М. М. Постников, Исследования по гомотопической теории непрерывных отображений. I. Алгебраическая теория систем. II. Натуральная система и гомотопический тип, *Тр. МИАН СССР*, 1955, том 46, 3–158

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей работе излагается некоторый общий метод решения гомотопических задач, позволяющий свести любую задачу теории гомотопий к некоторой чисто алгебраической проблеме. Отсутствие такого метода весьма затрудняло исследование гомотопических задач. Поэтому, несмотря на наличие отдельных блестящих достижений, основные задачи гомотопической теории до сих пор не получили решения. К настоящему времени получены, как правило, лишь очень частные результаты, справедливые при сильных ограничениях (типа асферичности или малой размерности), накладываемых на рассматриваемые пространства.

Говоря об основных задачах гомотопической теории, мы имеем в виду следующие три проблемы: задачу о влиянии гомотопических групп на группы гомологий (или, что равносильно, на группы когомологий), задачу о нахождении алгебраической характеристики гомотопического типа полиэдров и проблему классификации непрерывных отображений.

На первую задачу впервые обратил внимание Хопф [12]. Эта задача вызвала многочисленные исследования и оказалась связанной с теорией расширений групп и алгебр, а также с рядом других алгебраических теорий (см., например, [5]). Несмотря на большое число работ, посвященных задаче о влиянии гомотопических групп на группы когомологий (см. введение, п. 7), эта задача была решена лишь при очень сильных ограничениях, накладываемых на рассматриваемые пространства. В настоящей работе указанная задача полностью решена: показано, как можно вычислить группы когомологий пространства по его гомотопическим группам и некоторым новым инвариантам, в совокупности составляющим так называемую натуральную систему. Все полученные до сих пор результаты о влиянии гомотопических групп на группы гомологий выводятся отсюда как частные случаи. Кроме того, из полученных формул почти непосредственно следует, что гомотопические группы односвязного конечного полиэдра имеют конечное число образующих. Этот вопрос оставался открытым с 1936 г. и лишь недавно был решен совершенно иным методом Серром [18].

Важнейшей задачей топологии долгое время являлась проблема гомеоморфизма, т. е. проблема нахождения инвариантов, позволяющих определить, гомеоморфны ли данные пространства. С течением же времени основное значение приобрела задача об отыскании критериев принадлежности двух пространств одному гомотопическому типу, поскольку было замечено, что все известные инварианты имеют гомотопический характер и поэтому могут дать самое большее лишь характеристику гомотопического типа. Для отдельных классов пространств (например, для линзовых пространств) такие критерии найдены сравнительно давно. Общей проблемой гомотопического типа занимался Уайтхед, опубликовавший начиная с 1939 г. серию работ на эту тему. Ему удалось решить поставленную задачу для односвязных четырехмерных [22] и любых трехмерных [21] полиэдров. В иной формулировке результаты Уайтхеда, относящиеся к трехмерным полиэдрам, изложены в работе Уайтхеда и Маклейна [25]. В дальнейшем теоремы Уайтхеда были несколько обобщены Бургером [2]. В настоящей работе показано, что введенный здесь инвариант — натуральная система — дает полную характеристику гомотопического типа любого полиэдра. Результаты, полученные Уайтхедом и Бургером, являются частными случаями доказанных здесь общих теорем.

Центральной задачей гомотопической теории непрерывных отображений является решение вопроса о гомотопности данных отображений (задача классификации непрерывных отображений). Ответ требуется дать, как правило, в терминах теории гомологий. Частным случаем этой задачи является известная задача о вычислении гомотопических групп. В задаче классификации получено много замечательных результатов, среди которых следует особо отметить теорему Хопфа, Уитнея, Л. С. Понтрягина, Стинрода. Однако, как правило, полученные до сих пор результаты относятся к весьма узкому классу пространств, так как трудности, возникающие при исследовании гомотопических свойств пространств все более широких классов, быстро возрастают. Можно упростить задачу классификации, допустив, чтобы в ее решении были использованы не только гомологические инварианты, но и, скажем, гомотопические группы. Другими словами, для упрощения задачи можно предположить, что нам известны гомотопические группы рассматриваемых пространств.

Однако и на этом пути были до сих пор получены лишь предварительные результаты. В заметке автора [16] понимаемая в таком смысле задача классификации полностью решена, причем, кроме гомологических средств, в изложенном там решении используются лишь натуральные системы, т. е. по существу гомотопические группы. Тем же методом можно получить решение и более общей задачи о существовании секущих поверхностей косых произведений.

Таким образом, важнейшие задачи гомотопической теории сводятся к задаче вычисления и алгебраического изучения натуральных систем. Для вычисления натуральной системы нужно прежде всего знать гомотопические группы рассматриваемого пространства. Полученное же здесь решение задачи о влиянии гомотопических групп на группы гомологий может оказаться полезным для вычисления гомотопических групп, аналогично тому, как оно оказалось полезным для доказательства конечности числа их образующих.

Настоящее сочинение содержит лишь первые две части работы, посвященные изложению общей теории натуральных систем. Здесь подробно изложены все вопросы, связанные с задачей о влиянии гомотопических групп на группы когомологий. Подробно изложено также решение задачи об алгебраической характеристике гомотопического типа полиэдров. Остальные части, посвященные классификации отображений и методам вычислений натуральных систем, будут опубликованы позднее.

Так как на русском языке почти полностью отсутствует литература по гомотопической теории, то во введении излагаются основные определения и факты теории гомотопий, необходимые для понимания основной части работы.

В п. 1 введения дано определение гомотопии и гомотопического типа. Там же доказан важный для второй главы критерий того, что данное отображение является гомотопической эквивалентностью. В этом же пункте рассмотрена связь между гомотопиями и продолжениями. В п. 2 рассматривается фундаментальная группа.

В п. 3 введения уточняется алгебраическая терминология; вводится используемое в дальнейшем понятие серии.

В п. 4 рассмотрены локальные семейства групп, введенные Стинродом [19] под названием систем локальных коэффициентов. Доказано, что семейства, индуцированные гомотопными между собой непрерывными отображениями, изоморфны.

В п. 5 в наиболее удобной для дальнейшего форме изложены определение и формулировки основных свойств гомотопических групп. Доказательства этих свойств можно найти в статье В. А. Рохлина [17]; определение гомотопической группы, данное в [17], отличается от принятого здесь, но несущественно. В конце пункта сформулировано несколько простых лемм, связанных с теорией гомотопических групп.

В п. 6 определены сингулярные группы когомологий, предложенные Эйленбергом [4]. Изложение краткое, так как в первой главе подробно изложена более общая теория когомологий.

Наконец, в п. 7 введения формулируются результаты Эйленберга и Маклейна [6, 7] относительно влияния гомотопических групп на группы когомологий. Рассматриваемые здесь алгебраические конструкции изложены кратко, так как они подробно изучаются в первой части.

Первая часть носит чисто алгебраический характер. Она почти независима от введения, и для ее чтения достаточно первоначальных сведений по теории групп. Здесь определяется и изучается новый алгебраический объект — система. Предварительно изучается некоторый класс абстрактных комплексов, так называемых полусимплициальных комплексов. Необходимость введения полусимплициальных комплексов объясняется тем, что многие естественно возникающие абстрактные клеточные комплексы не являются симплициальными, хотя близки к ним, так как допускают, например, построение произведения цепей (что, как известно, в произвольных клеточных комплексах невозможно). В заметке [14] автор попытался аксиоматически определить класс абстрактных клеточных комплексов, близких к симплициальным и охватывающих все интересные случаи. Это определение и было первоначально положено в основу теории натуральных систем. Одновременно Эйленберг и Зильбер [8] предложили более удачное определение комплексов, которые они назвали полусимплициальными. Их определение близко к определению автора, но логически более совершенно. В настоящей работе теория натуральных систем построена на основе полусимплициальных комплексов. При этом оказалось удобным незначительно изменить первоначальное определение Эйленберга и Зильбера. Это измененное определение комплекса изложено в п. 8. Там же определены некоторые классы полусимплициальных комплексов (связные, сильносвязные, правильные, асферичные и полные). Полные полусимплициальные комплексы в том виде, как они здесь определены, совпадают с полными комплексами в смысле Эйленберга и Зильбера, но предложенная здесь аксиоматика, повидимому, удобнее. Рассмотрены некоторые свойства полных комплексов. Например, доказана их сильная связность (в предположении одновершинности, от которого впрочем легко освободиться, заменив его условием связности).

В заключение этого пункта в рамках теории полусимплициальных комплексов определены симплициальные комплексы, которые, как показывается далее, совпадают с обыкновенными симплициальными комплексами, с введенным в них локальным порядком вершин. Заметим, что обычные симплициальные комплексы не являются полусимплициальными и, для того чтобы обратить их в полусимплициальные, необходимо ввести в них локальный порядок вершин. Доказывается, что второе барицентрическое подразделение любого полусимплициального комплекса симплициально. Таким образом, вообще говоря, мы могли бы ограничиться только симплициальными комплексами, но возникающие при этом усложнения настолько серьезны, что проще независимо построить теорию полусимплициальных комплексов, тем более, что она оказывается нисколько не сложнее теории симплициальных комплексов.

В п. 9 определены (следуя [8]) симплициальные отображения и некоторые другие связанные с ними понятия. Заметим, что в классической теории определенным здесь симплициальным отображениям соответствуют невырожденные симплициальные отображения. Вырожденные симплициальные отображения в нашу схему не укладываются, что способствует упрощению теории.

Геометрические примеры рассматриваются во второй части.

Обычные определения групп когомологий симплициальных комплексов дословно переносятся и в полусимплициальные комплексы (пп. 13 и 14). Однако для наших целей обычных групп когомологий недостаточно. Оказывается необходимым перенести в полусимплициальные комплексы теорию когомологий с локальными коэффициентами. Такой перенос был осуществлен Эйленбергом и Зильбером [8]. Однако предпочтительнее перенести в полусимплициальные комплексы не теорию когомологий над локальными семействами, а эквивалентную ей теорию когомологий относительно коциклов. Краткий очерк этой теории был дан автором в заметке [13]. В п. 15 предварительно определяются коциклы и их когомологии над мультипликативными группами. Теория когомологий относительно коцикла изложена в п. 16. Так как ее полное изложение, даже для симплициальных комплексов, опубликовано не было, то здесь она изложена очень подробно.

В статье [7] были введены некоторые группы $E(k, G)$, связанные с группами когомологий мультипликативных групп. В п. 17 изложено их определение сразу для любых полусимплициальных комплексов. Наконец, в п. 18 рассмотрены (следуя [8]) когомологии в полных полусимплициальных комплексах.

В п. 19, которым начинается § 3 первой части, определяется основное в теории систем понятие расширения полусимплициального комплекса. В п. 20 изучается связь между расширениями и симплициальными отображениями. Первоначальное доказательство основного предложения этого пункта было чрезвычайно сложным. Здесь помещено переработанное доказательство, использующее некоторые соображения из статьи [7]. В п. 21 дана новая интерпретация групп $E(k, G)$, введенных в п. 17. Наконец, в п. 22 определено основное для всей статьи понятие системы.

В § 4 первой части описывается некоторый метод построения систем, позволяющий получить любую из них. Именно этим методом строится в первой части натуральная система.

Результаты § 3 и § 4 являются новыми. В первоначальной форме они опубликованы в заметке [14].

В § 1 второй части с точки зрения теории полусимплициальных комплексов рассматриваются сингулярные когомологии топологического пространства. Изложение в этом параграфе достаточно подробное, так как работ, посвященных теории сингулярных когомологий, на русском языке нет.

В § 2 второй части дается определение натуральной системы. С помощью построений первой части это делается теперь очень быстро. Используемый здесь нормальный комплекс независимо от автора был определен и изучен Эйленбергом и Зильбером [8] (они называли его минимальным комплексом). Здесь же доказана теорема I, содержащая полное решение задачи о влиянии гомотопических групп на группы когомологий; частными случаями этой теоремы являются сформулированные в п. 7 результаты Эйленберга и Маклейна.

Существует много различных определений геометрического комплекса (т. е. полиэдра). Для наших целей оказывается наиболее удобным предложенное Уайтхедом понятие CW-комплекса. Эти комплексы названы здесь ячеечными полиэдрами. Их определение и основные свойства изложены в п. 35. Доказательства сформулированных там предложений (кроме одного, важнейшего) опущены. Читатель может найти их в [21]. В следующих пунктах § 3 второй части рассматриваются частные виды ячеечных полиэдров, являющиеся геометрическими реализациями симплициальных и полусимплициальных комплексов. Идея их построения заимствована у Дживера [11], построившего геометрическую реализацию сингулярного комплекса. Сходные конструкции рассматривал Уайтхед [24]. Заканчивается этот параграф доказательством двух основных теорем (теоремы II и III), содержащих полную характеристику гомотопического типа любых полиэдров. Из этих теорем непосредственно следуют многие известные ранее теоремы, часть из которых приведена.

Наконец, в дополнении излагается доказательство конечности числа образующих гомотопических групп любого односвязного пространства, группы когомологий которого имеют конечное число образующих (в частности, любого конечного полиэдра).

При написании настоящей работы автор стремился к тому, чтобы для ее понимания была достаточна лишь незначительная подготовка (в объеме начального курса топологии). Однако от читателя требуется достаточно высокая математическая культура. Осведомленный читатель может пропустить введение и § 1 и 2 первой части, ознакомившись лишь с принятой терминологией.

Цифры в квадратных скобках относятся к списку цитированной литературы, приведенному в конце работы.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

1. Основные понятия теории гомотопий

Пусть X и Y — произвольные топологические пространства. *Гомотопией отображений* пространства X в пространство Y называется принимающая значения в пространстве Y функция $F(x, t)$ двух переменных: точки x пространства X и действительного числа t, подчиненного условиям $0 \leqslant t \leqslant 1$, функция непрерывная по совокупности обеих переменных. Другими словами, F есть непрерывное отображение в пространство Y топологического произведения $X \times I$ пространства X и числового отрезка $I = [0, 1]$. Гомотопия F порождает семейство f_t непрерывных отображений

$$f_t(x) = F(x,\quad)$$

пространства X в пространство Y, непрерывно зависящих от параметра t. Такое семейство отображений часто также называется гомотопией.

Если на некотором подпространстве X_0 пространства X гомотопия F не зависит от t, т. е. если для любой точки $x \in X_0$ и любого $t \in I$

$$F(x, t) = F(x, 0),$$

то гомотопия называется *связанной* (или *тождественной*) *на подпространстве* X_0. Не связанные гомотопии называются также *свободными*. Их можно рассматривать как связанные на пустом подпространстве.

Говорят, что непрерывное отображение g пространства X в пространство Y *гомотопно* непрерывному отображению f, в записи

$$f \sim g,$$

если существует такая гомотопия $F(x, t) = f_t(x)$, что

$$f_0 = f, \ f_1 = g,$$

т. е. если для любой точки $x \in X$

$$f(x) = F(x, 0);$$

$$g(x) = F(x, 1).$$

Гомотопия F называется *гомотопией, связывающей отображение* f *с отображением* g. Если она тождественна на подпространстве X_0, то отображение g называется (*связанно*) *гомотопным отображению* f *относительно подпространства* X_0, в записи

$$f \sim g \operatorname{rel} X_0.$$

Для связанной гомотопности необходимо, но, конечно, не достаточно, чтобы отображения f и g совпадали на подпространстве X_0.

Легко видеть, что отношение гомотопности двух отображений рефлексивно, симметрично и транзитивно, так что совокупность всех непрерывных отображений пространства X в пространство Y распадается на непересекающиеся гомотопические классы попарно гомотопных между собой отображений. Аналогичные обстоятельства имеют место и для связанных гомотопий.

Пусть f_1 и g_1 — гомотопные между собой непрерывные отображения пространства X в пространство Y, а f_2 и g_2 — гомотопные между собой непрерывные отображения пространства Y в пространство Z. Тогда составные отображения $f_2 f_1$ и $g_2 g_1$ пространства X в пространство Z также гомотопны между собой. Это простое замечание играет во всей теории основную роль, и мы часто будем им пользоваться (не оговаривая этого явно).

Вопросы, опирающиеся на понятие гомотопического класса (как для свободных гомотопий, так и для связанных), составляют предмет гомотопической теории непрерывных отображений, или, как мы предпочитаем говорить, *теории гомотопий*. В этой работе мы ограничимся изучением лишь свободных гомотопий, привлекая связанные лишь постольку, поскольку это необходимо для нашей основной цели. Это ограничение предмета исследования вызвано не существом дела, а лишь желанием выяснить все основные моменты на простейшем и вместе с тем важнейшем случае свободных гомотопий.

Очевидно, что при топологическом преобразовании отношение гомотопности не разрушается. Это показывает, что теория гомотопий есть отдел топологии. Оказывается, что отношение гомотопности не разрушается и при более общих преобразованиях, чем топологические. Естественно, что такого рода преобразования должны играть в теории гомотопий роль гомеоморфных отображений общей топологии. Определим их.

Непрерывное отображение f пространства X в пространство Y называется *гомотопической эквивалентностью*, если существует такое непрерывное отображение g пространства Y в пространство X, что составные отображения gf и fg, являющиеся отображениями в себя соответственно пространства X и пространства Y, гомотопны тождественным отображениям 1_X и 1_Y соответствующих пространств:

$$gf \sim 1_X, \quad fg \sim 1_Y.$$

Отображение g также гомотопически эквивалентно и называется *эквивалентностью, обратной к эквивалентности* f. Заметим, что эквивалентность f обратную эквивалентность g однозначно не определяет.

Два пространства называются пространствами *одного гомотопического типа,* если существует хотя бы одно гомотопически эквивалентное отображение одного пространства в другое. Значение понятия гомотопического типа выясняется следующими соображениями.

Пусть α — произвольный гомотопический класс отображений пространства X_1 в пространство Y_1 и пусть f_1 — гомотопически эквивалентное отображение пространства X_2 в пространство X_1, а g_1 — гомотопически эквивалентное отображение пространства Y_1 в пространство Y_2. Легко видеть, что все отображения пространства X_2 в пространство Y_2, имеющие вид

$$g_1 f f_1,$$

где f — любое отображение класса α, принадлежат одному гомотопическому классу β отображений пространства X_2 в пространство Y_2. Нетрудно убедиться, что так построенное отображение $\alpha \to \beta$ является взаимно однозначным отображением совокупности гомотопических классов отображений пространства X_1 в пространство Y_1 на совокупность гомотопических классов отображений пространства X_2 в пространство Y_2. Таким образом, при замене пространств пространствами того же гомотопического типа строение совокупности гомотопических классов не меняется. Поэтому в теории гомотопий можно рассматривать пространства одного гомотопического класса как одинаковые.

С помощью понятия гомотопического типа теорию гомотопий можно определить как теорию инвариантов гомотопического типа, т. е., как теорию, изучающую свойства пространств, не меняющихся при замене пространств пространствами того же гомотопического типа.

Теория гомотопий тесно связана с теорией продолжений. Напомним относящиеся сюда основные факты.

Пусть X_0 — некоторое подпространство пространства X, а f — его непрерывное отображение в пространство Y. *Продолжением на* X отображения f называется такое непрерывное отображение g пространства X в пространство Y, что для любой точки $x \in X_0$

$$g(x) = f(x).$$

Отображение f называется *частью на* X_0 отображения g и обозначается через y/X_0. Часть на X_0 тождественного отображения 1_X пространства X на себя называется *отображением вложения подпространства* X_0 *в пространство* X.

Теория продолжений занимается разысканием необходимых и достаточных условий существования продолжения. Такие условия (достаточно простые и удобные) пока получены лишь в очень частных случаях. Их ценность для теории гомотопий объясняется тем, что вопрос о гомотопности двух отображений f и g пространства X в пространство Y непосредственно сводится к некоторой задаче продолжения. Действительно, гомотопия, связывающая отображение f с отображением g, является продолжением на произведение $X \times I$ отображения F множества $X \times 0 \cup X \times 1$, задаваемого формулой

$$F(x, t) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad t = 0; \\ g(x), & \text{если} \quad t = 1. \end{cases}$$

Таким образом, отображения f и g тогда и только тогда гомотопны между собой, когда отображение F можно продолжить с подпространства $X \times 0 \cup X \times 1$ на все пространство $X \times I$.

Аналогично можно трактовать и задачу о связанной на X_0 гомотопии (с заменой $X \times 0 \cup X \times 1$ множеством $X \times 0 \cup X_0 \times I \cup X \times 1$).

Указанная связь между гомотопиями и продолжениями лежит в основе почти всех теорем теории гомотопий. Только после установления этой связи стал возможным наблюдающийся в настоящее время бурный расцвет гомотопической теории.

В заключение этого пункта рассмотрим несколько простых теорем, постоянно используемых в теории гомотопий.

Подпространство X_0 пространства X называется его *ретрактом*, если тождественное отображение подпространства X_0 на себя можно продолжить до отображения всего пространства X на подпространство X_0. Другими словами, подпространство X_0 называется ретрактом пространства X, если существует такое непрерывное отображение g пространства X на пространство X_0, что для любой точки $x \in X_0$

$$g(x) = x.$$

Это отображение g называется *ретрагирующим*. Если оно, рассматриваемое как отображение пространства X в себя, гомотопно тождественному отображению пространства X на себя, то X_0 называется *деформационным ретрактом пространства* X. Гомотопия, связывающая тождественное отображение с ретрагирующим, называется *ретрагирующей деформацией*.

Значение ретрактов для теории продолжений определяется следующим предложением:

[1.1] *Если X_0 — ретракт пространства X, то любое отображение f подпространства X_0 в произвольное пространство Y можно продолжить до отображения всего пространства X.*

Действительно, отображение fg, где g — ретрагирующее отображение, является требуемым продолжением.

Что же касается деформационных ретрактов, то они играют основную роль в задаче изучения гомотопического типа:

[1.2] *Гомотопический тип деформационного ретракта X_0 совпадает с гомотопическим типом всего пространства X.*

Действительно, пусть g — ретрагирующее отображение пространства X на подпространство X_0, а i — отображение вложения подпространства X_0 в пространство X. Очевидно, что

$$gi = 1_{X_0}.$$

Кроме того, по условию отображение ig гомотопно тождественному отображению 1_X:

$$ig \sim 1_X.$$

Таким образом, g и i являются взаимо обратными гомотопическими эквивалентностями. Тем самым предложение [1.2] доказано.

Это предложение допускает далекое обобщение, устанавливающее чрезвычайно полезное необходимое и достаточное условие того, что данное отображение является гомотопической эквивалентностью. Так как относящиеся сюда понятия известны недостаточно широко, мы изложим их подробно.

Для простоты будем считать, что рассматриваемые пространства удовлетворяют первой аксиоме отделимости, т. е. что их точки замкнуты. Для тех приложений, которые мы имеем в виду, это ограничение несущественно.

Пусть f — произвольное непрерывное отображение пространства X в пространство Y. Положим

$$M = X \times I \cup Y$$

(предполагается, что пространства $X \times I$ и Y не пересекаются). Рассмотрим множество Z, элементами которого являются все точки пространства M вида (x, t), $x \in X$, $0 \leqslant t < 1$ и все его подмножества вида $f^{-1}(y) \times 1 \cup y$, $y \in Y$, где $f^{-1}(y)$ — полный прообраз точки y. Каждая точка ξ множества M содержится, очевидно, в одном и только одном элементе множества Z. Элемент, содержащий точку ξ, обозначим через $\alpha(\xi)$. Таким образом, α есть отображение пространства M на множество Z. Введем в Z топологию, объявив замкнутыми множествами те и только те множества, полные прообразы которых при отображении α замкнуты в M. Тем самым Z окажется топологическим пространством, а отображение α — непрерывным. Так построенное пространство Z называется *цилиндром отображения* f.

Очевидно, что отображение i пространства X и отображение j пространства Y в пространство Z, определенные формулами

$$i(x) = \alpha(x, 0);$$
$$j(y) = \alpha(y),$$

гомеоморфны. Мы будем считать пространства X и Y вложенными в силу этих гомеоморфизмов в пространство Z. В соответствии с этим отображения i и j мы будем трактовать как отображения вложения.

Отметим две важные формулы, первая из которых есть просто определение:

$$\alpha(x,\ 0) = i(x); \tag{1.1}$$

$$\alpha(x,\ 1) = jf(x). \tag{1.2}$$

Теперь мы можем сформулировать упомянутое выше обобщение предложения [1.2]:

[1.3] *Отображение f тогда и только тогда является гомотопической эквивалентностью, когда пространство X есть деформационный ретракт цилиндра Z.*

Докажем сначала достаточность этого условия.

Пусть X — деформационный ретракт цилиндра Z и g_t — соответствующая ретрагирующая деформация. Оказывается, что отображение

$$g = i^{-1}g_1 j$$

пространства Y в пространство X удовлетворяет соотношениям:

$$gf \sim 1_X; \tag{1.3}$$

$$fg \sim 1_Y. \tag{1.4}$$

Действительно, полагая

$$F(x,\ t) = i^{-1}g_1\alpha(x,\ t), \qquad x \in X, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

найдем, используя формулы (1.1) и (1.2), что

$$F(x,\ 0) = i^{-1}g_1\alpha(x,\ 0) = i^{-1}g_1 i(x) = x;$$

$$F(x,\ 1) = i^{-1}g_1\alpha(x,\ 1) = i^{-1}g_1 jf(x) = gf(x).$$

Таким образом, F является гомотопией, связывающей отображение 1_X с отображением gf, что доказывает формулу (1.3).

Пусть теперь $y \in Y$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Найдем такую точку $\xi \in M$, что

$$\alpha(\xi) = g_t j(y),$$

и определим $G(y,\ t) \in Y$, положив

$$G(y,\ t) = \begin{cases} f(x), & \text{если } \xi = (x,\ \tau),\ 0 \leqslant \tau \leqslant 1; \\ \xi, & \text{если } \xi \in Y. \end{cases}$$

Несмотря на то, что точка ξ определена неоднозначно, точка $G(y,\ t)$ определена этими формулами единственным образом. Легко видеть, что так полученное отображение G произведения $Y \times I$ в пространство Y непрерывно, т. е. является гомотопией. Если $t = 0$, то за точку ξ можно взять точку y, так что

$$G(y,\ 0) = y.$$

Если же $t = 1$, то точка ξ имеет вид $(g(y),\ 0)$, так что

$$G(y,\ 1) = fg(y).$$

Таким образом, гомотопия G связывает отображение 1_Y с отображением fg, что доказывает формулу (1.4).

Справедливость формул (1.3) и (1.4) означает, что отображения f и g являются взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями. Тем самым достаточность условия предложения [1.3] доказана.

Докажем необходимость.

Пусть f является гомотопической эквивалентностью и пусть g — гомотопическая эквивалентность, обратная к f. Тогда имеют место формулы (1.3) и (1.4). Пусть F — гомотопия, связывающая отображение 1_X с отображением gf, а G — гомотопия, связывающая отображение 1_Y с отображением fg. Для любой точки $z \in Z$ положим

$$g_t(z) = \begin{cases} \alpha(x,\ s + 4t(1-s)), & \text{если } z = \alpha(x, s) \text{ и } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4}; \\ z, & \text{если } z = \alpha(y) \text{ и } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4}; \\ jG(f(x),\ 4t-1), & \text{если } z = \alpha(x, s) \text{ и } \frac{1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}; \\ jG(y,\ 4t-1), & \text{если } z = \alpha(y) \text{ и } \frac{1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}; \\ \alpha(gf(x),\ 3-4t), & \text{если } z = \alpha(x, s) \text{ и } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}; \\ \alpha(g(y),\ 3-4t), & \text{если } z = \alpha(y) \text{ и } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}; \\ iF(x, 1 + (1-s)(3-4t)), & \text{если } z = \alpha(x, s) \text{ и } \frac{3}{4} \leqslant t \leqslant 1; \\ i\,g(y), & \text{если } z = \alpha(y) \text{ и } \frac{3}{4} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Эти формулы определяют точку $g_t(z)$ однозначно. Легко видеть, что она непрерывно зависит от z и от t. Таким образом, g_t — гомотопия отображений пространства Z в себя. Очевидно, что

$$g_0(z) = Z;$$
$$g_1(z) \in X;$$
$$g_1 i(x) = i(x).$$

Таким образом, отображение g_0 тождественно, а g_1 — ретрагирующее отображение пространства Z на пространство X. Тем самым доказано, что X является деформационным ретрактом цилиндра Z. Предложение [1.3] доказано.

Рассмотрим еще следующий вопрос: можно ли продолжить любое отображение, гомотопное продолжаемому? (Первую аксиому отделимости требовать уже не будем.)

Мы скажем, что для подпространства X_0 пространства X имеет место *лемма о продолжении гомотопии,* если для любого пространства Y и любых гомотопных между собой отображений f и g подпространства X_0 в пространство Y из того, что отображение f

обладает продолжением f' на все X, следует, что и g обладает продолжением, причем это продолжение g' можно выбрать гомотопным продолжению f' и, более того, можно найти гомотопию F', связывающую отображения f' и g' и совпадающую на X_0 с заданной гомотопией F, связывающей отображения f и g.

Мы скажем, что подпространство X_0 пространства X *гомотопически правильно расположено*, если множество $X \times 0 \cup X_0 \times I$ является ретрактом произведения $X \times I$. Известно, например, что любой подполиэдр конечного евклидова полиэдра гомотопически правильно расположен. (Это известная лемма Борсука.) Оказывается, что имеет место следующее предложение:

[1.4] *Для подпространства X_0 тогда и только тогда имеет место лемма о продолжении гомотопии, когда оно гомотопически правильно расположено.*

Начнем с доказательства необходимости.

Пусть для подпространства X_0 имеет место лемма о продолжении гомотопии. Примем за пространство Y множество $X \times 0 \cup X \times I$, а отображения f, g, f' и гомотопию F определим следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= (x,\ 0), \\ g(x) &= (x,\ 1), \\ F(x, t) &= (x,\ t), \end{aligned}\right\} x \in X_0;$$

$$f'(x) = (x,\ 0),\quad x \in X.$$

Тогда гомотопия F' будет искомым ретрагирующим отображением. Необходимость доказана.

Докажем теперь достаточность.

Пусть подпространство X_0 гомотопически правильно расположено в пространстве X. Для доказательства того, что для подпространства X_0 имеет место лемма о продолжении гомотопии, достаточно построить гомотопию F' отображений пространства X в пространство Y, совпадающую на X_0 с гомотопией F и сводящуюся при $t = 0$ к отображению f'. Эти условия определяют гомотопию F' на множестве $X \times 0 \cup X_0 \times I$. Но так как это множество является ретрактом, то согласно [1.1] гомотопию F', построенную пока только на этом множестве, можно продолжить на все произведение $X \times I$. Тем самым предложение [1.4] доказано.

Отсюда и из леммы Борсука следует, что лемма о продолжении гомотопии имеет место для любого подполиэдра конечного полиэдра. Мы часто будем пользоваться этим обстоятельством, не оговаривая этого явно. В § 3 второй части мы введем бесконечные полиэдры и докажем, что лемма Борсука, а значит, и лемма о продолжении гомотопии имеют место для любого подполиэдра такого полиэдра.

2. Пути и их классы

Непрерывная функция $u(t)$ действительного переменного t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, принимающая значения в некотором топологическом пространстве X, называется *путем* пространства X. Другими словами, путь u есть непрерывное отображение в пространство X отрезка $I = [0, 1]$. По традиции принято считать одинаковыми пути, отличающиеся на монотонное преобразование аргумента t. Мы от этой традиции отступим.

Точка $u(0)$ называется *началом*, а точка $u(1)$ — *концом* пути u. Говорят также, что путь u *соединяет* точку $u(0)$ с точкой $u(1)$. Множество всех точек пространства X, которые можно соединить путями с точкой x, называется *линейной компонентой* точки x. Все пространство X распадается на непересекающиеся множества, каждое из которых является линейной компонентой любой своей точки. Эти множества называются *линейными компонентами пространства* X. Пространство называется *линейно связным*, если оно состоит только из одной линейной компоненты. Другими словами, пространство линейно связно, если любые две его точки можно соединить путем. Все линейные компоненты линейно связны. Непрерывное отображение переводит любую линейную компоненту в линейную компоненту, порождая тем самым некоторое соответствие компонент. Очевидно, что гомотопные между собой отображения порождают одинаковые соответствия компонент. Поэтому гомотопическое изучение отображений любых пространств сводится к изучению отображений их линейных компонент. Таким образом, в теории гомотопии достаточно ограничиться линейно связными пространствами.

Пусть x — произвольная точка пространства X. Для всех t положим

$$1_x(t) = x.$$

Так определенный путь 1_x назовем *единичным путем в точке* x.

Пусть u — произвольный путь пространства X. Положив

$$u^{-1}(t) = u(1-t),$$

определим путь u^{-1}, соединяющий конец пути u с его началом. Путь u^{-1} называется *обратным* к пути u.

Для любых путей u и v пространства X, для которых конец $u(1)$ первого совпадает с началом $v(0)$ второго, определим их произведение uv, положив

$$uv(t) = \begin{cases} u(2t), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}; \\ v(2t-1), & \text{если } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Пути u и v называются *сравнимыми* между собой, если

$$u(0) = v(0)$$

и

$$u(1) = v(1),$$

т. е. если их соответственные концевые точки совпадают. Другими словами, пути сравнимы между собой, если они, рассматриваемые как отображения отрезка I, совпадают на его концах 0 и 1. Сравнимые пути называются *гомотопными* между собой, если они связанно гомотопны относительно концов отрезка I. Легко видеть, что отношение гомотопности путей рефлексивно, симметрично и транзитивно, так что совокупность всех путей пространства X распадается на непересекающиеся гомотопические классы. Все пути, принадлежащие некоторому классу $\mathfrak{v}$, имеют общее начало и общий конец. Их общее начало называется *началом класса* $\mathfrak{v}$ и обозначается через $\mathfrak{v}(0)$, а общий конец — соответственно *концом класса* $\mathfrak{v}$ и обозначается через $\mathfrak{v}(1)$. Говорят также, что класс $\mathfrak{v}$ *соединяет* точку $\mathfrak{v}(0)$ с точкой $\mathfrak{v}(1)$.

Легко видеть, что если путь u гомотопен пути v, то путь u^{-1} гомотопен пути v^{-1}. Поэтому для любого класса $\mathfrak{v}$ однозначно определяется *обратный класс* $\mathfrak{v}^{-1}$, как класс, содержащий все пути, обратные к путям класса $\mathfrak{v}$.

Пусть путь u гомотопен пути u', путь v гомотопен пути v' и пусть конец пути u совпадает с началом пути v, так что определено произведение uv. Тогда определено и произведение $u'v'$, как легко видеть, гомотопное произведению uv. Поэтому умножение путей порождает умножение классов. В отличие от умножения путей, умножение классов ассоциативно. Классы единичных путей 1_x являются единицами этого умножения, т. е. если произведение двух классов определено и один из классов единичен, то произведение равно другому классу. Для любого класса $\mathfrak{v}$ произведения $\mathfrak{v}\mathfrak{v}^{-1}$ и $\mathfrak{v}^{-1}\mathfrak{v}$ являются (вообще говоря, разными) единичными классами. Множество с алгебраической операцией, обладающей этими свойствами, называется группоидом (см. [20]). Построенный группоид, элементами которого являются гомотопические классы путей, называется *фундаментальным группоидом пространства* X.

Группоид — понятие непривычное и мало изученное. Поэтому обычно предпочитают из фундаментального группоида конструировать группу. Для этого необходимо выбрать в пространстве X некоторую точку x. Выбор этой точки вносит в построение группы неприятный элемент произвола, от которого совершенно свободно построение группоида.

Путь пространства X называется *замкнутым в точке* x, если его начало и конец совпадают с точкой x. Произведение двух замкнутых в точке x путей всегда определено и замкнуто в точке x. Путь, обратный замкнутому, также замкнут. Единичный путь 1_x в точке x замкнут. Следовательно, совокупность всех классов, замкнутых в точке x путей, образует группу. Она называется *фундаментальной группой пространства X в точке x.*

С точки зрения общей теории группоидов фундаментальная группа в точке x есть группа классов, вдвойне принадлежащих классу пути 1_x. Отсюда следует, что впрочем легко доказать и непосредственно, что фундаментальные группы линейно связного пространства в различных точках все изоморфны между собой. Непосредственное доказательство этого важного факта мы изложим ниже сразу для более общего случая гомотопических групп.

Из независимости фундаментальной группы от точки следует, что тривиальность ее в какой-нибудь точке влечет ее тривиальность во всех других, так что имеет смысл говорить о пространстве с тривиальной фундаментальной группой безотносительно к точке. Пространство с тривиальной фундаментальной группой называется *односвязным.* Легко видеть, что односвязные пространства можно определить, не пользуясь понятием фундаментальной группы, как пространства, в которых любые два сравнимых между собой пути гомотопны.

3. Группы и серии

Известно, что групповую операцию любой группы можно называть либо сложением и тогда обозначать знаком $+$, либо умножением и тогда обозначать знаком $\cdot$, часто опуская его совсем. В первом случае говорят, что группа записана аддитивно, во втором — мультипликативно. Нейтральный элемент аддитивно записанной группы обозначается через 0 и называется нулем, а мультипликативно записанной — через 1 и называется единицей. Соответствующие обозначения употребляются и для обратного элемента ($-g$ и g^{-1}). Мы условимся аддитивно записывать лишь абелевы группы. Аддитивно записанную абелеву группу будем ради краткости называть *аддитивной группой.* Группу, о которой неизвестно, абелева ли она, или абелевость которой не предполагается, будем записывать мультипликативно и называть *мультипликативной группой.*

Группу, состоящую из одного нейтрального элемента (нуля для аддитивной и единицы для мультипликативной), назовем *тривиальной.* Аддитивную тривиальную группу будем обозначать знаком 0, а мультипликативную — знаком 1.

Пусть A — мультипликативная, а G — аддитивная группы. Мы скажем, что группа A *представлена* в группе G или что A есть *группа левых операторов* группы G, если для любого элемента α группы A

и любого элемента g группы G определен элемент αg группы G, причем для любых элементов α, β группы A и любых элементов g, g_1, g_2 группы G:

ПР 1 $\qquad 1g = g;$

ПР 2 $\qquad \alpha(\beta g) = (\alpha\beta) g;$

ПР 3 $\qquad \alpha(g_1 + g_2) = \alpha g_1 + \alpha g_2.$

Согласно ПР 3 отображение θ_α группы G в себя, определенное формулой

$$\theta_\alpha(g) = \alpha g,$$

является эндоморфизмом, а из ПР 1 и ПР 2 следует, что это даже автоморфизм, причем отображение

$$\alpha \to \theta_\alpha$$

есть гомоморфное отображение группы A в группу автоморфизмов группы G. Обратно, любое гомоморфное отображение группы A в группу автоморфизмов группы G определяет некоторое представление. Заметим, что употребляющаяся здесь терминология несколько расходится с общепринятой. Именно, то, что мы называем представлением в группе G, принято называть представлением в группе автоморфизмов группы G. Мы изменили терминологию исключительно в интересах краткости.

Если для любого элемента g группы G:

$$\alpha g = g,$$

т. е. если элементу α группы A соответствует тождественный автоморфизм группы G, то говорят, что элемент α *представлен тривиально* или что он *тривиально действует* в группе G. Все тривиально представленные элементы образуют нормальный делитель группы A — ядро гомоморфизма $\alpha \to \theta_\alpha$. Этот нормальный делитель называется *ядром представления*. Если все элементы группы A тривиально действуют в группе G, т. е. если ядро представления совпадает со всей группой A, то представление называется *тривиальным*.

Пусть группа A представлена в группе G, а группа B—в группе H и пусть θ некоторый гомоморфизм группы A в группу B. Гомоморфное отображение ϑ группы G в группу H называется θ-*гомоморфизмом*, если

$$\vartheta(\alpha g) = \theta(\alpha)\vartheta(g)$$

для любого элемента α группы A и любого элемента g группы G. Если A = B, а θ — тождественный автоморфизм 1_A группы A, то гомоморфизм ϑ иначе называется *операторным*.

Счетную последовательность групп

$$G^1,\ G^2,\ \cdots$$

мы назовем *серией*, если для $p>1$ группы G^p аддитивны, а группа G^1 мультипликативна и представлена в каждой из групп G^p.

Пусть $\{G^r\}$ и $\{H^r\}$ — две серии и пусть для любого $r \geqslant 1$ задано гомоморфное отображение θ^r группы G^r в группу H^r. Если для любого $p>1$ гомоморфное отображение θ^p является θ^1-гомоморфизмом, то последовательность $\theta=\{\theta^r\}$ называется *гомоморфным отображением* серии $\{G^r\}$ в серию $\{H^r\}$. Если для всех $r \geqslant 1$ гомоморфизмы θ^r *проективны* [т. е. $\theta^r(G^r)=H^r$], то гомоморфизм θ называется *проективным*. Если для всех $r \geqslant 1$ гомоморфизмы θ^r инъективны (т. е. имеют тривиальные ядра), то гомоморфизм θ также называется *инъективным*. Гомоморфизм одновременно проективный и инъективный называется *изоморфизмом*. Серии называются *изоморфными*, если существует хотя бы одно изоморфное отображение одной серии на другую.

4. Локальные семейства

Локальные семейства под названием систем локальных групп (или иных алгебраических объектов) были впервые определены и изучены в [19]. Отсылая за подробностями к этой статье, мы изложим необходимый для нас минимум фактов теории локальных семейств. Для простоты мы ограничимся локальными семействами аддитивных групп, но все сказанное будет с очевидными изменениями справедливо и для локальных семейств любых других алгебраических объектов.

Говорят, что в линейно связном пространстве X задано *локальное семейство* $\Gamma=\{G_x,\ \alpha_u\}$ аддитивных групп, если любой точке $x \in X$ отнесена некоторая аддитивная группа G_x, а любому пути u — изоморфное отображение α_u группы $G_{u(1)}$ на группу $G_{u(0)}$, причем

ЛС 1 гомотопным между собой путям соответствуют одинаковые изоморфизмы;

ЛС 2 если $w=uv$, то $\alpha_w=\alpha_u\alpha_v$.

Согласно ЛС 1 изоморфизм α_u зависит только от гомотопического класса υ пути u, и потому его можно обозначить через α_υ. Таким образом, локальное семейство Γ порождает соответствие

$$\upsilon \rightarrow \alpha_\upsilon,$$

причем α_υ — изоморфное отображение группы $G_{\upsilon(1)}$ на группу $G_{\upsilon(0)}$. Можно было бы в определении локального семейства считать это соответствие первоначальным и получить из него соответствие

$$u \rightarrow \alpha_u.$$

Обе формы определения локального семейства вполне равносильны и одинаково удобны.

Очевидно, что все группы G_x локального семейства Γ изоморфны между собой. Если все они совпадают, то локальное семейство называется *приведенным*. Для приведенного локального семейства все изоморфизмы α_u являются автоморфизмами соответствующей группы. Если все эти автоморфизмы тождественны, то Γ называется *простым приведенным семейством*.

Пусть $\Gamma = \{G_x, \alpha_u\}$ — произвольное локальное семейство аддитивных групп, а x_0 — некоторая точка пространства X. Положим, $G = G_{x_0}$. Любому классу υ замкнутых в точке x_0 путей пространства X в локальном семействе Γ соответствует некоторый автоморфизм α_υ группы G. Согласно ЛС 2 соответствие

$$\upsilon \to \alpha_\upsilon$$

гомоморфно и, следовательно, определяет некоторое представление фундаментальной группы пространства X в точке x_0 в группе G. Это представление называется представлением, *индуцированным* семейством Γ. Если индуцированное представление тривиально, то Γ называется *простым* локальным семейством. Простое приведенное семейство в этом смысле просто. Легко видеть, что простота семейства Γ не зависит от выбора точки x_0. Это следует из того, что простое семейство можно определить как семейство, в котором изоморфизмы, соответствующие любым двум сравнимым путям, совпадают. Таким образом, группы простого семейства в двух различных точках связаны однозначно определенным изоморфизмом, и потому их можно отождествить. Очевидно, что в односвязном пространстве любое локальное семейство просто. Оказывается, что в неодносвязном пространстве всегда существуют непростые локальные семейства. Действительно, для любой аддитивной группы G и любого представления в группе G фундаментальной группы пространства X в точке x_0 существует локальное семейство $\Gamma = \{G_x, \alpha_u\}$, для которого $G_{x_0} = G$ и индуцированное которым представление совпадает с данным. Более того, существует даже приведенное семейство, обладающее этими свойствами. Чтобы построить это семейство, выберем для любой точки x пространства X некоторый путь u_x, соединяющий ее с точкой x_0. За путь u_{x_0} примем единичный путь 1_{x_0}. Для любого пути u путь

$$u_{u(0)}^{-1}(uu_{u(1)})$$

замкнут в точке x_0. В заданном представлении его классу соответствует некоторый автоморфизм группы G. Этот автоморфизм мы обозначим через α_u. Ясно, что семейство автоморфизмов α_u определяет приведенное локальное семейство $\{G, \alpha_u\}$ и представление, индуцированное этим семейством, совпадает с заданным. Таким образом:

[4.1] *Любое локальное семейство индуцирует некоторое представление фундаментальной группы пространства, причем любое представление индуцируется некоторым локальным семейством* (вообще говоря, не единственным даже в классе приведенных семейств).

Пусть $\Gamma = \{G_x, \alpha_u\}$ и $H = \{H_x, \beta_u\}$ — локальные семейства групп в пространстве X и пусть любой точке $x \in X$ отнесено гомоморфное отображение α_x группы G_x в группу H_x. Если для любого пути u пространства X

$$\alpha_{u(0)} \alpha_u = \beta_u \alpha_{u(1)},$$

то семейство $\alpha = \{\alpha_x\}$ гомоморфизмов α_x называется *гомоморфным отображением* локального семейства Γ в локальное семейство H.

Если все гомеоморфизмы α_x проективны, то гомеоморфизм α также называется *проективным*. Если все гомеоморфизмы α_x инъективны, то гомеоморфизм α также называется *инъективным*. Гомеоморфизм одновременно проективный и инъективный называется *изоморфизмом*. Локальные семейства называются *изоморфными*, если существует хотя бы одно изоморфное отображение одного на другое.

Пусть $\Gamma = \{G_x, \alpha_u\}$ — произвольное локальное семейство групп в пространстве X. Выберем, как выше, для каждой точки x путь u_x, соединяющий ее с точкой x_0. Положив

$$H = G_{x_0};$$

$$\beta_u = \alpha_{u_{u(0)}}^{-1} \alpha_u \alpha_{u_{u(1)}},$$

мы, как легко видеть, определим в пространстве X приведенное локальное семейство $H = \{H, \beta_u\}$. Очевидно, что семейство α изоморфизмов α_{u_x} является изоморфным отображением семейства Γ на семейство H. Таким образом:

[4.2] *Любое локальное семейство изоморфно приведенному.*

Так как очевидно, что семейство, изоморфное простому, само просто, то отсюда следует:

[4.3] *Любое простое локальное семейство изоморфно простому приведенному.*

Пусть f — непрерывное отображение пространства X в пространство Y, а $H = \{H_y, \beta_v\}$ — некоторое локальное семейство аддитивных групп в пространстве Y. Положив

$$G_x = H_{f(x)};$$

$$\alpha_u = \beta_{fu},$$

мы, как легко видеть, определим в пространстве X локальное семейство $\Gamma = \{G_x, \alpha_u\}$ аддитивных групп. Это семейство называется семейством, *индуцированным семейством* H *и отображением* f, и обозначается через $f^*\mathrm{H}$

$$f^*\mathrm{H} = \{H_{f(x)}, \beta_{fu}\}.$$

Пусть g — отображение пространства X в пространство Y, гомотопное отображению f, и пусть F — гомотопия, связывающая отображение f с отображением g. Любой точке x пространства X отнесем путь u_x^F пространства Y, положив

$$u_x^F(t) = F(x, t).$$

Легко видеть, что, отнеся любой точке x пространства X изоморфизм

$$\alpha_x^F = \beta_{u_x^F},$$

мы получим изоморфное отображение α^F семейства $g^*\mathrm{H}$ на семейство $f^*\mathrm{H}$. Таким образом:

[4.4] *Локальные семейства, индуцированные гомотопными между собой отображениями, изоморфны. Этот изоморфизм однозначно определяется гомотопией, связывающей данные отображения.*

5. Гомотопические группы

Пусть X — произвольное линейно связное пространство и x — некоторая его точка. Пара (f, E^r), где E^r — произвольный r-мерный поляризованный элемент*, а f — некоторое его отображение в пространство X, переводящее его границу в точку x, называется *r-мерным сфероидом первого рода пространства X в точке x*. Элемент E^r называется *прообразом* сфероида (f, E^r). Сфероиды (f_1, E_1^r) и (f_2, E_2^r) называются *эквивалентными*, если существует такое изоморфное отображение** φ элемента E_1^r на элемент E_2^r, что отображения f_1 и $f_2\varphi$ элемента E_1^r в пространство X гомотопны между собой относительно границы элемента E_1^r. Очевидно, что совокупность всех сфероидов первого рода пространства X в точке x распадается на *типы* попарно эквивалентных между собой сфероидов.

Сфероидом второго рода называется пара (g, S^r), состоящая из r-мерной поляризованной сферы*** S^r и ее непрерывного отображения g в пространство X, переводящего ее полюс в точку x. Сфера S^r называется *прообразом* сфероида (g, S^r). Сфероиды (g_1, S_1^r) и (g_2, S_2^r)

* *Элементом* называется любое множество, гомеоморфное замкнутому симплексу. Элемент называется *поляризованным*, если он ориентирован и на его границе зафиксирована некоторая точка — *полюс*.

** Отображение поляризованных элементов называется *изоморфным*, если оно гомеоморфно, сохраняет ориентацию и переводит полюс в полюс.

*** *Сферой* мы называем топологическую сферу, т. е. любое множество, гомеоморфное границе симплекса. *Поляризованной сферой* называется ориентированная сфера с фиксированной в ней точкой — *полюсом*.

называются *эквивалентными*, если существует такое изоморфное* отображение ψ сферы S_1^r на сферу S_2^r, что отображения g_1 и $g_2\psi$ сферы S_1^r в пространство X гомотопны между собой относительно полюса. Так же как для сфероидов первого рода, совокупность всех r-мерных сфероидов второго рода в точке x распадается на *типы* попарно эквивалентных между собой сфероидов.

