst reibungsfrei und die Reibung in einem besonderen Gerät erzeugt. Sie wirkt stets der Bewegung entgegen und kehrt daher mit ihr das Vorzeichen um. Die Schwingung ist dargestellt durch die Gleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \pm b + cx = A \sin \omega t.$$

Die bekannte Schwingungsgleichung ist durch das Störungsmitglied der Reibung  $b$  erweitert, während der Ausdruck  $A \sin \omega t$  darauf hindeutet, daß eine erzwungene Schwingung vorliegt mit der Amplitude der Erregung  $A$  ihrer Frequenz.

Das Störungsmitglied wurde schon früher in anderem Zusammenhang erwähnt. Es bedeutet lediglich eine Veränderung der Gleichgewichtslage, um die die Schwingung erfolgt. Durch Umformung wird die Gleichung gefunden:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_e^2 (x \pm h) = a \sin \omega t.$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung ist mit  $x \pm h$  als Variable

$$x \pm h = d \cdot \sin \omega_e t + e \cdot \cos \omega_e t$$

für die momentane Auslenkung und

$$\frac{dx}{dt} = \omega_e (d \cdot \cos \omega_e t - e \cdot \sin \omega_e t)$$

für die Geschwindigkeit.

Bewegt sich  $m$  aus der Ruhelage in Richtung der negativen  $x$ -Achse, so sind die Anfangsbedingungen

$$d = 0 \quad \text{und} \quad e = h - x_0.$$

Damit wird

$$x = (h - x_0) \cos \omega_e t - h$$

und

$$\frac{dx}{dt} = \omega_e (x_0 - h) \sin \omega_e t.$$

Die Schwingung kann nur bestehen, solange eine positive Geschwindigkeit vorliegt, d. h. so lange  $h < x_0$ . Eine freie Schwingung der Feder wird also auf jeden Fall nur so lange vorliegen, wie ihre Amplitude den Wert  $h$  überschreitet. Sie wird zur Ruhe kommen in irgendeinem Punkte zwischen  $+h$  und  $-h$ . Ihre Ruhelage ist in diesem Gebiete nicht eindeutig festgelegt.

Wird die Betrachtung über eine Halbperiode fortgesetzt, so ist der neue Höchstaufschlag

$$x_1 = x_0 - 2h,$$

für die volle Periode

$$x_2 = x_0 - 4h.$$

Die Amplitude nimmt stetig ab, und zwar geradlinig, nach einer arithmetischen Reihe (Abb. 67). Bei Beobachtung

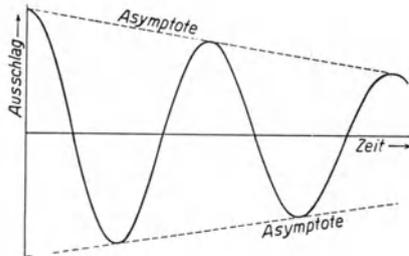


Abb. 67.

Ausschlag bei Reibungsdämpfung

der Achsschwingungen zeigt sich, daß ohne Stoßdämpfer bereits ein solches Abklingen vorliegt.

Sobald eine erzwungene Schwingung vorliegt, wie anfangs angedeutet wurde, muß noch eine weitere Variable hinzugenommen werden. Es ist

$$x \pm h = d \sin \omega_e t + e \cos \omega_e t - \frac{a}{2 \omega_e} t \cos \omega_e t.$$

Die Gleichung für die Geschwindigkeit ist

$$\frac{dx}{dt} = \left( \frac{at}{2} - e \omega_e \right) \sin \omega_e t - \left( \frac{a}{2 \omega_e} d \omega_e \right) \cos \omega_e t.$$

Zur Zeit  $t = 0$  sei  $x = x_0$  und  $\frac{dx}{dt} = 0$ , dann ist

$$d = \frac{a}{2 \cdot \omega_e^2}, \quad e = h - x_0,$$

und

$$\frac{dx}{dt} = \left[ \frac{at}{2} + \omega_e (x_0 - h) \right] \sin \omega_e t.$$

Nach einer halben Periode ist der Ausschlag

$$x_1 = x_0 - 2h + \frac{a\pi}{2 \cdot \omega_e^2}.$$

Die Gleichung unterscheidet sich von der früher gefundenen durch das letzte Glied,  $\frac{a\pi}{2\omega_e^2}$ . Es ist durch die Erregung bedingt. Solange  $x_0 < 2h$  (wie schon früher begründet), sind zwei Fälle möglich:

$$h > \frac{a\pi}{4\omega_e^2} \quad \text{und} \quad h < \frac{a\pi}{4\omega_e^2}.$$

In ersterem Falle ist die Schwingung offenbar stets konvergent, trotz vorliegender Resonanz. Die Amplitude nimmt nach einer arithmetischen Reihe ab, also mit linearen Schmiegunskurven. Liegt dagegen der zweite Fall vor, ist also die Erregung stärker als die Dämpfung, so wird die Amplitude unbegrenzt wachsen, wobei sie ebenfalls eine lineare Änderung, eine Zunahme, erfährt. Der Dämpfer versagt in diesem Falle.

Bei der Behandlung der Dämpfung wurde ein Dämpfer vorausgesetzt, der bei seiner Zusammendrückung und bei seiner Dehnung wirkt, also in zwei Richtungen. Die Untersuchung gilt aber sinngemäß auch für Dämpfer mit nur einseitiger Wirkung.

Zu den doppelseitig wirkenden Dämpfern gehört, um das Gesagte zu verdeutlichen, z. B. der Beißbart-Stoßdämpfer, während zu den einseitig wirkenden Komet-<sup>320)</sup> und Weikradämpfer zählen. Die einseitigen werden meist härter eingestellt als die doppelseitigen, da sie auf dem halben Wege dieselbe Arbeit verrichten müssen, um gleiche Wirkung zu erzielen. Ihre den doppelseitigen Dämpfern überlegene Wirkung dürfte in diesem Umstand zu sehen sein, da sie die Schwingung nach erfolgter Auslenkung in der ersten Phase bereits lebhafter abdämpfen.

Als doppelseitige Dämpfung muß auch die Eigendämpfung der Feder angesehen werden, die auf der Reibung der Blätter aneinander beruht. Die Eigendämpfung ist um so größer, je größer die Reibungszahl der aufeinanderliegenden Lagen ist und je mehr Lagen Verwendung finden. Soll die Feder als „Kreisbogenfeder“, d. h. so ausgebildet werden, daß ihre Biegelinie näherungsweise ein Kreisbogen ist, wie es in der Praxis stets angestrebt wird, so ist das Überschreiten einer Lagenzahl von etwa zehn Lagen un-zweckmäßig, da die untersten Blätter sehr kurz und ihre gegenseitige Verschiebung sehr klein wird und damit auch ihre Dämpfung

entsprechend vermindert ist. Das Zwischenlegen von Einlagen hat gelegentlich zu einer starken Dämpfung geführt.

Eine besondere Art von Stoßdämpfern, die die Reibung der Federblätter erhöhen, sind die Indian-Stoßdämpfer. Sie beruhen darauf, daß Gewichte durch ihre Trägheitskraft gegen die Federlagen pressen und durch ihre Anpressung die Reibung vergrößern. Die Reibung kann dabei nicht mehr konstant sein, sondern ist näherungsweise der Beschleunigung verhältig. Sie wird später besprochen.

Die Wirkung der Reibungsdämpfung kann leicht erkannt werden. Ein Vergleich zwischen einer rostigen Feder, also einer solchen mit starker Reibung zwischen den Federlagen, und einer geölten Feder bei einer Prüfungsfahrt wird leicht zeigen, daß die rostige Feder harte, kurze Stöße verspüren läßt, während die geölte ein schwingendes Fahren gestattet. Während die geölte Feder auch bei raschen Schwingungen noch anspricht, ist die Reibung zwischen den Federlagen bei der verrosteten so groß, daß sie praktisch als starr angesehen werden darf. Ein Blick auf die abgeleiteten Gleichungen bestätigt den Versuch. Er zeigt, daß bei Schwingungen kleiner Amplitude und beliebiger Frequenz die Kraftübertragung wesentlich durch die Reibung erfolgt.

Als Irrtum muß daher gekennzeichnet werden, Federn zu verwenden, die stark durch Reibung gedämpft sind. Sie wirken nur bei einer bestimmten Größe der Amplitude günstig, bei jeder anderen aber blockierend. Abwegig ist es, Federn als aperiodisch<sup>296</sup>) zu bezeichnen, also als solche, die nach Ablauf von weniger als einer Periode wieder zur Ruhe kommen, die nur dann diese Eigenschaft haben, wenn sie für sich schwingen. Die Federn sind nur in dem Zusammenhang zu beurteilen, in dem sie eingebaut werden, denn in diesem Zusammenhang sollen sie wirken und günstige Eigenschaften haben.

Zu der Verteilung der Dämpfung zwischen Feder und Dämpfer ist zu sagen, daß auch hier der von Riedler im Maschinenbau betonte Grundsatz gilt, ein Ding kann zur Zeit nur eine Aufgabe vollkommen erfüllen. Die Federdämpfung wird daher zweckmäßig so klein wie möglich gehalten und dafür der Dämpfer entsprechend bemessen. Neben Vorteilen in der Benutzung hat dieses Vorgehen

auch den, die unbestimmte Federdämpfung zu vermeiden und durch eine regelbare, der des Dämpfers, zu ersetzen.

**Geschwindigkeitsdämpfung.** Außer der Möglichkeit, die Schwingung durch Reibung, also eine konstante Kraft, aufzuzehren, gibt es die weitere, sie durch eine solche zu vernichten, die sich mit der Geschwindigkeit ändert. Für ein so gedämpftes System lautet die Differentialgleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = a \cdot \sin \omega t.$$

Hierin ist  $b$  der Dämpfungsfaktor.

Der Ausschlag bei Eigenschwingung ist bekanntlich (siehe S. 19)

$$X = A \cdot e^{\beta t} \sin(\alpha + \omega_e t)$$

mit  $\beta = \frac{-b}{2m}$  und  $\omega_e = \sqrt{\frac{c - \frac{b^2}{4m}}{m}}$  (Eigenfrequenz).

Für die erzwungene Schwingung gilt

$$x = \frac{A \cdot \sin \varepsilon}{b \cdot \omega} \sin(\omega t - \varepsilon)$$

mit

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{b}{c - m \omega^2}.$$

Diese erzwungene Schwingung hat eine konstante Amplitude bei gegebener Schwingungszahl von der Größe

$$a = \frac{A \cdot \sin \varepsilon}{b \cdot \omega}$$

und ist von der Frequenz der Erregung  $\omega$ . Je größer die Schwingungsschnelle  $\omega$  wird, desto kleiner wird  $\varepsilon$  und damit die Amplitude. Die Ausschlagskurve weist nur für  $\omega = \omega_e$  ein Maximum auf. Dabei wird  $\varepsilon = 90^\circ$  und

$$a = \frac{A}{b \cdot \omega_e}$$

Diese Ausschlagskurve ist für verschiedene Werte von  $b$  in der Abb. 68 wiedergegeben, die sie sehr anschaulich illustriert.

Unter den geschilderten Verhältnissen muß die pro Periode aufgenommene Arbeit im Mittel der durch die Dämpfung abgeführten

entsprechen. Die Periode ist  $\frac{2\pi}{\omega}$ , die Dämpfung hat den momentanen Wert  $b \cdot \frac{dx}{dt}$  und wirkt über das Wegelement  $dx$ , so daß die Arbeitsgleichung lautet:

$$A = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} b \frac{dx}{dt} \cdot dx = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} b \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt.$$

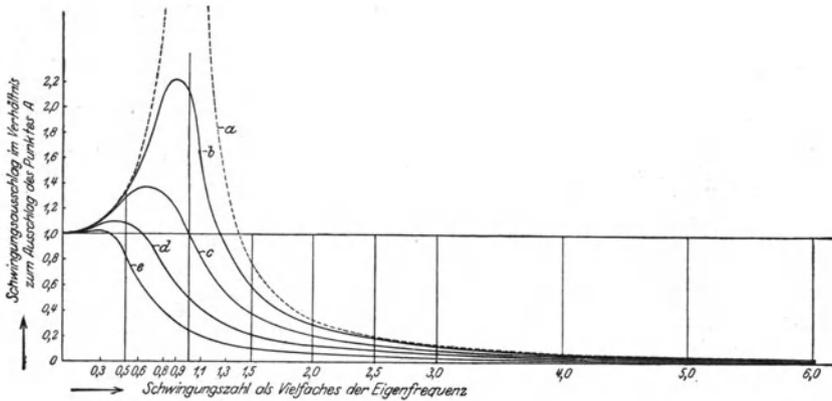


Abb. 68. Erzwungene Schwingung mit Geschwindigkeitsdämpfung

Durch Differenzieren der Ausschlagsgleichung wird

$$\frac{dx}{dt} = \frac{A \cdot \sin \epsilon}{b} \cos(\omega t - \epsilon).$$

Die Integration führt zu

$$A = \frac{A^2 \sin^2 \epsilon}{b^2}.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich die Wärmemenge errechnen, die der Dämpfer bei seiner Arbeit erzeugt durch Umwandlung der Schwingungsarbeit. Sie ist an die Umgebung abzuführen und bestimmt seine Größe.

Eine solche Dämpfung liegt näherungsweise vor bei Verwendung von hydraulischen Stoßdämpfern. Sie sind, wie die Gleichung zeigt, stets in der Lage, die Schwingung abzdämpfen ohne Berücksichtigung der Amplitude. Ein Blockieren der Federn ist bei

Erfüllung der Bedingungen, die der Gleichung zugrunde liegen, nicht möglich. Solche Dämpfer haben auch nicht den Nachteil, eine Änderung der jeweiligen Ruhelage der Feder herbeizuführen. Die Güte der Wirkung richtet sich nach der richtigen Wahl des  $b$ -Wertes, der durch Federung und Masse bestimmt ist.

Die konstruktive Ausführung geht zwei Wege. Es sind ein- und doppelseitig wirkende Dämpfer auf dem Markte. Auch hier ist bei einseitig wirkenden zur Erzielung gleicher Leistung die Dämpfung zu erhöhen.

Während die Amplituden bei Reibungsdämpfung linear mit der Zeit abnehmen, folgen sie bei der Geschwindigkeitsdämpfung einer logarithmischen Linie, deren Steilheit durch den Dämpfungsfaktor bestimmt wird. Ist bei einem Stoß ein solches System zu einer Eigenschwingung angeregt worden, so klingt sie offenbar rascher zu kleinen Amplituden ab als bei der Reibungsdämpfung. Sie ist daher wirkungsvoller.

**Exponentialdämpfung.** Zu den bisher besprochenen Dämpfungen gesellt sich noch eine Reihe anderer. Als wichtigste sei die Exponentialgleichung erwähnt. Für sie lautet die Schwingungsgleichung:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \left( \frac{dx}{dt} \right)^u + c x = 0.$$

Sie ist stärker als die reine Geschwindigkeitsdämpfung, da sie mit einer Potenz derselben veränderlich ist. Der Exponent  $u$  hat bei Propellern in Wasser etwa den Wert  $\frac{3}{2}$  und dürfte auch bei hydraulischen Dämpfern ähnliche Werte annehmen.

Ein besonderer Fall wäre die Verwendung von Dämpfern nach Art einer Junkers-Wasserbremse, da ihr Drehmoment der Funktion

$$b \cdot \frac{1}{\left( \frac{dx}{dt} \right)} \cdot e^{\left( \frac{dx}{dt} \right)}$$

folgt. Ausführungen dieser Art liegen noch nicht

vor, so daß ein näheres Eingehen auf diese Erscheinungen sich erübrigt.

**Luftdämpfung.** Eine Sonderart der Dämpfung sei noch erwähnt, die Luftdämpfung, die bei Polstern in Anwendung kommt. Sie besteht darin, daß die Polsterfedern mit Schwammgummi um-

geben werden, das bei Längenänderung der Federn eine Volumenänderung erfährt und dadurch bald mehr, bald weniger Luft enthält. Beim Aus- und Einströmen der Luft wird sie gedrosselt und gewirbelt und dadurch in Wärme umgesetzt, die der Schwingungsenergie entzogen wird.

**Pseudoharmonische gedämpfte Feder.** Die Untersuchung der pseudoharmonischen Feder, der Feder mit gekrümmter Kennung, führte zu der Erkenntnis, daß sie sich bei geringer Krümmung kaum merklich von einer solchen mit gerader Kennung unterscheidet. Bei größerer Krümmung treten jedoch eigenartige Erscheinungen von Unstabilität auf, sobald Dämpfung einwirkt.

Die Schwingungsdifferentialgleichung bei Geschwindigkeitsdämpfung und Erregung durch eine Kraft mit der Kreisfrequenz  $\omega$  ist

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + c \cdot x = P_0 \sin \omega t.$$

Durch Umformung geht sie in die Näherungsgleichung über:

$$-\omega^2 X + i \frac{b}{m} \omega \cdot X + F(X) = U,$$

worin

$$i = \sqrt{-1}.$$

Soll nur die Amplitude bestimmt werden, so ist die vektorielle Addition, die durch diese Gleichung angegeben wird, ausgeführt mit

$$(F(X) - \omega^2 X)^2 + \left(\frac{b}{m} \omega X\right)^2 = U^2.$$

Wird die Gleichung nach  $F(X)$  aufgelöst, so ist

$$F(X) = U^2 - \left(\frac{b}{m} \omega X\right)^2 + \omega^2 X.$$

In dieser Gleichung stellt  $\omega^2 X$  eine Gerade dar, da  $\omega$  eine Konstante ist. Der Wurzelausdruck hingegen ist eine Ellipse, deren große Achse  $\frac{b}{m} \omega X$  und deren kleine Achse  $U$  ist, wobei  $U$  mit der Ordinate zusammenfällt. Als Lösung der Gleichung erscheinen alle Punkte, bei denen die Funktion  $F(X)$ , die Kennung, denselben Wert hat wie die der Geraden überlagerte Ellipse. Die Fälle sind durch den Schnitt der Kurven gegeben (Abb. 69).

Die Abbildung läßt erkennen, daß hier vier Punkte verschiedene, voneinander unabhängige Amplitudenwerte befriedigen, solange die Schnitte nicht zu flach erscheinen und damit die Unstabilität der Erscheinung andeuten.

Das Auftreten mehrerer Lösungen mit verschiedener Amplitude besagt, daß bei gleichen Bedingungen mehrere Punkte vorhanden

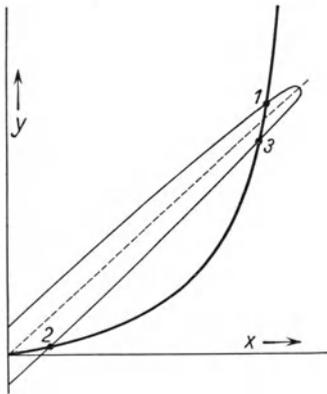


Abb. 69. Unbestimmter Ausschlag bei Dämpfung des unharmonischen Schwingers

sind, für die das Kräftegleichgewicht besteht. Von der Einleitung des Schwingungsvorganges dürfte demnach abhängig sein, welcher sich einstellt. Ebenso besteht die Möglichkeit, daß eine Schwingungsart in die andere überspringt.

Bietet die Feder mit gerader Kennung bereits eine Fülle von Problemen, so werden sie nicht unwesentlich vermehrt, sobald solche mit krummer Kennung berücksichtigt werden. Hier können Schwingungen kleiner Amplitude in solche mit großer überspringen,

und umgekehrt, so daß die Übersicht erschwert wird. Für Schwingungen kleiner Amplitude sind dagegen beide Federarten als gleich anzusehen.

**Rasche Schwingungen.** Die Federn sind in der Praxis nie ohne Reibung zwischen den Federlagen bzw. in ihrem inneren Gefüge. Die Ableitungen zeigten, daß sie dadurch in der Lage sind, fast wie starre Verbindungen, Schwingungen hoher Wechselzahl weiterzuleiten und an das Chassis zu übertragen. Sowohl die Fahrbahn als auch der Motor bringen daher den Wagen zum Erzittern, wenn nicht besondere Hilfsmaßnahmen vorgesehen werden.

Als geeignet zur Aufnahme und Abdämpfung solcher Schwingungen haben sich Stoffe wie Kork, Filz, Gummi und ähnliche erwiesen. Besonders Gummi<sup>325)</sup> mit seiner stark gekrümmten Kennung eignet sich dazu.

Sollen solche Stoffe verwendet werden, so müssen alle direkten Verbindungen der schwingungsübertragenden Körper mit dem

Chassis gelöst werden. Der Motor darf nur auf den Puffern ruhen. Die Halteschrauben müssen auf der Gegenseite ebenfalls Gummipolster bekommen und sich in einer Gummihülse befinden, um auch ein seitliches Anschlagen zu vermeiden.

Bei der Federung sind die Federbolzen des Gehänges in Gummihülsen zu stecken, oder aber die Blätter selbst auf Gummipuffer abzustützen.

Bisher ist eine ähnliche Aufhängung des Schwingungsdämpfers selten durchgeführt worden\*). Sie erscheint aber, da diese Dämpfer meist auf dem Reibungsprinzip beruhen (gleich, ob ein- oder doppelseitig wirkend), erforderlich, da sie sonst die kleinen, raschen Schwingungen direkt wie eine starre Verbindung übertragen. Die Aufgabe kann durch Einbauen von Gummi in die Übertragung oder die Befestigung der Dämpfer praktisch gelöst und damit auch diese Fehlerquelle beseitigt werden.

Eine weitere Verminderung der Erschütterungen kann dadurch bewirkt werden, daß Chassis und Karosserie voneinander unabhängig ausgeführt und durch Aufhängungen, ähnlich denen des Motors, miteinander verbunden werden. Die Wirksamkeit der Maßnahme ist um so größer, je weniger Befestigungsstellen vorgesehen werden und je geringer deren Abmessungen sind. Die Stoßwellen, die durch diese Stellen hindurchgelangen, werden bei kleinen Auflagestellen gegenseitig vielfach interferieren und können sich dadurch in der Karosserie größtenteils aufheben.

In der Weise, wie die Federung und der Motor gegen das Chassis und dieses gegen die Karosserie abgestützt wurde, kann auch jede Person gefedert werden. Bei den raschen Schwingungen des Bodens tritt nämlich ein Gegeneinanderschwingen der Füße und des Karosseriebodens auf, das die untersten Hautschichten der Füße als elastische Federglieder benutzt. Darauf dürfte auch die Unannehmlichkeit solcher Schwingungen beruhen. Wird eine Federung zwischen Boden und Füße eingeschaltet, die weicher als die der Hautschichten ist, so wird sie die Deformationen übernehmen und die Empfindung schwächen.

Solch weiche Federung liegt bei schwellenden Teppichen vor. Vollkommener wird sie aber durch Riffelgummi oder Schwamm-

---

\*) Bosch, Stoßdämpfer mit silent Block.

gummi erreicht. Das Riffelgummi hat meist den Fehler, noch etwas zu hart zu sein, da die Rippen sich nicht genügend verformen.