Пусть (f, S^r) — произвольный сфероид второго рода, а E^r — некоторый поляризованный элемент. Очевидно, что пара $(f\varphi, E^r)$, где φ — сохраняющее ориентацию отображение элемента E^r на сферу S^r, гомеоморфное на внутренности элемента E^r и отображающее его границу в полюс сферы S^r, является сфероидом первого рода и что любой сфероид первого рода можно таким путем получить из некоторого сфероида второго рода. Легко видеть, что это соответствие между сфероидами различных родов переводит эквивалентные сфероиды в эквивалентные и, следовательно, порождает некоторое взаимно однозначное соответствие между типами. Условимся типы, относящиеся друг к другу, при этом соответствии отождествлять. Таким образом, одному типу будут принадлежать сфероиды различных родов. Множество всех типов r-мерных сфероидов пространства X в точке x обозначим через $\pi_x^r(X)$.

Тип, содержащий сфероид (f, E^r), для которого $f(E^r) = x$, называется *тривиальным*. Сфероиды, принадлежащие тривиальному типу, также называются *тривиальными*. Легко доказать следующее предложение:

[5.1] *Сфероид (f, S^r) второго рода тогда и только тогда тривиален, когда отображение f можно продолжить до отображения в пространство X некоторого элемента, границей которого служит сфера S^r.*

Пусть E^r — некоторый r-мерный поляризованный элемент, а f и g — два отображения элемента E^r в пространство X, совпадающие на его границе и переводящие его полюс в точку x. Возьмем какую-нибудь r-мерную поляризованную сферу S^r. Большой сферой, проходящей через полюс, рассечем ее на две полусферы. Эти полусферы естественным образом определяются как поляризованные элементы. Если $r = 1$, то только одну из этих полусфер можно изоморфно отобразить на элемент E^r. Обозначим эту полусферу через E_1. Другую полусферу, которую мы обозначим через E_2, можно отобразить на элемент E^r антиизоморфно**. Если $r > 1$, то любую полусферу можно изоморфно или антиизоморфно отобразить на элемент E^r. Мы обозначим одну из этих полусфер, безразлично какую, через E_1, а другую —

* Отображение поляризованных сфер называется *изоморфным*, если оно гомеоморфно, сохраняет ориентацию и переводит полюс в полюс.

** Отображение поляризованных элементов называется *антиизоморфным*, если оно гомеоморфно, переводит полюс в полюс и обращает ориентацию.

через E_2. Выберем какое-нибудь изоморфное отображение φ_1 элемента E_1 на элемент E^r. Тогда существует антиизоморфное отображение φ_2 элемента E_2 на элемент E^r, совпадающее на границе элемента с отображением φ_1. Определим отображение h сферы S^r в пространство X, положив

$$h(\xi) = \begin{cases} g\varphi_1(\xi), & \text{если } \xi \in E_1; \\ f\varphi_2(\xi), & \text{если } \xi \in E_2. \end{cases}$$

Очевидно, что отображение h однозначно, непрерывно и переводит полюс сферы S^r в точку x, так что пара (h, S^r) является r-мерным сфероидом пространства X в точке x. Легко видеть, что тип этого сфероида не зависит от случайностей построения и определяется лишь отображениями f и g. Он называется *типом, отличающим отображение g от отображения f*. Из предложения [5.1] легко следует важнейшее свойство этого типа:

[5.2] *Тип, отличающий отображение g от отображения f, тогда и только тогда тривиален, когда отображения g и f гомотопны между собой относительно границы элемента E^r.*

Пусть α и β — два типа r-мерных сфероидов пространства X в точке x. Выберем в каждом типе по сфероиду первого рода так, чтобы прообразы этих сфероидов были одинаковы. Очевидно, это всегда можно сделать. Пусть это будут сфероиды (f, E^r) и (g, E^r) соответственно. Отображения f и g совпадают на границе элемента E^r, и поэтому определен тип, отличающий отображение g от отображения f. Из леммы о продолжении гомотопии следует, что этот тип не зависит от выбора сфероидов и определяется исключительно самими типами α и β. Если $r > 1$, то мы будем этот тип обозначать через $\beta - \alpha$, а если $r = 1$, то — через $\beta\alpha^{-1}$.

Тривиальный тип мы будем обозначать через 0, если $r > 1$, и через 1, если $r = 1$. Тип $0 - \alpha$ (соответственно $1\,\alpha^{-1}$) будем обозначать просто через $-\alpha$ (соответственно α^{-1}). Из леммы о продолжении гомотопии следует, что сфероид (f, S^r) тогда и только тогда принадлежит типу $-\alpha$, когда типу α принадлежит сфероид $(f, -S^r)$, где $-S^r$ обозначает сферу S^r с противоположной ориентацией.

Определим *сумму* $\alpha + \beta$ типов α и β (для $r = 1$ *произведение* $\alpha\beta$), положив

$$\alpha + \beta = \alpha - (-\beta) \quad (\text{для } r = 1,\ \alpha\beta = \alpha(\beta^{-1})^{-1}).$$

Из сказанного в предыдущем абзаце и из предложения [5.2] следует, что тривиальный тип является нулем этого сложения (единицей, если $r = 1$). Легко проверить, что ассоциативный закон выполнен. Таким образом, относительно так определенной операции множество $\pi_x^r(X)$ всех типов образует группу. Она называется *r-мерной гомотопической группой пространства X в точке x*. Нетрудно убедиться, что при $r > 1$ эта группа абелева (этим и объясняется выбор аддитивных обозначений). Для $r = 1$ она, вообще говоря, не абелева.

Отрезок $I = [0,1]$ мы поляризуем, ориентировав его от 0 к 1 и считая полюсом точку 0. Тогда для любого замкнутого в точке x пути u пара (u, I) окажется одномерным сфероидом в точке x и любой сфероид будет эквивалентен сфероиду такого вида. Следовательно, между типами одномерных сфероидов пространства X в точке x и классами его путей, замкнутых в точке x, естественным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие. Легко видеть, что произведению типов соответствует произведение классов. Таким образом, одномерная гомотопическая группа $\pi_x^1(X)$ пространства X в точке x и его фундаментальная группа в точке x естественным образом изоморфны. Следуя установившемуся обычаю, мы будем отождествлять тип одномерных сфероидов с соответствующим классом путей, после чего одномерная гомотопическая и фундаментальная группы совпадут. В последующем оба термина («одномерная гомотопическая группа» и «фундаментальная группа») будут употребляться равноправно, как названия одной и той же группы $\pi_x^1(X)$.

Рассмотрим зависимость группы $\pi_x^r(X)$ от точки x. Пусть x_1 и x_2 — две точки пространства X и u — некоторый путь, соединяющий точку x_1 с точкой x_2 (это единственное место, где используется линейносвязность пространства X). Возьмем произвольный элемент α группы $\pi_{x_2}^r(X)$ и выберем в нем некоторый сфероид (f, S^r). Из леммы о продолжении гомотопии следует, что существует гомотопия f_t отображений сферы S^r в пространство X, для которой

$$f_0 = f;$$

$$f_t(\xi) = u(1-t),$$

где ξ — полюс сферы S^r. Пара (f_1, S^r) является, очевидно, r-мерным сфероидом пространства X в точке x_1. Нетрудно убедиться, что тип этого сфероида не зависит от случайностей построения и определяется исключительно типом α и путем u. Обозначим этот тип через $\theta_u^r\alpha$. Легко видеть, что так построенное отображение θ_u^r группы $\pi_{x_2}^r(X)$ в группу $\pi_{x_1}^r(X)$ является изоморфизмом. Таким образом, гомотопические группы пространства X в различных точках изоморфны. Для фундаментальной группы этот факт нам уже известен.

Тривиально проверяется, что так построенное семейство $\{\pi_x^r(X), \theta_u^r\}$ групп и изоморфизмов есть локальное семейство групп в смысле п. 4. Оно называется *семейством r-мерных гомотопических групп* и обозначается через $\pi^r(X)$. Когда это семейство просто, пространство X называется *r-простым*. Односвязное пространство, конечно, r-просто для любого $r \geqslant 1$. Существуют и неодносвязные пространства r-простые для всех r. Таким пространством является, например, пространство любой неодносвязной топологической группы (скажем, группы ортогональных матриц).

Мы знаем, что для любой точки x локальное семейство $\pi^r(X)$ определяет некоторый гомоморфизм

$$\upsilon \longrightarrow \theta_\upsilon^r$$

фундаментальной группы $\pi_x^1(X)$ в группу автоморфизмов группы $\pi_x^r(X)$. Если $r=1$, то θ_υ^r — внутренний автоморфизм, соответствующий элементу υ:

$$\theta_\upsilon^1(\alpha) = \upsilon\alpha\upsilon^{-1}.$$

Таким образом, пространство 1-просто тогда и только тогда, когда его фундаментальная группа абелева.

Если $r > 1$, то рассматриваемый автоморфизм определяет представление группы $\pi_x^1(X)$ в группе $\pi_x^r(X)$:

$$\upsilon\alpha = \theta_\upsilon^r(\alpha).$$

Это представление тривиально тогда и только тогда, когда пространство r-просто.

Таким образом, группа $\pi_x^1(X)$, естественно, определяется как группа левых операторов каждой из групп $\pi_x^p(X)$, $p > 1$. Это значит, что последовательность

$$\pi_x^1(X), \pi_x^2(X), \ldots, \pi_x^p(X), \ldots$$

является серией в смысле п. 3. Она называется *гомотопической серией пространства X в точке x* и обозначается через $\pi_x(X)$.

Пусть u — произвольный путь пространства X и υ — его класс. Для любого элемента α группы $\pi_{\upsilon(1)}^1(X)$ и любого элемента β группы $\pi_{\upsilon(1)}^p(X)$, $p > 1$ имеем

$$\theta_\upsilon^p(\alpha\beta) = \theta_\upsilon^p\theta_\alpha^p(\beta) = \theta_{\upsilon\alpha}^p(\beta) = \theta_{\upsilon\alpha\upsilon^{-1}\upsilon}^p(\beta) = \theta_{\upsilon\alpha\upsilon^{-1}}^p\theta_\upsilon^p(\beta) =$$
$$= (\upsilon\alpha\upsilon^{-1})\theta_\upsilon^p(\beta) = \theta_\upsilon^1(\alpha)\theta_\upsilon^p(\beta).$$

Таким образом, для любого $p > 1$ отображение θ_υ^p есть θ_υ^1-изоморфизм, так что последовательность $\theta_\upsilon = \{\theta_\upsilon^p\}$ изоморфизмов θ_υ^p является изоморфным отображением серии $\pi_{\upsilon(1)}(X)$ на серию $\pi_{\upsilon(0)}(X)$. Очевидно, что так полученное семейство $\{\pi_\upsilon(X), \theta_\upsilon\}$ серий и их изоморфизмов является локальным семейством серий. Оно называется *семейством гомотопических серий* и обозначается через $\pi(X)$.

Пусть f — непрерывное отображение пространства X в пространство Y и (g, S^r) — некоторый сфероид пространства X в точке x. Ясно, что пара (fg, S^r) является сфероидом пространства Y в точке $f(x)$. Его тип не меняется при замене сфероида (g, S^r) эквивалентным и, следовательно, определяется типом α сфероида (g, S^r). Обозначим тип сфероида (fg, S^r) через $f^r_*\alpha$. Очевидно, что так построенное отображение f^r_* группы $\pi^r_x(X)$ в группу $\pi^r_{f(x)}(Y)$ гомоморфно, а при $r>1$ даже f^1_* — гомоморфно. Поэтому последовательность $f_*=\{f^r_*\}$ гомоморфизмов f^r_* является гомоморфным отображением серии $\pi_x(X)$ в серию $\pi_{f(x)}(Y)$. Этот гомоморфизм называется гомоморфизмом, *индуцированным* отображением f.

Пусть отображение f гомотопно некоторому отображению g и пусть F — гомотопия, связывающая f с g. Обозначим через F_* изоморфное отображение серии $\pi_{g(x)}(Y)$ на серию $\pi_{f(x)}(Y)$, соответствующее пути u^F_x (определение пути u^F_x см. в конце п. 4). Нетрудно убедиться, что гомоморфизмы f_*, g_* и F_* связаны соотношением

$$f_*=F_*g_*. \tag{5.1}$$

Отсюда следует, что гомоморфизм гомотопических серий, индуцированный гомотопической эквивалентностью, является изоморфизмом. Поэтому:

[5.3] *Гомотопические серии пространств одного гомотопического типа изоморфны.*

Это предложение известно как «теорема гомотопической инвариантности гомотопических групп».

Остановимся теперь на некоторых более частных, но для нас важных свойствах гомотопических групп. Начнем с так называемых «теорем сложения для элементов p-мерных гомотопических групп». Для простоты будем считать, что $p>1$. Через r будем обозначать либо число p, либо число $p+1$.

Пусть S — некоторая r-мерная сфера, а E_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ — r-мерные элементы, принадлежащие сфере S, внутренности $\mathcal{E}_i$ которых попарно не пересекаются. Положим

$$S_i=E_i\setminus\mathcal{E}_i, \quad U=S\setminus\bigcup_{i=0}^{i=n}\mathcal{E}_i.$$

Таким образом, S_i $(i=0, \ldots, n)$ есть $(r-1)$-мерная сфера — граница элемента E_i, а U — «сфера с дырами». Множество U, очевидно, линейно связно и его граница является объединением всех сфер S_i.

Поляризуем сферу S, произвольно ориентировав ее и выбрав полюс ξ в множестве U. Ориентация сферы S порождает соответствующие ориентации элементов E_i. Поляризуем так ориентированные элементы E_i, выбрав на границе каждого из них по полюсу ξ_i. Тем самым сферы S_i также окажутся поляризованными (как границы поляризованных элементов).

Так как множество U линейно связно, то можно в нем точку ξ некоторым путем соединить с любой точкой ξ_i. Для любого $i=0$, $1 \ldots, n$ зафиксируем путь u_i множества U, соединяющий точку ξ с точкой ξ_i. Тем самым для любого непрерывного отображения f множества U в пространство X определится путь fu_i пространства X, соединяющий точку $f(\xi) = x$ с точкой $f(\xi_i) = x_i$. Соответствующее этому пути изоморфное отображение группы $\pi^p_{x_i}(X)$ на группу $\pi^p_x(X)$ обозначим через θ_i.

Пусть сначала $r = p + 1$ и пусть f — некоторое непрерывное отображение множества U в пространство X. Согласно сказанному в предыдущем абзаце отображение f определяет изоморфизмы θ_i. В то же время для любого $i = 0, \ldots, n$ пара $(f/S_i, S_i)$ является p-мерным сфероидом пространства X в точке x_i. Его тип мы обозначим через α_i. Оказывается, что имеет место следующая формула:

$$\sum_{i=0}^{n} \theta_i \alpha_i = 0. \tag{5.2}$$

Эта формула известна, как «первая теорема сложения для элементов гомотопических групп». Она легко доказывается индукцией по числу n. Так как ее доказательство вполне автоматично, мы его опустим.

Пусть теперь $r = p$ и пусть f и g — два отображения сферы S в пространство X, совпадающие на множестве U, так что соответствующие этим отображениям изоморфизмы θ_i одинаковы. Пары (f, S) и (g, S) являются, очевидно, p-мерными сфероидами пространства X в точке x. Их типы обозначим соответственно через α и β. Кроме того, для любого элемента E_i определен тип δ_i, отличающий на нем отображение g от отображения f. Этот тип принадлежит группе $\pi^p_{x_i}(X)$. Оказывается, что

$$\beta - \alpha = \sum_{i=0}^{n} \theta_i \delta_i. \tag{5.3}$$

Эта формула известна, как «вторая теорема сложения для элементов гомотопических групп». Ее доказательство столь же просто, как и доказательство формулы (5.2), и мы также его опустим.

Обратимся теперь к изучению отличающего типа. Случай $r = 1$, как всегда представляет некоторые особенности, и потому рассмотрим его в первую очередь.

Пусть E — произвольный одномерный поляризованный элемент. Обозначим через φ изоморфное отображение отрезка I (поляризованного, как на стр. 27) на элемент E. Тогда для любого отображения f элемента E в пространство X отображение $f\varphi$ является по определению путем пространства X. Класс этого пути однозначно определяется отображением f и обозначается через $[f]$. Если отображения f и g совпадают на границе элемента E, то соответствующие классы $[f]$ и $[g]$ сравнимы между собой, так что определен класс $[g][f]^{-1}$. Это —

класс замкнутых путей и потому согласно сказанному на стр. 27 некоторый тип одномерных сфероидов. Легко видеть, что он совпадает с типом δ, отличающим отображение g от отображения f:

$$\delta = [g][f]^{-1}. \tag{5.4}$$

Из этого выражения для отличающего типа легко вывести формулу, аналогичную второй теореме сложения. Мы этого делать не будем, так как эта формула нам не понадобится.

Кроме того, из формулы (5.4) немедленно вытекает, что для $r=1$ справедливы следующие предложения:

[5.4] *Для любого отображения f в пространство X поляризованного r-мерного элемента E с полюсом ξ_0 и любого элемента α группы $\pi^r_{f(\xi_0)}(X)$ существует такое непрерывное отображение g элемента E в пространство X, совпадающее с отображением f на границе элемента E, что тип, отличающий его от отображения f, равен α.*

[5.5] *Пусть f и g — отображения поляризованного элемента E в пространство X, совпадающие на его границе, а φ — изоморфное или антиизоморфное отображение некоторого поляризованного элемента E_1 на элемент E. Тогда для отображений $f\varphi$ и $g\varphi$ элемента E_1 в пространство X определен тип, отличающий отображение $g\varphi$ от отображения $f\varphi$. Оказывается, что этот тип совпадает с типом, отличающим отображение g от отображения f, если отображение φ изоморфно, и отличается от него знаком, если отображение φ антиизоморфно.*

[5.6] *Пусть f, g и h — непрерывные отображения r-мерного поляризованного элемента E в пространство X, совпадающие на его границе. Тогда определены: тип δ_1, отличающий отображение g от отображения f; тип δ_2, отличающий отображение h от отображения g; тип δ_3, отличающий отображение h от отображения f. Оказывается, что*

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta_3 \qquad (\delta_1\delta_2 = \delta_3, \text{ если } r=1).$$

[5.7] *Пусть f и g — отображения поляризованного элемента E в пространство X, совпадающие на границе, и δ — тип, отличающий отображение g от отображения f. Для любого отображения h пространства X в пространство Y определен тип, отличающий отображение hg от отображения hf. Оказывается, что этот тип совпадает с типом $h^r_*\delta$.*

Как уже было сказано, для $r=1$ эти предложения следуют из формулы (5.4). Впрочем предложения [5.4], [5.5] и [5.7] нетрудно прямо доказать сразу для любого $r \geqslant 1$; мы эти доказательства опустим. Что же касается предложения [5.6], то для $r>1$ оно легко следует из второй теоремы сложения для элементов гомотопических групп. Действительно, тип δ_1 является по определению типом сфероида (f_1, S^r), где отображение f_1 определено формулами

$$f_1(\xi) = \begin{cases} g\varphi_1(\xi), & \text{если} \quad \xi \in E_1; \\ f\varphi_2(\xi), & \text{если} \quad \xi \in E_2 \end{cases}$$

(см. определение отличающего типа), а тип δ_3 является типом сфероида (f_3, S^r), где отображение f_3 определено формулами

$$f_3(\xi) = \begin{cases} h\varphi_1(\xi), & \text{если} \quad \xi \in E_1; \\ f\varphi_2(\xi), & \text{если} \quad \xi \in E_2. \end{cases}$$

Таким образом, отображения f_1 и f_3 совпадают на E_2, а тип, отличающий на E_1 отображение f_3 от отображения f_1, согласно [5.5] равен δ_2. Таким образом, по второй теореме сложения

$$\delta_3 - \delta_1 = \delta_2,$$

что доказывает предложение [5.6].

Мы знаем, что гомотопическая эквивалентность индуцирует изоморфное отображение гомотопических серий. Оказывается, что (при некоторых ограничениях на рассматриваемые пространства) имеет место и обратное утверждение. Для его доказательства (изложенного во второй части настоящей работы) нам понадобится следующее предложение.

[5.8] *Пусть отображение f пространства X в пространство Y индуцирует изоморфное отображение гомотопических серий. Тогда любое отображение g некоторого элемента E в цилиндр Z отображения f, переводящее границу S элемента E в пространство X, связанно гомотопно относительно X отображению элемента E в пространство X.*

Сохраним обозначения, введенные при формулировке предложения [1.3], и, кроме того, введем отображение k цилиндра Z на пространство Y, положив

$$k(z) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad z = \alpha(x, t); \\ y & \text{если} \quad z = \alpha(y). \end{cases}$$

Заметим, что

$$f = ki.$$

Определим отображение h сферы S в пространство X, положив

$$h = i^{-1}g / S.$$

Имеем

$$kg/S = kih = fh.$$

Таким образом, отображение fh сферы S в пространство Y является частью отображения kg всего элемента E. Отсюда согласно [5.1] следует, что при любой поляризации сферы S тип сфероида (fh, S) пространства Y тривиален. Но этот сфероид является образом при отображении f сфероида (h, S) пространства X. Следовательно, тип сфероида (h, S) тривиален, потому что f индуцирует изоморфизм гомотопических групп. Из тривиальности типа сфероида (h, S) следует согласно предложению [5.1], что отображение h можно продолжить на весь элемент E. Выберем некоторое такое продолжение и обозначим его опять через h.

Произвольно поляризуем элемент E. Тогда определится тип β сфероидов пространства Y, отличающий отображение kg от отображения $kih = fh$. По условию существует тип α сфероидов пространства X, отображающийся посредством изоморфизма, индуцированного отображением f в тип β. Согласно предложению [5.4] существует отображение $\bar{h}$ элемента E в пространство X, совпадающее на S с отображением h, для которого тип, отличающий его от отображения h, равен α. Из предложения [5.7] следует, что тип, отличающий отображение $f\bar{h}$ от отображения fh, равен β. Отсюда и из предложения [5.6] легко следует, что тип, отличающий отображение kg от отображения $f\bar{h}$, тривиален, а значит, согласно [5.2] отображения kg и $f\bar{h}$ гомотопны относительно S. Пусть $R(\xi, t)$, $\xi \in E$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ — гомотопия относительно S, связывающая отображение kg с отображением $f\bar{h}$. Положим

$$G(\xi, t) = \begin{cases} \alpha(x, 3t + s - 3ts), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}, \text{ а } g(\xi) = \alpha(x, s); \\ g(\xi), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}, \text{ а } g(\xi) = \alpha(y); \\ jR(\xi, 3t - 1), & \text{если } \frac{1}{3} \leqslant t \leqslant \frac{2}{3}; \\ \alpha(\bar{h}(\xi), 3 - 3t), & \text{если } \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что так определенная функция $G(\xi, t)$ однозначна и непрерывна. Кроме того,

$$G(\xi, 0) = g(\xi);$$
$$G(\xi, 1) = \alpha(\bar{h}(\xi), 0) = i\bar{h}(\xi).$$

Таким образом, G есть гомотопия, связывающая отображение g с отображением $i\bar{h}$, но на S она не тождественна. Оказывается, что можно найти гомотопию уже тождественную на S. Для построения такой гомотопии рассмотрим отображение H множества $\mathcal{E} = E \times 0 \cup S \times \times I \cup E \times 1$ в пространство Z, определенное формулами:

$$H(\xi, t) = \begin{cases} g(\xi), & \text{если } t = 0 \quad \text{или} \quad \xi \in S; \\ i\bar{h}(\xi), & \text{если } t = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что это отображение однозначно и непрерывно. Искомая гомотопия относительно S является продолжением отображения H на все $E \times I$. Поэтому достаточно доказать, что отображение H можно продолжить на все произведение $E \times I$. Для этого в силу леммы о продолжении гомотопии достаточно доказать, что отображения H и $G / \mathscr{E}$ гомотопны между собой. Но легко видеть, что, положив

$$K((\xi,t),\tau)=\left.\begin{cases} g(\xi), \text{ если } t=0; \\ i\bar{h}(\xi), \text{ если } t=1; \\ \alpha(\bar{h}(\xi),\ 3t(1-\tau)), \text{ если } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3} \text{ и } \xi \in S; \\ \alpha(\bar{h}(\xi),\ 1-\tau), \qquad \text{если } \frac{1}{3} \leqslant t \leqslant \frac{2}{3} \text{ и } \xi \in S; \\ \alpha(\bar{h}(\xi),\ 3(1-t)(1-\tau)), \text{ если } \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1 \text{ и } \xi \in S; \end{cases}\right\} 0 \leqslant \tau \leqslant 1,$$

мы получим однозначную и непрерывную на $\mathscr{E} \times I$ функцию K, для которой

$$\left.\begin{aligned} K((\xi,\ t),\ 0) &= G(\xi,\ t); \\ K((\xi,\ t),\ 1) &= H(\xi,\ t); \end{aligned}\right\} (\xi,\ t) \in \mathscr{E},$$

т. е. получим гомотопию, связывающую отображение $G / \mathscr{E}$ с отображением H. Таким образом, гомотопность отображений $G / \mathscr{E}$ и H доказана, а значит, и доказано все предложение [5.8].

6. Группы сингулярных когомологий

Конечную возрастающую последовательность целых неотрицательных чисел мы назовем *кортежем*. Наибольший, т. е. последний, член кортежа назовем его *высотой*. Число членов кортежа, уменьшенное на единицу, назовем его *длиной*. Пару чисел (r, p), где r — любое число, не меньшее высоты кортежа, а p — его длина, назовем *типом* кортежа. Очевидно, что длина кортежа не превосходит его высоты. Кортеж данной длины $p \geqslant 0$, высота которого равна его длине, единственен и состоит из всех чисел от нуля до p. Мы будем обозначать его через $\{p\}$. Наименьшее возможное значение длины кортежа есть нуль. Кортежи длины нуль, т. е. состоящие из одного числа, мы будем отождествлять с этим числом.

Пусть $\mathfrak{a} = (a_0, \ldots, a_p)$ и $\mathfrak{b} = (b_0, \ldots, b_q)$ — произвольные кортежи типов (r, p) и (p, q) соответственно. Обозначим через $\mathfrak{a}_{(\mathfrak{b})}$ кортеж

$$(a_{b_0}, \ldots, a_{b_q}),$$

состоящий из всех членов кортежа $\mathfrak{a}$, номера которых принадлежат кортежу $\mathfrak{b}$. Его тип есть (r, q). В этих обозначениях b-й член a_b кортежа $\mathfrak{a}$ есть кортеж $\mathfrak{a}_{(b)}$. Если длина кортежа $\mathfrak{b}$ меньше p, т. е. если $\mathfrak{b} \neq \{p\}$, то определен кортеж $\mathfrak{a}^{(\mathfrak{b})}$, состоящий из всех членов кортежа $\mathfrak{a}$, номера которых не принадлежат кортежу $\mathfrak{b}$. Его типом является $(r, p-q-1)$. Каждый из кортежей $\mathfrak{a}_{(\mathfrak{b})}$ и $\mathfrak{a}^{(\mathfrak{b})}$ называется *дополне-*

нием другого в кортеже $\mathfrak{a}$. В частности, для любого кортежа $\mathfrak{a}$ типа (r, p), отличного от $\{r\}$, определено его дополнение в кортеже $\{r\}$, имеющее тип $(r, r-p-1)$.

Пусть кортежи $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ таковы, что определен кортеж $(\mathfrak{a}_{(\mathfrak{b})})_{(\mathfrak{c})}$. Тогда определен и кортеж $\mathfrak{a}_{(\mathfrak{b}_{(\mathfrak{c})})}$, причем

$$(\mathfrak{a}_{(\mathfrak{b})})_{(\mathfrak{c})} = \mathfrak{a}_{(\mathfrak{b}(\mathfrak{c}))}. \qquad (6.1)$$

Отметим особо два частных случая этой формулы. Во-первых, полагая $\mathfrak{c} = (0, 1)$, имеем

$$\mathfrak{a}_{(\mathfrak{b}(0),\, \mathfrak{b}(1))} = \mathfrak{a}_{(\mathfrak{b}(0,\, 1))} = (\mathfrak{a}_{(\mathfrak{b})})_{(0,\, 1)}. \qquad (6.2)$$

Во-вторых, полагая $\mathfrak{c} = \{p\}^{(a)}$, где p — длина кортежа $\mathfrak{b}$, получим

$$\mathfrak{a}_{(\mathfrak{b}^{(a)})} = (\mathfrak{a}_{(\mathfrak{b})})^{(a)}. \qquad (6.3)$$

Прямолинейный замкнутый симплекс евклидова пространства называется *нумерованным*, если его вершины занумерованы целыми числами от нуля до размерности симплекса включительно. Вершина, получившая номер a, называется *a-той вершиной* нумерованного симплекса. Грань нумерованного симплекса s, натянутая на вершины, номер которых принадлежит некоторому кортежу $\mathfrak{a}$, и нумерованная так, что вершина, имеющая в симплексе s номер $\mathfrak{a}_{(b)}$, имеет в грани номер b, называется *нумерованной $\mathfrak{a}$-гранью* симплекса s и обозначается через $s_{(\mathfrak{a})}$. Ее размерность равна длине кортежа $\mathfrak{a}$. Таким образом, символ $s_{(\mathfrak{a})}$ определен тогда и только тогда, когда высота кортежа $\mathfrak{a}$ не превосходит размерности r симплекса s. Очевидно, что

$$s_{(\{r\})} = s \qquad (6.4)$$

и

$$(s_{(\mathfrak{a})})_{(\mathfrak{b})} = s_{(\mathfrak{a}_{(\mathfrak{b})})} \qquad (6.5)$$

для любых кортежей $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, для которых символ $(s_{(\mathfrak{a})})_{(\mathfrak{b})}$ определен. Если $\mathfrak{a} \neq \{r\}$, то вместо $s_{(\mathfrak{a})}$ мы будем часто писать $s^{(\mathfrak{b})}$, где $\mathfrak{b}$ — дополнение в $\{r\}$ кортежа $\mathfrak{a}$.

Легко видеть, что для любых нумерованных симплексов s и t одной и той же размерности существует одно и только одно линейное отображение $\varepsilon(s, t)$ симплекса s на симплекс t, сохраняющее нумерацию, т. е. переводящее любую вершину симплекса s в вершину симплекса t с тем же номером.

Для любого целого $r \geqslant 0$ зафиксируем некоторый r-мерный нумерованный симплекс s_0^r. Одномерный симплекс s_0^1 будем считать совпадающим с отрезком $I = [0, 1]$, причем точке 0 припишем номер 0 и, значит, точке 1 номер 1. Для любого нумерованного симплекса s^r отображение $\varepsilon(s_0^r, s^r)$ обозначим кратко через $\varepsilon(s^r)$.

Непрерывное отображение A r-мерного нумерованного симплекса s_0^r в некоторое топологическое пространство X называется *r-мерным сингулярным симплексом пространства X*. Нульмерные сингулярные симплексы мы отождествим с точками пространства X, а одномерные — с его путями, что законно, так как по условию $s_0^1 = I$.

Любому сингулярному симплексу A пространства X и любому кортежу $\mathfrak{a}$ высоты, не большей размерности r симплекса A, отнесем сингулярный симплекс $A_{(\mathfrak{a})}$, положив

$$A_{(\mathfrak{a})} = A \circ ((s_0^r)_{(\mathfrak{a})}).$$

Его размерность равна длине кортежа $\mathfrak{a}$. Симплекс $A_{(\mathfrak{a})}$ называется *$\mathfrak{a}$-гранью симплекса A*. Из (6.4) и (6.5) следует, что

$$A(\{r\}) = A; \tag{6.6}$$

$$(A_{(\mathfrak{a})})_{(\mathfrak{b})} = A_{(\mathfrak{a}_{(\mathfrak{b})})} \tag{6.7}$$

$\{r\}$-грань симплекса A, совпадающая согласно (6.6) с самим симплексом, называется его *несобственной гранью*. Остальные грани называются *собственными*. Среди собственных граней особое значение имеют $(r-1)$-мерные грани $A^{(a)}$, называемые *главными гранями*, и нульмерные грани $A_{(a)}$, называемые *вершинами*. Нулевая вершина $A_{(0)}$ будет играть у нас особую роль. Из (6.7) следует, что нулевая вершина a-й главной грани при $a > 0$ совпадает с нулевой вершиной всего симплекса:

$$(A^{(a)})_{(0)} = A_{(0)} \qquad (a > 0). \tag{6.8}$$

Что же касается нулевой вершины нулевой главной грани $A^{(0)}$, то она совпадает с первой вершиной симплекса A:

$$(A^{(0)})_{(0)} = A_{(1)}. \tag{6.9}$$

Для одномерной грани $A_{(0,\,1)}$ очевидно, что

$$(A_{(0,1)})_{(0)} = A_{(0)} \text{ и } (A_{(0,1)})_{(1)} = A_{(1)}.$$

Таким образом, рассматривая вершины как точки пространства X, а одномерные сингулярные симплексы как его пути, мы можем высказать следующее предложение:

[6.1] *Нулевые вершины a-тых главных граней при $a > 0$ совпадают с нулевой вершиной симплекса. Нулевая вершина нулевой главной грани соединена с нулевой вершиной всего симплекса путем $A_{(0,1)}$.*

Функция, определенная на множестве всех r-мерных сингулярных симплексов пространства X и принимающая значения в некоторой аддитивной группе G, называется *r-мерной сингулярной коцепью про-*

странства X над группой G. Суммой c^r+d^r двух r-мерных цепей c^r и d^r называется коцепь, принимающая на любом r-мерном сингулярном симплексе A пространства X значение, равное сумме значений коцепей c^r и d^r:

$$(c^r+d^r)(A)=c^r(A)+d^r(A). \tag{6.10}$$

Очевидно, что относительно так определенной операции сложения совокупность $C^r(x, G)$ всех r-мерных сингулярных коцепей пространства X является аддитивной группой. Ее нулем служит коцепь 0, тождественно равная нулю группы G.

Любой r-мерной ($r\geqslant 0$) сингулярной коцепи c^r пространства X над группой G отнесем $(r+1)$-мерную коцепь ∇c^r, положив для любого $(r+1)$-мерного сингулярного симплекса A пространства X

$$\nabla c^r(A)=\sum_{a=0}^{r+1}(-1)^a c^r(A^{(a)}).$$

Так определенное отображение ∇ группы $C^r(X, G)$ в группу $C^{r+1}(X, G)$ обладает, как легко видеть, всеми известными свойствами граничного оператора ∇, что позволяет обычным образом построить группу $H^r(X, G)$ — *r-мерную группу сингулярных когомологий пространства X над группой G* *.

Группы сингулярных когомологий линейно связных пространств допускают важное обобщение, играющее большую роль в теории неодносвязных пространств. Мы имеем в виду группы когомологий над локальными свойствами аддитивных групп. Напомним их определение, вполне впрочем аналогичное определению обыкновенных групп сингулярных когомологий.

r-мерной сингулярной коцепью линейно связного пространства X над локальным семейством $\Gamma=\{G_x, \alpha_u\}$ аддитивных групп называется функция, которая определена на множестве всех r-мерных сингулярных симплексов пространства X и значение которой на симплексе A принадлежит группе $G_{A_{(0)}}$. Формула (6.10) имеет смысл и для коцепей над Γ, так что совокупность $C^r(X, \Gamma)$ всех r-мерных коцепей образует аддитивную группу. Коцепь ∇c^r определяется в этом случае формулой

$$\nabla c^r(A)=\alpha_{A_{(0,1)}}c^r(A^{(0)})+\sum_{a=1}^{r+1}(-1)^a c^r(A^{(a)}),$$

имеющей смысл в силу предложения [6.1]. Оказывается, что так определенное отображение ∇ также позволяет развить всю теорию

---

* Подробное построение группы $H^r(X, G)$ для более общего случая изложено ниже, в п. 14.

гомологий и приводит к *r-мерной группе сингулярных когомологий $H^r(X, \Gamma)$ пространства X над семейством* Γ.

Пусть $\alpha = \{\alpha_x\}$ — гомоморфное отображение локального семейства Γ в некоторое локальное семейство H. Очевидно, что для любой сингулярной коцепи c^r пространства X над семейством Γ коцепь αc^r, определенная равенством

$$\alpha c^r(A) = \alpha_{A_{(0)}} c^r(A),$$

является коцепью над семейством H. Легко видеть, кроме того, что

$$\nabla \alpha c^r = \alpha \nabla c^r.$$

Отсюда следует, что отображение α порождает гомоморфное отображение α группы $H^r(X, \Gamma)$ в группу $H^r(X, \mathrm{H})$, изоморфное, если исходное отображение α изоморфно. Таким образом:

[6.2] *Группы сингулярных когомологий над изоморфными локальными семействами изоморфны.*

Применим это предложение к случаю, когда семейство Γ является простым приведенным семейством. Очевидно, что в этом случае

$$H^r(X, \Gamma) = H^r(X, G),$$

где G — группа, соответствующая приведенному семейству Γ. Как мы знаем ([4.3]), любое простое локальное семейство изоморфно простому приведенному семейству. Следовательно:

[6.3] *Группы сингулярных когомологий над простым локальным семейством изоморфны группам сингулярных когомологий над соответствующей группой.*

Таким образом, группы когомологий над локальными семействами для случая односвязных пространств не дают ничего нового по сравнению с группами когомологий над группами. Напротив, для неодносвязных пространств они отражают более глубокие факты, чем группы когомологий над группами, и поэтому с успехом используются в теории неодносвязных пространств.

Пусть f — непрерывное отображение пространства X в пространство Y. Ясно, что для любого сингулярного симплекса A пространства X отображение fA является сингулярным симплексом пространства Y, причем для любого кортежа $\mathfrak{a}$ высоты, не большей размерности симплекса A:

$$(fA)_{(\mathfrak{a})} = fA_{(\mathfrak{a})}. \tag{6.11}$$

Для любой сингулярной коцепи c^r пространства Y, над некоторым локальным семейством H определим в X сингулярную коцепь

f^*c^r над локальным семейством $f^*\mathrm{H}$, положив для любого r-мерного сингулярного симплекса A пространства X:

$$f^*c^r(A) = c^r(fA).$$

Легко проверить, что

$$\nabla f^*c^r = f^*\nabla c^r.$$

Отсюда следует, что f^* порождает гомоморфное отображение $\mathbf{f}^*$ группы $\nabla^r(Y, \mathrm{H})$ в группу $\nabla^r(X, f^*\mathrm{H})$.

Пусть g — отображение пространства X в пространство Y, гомотопное отображению f, и F — гомотопия, связывающая f с g. Как мы знаем, гомотопия F определяет изоморфное отображение α^F семейства $g^*\mathrm{H}$ на семейство $f^*\mathrm{H}$ и, следовательно, изоморфное отображение α^F группы $\nabla^r(X, g^*\mathrm{H})$ на группу $\nabla^r(X, f^*\mathrm{H})$. Оказывается, что изоморфизм α^F переводит гомоморфизм $\mathbf{g}^*$ в гомоморфизм $\mathbf{f}^*$:

$$\mathbf{f}^* = \alpha^F\mathbf{g}^*. \tag{6.12}$$

Эту формулу, правда, несколько в иной форме, мы докажем в п. 31.

В частности, гомоморфизмы обыкновенных групп сингулярных когомологий, соответствующие гомотопным между собой отображениям, совпадают:

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{g}^*.$$

Пространства X и Y называются пространствами *одного когомологического типа,* если любому локальному семейству Г аддитивных групп в пространстве X можно отнести такое локальное семейство Н аддитивных групп в пространстве Y и, наоборот, любому локальному семейству Н в пространстве Y можно отнести такое локальное семейство Г в пространстве X, что для любого $r \geqslant 0$ группы $H^r(X, \Gamma)$ и $H^r(Y, \mathrm{H})$ изоморфны. Из (6.12) легко следует, что для любой гомотопической эквивалентности f гомоморфизм $\mathbf{f}^*$ является изоморфизмом, так что:

[6.4] *Пространства одного гомотопического типа имеют один когомологический тип.*

Это предложение известно как «теорема гомотопической инвариантности групп когомологий».

7. Влияние гомотопических групп пространства на его группы сингулярных когомологий

Давно было известно, что гомотопические группы пространства существенно влияют на его группы гомологий и когомологий. Так, еще Пуанкаре заметил, что факторгруппа по коммутанту фундаментальной группы конечного полиэдра изоморфна его одномерной целочисленной группе гомологий. В 1936 г. Гуревич доказал, что, во-первых, фундаментальная группа асферичного во всех размерностях связного полиэдра (напомним, что пространство называется *асферичным в размерности* $n > 1$, если его n-мерная гомотопическая группа тривиальна) определяет его гомотопический тип и, следовательно, все его группы гомологий и когомологий и, во-вторых, что n-мерная целочисленная группа гомологий односвязного полиэдра, асферичного во всех размерностях, меньших n, изоморфна его n-мерной гомотопической группе. В 1941—1942 гг. Хопф опубликовал серию работ [12], в которых, дополняя результат Гуревича, указал явные формулы, определяющие группы гомологий асферичного полиэдра по его фундаментальной группе, и рассмотрел, но полностью не решил вопрос об определении n-мерной группы гомологий полиэдра асферичного в размерностях, меньших n, по его фундаментальной и n-мерной гомотопической группам. В дальнейшем этим вопросом занимались Фрейденталь [10] и Экман [3], но существенно новых результатов не получили. Наконец, Эйленберг и Маклейн ([6] и [7]), перейдя к когомологиям, перенесли результаты Хопфа на любые линейно связные пространства и полностью выяснили частично решенный Хопфом вопрос об определении n-мерных групп гомологий и когомологий пространства, асферичного в размерностях, меньших n, по его фундаментальной и n-мерной гомотопической группам. Кроме того, они рассмотрели вопрос об определении r-мерной ($r \leqslant n$) группы когомологий односвязного пространства, асферичного во всех размерностях, меньших n, кроме какой-нибудь одной. Таким образом, для любого пространства, не подчиненного никаким ограничениям, результаты Эйленберга и Маклейна полностью описывают лишь одномерную и двухмерную группу когомологий. Никаких сведений о трехмерной и, тем более, n-мерной при $n > 2$ группах когомологий произвольного пространства их результаты не дают. Как уже было сказано в предисловии, в предлагаемой работе указаны явные формулы, переходящие при $n = 2$ в формулы Эйленберга-Маклейна и для всех r определяющие r-мерную группу когомологий любого пространства по его гомотопическим группам и некоторым новым инвариантам. Для сравнения с результатами нашей работы изложим теоремы Эйленберга и Маклейна.

Пусть A — произвольная мультипликативная группа, представленная в аддитивной группе G. Функцию r переменных, принадлежащих группе A, и принимающую значения в группе G, назовем *r-мерной коцепью группы* A *над группой* G. Совокупность $C^r(\mathrm{A}, G)$ всех r-мерных коцепей естественным образом является аддитивной группой. Любой r-мерной коцепи c^r отнесем $(r+1)$-мерную коцепь ∇c^r, положив

$$\nabla c^r(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+1}) = \alpha_1 c^r(\alpha_2, \ldots, \alpha_{r+1}) + \\ + \sum_{i=1}^{r} (-1)^i c^r(\alpha_1, \ldots, \alpha_i\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{r+1}) + (-1)^{r+1} c^r(\alpha_1, \ldots, \alpha_r).$$

Легко проверить, что $\nabla\nabla c^r = 0$, так что можно обычным способом построить *r-мерную группу когомологий* $H^r(\mathrm{A}, G)$ *группы* A *над группой* G. Эту конструкцию можно, в частности, применить к случаю, когда группа A есть фундаментальная группа $\pi_x^1(X)$ пространства X, а группа G есть группа G_x некоторого локального семейства Γ пространства X*. Тогда, оказывается, имеет место следующая теорема Эйленберга и Маклейна:

[7.1] *Если пространство X асферично во всех размерностях, меньших или равных n, то для любого локального семейства Γ аддитивных групп пространства X группы $H^n(X, \Gamma)$ и $H^n(\pi_x^1(X), G_x)$ изоморфны.*

Пусть теперь группа A представлена не только в группе G, но еще и в некоторой группе H и пусть $\mathbf{k}$ — произвольный элемент группы $H^{n+1}(\mathrm{A}, H)$, т. е. класс когомологичных между собой $(n+1)$-мерных коциклов группы A над группой G (коцепь c^r называется *коциклом*, если $\nabla c^r = 0$). Выберем в классе $\mathbf{k}$ некоторый коцикл k и рассмотрим множество $Z(k, G)$ всех пар вида (ρ, c), где ρ — операторный гомоморфизм группы H^1_{i} в группу G, а c — такая n-мерная коцепь группы A над группой G, что

$$\nabla c = \rho k.$$

Очевидно, что для любых двух таких пар (ρ_1, c_1) и (ρ_2, c_2) пара

$$(\rho_1, c_1) + (\rho_2, c_2) = (\rho_1 + \rho_2, c_1 + c_2)$$

также принадлежит $Z(k, G)$ и что относительно так определенной операции сложения множество $Z(k, G)$ является абелевой группой. Для любого n-мерного коцикла c группы A над группой G пара $(0, c)$, очевидно, принадлежит группе $Z(k, G)$. Тем самым группа коциклов, а значит, и группа коциклов, когомологичных нулю (т. е. имеющих вид ∇c^{n-1}), естественным образом вкладывается в группу $Z(k, G)$. Факторгруппу группы $Z(k, G)$ по подгруппе коциклов, когомологичных нулю, обозначим через $E(k, G)$. Она содержит группу $H^n(\mathrm{A}, G)$. Легко проверить, что с точностью до изоморфизма, оставляющего все элементы группы $H^n(\mathrm{A}, G)$ на месте, группа $E(k, G)$ не зависит от выбора коцикла k в классе $\mathbf{k}$. Мы будем обозначать ее через $E(\mathbf{k}, G)$.

Примем за группу H группу $\pi_x^n(X)$, за группу A группу $\pi_x^1(X)$, естественно, представленную в группе $\pi_x^n(X)$, а за группу G группу G_x

* Мы знаем (см. [4.1]), что локальное семейство Γ определяет некоторое представление группы π_x^1 в группе G_x, так что условия определения групп $H^r(\mathrm{A}, G)$ выполнены.

некоторого локального семейства Г в пространстве X. Эйленберг и Маклейн доказали следующую теорему:

[7.2] *Для любого линейно связного пространства* X, *асферичного в размерностях, меньших* n, *можно определить такой* $(n+1)$-*мерный класс* $\mathbf{k}$ *когомологий группы* $\pi_x^1(X)$ *над группой* $\pi_x^n(X)$, *что для любого локального семейства* Г *группа* $H^n(X, \Gamma)$ *изоморфна группе* $E(\mathbf{k}, G_x)$.

В частности, эта теорема для любого пространства X полностью описывает строение группы $H^2(X, \Gamma)$ с помощью некоторого класса $\mathbf{k}_1$ когомологий группы $\pi_x^1(X)$ над группой $\pi_x^2(X)$.

В предлагаемой работе показано, что класс $\mathbf{k}_1$ является лишь первым членом некоторой последовательности

$$\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots$$

Члены этой последовательности вместе с гомотопическими группами образуют некоторый новый алгебраический объект — натуральную систему пространства. Оказывается, что натуральная система полностью определяет все группы когомологий, причем можно указать явные формулы, переходящие для асферичных пространств в формулы Эйленберга и Маклейна.

I. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ

§ 1. Полусимплициальные комплексы

8. Полусимплициальные комплексы

Некоторое множество элементов произвольной природы, называемых *симплексами*, называется *полусимплициальным комплексом*, если любому симплексу отнесено некоторое целое неотрицательное число, называемое его *размерностью*, и для любого симплекса A и любого кортежа* $\mathfrak{a}$ высоты, не большей размерности r симплекса A, определен симплекс $A_{(\mathfrak{a})}$ размерности, равной длине кортежа $\mathfrak{a}$, причем

ПСК 1 $\quad A_{(\{r\})} = A;$

ПСК 2 $\quad (A_{(\mathfrak{a})})_{(\mathfrak{b})} = A_{(\mathfrak{a}_{(\mathfrak{b})})}$

для любых кортежей $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ таких, что высота кортежа $\mathfrak{a}$ не больше r, а высота кортежа $\mathfrak{b}$ не больше длины кортежа $\mathfrak{a}$.

Симплекс $A_{(\mathfrak{a})}$ при $\mathfrak{a} \neq \{r\}$ называется *гранью* симплекса A. Если нужно отметить его зависимость от $\mathfrak{a}$, мы будем называть его *$\mathfrak{a}$-гранью*. Иногда мы будем считать гранью симплекса A и сам симплекс A, называя его *несобственной гранью*. Собственную грань $A_{(\mathfrak{a})}$ мы будем, когда понадобится, обозначать также через $A^{(\mathfrak{b})}$, где $\mathfrak{b}$ — дополнение в $\{r\}$ кортежа $\mathfrak{a}$.

$(r-1)$-мерные грани r-мерного симплекса A называются его *главными гранями*. Они имеют вид $A^{(a)}$, где a — целое неотрицательное число, не превосходящее r. Главная грань $A^{(a)}$ называется *a-той главной гранью* симплекса.

Любая собственная грань является главной гранью некоторой собственной или несобственной грани. Следовательно, операция взятия грани является итерацией операций взятия главной грани. Именно, легко видеть, что если $\mathfrak{a} = (a_0, \ldots, a_p)$, то

$$A^{(\mathfrak{a})} = A^{(a_p)\,(a_{p-1})\ldots\,(a_0)}. \tag{8.1}$$

---

* О кортежах см. стр. 34.

Таким образом, можно было бы в основу определения полусимплициального комплекса положить операцию взятия главной грани, определив операцию взятия любой грани формулой (8.1). При этом, для того чтобы операция, определенная формулой (8.1), удовлетворяла условию ПСК 2, необходимо и достаточно потребовать, чтобы для любых a, $b = 0, \ldots, r$ таких, что $a < b$,

$$A^{(b)\,(a)} = A^{(a)\,(b-1)}. \tag{8.2}$$

Этим путем полусимплициальные комплексы определены в статье [8].

Нульмерные симплексы полусимплициального комплекса называются его *вершинами*. Вершина вида $A_{(a)}$, т. е., являющаяся a-гранью симплекса A, называется его *a-той вершиной*. Собственных граней вершины не имеют. Любой комплекс содержит по крайней мере одну вершину. Полусимплициальный комплекс, содержащий только одну вершину, называется *одновершинным*.

Вершины полусимплициального комплекса называются *соседними*, если они являются вершинами одного и того же одномерного симплекса. Полусимплициальный комплекс называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить цепочкой попарно соседних вершин. Одновершинный комплекс, по определению, связен.

Симплексы A и B одной и той же размерности r, большей нуля, называются *непосредственно сцепленными* друг с другом, если они являются не нулевыми главными гранями некоторого $(r+1)$-мерного симплекса C, т. е. если существуют такие два числа a и b, большие нуля и не превосходящие $r+1$ и такой $(r+1)$-мерный симплекс С, что

$$C^{(a)} = A, \;\; C^{(b)} = B.$$

Подчеркнем, что a и b должны быть больше нуля. Симплексы A и B называются *сцепленными* друг с другом, если существует такая конечная последовательность

$$A_1, \ldots, A_n$$

симплексов, что $A_1 = A$, $A_n = B$ и для любого $a = 1, \ldots, n-1$ симплексы A_a и A_{a+1} непосредственно сцеплены друг с другом. Очевидно, что отношение сцепленности рефлексивно, симметрично и транзитивно. Полусимплициальный комплекс называтся *сильно связным*, если он связен и любые два его симплекса одной и той же размерности, большей нуля, сцеплены друг с другом.

Пусть r — произвольное целое неотрицательное число. $(r+2)$-членная последовательность

$$S = (A_0, \ldots, A_{r+1})$$

r-мерных симплексов полусимплициального комплекса называется его *r-мерной сферой*, если для любых чисел $a, b = 0, \ldots, r+1$ таких, что $a < b$,

$$A_b^{(a)} = A_a^{(b-1)}. \tag{8.3}$$

Симплекс A_a называется *a-той гранью сферы* S и обозначается через S^a. Из (8.2) следует, что для любого $(r+1)$-мерного симплекса A последовательность

$$\Delta A = (A^{(0)}, \ldots, A^{(r+1)})$$

его главных граней является r-мерной сферой. Эта сфера ΔA называется *границей* симплекса A. Полусимплициальный комплекс называется *асферичным в размерности* r, если любая его r-мерная сфера является границей хотя бы одного $(r+1)$-мерного симплекса. Одновершинный комплекс, содержащий хотя бы один одномерный симплекс, очевидно, асферичен в размерности 0.

Симплексы A и B одной и той же размерности r, большей нуля, называются *сравнимыми* между собой, если их границы совпадают:

$$\Delta A = \Delta B.$$

Другими словами, симплексы A и B сравнимы между собой, если совпадают их главные грани, т. е. для любого $a = 0, \ldots, r$

$$A^{(a)} = B^{(a)}.$$

Из (8.1) следует, что у сравнимых между собой симплексов совпадают все собственные грани, т. е. для любого кортежа $\mathfrak{a}$ высоты, не большей r, и отличного от $\{r\}$

$$A_{(\mathfrak{a})} = B_{(\mathfrak{a})}.$$

В частности, если $r > 1$,

$$A_{(0,1)} = B_{(0,1)}. \tag{8.4}$$

Все нульмерные симплексы считаются по определению сравнимыми между собой. Полусимплициальный комплекс называется *правильным в размерности* r, если любые его r-мерные, сравнимые между собой симплексы совпадают. Комплекс тогда и только тогда правилен в размерности 0, когда он одновершинен.

Полусимплициальный комплекс называется *полным*, если любому его симплексу A и любому целому неотрицательному числу a, не превосходящему размерности r симплекса A, отнесен такой $(r+1)$-мерный симплекс $A(a)$, что для любого $b = 0, \ldots, r+1$

$$\text{П 1} \quad A(a)^{(b)} = \begin{cases} A^{(b)}(a-1), & \text{если } b < a; \\ A, & \text{если } b = a; \\ A, & \text{если } b = a+1; \\ A^{(b-1)}(a), & \text{если } b > a+1; \end{cases}$$

$$\text{П 2} \qquad A(a)(b)=\begin{cases} A(b)(a+1), & \text{если } b\leqslant a; \\ A(b-1)(a), & \text{если } b>a. \end{cases}$$

Симплекс $A(a)$ называется *a-той надстройкой* над симплексом A. Симплекс называется *вырожденным*, если он является надстройкой над некоторым симплексом меньшей размерности, и *невырожденным* в противном случае. Все нульмерные симплексы, очевидно, невырожденны.

Любой вырожденный симплекс можно представить в виде

$$A(a_0),\ldots,(a_p), \tag{8.5}$$

где симплекс A невырожден. Пользуясь условием П 2, можно от любого такого представления перейти к представлению, для которого последовательность

$$\mathfrak{a}=(a_0,\ldots,a_p)$$

является кортежем. Симплекс (8.5), для которого последовательность $\mathfrak{a}=(a_0,\ldots,a_p)$ является кортежем, будем обозначать символом $A(\mathfrak{a})$. Из П 1 и (8.1) легко следует, что

$$A(\mathfrak{a})^{(\mathfrak{a})}=A. \tag{8.6}$$

[8.1] *Представление вырожденного симплекса в виде $A(\mathfrak{a})$, где симплекс A невырожден, единственно.*

Действительно, пусть

$$A(\mathfrak{a})=B(\mathfrak{b})$$

и симплекс B, как и A, невырожден. Согласно (8.6),

$$B=B(\mathfrak{b})^{(\mathfrak{b})}=A(\mathfrak{a})^{(\mathfrak{b})}. \tag{8.7}$$

Если $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$, то, применяя еще раз формулу (8.6), получим, что $A=B$. Таким образом, нужно рассмотреть лишь случай, когда $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{b}$. Оказывается, что предположение $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{b}$ приводит к противоречию. Действительно, в этом предположении существуют числа, принадлежащие одному из кортежей $\mathfrak{a}$ или $\mathfrak{b}$ и не принадлежащие другому. Выберем среди этих чисел наибольшее. Пусть это будет *a-тый* член a_a кортежа $\mathfrak{a}=(a_0,\ldots,a_p)$. Таким образом, если $\mathfrak{b}=(b_0,\ldots,b_q)$, то

$$\begin{gathered} a_p=b_q; \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{a+1}=b_{q+a+1-p}; \\ a_a>b_{q+a-p}. \end{gathered}$$

Так как

$$b_{q+a-p}\geqslant q+a-p\geqslant 0,$$

то

$$a_a - q - a + p - 1 \geqslant 0.$$

Согласно формулам (8.7), (8.1) и условию П 1 имеем

$$B = A(\mathfrak{a})^{(\mathfrak{b})} = A(a_0)\ldots(a_p)^{(b_q)\ldots(b_0)} = A(a_0)\ldots(a_a)^{(b_q+a-p)\ldots(b_0)} =$$
$$= (A(a_0)\ldots(a_{a-1}))^{(b_q+a-p)\ldots(b_0)}(a_a - q - a + p - 1),$$

что противоречит невырожденности симплекса B. Тем самым предложение [8.1] доказано.

Единственное представление вырожденного симплекса в виде $A(\mathfrak{a})$, где A невырожден, назовем *каноническим*. Симплекс A назовем *ядром* данного вырожденного симплекса, а числа $a_0, \ldots a_p$ — его *местами вырожденности*. Все они меньше размерности симплекса $A(\mathfrak{a})$. Число мест вырожденности назовем *степенью вырожденности* симплекса $A(\mathfrak{a})$. Степень вырожденности любого симплекса не превосходит его размерности. Ядром невырожденного симплекса считается сам симплекс. Мест вырожденности невырожденный симплекс не имеет, и степень его вырожденности равна нулю.

Пусть $A(\mathfrak{a})$ — каноническое представление некоторого вырожденного симплекса. Если число b таково, что существует номер a, для которого $b = \mathfrak{a}_{(a)}$ или $b = \mathfrak{a}_{(a)} + 1$, т. е. если b или $b - 1$ является местом вырожденности симплекса $A(\mathfrak{a})$, то грань $A(\mathfrak{a})^{(b)}$ называется *главной гранью первого рода*. Согласно П 1

$$A(\mathfrak{a})^{(b)} = A(\mathfrak{a}_{(0)})\ldots(\mathfrak{a}_{(a-1)})(\mathfrak{a}_{(a+1)} - 1)\ldots(\mathfrak{a}_{(p)} - 1). \tag{8.8}$$

Таким образом:

[8.2] *Степень вырожденности главной грани первого рода на единицу меньше степени вырожденности всего симплекса. Ее местами вырожденности служат числа*

$$\mathfrak{a}_{(0)}, \ldots, \mathfrak{a}_{(a-1)}, \mathfrak{a}_{(a+1)} - 1, \ldots, \mathfrak{a}(p) - 1.$$

Ее ядро совпадает с ядром всего симплекса.

Главные грани, не являющиеся гранями первого рода, называются *главными гранями второго рода*. Невырожденный симплекс не имеет граней первого рода, так что все его главные грани — второго рода. Аналогично предложению [8.2], для граней второго рода легко доказывается следующее утверждение:

[8.3] *Степень вырожденности главной грани второго рода равна степени вырожденности всего симплекса. Ее ядром является некоторая главная грань ядра всего симплекса.*

Из [8.2] и [8.3] следует, что число a тогда и только тогда является местом вырожденности симплекса A, когда ядра граней $A^{(a)}$ и $A^{(a+1)}$ одинаковы и совпадают с ядром всего симплекса A. Следовательно, так как ядра вырожденных сравнимых между собой симплексов совпадают, то

[8.4] *Вырожденные сравнимые между собой симплексы совпадают.*

Симплекс, степень вырожденности которого равна его размерности, называется *стянутым.* Ядро стянутого симплекса нульмерно. Симплекс тогда и только тогда одновременно стянут и невырожден, когда он нульмерен. Любой стянутый симплекс является главной гранью стянутого симплекса большей размерности. Все грани стянутого симплекса стянуты и имеют то же ядро. В любой размерности существует только один стянутый симплекс с данным ядром. Все грани одной и той же размерности стянутого симплекса совпадают. В одновершинном комплексе в каждой размерности существует только один стянутый симплекс. Вырожденный одномерный симплекс стянут, и, следовательно, вершины его совпадают.

Из [8.2] и [8.3] следует, что вырожденный симплекс тогда и только тогда имеет невырожденные главные грани, когда его степень вырожденности равна единице, причем если a — его единственное место вырожденности, то невырождены грани $A^{(a)}$ и $A^{(a+1)}$. Если $a=0$, то, как легко видеть, симплекс $A_{(0,1)}$ вырожден и, следовательно, стянут. Итак:

[8.5] *Вырожденный симплекс A либо вообще не имеет невырожденных главных граней, либо имеет их точно две, причем с соседними номерами. Если грани $A^{(0)}$ и $A^{(1)}$ невырождены, то симплекс $A_{(0,1)}$ стянут.*

Индексом стянутости симплекса A называется наименьшее число a такое, что a-тое место вырожденности симплекса A больше a. Индекс стянутости невырожденного симплекса положим равным нулю, а стянутого симплекса — равным его размерности. Каноническое представление r-мерного симплекса A индекса стянутости a имеет вид:

$$B(0)\ldots(a-1)(a_a)\ldots(a_p),$$

где $a_a > a$. (Если $a=0$, то члены $(0)\ldots(a-1)$ отсутствуют, и если $a=r$, то отсутствуют члены $(a_a),\ldots(a_p)$.) Отнесем симплексу A симплекс C размерности $r+1$, положив

$$C=B(0)\ldots(a-1)(a)(a_a)\ldots(a_p).$$

Индекс стянутости симплекса C не меньше $a+1$. Согласно П 1 $C^{(a+1)}=A$. Если $a<r$, то индекс стянутости симплекса $C^{(r+1)}$ не меньше $a+1$. Таким образом, любой нестянутый симплекс непосредственно сцеплен с симплексом большего индекса стянутости. Отсюда следует, что любой симплекс сцеплен со стянутым. В частности, в одновершинном комплексе все симплексы одной и той же размерности сцеплены друг с другом. Таким образом:

[8.6] *Полный одновершинный комплекс сильносвязен.*

Кортеж $\mathfrak{b}$ называется *подкортежем* кортежа $\mathfrak{a}$, если все члены кортежа $\mathfrak{b}$ принадлежат кортежу $\mathfrak{a}$. Подкортеж $\mathfrak{b}$ называется *собственным*, если он отличен от $\mathfrak{a}$. Любой подкортеж $\mathfrak{b}$ кортежа $\mathfrak{a}$ можно единственным образом представить в виде $\mathfrak{a}_{(\mathfrak{c})}$. Так, определенный кортеж $\mathfrak{c}$ будем обозначать через $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$. Его длина равна длине кортежа $\mathfrak{b}$, а высота не превосходит длины кортежа $\mathfrak{a}$. Заметим, что для любого кортежа $\mathfrak{a}$ типа (r, p):

$$\{r\}:\mathfrak{a}=\mathfrak{a};$$

$$\mathfrak{a}:\mathfrak{a}=\{p\}.$$

Пусть N — произвольный полусимплициальный комплекс. Рассмотрим множество $B(N)$ всех последовательностей вида

$$(A,\ \mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_n), \tag{8.9}$$

где A — произвольный симплекс комплекса N, а $\mathfrak{a}_i\,(i=0, \ldots, n)$ — кортежи, причем $\mathfrak{a}_0=\{r\}$, где r — размерность симплекса A, и для $i<j$ кортеж $\mathfrak{a}_j$ является собственным подкортежем кортежа $\mathfrak{a}_i$. Число n назовем *размерностью* последовательности (8.9). Пусть $\mathfrak{a} = (a_0, \ldots, a_p)$ — произвольный кортеж высоты, не большей n. Последовательность

$$(A_{(\mathfrak{a}_{a_0})},\ \mathfrak{a}_{a_0}:\mathfrak{a}_{a_0},\ \mathfrak{a}_{a_0}:\mathfrak{a}_{a_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{a_0}:\mathfrak{a}_{a_p}),$$

очевидно, также принадлежит множеству $B(N)$. Она называется $\mathfrak{a}$-*гранью* последовательности (8.9). Легко видеть, что в силу этих определений множество $B(N)$ является полусимплициальным комплексом. Этот комплекс называется *первым барицентрическим подразделением* комплекса N. Его первое барицентрическое подразделение обозначается через $B^2(N)$ и называется *вторым барицентрическим подразделением комплекса* N. Вообще первое барицентрическое подразделение $(k-1)$-го подразделения обозначается через $B^k(N)$ и называется *k-тым барицентрическим подразделением комплекса* N.

Полусимплициальный комплекс называется *симплициальным*, если для любых двух его различных симплексов в комплексе существует по крайней мере одна вершина, являющаяся вершиной одного симплекса и не являющаяся вершиной другого. В последующем мы увидим, что так определенные симплициальные комплексы вполне эквивалентны классическим. Очевидно, что симплициальный комплекс правилен во всех размерностях, больших нуля, и что все грани любого его симплекса A различны, т. е. из $A_{(\mathfrak{a})}=A_{(\mathfrak{b})}$, следует $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$. Оказывается, что имеет место следующее предложение:

[8.7] *Второе барицентрическое подразделение любого полусимплициального комплекса N симплициально.*

Для доказательства заметим, что первое барицентрическое подразделение любого полусимплициального комплекса правильно во всех размерностях, больших единицы. Отсюда следует, что достаточно доказать совпадение любых двух одномерных симплексов комплекса $B^2(N)$, имеющих одинаковые множества вершин.

Итак, пусть

$$((A,\ \mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_n),\ \{n\},\ \mathfrak{a}), \tag{8.10}$$

где

$$\mathfrak{a} = (a_0, \ldots, a_p)$$

— некоторый кортеж длины p, меньшей n, и

$$((B,\ \mathfrak{b}_0, \ldots, \mathfrak{b}_m),\ \{m\},\ \mathfrak{b}), \tag{8.11}$$

где

$$\mathfrak{b} = (b_0, \ldots, b_q)$$

— некоторый кортеж длины q, меньшей m, — одномерные симплексы комплекса $B^2(N)$, вершины которых совпадают. Их вершины имеют соответственно вид:

$$((A,\ \mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_n),\ \{n\}), \tag{8.12}$$

$$((A_{(\mathfrak{a}_{a_0})},\ \mathfrak{a}_{a_0} : \mathfrak{a}_{a_0},\ \mathfrak{a}_{a_0} : \mathfrak{a}_{a_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{a_0} : \mathfrak{a}_{a_p}),\ \{p\}); \tag{8.13}$$

$$((B,\ \mathfrak{b}_0, \ldots, \mathfrak{b}_m),\ \{m\}), \tag{8.14}$$

$$((B_{(\mathfrak{b}_{b_0})},\ \mathfrak{b}_{b_0} : \mathfrak{b}_{b_0},\ \mathfrak{b}_{b_0} : \mathfrak{b}_{b_1}, \ldots, \mathfrak{b}_{b_0} : \mathfrak{b}_{b_q}),\ \{a\}). \tag{8.15}$$

Если вершина (8.12) совпадает с вершиной (8.14), то

$$n = m;$$

$$A = B;$$

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}_i \quad (i = 0, \ldots, n).$$

Кроме того, тогда совпадают и вершина (8.13) с вершиной (8.15), так что

$$p = q;$$

$$A_{(\mathfrak{a}_{a_0})} = B_{(\mathfrak{b}_{b_0})} = A_{(\mathfrak{a}_{b_0})}.$$

Но длины кортежей $\mathfrak{a}_i$ все различны. Поэтому

$$a_0 = b_0.$$

Кроме того,

$$\mathfrak{a}_{a_0} : \mathfrak{a}_{a_i} = \mathfrak{b}_{b_0} : \mathfrak{b}_{b_i}.$$

Отсюда по тем же соображениям следует, что

$$a_a = b_a \quad (a = 1, \ldots, p).$$

Таким образом,

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}.$$

Итак, в этом случае симплексы (8.10) и (8.11) совпадают.

Предположим теперь, что вершина (8.12) совпадает с вершиной (8.15) и, следовательно, вершина (8.13) с вершиной (8.14). Тогда

$$n = q \text{ и } p = m,$$

что противоречит неравенствам $p < n$ и $q < m$. Следовательно, этот случай невозможен. Предложение [8.7] доказано.

Таким образом, полусимплициальные комплексы в некотором смысле сводятся к симплициальным. Несмотря на это, введение полусимплициальных комплексов целесообразно, потому что многие естественно возникающие комплексы, как мы увидим далее, полусимплициальны, а переход к их барицентрическим подразделениям не оправдывается соображениями тех теорий, где они возникают. К тому же теория полусимплициальных комплексов ничуть не сложнее теории комплексов симплициальных.

9. Симплициальные отображения

Пусть K и L — произвольные полусимплициальные комплексы. Отображение μ комплекса K в комплекс L называется *симплициальным*, если оно сохраняет размерность и перестановочно с операциями взятия граней, т. е. если для любого симплекса A комплекса K и для любого кортежа $\mathfrak{a}$ высоты, не большей размерности симплекса A:

$$\mu A_{(\mathfrak{a})} = (\mu A)_{(\mathfrak{a})}.$$

Произведение симплициальных отображений, очевидно, симплициально. Взаимно однозначное симплициальное отображение называется *изоморфным*. Отображение, обратное изоморфному, очевидно, изоморфно. Тождественное отображение 1_K комплекса K на себя изоморфно. Полусимплициальные комплексы называются *изоморфными*, если существует хотя бы одно изоморфное отображение одного комплекса на другой. Все введенные в предыдущем пункте свойства полусимплициальных комплексов инвариантны относительно изоморфизма, т. е. вместе с некоторым комплексом, обладающим каким-либо свойством (связности, асферичности, полноты и т. п.); тем же свойством обладают и все изоморфные ему комплексы. Как правило, мы не будем различать изоморфных комплексов.

Пусть M — произвольное подмножество комплекса K. Тождественное отображение множества M в комплекс K называется его *отображением вложения*. Если M является комплексом и его отображение вложения симплициально, то M называется *подкомплексом* комплекса K. Более наглядно, но логически менее совершенно, подкомплекс можно определить как подмножество, содержащее вместе с некоторым симплексом и все его грани. Примером подкомплекса может служить подмножество K^n, состоящее из всех симплексов комплекса K размерности, не превосходящей n. Этот подкомплекс называется *n-мерным остовом комплекса K*. Сам комплекс K мы иногда будем называть своим ∞-*мерным остовом* и соответственно этому обозначать через K^∞.

Подкомплекс полного комплекса может не быть полным. Наименьший полный подкомплекс, содержащий данный подкомплекс, называется его *пополнением*. Он определен однозначно и состоит из всех симплексов, ядра которых принадлежат данному подкомплексу.

Пусть M — подкомплекс комплекса K, а μ — симплициальное отображение комплекса K в комплекс L. Отображение, рассматриваемое лишь на подкомплексе M, называется *частью* отображения μ и обозначается через μ / M. Более формально,

$$\mu / M = \mu i,$$

где i — отображение вложения подкомплекса M. Отображение μ / M симплициально. Симплициальное отображение комплекса M в комплекс L называется *продолжаемым*, если оно является частью некоторого симплициального отображения всего комплекса K в комплекс L — его *продолжения*.

Симплициальное отображение n-мерного остова K^n комплекса K в комплекс L называется *n-отображением* комплекса K в комплекс L. Легко видеть, что если комплекс L асферичен во всех размерностях, не меньших n, то любое n-отображение комплекса K в комплекс L продолжаемо. В общем же случае существуют непродолжаемые n-отображения. Симплициальные отображения всего комплекса K мы будем иногда в соответствии с тем, что K считается своим ∞-мерным остовом, называть ∞-отображениями.

n-отображение μ $(n \geqslant 1)$ комплекса K в комплекс L называется *n-изоморфным*, если существует такое n-отображение ν комплекса L в комплекс K, что

$$\nu\mu / K^{n-1} = 1_K, \quad \mu\nu / L^{n-1} = 1_L.$$

Отображение ν также n-изоморфно. Оно называется *обратным* n-отображению μ. Заметим, что отображение ν определяется отображением μ неоднозначно. В соответствии со сказанным выше ∞-изоморфные отображения — изоморфизмы и обратно. Полусимплициальные комплексы называются *n-изоморфными* или комплексами *одного n-типа*, если существует хотя бы одно n-изоморфное отображение одного в другой. Очевидно, что отношение изоморфизма рефлексивно, симметрично и транзитивно, так что совокупность всех полусимплициальных комплексов разбивается на непересекающиеся *n-типы* попарно n-изоморфных комплексов. Комплексы принадлежат одному ∞-типу тогда и только тогда, когда они изоморфны. n-изоморфные комплексы m-изоморфны для любого $m \leqslant n$. В частности, изоморфные комплексы n-изоморфны для любого n. Для доказательства n-изоморфности комплексов некоторую пользу может принести следующее простое утверждение:

[9.1] *Если $(n-1)$-мерные остовы комплексов K и K' совпадают и для любого n-мерного симплекса одного комплекса в другом найдется сравнимый с ним симплекс, то комплексы K и K' n-изоморфны.*

Действительно, любому не более чем n-мерному симплексу комплекса K отнесем в комплексе K' либо его самого, либо, если он не лежит в K', какой-нибудь сравнимый с ним симплекс. Существование последнего обеспечено условием теоремы. Очевидно, что получится n-изоморфное отображение комплекса K в комплекс K'. Обратным к нему будет аналогично строящееся n-отображение комплекса K' в комплекс K.

Особо отметим следующий частный случай доказанного предложения:

[9.2] *Если $(n-1)$-мерные остовы комплексов K и K' совпадают, n-мерный остов комплекса K лежит в K' и для любого n-мерного симплекса K' в комплексе K найдется сравнимый с ним симплекс, то комплексы K и K' n-изоморфны.*

Построенное выше n-отображение комплекса K в комплекс K' будет в этом случае отображением вложения n-мерного остова комплекса K.

10. Пример полусимплициального комплекса: комплекс остовов

Конечная последовательность элементов некоторого множества M называется *остовом над* M, если она не содержит одинаковых членов. Число элементов остова, уменьшенное на единицу, называется его размерностью. Для любого остова $A=(m_0, \ldots, m_r)$ определим его $\mathfrak{a}$-грань $A_{(\mathfrak{a})}$, где $\mathfrak{a}=(a_0, \ldots, a_p)$ — произвольный кортеж высоты, не большей размерности r остова A, положив

$$A_{(\mathfrak{a})}=(m_{a_0}, \ldots, m_{a_p}).$$

Очевидно, что в силу этого определения множество всех остовов над M является полусимплициальным комплексом. Любой подкомплекс этого комплекса называется *комплексом остовов над* M. Вершинами остовов являются элементы множества M. Любой остов $A=(m_0, \ldots, m_r)$ однозначно определяется последовательностью

$$A_0=m_{(0)}, \ldots, A_{(r)}=m_r$$

своих вершин. Поэтому комплекс остовов правилен во всех размерностях, больших нуля, и все грани любого его симплекса A различны, т. е. из $A_{(\mathfrak{a})}=A_{(\mathfrak{b})}$ следует, что $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$. Однако он не симплициален, потому что, например, симплексы $(m_0, m_1,)$ и (m_1, m_0) имеют одни и те же вершины, но не совпадают. Полусимплициальный комплекс, обладающий перечисленными свойствами, называется *комплексом симплициального типа.*

[10.1] *Любой комплекс симплициального типа (в частности, любой симплициальный комплекс) изоморфен некоторому комплексу остовов.*

Действительно, пусть A — произвольный симплекс некоторого комплекса K симплициального типа. Тогда последовательность

$$A_{(0)}, \ldots, A_{(r)}$$

всех его вершин не содержит повторений и, следовательно, является остовом над K^0. Очевидно, что так построенное отображение комплекса K внутрь комплекса всех остовов над K^0 изоморфно, что доказывает предложение [10.1].

Комплексы остовов, соответствующие в силу этого предложения симплициальным комплексам, являются комплексами упорядоченных остовов в смысле [1].

Взаимно однозначное отображение множества M в некоторое множество M' порождает естественное симплициальное отображение любого комплекса остовов над M на некоторый комплекс остовов над M'. Для не взаимно однозначных отображений это уже не так, потому что различные элементы некоторого остова над M могут перейти в одинаковые элементы множества M'. Возможны два пути преодоления этой трудности. Первый, классический состоит во введении «вырожденных» симплициальных отображений, понижающих размерность. Этот путь требует перестройки всех определений в сторону их значительного усложнения и для нас неприемлем. Второй путь заключается в расширении понятия остова за счет допущения остовов с повторениями.

Остовом с повторениями над M называется любая конечная последовательность элементов множества M. Размерность и грани остовов с повторениями определяются так же, как и для остовов без повторений, и совокупность всех остовов с повторениями образует полусимплициальный комплекс $O(M)$. Любой подкомплекс комплекса $O(M)$ называется *комплексом остовов с повторениями над M*. Аналогично предложению [10.1] легко доказать, что

[10.2] *Полусимплициальный комлекс тогда и только тогда изоморфен некоторому комплексу остовов с повторениями, когда он правилен во всех размерностях, больших нуля.*

Пусть $A = (m_0, \ldots, m_r)$ — произвольный остов с повторениями и $a = 0, \ldots, r$. Определим *a-тую надстройку* $A(a)$ остова A, положив

$$A(a) = (m_0, \ldots, m_{a-1}, m_a, m_a, m_{a+1}, \ldots, m_r).$$

Легко проверить, что относительно так определенной операции надстройки комплекс $O(M)$ полон.

Пусть K — произвольный комплекс остовов (без повторений). Так как любой остов (без повторений) можно рассматривать и как остов с повторениями, то K является подкомплексом комплекса $O(M)$. Его пополнение $\overline{K}$ в комплексе $O(M)$ мы назовем комплексом остовов с повторениями, *соответствующим* данному комплексу остовов без повторений. Легко видеть, что симплекс комплекса $\overline{K}$ тогда и только тогда принадлежит K, когда он невырожден. В связи с этим заметим, что невырожденные остовы с повторениями могут содержать повторяющиеся элементы, но обязательно не на соседних местах.

Любой r-мерный остов с повторениями можно рассматривать как множество значений некоторой функции, определенной на множестве всех целых неотрицательных чисел, не превосходящих r. Установленное тем самым соответствие между остовами и функциями взаимно однозначно. Следовательно, комплекс $O(M)$ можно трактовать как комплекс функций описанного вида. Эта функциональная трактовка подсказывает важное обобщение, состоящее в рассмотрении функций не одной, а многих переменных. Теория, получающаяся при таком обобщении, излагается в следующем пункте.

11. Пример полусимплициального комплекса: комплекс $K(M,p)$

Пусть M — произвольное множество и m_0 — некоторый фиксированный его элемент. Функцию, принимающую значения в множестве M и определенную на множестве всех неубывающих $(p+1)$-членных последовательностей целых неотрицательных чисел, не превосходящих r, назовем *кортежфункцией* типа (r, p) над M, если она равна элементу m_0 на любой последовательности, содержащей повторения, т. е. не являющейся кортежем типа (r, p). Для $p=0$ последнее условие не накладывает никакого ограничения, так что кортежфункции типа $(r, 0)$ есть просто функции, принимающие значения в M и определенные на множестве всех целых неотрицательных чисел, не превосходящих r.

Существуют кортежфункции любого типа, например кортежфункция, тождественно равная элементу m_0. Если $r<p$, то других кортежфункций типа (r, p), очевидно, не существует. Кортежфункция типа (p, p) однозначно определяется своим значением на кортеже $\{p\}$. Аналогично кортежфункция типа $(p+1, p)$ однозначно определяется своими значениями на кортежах вида $\{p+1\}^{(a)}$ $(a=0, \ldots, p+1)$. Вообще, кортежфункция любого типа однозначно определяется своими значениями на кортежах того же типа.

Если множество M является группой, то мы раз навсегда условимся принимать за элемент m_0 единицу этой группы, если она мультипликативна, и нуль, если она аддитивна. Соответственно этому кортежфункцию, тождественно равную единице или соответственно нулю группы M, условимся обозначать знаком 1 соответственно 0.

Пусть φ — произвольная кортежфункция типа (r, p) над M и $\mathfrak{a}$ — произвольный кортеж высоты, не большей r. Пусть q — длина кортежа $\mathfrak{a}$. Определим кортежфункцию $\varphi_{(\mathfrak{a})}$ типа (q, p), положив для любого кортежа $\mathfrak{S}$ типа (q, p)

$$\varphi_{(\mathfrak{a})}(\mathfrak{c}) = \varphi(\mathfrak{a}_{(\mathfrak{c})}).$$

Пусть $\mathfrak{b}$ — произвольный кортеж высоты, не большей q, и пусть s — его длина. Согласно формуле (6.1) для любого кортежа $\mathfrak{c}$ типа (s, p)

$$(\varphi_{(\mathfrak{a})})_{(\mathfrak{b})}(\mathfrak{c}) = \varphi_{(\mathfrak{a})}(\mathfrak{b}_{(\mathfrak{c})}) = \varphi(\mathfrak{a}_{(\mathfrak{b}_{(\mathfrak{c})})}) = \varphi((\mathfrak{a}_{(\mathfrak{b})})(\mathfrak{c})) = \varphi(\mathfrak{a}_{(\mathfrak{b})})(\mathfrak{c}).$$

Таким образом,

$$(\varphi_{(\mathfrak{a})})_{(\mathfrak{b})} = \varphi_{(\mathfrak{a}_{(\mathfrak{b})})}.$$

Кроме того,

$$\varphi_{(\{r\})} = \varphi,$$

так как для любого кортежа $\mathfrak{a}$ типа (r, p)

$$\{r\}_{(\mathfrak{a})} = \mathfrak{a}.$$

Таким образом, для любого $p \geqslant 0$ и всех $r \geqslant 0$ множество $K(M, p)$ всех кортежфункций типа (r, p) над M является полусимплициальным комплексом. При этом $\mathfrak{a}$-гранью кортежфункции φ является кортежфункция $\varphi_{(\mathfrak{a})}$, а размерность кортежфункции φ типа (r, p) равна r. При $p = 0$ симплексы комплекса $K(M, 0)$ находятся согласно сказанному выше во взаимно однозначном соответствии с остовами, с повторениями над M. Легко видеть, что это соответствие изоморфно. Итак:

[11.1] *Комплексы* $K(M, 0)$ *и* $O(M)$ *изоморфны.*

Если $p > 0$, то, как мы знаем, существует только одна кортежфункция типа $(0, p)$, т. е.

[11.2] *Для* $p > 0$ *комплекс* $K(M, p)$ *одновершинен.*

Очевидно, что для любого кортежа $\mathfrak{a}$ типа (r, p)

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\{p\}}.$$

Следовательно, для любой кортежфункции φ типа (r, p)

$$\varphi_{(\mathfrak{a})}(\{p\}) = \varphi(\mathfrak{a}).$$

Таким образом, если для любого кортежа $\mathfrak{a}$ типа (r, p)

$$\varphi_{(\mathfrak{a})} = \psi_{(\mathfrak{a})},$$

то

$$\varphi = \psi.$$

Другими словами, если p-мерные грани двух кортежфункций типа (r, p) совпадают, то кортежфункции одинаковы. Отсюда, в частности, следует:

[11.3] *Комплекс $K(M, p)$ правилен во всех размерностях, больших p.*

Заметим, что комплекс $K(M, p)$ очевидным образом правилен и во всех размерностях, меньших p. Напротив, все его p-мерные симплексы, а их столько же, сколько элементов в множестве M, сравнимы между собой.

Для более детального изучения комплекса $K(M, p)$ необходимы некоторые формулы теории кортежей, полезные и в других вопросах. Отложив пока комплекс $K(M, p)$ в сторону, займемся их выводом.

Пусть $\mathfrak{a}$ — произвольный кортеж и (r, p) — его тип. Для любого целого неотрицательного числа b, не большего r, положим

$$b_a = \left.\begin{cases} \mathfrak{a}_{(a)}, & \text{если } \mathfrak{a}_{(a)} \leqslant b; \\ \mathfrak{a}_{(a)} - 1, & \text{если } \mathfrak{a}_{(a)} > b \end{cases}\right\} (a = 0, \ldots, p).$$

Так полученная неубывающая последовательность

$$\mathfrak{a}[b] = (b_0, \ldots, b_p)$$

не будет содержать повторений, т. е. будет кортежем, тогда и только тогда, когда либо b, либо $b+1$ не принадлежат $\mathfrak{a}$. Его тип будет $(r-1, p)$, если только b и $\mathfrak{a}_{(p)}$ оба не равны r. Операцию $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}[b]$ можно применять не только к кортежам, но и к любым неубывающим последовательностям. Имея это в виду, легко докажем, что для любого целого неотрицательного числа c, меньшего b,

$$\mathfrak{a}[b][c] = \mathfrak{a}[c][b-1] \quad (c < b). \tag{11.1}$$

Далее легко видеть, что

$$\mathfrak{a}[b]^{(a)} = \mathfrak{a}^{(a)}[b] \quad (a = 0, \ldots, p) \tag{11.2}$$

(здесь мы естественным образом расширяем операцию $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}^{(a)}$ на случай, когда $\mathfrak{a}$ содержит повторения). Из этой формулы следует, что, если $b = \mathfrak{a}_{(a)}$, то последовательность $\mathfrak{a}[b]^{(a)}$ будет кортежем, даже если b и $b+1$ принадлежат $\mathfrak{a}$.

Заметим еще, что в этом случае

$$\mathfrak{a}[b]^{(a)} = \mathfrak{a}[b]^{(a+1)} \quad (b = \mathfrak{a}_{(a)}). \tag{11.3}$$

Использование кортежей $\mathfrak{a}[b]$ позволяет компактно записывать многие свойства полусимплициальных комплексов. Например, формулу (8.8) для главной грани первого рода вырожденного симплекса $A(\mathfrak{a})$ можно записать так:

$$A(\mathfrak{a})^{(b)} = A(\mathfrak{a}[b]^{(a)}). \tag{11.4}$$

Пусть $r > p$. Тогда существуют целые неотрицательные числа, не превосходящие r и не принадлежащие кортежу $\mathfrak{a}$. Наименьшее из таких чисел назовем *индексом* кортежа $\mathfrak{a}$. Если a — индекс кортежа $\mathfrak{a}$, то определен кортеж $\mathfrak{a}[a]$ типа $(r-1, p)$. Мы будем обозначать его символом $\bar{\mathfrak{a}}$.

Введенный в п. 8 индекс стянутости вырожденного симплекса $A(\mathfrak{a})$ есть в этой терминологии индекс кортежа $\mathfrak{a}$.

Пусть теперь b — произвольное целое число, не превосходящее $r+1$. Положим

$$\mathfrak{a}(b) = (\{r+1\}^{(b)})_{(\mathfrak{a})}.$$

Это кортеж типа $(r+1, p)$. Он получается из кортежа $\mathfrak{a}$ увеличением всех его членов, не меньших b, на единицу. Это замечание позволяет естественным образом определить операцию $\mathfrak{a}(b)$ и для неубывающих последовательностей $\mathfrak{a}$, не являющихся кортежами. Имея это в виду, легко проверить, что

$$\mathfrak{a}(b)[a] = \left\{\begin{matrix} \mathfrak{a}[a-1](b), & \text{если } b < a; \\ \mathfrak{a} \quad\quad , & \text{если } b = a, a+1 \\ \mathfrak{a}[a](b-1), & \text{если } b > a+1 \end{matrix}\right\} (a, b = 0, \dots, r+1). \qquad (11.5)$$

Кроме того, если b не принадлежит $\mathfrak{a}$, то

$$\mathfrak{a}(b)[b+1] = \mathfrak{a}.$$

Отсюда в силу (11.5) имеем

$$\mathfrak{a}[b](b) = \mathfrak{a}; \qquad (11.6)$$

при этом, конечно, также предполагается, что b не принадлежит $\mathfrak{a}$.

Из (11.6), в частности, следует, что если a — индекс кортежа $\mathfrak{a}$, то

$$\bar{\mathfrak{a}}(a) = \mathfrak{a}. \qquad (11.7)$$

Индекс c кортежа $\mathfrak{a}(b)$ равен наименьшему из чисел a и b, где a — индекс кортежа $\mathfrak{a}$. Если $c < b$, что возможно лишь тогда, когда $a < b$, то

$$\overline{\mathfrak{a}(b)} = \bar{\mathfrak{a}}(b-1). \qquad (11.8)$$

Если же $c = b$, т. е. $b \leqslant a$, то согласно (11.5)

$$\overline{\mathfrak{a}(b)} = \mathfrak{a}. \qquad (11.9)$$

Значение кортежей $\mathfrak{a}(b)$ в теории полусимплициальных комплексов определяется тем, что, как непосредственно следует из определений, для любого $(r+1)$-мерного симплекса A некоторого полусимплициального комплекса

$$(A^{(b)})_{(\mathfrak{a})} = A_{(\mathfrak{a}_{(b)})}. \qquad (11.10)$$

Отсюда и из (11.6) следует, что если кортеж $\mathfrak{a}$ высоты, не большей $r+1$, не содержит b, то

$$A_{(b)} = (A^{(b)})_{(\mathfrak{a}_{[b]})}. \qquad (11.11)$$

Аналогично для любой кортежфункции φ типа $(r+1, p)$

$$\varphi^{(b)}(\mathfrak{a}) = \varphi(\mathfrak{a}b), \tag{11.12}$$

и если кортеж $\mathfrak{a}$ типа $(r+1, p)$ не содержит b, то

$$\varphi(\mathfrak{a}) = \varphi^{(b)}(\mathfrak{a}[b]). \tag{11.13}$$

Из последней формулы с помощью (11.2) следует, что для любого кортежа $\mathfrak{a}$ типа $(r+1,\ p+1)$ и любого числа $b = 0, \ldots, p+1$

$$\varphi(\mathfrak{a}^{(b)}) = \varphi^{(a)}(\overline{\mathfrak{a}}^{(b)}), \tag{11.14}$$

где a — индекс кортежа $\mathfrak{a}$.

Вернемся к комплексу $K(M, p)$.

[11.4] *Комплекс $K(M, p)$ асферичен во всех размерностях, отличных от p.*

Действительно, для размерностей, меньших p, это предложение очевидно. Предположим, что $r > p$, и пусть

$$\sigma = (\varphi_0, \ldots, \varphi_{r+1})$$

—произвольная r-мерная сфера комплекса $K(M, p)$, т. е. $(r+2)$-членная последовательность таких кортежфункций φ_a типа (r, p), что для любых целых a и b, подчиненных неравенствам $0 \leqslant b < a \leqslant r+1$:

$$\varphi_a^{(b)} = \varphi_b^{(a-1)}. \tag{11.15}$$

Отнесем сфере σ кортежфункцию ψ типа $(r+1, p)$, положив для любого кортежа $\mathfrak{a}$ типа $(r+1, p)$

$$\psi(\mathfrak{a}) = \varphi_a(\overline{\mathfrak{a}}),$$

где a — индекс кортежа $\mathfrak{a}$. Предложение [11.4] будет доказано, если мы докажем, что

$$\Delta\psi = \sigma,$$

т. е., что для любого $b = 0, \ldots, r+1$

$$\psi^{(b)} = \varphi_b.$$

Другими словами, нужно доказать, что для любого кортежа $\mathfrak{a}$ типа (r, p)

$$\psi^b(\mathfrak{a}) = \varphi_b(\mathfrak{a}). \tag{11.16}$$

Но согласно (11.12) и определению ψ

$$\psi^{(b)}(\mathfrak{a}) = \psi(\mathfrak{a}(b)) = \varphi_c(\overline{\mathfrak{a}(b)}),$$

где c — индекс кортежа $\mathfrak{a}(b)$. Если $c = b$, то в силу (11.9) это доказывает (11.16). Если же $c < b$, то согласно (11.8), (11.12) и (11.15)

$$\varphi_c(\overline{\mathfrak{a}(b)}) = \varphi_c(\overline{\mathfrak{a}}(b-1)) = \varphi_c^{(b-1)}(\overline{\mathfrak{a}}) = \varphi_b^{(c)}(\overline{\mathfrak{a}}).$$

Но если $c<b$, то $c=a$ и, следовательно, согласно (11.12) и (11.7)

$$\varphi_0^{(c)}(\bar{\mathfrak{a}}) = \varphi_b(\bar{\mathfrak{a}}(a)) = \varphi_b(\mathfrak{a}),$$

что доказывает формулу (11.16) и для $c<b$. Тем самым предложение [11.4] полностью доказано.

Пусть φ — произвольная кортежфункция над M и (r,p) — ее тип. Пусть $a=0,\ldots,r$. Определим a-тую надстройку $\varphi(a)$ кортежфункции φ, положив для любого кортежа $\mathfrak{a}$ типа $(r+1,p)$

$$\varphi(a)(\mathfrak{a}) = \varphi(\mathfrak{a}[a]).$$

Это — кортежфункция типа $(r+1,p)$, т. е. $(r+1)$-мерный симплекс комплекса $K(M,p)$. Она характеризуется тем, что равна элементу m_0 для любого кортежа $\mathfrak{a}$, содержащего и число a и число $a+1$. Оказывается, что для так определенной надстройки выполнены условия П 1 и П 2. Действительно, пусть $b=0,\ldots,r+1$ и $\mathfrak{a}$ — произвольный кортеж типа (r,p). Используя формулы (11.12) и (11.5), имеем

$$\varphi(a)^{(b)}(\mathfrak{a}) = \varphi(a)(\mathfrak{a}(b)) = \varphi(\mathfrak{a}(b)[\mathfrak{a}]) =$$

$$= \begin{cases} \varphi(\mathfrak{a}[a-1](b)) \\ \varphi(\mathfrak{a}) \\ \varphi(\mathfrak{a}[a](b-1)) \end{cases} = \begin{cases} \varphi^{(b)}(a-1)(\mathfrak{a}), & \text{если } b<a; \\ \varphi(\mathfrak{a}) & , \text{если } b=a,\ a+1; \\ \varphi^{(b-1)}(a)(\mathfrak{a}) & , \text{если } b>a+1, \end{cases}$$

что доказывает П 1. Далее, если $b\leqslant a$, то согласно (11.1) для любого кортежа $\mathfrak{a}$ типа $(r+2,p)$ имеем

$$\varphi(a)(b)(\mathfrak{a}) = \varphi(\mathfrak{a}[b][a]) = \varphi(\mathfrak{a}[a+1][b]) = \varphi(b)(a+1)(\mathfrak{a}).$$

Аналогично доказывается, что $\varphi(a)(b) = \varphi(b-1)(a)$, если $b>a$. Таким образом:

[11.5] *Комплекс $K(M,p)$ полон.*

Отсюда и из [11.2] согласно [8.6] вытекает:

[11.6] *Для $p>0$ комплекс $K(M,p)$ сильносвязен.*

Заметим, что стянутые симплексы комплекса $K(M,p)$ — кортежфункции, тождественно равные элементу m_0, т. е. в случае, когда M — группа, тождественно равные нулю или единице.

12. Пример полусимплициального комплекса: комплекс мультипликативной группы

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная мультипликативная группа. Матрицу

$$A = \|\alpha_{a,b}\| \quad (a,b=0,\ldots,r)$$

порядка $r+1$, элементы которой принадлежат группе $\mathfrak{A}$, назовем *r-мерным симплексом группы* $\mathfrak{A}$, если для любых $a,b,c=0,\ldots,r$

$$\alpha_{a,b}\alpha_{b,c} = \alpha_{a,c}.$$

В частности,

$$\alpha_{a,b} = \alpha_{b,a}^{-1}$$

и

$$\alpha_{a,a} = 1.$$

Для любого кортежа $\mathfrak{a}$ высоты, не превосходящей r, назовем $\mathfrak{a}$-*гранью* $A_{(\mathfrak{a})}$ симплекса A минор, получающийся вычеркиванием строк и столбцов, номера которых не принадлежат $\mathfrak{a}$. Очевидно, этот минор также является симплексом группы A. В силу этого определения совокупность $K(\mathrm{A})$ всех симплексов группы A является полусимплициальным комплексом, называемым *комплексом группы* A.

Пусть $A = \|\alpha_{a,b}\|$ — произвольный r-мерный симплекс группы A. Отнесем ему кортежфункцию φ над A типа $(r, 1)$, положив для любого кортежа $\mathfrak{a} = (a_0, a_1)$ типа $(r, 1)$

$$\varphi(\mathfrak{a}) = \alpha_{a_0, a_1}.$$

Легко видеть, что так определенное отображение $A \to \varphi$ комплекса $K(\mathrm{A})$ в комплекс $K(\mathrm{A}, 1)$ симплициально и взаимно однозначно отображает комплекс $K(A)$ на подкомплекс комплекса $K(\mathrm{A}, 1)$, состоящий из таких кортежфункций φ типа $(r, 1)$, что для любых трех чисел a_0, a_1, a_2, подчиненных условию $0 \leqslant a_0 < a_1 < a_2 \leqslant r$:

$$\varphi(a_0, a_2) = \varphi(a_0, a_1)\varphi(a_1, a_2).$$

Числа a_0, a_1, a_2 можно рассматривать как члены некоторого кортежа $\mathfrak{a}$ типа $(r, 2)$. Тогда

$$(a_0, a_2) = \mathfrak{a}^{(1)};$$

$$(a_0, a_1) = \mathfrak{a}^{(2)};$$

$$(a_1, a_2) = \mathfrak{a}^{(0)}.$$

Таким образом:

[12.1]. *Комплекс* $K(\mathrm{A})$ *изоморфен подкомплексу комплекса* $K(\mathrm{A}, 1)$, *состоящему из таких кортежфункций* φ, *что для любого кортежа* $\mathfrak{a}$ *длины* 2 *и высоты, не большей размерности кортежфункции* φ:

$$\varphi(\mathfrak{a}^{(1)}) = \varphi(\mathfrak{a}^{(2)})\varphi(\mathfrak{a}^{(0)}). \tag{12.1}$$

Отсюда немедленно следует, что комплекс $K(\mathrm{A})$ одновершинен и правилен во всех размерностях, больших единицы.

Очевидно, что стянутые симплексы комплекса $K(\mathrm{A}, 1)$, т. е. кортежфункции, тождественно равные единице группы A, удовлетворяют условию (12.1). Соответствующие им симплексы группы A мы также будем называть *стянутыми*. Легко видеть, что симплекс $A = \|\alpha_{a,b}\|$ стянут тогда и только тогда, когда

$$\alpha_{a,b} = 1$$

для любых $a, b = 0, \ldots, r$.

Комплекс $K(\mathrm{A})$, как было сказано, одновершинен. Его единственной вершиной является матрица

$$\|1\|.$$

Этот симплекс стянут.

Для симплексов группы A размерности, большей нуля, удобным методом их задания является так называемое параметрическое задание. Оно состоит в следующем.

Пусть $A = \|\alpha_{a,b}\|$ — произвольный симплекс группы A размерности r, большей нуля. Его *a-тым параметром* α_a $(a = 1, \ldots, r)$ называется элемент $\alpha_{a-1,a}$ группы A. Параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ не связаны никаким соотношением и однозначно определяют симплекс A:

$$\alpha_{a,b} = \begin{cases} \alpha_{a+1} \ldots \alpha_b, & \text{если } a < b; \\ 1, & \text{если } a = b, \\ \alpha_a^{-1} \ldots \alpha_b^{-1}, & \text{если } a > b. \end{cases} \quad (a, b = 0, \ldots, r).$$

Символ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ мы будем рассматривать как новую запись симплекса A и будем называть ее *параметрической*. Заметим, что все параметры стянутого симплекса равны единице.

Параметрическая запись часто удобнее матричной и поэтому распространена значительно шире. В частности, в алгебраических приложениях рассматриваемых понятий пользуются исключительно ею. Если мы все же отдаем здесь предпочтение матричной записи, то это объясняется тем, что параметры граней симплекса сложно выражаются через параметры самого симплекса. Например, уже для главных граней

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)^{(a)} = \begin{cases} (\alpha_2, \ldots, \alpha_r), & \text{если } a = 0; \\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_a\alpha_{a+1}, \ldots, \alpha_r), & \text{если } 0 < a < r; \\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}), & \text{если } a = r. \end{cases} \qquad (12.2)$$

Для граней низших размерностей формулы еще более усложняются.

Заметим, что одномерные симплексы группы A имеют вид

$$\begin{Vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha^{-1} & 1 \end{Vmatrix}$$

и, следовательно, находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы A. При этом элемент α, соответствующий симплексу A, есть его единственный параметр. Мы будем обозначать его символом $1_{\mathrm{A}}^1(A)$. Таким образом, 1_{A}^1 есть функция, определенная на множестве всех одномерных симплексов группы A, принимающая значения в группе A и осуществляющая взаимно однозначное отображение указанного множества на группу A. Заметим, что для любого симплекса A группы A размерности больше нуля элемент $1_{\mathrm{A}}^1(A_{(0,1)})$ есть его первый параметр.