Wie stark solche Schwingungen abgedämpft werden müssen, läßt sich nach den vorliegenden Versuchen noch nicht sagen. Während für Turbinen (Schwingungszahlen 1000 bis 3000 pro Min.) die Empfindlichkeitsgrenze zu etwa 0,002 mm Schwingungsweite angegeben wird, ist bei den Untersuchungen der Bodenerschütterungen die Beschleunigung als maßgebend angesehen worden, und andere glauben diese nochmals mit der Amplitude multiplizieren zu sollen, um eine geeignete Empfindlichkeitsskala aufstellen zu können. Bisher liegen verlässliche Ergebnisse jedoch nicht vor.

Die verschiedenen Versuchspersonen scheinen auch den Erschütterungen gegenüber von verschiedenartiger Empfindlichkeit zu sein, sowie die Stärke der Empfindung mit Frequenz und Amplitude variabel.

Da die raschen Vibrationen auch als ultrasonore Schallwellen aufgefaßt werden können, und die Nerven aller Körperorgane ähnlich arbeiten, so darf wohl ein Vergleich mit dem Gehör gewagt werden, das zur Aufnahme noch höherer Frequenzen dient. Es besitzt ausgesprochene Empfindlichkeitsbereiche, so daß eine Schwellwertskurve zu verzeichnen war. Ähnlich dürften daher auch hier die Verhältnisse liegen.

Führen Wände oder andere strahlungsfähige Teile rasche Schwingungen aus, so teilen sie sich der Luft mit und werden als Schall wahrgenommen. Es ist dazu nur notwendig, daß ihre Frequenz zwischen den Grenzen 900 und 1440000 S/min liegen. Sobald keine reinen Töne oder harmonische Summen solcher auftreten, werden die Schallschwingungen als Geräusch bezeichnet.

## § 7. Geräusche

Fast alle Wagen weisen Brummen und Knarren der Karosserie auf, oder Heulen und Schrillen, oft auch nur leichtes Singen der Zahnräder, Prasseln der Ventile, Klappern der Stößel, Dröhnen des Auspuffs und anderes mehr. Das sind alles Schwingungen, die nach Amplitude und Schwingungszahl nicht ohne weiteres der

Rechnung zugänglich sind. Dem Verlangen des Käufers auf Geräuschlosigkeit ist aber weitgehendst entgegenzukommen, so daß hier wenigstens die Störungsquellen aufzudecken und Mittel zur Beseitigung übermäßiger Belästigung anzugeben sind.

**Zahnräder.** Über Zahnräder und ihre Geräusche wurde bereits gesprochen. Sie entstehen stets dann, wenn die Räder mit veränderlichem Drehmoment belastet sind, das ein Wechseln der Anlageflanken zur Folge hat, z. B. bei Drehschwingungen. In direktem Gang wird daher in den kritischen Drehschwingungsgebieten nach einiger Abnutzung das Differential zum Singen neigen.

Herstellungsfehler, die in der Montage<sup>344</sup>) der Räder im Getriebe begründet sein können, oder im Schneiden der Zahnform<sup>346</sup>), lassen schrillende Töne entstehen. Sie haben ihre Ursache darin, daß die Flanken aufeinander mit hoher Geschwindigkeit gleiten, wobei meist das Öl fortgedrückt wird und entsprechend trockene Reibung mit rascher Abnutzung eintritt. Hier handelt es sich daher um Reibungsschwingungen. Ihre Stärke dürfte von der Größe der Fehler abhängen.

Bei der unrichtigen Herstellung ist nicht nur der Fräser zu beachten, sondern auch die Werkzeugmaschine selbst. Sie kann periodische Formfehler erzeugen, die dann Töne bestimmter Schwingungszahlen hervorrufen<sup>346</sup>).

Die Beseitigung geschieht auch hier durch Aufdecken der Ursachen. Sind die Ursachen behoben, so müssen die Folgen ausbleiben. Leider gelingt ihre Beseitigung aber nicht restlos. Genaues Herstellen der Räder, ihr Polieren oder Einlaufen, das saubere Einhalten der Achsabstände, das Fluchten der Achsen kann die Fehler nur verringern. Die Verwendung von Pfeilrädern, Schrägverzahnung (Maibach-Schnellgang-Getriebe), Innenverzahnung und Spiralverzahnung (beim Antrieb des Differentials) erscheint vorteilhaft. Der Weg ist aber nicht unter allen Bedingungen als zum Ziel führend anzusehen, da auch hier Spiel zu Geräusch führt.

Zu den Zahnradfehlern sind auch jene falscher konstruktiver Befestigung, wie sie besonders im Motorradbau angetroffen wird, hinzuzurechnen. Die Räder werden mit ihrem Zapfen oftmals nur einseitig in verhältnismäßig dünnen Wänden gelagert. Das Drehmoment verursacht ein Abbiegen des Zapfens und ein Durchbiegen

der Wand. Damit tritt ein Kippen der Radachse ein, das ein ungleichmäßiges Tragen der Flanken verursacht und den Schwankungen des Drehmoments entsprechend zu einem Vibrieren<sup>344)</sup> des Rades und der Wand führt. Die Wand wirkt dabei oft als Resonanzboden, besonders, wenn sich ihr gegenüber eine andere glatte Wand befindet.

Wegen der billigen Herstellung und aus Montagegründen können leider nicht alle Räder mit Schräg- oder Pfeilverzahnung ausgebildet werden. Zahnradgeräusche sind daher stets zu erwarten. Ihre Beseitigung kann in dreierlei Weise geschehen. Einmal kann durch eine geeignete Dämpfung das Geräusch so sehr vermindert werden, daß es nicht mehr wahrnehmbar ist, andererseits kann durch Ausnutzung von Reflexion<sup>359)</sup> das Geräusch auf einen besonderen Raum<sup>348)</sup><sup>349)</sup> beschränkt bleiben, und schließlich können besondere Materialien den Ton so umgestalten, daß er nicht mehr, oder jedenfalls nicht störend wahrgenommen wird.

Als wirksame Dämpfung hat sich die Verwendung geeigneter Schmiermittel dargeboten. Dickflüssige, zähe Öle haben die Eigenschaft, so stark an den Zahnflanken zu haften, daß sie bei nicht übermäßiger Belastung während der Dauer des Eingriffs sich nicht vollständig fortdrücken lassen. Sie füllen das Zahnspiel aus und gestatten nur eine verhältnismäßig langsame Annäherung der Flanken aneinander, so daß ein Zusammenschlagen vermieden wird. Der Anprall wird dabei so weit vermindert, daß es nicht mehr zur Bildung von Geräuschen kommt.

Die Beschränkung des Geräusches auf einen kleinen Raum geschieht durch Einkapseln der Räder in den Getriebekästen. Die Wände dieser Kästen reflektieren den Schall entsprechend ihrer Leitfähigkeit und verhindern dadurch sein Austreten nach außen. Die Reflexion ist nicht absolut und wird auch dadurch geschwächt, daß schalleitende Teile mit Chassisteilen und dergleichen in Verbindung stehen, führt aber doch zu meist ausreichender Schallverminderung.

Jedes Material besitzt einen besonderen Eigenklang. Tonhöhe, Stärke und Zeitdauer des Tönens sind verschieden. Stoffart und Homogenität sind bestimmende Faktoren. Zeigt z. B. Stahl einen lang hallenden hohen „Metallton“, so klingt Gußeisen bedeutend

dumpfer. Kunststoffräder zeigen „Holztöne“. Die Eigendämpfung des Gußeisens, seine Halldauer, ist kürzer als die des Stahles.

Forschungen auf dem Gebiet der Elektroakustik lieferten die Lautstärkenkurve Abb. 70, die angibt, welche Frequenzen das menschliche Ohr wahrzunehmen vermag und welche es bevorzugt. Dabei ist deutlich zu sehen, daß sehr tiefe Töne und sehr hohe nicht mehr gehört werden. Der Hörbereich ist allerdings bei einzelnen Versuchspersonen verschieden. Gemeinsam ist aber allen, daß tiefe Töne eine außerordentlich große Schallstärke benötigen für einen bestimmten Eindruck, während die hoher Töne oft verschwindend gering ist.

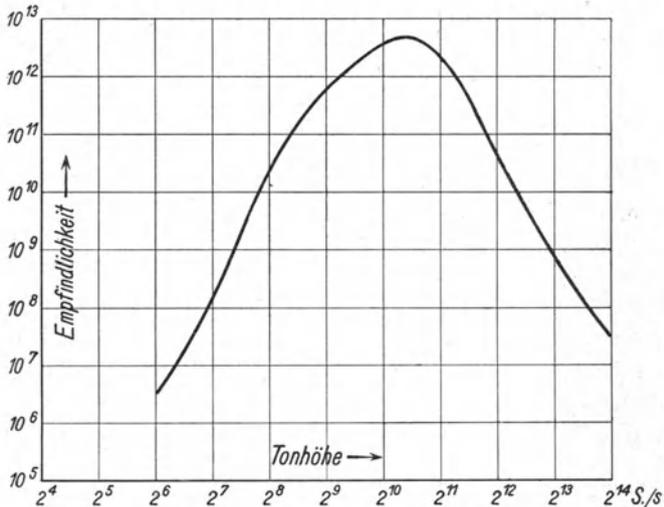


Abb. 70. Lautstärkenkurve

Aus der Kurve kann entnommen werden, daß bei gleicher Amplitude der Geräuschfrequenzen solche mit wesentlich tiefen Tönen oft nicht mehr oder kaum wahrgenommen werden, während hohe zu starken Belästigungen führen. Die Verwendung von Material mit tiefem Eigenton trägt also zur Verminderung der Geräuschempfindung bei. Das ist der Grund, warum Gußgehäuse, wenn sie zum Schwingen angeregt werden, weniger laut<sup>351)</sup> sind als solche aus Leichtmetall. Dabei muß allerdings zugegeben werden, daß auch die Dämpfungseigenschaften des Eisens größer sind.

Zweckmäßig wird die Geräuschwandlung nicht erst in den Gehäusen vorgenommen werden, die durch Erschütterungen angeregt sind, sondern am Entstehungsort der Töne selbst. Als gut dämpfend und nur wenig tönend hat sich dabei Zahnradmaterial aus Kunststoff bewährt. Bereits beim Anschlagen zeigt es einen dumpfen, rasch abklingenden Ton, der „hölzern“ klingt und nicht als unangenehm empfunden wird. Räder aus diesem Material haben noch die weitere gute Eigenschaft, daß sie sich mit wenig Spiel einbauen lassen und später während des Laufens der Form des mit ihm kämmenden Rades anschmiegen. Im Steuerungsgetriebe, wo die Festigkeitseigenschaften ausreichen, sind sie daher auch in großer Zahl anzutreffen.

**Resonanzräume.** Ein häufiger Fehler ist das Schaffen von Resonanzräumen<sup>362)</sup>. Vielfach wird zu anderen Zwecken das Kurbelgehäuse mit dem Schwinghebel oder Nockenwellenraum direkt verbunden, ohne Zwischenschaltung von Trennwänden. Damit ist dem Schall die Möglichkeit gegeben, sich nicht nur an den Nocken auszubilden, sondern auch durch „Resonanzbodenwirkung“, wie sie vom Geigenkasten her bekannt ist, auch die Wandungen des Kurbelgehäuses mit zu erregen und dadurch ein starkes Tönen zu veranlassen. Besonders flache oder kugelige Räume wirken schallverstärkend.

Als Gegenmittel wird versucht, Filz oder ähnliche Stoffe in die Konstruktionslücke einzufügen, da man diesen Stoffen schalldämpfende Wirkungen nachsagt. Der Versuch ist aber zum Scheitern verurteilt, da zwar diese Stoffe schallverzehrend wirken, also eine Verminderung der Amplitude herbeiführen, aber nicht verhindern, daß er trotzdem weitergeht. Die Schallverminderung hängt dabei wesentlich neben der Stoffart von der Dicke des verwendeten Kissens ab.

Ein Blick auf die Schalldämpfungstabelle<sup>363)</sup> zeigt, daß Filz, Gips und ähnliche Stoffe bei genügender Dicke geeignet sind, den Schall zu vernichten und ihn in Wärme umzuwandeln, während die Metalle schon in Form dünner Bleche fast den gesamten Schall reflektieren. Bei der vorliegenden Aufgabe ist ein Fernhalten des Schalles von den Räumen erforderlich, in denen er nicht entsteht, die er nur als Resonanzböden benutzt. Als zweck-

mäßigstes Gegenmittel erscheint hier die Reflexion, da sie mit dem geringsten Aufwand auskommt. Richtig angeordnete Trennwände sind daher von vornherein vorzusehen.

**Trennfugen.** Durch Weiterleitung des Schalles oder der Erschütterungen, die vom Motor oder von Getriebeteilen ausgehen oder von der Fahrbahn, kann die Karosserie ihrerseits zu Geräuschen erregt werden. Die Türen haben meist etwas Spiel, auch die aneinandergefügteten Teile des Aufbaues sind trotz sorgfältiger Herstellung nicht als in der ganzen Länge aneinanderliegend anzusehen. Sobald Erschütterungen eintreten, werden die Teile zu Eigenschwingungen angeregt und schlagen gegeneinander. Die Folgen sind Geräusche.

Entsprechend der Ursache sind sie durch Beseitigung des Spieles zu vermeiden. Eine Auskleidung der Fugen mit Filz ist an diesen Stellen keine ungewöhnliche Erscheinung. Der Filz drückt sich zusammen und dehnt sich wieder in derselben Weise, wie die Teile gegeneinander arbeiten. Leider ist Filz aber nur wenig elastisch, so daß er leicht versagt. Zweckmäßiger ist Gummi und wird bei allen besseren Fabrikaten als Fugenmaterial benutzt.

Das Verdeck stellt, besonders bei großen Omnibussen, eine nur wenig gewölbte Platte dar, die in allen Richtungen ziemlich gleichmäßig dick ist. Sie kann durch Schall und Erschütterungen jeder Art angeregt werden, da sich mit der Art der Erregung auch die Klangfigur ändert. Die „Klangfiguren“ sind Linien, die sich beim Schwingen nicht bewegen. Man kann sie leicht durch Aufstreuen von Sand sichtbar machen. Bei der Erregung des Verdeckes durch Erschütterungen, die z. B. vom Motor ausgehen, wird sich der anfangs gleichmäßig verteilte Sand von den rasch bewegten Teilen entfernen und an den Knotenlinien ansammeln und so die mit der Frequenz veränderlichen Klangfiguren bilden.

Das Schwingen des Verdeckes kann außerordentlich große Werte annehmen. Die dabei auftretenden Durchbiegungen sind oft mit bloßem Auge wahrnehmbar. Ihre Folge ist rasches Leckspringen und großer Verschleiß aller daran beteiligten Teile.

Zur Verminderung des Übelstandes kann das Verdeck aufgelöst werden. Auf verhältnismäßig starken Rippen wird dünnes Material befestigt, das nicht schwingungsfähig ist oder jedenfalls

nicht zu hörbaren Schwingungen neigt. Als solche Hüllstoffe kommen Leder, Kunststoffe, Gummi und andere in Frage. Zur Versteifung kann vorteilhaft ein Drahtmaschengitter herangezogen werden. Unzweckmäßig ist aber die Ausbildung des Verdecks in der Art, wie sie beim Waggonbau üblich ist und sich dort auch wegen der verhältnismäßig geringen Erschütterungsquellen bewährt hat. Dabei wird das Verdeck aus dünnen Holzlatten gebildet, die auf schwachen Rippen dicht beieinander liegen. Solche Verdecke werden schwer und haben eine tiefe Eigenfrequenz, die leicht mit den Bodenwellen resoniert. Sie bilden für den Schall einen nahezu homogenen Körper, in dem er sich gut fortpflanzen kann.

Die Motorengeräusche und Erzitterungen sowie die Stöße der Fahrbahn übertragen sich auf die Wände des Chassis und regen sie zu Schwingungen an. Selbst wenn sie wenig Eigenfrequenzen aufweisen, so sind sie doch nicht als schwingungsfrei anzusprechen. Durch Verringerung der Erregung und Dämpfung der Geräusche ist die Möglichkeit gegeben, von den Störungen freizukommen.

Die Motorgeräusche wandern durch seine Aufhängung an das Chassis, das sie weiterleitet und an die Karosserie abgibt. Eine Trennung von Motor und Chassis ist anzustreben. Sie erfolgt durch Verwendung von Gummi-, Kork- oder Filzunterlagen unter die Befestigungsstellen des Motors. Dabei muß darauf geachtet werden, daß nicht etwa die Ankerschrauben mit dem Chassis in Berührung kommen, da sonst eine Schallbrücke geschaffen wird.

Dieselbe Aufhängung läßt sich auch bei dem Aufbau verwenden. Auch er läßt sich durch solche geräuschemildernden Unterlagen vom Chassis abtrennen. Der Befestigung des Motors entsprechend kann auch die Aufhängung der Federn vorgenommen werden. Sie wird die mit hoher Frequenz erfolgenden Stöße kleiner Amplitude wesentlich mindern und damit ihre Fähigkeit, Geräusch zu erzeugen. Solche Aufhängungen sind in verschiedener Ausführungsform im Gebrauch.

In der Karosserie selbst läßt sich der Schall noch weiter vermindern. Die Auskleidung mit Stoffen dämpft einen großen Teil der Geräusche ab<sup>363</sup>), da sie beim Passieren dieser Schicht an Energie verlieren. Die Befestigung der Materialien erfolgt am zweckmäßigsten so, daß sie ähnlich wie in den Radio-Aufnahme-

räumen frei hängen und nicht durch Zwischenlagen fest mit der eigentlichen Karosserie verbunden sind. Eine dicke Hinterlegung würde nämlich einen Teil der Dämpfungseigenschaften wieder aufheben, indem der Stoff synchron und zwangsläufig mit der Karosserie schwingt.

**Triebwerk.** Die Motoren weisen neben Zahnradgeräuschen solche auf, die durch die Stößel oder den Auspuff erzeugt werden,

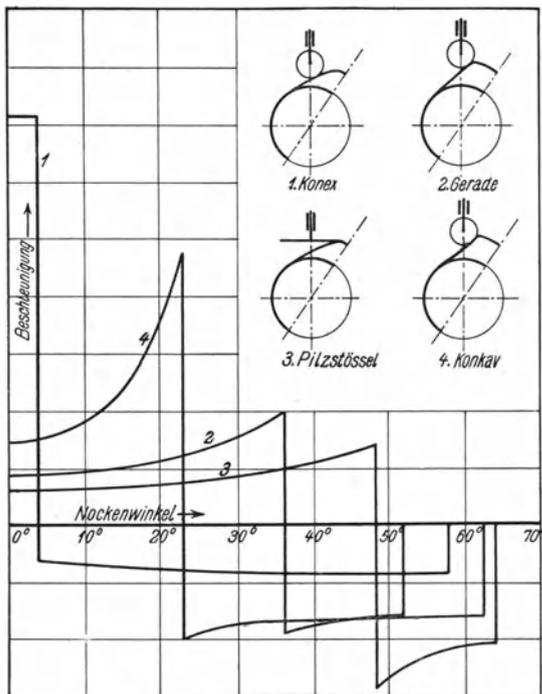


Abb. 71. Nockenbeschleunigung

und häufig das bekannte Klingeln oder Klopfen. Der Stößellärm ist besonders bei Motorrädern stark ausgeprägt und übertönt nicht selten das Auspuffgeräusch.

Die Ursache des Stößelgeräusches muß in dem Zusammenprallen von Nocke und Stößel während des Ventilspieles gesehen werden. Um ein sicheres Schließen des Ventils zu ermöglichen, ist es erforderlich, ein geringes Spiel zwischen Stößel und Nocken

zu haben. Wenn es auch nur wenige Zehntelmillimeter beträgt, so reicht es doch aus, bei der Geschwindigkeit des Vorganges einen Schlag eintreten zu lassen, der sich als Schall kundgibt. Die Stärke des Geräusches wird dabei von der Stärke der Erregung abhängen und der Beschleunigung der aufeinanderprallenden Teile entsprechen. In Abb. 71 sind die Beschleunigungskurven<sup>97)</sup> für die verschiedenen Nockenarten wiedergegeben. Sie zeigen deutlich, daß bei einem Spiel von 0,2 mm, das der Rechnung zugrunde lag, der Pilzstößel die größte Beschleunigung erfährt. Da er im Motorradbau meist verwendet wird, ist damit auch das stärkere Ventilgeräusch dieser Motorarten erklärlich.

Treten Drehschwingungen in der Kurbelwelle auf, so wird die Nockenwelle mit gedreht. Die Berechnungen der Nockenzeiten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen entsprechen dann nicht mehr der Wirklichkeit, nehmen vielmehr erheblich größere Werte an, da die Momentangeschwindigkeit der Nocken zunimmt. Sobald aber die Rechnungsgrundlagen nicht mehr gelten, kann auch die Ventilbewegung nicht mehr die gewünschte sein. Der Stößel fliegt von der Nocke fort und erzeugt beim Wiederaufsetzen ein schlagartiges Geräusch. Dasselbe kann mit dem Ventil eintreten, wie bereits besprochen. Als Abhilfe bietet sich nur eine Beseitigung der Ursache, der Kurbelwellenschwingung, durch Anbringung eines Dämpfers.

**Klopfen.** Das Klopfen ist eine eigenartige, noch nicht restlos geklärte Erscheinung. Sobald bei einigen Brennstoffen, zu denen vor allem das meist benutzte Benzin gehört, die Verdichtung einen bestimmten Grad überschreitet, läßt der Motor ein klingelndes oder hämmerndes Geräusch wahrnehmen. Der Ton scheint wesentlich durch die Form des Verbrennungsraumes bestimmt zu sein.

Da geringe Verdichtungsgrade einen hohen Brennstoffverbrauch bedeuten, ging das Streben nach einer Beseitigung der lästigen Erscheinung, die als den Bestand des Motors gefährdend angesehen wurde<sup>371)</sup>. Es wurden Mischungen von Brennstoffen versucht, die sich als klopfester erwiesen. Schließlich gelang es auch, durch Zusätze (Blei- und Eisenverbindungen) das Klopfen fast ganz zu beseitigen. Die Zusätze haben aber den Nachteil, nicht nur den

Betrieb zu verteuern und umständlicher zu machen, sondern sie können leicht auch gesundheitsschädlich wirken.

Die Untersuchungen von Ricardo<sup>373)</sup> wiesen darauf hin, daß die Form des Verbrennungsraumes<sup>372)</sup> in gewissem Zusammenhang mit der Erscheinung stehen muß, so wie die Vorgänge (Wirbelung), die während der Verdichtung eintreten. Die von ihm geschaffene Gestalt des Verbrennungsraumes vereinigt geringe Oberfläche mit guter Wirbelung und vermeidet das Klopfen weitgehend.