[12.2] *Комплекс $K(\mathrm{A})$ асферичен во всех размерностях, больших единицы.*

Достаточно доказать, что указанный в предложении [12.1] подкомплекс комплекса $K(\mathrm{A}, 1)$ асферичен. А для этого в силу [11.4] достаточно показать, что если граница некоторой кортежфункции типа $(r+1, 1)$, где $r > 1$, принадлежит этому подкомплексу, то и сама кортежфункция лежит в нем. Другими словами, достаточно показать, что если кортежфункция ψ над A типа $(r+1, 1)$, где $r > 1$, такова, что для любого кортежа $\mathfrak{b}$ типа $(r, 2)$ и любого числа $a = 0, \ldots, r+1$ имеет место равенство

$$\psi^{(a)}(\mathfrak{b}^{(1)}) = \psi^{(a)}(\mathfrak{b}^{(2)})\, \psi^{(a)}(\mathfrak{b}^{(0)}), \tag{12.3}$$

то для самой кортежфункции ψ имеет место аналогичное равенство

$$\psi(\mathfrak{a}^{(1)}) = \psi(\mathfrak{a}^{(2)})\, \psi, (\mathfrak{a}^{(0)}), \tag{12.4}$$

где $\mathfrak{a}$ — произвольный кортеж типа $(r+1, 2)$. Но согласно (11.14) для любого $b = 0, 1, 2$

$$\psi(\mathfrak{a}^{(b)}) = \psi^{(a)}(\bar{\mathfrak{a}}^{(b)}),$$

где a — индекс кортежа $\mathfrak{a}$. Таким образом, полагая в (12.3) $\mathfrak{b} = \bar{\mathfrak{a}}$, мы получаем (12.4). Тем самым предложение [12.2] доказано.

Докажем, что подкомплекс комплекса $K(\mathrm{A}, 1)$, указанный в предложении [12.1], полон, т. е. что любая надстройка $\varphi(a)$ любой кортежфункции φ, удовлетворяющей условию (12.1), также удовлетворяет этому условию. Действительно, для любого кортежа $\mathfrak{a}$ типа $(r+1, 2)$ и любого числа $b = 0, 1, 2$ согласно (11.2) имеем

$$\varphi(a)(\mathfrak{a}^{(b)}) = \varphi(\mathfrak{a}^{(b)}[a]) = \varphi(\mathfrak{a}[a]^{(b)}),$$

что доказывает наше утверждение. Отсюда следует, что:

[12.3] *Комплекс $K(\mathrm{A})$ полон.*

При этом легко видеть, что a-тая надстройка $A(a)$ симплекса $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ имеет вид:

$$A(a) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_a, 1, \alpha_{a+1}, \ldots, \alpha_r).$$

Следовательно, стянутые в смысле общей теории симплексы совпадают со стянутыми симплексами, как они были определены выше. Кроме того, симплекс группы A тогда и только тогда вырожден, когда хотя бы один его параметр равен единице.

Пусть θ — гомоморфное отображение группы A в некоторую мультипликативную группу B. Любому симплексу $A = \|\alpha_{a,b}\|$ группы A отнесем симплекс

$$\vartheta A = \|\theta\alpha_{a,b}\| \tag{12.5}$$

группы B. Очевидно, что так полученное отображение ϑ комплекса $K(\mathrm{A})$ в комплекс $K(\mathrm{B})$ симплициально. Оно изоморфно, если изоморфно исходное отображение θ.

Пусть теперь μ — произвольное симплициальное отображение комклекса $K(\mathrm{A})$ в комплекс $K(\mathrm{B})$ и пусть α — произвольный элемент группы A. Рассмотрим одномерный симплекс A комплекса $K(\mathrm{A})$, параметром которого является α, и обозначим через $\theta\alpha$ параметр симплекса μA. Оказывается, что так построенное отображение θ группы A в группу B гомоморфно. Действительно, пусть α_1 и α_2 — произвольные элементы группы A. Рассмотрим двухмерный симплекс A группы A с параметрами α_1 и α_2. Параметры симплекса μA обозначим через β_1 и β_2. Параметром симплекса $A^{(0)}$ служит α_2, а параметром симплекса $(\mu A)^{(0)}$ служит β_2. Поэтому $\beta_2 = \theta\alpha_2$. Параметром симплекса $A^{(2)}$ служит α_1, а параметром симплекса $(\mu A)^{(2)}$ служит β_1. Поэтому $\beta_1 = \theta\alpha_1$. Наконец, параметром симплекса $A^{(1)}$ служит $\alpha_1\alpha_2$, а параметром симплекса $(\mu A)^{(1)}$ служит $\beta_1\beta_2$. Поэтому $\beta_1\beta_2 = \theta(\alpha_1\alpha_2)$, т. е.

$$\theta(\alpha_1\alpha_2) = \theta\alpha_1\theta\alpha_2.$$

Кроме того, симплициальное отображение переводит стянутые симплексы в стянутые. Поэтому

$$\theta 1 = 1.$$

Таким образом, θ действительно является гомоморфизмом. Соответствующее ему симплициальное отображение комплекса $K(\mathrm{A})$ в комплекс $K(\mathrm{B})$, очевидно, совпадает с μ.

Заметим, что предыдущее рассуждение проходит и тогда, когда μ есть всего лишь 2-отображение. Симплициальное отображение, соответствующее построенному гомоморфизму, является в этом случае продолжением отображения μ на все $K(\mathrm{A})$.

§ 2. Когомологии в полусимплициальных комплексах

13. Коцепи

Пусть K — произвольный полусимплициальный комплекс и G — некоторая группа мультипликативная или аддитивная. *r-мерной* ($r \geqslant 0$) *коцепью комплекса K над группой G* называется функция, определенная на множестве всех r-мерных симплексов комплекса K и принимающая значения в группе G. Например, построенная в предыдущем пункте функция 1^1_{A} есть одномерная коцепь комплекса $K(\mathrm{A})$ над группой A.

В случае, когда группа G аддитивна, обратим совокупность $C^r(K, G)$ всех r-мерных коцепей комплекса K над группой G в аддитивную группу, определив сумму $c^r + d^r$ двух r-мерных коцепей c^r и d^r формулой

$$(c^r + d^r)(A) = c^r(A) + d^r(A), \tag{13.1}$$

где A — произвольный r-мерный симплекс комплекса K. Аксиомы группы при таком определении суммы коцепей проверяются непосредственно. Нулем группы $C^r(K, G)$ является, очевидно, коцепь 0, тождественно равная нулю группы G.

В случае мультипликативной группы G мы по причинам, выясняемым ниже, никакой операции в множество $C^r(K, G)$ не вводим.

Очевидно, что любую r-мерную коцепь комплекса $K(\mathrm{A})$ группы A можно рассматривать как функцию r параметров его симплексов. Поэтому понятие коцепи комплекса $K(\mathrm{A})$ совпадает с введенным в п. 7 понятием коцепи группы A. Соответственно этому символы $C^r(K(\mathrm{A}), G)$ и $C^r(\mathrm{A}, G)$ обозначают одну и ту же группу. Мы будем пользоваться вторым, как более простым.

Пусть θ — гомоморфное отображение группы G в некоторую группу H, аддитивную, если G аддитивна, и мультипликативную, если G мультипликативна. Любой r-мерной коцепи c^r комплекса K над группой G отнесем r-мерную коцепь $\hat{\theta}c^r$ над группой H, положив

$$\hat{\theta}c^r(A) = \theta c^r(A)$$

для любого r-мерного симплекса A комплекса K. Очевидно, что в случае, когда G аддитивна, так определенное отображение $\hat{\theta}$ группы $C^r(K, G)$ в группу $C^r(K, H)$ гомоморфно. Оно изоморфно, если изоморфно отображение θ.

Пусть μ — симплициальное отображение комплекса K в некоторый комплекс L. Любой r-мерной коцепи c^r комплекса L над группой G отнесем r-мерную коцепь μ^*c^r комплекса K, положив

$$\mu^*c^r(A) = c^r(\mu A)$$

для любого r-мерного симплекса A комплекса K. Очевидно, что в случае, когда группа G аддитивна, μ^* является гомоморфным отображением группы $C^r(L, G)$ в группу $C^r(K, G)$. Оно изоморфно, если изоморфно отображение μ.

Если μ есть n-отображение комплекса K в комплекс L, то μ^* определено для всех $r \leqslant n$. Если отображение μ n-изоморфно, то μ^* изоморфно для всех $r < n$.

Пусть N — подкомплекс комплекса K. Коцепь c^r комплекса K, рассматриваемую лишь на симплексах подкомплекса N, обозначим через c^r / N. Более формально

$$c^r / N = i^*c^r, \tag{13.2}$$

где i — отображение вложения подкомплекса N.

Пусть A и B — мультипликативные группы и θ — гомоморфное отображение группы A в группу B. С одной стороны, отображение θ порождает симплициальное отображение ϑ комплекса $K(\mathrm{A})$ в комплекс $K(\mathrm{B})$. Следовательно, определена коцепь $\vartheta^* 1^1_{\mathrm{B}}$, являющаяся коцепью комплекса $K(\mathrm{A})$ над группой B. С другой стороны, определена коцепь $\hat{\theta}1^1_{\mathrm{A}}$, также являющаяся коцепью комплекса $K(\mathrm{A})$ над группой B. Легко видеть, что обе эти коцепи совпадают:

$$\hat{\theta}1^1_{\mathrm{A}} = \vartheta^* 1^1_{\mathrm{B}}. \qquad (13.3)$$

14. Обыкновенные группы когомологий полусимплициальных комплексов

Пусть K — произвольный полусимплициальный комплекс и G — любая аддитивная группа. Любой r-мерной ($r \geqslant 0$) коцепи c^r комплекса K над группой G отнесем $(r+1)$-мерную коцепь ∇c^r, положив

$$\nabla r^r(A) = \sum_{a=0}^{r+1} (-a)^a c^r(A^{(a)})$$

для любого $(r+1)$-мерного симплекса A комплекса K. Очевидно, что так определенное отображение ∇ группы $C^r(K, G)$ в группу $C^{r+1}(K, G)$ гомоморфно. Коцепи, принадлежащие ядру $Z^r(K, G)$ этого гомоморфизма, т. е. удовлетворяющие уравнению

$$\nabla c^r = 0,$$

называются *коциклами*. При $r > 0$ коцепи вида ∇c^{r-1}, т. е. принадлежащие ∇-образу $B^r(K, G)$ группы $C^{r-1}(K, G)$, называются *коцепями когомологичными нулю*. Для $r = 0$ полагаем по определению

$$B^0(K, G) = 0. \qquad (14.1)$$

Простой подсчет, основанный на формуле (8.2), показывает, что при $r > 0$ для любой $(r-1)$-мерной коцепи c^{r-1}

$$\nabla\nabla c^{r-1} = 0,$$

т. е. при $r > 0$

$$B^r(K, G) \subset Z^r(K, G).$$

Согласно (14.1) это включение имеет место и для $r = 0$. Следовательно, для любого $r \geqslant 0$ определена факторгруппа

$$H^r(K, G) = Z^r(K, G) - B^r(K, G).$$

Эта группа называется *r-мерной группой (обыкновенных) когомологий комплекса K над группой G*. Ее элементы, т. е. смежные классы группы $Z^r(K, G)$, по подгруппе $B^r(K, G)$ называются *классами когомологий*. Класс когомологий, содержащий коцикл c^r, обозначается через $\mathbf{c}^r$ или $\{c^r\}$. О коциклах, принадлежащих одному классу когомологий, говорят, что они *когомологичны* между собой. Другими словами, при $r > 0$ коциклы c^r и d^r когомологичны между собой, если существует такая $(r-1)$-мерная коцепь e^{r-1}, что

$$d^r - c^r = \nabla e^{r-1}. \tag{14.2}$$

Для $r=0$ когомологичные между собой коциклы совпадают.

Легко проверить, что гомоморфизм $\hat{\theta}$ группы $C^r(K, G)$ в группу $C^r(K, H)$, порожденный гомоморфным отображением θ группы G в группу H, для любой коцепи c^r комплекса K удовлетворяет соотношению

$$\nabla\hat{\theta}c^r = \hat{\theta}\nabla c^r.$$

Отсюда следует, что $\hat{\theta}$ переводит коциклы в коциклы и коцепи, когомологичные нулю, в коцепи, когомологичные нулю. Следовательно, гомоморфизм $\hat{\theta}$ порождает гомоморфное отображение $\boldsymbol{\theta}$ группы $H^r(K, G)$ в группу $H^r(K, H)$. Отображение $\boldsymbol{\theta}$ изоморфно, если изоморфно исходное отображение θ.

Аналогично гомоморфизм μ^* группы $C^r(L, G)$ в группу $C^r(K, G)$, порожденный симплициальным отображением μ комплекса K в комплекс L, для любой коцепи c^r комплекса L удовлетворяет соотношению

$$\nabla\mu^* c^r = \mu^*\nabla c^r. \tag{14.3}$$

Отсюда, как и выше, следует, что этот гомоморфизм порождает гомоморфное отображение $\boldsymbol{\mu}^*$ группы $H^r(L, G)$ в группу $H^r(K, G)$. Отображение $\boldsymbol{\mu}^*$ изоморфно, если μ изоморфно.

В частности, из (14.3) и (13.2) следует, что для любого подкомплекса N комплекса K

$$\nabla(c^r / N) = \nabla c^r / N.$$

Таким образом, часть коцикла есть коцикл и часть коцепи, когомологичной нулю, есть коцепь, когомологичная нулю. Следовательно, определено отображение (гомоморфизм вложения) $\mathbf{c}^r \to \mathbf{c}^r / N$ группы $H^r(K, G)$ в группу $H^r(N, G)$. Если μ есть n-отображение комплекса K в комплекс L, то гомоморфизм $\boldsymbol{\mu}^*$ определен для всех $r < n$. Если μ есть n-изоморфизм, то для всех $r < n$ отображение $\boldsymbol{\mu}^*$ изоморфно.

15. Когомологии над мультипликативными группами

Попытаемся изложенные в предыдущем пункте определения перенести на случай, когда группа G мультипликативна и значит, вообще говоря, не абелева. Оказывается, что это можно сделать, хотя и не в полном объеме. Для нас особенно важен случай $r=1$, поэтому мы им и ограничимся.

Пусть K — произвольный полусимплициальный комплекс и A — любая мультипликативная группа. Одномерную коцепь a^1 комплекса K над группой A мы назовем *коциклом*, если для любого двухмерного симплекса A комплекса K

$$a^1(A_{(0,1)})\,a^1(A_{(1,2)}) = a^1(A_{(0,2)}). \qquad (15.1)$$

Заметим, что размерность коцикла над A указана в его определении, поэтому мы вместо словочетания «одномерный коцикл над A» постоянно будем употреблять более краткое словосочетание «коцикл над A».

Если группа A абелева, то, переписав (15.1) аддитивно, мы получим равенство $\nabla a^1(A)=0$. Следовательно, мы действительно обобщили понятие коцикла на произвольные мультипликативные группы. Заметим, что если мы в множестве $C^1(K, \mathrm{A})$ введем операцию перемножения определением, аналогичным определению, выраженному формулой (13.1), то произведение двух коциклов не будет, вообще говоря, коциклом. В связи с этим мы и не вводили множество $C^1(K, \mathrm{A})$ указанной операции. Это обстоятельство значительно усложняет и обедняет теорию когомологий над мультипликативными группами, не позволяя использовать развитой аппарат теории групп. Все же некоторые свойства коциклов над аддитивными группами сохраняются и для коциклов над мультипликативными группами.

Например, при отображении $\hat{\theta}$ множества $C^1(K, \mathrm{A})$ в множество $C^1(K, \mathrm{B})$, порожденным гомоморфным отображением θ группы A в группу B, коциклы над A переходят в коциклы над B.

Аналогично при отображении μ^* множества $C^1(L, \mathrm{A})$ в множество $C^1(K, \mathrm{A})$, порожденным симплициальным отображением μ комплекса K в комплекс L, коциклы комплекса L переходят в коциклы комплекса K. В частности, для любого подкомплекса N комплекса K часть a^1/N любого коцикла a^1 комплекса K есть коцикл комплекса N.

Любому коциклу a^1 комплекса K над группой A отнесем отображение σ этого комплекса в комплекс $K(\mathrm{A})$ группы A, положив для любого r-мерного симплекса A комплекса K

$$\sigma A = \begin{cases} (a^1(A_{(0,1)}), \ldots, a^1(A_{(\alpha-1,\alpha)}), \ldots, a^1(A_{(r-1,r)})), & \text{если } r>0, \\ \qquad\qquad \|1\|, & \text{если } r=0. \end{cases} \qquad (15.2)$$

(Для $r>0$ мы употребляем параметрическую запись.) Легко видеть, что отображение σ симплициально и что формулу (15.2) можно прочесть «наоборот», как формулу, определяющую коцикл a^1 по отображению σ. Таким образом, коциклы комплекса K над группой A и его симплициальные отображения в комплекс $K(\mathrm{A})$ группы A находятся во взаимно однозначном соответствии. В моей заметке [14] в основу теории положены симплициальные отображения. Здесь же я предпочитаю пользоваться коциклами, что на основании сказанного равносильно.

Легко видеть, что коцепь 1^1_{A} комплекса $K(\mathrm{A})$ над группой A является коциклом. Соответствующее ему отображение комплекса $K(\mathrm{A})$ в себя тождественно.

Отметим одно важное свойство симплициальных отображений, соответствующих коциклам.

Пусть a^1 — коцикл некоторого комплекса N над группой A; σ_1 — соответствующее ему симплициальное отображение комплекса N в комплекс $K(\mathrm{A})$; b^1 — коцикл некоторого комплекса M над группой B; τ_1 — соответствующее ему симплициальное отображение комплекса M в комплекс $K(\mathrm{B})$; ω — симплициальное отображение комплекса N в комплекс M и θ — такое гомоморфное отображение группы A в группу B, что

$$\hat{\theta} a^1 = \omega^* b^1. \tag{15.3}$$

Тогда симплициальное отображение ϑ комплекса $K(\mathrm{A})$ в комплекс $K(\mathrm{B})$, соответствующее гомоморфизму θ, таково, что для любого симплекса A комплекса N_2

$$\tau_1 \omega A = \vartheta \sigma_1 A. \tag{15.4}$$

Действительно, α-тый параметр симплекса $\tau_1\omega A$ равен $b^1(\omega A_{(\alpha-1,\alpha)})$, а α-тый параметр симплекса $\vartheta\sigma_1 A$ равен $\theta a^1(A_{(\alpha-1,\alpha)})$, а эти элементы согласно (15.3) совпадают.

В частном случае $N = K(\mathrm{A})$, $a^1 = 1^1_{\mathrm{A}}$, $M = K(\mathrm{B})$, $b^1 = 1^1_{\mathrm{B}}$, $\omega = \vartheta$ условие (15.3) имеет место согласно (13.3), а формула (15.4) сводится к тождеству.

Пусть a^1 и b^1 — коциклы комплекса K над группой A. Мы скажем, что ***коцикл b^1 когомологичен коциклу a^1***, если в комплексе K существует такая нульмерная коцепь a^0 над группой A, что для любого одномерного симплекса A комплекса K

$$a^0(A_{(0)})\, b^1(A) = a^1(A) a^0(A_{(1)}).$$

Когомологичность коциклов a^1 и b^1 мы обозначаем следующим образом

$$b^1 : a^1 = \nabla a^0.$$

Очевидно, что отношение когомологичности рефлексивно, симметрично и транзитивно, так что совокупность всех коциклов комплекса K над группой A распадается на пересекающиеся классы попарно когомологичных между собой циклов. Класс, содержащий цикл a^1, мы будем обозначать через $\mathbf{a}^1$ или через $\{a^1\}$. Совокупность всех классов коциклов комплекса K над группой A будем обозначать символом

$$H(K, \mathrm{A}).$$

Легко проверить, что если $\hat{\theta}$ есть отображение множества $C^1(K, \mathrm{A})$ в множество $C^1(K, \mathrm{B})$, порожденное гомоморфным отображением θ группы A в группу B, а коциклы a^1 и b^1 комплекса K над группой A таковы, что

$$b^1 : a^1 = \nabla a^0,$$

то

$$\hat{\theta} b^1 : \hat{\theta} a^1 = \nabla\, \hat{\theta} a^0.$$

Отсюда следует, что $\hat{\theta}$ порождает отображение $\boldsymbol{\theta}$ множества $H(K, \mathrm{A})$ в множество $H(K, \mathrm{B})$ взаимно однозначное, когда θ изоморфно.

Аналогично, если μ^* есть отображение множества $C^1(L, \mathrm{A})$ в множество $C^1(K, \mathrm{A})$, порожденное симплициальным отображением μ комплекса K в комплексе L, а коциклы a^1 и b^1 комплекса L над группой A таковы, что

$$b^1 : a^1 = \nabla a^0,$$

то

$$\mu^* b^1 : \mu^* a^1 = \nabla \mu^* a^0.$$

Следовательно, отображение μ^* порождает отображение $\boldsymbol{\mu}^*$ множества $H(L, \mathrm{A})$ в множество $H(K, \mathrm{A})$ взаимно однозначное, если μ изоморфно.

В частности, если N — произвольный подкомплекс комплекса K и a^1, b^1 — такие коциклы комплекса K, что

$$b^1 : a^1 = \nabla a^0,$$

то

$$b^1/N : a^1/N = \nabla a^0/N.$$

Следовательно, отображение $a^1 \to a^1/N$ порождает отображение

$$\mathbf{a}^1 \to \mathbf{a}^1/N$$

множества $H(K, \mathrm{A})$ в множество $H(N, \mathrm{A})$.

Отображение $\boldsymbol{\mu}^*$ определено и тогда, когда μ является лишь n-отображением комплекса K в комплекс L, если только $n > 1$. Если μ n-изоморфно, то $\boldsymbol{\mu}^*$ взаимно однозначно.

16. Группы когомологий относительно коцикла

Пусть K — произвольный полусимплициальный комплекс, A — мультипликативная группа, a^1 — некоторый коцикл комплекса K над группой A и G — аддитивная группа, в которой представлена группа A.

Любой r-мерной ($r \geqslant 0$ и произвольно) коцепи c^r комплекса K над группой G отнесем $(r+1)$-мерную коцепь $\nabla_{a^1} c^r$, положив для любого $(r+1)$-мерного симплекса A комплекса K

$$\nabla_{a^1} c^r(A) = a^1(A_{(0,1)})\, c^r(A^{(0)}) + \sum_{a=1}^{r+1} (-1)^a c^r(A^{(a)}).$$

Так определенное отображение ∇_{a^1} группы $C^r(K, G)$ в группу $C^{r+1}(K, G)$, очевидно, гомоморфно. Коцепи, принадлежащие ядру $Z^r_{a^1}(K, G)$ этого гомоморфизма, т. е. удовлетворяющие условию

$$\nabla_{a^1} c^r = 0,$$

называются *коциклами относительно* a^1. При $r > 0$ коцепи вида $\nabla_{a^1} c^{r-1}$, т. е. принадлежащие ∇_{a^1}-образу $B^r_{a^1}(K, G)$ группы $C^{r-1}(K, G)$, называются *коцепями, когомологичными нулю относительно* a^1. Для $r = 0$ положим по определению

$$B^0_{a^1}(K, G) = 0. \tag{16.1}$$

Простой подсчет показывает, что при $r>0$ для любой $(r-1)$-мерной коцепи c^{r-1} комплекса K над группой G

$$\nabla_{a^1}\nabla_{a^1}c^{r-1}=0_1,$$

т. е. при $r>0$

$$B^r_{a^1}(K, G)\subset Z^r_{a^1}(K, G).$$

Согласно (16.1) это включение имеет место и для $r=0$. Следовательно, для любого $r\geqslant 0$ определена факторгруппа

$$H^r_{a^1}(K, G)=Z^r_{a^1}(K, G)-B^r_{a^1}(K, G).$$

Она называется *r-мерной группой когомологий комплекса K над группой G относительно a^1*. Ее элементы, т. е. смежные классы группы $Z^r_{a^1}(K, G)$ по подгруппе $B^r_{a^1}(K, G)$, называются *классами когомологий относительно a^1*. Класс когомологий, содержащий коцикл c^r, обозначается через $\mathbf{c}^r$ или $\{c^r\}$. О коциклах относительно a^1, принадлежащих одному классу когомологий относительно a^1, говорят, что они *когомологичны между собой относительно a^1*. Таким образом, при $r>0$ коциклы c^r и d^r относительно a^1 когомологичны между собой относительно a^1, если в комплексе K существует такая $(r-1)$-мерная коцепь e^{r-1} над группой G, что

$$d^r-c^r=\nabla_{a^1}e^{r-1}.$$

Нульмерные коциклы тогда и только тогда когомологичны между собой, когда они совпадают.

Мы знаем, что в комплексе $K(\mathrm{A})$ коцепь 1^1_{A} является коциклом. Следовательно, в группах $C^r(K(\mathrm{A}), G)$ определена операция $\nabla_{1^1_{\mathrm{A}}}$. Но мы в n. 13 группы $C^r(K(\mathrm{A}), G)$ отождествили с группами $C^r(\mathrm{A}, G)$. Легко видеть, что после этого отождествления операция $\nabla_{1^1_{\mathrm{A}}}$ перейдет в определенную в n. 7 операцию ∇. Следовательно, символы $Z^r_{1^1_{\mathrm{A}}}(K(\mathrm{A}), G)$, $B^r_{1^1_{\mathrm{A}}}(K(\mathrm{A}), G)$ и $H^r_{1^1_{\mathrm{A}}}(K(\mathrm{A}), G)$, с одной стороны, и символы $Z^r(\mathrm{A}, G)$, $B^r(\mathrm{A}, G)$ и $H^r(\mathrm{A}, G)$, с другой, обозначают одни и те же группы. Мы будем пользоваться вторыми обозначениями, как более простыми.

Если все значения коцикла a^1 принадлежат ядру заданного представления группы A в группе G, то операция ∇_{a^1} совпадает с введенной в n. 14 операцией ∇. Таким образом, в этом случае мы получим обыкновенные группы когомологий. Так будет, например, если цикл a^1 тождественно равен единице группы A или если заданное представление группы A в группе G тривиально. В последующем мы основное внимание уделим группам когомологий относительно коцикла, не забывая при этом, что все доказанное для них с соответствующими упрощениями имеет место и для частного случая групп обыкновенных когомологий.

Мы начнем изучение групп когомологий относительно коцикла с установления свойств, аналогичных свойствам групп обыкновенных когомологий.

Пусть A и B — мультипликативные группы, представленные в аддитивных группах G и H соответственно, θ — гомоморфное отображение группы A в группу B и ϑ — некоторое θ-гомоморфное отображение группы G в группу H. Легко видеть, что для любого коцикла a^1 комплекса K над группой A и любой коцепи c^r над группой G

$$\hat{\vartheta}\nabla_{a^1}c^r = \nabla_{\hat{\theta}a^1}\hat{\vartheta}c^r.$$

Отсюда следует, что отображение $\hat{\vartheta}$ переводит коциклы относительно a^1 в коциклы относительно $\hat{\theta}a^1$ и коцепи, когомологичные нулю относительно a^1, в коцепи, когомологичные нулю относительно $\hat{\theta}a^1$, и, следовательно, порождает гомоморфное отображение $\boldsymbol{\vartheta}_{a^1}$ группы $H^r_{a^1}(K, G)$ в группу $H^r_{\hat{\theta}a^1}(K, H)$. Отображение $\boldsymbol{\vartheta}_{a^1}$ изоморфно, если изоморфно ϑ. Там, где это не вызовет недоразумений, мы вместо $\boldsymbol{\vartheta}_{a^1}$ будем писать просто $\boldsymbol{\vartheta}$.

Пусть K и L — полусимплициальные комплексы, μ — симплициальное отображение комплекса K в комплекс L, c^r — произвольная коцепь комплекса L над группой G и a^1 — произвольный коцикл комплекса L над группой A. Легко видеть, что

$$\mu^*\nabla_{a^1}c^r = \nabla_{\mu^*a^1}\mu^*c^r.$$

Отсюда следует, что гомоморфизм μ^* переводит коциклы комплекса L относительно a^1 в коциклы комплекса K относительно μ^*a^1 и коцепи, когомологичные нулю относительно a^1, в коцепи, когомологичные нулю относительно μ^*a^1, и, следовательно, порождает гомоморфное отображение $\overset{*}{\boldsymbol{\mu}}_{a^1}$ группы $H^r_{a^1}(L, G)$ в группу $H^r_{a^1}(K, G)$. Отображение $\overset{*}{\boldsymbol{\mu}}_{a^1}$ изоморфно, если μ изоморфно. Там, где это не вызовет недоразумений, мы вместо $\overset{*}{\boldsymbol{\mu}}_{a^1}$ будем писать просто $\boldsymbol{\mu}^*$.

В частности, для любого подкомплекса N комплекса K определен гомоморфизм (гомоморфизм вложения)

$$\mathbf{c}^r \to \mathbf{c}^r/N$$

группы $H^r_{a^1}(K, G)$ в группу $H^r_{a^1/N}(N, G)$. Для простоты мы последнюю группу будем, как правило, обозначать через $H^r_{a^1}(N, G)$.

Если μ есть n-отображение комплекса K в комплекс L и $n > 1$, то гомоморфизм $\overset{*}{\boldsymbol{\mu}}_{a^1}$ определен для любого $r < n$ и является изоморфизмом, если μ n-изоморфно.

Перейдем теперь к свойствам групп когомологий относительно цикла, не имеющим аналогов в теории обыкновенных групп когомологий.

Пусть a^0 — произвольная нульмерная коцепь комплекса K над группой A. Любой r-мерной ($r \geqslant 0$ и произвольно) коцепи c^r комплекса K

над группой G отнесем r-мерную же коцепь a^0c^r, положив для любого r-мерного симплекса A комплекса K

$$a^0c^r(A) = a^0(A_{(0)})\,c^r(A).$$

Так определенное отображение a^0 группы $C^r(K, G)$ в себя является, очевидно, автоморфизмом.

Пусть a^1 и b^1 — такие коциклы комплекса K над группой A, что

$$b^1:a^1 = \nabla a^0.$$

Тогда легко видеть, что для любой коцепи c^r комплекса K над группой G

$$a^0\nabla_{b^1}c^r = \nabla_{a^1}a^0c^r.$$

Отсюда следует, что автоморфизм a^0 переводит коциклы относительно b^1 в коциклы относительно a^1 и коцепи, когомологичные нулю, относительно b^1, в коцепи, когомологичные нулю относительно a^1, и, следовательно, порождает изоморфное отображение $\mathbf{a}^0$ группы $H^r_{b^1}(K, G)$ на группу $H^r_{a^1}(K, G)$. Таким образом:

[16.1] *Группы когомологий относительно когомологичных между собой коциклов изоморфны.*

Гомоморфизмы ϑ_{a^1} и ϑ_{b^1} переходят при этом изоморфизме друг в друга. Более точно:

$$\theta\mathbf{a}^0\vartheta_{b^1} = \vartheta_{a^1}\,\mathbf{a}^0.$$

Аналогично:

$$\mu^*\mathbf{a}^0\overset{*}{\mu}_{b^1} = \overset{*}{\mu}_{a^1}\mathbf{a}^0.$$

Пусть $\mathbf{a}^1$ — любой класс из $H(K, \mathrm{A})$ и a^1 — коцикл класса $\mathbf{a}^1$. Абстрактную группу, изоморфную группе $H^r_{a^1}(K, G)$, мы будем обозначать через $H^r_{\mathbf{a}^1}(K, G)$. Она не зависит от выбора коцикла a^1 в классе $\mathbf{a}^1$.

Мы скажем, что полусимплициальные комплексы K и L имеют один и тот же *когомологический n-тип,* где $2 \leqslant n \leqslant \infty$, если для любой мультипликативной группы A можно установить такое взаимно однозначное отображение χ множества $H(K, \mathrm{A})$ на множество $H(L, \mathrm{A})$, что для любой аддитивной группы G, в которой как-то представлена группа A, группы

$$H^r_{\mathbf{a}^1}(K, G) \text{ и } H^r_{\chi\mathbf{a}^1}(K, G)$$

для любого $\mathbf{a}^1 \in H(K, \mathrm{A})$ и любого $r < n$ изоморфны. Когомологический ∞-тип будем просто называть *когомологическим типом.*

В изучении когомологических свойств, т. е. свойств, формулируемых в терминах теории групп когомологий, можно комплексы одного когомологического типа считать одинаковыми. Аналогично, если интересующие нас свойства формулируются с использованием не более чем $(n-1)$-мерных групп когомологий, то можно считать одинаковыми комплексы одного когомологического n-типа.

Из сказанного выше относительно отображения μ^* следует:

[16.2] *Комплексы одного n-типа имеют одинаковый когомологический n-тип.*

Подчеркнем, что $n \geqslant 2$.

17. Группы $E(\mathbf{k}, G)$

Согласно сказанному в предыдущем пункте группы когомологий относительно коцикла можно рассматривать как результат переноса на общие полусимплициальные комплексы конструкции групп когомологий мультипликативных групп. Перенесем теперь в произвольные полусимплициальные комплексы изложенную в п. 7 конструкцию группы $E(\mathbf{k}, G)$.

Пусть K — произвольный полусимплициальный комплекс, A — мультипликативная группа, G и H — аддитивные группы, в каждой из которых представлена группа A, a^1 — коцикл комплекса K над группой A, n — целое число, большее единицы, и k — произвольный $(n+1)$-мерный коцикл комплекса K над группой H относительно a^1.

Рассмотрим множество $Z(k, G)$ всех пар вида

$$(\rho, c),$$

где ρ — произвольный операторный гомоморфизм группы H в группу G, а c — такая n-мерная коцепь комплекса K над группой G, что

$$\nabla_{a^1} c = \hat{\rho} k.$$

Обратим множество $Z(k, G)$ в аддитивную группу, определив сложение покомпонентно, т. е. формулой

$$(\rho_1, c_1) + (\rho_2, c_2) = (\rho_1 + \rho_2, c_1 + c_2)$$

(ср. п. 7). Группа $Z^n_{a^1}(k, G)$ изоморфно вкладывается в группу $Z(k, G)$ посредством соответствия

$$c \rightarrow (0, c).$$

Следовательно, и группа $B^n_{a^1}(K, G)$ лежит в группе $Z(k, G)$. Поэтому определена факторгруппа

$$E(k, G) = Z(k, G) - B^n_{a^1}(K, G),$$

имеющая группу $H^n_{a^1}(K, G)$ своей подгруппой:

$$E(k, G) \supset H^n_{a^1}(K, G).$$

Заметим, что, как нетрудно убедиться, факторгруппа

$$E(k, G) - H^n_{a^1}(K, G)$$

изоморфна группе всех операторных гомоморфизмов группы H в группу G, переводящих коцикл k в коцикл, когомологичный нулю.

Пусть коцикл k когомологичен относительно a^1 некоторому коциклу k', т. е. пусть

$$k' - k = \nabla_{a^1} d,$$

где d — некоторая n-мерная коцепь комплекса K над группой H. Любому элементу (ρ, c) группы $Z(k, G)$ отнесем пару $(\rho, c + \hat{\rho d})$, очевидно, принадлежащую группе $Z(k', G)$. Легко видеть, что это отображение изоморфно и переводит элементы группы $Z^n_{a^1}(K, G)$ в себя. Следовательно, оно порождает изоморфное отображение группы $E(\mathbf{k}, G)$ на группу $E(k', G)$ тождественное на $H^n_{a^1}(k, G)$. Итак:

[17.1] *Для когомологичных между собой коциклов k и k' группы $E(k, G)$ и $E(k', G)$ изоморфны над $H^n_{a^1}(K, G)$.*

Абстрактную группу, изоморфную группе $E(k, G)$, мы будем обозначать через $E(\mathbf{k}, G)$. Она содержит вполне определенную подгруппу, изоморфную группе $H^n_{\mathbf{a}^1}(K, G)$.

18. Группы нормальных когомологий

Коцепь полного коплекса k над аддитивной группой G называется *нормальной*, если она равна нулю на любом вырожденном симплексе комплекса K. Оказывается, что

[18.1] *Любой коцикл когомологичен нормальному коциклу.*

Коциклы и когомологии берутся в этом пункте относительно некоторого коцикла a^1 над мультипликативной группой A, представленной в группе G.

Коцепь комплекса K называется *нормально когомологичной нулю*, если она имеет вид $\nabla_{a^1} c^{r-1}$, где коцепь c^{r-1} нормальна. Оказывается, что

[18.2] *Любой нормальный когомологичный нулю коцикл нормально когомологичен нулю.*

Предложения [18.1] и [18.2] можно объединить в одно:

[18.3] *Для любой коцепи c^r, для которой коцепь $\nabla_{a^1} e^r$ нормальна, существует такая коцепь d^{r-1}, что коцепь $c^r - \nabla_{a^1} d^{r-1}$ нормальна.*

Для доказательства предложения [18.3] применим метод математической индукции. Имея целью облегчить формулировку индуктивного предположения, назовем коцепь комплекса K *a-нормальной*, где a — некоторое целое неотрицательное число, не превосходящее размерности коцепи, если эта коцепь равна нулю на любом вырожденном симплексе, имеющем хотя бы одно место вырожденности, меньшее a. Любая коцепь 0-нормальна и r-мерная r-нормальная коцепь нормальна. Кроме того, для любой коцепи c^r коцепь $\nabla_{a^1} c^r$ является 1-нормальной коцепью (в силу [8.5]). Поэтому предложение [18.3] индукцией по a следует из того, что

[18.4] *Для любой r-мерной a-нормальной коцепи c^r, где $a < r$, для которой коцепь $\nabla_{a^1} c^r$ $(a + 1)$-нормальна, существует такая*

$(r-1)$-мерная коцепь d^{r-1}, что коцепь $c^r - \nabla_{a^1} d^{r-1}$ уже $(a+1)$-нормальна.

Приступая к доказательству предложения [18.4], начнем с некоторых общих замечаний.

Любой одномерный вырожденный симплекс имеет вид $A(0)$, где симплекс A нульмерен. Таким образом, любой одномерный вырожденный симплекс стянут. Найдем значение коцикла a^1 на симплексе $A(0)$. Так как

$$A(0) = A(0)(0)_{(0,1)} = A(0)(0)_{(0,2)} = A(0)(0)_{(1,2)},$$

то

$$a^1(A(0)) = a^1(A(0))\, a^1(A(0))$$

и, следовательно,

$$a^1(A(0)) = 1.$$

Таким образом, значение любого коцикла над А на вырожденном одномерном симплексе равно единице.

Пусть A — симплекс произвольной размерности. Так как

$$A(0)_{(0,1)} = A_{(0)}(0),$$

то по доказанному

$$a^1(A(0)_{(0,1)}) = 1. \tag{18.1}$$

Возвратимся теперь к доказательству предложения [18.4]. Оказывается, что коцепь d^{r-1}, определенная формулой

$$d^{r-1}(A) = (-1)^a c^r(A(a)),$$

обладает нужным свойством, т. е. коцепь $c^r - \nabla_{a^1} d^{r-1}$ уже $(a+1)$-нормальна. Так как r-мерный симплекс, имеющий число b своим местом вырожденности, можно представить в виде $A(b)$, где симплекс A $(r-1)$-мерен, то $(a+1)$-нормальность коцепи $c^r - \nabla_{a^1} d^{r-1}$ означает, что для любого $(r-1)$-мерного симплекса A и любого целого неотрицательного числа b, не превосходящего a:

$$(c^r - \nabla_{a^1} d^{r-1})(A(b)) = 0. \tag{18.2}$$

Таким образом, нужно доказать формулу (18.2). Рассмотрим сначала случай, когда $a=0$ и, следовательно, $b=0$. Имеем, учитывая формулу (18.1):

$$(c^r - \nabla_{a^1} d^{r-1})(A(0)) = c^r(A(0)) - \sum_{c=0}^{r} (-1)^c d^{r-1}(A(0)^{(c)}) =$$

$$= c^r(A(0)) + \sum_{c=0}^{r} (-1)^{c+1} c^r(A(0)^{(c)}(0)) = c^r(A(0)) - c^r(A(0)) + c^r(A(0)) +$$

$$+ \sum_{c=2}^{r} (-1)^{c+1} c^r(A(0)(0)^{(c+1)}) = c^r(A(0)) + \sum_{c=3}^{r+1} (-1)^c c^r(A(0)(0)^{(c)}) =$$

$$= c^r(A(0)(0)^{(0)}) - c^r(A(0)(0)^{(1)}) + c^r(A(0)(0)^{(2)}) +$$

$$+ \sum_{c=3}^{r+1} (-1)^c c^r(A(0)(0)^{(c)}) = \nabla_{a^1} c^r(A(0)(0)).$$

Но коцепь $\nabla_{a^1}c^r$, как было уже замечено, 1-нормальна. Следовательно,

$$\nabla_{a^1}c^r(A(0)(0))=0.$$

Таким образом, в этом случае формула (18.2) доказана.

Пусть теперь $a>0$. Имеем:

$$(c^r-\nabla_{a^1}d^{r-1})(A(b))=$$

$$=c^r(A(b))-a^1(A\ (b)_{(0,\ 1)})\,d^{r-1}(A(b)^{(0)})+\sum_{c=1}^{r}(-1)^{c+1}d^{r-1}(A(b)^{(c)})=$$

$$=c^r(A(b))+(-1)^{a+1}a^1(A(b)_{(0,\ 1)})c^r(A(b)^{(0)}(a))+\sum_{c=1}^{r}(-1)^{c+a+1}c^r(A(b)^{(c)}(a))=$$

$$=c^r(A(b))+(-1)^{a+1}a^1(A(b)_{(0,\ 1)})\,c^r(A(b)^{(0)}(a))+$$

$$+\sum_{c=1}^{r}(-1)^{c+a+1}c^r(A(b)^{(c)}(a))+(-1)^a\nabla_{a^1}c^r(A(b)(a))+$$

$$+(-1)^{(a+1)}a^1\ (A\ (b)(a)_{(0,\ 1)})\,c^r(A(b)(a)^{(0)})+\sum_{c=1}^{r+1}(-1)^{c+a+1}c^r(A(b)(a)^{(c)})=$$

$$=c^r(A(b))+(-1)^{a+1}a^1(A(b)_{(0,\ 1)})\,c^r(A(b)^{(0)}(a))+$$

$$+\sum_{c=1}^{a}(-1)^{c+a+1}c^r(A(b)^{(c)}(a))+\sum_{c=a+1}^{r}(-1)^{c+a+1}c^r(A(b)^{(c)}(a))+$$

$$+(-1)^a\nabla_{a^1}c^r(A(b)(a))+(-1)^{a+1}a^1(A(b)_{(0,\ 1)})\,c^r(A(b)^{(0)}(a-1))+$$

$$+\sum_{c=1}^{a-1}(-1)^{c+a+1}c^r(A(b)^{(c)}(a-1))+c^r(A(b))-c^r(A(b))+$$

$$+\sum_{c=a+2}^{r+1}(-1)^{c+a+1}c^r(A(b)^{(c-1)}(a)).$$

Последнее выражение равно

$$c^r(A(b))+(-1)^{a+1}a^1(A(b)_{(0,\ 1)})\,c^r(A(b)^{(0)}(a))+\sum_{c=1}^{a}(-1)^{c+a+1}c^r(A(b)^{(c)}(a)).$$

В самом деле,

$$\nabla_{a^1}c^r(A(b)(a))=0,$$

так как по условию коцепь $\nabla_{a^1}c^r$ $(a+1)$-нормальна, и

$$c^r(A(b)^{(c)}(a-1))=0,$$

так как коцепь c^r a-нормальна.

Если $b=0$, то, учитывая, что

$$c^r(A(0))=0$$

и

$$c^r(A(0)^{(c)}(a))=c^r(A^{(c-1)}(0)(a))=0,\ \text{при}\ 1<c\leqslant a,$$

получаем отсюда в силу (18.1)

$$(c^r - \nabla_{a^1} d^{r-1})(A(0)) = (-1)^{a+1} c^r (A(a)) + (-1)^{a+2} c^r (A(a)) = 0.$$

Если же $0 < b < a$, то аналогично

$$(c^r - \nabla_{a^1} d^{r-1})(A(b)) = (-1)^{b+a+1} c^r (A(a)) + (-1)^{b+a+2} c^r (A(a)) = 0.$$

Таким образом, для $b < a$ формула (18.2) справедлива.

Пусть, наконец, $b = a$. Тогда

$$(c^r - \nabla_{a^1} d^{r-1})(A(a)) = c^r (A(a)) + (-1)^{a+a+1} c^r (A(a)) = 0.$$

Тем самым формула (18.2) и вместе с ней предложение [18.4] полностью доказаны.

Полученным результатам можно придать иную, более инвариантную форму. С этой целью заметим, что из предложения [8.5] легко следует нормальность любой нормально когомологичной нулю коцепи. Другими словами, группа $B^r_{a^1}(K, G$, норм) r-мерных нормально когомологичных нулю коцепей является подгруппой группы $Z^r_{a^1}(K, G$, норм) r-мерных нормальных коциклов. Следовательно, определена факторгруппа

$$H^r_{a^1}(K,\ G,\ \text{норм}) = Z^r_{a^1}(K,\ G,\ \text{норм}) - B^r_{a^1}(K,\ G,\ \text{норм}),$$

называющаяся *r-мерной группой нормальных когомологий комплекса K над группой G относительно коцикла a^1.*

Из предложений [18.1] и [18.2] непосредственно следует, что

[18.5] *Группы $H^r_{a^1}(K, G)$ и $H^r_{a^1}(K, G$, норм) изоморфны.*

Это предложение, упрощая изучение групп когомологий, часто бывает полезно. Например, из него сразу следует, что

[18.6] *Когомологический тип любого комплекса остовов совпадает с когомологическим типом соответствующего ему комплекса остовов с повторениями.*

Действительно, коцепи комплексов остовов можно трактовать как нормальные коцепи соответствующего комплекса остовов с повторениями и наоборот.

Таким образом, изучая когомологические свойства комплексов остовов, т. е. по существу симплициальных комплексов, можно переходить к комплексам остовов с повторениями, что часто бывает удобно.

§ 3. Системы

19. Расширения полусимплициальных комплексов

Пусть K — полусимплициальный комплекс, G — аддитивная группа и p — целое число, большее единицы. Рассмотрим множество $\mathscr{K}$ всех пар вида

$$(A,\ \varphi),$$

где A — произвольный симплекс комплекса K, а φ — произвольная кортежфункция над G типа (r, p), где r — размерность симплекса A. (Напомним, что в определении кортежфункций над аддитивной группой G за элемент m_0 принимается нуль группы G.) Для любого кортежа $\mathfrak{a}$ высоты, не превосходящей r, положим

$$(A, \varphi)_{(\mathfrak{a})} = (A_{(\mathfrak{a})}, \varphi_{(\mathfrak{a})}).$$

Очевидно, что в силу этого определения $\mathfrak{a}$-грани множество $\mathscr{K}$ является полусимплициальным комплексом, причем размерностью его симплекса (A, φ) считается число r.

Пусть теперь A — произвольная мультипликативная группа, представленная в группе G, a^1—коцикл комплекса K над группой A и k — некоторый $(p+1)$-мерный коцикл комплекса K над группой G относительно a^1. Любому r-мерному симплексу (A, φ) комплекса $\mathscr{K}$ и любому кортежу $\mathfrak{a}$ типа $(r, p+1)$ отнесем элемент $[A, \varphi, \mathfrak{a}]$ группы G, положив

$$[A, \varphi, \mathfrak{a}] = a^1 (A_{(\mathfrak{a}_{(0,1)})}) \varphi(\mathfrak{a}^{(0)}) + \sum_{a=1}^{p+1} (-1)^a \varphi(\mathfrak{a}^{(a)}) + k(A_{(\mathfrak{a})}).$$

Обозначим через K' подмножество комплекса $\mathscr{K}$, состоящее из таких симплексов (A, φ), что для любого кортежа $\mathfrak{a}$ типа $(r, p+1)$:

$$[A, \varphi, \mathfrak{a}] = 0. \tag{19.1}$$

Оказывается, что K' является подкомплексом комплекса $\mathscr{K}$. Действительно, для любого симплекса (A, φ) комплекса $\mathscr{K}$, любого кортежа $\mathfrak{a}$ высоты, не большей размерности r симплекса (A, φ), и любого кортежа $\mathfrak{b}$ типа $(q, p+1)$, где q есть длина кортежа $\mathfrak{a}$, в силу формул (6.2) и (6.3) имеем

$$[A_{(\mathfrak{a})}, \varphi_{(\mathfrak{a})}, \mathfrak{b}] = [A, \varphi, \mathfrak{a}_{(\mathfrak{b})}].$$

Следовательно, вместе с (A, φ) условию (19.1) удовлетворяет и $(A_{(\mathfrak{a})}, \varphi_{(\mathfrak{a})})$.

Построенный полусимплициальный комплекс K' называется *p-расширением комплекса K над группой G с фактором k относительно a^1*.

Комплекс K мы будем считать подкомплексом комплекса $\mathscr{K}$, отождествив любой его симплекс A с парой $(A, 0)$. Существенно отметить, что, вообще говоря, комплекс K не лежит в комплексе K', потому что пара $(A, 0)$, вообще говоря, не удовлетворяет условию (19.1). Легко видеть, что комплекс K тогда и только тогда лежит в K', когда $k = 0$, и совпадает со всем комплексом K', когда $G = 0$.

Так как для $r < p$ не существует кортежфункций типа (r, p), отличных от 0, то любой симплекс комплекса K' размерности, меньшей p, лежит в K. Другими словами:

$$K'^{p-1} = K^{p-1}. \tag{19.2}$$

Кортежфункции типа (p, p) однозначно определяются своим значением на кортеже $\{p\}$. В соответствии с этим мы p-мерные симплексы $\{A, \varphi\}$ комплекса K' будем обозначать через (A, g), где $g = \varphi(\{p\})$. Так как кортежей типа $(p, p+1)$ не существует, то для p-мерных симплексов комплекса K' условие (19.1) бессодержательно. Поэтому любая пара (A, g), где A есть p-мерный симплекс комплекса K, а g — элемент группы G, является p-мерным симплексом комплекса K'. В частности, все p-мерные симплексы комплекса K принадлежат K':

$$K^p \subset K'^p.$$

Грани симплексов (A, g) определяются формулой

$$(A, g)^{(\alpha)} = A^{(\alpha)} \tag{19.3}$$

и, следовательно, не зависят от g. Таким образом, любой p-мерный симплекс (A, g) комплекса K' сравним с симплексом $(A, 0)$ комплекса K.