Die Aboag, Berlin, beschriftet einen anderen Weg. Sie versuchte trotz aller Warnungen den Betrieb mit klopfenden Motoren. Die befürchtete Abnutzung bzw. Zerstörung der Triebwerksteile blieb aus. Die Leistung ist zwar nicht dieselbe, wie Prüfstandsversuche zeigen, als wenn das Klopfen nicht vorhanden wäre, doch ist sie wegen der höheren Verdichtung besser als bei einer Einstellung ohne Klopfen.

Die Grundlosigkeit der Befürchtung großer Abnutzung zeigten Indikatordiagramme. Während das Geräusch auf ein heftiges Anschlagen des Kolbens gegen die Zylinderwände schließen läßt, was zu der Theorie der Ausbildung von Explosionswellen Anlaß gab, zeigten diese Diagramme einen geringeren Höchstdruck als bei klopfreiem Betrieb. Die Verbrennungsdauer erscheint sogar etwas verlängert (Abb. 72 und 73).

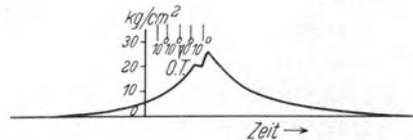
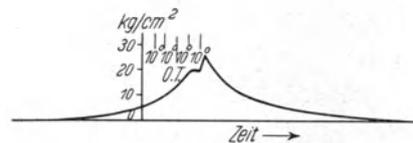


Abb. 72

Abb. 73  
Klopfendiagramme

Die Aufnahmen sind von verschiedenen Forschern<sup>167)</sup> mit verschiedenartigen Indikatoren gemacht worden. Sowohl Indikatoren mit punktwiser Aufzeichnung als auch solche, die das Schreiben ganzer Diagramme gestatten, wurden verwendet. Alle Aufnahmen zeigen deutlich, daß das Indikatordiagramm zwei Spitzen aufweist.

Die Lage der Spitzen zueinander und zum Totpunkt ist verschieden, je nach der Art der verwendeten Motoren und der Lage

der Entnahmestelle. Ist das Diagramm über der Zeit als Abszisse aufgenommen, oder wird es dahin umgezeichnet, so tritt deutlich eine Welle in die Erscheinung, die sich dem eigentlichen Diagramm überlagert. Sie beginnt schwach in der Nähe des Totpunktes, um im zweiten Berg einen erheblichen Wert anzunehmen, der mehrere Atmosphären betragen kann (Abb. 72). Die Frequenz dieser Welle liegt im Hörbereich und scheint von der Bauart des Motors bestimmt zu sein. Der Vergleich der Welle mit den Klopfgeräuschen mehrerer Motoren zeigte eine näherungsweise Übereinstimmung in der Schwingungszahl.

Die Übereinstimmung beider Frequenzen läßt darauf schließen, daß das Klopfen lediglich eine akustische Erscheinung<sup>377)</sup> ist, die ihre Ursache in heftigen Gasschwingungen hat. Die Ursache der Schwingungen dürfte in der Art der Zündungsausbreitung zu sehen sein, ist jedoch noch nicht einwandfrei bewiesen. Die Leistungsverminderung ist durch die Diagramme gleichzeitig erklärt. Die Gemischmasse verbrennt nicht in der gewünschten Zeit, sondern langsamer. Der klopfende Motor verhält sich demnach wie ein solcher mit Spätzündung. Hier ist aber die Minderleistung eine bekannte Tatsache.

**Auspuff.** Die Auspuffgeräusche entstehen beim Öffnen des Ventils. Die noch gespannten Gase im Zylinder finden plötzlich die Möglichkeit einer Entspannung. Während ein Teil der Gase als Druckwelle hinausgelangt, wird sich im Zylinder eine Unterdruckwelle ausbilden (Viellesche Welle) und die entgegengesetzte Richtung annehmen. Beide Wellen sind nicht völlig voneinander unabhängig und werden sich gegenseitig nach Reflexionen an den Wandungen überlagern.

Der Klang des Auspuffgeräusches ist verschieden, je nach der Größe des Zylinders und der Arbeitsweise der Auslaßorgane, sowie der zur Weiterleitung der Gase dienenden Kanäle. Größere Zylinder geben tiefere Töne. Vielzylindrige und hochtourige Maschinen weisen einen deutlichen Grundton auf, der sich nach der Zylinderzahl und Motordrehzahl richtet. Bei Motorrädern zeigt sich vielfach ein „Bellen“ des Auspuffes, das sich auf das Mitschwingen der Wände des Auspuffrohres<sup>382) 387)</sup> zurückführen läßt.

Bereits im Abschnitt über die Chassisschwingungen wurde gezeigt, daß ein Stoß, als welcher das Ausströmen der Gase aus den Zylindern anzusehen ist, stets die Eigenschwingung der angestoßenen Teile erregt. Wird das Auslaßventil angehoben, so gelangt eine bestimmte Gasmasse mit (durch die Spannung der Gase vor der Eröffnung) bestimmter Geschwindigkeit und Energie in die Auspuffleitung, die einen Gasschwinger vorstellt<sup>360</sup>).

Gasschwinger haben die Eigenschaft, sobald sie als gerade Röhre erscheinen, eine beliebige Anzahl von Eigentönen zu besitzen, die nur durch die Bedingungen an beiden Rohrenden beschränkt werden<sup>14</sup>). Ist ein Rohrende geschlossen, so wird es stets ein Schwingungsknoten sein, da hier keine Strömung stattfinden kann.

Die Rohrlänge stellt daher  $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \dots \frac{1+n}{4}$  Wellenlängen dar, wobei  $n$  eine willkürliche Zahl ist. Alle Wellen können angeregt werden, wobei diejenigen mit dem geringsten Aufwand unter den gegebenen Verhältnissen (Castigliano) am deutlichsten ausgeprägt sind.

Ist das Rohr doppelseitig geschlossen, so ist es ein Schwinger von  $n/2, n, \frac{3}{2}n \dots$  Wellenlänge. Als solche Schwinger können die von den Zylindern zum Sammelrohr verlaufenden Verbindungsstücke angesehen werden.

Die Auspuffleitungen mehrzylindriger Maschinen sind eine Kombination von beiden Schwingerarten, die miteinander gekoppelt sind. Ihre Eigenfrequenzen zu bestimmen, ist eine schwierige und undankbare Aufgabe. Es genügt zu wissen, daß sie zur Klangfärbung beitragen.

Erfolgt der Auspuff direkt ins Freie (Flugmotoren und Motorradmotoren älterer Art), so kann die Leitung vernachlässigt werden. Die Schwinger sind durch die Zylinder selbst gegeben. Die Stoßerregung besteht in dem Abströmen einer bestimmten Energiemenge, die an eine gegebene Masse gebunden ist. Da bei allen Untersuchungen über den Stoß (S. 96) nichts über seine Richtung gesagt wurde, ist auch dieser scheinbar negative Stoß in üblicher Weise als Erregung anzusehen. Da die Gase dem Zylinder entströmen, sich also im Ventil mit bestimmter Geschwindigkeit bewegen, muß der Zylinder als einseitig offener Schwinger betrachtet

werden. Seine Wellenlänge ist damit gegeben. Die Tonhöhe oder, was gleichbedeutend ist, die Schwingungszahl liegt jedoch nicht eindeutig über die ganze Ausströmperiode fest, da sich der Spannungs- und Temperaturzustand des Gases ändert und damit die Schallgeschwindigkeit. Die Schwingungszahl ist aber gekennzeichnet durch den Quotienten aus Schallgeschwindigkeit und Wellenlänge.

In den meisten Fällen kann von dieser Änderung, die nicht unbedeutend ist, in erster Annäherung abgesehen werden. Welcher Ton angeregt wird, hängt aber von der Art des Auspuffvorganges ab. Er bestimmt auch die Schallstärke. Der Vergleich der Kurven für die pro Zeiteinheit geöffneten Querschnitte für einen Vier- und einen Zweitakter ergibt, daß letzterer rascher große Öffnungen freigibt. Die Spannung ist entsprechend höher und damit die zu erwartende Schallstärke, was durch die Erfahrung bestätigt wird.

Bei der Aufnahme von Schwachfederdiagrammen (Abb. 74) zeigt sich meist eine Wellenbildung, sobald sich die Auslaßorgane geöffnet haben; sie ist eine Folge des besprochenen Vorganges. Die Wellenbildung ist verschieden, je nach der Belastung der Maschine. Das bestätigt, daß die Höhe der Auspuffspannung maßgebend für die angeregte Schwingung ist.

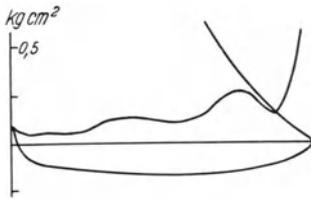


Abb. 74. Schwachfederdiagramm

Wird in die Auspuffleitung eine Drosselstelle eingebaut, die auch in einem langsamen Öffnen des Ventils gesehen werden kann, so wird ein Teil der Strömungsenergie in Wirbelung umgesetzt und vernichtet. Die parallele oder nahezu parallele Strömung geht in wirbelnde über. Sind ihr Schallschwingungen überlagert, so werden sie bis zu einem gewissen Grade gezwungen sein, sich diesem Zustand anzupassen. Sie löschen sich dadurch gegenseitig in hohem Maße aus. Ihre Stärke nimmt bedeutend ab.

Dieser Umstand wird zur Schalldämpfung ausgenutzt. Die Schalldämpfer oder Auspufftöpfe bestehen in der Regel aus einer großen Zahl von Prallwänden oder Drosselöffnungen, die die Gase

weitgehend in wirbelnde Bewegung versetzen. Als Ergebnisse\*) sind Kurven wie Abb. 75 und 76<sup>394)</sup> mit geeigneten Aufnahme-geräten zu ermitteln.

Die Schallreflexion auszunutzen, ist bislang noch nicht gelungen. Prallwände, deren eigentliche Aufgabe es sein sollte, den Schall zu reflektieren, versagen, da der Schall in der Strömung wandert, diese aber die Prallbleche in geeigneter Weise umgeht.

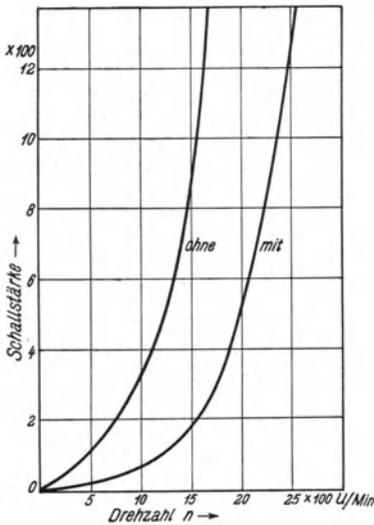


Abb. 75.

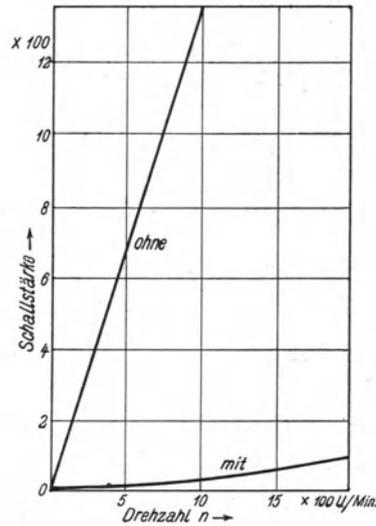


Abb. 76.

Schalldämpfungskurven bei verschiedenen Auspufftöpfen

Die Klangfarbe des Auspuffs ist häufig durch die Auspuffleitung bestimmt. Sie wird, wenn auch nur mit geringer Amplitude, aber doch sehr wirksam angestoßen und schwingt mit. Auf dieser Erscheinung beruht bekanntlich eine Reihe von Musikinstrumenten (Trompete usw.). Um solche oft recht lästigen Beimengungen zu vermeiden, wird das Auspuffende fischschwanzartig oder unregelmäßig ausgebildet. Jede symmetrische Form und gleichartiges Material schließen die Möglichkeit von Beimengungen starker Eigentöne ein.

\*) Zurzeit findet ein Schalldämpfer-Wettbewerb statt, der dieses Gebiet weiter klären wird.

Bei hoher Belastung und hoher Drehzahl der Motoren treten weitere Töne auf. Sie sind wesentlich durch das Produkt aus Zylinderzahl und Motordrehzahl in ihrem Grundton bestimmt. Ein Viertakt-6-Zylinder-Motor wird z. B. bei 3000 Umdr./min 150 Auspuffimpulse/s geben. Sie teilen sich der Umgebung mit, die entsprechend mit 150 S/s schwingt. Das ist ein tiefer, hörbarer Ton.

Was über den Auspuff gesagt wurde, gilt auch für das Ansaugen. Hier sind die Spannungen aber so gering, daß die entstehenden Geräusche\*) kaum wahrnehmbar bleiben. In anderer Weise kann aber eine Störung eintreten. Bei gegebener Form und Bauart des Ansaugrohres kann sich in ihm für eine oder mehrere gegebene Drehzahlen die Schwingung so aufschaukeln,

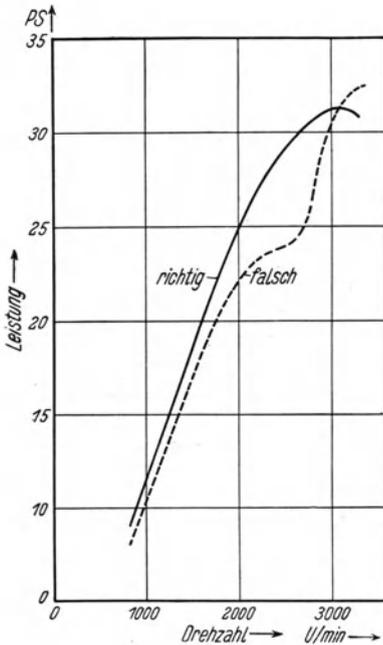


Abb. 77. Leistungskurven mit verschiedenem Ansaugrohr\*\*)

daß einzelne Zylinder überladen werden, andere zu wenig Brennstoff oder zu falscher Zeit erhalten. Ein deutliches Beispiel solcher Erscheinung ist Abb. 77. Hier zeigte sich beim Bremsen, daß die Leistungskurve eine Senkung aufwies, trotzdem die Höchstleistung des Motors noch nicht erreicht war.

Beim Auspuff kann etwas Ähnliches eintreten. Liegt die erregte Schwingung so, daß am Ende der Ventileröffnung die

Welle einen Unterdruck aufweist, so wird der Zylinder weiter entleert, als dem Normalzustand entspricht. Er wird leergesaugt. Das gilt wesentlich aber nur für einen kleinen Drehzahlbereich. Solche Erscheinung dem Auspufftopf zuzuschreiben (was oft getan wird), ist

\*) Der DKW-Wagen zeigt das deutlich.

\*\*\*) Aus den Mitteilungen des Instituts für Kraftfahrwesen der Technischen Hochschule Dresden, IV. Sammelband, S. 11.

aber abwegig, da es eine Schwingungserscheinung ist, die sich willkürlich mit schwingungstechnisch geeigneten Mitteln erzielen läßt ohne Verwendung eines Auspufftopfes.

**Schneidentöne.** Beim Öffnen und Schließen der Aus- und Einlaßorgane und an der Drosselklappe bei kleiner Belastung sind oft schlürfende oder schrillende Geräusche wahrzunehmen. Sie sind als Schneidenschwingungen anzusehen. Es bilden sich Wirbel aus, die sich in regelmäßigen Abständen ablösen und die Schneidkanten der genannten Teile zum Schwingen anregen, und damit auch deren Umgebung. Sie lassen sich nur durch Verwendung von Material, das kaum hörbare Eigenschwingungen aufweist, teilweise beseitigen. Das ist aber aus anderen Gründen nicht verwendbar.

**Reibschwingungen.** Bei raschem Einkuppeln, trockenen Belägen oder scharfem Bremsen sind schrille Töne wahrzunehmen<sup>353) 354)</sup>. Sie entstehen dadurch, daß sich z. B. die Bremstrommel zunächst bei Aufnahme der Belastung weiter in der Krafrichtung bewegt, als der Dehnung der Beläge durch die normale Bremskraft entspricht. Im nächsten Augenblick ist die dadurch entstehende Spannung so groß, daß Schlupf eintritt und die Trommel nun so weit zurückfedert, daß sie hinter der Gleichgewichtslage zurückbleibt. Das Spiel wiederholt sich mehrmals, ist also eine periodische Funktion der Zeit. Die entstehende Schwingung kann nicht als harmonisch bezeichnet werden, ist vielmehr pseudo-harmonisch, da sie sprunghaften Verlauf aufweist. Das Schwingen der Trommel teilt sich der Umgebung mit und ist als Geräusch wahrnehmbar.

Versuche, das Schreien der Bremsen zu vermeiden durch Einsägen der Trommel und damit durch Schaffung künstlicher Unstetigkeiten im Material, führten nicht zum Ziel. Da aber die Reibung die Ursache ist, muß ihre Größe der entstehenden Schwingung verhältig sein. Wird sie herabgesetzt, ist auch der Schall geringer. Die Verwendung von geringen Anpressungsdrucken und großen Bremstrommeln hat es bei modernen Wagen auf ein geringes Maß beschränkt.

Bei der Erscheinung spielt der Bremsbelag eine dominante Rolle. Je größer der Unterschied zwischen gleitender und ruhender

Reibung ist, desto schärfer wird das Schreien zu hören sein, da das Abreißen plötzlicher und bei höherer Spannung einsetzt als bei geringem Unterschied.

### § 8. Radflattern

Nicht nur das Fahrzeug selbst, sondern auch seine Einzelteile sind schwingungsfähig. Ihre Schwingungen machen sich oft so stark bemerkbar, daß sie das Fahren selbst gefährden. Vor allem gilt das von den als Flattern, Trampeln oder Shimmy bezeichneten Erscheinungen.

Sie bestehen darin, daß die Vorderräder gleichzeitig so einschlagen, als wenn der Wagen eine Kurve beschreiben sollte, ohne daß an der Lenkung eine Bewegung ausgeführt wäre, um den Einschlag zu verursachen. Das Einschlagen erfolgt bald nach der

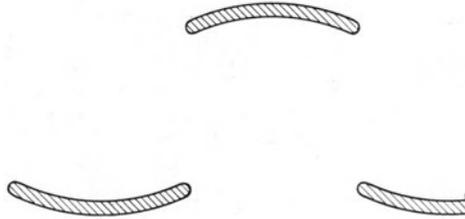


Abb. 78. Vorderradspur bei Shimmy

einen, bald nach der anderen Seite, so daß der Wagen in derselben Reihenfolge seitliche Stöße erhält. Betrachtet man die Spur eines Fahrzeuges bei starkem Flattern seiner Vorderräder, so wird sich häufig eine Spur zeigen, wie sie in Abb. 78 dargestellt ist. Die Räder verlassen abwechselnd den Boden und schweben für ein Stück<sup>400)</sup> in der Luft. Aus der Spur und auch aus Beobachtungen der Vorderachse selbst ist zu erkennen, daß sie starke Kipp-schwingungen ausführt. Zwischen ihnen und dem Flattern muß daher ein Zusammenhang bestehen.

Aus der Mechanik ist bekannt, daß alle Körper, die sich in Rotation befinden, als Kreisel aufgefaßt werden dürfen. Für die Räder müssen folglich Kreiselgesetze gelten. Sie drehen sich nämlich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um ihre Achse. Wird

ein Kreisel aus seiner Lage ausgelenkt, so antwortet er mit einer Drehung senkrecht zur Auslenkungsebene. Aus der Abb. 79 ist leicht ersichtlich, in welcher Art die Bewegung erfolgen muß. Sie stellt das Vektordiagramm der einzelnen Rotationen dar.

Ihr Aufbau ist in der Weise zu verstehen, daß jede Rechtsdrehung durch einen Pfeil angedeutet wird, dessen Spitze vom Nullpunkt fortzeigt. Bei Vorwärtsfahrt und Aufwärtskippen der Achse muß danach das Rad zu einer Linkskurve einschlagen.

Die vorgelegte Erscheinung setzt sich augenscheinlich aus der Kreiselwirkung und dem Schwingen der Achse zusammen<sup>418</sup>). Dabei

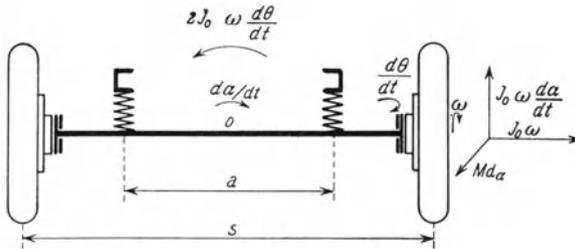


Abb. 79. Vorderachse und Kreiselvektoren

ist die Federung des Lenkgestänges zu berücksichtigen, da die Räder, wenn sie ohne Betätigung der Lenkung einschlagen, den Widerstand des Gestänges überwinden müssen, das dabei Durchbiegungen erleidet. Vor Berechnung der Schwingungszahl ist zunächst die Federung zu bestimmen, die bei der Kippschwingung und in dem Lenkmechanismus wirksam ist.

Bei der Federbestimmung sei zunächst die Wagenfeder fortgelassen. Jetzt ruht die Achse nur auf den Pneumatiks. Sobald sie eine Kippung erfährt, wird der eine Reifen entlastet, der andere mehr belastet. Bei einem Kippwinkel  $d\alpha$ , gleichem Gewicht der Vorderräder, also Drehpunkt in Achsmittle, der Spurweite  $s$  (Abb. 79) und der Federkennung der Reifen  $c_r$ , die über den betrachteten Bereich als linear verlaufend angesehen werden darf, ist die Reaktion des Reifens selbst:

$$P_r = c_r \cdot \frac{s}{2} \cdot d\alpha.$$

Das Rückstellmoment ist entsprechend

$$R_r = \frac{s}{2} \cdot c_r \cdot d \alpha \cdot s = c_r \cdot \frac{s^2}{2} \cdot d \alpha.$$

Für die Federung mit dem Mittenabstand der Federn  $a$  ist

$$P_f = c_f \cdot \frac{a}{2} \cdot d \alpha$$

und folglich

$$R_f = c_f \frac{a^2}{2} \cdot d \alpha.$$

Die Achse erfährt ein Rückdrehmoment, das sich aus beiden Teilen zusammensetzt. Es ist

$$R = R_r + R_f = \frac{1}{2}(c_r \cdot s^2 + c_f \cdot a^2) \cdot d \alpha.$$

Die Formel läßt ohne weiteres den außerordentlichen Einfluß der Reifenkennung auf die Schwingung ersehen. Die Spur ist erheblich größer als der Federabstand, da letztere aus konstruktiven Gründen zwischen den Rädern angeordnet sein müssen.