Кортежфункции типа $(p+1, p)$ определяются своими значениями на кортежах $\{p+1\}^{(a)}$ $(a = 0, \ldots, p+1)$. В соответствии с этим мы $(p+1)$-мерные симплексы (A, φ) комплекса K' будем обозначать через $(A, g_0, \ldots, g_{p+1})$, где $g_a = \varphi(\{p+1\}^{(a)})$, условие (19.1) для кортежа $\{p+1\}$ принимает вид:

$$a^1(A_{(0,1)})\, g_0 + \sum_{a=1}^{p+1} (-1)^a g_a + k(A) = 0. \tag{19.4}$$

Так как кортежей типа $(p+1, p+1)$, отличных от $\{p+1\}$, не существует, то это соотношение является единственным условием, которому должны удовлетворять элементы g_a. Главные грани симплекса $(A, g_0, \ldots, g_{p+1})$ определяются, как легко видеть, формулами

$$(A, g_0, \ldots, g_{p+1})^{(a)} = (A, g_a),$$

а грани низших размерностей — в соответствии с формулой (19.3).

Сказанное достаточно выясняет строение комплекса K' в размерностях, не превосходящих $p+1$. В частности, отсюда следует, что коцикл a^1 комплекса K является коцепью комплекса K', а так как $p > 1$, то — даже коциклом этого комплекса.

Кроме того, мы видим, что для комплексов K и K' выполнены условия предложения [9.2] (с заменой n на p). Следовательно:

[19.1] *Комплексы K и K' p-изоморфны.*

Наконец, из (19.2) следует:

[19.2] *Комплекс K' одновершинен, если одновершинен комплекс K.*

Другими словами, одновершинность сохраняется при расширении. Аналогичные теоремы сохранения имеют место и для некоторых других свойств комплекса K. Например, из [11.3] непосредственно следует:

[19.3] *Комплекс K' правилен в некоторой размерности, отличной от p, если в этой размерности правилен комплекс K.*

Асферичность также сохраняется при расширении:

[19.4] *Комплекс K' асферичен в некоторой размерности r, отличной от p, если в этой размерности асферичен комплекс K.*

Действительно, из [11.4] следует, что комплекс $\mathscr{K}$ асферичен в размерности $r \neq p$, если комплекс K асферичен в этой размерности. Поэтому достаточно доказать, что любой $(r+1)$-мерный симплекс $(A, \underset{\cdot}{\varphi})$ комплекса $\mathscr{K}$, граница которого принадлежит K', лежит в K'. Для $r < p$ это очевидно, а для $r > p$ это следует из того, что в силу формул (11.11) и (11.14) для любого кортежа $\mathfrak{a}$ типа $(r+1, p+1)$

$$[A, \underset{\cdot}{\varphi}, \mathfrak{a}] = [A^{(a)}, \underset{\cdot}{\varphi}^{(a)}, \bar{\mathfrak{a}}],$$

где a — индекс кортежа $\mathfrak{a}$.

Пусть комплекс K полон. Определим в комплексе $\mathscr{K}$ надстройку, положив

$$(A, \underset{\cdot}{\varphi})(a) = (A(a), \underset{\cdot}{\varphi}(a)). \tag{19.5}$$

Очевидно, что относительно так определенной операции надстройки комплекс $\mathscr{K}$ полон. Его подкомплекс K' не будет, вообще говоря, полным, т. е. надстройка симплекса из K' не будет, вообще говоря, лежать в K'. Разберем этот вопрос подробнее.

Пусть $(A, \underset{\cdot}{\varphi})$ — произвольный симплекс комплекса K, r — его размерность, a — произвольное целое неотрицательное число, не превосходящее r и $\mathfrak{a}$ — кортеж типа $(r+1, p+1)$. Согласно формуле (11.2) и определению кортежфункции $\underset{\cdot}{\varphi}(a)$

$$[A(a), \underset{\cdot}{\varphi}(a), \mathfrak{a}] =$$
$$= a^1 (A(a)_{(\mathfrak{a}_{(0,1)})}) \underset{\cdot}{\varphi}(\mathfrak{a}[a]^{(0)}) + \sum_{b=1}^{p+1} (-1)^b \underset{\cdot}{\varphi}(\mathfrak{a}[a]^{(b)}) + k(A(a)_{(\mathfrak{a})}).$$

Предположим, что либо a, либо $a+1$ не принадлежит $\mathfrak{a}$. Тогда $\mathfrak{a}[a]$ является кортежем и согласно (11.11)

$$A(a)_{(\mathfrak{a})} = (A(a)^{(a)})_{(\mathfrak{a}[a])} = A_{(\mathfrak{a}[a])}.$$

Поэтому

$$[A(a), \underset{\cdot}{\varphi}(a), \mathfrak{a}] = [A, \underset{\cdot}{\varphi}, \mathfrak{a}[a]].$$

Следовательно, если $(A, \underset{\cdot}{\varphi})$ удовлетворяет условию (19.1), то для любого кортежа $\mathfrak{a}$, не содержащего либо a, либо $a+1$, имеет место равенство

$$[A(a), \underset{\cdot}{\varphi}(a), \mathfrak{a}] = 0,$$

т. е. условие (19.1) для симплекса $(A(a), \underset{\cdot}{\varphi}(a))$ выполнено, если кортеж $\mathfrak{a}$ обладает указанным свойством.

Пусть теперь и a, и $a+1$ принадлежат кортежу $\mathfrak{a}$. Тогда $\mathfrak{a}[a]^{(b)}$ является кортежем лишь тогда, когда $\mathfrak{a}_{(b)}$ равно или a, или $a+1$, причем если $a=\mathfrak{a}_{(b)}$, то

$$\mathfrak{a}[a]^{(b)}=\mathfrak{a}[a]^{(b+1)}$$

(см. (11.3)). Поэтому

$$a^1(A(a)_{(\mathfrak{a}(0,1))})\,\varphi(\mathfrak{a}_{[a]}{}^{(0)})+\sum_{b=1}^{p+1}(-1)^b\varphi(\mathfrak{a}[a]^{(b)})=$$

$$=\begin{cases}0, & \text{если } b>0;\\ a^1(A(a)_{(\mathfrak{a}_{(0,1)})})\varphi(\mathfrak{a}[a]^{(0)})-\varphi(\mathfrak{a}[a]^{(0)}), & \text{если } b=0.\end{cases}$$

Но если $b=0$, то $\mathfrak{a}_{(0,1)}=(a,\ a+1)$ и

$$A(a)_{(\mathfrak{a}_{(0,1)})}=A_{(a)}(0).$$

Следовательно, $a^1(A(a)_{(\mathfrak{a}_{(0,1)})})=1$, так что

$$a^1(A(a)_{(\mathfrak{a}_{(0,\,1)})})\,\varphi(\mathfrak{a}[a]^{(0)})-\varphi(\mathfrak{a}[a]^{(0)})=0.$$

Таким образом, для любого b

$$[A(a),\ \varphi(a),\ \mathfrak{a}]=k(A(a)_{(\mathfrak{a})}),$$

и, следовательно, вообще говоря, не равно нулю.

Предположим теперь, что коцикл k нормален. Легко видеть, что если $\mathfrak{a}$ содержит a и $a+1$, то симплекс $A(a)_{(\mathfrak{a})}$ вырожден. Поэтому $k(A(a)_{(\mathfrak{a})})=0$ и, следовательно, условие (19.1) для симплекса $(A(a),\varphi(a))$ будет выполнено всегда. Таким образом, мы получили следующее предложение:

[19.5] *Нормальное расширение (т. е. расширение с нормальным фактором) полного комплекса полно.*

20. Расширения симплициальных отображений

Во всем этом пункте K и L — произвольные полусимплициальные комплексы, A и B — мультипликативные группы, представленные в аддитивных группах G и H соответственно, a^1 — коцикл комплекса K над группой A, b^1 — коцикл комплекса L над группой B, k — некоторый $(p+1)$-мерный коцикл комплекса K над группой G относительно a^1, l — некоторый $(p+1)$-мерный коцикл комплекса L над группой H относительно b^1, K' — p-расширение комплекса K с фактором k, L' — p-расширение комплекса L с фактором l, μ — симплициальное отображение комплекса K в комплекс L и θ — такое гомоморфное отображение группы A в группу B, что

$$\hat{\theta}a^1=\mu^*b^1. \tag{20.1}$$

Мы скажем, что отображение μ *ϑ-расширяемо*, где ϑ — некоторое θ-гомоморфное отображение группы G в группу H, если

$$\vartheta\mathbf{k} = \boldsymbol{\mu}^*\mathbf{l}. \tag{20.2}$$

Это равенство имеет смысл ввиду (20.1) и означает, что в комплексе K существует такая p-мерная коцепь d^p над группой H, что

$$\mu^* l - \hat{\vartheta} k + \nabla_{\hat{\theta} a^1} d^p = 0. \tag{20.3}$$

Любому симплексу (A, φ) комплекса K' некоторой размерности r с помощью ϑ-расширяемого отображения μ отнесем пару $(\mu A, \psi)$, где ψ — такая кортежфункция типа (r, p) над группой H, что для любого кортежа $\mathfrak{a}$ типа (r, p):

$$\psi(\mathfrak{a}) = \vartheta\varphi(\mathfrak{a}) + d^p(A_{(\mathfrak{a})}),$$

где d^p — предусмотренная в (20.3) коцепь комплекса K над группой H. Оказывается, что так построенная пара $(\mu A, \psi)$ лежит в L'. Действительно, для любого кортежа $\mathfrak{a}$ типа $(r, p+1)$

$$[\mu A, \psi, \mathfrak{a}] = \vartheta[A, \varphi, \mathfrak{a}] + (\mu^* l - \hat{\vartheta} k + \nabla_{\hat{\theta} a^1} d^p)(A_{(\mathfrak{a})}) = 0.$$

Определенное тем самым отображение ν

$$\nu(A, \varphi) = (\mu A, \psi)$$

комплекса K' в комплекс L', очевидно, симплициально. Оно называется *ϑ-расширением отображения μ с помощью коцепи d^p*. На K^{p-1} оно совпадает с μ и изоморфно, если изоморфны μ и ϑ.

Полагая, в частности, $K = L$, $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, $G = H$, $\theta = 1_{\mathrm{A}}$, $\vartheta = 1_G$ и $\mu = 1_K$, получаем:

[20.1] *Расширения с когомологичными факторами изоморфны (над K^{p-1}).*

В частности, для полных комплексов получаем в силу [18.1]:

[20.2] *Любое расширение полного комплекса изоморфно нормальному.*

Следовательно, обобщая [19.5], можем заключить:

[20.3] *Любое расширение полного комплекса полно.*

Однако для ненормального расширения надстройка уже не будет определяться простой формулой (19.5), а будет зависеть от цепи, осуществляющей когомологию фактора расширения некоторому нормальному коциклу.

Рассмотрим еще один частный случай изложенной конструкции, когда $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, $G = H$, $\theta = 1_{\mathrm{A}}$, $\vartheta = 1_G$ и $k = 0$. В этом случае нам даны произвольные комплексы K и L, коцикл a^1 комплекса L над группой A, p-расширение L' комплекса L над группой G с фактором l относительно a^1 и такое симплициальное отображение μ комплекса K в комплекс L, что

$$\boldsymbol{\mu}^*\mathbf{l} = 0. \tag{20.4}$$

Отображение μ, удовлетворяющее этому условию, называется *расширяемым*. Оно 1_G-расширяемо в прежнем смысле. Следовательно, если коцепь d^p комплекса K над группой G такова, что

$$\mu^* l + \nabla_{\mu^* a^1} d^p = 0, \tag{20.5}$$

то определено 1_G-расширение ν отображения μ с помощью цепи d^p. Так как $k = 0$, то $K \subset K'$. Следовательно, определено отображение ν/K комплекса K в комплекс L'. Оно называется *расширением отображения μ с помощью коцепи d^p.*

Вернемся к общему случаю. Сохраняя сделанные в первом абзаце этого пункта предположения, отбросим условие о существовании гомоморфизма ϑ, предполагая вместо этого, что дано $(p+1)$-отображение ν комплекса K' в комплекс L', совпадающее на K^{p-1} с отображением μ:

$$\nu/K^{p-1} = \mu/K^{p-1}.$$

С помощью отображения ν мы при некоторых условиях, наложенных на комплексы K и L, построим такое 0-гомоморфное отображение ϑ группы G в группу H и такую p-мерную коцепь d^p комплекса K над группой H, что отображение μ окажется ϑ-расширяемым и его ϑ-расширение с помощью коцепи d^p будет продолжением отображения ν на все K'.

Имея целью построить указанный гомоморфизм, возьмем произвольный элемент g группы G. Мы знаем, что для любого p-мерного симплекса A комплекса K пара (A, g) является p-мерным симплексом комплекса K'. Следовательно, определен симплекс $\nu(A, g)$ комплекса L'. Пусть

$$\nu(A, g) = (B, h),$$

где B — некоторый p-мерный симплекс комплекса L, а h — элемент группы H. Симплекс (A, g) сравним с симплексом A и, следовательно, симплекс $(B, h) = \nu(A, g)$ сравним с симплексом $\mu A = \nu A$. Симплекс (B, h) сравним с симплексом B. Таким образом, симплексы μA и B сравнимы между собой.

Предполагая комплекс L правильным в размерности p, выводим отсюда, что $B = \mu A$ и, следовательно,

$$\nu(A, g) = (\mu A, h).$$

Элемент h группы H по построению зависит от g и от A. Обозначим его через $\gamma_A(g)$. Таким образом, окончательно получим

$$\nu(A, g) = (\mu A, \gamma_A(g)).$$

Оказывается, что отображение ϑ_A группы G в группу H, определенное формулой

$$\vartheta_A(g) = \gamma_A(g) - \gamma_A(0),$$

при некоторых условиях не зависит от A и является θ-гомоморфным отображением группы G в группу H.

Имея целью доказать это утверждение, возьмем произвольные элементы $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ группы G и для произвольного $(p+1)$-мерного симплекса A комплекса K и произвольного целого числа b, большего нуля и меньшего p, положим

$$g_a = \left\{ \begin{array}{ll} -a^1(A_{(0,1)})^{-1}k(A), & \text{если } a=0; \\ 0, & \text{если } a \neq 0,\ b,\ b+1,\ b+2; \\ g^{(1)}, & \text{если } a=b; \\ g^{(1)}+g^{(2)}, & \text{если } a=b+1; \\ g^{(2)}, & \text{если } a=b+2; \end{array} \right\} (a=0,\dots,p+1).$$

Очевидно, что $(A, g_0, \dots, g_{p+1})$ является $(p+1)$-мерным симплексом комплекса K', так как условие (19.4) для него выполнено. Следовательно, определен симплекс $\nu(A, g_0, \dots, g_{p+1})$ комплекса L'. Пусть

$$\nu(A, g_0, \dots, g_{p+1}) = (B, h_0, \dots, h_{p+1}).$$

Тогда для любого $a=0, \dots, p+1$

$$\nu(A^{(a)}, g_a) = (B^{(a)}, h_a),$$

и, следовательно,

$$B^{(a)} = \mu A^{(a)}; \tag{20.6}$$

$$h_a = \gamma_{A^{(a)}}(g_a).$$

Равенство (20.6) означает, что симплексы B и μA сравнимы между собой. Предполагая комплекс L правильным в размерности $p+1$, выводим отсюда, что

$$B = \mu A.$$

Элементы же h_a удовлетворяют условию (19.4), которое здесь имеет вид:

$$b^1(B_{(0,1)})\,h_0 + \sum_{a=1}^{p+1}(-1)^a h_a + l(B) = 0.$$

Подставляя сюда значения B и h_a, получим

$$b^1(\mu A_{(0,1)})\,\gamma_{A^{(0)}}(g_0) + \sum_{a=1}^{p+1}(-1)^a \gamma_{A^{(a)}}(g_a) + l(\mu A) = 0,$$

откуда

$$\mu^* b^1(A_{(0,1)})\,\gamma_{A^{(0)}}(-a^1(A_{(0,1)})^{-1}k(A)) + \sum_{a=1}^{b-1}(-1)^a\gamma_{A^{(a)}}(0) +$$
$$+(-1)^b\gamma_{A^{(b)}}(g^{(1)}) + (-1)^{b+1}\gamma_{A^{(b+1)}}(g^{(1)}+g^{(2)}) + (-1)^{b+2}\gamma_{A^{(b+2)}}(g^{(2)}) +$$
$$+\sum_{a=b+3}^{p+1}(-1)^a\gamma_{A^{(a)}}(0) + \mu^* l(A) = 0$$

Перепишем это равенство следующим образом:

$$\gamma_{A(b)}(g^{(1)}) + \gamma_{A(b+2)}(g^{(2)}) - \gamma_{A(b+1)}(g^{(1)} + g^{(2)}) =$$
$$= (-1)^{b+1}\hat{\theta}a^1(A_{(0,1)})\gamma_{A^{(a)}}(-a^1(A_{(0,1)})^{-1}k(A)) +$$
$$+\sum_{a=1}^{b-1}(-1)^{a+b+1}\gamma_{A^{(a)}}(0) + \sum_{a=b+3}^{p+1}(-1)^{a+b+1}\gamma_{A^{(a)}}(0) + (-1)^{b+1}\mu^* l(A).$$

Правая часть этой формулы не зависит от $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$. Полагая $g^{(1)} = g^{(2)} = 0$ и вычитая получившееся равенство, найдем, что

$$\vartheta_{A(b)}(g^{(1)}) + \vartheta_{A(b+2)}(g^{(2)}) = \vartheta_{A(b+1)}(g^{(1)} + g^{(2)}). \tag{20.7}$$

Полагая здесь $g^{(2)} = 0$, обозначая $g^{(1)}$ через g и учитывая, что для любого p-мерного симплекса A

$$\vartheta_A(0) = 0, \tag{20.8}$$

получим

$$\vartheta_{A(b)}(g) = \vartheta_{A(b+1)}(g).$$

Полагая в (20.7) $b = p - 1$, $g^{(1)} = 0$, $g^{(2)} = g$, получим, что это равенство имеет место и для $b = p$. Таким образом, если p-мерные симплексы A и B комплекса K непосредственно сцеплены друг с другом, то

$$\vartheta_A(g) = \vartheta_B(g).$$

Следовательно, это верно и для любых сцепленных между собой симплексов. Поэтому, если комплекс K сильно связен, то отображение ϑ_A не зависит от A. Мы будем обозначать его через ϑ. Из формул (20.7) и (20.8) непосредственно следует, что построенное отображение ϑ группы G в группу H гомоморфно.

Пусть комплекс K — полный и одновершинный. Тогда он сильно связен и все сказанное выше к нему применимо. Предположим, кроме того, что коцикл a^1 таков, что множество его значений покрывает всю группу A. Тогда для любого элемента α группы A в комплексе K существует такой $(p+1)$-мерный симплекс A, что

$$a^1(A_{(0,1)}) = \alpha. \tag{20.9}$$

Действительно, по условию в комплексе K существует такой одномерный симплекс B, что $a^1(B) = \alpha$. Легко видеть, что симплекс $B(2)\ (3)\ \ldots(p)$ обладает требуемым свойством.

Докажем, что построенный выше гомоморфизм ϑ является θ-гомоморфизмом. Действительно, пусть α — произвольный элемент группы A, A — $(p+1)$-мерный симплекс комплекса K, обладающий указанным в (20.9) свойством, и g — произвольный элемент группы G.

Положим

$$g_a = \begin{cases} g, & \text{если } a = 0; \\ \alpha g, & \text{если } a = 1; \\ -h(A), & \text{если } a = 2; \\ 0, & \text{если } a > 2 \end{cases} \quad (a = 0,\ 1,\ \ldots,\ p+1).$$

Очевидно, что $(A, g_0, \ldots, g_{p+1})$ есть $(p+1)$-мерный симплекс комплекса K'. Следовательно, определен симплекс

$$\nu(A, g_0, \ldots, g_{p+1}) = (\mu A, \gamma_{A(0)}(g_0), \ldots, \gamma_{A(p+1)}(g_{p+1})).$$

Для него формула (19.4) принимает вид:

$$b^1(\mu A_{(0,1)})\gamma_{A(0)}(g) - \gamma_{A(1)}(\alpha g) + \gamma_{A(2)}(-k(A)) + \\ + \sum_{a=3}^{p+1}(-1)^a\gamma_{A(a)}(0) + l(\mu A) = 0.$$

Но

$$b^1(\mu A_{(0,1)}) = \mu^* b^1(A_{(0,1)}) = \hat{\theta a}^1(A_{(0,1)}) = \theta\alpha.$$

Таким образом,

$$\theta\alpha\gamma_{A(0)}(g) - \gamma_{A(1)}(\alpha g) + \gamma_{A(2)}(-k(A)) + \\ + \sum_{a=3}^{p+1}(-1)^a\gamma_{A(a)}(0) + l(\mu A) = 0. \quad (20.10)$$

Полагая здесь $g = 0$, получим

$$\theta\alpha\gamma_{A(0)}(0) - \gamma_{A(1)}(0) + \gamma_{A(2)}(-k(A)) + \\ + \sum_{a=3}^{p+1}(-1)^a\gamma_{A(a)}(0) + l(\mu A) = 0. \quad (20.11)$$

Вычитая равенство (20.11) из равенства (20.10) и вспоминая определение гомоморфизма ϑ, получим

$$\vartheta\alpha\,\vartheta(g) = \vartheta(\alpha g),$$

что доказывает наше утверждение.

В комплексе K определим p-мерную коцепь d^p над группой H, положив для любого p-мерного симплекса A комплекса K

$$d^p(A) = \gamma_A(0).$$

Из формулы (20.11) следует, что

$$\theta\alpha\, d^p(A^{(0)}) - d(A^{(1)}) + d(A^{(2)}) + \sum_{a=3}^{p+1}(-1)^a d(A^{(a)}) + \\ + \gamma_{A(2)}(-k(A)) - \gamma_{A(2)}(0) + \mu^* l(A) = 0,$$

откуда

$$\hat{\theta a}^1 (A_{(0,1)})\, d^p (A^{(0)}) + \sum_{a=1}^{p+1} (-1)^a d (A^{(a)}) - \vartheta k (A) + \mu^* l (A) = 0,$$

т. е.

$$(\mu^* l - \hat{\vartheta} k + \nabla_{\hat{\theta a}^1} d^p)(A) = 0.$$

Легко видеть, что в этой формуле мы можем считать симплекс A произвольным. Таким образом:

$$\mu^* l - \hat{\vartheta} k + \nabla_{\hat{\theta a}^1} d^p = 0. \qquad (20.12)$$

Следовательно, отображение μ ϑ-продолжаемо. Очевидно, что его ϑ-продолжение с помощью цепи d^p совпадает на K^{p+1} с данным $(p+1)$-отображением ν. Таким образом, доказано следующее предложение:

[20.4] *Пусть K — одновершинный полный полусимплициальный комплекс и a^1 — такой коцикл комплекса K над некоторой мультипликативной группой* A, *что множество его значений покрывает всю группу* A. *Пусть μ—симплициальное отображение комплекса K в некоторый полусимплициальный комплекс L, правильный в размерностях $p, p+1$, и θ — такое гомоморфное отображение группы* A *в некоторую мультипликативную группу* B, *что для некоторого коцикла b^1 комплекса L над группой* B

$$\hat{\theta a}^1 = \mu^* b^1.$$

Пусть G и H — аддитивные группы, в которых представлены группы A *и* B *соответственно, k — $(p+1)$-мерный цикл комплекса K над группой G относительно a^1, K' — p-расширение комплекса K с фактором k, l — $(p+1)$-мерный коцикл комплекса L над группой H относительно b^1 и L' — p-расширение комплекса L с фактором l. Пусть, наконец, ν — некоторое $(p+1)$-отображение комплекса K' в комплекс L', совпадающее на K^{p-1} с отображением μ. Тогда существует такое θ-гомоморфное отображение ϑ группы G в группу H и такая p-мерная цепь d^p комплекса K над группой H, что отображение μ ϑ-расширяемо и его ϑ-расширение с помощью коцепи d^p совпадает на K'^{p+1} с заданным отображением ν.*

21. Группы когомологий расширения

Пусть K — полусимплициальный комплекс, A — мультипликативная группа, представленная в аддитивной группе G, a^1 — коцикл комплекса K над группой A, k — $(p+1)$-мерный коцикл комплекса K над группой G относительно a^1, K' — p-расширение комплекса K с фактором k и H — произвольная аддитивная группа, в которой представлена группа A. Тогда определены группы $H^r_{a^1}(K', H)$. Мы изучим эти группы для $r \leqslant p$.

Если $r<p$, то группа $H^r_{a^1}(K', H)$, очевидно, совпадает с группой $H^r_{a^1}(K, H)$. Поэтому интересен лишь случай $r=p$. Оказывается, что при некоторых предположениях, накладываемых на комплекс K, группа $H^p_{a^1}(K', H)$ изоморфна группе $E(k, H)$ (см. п. 17). Доказательством этого факта мы и займемся.

Пусть c^p — произвольный p-мерный коцикл комплекса K' над группой H относительно a^1. Отнесем ему p-мерную коцепь $\bar{c}^p$ комплекса K, положив

$$\bar{c}^p(A) = c^p(A, 0)$$

для любого p-мерного симплекса A комплекса K. Так определенная коцепь $\bar{c}^p$ не будет, вообще говоря, коциклом относительно a^1. Поэтому $(p+1)$-мерный коцикл

$$\bar{k} = \nabla_{a^1}\bar{c}^p$$

комплекса K над группой H относительно a^1, вообще говоря, отличен от нуля. Расширение комплекса K с фактором $\bar{k}$ обозначим через $\overline{K}$.

Пусть $(A, g_0, \ldots, g_{p+1})$ — произвольный $(p+1)$-мерный симплекс комплекса K'. Легко видеть, что

$$(A, c^p(A^{(0)}, g_0) - c^p(A^{(0)}, 0), \ldots, c^p(A^{(p+1)}, g_{p+1}) - c^p(A^{p+1}, 0))$$

является $(p+1)$-мерным симплексом комплекса $\overline{K}$. Обозначим его через $\nu(A, g_0, \ldots, g_{p+1})$. Отображение ν, определенное тем самым на $(p+1)$-мерных симплексах комплекса K', распространим на симплексы меньших размерностей так, чтобы получилось симплициальное отображение $(p+1)$-мерного остова комплекса K' в комплекс $\overline{K}$. Очевидно, что это всегда можно сделать и притом единственным образом. Полученное $(p+1)$-отображение ν комплекса K' в комплекс $\overline{K}$, очевидно, тождественно на подкомплексе K^{p-1} и даже на K^p. Поэтому к нему можно применить предложение [20.4], в котором нужно положить $L=K$, $\mathrm{B}=\mathrm{A}$, $b^1=a^1$, $l=\bar{k}$, $L'=\overline{K}$, $\mu=1_K$, $\theta=1_{\mathrm{A}}$. Следовательно, если комплекс K — полный одновершинный и правильный в размерностях p и $p+1$, а значения коцикла a^1 покрывают всю группу A, то отображение ϑ группы G в группу H, определенное формулой (см. доказательство предложения [20.4])

$$\vartheta_g = c^p(A, g) - c^p(A, 0),$$

не зависит от A и является 1_{A}-гомоморфным, т. е. операторно гомоморфным отображением группы G в группу H. Формула (20.12) в этом случае принимает вид:

$$\nabla_{a^1}\bar{c}^p = \hat{\vartheta}k,$$

так как коцепь d^p тождественно равна нулю.

Таким образом, пара $(\vartheta, \bar{c}^p)$ является элементом группы $Z(k, H)$. Очевидно, что так полученное отображение $c^p \to (\vartheta, \bar{c}^p)$ группы $Z^p_{a^1}(K', H)$ в группу $Z(k, H)$ гомоморфно.

Любому элементу $(\vartheta, \bar{c}^p)$ группы $Z(k, H)$ отнесем p-мерную коцепь c^p комплекса K' над группой H, положив для любого p-мерного симплекса (A, g) комплекса K'

$$c^p(A, g) = \bar{c}^p(A) + \vartheta g.$$

Легко проверить, что так определенная коцепь c^p является коциклом комплекса K' относительно a^1. Очевидно, что это отображение группы $Z(k, H)$ в группу $Z^p_{a^1}(K', H)$ гомоморфно и обратно построенному выше отображению группы $Z^p_{a^1}(K', H)$ в группу $Z(k, H)$. Следовательно, оба гомоморфизма являются взаимно обратными изоморфизмами. Переходя к факторгруппам, получим вторую половину следующего предложения:

[21.1] *Группа $H^r_{a^1}(K', H)$ при $r < p$ совпадает с группой $H^r_{a^1}(K, H)$, а группа $H^p_{a^1}(K', H)$ изоморфна группе $E(\mathbf{k}, H)$, если комплекс K полон, одновершинен и правилен в размерностях p и $p+1$, а значения коцикла a^1 покрывают всю группу* A.

22. Системы

Пусть

$$G^1, G^2, \ldots \tag{22.1}$$

— произвольная серия (см. п. 3). В комплексе $K(G^1)$ группы G^1, который мы кратко обозначим через K_1, выберем некоторый трехмерный коцикл k_1 над группой G^2 относительно $l^1_{G^1}$, т. е. трехмерный коцикл группы G^1 над группой G^2. 2-расширение комплекса K_1 с фактором k_1 обозначим через K_2. Как мы знаем,

$$K_1^2 \subset K_2.$$

Коцикл $l^1_{G_1}$ лежит в K_2. Следовательно, имеет смысл говорить о коциклах комплекса K_2 над группой G^3 относительно $l^1_{G^1}$. Выберем некоторый четырехмерный коцикл k_2 комплекса K_2 над группой G^3 относительно $l^1_{G^1}$ и обозначим через K_3 3-расширение комплекса K_2 с фактором k_2. Как мы знаем,

$$K_2^3 \subset K_3$$

и коцикл $1^1_{G^1}$ лежит в K_3. Продолжая процесс, мы построим бесконечную последовательность комплексов

$$K_1, K_2, \ldots$$

и факторов

$$k_1, k_2, \ldots \tag{22.2}$$

таких, что для любого $p \geqslant 1$ комплекс K_{p+1} есть $(p+1)$-расширение комплекса K_p с фактором k_p.

Совокупность $\mathfrak{G} = \{G^p, k_p\}$ групп (22.1) и факторов (22.2) назовем *системой*. Группу G^p назовем ее *p-той группой*, а фактор k_p — ее *p-тым фактором*. Комплекс K_p назовем *p-тым комплексом* системы $\mathfrak{G}$ и обозначим через $K_p(\mathfrak{G})$. По построению

$$K_p^{p+1}(\mathfrak{G}) \subset K_{p+1}(\mathfrak{G}).$$

Объединение возрастающей последовательности

$$K_1^2 \subset K_2^3 \subset \ldots \subset K_p^{p+1} \subset \ldots$$

полусимплициальных комплексов является, очевидно, полусимплициальным комплексом. Он называется *комплексом системы* $\mathfrak{G}$ и обозначается через $K(\mathfrak{G})$, а иногда через $K_\infty(\mathfrak{G})$.

По построению коцикл $l^1_{G^1}$ принадлежит каждому комплексу $K_p(\mathfrak{G})\,(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ и, в частности, комплексу $K(\mathfrak{G})$. Мы будем обозначать его через $l^1_{\mathfrak{G}}$.

Очевидно, для любого $p \geqslant 1$

$$K_{p+1}^{p+1}(\mathfrak{G}) = K^{p+1}(\mathfrak{G}).$$

Но согласно [19.1] комплекс K_p $(p+1)$-изоморфен своему $(p+1)$-расширению K_{p+1}. Следовательно:

[22.1] *Комплексы* $K_p(\mathfrak{G})$ *и* $K(\mathfrak{G})$ $(p+1)$-*изоморфны.*

Если для некоторого $p \geqslant 1$ группа G^p тривиальна, то согласно сказанному в п. 19 комплексы $K_p(\mathfrak{G})$ и $K_{p+1}(\mathfrak{G})$ совпадают. Следовательно:

[22.2] *Если n таково, что для любого p, большего единицы и меньшего n,*

$$G^p = 0,$$

то

$$K_n(\mathfrak{G}) = K(G^1).$$

Из теорем сохранения [19.2], [19.3], [19.4] и [19.5] следует:

[22.3] *Комплекс* $K_p(\mathfrak{G})\,(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *является одновершинным, полным и, следовательно, сильносвязным комплексом, правильным и асферичным во всех размерностях, больших p,* так как комплекс $K(G^1)$ обладает этими свойствами.

Пусть n — целое неотрицательное число. Отнесем системе $\mathfrak{G}$ новую систему $\mathfrak{G}^n = \{H^p, l_p\}$, положив

$$H^p = \begin{cases} G^p, & \text{если } p \leqslant n; \\ 0, & \text{если } p > n; \end{cases}$$

$$l_p = \begin{cases} k_p, & \text{если } p < n; \\ 0, & \text{если } p \geqslant n. \end{cases}$$

Систему $\mathfrak{G}^n$ назовем *n-сегментом* системы $\mathfrak{C}$. Для любой системы $\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{G}^0 = \{0, 0\}.$$

Дополнительно положим

$$\mathfrak{G}^\infty = \mathfrak{G}.$$

Очевидно, что для любого n $(1 \leqslant n \leqslant \infty)$

$$K_n(\mathfrak{G}) = K(\mathfrak{G}^n).$$

Отсюда в силу [22.1] вытекает:

[22.4] *Комплексы* $K(\mathfrak{G})$ *и* $K(\mathfrak{G}^n)$ $(n+1)$-*изоморфны.*

Пусть $\mathfrak{G} = \{G^p, k_p\}$ и $\mathfrak{H} = \{H^p, k_p\}$ — произвольные системы. Гомоморфное отображение $\theta = \{\theta^p\}$ серии $\{G^p\}$ в серию $\{H^p\}$ назовем *гомоморфным отображением системы* $\mathfrak{G}$ *в систему* $\mathfrak{H}$, если для любого $p \geqslant 1$ существует такое симплициальное отображение ω_p комплекса $K_p(\mathfrak{G})$ в комплекс $K_p(\mathfrak{H})$, что симплициальное отображение ω_1 комплекса $K_1(\mathfrak{G}) = K(G^1)$ в комплекс $K_1(\mathfrak{H}) = K(H^1)$ порождается гомоморфным отображением θ^1 группы G^1 в группу H^1 и для любого $p \geqslant 1$ отображение ω_{p+1} является θ^{p+1}-расширением отображения ω_p.

Условие (20.1) θ^{p+1}-расширяемости выполнено для отображения ω_1 в силу (13.3), а для ω_p при $p > 1$ потому, что ω_p совпадает с ω_1 на одномерном остове комплекса $K_p(\mathfrak{G})$. Следовательно, для θ^{p+1}-расширяемости отображения ω_p необходимо и достаточно выполнения условия (20.2), принимающего здесь следующий вид:

$$\overset{*}{\boldsymbol{\omega}}_p \mathbf{l}_p = \boldsymbol{\theta}^{p+1} \mathbf{k}_p. \tag{22.3}$$

Таким образом, для того чтобы гомоморфное отображение $\theta = \{\theta^p\}$ серии $\{G^p\}$ в серию $\{H^p\}$ было гомоморфным отображением системы $\mathfrak{G}$ с систему $\mathfrak{H}$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $p \geqslant 1$ последовательно имели место равенства (22.3).

Гомоморфное отображение $\theta = \{\theta^p\}$ системы $\mathfrak{G}$ в систему $\mathfrak{H}$ называется *изоморфным отображением системы* $\mathfrak{G}$ *на систему* $\mathfrak{H}$, если для любого $p \geqslant 1$ отображение θ^p является изоморфным отображением группы G^p на группу H^p. Системы называются *изоморфными*, если существует хотя бы одно изоморфное отображение одной системы на другую.

Симплициальные отображения ω_p порождают, очевидно, симплициальное отображение ω комплекса $K(\mathfrak{G})$ в комплекс $K(\mathfrak{H})$, изоморфное, если изоморфны все ω_p. Все ω_p изоморфны, если изоморфны все θ^p. Таким образом, для изоморфных систем их p-тые комплексы $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ изоморфны.

Во избежание недоразумений заметим, что симплициальные отображения ω_p и ω не определяются гомоморфизмом θ, а зависят еще от цепей, осуществляющих указанные в (22.3) когомологии.

Системы называются *n-изоморфными* ($1 \leqslant n \leqslant \infty$), если изоморфны их $(n-1)$-сегменты. ∞-изоморфизм — это обыкновенный изоморфизм. Любые две системы 1-изоморфны. Системы 2-изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их первые группы. Комплексы n-изоморфных систем n-изоморфны.

Пусть $\mathfrak{G} = \{G^p, k_p\}$ и $\mathfrak{H} = \{H^p, l_p\}$ — две системы и ω — симплициальное отображение комплекса $K(\mathfrak{G})$ системы $\mathfrak{G}$ в комплекс $K(\mathfrak{H})$ системы $\mathfrak{H}$.

Часть $\omega / K_1^2(\mathfrak{G})$ отображения ω на двухмерном остове $K_1^2(\mathfrak{G}) = K^2(G^1)$ является 2-отображением комплекса $K(G^1)$ в комплекс $K_2(\mathfrak{H})$. Согласно [22.1] комплекс $K_2(\mathfrak{H})$ 2-изоморфен комплексу $K_1(\mathfrak{H}) = K(H^1)$. Пусть μ_1 указанное там 2-изоморфное отображение комплекса $K_2(\mathfrak{H})$ в комплекс $K(H^1)$. Составим отображение

$$\mu_1 \omega / K_1^2(\mathfrak{G}).$$

Это — 2-отображение комплекса $K(G^1)$ в комплекс $K(H^1)$. Согласно сказанному в конце п. 12 это 2-отображение порождает гомоморфное отображение θ^1 группы G в группу H. Соответствующее этому гомоморфизму симплициальное отображение ω_1 комплекса $K(G^1)$ в комплекс $K(H^1)$ совпадает с отображением ω на одномерном остове $K^1(G^1)$ комплекса $K(G^1)$. Отображения θ^1 и ω_1 изоморфны, если изоморфно ω.

В предложении [20.4] положим $K = K_1(\mathfrak{G})$ $(= K(G^1))$, $L = K_1(\mathfrak{H})$ $(= K(H^1))$, $a^1 = 1^1_{\mathfrak{H}}$, $b^1 = 1^1_{\mathfrak{H}}$, $G = G^2$, $H = H^2$, $k = k_1$, $l = l_1$, $\theta = \theta^1$, $\mu = \omega_1$, $\nu = \mu_2\, \omega / K_1^3(\mathfrak{G})$, где μ_2 есть 3-изоморфное отображение комплекса $K_3(\mathfrak{G})$ на комплекс $K_2(\mathfrak{H})$. Очевидно, что все условия предложения [20.4] в этом случае выполнены, так что определится θ^1-гомоморфное отображение θ^2 группы G^2 в группу H^2, для которого отображение ω_1 θ^2-продолжаемо и его θ^2-продолжение ω_2 с помощью некоторой коцепи совпадает с отображением ω на $K_2^2(\mathfrak{G})$. Отображения θ^2 и ω_2 изоморфны, если изоморфно отображение ω.

К отображению ω_2 можно аналогичным образом применить то же предложение [20.4]. Тем самым определится θ^1-гомоморфное отображение θ^3 группы G^3 в группу H^3 и θ^3-продолжение ω_3 отображения ω_2, совпадающего на $K_3^3(\mathfrak{G})$ с отображением ω.

Продолжая процесс, мы определим последовательность θ гомоморфизмов $\theta^1, \theta^2, \ldots$, являющуюся гомоморфным отображением системы $\mathfrak{G}$ в систему $\mathfrak{H}$. Гомоморфизм θ является изоморфизмом, если изоморфно ω. Таким образом:

[22.5] *Системы тогда и только тогда изоморфны, когда изоморфны их комплексы.*

Применяя это предложение к сегментам систем, легко обобщим его:

[22.6] *Системы тогда и только тогда n-изоморфны* $(1 \leqslant n \leqslant \infty)$, *когда изоморфны их n-тые комплексы.*

Или иначе:

[22.7] *Системы тогда и только тогда n-изоморфны* $(1 \leqslant n \leqslant \infty)$, *когда n-изоморфны их n-тые комплексы.*

§ 4. Присоединенные системы

23. Полусимплициальные комплексы с оснащением

Напомним, что p-мерной сферой некоторого полусимплициального комплекса N называется такая $(p+2)$-членная последовательность

$$S = (A_0, \ldots, A_{p+1})$$

его p-мерных симплексов, что для $a < b$

$$A_b^{(a)} = A_a^{(b-1)}.$$

Симплексы A_a обозначаются также через $S^{(a)}$ и называются *гранями* сферы S. Для любого $(p+1)$-мерного симплекса A последовательность

$$\Delta A = (A^{(0)}, \ldots, A^{(p+1)})$$

его p-мерных граней является p-мерной сферой. Она называется *границей* симплекса A.

Считая число p бóльшим единицы, отнесем любой p-мерной сфере S комплекса N одномерный симплекс $S_{(0,1)}$, положив

$$S_{(0,1)} = (S^{(p+1)})_{(0,1)}.$$

Очевидно, что при $a > 1$

$$S_{(0,1)} = (S^{(a)})_{(0,1)}.$$

Кроме того, очевидно, что для любого $(p+1)$-мерного симплекса A

$$(\Delta A)_{(0,1)} = A_{(0,1)}. \qquad (23.1)$$

Две p-мерные сферы S и T называются *сравнимыми* между собой, если для любого $a = 0, \ldots, p+1$ их грани $S^{(a)}$ и $T^{(a)}$ сравнимы между собой. Очевидно, что если сферы S и T сравнимы между собой, то

$$S_{(0,1)} = T_{(0,1)}. \qquad (23.2)$$

(Напомним, что $p > 1$.) Отметим следующее, вполне очевидное предложение:

[23.1] *Если последовательность S p-мерных симплексов*

$$A_0, \ldots, A_{p+1}$$

комплекса N такова, что для любого $a = 0, \ldots, p+1$ симплекс A_a сравним с a-той гранью $T^{(a)}$ некоторой p-мерной сферы T, то S является сравнимой с T p-мерной сферой комплекса N.

Назовем $(p+3)$-членную последовательность Σ p-мерных сфер

$$S_0, \ldots, S_{p+2}$$

комплекса N *сетью p-мерных сфер*, если для любых $a, b = 0, 1, 2, \ldots, p+2$ таких, что $a < b$,

$$S_b^{(a)} = S_{(a)}^{(b-1)}.$$

Сфера S_a называется *a-той составляющей* сети Σ и обозначается через $\Sigma^{(a)}$. Любой сети Σ p-мерных сфер комплекса N отнесем одномерный симплекс $\Sigma_{(0,1)}$, положив

$$\Sigma_{(0,1)} = (\Sigma^{(p+2)})_{(0,1)}.$$

Очевидно, что при $a > 1$

$$\Sigma_{(0,1)} = (\Sigma^{(a)})_{(0,1)}.$$

Для любого $(p+2)$-мерного симплекса A комплекса N последовательность

$$\Delta A^{(0)}, \ldots, \Delta A^{(p+2)}$$

границ его главных граней является сетью p-мерных сфер. Эта сеть называется *граничной сетью* симплекса A и обозначается через $\Delta\Delta A$. Очевидно, что

$$(\Delta\Delta A)_{(0,1)} = A_{(0,1)}. \tag{23.3}$$

Легко видеть, что если комплекс N асферичен в размерностях p и $p+1$, то любая его сеть p-мерных сфер является граничной сетью некоторого $(p+2)$-мерного симплекса.

Пусть μ — симплициальное отображение комплекса N в некоторый комплекс M. Для любой сферы S комплекса N последовательность

$$\mu S^{(0)}, \ldots \mu S^{(p+1)}$$

симплексов комплекса M является его p-мерной сферой. Эта сфера называется *образом* сферы S при отображении μ и обозначается через μS. Аналогично определяется образ $\mu\Sigma$ любой сети p-мерных сфер комплекса N, являющийся сетью p-мерных сфер комплекса M.

Для границ и граничных сетей имеют место очевидные формулы:

$$\mu\Delta A = \Delta\mu A \tag{23.4}$$

и

$$\mu\Delta\Delta A = \Delta\Delta\mu A. \tag{23.5}$$

Заметим, что сфера μS и сеть $\mu\Sigma$ определены и тогда, когда μ есть n-отображение комплекса N в комплекс M, если только $p \leqslant n$. Однако при $p = n$ формулы (23.4) и (23.5) теряют смысл.

Пусть A — мультипликативная группа, представленная в аддитивной группе G, и a^1 — некоторый коцикл комплекса N над группой A. Предположим, что для некоторого p, большего единицы, любой паре A, B p-мерных сравнимых между собой симплексов комплекса N отнесен элемент $d(A, B)$ группы G и любой p-мерной сфере S комплекса N отнесен элемент $k(S)$ той же группы G. Мы скажем, что функции d и k образуют *p-мерное оснащение (d, k) комплекса N в группе G относительно коцикла a^1, если*

ОСН 1 для любого p-мерного симплекса A комплекса N

$$d(A, A) = 0;$$

ОСН 2 для любых p-мерных сравнимых между собой симплексов A, B и C комплекса N

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C);$$

ОСН 3 для любого p-мерного симплекса A комплекса N и любого элемента g группы G в комплексе N существует один и только один сравнимый с A p-мерный симплекс B, для которого

$$d(A, B) = g;$$

ОСН 4 для любой p-мерной сферы S комплекса N

$$k(S) = 0$$

тогда и только тогда, когда сфера S ограничивает в комплексе N;

ОСН 5 для любых сравнимых между собой p-мерных сфер S и T комплекса N

$$k(T) - k(S) = a^1(S_{(0,1)})\, d(S^{(0)}, T^{(0)}) + \sum_{a=1}^{p+1} (-1)^a d(S^{(a)}, T^{(a)});$$

ОСН 6 для любой сети Σ p-мерных сфер комплекса N

$$a^1(\Sigma_{(0,1)})\, k(\Sigma^{(0)}) + \sum_{a=1}^{p+2} (-1)^a k(\Sigma^{(a)}) = 0.$$

Укажем некоторые свойства оснащающих функций d и k, легко следующих из определения.

Во-первых, из ОСН 1 и ОСН 2 следует, что для любых сравнимых между собой p-мерных симплексов A и B комплекса N

$$d(A, B) = -d(B, A). \tag{23.6}$$

Во вторых, из ОСН 1 и ОСН 3 следует:

[23.2] *Элемент $d(A, B)$ группы G тогда и только тогда равен нулю, когда симплексы A и B совпадают.*

Далее из [23.1] и ОСН 3 следует:

[23.3] *Для любой p-мерной сферы S комплекса N и любых элементов $g_0, \ldots, g_{p+1}$ группы G в комплексе N существует такая p-мерная сравнимая с S сфера T, что для любого $a = 0, \ldots, p+1$*

$$d(S^{(a)}, T^{(a)}) = g_a.$$

Наконец из (23.1), ОСН 4 и ОСН 5 следует, что для любого $(p+1)$-мерного симплекса A комплекса N и любой p-мерной сферы S, сравнимой с границей ΔA симплекса A,

$$k(S) = a^1(A_{(0,1)})\, d(A^{(0)}, S^{(0)}) + \sum_{a=1}^{p+1} (-1)^{(a)} d(A^{(a)}, S^{(a)}). \qquad (23.7)$$

Полусимплициальный комплекс N называется *стандартизованным в размерности p*, если в любом классе сравнимых между собой p-мерных симплексов комплекса N выбран один, называемый *стандартным симплексом* этого класса. Таким образом, любой p-мерный симплекс A комплекса N сравним с одним и только одним стандартным симплексом. Этот стандартный симплекс мы будем обозначать через $\overline{A}$.

Пусть стандартизованный в размерности p комплекс N оснащен в размерности p в группе G. Определим p-мерную коцепь d^p комплекса N над группой G, положив для любого p-мерного симплекса A комплекса N

$$d^p(A) = d(\overline{A}, A).$$

Так определенную коцепь d^p мы назовем *различающей коцепью* комплекса N. Значение $d^p(A)$ этой коцепи оценивает отличие симплекса A от соответствующего стандартного. На различных, но сравнимых между собой, симплексах комплекса N эта коцепь принимает различные значения. Кроме того, множество ее значений покрывает всю группу G. Таким образом, соответствие

$$A \to d^p(A)$$

является взаимно однозначным отображением любого класса сравнимых между собой p-мерных симплексов комплекса N на группу G.

Пусть K — произвольный полусимплициальный комплекс, правильный и асферичный в размерностях p и $p+1$, a^1 — коцикл комплекса K над группой A, k — $(p+1)$-мерный коцикл комплекса K над группой G относительно a^1 и K^1—p-расширение комплекса K с фактором k.

Из правильности комплекса K в размерности p следует, что сравнимые между собой p-мерные симплексы комплекса K' имеют одинаковые первые компоненты, т. е. имеют вид (A, g) и (A, h) с одинаковым A.

Любым двум сравнимым между собой p-мерным симплексам $A' = (A, g)$ и $B' = (A, h)$ комплекса K' отнесем элемент $d(A', B')$ группы G, положив

$$d(A', B') = h - g.$$

Очевидно, что для так определенной функции d выполнены условия ОСН 1, ОСН 2 и ОСН 3.

Пусть S' — произвольная p-мерная сфера комплекса K'. Для любого $a = 0, \ldots, p+1$

$$S^{(a)} = (A_a, g_a),$$

где A_a являются p-мерными симплексами комплекса K, образующими, очевидно, некоторую p-мерную сферу S, а g_a — элементы группы G, не подчиненные, вообще говоря, никаким условиям. Примем для сферы S' обозначение

$$(S, g_0, \ldots, g_{p+1}).$$

Таким образом,

$$(S, g_0, \ldots, g_{p+1})^{(a)} = (S^{(a)}, g_a), \qquad (a = 0, \ldots, p+1).$$

По условию сфера S ограничивает в комплексе K. Пусть

$$S = \Delta A.$$

Так как комплекс K правилен в размерности $p+1$, то симплекс A однозначно определен. Таким образом, любая сфера S' комплекса K' однозначно записывается следующим образом:

$$S' = (\Delta A, g_0, \ldots, g_{p+1}).$$

Отнесем сфере S' элемент $k(S')$ группы G, положив

$$k(S') = a^1(A_{(0,1)})\, g_0 + \sum_{a=1}^{p+1} (-1)^a g_a + k(A).$$

Другими словами,

$$k(S') = [A, \varphi, \{p+1\}],$$

где кортежфункция φ определена равенствами:

$$\varphi(\{p+1\}^{(a)}) = g_a.$$

Из (19.4) следует, что $k(S') = 0$ тогда и только тогда, когда $(A, g_0, \ldots, g_{p+1})$ есть симплекс комплекса K'. Так как граница этого симплекса совпадает с S', то, следовательно, функция k удовлетворяет условию ОСН 4.