Die Größen  $c_r$  und  $c_f$  sind den entsprechenden Kennlinien zu entnehmen. Dabei ist  $c_r$  in Abb. 65 für die bekannteren Reifenarten zusammengestellt. Es könnte auf den ersten Blick erscheinen, als ob die Vollgummireifen einer besonderen Behandlung bedürften, da sie eine gekrümmte Kennung aufweisen. Ähnliches träfe auch für Wälzfedern zu. Bei der Bestimmung von  $c_r$  ist aber zu berücksichtigen, daß sich die Schwingung um eine Vorspannung abspielt, die durch die statische Belastung der Achse gegeben ist. Die Kennlinie ist daher nur in der Nähe des Punktes zu beachten, der dieser Vorspannung entspricht. Sie beträgt pro Rad zwischen 250 kg bei Rennfahrzeugen, bis zu 2500 kg bei Lastwagen.

Die Schwingungsamplitude kann für den zu betrachtenden Vorgang als verhältnismäßig klein angesehen werden, so daß das benutzte Stück der Kennlinie nur kurz ist und nur wenig von einem Mittelwert, der durch eine Gerade gegeben sei, abweicht. Eine Abweichung von 5 % bei Bestimmung von  $c_r$  oder, was dasselbe bedeutet, ein Abweichen der wirklichen Kennlinie von der genäherten um diesen Betrag verlagert die Schwingungszahl nur um 2,5 %. Eine so geringe Veränderung der Eigenschwingung während des Pendelns der Achse kann aber nach Geiger<sup>10)</sup> als vernachlässigbar angesehen werden.

Schwieriger ist die Bestimmung der durch das Lenkgestänge ausgeübten Reaktion. Sie hängt von der Ausbildung des Mechanismus und seinem Spiel weitgehend ab. Ebenso davon, ob die Lenkung reversibel ist oder nicht. Diese Federung der Lenkung wirkt in horizontaler Ebene und sei mit  $h_1$  bezeichnet. Ihr überlagert sich bei reversiblen Lenkungen ein stabilisierendes Moment, dessen Größe durch den Sturz des Lenkzapfens in der Wagenlängsebene  $\xi$  bestimmt wird und mit  $h_2$  benannt sei (Abb. 80).

Mit

$\omega$  Winkelgeschwindigkeit des Rades,

$r$  Radradius,

$\xi$  Lenkzapfensturz,

$P$  Fahrzeuggewicht,

$L$  Radstand,

$b$  Schwerpunktsabstand von Hinterachse,

$g$  Erdbeschleunigung,

$\theta$  Radeinschlag

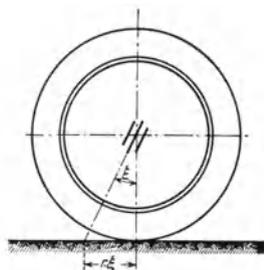


Abb. 80. Lenkzapfensturz

wird die Zentrifugalkraft  $Z$  abhängig von der Geschwindigkeit  $v$  und dem Krümmungsradius  $\varrho$ :

$$Z = \frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{\varrho},$$

oder da  $L = R \cdot \theta$ , solange kleine Winkel betrachtet werden:

$$Z = \frac{P}{g} \cdot \frac{\omega^2 r^2}{L} \theta.$$

Auf jedes der Vorderräder entfällt entsprechend der Schwerpunktslage ein Anteil. Er ist für beide, da sie dieselbe Haftung am Boden und denselben Aufbau sowie dasselbe Gewicht aufweisen, der gleiche. Die Querkraft ist

$$Q = \frac{Z \cdot b}{2 \cdot L} = \frac{P}{g} \cdot \frac{\omega^2 r^2}{2 \cdot L} \cdot b \cdot \theta$$

pro Rad.

Der Spurpunkt liegt um das Stück  $r \cdot \xi$  hinter der Achse des Drehzapfens, da  $\xi$  stets als kleiner Winkel ausgeführt wird. Das Rückdrehmoment ist entsprechend

$$R_1 = Q \cdot r \cdot \xi = \frac{P}{g} \cdot \frac{\omega^2 r^3}{2 \cdot L} \cdot \xi \cdot \theta \cdot b.$$

Das stabilisierende Moment eines Rades ist bestimmt durch

$$h_2 = \frac{P}{g} \cdot \frac{\omega^2 r^3 b}{2 \cdot L^2} \cdot \zeta.$$

Die gesamte Rückstellkraft ist entsprechend

$$h = h_1 + \frac{P}{g} \cdot \frac{\omega^2 r^3 b}{2 \cdot L^2} \cdot \zeta.$$

Die zugehörigen Eigenschwingungszahlen sind

$$\kappa_1^2 = \frac{R}{I_1}$$

und

$$\kappa_2^2 = \frac{h}{I_2},$$

wobei  $I_2$  das Trägheitsmoment des Rades um den Lenkzapfen und  $I_1$  das Trägheitsmoment der ganzen Achse, bezogen auf 0, ist. Beide liegen oft dicht beieinander. Der Wert  $h_1$  ist vielfach größer als  $h_2$ . Seine Ermittlung geschieht zweckmäßig experimentell, da bei der Rechnung verschiedene Gelenkverbindungen nur schwer zu erfassen sind.

Nachdem die fraglichen Bewegungen erkannt sind und ihre Grundfrequenzen berechenbar gemacht wurden, muß nunmehr die Berechnung der gekoppelten Eigenschwingungszahlen folgen. Beide Schwingungen sind miteinander durch die Kreiselwirkung verbunden<sup>406</sup>).

Bei einer Winkeländerung der Achslage um  $\frac{d\alpha}{dt}$  übt das Rad mit dem polaren Trägheitsmoment  $I_0$  eine Reaktion vom Betrage  $I_0 \omega \frac{d\alpha}{dt}$  aus. Das Kreiselmoment wirkt in gleicher Größe in der Ebene senkrecht dazu. Sein Wert ist folglich  $K_1 = I_0 \omega \frac{d\alpha}{dt}$ . Es versucht, die Räder einzuschlagen.

Erfolgt die Schwenkung des Rades um den Lenkzapfen mit einer Geschwindigkeit  $\frac{d\theta}{dt}$ , so entsteht ein Kreiselmoment  $K_2 = I_0 \omega \frac{d\theta}{dt}$ , das in der Richtung der Achsschwingung wirkt und sich ihr überlagert.

Die Betrachtungen gelten dabei für jedes der beiden Räder. Ihre Reaktionen liegen in derselben Richtung. Die Gesamtwirkung an der Achse ist daher die doppelte der angegebenen Größen.

An der Kippschwingung nimmt die ganze Achse teil. Die wirksamen Kräfte sind aus der Massenträgheit  $I_1 \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$  und aus der Kreiselwirkung  $2 I_0 \omega \frac{d\theta}{dt}$ . Ihnen wirkt die Rückstellkraft entgegen von der Größe  $R \cdot \alpha$ , so daß die Gleichung entsteht:

$$I_1 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 2 I_0 \omega \frac{d\theta}{dt} + R \cdot \alpha = 0.$$

Mit den gleichen Überlegungen läßt sich für die Schwingung des Rades um den Lenkzapfen finden:

$$I_2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} - I_0 \omega \frac{d\alpha}{dt} + h \cdot \theta = 0.$$

Wird als Lösung angenommen, daß  $\alpha$  eine Sinus- und  $\theta$  eine Cosinusschwingung vollführt, letzteres, da beide Schwingungen wegen der Kreiselwirkung um  $90^\circ$  gegeneinander verschoben sein müssen, so folgen die algebraischen Gleichungen

$$\begin{aligned} -\kappa^2 I_1 \cdot \alpha_0 - 2 \theta_0 \cdot \kappa \cdot I_0 \cdot \omega + R \cdot \alpha_0 &= 0, \\ -\kappa^2 I_2 \theta_0 - \alpha_0 \cdot \kappa \cdot I_0 \cdot \omega + h \cdot \theta_0 &= 0, \end{aligned}$$

wobei  $\alpha_0$  und  $\theta_0$  die Höchstwerte von  $\alpha$  bzw.  $\theta$  darstellen.

Sie gehen über in die Frequenzgleichung für  $\kappa$ :

$$\kappa^4 \cdot I_1 \cdot I_2 - \kappa^2 (R I_2 + h I_1 + 2 I_0^2 \omega^2) + R \cdot h = 0.$$

Früher wurden bereits die Eigenfrequenzen  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  der Teile ermittelt unter der Annahme, daß jeweils der andere Teil unbewegt wäre. Diese Werte gestatten die Umformung

$$\kappa^4 - \kappa^2 \left( \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2 \frac{I_0^2}{I_1 I_2} \omega^2 \right) + \kappa_1^2 \cdot \kappa_2^2 = 0.$$

Die gekoppelten Eigenfrequenzen sind:

$$\nu_1^2 = \kappa_1^2 + \frac{2 I_0^2}{I_1 I_2} \cdot \frac{\kappa_1^2 \omega^2}{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}$$

und

$$\nu_2^2 = \kappa_2^2 - \frac{2 I_0^2}{I_1 \cdot I_2} \cdot \frac{\kappa_2^2 \cdot \omega^2}{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}.$$

Diese genäherten Wurzelwerte gelten aber nur dann, wenn  $\kappa_1$  nicht mit  $\kappa_2$  zusammenfällt.

Die Ableitung vernachlässigte bisher die Nachgiebigkeit des Chassis und den Einfluß von Dämpfungen auf die Frequenzen. Die Nachgiebigkeit des Chassis äußert sich in einer Vergrößerung der Federung, also einer Verringerung von  $R$ , so daß die zugehörige Schwingungszahl verkleinert wird. In gleicher Richtung liegt auch die Wirkung der Dämpfung. Eine Erfassung der Nachgiebigkeit des Chassis ist theoretisch außerordentlich schwer, da sie von der Art des Rahmenverbandes und der Aufhängung des Motors sowie

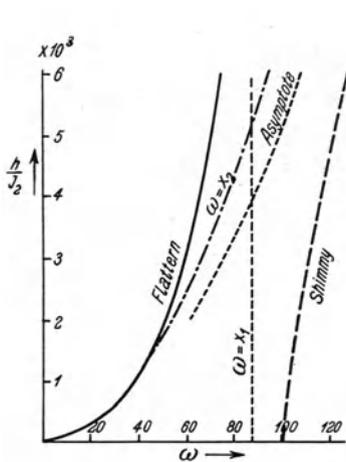


Abb. 81.

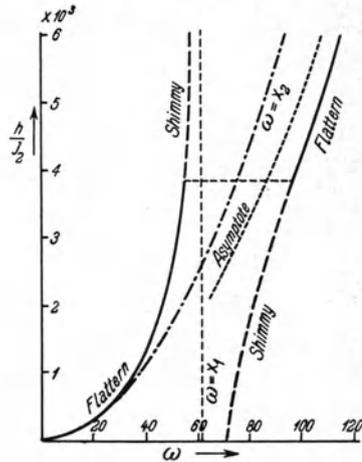


Abb. 82.

Flattern und Shimmy bei verschiedener Steifheit des Lenkgestänges

des Kühlers beeinflusst wird. Die errechneten Schwingungszahlen müssen als obere Grenzen der möglichen Schwingungszahlen angesehen werden. Die wirklichen Schwingungen liegen darunter.

Die Diskussion der Gleichungen liefert aber recht zufriedenstellende Ergebnisse. Mit ihrer Hilfe sind die Abb. 81 und 82 berechnet worden, die für einen bestimmten Wagen gelten bei Veränderung der Starrheit des Lenkgestänges. Sie zeigen, daß Flattern und Shimmy ineinander kontinuierlich übergehen. Unter Flattern sei dabei die Schwingungsart verstanden, bei der ohne wesentliches Schwingen der Achse die Räder hin und her pendeln, während Shimmy die Schwingungsart bezeichne, bei der heftiges

Auf- und Abpendeln der Achse bemerkt wird. Aus ihnen läßt sich weiterhin entnehmen, warum bei Einführung der Niederdruckreifen die als Shimmy bezeichnete Erscheinung erst störend auftrat. Bei Hochdruckreifen wird sie meist über der Betriebsdrehzahl liegen. Andererseits kann aber auch geschlossen werden, daß für sehr steifes Lenkgestänge kein Flattern wahrzunehmen ist, daß sich vielmehr ein Shimmy bei hoher Drehzahl ausbildet und das eigentliche Flattern erst bei nicht mehr benutzten Geschwindigkeiten eintritt.

Vielfach wird versucht, das Flattern durch Versteifen des Lenkgestänges zu beseitigen. An Hand der Formel und der Abbildungen läßt sich leicht angeben, was die Folge ist. Die Periode der Schwingungen wird verschoben, und eventuell entsteht aus dem Flattern ein Shimmy, wenn die Verstärkung ausreichend war.

Ähnlich liegen die Verhältnisse bei einer Federänderung<sup>400)</sup> zur Beseitigung des Shimmys. Lediglich die Periode ändert sich. Für Hoch- und Niederdruckreifen bei verschiedener Federstärke ist Abb. 83 entworfen worden. Die Kurven entstehen gemäß der Schwingungsformel bei verschiedener Starrheit des Lenkgestänges. Zum leichten Bestimmen des Einflusses der Bereifung sind die entsprechenden Ordinaten verzeichnet. Die Schwingungen sind also stets vorhanden und haben nur die Lage geändert.

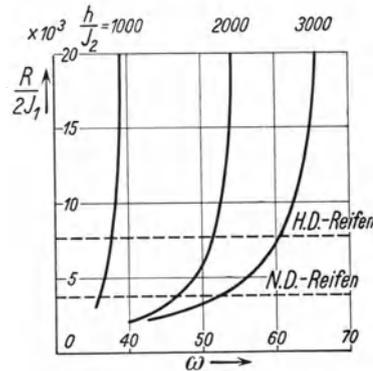


Abb. 83. Einfluß der Bereifung

Vierorts wird die Behauptung aufgestellt, daß eine Änderung des Lenkzapfensturzes das Flattern beseitigt<sup>414)</sup>, da dämpfende Kräfte durch diese Maßnahme zu erwarten wären. Sowohl der Versuch wie auch die Rechnung zeigen aber, daß auch diese Maßnahme nur eine Frequenzverschiebung bedeuten kann, aber keine restlose Beseitigung der Störung darstellt. Zum Zwecke der Veranschaulichung ist wieder für verschieden steife Lenkgestänge in Abhängigkeit vom Sturz die zugehörige Schwingungs-

zahl berechnet worden. Abb. 84 gibt die Ergebnisse an für das Flattern.

Die angeführten Darstellungen gelten wesentlich auch für die Untersuchung des Shimmys, doch finden sich andere Kurven (Abb. 85) bei Änderung des Sturzes. Die Kurven verlaufen asymptotisch zu einer Ordinate  $\xi = \sim 7,5^\circ$ . Sobald also der Sturz größer ist als

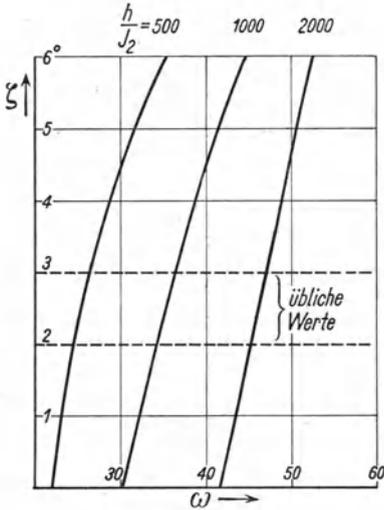


Abb. 84. Schwingungszahl, abhängig vom Sturz  $\zeta$  bei verschiedenen steifem Lenkgestänge

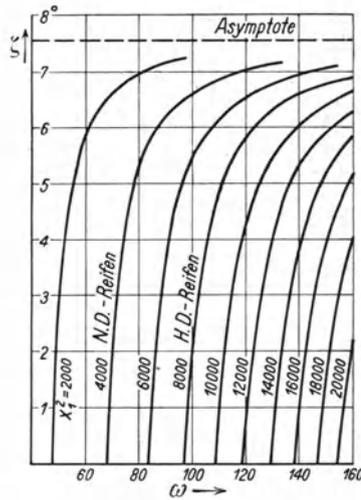


Abb. 85. Shimmy, abhängig vom Zapfensturz  $\xi$

dieser Winkel, wird das Flattern verschwinden. Leider ist aus fahrtechnischen Rücksichten eine solche Maßnahme nicht durchführbar.

Die Berücksichtigung der Elastizität des Chassis und seiner Masse fügt zu den bestehenden Gleichungen eine weitere simultane Differentialgleichung hinzu. Mit denselben Betrachtungen wie früher wird:

$$I_3 \frac{d^2 \beta}{dt^2} + e_1 \omega \frac{d \theta}{dt} + (R_f + R_s) \beta - R_f \cdot \alpha + h_3 \omega^2 \theta = 0,$$

$$I_1 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 2 I_0 \omega \frac{d \theta}{dt} + R \cdot \alpha - R_f \cdot \beta = 0,$$

$$I_2 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + I' \frac{d^2 \beta}{dt^2} - I_0 \omega \frac{d \alpha}{dt} + e \omega \frac{d \theta}{dt} + h \cdot \theta = 0,$$

mit  $I_3$  dem Trägheitsmoment des Chassis beim Rollen,  $\beta$  seinem Drehschwingungsausschlag,  $R_3$  seinem Federungsvermögen gegen Verdrehung,  $\omega$  der Winkelgeschwindigkeit der Räder vom Radius  $r$ ,  $\theta$  dem Flutterwinkel der Räder,  $\alpha$  dem Kippwinkel der Vorderachse,  $I_1$  dem Trägheitsmoment der Achse um 0,  $I_0$  dem polaren Trägheitsmoment des Rades,  $I' = \frac{M_v A b_1 r \xi}{2L} = \xi \cdot \frac{e_1}{2}$ ,  $e = \frac{b}{r} h_2$ ,  $I_2$  dem Trägheitsmoment des Rades um den Schwenkzapfen,  $R$  der Reaktion von Federn und Bereifung auf die Achse beim Kippen,  $h_3 = \frac{M_v A r^2}{L}$ ,  $h$  der Reaktion von Lenkgestänge und Zentrifugalkraft beim Flattern,  $M_v$  reduzierte Masse im Abstand  $A$  von der Trägheitsachse des Chassis,  $b$  dem Schwerpunktsabstand des Wagens von der Hinterachse,  $b_1$  dem Abstand der reduzierten Masse von der Hinterachse,  $L$  dem Achsstand,  $\xi$  dem Lenkzapfensturz.

Nach Einführen der bekannten Exponentialfunktionen lassen sich die Differentialgleichungen in sechs algebraische verwandeln:

$$\begin{aligned} A_1 R - A_2(R_f + R_3 - \kappa^2 I_3) - A_3 h_3 \omega^2 + B_3 e_1 \omega \kappa &= 0, \\ A_2 e_1 \omega \kappa - B_1 R_f + B_2(R_f + R_3 - \kappa^2 I_1) + B_3 h_3 \cdot \omega^2 &= 0, \\ A_1(R - I_1 \kappa^2) - A_2 R_f - B_3 2 I_0 \omega \kappa &= 0, \\ 2 A_3 I_0 \omega \kappa + B_1(R - \kappa^2 I_1) - B_2 R_f &= 0, \\ A_2 \kappa^2 I' - A_3(h - \kappa^2 I_2) - B_1 I_0 \omega \kappa + B_2 e \omega \kappa &= 0, \\ A_1 I_0 \omega \kappa + A_3 e \omega \kappa + B_2 \kappa^2 I' - B_3(h - \kappa^2 I_2) &= 0, \end{aligned}$$

mit der Determinante

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} R_f & -(R' - \kappa^2 I_3) & -h_3 \omega^2 & 0 & 0 & e_1 \omega \kappa \\ 0 & 0 & e_1 \omega \kappa & -R_f & R' - \kappa^2 I_3 & h_3 \omega^2 \\ R & -\kappa^2 I_1 - R_f & 0 & 0 & 0 & -2 I_0 \omega \kappa \\ 0 & 0 & 2 I_0 \omega \kappa & R - \kappa^2 I_1 & -R_f & 0 \\ 0 & \kappa^2 I' & -(h - \kappa^2 I_2) & -I_0 \omega \kappa & 0 & e \omega \kappa \\ I_0 \omega \kappa & 0 & e \omega \kappa & 0 & \kappa^2 I' & -(h - \kappa^2 I_2) \end{vmatrix}$$

worin  $R' = R_f + R_3$  ist.

Im Vergleich mit den anderen Größen sind  $R_f$ ,  $e \omega \kappa$ ,  $e_1 \omega \kappa$ ,  $\kappa^2 I'$ ,  $h_3 \omega^2$ ,  $I_0 \omega \kappa$  sowie auch die mit ihnen gebildeten Produkte sehr klein und können vernachlässigt werden. Die Gleichungen

lassen sich dadurch auf drei simultane zurückführen. Der Schwingungsausschlag bekommt die Form

$$x = A_1 \sin \pi t + B_1 \cos \pi t + A_2 \sin \pi t + B_2 \cos \pi t + A_3 \sin \pi t + B_3 \cos \pi t.$$

Die Lösung dieser Gleichungen wäre außerordentlich zeitraubend und würde gegenüber den früher behandelten nichts Neues bieten. Sie darf daher hier unterdrückt werden. Ein Weg, trotz-

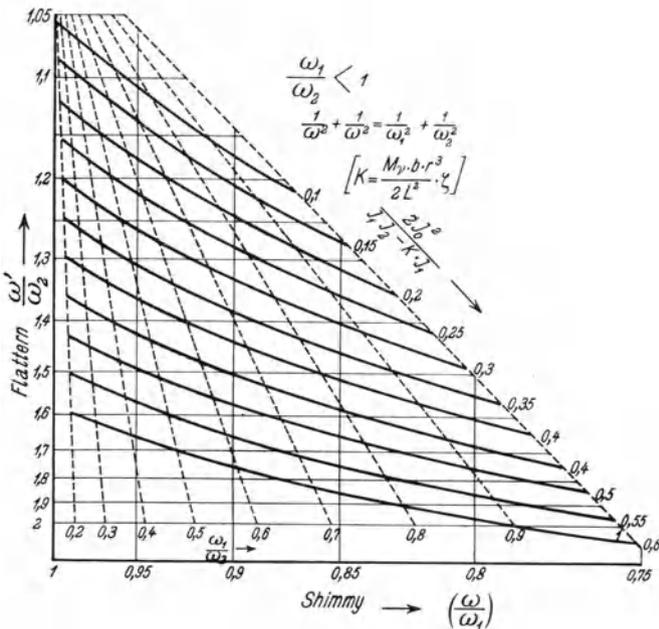


Abb. 86. Nomogramm für Flattern

dem zu einem besseren Ergebnis zu kommen, ist dadurch gegeben, daß, ausgenommen bei Resonanz gerade mit der Chassisschwingung, die Ausschläge dieses Elementes klein sein werden gegenüber den Bewegungen der anderen Teile. Die berechneten Schwingungszahlen behalten also ihre Gültigkeit in allen anderen Fällen.

Sobald die Drehzahl in die Nähe der Resonanz mit dem Chassis gelangt, kann andererseits wieder gesagt werden, daß eine der beiden anderen Schwingungen so gering ist, daß sie gegenüber den beiden ersteren vernachlässigt werden kann.

Zur Vermeidung von Rechenarbeit sind die Nomogramme Abb. 86 und Abb. 87 entworfen worden, gemäß den zuerst gemachten Ableitungen. Ihre Auswertung ist aus den Maßstabbenennungen leicht ersichtlich.

Bei der Behandlung der Fragen wurde stillschweigend das Fahrzeug selbst als nur geradeaus fahrend angenommen und die Reaktionen für diesen Fall ermittelt. Bei genauer Betrachtung liegt aber der Wagen beim Flattern und Shimmy, wie die Spur

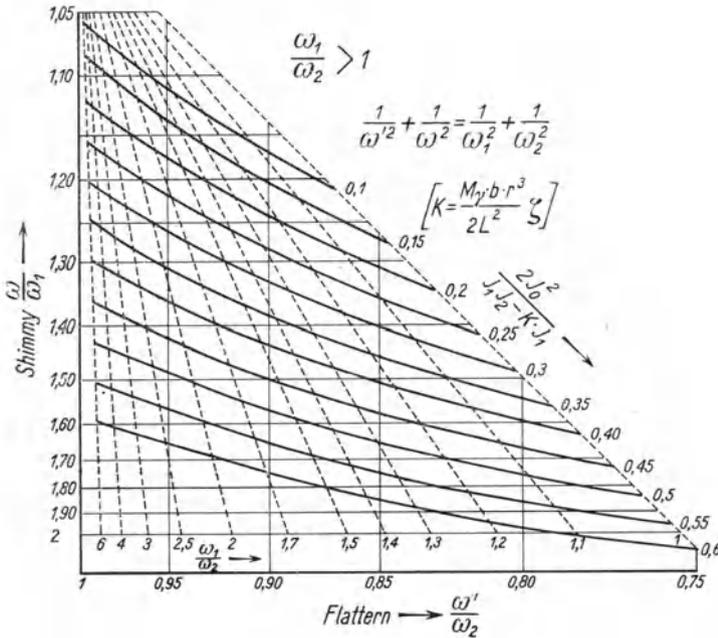


Abb. 87. Nomogramm für Shimmy

zeigt (Abb. 78, S. 150), ständig in kleinen Kurven. Dadurch entsteht ein neues Kreiselmoment, das als Erregung wirkt, aber die Perioden der Schwingungen nicht beeinflusst.

Ist die momentane Drehgeschwindigkeit des Fahrzeuges  $\Omega$ , die des Rades  $\omega$  und sein Trägheitsmoment  $I_0$ , so ist die Kreiselmomentkraft beider Räder  $2I_0\omega\Omega$ . Sie bewirkt bei Rechtseinschlag der Räder eine Kippung der Achse nach links. Ist der Einschlag klein, so kann für  $\Omega$  gesetzt werden:  $\Omega = \omega \frac{r}{L} \theta$ .

Die Differentialgleichungen der Bewegung lauten nach Berücksichtigung dieser Kreiselwirkung:

$$I_1 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 2 I_0 \omega \frac{d\theta}{dt} + R \alpha + 2 I_0 \omega^2 \cdot \frac{r}{L} \cdot \theta = 0,$$

$$I_2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} - I_0 \omega \frac{d\alpha}{dt} + h_2 \theta = 0.$$

Aus den Gleichungen läßt sich in der bereits geschilderten Weise die folgende finden:

$$\left[ \frac{(R - \kappa^2 I_1) (h - \kappa^2 I_2)}{2 I_0^2 \omega^2 \kappa^2} - 1 \right]^2 + \frac{\omega^2 r^2}{\kappa^2 L^2} = 0.$$

Sie ähnelt der bekannten, enthält aber ein Glied mehr und entsprechend imaginäre Wurzeln. Durch Umformung wird gefunden:

$$(\kappa_1^2 - \kappa^2) (\kappa_2^2 - \kappa^2) - \frac{2 I_0^2}{I_1 I_2} \omega^2 \cdot \kappa^2 + i \cdot \frac{2 I_0^2 \omega^3}{I_1 I_2} \cdot \kappa \cdot \frac{r}{L} = 0.$$

Die Gleichung enthält das imaginäre Glied  $i \cdot \frac{2 I_0^2 \omega^3}{I_1 I_2} \kappa \frac{r}{L}$ .

Es stellt eine Erregung dar. Als besonders beachtlich ist zu erwähnen, daß sie mit der dritten Potenz der Raddrehzahl, also auch der dritten Potenz der Fahrgeschwindigkeit wächst, ein Umstand, der bei der Schwingungsdämpfung berücksichtigt werden muß.

**Gegenmittel:** Flattern und Shimmy der Räder sind fahrtechnisch sehr unangenehme Erscheinungen, die zu Brüchen von Lenkungsteilen führen können und gelegentlich so stark auftreten, daß der Wagen nicht mehr auf der Straße gehalten werden kann. Zur Beseitigung dieses Mißstandes sind verschiedene Wege beschritten worden.

Die Wahl anderer Federn oder anderer Bereifung verlegt die Eigenschwingungen in andere Gebiete. Oftmals reicht das Mittel aus, die Störgebiete so zu verlagern, daß die bei hohen Drehzahlen eintretenden Schwingungen nicht mehr in den Bereich fallen, der zum Fahren verwendet wird. In gleicher Richtung liegen auch Versuche mit Massenänderung. Sie haben einen geringeren Einfluß, da der Raddurchmesser meist nicht abgeändert werden kann. Er aber bestimmt das Trägheitsmoment des Rades ausschlaggebend.

Eine Änderung des Lenkzapfensturzes hat einen geringen Einfluß auf die Schwingungszahl. Er ist jedoch vernachlässigbar, solange nicht ungebräuchlich große Werte angewendet werden, die sich aus lenktechnischen Gründen verbieten. Mit dem Sturz ändert sich gleichzeitig die Beanspruchung der Spurstange und dadurch gelegentlich das Spiel im Lenkgestänge und eventuell die Federgröße  $h_1$ , so daß auch hier eine Verlagerung der Schwingungszahlen als möglich erscheint. Die Wirkung ist ähnlich wie bei der bereits besprochenen Federungsänderung.

Bei Motor- und Chassisschwingungen wurde Vorteil aus der Anwendung von Dämpfern gezogen. Der Gedanke liegt nahe, sie auch hier auszunutzen. Bei ihrer Bestimmung ist auf die Art der Schwingungserscheinung zu achten, ob es sich um Flattern oder Shimmy handelt. Zur Beseitigung des Flatterns sind Dämpfer im Lenkgestänge<sup>401) 408)</sup> anzuwenden, während der Shimmy durch dieselben verringert werden kann, die auch die Schwingungen des Wagens vermindern.

Bei der Auswahl der Dämpfer ist, wie bei denen für die Fahrzeugschwingungen, zu beachten, daß sie auf verschiedenartigen Prinzipien beruhen. Reibungsdämpfer, Flüssigkeits- und Luftdämpfer müssen ihrer Wirkungsweise nach unterschieden werden.

Für den Reibungsdämpfer gilt wieder, daß die auftretende Schwingungsamplitude kleiner sein muß als die Dämpfung, da sonst der Vorgang sich bis zu beliebiger Größe aufschaukelt. Zu dieser Art der Dämpfung zählt auch die Reibung des Rades am Boden bei der Drehung um den Lenkzapfen. Die Änderung des Sturzes hat eine entsprechende Änderung des Reibungsweges und Momentes am Boden zur Folge, so daß diese Maßnahme oft zu einer Beseitigung des Flatterns führen kann.

Die Dämpfung der besprochenen Schwingungen ist um so schwieriger, als die Erregung, wie dargelegt, näherungsweise mit der dritten Potenz der Fahrgeschwindigkeit<sup>407)</sup> wächst. Hinzu kommt, daß bei geringer Amplitude, die zunächst vorliegen mag, die Dämpfung vielleicht ausreicht, daß sie aber bereits versagt, sobald ein plötzlicher Stoß oder eine Hindernisfolge sie so weit vergrößert, daß sie den Dämpfungswert überschreitet. Bei schein-

bar richtiger Bemessung der Dämpfung kann ein Schwingen mit wachsender Amplitude daher stets eintreten.

Das Flattern vollständig und unter allen Umständen zu beseitigen, dürfte eine mit den heutigen Mitteln nur näherungsweise lösbare Aufgabe sein. Das Shimmy und Flattern verschwinden aber sofort, sowie der den Ableitungen zugrunde liegende Materialzusammenhang aufgehoben wird. Das geschieht durch Wahl von einander unabhängiger Federung für beide Räder<sup>405</sup>). Die Vorderachse selbst fällt fort, und an ihre Stelle tritt eine Parallelführung der Räder, die mehr oder minder vollkommen sein kann (Abb. 88).

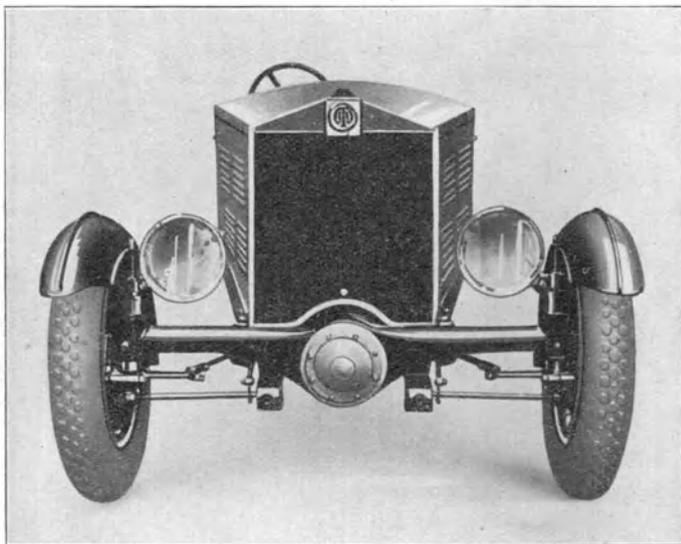


Abb. 88. Vorderachse als Teil der Chassis

Mehrere moderne Wagen weisen bereits solche Bauarten auf. Durch die Parallelführung der Räder wird ihr Kippen verhindert und damit das Entstehen von Kreiselkräften ausgeschaltet, die die Kopplung von Flattern und Auf- und Abbewegen bildeten. Bei der Berechnung der Radschwingungen ist es in diesem Falle ausreichend, sie als träge Massen anzusehen, die sich durch Federn gegen eine mehr oder minder elastische Masse abstützen. Ein Beispiel der Ausführung der unabhängigen Federung ist in Abb. 88 gegeben. Sie ist eine gute Näherungslösung im Sinne des Problems.

Federungen dieser Art haben in der Praxis gute Ergebnisse gezeitigt. Sie können nicht als absolute Lösungen bezeichnet werden, da das Chassis selbst Verdrehungen bzw. Drehschwingungen auszuführen vermag. Auch sind die angewendeten Parallelführungen der verschiedensten Art meist unvollkommen, so daß geringe Kippungen der Räder möglich sind. Sie verursachen Kreiselkräfte, die eine Drehung der Räder in der horizontalen Ebene bewirken und damit sekundär eine Art Flattern erzeugen können. Da aber die Kreiselkräfte nicht die besprochene Kopplung bilden, so kann Shimmy nicht mehr eintreten.

### § 9. Fahrzeug und Fahrbahn

Bereits bei den Chassisschwingungen wurde die Fahrbahn im Zusammenhange mit dem Fahrzeug betrachtet. Sie bildete die Erregung für das Fahrzeug und seine verschiedenen Schwingungen. Wenn die Fahrbahn das Fahrzeug beeinflusst, so ist auch die Rückwirkung des Fahrzeuges zu erwarten, da beide ein kraftschlüssiges System bilden. Kräfte, die am Reifenumfang wirken, sind auch solche, die den Boden beanspruchen.

Bei ideal glatter Straße wird das Rad so auf ihr abrollen, daß der Raddruck unverändert bleibt und dem statischen Druck entspricht. Sobald jedoch die geringsten Wellungen vorliegen, bedingen sie ein Anheben des Rades, das sich hinterher mit vergrößertem Druck wieder aufsetzt. Es bilden sich Schwingungen aus, die sich dem statischen Druck überlagern.

Bei den Chassisschwingungen war erwiesen worden, daß die Fahrzeuge wesentlich zwei Eigenfrequenzen haben. Die niedrige entspricht der Federschwingung, die höhere dem Schwingen der ungefederten Massen mit der Bereifung. Die Erregung der tiefen Eigenfrequenzen mit Schwingungszahlen zwischen 70 und 120 S/min erfordert sehr lange Wellen. Sie liegen für den Resonanzfall zwischen 7 m und 4,3 m für den Anhub der Räder bei 60 km/h Fahrgeschwindigkeit.

Solche Wellen bilden sich auf Straßen mit weicher Decke leicht aus. Avus und Heerstraße sind Beispiele dafür. Sie sind auf diesen Straßen besonders stark ausgeprägt, da meist Fahr-

zeuge gleicher Art mit fast denselben Geschwindigkeiten über sie dahingleiten.

Die Entstehung der Wellen muß als eine Art von selbst-erregter Schwingung aufgefaßt werden. Der Mechanismus ihrer Bildung dürfte etwa der sein, daß sich zunächst irgendeine Welle in der Straßendecke befindet, deren Entstehung ohne Bedeutung sein mag. Fährt ein Fahrzeug darüber, so wird die Federung gespannt, sie nimmt Energie auf und setzt sie auf dem Rücken der Welle wieder in Geschwindigkeit um. Mit endlicher Geschwindigkeit prallt die Masse des Rades auf den Boden. Ihr Stoß wird zwar etwas durch die Bereifung gemildert, doch tritt stets eine Erhöhung des Raddruckes über den statischen Druck ein.

Der erhöhte Druck tritt praktisch immer wieder an derselben Stelle auf, so daß diese von allen Straßenteilen am meisten beansprucht wird und schließlich nachgibt. Hinter der Welle bildet sich so eine Mulde aus, der wieder ein Wellenberg folgen muß, da der hintere Rand der Mulde das Rad nach oben ablenkt. Ist also eine Welle erst einmal vorhanden, wird sie stets wachsen, sich vermehren und vertiefen. Dabei kann es gleich bleiben, ob die Betrachtung vom Wellental oder Wellenberg ausgeht. Im Effekt kommt dasselbe heraus.

Die Wellung wird um so leichter eintreten, je weniger die Straßendecke der normalen mittleren Belastung gewachsen ist. Als mittlere Belastung muß dabei die wirkliche angesehen werden, die durch Überladen der Fahrzeuge (oft bis 40% über die gesetzlichen Vorschriften) entsteht. Sie wird oft genügen, eine Senkung einzelner Straßendeckenteile zu bewirken. Eine solche, wenn auch an sich geringe Senkung ist jedoch ausreichend, die Wellung einzuleiten.

Die Bereifung muß den Stoß der ungefederten Massen auffangen und an dem Boden weiterleiten, und ist daher von wesentlichem Einfluß auf den Schwingungsvorgang und auf die Beanspruchung der Straße. Auf dem Prüfstand wurde diese Tatsache von Becker<sup>277</sup>) experimentell untersucht, indem er auf der Trommel des Wagenprüfstandes ein Normalhindernis befestigte und unter gleichen Bedingungen dieselbe Achse mit verschiedener Bereifung darüberlaufen ließ. Die Ausschläge der Achse sind in Abb. 89 wiedergegeben.

Die Abb. 89 läßt erkennen, wieviel besser ein Luftreifen zur Aufnahme von Stößen<sup>277)</sup> geeignet ist als z. B. der P. T.-Vollreifen. Die Wellung der Straße tritt daher um so rascher ein, je unelastischer die Bereifung ist.

Aus der Berechnung der Länge der Wellen ist zu erkennen, daß die Geschwindigkeit der Fahrzeuge zum Zustandekommen der Wellen immer näherungsweise dieselbe sein muß, wenn die Federung eine gegebene Schwingungszahl aufweist. Oder es muß Schwingungszahl mal Geschwindigkeit eine Konstante sein. Je

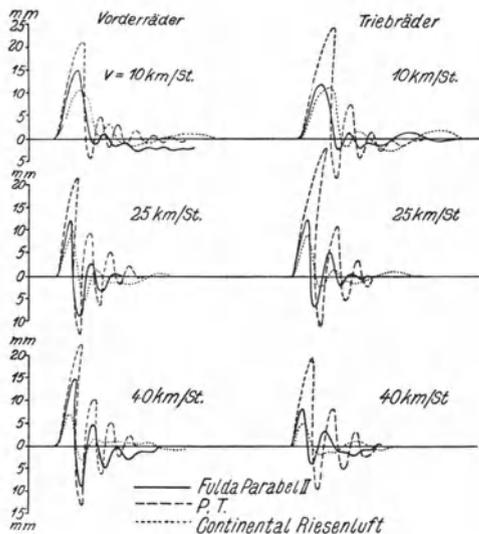


Abb. 89. Hubhöhe der Achse abhängig von der Bereifung

verschiedenartiger die Geschwindigkeit der aufeinanderfolgenden Fahrzeuge ist, desto weniger Neigung zur Wellung wird die Fahrbahn zeigen.

Je länger eine Straße ist und je gerader sie verläuft, desto eher werden die Geschwindigkeiten der Fahrzeuge einander gleich sein und sich der Fahrzeughöchstgeschwindigkeit nähern, desto eher wird auch die Wellung bemerkt werden.

Zur Schonung der Fahrbahn ist vorteilhaft ein weicher Luftreifen zu verwenden, da er bei Stößen die geringsten Veränderungen

des statischen Druckes der Fahrzeuge zu verzeichnen hat. Außerdem ist für ein rasches Abklingen der eingeleiteten Schwingung Sorge zu tragen, damit die entfernteren Straßenteile geschont werden. Dazu ist eine Schwingungsdämpfung erforderlich. Die Dämpfung, richtige Ausführung vorausgesetzt, erhöht also nicht nur die Fahrbequemlichkeit, sondern schont gleichzeitig die Straßendecke.

Befindet sich ein Stein, ein Gullydeckel oder ein Loch in der Fahrbahn, die rasch überfahren werden, so wird die Feder-schwingung nur wenig angeregt, da die Erregung dem Gebiet über der Resonanz entspricht, es wird vielmehr in der Hauptsache die Bereifung zum Auffangen des Stoßes herangezogen, so daß die ungedephten Massen zum Schwingen kommen.

In ähnlicher Weise, wie eben geschildert, nur mit höherer Frequenz, bilden sich Schwingungen aus, die die Bodenpressung erhöhen und damit zur Zerstörung der Fahrbahn in kurzen Wellen beitragen. Daher ist verständlich, daß nach dem erstmaligen Auftreten eines einzelnen Loches in der Fahrbahn sich recht regelmäßig ganze Schlaglochreihen anschließen, und daß sich hinter jedem Gullydeckel Wellen im Boden befinden.

Auch hier gilt, daß die Bereifung, die Geschwindigkeit des Überfahrens des Hindernisses und die Festigkeit der Fahrbahn-decke eine entscheidende Rolle spielen. Erst nachdem die Zer-störung einigen Umfang angenommen hat und sich damit die Anfangsbedingungen an der Ursache geändert haben, verlieren die Schlaglochreihen die Regelmäßigkeit in den Lochabständen.

Die Messung der Fahrbahnbeanspruchungen bei Stößen erfolgt auf drei verschiedenen Wegen. Sie kann mit dem Seismographen, dem Beschleunigungsmesser und auf dem Prüfstand selbst durch den Ausschlag der Achsen beim Überfahren eines Hindernisses erfolgen.

Die Messung auf dem Prüfstand benutzt den Weg<sup>277)</sup> der Achse als Maß für die Güte des Reifens. Der Weg ist das Integral der Beschleunigungen über einen bestimmten Zeitabschnitt, so daß unter gleichen Zeitverhältnissen auf die Beschleunigungen geschlossen werden kann. Der Vergleich der Sprunghöhen gibt daher ein leicht bestimmbares Maß für die Reifengüte. Zu beachten ist aber, daß die Messungen weit genug aus den Resonanzgebieten

erfolgen müssen, da sonst die einsetzende Phasenverschiebung jede Messung erheblich fälschen kann.

Sicherer sind die Ergebnisse des Beschleunigungsmessers<sup>425</sup>). Er wird auf den ungedephten Massen aufgebaut und mißt die Beschleunigungen dieser Teile. Er beruht darauf, daß eine gegebene Masse mit einer bestimmten Federkraft gegen einen Kontakt drückt und sich von ihm löst, sobald durch Massenwirkung eine solche Gegenkraft ausgelöst wird, daß die Vorspannung überschritten wird. Die Anordnung vieler solcher Meßelemente gibt die Möglichkeit einer feinen Abstufung und einer entsprechend genauen Ermittlung der Beschleunigungen.

Der Beschleunigungsmesser läßt sich sowohl auf dem Prüfstand als auch auf der Fahrbahn anwenden. Stets ist der Meßort die ungedephte Masse. Hierin liegt aber auch eine Fehlerquelle. Wäre die Bereifung masselos und das Rad selbst vollkommen starr, so könnte die Messung unter allen Umständen als richtig angesehen werden. Da aber die Bedingungen nicht erfüllt sind, so können auch die Ergebnisse nur als gute Näherungen bezeichnet werden. Sie sind um so weniger zuverlässig, je rascher die Stöße erfolgen.

Die Stoßzeit spielt nämlich hier die Rolle für die Bereifung wie vorher bei der Amplitudenmessung für die Kombination Reifen-Rad. Erfolgt nämlich der Stoß sehr rasch, z. B. bei hoher Geschwindigkeit auf Kopfplaster, so wird der Reifen einen Teil des Stoßes durch Wirkung seiner Eigenmasse verzehren. Die Bereifung weist nämlich ihrerseits eine Reihe von Eigenfrequenzen auf, die sich aus der Elastizität des Materials und seiner Masse berechnen lassen. Kommt hier die Stoßzeit in die Nähe einer Reifenresonanz, so muß eine Fälschung der Ergebnisse die Folge sein.

Als indirekte Messung ist die seismographische zu erwähnen. Jeder Stoß gegen einen Körper, der nicht als vollkommen plastisch anzusehen ist, wird ihn zu Eigenschwingungen anregen, wie früher erwiesen. Der Boden ist nun für kleine Stöße meist als hinreichend elastisch anzusehen, um selbst erzwungene Schwingungen auszuführen. Ihre Messung muß also ein Maß sein für die ausgeübten<sup>416</sup>) Stöße.

Ähnliche Apparate, wie sie in der Erdbebenforschung verwendet werden, sind auch für den Gebrauch auf Straßen ausgebildet

worden. Sie verzeichnen die Amplituden der Bodenbewegung in Abhängigkeit von der Zeit (Trommeldrehung). Die Vergrößerung der Massenausschläge in den Geräten kann optisch oder mechanisch erfolgen, wobei die Optik den Vorzug größerer Genauigkeit besitzt. (Als reine Amplitudenmesser auch Vibrometer genannt.)