Пусть $S' = (\Delta A, g_0, \ldots, g_{p+1})$ и $T' = (\Delta B, h_0, \ldots, h_{p+1})$ — произвольные сравнимые между собой p-мерные сферы комплекса K'. Сферы ΔA и ΔB комплекса K также сравнимы между собой, и так как комплекс K правилен в размерности p, то $\Delta A = \Delta B$, а так как он правилен и в размерности $p+1$, то $A = B$. Кроме того, $A_{(0,1)} = S_{(0,1)} = T_{(0,1)}$. Следовательно,

$$k(T) - k(S) = a^1(B_{(0,1)})\,h_0 + \sum_{a=1}^{p+1}(-1)^a h_a + k(B) -$$

$$- a^1(A_{(0,1)})\,g_0 - \sum_{a=1}^{p+1}(-1)^a g_a - k(A) =$$

$$= a^1(A_{(0,1)})(h_0 - g_0) + \sum_{a=1}^{p+1}(-1)^a(h_a - g_a) =$$

$$= a^1(S_{(0,1)})\,d(S^{(0)}, T^{(0)}) + \sum_{a=1}^{p+1}(-1)^a d(S^{(a)}, T^{(a)}).$$

Таким образом, для функции k имеет место и условие ОСН 5.

Наконец, пусть Σ' — произвольная сеть p-мерных сфер комплекса K'. Положим

$$\Sigma^{(a)} = (\Delta A_a, g_a, 0, \ldots, g_{a,p+1})\ (a = 0, \ldots, p+2).$$

Очевидно, что симплексы A_a являются гранями некоторой $(p+1)$-мерной сферы комплекса K и, следовательно, в комплексе K существует такой $(p+2)$-мерный симплекс A, что для любого $a = 0, \ldots, p+2$

$$A_a = A^{(a)}.$$

Кроме того, легко видеть, что если $a > b$, то

$$g_{a,b} = g_{b,a-1}. \tag{23.8}$$

Таким образом, сеть Σ' определяется симплексом A и элементами $g_{a,b}$, подчиненными условию (23.8). Мы будем сеть Σ' обозначать так:

$$\Sigma' = (\Delta\Delta A, \{g_{a,b}\}).$$

Таким образом,

$$(\Delta\Delta A, \{g_{a,b}\})^{(a)} = (\Delta A^{(a)}, g_{a,0}, \ldots, g_{a,p+1}).$$

Кроме того, если $a > 1$, то

$$\Sigma'_{(0,1)} = A_{(0,1)} = (A^{(a)})_{(0,1)}.$$

Следовательно, используя (23.8), получим

$$a^1(\Sigma_{(0,1)})k(\Sigma^{(0)}) + \sum_{a=1}^{p+2}(-1)^a k(\Sigma^{(a)}) =$$

$$= a^1(A_{(0,1)})\left(a^1((A^{(0)})_{(0,1)})g_{0,0} + \sum_{b=1}^{p+1}(-1)^b g_{0,b} + k(A^{(0)})\right) +$$

$$+ \sum_{a=1}^{p+2}(-1)^a\left(a^1((A^{(a)})_{(0,1)})g_{a,0} + \sum_{b=1}^{p+1}(-1)^b g_{a,b} + k(A^{(a)})\right) =$$

$$= a^1(A_{(0,1)})a^1(A_{(1,2)})g_{0,0} + a^1(A_{(0,1)})\sum_{b=1}^{p+1}(-1)^b g_{0,b} + a^1(A_{(0,1)})k(A^{(0)}) -$$

$$- a^1(A_{(0,2)})g_{1,0} + a^1(A_{(0,1)})\sum_{a=2}^{p+2}(-1)^a g_{a,0} + \sum_{a=1}^{p+2}(-1)^a k(A^{(a)}) +$$

$$+ \sum_{a=1}^{p+2}\sum_{b=1}^{p+1}(-1)^{a+b}g_{a,b} = \nabla_{a^1}k(A) + \sum_{a=1}^{p+2}\sum_{b=1}^{p+1}(-1)^{a+b}g_{a,b} =$$

$$= \sum_{a=1}^{p+1}\sum_{b=a}^{p+1}(-1)^{a+b}g_{a,b} + \sum_{a=2}^{p+2}\sum_{b=1}^{a-1}(-1)^{a+b}g_{a,b} =$$

$$= \sum_{a=1}^{p+1}\sum_{b=a}^{p+1}(-1)^{a+b}g_{a,b} + \sum_{b=1}^{p+1}\sum_{a=b+1}^{p+2}(-1)^{a+b}g_{a,b} =$$

$$= \sum_{a=1}^{p+1}\sum_{b=a}^{p+1}(-1)^{a+b}g_{a,b} + \sum_{b=1}^{p+1}\sum_{a=b+1}^{p+2}(-1)^{a+b}g_{b,a-1} = 0.$$

Таким образом, условие ОСН 6 для функции k также выполнено.

Мы доказали, следовательно, что функции d и k образуют в комплексе K' p-мерное оснащение в группе G относительно коцикла a^1. Назовем это оснащение *естественным оснащением* p-расширения K'.

Комплекс K' мы стандартизуем в размерности p, приняв симплексы комплекса K за стандартные. Соответствующую этой стандартизации различающую коцепь d^p назовем *естественной различающей коцепью* комплекса K'. Для любого p-мерного симплекса (A, g) комплекса K'

$$d^p(A, g) = g.$$

Пусть $\mathfrak{S} = \{G^p, k_p\}$ — произвольная система и $K(\mathfrak{S})$ — ее комплекс. Так как согласно [22.3] для любого $p > 1$ комплекс $K_{p-1}(\mathfrak{S})$ правилен и асферичен в размерностях p и $p+1$ и его p-расширением с фактором k_{p-1} является $K_p(\mathfrak{S})$, то изложенная конструкция определяет в комплексе $K_p(\mathfrak{S})$ его естественное p-мерное оснащение (d, k) в группе G^p относительно коцикла $1^1_{\mathfrak{S}}$. Так как

$$K_p^p(\mathfrak{S}) = K^p(\mathfrak{S})$$

и

$$K_p^{p+1}(\mathfrak{S}) \subset K^{p+1}(\mathfrak{S}),$$

причем любой $(p+1)$-мерный симплекс из $K^{p+1}(\mathfrak{G})$ сравним с симплексом из $K_p(\mathfrak{G})$, то функции d и k образуют оснащение и в комплексе $K(\mathfrak{G})$. Таким образом:

[23.4] *Для любого $p>1$ комплекс $K(\mathfrak{G})$ естественным образом оснащен в размерности p в группе G^p относительно коцикла $1^1_{\mathfrak{G}}$.*

Кроме того, естественные стандартизации в размерности p комплексов $K_p(\mathfrak{G})$ порождают стандартизацию комплекса $K(\mathfrak{G})$. Таким образом, комплекс $K(\mathfrak{G})$ естественным образом стандартизован во всех размерностях, бóльших единицы.

Равным образом естественные различающие цепи d^p комплексов $K_p(\mathfrak{G})$ можно считать цепями комплекса $K(\mathfrak{G})$.

24. Специальные отображения и оснащающие коциклы

Симплициальное отображение σ полусимплициального комплекса N в полусимплициальный комплекс K называется *p-специальным*, если:

СП$_p$ 1 сравнимые между собой симплексы комплекса N размерности, не меньшей p, отображаются в один и тот же симплекс комплекса K;

СП$_p$ 2 любой p-мерный симплекс комплекса K является образом хотя бы одного p-мерного симплекса комплекса N;

СП$_p$ 3 $(p-1)$-мерный остов комплекса N изоморфно отображается на $(p-1)$-мерный остов комплекса K.

Из последнего условия следует, что на $(p-1)$-мерном остове комплекса K отображение σ имеет единственное обратное отображение σ^{-1}. Кроме того, если комплекс N стандартизован в размерности p, то для любого p-мерного симплекса A комплекса K в комплексе N существует единственный стандартный симплекс $\sigma^{-1}A$, образом которого является A. Таким образом, для любого не более чем p-мерного симплекса A комплекса K определены симплекс $\sigma^{-1}A$ комплекса N, причем

$$\sigma\sigma^{-1}A = A. \tag{24.1}$$

Кроме того, для любого не более чем p-мерного симплекса A комплекса N

$$\sigma^{-1}\sigma A = \begin{cases} A, & \text{если размерность симплекса } A \text{ меньше } p; \\ \overline{A}, & \text{если размерность симплекса } A \text{ равна } p. \end{cases} \tag{24.2}$$

Следовательно, σ^{-1} является p-отображением комплекса K в комплекс N, обратным к p-отображению σ / N^p. Поэтому оба отображения являются p-изоморфизмами. Таким образом:

[24.1] *Для того чтобы существовало p-специальное отображение комплекса N в комплекс K, необходимо, чтобы комплексы N и K были p-изоморфны.*

Рассмотрим частный случай, когда K есть комплекс $K(\mathrm{A})$ некоторой мультипликативной группы A, а $p=2$. Для того чтобы существовало 2-специальное отображение некоторого комплекса N в комплекс $K(\text{А})$, согласно вышесказанному необходимо, чтобы одномерный остов комплекса N был изоморфен одномерному остову комплекса $K(\text{А})$, т. е. чтобы комплекс N имел лишь одну вершину и чтобы мощность множества его одномерных граней была равна мощности группы А.

Мы знаем (см. п. 15), что симплициальные отображения комплекса N в комплекс $K(\text{А})$ и его коциклы над группой А находятся во взаимно однозначном соответствии. Очевидно, что симплициальное отображение одновершинного комплекса N в комплекс $K(\text{А})$ тогда и только тогда удовлетворяет условию СП$_2$3, когда соответствующий ему коцикл a^1 таков, что соответствие

$$A \to a^1(A)$$

является взаимно однозначным отображением множества одномерных симплексов комплекса N на группу А. Далее оно удовлетворяет условию СП$_2$2 тогда и только тогда, когда для любой одномерной сферы S комплекса N из того, что

$$a^1(S^{(2)})\,a^1(S^{(0)}) = a^1(S^1), \tag{24.3}$$

следует, что сфера S ограничивает. Придадим этому условию более удобный вид. С этой целью отнесем любой одномерной сфере S комплекса N элемент $a^1(S)$ группы А, положив

$$a^1(S) = a^1(S^{(2)})\,a^1(S^{(0)})\,[a^1(S^{(1)})]^{-1}.$$

Тогда условие (24.3) примет вид:

$$a^1(S) = 1.$$

Заметим, что для любого двухмерного симплекса A комплекса N

$$a^1(\Delta A) = 1,$$

что является просто иной записью определения коцикла.

Наконец, любое симплициальное отображение комплекса N в комплекс $K(\text{А})$ удовлетворяет условию СП$_2$1, потому что комплекс $K(\text{А})$ правилен во всех размерностях, больших единицы.

Назовем коцикл комплекса N над группой А *оснащающим*, если соответствующее ему симплициальное отображение комплекса N в комплекс $K(\text{А})$ 2-специально. Тогда результаты произведенного исследования можно резюмировать в виде следующего предложения:

[24.2] *Для того чтобы в комплексе N существовал оснащающий коцикл над группой А, необходимо, чтобы комплекс N был одновершинен и чтобы мощность множества его одномерных симплексов была равна мощности группы А. Коцикл a^1 тогда и только тогда оснащающ, когда соответствие*

$$A \to a^1(A)$$

есть взаимно однозначное отображение множества одномерных симплексов комплекса N на группу A и когда необходимым и достаточным условием того, что одномерная сфера S комплекса N ограничивает, является равенство

$$a^1(S) = 1.$$

Свойства оснащающего коцикла a^1, указанные в этом предложении, напоминают свойства различающей коцепи d^p и оснащающей функции k. Это не случайно. Можно довольно далеко провести аналогию между оснащающими коциклами и оснащениями, но мы этого делать не будем.

Ясно, что коцикл 1^1_{A} комплекса $K(\mathrm{A})$ оснащающ. Следовательно:

[24.3] *Для любой системы $\mathfrak{G}$ коцикл $1^1_{\mathfrak{G}}$ является оснащающим коциклом комплекса $K(\mathfrak{G})$.*

25. Специальные отображения комплексов с оснащением

Пусть $p>1$ и пусть σ есть p-специальное отображение полусимплициального комплекса N в полусимплициальный комплекс K. Предполагая комплекс N стандартизованным в размерности p, построим p-отображение σ^{-1} комплекса K в комплекс N, обратное отображению σ (см. п. 24).

Любому коциклу a^1 комплекса N над некоторой мультипликативной группой A в комплексе K соответствует коцепь $(\sigma^{-1})^* a^1$. Так как $p>1$, то эта коцепь является коциклом и не зависит от стандартизации комплекса N. Обозначим ее через a^1_σ. Согласно (24.2)

$$a^1 = \sigma^* a^1_\sigma.$$

Пусть группа A представлена в аддитивной группе G и пусть (d, k) — некоторое p-мерное оснащение комплекса N в группе G относительно коцикла a^1. Для любого $(p+1)$-мерного симплекса A комплекса K в комплексе N определена p-мерная сфера $\sigma^{-1}\Delta A$ — образ границы ΔA симплекса A при отображении σ^{-1}. Определим в комплексе K $(p+1)$-мерную коцепь k_σ над группой G, положив

$$k_\sigma(A) = k(\sigma^{-1}\Delta A).$$

Вообще говоря, сфера $\sigma^{-1}\Delta A$ в комплексе N не ограничивает, так что коцепь k_σ, как правило, отлична от нуля. По построению она зависит от стандартизации комплекса N.

Для любого $(p+2)$-мерного симплекса A комплекса N в комплексе N определена сеть $\sigma^{-1}\Delta\Delta A$ p-мерных сфер — образ граничной сети $\Delta\Delta A$ симплекса A при отображении σ^{-1}. Напишем для этой сети формулу ОСН 6, упростив первый член с помощью (23.3):

$$a^1(\sigma^{-1}A_{(0,1)})\,k(\sigma^{-1}\Delta A^{(0)})+\sum_{a=1}^{p+2}(-1)^a k(\sigma^{-1}\Delta A^{(a)})=0.$$

Другими словами,

$$a^1_\sigma(A_{(0,1)})\,k_\sigma(A^{(0)})+\sum_{a=1}^{p+2}(-1)^a k_\sigma(A^{(a)})=0,$$

т. е.

$$\nabla_{a^1_\sigma}k_\sigma(A)=0.$$

Таким образом:

[25.1] *Коцепь k_σ является коциклом относительно a^1_σ.*

В стандартизованном и оснащенном в размерности p комплексе N определена p-мерная различающая коцепь d^p. Найдем $\nabla_{a^1}d^p$. Согласно (23.6) и (23.7) для любого $(p+1)$-мерного симплекса A комплекса N

$$\nabla_{a^1}d^p(A)=a^1(A_{(0,1)})d^p(A^{(0)})+\sum_{a=1}^{p+1}(-1)^a d^p(A^{(a)})=$$

$$=a^1(A_{(0,1)})\,d(\overline{|A^{(0)}|},A^{(0)})+\sum_{a=1}^{p+1}(-1)^a d(\overline{|A^{(a)}|},A^{(a)})=$$

$$=-a^1(A_{(0,1)})\,d(A^{(0)},\overline{|A^{(0)}|})-\sum_{a=1}^{p+1}(-1)^a d(A^{(a)},\overline{|A^{(a)}|})=$$

$$=-a^1(A_{(0,1)})\,d(A^{(0)},\sigma^{-1}\sigma A^{(0)})-\sum_{a=1}^{p+1}(-1)^a d(A^{(a)},\sigma^{-1}\sigma A^{(a)})=$$

$$=-k(\sigma^{-1}\Delta\sigma A)=-k_\sigma(\sigma A)=-\sigma^*k_\sigma(A).$$

Таким образом,

$$\sigma^*k_\sigma-\nabla_{a^1}d^p=0.$$

Это — условие (20.5) расширяемости отображения σ. Следовательно, определено расширение σ' отображения σ с помощью коцепи d^p. Назовем отображение σ' *специальным расширением* p-специального отображения σ. Это есть симплициальное отображение комплекса N в p-расширение K_σ комплекса K над группой G с фактором k_σ.

[25.2] *Специальное расширение σ' p-специального отображения σ $(p+1)$-специально.*

Действительно, отображение σ' определяется формулой

$$\sigma'A=(\sigma A,\varphi),$$

где A — произвольный симплекс комплекса N некоторой размерности r, а φ — такая кортежфункция типа (r,p) над группой G, что для любого кортежа $\mathfrak{a}$ типа (r,p)

$$\varphi(\mathfrak{a})=d^p(A_{(\mathfrak{a})}).$$

Отсюда, во-первых, следует, что если симплексы комплекса N размерности большей, чем p, сравнимы между собой, то их образы при отображении σ' совпадают. Другими словами, для отображения σ' выполнено условие $СП_{p+1}1$. Во-вторых, на $(p-1)$-мерном остове комплекса N отображение σ' совпадает с σ и, следовательно, изоморфно. В-третьих, если p-мерные симплексы комплекса N таковы, что их образы при отображении σ' совпадают, то и сами симплексы совпадают. Таким образом, для того чтобы доказать выполненность для отображения σ' условия $СП_{p+1}3$, достаточно показать, что любой p-мерный симплекс (A, g) комплекса K_σ является образом некоторого p-мерного симплекса комплекса N. Но согласно ОСН 3 в комплексе N существует такой сравнимый с симплексом $\sigma^{-1}A$ p-мерный симплекс B, что

$$d(\sigma^{-1}A, B) = g.$$

Очевидно, что

$$\sigma' B = (A, g),$$

что доказывает условие $СП_{p+1}3$.

Осталось проверить условие $СП_{p+1}2$. Пусть $(A, g_0, \ldots, g_{p+1})$ — произвольный $(p+1)$-мерный симплекс комплекса K_σ. Согласно [23.3] в комплексе N существует такая p-мерная сфера T, сравнимая со сферой $\sigma^{-1}\Delta A$, что

$$d(\sigma^{-1}A^{(a)},\ T^{(a)}) = g_a \qquad (a = 0, \ldots, p+1). \tag{25.1}$$

Найдем $k(T)$. Согласно ОСН 5:

$$k(T) = k(\sigma^{-1}\Delta A) + a^1((\sigma^{-1}\Delta A)_{(0,1)})\, d(\sigma^{-1}A^{(0)}, T^{(0)}) + \\ + \sum_{a=1}^{p+1} (-1)^a d(\sigma^{-1}A^{(a)}, T^{(a)}),$$

т. е.

$$k(T) = k_\sigma(A) + a_\sigma^1(A_{(0,1)})\, g_0 + \sum_{a=1}^{p+1} (-1)^a g_a,$$

что равно нулю согласно (19.4). Таким образом,

$$k(T) = 0.$$

Следовательно, согласно ОСН 4 в комплексе N существует такой $(p+1)$-мерный симплекс B, что

$$T = \Delta B,$$

т. е. для любого $a = 0, \ldots, p+1$

$$T^{(a)} = B^{(a)}.$$

А так как симплекс $\sigma^{-1}A^{(a)}$ по построению стандартен, то

$$\sigma^{-1}A^{(a)} = \overline{|B^{(a)}|},$$

так что можно формулу (24.1) переписать в следующем виде:

$$d\,(\overline{|B^{(a)}|}, B^{(a)}) = g_a,$$

т. е.

$$d^p\,(B^{(a)}) = g_a,$$

что в соединении с равенством

$$\sigma B = A$$

дает

$$\sigma' B = (A, g_0, \ldots, g_{p+1}).$$

Таким образом, для отображения σ' выполнено и условие $\text{СП}_{p+1}2$. Предложение [25.2] доказано.

26. Правильные расширения

Пусть N, M, K, L — полусимплициальные комплексы, σ — p-специальное отображение комплекса N в комплекс K и τ — p-специальное отображение комплекса M в комплекс L. Предполагая комплексы N и M стандартизованными в размерности p, построим p-отображения σ^{-1} и τ^{-1}, обратные отображениям σ и τ соответственно.

Пусть A и B — мультипликативные группы, представленные в аддитивных группах G и H соответственно, (d, k) — p-мерное оснащение комплекса N в группе G относительно некоторого коцикла a^1 над группой A и (e, l) — p-мерное оснащение комплекса M в группе H относительно некоторого коцикла b^1 над группой B. Отображение σ и оснащение (d, k) определяют согласно сказанному в п. 25 $(p+1)$-мерный коцикл k_σ комплекса K над группой G относительно цикла $a^1_\sigma = (\sigma^{-1})^* a^1$. p-расширение комплекса K с фактором k_σ обозначим, как и выше, через K_σ. Аналогично отображение τ и оснащение (e, l) определяют $(p+1)$-мерный коцикл l_τ комплекса L над группой H относительно коцикла $b^1_\tau = (\tau^{-1})^* b^1$ и, следовательно, p-расширение L_τ комплекса L с фактором l_τ. Отображение σ обладает специальным расширением σ', являющимся согласно [25.2] $(p+1)$-специальным отображением комплекса N в комплекс K_σ. Это — расширение отображения σ с помощью различающей коцепи d^p комплекса N. Аналогично отображение τ обладает специальным расширением τ', являющимся $(p+1)$-специальным отображением комплекса M в комплекс L_τ. Оно является расширением отображения τ с помощью различающей коцепи e^p комплекса M.

Пусть θ — гомоморфное отображение группы A в группу B, ϑ — θ-гомоморфное отображение группы G в группу H и ω — такое симплициальное отображение комплекса N в комплекс M, что

$$\hat{\theta} a^1 = \omega^* b^1; \tag{26.1}$$

$$\vartheta d(A, B) = e(\omega A, \omega B) \tag{26.2}$$

для любых сравнимых между собой p-мерных симплексов A и B комплекса N и

$$\vartheta k(S) = l(\omega S) \tag{26.3}$$

для любой p-мерной сферы S комплекса N. Симплициальное отображение ω, обладающее этими тремя свойствами, называется *согласованным с оснащениями* (d, k) *и* (e, l) *посредством гомоморфизмов* θ *и* ϑ.

Наконец, пусть μ — такое симплициальное отображение комплекса K в комплекс L, что

$$\mu\sigma A = \tau\omega A \tag{26.4}$$

для любого симплекса A комплекса N. О симплициальном отображении, обладающем этим свойством, говорят, что оно *переводит с помощью отображения* ω *р-специальное отображение* σ *в р-специальное отображение* τ.

Легко видеть, что для любого не более чем p-мерного симплекса A комплекса K

$$\tau^{-1}\mu A = \begin{cases} \omega\sigma^{-1}A, & \text{если размерность симплекса } A \text{ меньше } p; \\ \overline{\omega\sigma^1 A}, & \text{если размерность симплекса } A \text{ равна } p. \end{cases} \tag{26.5}$$

[26.1] *Отображение* μ ϑ-*расширяемо*.

Действительно, условие (20.1), необходимое для ϑ-расширяемости отображения μ, здесь имеет вид:

$$\hat{\theta} a^1_\sigma = \mu^* b^1_\tau. \tag{26.6}$$

Но, используя (26.1) и (26.5), имеем для любого одномерного симплекса A комплекса K

$$\hat{\theta} a^1_\sigma(A) = \hat{\theta} a^1(\sigma^{-1}A) = \omega^* b^1(\sigma^{-1}A) = b^1(\omega\sigma^{-1}A) = b^1(\tau^{-1}\mu A) =$$
$$= b^1_\tau(\mu A) = \mu^* b^1_\tau(A),$$

что доказывает формулу (26.6). Далее условие (20.2) ϑ-расширяемости отображения μ имеет здесь следующий вид:

$$\boldsymbol{\mu}^* \mathbf{l}_\tau = \boldsymbol{\vartheta} \mathbf{k}_\sigma. \tag{26.7}$$

Но, вспоминая определения коциклов l_τ и k_σ, формулы (26.3) и (23.4), учитывая, что в силу (26.5) для любого $(p+1)$-мерного симплекса A комплекса K p-мерные сферы $\tau^{-1}\mu\Delta A$ и $\omega\sigma^{-1}\Delta A$ комплекса M сравнимы между собой, применяя условие ОСН 5, формулы (26.5), (23.6), (23.1) и, наконец, вспоминая определения коцикла b^1_τ и различающей коцепи e^p, мы получаем

$$(\mu^* l_\tau - \vartheta k_\sigma)(\hat{A}) = l_\tau(\mu A) - \vartheta k_\sigma(A) = l(\tau^{-1}\Delta\mu A) - \vartheta k(\sigma^{-1}\Delta A) =$$

$$= l(\tau^{-1}\mu\Delta A) - l(\omega\sigma^{-1}\Delta A) = b^1((\omega\sigma^{-1}\Delta A)_{(0,1)})\, e(\omega\sigma^{-1} A^{(0)}, \tau^{-1}\mu A^{(0)}) +$$

$$+ \sum_{a=1}^{p+1} (-1)^a e(\omega\sigma^{-1}A^{(a)}, \tau^{-1}\mu A^{(a)}) =$$

$$= b^1((\tau^{-1}\mu\Delta A)_{(0,1)})\, e(\omega\sigma^{-1}A^{(0)}, \overline{\omega\sigma^{-1}A^{(0)}}) + \sum_{a=1}^{p+1} (-1)^a e(\omega\sigma^{-1}A^{(a)}, \overline{\omega\sigma^{-1}A^{(a)}}) =$$

$$= - b^1_\tau(\mu A_{(0,1)})\, e^p(\omega\sigma^{-1} A^{(0)}) - \sum_{a=1}^{p+1} (-1)^a e^p(\omega\sigma^{-1}A^{(a)}) =$$

$$= - \mu^* b^1_\tau(A_{(0,1)})\, \sigma^{-1*}\omega^* e^p(A^{(0)}) - \sum_{a=1}^{p+1} (-1)^a \sigma^{-1*}\omega^* e^p(A^{(a)}) =$$

$$= - \nabla_{\mu^* b^1_\tau} \sigma^{-1*}\omega^* e^p,$$

т. е. полагая

$$e^p_\omega = \sigma^{-1*}\omega^* e^p,$$

имеем

$$\mu^* l_\tau - \hat{\vartheta} k_\sigma + \nabla_{\mu^* b^1_\tau} e^p_\omega = 0, \tag{26.8}$$

что доказывает формулу (26.7) и вместе с ней предложение [26.1].

Из (26.8) следует, что ϑ-расширение отображения μ можно осуществить с помощью коцепи e^p_ω. ϑ-расширение отображения μ с помощью цепи e^p_ω назовем *правильным*. Обозначим его буквой ν. Это — симплициальное отображение комплекса K_σ в комплекс L_τ.

[26.2]. *Правильное ϑ-расширение ν отображения μ переводит с помощью отображения ω $(p+1)$-специальное отображение σ' в $(p+1)$-специальное отображение τ'.*

Действительно, для любого r-мерного (r произвольно) симплекса A комплекса N

$$\tau'\omega A = (\tau\omega A, \varphi),$$

где φ — такая кортежфункция типа (r, p) над группой H, что для любого кортежа $\mathfrak{a}$ типа (r, p)

$$\varphi(\mathfrak{a}) = e^p(\omega A_{(\mathfrak{a})}).$$

В то же время

$$\sigma' A = (\sigma A, \psi),$$

где ψ — такая кортежфункция типа (r, p) над группой G, что для любого кортежа $\mathfrak{a}$ типа (r, p)

$$\psi(\mathfrak{a}) = d^p(A_{(\mathfrak{a})}).$$

Следовательно

$$\nu\sigma'(A) = (\mu\sigma A, \chi) = (\tau\omega A, \chi),$$

где χ — такая кортежфункция типа (r, p) над группой H, что для любого кортежа $\mathfrak{a}$ типа (r, p):

$$\chi(\mathfrak{a}) = \vartheta\psi(\mathfrak{a}) + e^p_\omega(\sigma A_{(\mathfrak{a})}).$$

Но согласно формулам (24.2), (26.2) и ОСН 2

$$\vartheta\psi(\mathfrak{a}) + e^p_\omega(\sigma A_{(\mathfrak{a})}) = \vartheta d^p(A_{(\mathfrak{a})}) + e^p(\omega\sigma^{-1}\sigma A_{(\mathfrak{a})}) =$$

$$= \vartheta d(\overline{A_{(\mathfrak{a})}}, A_{(\mathfrak{a})}) + e(\overline{\omega\overline{A_{(\mathfrak{a})}}}, \omega\overline{A_{(\mathfrak{a})}}) =$$

$$= e(\omega\overline{A_{(\mathfrak{a})}}, \omega A_{(\mathfrak{a})}) + e(\overline{\omega\overline{A_{(\mathfrak{a})}}}, \omega\overline{A_{(\mathfrak{a})}}) =$$

$$= e(\overline{\omega\overline{A_{(\mathfrak{a})}}}, \omega A_{(\mathfrak{a})}) = e(\overline{\omega A_{(\mathfrak{a})}}, \omega A_{(\mathfrak{a})}) = e^p(\omega A_{(\mathfrak{a})}) = \varphi(\mathfrak{a})$$

Таким образом, $\chi = \varphi$, что доказывает предложение [26.2].

27. Системы, присоединенные к оснащенным комплексам

Пусть $\{G^p\}$ — некоторая серия и N — полусимплициальный комплекс. Комплекс N называется *оснащенным в серии* $\{G^p\}$, если в нем задан оснащающий коцикл a^1 над группой G^1 и для любого $p > 1$ p-мерное оснащение (d, k) над группой G^p относительно коцикла a^1. Например, согласно [24.3] и [23.4] комплекс $K(\mathfrak{G})$ любой системы $\mathfrak{G} = \{G^p, k_p\}$ оснащен в серии $\{G^p\}$.

Пусть комплекс N оснащен в серии $\{G^p\}$ и стандартизован во всех размерностях. Его симплициальное отображение σ_1 в комплекс $K(G^1)$ группы G^1, соответствующее коциклу a^1, по условию 2-специально. Очевидно, что

$$a^1_{\sigma_1} = 1^1_{G^1}$$

Комплекс $K(G^1)$ мы обозначим через K_1.

Пусть для некоторого $r \geqslant 1$ уже построен содержащий коцикл $1^1_{G^1}$ комплекс K_r и $(r+1)$-специальное отображение σ_r комплекса N в комплекс K_r, для которого

$$a^1_{\sigma_r} = 1^1_{G_1}.$$

Так как комплекс N стандартизован в размерности $r+1$ и в нем задано $(r+1)$-мерное оснащение над группой G^{r+1} относительно коцикла a^1, то $(r+1)$-специальное отображение σ_r определяет $(r+2)$-мерный коцикл k_{σ_r} комплекса K_r над группой G^{r+1} относительно $a^1_{\sigma^r} = 1^1_{G_1}$. Обозначим этот коцикл через k_r. $(r+1)$-расширение комплекса K_r с фактором k_r обозначим через K_{r+1}. В обозначениях п. 25

$$K_{r+1} = (K_r)_{\sigma_r}.$$

Специальное расширение σ'_r отображения σ_r обозначим через σ_{r+1}. Согласно [25.2] σ_{r+1} есть $(r+2)$-специальное отображение комплекса N в комплекс K_{r+2}. Очевидно, что

$$a^1_{\sigma_{r+1}} = 1^1_{G^1}.$$

К комплексу K_{r+1} мы можем применить то же построение. Продолжая процесс, мы получим бесконечную последовательность комплексов

$$K_1,\ K_2, \ldots,$$

в каждом из которых задан коцикл (в K_p коцикл k_p), являющийся фактором расширения этого комплекса. Очевидно, что серия $\{G^p\}$ и построенная последовательность факторов k_p вместе образуют некоторую систему $\mathfrak{G} = \{G^p,\ k_p\}$. Она называется *системой, присоединенной к стандартизованному и оснащенному комплексу* N. По построению

$$K_r = K_r(\mathfrak{G}).$$

Но согласно [21.1] комплексы K_r и N $(r+1)$-изоморфны. Следовательно, согласно [22.1] комплексы N и $K(\mathfrak{G})$ $(r+1)$-изоморфны для любого $r \geqslant 1$. Более того, имеет место и более сильное утверждение. Именно, легко видеть, что отображение σ комплекса N в комплекс $K(\mathfrak{G})$, удовлетворяющее условиям

$$\sigma / N^r = \sigma_r / N^r, \tag{27.1}$$

симплициально и изоморфно. Таким образом:

[27.1] *Комплексы N и $K(\mathfrak{G})$ изоморфны.*

Заметим, что для изоморфного отображения σ комплекса N на комплекс $K(\mathfrak{G})$ имеет место равенство

$$a^1 = \sigma^* 1^1_{\mathfrak{G}}, \tag{27.2}$$

потому что на одномерном остове комплекса N отображение σ совпадает с отображением σ_1.

Если комплекс N есть комплекс $K(\mathfrak{G})$ некоторой системы, естественным образом стандартизованный и оснащенный, то изложенная конструкция приводит обратно к системе $\mathfrak{G}$, а изоморфное отображение σ сводится к тождественному. Таким образом:

[27.2] *Любая система присоединена к некоторому комплексу.*

Кроме того, если комплекс N двумя разными способами оснащен (может быть, даже в различных сериях) и стандартизован, то присоединенные системы будут иметь изоморфные комплексы и, следовательно, сами будут изоморфны. Таким образом:

[27.3] *Система, присоединенная к комплексу с точностью до изоморфизма, не зависит от стандартизации и оснащения комплекса.*

Другими словами, если комплекс можно оснастить в некоторой серии, то только в одной, и оснащение возможно в существенном единственное.

Пусть $\mathfrak{G} = \{G^p, k_p\}$ и $\mathfrak{H} = \{H^p, l_p\}$ — две системы и $\theta = \{\theta^p\}$ — гомоморфное отображение серии $\{G^p\}$ в серию $\{H^p\}$. Рассматривая системы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ как присоединенные к некоторым комплексам, легко получить удобные критерии того, что θ есть гомоморфное отображение системы $\mathfrak{G}$ в систему $\mathfrak{H}$. Мы произведем соответствующее исследование независимо от сложной теоремы [27.3], так как получающийся результат значительно элементарнее этой теоремы.

Пусть $\{G^p\}$ и $\{H^p\}$ — две серии, $\theta = \{\theta^p\}$ — гомоморфное отображение серии $\{G^p\}$ в серию $\{H^p\}$, N и M — стандартизованные комплексы, оснащенные соответственно в сериях $\{G^p\}$ и $\{H^p\}$, а $\mathfrak{G} = \{G^p, k_p\}$ и $\mathfrak{H} = \{H^p, l_p\}$ — системы, присоединенные соответственно к комплексам N и M. Симплициальное отображение ω комплекса N в комплекс M называется *согласованным с данными оснащениями посредством гомоморфизма* θ, если для любого $p > 1$ оно согласовано с данными p-мерными оснащениями посредством гомоморфизмов θ^1 и θ^p.

[27.4] *Если существует симплициальное отображение ω комплекса N в комплекс M, согласованное с данными оснащениями посредством гомоморфизма θ, то θ является гомоморфным отображением системы $\mathfrak{G}$ в систему $\mathfrak{H}$.*

Действительно, пусть σ_1 есть 2-специальное отображение комплекса N в комплекс $K(G^1)$, соответствующее оснащающему коциклу a^1 комплекса N, τ_1 есть 2-специальное отображение комплекса M в комплекс $K(H^1)$, соответствующее оснащающему коциклу b^1 комплекса M, и ω_1 — симплициальное отображение комплекса $K(G^1)$ в комплекс $K(H^1)$, соответствующее гомоморфизму θ^1. Так как по условию имеет место формула (26.1), то для отображения ω_1 согласно (15.4)

$$\tau_1\omega = \omega_1\sigma_1.$$

Таким образом, отображение ω_1 переводит с помощью отображения ω 2-специальное отображение σ_1 в 2-специальное отображение τ_1. Следовательно, согласно [26.1] отображение ω_1 θ^2-расширяемо. Его правильное расширение мы обозначим через ω_2. Согласно [26.2] отображение

ω_2 переводит с помощью отображения ω 3-специальное отображение $\sigma_2 = \sigma_1'$ в 3-специальное отображение $\tau_2 = \tau_2'$. Поэтому к нему применимо предложение [26.1]. Продолжая процесс, мы для любого $p \geqslant 1$ определим отображения ω_p, удовлетворяющие условиям определения гомоморфизма систем. Тем самым предложение [27.4] доказано.

Из этого предложения легко вывести, что присоединенная система с точностью до изоморфизма не зависит от стандартизации комплекса. Однако независимость присоединенной системы от оснащения комплекса не может быть из нее выведена и требует существенного использования предложения [22.6].

II. НАТУРАЛЬНАЯ СИСТЕМА И ГОМОТОПИЧЕСКИЙ ТИП

§ 1. Сингулярные когомологии

28. Сингулярный комплекс топологического пространства

Согласно (6.6) и (6.7) совокупность $S(X)$ всех сингулярных симплексов топологического пространства X является полусимплициальным комплексом. Он называется *сингулярным комплексом пространства* X.

В п. 6 мы условились трактовать нульмерные сингулярные комплексы как точки пространства X, а одномерные сингулярные симплексы как его пути. При этом одномерный сингулярный симплекс A, рассматриваемый как путь, соединяет свою нулевую вершину $A_{(0)}$ с первой $A_{(1)}$. Отсюда следует, что комплекс $S(X)$ тогда и только тогда связен, когда пространство X линейно связно. Следовательно, любая компонента комплекса $S(X)$ является сингулярным комплексом некоторой линейной компоненты пространства X. Мы еще раз убеждаемся в том, что изучение любых пространств сводится к изучению линейно связных. Оказывается, что сингулярный комплекс линейно связного пространства не только связен, но даже и сильно связен. Так как этот факт нам в дальнейшем не понадобится, мы его доказательство опустим.

Сравнимость сингулярных симплексов означает, что как отображения в пространство X симплекса s_0^r они совпадают на его границе Δs_0^r.

Поэтому, если пространство X содержит более одной точки, комплекс $S(X)$ неправилен во всех размерностях, больших нуля. Одномерные сингулярные симплексы сравнимы между собой тогда и только тогда, когда они сравнимы как пути.

Сферы комплекса $S(X)$ мы будем трактовать как непрерывные отображения в пространство X границы Δs_0^r симплекса s_0^r и соответственно этому называть их *сингулярными сферами пространства* X. В этом пункте теория сингулярного комплекса соприкасается с теорией гомотопических групп. Подробное выяснение имеющихся здесь взаимоотношений мы отложим до п. 32.

Пусть $a=0, \ldots, r$. Очевидно, что существует и притом только одно линейное отображение η_a симплекса s_0^{r+1} на симплекс s_0^r, переводящее b-тую вершину ($b=0, \ldots, r+1$) симплекса s_0^{r+1} в b-тую вершину симплекса s_0^r, если $b \leqslant a$, и в $(b-1)$-тую, если $b>a$. С помощью этого отображения определим a-тую надстройку $A(a)$ r-мерного сингулярного симплекса A как $(r+1)$-мерный сингулярный симплекс $A\eta_a$:

$$A(a)=A\eta_a.$$

Легко видеть, что при таком определении надстройки условия П 1 и П 2 действительно имеют место. Таким образом, комплекс $S(X)$ является полным полусимплициальным комплексом. Его стянутые симплексы суть симплексы, отображающие s_0^r в точку пространства X. Эта точка, трактуемая как нульмерный сингулярный симплекс, является ядром стянутого симплекса в смысле п. 8. О стянутом симплексе с ядром x мы будем говорить, что он *стянут в точку* x.

Очевидно, что сингулярные цепи пространства X над некоторой группой G являются с точки зрения общей теории полусимплициальных комплексов коцепями комплекса $S(X)$. Поэтому символы $C^r(X, G)$ и $C^r(S(X), G)$ обозначают одну и ту же группу. Так же очевидно, что операция ∇, определенная в группе $C^r(X, G)$ (см. п. 6), совпадает с операцией ∇, определенной в группе $C^r(S(X), G)$ согласно общей теории п. 14. Поэтому группы $H^r(X, G)$ и $H^r(S(X), G)$ совпадают.

Сложнее дело обстоит с группами сингулярных когомологий над локальными семействами аддитивных групп. Рассмотрим сначала случай, когда данное локальное семейство Γ приведенное:

$$\Gamma=\{G, \alpha_u\}.$$

Тогда группа $C^r(X, \Gamma)$ совпадает с группой $C^r(S(X), G)$. Формула

$$a^1(A)=\alpha_A$$

определяет в комплексе $S(X)$ коцикл a^1 над группой автоморфизмов группы G, соответствующая которому операция ∇_{a^1}, очевидно, совпадает с операцией ∇, как она была в п. 6 определена для группы $C^r(X, \Gamma)$. Поэтому группа $H^r(X, \Gamma)$ совпадает с группой $H^r_{a^1}(S(X), G)$.

Обратно, пусть некоторая мультипликативная группа А представлена в группе G и a^1 — произвольный коцикл комплекса $S(X)$ над группой А. Построим в пространстве X приведенное локальное семейство $\Gamma=\{G, \alpha_u\}$, отнеся любому пути u автоморфизм группы G, который соответствует элементу $a^1(u)$ группы А. Так же как и выше, находим, что группы $H^r_{a^1}(S(X), G)$ и $H^r(X, \Gamma)$ совпадают.

Наконец, случай произвольного локального семейства приводится к уже рассмотренному в силу предложений [4.1] и [6.2].

Резюмируя, можно сказать, что теория групп сингулярных когомологий пространства X над локальными семействами аддитивных групп является просто иной формой теории групп когомологий его сингулярного комплекса $S(X)$ относительно коциклов. Отсюда, в частности, следует:

[28.1] *Пространства тогда и только тогда имеют один когомологический тип, когда один когомологический тип имеют их сингулярные комплексы.*

Заметим, что когомологичные между собой циклы порождают изоморфные локальные семейства. Это замечание устанавливает тесную связь предложений [6.2] и [16.1].

Пусть f — непрерывное отображение пространства X в пространство Y. Согласно (6.11) определяемое этим отображением соответствие

$$A \to fA$$

является симплициальным отображением комплекса $S(X)$ в комплекс $S(Y)$.

Пусть A — мультипликативная группа, представленная в аддитивной группе G, a_1 — коцикл комплекса $S(Y)$ над группой A и $\Gamma = \{G, \alpha_u\}$ — соответствующее приведенное локальное семейство в пространстве Y. Симплициальное отображение f переводит коцикл a^1 в некоторый коцикл f^*a^1 комплекса $S(X)$. Легко видеть, что приведенное локальное семейство пространства X, соответствующее коциклу f^*a^1, совпадает с семейством $f^*\Gamma$. Следовательно, гомоморфизм $\mathbf{f}^*$, определенный в п. 6, совпадает с гомоморфизмом $\mathbf{f}^*$, определенным согласно общей теории п. 16.

В п. 6 была приведена формула (6.12), устанавливающая тесную связь между гомоморфизмами групп сингулярных когомологий, соответствующими гомотопным между собой отображениям. Мы докажем эту формулу, рассматривая гомоморфизмы $\mathbf{f}^*$ с точки зрения общей теории п. 16. Для этого нам понадобятся некоторые новые понятия, к определению которых мы и перейдем.

29. Сингулярные призмы

Пусть s — произвольный r-мерный ($r \geqslant 0$) нумерованный симплекс. Топологическое произведение $p = s \times I$ симплекса s на отрезок $I = [0, 1]$ называется $(r+1)$-*мерной нумерованной призмой*. Для любого $t \in I$ множество точек вида (ξ, t), где $\xi \in s$, является r-мерным замкнутым симплексом. Этот симплекс, нумерованный так, чтобы вершина $(s_{(a)}, t)$ имела номер a, обозначим через $p[t]$. Любому кортежу $\mathfrak{a}$ высоты, не большей r, отнесем нумерованную призму $p_{(\mathfrak{a})}$, положив

$$p_{(\mathfrak{a})} = s_{(\mathfrak{a})} \times I.$$

Ее размерность равна длине кортежа $\mathfrak{a}$, увеличенной на единицу. Очевидно, что

$$p_{(\{r\})} = p.$$

Если $\mathfrak{a} \neq \{r\}$, то мы будем призму $p_{(\mathfrak{a})}$ часто обозначать через $p^{(\mathfrak{b})}$, где $\mathfrak{b}$ есть дополнение в $\{r\}$ кортежа $\mathfrak{a}$. Очевидно, что для любого $t \in I$ и любого кортежа $\mathfrak{a}$ высоты, не большей r,

$$p_{(\mathfrak{a})}[t] = p[t]_{(\mathfrak{a})}. \tag{29.1}$$

Легко видеть, что для любого $a = 0, \ldots, r$ точки

$$p[0]_{(0)}, \ldots, p[0]_{(a)}, \; p[1]_{(a)}, \ldots, p[1]_{(r)}$$

находятся в общем положении. Следовательно, существует $(r+1)$-мерный замкнутый симплекс, целиком лежащий в p, вершинами которого являются эти точки. Этот симплекс, нумерованный так, чтобы вершина $p[i]_{(b)}$ имела номер $b+i$, мы обозначим через $p(a)$. Нетрудно убедиться, что

$$p(a)^{(b)} = \begin{cases} p^{(b)}(a-1), & \text{если } b < a; \\ p[1], & \text{если } b = a = 0; \\ p(a-1)^{(a)}, & \text{если } b = a > 0; \\ p(a+1)^{(a+1)}, & \text{если } b = a+1 < r+1; \\ p[0], & \text{если } b = a+1 = r+1; \\ p^{(b-1)}(a), & \text{если } b > a+1. \end{cases} \tag{29.2}$$

Кроме того,

$$p(a)_{(0,\,1)} = \begin{cases} p(0), & \text{если } a = 0; \\ p[0]_{(0,\,1)}, & \text{если } a > 0. \end{cases} \tag{29.3}$$

Отсюда следует, что для любого $a = 0, \ldots, r$

$$p(a)_{(0)} = p[0]_{(0)} = p_{(0)}[0] \tag{29.4}$$

и

$$p(a)_{(1)} = \begin{cases} p_{(0)}[1] = p[1]_{(0)}, & \text{если } a = 0; \\ p_{(1)}[0] = p[0]_{(1)}, & \text{если } a > 0. \end{cases} \tag{29.5}$$

Пусть p и q — две нумерованные призмы одной и той же размерности r. Определим отображение $\varepsilon(p, q)$ призмы p на призму q так, чтобы для любого $t \in I$ оно на симплексе $p[t]$ совпадало с отображением $\varepsilon(p[t], q[t])$:

$$\varepsilon(p, q) / p[t] = \varepsilon(p[t], q[t]).$$

Очевидно, что отображение $\varepsilon(p, q)$ непрерывно и для любого $a = 0, \ldots, r$ совпадает на симплексе $p(a)$ с отображением $\varepsilon(p(a), q(a))$:

$$\varepsilon(p, q) / p(a) = \varepsilon(p(a), q(a)).$$

Для каждого $r \geqslant 0$ зафиксируем какую-нибудь $(r+1)$-мерную нумерованную призму p_0^{r+1}. Для $r=0$ мы будем считать призму p_0^1 совпадающей с отрезком $I=[0,1]$, т. е. с одномерным симплексом s_0^1. При этом будем считать, что $p_0^1[0]=(s_0^1)_{(0)}(=0)$ и, следовательно, $p_0^1[1]=(s_0^1)_{(1)}(=1)$. Для любой $(r+1)$-мерной нумерованной призмы p отображение $\varepsilon(p_0^{r+1}, p)$ обозначим ради краткости через $\varepsilon(p)$:

$$\varepsilon(p)=\varepsilon(p_0^{r+1}, p).$$

Непрерывное отображение нумерованной призмы p_0^{r+1} в некоторое топологическое пространство X называется $(r+1)$-*мерной сингулярной призмой пространства* X. С общей точки зрения п. 1 сингулярные призмы можно рассматривать как гомотопии отображений симплекса $p_0^{r+1}[0]$ или, что то же самое, симплекса s_0^r в пространство X. Так как по условию $p_0^1=s_0^1=I$, то термины «одномерная сингулярная призма», «одномерный сингулярный симплекс» и «путь» означают одно и то же.

Пусть P — произвольная $(r+1)$-мерная сингулярная призма пространства X. Для любого $t \in I$ положим

$$P[t]=P\varepsilon(p_0^{r+1}[t]).$$

Это есть r-мерный сингулярный симплекс пространства X. Сингулярные симплексы $P[0]$ и $P[1]$ называются *основаниями* призмы P, первый *нижним*, второй *верхним*. Для любого кортежа $\mathfrak{a}$ высоты, не большей r, положим

$$P_{(\mathfrak{a})}=P\varepsilon((p_0^{r+1})_{(\mathfrak{a})}).$$

Это — сингулярная призма пространства X размерности, на единицу большей длины кортежа $\mathfrak{a}$. Для $\mathfrak{a}=\{r\}$ имеем

$$P_{(\{r\})}=P.$$

Если $\mathfrak{a}\neq\{r\}$, то призма $P_{(\mathfrak{a})}$ называется *боковой* $\mathfrak{a}$-*гранью* призмы P и часто обозначается через $P^{(\mathfrak{b})}$, где $\mathfrak{b}$ есть дополнение в $\{r\}$ кортежа $\mathfrak{a}$. Согласно (29.1)

$$P_{(\mathfrak{a})}[t]=P[t]_{(\mathfrak{a})}. \tag{29.6}$$

Для любого $a=0, \ldots, r$ положим

$$P(a)=P\varepsilon(p_0^{r+1}(a)).$$

Это есть $(r+1)$-мерный сингулярный симплекс пространства X. Согласно (29.2):

$$P(a)^{(b)} = \begin{cases} P^{(b)}(a-1) & \text{если } b < a; \\ P[1], & \text{если } b = a = 0; \\ P(a-1)^{(a)}, & \text{если } b = a > 0, \\ P(a+1)^{(a+1)}, & \text{если } b = a+1 < r+1, \\ P[0], & \text{если } b = a+1 = r+1, \\ P^{(b-1)}(a), & \text{если } b > a+1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (a=0, \ldots, r), \\ (b=0, \ldots, r+1), \end{matrix} \tag{29.7}$$

а согласно (29.3)

$$P(a)_{(0,1)} = \begin{cases} P_{(0)}, & \text{если } a = 0; \\ P[0]_{(0,1)}, & \text{если } a > 0. \end{cases} \tag{29.8}$$

Имеют место также формулы, соответствующие формулам (29.4) и (29.5). Следовательно, симплекс $P(0)_{(0,1)} = P_{(0)}$, рассматриваемый как путь, соединяет нулевую вершину нижнего основания с нулевой вершиной верхнего. Легко видеть, что он совпадает с путем, пробегаемым точкой $P[t]_{(0)}$, когда t меняется от нуля до единицы.