Messungen dieser Art können den wirklichen Stoß nur durch Extrapolation der Abklingkurven mit der Entfernung ergeben, da eine Messung an der Stoßstelle selbst unmöglich ist. Die Messungen der eigentlichen Stöße sind zudem mit der Unzuverlässigkeit behaftet, daß der Boden nicht an allen Stellen gleichartig ist, und daß sich vor allem die Straßen sehr verschieden verhalten, so daß nur beschränkte Vergleichsmöglichkeiten gegeben sind. Zur Bestimmung der Stoßhaftigkeit der Straßen und der Reifengüte sollten sie daher nicht verwendet werden.

Gelegentlich ist auch versucht worden, den Stoß dadurch zu ermitteln, daß ein Stauchzylinder<sup>432</sup>) von der Art eines gewollten Normalhindernisses auf die Fahrbahn gelegt wird, um aus seiner Zusammendrückung den Stoß zu ermitteln. Hierbei macht sich aber das Nachgeben des Körpers als unbestimmte Dämpfung geltend.

Die Erschütterungen der Fahrbahn durch das Fahrzeug haben nicht nur Beanspruchungen des Fahrzeugs und der betreffenden Fahrbahnstellen zur Folge, sondern auch die Beeinflussung entfernter Gegenstände, wie Gebäude. Die Erschütterungen klingen, wie mit dem Seismographen leicht nachgewiesen wird, etwa nach einer logarithmischen Funktion ab, deren Exponent von den Eigenschaften der Straße abhängt. Sobald aber einzelne Gebäudeteile oder Gegenstände (z. B. Fensterscheiben) in Resonanz mit den Bodenschwingungen treten, kann ein Aufschaukeln eintreten, das die Erschütterungen wahrnehmbar und störend macht.

Die Weiterleitung der Bodenerschütterungen ist oft so gut, daß selbst festgestellt werden kann, ob ein bergab fahrender Omnibus die Reibungs- oder die Motorbremse benutzt. Die einzelnen Stöße der Motorbremsung scheinen sich auszuprägen.

Über die Schädlichkeit der Erschütterungen liegen eingehende Untersuchungen zurzeit noch nicht vor, so daß es nicht möglich ist, anzugeben, welche Erschütterungen die Gebäude noch aushalten

können. Der Vergleich der Seismogramme mit Erdbebenaufzeichnungen würde bei der üblichen Art zu Unzuträglichkeiten führen.

Zur Abwendung der unzutraglichen Erschütterungen muß also gefordert werden: eine möglichst weiche Bereifung, möglichst glatte Straßen und das Entfernen von Hindernissen aller Art.

Erwähnenswert sind in diesem Zusammenhange die Dreiaxser und die Wagen mit Schwingachse. Bei den Schwingachsen ist die ungefederte Masse klein, so daß die Stöße selbst klein werden, da sie fast ausschließlich von ihr abhängen. Beim Dreiaxser findet sich noch der Vorteil, daß die Hinterräder geringen Abstand voneinander haben, und daß damit das hintere Rad die durch das vordere eingeleitete Wellung teilweise wieder rückgängig macht. Beide Bauarten schonen daher die Straßen und die angrenzenden Gebäude.

## Quellenangaben

### Schwingungstheorie

- 1) Auerbach, F. und W. Hort, Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, Bd. 5. Verlag Barth.
- 2) Broglie, L. de, Sur la nouvelle mécanique ondulatoire et les travaux de Schrödinger. Journ. d. Phys. et Radio 1926, Nr. 6, S. 96.
- 3) Brauchitsch, E. v., Berechnung der Eigenschwingschnellen zusammengesetzter Wellenleitungen. Diss. Darmstadt, 1923.
- 4) Brillouin, L., La mécanique ondulatoire de Schrödinger une méthode générale de résolutions par approximation successive. C. R. 1926, S. 124.
- 5) Deutsch, W., Über eine bemerkenswerte Beziehung zwischen zwei technischen Aufgaben. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1914, S. 568.
- 6) Fischer, C., Schülerübungen zur Formel für die Schwingungsdauer eines Schwingers. Zeitschr. f. Unterricht 1925, S. 274.
- 7) Fischer, C., Erklärung der Kopplungsschwingungen. Zeitschr. f. Unterricht 1925, S. 173.
- 8) Föppl, Bd. IV. Drang und Zwang.
- 9) Füssli, O., Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. A. Trefftz, Kongr. f. techn. Mechan. 1926 (Auszug). Verlag Zürich.
- 10) Geiger, Mechanische Schwingungen. Verlag J. Springer, Berlin.
- 11) Gumbel, Die graphische Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Anwendung auf die Schwingungslehre. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1919, S. 771, 802.
- 12) Gumbel, Verdrehungsschwingungen eines Stabes mit fester, zur Drehachse symmetrischer Massenverteilung unter dem Einfluß beliebiger harmonischer Kräfte. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1912, S. 1025.
- 13) Holzer, H., Die Berechnung der Drehschwingungen und ihre Anwendung im Maschinenbau. Verlag J. Springer, Berlin.

- 14) Hort, Dr. W., Technische Schwingungslehre. Verlag J. Springer, Berlin.
- 15) Kutzbach, K., Untersuchungen über Wirkung und Anwendung von Pendeln und Pendelketten im Maschinenbau. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1917, S. 917. Sonderdruck: Fachgebiet Mechanik.
- 16) Kutzbach, K., Gemeinsame Probleme im Maschinenbau. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1915, S. 849, 890, 918.
- 17) Lohmann, Harmonische Analyse. Verlag Fischer, Berlin.
- 18) Meissner, E., Schrittweises Integrieren der Schwingungsgleichung für erzwungene Schwingungen. Schweiz. Bauztg. 1913, S. 199.
- 19) Ollendorf, F., Erzwungene Schwingungen im angefachten System. Arch. f. Elektrot. 1926, S. 283.
- 20) Routh, Die Dynamik der Systeme starrer Körper. Leipzig 1898. S. 79.
- 21) Schröder, A., Zusammenhang der Indikator- und Drehkraftdiagramme von Zweitakt-Dieselmotoren mit den Drehschwingungen ihrer Wellen. Diss. Berlin, 1926; Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1927, S. 363.
- 22) Schneider, E., Mathematische Schwingungslehre. Verlag J. Springer, Berlin.
- 23) Sommerfeld, Beitrag zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre Phys. Zeitschr. 1902, S. 266.
- 24) Thuloup, Mémorial de l'artillerie française. Tome 3, 2<sup>e</sup> fascicule de 1924. Imprimerie nationale.
- 25) Tolle, Harmonische Analyse. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. vom 23. Dez. 1923.
- 26) Trefftz, E., Zur Berechnung der Stabilität periodischer Bewegungsvorgänge. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mechan. 1925, S. 473.
- 27) Wedemeyer, E. A., Kurbelwellenschwingungen. Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motor-Luftschiffahrt 1929, Heft 5.
- 28) Wedemeyer, E. A., Schwingungsmodellregel beim Entwurf von Kurbelwellen. Mwg. 1927, S. 697.
- 29) Wydler, H., Drehschwingungen in Kolbenmaschinenanlagen und das Gesetz ihres Ausgleiches. Verlag J. Springer, Berlin 1922.
- 30) Zipperer, Technische Schwingungslehre. Sammlung Göschen.
- 31) Zipperer, Harmonische Analyse periodischer Kurven. Verlag J. Springer, Berlin.
- 32) Tagung über Schwingungen (Schwingungsausschuß). Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1926, S. 1017.
- 33) Bath v. d. Pohl, Einfluß der Dämpfung auf die Frequenzen zweier gekoppelter Kreise. Zeitschr. f. Hochfrequenz 1926, S. 12.
- 34) Brockmüller, J., Eine neue direkte objektive Methode zur Bestimmung der Frequenz eines Schwingungskreises im Bereich bis 30000/s. Zeitschr. f. Unterricht 1926, Nr. 2, S. 59.
- 35) Kniehahn, W., Messung mechanischer Schwingungen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1927, S. 997.
- 36) Rothe, E. und A. Remy, Appareil de synthèse de mouvements périodiques. Journ. d. Phys. 1926, S. 193.
- 37) Steuding, H., Messung mechanischer Schwingungen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1927, S. 605.
- 38) Instrument for recording vibrations. Engg. 1925, S. 271.

### Das Triebwerk

- 39) Beyer, Dynamik der Mehrkurbelgetriebe. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1928, S. 1344.
- 40) Blondel, A., Sur la résonance de l'arbre d'un moteur a explosion a plusieurs manivelles entrainant un volant ou un organ récepteur. Influence de l'accouplement élastique. C. R. 1924, S. 354.
- 41) Blondel, A., Sur l'emploi des volants dans les groupes électrogènes et sur les dangers de résonance des arbres des moteurs a explosions qui les commandes.
- 42) Carnington, Biegungs- und Drehungsbeanspruchungen und Dehnungen in einer Kurbelwelle. Eng. 1926, S. 520.
- 43) Carter, B. C., An empirical formula for crankshaft stiffnes in torsion. Eng. 1928, S. 13 und Engg. 1928, S. 36.
- 44) Carter, C. und A. Swan, Some notes in connection with crankshaft airscrew systems. Aut. Eng. 1926, S. 86.
- 45) Carter, C. und A. Swan, Torsional Vibration. Aut. Eng. 1926, S. 86, Nr. 213.
- 46) Cormac, P., A treatise on Engine Balance using exponentials 1923.
- 47) Döhne, F., Über Druckwechsel und Stöße bei Maschinen mit Kurbeltrieb. Forschungsarb. 1912, Nr. 118.
- 48) Föppl, L., Einfluß von Löchern und Nuten auf die Beanspruchung von Wellen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1921, S. 497.
- 49) Fox, J. F., Torsionsschwingungen an Dieselmaschinenanlagen. Journ. Am. Soc. Nav. Engrs. 1926.
- 50) Frahm, Neue Untersuchungen über die dynamischen Vorgänge in der Wellenleitung mit besonderer Berücksichtigung der Resonanzschwingung. Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 6; Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1902, S. 797.
- 51) Frith, J. und F. Buckingham, Vibration in Engineering. Macdonald & Evans, London 1924.
- 52) Gessner, A., Mehrfach gelagerte, abgesetzte und gekröpfte Kurbelwellen. Verlag J. Springer, Berlin.
- 53) Goldsbrough, G. R., Torsional vibration in reciprocating engine shafts. Proc. Roy. Soc. London 1925, S. 99.
- 54) Heldt, P. M., Automobilbau, Teil I, Der Verbrennungsmotor. Verlag C. Schmidt & Co., Berlin 1916.
- 55) Heldt, M., Torsionsschwingungen an Kurbelwellen. Aut. Ind. 1926, S. 957.
- 56) Holtmeier, O., Längs- und Torsionsschwingungen beliebiger linear angeordneter Massensysteme. Diss. Darmstadt, 1924.
- 57) Holzer, Gefahrlose Resonanz. Maschinenbau 1923, Heft 24, 25, 26.
- 58) Huebotter, A., Vibration in automobile Engines. S. A. E. J. **23**, 107, 1928.
- 59) Hunt, H. und C. B. Embshoff, S. A. E. J. **22**, 444, 1928.
- 60) Keikicki, Tanaka, Trägheitskräfte und Schwingungen an Sternmotoren und ihr Ausgleich. Rep. Aer. Inst. Tokyo imp. Univ. 1925, Nr. 10, S. 247—302.
- 61) Kohn, P., Zeichnerisches Verfahren zur Bestimmung der Torsionseigen-schwingungszahlen von Wellen. Maschinenbau 1926, S. 220.

- 62) Kölsch, O., Gleichgang und Massenkkräfte bei Fahrzeug- und Flugmaschinen. Verlag J. Springer, Berlin 1911.
- 63) Lack und B. Jahnke, Trans. Am. Soc. Mechan. Eng. 1925, S. 493.
- 64) Lewis, F. M., Torsional vibrations. Journ. Am. Soc. Nav. Eng. 1919, S. 857.
- 65) Lewis, M., Drehschwingungen an Dieselmotoren. Motorship 1926, S. 464.
- 66) Liebel, J., Drehschwingungen bei Kraftwagenmotoren, ihre Entstehung und Bekämpfung. Motor und Sport 1928, Heft 25, S. 26.
- 67) Lorenz, H., Kritische Drehzahlen von Torsionswellen. Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen 1919, S. 149.
- 68) Morris, Schwingungen von Kurbelwellen mit parallelen Kröpfungen. Aeronautics 1919, S. 258.
- 69) Norman, C. und K. Stinson, The angular distortion of crankshafts. S. A. E. J. **23**, 83, 1928.
- 70) Oppitz, A., Untersuchungen mehrfach gelagerter und gekröpfter Kurbelwellen des Motorbaues und deren Berechnung. W. H. R. 1928, S. 27.
- 71) Polster, H., Untersuchung der Druckwechsel und Stöße im Kurbelgetriebe von Kolbenmaschinen. Forschungsarb. 1915, Nr. 172, 173.
- 72) Plünzke, J., Drehschwingungen des Automobilmotors. Mag. 1926, S. 125.
- 73) Riedl, Konstruktion und Berechnung moderner Automobilmotoren und Kraftradmotoren. Verlag C. Schmidt, Berlin 1925.
- 74) Roth, Schwingungen von Kurbelwellen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1904, S. 565.
- 75) Sass, Fr., Beitrag zur Berechnung kritischer Torsionsdrehzahlen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1921, S. 67.
- 76) Sass, Fr., Messung der reduzierten Länge der Kurbelwelle einer 1650 PS Schiffsölmaschine.
- 77) Seelmann, Dr., Reduktion der Kurbelwellenkröpfungen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1925.
- 78) Steinen, v. d., Drehschwingungen. W. H. R. 1923, Heft 11, S. 13.
- 79) Steuding, H., Methoden zur Ermittlung der Elastizitätskonstanten. Meßtechn. 1928, S. 259.
- 80) Thorne, A. T. und J. Calderwood, Bericht über Drehschwingungen mit besonderer Berücksichtigung der Marinetriebturbinen. Engg. 1922, S. 815.
- 81) Timoshenko, S. und J. Lessels, Applied elasticity. Westinghouse technical night school, east Pittsburg, Pa., 1925.
- 82) Tolle, Regelung der Kraftmaschinen. Verlag J. Springer, Berlin.
- 83) Vogt, F., Über schädliche Schwungmassen bei Drehschwingungen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1927, S. 1221.
- 84) Wedemeyer, E. A., Lichtzeigermessung. Meßtechn. 1929.
- 85) Wynn und Weston, Vibrations in Engines. Motorboat 1926, S. 134.
- 86) Engine Dynamics and crankshaft Design. Airplane Encyclopedia Co. Detroit, S. 131.
- 87) Kurbelwellen für Flugmotoren. Angle. Aviation 1919, S. 525.
- 88) Marine oil engine trials. Engg. 1925, S. 397.
- 89) Brandt, A., Ein Beitrag zur Dynamik des Nockentriebes. Maschinenkonstr. 1927, S. 402, 430.

- 90) Burghardt, O., Characteristics of automobile cam. *Horseless Age* 1914, S. 222.
- 91) Burghardt, O., An analysis of the function of cam actuated valves. *Horseless Age* 1914, S. 176.
- 92) Consius, J., Harmonische Nockenscheiben mit Tellerstößeln. *Aut. Eng.* 1921, S. 42.
- 93) Fischer, C., Die Schraubenfeder. *Mitteil. Preuß. St. Naturw. Unterr.* **1**, 78, 1920.
- 94) Fröhlich, P., Die dynamischen Vorgänge in zylindrischen Schraubenfedern mit besonderer Berücksichtigung der Massendruckkompensatoren. *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* **56**, 379, 1908.
- 95) Furmann, R., Nockenformen und ihre Konstruktion. *Am. Mach.* 1919, S. 581, 685, 927, 1123; 1920, S. 569.
- 96) Iwan, A., Ventildedern. *Aut. Eng.* 1926, S. 290.
- 97) Low, B., Nockensteuerung von Verbrennungskraftmaschinen. *Engg.* **115**, 641, 1923.
- 98) Kigerl, H., Ermittlung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen am Nocken mit kreisförmigem Profil. *Der Ölmotor* 1919, S. 349.
- 99) Maag, J., Schwingungserscheinungen in zylindrischen Schraubenfedern und die Gesetze des Schlagens der Ventile. *Verh. Ges. Bef. Tl.* **91**, 480, 1912.
- 100) Raasch, A., Berechnung der runddrähtigen Schraubenfedern. *Maschinenbau* 1927, S. 1084.
- 101) Ringwald, M., Nockenform und Ventilbewegung mit besonderer Berücksichtigung der Verbrennungsmotoren. *Zeitschr. d. Ver. d. Ing.* 1927, S. 47.
- 102) Steiner, H., Das Prüfen der Nockenformen an Nockenwellen für Explosionsmotoren. *Mwg.* 1929, S. 118.
- 103) Swan, A., Valvesprings (surging and its effect on durability and functioning). *Aut. Eng.* **26**, 290, 1926.
- 104) Weibull, W., Die dynamischen Eigenschaften bei Spiralfedern. *Abhandl. d. Schwed. Ing. Vet. Eked.* 1927, S. 3.
- 105) Rechentafel für zylindrische Schraubenfedern mit rundem Querschnitt. *Maschinenbau* 1928, S. 783.
- 106) Föppl, O., Bestimmung der Werkstoffdämpfung mittels der Verdrehungsschwingmaschine. *Zeitschr. d. Ver. d. Ing.* 1928, S. 1293.
- 107) Fraenkel, W., Die Verfestigung der Metalle durch mechanische Beanspruchung. *Verlag J. Springer, Berlin.*
- 108) Gough, J., Fatigue phenomena with relation to cohesion problems. *Met. Ind.* 1927, S. 557.
- 109) Grammel, R., Versuche über elastische Hysterese 1914, S. 1601.
- 110) Hague, P., Ermüdungsbrüche durch Korrosion. *Metallurgist* 1926, S. 152.
- 111) Herold, W., Dauerbeanspruchung, Gefüge und Dämpfung. *Stahl und Eisen* 1928, S. 1051.
- 112) Kühnel, Die Gefahren der Schwingungsbeanspruchung für den Werkstoff. *Zeitschr. d. Ver. d. Ing.* 1927, S. 557.
- 113) Lehr, E., Erfahrungen beim Bau schwingender Arbeitsmaschinen. *Zeitschr. f. techn. Physik* 1928, Nr. 10, S. 52.
- 114) Melchior, P., Dauerbruch. *Zeitschr. d. Ver. d. Ing.* 1928, S. 537.

- 115) Schottky, H., Schmelzschweißung und Dauerbruch. Krp. Mon. H. 1926, S. 213.
- 116) Wawrzyniok, O., Handbuch des Materialprüfwesens. Verlag J. Springer, Berlin 1923.
- 117) Ermüdungsbrüche bei Stahl. Techn. Mod. 1926, S. 599.
- 118) Vibration, high-frequency fatigue test., (Eng.) The Metallurgist vom 30. Oktober 1925.
- 119) Dauerversuche zur Bestimmung der Festigkeitseigenschaften, Beziehungen zwischen Baustoffdämpfung und Verformung. Forschungsarb. 303, Berlin 1928.
- 120) Blaess, V., Zur graphischen Behandlung der kritischen Drehzahl rasch umlaufender Wellen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1914, S. 183.
- 121) Bieseno, C. B., Snelloopende Assen. De Ingenieur, Delft 1918.
- 122) Behrens, W., Ein der Theorie der Lavalturbine entnommenes Problem, behandelt mit Himmelsmechanik. Diss. Göttingen. 1911.
- 123) Borowicz, W. v., Beitrag zur Berechnung der kritischen Geschwindigkeit von zwei- und mehrfach gelagerten Wellen. Diss. München.
- 124) Dresden, D., Schnellaufende Wellen. Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwes. 1919, S. 197.
- 125) Dungen, F. und H. van den, Über die Biegungsschwingungen einer Welle, S. 225, 1928.
- 126) Dunkerley, On the whirling and vibration of shafts. Lond. Phil. Trans. 185 (A), 279, 1894.
- 127) Föppl, O., Das Problem der Lavalschen Turbinenwelle. Ziv.-Ing. 1895, S. 332.
- 128) Föppl, O., Vereinfachte Darstellung mit Theorie der Laval-Turbinenwelle. Vorles. über tech. Mechan. 4, 4. A., S. 277, 1914.
- 129) Föppl, O. und H. Lorenz, Kritische Drehzahlen rasch umlaufender Wellen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1919, S. 240, 888.
- 130) Föppl, O., Berechnung der Biegungsschwingungen einer Welle, die mit mehreren Lasten behaftet ist. ZAM. 1927, S. 72.
- 131) Gumbel, O., Über mit Biegung verbundene Schwingungen von Wellen. Dingt. Pol. Journ. 1917, S. 235.
- 132) Grammel, R., Neuere Untersuchungen über kritische Zustände rasch umlaufender Wellen. Ergebn. d. ex. Naturwiss. 1922, S. 92.
- 133) Gordner, R., Die kritische Drehzahl einer Turbinenachse. Engg. 1921, S. 99.
- 134) Hahn, Note sur la vitesse critique des arbres et la formule de Dunkerley. Schweiz. Bauztg. 1918, S. 110.
- 135) Karras, Näherungsrechnung für kritische Drehzahlen rasch umlaufender Wellen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1928, S. 648.
- 136) Koch, Bestimmung höherer kritischer Drehzahlen schnellaufender Wellen. Kongr. f. techn. Mechan. 1926. Verlag O. Füssli, Zürich.
- 137) Krause, M., Zur Berechnung der kritischen Drehzahlen rasch umlaufender Wellen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1924, S. 878.
- 138) Kull, G., Neue Beiträge zum Kapitel: Kritische Drehzahlen schnellaufender Wellen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1918, S. 249.
- 139) Lorenz, H., Die Berechnung kritischer Drehzahlen von Biegungswellen. Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen 1920, S. 229, 245.

- 140) Macal, H., A practical discussion of the vibrations of maine geared turbines. Engg. 1923, S. 59.
- 141) Melau, H., Kritische Drehzahlen von Wellen mit Längsbelastung. Zeitschr. des Österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1917, Heft 44 und 45.
- 142) Mises, R. v., Über die Stabilität rotierender Wellen. Monatsh. f. Math. u. Phys. 1911. S. 33 und Enz. d. math. Wiss. 4, 2. Teilband, S. 302.
- 143) Newkirk, L., Shaft whipping. Gen. El. Rev. 1924, S. 169.
- 144) Odone, V., Oscillazione trasversali di una sbarra provo cate da moto traslatorio periodico di un estremica Influenza degli att triti. Atti di Tirine 1926, S. 302.
- 145) Oelschläger, J., Prüfung von Schwingungen und dynamischen Spannungen an Brücken. Bautechn. 1928, S. 297.
- 146) Pöschl, Th., Über die Bestimmung der kritischen Drehzahlen von elastischen Wellen und ihre Stabilität.
- 147) Prandtl, Beitrag zur Frage der kritischen Drehzahlen. Dingl. pol. Journ. 1918, S. 179.
- 148) Smith, M., The transverse vibration of uniform beams. Engg. 1925, S. 808.
- 149) Stodola, A., Neuere Beobachtung über die kritische Umlaufzahl von Wellen. Schweiz. Bauztg. 1916, S. 197.
- 150) Stodola, A., Zur Frage der Stabilität rotierender Wellen. Schweiz. Bauztg. 1922, S. 22.
- 151) Stodola, A., Neuere kritische Drehzahlen von Dampfturbinen. Kongr. f. techn. Mechan. Ausst. Verlag O. Füssli, Zürich 1926.
- 152) Die Biegungsschwingungsprüfmaschinen. A. T. 1928, Nr. 9, S. 19.
- 153) Taking the period out of automobile engine. Scientific. Am. 1924, S. 107.
- 154) Frahm, H., Ein neuer Torsionsindikator mit Lichtbildaufzeichnung und seine Ergebnisse. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1916, S. 177.
- 155) Gardner, Torsionsmesser. Engg. 1908.
- 156) Geiger, J., Der Torsiograph, ein neues Instrument zur Untersuchung von Wellen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1916, S. 811.
- 157) Martin und Caris, A new electrical engine indicator. S. A. E. J. **23**, 87, 1928.
- 158) Obata, J., An electrical indicator for high speed internal combustion engines. Engg. 1927, S. 253.
- 159) Riehm, W., Die experimentelle Bestimmung des Ungleichförmigkeitsgrades.
- 160) Robinson, Torsion meter and torsional vibrations. World Power 1925, Nr. 20, S. 63.
- 161) Rosmann, J., Frequency measurement with the cathode ray oscillograph. Journ. Am. Inst. El. Eng. 1927, S. 3.
- 162) Runge, H., Die experimentelle Untersuchung des Ungleichförmigkeitsgrades und der Winkelabweichung von Kolbenmaschinen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1915, S. 664, 669.
- 163) Steinert, E. E., The non electric stroboscope. Gen. El. Rev. 1928, S. 136.
- 164) Torsionsmesser. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1908, S. 679.
- 165) The Denny Edgecomb direct vision torsiometer. Engg. 1925, S. 345.

**Zündung**

- <sup>166)</sup> Ahrens, W., Die Fa. Siemens & Halske auf der Internationalen Musikausstellung in Genf. Siemens Jahrb. 1928, S. 399.
- <sup>167)</sup> Barus, C., Vibration in spark-blown closed quill tubes. Proc. Nat. Am. 1924, S. 1.
- <sup>168)</sup> Clough, A., Electrostatic effects in high tension ignition cables. Horseless Age 1914, S. 569.
- <sup>169)</sup> Dehnen, M., Nachweis der elektrischen Schwingungen in der Sekundärspule eines Induktors bei zugeschaltetem Kondensator. Zeitschr. f. Unterricht 1925, S. 302.
- <sup>170)</sup> Löwy, J., Die elektrische Zündung. Verlag R. C. Schmidt & Co., Berlin.
- <sup>171)</sup> Müller, F., Über eine allgemeine Methode zur Bestimmung der Konstanten von Schwingungskreisen, Schwingungszahlen, Strahlungsdämpfung, Strom- und Spannungsverteilung. Journ. d. Russ. phys. u. chem. Ges., phys. Teil, 1924, S. 625.
- <sup>172)</sup> Schwager, O., Wert und Wirkungsweise der Vorschaltfunkenstrecke als Mittel zur Verbesserung der Zündung. Mwg. 1921, S. 235.
- <sup>173)</sup> Trautwein, F., Modulation und Modulationsgüte in der Hochfrequenztechnik. Zeitschr. f. techn. Phys. 1926, S. 34.
- <sup>174)</sup> Wagner, W., Kettenleiter und Wellensiebe. Europ. Fernspr. Comoheft 1927, S. 8.
- <sup>175)</sup> Watson, El., Magnetelektrische Maschinen für Zündung von Verbrennungskraftmaschinen. 1921, S. 482.
- <sup>176)</sup> Spark amplifiers. Aut. Abstr. 1927, S. 215.

**Wärme**

- <sup>177)</sup> Gibson und Baker, Temperaturen der Auslaßventile und Zylinderköpfe hochtouriger Benzinmotoren. Eng. 1923, S. 12.
- <sup>178)</sup> Gröder, H., Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges. Verlag J. Springer, Berlin.
- <sup>179)</sup> Herzfeld, A., Der Wärmeübergang und die thermodynamische Berechnung der Leistung bei Verpuffungsmaschinen, insbesondere bei Kraftfahrzeugmaschinen. Verlag J. Springer, Berlin.
- <sup>180)</sup> Nuss, W., Wärmeleitfähigkeit von Isolatorstoffen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1908, S. 906, 1003.
- <sup>181)</sup> Oldenburg, R., Die Wärmeverluste durch ebene Wände. Verlag K. Henky.
- <sup>182)</sup> Schack, A., Die Berechnung zeitlich veränderlicher Wärmeströmungen. Arch. f. d. Eisenhüttenwesen, Mittlg. Wärmestelle 1927, S. 357.
- <sup>183)</sup> Schmidt, E., Die Wärmeübertragung durch Rippen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1926, S. 885.
- <sup>184)</sup> Taylor, T. S., Wärmeleitfähigkeit von Isolatorstoffen. Mech. Engg. 1920, S. 8.
- <sup>185)</sup> Watson, F. R. B., Gasmaschinen, Kolben und Ventilttemperaturen. Engg. 1920, S. 1.

**Chassis**

- <sup>186)</sup> Biermanns, J., Der Schwingungskreis mit eisenhaltiger Induktivität. Arch. f. Elektr. **3**, 345, 1915.

- 187) Bilau, K., Versuche über den Anteil der Federn an der Gesamtabfederung. Rundsch. 1916, Heft 11 u. Heft 135.
- 188) Bobeth, H., Die Leistungsverluste und die Abfederung von Kraftfahrzeugen. Verlag M. Krayn, Berlin 1913.
- 189) Burkhardt, H., Schwingungen unter Einfluß einer dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen Dämpfung. Zeitschr. f. Math. u. Phys. **63**, 303, 1915.
- 190) Couvenhoven, Forschungsarbeiten des Ver. d. Ing., Nr. 218.
- 191) Duffing, G., Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Braunschweig 1918.
- 192) Foerster, J., Theorie der nicht isochronen Schwingungen. Hilfsbuch f. d. Schiffsbau.
- 193) Guest, J., Die Hauptschwingungen am Automobil. Aut. Eng. 1926, S. 190.
- 194) Hamel, G., Über erzwungene Schwingungen bei endlichen Amplituden. Math. Ann. **86**, 1, 1922.
- 195) Hamel, G., Über die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Math. Ann. **73**, 371, 1912.
- 196) Hendrikson, N. E., Une étude des oscillations des ressorts de insension. Vie aut. 1927, Nr. 865, S. 7.
- 197) Hess, P., Some mechanical features of suspension leafsprings.
- 198) Franzen, T., A Tea. Soc. Aut. Eng. 1927, S. 231.
- 199) Hofmann, J., Federung von Fahrzeugen. Mwg. 1917, S. 453, 804.
- 200) Horn, J., Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad. Zeitschr. f. math. Phys. 1902, S. 400.
- 201) Lindner, Die Bemessung der Federn für pendelnde Massen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1918, S. 249.
- 202) Marquard, E., Federungsprobleme bei starren und schwingenden Hinterachsen. Mwg. 1927.
- 203) Marquard, E., Grundlagen zur Ermittlung der dynamischen Beanspruchung von Kraftfahrzeugen bei Stößen. Mwg. 1926, S. 737.
- 204) Meier, H., Abfederung gegen die Seitenstöße. Mwg. 1918, Jahrg. 21, S. 275.
- 205) Meissner, E., Über Schüttelerscheinungen in Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität. Schweiz. Bauztg. **72**, 95, 1918.
- 206) Melchior, Der Ruck. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1928, S. 1842.
- 207) Mises, R. v., Dynamische Probleme des Maschinenbaues. Enz. d. math. Wiss.
- 208) Müller, K. E., Die kritische Geschwindigkeit der Lötschberg-Lokomotive 1E 1, analysiert und graphisch berechnet. Schweiz. Bauztg. 1920, S. 107.
- 209) Petit, Das Problem der Abfederung. Der Beckwagen. Vie aut. 1921, S. 47.
- 210) Purdy, J. F. und R. B. Day, A method of measuring the cushioning quality of tires. S. A. E. J. **20**, 389, 1927.
- 211) Radaco, M., Über die theoretische Behandlung des Problems der störenden Lokomotivbewegungen. Zeitschr. f. Math. u. Phys. **53**, 225, 1906.
- 212) Rüdberg, R., Einige unharmonische Schwingungen großer Amplitude. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mechan. 1923, S. 457.
- 213) Rummel, R., Versuche zur Verbesserung der Federung. Mwg. 1906, S. 214.

- 214) Rumpf, Ein stoßfreier Krankenwagen. Mwg. 1926, S. 71.
- 215) Savage, H., Die Abfederung von Motorrädern. The Aut. Eng. 1920, S. 6.
- 216) Schieferstein, H., Über elektrische und mechanische Schwingungen. Maschinenbau 1922, S. 145.
- 217) Schieferstein, H., Die Entwicklung schwingender, leistungübertragender Mechanismen. Maschinenbau 1928, S. 749.
- 218) Schieferstein, H., Die Abfederung der Fahrzeuge. Mwg. 1929, S. 49.
- 219) Schramm, H., Die Schwingung als Vortriebsfaktor. Verlag de Gruyter.
- 220) Spiegel, Schwingachsen und Vorderradantrieb. Mwg. 1929, S. 129.
- 221) Stamm, A., Analytische Ermittlung der Schwerpunktslage bei Fahrzeugen. Auto-Techn. 1926, Nr. 16, S. 12.
- 222) Szarvassi, A., Elektrodynamische Theorie der Lichtbogen- und Funkenentladung. Ann. d. Phys. **42**, 1031, 1913.
- 223) Wawrziniok, O., Betrachtung über die Fahrsicherheit von Kraftfahrzeugen. Mitteilungen des Instituts für Kraftfahrwesen der Technischen Hochschule Dresden, Sammelband VI.
- 224) Wedemeyer, F. A., Fahrzeugschwingungen und ihre Beseitigung. Anz. f. B. H. Masch.-Wesen 1928, Heft 131, S. 1.
- 225) Wedemeyer, E. A., Die Federung der Fahrzeuge. Mwg. 1927, S. 367.
- 226) Wichert, A., Feder mit Spiel. E. T. Z. 1920, S. 976 und Sammelheft Techn. Mechan. d. Ver. d. Ing. 1919, S. 26.
- 227) Wichert, A., Schüttelschwingungen. Forschungsarb. 1924, Heft 266.
- 228) Wichert, A., Schüttelschwingungen an elektrischen Lokomotiven. Zeitschrift d. Ver. d. Ing. 1921, S. 971.
- 229) Schweiz. Bauztg. **22**, 11, 1919.
- 230) Zusammenarbeit von Federung und Bereifung. Comm. Motor 1924, S. 536.
- 231) Schwingachsen. Kl. Mo., Sp. 1928, Nr. 20.
- 232) The main free vibrations of an autocar. Inst. Aut. Eng. 1926, S. 198.
- 233) Geiger, J., Zur Theorie der Vibrographen. W. H. R. 1924, S. 240.
- 234) Gerber, G., Prüfung von Fahrzeugfedern. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1927, S. 1521.
- 235) Langer-Thomè, Stoßmesser. Auto-Techn. 1928, Nr. 3.
- 236) Mayer, H., Dreikomponenten-Beschleunigungsmesser. Meßtechnik 1928, S. 115.
- 237) v. Puica Keraval, Erschütterungs- und Beschleunigungsmesser. Auto-Techn. Nr. 9, S. 19.
- 238) Wood, Prüfung mechanischer Federn. Mechan. Engg. 1926, S. 808.
- 239) Chassis testing. Aut. Abstr. 1927, Nr. 10.
- 240) Ein neuer Schwingungsmesser und Sucher. Werkst.-Techn. 1927, S. 105.
- 241) Schwingungsanzeiger (Lehmann u. Michels) Patent Thyssen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1927, S. 363.
- 242) Albert, C. D., Machine design and drawing room problems.
- 243) Angle, G. D., Engine dynamics and crankshaft Balance.
- 244) Brandt, H., Schwingungen und Massenkräfte. Masch.-Konstr. 1927, S. 6.
- 245) Crane, H. M., Engine characteristics as effected by cylinder and crankcase arrangements. Journ. Soc. Aut. Eng. 1926, S. 578.
- 246) Crane, H. M., Cylinder and crankcase arrangement. Aut. Eng. 1927, S. 70.
- 247) Huebotter, H. A., Vibration in automobile Engines. S. A. E. J. **23**, 107, 1928.

- 248) Kuhn, J., Zur graphischen Behandlung des Kurbeltriebes. *Dingl. polytechn. Journ.* 1927, S. 253.
- 249) Marquard, E., Über den Ausgleich von Beschleunigungskräften zweiter Ordnung durch Drehmassen. *Mwg.* 1925, S. 303.
- 250) Morris, J., Balancing the firing stroke. *Aut. Eng.* 16, 504.
- 251) Pomeory, Der grundsätzliche Fehler der Vierzylindermotoren und seine Beseitigung. *Aut. Ind.* 1919, S. 556.
- 252) Riggs, N. C., Hancock's applied mechanics for Engineers.
- 253) Sharp, A., Balancing of Engines.
- 254) Schrön, H., Gleitbahndruck, Zündfolge und Pendelung ein- und mehrreihiger Viertaktmotoren. 1925/26. *Diss. München*; *Mwg.* 1925, S. 690.
- 255) Schrön, H., Die Eigenschaften der Fünfzylinder-Reihenverbrennungsmaschinen. *Mwg.* 1928, S. 663.
- 256) Steinitz, O., Die Beanspruchung durch die Erschütterungen der Fahrzeugmotoren. *Auto-Techn.* 1927, S. 21.
- 257) Strickland, F., Some notes on crankshafts. *Aut. Eng.* 1928, S. 183.
- 258) Wood, K. D., Possibilities of the counterbalanced connecting rod. *S. A. E. Trans.* 22, 153, 1927.
- 259) Wood, K. D., Possibilities of the counterbalanced connecting rod. *Journ. Soc. Aut. Eng.* 1927, S. 397.
- 260) Balancing gear for a four cylinder 250 BHP oil engine. *Eng.* 1927, S. 692.
- 261) Gleichgang und Massenausgleich bei Achtzylinder-V-Motoren mit symmetrischer und unsymmetrischer Kurbelwelle. *Mwg.* 1924, S. 612.
- 262) Brauchitsch, E. v., Zur Theorie des experimentellen Auswuchtens. *Zeitschr. f. angew. Math. u. Mechan.* 1923, S. 81.
- 263) Heymann, H., Dr.-Ing., Ein neuer Weg zur Auswuchtung von Automobil- und Flugzeugkurbelwellen. *Mwg.*, Jahrg. 23, S. 8.
- 264) Heymann, H., Dr.-Ing., Energieverlust durch Unbalance Betrieb 1921, S. 363.
- 265) Heymann, H., Dr.-Ing., Beitrag zur Auswuchtung von Luftschiff- und Automobil-Kurbelwellen. *Mwg.* 1917, S. 27, 102.
- 266) Heymann, H., Dr.-Ing., Über die dynamische Auswuchtung von rasch rotierenden Maschinenteilen. *El. Zeitschr.* 1919, S. 234, 251.
- 267) Hort, H., Behelfsmäßiges Auswuchten eines Schwungrades. *Kruppsche Monatshefte* 1924, S. 21.
- 268) Hort, H., Die Kruppschen vereinigten statisch-dynamischen Wuchtmaschinen. *Kruppsche Monatshefte* 1925, S. 33.
- 269) Hort, H., Neuere dynamisch-statische Wuchtmaschinen. *Kruppsche Monatshefte* 1927, S. 154.
- 270) Hofmann, D., Statische und dynamische Auswuchtung. *Maschinenbau* 1928, S. 814.
- 271) Dynamisches Ausbalancieren rotierender Teile. *Mwg.* 1917, S. 403, 457.
- 272) Dynamic balancing Machine for small armatures. *Engg.* 1927, S. 202.
- 273) Auswuchten von Maschinen. *World Power* 3, Heft 18.
- 274) Martins Maschine zum Ausbalancieren von Laufrädern. *El. Rev.* 1921, S. 101.
- 275) Neue Maschine zum Auswuchten von Schwungrädern. *Aut. Ind.* 1926, S. 230.
- 276) Auswuchten bei niedriger Geschwindigkeit. *Am. Mach.* 1921, S. 925.

- 277) Becker, G., Automobilreifen. Verlag M. Krayn, Berlin 1927.
- 278) Bobeth, E., Eine beachtenswerte amerikanische Abfederungskonstruktion. Mwg. 1918, Jahrg. 21, S. 149.
- 279) Baillie, G. H., Springs. Horseless Age **32**, 285, 332.
- 280) Brombacher, Federn. Mechan. Engg. 1926, S. 488.
- 281) Cazalis, L., Federung Bauart Emile Paulet. Vie aut. 1921, S. 329.
- 282) Edgerton, Federn. Mech. Engg. 1926, S. 484.
- 283) Franz, H., Blattfedern an Kraftfahrzeugen. Auto-Techn. 1927, Nr. 21, S. 18.
- 284) Golden, A., Springs and suspension. Horseless Age **31**, 143.
- 285) Golden, A., Truck springs, suspensions and details. Horseless Age **31**, 265.
- 286) Grieb, E., Die Abfederung von Personen- und Lastwagen sowie die Konstruktion der Automobilfeder. Auto-Techn. 1927, Nr. 8, S. 18.
- 287) Grützmann, W., Etwas über Blattfederung an Kraftfahrzeugen. Auto-Techn. 1927, Nr. 10, S. 18.
- 288) Helffer, P., Die Berechnung von zusammengesetzten Blattfedern. Organ f. Fortschritte, 15. April 1926.
- 289) Jadper, Federn. Mechan. Eng. 1926, S. 487.
- 290) Heinze, P. A., German firms develop air springs controlled by drivers. Aut. Ind. 1927, S. 372.
- 291) Heywood, F., Versagen von Spiralfedern. Engg. 1927, S. 562 u. 621.
- 292) E. B. Killen, Druckluftaufhängung. Motor transp. **43**, 361.
- 293) Landau und Parn, Eine neue Theorie der Blattfeder. Eng. 1919, S. 397.
- 294) Rowell, H. S., Aut. Eng. 1926, S. 229.
- 295) Schieferstein, H., Die Abfederung von Fahrzeugen. Mwg. 1929, S. 49.
- 296) Schlachter, W., Automobilwagenfedern. Mwg. 1922, S. 395, 481; 1926, S. 637.
- 297) Wood, J. K., Neuerungen an Blattfedern für Fahrzeuge. Am. Mach. 1925, S. 923.
- 298) The suspension of sixwheelers. Aut. Eng. 1927, S. 299.
- 299) Car suspension. Aut. Abstr. 1928, Nr. 1.
- 300) Blattfedern für Eisenbahn und Kraftwagen.
- 301) Eine neuartige Kraftwagenfederung. Automobil- und Flugwelt 1927, Nr. 15, S. 4.
- 302) Autofedern. Auto-Techn. 1927, Nr. 26, S. 9.
- 303) Die Luftfederung. Lastauto 1927, S. 14.
- 304) Luftfederung und Luftbremse. Kraft und Verkehr 1927, S. 298.
- 305) Eine neue Wagenfederung, Pat. Acarelli. Mittlg. Reichsverb. Aut.-Ind. 1927, Nr. 2, S. 29.
- 306) Denham, A., Packard eight. Aut. Ind. 1928.
- 307) Fischer, Th., Das Problem des erschütterungsfrei fahrenden Kraftwagens. Deutsche Motorzeitschr. 1928, Heft 9, S. 388.
- 308) Gabriel, Triple hydraulic shok absorber. Aut. Ind. **59**, 384, 1928.
- 309) Golden, A., Shok absorbers and elastic. Horseless Age 1913, S. 192.
- 310) Günther, O., Über Blattfederreibung und Schmierung. Mwg. 1926, S. 642.
- 311) Holm, O., Reibungsdämpfung der Kraftwagenfedern. Mwg. 1927, S. 467.
- 312) Hess, R., Stoßdämpfer Weikra-Tomas. Mwg. 1927, S. 112.

- 313) Neil, E., Bosch incorporates new features in type „Y“ shock absorbers. Aut. Ind. 1927, S. 658.
- 314) Neue Bosch-Stoßdämpfer. Mwg. 1928, Nr. 1.
- 315) Der Stoßdämpfer System Brouhiet. Aut.-Rundschau 1921, S. 100.
- 316) Bumpers, Aut. Abstr. 1928, Nr. 1.
- 317) Humpmobile for 1929 announced. The Am. Aut. 5, Nr. 9, S. 43, 1928.
- 318) Hydraulic dampers are recommended for shimmy and Waddling. Aut. Ind., S. 726, 1929.
- 319) Stoßdämpfer der India-Motorcycle Co. Mwg. 1927, S. 751.
- 320) Kometstoßdämpfer. AAZ. 1928, S. 5.
- 321) Der Lenkungsstoßdämpfer von Lanchester. Mwg. 1928, S. 673.
- 322) Rolls Royce adopts new shock dampers. Aut. Ind. 1927, S. 983.
- 323) Schwingungsdämpfer des Oakland. Allgem. Aut.-Ztg. 1926, Nr. 12, S. 27.
- 324) Expel, N., Die Befestigung der Federn am Wagen. Ding. Auto-Techn. 1926, Nr. 26, S. 22.
- 325) Fischer, Th., Die Gummi-Lagerung. Deutsche Motorzeitschr. 1927, S. 354.
- 326) Meyer, E., Berechnung der Durchbiegung von Stäben, die nicht dem Hockschen Gesetz folgen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1908, S. 167.
- 327) Rosland, R. und E. Schmid, Dehnungsversuche mit Rohkautschuk. Zeitschr. f. techn. Phys. 1928, S. 98.
- 328) Skusch, R., Über die Wirkung der Federgehänge zweiachsiger Eisenbahnfahrzeuge. Glas. Ann. 1927, S. 55.
- 329) Wiegand, J., Die Deformationsarbeit des Gummis. Ind. Eng. Chem. 1921, S. 118.
- 330) Ball-bearing type spring shackles, announced by Fafnir. Aut. Ind. 1927, S. 238.
- 331) Vorderachsenaufhängung (Alois-Car Co.). Mwg. 1927, S. 250.