30. Симплициальные гомотопии

Пусть K — полусимплициальный комплекс и X — топологическое пространство. Соответствие δ, относящее каждому симплексу A комплекса K сингулярную призму δA пространства X, размерность которой на единицу больше размерности симплекса A, называется *симплициальной гомотопией отображений* комплекса K в комплекс $S(X)$, если для любого симплекса A комплекса K и любого кортежа $\mathfrak{a}$ высоты, не большей размерности симплекса A:

$$(\delta A)_{(\mathfrak{a})} = \delta A_{(\mathfrak{a})}.$$

Для любого $t \in I$ положим

$$\delta_t A = \delta A\,[t].$$

Из (29.8) следует, что так определенное отображение δ_t комплекса K в комплекс $S(X)$ симплициально. Говорят, что гомотопия δ *связывает* симплициальное отображение δ_0 с симплициальным отображением δ_1. Симплициальные отображения комплекса K в комплекс $S(X)$ называются *симплициально гомотопными* между собой, если существует хотя бы одна симплициальная гомотопия, связывающая одно отображение с другим. Легко видеть, что отношение симплициальной гомотопности рефлексивно, симметрично и транзитивно, так что совокупность всех симплициальных отображений комплекса K в комплекс $S(X)$ распадается на гомотопические классы попарно гомотопных между собой отображений.

Если для всех $t \in I$

$$\delta_t A = \delta_0 A,$$

то гомотопия δ называется *тождественной на симплексе* A. Гомотопия, тождественная на всех симплексах некоторого подкомплекса N комплекса K, называется *тождественной на* N. Если существует тождественная на N симплициальная гомотопия, связывающая два симплициальных отображения комплекса K в комплекс $S(X)$, то эти отображения называются (*связанно*) *гомотопными относительно* N. Ясно, что для существования гомотопии, тождественной на N, необходимо, чтобы данные отображения совпадали на N.

Пусть $F = \{f_t\}$ — произвольная гомотопия непрерывных отображений пространства X в пространство Y. Любому сингулярному симплексу A пространства X отнесем сингулярную призму FA пространства Y, положив

$$FA(\xi, t) = F(A(\xi), t), \quad \xi \in s_0^r, \ t \in I.$$

Очевидно, что так определенное отображение $A \to FA$ есть симплициальная гомотопия отображений комплекса $S(X)$ в комплекс $S(Y)$. Кроме того, для любого $t \in I$ симплициальные отображения F_t совпадают с симплициальными отображениями, порожденными отображениями f_t:

$$F_t = f_t.$$

Следовательно:

[30.1] *Симплициальные отображения комплекса $S(X)$ в комплекс $S(Y)$, порожденные гомотопными непрерывными отображениями пространства X в пространство Y, симплициально гомотопны между собой.*

Пусть X' — произвольное подпространство пространства X. Ясно, что комплекс $S(X')$ является подкомплексом комплекса $S(X)$. Если гомотопия F тождественна на подпространстве X', то соответствующая симплициальная гомотопия тождественна на подкомплексе $S(X')$. Поэтому предложение [30.1] имеет место и для связанных гомотопий.

Подкомплекс N комплекса $S(X)$ называется его *ретрактом*, если существует симплициальное отображение ν комплекса $S(X)$ на комплекс N, тождественное на N и связанно гомотопное относительно N тождественному отображению $1_{S(X)}$ комплекса $S(X)$ на себя, т. е. если существует такая симплициальная гомотопия δ отображений комплекса $S(X)$ в себя, что

$$\delta_0 = 1_{S(X)};$$
$$\delta_t / N = 1_N, \quad (t \in I);$$
$$\delta_1 = \nu : S(X) \to N.$$

Отображение $\delta_1 = \nu$ и гомотопия δ называются *ретрагирующими для* N. Из сказанного в предыдущем абзаце следует, что сингулярный комплекс $S(X')$ любого деформационного ретракта X' пространства X является ретрактом комплекса $S(X)$. Однако существуют ретракты комплекса $S(X)$, не являющиеся сингулярными комплексами никаких подпространств пространства X, так что это замечание не позволяет характеризовать все ретракты комплекса $S(X)$. Оказывается, что сравнительно легко можно дать простые и удобные критерии ретрактности подкомплекса.

Назовем сравнимые между собой сингулярные симплексы A и B пространства X *гомотопными* между собой, если существует такое семейство $\{A_t\}$ сравнимых с симплексом A сингулярных симплексов A_t пространства X, непрерывно зависящих от параметра $t \in I$, что

$$A_0 = A \text{ и } A_1 = B.$$

Здесь непрерывная зависимость симплексов A_t от параметра t означает, что существует сингулярная призма P, для которой

$$P[t] = A_t.$$

Таким образом, сравнимые между собой сингулярные симплексы A и B гомотопны между собой, если существует такая сингулярная призма P, что

$$P[0] = A \text{ и } P[1] = B$$

и для любого $t \in I$

$$\Delta P[t] = \Delta A.$$

С общей точки зрения п. 1 призма P является тождественной на границе Δs_0^r симплекса s_0^r гомотопией, связывающей отображение A с отображением B.

Из сказанного немедленно следует необходимость условия следующего предложения:

[30.2] *Подкомплекс N комплекса $S(X)$ тогда и только тогда является ретрактом комплекса $S(X)$, когда для любого сингулярного симплекса пространства X, граница которого принадлежит N, в комплексе N найдется гомотопный ему симплекс.*

Достаточность этого условия мы докажем, построив ретрагирующую гомотопию δ, т. е. такую симплициальную гомотопию δ, что для любого сингулярного симплекса A пространства X

$$\delta A[0] = A, \quad \delta A[1] \in N,$$

причем для любого $t \in I$, если A лежит в N:

$$\delta A[t] = A \quad (A \in N). \tag{30.1}$$

Мы построим призму δA индукцией по размерности симплекса A. Так как для симплексов, принадлежащих N, призма δA однозначно определена условием (30.1), мы можем предполагать, что симплекс

A не лежит в N. Для нульмерного симплекса A мы за призму δA примем произвольный путь, соединяющий точку A с некоторой вершиной комплекса N. Затем, предполагая призмы δA построенными для всех симплексов A размерности, меньшей некоторого $n \geqslant 1$, следующим образом определим призму δA для произвольного n-мерного сингулярного симплекса A пространства X.

По предположению индукции для любого $a = 0, \ldots, n$ уже определена призма $\delta A^{(a)}$. Совокупность всех таких призм очевидно определяет некоторую гомотопию отображений границы Δs_0^n симплекса s_0^n в пространство X, связывающую сингулярную сферу ΔA с некоторой сингулярной сферой S комплекса N. Так как для границы Δs_0^n симплекса s_0^n имеет место лемма о продолжении гомотопии, то эту гомотопию можно продолжить до некоторой гомотопии отображений всего симплекса s_0^n в пространство X, т. е. до некоторой $(n+1)$-мерной сингулярной призмы P. По построению

$$\left.\begin{aligned} P[0] &= A; \\ P^{(a)} &= \delta A^{(a)}; \\ \Delta P[1] &= S \end{aligned}\right\} (a = 0, \ldots, n).$$

По условию симплекс $P[1]$, граница S которого лежит в N, гомотопен некоторому симплексу B комплекса N. Пользуясь этой гомотопией, легко известным образом преобразовать призму P в такую призму Q, что

$$Q[0] = A, \ Q[1] = B, \ Q^{(a)} = \delta A^{(a)}, \ (a = 0, \ldots, n).$$

Таким образом призма Q обладает всеми нужными нам свойствами призмы δA, так что мы можем положить

$$\delta A = Q.$$

Тем самым, ссылкой на принцип математической индукции предложение [30.2] доказано.

31. Инвариантность групп сингулярных когомологий

Пусть K — полусимплициальный комплекс, X — линейно связное пространство, μ и ν — симплициальные отображения комплекса K в комплекс $S(X)$, симплициально гомотопные между собой, и δ — симплициальная гомотопия отображений комплекса K в комплекс $S(X)$, связывающая отображение μ с отображением ν:

$$\delta_0 = \mu, \ \delta_1 = \nu.$$

Пусть A — мультипликативная группа и a^1 — произвольный коцикл комплекса $S(X)$ над группой A. Определим в комплексе K нульмерную коцепь $\delta^* a^1$ над группой A, положив для любого нульмерного симплекса A комплекса K

$$\delta^* a^1(A) = a^1(\delta A).$$

Оказывается, что

$$\nu^* a^1 : \mu^* a^1 = \nabla \delta^* a^1. \tag{31.1}$$

Действительно, для любого одномерного симплекса A комплекса K

$$\delta^* a^1 (A_{(0)}) \nu^* a^1 (A) = a^1 (\delta A_{(0)}) a^1 (\nu A) = a^1 (\delta A (0)_{(0,\,1)}) a^1 (\delta A (0)_{(1,\,2)}) =$$
$$= a^1 (\delta A (0)_{(0,\,2)}) = a^1 (\delta A (1)_{(0,\,2)}) = a^1 (\delta A (1)_{(0,\,1)}) a^1 (\delta A (1)_{(1,\,2)}) =$$
$$= a^1 (\delta A [0]) a^1 (\delta A_{(1)}) = a^1 (\mu A) \delta^* a^1 (A_{(1)}) = \mu^* a^1 (A) \delta^* a^1 (A_{(1)}),$$

что доказывает (31.1). Таким образом,

$$\boldsymbol{\mu}^* \mathbf{a}^1 = \boldsymbol{\nu}^* \mathbf{a}^1.$$

То есть:

[31.1] *Отображения множества $H(S(X), \mathrm{A})$ в множество $H(K, \mathrm{A})$, порожденные симплициально гомотопными между собой симплициальными отображениями комплекса K в комплекс $S(X)$, одинаковы.*

Пусть G — аддитивная группа, в которой представлена группа A, и c^{r+1} — некоторая $(r+1)$-мерная $(r \geqslant 0)$ коцепь комплекса $S(X)$ над группой G. Определим в комплексе K r-мерную коцепь $\delta^* c^{r+1}$ над группой G, положив для любого r-мерного симплекса A комплекса K:

$$\delta^* c^{r+1} (A) = \sum_{a=0}^{r} (-1)^a c^{r+1} (\delta A (a)).$$

Оказывается, что для любой r-мерной коцепи c^r комплекса $S(X)$ над группой G

$$\nabla_{\mu^* a^1} \delta^* c^r + \delta^* \nabla_{a^1} c^r = \delta^* a^1 \nu^* c^r - \mu^* c^r, \tag{31.2}$$

причем для $r=0$ первый член левой части этого равенства отсутствует. Докажем сначала формулу (31.2) для случая $r=0$. Для любого нульмерного симплекса A комплекса K

$$^*\nabla_{a^1} c^0 (A) = \nabla_{a^1} c^0 (\delta A) = \nabla_{a^1} c^0 (\delta A (0)) =$$
$$= a^1 (\delta A (0)_{(0,\,1)}) c^0 (\delta A (0)^{(0)}) - c^0 (\delta A (0)^{(1)}) = a^1 (\delta A) c^0 (\delta A [1]) - c^0 (\delta A [0]) =$$
$$= \delta^* a^1 (A) \nu^* c^0 (A) - \mu^* c^0 (A) = (\delta^* a^1 \nu^* c^0 = \mu^* c^0)(A),$$

что доказывает формулу (31.2) для случая $r=0$. Считая теперь $r>0$ и используя известные свойства сингулярных призм [формулы (29.9) и след.], мы для любого r-мерного симплекса A комплекса K получаем

$$(\nabla_{\mu^* a^1} \delta^* c^r + \delta^* \nabla_{a^1} c^r)(A) =$$
$$= \mu^* a^1 (A_{(0,\,1)}) \delta^* c^r (A^{(0)}) + \sum_{a=1}^{r} (-1)^a \delta^* c^r (A^{(a)}) + \sum_{a=0}^{r} (-1)^a \nabla_{a^1} c^r (\delta A (a)) =$$
$$= \mu^* a^1 (A_{(0,1)}) \sum_{a=0}^{r-1} (-1)^a c^r (\delta A^{(0)} (a)) + \sum_{a=1}^{r} \sum_{b=0}^{r-1} (-1)^{a+b} c^r (\delta A^{(a)} (b)) +$$

$$+\sum_{a=0}^{r}(-1)^a a^1(\delta A(a)_{(0,1)})\,c^r(\delta A(a)^{(0)})+\sum_{a=0}^{r}\sum_{b=1}^{r+1}(-1)^{a+b}c^r(\delta A(a)^{(b)})=$$

$$=\mu^* a^1(A_{(0,1)})\sum_{a=0}^{r-1}(-1)^a c^r(\delta A^{(0)}(a))+\sum_{b=1}^{r}\sum_{a=0}^{r-1}(-1)^{a+b}c^r(\delta A^{(b)}(a))+$$

$$+a^1(\delta A(0)_{(0,1)})\,c^r(\delta A(0)^{(0)})+\sum_{a=1}^{r}(-1)^a a^1(\delta A(a)_{(0,1)})\,c^r(\delta A(a)^{(0)})+$$

$$+\sum_{a=2}^{r}\sum_{b=1}^{a-1}(-1)^{a+b}c^r(\delta A(a)^{(b)})+\sum_{a=1}^{r}c^r(\delta A(a)^{(a)})-\sum_{a=0}^{r}c^r(\delta A(a)^{(a+1)})+$$

$$+\sum_{a=0}^{r-1}\sum_{b=a+2}^{r+1}(-1)^{a+b}c^r(\delta A(a)^{(b)})=$$

$$=a^1(\mu A_{(0,1)})\sum_{a=1}^{r}(-1)^{a-1}c^r(\delta A^{(0)}(a-1))+\sum_{b=1}^{r}\sum_{a=0}^{r-1}(-1)^{a+b}c^r(\delta A^{(b)}(a))+$$

$$+a^1(\delta A_{(0)})\,c^r(\delta A[1])+a^1(\delta A\,[0]_{(0,1)})\sum_{a=1}^{r}(-1)^a c^r(\delta A^{(0)}(a-1))+$$

$$+\sum_{a=2}^{r}\sum_{b=1}^{a-1}(-1)^{a+b}c^r(\delta A^{(b)}(a-1))+\sum_{a=1}^{r}c^r(\delta A(a)^{(a)})-\sum_{a=0}^{r-1}c^r(\delta A(a+1)^{(a+1)})-$$

$$-c^r(\delta A\,[0])+\sum_{a=0}^{r-1}\sum_{b=a+2}^{r+1}(-1)^{a+b}\,c^r(\delta A^{(b-1)}(a))=$$

$$=\sum_{b=1}^{r}\sum_{a=0}^{r-1}(-1)^{a+b}\,c^r(\delta A^{(b)}(a))+\sum_{a=1}^{r-1}\sum_{b=1}^{a}(-1)^{a+b+1}\,c^r(\delta A^{(b)}(a))+$$

$$+\sum_{a=0}^{r-1}\sum_{b=a+1}^{r}(-1)^{a+b+1}\,c^r(\delta A^{(b)}(a))+a^1(\delta A_{(0)})\,c^r(\nu A)-c^r(\mu A)=$$

$$=\delta^*\,a^1(A_{(0)})\,\nu^* c^r(A)-\mu^*\,c^r(A)=$$

$$=(\delta^* a^1\nu^* c^r-\mu^*\,c^r)(A),$$

что доказывает формулу (31.2) и для $r>0$.

Считая в равенстве (31.2) коцепь c^r коциклом относительно a^1 и переходя к классам когомологий, получим

$$\delta^*\mathbf{a}^1\nu^*\mathbf{c}^r=\mu^*\mathbf{c}^r. \tag{31.3}$$

То есть:

[31.2] *Гомоморфизм* ν^* *переходит в гомоморфизм* μ^* *посредством изоморфизма* $\delta^*\alpha^1$. *В частности, для обыкновенных групп когомологий гомоморфизмы* ν^* *и* μ^* *одинаковы.*

Если гомотопия δ порождена гомотопией F непрерывных отображений, то нетрудно убедиться, что изоморфизм $\delta^* a^1$ совпадает с указанным в п. 6 изоморфизмом α^F, так, что формула (31.3) есть не что иное, как формула (6.12).

Из формулы (6.12), как уже говорилось, следует инвариантность групп сингулярных когомологий (предложение [6.4]). Проведем соответствующие рассуждения подробнее.

Пусть X и Y — топологические пространства одного гомотопического типа и пусть f — гомотопическая эквивалентность, т. е. такое непрерывное отображение пространства X в пространство Y, что существует непрерывное отображение g пространства Y в пространство X, для которого

$$gf \sim 1_X, \quad fg \sim 1_Y.$$

Отображение gf, являясь непрерывным отображением пространства X в себя, определяет симплициальное отображение gf комплекса $S(X)$ в себя и, следовательно, для любой мультипликативной группы A отображение $(\mathbf{gf})^*$ множества $H(S(X), \mathrm{A})$ в себя. Но так как отображение gf гомотопно тождественному отображению 1_X пространства X на себя, то согласно [31.1]

$$(\mathbf{gf})^* = \overset{\bullet}{1}_X = 1_{H(S(X), A)}.$$

Аналогично

$$(\mathbf{fg})^* = 1_{H(S(Y), A)}.$$

С другой стороны,

$$(\mathbf{gf})^* = \mathbf{f}^*\mathbf{g}^*, \quad (\mathbf{fg})^* = \mathbf{g}^*\mathbf{f}^*.$$

Отсюда следует, что отображение $\mathbf{g}^*$ является взаимно однозначным отображением множества $H(S(X), \mathrm{A})$ на множество $H(S(Y), \mathrm{A})$, обратным к отображению $\mathbf{f}^*$.

Пусть теперь G — произвольная аддитивная группа, в которой както представлена группа A, и a^1 — произвольный коцикл комплекса $S(X)$ над группой A. Этому коциклу, с одной стороны, соответствует коцикл $(gf)^* a^1$, а с другой, нульмерная коцепь F^*a^1, где F — гомотопия, связывающая отображение gf пространства X на себя с тождественным отображением 1_X. Согласно (31.1)

$$a^1 : (gf)^* a^1 = \nabla F^* a^1.$$

Отсюда следует, что для любого $r \geqslant 0$ коцепь f^*a^1 порождает изоморфизм $\mathbf{F}^*\mathbf{a}^1$ группы $H^r{}_{a^1}(S(X), G)$ на группу $H^r{}_{(gf)^*a^1}(S(X), G)$, причем согласно (31.3)

$$\mathbf{F}^*\mathbf{a}^1 = (\mathbf{gf})^* = \mathbf{f}^*\mathbf{g}^*,$$

где $\mathbf{f}^*$ — гомоморфное отображение группы $H^r{}_{g^*a^1}(S(Y), G)$ в группу $H^r_{f^*g^*a^1}(S(X), G)$, порожденное отображением f, а $\mathbf{g}^*$ — гомоморфное отображение группы $H^r_{a^1}(S(X), G)$ в группу $H^r_{g^*a^1}(S(Y), G)$, порожденное отображением g.

Раз произведение $\mathbf{f}^*\mathbf{g}^*$ гомоморфизмов $\mathbf{f}^*$ и $\mathbf{g}^*$ является изоморфизмом, то гомоморфизм $\mathbf{g}^*$ инъективен, а гомоморфизм $\mathbf{f}^*$ проективен.

Аналогично, рассматривая отображение fg, мы докажем, что гомоморфизм $\mathbf{f}^*$ инъективен, а гомоморфизм $\mathbf{g}^*$ проективен. Таким образом, оба гомоморфизма $\mathbf{f}^*$ и $\mathbf{g}^*$ являются изоморфизмами.

Резюмируя доказанное, мы можем сказать, что для любой мультипликативной группы A существует такое взаимно однозначное отображение $\mathbf{g}^*$ множества $H(S(X), \mathrm{A})$ на множество $H(S(Y), \mathrm{A})$, что для любой аддитивной группы G, любого представления группы A в группе G и любого класса $\mathbf{a}^1 \in H(S(X), \mathrm{A})$ группы $H^r_{\mathbf{a}^1}(S(X), G)$ и $H^r_{\mathbf{g}^*\mathbf{a}^1}(S(Y), G)$ при любом $r \geqslant 0$ изоморфны между собой. Это означает, что комплексы $S(X)$ и $S(Y)$ имеют один когомологический тип. Принимая во внимание предложение [28.3], мы приходим к предложению [6.4]:

[31.3] *Пространство одного гомотопического типа имеют один когомологический тип.*

Пусть N — ретракт комплекса $S(X)$, δ — соответствующая ретрагирующая гомотопия и $\nu = \delta_1$ — ретрагирующее отображение комплекса $S(X)$ на комплекс N. Для любого коцикла a^1 комплекса N над некоторой мультипликативной группой A в комплексе $S(X)$ определен коцикл $\nu^* a^1$. Так как отображение ν тождественно на подкомплексе N, то

$$\nu^* a^1 / N = a^1.$$

Отсюда следует, что отображение ν^* не может перевести разные элементы множества $H(N, \mathrm{A})$ в один и тот же элемент множества $H(S(X), \mathrm{A})$.

Согласно (31.1) для любого коцикла a^1 комплекса $S(X)$ над группой A

$$\nu^* (a^1 / N) : a^1 = \nabla \delta^* a^1.$$

Отсюда следует, что ν^* есть взаимно однозначное отображение множества $H(N, \mathrm{A})$ на множество $H(S(X), \mathrm{A})$.

Аналогично доказывается, что для любой аддитивной группы G, любого представления группы $\mathbf{A}$ в группе G и любого $r \geqslant 0$ отображение ν^* является изоморфным отображением группы $H^r_1(N, G)$ на группу $H^r_{\nu^* a^1}(S(X), G)$. Таким образом:

[31.4] *Любой ретракт комплекса $S(X)$ имеет тот же когомологический тип, что и весь комплекс $S(X)$.*

Это предложение (являющееся аналогом предложения [1 : 2]) позволяет при изучении когомологических свойств пространств вместо всего комплекса $S(X)$ рассматривать любой его ретракт N, имеющий, как правило, значительно более простое строение. В последующем мы эту возможность существеннейшим образом используем.

§ 2. Натуральная система топологического пространства

32. Гомотопические группы и сингулярный комплекс

Условимся считать нумерованные симплексы $s_0{}^r$ $(r \geqslant 0)$, фигурирующие в определении сингулярных симплексов, поляризованными элементами, ориентировав их согласованно с нумерацией вершин и приняв за их полюсы нулевые вершины $(s_0{}^r)_{(0)}$. Тогда сравнимые между собой r-мерные сингулярные симплексы A и B некоторого пространства X окажутся совпадающими на границе непрерывными отображениями поляризованного элемента $s_0{}^r$, так что будет определен тип $d(A, B)$, отличающий симплекс B от симплекса A. Это — элемент группы $\pi_x^r(X)$, где x есть нулевая вершина любого из симплексов A и B, рассматриваемая как точка пространства X.

Класс одномерного симплекса A, рассматриваемого как путь пространства X, обозначим через $l(A)$. Из формулы (5.4) немедленно следует:

[32.1] *Для любых сравнимых между собой одномерных сингулярных симплексов A и B*:

$$d(A, B) = l(B)\, l(A)^{-1}.$$

Из предложений [5.2], [5.4], [5.6] и [5.7] немедленно вытекают следующие свойства типа $d(A, B)$:

[32.2] *Сравнимые сингулярные симплексы A и B тогда и только тогда гомотопны между собой, когда*

$$d(A, B) = 0.$$

[32.3] *Для любого r-мерного сингулярного симплекса A пространства X и любого элемента α группы $\pi_x^r(X)$ существует такой сравнимый с A сингулярный симплекс B, что*

$$d(A, B) = \alpha.$$

[32.4] *Для любых сравнимых между собой сингулярных симплексов A, B и C:*

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C) \quad (r \geqslant 1).$$

[32.5] *Пусть f — непрерывное отображение пространства X в пространство Y. Тогда для любых сравнимых между собой r-мерных сингулярных симплексов A и B пространства X*

$$d(fA, fB) = f_*^r d(A, B),$$

где f_*^r — *индуцированный отображением f гомоморфизм r-мерных гомотопических групп.*

Граница Δs_0^{r+1} симплекса s_0^{r+1}, как граница поляризованного элемента, является r-мерной поляризованной сферой. Поэтому любое ее непрерывное отображение в пространство X, т. е. r-мерная сингулярная сфера S пространства X, определяет r-мерный сфероид $(S, \Delta s_0^{r+1})$ пространства X в точке $x = (S_{(0,1)})_{(0)}$. Тип этого сфероида обозначим через $k(S)$. Это — элемент группы $\pi_x^r(X)$. Очевидно, что

[32.6] *Для любой одномерной сингулярной сферы* S

$$k(S) = l(S^{(2)})\, l(S^{(0)})\, l(S^{(1)})^{-1}.$$

Тип $k(S)$ тривиален тогда и только тогда, когда отображение S является частью некоторого отображения A всего симплекса $s_0{}^{r+1}$. Но отображение A есть по определению $(r+1)$-мерный сингулярный симплекс пространства X. Таким образом:

[32.7] *Сингулярная сфера S тогда и только тогда ограничивает в комлексе $S(X)$, когда тип $k(S)$ тривиален, т. е. когда*

$$k(S) = \begin{cases} 0, & \text{если } r > 1; \\ 1, & \text{если } r = 0. \end{cases}$$

Из определения гомоморфизма, индуцированного непрерывным отображением, немедленно вытекает следующее утверждение:

[32.8] *Пусть f — непрерывное отображение пространства X в пространство Y. Тогда для любой r-мерной сингулярной сферы S пространства X*

$$k(fS) = f_*^r k(S),$$

где f_*^r — индуцированный отображением f гомоморфизм r-мерных гомотопических групп.

Изучим теперь соотношения, связывающие функции k и d. Для простоты мы рассмотрим случай $r > 1$. Для $r = 1$ соответствующие предложения легко получить из (32.1) и (32.6), но нам они не понадобятся.

Мы воспользуемся «теоремами сложения для элементов гомотопических групп» [формулы (5.2) и (5.3)]. Фигурирующую в этих теоремах сферу S будем считать границей Δs_0^{r+1} симплекса s_0^{r+1}, а за элементы E_i примем грани $(s_0^{r+1})^{(i)}$ этого симплекса. Таким образом, $n = r+1$, а $U = \Delta\Delta s_0^{r+1}$.

Сферу Δs_0^{r+1} мы, как и выше, ориентируем согласованно с нумерацией вершин, а элементы E_i — согласованно с этой ориентацией. Заметим, что так введенная ориентация симплекса E_i согласована с нумерацией его вершин тогда и только тогда, когда i четно.

За полюсы ξ_i элементов E_i примем нулевые вершины. Тогда отображение $\varepsilon(E_i)$ симплекса s_0^r на симплекс E_i изоморфно для i четного и антиизоморфно для i нечетного.

Полюсом ξ сферы Δs_0^{r+1} будем, как и выше, считать ее нулевую вершину. Таким образом, для $i > 0$ $\xi_i = \xi$. В соответствии с этим за пути u_i, предусмотренные в формулировке теорем сложения, мы для $i>0$ примем единичный путь в точке ξ. Путем u_0 будем считать ребро $(s^{r+1})_{(0,1)}$ симплекса s^{r+1}.

Обратимся сначала к «первой теореме сложения» [формула (5.2)]. Так же как там, положим $r=p+1$, где $p>1$. Фигурирующее в этой теореме отображение f множества U в пространство X мы можем в рассматриваемом случае трактовать как сеть Σ p-мерных сингулярных сфер, составляющие $\Sigma^{(a)}$ которой определяются формулами:

$$\Sigma^{(a)}=f\varepsilon(E_a) \qquad (a=0,\ldots,p+2).$$

Так как для i нечетного отображение $\varepsilon(E_a)$ антиизоморфно, то для элементов α_i [формула (5.2)] имеем

$$\alpha_i=(-1)^i\, k\,(\Sigma^{(i)}).$$

В силу нашего выбора путей u_i изоморфизмы θ_i для $i>0$ тождественны, а для $i=0$ изоморфизм θ_0 совпадает с изоморфизмом θ_Σ, соответствующим пути $\Sigma_{(0,1)}$. Таким образом, мы приходим к следующему утверждению:

[32.9] *Для любой сети Σ p-мерных ($p>1$) сфер комплекса $S(X)$*

$$\theta_\Sigma\, k\,(\Sigma^{(0)})+\sum_{a=1}^{p+2}(-1)^a k\,(\Sigma^{(a)})=0,$$

где θ_Σ — изоморфизм p-мерных гомотопических групп, соответствующий пути $\Sigma_{(0,1)}$.

Перейдем теперь ко «второй теореме сложения» [формула (5.3)]. Теперь $r=p>1$. Фигурирующие в этой теореме отображения f и g являются в рассматриваемом случае сравнимыми между собой p-мерными сингулярными сферами пространства X. Обозначая их через S и T, можем положить в (5.3)

$$\alpha=k\,(S),\ \beta=k\,(T).$$

Что же касается отличающих типов δ_i, то из предложения [5.5], учитывая антиизоморфность отображений $\varepsilon(E_i)$ для i нечетного, получаем

$$\delta_i=(-1)^i d\,(S^{(i)},\ T^{(i)}) \qquad (i=0,\ldots,p+1).$$

Наконец, для $i>0$ изоморфизмы θ_i тождественны, а изоморфизм θ_0 совпадает с изоморфизмом θ_S, соответствующим пути $S_{(0,1)}$. Таким образом:

[32.10] *Для любых сравнимых между собой p-мерных сфер S и T комплекса $S(X)$*

$$k\,(T)-k\,(S)=\theta_S\, d\,(S^{(0)},\ T^{(0)})+\sum_{a=1}^{p+1}(-1)^{(a)},\ d\,(S^{(a)},\ T^{(a)}),$$

где θ_S — изоморфизм p-мерных гомотопических групп, соответствующий пути $S_{(0,1)}$.

Пусть δ — симплициальная гомотопия отображений комплекса $S(X)$ в себя, связывающая тождественное отображение с некоторым симплициальным отображением ν, и пусть x и x' — такие точки пространства X, что точка x', рассматриваемая как нульмерный сингулярный симплекс, переходит при отображении ν в точку x. Тогда одномерная призма δ_x является путем, соединяющим точку x' с точкой x. Изоморфное отображение группы $\pi_x^p(X)$ на группу $\pi_{x'}^p(X)$, соответствующее пути δ_x, обозначим через θ_δ^p.

[32.11] *Для любых сравнимых между собой сингулярных симплексов A и B пространства X, нулевые вершины которых совпадают с точкой x':*

$$d(\nu A, \nu B) = \theta_\delta^p\, d(A, B).$$

[32.12] *Для любой p-мерной сингулярной сферы S пространства X, нулевая вершина которой совпадает с точкой x':*

$$k(\nu S) = \theta_\delta^p\, k(S).$$

Эти предложения настолько непосредственно следуют из определений что их доказательство разумно будет опустить.

33. Нормальный комплекс и его натуральное оснащение

Подкомплекс N сингулярного комплекса $S(X)$ называется ***нормальным комплексом пространства X в точке x***, если

НК 1 он содержит все сингулярные симплексы, стянутые в точку x;

НК 2 для любого сингулярного симплекса пространства X, граница которого принадлежит N, в комплексе N существует один и только один гомотопный ему симплекс.

Легко видеть, что в любой точке x пространства X существует по крайней мере один нормальный комплекс. Этот нормальный комплекс можно построить, например, по индукции следующим образом. Обозначая через N^0 подкомплекс комплекса $S(X)$, состоящий из одной точки x, рассматриваемой как нульмерный сингулярный симплекс, предположим, что для некоторого $r > 0$ уже построен комплекс N^{r-1}. Все r-мерные сингулярные симплексы, границы которых принадлежат комплексу N^{r-1}, разобьем на классы гомотопных между собой симплексов. В каждом классе выберем по симплексу, причем в классе, содержащем стянутый в точку x r-мерный симплекс, выберем как раз его. Присоединив выбранные симплексы к комплексу N^{r-1}, мы, очевидно, получим подкомплекс комплекса $S(X)$. Обозначим его через N^r. Продолжая процесс, мы построим возрастающую последовательность

$$N^0 \subset N^1 \subset \ldots \subset N^r \subset \ldots$$

подкомплексов комплекса $S(X)$, объединение N которой будет, очевидно, нормальным комплексом в точке x.

Любой нормальный комплекс N в точке x одновершинен. Его вершиной служит точка x, рассматриваемая как нульмерный сингулярный симплекс. Одномерные симплексы комплекса N, рассматриваемые как пути пространства X, замкнуты в точке x. Поэтому для любого одномерного симплекса A комплекса N класс $l(A)$ принадлежит группе $\pi_x^1(X)$. Определим коцепь 1_N^1 комплекса N над группой $\pi_x^1(X)$, положив для любого одномерного симплекса A

$$1_N^1(A) = l(A).$$

Из свойств класса l, сформулированных в предыдущем пункте, следует, что коцепь 1_N^1 является оснащающим коциклом комплекса N над группой $\pi_x^1(X)$.

Пусть $p > 1$. Так как комплекс N не содержит различных гомотопных между собой симплексов, то согласно результатам предыдущего пункта определенная там функция d, относящая любым сравнимым между собой p-мерным сингулярным симплексам A и B пространства X элемент $d(A, B)$ группы $\pi_x^p(X)$, обладает на комплексе N свойствами ОСН 1, ОСН 2 и ОСН 3. Кроме того, так как сфера комплекса N ограничивает в комплексе N тогда и только тогда, когда она ограничивает в комплексе $S(X)$, то для функции k, рассматриваемой только на p-мерных сферах комплекса N, выполнено свойство ОСН 4. Что же касается формул ОСН 5 и ОСН 6, то они имеют место с заменой коцикла a^1 коциклом 1_N^1 в силу предложений [32.8] и [32.7] и определения естественного представления группы $\pi_x^1(X)$ в группе $\pi_x^p(X)$. Таким образом, для любого $p > 1$ в комплексе N определено p-мерное оснащение (d, k) в группе $\pi_x^p(X)$ относительно коцикла 1_N^1. Другими словами, комплекс N оснащен в гомотопической серии $\pi_x(X)$ пространства X в точке x. Это оснащение мы назовем *натуральным*.

Условие НК 2 содержит, в частности, условия предложения [30.2]. Поэтому:

[33.1] *Нормальный комплекс является ретрактом комплекса $S(X)$ и, следовательно, имеет тот же когомологический тип.*

Построение нормального комплекса, указанное в начале этого пункта, содержит значительный произвол, так что нормальных комплексов пространства X в точке x может быть много. Однако оказывается, что все они изоморфны. Более того, оказывается, что нормальные комплексы в различных точках также изоморфны. Для доказательства этого важного факта рассмотрим два нормальных комплекса N и $\acute{M}$ пространства X соответственно в точках x и x'. Мы знаем, что N является ретрактом комплекса $S(X)$. Пусть δ — соответствующая ретрагирующая гомотопия отображений комплекса $S(X)$ в себя, а $\nu = \delta_1$ — ретрагирующее симплициальное отображение комплекса $S(X)$ на комплекс N. Гомотопия δ порождает, как было описано в конце предыдущего пункта, изоморфное отображение θ_δ^r группы $\pi_{x'}^r(X)$ на группу $\pi_x^r(X)$. Очевидно, что

$$\widehat{\theta_\delta^1 1_M^1} = \nu^* 1_N^1.$$

Это равенство вместе с предложениями [32.11], [32.12] означает, что симплициальное отображение ν/M комплекса M в комплекс N согласовано с их натуральными оснащениями посредством изоморфизма $\theta_\delta = \{\theta_\delta^p\}$. Но отображение, согласованное с оснащениями посредством изоморфизма, само, как легко видеть, изоморфно. Тем самым доказано следующее предложение:

[33.2] *Все нормальные комплексы пространства X изоморфны между собой. Нормальный комплекс M на нормальный комплекс N изоморфно отображает ретрагирующее отображение, построенное для N. Это изоморфное отображение согласовано с натуральными оснащениями комплексов M и N посредством изоморфизма θ_δ.*

Пусть f — непрерывное отображение пространства X в пространство Y, N — нормальный комплекс пространства X в точке x, M — нормальный комплекс пространства Y в точке $f(x)$ и μ — ретрагирующее отображение комплекса $S(Y)$ на комплекс M. Тогда отображение

$$f_\mu = \mu f / N$$

является симплициальным отображением комплекса N в комплекс M. Из предложений [32.5] и [33.8] следует:

[33.3] *Симплициальное отображение f_μ комплекса N в комплекс M согласовано с натуральными оснащениями посредством гомоморфизма $f_* = \{f_p\}$.*

Отсюда следует:

[33.4] *Нормальные комплексы пространств одного гомотопического типа изоморфны, причем существует изоморфизм, согласованный с их естественными оснащениями.*

34. Натуральная система линейно связного пространства

Система, присоединенная к натурально оснащенному нормальному комплексу линейно связного пространства X в точке x, называется *натуральной системой пространства X в точке x*. Ее r-той группой является r-мерная гомотопическая группа пространства X в точке x, а ее факторы — новыми гомотопическими инвариантами пространства X. Мы назовем их *факторами пространства X*. Если пространство X асферично в размерностях, бо́льших единицы и меньших n, то все факторы $k_1, \ldots, k_{n-1}$ тривиальны. Первый нетривиальный фактор k_n является согласно [22.2] $(n+1)$-мерным коциклом группы $\pi_x^1(X)$ над группой $\pi_x^n(X)$. Оказывается, что он совпадает с упомянутым в п. 7 коциклом k, введенным Эйленбергом и Маклейном. Все остальные факторы впервые рассматриваются в этой работе.

Из предложения [33.3] следует, что с точностью до изоморфизма натуральная система линейно связного пространства не зависит от выбора нормального комплекса и даже от выбора точки x. Рассматривая построение изоморфизма θ_δ, легко получить следующий результат:

[34.1] *Пусть x и x' — две точки пространства X, а u — произвольный путь, соединяющий точку x с точкой x'. Соответствующее этому пути изоморфное отображение θ_u гомотопической серии $\pi_{x'}(X)$ пространства X в точке x' на гомотопическую серию $\pi_x(X)$ в точке x является изоморфным отображением натуральной системы пространства X в точке x' на натуральную систему пространства X в точке x.*

Пусть f — непрерывное отображение пространства X в пространство Y, а f_x — индуцированное им гомоморфное отображение гомотопической серии $\pi_x(X)$ в гомотопическую серию $\pi_{f(x)}(Y)$. Из предложения [33.3] следует, что отображение f_x является гомоморфным отображением натуральной системы пространства X в натуральную систему пространства Y. Если отображение f является гомотопической эквивалентностью, то, как мы знаем, отображение f_* изоморфно. Таким образом:

[34.2] *Натуральные системы пространств одного гомотопического типа изоморфны.*

Другими словами, натуральная система является гомотопическим инвариантом.

Комплекс натуральной системы изоморфен соответствующему нормальному комплексу, который согласно [33.1] имеет тот же когомологический тип, что и весь комплекс $S(X)$. Отсюда получается следующая

Теорема I. *Группы сингулярных когомологий линейно связного пространства изоморфны группам когомологий комплекса его натуральной системы.*

Эта теорема полностью отвечает на вопрос о влиянии гомотопических групп пространства на его группы сингулярных когомологий.

Заметим, что если мы интересуемся группами когомологий размерности, не большей n, то можно вместо всей натуральной системы ограничиться ее n-сегментом.

Отсюда следует, что если пространство асферично во всех размерностях, больших единицы и меньших n, то для любого $r<n$ его r-мерная группа сингулярных когомологий над некоторой группой G, в которой представлена группа $\pi_x^1(X)$, изоморфна r-мерной группе когомологий его фундаментальной группы, а его n-мерная группа когомологий изоморфна группе $E(k_n, G)$. Таким образом, обе сформулированные в п. 7 теоремы Эйленберга и Маклейна являются весьма частными случаями теоремы I.

§ 3. Теоремы реализации

35. Ячеечные полиэдры

Пусть X — произвольное топологическое пространство. Его подмножество e называется *r-мерной ячейкой*, если существует непрерывное отображение некоторого замкнутого r-мерного евклидова симплекса на замыкание $\bar{e}$ множества e, гомеоморфно отображающее внутренность * симплекса на e, а границу симплекса (вообще говоря, уже не гомеоморфно) на $\Delta e = \bar{e} \setminus e$. Множество Δe называется *границей* ячейки e.

Хаусдорфово пространство R, представленное как объединение некоторых непересекающихся ячеек, называется *ячеечным полиэдром*, а указанные ячейки (и только они) — *ячейками полиэдра*, если

ЯП 1 подмножество пространства R замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуто его пересечение с замыканием любой ячейки полиэдра **;

ЯП 2 граница любой ячейки полиэдра принадлежит объединению всех ячеек полиэдра меньшей размерности;

ЯП 3 любая ячейка содержится в замкнутом множестве, являющемся объединением конечного числа ячеек.

Полиэдр называется *конечным*, если он состоит из конечного числа ячеек, и *счетным*, если — из счетного. Полиэдр называется *локально-конечным*, если любая его точка является внутренней точкой замкнутого множества, состоящего из конечного числа ячеек (ср. с ЯП 3). Очевидно, что для конечного полиэдра условия ЯП 1 и ЯП 3 выполнены автоматически, т. е. хаусдорфово пространство, разбитое на конечное число ячеек и удовлетворяющее условию ЯП 2, является полиэдром. Оказывается, что то же самое верно и для локально-конечных полиэдров. Отсюда следует, что конечные и локально-конечные полиэдры в обычном смысле, т. е. тела некоторых триангуляций, являются ячеечными полиэдрами.

В существенном классы счетных и локально-конечных полиэдров совпадают. Именно, легко видеть, что связный локально-конечный полиэдр счетен. При этом можно доказать, что любой счетный ячеечный полиэдр имеет гомотопический тип некоторого локально-конечного

---

* Заметим, что нульмерный симплекс (т. е. точка) одновременно замкнут и открыт. Поэтому его внутренность совпадает с ним самим, а граница пуста.

** Для разъяснения смысла этого условия заметим, что, хотя топология замыкания любой ячейки определена однозначно (как так называемая топология отождествления), топология их объединения R топологиями замыканий ячеек однозначно еще не определена. Условие ЯП 1 отбирает из всех топологий, согласованных с топологиями замыканий ячеек, слабейшую, т. е. обладающую наименьшим запасом замкнутых множеств.

полиэдра (и даже тела локально-конечной триангуляции, причем если исходный полиэдр конечен, то эта триангуляция конечна).

Оказывается, что любой полиэдр является нормальным пространством. Поэтому любой локально-конечный полиэдр метризуем (так как он имеет счетную базу).

Полиэдр связен тогда и только тогда, когда он линейно связен. Поэтому для связных полиэдров справедлива вся теория линейно связных пространств.

Подмножество полиэдра называется *подполиэдром*, если оно содержит замыкание любой ячейки, имеющей с ним непустое пересечение. Из ЯП 1 следует, что любой подполиэдр замкнут. Подполиэдр является объединением некоторых ячеек полиэдра и потому естественным образом сам есть полиэдр. Пользуясь понятием подполиэдра, можно дать более простую формулировку условия ЯП 3:

ЯП 3′ любая ячейка полиэдра лежит в конечном подполиэдре.

Подмножество полиэдра R, состоящее из всех его ячеек, размерности, не большей некоторого n, $0 \leqslant n \leqslant \infty$, называется его *$n$-мерным остовом* и обозначается через R^n. Всегда $R^\infty = R$. Из ЯП 2 следует, что любой остов полиэдра является подполиэдром. С помощью понятия остова можно условие ЯП 2 перефразировать следующим образом.

ЯП 2′ граница любой ячейки принадлежит остову на единицу меньшей размерности.

Оказывается, что полиэдр связен тогда и только тогда, когда связен его одномерный остов, а значит, и связны все его остовы большей размерности.

Полиэдр называется *n-мерным*, $0 \leqslant n \leqslant \infty$, если он содержит n-мерные ячейки и не содержит ячеек большей размерности. Если $m \geqslant n$, то $R^m = R$. Таким образом, размерность n-мерного остова может быть меньше n.

Оказывается, что классическая лемма Борсука сохраняет силу для любых ячеечных полиэдров:

[35.1] ***Любой подполиэдр гомотопически правильно расположен в полиэдре. Следовательно, для отображений подполиэдров имеет место лемма о продолжении гомотопии.***

Доказательство этого предложения аналогично известному доказательству леммы Борсука. Трудности, возникающие из-за того, что замыкание ячейки не гомоморфно элементу, можно преодолеть так же, как это сделано ниже при доказательстве предложения [35.2].

Докажем теперь следующее важное предложение, параллельное предложению [30.2].

[35.2] ***Пусть R — связный полиэдр, а P — его подполиэдр. Предположим, что любое отображение произвольного элемента в полиэдр R, при котором граница элемента отображается в подполиэдр P, гомотопно относительно границы некоторому отображению*** *всего элемента в подполиэдр P. Тогда P есть деформационный ретракт полиэдра R*.*

Это предложение будет доказано, если мы найдем ретрагирующую деформацию, т. е. такую гомотопию f_t отображений полиэдра R в себя, что для любой точки $x \in R$

$$f_0(x) = x;$$

$$f_1(x) \in P;$$

причем если $x \in P$, то

$$f_t(x) = x.$$

Предположим, что мы нашли такое семейство f_t^n деформаций полиэдра R, что

$$f_0^n(x) = x, \qquad x \in R;$$

$$f_1^n(x) \in P, \qquad \text{если } x \in R^n;$$

$$f_t^n(x) = x, \qquad \text{если } x \in P^n;$$

$$f_t^n(x) = f_t^{n-1}(x), \text{ если } x \in R^{n-1}, \quad n > 0.$$

Тогда легко проверить, что формула

$$f_t(x) = f_t^n(x), \quad \text{если } x \in R^n,$$

определит нужную нам ретрагирующую деформацию f_t.

Таким образом, достаточно построить семейство деформаций f_t^n. Его построение мы проведем индукцией по числу n. Начнем индукцию с построения деформации f_t^0.

Так как полиэдр R связен, то любую его нульмерную ячейку можно соединить непрерывным путем с некоторой точкой полиэдра P. Выберем для каждой нульмерной ячейки по одному такому пути, причем если ячейка принадлежит подполиэдру P, то возьмем единичный путь. Выбор этих путей определит некоторую деформацию нульмерного остова R^0 полиэдра R в полиэдр P («движение по этим путям»). По лемме о продолжении гомотопии эту деформацию можно распространить до деформации всего полиэдра R в себя. Так построенная деформация f_t^0, как легко видеть, обладает всеми нужными свойствами.

Предположим, что деформация f_t^{n-1} уже построена. Если $R^n = R^{n-1}$, т. е. если полиэдр R не содержит n-мерных ячеек, то мы положим $f_t^n = f_t^{n-1}$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда в полиэдре R существуют n-мерные ячейки.

Пусть e — произвольная n-мерная ячейка полиэдра R. По определению ее замыкание $\bar{e}$ является образом n-мерного замкнутого симп-

* Заметим, что условие этой теоремы не только достаточно для того, чтобы подполиэдр P являлся деформационным ретрактом полиэдра R, но и необходимо. Доказательство этого совершенно автоматично.

лекса s^n при некотором гомеоморфном на внутренности симплекса отображении g. Отображение $(f_1^{n-1}/\Delta e)g$ переводит границу Δs^n симплекса s^n в подполиэдр P. Следовательно, по условию теоремы существует такая тождественная на Δs^n гомотопия h_t отображений симплекса s^n в полиэдр R, что

$$h_0 = (f_1^{n-1}/\bar{e})g;$$

$$h_1(\xi) \in P, \quad \xi \in s^n.$$

Если ячейка e принадлежит P, то, как легко видеть, деформацию h можно выбрать так, чтобы для любой точки $\xi \in s^n$

$$h_1(\xi) = g(\xi).$$

Пусть ξ_0 — центр тяжести симплекса s^n. Для любой точки $\xi \neq \xi_0$ симплекса s^n луч, исходящий из ξ_0 и проходящий через ξ, пересекает границу симплекса в одной и только одной точке π. Обозначив через ρ' отношение, в котором точка ξ делит отрезок $\overline{\xi_0\pi}$, положим $\rho = \frac{\rho'}{1+\rho'}$. Ясно, что $0 < \rho \leqslant 1$. Таким образом, любой точке $\xi \in s^n$, отличной от ξ_0, отнесена пара чисел $\langle \rho, \pi \rangle$ — ее «полярные координаты». Мы будем писать

$$\xi = \langle \rho, \pi \rangle.$$

Дополнительно условимся, что для любой точки $\pi \in \Delta s^n$ пара $\langle 0, \pi \rangle$ изображает точку ξ_0. Заметим, что если $\rho < 1$, то точка $\langle \rho, \pi \rangle$ лежит внутри симплекса s^n. Точка $\langle 1, \pi \rangle$ совпадает с π.

Определим теперь деформации f_t^n на замыкании $\bar{e}$ ячейки e, положив для любой точки $x = g(\langle \rho, \pi \rangle)$:

$$f_t^n(x) = \begin{cases} f^{n-1}_{\frac{2t}{1+\rho}}(x) & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1+\rho}{2}; \\ h_{\frac{2t-1-\rho}{1-\rho}}(\langle \rho, \pi \rangle), & \text{если} \quad \frac{1+\rho}{2} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Легко проверить, что так определенная деформация однозначна и непрерывна и что на Δe она совпадает с деформацией f_t^{n-1}.

Определив таким путем деформацию f_t^n на любой n-мерной ячейке полиэдра R, мы, как легко видеть, получим однозначную и непрерывную деформацию n-мерного остова R^n в полиэдр P. Применив лемму о продолжении гомотопии, мы придем к деформации всего полиэдра R, очевидно, обладающей требуемыми свойствами. Тем самым предложение [35.2] доказано.

Пусть R_1 и R_2 — два полиэдра. Очевидно, что если e_1 есть ячейка полиэдра R_1, а e_2 — ячейка полиэдра R_2, то $e_1 \times e_2$ есть ячейка топологического произведения $R_1 \times R_2$ полиэдров R_1 и R_2. Все ячейки пространства $R_1 \times R_2$ вида $e_1 \times e_2$ попарно не пересекаются и покрывают все пространство. Нетрудно проверить, что для этого разбиения пространства $R_1 \times R_2$ на ячейки выполнены условия ЯП 2 и ЯП 3. Хуже дело обстоит с условием ЯП 1. Не доказано, что оно справедливо, и вместе с тем противоречащих примеров тоже нет. Однако легко доказать, что это условие выполнено, если один из полиэдров локально конечен. Таким образом, можно утверждать, что топологическое произведение полиэдров (в указанном разбиении на ячейки) является полиэдром только тогда, когда хотя бы один из сомножителей локально конечен.