### Geräusche

- 340) Berger, R., Über die Schalldurchlässigkeit. Diss. 1911.
- 341) Briggs, H., Vermeiden der Geräusche beim Motorrad. Aut. Eng. 1926, S. 70.
- 342) Buckingham, E., Zahnräder in Aktion. Mar. Mach. 65, 389.
- 343) Buckingham, E., Geräusche in Getriebekästen. Am. Mach. 1925, S. 49.
- 344) Hägele, A., Mechanische Geräusche an Motorradmotoren. Mwg. 1927, S. 87.
- 345) Hofer, Das Singen von Zahnradern. Maschinenbau 1923, Heft 16.
- 346) Lasche, O., Beitrag zur Zahnradfrage für Übersetzungsgetriebe. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1921, S. 1087.
- 347) Ottenstein, R., Über den Schutz gegen Schall und Erschütterungen. Diss. München, 1915; Ges. Ing. 1916, Heft 1.
- 348) Speiser, W., Isolierung gegen Geräusche und Erschütterungen. Dingl. pol. Journ. 1926, S. 117.
- 349) Weissbach, F., Schutz gegen Schall und Erschütterungen. (Bauakustik.) Berlin 1913.
- 350) Technische Verfahren zur Prüfung von Geräuschen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1925, S. 100.

- 351) A gear box noise testing machine. Eng. 1927, S. 691.
- 352) Ribs that help to eliminate gear noises. Comm. Mot. 1927, S. 111.
- 353) Eckolt, Über erzwungene Reibungsschwingungen. Zeitschr. f. techn. Phys. 1926, S. 226.
- 354) Florig, Fr., Die Reibungsvorgänge in trocken laufenden Kupplungen. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mechan. 1927, S. 284.
- 355) Maurer, E. R., Technical mechanics.
- 356) Wood, E. H., Textbook of mechanics.
- 357) Michel, E., Hörsamkeit großer Räume. Braunschweig 1921.
- 358) Olson, H., The action of acoustic wavefilters in solids. Phys. Rev. 1926, S. 116.
- 359) Rayleigh, Theory of sounds.
- 360) Voissel, P., Resonanzerscheinungen in der Saugleitung von Kompressoren und Gasmotoren. Mitteil. üb. Forschungsarb. 1911, Heft 106; Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1912, S. 720.
- 361) Wiechert, E., Über die Schallausbreitung in der Atmosphäre. Met. Zeitschr. 1925, S. 81.
- 362) The vibration of air in tubes capped at both ends. Proc. Nat. Acad. Amer. 1923, S. 263.
- 363) Hütte, Bd. 1.
- 364) Becker, R. und W. Ostwald, Die Gesetzmäßigkeit der Zündgeschwindigkeit. Auto-Techn. 1920, S. 10.
- 365) Brown und Watkins, Gaseous explosions. IV. Rate of rise of pressure, velocity of flame travel and the detonation wave. Ind. Engg. Chem. 1927, S. 363.
- 366) Cadl, M. M., Methods of measuring of detonation. S. A. E. J. 1928, S. 457.
- 367) Cummings, K., Methods of Measuring the antiknock values of fuels. S. A. E. J. 1927, S. 599.
- 368) Gabriel, F., Betrieb eines dynamischen Lautsprechers. Radio für Alle 1927, Februarheft.
- 369) Heldt, Ein neues Verfahren zur Messung der Zündgeschwindigkeit. Aut. Ind. 1919, S. 1256.
- 370) Nägel, A., Versuche über die Zündgeschwindigkeit explosibler Gasgemische. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1908, S. 244.
- 371) Ostwald, Zur Theorie die Klopfens. Ohne Chauffeur 1925, S. 827.
- 372) Richter, L., Über das Klopfen der Zündmotoren. Mwg. 1925, S. 682.
- 373) Ricardo, Schnellaufende Verbrennungskraftmaschinen, S. 89, 109. Verlag J. Springer, Berlin 1926.
- 374) Strevens, Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Flamme bei der Explosion von Gasen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1926, S. 659.
- 375) Matmough, W. A., Detonation. Aut. Eng. 1927, S. 306.
- 376) Wawrziniok, O., Verbrennungsgeschwindigkeiten von Kraftstoff-Luftgemisch-Ladungen in Verpuffungsmotoren. Auto-Techn. 1928, Heft 7, S. 8.
- 377) Wedemeyer, E. A., Beitrag zum Klopfen der Automobilmotoren. Mwg. 1929, S. 334.
- 378) Wirth, Die Verbrennungsvorgänge im Explosionsmotor, Auspuffanalyse und Wärmeleitung. Automobil-Rundschau 1920, S. 66, 84, 104, 126.
- 379) Engine Knock. Aut. Eng. 18, 381, 1928.
- 380) Das Klopfen der Automobilmotoren (A. B.). Mwg. 1904, S. 68.

- 381) Borth, W., Schwingungs- und Resonanzerscheinungen von Kolbengebläsen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1916, S. 556, 591, 611.
- 382) Boussinesq, Les eaux courantes. Paris 1877.
- 383) Benton, W., On edge tones. Proc. Phys. Soc. 1926, S. 109.
- 384) Helmholtz, H. v., Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. Crelles Journ. **57**, 1, 1860.
- 385) Jeffreys, H., On the reflection and refraction of elastic waves. Month. Not. Geophys. Suppl. **1**, 321, 1926.
- 386) Kalähne, A., Grundzüge der mathematisch-physikalischen Akustik **1**, 11, 1913.
- 387) Klein, Festigkeit und radiale Schwingungen von dickwandigen Röhren, Art. Monatsh. 1920, S. 59.
- 388) Chauff, O., Neuartiger Auspuff. Aut.-Rundsch. 201.
- 389) Mock, E. C., The exhaust discharge and proper manifold design. Horseless Age 1914, S. 96, 132.
- 390) Pohlert, Schalldämpfer für Krafträder. Motorradmarkt Pössneck, 1928, Nr. 22.
- 391) Prätorius, Die Schalldämpfer bei Abgasen. Mwg. 1918, S. 450.
- 392) Prätorius, Dämpfung der Abgasgeräusche. Mwg. 1920, S. 155.
- 393) Stodola, A., Dieselmotor mit Büchischer Aufladung. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1928, S. 421.
- 394) Wawrziniok, Die Dämpfung des Auspuffgeräusches der Kraftwagenmotoren. Mitteilungen des Instituts für Kraftfahrwesen der Technischen Hochschule Dresden. Sammelband III und VII.
- 395) Neue Schalldämpferkonstruktionen. Mwg. 1920, S. 195.
- 396) Beseitigung der Auspuffgeräusche bei Krafträdern. Auto u. Motorrad 1925, Nr. 1, 4.
- 397) Vom Auspufftopf-Wettbewerb in England. Automobil- und Flugwelt 1927, Nr. 36, S. 7.
- 398) Schalldämpfer für den Auspuff von Kraftwagen. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1927, Nr. 16.
- 399) Faroux, Ch., Zur Frage des Flatterns der Vorderräder am Kraftwagen. Vie aut. 1925, Nr. 834, S. 353.
- 400) Healey, A., Frontwheel-Wobble. Aut. Eng. 1925, S. 176.
- 401) Heldt, P. M., Lenkungsdämpfer am Marmonwagen. Aut. Ind. 1926, S. 300.
- 402) Herrmann, L., Tires as a cause of shimmy. S. A. E. Trans. **22**, 199, 1927.
- 403) Huebotter, H. A., Mechanics of frontwheel shimmy. S. A. E. J. **20**, 423, 1927.
- 404) Kaufmann, A., Untersuchung über das Flattern der Lenkräder von Kraftfahrzeugen. Mwg. 1927, S. 161.
- 405) Lavaud, V. S. de, Independently sprung front wheels. S. A. E. J. **23**, 385, 1928.
- 406) Lavaud, V. S. de, Eine neue Erklärung der Flattererscheinungen bei Kraftwagenrädern. Techn. Moderne **18**, 576.
- 407) Lavaud, V. S. de, Les vitesses critiques d'une voiture automobile. Selbstverlag, Paris 1927.
- 408) Meinecke, F., Über das Flattern der Räder. Mwg. 1929, S. 1.

- <sup>409</sup>) Petrie, T., The cause of wheel wobble. Eng. 1927, S. 676.
- <sup>410</sup>) Scenasy, St. v., Aus dem Reiche der Technik. ADAC-Sport 1926, Nr. 36, S. 5.
- <sup>411</sup>) Wedemeyer, E. A., Vorderradflattern. Mwg. 1928, S. 353.
- <sup>412</sup>) Wedemeyer, E. A., Das Flattern von Automobilvorderrädern. Lastauto 1928, Heft 31, S. 11.
- <sup>413</sup>) Curing wheel wobble. Autocar 1927, S. 614.
- <sup>414</sup>) Curing wheel wobble by adjusting tire central with King-Pin. Aut. Ind. 1927, S. 276.
- <sup>415</sup>) Shimmy. Aut. Abstr. 1928, Nr. 1.
- <sup>416</sup>) Angenheister, G. und W. Schneider, Messung der Erschütterungen von Boden und Gebäuden, hervorgerufen durch Maschinen und Fahrzeuge. Zeitschr. f. techn. Phys. 1928, S. 115.
- <sup>417</sup>) Angenheister, G. und Wittig, Schädliche Erschütterungswirkungen des Straßenverkehrs. Zeitschr. f. techn. Phys. 1928, S. 311.
- <sup>418</sup>) Angenheister, G. und Wittig, Messungen von Erschütterungen von Boden und Gebäuden. Zeitschr. f. techn. Phys. 1928, S. 115.
- <sup>419</sup>) Auclair and Guillon, L'Ébranlement des routes. La science et la vie, Oktober 1925.
- <sup>420</sup>) Berger, R., Über Erschütterungen. D. Gesundheits-Ing. 1913, S. 433.
- <sup>421</sup>) Fliegner, A., Einfluß der Schienenstöße auf die gaukelnden Bewegungen der Lokomotiven. Schweizer nat. Ges., Zürich 1897.
- <sup>422</sup>) Furrer, A., Stoßwirkung des ungefederten Gewichtes von Schienenfahrzeugen auf dem Geleise. Schweiz. Bauztg. 1927, S. 83.
- <sup>423</sup>) Gerb, Die Übertragung des Schalles im Boden. Maschinenbau 1923, S. 283.
- <sup>424</sup>) Kappes und Essers, Bodenerschütterungen. Auto-Techn. 1927, Heft 6.
- <sup>425</sup>) Langer, P. und W. Thome, Stoßhaftigkeit von Straßen und Verkehrserschütterungen durch Straßenfahrzeuge. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1928, S. 1561.
- <sup>426</sup>) Month, On the amplitude of bodily seismic waves. Not. Geophys. Suppl. 1, 334, 1926.
- <sup>427</sup>) Neumann, E., Die Prüfverfahren für Straßenbaustoffe und ihre Bewertung. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1928, S. 642.
- <sup>428</sup>) Panchanon, On the pressure exerted by an elastic hammer impinging on a piano-string. Proc. Indian Ass. f. the cultiv. of. Sc. 1926, S. 297.
- <sup>429</sup>) Rohrbach, Zur Wechselwirkung von Rennbahn und Rennwagen. Mwg. 1927, S. 63.
- <sup>430</sup>) Saller, Dynamik und Schwingungen des Eisenbahnoberbaues. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1928, S. 1323.
- <sup>431</sup>) Symington, H., Schienenzerstörung durch Radstöße. Railway 1926, S. 1067.
- <sup>432</sup>) Thome, W., Über dynamische Wechselwirkung zwischen Fahrzeug und Fahrbahn. Mwg. 1928, S. 480.
- <sup>433</sup>) Wittig, Seismometrische Messungen der Verkehrserschütterungen. Zentralbl. d. Bauverw., Mai 1926.
- <sup>434</sup>) Wittig, Verkehrsleben. Umschau 1927, Heft 11.

Tabelle zu Seite 43. Schwingungsrech

$\omega/100$ $(\omega/100)^2$			2 4	4 16	6 36	8 64	10 100	12 144	
$m_6$	6,400		25,6	102,4	230	410	640	922	
$m_5$	0,0877		0,3508	1,4032	3,15	5,6	8,77	12,6	
$m_4$	0,0877		—	—	—	—	—	—	
$m_3$	0,0877		—	—	—	—	—	—	
$m_2$	0,0877		—	—	—	—	—	—	
$m_1$	0,0893		0,3572	1,4288	3,22	5,71	8,93	12,88	
		$m \omega^2$							
$c_5$	98,8	$\delta_6$	+ 73,2	- 3,6	- 131,2	- 311,2	- 541,2	- 832,2	-
$c_5 + c_4$	254,8	$\delta_5$	254,4	253,4	251,6	249,2	246,0	242,2	-
$c_4 + c_3$	230,4	$\delta_4$	230,0	229,0	227,2	224,8	221,6	217,8	-
$c_3 + c_2$	230,4	$\delta_3$	230,0	229,0	227,2	224,8	221,6	217,8	-
$c_2 + c_1$	232,4	$\delta_2$	232,0	231,0	229,2	226,8	223,6	219,8	-
$c_1$	76,4	$\delta_1$	76,0	75,0	73,2	70,7	67,5	63,5	-
$c_5^3 =$ 9 761	$c_5^3/\delta_5$ $\delta_5 - \gamma_5$	$\gamma_5$ $\alpha_5$	- 133,2 121,2	- 27,10 + 246,3	- 74,2 325,8	- 31,3 280,5	- 18,0 264,5	- 11,85 254,0	-
$c_4^3 =$ 24 336	$c_4^3/\alpha_5$ $\delta_4 - \gamma_4$	$\gamma_4$ $\alpha_4$	202,5 29,5	98,2 220,8	74,7 152,5	86,8 138,0	92,2 129,4	95,6 122,2	-
$c_3^3 =$ 5 535	$c_3^3/\alpha_4$ $\delta_3 - \gamma_3$	$\gamma_3$ $\alpha_3$	187,5 42,5	25,0 204,0	36,2 191,0	40,0 184,8	42,7 178,9	45,2 172,5	-
$c_2^3 =$ 24 336	$c_2^3/\alpha_3$ $\delta_2 - \gamma_2$	$\gamma_2$ $\alpha_2$	573 - 341	119 112	127,2 102,0	131,5 95,3	136 87,6	141 78,8	-
$c_1^3 =$ 5 837	$c_1^3/\alpha_2$ $\delta_1 - \gamma_1$	$\gamma_1$ $\alpha_1$	- 171,0 247,0	52,0 23,0	57,1 16,1	61,2 9,5	66,5 1,0	74,0 - 10,5	-
$c_1^3 =$ 5 837	$c_1^3/\delta_1$ $\delta_2 - \eta_1$	$\eta_1$ $\beta_2$	76,9 155,1	77,7 153,3	79,9 149,3	82,6 144,2	86,4 137,2	91,9 127,9	-
$c_2^3 =$ 24 336	$c_2^3/\beta_2$ $\delta_3 - \eta_2$	$\eta_2$ $\beta_3$	156,5 73,5	158,5 70,5	162,5 64,7	168,0 56,8	177,0 44,6	190,0 27,8	-
$c_3^3 =$ 5 535	$c_3^3/\beta_3$ $\delta_4 - \eta_3$	$\eta_3$ $\beta_4$	75,3 154,7	78,4 150,6	85,5 141,7	97,3 127,5	123,8 97,8	198,5 19,3	-
$c_4^3 =$ 24 336	$c_4^3/\beta_4$ $\delta_5 - \eta_4$	$\eta_4$ $\beta_5$	157 97,4	161,5 91,9	171,5 80,1	190,5 58,7	249 - 3,0	1260 - 1017,8	-
$c_5^3 =$ 9 761	$c_5^3/\beta_5$ $\delta_6 - \eta_5$	$\eta_5$ $\beta_6$	100,2 - 27,0	106,2 - 109,8	121,6 - 252,8	166,0 - 477,2	- 3254 + 2713	- 9,6 - 822,6	-

rechnung für die Kurbelwelle (Abb. 24)

	14	16-	18	20	25	30	35	40
	196	256	324	400	625	900	1225	1600
	1250	1640	2070	2560	4000	5760	7850	10 250
3	17,2	22,4	28,4	35,08	54,8	78,8	107,3	140
	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—
38	17,5	22,9	28,9	35,7	55,8	80,3	109,5	143,0
2	-1151,2	-1541	-1971	-2461	-3901	-5661	-7751	- 10 151
2	237,6	232,4	226,4	219,7	200,0	176,0	147,5	114,8
3	213,2	208,0	202,0	195,3	175,6	151,6	123,1	90,4
3	213,2	208,0	202,0	195,3	175,6	151,6	123,1	90,4
3	215,2	210,0	204,0	197,3	177,6	153,6	125,1	92,4
5	58,9	53,5	47,5	40,7	20,6	- 3,9	- 33,1	- 66,6
35	- 8,46	- 6,32	- 4,95	- 3,96	- 2,50	- 1,725	- 1,26	- 0,962
0	246,1	238,7	231,4	223,7	202,5	177,7	148,8	115,8
3	98,8	101,5	105,0	108,5	120,0	136,5	163,0	210,0
2	114,4	106,5	97,0	86,8	55,6	15,1	- 39,9	- 119,6
2	48,2	51,9	57,0	64,8	99,3	366	- 138,5	- 46,2
5	165,0	156,1	145,0	130,5	76,7	- 214,4	+ 261,6	136,6
	147,3	155,6	167,5	186	317,5	- 113	93,1	178
3	67,9	54,4	36,5	11,3	- 139,9	266,6	32,0	- 85,6
0	86,0	107,0	159,5	516,0	- 41,6	21,82	182	- 68,2
5	- 27,1	- 53,5	- 112,0	- 475,3	+ 62,2	- 25,7	- 215,1	+ 134,8
0	99,4	109,0	123,0	143,0	283,0	-1495	- 176,5	- 87,6
9	115,8	101,0	81,0	54,3	- 105,4	+ 1649	301,6	180,0
0	210,0	241,0	300,0	448	- 230,5	14,75	80,7	135,0
3	3,2	- 33,0	- 98,0	- 252,7	+ 406,1	136,9	42,4	- 44,6
5	172,5	- 167,5	- 56,4	- 21,8	13,6	40,5	130,0	- 124,0
3	-1512	+ 375,5	258,4	217,1	162,0	111,1	- 6,9	+ 214,4
	- 16,05	64,9	94,0	112,0	150,0	218,5	-3530	113,0
3	+253,7	167,5	132,4	107,7	50,0	- 42,5	+3383	1,8
5	38,5	58,2	73,9	90,6	195,2	- 229,5	28,8	5410
3	-1189,7	-1599	-2045	-2552	-4096	-5431	-7780	- 15 561

## *Neuere und neueste Hefte der „Sammlung Vieweg“*

- Heft 46. Dr. Bruno Alexander-Katz: *Quarzglas und Quarzgut*. Mit 43 Abb. M. 2,50.
- Heft 47. Prof. Dr. G. Berndt: *Radioaktive Leuchtfarben*. Mit 28 Abbildungen im Text und auf einer Lichtdrucktafel. M. 4,—.
- Heft 48. Dr. R. Fürth: *Schwankungserscheinungen in der Physik*. Mit 5 Abb. M. 3,50.
- Heft 49. Dr. Hans Georg Möller: *Die Elektronenröhren und ihre technischen Anwendungen*. 3., vollständig umgearbeitete Auflage erschien außerhalb dieser Sammlung.
- Heft 50. Prof. Dr. C. Dorno: *Klimatologie im Dienste der Medizin*. Mit 11 Abbildungen. M. 3,—.
- Heft 51. Prof. Dr. C. Isenkrahe: *Zur Elementaranalyse der Relativitätstheorie*. M. 4,50.
- Heft 52. Dr.-Ing. Max Moeller: *Das Ozon. Eine physikalisch-chemische Einzeldarstellung*. Mit 32 Textfiguren. M. 6,—.
- Heft 53. Dr. V. Geilen: *Mathematik und Baukunst als Grundlagen abendländischer Kultur. — Wiedergeburt der Mathematik aus dem Geiste Kants*. M. 3,—.
- Heft 54. Dr. H. Heinrich Franck: *Die Verwertung von synthetischen Fettsäureestern als Kunstspeisefette in wirtschaftlicher, physiologischer und technischer Beziehung*. Mit 3 Abbildungen. M. 3,25.
- Heft 55. Dr. Alfred Wegener: *Die Entstehung der Mondkrater*. Mit 9 Abbild. im Text und auf 3 Tafeln. M. 2,25.
- Heft 56. Niels Bohr: *Drei Aufsätze über Spektren und Atombau*. 2. Auflage. Mit 13 Abbildungen. M. 5,—.
- Heft 57. Prof. Dr. Hans Cloos: *Der Mechanismus tiefvulkanischer Vorgänge*. Mit 24 Zeichnungen und einer Karte. M. 4,—.
- Heft 58. Dr. Walther Gerlach: *Die experimentellen Grundlagen der Quantentheorie*. 2. Auflage. Mit 43 Abbildungen.
- Heft 59. Prof. Dr. E. Study: *Denken und Darstellung in Mathematik und Naturwissenschaften*. 2. verbesserte und erweiterte Auflage. Mit 10 Abbildungen. M. 3,75.
- Heft 60. Prof. Dr. techn. Milan Vidmar: *Theorie der Kreiselpumpe*. Mit 39 Abbildungen. M. 4,75.
- Heft 61. Reg.-Rat Dr. W. Meissner: *Entfernungs- und Höhenmessung in der Luftfahrt*. Mit 66 Abbildungen. M. 4,—.
- Heft 62. Dr. K. Siebel: *Die Elektrizität in Metallen*. M. 3,50.
- Heft 63. Dr.-Ing. M. Dolch: *Die rationelle Verwertung der niederwertigen Braunkohlen*. Mit 7 Abbildungen. M. 3,—.
- Heft 65. E. Study: *Mathematik und Physik*. Eine erkenntnistheoretische Untersuchung. M. 1,50.
- Heft 66. Dr. Walter Schallreuter: *Über Schwingungserscheinungen in Entladungsröhren*. Mit 14 Abbildungen. M. 1,50.
- Heft 67. Prof. Dr. Eberhard Buchwald: *Das Korrespondenzprinzip*. M. 5,50.
- Heft 68. Direktor Dr. Iwan Döry: *Die Schüttelerscheinungen elektrischer Lokomotiven mit Kurbelantrieb*. Mit 12 Abbildungen. M. 1,50.
- Heft 69. Prof. Dr.-Ing. Fritz Emde: *Sinusrelief und Tangensrelief in der Elektrotechnik*. Mit 18 Bildern. M. 4,50.
- Heft 70. Laurenz Bock: *Die Konstitution der Ultramarine*. Mit 3 Abb. M. 2,40.
- Heft 71. Dr. Ernst v. Angerer: *Technische Kunstgriffe bei physikalischen Untersuchungen*. 2. Auflage. Mit 23 Abbildungen. M. 6,—.
- Heft 72. Dr. Fritz Giese: *Das außerpersönliche Unbewußte. Theoretische Bemerkungen zum intuitiven Denken*. M. 3,50.
- Heft 73. Dr.-Ing. Karl Becker: *Die Röntgenstrahlen als Hilfsmittel für die chemische Forschung*. M. 5,50.