Отрезок $I = [0, 1]$ мы будем рассматривать как конечный полиэдр, состоящий из двух нульмерных ячеек 0 и 1 и одной одномерной (0, 1). В соответствии с этим для любого полиэдра R произведение $R \times I$, разбитое на ячейки вида $e \times 0$, $e \times 1$ и $e \times (0, 1)$, является полиэдром. Его подмножество R_0, состоящее из ячеек вида $e \times 0$, является, очевидно, полиэдром. Подполиэдром будет и совокупность R_1 всех ячеек вида $e \times 1$.

Непрерывное отображение f полиэдра R_1 в полиэдр R_2 называется *ячеечным*, если для любого $n \geqslant 0$

$$f(R_1^n) \subset R_2^n.$$

Гомеоморфное ячеечное отображение, обратное которому отображение также ячеечно, называется ***изоморфным***. Полиэдры называются ***изоморфными***, если существует хотя бы одно изоморфное отображение одного полиэдра на другой. Например, определенные выше подполиэдры R_0 и R_1 полиэдра $R \times I$ естественным образом изоморфны полиэдру R.

Пусть f — непрерывное отображение полиэдра R_1 в полиэдр R_2 и пусть R — его цилиндр. Напомним, что R является образом полиэдра $R_1 \times I \cup R_2$ при отображении α (см. п. 1). Легко видеть, что пространство R хаусдорфово и что образы при отображении α ячеек полиэдра $R_1 \times I$ вида $e \times 0$, $e \times (0, 1)$ и ячеек полиэдра R_2 являются ячейками пространства R, причем все эти ячейки покрывают R и не пересекаются. Таким образом, хаусдорфово пространство R оказывается разбитым на непересекающиеся ячейки, причем на R_1 и R_2 индуцируется их естественное разбиение. Если отображение f ячеечное, то нетрудно показать, что в указанном разбиении на ячейки цилиндр R оказывается полиэдром и, следовательно, полиэдры R_1 и R_2 — его подполиэдрами. Таким образом:

[35.3] *Цилиндр ячеечного отображения полиэдра R_1 в полиэдр R_2 является полиэдром, содержащим данные полиэдры в качестве подполиэдров.*

Значение ячеечных отображений для теории гомотопий определяется следующим простым предложением:

[35.4] *Любое непрерывное отображение одного полиэдра в другой гомотопно ячеечному.*

Имеет место и более сильное предложение:

[35.5] *Если непрерывное отображение одного полиэдра в другой ячеечно на некотором подполиэдре, то относительно этого подполиэдра оно гомотопно ячеечному отображению.*

Гомотопия отображений полиэдра R_1 в полиэдр R_2 называется *ячеечной*, если она ячеечна, как отображение в полиэдр R_2 полиэдра $R_1 \times I$. Из предложения [35.5] следует:

[35.6] *Ячеечные отображения гомотопны между собой тогда и только тогда, когда они ячеечно гомотопны; причем, если связывающая их гомотопия уже ячеечна на некотором подполиэдре, то существует ячеечная гомотопия, совпадающая на этом подполиэдре с данной.*

Из этих предложений следует, что при изучении гомотопических свойств полиэдров мы можем считать все отображения и гомотопии ячеечными. В частности, для полиэдров одного гомотопического типа всегда существует ячеечное гомотопически эквивалентное отображение одного полиэдра в другой.

Как мы знаем, гомотопическая эквивалентность индуцирует изоморфизм гомотопических серий. Оказывается, что для полиэдров имеет место и обратное утверждение:

[35.7] *Непрерывное отображение одного полиэдра в другой, индуцирующее изоморфизм гомотопических серий, является гомотопической эквивалентностью.*

Действительно, согласно [35.4] данное отображение гомотопно некоторому ячеечному отображению f. Из формулы (5.1) следует, что отображение f также индуцирует изоморфизм гомотопических серий. Применяя теперь к его цилиндру, являющемуся согласно [35.3] полиэдром, предложения [5.8] и [35.2] и воспользовавшись критерием [1.3], мы получим, что f, а значит, и данное отображение являются гомотопической эквивалентностью.

Ячеечное отображение n-мерного остова R_1^n полиэдра R_1 в n-мерный остов R_2^n полиэдра R_2 называется *n-отображением полиэдра R_1 в полиэдр R_2*. n-отображение f полиэдра R_1 в полиэдр R_2 $(1 \leqslant n \leqslant \infty)$ называется *n-эквивалентностью*, если существует такое n-отображение g полиэдра R_2 в полиэдр R_1, что

$$gf \,/\, R_1^{n-1} \sim 1_{R_1}, \quad fg \,/\, R_2^{n-1} \sim 1_{R_2}.$$

Отображение g также n-эквивалентно и называется n-эквивалентностью, *обратной* к n-эквивалентности f. Полиэдры называются полиэдрами *одного n-типа*, если существует хотя бы одно n-эквивалентное отображение одного полиэдра в другой. Ясно, что полиэдры одного n-типа имеют один и тот же m-тип для любого $m \leqslant n$. Кроме того, ∞-типы или, как кратко будем говорить, *типы* совпадают с гомотопическими типами. Таким образом, расположение полиэдров по n-типам гомотопически инвариантно.

Основной целью этого параграфа является доказательство следующего критерия принадлежности полиэдров к одному n-типу: два полиэдра тогда и только тогда принадлежат одному n-типу, когда их натуральные системы n-изоморфны. Так как натуральная система состоит из бесконечного числа групп, то этот критерий кажется мало эффективным. Однако очевидно, что два n-мерных полиэдра тогда и только тогда имеют один гомотопический тип, когда они имеют один $(n+1)$-тип. Поэтому для полиэдров конечной размерности указанный здесь критерий становится более эффективным. Конечно, его можно будет считать вполне эффективным лишь тогда, когда появятся эффективные методы вычисления гомотопических групп и натуральных систем.

Необходимость указанного критерия почти очевидна. Докажем ее.

Поляризованную сферу S размерности r можно рассматривать как ячеечный полиэдр, состоящий из нульмерной ячейки — полюса и r-мерной ячейки — его дополнения. В соответствии с этим сфериод (f, S) полиэдра R называется *ячеечным*, если отображение f рассматриваемой как полиэдр сферы S в полиэдр R ячеечно. Ячеечные сфероиды разбиваются естественным образом на *ячеечные типы*. Из предложений [35.5] и [35.6] следует, что в определении гомотопических групп достаточно ограничиться ячеечными типами. Поэтому для $r<n$ группы $\pi_x^r(R)$ и $\pi_x^r(R^n)$, где x — нульмерная ячейка полиэдра R, изоморфны. Мы будем эти группы отождествлять.

Из этого замечания следует, что n-отображение полиэдра R_1 в полиэдр R_2 индуцирует для любого $r<n$ гомоморфное отображение f_x^r группы $\pi_x^r(R_1)$ в группу $\pi_{f(x)}^r(R_2)$, причем это отображение изоморфно, если f является n-эквивалентностью. Отсюда аналогично предложению [34.2] следует необходимость указанного выше критерия:

[35.8] *Натуральные системы полиэдров одного n-типа n-изоморфны.*

Аналогично легко получить следующее обобщение предложения [35.8]:

[35.9] *Если n-отображение индуцирует n-изоморфизм натуральных систем, то оно n-эквивалентно.*

На его доказательстве мы не останавливаемся, так как это предложение нам не понадобится.

36. Симплициальные полиэдры

Пусть E — некоторое, вообще говоря, бесконечно-мерное линейное пространство над полем действительных чисел, являющееся алгебраической прямой суммой одномерных линейных пространств. Число слагаемых, т. е. размерность пространства E, мы считаем настолько большим, чтобы все нужные нам построения были в нем возможны. Возникающую в силу этого опасность теоретико-множественных парадоксов можно устранить обычным способом, ограничивая мощности. Не желая усложнять изложение, мы этого делать не будем.

Пространство E мы не будем считать топологическим, однако все его конечно-мерные подпространства будем считать снабженными обычной евклидовой топологией. В соответствии с этим все подмножества пространства E, лежащие в конечных подпространствах (например, симплексы), окажутся топологизованными.

Триангуляцией называется любое множество непересекающихся открытых симплексов пространства E, содержащее вместе с некоторым симплексом и все его грани. Теоретико-множественную сумму всех симплексов некоторой триангуляции назовем ее *телом*. Тело триангуляции мы топологизируем, объявив замкнутыми множествами те и только те множества, пересечения которых с замыканием любого симплекса триангуляции замкнуты в нем. Тогда симплексы триангуляции окажутся ячейками, а тело триангуляции ячеечным полиэдром. Так получающиеся ячеечные полиэдры называются *симплициальными полиэдрами*.

Легко видеть, что если триангуляция конечна, то ее тело есть полиэдр в смысле [1]. Таким образом, введенные здесь понятия являются непосредственными обобщениями полиэдров на случай бесконечного числа симплексов. Легко проверить, что основные понятия теории полиэдров сохранят свой смысл и для рассматриваемого здесь общего случая. К таким понятиям относится понятие подразделения, в частности барицентрического подразделения, понятие нормального сдвига и т. п. Основные свойства этих понятий также остаются в силе. Мы будем ими пользоваться без дальнейших оговорок.

Заметим, что бесконечные полиэдры в обычном смысле слова могут не быть симплициальными полиэдрами, как мы их определили. Например, бесконечная триангуляция области евклидова пространства не есть триангуляция симплициального полиэдра.

Триангуляция называется *нумерованной*, если все ее симплексы нумерованы, причем любая грань любого симплекса является ее нумерованной гранью в смысле п. 6. Любую триангуляцию можно занумеровать, например, расположив все ее вершины в определенном порядке и занумеровав вершины любого симплекса в соответствии с этим порядком.

Из (6.4) и (6.5) следует, что любая нумерованная триангуляция является полусимплициальным комплексом и, как легко видеть, даже симплициальным в смысле п. 8. Обратно, нетрудно убедиться, рассуждая аналогично доказательству теоремы о включении ([1], стр. 157, предложение [1.9]) и воспользовавшись предложением [10.1], что любой симплициальный комплекс изоморфен некоторой нумерованной триангуляции. Тело этой триангуляции мы будем называть *геометрической реализацией* данного симплициального комплекса.

Заметим, что барицентрическое подразделение (в обычном смысле) геометрической реализации некоторого комплекса является геометрической реализацией его барицентрического подразделения в смысле п. 8.

Мы будем, как правило, отождествлять симплициальные полиэдры и соответствующие триангуляции. В соответствии с этим приобретают смысл высказывания типа «нумерованный симплициальный полиэдр», «симплициальное отображение полусимплициального комплекса в нумерованный симплициальный полиэдр» и т. п. Такого рода соглашение к недоразумениям не приводит и облегчает речь. Например, мы теперь можем геометрическую реализацию симплициального комплекса определить как изоморфный ему нумерованный симплициальный полиэдр.

Ячеечное отображение одного симплициального полиэдра в другой назовем *полиэдральным*, если оно линейно отображает любой симплекс первого полиэдра на некоторый симплекс второго. Очевидно, что понятие полиэдрального отображения есть непосредственное обобщение обычного понятия симплициального отображения. Мы изменили терминологию, чтобы не путать определенные здесь отображения с симплициальными отображениями полусимплициальных комплексов.

Полиэдральное отображение нумерованных симплициальных полиэдров называется *сохраняющим нумерацию*, если из того, что вершина x имеет в некотором симплексе номер, меньший номера вершины x', следует, что в образе этого симплекса образ вершины x имеет номер, не больший номера образа вершины x'.

Полиэдральное отображение называется *невырожденным*, если любой симплекс оно отображает в симплекс той же размерности.

Очевидно, что любое невырожденное сохраняющее нумерацаю полиэдральное отображение нумерованных симплициальных полиэдров порождает некоторое симплициальное отображение этих полиэдров (точнее их триангуляций). Обратно, легко видеть, что любое симплициальное отображение одного нумерованного симплициального полиэдра на другой порождается однозначно определенным невырожденным, сохраняющим нумерацию полиэдральным отображением. Это полиэдральное отображение называется *геометрической реализацией* данного симплициального отображения.

37. Полусимплициальные полиэдры

Пусть N — произвольный полусимплициальный комплекс. Множество $F(N)$ всех пар вида

$$(A, \mathfrak{a}),$$

где A — произвольный симплекс комплекса N, а $\mathfrak{a}$ — произвольный кортеж высоты, не большей размерности симплекса A, мы обратим в полусимплициальный комплекс, положив размерность пары $(A, \mathfrak{a})$ равной длине кортежа $\mathfrak{a}$ и определив ее $\mathfrak{b}$-грань формулой

$$(A, \mathfrak{a})_{(\mathfrak{b})} = (A, \mathfrak{a}_{(\mathfrak{b})}).$$

Так полученный комплекс $F(N)$ называется *свободным расширением* комплекса N. Он, как легко видеть, симплициален и поэтому обладает геометрической реализацией, которую мы обозначим через $R(N)$. Это — некоторая нумерованная триангуляция, симплексы которой находятся во взаимно однозначном соответствии с парами $(A, \mathfrak{a})$. Симплекс (открытый), соответствующий паре $(A, \mathfrak{a})$, обозначим через $[A, \mathfrak{a}]$.

Два симплекса $[A_1, \mathfrak{a}_1]$ и $[A_2, \mathfrak{a}_2]$ полиэдра $R(N)$ называются эквивалентными, в записи

$$[A_1, \mathfrak{a}_1] \equiv [A_2, \mathfrak{a}_2],$$

если

$$A_{1(\mathfrak{a}_1)} = A_{2(\mathfrak{a}_2)}.$$

Размерности эквивалентных симплексов, очевидно, совпадают.

Две точки ξ_1 и ξ_2 полиэдра $R(N)$ называются *эквивалентными*, в записи

$$\xi_1 \equiv \xi_2,$$

если они принадлежат эквивалентным симплексам, скажем $[A_1, \mathfrak{a}_1]$ и $[A_2, \mathfrak{a}_2]$, и если

$$\xi_2 = \varepsilon([A_1, \mathfrak{a}_1], [A_2, \mathfrak{a}_2])(\xi_1).$$

Легко видеть, что это отношение эквивалентности позволяет разбить полиэдр $R(N)$ на непересекающиеся классы попарно эквивалентных точек. Класс, содержащий точку ξ, обозначим через $\nu(\xi)$, а множество всех классов — через $P(N)$.

Введем в множество $P(N)$ топологию, объявив замкнутыми множествами те и только те множества, полные прообразы которых при отображении ν замкнуты. Тогда $P(N)$ обратится в хаусдорфово топологическое пространство, а отображение ν окажется непрерывным. Легко видеть, что образы при отображении ν симплексов триангуляции $R(N)$ являются ячейками пространства $P(N)$, причем две такие ячейки либо совпадают, либо не пересекаются. Таким образом, пространство $P(N)$ оказывается разложенным на непересекающиеся ячейки, причем нетрудно убедится, что относительно этого разложения оно является ячеечным полиэдром и, следовательно, отображение ν — ячеечным отображением. Так полученный полиэдр $P(N)$ называется *геометрической реализацией* полусимплициального комплекса N.

Ячеечные полиэдры, могущие служить геометрическими реализациями полусимплициальных комплексов, называются *полусимплициальными* полиэдрами. Изучим их подробнее.

Пусть комплекс N симплициален и пусть $\overline{N}$ — некоторая его геометрическая реализация в смысле предыдущего пункта. Отображение $(A, \mathfrak{a}) \to A_{(\mathfrak{a})}$ комплекса $F(N)$ на комплекс N, очевидно, симплициально. Его геометрическую реализацию обозначим через $\bar{\nu}$. Это — невырожденное сохраняющее нумерацию полиэдральное отображение полиэдра $R(N)$ в полиэдр $\overline{N}$. Легко видеть, что отображение $\nu\bar{\nu}^{-1}$ полиэдра $\overline{N}$ на полиэдр $P(N)$ однозначно и даже гомеоморфно. Кроме того, оно переводит симплексы триангуляции $\overline{N}$ в ячейки полиэдра $P(N)$. Таким образом, полиэдр $P(N)$ изоморфен полиэдру $\overline{N}$. Другими словами, геометрическая реализация симплициального комплекса в смысле предыдущего пункта изоморфна его геометрической реализации, как она определена здесь.

Пусть опять комплекс N произволен и пусть $B(N)$ — его первое барицентрическое подразделение, а $F(N)$ и $F(B(N))$ — свободные расширения комплексов N и $B(N)$ соответственно. Триангуляцию $F(N)$ подразделим барицентрически. Полученную триангуляцию обозначим через $B(F(N))$.

Симплексы триангуляции $B(F(N))$ находятся во взаимно однозначном соответствии с конечными последовательностями симплексов триангуляции $F(N)$, в которых каждый следующий симплекс есть собственная грань предыдущего. Любая такая последовательность имеет вид:

$$([A, \mathfrak{a}_0], [A, \mathfrak{a}_1], \ldots, [A, \mathfrak{a}_s]), \tag{37.1}$$

где A — некоторый симплекс комплекса N, а кортеж $\mathfrak{a}_i$ для любого $i = 1, \ldots, s$ является подкортежем кортежа $\mathfrak{a}_{i-1}$.

Симплексы же триангуляции $F(B(N))$ имеют вид:

$$[(A, \mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_t), \mathfrak{a}], \tag{37.2}$$

где A — произвольный симплекс комплекса N, $\mathfrak{a} = (a_0, \ldots, a_s)$ — произвольный кортеж высоты, не большей t, а $\mathfrak{a}_i$ $(i = 0, \ldots, t)$ — такие кортежи, что для $i > 0$ кортеж $\mathfrak{a}_i$ является подкортежем кортежа $\mathfrak{a}_{i-1}$, а кортеж $\mathfrak{a}_0$ есть кортеж $\{r\}$, где r — размерность симплекса A.

Отнесем симплексу (37.2) следующий симплекс триангуляции $B(F(N))$:

$$([A, \mathfrak{a}_{a_0}], [A, \mathfrak{a}_{a_1}], \ldots, [A, \mathfrak{a}_{a_s}]).$$

Очевидно, что это отнесение симплексов определяет невырожденное полиэдральное отображение триангуляции $F(B(N))$ в триангуляцию $B(F(N))$. Обозначим это отображение через φ.

Легко видеть, что отображение $\nu\varphi\nu^{-1}$ полиэдра $P(B(N))$ в полиэдр $P(N)$ есть отображение на и гомеоморфно. После отождествления точек, соответствующих друг другу при этом гомеоморфизме, любая ячейка полиэдра $P(N)$ окажется объединением конечного числа ячеек полиэдра $P(B(N))$, причем комбинаторная схема этого разложения та же, что и схема барицентрического подразделения открытого симплекса. Мы скажем, что полиэдр $P(B(N))$ есть *барицентрическое подразделение* полиэдра $P(N)$.

Очевидно, что подразделение подразделения есть подразделение. В частности, полиэдр $P(B^2(N))$ есть подразделение полиэдра $P(N)$. Но согласно [8.7] комплекс $B^2(N)$ симплициален. Поэтому $P(B^2(N))$ есть симплициальный полиэдр, являющийся его геометрической реализацией в смысле предыдущего пункта. Таким образом:

[37.1] *Второе барицентрическое подразделение полусимплициального полиэдра симплициально.*

На полусимплициальные полиэдры можно перенести не только понятие барицентрического подразделения, но и другие понятия теории симплициальных полиэдров. Начнем с нормального сдвига.

Напомним, что *нормальным сдвигом* называется полиэдральное отображение подразделения Q' некоторой триангуляции Q, отображающее любую ее вершину в некоторую вершину того симплекса (открытого), который данную вершину содержит. (Этот симплекс называется *носителем* данной вершины.) Если триангуляция Q нумерована, то нормальный сдвиг однозначно определяется условием: любая вершина отображается в вершину носителя с наибольшим номером. Любой нормальный сдвиг ω_1 гомотопен тождественному отображению. Эту гомотопию можно, например, определить формулой

$$\omega_t(\xi) = (1-t)\,\xi + t\omega_1(\xi).$$

Так определенная гомотопия называется *нормальной деформацией*.

Легко видеть, что нормальная деформация ω_t полиэдра $B(F(N))$ в полиэдр $F(N)$ (она однозначно определена, потому что полиэдр $F(N)$ нумерован) такова, что отображение $\tilde{\omega}_t = \nu\omega_t\nu^{-1}$ пространства $P(N)$ на себя однозначно и непрерывно, так что семейство отображений $\tilde{\omega}_t$ является гомотопией, связывающей тождественное отображение с некоторым отображением $\tilde{\omega}_1 = \nu\omega_1\nu^{-1}$. Очевидно, что отображение $\tilde{\omega}_1$ переводит любую ячейку полиэдра $P(B(N))$ в ячейку полиэдра $P(N)$ и, следовательно, ячеечно. Мы назовем отображение ω_1 *нормальным сдвигом* полиэдра $P(B(N))$ в полиэдр $P(N)$, а гомотопию ω_t — *нормальной деформацией*.

Аналогично определяется нормальный сдвиг и нормальная деформация полиэдра $P(B^2(N))$ в полиэдр $P(N)$.

Перенесем теперь на полусимплициальные полиэдры общее понятие полиэдрального отображения.

Пусть N и M — произвольные полусимплициальные комплексы, а $R(N)$ и $R(M)$ — геометрические реализации их свободных расширений. Пусть $\overline{w}$ — некоторое полиэдральное отображение полиэдра

$\overline{R}(N)$ и полиэдр $\overline{R}(M)$, сохраняющее нумерацию и переводящее эквивалентные симплексы в эквивалентные. Тогда $\overline{w}$ переводит эквивалентные точки в эквивалентные и, следовательно, порождает некоторое отображение w полиэдра $P(N)$ в полиэдр $P(M)$. Легко видеть, что отображение w ячеечно. Мы назовем его *полиэдральным отображением, индуцированным полиэдральным отображением* $\overline{w}$. Полиэдральное отображение, индуцированное невырожденным отображением, назовем *собственным*. Легко доказать следующие утверждения:

1) Любой нормальный сдвиг является полиэдральным отображением.

2) Любое сохраняющее нумерацию полиэдральное отображение (в обычном смысле) симплициальных полиэдров есть полиэдральное отображение в только что определенном смысле.

3) Произведение двух полиэдральных отображений полиэдрально.

Пусть ω — произвольное симплициальное отображение комплекса N в комплекс M. Легко видеть, что соответствие

$$[A, \mathfrak{a}] \to [\omega A, \mathfrak{a}]$$

порождает некоторое полиэдральное невырожденное отображение, сохраняющее нумерацию и эквивалентность симплексов. Индуцированное им собственное полиэдральное отображение w полиэдра $P(N)$ в полиэдр $P(M)$ назовем *геометрической реализацией симплициального отображения* ω. Оно изоморфно, если изоморфно ω. Отсюда следует:

[37.2] *Геометрические реализации изоморфных полусимплициальных комплексов изоморфны и, следовательно, имеют один тип.*

Определив аналогично реализацию n-отображения, получим:

[37.3] *Геометрические реализации n-изоморфных полусимплициальных комплексов имеют одинаковый n-тип.*

Обратное, конечно, неверно.

Значение полиэдральных отображений для теории гомотопии выясняется следующим предложением:

[37.4] *Пусть f — любое непрерывное отображение некоторого полусимплициального полиэдра P в полусимплициальный полиэдр Q. Существует полиэдральное отображение некоторого нумерованного подразделения P' полиэдра P в полиэдр Q, гомотопное отображению f.*

В силу предложения [37.1] можно считать полиэдр P симплициальным. Тогда по известной теореме о симплициальной аппроксимации (как легко видеть, справедливой для любых симплициальных полиэдров) существует полиэдральное отображение f_1 некоторого подразделения P' полиэдра P во второе барицентрическое подразделение полиэдра Q, которое согласно [37.1] является нумерованным симплициальным полиэдром. В полиэдр P' введем нумерацию так, чтобы отображение f_1 ее сохраняло. Легко видеть, что это сделать можно. Пусть ω_1 — нормальный сдвиг второго барицентрического подразделения полиэдра Q в полиэдр Q. Тогда отображение $\omega_1 f_1$ полиэдра P' в полиэдр Q полиэдрально и гомотопно отображению f.

Доказанное предложение нужно рассматривать как обобщение на полусимплициальные полиэдры теоремы о симплициальной аппроксимации.

Оказывается, что полиэдральное отображение, гомотопное отображению f, можно иногда считать собственным. Это важное замечание вытекает из следующего предложения:

[37.5] *Любое полиэдральное отображение w полусимплициального полиэдра P в полусимплициальный полиэдр Q, являющийся геометрической реализацией $P(M)$ некоторого полного полусимплициального комплекса M, гомотопно собственному полиэдральному отображению.*

Пусть полиэдр P является геометрической реализацией $P(N)$ некоторого полусимплициального комплекса N и пусть отображение w индуцировано полиэдральным отображением $\overline{w}$ полиэдра $R(N)$ в полиэдр $R(M)$. Естественное отображение полиэдра $R(M)$ в полиэдр $Q = R(M)$ обозначим через μ.

Предложение [37.5] будет доказано, если мы построим такую гомотопию v_t отображений полиэдра $R(N)$ в полиэдр $R(M)$, что

1) $\mu\overline{w} = \mu v_0$;

2) если $\xi_1 = \xi_2$, то $v_t(\xi_1) = v_t(\xi_2)$;

3) отображение v_1 полиэдрально и невырождено.

Мы будем строить гомотопию v_t отдельно на каждой компоненте полиэдра $R(N)$.

Легко видеть, что любая компонента полиэдра $R(N)$ является замыканием

$$\overline{[A, \{r\}]}$$

некоторого симплекса вида $[A, \{r\}]$, где A есть r-мерный симплекс комплекса N. Обозначим это замыкание через $\overline{A}$.

Отображение $\overline{w}$ переводит симплекс $[A, \{r\}]$ в некоторый симплекс $[B, \mathfrak{b}]$ полиэдра $R(M)$. Размерность симплекса $[B, \mathfrak{b}]$ обозначим через n $(n \leqslant r)$.

Рассмотрим надстройку

$$B' = B_{(\mathfrak{b})}(n)(n+1)\cdots(n+r)$$

над симплексом $B_{(\mathfrak{b})}$ и построим симплекс $[B', \{r+n+1\}]$ полиэдра $R(M)$. Его замыкание мы обозначим через $\overline{B}$. Определим отображение v_0 полиэдра $R(N)$ в полиэдр $R(M)$, положив на замкнутом симплексе $\overline{A}$

$$v_0 = \varepsilon(\overline{[B, \mathfrak{b}]}, \overline{B}_{(\{n\})}) \cdot \overline{w} / \overline{A}.$$

Отображение v_0 отображает симплекс $\overline{A}$ на грань $\overline{B}_{(\{n\})}$ симплекса $\overline{B}$. Очевидно, что отображение v_0 полиэдрально и $\mu v_0 = \mu w$.

Определим отображение v_1 полиэдра $R(N)$ в полиэдр $R(M)$, положив на замкнутом симплексе $\overline{A}$

$$v_1 = \varepsilon(\overline{A}, \overline{B}^{(\{n\})}).$$

Очевидно, что отображение v_1 полиэдрально, невырождено, сохраняет нумерацию и эквивалентность вершин.

Построим теперь гомотопию v_t, определив ее на замкнутом симплексе $\overline{A}$ формулой

$$v_t(x) = (1-t)\, v_0(x) + t v_t(x), x \in \overline{A}.$$

Это — гомотопия, связывающая отображение v_0 с отображением v_1 Нетрудно проверить, что для любого t отображение v_t переводит эквивалентные точки в эквивалентные.

Тем самым предложение [37.5] доказано.

Из предложений [37.4] и [37.5] немедленно вытекает следующий весьма важный для нас результат:

[37.6] *Пусть f — произвольное непрерывное отображение некоторого полусимплициального полиэдра P в полусимплициальный полиэдр Q, являющийся геометрической реализацией некоторого полного полусимплициального комплекса. Тогда для некоторого симплициального подразделения P' полиэдра P существует собственное полиэдральное отображение полиэдра P' в полиэдр Q, гомотопное отображению f.*

38. Присоединенные полиэдры

Пусть X — произвольное линейно связное пространство. Геометрическую реализацию $P(S(X))$ его сингулярного комплекса $S(X)$ назовем (*полным*) *присоединенным к X полиэдром* и будем обозначать через $P(X)$. Геометрическую реализацию $P(N)$ некоторого нормального комплекса N пространства X назовем *нормальным присоединенным к X полиэдром*. Его можно считать подполиэдром полиэдра $P(X)$. Оказывается, что

[38.1] *Нормальный присоединенный полиэдр является деформационным ретрактом полного присоединенного полиэдра.*

Действительно, геометрическая реализация ретрагирующего отображения комплекса $S(X)$ на комплекс N является, очевидно, ретрагирующим отображением полиэдра $P(X)$ на полиэдр $P(N)$, связанно гомотопным относительно $P(N)$ тождественному отображению.

Отсюда следует:

[38.2] *Гомотопический тип нормального присоединенного полиэдра совпадает с гомотопическим типом полного присоединенного полиэдра.*

Пусть $\mathfrak{S}$ — некоторая система. Геометрическую реализацию ее комплекса $K(\mathfrak{S})$ назовем *полиэдром, присоединенным к системе* $\mathfrak{S}$, и обозначим через $P(\mathfrak{S})$. Пусть θ — гомоморфное отображение системы $\mathfrak{S}$ в некоторую систему $\mathfrak{H}$ и пусть ϑ — соответствующее симплициальное отображение комплекса $K(\mathfrak{S})$ в комплекс $K(\mathfrak{H})$. Геометрическую реализацию отображения ϑ, являющуюся полиэдральным отображением полиэдра $P(\mathfrak{S})$ в полиэдр $P(\mathfrak{H})$, назовем *отображением, индуцированным гомоморфизмом* θ. Заметим, что гомоморфизмом θ оно однозначно не определяется, потому что однозначно не определяется отображение ϑ. Очевидно, что отображение, индуцированное изоморфизмом, изоморфно. Отсюда следует, что с точностью до изоморфизма полиэдр, присоединенный к системе, определен однозначно.

Ясно, что полиэдр, присоединенный к натуральной системе пространства X, изоморфен нормальному присоединенному полиэдру $P(N)$. Отсюда в силу [38.2] следует:

[38.3] *Если натуральные системы двух пространств изоморфны, то присоединенные к пространствам полиэдры имеют одинаковый гомотопический тип.*

Очевидно, что геометрическая реализация n-мерного остова некоторого комплекса является n-мерным остовом геометрической реализации всего комплекса. Отсюда аналогично предложению [38.3] следует более общее предложение:

[38.4] *Если натуральные системы двух пространств n-изоморфны, то присоединенные к пространствам полиэдры имеют один и тот же n-тип.*

Вспомним, что полиэдр $P(X)$ получается некоторыми отождествлениями из симплициального полиэдра $R(X)$ — геометрической реализации свободного расширения сингулярного комплекса $S(X)$. Симплексы полиэдра $R(X)$ имеют вид:

$$[A, \mathfrak{a}],$$

где A — произвольный сингулярный симплекс пространства X, а $\mathfrak{a}$ — произвольный кортеж высоты, не большей размерности симплекса A. Определим отображение $\bar{p}$ полиэдра $R(X)$ в пространство X, положив на некотором симплексе $[A, \mathfrak{a}]$

$$\bar{p}/[A, \mathfrak{a}] = A_{(\mathfrak{a})} \cdot \varepsilon([A, \mathfrak{a}]).$$

Легко видеть, что так построенное отображение $\bar{p}$ непрерывно и переводит эквивалентные точки в эквивалентные. Поэтому оно порождает однозначное и непрерывное отображение p полиэдра $P(X)$ в пространство X. Назовем отображение p *присоединенным.*

Пусть P — произвольный симплициальный полиэдр и f — некоторое его отображение в пространство X. Зададим в полиэдре P некоторую нумерацию. Тем самым он обратится в полусимплициальный (даже симплициальный) комплекс, а отображение f даст некоторое симплициальное отображение f' этого комплекса в комплекс $S(X)$. Обозначим через $f^{\#}$ геометрическую реализацию симплициального отображения f'. Отображение $f^{\#}$ является полиэдральным отображением полиэдра P в полиэдр $P(X)$. Назовем его *присоединенным к отображению* f. Несколько более сложно отображение $f^{\#}$ можно определить и для любых полусимплициальных полиэдров, но нам это обобщение не понадобится.

Отображение $f^{\#}$ зависит от выбора нумерации полиэдра P. Но оказывается, что его гомотопический класс от выбора нумерации не зависит, т. е. если $f^{\#\prime}$ есть отображение, присоединенное к отображению f и соответствующее иной нумерации, то отображения $f^{\#}$ и $f^{\#\prime}$ гомотопны.

Далее если мы рассмотрим некоторое подразделение P' полиэдра P и занумеруем его, то для этого подразделения мы также можем построить присоединенное к f отображение. Оказывается, что его гомотопический класс совпадает с классом отображения $f^{\#}$.

Наконец, оказывается, что отображения, присоединенные к гомотопным отображениям, гомотопны между собой.

Все эти утверждения вытекают из следующего общего предложения:

[38.5] *Пусть P — произвольный симплициальный полиэдр, P' — некоторое его подразделение, а f и g — гомотопные между собой отображения полиэдра P в пространство X. Фиксировав в P некоторую нумерацию, определим полиэдральное отображение $f^{\#}$поли эдра P в полиэдр $P(X)$, присоединенное к отображению f, и фиксировав в P' некоторую нумерацию, определим полиэдральное отображение $g^{\#}$ полиэдра P' в полиэдр $P(X)$, присоединенное к отображению g. Оказывается, что отображения $f^{\#}$ и $g^{\#}$ гомотопны между собой.*

Действительно, пусть F — гомотопия, связывающая отображение f с отображением g. Триангулируем произведение $P\times I$ так, чтобы на нижнем основании $P\times 0$ получилась триангуляция P, а на верхнем $P\times 1$ — триангуляция P'. Легко видеть, что такую триангуляцию всегда можно построить, причем так, чтобы на ней можно было ввести нумерацию, совпадающую на верхнем и нижнем основаниях с данными нумерациями. Для так нумерованного и триангулированного произведения $P\times I$ построим присоединенное к F полиэдральное отображение $F^{\#}$. Очевидно, что отображение $F^{\#}$ является гомотопией, связывающей отображение $f^{\#}$ с отображением $g^{\#}$. Утверждение доказано.

От отображения $f^{\#}$ легко вернуться к отображению f. Именно имеет место следующая очевидная формула:

$$f = pf^{\#}. \tag{38.1}$$

Пусть теперь g — некоторое непрерывное отображение полиэдра P в полиэдр $P(X)$. Тогда pg является непрерывным отображением полиэдра P в пространство X, так что определено присоединенное отображение p

$$(pg)^{\#}.$$

Очевидно, что если g является собственным полиэдральным отображением, то

$$(pg)^{\#}=g.$$

Отсюда в силу предложений [37.6] и [38.5] (напомним, что комплекс $S(X)$ полон) имеем:

[38.6] *Любое непрерывное отображение g полиэдра P в полиэдр $P(X)$ гомотопно полиэдральному отображению $(pg)^{\#}$.*

Отсюда легко следует:

[38.7] *Присоединенное отображение p порождает изоморфное отображение p^* натуральной системы присоединенного полиэдра $P(X)$ на натуральную систему пространства X. Таким образом, натуральные системы пространства и присоединенного к нему полиэдра изоморфны.*

Так как любое непрерывное отображение порождает гомоморфное отображение натуральных систем, то нужно только доказать, что для любого $r \geqslant 1$ отображение p_r^*, порожденное отображением p, взаимно однозначно отображает r-мерную гомотопическую группу $\pi^r(P(X))$ полиэдра $P(X)$ на r-мерную гомотопическую группу $\pi^r(X)$ пространства X. То обстоятельство, что отображение p_r^* проективно, немедленно следует из формулы (38.1). Поэтому для доказательства его изоморфности достаточно проверить, что его ядро тривиально, т. е. достаточно доказать, что если для некоторого сфероида (f, S^r) полиэдра $P(X)$ сфероид (pf, S^r) пространства X эквивалентен нулю, то и сам сфероид (f, S^r) эквивалентен нулю. Но так как сфероид (f, S^r) тогда и только тогда эквивалентен нулю, когда отображение f гомотопно постоянному, то достаточно доказать, что из гомотопности отображения pf постоянному отображению следует, что отображение f также гомотопно постоянному. Но это утверждение тривиально следует из [38.6]. Предложение [38.7] доказано.

Если X является полиэдром, то отсюда в силу предложения [35.10] следует:

[38.8] *Присоединенный к полиэдру полиэдр имеет тот же гомотопический тип, что и данный полиэдр.*

Комбинируя этот результат с предложением [38.3], получаем:

Теорема II а. *Два полиэдра тогда и только тогда имеют одинаковый гомотопический тип, когда их натуральные системы изоморфны.*

Заменив [38.3] более общим предложением [38.4], получим:

Теорема II. *Два полиэдра тогда и только тогда имеют одинаковый n-тип* ($1 \leqslant n \leqslant \infty$), *когда их натуральные системы n-изоморфны.*

Так как n-мерные полиэдры имеют одинаковый гомотопический тип, очевидно, тогда и только тогда, когда их $(n+1)$-тип одинаков, то из теоремы II следует:

Теорема II б. *Два n-мерных полиэдра тогда и только тогда имеют одинаковый гомотопический тип, когда их натуральные системы* $(n+1)$-*изоморфны.*

Таким образом, для доказательства того, что два полиэдра конечной размерности имеют одинаковый гомотопический тип, достаточно доказать изоморфность конечных сегментов их натуральных систем.

В связи с теоремой II а, естественно, возникает вопрос: любая ли система может служить натуральной системой некоторого полиэдра? Ответ на этот вопрос оказывается положительным:

Теорема III. *Любая система изоморфна натуральной системе некоторого полиэдра.*

Именно, оказывается, что имеет место следующее предложение:

[38.9]. *Натуральная система полиэдра* $P(\mathfrak{S})$, *присоединенного к системе* $\mathfrak{S}$, *изоморфна системе* $\mathfrak{S}$.

Очевидно, достаточно доказать, что нормальный комплекс N полиэдра $P(\mathfrak{S})$ изоморфен комплексу $K(\mathfrak{S})$ системы $\mathfrak{S}$. Для доказательства этого факта рассмотрим полиэдр P, присоединенный к полиэдру $P(\mathfrak{S})$. Геометрическая реализация $P(N)$ комплекса N является, как мы знаем, деформационным ретрактом полиэдра P.

Полиэдр $P(\mathfrak{S})$ получается из геометрической реализации $R(\mathfrak{S})$ свободного расширения комплекса $K(\mathfrak{S})$ некоторым отождествлением ν. Для любого симплекса A комплекса $K(\mathfrak{S})$ отображение

$$[A] = \nu/[\overline{A, \{r\}}] \cdot \varepsilon(s_0^r, \overline{[A, \{r\}]})$$

(r — размерность симплекса A) является сингулярным симплексом полиэдра $P(\mathfrak{S})$. Очевидно, что отображение $A \to [A]$ симплициально. Его геометрическая реализация q является полиэдральным отображением полиэдра $P(\mathfrak{S})$ в полиэдр P. Образ при отображении q полиэдра $P(\mathfrak{S})$ обозначим через $Q(\mathfrak{S})$. Это — подполиэдр полиэдра P и легко видеть, что отображение q изоморфно отображает полиэдр $P(\mathfrak{S})$ на полиэдр $Q(\mathfrak{S})$, причем обратным отображением служит $p/Q(\mathfrak{S})$. Нетрудно убедиться, что ретрагирующее отображение полиэдра p на полиэдр $P(N)$ изоморфно отображает полиэдр $Q(\mathfrak{S})$ на полиэдр $P(N)$. Отсюда следует, что полиэдры $P(\mathfrak{S})$ и $P(N)$ изоморфны, а значит, изоморфны и комплексы $K(\mathfrak{S})$ и N. Предложение [38.9] доказано.

Из теоремы II а следует, что гомотопический тип асферичного полиэдра определяется фундаментальной группой (теорема Гуревича; см., например, [17]).

Что же касается любых полиэдров, то из теоремы II следует, что фундаментальная группа определяет их 2-тип (теорема Уайтхеда [21]).

Далее из теоремы II следует, что 3-тип полиэдров определяется одномерной и двухмерной гомотопическими группами и первым фактором k_1 (теорема Уайтхеда и Маклейна [25]).

Более обще, $(n+1)$-тип полиэдров, асферичных в размерностях больших единицы и меньших n, определяется одномерной и n-мерной гомотопическими группами и первым нетривиальным фактором k_n (теорема Бургера [2]).

Наконец, из теоремы III следует, что любая серия является гомотопической серией некоторого полиэдра (теорема Уайтхеда [23]).

ДОПОЛНЕНИЕ

Пусть X — линейно связное топологическое пространство, целочисленные группы сингулярных когомологий которого имеют конечное число образующих (этим свойством обладает, например, любой конечный полиэдр). Тогда его группы сингулярных когомологий над группой G вращений окружности являются обобщенными торовидными группами.

Пусть пространство X односвязно. Из известной теоремы Гуревича следует, что его двухмерная гомотопическая группа $\pi^2(X)$ имеет конечное число образующих. Используя индукцию, предположим, что для некоторого $n \geqslant 2$ уже доказана конечность числа образующих любой гомотопической группы пространства X в размерностях, не больших n, и докажем, что $(n+1)$-мерная гомотопическая группа также имеет конечное число образующих.

Мы знаем, что $(n+1)$-мерная группа сингулярных когомологий $H^{n+1}(X, G)$ пространства X над группой G изоморфна $(n+1)$-мерной группе когомологий $H^{n+1}(K_{n+1}, G)$ комплекса K_{n+1} его натуральной системы, которая в свою очередь изоморфна группе $E(k_n, G)$. Следовательно, если группа G есть группа вращений окружности, то группа $E(k_n, G)$ есть обобщенная торовидная группа. Группа $E(k_n, G)$ содержит подгруппу $H^{n+1}(k_n, G)$, и легко видеть, что факторгруппа

$$E(k_n, G) - H^{n+1}(K_n, G)$$

изоморфна группе B всех характеров (т. е. гомоморфизмов в группу G) группы π^{n+1}, переводящих класс цикла k_n в нуль (см. стр. 74). Так как факторгруппа обобщенной торовидной группы есть обобщенная торовидная группа, то отсюда следует, что группа B есть обобщенная торовидная группа.

Факторгруппа $A - B$, где A — группа *всех* характеров группы π^{n+1}, изоморфна, очевидно, группе $H^{n+2}(K_n, G)$. Но, используя предположение индукции, нетрудно убедиться, что все целочисленные группы когомологий комплекса K_n имеют конечное число образующих, а значит, его группы когомологий над группой G являются обобщенными торовидными группами. Таким образом, группа A является расширением обобщенной торовидной группы при помощи обобщенной торовидной группы и, значит, сама является обобщенной торовидной группой.

Таким образом, группа характеров группы π^{n+1} является обобщенной торовидной группой. Следовательно, группа π^{n+1} имеет конечное число образующих. Тем самым общий шаг индукции закончен, что доказывает теорему.

Теорема. *Гомотопические группы любого односвязного пространства, целочисленные группы сингулярных когомологий которого имеют конечное число образующих, также имеют конечное число образующих.*

Если пространство X не односвязно, то теорема сохраняет силу после замены слов «конечное число образующих» словами «конечное число образующих относительно фундаментальной группы». Это можно доказать, перейдя к универсальному накрывающему пространству. Впрочем можно и не переходить к нему, а воспользоваться теорией характеров операторных групп.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С., Комбинаторная топология, Гостехиздат, 1947.
2. Burger E., Über die Homotopietypen gewisser Polyeder, Math. Ann., **123** (1951), 263—284.
3. Eckmann B., Cohomologie Ring einer belibigen Gruppe, Comm. Math. Helv. **18** (1945—1946), 232—282.
4. Eilenberg S., Singular homology theory, Ann. of Math., **45** (1944), 407—447.
5. Eilenberg S., Topological methods in abstract algebra, Cohomology theory of groups, Bull. Amer. Math. Soc., **55** (1949), 3—37.
6. Eilenberg S. and Maclane S., Relations between homology and homotopy groups of spaces, Ann. of Math., **46** (1945), 480—509.
7. Eilenberg S. and Maclane S., Relations between homology and homotopy groups of spaces, 11, Ann. of Math., **51** (1950), 514—533.
8. Eilenberg S. and Zilber J., Semi simplicial complexes and singular homology, Ann. of Math., 51 (1950), 499—513.
9. Fox R., On homotopy type and deformation retracts, Ann. of Math., **49** (1948), 471—510.
10. Freudenthal H., Einfluss der Fundamentalgruppe auf die Bettischen Gruppen, Ann. of Math., **47** (1946), 274—316.
11. Giever J. B., On the equivalence of two singulat homology theories, Ann. of Math., **51** (1950), 178—191.
12. Hopf H., Über die Bettische Gruppe die zu einer belibigen Gruppe gehören, Comm. Math. Helv., **17** (1945), 39—79.
13. Постников М. М., Гомологические инварианты непрерывных отображений, ДАН СССР, **66** (1949), 169—172.
14. Постников М. М., Определение групп гомологий пространства с помощью гомотопических инвариантов, ДАН СССР, **76** (1951), 359—362.
15. Постников М. М., О гомотопическом типе полиэдров, ДАН СССР, **76** (1951), 789—791.
16. Постников М. М., О классификации непрерывных отображений, ДАН СССР, **79** (1951), 573—576.
17. Рохлин В. А., Гомотопические группы, Успехи матем. наук, нов. сер. 1, вып. 5—6 (15—16) (1946).
18. Serre J. P., Homologie singulière des éspaces fibrés, Ann. of Math., **54** (1951), 425—505.
19. Steenrod N. E., Homology with local coefficients, Ann. of Math., **44** (1943), 610—627.
20. Сушкевич А. В., Теория обобщенных групп, Харьков — Киев, ГНТИ, 1937.
21. Whitehead J. H. C., Combinatorial homotopy I, Bull. Amer. Mith. Soc., 55, (1949), 213—245.

22. Whitehead J. H. C., On simply connected 4-dimensional polyhedra, Comm. Math. Helv., **22** (1949), 48—92.
23. Whitehead J. H. C., On the realizability of homotopy groups, Ann of Math., **50** (1949), 261—263.
24. Whitehead J. H. C., A certain exact sequence, Ann. of Math., **52** (1950), 51—110.
25. Whitehead J.H. C. and Maclane S., On the 3-type of a complex, Proc. Nat. Acad. of Sci., **36** (1950), 41—48.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

ВВЕДЕНИЕ

1. Основные понятия теории гомотопий 9
2. Пути и их классы 17
3. Группы и серии 19
4. Локальные семейства 21
5. Гомотопические группы 24
6. Группы сингулярных когомологий 34
7. Влияние гомотопических групп пространства на его группы сингулярных когомологий 39

I. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ

§ 1. Полусимплициальные комплексы

8. Полусимплициальные комплексы 43
9. Симплициальные отображения 51
10. Пример полусимплициального комплекса: комплекс остовов 53
11. Пример полусимплициального комплекса: комплекс $K(M, p)$ 55
12. Пример полусимплициального комплекса: комплекс мультипликативной группы 60

§ 2. Когомологии в полусимплициальных комплексах

13. Коцепи 64
14. Обыкновенные группы когомологий полусимплициальных комплексов . . . 66
15. Когомологии над мультипликативными группами 67
16. Группы когомологий относительно коцикла 70
17. Группы $E(\mathbf{k}, G)$ 74
18. Группы нормальных когомологий 75

§ 3. Системы

19. Расширения полусимплициальных комплексов 78
20. Расширения симплициальных отображений 82
21. Группы когомологий расширения 88
22. Системы 90

§ 4. Присоединенные системы

23. Полусимплициальные комплексы с оснащением 94
24. Специальные отображения и оснащающие коциклы 101
25. Специальные отображения комплексов с оснащением 103

26. Правильные расширения 106
27. Системы, присоединенные к оснащенным комплексам 109

II. НАТУРАЛЬНАЯ СИСТЕМА И ГОМОТОПИЧЕСКИЙ ТИП

§ 1. Сингулярные когомологии

28. Сингулярный комплекс топологического пространства 113
29. Сингулярные призмы 115
30. Симплициальные гомотопии 118
31. Инвариантность групп сингулярных когомологий 121

§ 2. Натуральная система топологического пространства

32. Гомотопические группы и сингулярный комплекс 126
33. Нормальный комплекс и его натуральное оснащение 129
34. Натуральная система линейно связного пространства 131

§ 3. Теоремы реализации

35. Ячеечные полиэдры 133
36. Симплициальные полиэдры 139
37. Полусимплициальные полиэдры 141
38. Присоединенные полиэдры 147

Дополнение 153

Цитированная литература 155

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
9	12 св.	$F(x, \ )$	$F(x, t)$
11	6 сн.	g/x_0	f/x_0
15	14 сн.	$g_0(z) = Z$	$g_0(z) = z$
35	6 св.	$= \mathfrak{a}(b(c))$	$= \mathfrak{a}(b_{(c)})$
37	7 св.	$C^r(x, G)$	$C^r(X, G)$
39	10 св.	$\alpha^{\boldsymbol{F}}$	α^F
41	4—5 сн.	естественно, представленную	естественно представленную
53	8 сн.	A_0	$A_{(0)}$
56	4 св.	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{c}$
58	4 сн.	$A(a_{(b)})$	$A(\mathfrak{a}, (b)$
58	1 сн.	$A(b)$	$A(\mathfrak{a})$
59	2 св.	$\varphi(ab)$	$\varphi(\mathfrak{a}(b))$
59	6 сн.	$\psi^b(c)$	$\psi^{(b)}(\mathfrak{a})$
66	10 св.	$\nabla r^r(A) = \sum_{a=0}^{r+1}(-a)^a c^r(A^{(a)})$	$\nabla c^r(A) = \sum_{a=0}^{r+1}(-1)^a c^r(A^{(a)})$
69	12 св.	N_2	N
75	9 св.	$E(\mathbf{k}, G)$	$E(k, G)$
75	16 св.	k	K
93	20 сн.	$a^1 = 1^1_{\mathfrak{G}}, \ b^1 = 1^1_{\mathfrak{Y}}$	$a^1 = 1_{\mathfrak{G}}, \ b^1 = 1^1_{\mathfrak{H}}$
99	14 св.	$g_a, \ {}^0$	$g_{a,0}$
123	9 сн.	$\delta^* a^1 \nu^* c^r$	$\delta^* \alpha^1 \nu^* c^r$
124	7 сн.	$\mathbf{F}^* \mathbf{a}^1 = (\mathbf{gf})^*$	$\mathbf{F}^* \mathbf{a}^1 (gf)^*$